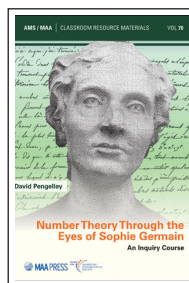


Boekbesprekingen

| Book Reviews

Redactie: Hans Cuypers en Hans Sterk
Secretariaat: Enna van Dijk

Review Editors NAW - MF 5.092
Faculteit Wiskunde & Informatica
Technische Universiteit Eindhoven
Postbus 513
5600 MB Eindhoven
reviews@nieuwarchief.nl
www.win.tue.nl/wgreview



David Pengelley

Number Theory Through the Eyes of Sophie Germain: An Inquiry Course

MAA Press, 2023

xii + 202 p., prijs \$ 79.00

ISBN 9781470472207

De wiskundige Sophie Germain (1776 – 1831) ontwikkelde veel van haar inzicht zelf. Aan de hand van fragmenten van een manuscript en van brieven aan Gauss en aan Legendre (graag had ik de complete teksten gezien) laat dit boek zien hoe Sophie Germain de Laatste Stelling van Fermat probeerde te bewijzen, en welk prachtig deelresultaat zij kon bereiken.

De auteur schrijft “the heart of number theory...always has been....properties and patterns in the natural numbers”. Een paar eigenschappen van gehele getallen kan de lezer proberen te begrijpen zonder veel wiskundige voorkennis aan de hand van een grote hoeveelheid vraagstukken in dit boek: *self-discovery with tasks* en deze auteur past die methode met enthousiasme toe.

De aanpak is interessant, maar ik heb wel een aantal bezwaren. Bewijzen worden niet gegeven. Veel stellingen zijn onsystematisch verstopt in opgaven. Eenvoudige algebraïsche eigenschappen worden in ingewikkelde zinnen beschreven, daar waar een eenvoudige wiskundige formule een betere uitleg zou geven. De populariserende stijl en taalgebruik in dit boek vind ik niet passend voor een wiskundige tekst. Motivatie en definitie worden vaak op onontwarbare manier tegelijkertijd gegeven. De schrijver bespreekt begrippen, bladzijden lang, zonder een goede definitie te geven. Als die uitleg komt, is die soms dubbelzinnig. Een student die zich methode en stijl van dit boek eigen heeft gemaakt, moet veel afleeren om wiskundige te worden.

Een voorbeeld: op pagina 59 begint het boek met het bespreken van breuken (van gehele getallen); nergens staat een definitie van de notatie a/b ; wel de definitie dat $e/f = g/h$ dan en slechts dan als $eh = fg$ op pagina 65, terwijl dit al vermeld en gebruikt wordt op pagina 64. Alle feitjes over breuken behandeld in de bladzijden 59–70 kunnen gegeven worden in een paar regels met een goede definitie en verwijzing naar eenduidigheid van de priemfactorontbinding.

Het gebrek aan algebraïsche notatie geeft veelvuldig verwarring. Een voorbeeld: voor een priemgetal θ wordt de terminologie “een wortel mod θ ” van een polynoom gebruikt, maar nergens wordt duidelijk of dit een nulpunt is van $f(X)$ (in welke ring of lichaam?) en daarna reductie modulo θ of een nulpunt (in welk lichaam?) van $f(X) \bmod \theta \cdot \mathbb{Z}(X)$; zowel de ene als de andere uitleg hiervan geven fouten in de tekst. Op pagina 85, in Task 6.7, zien we hoe de schrijver een geheel getal nulpunt laat zijn van $f(X) \bmod d$ en de verwarring is compleet. Op pagina 115 vinden we: Lagrange’s theorem. *For θ prime, a nonzero polynomial with integer coefficients can have at most as many roots mod θ as its degree mod θ .* Bedoelt de schrijver inderdaad dat wat er staat: “de graad mod θ ”; bedoelt de schrijver het aantal elementen van $\mathbb{Z}/\theta \cdot \mathbb{Z}$ die nulpunten zijn van $f(X) \bmod \theta \cdot \mathbb{Z}(X)$? Dan is de uitspraak fout voor het polynoom $f = \theta \cdot X$.

Het boek heeft een aantal aardige aspecten, maar degene die ermee aan de slag wil, moet wel beseffen dat het abstractieniveau van dit materiaal ligt onder dat van welk eerstejaarscollege dan ook. Het beslaat een klein deel van wat we “elementaire getaltheorie” noemen. Over het verdere terrein van de getaltheorie geeft dit boek geen motivatie, geen inleiding, en geen bruikbare methodes.

Frans Oort



Roel Andringa-Boxum
Schitterende Symmetrieën
De Natuurwetten in een Handomdraai

Epsilon Uitgaven, 2024
206 p., prijs € 27
ISBN 9789050412087

In de theoretische natuurkunde spelen symmetrieën een belangrijke rol. Dit boek zet de belangrijkste ideeën uiteen voor een breed publiek. In hoofdstuk 1 worden symmetrieën besproken binnen de context van de groepentheorie. Het begint met de geschiedenis van de derdegraadsvergelijking. Vervolgens worden de ideeën achter uitbreidingslichamen en Galoisgroepen uitgelegd. Aan de hand van de Rubiks kubus worden begrippen als commutator, conjugatie, permutatie en cykel toegelicht. Het hoofdstuk eindigt met een uitleg waarom niet voor elk polynoom de nulpunten kunnen worden berekend in termen van de coëfficiënten.

Hoofdstuk 2 gaat over symmetrieën van de ruimtetijd. Als eerste worden symmetrieën in de Newtoniaanse natuurkunde besproken: translaties in ruimte en tijd, draaiing in de ruimte en zogenaamde Galilei-boosts. De stelling van Noether over de correspondentie tussen symmetrieën en behoudswetten wordt kort aangestipt. Het feit dat de vergelijkingen van Maxwell niet invariant zijn onder Galilei-boosts vormt een bruggetje naar Einsteins speciale relativiteitstheorie waarin ruimte en tijd verenigd worden. Begrippen als tijddilatatie en lengtecontractie worden uitgelegd aan de hand van een denkbeeldige ruimtereis. De ontwikkeling van de algemene relativiteitstheorie als meetkundige beschrijving van de zwaartekracht vormt het sluitstuk.

Hoofdstuk 3 begint met een discussie over vallende voorwerpen en elektromagnetische velden waaruit volgt dat natuurkundige grootheden veelal geen absolute betekenis hebben. Daarna gaat de discussie verder over het werk van Weyl die, geïnspireerd door Einstein, probeerde om de elektromagnetische kracht op een meetkundige manier te beschrijven. Vervolgens wordt uitgelegd hoe de wisselwerking tussen deeltjes neerkomt op “interne draaiingen” van kwantumvelden. Het hoofdstuk sluit af met de Yang-Mills-theorie, waarmee wordt geprobeerd om deze wisselwerkingen op een structurele wijze in te voeren.

Hoofdstuk 4 is het langst en het meest uitdagend qua niveau. Als eerste wordt spontane symmetriebreking besproken als middel om de Yang-Mills-theorie in overeenstemming te brengen met experimenten. In het bijzonder wordt de rol van het Higgs-veld, waarmee deeltjes massa krijgen, besproken. Verder wordt uitgelegd hoe symmetrie de schare elementaire deeltjes kan ordenen en tevens heeft geleid tot voorspellingen van het bestaan van nieu-

we deeltjes die later zijn waargenomen in experimenten. Daarna gaat de discussie verder met de vraag in welke mate subatomaire processen invariant zijn onder pariteitstransformaties. Vervolgens worden representaties van groepen besproken en de rol die deze spelen in de wisselwerking tussen deeltjes. Als laatste komen supersymmetrie, supergravitatie en donkere materie aan de orde.

De lezer heeft alleen basiskennis wiskunde nodig (zoals haakjes wegwerken). Ideeën worden voornamelijk in woorden uitgelegd en het gebruik van formules is minimaal. (Voor wie dieper in de wiskunde wil duiken is het door Epsilon uitgegeven boek *Symmetrie in de Deeltjesfysica* van Walter van Suijlekom een mogelijk interessante aanvulling.) Desalniettemin is het geen eenvoudig boek; in hoog tempo passeren veel onderwerpen de revue. Het gebruik van humor en woordspelingen houdt de tekst echter luchtig. De auteur, gepromoveerd in de theoretische natuurkunde en thans docent op een middelbare school, is naar mijn idee geslaagd in zijn didactische opzet. Onderwerpen waarover ik eerder in andere boeken heb gelezen (bijvoorbeeld de rol van het Higgs-veld), vielen na lezing van dit boek veel beter op zijn plaats. Voor iedereen die nieuwsgierig is naar de rol van symmetrie in de natuurkunde heb ik maar één boodschap: lees dit boek!

Alef Sterk



Paul Drijvers

Didactiek van de Wiskunde:
Handboek voor leraren in opleiding en in praktijk

Epsilon Uitgaven, 2025
400 p., prijs € 44,00
ISBN 9789050412131

Om goed wiskundeonderwijs te kunnen geven, is het niet afdoende om veel verstand te hebben van alleen de vakinhoud; ook pedagogische en didactische vaardigheden zijn van belang om de stof goed over te kunnen brengen. Een belangrijk deelgebied van de didactiek is de vakdidactiek, waarbij het specifiek gaat over de do's and don'ts bij het onderwijzen van een bepaald vak. Voor het Nederlandse wiskundeonderwijs was het *Handboek wiskundedidactiek* uit 2012 jarenlang een van de standaardwerken op dit gebied. Ter afsluiting van zijn loopbaan als hoogleraar in de wiskundedidactiek heeft Paul Drijvers, redacteur en medeauteur van het vorige handboek, een nieuw boek geschreven over dit onderwerp. Het wordt gepresenteerd bij zijn afscheidsrede op 23 juni.

Wat valt er überhaupt allemaal onder didactiek van de wiskunde? In de inleiding van het nieuwe handboek wordt dit beschreven als “kennis over wat belangrijk is en wat mogelijke obstakels zijn bij het leren van wiskunde” en “hoe deze belangrijke en moeilijke aspecten het best kunnen worden benaderd in het onderwijs”. Dit maakt vakdidactiek een belangrijk onderdeel van de kennisbasis van iedere wiskundedocent, en daarmee een integraal aspect van iedere lerarenopleiding en van menig professionaliseringstraject. Het boek richt zich voornamelijk op de wiskunde van zowel onder- als bovenbouw van havo/vwo, en kan zoals de titel al impliceert gebruikt worden door docenten in opleiding én door docenten die al voor de klas staan.

Waarom een nieuw handboek? Het vorige handboek is zo'n 13

jaar oud, dus een actualisatie was sowieso op z'n plek. In tegenstelling tot een update van het vorige boek, dat geschreven was door een groot aantal verschillende experts, heeft Drijvers gekozen voor een volledig nieuw boek met slechts één auteur. Het idee hierachter was om te komen tot meer samenhang en consistentie. Wel is gebruikgemaakt van de expertise in het land, door veel collega's (waaronder de meeste auteurs van het vorige handboek) kritisch mee te laten lezen en input te laten geven ter verbetering van de verschillende hoofdstukken. Deze aanpak heeft geleid tot een handboek met kortere hoofdstukken en meer voorbeelden uit de schoolpraktijk, om het boek zo nog toegankelijker en bruikbaar te maken.

Het nieuwe handboek positioneert zichzelf naast andere populaire recente literatuur op het gebied van wiskundendidactiek (zoals de boeken van Craig Barton en Peter Liljedahl) door een sterkere focus op het leggen van een vakdidactische basis en een vertaling naar de Nederlandse onderwijspraktijk. Ook worden actuele ontwikkelingen in onze nationale context geschetst.

Een belangrijk thema binnen het boek is de balans tussen procedurele kennis en hogere-ordevaardigheden, zoals probleemoplossen en modelleren; een discussie die al lange tijd speelt binnen het wiskundeonderwijs, maar met de komst van steeds betere kunstmatige intelligentie nog actueler is geworden.

Het handboek is opgebouwd uit drie delen. In het eerste deel, bestaande uit twee hoofdstukken, wordt beschreven wat wiskunde is, waarom het een belangrijk vak is en wat de belangrijkste theoretische en wetenschappelijke perspectieven zijn op het leren ervan. Zowel hier als in de rest van het boek wordt met een open blik en zonder veel oordeel naar de verscheidenheid aan theorieën gekeken. De verschillende invalshoeken versterken elkaar, vullen elkaar aan en geven de lezer de kans om te selecteren wat passend is bij een specifieke doelgroep, situatie of eigen prioriteiten. Regelmatig wordt vooruit verwezen naar hoofdstukken waarin bepaalde theorie zal worden toegepast, en evenzo wordt in de verdere hoofdstukken regelmatig handig terugverwezen naar eerder besproken theoretische uitgangspunten waarop wordt voortgebouwd.

Daarna wordt in zes hoofdstukken een algemene basis gelegd voor de wiskundendidactiek, met een focus op onderwerpen zoals geleide heruitvinding, gecijferdheid, wiskundige denkactiviteiten, probleemoplossen, modelleren, digitale gereedschappen en toetsing. Hoewel overkoepelend van aard, worden de zaken continu praktisch gemaakt door ze uit te leggen aan de hand van concrete voorbeelden. Soms zijn dit voorbeelden uit wetenschappelijke onderzoeken, regelmatig zijn het ook voorbeelden uit veelgebruikte wiskundemethoden van het voortgezet onderwijs of uit recente eindexamens.

Vervolgens wordt in het laatste deel, bestaande uit negen hoofdstukken, ingegaan op de didactiek van allerlei specifieke wiskundige onderwerpen: variabelen, vergelijkingen, formules, functies, de afgeleide, statistische geletterdheid, kansrekening en klassieke en analytische meetkunde. Deze hoofdstukken bieden een mooie aanvulling op de meer algemene zaken uit de eerdere hoofdstukken. Gecombineerd dragen ze vanuit verschillende hoeken bij aan een onderbouwde basis voor kwalitatief goed wiskundeonderwijs.

De opzet van ieder hoofdstuk is grotendeels hetzelfde. Na een korte introductie van het onderwerp dat aan bod komt, volgen telkens twee concrete voorbeelden die een goed beeld geven van de problematiek. Vervolgens worden de belangrijkste ideeën besproken en vaak samengevat in een schema, gevolgd door een verdere inkleuring van de toepassing in de onderwijspraktijk. Ieder hoofdstuk eindigt met een samenvatting, tips voor in de les en een sectie "Om zelf te doen", waarin ideeën worden aangedragen voor activiteiten (bijvoorbeeld in het kader van een lerarenopleiding) die helpen met het in de praktijk brengen van de besproken zaken.

Ook wordt per hoofdstuk voorzien in verwijzingen naar bronnen om nog verder te lezen over het onderwerp. De lezer wordt bij die verdieping geholpen doordat telkens enkele bronnen zijn gemarkeerd met een asterisk en dan zijn vergezeld door een toelichting in een paar regels; dit zijn bronnen die door de auteur specifiek worden aanbevolen vanwege hun toegankelijkheid en/of bijdrage aan het vakgebied. In de epiloog wordt nog expliciet benoemd dat er geen nadruk is gelegd op het verwijzen naar kwantitatieve vergelijkende onderzoeken, aangezien veel vakdidactische literatuur kwalitatief van aard is. Verder geeft Drijvers aan zich graag te focussen op praktijkgerichte onderzoeksliteratuur.

Het boek leest eenvoudig weg; de schrijfstijl is prettig en het taalgebruik no-nonsense. Geen ellenlange theoretische achtergronden, maar korte en duidelijke beschrijvingen van de wiskundige en didactische achtergronden van een wiskundig onderwerp of overkoepelend aspect, continue koppeling naar de lespraktijk op de middelbare school en veel voorbeelden om de ideeën concreet te maken. Vaak terugkerend is de vraag wat er lastig is aan een bepaald onderwerp, gevolgd door oplossingsrichtingen voor hoe daar dan zo goed mogelijk mee om te gaan.

Deze eerste twee delen van het boek – "Fundamenten van wiskundendidactiek" en "Thema's in wiskundendidactiek" – bieden een gedegen basis voor een inleidende cursus over wiskundendidactiek. De klassieke vakdidactische concepten zoals cognitieve schema's en concept images, het door Skemp geïntroduceerde onderscheid tussen instrumenteel en relationeel begrip, de proces-objectdualiteit van Sfard en de niveautheorie van Van Hiele, passeren allemaal de revue. Er is ook aandacht voor nieuwere ideeën zoals belichaamde cognitie, basisvaardigheden en computationeel denken. De hoofdstukken in het derde deel – "Domein-specifieke didactieken" – kunnen vervolgens worden gebruikt in vervolgcursussen of nascholingsactiviteiten waarin op de didactiek van specifieke wiskundige onderwerpen wordt ingegaan, en zijn ook heel bruikbaar als naslagwerk voor iedere docent. Door de beknoptheid is het goed te doen om voor de start van een lessenreeks weer even het betreffende hoofdstuk door te lezen.

Het overgrote deel van de stof uit de Nederlandse wiskunde-curricula komt aan bod, met slechts enkele hiaten, zoals logica, ruimtemeetkunde en verklarende statistiek. Zo bieden de domein-specifieke hoofdstukken, gecombineerd met de overkoepelende theorie en tips uit de hoofdstukken daarvoor, meer dan genoeg aanknopingspunten voor goed doordachte wiskundelessen.

Al met al: een boek dat bij elke wiskundedocent in de kast zou horen te staan.

Mark Timmer



Henk Tijms
Kansrekening in Vogelvlucht

Epsilon Uitgaven, 2024
156 p., prijs € 22
ISBN 9789050412056

Er zijn al veel inleidende boeken over kansrekening geschreven, een onderwerp dat door veel studenten als moeilijk wordt ervaren. Een van de redenen is dat onze intuïtie vaak ontbreekt of misleidend is voor kansproblemen. Een andere reden is dat dit onderwerp vaak nogal saai wordt gepresenteerd, zonder veel aandacht voor intuïtie, inzicht en begrip.

Dit boek is anders. De nadruk ligt op inzicht en begrip. Basisconcepten van de kansrekening worden op natuurlijke wijze gepresenteerd en voorzien van veel inspirerende en leerzame voorbeelden, vaak uit de praktijk van alledag. Het boek laat zien dat we overal om ons heen intrigerende kansproblemen tegenkomen die effectief met kansmodellen kunnen worden aangepakt. Ook worden onderwerpen besproken die je niet vaak tegenkomt in een

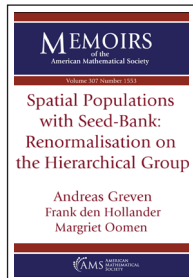
inleidend boek, zoals het basisidee van Markovketens, genererende functies en Monte-Carlosimulatie. Dat laatste is een krachtig instrument voor het experimenteel oplossen van kansproblemen en het aanscherpen van intuïtie en begrip van resultaten uit de kansrekening.

Het boek begint met de basisbeginselen van de kansrekening, zoals voorwaardelijke kansen, stochastische variabelen, verwachtingswaarde en standaardafwijking, en ook kansbomen, beslissingsbomen, Markovketens en genererende functies. Daarna is er aandacht voor discrete en continue verdelingen en de belangrijke centrale limietstelling. De concepten en resultaten worden geïllustreerd aan de hand van veel praktische voorbeelden, uiteenlopend van dwalingen in de rechtspraak, investeringsstrategieën, dating, strafschopperseries, en bedrog in loterijen. Het boek bevat veel oefenopgaven, want het rekenen met kansen kan alleen in de vingers worden gekregen door veel te oefenen! Tot slot wordt Monte-Carlosimulatie besproken als gereedschap voor het numeriek oplossen van kansproblemen, en met de Python code in de appendix van het boek kan de lezer zelf aan de slag.

De auteur, Henk Tijms, wil met dit boek de schoonheid en toepasbaarheid van de kansrekening laten zien. Daar is hij, naar mijn mening, op overtuigende wijze in geslaagd!

Ivo Adan

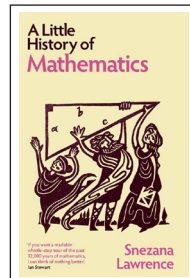
Recent verschenen publicaties. Als u een van deze boeken wilt bespreken of als u suggesties heeft voor andere boeken voor deze rubriek, laat dit dan per e-mail weten aan reviews@nieuwarchief.nl.



Andreas Greven, Frank den Hollander, Margriet Oomen

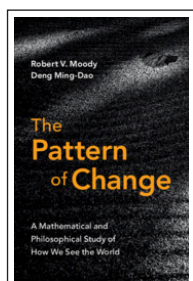
Spatial Populations with Seed-Bank: Renormalisation on the Hierarchical Group

AMS, 2025
207 p., prijs \$ 85.00
ISBN 9781470473150
<https://bookstore.ams.org/view?ProductCode=MEMO/307/1553>



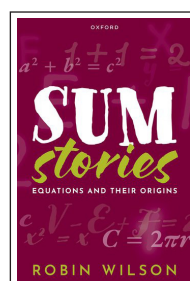
Snezana Lawrence
A Little History of Mathematics

Yale University Press, 2025
ISBN 9780300273731
<https://yalebooks.co.uk/book/9780300273731/a-little-history-of-mathematics/>



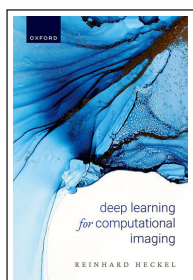
Robert V. Moody, Ming-Dao Deng
The Pattern of Change
A Mathematical and Philosophical Study of How We See the World

Cambridge University Press, 2025
ISBN 9781009546508
<https://www.cambridge.org/core/books/pattern-of-change/02408EBB643D592FD6022C36C8387ABF>



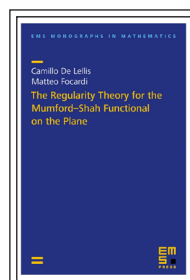
Robin Wilson
Sum Stories
Equations and Their Origins

Oxford University Press, 2025
ISBN 9780199607907
<https://global.oup.com/academic/product/sum-stories-9780199607907?cc=nl&lang=en&>



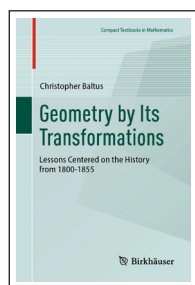
Reinhard Heckel
Deep Learning for Computational Imaging

Oxford University Press, 2025
ISBN 9780198947189
<https://global.oup.com/academic/product/deep-learning-for-computational-imaging-9780198947172>

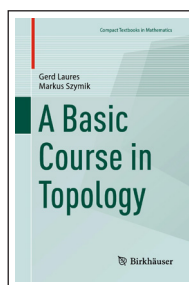


Camillo De Lellis, Matteo Focardi
The Regularity Theory for the Mumford-Shah Functional on the Plane

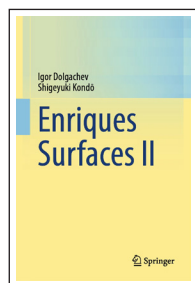
EMS Press, 2025
ISBN 9783985470891
<https://ems.press/books/emm/304>



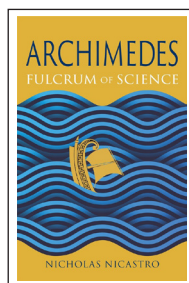
Christopher Baltus
Geometry by Its Transformations
 Lessons Centered on the History from
 1800 – 1855
 Springer, 2025
 ISBN 9783031722806
<https://link.springer.com/book/10.1007/978-3-031-72281-3>



Gerd Laures, Markus Szymik
A Basic Course in Topology
 Springer, 2025
 ISBN 9783662706015
<https://link.springer.com/book/10.1007/978-3-662-70602-2>



Igor Dolgachev, Shigeyuki Kondō
Enriques Surfaces II
 Springer, 2025
 ISBN 9789819615124
<https://link.springer.com/book/10.1007/978-981-96-1513-1>



Nicholas Nicastro
Archimedes: Fulcrum of Science
 Reaktion Books, 2024
 ISBN 9781789149227
<https://reaktionbooks.co.uk/work/archimedes>

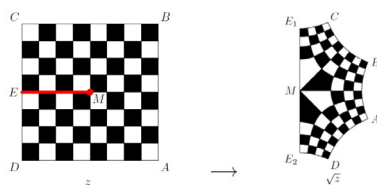
Nazomercursus (voorheen de vakantiecursus) voor Leraren Wiskunde 2025



De nazomercursus voor leraren wiskunde 2025 zal plaatsvinden in Antwerpen (Universiteit Antwerpen, Campus Groenenborger): vrijdag 19 en zaterdag 20 september. En in Amsterdam (CWI): vrijdag 26 en zaterdag 27 september.

De organisatie is in handen van PWN (Platform Wiskunde Nederland) en PWV (Platform Wiskunde Vlaanderen).

Het thema is: **Complexe Getallen.**



Hoofddocent: K.P. Hart (TU Delft) Gastdocenten: Jonathan Mannaert (Vrije Universiteit Brussel), Paul Levrie (Universiteit Antwerpen), Daan Huybrechts (KU Leuven)

U kunt zich opgeven middels het aanmeldformulier op <https://www.platformwiskunde.nl/nazomercursus>. Hier kunt u ook de brochure downloaden met alle inhoudelijke en praktische informatie.

Het cursusgeld bedraagt €99, waarbij de syllabus en de maaltijden zijn inbegrepen. Voor studenten en leerlingen bedraagt het cursusgeld €39, terwijl voor gepensioneerden een gereduceerd tarief geldt van €55.

Vanzelfsprekend zijn uw collega's, alsmede leerlingen uit de bovenbouw met interesse in wiskunde, ook van harte welkom!

Sponsors:

