Kees Joost Batenburg
Visielab
Universiteit Antwerpen
Universiteitsplein 1
B-2610 Wilrijk, België
joost.batenburg@ua.ac.be

Onderzoek Discrete Tomografie

Van nanokristal tot topdiamant

Tomografie is een methode om een driedimensionaal beeld te krijgen van de binnenkant van een object. Met deze techniek zijn reeds vele successen behaald, in het bijzonder met de CT-scan in de geneeskunde. De discrete tomografie is een nieuw en veelbelovend vakgebied binnen de tomografie dat zich richt op de reconstructie van beelden uit slechts zeer weinig projecties. Joost Batenburg, die in september 2006 op dit onderwerp promoveerde, legt uit hoe met weinig projecties toch nauwkeurige beelden kunnen worden gemaakt.

Tomografie is een techniek voor het maken van een driedimensionaal beeld van een object op een niet-invasieve manier. Door een aantal tweedimensionale projectiebeelden op te nemen en de gegevens uit deze beelden te combineren kan het object worden gereconstrueerd. De *discrete* tomografie richt zich op het reconstrueren van objecten waarvan van tevoren bekend is dat ze uit slechts een paar materialen bestaan. Door deze voorkennis te gebruiken in het reconstructie-algoritme kan het aantal benodigde projectiebeelden vaak aanzienlijk worden gereduceerd. In dit artikel gaan we, na een inleiding over tomografie, in op de de basisideeën van discrete tomografie en de toepassingen daarvan.

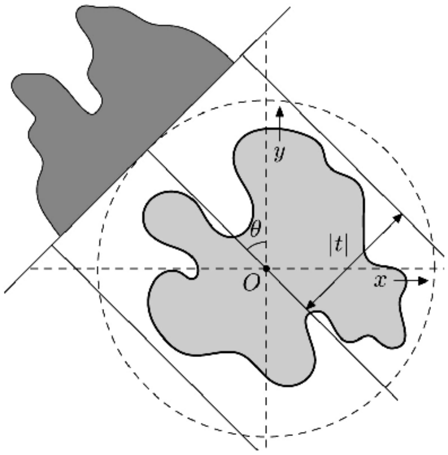
Tomografie

In 1979 ontvingen Cormack en Hounsfield de Nobelprijs voor de geneeskunde, voor hun baanbrekende werk in Computer Tomografie (CT), een scantechniek die het mogelijk maakt de inwendige organen van een patiënt driedimensionaal in beeld te brengen. Al sinds het begin van de twintigste eeuw konden artsen röntgenfoto's maken om diagnoses te stellen. Het gebruik van individuele röntgenbeelden heeft echter een belangrijk nadeel: de röntgenfoto's zijn *projectiebeelden*, waarin de driedimensionale structuren niet zichtbaar zijn. Als twee organen elkaar overlappen op een röntgenfoto is het niet duidelijk wel orgaan voor ligt en welk orgaan achter. CT ondervangt dit probleem door een groot aantal projectiebeelden op te nemen vanuit verschillende hoeken. Door de gegevens uit al deze beelden te combineren kan met behulp van computerberekeningen een driedimensionaal beeld van de patiënt worden gereconstrueerd [10–11]. In figuur 1 zien we een schematische weergave van het projectie-proces in de scanner. We beperken ons hier tot eendimensionale projectiebeelden van een tweedimensionaal object. Met een parallelle bundel röntgenstraling schijnt men door het object. Hierbij wordt een deel van de straling geabsorbeerd. De mate waarin de straling geabsorbeerd wordt is afhankelijk van de materialen (of weefsels) in het object en van de lengte van de doorsnede van de bundel met het object. Zowel de stralingsbron als de detector waarop de beelden worden opgenomen draait rond het object, zodat beelden uit verschillende hoeken kunnen worden opgenomen. Bij CT wordt het onbekende object doorgaans gerepresenteerd als een functie $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ met begrensde support. De afbeelding

$$P_f(\theta, t) = \int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} f(x,y)\delta(x\cos\theta + y\sin\theta - t)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y$$

noemen we de *Radontransformatie* van f, waarbij $\delta(\cdot)$ de deltafunctie van Dirac voorstelt. De waarde $P_f(\theta, t)$ komt overeen met de gemeten projectie voor de hoek θ op afstand $|t|$ van de oorsprong.

Naast de medische radiologie komen we tomografie ook tegen in diverse andere vakgebieden. Zo worden in de houtindustrie gekapte bomen gescand om te bepalen hoe ze



Figuur 1 Schematische weergave van een CT-scanner. Een projectiebeeld wordt gemaakt door met een stralingsbundel door het object heen te schijnen en te meten hoeveel van de straling door het object is geabsorbeerd.

het best tot planken gezaagd kunnen worden en wordt tomografie op ruwe diamanten uitgevoerd om te berekenen hoe deze het best geslepen kunnen worden. Naast het gebruik van röntgenstraling worden ook andere technieken gebruikt om de projectiebeelden op te nemen. In de microbiologie en de materiaalwetenschappen gebruikt men bijvoorbeeld een elektronenmicroscoop om projectiebeelden te maken van een preparaat dat telkens een klein beetje gedraaid wordt.

Het probleem om het onbekende object te reconstrueren uit een aantal metingen van de projecties is een *invers probleem*. Het is gemakkelijk om, gegeven een object, de projecties van dit object te berekenen. De berekening van het object uit de projecties is doorgaans echter een stuk moeilijker.

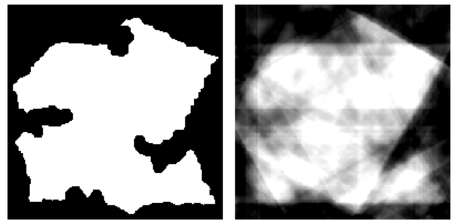
De reconstructie die door de computer wordt berekend, heeft slechts een beperkte nauwkeurigheid en wordt meestal gerepresenteerd op een (pixel)rooster. Als een tweedimensionaal beeld wordt gereconstrueerd noemen we de elementen van het beeld *pixels*. De waarde van een pixel noemen we de *grijswaarde*. In dit artikel zullen we ons hoofdzakelijk beperken tot tweedimensionale beelden, die gereconstrueerd worden uit eendimensionale projecties. De concepten kunnen worden gegeneraliseerd naar driedimensionale reconstructie uit tweedimensionale projectiebeelden.

In de jaren zeventig zijn diverse reconstructiealgoritmen ontwikkeld voor tomografie. In de praktijk wordt Filtered Backprojection (FBP) zeer veel gebruikt. Dit algoritme is zeer snel en ook de implementatie is relatief eenvoudig. De werking van FBP berust op de *Fourier Slice Theorem*, die stelt dat de (ééndimensionale) Fouriertransformatie van elk van de projecties gelijk is aan de tweedimensionale Fouriertransformatie van het onbekende beeld, langs een lijn door de oorsprong die afhangt van de projectie-hoek θ. Deze correspondentie maakt het mogelijk om bij benadering de Fouriertransformatie van het onbekende beeld te vinden, waarmee dit beeld vervolgens kan worden gereconstrueerd. Een andere veelgebruikte methode is de *Algebraic Reconstruction Technique* (ART). Bij dit algoritme wordt het reconstructieprobleem gemodelleerd als een stelsel lineaire vergelijkingen $Ax = b$. De vector x bevat de waarde van elk van de pixels in het beeld. Elke rij i van de matrix A komt met een lijn door het onbekende object. Een aantal pixels leveren een positieve bijdrage aan de projectie langs die lijn en vormen, samen met de gemeten projectiewaarde b_i een lineaire vergelijking. Omdat de beelden in de praktijk heel groot zijn is het niet mogelijk om de matrix A expliciet te inverteren. Daarom worden iteratieve methodes uit de numerieke wiskunde gebruikt om het stelsel op te lossen. Zowel FBP als ART zijn voorbeelden van algoritmen voor *continue tomografie*. De term *continu* heeft in dit geval betrekking op de pixels in het te reconstrueren beeld, die alle waarden mogen aannemen uit een continue verzameling, meestal $\mathbb{R}$ of $[0, \infty)$.

Discrete tomografie

Een belangrijk nadeel van algoritmen voor continue tomografie is dat ze doorgaans veel projectiebeelden nodig hebben om tot een goede reconstructie te komen. Voor ART is dit eenvoudig in te zien: stel dat we een tweedimensionaal beeld willen reconstrueren dat bestaat uit $n \times n$ pixels en dat elke 1-dimensionale projectie van dit beeld uit n meetwaarden bestaat. Om tot een stelsel vergelijkingen te komen dat volledig is bepaald hebben we dan dus tenminste n projectiebeelden nodig. figuur 2 toont een testbeeld (ook wel *fantoom* genoemd) en de ART reconstructie van dit beeld uit zes projecties. In de praktijk worden doorgaans honderden projectiebeelden gebruikt om de reconstructie te berekenen.

De *discrete tomografie* richt zich op het reconstrueren van beelden uit een klein aantal projecties, meestal minder dan 10. Door extra voorkennis te gebruiken over het object dat wordt gereconstrueerd kan worden volstaan met een veel kleiner aantal projecties dan bij continue tomografie [7–8]. De voorkennis die wordt gebruikt heeft betrekking op de verzameling grijswaarden in de reconstructie. Bij discrete tomografie veronderstellen we dat de reconstructie uit slechts enkele grijswaarden



Figuur 2 a) Testbeeld waarvan door simulatie de projecties werden berekend voor zes regelmatig verdeelde hoeken tussen 0 en 180 graden. b) ART reconstructie uit zes projecties

1	1	1	0	0	3
0	1	1	1	1	4
0	1	0	0	0	1
0	1	1	0	0	2
0	0	1	0	1	2
1	4	4	1	2	

?	?	?	?	?	3
?	?	?	?	?	4
?	?	?	?	?	1
?	?	?	?	?	2
?	?	?	?	?	2
1	4	4	1	2	

Figuur 3 a) Binair beeld met de bijbehorende horizontale en verticale projecties. b) Het bijbehorende reconstructieprobleem

bestaat en dat we deze waarden vooraf kennen.

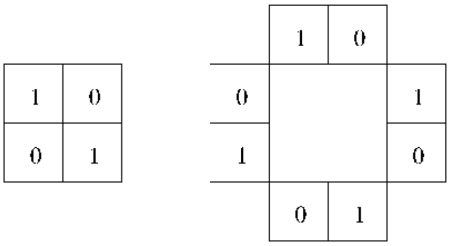
In het meest eenvoudige geval hebben we te maken met slechts twee grijswaarden, 0 en 1. Je kunt daarbij denken aan een object dat slechts uit één materiaal bestaat (1) en omringd wordt door lucht (0). Het object mag ook gaten bevatten, die wederom gevuld zijn met lucht. Vaak neemt men aan dat het te reconstrueren beeld is gedefinieerd op een rechthoek van $m \times n$ pixels. In dat geval kunnen we elk beeld representeren als een 0-1 matrix. Al in de jaren vijftig bestudeerde de combinatoricus Herbert Ryser het probleem om een 0-1 matrix te construeren met voorgeschreven rij- en kolomsommen [12], zie figuur 3. Toen was dat nog niet in de context van tomografie, maar vanwege de interessante combinatorische structuur van het probleem. Ryser ontwikkelde een efficiënt algoritme om een oplossing te vinden, maar toonde tevens aan dat de oplossing doorgaans verre van uniek is.

Een voorbeeld hiervan is te zien in figuur 4. Beide beelden hebben dezelfde horizontale en verticale projecties, maar toch verschillen de beelden aanzienlijk. Dit hangt samen met het bestaan van zogenaamde *switching components*. Een switching component

0	1	1	0	1	3
0	1	1	1	1	4
0	0	1	0	0	1
0	1	1	0	0	2
1	1	0	0	0	2
1	4	4	1	2	

1	1	1	0	0	3
0	1	1	1	1	4
0	1	0	0	0	1
0	1	1	0	0	2
0	0	1	0	1	2
1	4	4	1	2	

Figuur 4 a) Twee binaire beelden met dezelfde horizontale en verticale projecties kunnen aanzienlijk van elkaar verschillen.



Figuur 5 Switching component voor twee projectierichtingen: horizontaal en verticaal. b) Switching component voor vier projectierichtingen: horizontaal, verticaal, diagonaal en anti-diagonaal

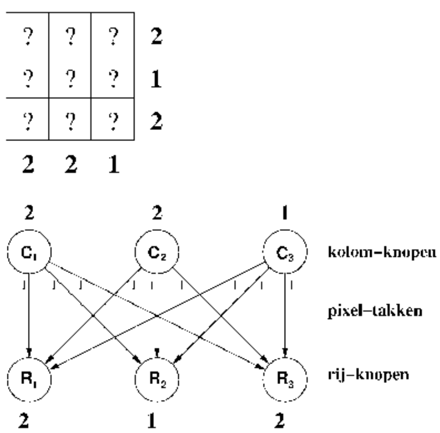
is een binair beeld waarvoor geldt dat als we de 0-en en 1-en verwisselen het nieuwe beeld dezelfde projecties heeft als het oorspronkelijke beeld. Figuur 5a toont een voorbeeld van een switching component voor het geval dat alleen horizontale en verticale projecties worden gebruikt.

Een voor de hand liggende manier om het aantal oplossingen te verkleinen is het vergroten van het aantal projectierichtingen, dus om bijvoorbeeld ook de diagonale en anti-diagonale projecties te gebruiken. Helaas is het vergroten van het aantal richtingen op zichzelf niet voldoende. In figuur 5b zien we een voorbeeld van een switching component voor het geval dat we vier projecties gebruiken. Voor elke eindige verzameling van projectierichtingen is het mogelijk om een switching component te construeren [6].

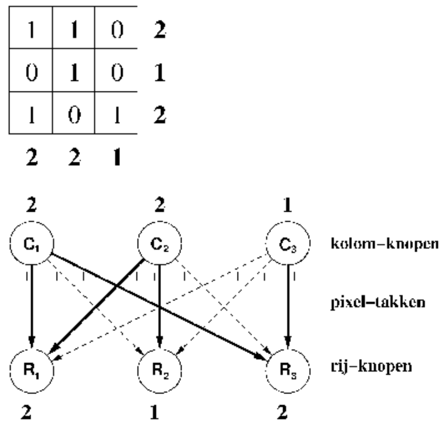
Dat er beelden bestaan die niet uniek bepaald worden door hun projecties hoeft natuurlijk niet te betekenen dat we geen enkel beeld uniek kunnen reconstrueren. Het berekenen van de reconstructie blijkt echter veel moeilijker te zijn als meer dan twee projecties worden gebruikt dan in het geval van slechts twee projecties. Gardner et al. bewezen in [5] dat het reconstructieprobleem *NP-hard* is voor elke verzameling van meer dan twee projectierichtingen. Daar staat tegenover dat het reconstructieprobleem voor een willekeurig tweetal projectierichtingen wél efficiënt kan worden opgelost. Eén van de manieren om dit te doen berust op een overeenkomst tussen het tomografieprobleem en een transportprobleem uit de besliskunde.

In figuur 6a) zien we een klein reconstructieprobleem, met gegeven horizontale en verticale projecties. De graaf in figuur 6b) noemen we de *geassocieerde graaf* van dit probleem. Deze bestaat uit twee lagen van knopen. De knopen in de bovenste laag komen overeen met de kolommen van het te reconstrueren beeld (kolomknopen). De knopen in de onderste laag komen overeen met de rijen (rijknopen). Er is een tak van elke kolomknoop naar elke rijknoop, die overeenkomt met het element in de corresponderende kolom en rij van het beeld. Elke tak heeft een bijbehorende *capaciteit*, die gelijk is aan 1. Als we deze graaf bekijken in de context van het *transportprobleem* uit de besliskunde, dienen de kolomknopen als *aanbodknopen* en de rijknopen als *vraagknopen*. Het aanbod, respectievelijk de vraag bij elke knoop is gelijk aan de corresponderende lijnsom van het tomografieprobleem. Het transportprobleem bestaat nu uit het toekennen van een waarde tussen 0 en 1 aan elk van de takken van de geassocieerde graaf, zodat de som van de functiewaarden in alle takken vanuit een knoop gelijk is aan de vraag (of het aanbod) in die knoop. Bij het *geheeltallige transportprobleem* eisen we bovendien dat aan elke tak exact de waarde 0 of 1 wordt toegekend. Dit geheeltallige transportprobleem kan zeer efficiënt worden opgelost met algoritmen uit de theorie van netwerkstromen [1]. In figuur 7 zien we een oplossing van het transportprobleem. Het is eenvoudig in te zien dat een oplossing van het transportprobleem ook een oplossing geeft van het tomografieprobleem, waarbij elke pixel in de reconstructie dezelfde waarde krijgt als de corresponderende tak in de geassocieerde graaf.

Een belangrijk voordeel van het modelleren als transportprobleem is dat we eenvoudig bepaalde vormen van extra voorkennis kunnen gebruiken, door kosten toe te kennen aan elk van de takken en een oplossing van het transportprobleem met minimale totale kosten te berekenen. Ook voor dit probleem zijn reeds tientallen jaren efficiënte algoritmen bekend. Als we bijvoorbeeld beschikken over een ontwerptekening van het gescande object, en we verwachten dat het object daar redelijk voor op lijkt, kunnen we met het transportmodel de oplossing vinden die in zoveel mogelijk pixels gelijk is aan het ontwerp.



Figuur 6 a) Een 3×3 tomografieprobleem. b) Het bijbehorende transportprobleem



Figuur 7 a) Een 3×3 tomografieprobleem met een oplossing die de gegeven projecties heeft. b) Oplossing van het bijbehorende geheeltallige transportprobleem

Wanneer de projectiedata afkomstig is uit een scanner zal deze vrijwel altijd ruis of andere meetfouten bevatten. Het transportprobleem kan worden uitgebreid tot een algemener netwerkstroom-model, waarmee een reconstructie gevonden kan worden waarvoor de ℓ_1-norm van het verschil tussen de projecties van de reconstructie en de gemeten projecties minimaal is [3].

Als projecties beschikbaar zijn voor meer dan twee richtingen kunnen we het transportprobleem in de geassocieerde graaf gebruiken als bouwsteen voor een iteratief algoritme. In elke iteratie wordt een tweetal richtingen gekozen en wordt een beeld berekend dat voor die twee richtingen de juiste projecties heeft. Als er meerdere beelden zijn met de juiste projecties, kiezen we het beeld dat zoveel mogelijk lijkt op het beeld van de vorige iteratie, dat was berekend met een ander paar projecties.

In het algemeen leidt dit algoritme niet tot een oplossing van het totale reconstructie probleem. Het blijkt echter, dat als we ons richten op bepaalde klassen van beelden, er veel betere resultaten mogelijk zijn dan in het algemene geval [2–3]. We kunnen dan in het algoritme een voorkeur verwerken voor beelden uit de betreffende klasse. Een voorbeeld van een soort beelden die goed kunnen worden gereconstrueerd uit een klein aantal projecties zijn beelden die erg 'glad' zijn, wat wil zeggen dat ze uit relatief grote gebieden van 0-en en 1-en bestaan. Een voorkeur voor deze beelden kan worden verwerkt in het iteratieve algoritme door bij het bepalen van de kosten van een pixel niet alleen rekening te houden met de waarde van dezelfde pixel in de vorige iteratie, maar ook met de waarden van naburige pixels. Een witte pixel in een zwart gebied is immers minder wenselijk dan een witte pixel die omringd wordt door andere wit-

Figuur 8 Twee testbeelden die perfect kunnen worden gereconstrueerd door in een iteratief proces telkens deelproblemen voor twee projectierichtingen op te lossen. Voor het eerste beeld zijn vier projectierichtingen nodig, voor het tweede beeld acht.

te pixels.

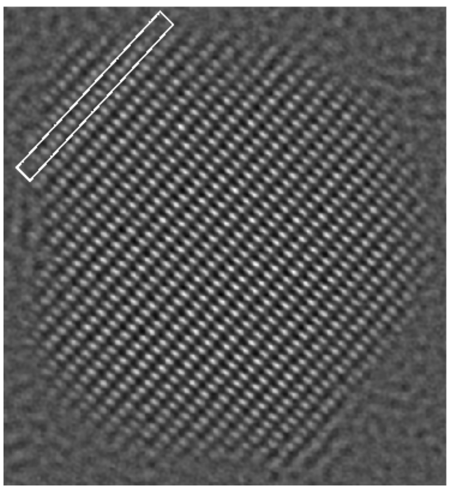
Als we deze voorkeur voor gladde beelden gebruiken in het iteratieve reconstructiealgoritme, kunnen de twee beelden in figuur 8 beide perfect worden gereconstrueerd uit slechts vier, respectievelijk acht projecties, een spectaculaire verbetering t.o.v. continue tomografie (zie ter vergelijking figuur 2). Bovendien is dit algoritme snel genoeg om ook in de praktijk te worden gebruikt. Het reconstrueren van een beeld van 256×256 pixels duurt op een moderne PC minder dan een minuut.

Het aantal projecties dat nodig is voor een goede reconstructie hangt af van de eigenschappen van het beeld. Een belangrijke en grotendeels nog open vraag is hoe deze afhankelijkheid theoretisch kan worden beschreven. Discrete tomografie is een zeer jong vakgebied dat is ontstaan in de jaren '90 en nog zeer veel open onderzoeksvragen kent. Andere vragen die centraal staan zijn bijvoorbeeld: hoe kunnen de projectie*richtingen* het best gekozen worden, wanneer het aantal richtingen vastligt? Is het mogelijk de verzameling grijswaarden in het beeld af te leiden uit de projectiedata, wanneer wel bekend is hoeveel grijswaarden het beeld bevat, maar niet welke grijswaarden dat zijn?

Toepassingen van discrete tomografie

In veel toepassingsgebieden is het wenselijk om het aantal benodigde projectiebeelden zo klein mogelijk te maken. In de medische tomografie bijvoorbeeld, leidt een reductie van het aantal kijkrichtingen tot een kortere meettijd en dus een lagere stralingsbelasting voor de patiënt. In de elektronentomografie komt het vaak voor dat het preparaat beschadigd wordt door de elektronenbundel. Als men dus te lang nodig heeft om de beelden op te nemen is het object dat te zien is in het laatste projectiebeeld niet hetzelfde als het object dat in het eerste beeld te zien is.

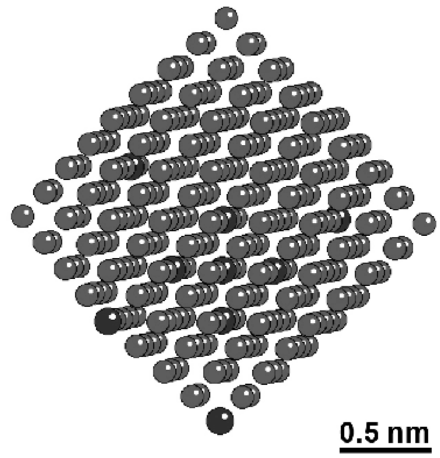
Een toepassing die een belangrijke rol gespeeld heeft in de ontwikkeling van discrete tomografie is het reconstrueren van nanokristallen met atomaire resolutie, uit projectiebeelden die worden gemaakt met behulp van elektronenmicroscopie. De kwaliteit van elektronenmicroscopen is in de afgelopen tien jaar sterk verbeterd. Inmiddels is het mogelijk om projectiebeelden te maken van kristallen in richtingen die evenwijdig lopen met de hoofdrichtingen van het kristalrooster, waarin de geprojecteerde atoomkolommen duidelijk kunnen worden onderscheiden. Met behulp van nieuwe theorieën over het beeldvormingsproces in de elektronenmicroscoop kan uit deze projectiebeelden het aantal atomen in elke geprojecteerde kolom worden geteld [9]. Het aantal projectiebeelden dat kan worden opgenomen is echter zeer beperkt, minder dan tien beelden. Een voorbeeld van zo'n beeld is te zien in figuur 9. Het betreft hier een projectiebeeld van een goudnanokristal.



Figuur 9 High Resolution Transmission Electron Microscopy (HRTEM) beeld van een nanokristal, opgebouwd uit goudatomen. De geprojecteerde atoomkolommen zijn duidelijk te onderscheiden. Dit beeld is opgenomen door C. Kisielowski van het Lawrence Berkeley Lab.

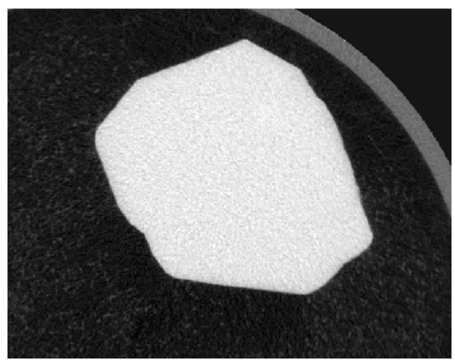
Een variant op het iteratieve reconstructie algoritme dat we in de voorgaande sectie beschreven kan worden gebruikt voor het reconstrueren van nanokristallen. In figuur 10 zien we een model van zo'n kristal, waarin op een aantal posities atomen ontbreken in de kristalstructuur. Uit drie projecties, met als richtingen de vectoren $(0, 0, 1)$, $(1, 1, 0)$ en $(1, -1, 0)$ kan zowel de vorm van het kristal als de positie van de ontbrekende atomen worden gereconstrueerd.

Het maken van driedimensionale beelden met atomaire resolutie is één van de belangrijkste en meest ambitieuze doelen in de materiaalwetenschap van dit moment. Dergelijke beelden kunnen meer inzicht geven in de eigenschappen van diverse materialen. Ook voor grotere objecten kan het gebruik van discrete tomografie veel voordelen hebben. Een voorbeeld hiervan is het scannen van ruwe diamanten door middel van CT. Een diamant die geen onzuiverheden bevat heeft een vaste kristalstructuur. In een CT reconstructie uit zeer veel projecties (zie figuur 11) zien we dat het inwendige van de diamant een nagenoeg constante grijswaarde heeft.

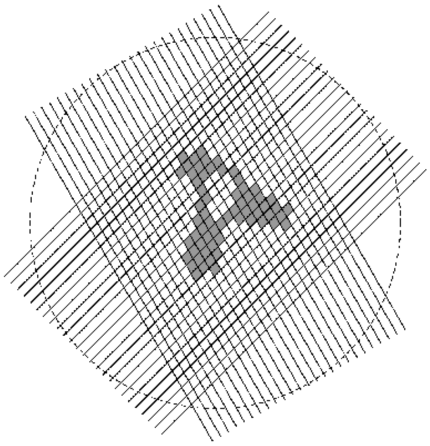


Figuur 10 Model van een nanokristal dat is opgebouwd uit driehonderd atomen. De roosterposities met een donkere kleur representeren 'gaten' in het kristal, de zogenaamde *vacancies*. Dit kristal kan perfect worden gereconstrueerde uit drie projecties door iteratief een aantal problemen voor twee richtingen op te lossen.

Een reconstructie van een diamant kan worden gebruikt om te bepalen hoe de diamant het best geslepen kan worden, om de waarde van het resultaat te maximaliseren. Door de voorkennis te gebruiken dat de diamant een homogeen object is kan het aantal benodigde projectiebeelden met een factor tien worden gereduceerd. Wiskundig gezien verschilt het reconstructieprobleem voor diamanten van het reconstrueren van nanokristallen. Bij een nanokristal is er sprake van een natuurlijke roosterstructuur in het kristal. Elk roosterpunt bevat óf wel, óf geen atoom, waardoor telkens een geheel aantal atomen wordt geteld in het projectiebeeld. Wanneer een diamant wordt gescand, meet de scanner



Figuur 11 CT reconstructie van een plakje ruwe diamant uit 500 projectie beelden. De diamant, de donkere achtergrond en de omringende cilinder hebben elk een specifieke grijswaarde. Deze diamant is gescand door DiamScan, Antwerpen.



Figuur 12 Bij tomografie van solide objecten kan een reconstructie uit twee projecties efficiënt worden gevonden als deze wordt berekend op een rooster waarvan de hoofdassen evenwijdig lopen met de projectierichtingen.

langs een groot aantal lijnen de lengte van de doorsnede van de röntgenbundel met de diamant, een reëel getal. In dat geval is er dus geen natuurlijke roosterstructuur.

De reconstructie, die uit pixels is opgebouwd, wordt doorgaans gerepresenteerd op een rooster met vierkante pixels, evenwijdig aan de horizontale en verticale as. Met deze representatie kan het reconstructieprobleem voor twee richtingen niet worden gemodelleerd als geheeltallig transportprobleem. Als we echter kiezen voor het rooster uit figuur 12 kunnen we het reconstructieprobleem wel weer als transportprobleem beschrijven. Bij het iteratieve algoritme voor meer dan twee richtingen moeten we dus telkens werken op een ander rooster, afhankelijk van het tweetal richtingen dat in een iteratie wordt gebruikt. Ook deze methode leidt tot nauwkeurige reconstructies, waarbij veel minder projecties nodig zijn dan voor continue tomografie [4]. Discrete tomografie kan worden gebruikt voor alle objecten die uit slechts enkele materialen bestaan. Met name in de industrie komen dit soort objecten vaak voor.

Uitdagingen voor de toekomst

Discrete tomografie is een jong vakgebied, waarin in de laatste jaren veel vooruitgang is geboekt. Door gebruik te maken van methoden uit de besliskunde en combinatorische optimalisering kunnen beelden worden gereconstrueerd uit veel minder projecties dan met continue tomografie. Een aantal wiskundige resultaten laat zien dat het niet mogelijk is om met een klein aantal projecties alle mogelijke beelden te reconstrueren. Anderzijds zijn er de bemoedigende experimentele resultaten die laten zien dat voor veel praktisch relevante beelden dit wel degelijk mogelijk is. Het ontrafelen van de eigenschappen van deze beelden die nauwkeurige reconstructies mogelijk maken vormt een grote uitdaging.

Door een aantal toonaangevende onderzoekers in de materiaalwetenschappen wordt discrete tomografie gezien als één van de meest belovende methoden om driedimensionale beelden te maken met atomaire resolutie. Of deze aanpak werkelijk kan worden gebruikt voor een verscheidenheid aan kristalstructuren hangt niet alleen af van de wiskundige eigenschappen van het probleem, maar natuurlijk ook van de nauwkeurigheid waarmee de fysieke metingen kunnen worden verricht. Toch kunnen we ervan uitgaan dat ook op dat gebied de technieken steeds beter zullen worden. Het is een zeldzaamheid dat we in de natuurwetenschappen een dergelijk discreet probleem aantreffen, maar juist het discrete karakter zou in dit geval wel eens het verschil kunnen maken tussen een reconstructie van een kristal als een wazige grijze wolk of als een glashelder beeld.

Referenties

1 R.K. Ahuja, T.L. Magnanti, and J.B. Orlin, *Network flows: theory, algorithms, and applications*, Prentice-Hall, 1993.

2 K. J. Batenburg, 'A Network Flow Algorithm for Reconstructing Binary Images from Discrete X-rays', *J. Math. Imaging and Vision* (2007), reeds online verschenen; DOI: 10.1007/s10851-006-9798-2.

3 K. J. Batenburg, *Network Flow Algorithms for Discrete Tomography*, Ph.D. thesis, Universiteit Leiden, 2006, http://hdl.handle.net/1887/4564.

4 K. J. Batenburg, 'A Network Flow Algorithm for Binary Image Reconstruction from Few Projections', *Lecture Notes Comp. Sci.* **4245** (2006), pp. 86–97.

5 R. J. Gardner, P. Gritzmann and D. Prangenberg, 'On the Computational Complexity of Reconstructing Lattice Sets from their X-rays', *Discr. Math.* **202** (1999), pp. 45–71.

6 L. Hajdu and R. Tijdeman, 'Algebraic Aspects of Discrete Tomography' *J. Reine Angew. Math.* **534** (2001), pp. 119–128.

7 G. T. Herman and A. Kuba, eds., *Discrete Tomography: Foundations, Algorithms and Applications*, Birkhäuser, Boston, 1999.

8 G. T. Herman and A. Kuba, eds., *Advances in Discrete Tomography and its Applications*, Birkhäuser, Boston, 2007.

9 J. R. Jinschek, H. A. Calderon, K. J. Batenburg, V. Radmilovic and C. Kisielowski, 'Discrete Tomography of Ga and InGa Particles from HREM Image Simulation and Exit Wave Reconstruction', *MRS Proceedings* **839** (2004), 4.5.1–4.5.6.

10 A. C. Kak and M. Slaney, *Principles of Computerized Tomographic Imaging*, SIAM, 2001.

11 F. Natterer, *The Mathematics of Computerized Tomography*, SIAM, 2001.

12 H. J. Ryser, 'Combinatorial Properties of Matrices of Zeros and Ones', *Can J. Math.* **9** (1957), pp. 371–377.