

Inhoud | Contents

Artikelen | Features

- Geschiedenis | History**
 9 De geschiedenis van het tijdschrift Pythagoras, deel 1: Oprichting en succes; de periode tot 1966
Martinus van Hoorn, Jan Guichelaar
- Nieuws | News**
 19 Mededelingen van het (K)WG: 1958–2017
Herman te Riele
- Evenement | Event**
 21 Abelprijs 2017 voor Yves Meyer
Walter Daems, Paul Levrie
- Boekbespreking | Book Review**
 28 Verzameld werk van Jacques Tits
Gert Heckman
- Onderzoek | Research**
 31 De dynamica van ijskappen
Werner Lazeroms, Roderik van de Wal
- Column | Column**
 37 De Moivre–Gauss–Laplace: extraordinarily normal
Casper Albers
- Onderzoek | Research**
 39 De kromme gevormd door de toppen van de parabolen door drie gegeven punten
Jan van de Craats, Henk Pijls
- Onderzoek | Research**
 44 An introduction to (algorithmic) randomness
Rutger Kuyper
- Evenement | Event**
 48 ICHME-5: Verspreiding van wiskundige kennis
Jenneke Krüger, Jan Guichelaar, Harm Jan Smid
- Nieuws | News**
 53 De toekomst van de wiskunde in Nederland
Frank van der Duijn Schouten
- Boekbespreking | Book Review**
 56 Rondzwervingen door een toegepast wiskundig heuvellandschap
Robbert Fokkink

Rubrieken | Departments

- 3 Redactioneel
Robbert Fokkink
- 4 Agenda
Nicolaos Starreveld
- 6 Nieuws
Nicolaos Starreveld
- 59 Boekbesprekingen
Hans Cuypers, Hans Sterk
- 66 Problemen
Rob Eggermont

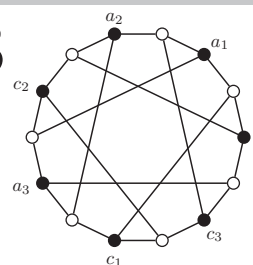
Uitgelicht

21



Walter Daems en Paul Levrie gaan dieper in op het leven en werk van Abelprijswinnaar Yves Meyer.

28



Gert Heckman bespreekt het verzameld werk van Jacques Tits.

Colofon

Het Nieuw Archief voor Wiskunde is een uitgave van het Koninklijk Wiskundig Genootschap en verschijnt vier maal per jaar. Het tijdschrift richt zich op eenieder die zich beroepsmatig met wiskunde bezighoudt, als academisch of industrieel onderzoeker, student, leraar, journalist of beleidsmaker. Het stelt zich ten doel te berichten over ontwikkelingen in de wiskunde in het algemeen en in de Nederlandse wiskunde in het bijzonder.

ISSN 0028-9825

Adres

Nieuw Archief voor Wiskunde
Centrum Wiskunde & Informatica
Postbus 94079, 1090 GB Amsterdam
tel. 020-5924288
redactie@nieuwarchief.nl
www.nieuwarchief.nl

Hoofredactie

Robbert Fokkink (r.j.fokkink@tudelft.nl)

Eindredactie/Bladmanager

Fred Drissen (fred@nieuwarchief.nl)

Redactie

Hans Cuypers (TU/e), Geertje Hek (UvA), Jan Hogendijk (UU), Teun Koetsier (VU), Nicolaos Starreveld (UvA), Hans Sterk (TU/e), Mark Timmer (UT)

Problemenrubriek

Rob Eggermont (problems@nieuwarchief.nl)

Bureauredactie

Claartje Ottens

Illustraties

Ryu Tajiri

Vormgeving

Susanne Laws (omslag, begeleiding binnenwerk)
Kitty Molenaar (ontwerp)

Druk

Veldhuis Media

Advertenties

advertenties@nieuwarchief.nl

Koninklijk Wiskundig Genootschap

www.wiskgenoot.nl

Platform Wiskunde Nederland

www.platformwiskunde.nl

European Mathematical Society

www.euro-math-soc.eu

International Mathematical Union

www.mathunion.org

Koninklijk Wiskundig Genootschap

Het Koninklijk Wiskundig Genootschap (KWG) is een landelijke vereniging van beoefenaars van de wiskunde. In 1778 opgericht onder de zinspreuk: 'Een onvermoeide arbeid komt alles te boven' is het 's werelds oudste nationale wiskundegenootschap. Leden ontvangen het Nieuw Archief voor Wiskunde als onderdeel van hun lidmaatschap.

Bestuur

Erik van den Ban (UU, voorzitter), Joke Blom (CWI, penningmeester), Sonja Cox (UvA, secretaris), Theo van den Bogaart (HU), Marije Elkenbracht (ABN AMRO), André Ran (VU), Herman te Riele (CWI), Mark Veraar (TUD), Jan Wiegerinck (UvA)

Secretariaat

Joke Blom, CWI
Postbus 94079, 1090 GB Amsterdam
wiskgenoot@wiskgenoot.nl
www.wiskgenoot.nl

Ledenadministratie KWG / Abonnementen

Postbus 1064, 7940 KB Meppel
admin@wiskgenoot.nl, tel. 085-0160252

Contributie

De contributie voor gewone leden bedraagt € 90 per jaar. Voor gepensioneerden en werklozen € 45. Voor studenten, aio's en oio's van een Nederlandse universiteit of hbo-opleiding € 35. Studenten en pas afgestudeerden kunnen een jaar lang gratis lid worden. Voor leden van de wiskundige vakverenigingen VvS+OR, NVvW en NVORWO geldt het gereduceerd tarief van € 70. Leden die het Nieuw Archief voor Wiskunde niet willen ontvangen, betalen slechts € 50 contributie. Losse nummers zijn te bestellen voor € 20. Instituten in Nederland en buitenland kunnen zich abonneren op het Nieuw Archief voor Wiskunde voor € 100 (Nederland), € 110 (Europa) of € 112,50 (buiten Europa).

Members of foreign societies

Members of SIAM, the *Société Mathématique de France*, the *Gesellschaft für Angewandte Mathematik und Mechanik*, the *Deutsche Mathematiker-Vereinigung*, and of the *American, Australian, Belgian, Indian, London, Spanish, and South-African Mathematical Societies* living outside of the Netherlands pay € 70 instead of the full membership fee of € 90 a year. Conversely, these foreign societies, as well as the VvS+OR and the NVORWO, have reduced membership fees for KWG members. A postage charge of € 10 is added for members living abroad but in Europe, and a charge of € 12,50 for members living outside of Europe.

Exchange subscriptions

Koninklijk Wiskundig Genootschap Library
Centrum Wiskunde & Informatica
P.O. Box 94079, NL-1090 GB Amsterdam
KWG-exchange@cw.nl

Informatie voor auteurs

Kopij

Het Nieuw Archief voor Wiskunde is een geredigeerd tijdschrift. Kopij dient per e-mail te worden aangeboden aan de hoofdredactie. Uitgebreide informatie en auteursinstructies kunt u vinden op www.nieuwarchief.nl.

Volgende nummers

nummer	maand	verschijnen	deadline kopij
19(2)	juni	2018	verstreken
19(3)	september	2018	01-05-2018
19(4)	december	2018	01-08-2018
20(1)	maart	2019	01-11-2018

Instituutsleden

De publicaties van het Koninklijk Wiskundig Genootschap worden mede mogelijk gemaakt door de bijdragen van de volgende instituten.



Centrum Wiskunde & Informatica



Rijksuniversiteit Groningen



Universiteit van Amsterdam



Universiteit Leiden



Vrije Universiteit



Universiteit Utrecht



Technische Universiteit Eindhoven



Eurandom



Technische Universiteit Delft



Universiteit Twente



Radboud Universiteit Nijmegen



Freudenthal Instituut

Op het omslag

In 1961 verscheen het tijdschrift Pythagoras voor het eerst. In drie afleveringen beschrijven Martinus van Hoorn en Jan Guichelaar de geschiedenis van Pythagoras. Lees het eerste deel op pagina 9.

Wat is wijsheid?

Het hing al een tijdje in de lucht, maar nu heeft het nieuwe kabinet Rutte III de rekentoets dan echt afgeschaft. Rekenwerk kan namelijk net zo goed worden getoetst binnen vakken als aardrijkskunde of economie, een aparte toets is niet nodig. Rekenen blijft belangrijk, schrijft minister Slob, het is een vaardigheid die essentieel is om leerlingen goed te laten functioneren in de maatschappij. Wij wiskundigen onderschrijven dat vanzelfsprekend van harte, maar over welk soort rekenwerk hebben we het eigenlijk? Hebben we het over 54 plus 87 of hebben we het over 54 keer 87 afgerond op een veelvoud van duizend? Dat maakt nogal verschil. Exact rekenen doen we op ons geheugen. Een optelling als 54 plus 87 is cognitief gezien precies hetzelfde als het zingen van het Wilhelmus. Schattend rekenen daarentegen doen we via ons ruimtelijk inzicht en dat zit in de andere hersenhelft. Hoofdrekenen doen we met het hele hoofd.

Ondertussen dalen de rekenvaardigheden. Leerlingen in groep 6 van de basisschool waren twintig jaar geleden wereldtop. Nu zitten ze in het midden. Dat geldt niet alleen voor rekenen maar ook voor lezen. In bijna alle landen stijgt het niveau van rekenen en lezen, of blijft het op zijn minst gelijk. Frankrijk en Nederland zijn de enige twee landen met een dalend niveau. Op de internationale ranglijsten voor cognitieve vaardigheden staat Singapore stijf bovenaan. De Franse minister voor onderwijs luidt de noodklok, twittert over de Singaporese heilige graal, doet een beroep op allerlei deskundigen om de handen uit de mouwen te steken. Fieldsmedaillewinnaar Cédric Villani leidt een commissie die scholieren het plezier in wiskunde terug moet geven. Stanislas Dehaene, de neurowetenschapper die opmerkte dat schattend en exact rekenen in verschillende hersenhelften zitten, overziet de hele onderwijsverbeteroperatie. Terwijl Frankrijk zich grote zorgen maakt, reageert Nederland laconiek. De reden dat de gemiddelde prestatie achteruit gaat, is de sterke afname van het aantal excellente leerlingen, schrijft de onderwijsinspectie droogjes.

Rekenen en lezen zijn natuurlijk niet de enige cognitieve vaardigheden die nodig zijn om goed te functioneren in de maatschappij. Daar komt meer bij kijken. In dezelfde week waarin Nederland de rekentoets afschafte en Franse kranten bol stonden vanwege de beroerde stand van het onderwijs, verscheen in de *Proceedings of the Royal Society* een opmerkelijk artikel over wijsheid. Tweehon-

derd proefpersonen van allerlei rangen en standen hadden Lieve Lita-brieven gelezen over relatieproblemen en arbeidsconflicten. Ze moesten daarna vertellen wat ze zelf in zulke situaties zouden doen en voorspellen hoe de conflicten waren afgelopen. Wat bleek? De laagst opgeleide deelnemers scoorden het hoogst. Hoe minder scholing, hoe meer wijsheid, een pijnlijke correlatie. De onderwijsinspectie lijkt dat in de gaten te hebben. De voornaamste kennislacune zit volgens de inspectie niet in rekenen of lezen, maar in de gebrekkige burgerschapsvaardigheid. Dit schijnt een buitengewoon belangrijke 21ste-eeuwse vaardigheid te zijn, hoewel niemand precies weet wat het inhoudt. Concreet lesmateriaal voor burgerschapsonderwijs ontbreekt vooralsnog. Waar de overheid eerder het voortouw nam en een rekentoets opstelde, moeten de scholen het nu zelf uitzoeken. Dat lijkt me geen goede gang van zaken. Waarom ontwikkelt het ministerie van Onderwijs niet een wijsheidstoets? Als die internationaal weerklank vindt, staan Nederlandse scholieren gelijk op kop.

Het is natuurlijk niet zo dat er in Nederland helemaal niets gebeurt. Er was al een Deltaplan en nu is er een Wiskunderaad die zich buigt over de toekomst van universitair onderwijs en onderzoek. In dit nummer van NAW schetst Frank van der Duijn Schouten de stand van zaken. Jan Guichelaar en Martinus van Hoorn beschrijven de geschiedenis van het tijdschrift *Pythagoras*, dat ooit werd opgericht om scholieren meer plezier te geven in wiskunde. Een blik op de inhoud van de oude jaargangen leert dat *Pythagoras* tegenwoordig wel wat hogere eisen stelt aan de lezer. Zo slecht is het ook weer niet gesteld met excellente scholieren. Ook in Frankrijk is het niet allemaal kommer en kwel. Yves Meyer kreeg vorig jaar de Abelprijs. Walter Daems en Paul Levrie geven een overzicht van zijn wiskundige resultaten en beschrijven hoe Meyer zich laat leiden door interesse in andermans werk. Rutger Kuyper kreeg vorig jaar de Stieltjesprijs en beschrijft zijn eigen werk dat complexiteit, getaltheorie en kansrekening verbindt. De onderwijsinspectie heeft gelijk. Zolang jonge onderzoekers dit soort werk produceren, is er weinig loos met ons onderwijssysteem. ☼

Agenda

| Upcoming Events

maart 2018

7–9 maart 2018

☐ YES IX, Scalable Statistics: On Accuracy and Computational Complexity

Negende editie van de Young European Statisticians (YES) workshop. Georganiseerd door Rui Castro, Paulo Serra (TU/e) en Botond Szabó (UL).

plaats Eurandom, Eindhoven

info eurandom.nl

8, 15, 22, 29 maart 2018

☐ Wiskunde Actief

Masterclasses bij technische wiskunde op de TU Delft, met onderwerp: 'Glijbanen: De topsnelheid van zwaartekracht'. Voor scholieren 5/6 vwo met profiel N&G of N&T.

plaats Delft, Tu Delft

info tudelft.nl

15 maart 2018

☐ W4 Kangoeroe

WereldWijdeWiskundeWedstrijd voor basis- en middelbare scholieren.

plaats eigen scholen

info w4kangoeroe.nl

16 maart 2018

☐ 2e ronde Nederlandse Wiskunde Olympiade

De tweede ronde van de Nederlandse Wiskunde Olympiade.

plaats Nederlandse universiteiten

info wiskundeolympiade.nl

27–28 maart 2018

☐ VVSOR Bijeenkomst

Een evenement georganiseerd door de Vereniging voor Statistiek en Operations Research (VVSOR) met als onderwerp 'Statistiek, operations research en klimaatverandering'.

plaats Utrecht

info vvsor.nl/am2018

28 maart 2018

☐ Grote Rekendag

Dag voor alle basisscholen in Nederland en Vlaanderen (groep 1 t/m 8) die helemaal in het teken staat van rekenen. Het thema van deze 16de editie is 'De school als pakhuis'.

plaats basisscholen Nederland en Vlaanderen

info groterekendag.nl

april 2018

3–4 april 2018

☐ Nederlands Mathematisch Congres 2018

Groots opgezet jaarlijks congres, dit jaar voor het eerst in Veldhoven. Er wordt een aantrekkelijk programma geboden voor heel wiskundig Nederland.

plaats Congrescentrum Koningshof, Veldhoven

info nmc.wiskgenoot.nl

3–5 april 2018

☐ Diamant Symposium

Tijdens het NMC zal ook een Diamant-minisymposium (4 april) plaatsvinden. De sprekers zijn A. Boralevi (Torino) en F. Vallentin (Keulen).

plaats Congrescentrum Koningshof, Veldhoven

info websites.math.leidenuniv.nl/diamant

5 april 2018

☐ Workshop on Applications of Semidefinite Optimization

De zesde editie van de SDP-workshop met als onderwerp toepassingen van semidefinite optimalisatie.

plaats CWI, Amsterdam

info cwi.nl

6 april 2018

☐ Leve de wiskunde

Een evenement georganiseerd door de UvA in samenwerking met de VU en CWI, bedoeld voor docenten wiskunde en andere geïnteresseerden.

plaats Science Park, Amsterdam

info itsacademy.nl/leve-de-wiskunde

6 april 2018

☐ Mark Kaç Seminar

Maandelijks seminar voor onderzoekers in kansrekening en statistische mechanica, met sprekers Gioia Carinci (TUD), Margriet Oomen (UL) en Clara Stegehuis (TU/e).

plaats Utrecht

info www.win.tue.nl/markkac

9–15 april 2018

☐ European Girls' Mathematical Olympiad

Europese wiskundewedstrijd speciaal voor meisjes.

plaats Florence, Italië

info egmo.org

Suggesties voor deze agenda zijn welkom.

Redacteur: Nicolaos Starreveld

agenda@nieuwarchief.nl

12–13 april 2018

4th STAR Workshop on Random Graphs

Workshop over random graphs georganiseerd door Ross Kang (RU).

plaats Radboud University Nijmegen

info eurandom.nl

16–18 april 2018

Mathematical Techniques in Optical Networks: Introduction and Scope

Een workshop georganiseerd door Murtuza Ali Abidini (TuE), Nicola Calabretta (TuE) en Jacques Resing (TuE).

plaats Eurandom, Eindhoven

info eurandom.nl

16–20 april 2018

Uncertainty Quantification in Complex, Non-parametric Statistical Models

Een workshop mede georganiseerd door Botond Szabó (UL) en Aad van der Vaart (UL).

plaats Lorentz Center@Oort, Leiden

info lorentzcenter.nl

24–26 april 2018

Survival Analysis for Junior Researchers (SAJR-2018)

Een conferentie gericht op jonge statistici die onderzoek doen op het gebied van survival analysis. Met een tutorial door Hein Putter (LUMC).

plaats Leiden

info universiteitleiden.nl/en/events

mei 2018

4 mei 2018

Mark Kaç Seminar

Maandelijks seminar voor onderzoekers in kansrekening en statistische mechanica, met sprekers Anton Thalmaier (Luxemburg) en Jan Maas (IST Austria).

plaats Utrecht

info www.win.tue.nl/markkac

7 mei 2018

Queueing Colloquium

Een workshop georganiseerd door Peter van de Ven (CWI) en Bert Zwart (CWI) voor onderzoekers in wachtrijtheorie.

plaats CWI, Amsterdam

info cwi.nl

14–18 mei 2018

Fixed-Parameter Computational Geometry

Een workshop mede georganiseerd door Mark de Berg (TU/e) and Hans Bodlaender (UU).

plaats Lorentz Center@Oort, Leiden

info lorentzcenter.nl

22–25 mei 2018

The Computational Mathematics Aspects of Porous Media, and Fluid Flow

Een workshop mede georganiseerd door Cornelis Oosterlee (TUD) and Fred Vermolen (TUD).

plaats Lorentz Center@Oort, Leiden

info lorentzcenter.nl

28 mei – 1 juni 2018

Franco–Dutch YEP Workshop

Workshop met als onderwerp mathematisch statistische mechanica en random grafen, georganiseerd door Remco van der Hofstad (TU/e) en Arnaud Le Ny (Université Paris-Est, gast TU/e).

plaats Eurandom, Eindhoven

info eurandom.nl

28 mei 2018

LIMO 2018

De Landelijke Interuniversitaire Mathematische Olympiade (LIMO) is een jaarlijkse wiskundewedstrijd voor Nederlandse en Vlaamse studenten-teams, bestaande uit maximaal vier personen.

plaats Groningen

info limo.fmf.nl

juni 2018

8 juni 2018

Mark Kaç Seminar

Maandelijks seminar voor onderzoekers in kansrekening en statistische mechanica, met sprekers Anton Thalmaier (Luxemburg) en Pietro Caputo (Rome).

plaats Utrecht

info www.win.tue.nl/markkac

18–22 juni 2018

Effective Methods for Diophantine Problems

Een workshop mede georganiseerd door Bas Edixhoven (UL) and Robin de Jong (UL).

plaats Lorentz Center@Oort, Leiden

info lorentzcenter.nl

juli 2018

3–14 juli 2018

International Mathematical Olympiad

Internationale finale van de wiskundeolympiade, dit jaar in Roemenië.

plaats Roemenië

info imo2018.org

22–28 juli 2018

International Mathematics Competition for University Students

Internationale wiskundewedstrijd voor studenten.

plaats Bulgarije

info imc-math.org.uk

30 juli – 3 augustus 2018

Logical Aspects of Quantum Information

Een workshop georganiseerd door Samson Abramsky (Oxford), Ivano Ciardielli (München), Phokion Kolaitis (Santa Cruz) en Martin Otto (Darmstadt).

plaats Lorentz Center@Oort, Leiden

info lorentzcenter.nl

augustus 2018

22–23 augustus 2018

Workshop on Algorithmic and Combinatorial Aspects of Partition Functions

Een workshop georganiseerd door Viresh Patel (UvA) en Guus Regts (UvA).

plaats Science Park, Amsterdam

info sites.google.com/site/guusregts

27–28 augustus 2018

7th IFAC Workshop on Distributed Estimation and Control in Networked Systems (NecSys 18)

Een workshop met als onderwerp complexe dynamische systemen en netwerken.

plaats Groningen, University of Groningen

info fwno6.housing.rug.nl/necsys2018

Nieuws

| News

Deze rubriek is een kroniek van wiskundige activiteiten in Nederland. Toekomstige activiteiten worden aangekondigd en van voorbije activiteiten wordt verslag gedaan. Wilt u uw aankondiging of verslag in deze rubriek geplaatst zien? Stuur ons dan uw bijdrage, zo mogelijk met illustratie. De redactie behoudt zich het recht voor berichten te weigeren of in te korten.

Redacteur: Nicolaos Starreveld
 nieuws@nieuwarchief.nl

Stéphanie van der Pas wint C. J. Kok Juryprijs voor beste proefschrift

De jury van de C. J. Kok Juryprijs heeft het proefschrift van Stéphanie van der Pas van de Universiteit Leiden geselecteerd als beste proefschrift van 2017. Rector magnificus Carel Stolker overhandigde haar de onderscheiding tijdens de facultaire nieuwjaarsreceptie op 9 januari. Van der Pas' proefschrift, genaamd *Topics in Mathematical and Applied Statistics*, en begeleid door Aad van der Vaart, vormde reeds de basis voor zeven gepubliceerde of geaccepteerde artikelen, waar twee gemiddeld is in de wiskunde. Volgens de voordracht kon deze overdaad tot stand komen door de buitengewone excellentie en doelgerichtheid van de promovenda.

Van der Pas' proefschrift gaat onder meer over het schatten van parameters onder *sparsity constraints*. Dit gaat om modellen waarbij zeer veel actoren mogelijk bijdragen aan het te modelleren effect, maar slechts weinig actoren daadwerkelijk bijdragen aan dat effect. Dergelijke modellen worden gebruikt in onderzoeksgebieden als genetica en astronomie. Van der Pas bewees dat de zogenoemde *horseshoe*-methode optimaal is om ruis en andere toevalsfluctuaties uit te filteren. Daarnaast behandelt zij in haar proefschrift nog drie heel andere, sterk uiteenlopende onderwerpen.

universiteitleiden.nl



Open meetkundig probleem van L. F. Tóth opgelost

In het decembernummer van *Geometric and Functional Analysis* verscheen een artikel met de titel 'Proof of László Fejes Tóth's conjecture'. L. F. Tóth was een Hongaars wiskundige, die gespecialiseerd was in de meetkunde. Hij heeft onder andere bewezen dat een honingraatpatroon de meest efficiënte manier is om zo veel mogelijk gelijke cirkels in het euclidische vlak te verpakken. Dit is de tweedimensionale variant van het vermoeden van Kepler. In 1973 formuleerde hij het volgende probleem: beschouw een bol met straal gelijk aan één. We definiëren een zone met breedte ω als de verzameling punten van de bol die op een sferische afstand kleiner dan $\omega/2$ liggen van een gegeven grote cirkel. Tóth vermoedde dat elke verzameling van zones die de hele bol bedekken, een totale breedte heeft die groter dan of gelijk aan π is. Na 44 jaar hebben twee wiskundigen, Z. Jiang van het Israel Institute of Technology en A. Polyanskii van het Moscow Institute of Physics and Technology, bewezen dat Tóth's vermoeden inderdaad juist is.

Geometric and Functional Analysis, december 2017

Tsjechische eremedaille toegekend aan Jan Brandts

Op vrijdag 15 december 2017 werd de Eremedaile voor de Wiskunde van het Tsjechische Wiskunde Genootschap uitgereikt aan Jan Brandts van de Universiteit van Amsterdam. De ceremonie vond plaats in Praag. Deze medaille wordt uitgereikt aan eminente onderzoekers in de wiskunde of didactiek van de wiskunde die voor een lange tijd samenwerken met een instituut in Tsjechië. Jan Brandts is universitair docent aan de Universiteit van Amsterdam gespecialiseerd in numerieke analyse.

kdvi.uva.nl



Een wiskundige app om sarcomen te voorspellen

De DASPO-groep (Data Analysis and Survival for Personalised Oncology) van het Mathematisch Instituut in Leiden heeft een app ontwikkeld die persoonlijke prognoses verschaft voor patiënten met zachtweefselsarcom. Door de agressieve aard van dergelijke tumoren is de prognose voor deze patiënten slecht, zelfs na een operatie om de initiële tumor te verwijderen. Lokale terugkeer (tumorgroei op de plek van de operatie) en uitzaaiing (tumorgroei op een andere plek) komen veel voor, maar er is aanzienlijke variatie tussen patiënten. Het gebrek aan een gevalideerd prognostisch model met behandelopties lag ten grondslag aan de ontwikkeling van PERSARC, een gepersonaliseerd prognostisch model voor sarcoompatiënten.

universiteitleiden.nl

Wiskundecusters krijgen opnieuw financiering voor activiteiten

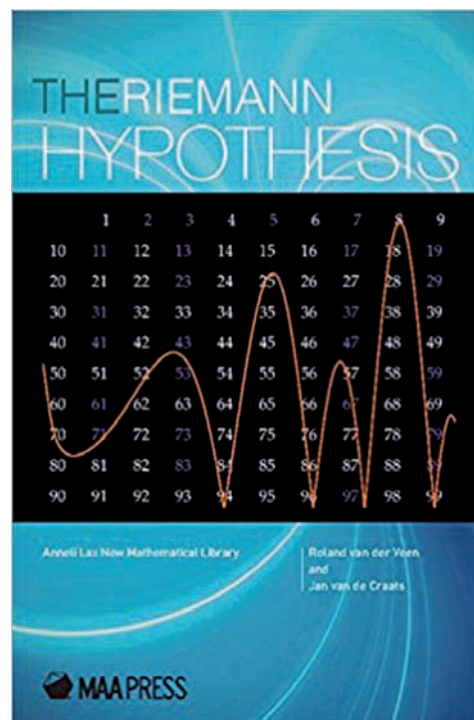
De vier wiskundecusters DIAMANT, GQT, NDNS+ en STAR krijgen van NWO opnieuw financiering om reguliere activiteiten te organiseren. Dankzij deze financiering van NWO worden de wiskundecusters in de gelegenheid gesteld om hun krachten te bundelen en hun internationale positie een extra impuls te geven. De financiering zal worden gebruikt voor onder andere graduate schools, workshops/seminars, reisbeurzen voor buitenlandse bezoekers en jonge onderzoekers, en outreach-dagen. Deze activiteiten dragen bij aan het creëren van een stimulerende onderzoeksomgeving voor onderzoekers en de zichtbaarheid van de wiskundecusters. Ook zullen de activiteiten het internationale karakter van de wiskundecusters versterken. De wiskundecusters behouden hierdoor hun belangrijke rol binnen de Nederlandse wiskunde én het in-

ternationale wetenschappelijk speelveld. Kennisuitwisseling en samenwerking staan centraal binnen de wiskundecusters. *nwo.nl*

MAA Beckenbach Book Prize voor Van de Craats en Van der Veen

Het boek *The Riemann Hypothesis: A Million Dollar Problem* is door de Mathematical Association of America (MAA) beoordeeld als een van de beste wiskundeboeken. Op 13 januari hebben Jan van de Craats en Roland van der Veen de MAA Beckenbach Book Prize ontvangen voor dit werk. "De auteurs Van de Craats en Van der Veen hebben een meesterlijk boek geschreven dat een doeltreffende kennismaking is met een fascinerend wiskundig probleem", concludeerde de MAA. Michael Pearson, uitvoerend directeur van de MAA, vulde aan: "De MAA is trots om de prestigieuze Beckenbach Book Prize aan de schrijvers van dit innovatieve werk over de Riemann-hypothese uit te reiken. Het is een voorbeeld van de kwaliteit die we nastreven in MAA-publicaties." Van der Veen is universitair docent bij de Universiteit Leiden en heeft als onderzoeksgebieden topologie, representatietheorie en mathematische fysica. Co-auteur Van de Craats is emeritus-hoogleraar bij de Universiteit van Amsterdam en heeft jarenlang het Nederlandse team voor de Internationale Wiskunde Olympiade gecoacht.

kdvi.uva.nl, universiteitleiden.nl



Enlightener Prize voor Nelly Litvak

Wiskundige dr. Nelly Litvak heeft een boek geschreven over wiskundige toepassingen. Het boek met de titel *Wie heeft wiskunde nodig?* heeft de prestigieuze Russische Enlightener-prijs voor populairwetenschappelijke publicaties gewonnen. In Rusland is de wetenschappelijke traditie nog altijd springlevend en jaarlijks worden hier vele indrukwekkende boeken over populairwetenschappelijke

onderwerpen geschreven, onder andere over onderwerpen uit de wiskunde. Litvak is erg blij met de erkenning en zegt: “Het is een geweldige eer om voor deze prijs genomineerd te zijn. Dit boek is bedoeld voor iedereen die meer wil weten over wiskundige toepassingen voor digitale technologieën.” Nelly Litvak is universitair hoofddocent aan de Universiteit Twente en parttime hoogleraar aan de Technische Universiteit Eindhoven. In de afgelopen jaren heeft zij gewerkt aan het ontwikkelen van algoritmes voor complexe netwerken.

Universiteit Twente, Tu/e

Verhuisbericht TU Delft

De afdelingen Wiskunde en Informatica van de TU Delft zijn verhuisd. De kenmerkende hoge toren aan de Mekelweg leende zich niet meer voor de onderwijs- en onderzoeksfuncties van de TU Delft. Het gebouw kampte niet alleen met hoge onderhoudskosten, maar ook de bedrijfszekerheid was steeds moeilijker te garanderen. Daarom heeft het college van bestuur in 2015 besloten om de afdelingen Wiskunde en Informatica te verhuizen naar een voormalig gebouw van TNO aan de Van Mourik Broekmanweg. De verhuizing is uitgevoerd tijdens de kerstvakantie van 2017. Wiskunde en Informatica hebben een nieuwe, frisse kantooromgeving gekregen. Bij het indelen van de plattegronden en kantoren is gezocht naar een optimalisatie in gebruik van vierkante meters om zo bij te dragen aan de reductie van inefficiënte vierkante meters op de campus.

Robbert Fokkink



Het nieuwe gebouw van Wiskunde en Informatica

Negen wiskundestudenten winnen Jong Talent Aanmoedigingsprijs

Negen studenten in de wiskunde en technische wiskunde kregen op 27 november bij de Koninklijke Hollandse Maatschappij der Wetenschappen te Haarlem een Jong Talent Aanmoedigingsprijs van 500 euro voor hun studieresultaten in het eerste studiejaar. Zij behaalden de beste studieresultaten in de wiskunde. Deze Jong Talent Aanmoedigingsprijzen zijn beschikbaar gesteld door ORTEC om de studie in wiskunde te stimuleren. Adriaan Tas, Expert Consultant ORTEC Consulting, reikte deze Jong Talent Aanmoedigingsprijzen uit aan Sven Cats (RUG), Alex Spijksma

(UL), Sam van Poelgeest (TUD), Mick Gielen (UvA), Sven Dummer (UT), Hidde Schönberger (UU), Daan van Sonsbeek (RU), Reinier Schiermann (TU/e) en Luc Veldhuis (VU). Op 27 november werden in Haarlem bij de KHMW in totaal 56 Jong Talent Aanmoedigingsprijzen uitgereikt aan jonge talenten in de technische en exacte vakken.

khmw.nl

Vijftigste Mersenne-priemgetal ontdekt

Op 26 december 2017 heeft de 51-jarige Amerikaan Jonathan Pace het (tot op heden) grootste priemgetal ontdekt met een speciaal daarvoor geschreven computerprogramma Prime95:

$$2^{77232917} - 1$$

Het getal dat nu ontdekt is, is het vijftigste Mersenne-priemgetal en bestaat uit meer dan 23 miljoen cijfers (23.249.425 cijfers om exact te zijn). Na die vondst moest het recordgetal gecontroleerd worden, wat ook een tijdje duurde. Dat gebeurde met vier verschillende programma's op vier verschillende computersystemen. Op 3 januari 2018 kwam de bevestiging.

De grote priemgetallen die de laatste jaren ontdekt zijn, hebben allemaal die vorm $2^p - 1$, waarbij p zelf ook een priemgetal is. Men noemt ze Mersenne-priemgetallen, naar de Franse monnik Marin Mersenne die deze getallen in de zeventiende eeuw voor het eerst onderzocht. De vorige ontdekking dateert van 7 januari 2016 met een priemgetal met 22.338.618 cijfers (910.807 cijfers minder dan het huidige record).

mersenne.org

Koninklijk Wiskundig Genootschap

□ NMC 2018

Op 3 en 4 april 2018 vindt het 54ste Nederlands Mathematisch Congres plaats in congrescentrum Koningshof in Veldhoven. Plenaire sprekers zijn Adriana Garroni, Yi Ma, Jean-François Le Gall, William Slofstra, Bruno Stoufflet en Fernando Rodriguez Villegas. Er zijn al 150 geregistreerden. Registratie is nog steeds mogelijk via nmc.wiskgenoot.nl.

□ Algemene Ledenvergadering

De jaarlijkse Algemene Ledenvergadering van het KWG wordt gehouden tijdens de NMC in Veldhoven, op woensdag 4 april van 12.45 tot 13.45 uur. Het jaarverslag van het KWG en de agenda van de vergadering zullen uiterlijk vier weken van tevoren met de leden gedeeld worden.

□ Wintersymposium 2018

Op zaterdag 13 januari vond het jaarlijkse Wintersymposium van het KWG plaats in het Academiegebouw in Utrecht. Het thema was 'WiskundeTaal'. Er waren ruim 100 deelnemers.

□ Overlijdensbericht

Wij hebben bericht ontvangen dat ons erelid prof. dr. Fred van der Blij op 27 januari is overleden. De heer Van der Blij was ruim 75 jaar lid van het KWG.

Recent verschenen:

□ Indagationes Mathematicae (www.elsevier.com/locate/indag)

Special Issue L.E.J. Brouwer, fifty years later, Dirk van Dalen, Geurt Jongbloed, Jan Willem Klop, Jan van Mill (eds.), Volume 29, Issue 1, 2018.

Martinus van Hoorn

oud-hoofdredacteur Euclides
mc.vanhoorn@wxs.nl

Jan Guichelaar

redacteur Pythagoras
j.guichelaar4@gmail.com

Geschiedenis

De geschiedenis van het tijdschrift Pythagoras, deel 1: Oprichting en succes; de periode tot 1966

Over de geschiedenis van het tijdschrift *Pythagoras* is vaker geschreven. Maar de verhalen over Pythagoras stemden niet altijd met elkaar overeen. De voorliggende geschiedschrijving door Martinus van Hoorn en Jan Guichelaar stoelt op uitvoerig en grotendeels nieuw bronnenonderzoek. Daarnaast zijn interviews afgenomen. Deze geschiedenis van Pythagoras wordt gepresenteerd in drie afleveringen. Daarin komen logischerwijs ook de pieken en dalen in het bestaan van het blad langs. Het meest bijzondere is eigenlijk dat Pythagoras nog steeds bestaat. Gelukkig zijn elke keer wanneer het moeilijk werd, mensen bereid gebleken het blad uit de brand te helpen.

Een initiator die als zodanig wordt genoemd

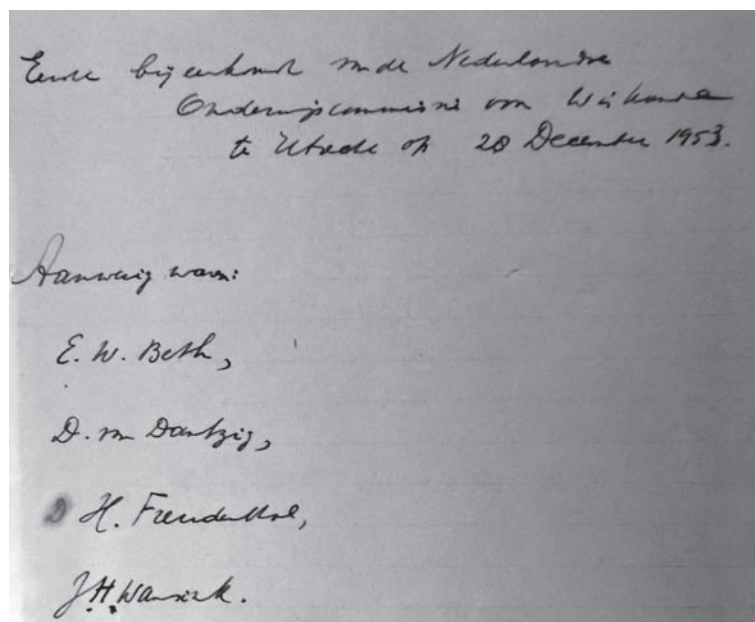
Pythagoras verscheen voor het eerst in 1961. Niettemin maken we nu eerst een flinke sprong in de tijd, namelijk naar 1985. Op 11 november van dat jaar vond een vergadering plaats van de Nederlandse Onderwijscommissie voor Wiskunde (NOCW), onder voorzitterschap van H.J.A. Duparc.¹ Direct na de opening memoreerde de voorzitter dat op 30 oktober 1985 dr. Joh.H. Wansink was overleden, en hij schetste diens 'grote betekenis voor de NOCW als secretaris, en initiator van Pythagoras en de Wiskunde Olympiaden'.²

Het verslag van deze vergadering uit 1985 is voor zover bekend het enige NOCW-document waarin Wansink wordt genoemd als initiator van Pythagoras. In notulen en jaarverslagen uit de periode 1959–1961, toen Pythagoras werd opgericht, staat dit nergens. In die periode was Wansink secretaris van de NOCW, waardoor hijzelf alle notulen en jaarverslagen opstelde. Wansink benadrukte daarin niet zijn persoonlijke rol. Uit deze stukken blijkt trouwens wel dat de oprichting van Pythagoras plaatsvond vanuit de NOCW, en ook dat H. Freudenthal als voorzitter en

Wansink als secretaris daaraan substantieel bijdroegen. Freudenthal was vanaf de oprichting lid van de NOCW, en ook aanwezig op bovengenoemde vergadering van 11 november 1985. Hij had Wansink jarenlang van nabij meegemaakt.

Freudenthal getuigde verscheidene malen van zijn grote respect voor Wansink. Dat deed hij in 1974, toen Wansink 80 jaar werd, dat deed hij in 1978, bij het 200-jarig bestaan van het WG, toen hij Wansink installeerde als erelid, en dat deed hij na het overlijden van Wansink in een In Memoriam. Helaas is de tekst van Freudenthals laudatio uit 1978 niet aangetroffen. De beide andere keren prees hij Wansink vooral in algemene zin.³

Daar was reden toe, Wansink had vele verdiensten. Onder meer had hij de differentiaal- en integraalrekening in het examenprogramma van hbs en gymnasium



Figuur 1 Notitie eerste bijeenkomst NOCW 28-12-1953; het handschrift is van Wansink.

weten te krijgen, en dat zó dat de leraren dit programma in grote meerderheid onderschreven.⁴ Wansink stelde zichzelf daarbij niet op de voorgrond; hij wilde bovenal een brede acceptatie. Freudenthal schreef in 1974 dat Wansink altijd het standpunt van de leraren verdedigde. Inderdaad, maar Wansink had dan zijn vóórwerk gedaan. Hij verdedigde wat hij wilde verdedigen.

De aanloop in 1959

Notulen van NOCW-vergaderingen vermelden jarenlang niets over een wiskundig tijdschrift voor jongeren. In 1959 veranderde dat. De notulen van de NOCW-vergadering van 24 februari 1959 bevatten een terloopse opmerking, inhoudende dat F. Loonstra, die wegens ziekte afwezig was, van plan was geweest “de mogelijkheid onder het oog te zien van uitgave van een wiskundig tijdschrift voor jongeren, zulks naar aanleiding van mededelingen van prof. Hajos uit Hongarije”.⁵ Loonstra (hoogleraar te Delft) wilde blijkbaar een gesprek over een wiskundig tijdschrift voor jongeren en tamen. Wansink notuleerde dit, naar te veronderstellen valt, welbewust.

Tijdens de volgende vergadering, op 21 april 1959, werd gesproken over drie mogelijke initiatieven: de uitgave van een wiskundig tijdschrift voor jongeren, het organiseren van olympiades, en het uitbrengen van eenvoudige boekjes voor leerlingen. Een commissie, bestaande uit de leden Vredenduin, Van der Neut en Wansink, moest zich over deze zaken buigen.⁶ Deze drie waren juist de NOCW-leden uit het vmo.⁷ Kennelijk werden zij geacht het best te kunnen beoordelen wat geschikt was voor jongeren.

Niet genotuleerd werd wie de commissie moest leiden. Voor de hand zou liggen dat Wansink dat deed. Onder wiskundeleraren was hij jarenlang de onomstreden primus inter pares. Wansink was directeur van de Lorentz-hbs te Arnhem, daarnaast was hij voorzitter van de vereniging Wimecos van wiskundeleraren aan middelbare scholen, en redactievoorzitter van het lerarenblad *Euclides*.⁸

Dr. D.N. van der Neut was oud-directeur van de Christelijke hbs te Zeist, en sinds kort inspecteur voor het vmo. Dr. P.G.J. Vredenduin was leraar aan het Stedelijk Gymnasium te Arnhem en voorzitter van Liwenagel, de organisatie van leraren in exacte vakken aan gymnasia en lycea.⁹



Figuur 2 Deelnemers conferentie Wiskunde-Werkgroep 1948. Vooraan, derde van links Joh. H. Wansink, vijfde H. Freudenthal.

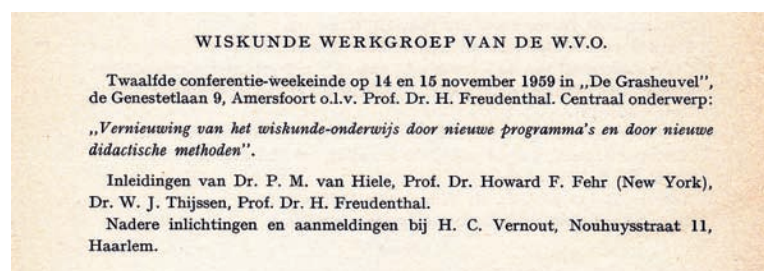
De NOCW kwam vervolgens bijeen op 11 november 1959. Wederom werd gesproken over een wiskundig tijdschrift voor jongeren. Men bekeek drie buitenlandse voorbeelden, namelijk *Le facteur X* (Frankrijk), *The Mathematical Pie* (Engeland) en *The Mathematical Student Journal* (Verenigde Staten). Voorzitter Freudenthal zou “overleg plegen met de heer G. Krooshof (Groningen) over een eventueel redacteurschap”. Het tijdschrift moest op commerciële basis uitgegeven worden, en de uitgevers Noordhoff en Wolters zouden als eerste benaderd worden. Misschien kon het tijdschrift worden gekoppeld aan het lerarenblad *Euclides*.¹⁰ Zo werd het door Wansink genotuleerd.

Niet genotuleerd werd tot welke conclusies de commissie van drie (Wansink, Van der Neut, Vredenduin) was gekomen, noch hoe deze conclusies leidden tot het besluit een wiskundig tijdschrift voor jongeren te gaan uitgeven. Zodoende is de besluitvorming niet geheel helder. Omdat vele jaren

later Wansink initiator werd genoemd, zal hij een hoofdrol hebben gespeeld.

Men kan zich hierbij afvragen waar de buitenlandse voorbeelden vandaan kwamen, waarom men Krooshof wilde benaderen, en waarom men eerst aan de uitgevers Noordhoff en Wolters dacht. Wat dit laatste betreft, *Euclides* werd uitgegeven door Noordhoff; over een eventuele koppeling moest dus met Noordhoff worden gesproken. Waarom men, indien nodig, vervolgens Wolters wilde benaderen ligt eveneens voor de hand. Deze uitgever verrichtte vaker werkzaamheden voor de NOCW. Nog in 1958 waren twee NOCW-rapporten uitgegeven door Wolters.¹¹

De buitenlandse jongerentijdschriften waren waarschijnlijk naar de vergadering meegenomen door Wansink. Zoals verder op zal blijken, bezat hij zulke tijdschriften. Wansink was een kenner van het wiskundeonderwijs in andere landen. In *Euclides* besprak hij geregeld buitenlandse didactietijdschriften. Het zou goed kunnen dat



Figuur 3 Aankondiging weekendconferentie Wiskunde-Werkgroep 1959.

hij al langer wist van het bestaan van jongerentijdschriften.

Rest de vraag waarom men Krooshof wilde benaderen. Krooshof was onderdirecteur van de gemeentelijke meisjes-hbs met afdeling mms te Groningen. Hij was ook redacteur van het *Mededelingenblad* van de Wiskunde-Werkgroep.¹² Freudenthal leidde deze bijzondere werkgroep, Wansink en Krooshof waren er lid van. Recentelijk had Krooshof met een ander lid van de werkgroep, D. van Hiele-Geldof, een leerboek geschreven voor het schooltype mms.¹³ In 1958 was Krooshof, met Wansink en Vredenduin, door de NOCW afgevaardigd naar het congres van de Belgische Vereniging van Wiskundeleraren.¹⁴ Krooshof gaf dus les in het vmo, hij had ervaring met redactiewerk, en Freudenthal en Wansink kenden hem.

Nu moest Freudenthal Krooshof polsen. Een ideale kans daartoe deed zich al snel voor. Op zaterdag 14 en zondag 15 november 1959 werd de jaarlijkse conferentie van de Wiskunde-Werkgroep gehouden. Freudenthal, Wansink en Krooshof zouden daar, naar aan te nemen valt, alle drie aanwezig zijn.

Er is geen verslag overgeleverd van een gesprek tussen Freudenthal en Krooshof. Maar wel verwees Freudenthal later in een brief aan Krooshof naar een dergelijk gesprek. Het lijkt aannemelijk dat zij elkaar in de wandelgangen van de conferentie spraken. Evenmin is geboekstaafd dat Freudenthal tijdens hetzelfde weekend waarschijnlijk ook sprak met Broeder Erich uit Oudenbosch. Later vertelde deze dat hij door Freudenthal was benaderd tijdens een didactiekconferentie.¹⁵ Broeder Erich was lid van de Wiskunde-Werkgroep, en andere didactiekconferenties dan van deze groep waren er niet. Broeder Erich vertelde tevens dat hij tegenover Freudenthal terughoudend was geweest omdat hij muloleraar was. Hij mocht op grond van zijn lagere akte wiskunde geven aan muloscholen, maar niet aan hbs'en of gymnasia, zelfs niet aan de lagere klassen daarvan.

In een latere correspondentie met Broeder Erich verwees Freudenthal naar een gesprek tussen hen beiden. Onverlet blijft dat Freudenthal eerst met Krooshof had gesproken. Deze deed geen toezegging, hoogstwaarschijnlijk omdat hij onvoldoende tijd dacht te hebben, zoals uit een latere brief van hem blijkt. Mogelijk had Krooshof bovendien uitgesproken dat

er méér redacteurs nodig zouden zijn. De bezwaren van Krooshof kunnen reden zijn geweest meteen ook Broeder Erich te benaderen; Freudenthal en Wansink konden daarover tijdens de conferentie gemakkelijk overleggen.

Vanwege deze aannemelijke (maar niet geheel zekere) gang van zaken is te begrijpen dat Freudenthal niet aan Broeder Erich meedeelde dat hij al met Krooshof had gesproken. Zodoende wist Broeder Erich niet van enige andere mogelijke redacteur, hetgeen de gedachte kan hebben opgeroepen dat hij de eerste was die werd benaderd. Deze reconstructie is geheel consistent met de latere briefwisseling.

Broeder Erich — voor de Burgerlijke Stand J.A.F. de Rijk — was binnen de Wiskunde-Werkgroep lid van de actieve Film- en Filmstripcommissie. Bij de publicatie van enkele filmstrips gebruikte hij het pseudoniem Bruno Ernst.¹⁶

Twee redacteurs geworven

De eerstvolgende vergadering van de NOCW was op 8 maart 1960. In de notulen van deze vergadering staat: “Voor het wiskundetijdschrift voor jongeren zijn nu de heer Krooshof en broeder Erich als redacteurs beschikbaar. De secretaris krijgt opdracht tot verder overleg met hen en met een te zoeken uitgever.”¹⁷ Met deze notulering is echter iets wonderlijks aan de hand. Want in werkelijkheid had op 8 maart 1960 noch Krooshof, noch Broeder Erich toegezegd, zoals hierna blijkt. Freudenthal had kennelijk na november 1959 geen verdere actie ondernomen. Misschien kon dat een verzuim heten. Maar Wansink wilde dat denklijk niet in de notulen vermelden. De notulen van de NOCW-vergadering van 8 maart 1960 beschrijven zodoende een situatie die pas later zou ontstaan.

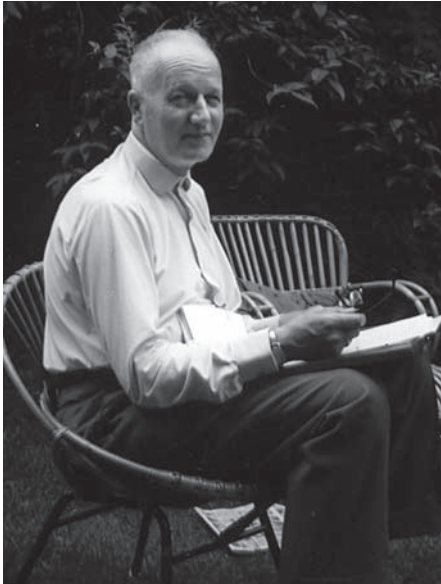
Direct na deze NOCW-vergadering begon Freudenthal zijn verzuim, als het dat was, goed te maken. Hij schreef op 9 maart meteen aan Krooshof. Daarbij refereerde Freudenthal aan het gesprek dat ze hadden gehad, bevestigde hij dat Krooshof bedenkingen had geuit tegen het vele werk dat aan het redigeren van een wiskundetijdschrift voor jongeren verbonden was, maar stelde hij nu aan Krooshof voor dit werk samen met Broeder Erich te doen. “U weet dat Broeder Erich een toegewijd iemand is die veel werk kan verzetten”, schreef hij. Freudenthal vertelde ook dat hij al met Broeder Erich had gesproken en dat deze

terughoudend was omdat hij muloleraar was. Ten slotte schreef Freudenthal: “Indien U daarmee accoord gaat, zou ik mij met Broeder Erich in verbinding willen stellen. Gaarne hoor ik van U, wat U hierover denkt.” Freudenthal bood Krooshof dus de mogelijkheid samenwerking met Broeder Erich af te wijzen. Hij gaf evenwel een argument dat Krooshof moest aanspreken: Broeder Erich kon veel werk verzetten.

Krooshof reageerde op 11 maart. Hij schreef Freudenthal dat het werk hem aantrok, maar dat nog gedacht moest worden aan enkele bezwaren. Ten eerste moest er volgens Krooshof aandacht zijn voor het nodige materiaal. Het blad moest elke keer gevuld worden. Krooshof vroeg naar de omvang en de verschijningsfrequentie, en naar buitenlandse voorbeelden. Ten tweede liet Krooshof zich uit over mederedacteurs. “Ik geloof, dat ik goed met Br. Erich zal kunnen samenwerken”, schreef hij. Hij betreurde dat de afstand tussen hun woonplaatsen vrij groot was, want er zou wel eens vergaderd moeten worden. Tegelijk merkte Krooshof op dat het hem verstandig leek uit te gaan van minstens drie redactieleden.

Ten derde schreef Krooshof over de tijd die hij beschikbaar had. Hij zag wel kans enige tijd vrij te maken, maar het liefst werd hij dan ontlast van zijn werk voor het *Mededelingenblad* van de Wiskunde-Werkgroep. Bij het *Mededelingenblad* had hij slechte ervaringen met zijn mederedacteur, over wie hij schreef: “Mijn ervaring met [...] maakt het mij wel noodzakelijk te eisen, dat wanneer ik op Uw voorstel zou ingaan, ik werkelijk actieve mederedacteurs krijg. Met Br. Erich zal dat wel het geval zijn.” Ten slotte wilde Krooshof weten wie het blad zou financieren, en wie reiskosten en telefoonkosten ging betalen.

Krooshof was praktisch ingesteld, en benoemde onmiddellijk de relevante kwesties. De teneur van zijn brief was positief, en dat had Freudenthal gezien. Freudenthal ontving de brief op zaterdag 12 maart. Destijds werd op zaterdagochtenden nog gewerkt, en Freudenthal was op zijn post. Hij antwoordde meteen en schreef nu ook aan Broeder Erich, terwijl hij Wansink verzocht om Krooshof buitenlandse voorbeelden te sturen — waaruit blijkt dat Wansink zulke voorbeelden bezat. Freudenthal schreef aan Krooshof: “Hartelijk dank voor Uw mededeling. Ik heb dr. Wansink gevraagd om U beschikbaar materiaal te sturen. De an-



Figuur 4 G. Krooshof omstreeks 1960.

dere punten lijken op het ogenblik van ondergeschikte betekenis. Ik zal mij nu met Broeder Erich in verbinding stellen.”

Freudenthal ging er al zowat van uit dat Krooshof redacteur zou worden. Omdat deze best wilde samenwerken met Broeder Erich kon die worden benaderd. Freudenthal schreef erbij: “Zodra de nodige voorbereidingen zijn getroffen zou een kleine bijeenkomst kunnen worden belegd. De kosten worden voorlopig door de Ned. Onderwijs Commissie voor Wiskunde gedragen. Zoudt U mij willen berichten wanneer U het van Dr. Wansink verkregen materiaal hebt bestudeerd?” Freudenthal beseftte natuurlijk dat hij nog geen definitief antwoord van Krooshof had.

Zoals gezegd schreef Freudenthal op 12 maart ook aan Broeder Erich: “Indertijd heb ik met U gesproken over de mogelijkheid een wiskunde tijdschrift voor V.H.M.O. leerlingen op te richten. Zoudt U de redactie samen met de heer Krooshof op U willen nemen? Uw bezwaar was indertijd dat U niet in het V.H.M.O. werkt, maar als er een ander redactielid voor het V.H.M.O. komt, lijkt mij dit bezwaar niet belangrijk.” Alles wat Freudenthal hier schreef lijkt volledig consistent met het eerdere gesprek tussen hem en Broeder Erich. Freudenthal schreef Broeder Erich niet dat Krooshof eerder gevraagd was, noch dat deze zijn fiat gegeven had aan samenwerking met Broeder Erich. Dit is misschien nooit aan Broeder Erich verteld.

Freudenthal schreef verder aan Broeder Erich: “Als U zich bereid verklaard [sic] om

met de heer Krooshof in zee te gaan, zouden een kleine bijeenkomst kunnen beleggen. De kosten worden voorlopig door de Ned. Onderwijs Commissie voor Wiskunde gedragen. Mijn complimenten voor de [filmstrips], die U samen met de heer Poelman hebt gemaakt. Iedereen vond ze buitengewoon interessant.” Broeder Erich antwoordde direct: “Ik dank U voor de uitnodiging om tot de redactie toe te treden, en ik neem dit graag aan.” Hij zegde zonder voorbehoud toe.

Gewacht moest worden tot Krooshof de buitenlandse voorbeelden had bestudeerd. Enkele weken gingen voorbij. Op 11 april schreef Freudenthal aan Krooshof: “Ik hoop dat de heer Wansink U het materiaal heeft gestuurd. Gaarne zal ik van U vernemen, of U genegen bent het redactiewerk op U te nemen, en zo ja, wanneer U een onderhoud, samen met Broeder Erich, zou schikken.” Krooshof antwoordde per omgevaande: “Inderdaad heeft Wansink mij het materiaal gestuurd. Nu ik dit bekeken heb durf ik het wel aan om met Br. Erich te beginnen.”

Hiermee had Freudenthal zijn doel bereikt. Hij koerste nu aan op een eerste overleg tussen de nieuwe redacteurs. Dit leek te kunnen op 25 april aan het eind van de middag te Utrecht; die middag was er een vergadering van Wimecos, waar Krooshof bij zou zijn. Broeder Erich kon dan ook. Freudenthal schreef aan Krooshof: “Ik ben op 25 april in het buitenland, maar de bijeenkomst zou even goed van de kant van de commissie kunnen worden bijgewoond door Dr. Wansink, die uiteraard ook in Utrecht is” (als voorzitter van Wimecos namelijk).¹⁸ Zo werd in april de situatie bereikt die in de notulen van de NOCW-vergadering van 8 maart was vermeld. Wansink kon verder met beide redacteurs overleggen. Opgemerkt mag worden dat de redacteurs van het jongerentijdschrift blijkbaar leraren moesten zijn. Onder andere categorieën werd niet naar redacteurs gezocht.

Ten slotte zij vermeld dat Krooshof na enige tijd inderdaad ontlast werd als redacteur van het *Mededelingenblad* van de Wiskunde-Werkgroep. Freudenthal en Wansink bewerkstelligden ook dit in onderlinge samenwerking. Een uitgebreider verhaal hierover valt buiten het bestek van dit artikel. Men wilde Krooshof ter wille zijn, dat is duidelijk.



Figuur 5 Broeder Erich in 1956.

Een uitgever en een naam

Op 15 juli 1960 richtte Wansink een schrijven tot uitgever Noordhoff, waarin hij vroeg of deze voor eigen risico ‘een periodiekje’ wilde uitgeven, dat vijfmaal per jaar op een klein formaat zou verschijnen en bedoeld was voor leerlingen van vmo, hts en mulo, die benaderd zouden worden via hun leraren. Wansink had erover gesproken met de redacteurs. Gedacht werd aan minstens 2000 abonnees, welk aantal misschien op 4000 gebracht kon worden. De abonnementsprijs mocht niet hoger zijn dan f 1,50 of f 2,-. Maar uitgever Noordhoff zag er niets in, het aantal abonnees zou te klein zijn, en het aantal mutaties in het abonneebestand te groot.¹⁹

Nu moest uitgever Wolters worden aangeschreven. Wansink schreef een vrijwel identieke brief, maar ditmaal met de toevoeging dat alles kon worden besproken met de heer G. Krooshof. Hetgeen geschiedde. Krooshof was bij deze uitgever bekend; het schoolboek *Wiskunde voor de mms*, waarvan hij mede-auteur was, was door Wolters uitgegeven. Ook uitgever Wolters bleek niet enthousiast, maar daarop had Krooshof gezegd dat zo nodig een andere uitgever zou worden gezocht. Toen had Wolters toegestemd. Men werd het eens over een proefjaar, na afloop waarvan kon worden beslist over wel of niet doorgaan.²⁰ Dan ook kon een contract worden opgesteld. Wansink overlegde dit met Loonstra, die als voorzitter van de NOCW optrad omdat Freudenthal in het buitenland verbleef. Bovendien informeer-

de hij Van der Blij, als fungerend voorzitter van het WG.

De zaak was bijna rond, de redacteurs konden beginnen. Wel zou een lid van de NOCW ambtshalve deel uitmaken van de redactie en alle kopij voorgelegd krijgen. De afspraak tot deze redactionele versterking bleek aan het eind van het jaar 1960.²¹ Naar zou blijken moest Freudenthal alle kopij vooraf inzien.

Aldoor ging het over 'een wiskundig tijdschrift voor jongeren'. Een naam had dit tijdschrift niet. Zo was het nog tijdens de NOCW-vergadering van 9 februari 1961; deze vergadering werd voorgezeten door Van der Neut, omdat nu ook Loonstra in het buitenland was.²² In het mei-nummer van Euclides introduceerde Wansink het nieuwe tijdschrift, "dat we Pythagoras gedoopt hebben".²³ Gelet op de productietijd van het blad Euclides moet de naam Pythagoras uiterlijk in februari/maart 1961 zijn gekozen.

Niet genotuleerd werd hoe de naam Pythagoras tot stand kwam. Maar dit werd jaren later onthuld door Krooshof, bij het afscheid van Van der Neut als redactielid van Euclides. Krooshof was inmiddels hoofdredacteur van Euclides, en schreef: "Het is in dit verband misschien aardig te vermelden dat toen tien jaar geleden er een wiskundetijdschriftje voor jongeren zou worden opgericht en er over een naam werd gedelibereerd, de Heer van der Neut op een gegeven moment zei: 'Waarom

noemen jullie het niet Pythagoras? Pythagoras naast Euclides dat kan toch best?' En zo werd het dan Pythagoras."²⁴

Pythagoras verschijnt

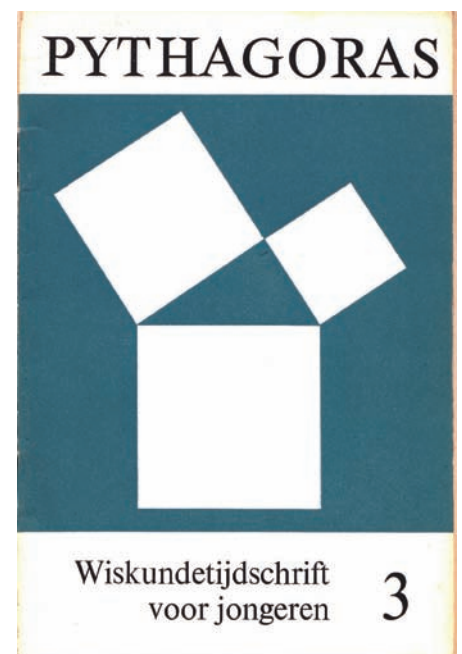
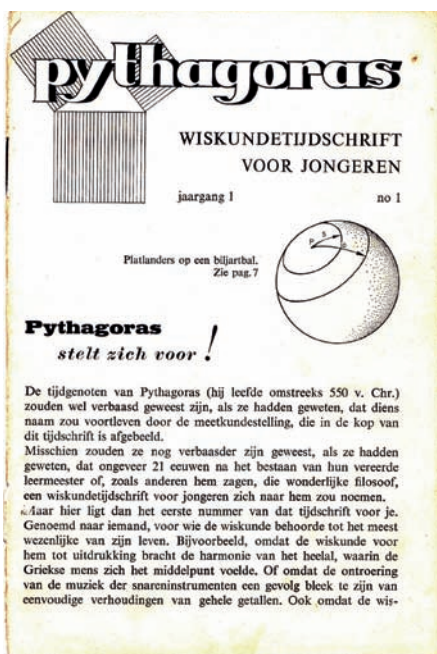
In september 1961 werd het eerste nummer van Pythagoras naar de scholen gestuurd. De leraren verstrekten het daar aan de leerlingen die zich hadden geabonneerd. De leraren waren vóór de zomervakantie benaderd door, of via de uitgever. De belangstelling was veel groter dan verwacht: er waren al direct 9000 abonnees. De eerste jaargang kreeg uiteindelijk 13000 abonnees.²⁵ Het eerste nummer telde zestien bladzijden, het blad zou viermaal per jaar uitkomen, een abonnement kostte f 2, en de redacteurs waren Bruno Ernst en G. Krooshof.

In NOCW-stukken staat geen verklaring voor de opmerkelijk grote belangstelling, die zich al manifesteerde terwijl niemand nog een nummer van Pythagoras gezien had. Kwam dat door een (te veronderstellen) geringe uitdaging in de leerboeken?²⁶ Maar waarom impliceert zo iets dan dat leerlingen zich graag willen abonneren op een onbekend wiskundetijdschrift? Een oud-redacteur stelde: de jeugd had niets te doen. De meeste gezinnen hadden geen televisie.²⁷ Dit lijkt plausibel. Maar vooral zal er onder de wiskundeleraren een gunstig onthaal zijn geweest. Zij waren immers degenen die de duizenden abonnees hadden geworven. Ná het uitkomen van de eerste

nummers lag het anders. Deze nummers zullen in de smaak gevallen zijn. Anders is de verdere toename niet te begrijpen.

In november 1961 vergaderde de NOCW. De aanwezigen waren ingenomen met het succes van Pythagoras en hadden veel waardering voor het werk van de beide redacteurs. Wel hadden enkele NOCW-leden kritiek, met name op taal en interpunctie. Alle leden wilden graag een (gratis) abonnement.²⁸ De NOCW-vergadering meende dat de redacteurs een onkostenvergoeding moesten krijgen van elk f 500, te betalen door de uitgever. Door het succes had deze hiervoor vast voldoende armslag gekregen. Na een verzoek van Wansink betaalde de uitgever inderdaad de redacteurs elk f 500.²⁹

Tijdens de jaarvergadering van de lerarenvereniging Wimecos, op 28 december 1961, wijdde Wansink in zijn openingstoespraak enige woorden aan Pythagoras: "We verheugen ons over de wijze waarop het wiskundig tijdschrift voor jongeren 'Pythagoras' in de scholen is ontvangen. [...] Vanaf deze plaats breng ik graag hulde aan de twee enthousiaste redacteurs, de heer Krooshof en Br. Erich."³⁰ Hieruit kwam echter een misverstand voort. De secretaris van Wimecos, J.F. Hufferman, stelde concept-notulen van de vergadering op, die in Euclides werden gepubliceerd. Daarin werd ook gereleveerd hetgeen Wansink over Pythagoras had gezegd: "Hij huldigt de initiatiefnemers broeder Erich en de heer



Figuur 6 De eerste drie nummers, verschenen in 1961–1962. Het derde nummer kreeg een toepasselijk omslag.

Je laat de voorzitter t.a.v. "Pythagoras" o.a. zeggen:

"Hij huldigt de initiatiefnemers broeder Erich en de heer Krooshof, waarmee de vergadering door applaus instemt".

Ik zou het woord "initiatiefnemers" door "redacteurs" vervangen willen zien. Initiatiefnemers zijn de beide redacteurs niet. Ze hebben de redactie aanvaard op verzoek van de Nederlandse Onderwijscommissie voor Wiskunde, die het initiatief tot de oprichting van "Pythagoras" nam. De Onderwijscommissie laat "Pythagoras" bij Wolters uitgeven; ze benoemt de redactie en deze is aan de Onderwijscommissie verantwoordelijk.

Ik geef dit commentaar om misversatnd over de totstandkoming van het jongerentijdschrift te vermijden.

Figuur 7 Fragment van de brief van Wansink aan secretaris Hufferman van Wimecos, 6-11-1962.

Krooshof, waarmee de vergadering door applaus instemt." Wansink moest hierop wel reageren; hij schreef een brief aan Hufferman, waarin hij uitlegde dat het initiatief van de NOCW was gekomen.³¹

Het proefjaar van Pythagoras was al meteen geslaagd. Zodoende kon de NOCW met de uitgever overleggen over een contract, zoals afgesproken. Wansink voerde dit overleg. Hij hield ruggespraak met de NOCW en met de redacteurs. Broeder Erich had een duidelijke opvatting: hij wilde de winst verdelen. Krooshof meende, zoals hij aan Wansink schreef, dat voor de NOCW en de redactie een ideëel uitgangspunt voorop moest staan. Hij vond een onkostenvergoeding voldoende. Bovendien had hij aan f500 genoeg, hij had er dure boeken voor gekocht, en nog hield hij geld over. Ook zou een winstdelingsregeling verplichtingen met zich meebrengen waarvan hij vrij wilde blijven. Kennelijk had hij Broeder Erich een afschrift van zijn brief gestuurd, want deze reageerde de volgende dag. Broeder Erich schreef dat zijn standpunt normaal was in zijn contacten met uitgevers. Hij ontving trouwens zelf geen geld, de opbrengst van zijn werkzaamheden kwam ten goede aan de gemeenschap waarin hij leefde. Hij deed een krachtig beroep op Krooshof hem te volgen, maar als Krooshof er anders over dacht zou hij zich daarbij neerleggen, omdat hij er geen herrie over wilde. De argumentatie van Broeder Erich was Krooshof niet naar de zin. Aan Wansink schreef hij zijn redactiewerk niet te doen om de financiële positie van een katholieke orde te versterken. Wansink onderschreef hetgeen Krooshof hem had geschreven. Uiteindelijk bleef het bij een vaste onkostenvergoeding.³²

Dankzij de meevallende opbrengst kon de uitgever in het tijdschrift investeren.

Het tweede nummer verscheen met twintig bladzijden, terwijl het derde nummer een mooi omslag kreeg. Aan het eind van het jaar kwam een extra, vijfde nummer uit. Dat was een special over de rekenliniaal, samengesteld door Broeder Erich.

Krooshof schreef oproepen voor leerlingen en voor docenten, om ook volgend jaar voldoende abonnees te hebben.³³ Een inlegvel bij het laatste nummer van de eerste jaargang bevatte zijn oproep aan de leerlingen, eindigend met: "Help ons Pythagoras in het volgende schooljaar weer een goede kans te geven. En blijf het beschouwen als je eigen tijdschrift."

Over de inhoud

Krooshof correspondeerde over de inhoud met Freudenthal, die immers alle kopij van tevoren moest inzien. Vaak verliep de cor-

respondentie gemoedelijk. Maar als Freudenthal de kopij niet tijdig had gekregen, was hij ontstemd — hoewel hij soms niet goed bereikbaar scheen. Krooshof liet desnoods nog een drukproef naar Freudenthal sturen.

Bijdragen voor Pythagoras moesten naar Bruno Ernst oftewel Broeder Erich worden gestuurd. Oplossingen van puzzels en problemen moesten naar Krooshof. Het extra nummer van de tweede jaargang (nummer 3 ditmaal, over vectoren) was van Krooshofs hand. Krooshof kon blijkbaar op voorhand bijdragen weigeren; hij stuurde Freudenthal eens enkele bijdragen van Broeder Erich die hij afgewezen had. Hij vroeg Freudenthal om rechtstreeks contact met Broeder Erich te onderhouden aangaande de special over de rekenliniaal. Freudenthal schreef Broeder Erich dat hij vierkantsvergelijkingen geen geschikt onderwerp vond voor de rekenliniaal. Niettemin werd dit gedeelte gehandhaafd. De stukken over de oppervlakte tussen de kromme $y = \frac{1}{x}$ en de x -as ($x > 0$) hadden de hoogste moeilijkheidsgraad (aangegeven met een toepasselijk symbool).

Het meeste in Pythagoras werd door Krooshof geschreven, onder meer een serie over onbekende krommen. Hij vroeg aan Freudenthal: moet je niet 'cissoïde' schrijven in plaats van 'cissoïde'? Maar dat vond Freudenthal niet nodig: "We schrijven ook niet kukloop, [...]."

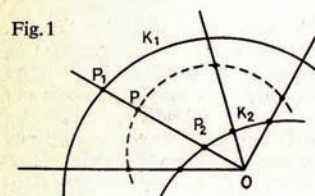
ENKELE INTERESSANTE KROMMEN - IV

In deze reeks artikelen worden enkele interessante krommen besproken, die meestal in de schoolmeetkunde niet aan de orde komen. In elk artikel wordt de constructiewijze van zo'n kromme beschreven zo, dat deze gemakkelijk door ieder getekend kan worden. In het volgend nummer vindt men de afbeelding van de kromme en enkele bijzonderheden.

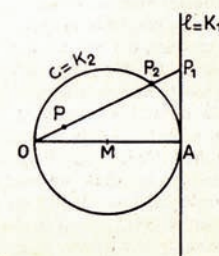
De cissoïde van Diocles (2e eeuw v. Chr.).

Gegeven zijn twee krommen K_1 en K_2 en een punt O . Door O trekt men een rechte, die K_1 snijdt in P_1 en K_2 in P_2 . Op de rechte bepaalt men het punt P zo, dat $OP = OP_1 - OP_2$. Wanneer men de rechte nu om O laat draaien, is de verzameling der punten P een cissoïde.

De cissoïde van Diocles verkrijgt men door voor K_1 te kiezen een rechte l , voor K_2 een cirkel C , die l



in A raakt en voor O het punt, dat op de cirkel diametraal met A ligt. (zie fig. 2).



Figuur 8 Constructie cissoïde in Pythagoras 4. De lezers werden uitgedaagd het eerst zelf te proberen.

Buiten de gewoonte om is er geen enkele reden, om aan "eigenschap" boven "wet" de voorkeur te geven of omgekeerd. In de hogere wiskunde heet het altijd "wet". In het Nederlandse VMO vindt men inderdaad vaak "eigenschap" – ik vermoed om onafhankelijkheid van het H.O. te demonstreren. (Er zijn tal van die voorbeelden.)

Wel zou men tegen beide terminologieën kunnen inbrengen, dat die "wet" ("eigenschap") niet zelf associatief is, maar van associativiteit handelt. Ik pleeg daarom kort te zeggen "associativiteit (voor de optelling, vermenigvuldiging)".

Figuur 9 Uitbreiding van Freudenthal in een brief aan Krooshof, 18-4-1962.

Freudenthal had ergens geschreven: de associatieve wet. Krooshof vroeg hem: moet dat niet zijn: associatieve eigenschap? Daar ging Freudenthal met enige humor op in – je kon maar het beste spreken van 'associativiteit'.³⁴

Broeder Erich verzorgde de serie 'Platlanders', een bewerking van een Engelse uitgave uit 1884. Hierover correspondeerde Freudenthal in eerste instantie met Krooshof. Waar Broeder Erich tegenvoeters invoerde, schreef Freudenthal dat over de kromming van de onderhavige tweedimensionale ruimte nog niets gezegd was, zodat je helemaal niet wist of er tegenvoeters konden zijn. Maar in het eerste nummer van Pythagoras was het Platland al getekend als een boloppervlak. Bovendien was de serie Platlanders van de laagste moeilijkheidsgraad. Nadien correspondeerden Freudenthal en Broeder Erich nog rechtstreeks over het Platland.³⁵

Krooshof bemoeide zich intensief met de vraagstukken en problemen. Naast de Denktjes werden verscheidene andere problemen aan de lezers voorgelegd. Telkens stimuleerde hij de lezers met oplossingen te komen. Dat lukte, en aldus ontstond een levendige interactie met meerdere lezers. Het moet Krooshof naar de zin zijn geweest.

Krooshof had indertijd buitenlandse jongerentijdschriften ingezien. Het lijkt er niet op dat daaruit artikelen werden overgenomen. Weliswaar is dit niet uitputtend nagegaan, alleen het Engelse tijdschrift *The Mathematical Pie* is erop nageslagen.³⁶ Hoogstens kan men zeggen dat de sfeer in beide tijdschriften overeen kwam. De serie 'Platlanders' kwam ook uit Engeland, maar was veel ouder. Het overnemen daarvan had geen auteursrechtelijke consequenties.

In Pythagoras verschenen soms bijdragen van gastauteurs, zoals dr. C.P.S. van Oosten te Arnhem en dr. J.C. van Rhijn te Vollenhove. Niet bekend is op wiens initiatief zij voor Pythagoras schreven. In het tweede nummer van Pythagoras stond al een bijdrage van ir. H.M. Mulder uit Breda. Deze had als leraar de oproep om abonnees te werven ontvangen en blijkbaar meteen een (niet onbekende) legpuzzel ingezonden.

Meer succes

Niet alleen Krooshof had schik in het redactiewerk, dat gold eveneens voor Broeder Erich. In een krantenartikel vertelde hij dat hij graag zou meewerken aan een natuurkundetijdschrift voor jongeren, maar dat hijzelf daarvoor onvoldoende kennis bezat. In dit krantenstuk werd Broeder Erich op-

gevoerd als initiatiefnemer van Pythagoras, en het stuk bevatte meer verrassingen. Broeder Erich verontschuldigde zich er direct voor bij Krooshof. Men had hem niet of onjuist geciteerd, en hij schaamde zich dood voor dit artikel, schreef hij.³⁷

In 1964 begon uitgever Wolters inderdaad met een natuurkundetijdschrift voor jongeren onder de naam *Archimedes*. Broeder Erich stond mede aan de wieg daarvan. Er was steun vanuit de lerarenvereniging Velines.³⁸ Een verschil met Pythagoras was, dat bij Archimedes niet een orgaan vergelijkbaar met de NOCW betrokken was.

Broeder Erich kende de graficus M.C. Escher, en zodoende werden bijzonderheden van verscheidene van diens werken door Broeder Erich in Pythagoras besproken, voor het eerst in de tweede jaargang. Escher werd hierdoor bij de abonnees bekend.

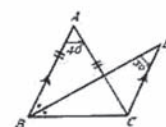
De tweede jaargang begon met 18.000 abonnees, welk aantal groeide tot 19.000. Een jaar later kwam het op 22.000. Daarna bleef het aantal ongeveer gelijk. Het succes was structureel geworden. Dit was aanleiding om voor de betaling van de vergoedingen een speciale stichting op te richten, de *Stichting Jeugd en Wiskunde*, die tot officieel doel had de belangstelling voor wiskunde onder jongeren te bevorderen. Voortaan keerde Wolters een bedrag uit aan deze ideële stichting, waarna de stichting cheques uitschreef voor de redactieleden.³⁹ Aldus waren er voor Wolters geen arbeidsrechtelijke gevolgen. Twee bestuursleden van de Stichting Jeugd en Wiskunde waren bekenden: Wansink, die voorzitter was, en Van der Neut. Secretaris-penningmeester was dr. H. Ferwerda, directeur van de Rijks-hbs te Leeuwarden.

FUN WITH NUMBERS No. 5

From "Le Facteur X".

(a) Put brackets in the following statement so that it is now true:
 $3 + 4 - 5 - 3 - 1 - 5 = 12$.

(b) Can you justify the expression $a + b \times a + b + a \times b = 122$ by inserting suitable brackets and choosing a and b from amongst the three numbers 3, 4 and 5?



FALLACY No. 26

ABC is an isosceles triangle having $AB = AC$. The bisector of angle ABC meets the line through C parallel to BA in D. Given that angle $A = 40^\circ$ and that angle $D = 30^\circ$, calculate angle BCD.

Method 1.

$\angle ABC = 70^\circ$ (base angle of the isosceles $\triangle ABC$).
 $\angle BCD = 180^\circ - \angle ABC$ (allied angles are supplementary),
 $\therefore \angle BCD = 180^\circ - 70^\circ$,
 $\therefore \angle BCD = 110^\circ$.

Method 2.

$\angle DBC = \frac{1}{2}$ of $\angle ABC$ (BD bisects $\angle ABC$),
 $\therefore \angle DBC = 35^\circ$.
 $\angle BCD = 180^\circ - \angle DBC - \angle BDC$ (angle sum of $\triangle BCD$).
 $\therefore \angle BCD = 180^\circ - 35^\circ - 30^\circ$,
 $\therefore \angle BCD = 115^\circ$.

Which is correct?

I.H.

Figuur 10 *The Mathematical Pie* 26 (februari 1959), 6, met iets uit *le Facteur X* (links); *The Mathematical Pie* 27 (mei 1959), 6 (rechts).

Pythagoras zou aanvankelijk vier keer per jaar verschijnen, met per nummer 16 pagina's. Door het succes kwamen er jaarlijks vijf nummers van elk 24 pagina's (zonder omslag gerekend). De oorspronkelijk

geplande 64 pagina's waren 120 pagina's geworden. Voor de redacteurs was er navent meer werk.

In 1963 schreef Krooshof aan Freudenthal dat hij het redactiewerk niet lang meer

wilde doen, misschien nog een of twee jaar. De hoeveelheid werk was toegenomen en zijn thuisfront begon te protesteren. Krooshof wilde de redactie van Pythagoras uitbreiden; hij wilde graag een opvolger in-

J. H. Wansink (1894–1985)

Johan Wansink werd geboren te Aalten en volgde de kweekschool te Deventer. Daar kreeg hij les van de gerenommeerde docent N.L.W.A. Gravelaar, van wie verteld werd dat hij dacht dat men het best meetkunde kon doceren in het donker. Wansink werd leraar in Arnhem en werd daar uiteindelijk directeur van de Lorentz-hbs. Vanwege zijn uitmuntende K5-examen (mo-B wiskunde) werd hij toegelaten tot academische examens. In 1931 promoveerde hij te Utrecht bij Julius Wolff op het proefschrift *Eenige randproblemen der conforme afbeelding*. Samen met Freudenthal behoorde hij tot de grondleggers van de NOCW, waarvan hij secretaris werd. Ook was hij voorzitter van de vereniging van wiskundelaren Wimecos en leidde hij de leerplancommissie, die voorstelde om differentiaal- en integraalrekening op te nemen in de examenprogramma's van hbs en gymnasium. Wansink had bovendien de leiding bij het lerarenblad Euclides. Na zijn pensionering werd hij didactiekdocent aan de T.H. te Delft. In die periode was hij niet alleen betrokken bij de start van Pythagoras, maar ook bij het opzetten van de Nederlandse Wiskunde Olympiade. In de jaren 1966–1970 verscheen zijn driedelige werk *Didactische oriëntatie voor wiskundelaren*. In 1978, toen het WG zijn 200-jarig bestaan vierde, werd hij door voorzitter Freudenthal geïnstalleerd als erelid van het WG.

H. Freudenthal (1905–1990)

Hans Freudenthal studeerde in Berlijn en promoveerde in 1930 bij Heinz Hopf. Daarna werd hij assistent bij L.E.J. Brouwer. Hij trouwde met Suzanna Lutter, een voorvechter van het jenaplanonderwijs in Nederland. Freudenthal dook onder van september 1944 tot het eind van de oorlog. In die periode schreef hij zijn denkbeelden over het rekenonderwijs op. Na de oorlog keerde hij niet terug naar Amsterdam maar werd hoogleraar in Utrecht. Hij zette zich nationaal en internationaal

in voor het wiskundeonderwijs. Als president van de internationale commissie voor wiskunde-onderwijs (ICMI) startte hij in 1969 de ICME conferentie, die eens in de vier jaar wordt gehouden. Freudenthal was een universeel geleerde met interesses binnen en buiten de wiskunde. Hij ontving verscheidene eredoctoraten en andere onderscheidingen, waaronder in 1984 de 'Gouden ganzeveer', met name toegekend voor zijn columns in *NRC Handelsblad*. Hij stelde zich krachtig te weer tegen de voorgenomen fusie van kleuterscholen en lagere scholen, omdat het spelen van de kleuters in het gedrang zou komen, en omdat de aandacht voor het rekenonderwijs erdoor zou afnemen. Op zijn instigatie werd in 1983 te Nederlandse Vereniging voor de Ontwikkeling van het Reken- en Wiskunde-Onderwijs (NVORWO) opgericht, die nog steeds actief is.

G. Krooshof (1909–1980)

Gerrit Krooshof werd geboren te Deventer, waar hij de kweekschool doorliep en de lagere acte wiskunde behaalde. Daarmee werd hij muloleraar, onder meer in Groningen. Nadat hij de middelbare wiskundeakten had gehaald, werd hij in 1948 leraar aan de Groningse meisjes-hbs annex mms. In 1964 werd Krooshof lid van de redactie van Euclides, waarvan hij van 1968 tot 1976 hoofdredacteur was, als opvolger van Wansink. Omdat de organisaties voor gymnasium- respectievelijk hbs-leraren overgingen naar één vereniging, moest Euclides zich aanpassen. Krooshof leidde dit veranderingsproces. In 1966 werd Krooshof door uitgever Wolters gevraagd leiding te geven aan het schrijven van een nieuwe methode, die in 1968 moest worden uitgebracht voor de nieuwe schooltypen vwo, havo en mavo. Krooshof was al met een kleine groep naar Schotland geweest, om daar de werking van een nieuwe methode te observeren. De door uitgever Wolters — na fusie Wolters-Noordhoff — uitgebrachte methode *Moderne Wiskunde* was gebaseerd

op die Schotse methode. Het schrijven van deze methode geschiedde in teamwork (een primeur) en de delen voor de schooltypen vwo en havo, respectievelijk havo en mavo, sloten op elkaar aan (ook een primeur). Samenwerking met anderen had hij hoog in het vaandel. Goede bekenden schreven hem aan als 'Kroos', en met die naam ondertekende hij veel van zijn brieven.

J.A.F. de Rijk (1926)

Hans de Rijk werd geboren te Rotterdam. Hij trad toe tot de congregatie van Saint Louis te Oudenbosch, omdat die mede onderwijstaken wilde vervullen. Sindsdien werd hij Broeder Erich genoemd. Hij doorliep de kweekschool en behaalde de lagere acte wiskunde, waarmee hij muloleraar kon worden. In de jaren vijftig sloot hij zich aan bij de Wiskunde-Werkgroep, waarbinnen hij met A.J. Poelman de Film- en Filmstripcommissie vormde. Daarbij koos hij de naam Bruno Ernst. Het is een van zijn zes pseudoniemen. Dit is ook de titel van een zeer lezenswaardig interview met De Rijk, dat is afgedrukt in het septembernummer van NAW in 2000. In 1964 stond De Rijk aan de wieg van het jongerentijdschrift voor natuurkunde *Archimedes*, dat evenals Pythagoras door de firma Wolters werd uitgegeven. Hij bleef vele jaren redacteur van zowel Pythagoras als Archimedes. De Rijk, die de congregatie van Saint Louis eind jaren zestig verliet, kende de graficus M.C. Escher en schreef verscheidene malen over diens werk in Pythagoras, en in enkele boeken. Ook onmogelijke figuren hadden zijn fascinatie, hetgeen eveneens meermalen in Pythagoras bleek. De Rijk was actief op allerlei terreinen. De volkssterrenwacht Simon Stevin te Hoeven kwam dankzij hem tot bloei. Vooral vanwege dit werk ontving hij in 1966 een Zilveren Anjer. In 1983 was hij één van de grondleggers van de stichting Ars et Mathesis, waarvan hij ook bestuurslid was. In 2004 werd hij erelid van het KWG.



Collectie A.B. Oosten

Figuur 11 Links op de foto A. F. van Tooren (rokend), rechts A. B. Oosten; circa 1970.

werken en vervolgens zelf vertrekken. Kort daarna vergaderde de NOCW, die de brief van Krooshof uitvoerig besprak. Blijkens de notulen werd een zekere Van Tooren genoemd als mogelijke redacteur.⁴⁰

Nu ging het snel. Krooshof, Broeder Erich en een afgevaardigde van de uitgever spraken met A. F. van Tooren uit Den Haag. Deze was al gepolst door het NOCW-lid Loonstra. De redactie beval Van Tooren aan als redactielid, en de NOCW benoemde hem.⁴¹ Loonstra, die Van Tooren benaderd had, woonde ook in Den Haag, en was daar president-curator van het Tweede Vrijzinnig-Christelijk Lyceum, de school waar Van Tooren werkte. Zo zal Loonstra Van Tooren hebben gekend.⁴² Deze had als leraar een uitstekende reputatie.⁴³

Het systeem met artikelen in drie moeilijkheidsgraden werd gehandhaafd. Desondanks was Pythagoras voor muloleerlingen

vaak te moeilijk, zoals Krooshof schreef. Hij wilde niet tegemoetkomen aan verzoeken meer rekening te houden met (m)uloleerlingen, daarvoor was deze groep te klein: 700 van de 19.000 abonnees.⁴⁴ Wansink had de muloleerlingen genoemd in zijn brief aan de uitgever, Freudenthal had muloleerlingen niet genoemd. Wansink had ook hts-leerlingen genoemd, maar over abonnees op hts'en is niets bekend.

Gesproken was ook over een facelift voor Pythagoras. Maar het blad bleef zoals het was. Krooshof schreef dat Pythagoras niet een 'mooi blad' moest worden, het moest vooral iets gezelligs en intiems houden.⁴⁵ De inhoud werd geleidelijk meer gestructureerd; buiten de Denkerjes waren er minder vraagstukken. Wel waren er verscheidene prijsvragen, waarvoor de lerarenvereniging Wimecos aantrekkelijke geldprijzen beschikbaar stelde. De oplos-

singen van de Denkerjes moesten nu naar Van Tooren. Met de lezers bleef veel interactie bestaan. Dit was belangrijk, omdat de eerste lichting abonnees intussen van school was. Vanaf het schooljaar 1965–1966 was de onkostenvergoeding voor de redactieleden f750; het extra bedrag was bedoeld als boekengeld.⁴⁶

In 1966 vertrok Krooshof uit de redactie. Hij was gevraagd het auteursteam voor de nieuw uit te brengen methode *Moderne Wiskunde* te leiden. Dit trok hem aan, vooral omdat hij het schooltype mms — de enige voorloper van het nieuwe schooltype havo — goed kende.⁴⁷ In de redactie werd hij opgevolgd door A. B. Oosten, die leraar was aan dezelfde school.

Krooshof had een belangrijke rol gespeeld voor Pythagoras. Het blad stond er goed voor. Er waren in 1966 nog steeds ruim 22.000 abonnees. Van Tooren drong in een brief aan de NOCW aan op een officiële erkenning van zijn verdiensten. Krooshof kreeg inderdaad een mooie dankbrief van de NOCW. Ook wilde men hem een stoffelijk blijk van waardering doen toekomen. Nadat zijn echtgenote daarover telefonisch was gepolst, meldde Krooshof, voorzichtig, dat een Escher-prent hem wel wat zou lijken. Maar het werd het vierdelige werk van James R. Newman, *The world of mathematics* — wat de NOCW f46,50 kostte.⁴⁸

Tot besluit

Pythagoras was na enige jaren al een groot succes geworden. Dit had ongetwijfeld te maken met de grondige voorbereiding, waaronder de zorgvuldige keuze van de eerste redacteuren. Opvallend is dat de beide hoofdrolspelers vanuit de NOCW (Freudenthal en Wansink), en de beide eerste redacteuren (Krooshof en Broeder Erich) allen actief waren binnen de Wiskunde-Werkgroep. Deze vier hoofdpersonen wisten wat ze aan elkaar hadden, en de voorspoedige start van Pythagoras was aan hen te danken. ☺

Dankwoord

Een eerdere versie van deze aflevering is gelezen door J. A. F. de Rijk, A. B. Oosten en D. W. Soeteman. De archieven van H. Freudenthal, J. H. Wansink, het KWG en de Nederlandse Vereniging van Wiskundeleraars berusten in het Noord-Hollands Archief te Haarlem. Het archief van de NOCW berust sinds enige jaren bij het PWN; de auteurs zijn de directeur van het PWN erkentelijk voor de ruimhartig verleende inzage. Pythagoras en Euclides zijn online in te zien.

Er is echter ook nog een tweede aanleiding voor dit schrijven. Nu Krooshof er mee op houdt, lijkt het mij tijd te worden dat onze opdrachtgevers te weten komen dat hij gedurende vijf jaren het leeuwenandeel van de werkzaamheden verricht heeft. Het succes, dat Pythagoras bleek te hebben, is zonder twijfel het gevolg van zijn bewonderenswaardige werkkracht en vaardigheid. Broeder Erich en ik hebben daarbij alleen maar assistentie verleend. Ik hoop daarom van harte, dat de Onderwijscommissie officieel op deze redactiewisseling zal reageren.

Figuur 12 Fragment van de brief van Van Tooren aan de NOCW; 11-5-1966.

Noten

- 1 De NOCW was opgericht door het Wiskundig Genootschap. W. Kleijne, NOCW 50 jaar, *NAW* 5/5-4 (december 2004), 308–313.
- 2 Archief NOCW, notulen 11-11-1985.
- 3 H. Freudenthal, Dr. J.H. Wansink–80 jaar, *Euclides* 49-7/8 (maart/april 1974), 241–242; H. Freudenthal, In memoriam Johan H. Wansink, *NAW* 4/4 (maart 1986), 47–49.
- 4 Fred Goffree, Johan Wansink, Wiskundeleraar te Bussum, Schoonhoven, Zwolle, Arnhem en elders, in *Ik was wiskundeleraar* (Enschede, 1985), 65–99; Harm Jan Smid, Johan Wansink and his role in Dutch mathematics education, *Proceedings fourth International Conference on the History of Mathematics Education, in Turin 2014* (Rome, 2017), pp. 369–381.
- 5 Archief NOCW, notulen 24-2-1959.
- 6 Archief NOCW, notulen 21-4-1959.
- 7 vhm = voorbereidend hoger en middelbaar onderwijs, dat wil zeggen gymnasium, hbs, mms en andere.
- 8 Wimecos (wiskunde, mechanica, cosmografie) stond open voor leraren in genoemde vakken aan middelbare scholen. *Euclides* was het gezamenlijk orgaan van Wimecos en Liwenagel; zie ook de volgende noot.
- 9 Liwenagel (leraren in wiskunde en natuurwetenschappen aan gymnasia en lycea) was een afzonderlijke, kleinere organisatie.
- 10 Archief NOCW, notulen 11-11-1959.
- 11 Archief H. Freudenthal, Jaarverslag NOCW 1958.
- 12 De Wiskunde-Werkgroep behoorde tot de Werkgemeenschap voor Vernieuwing van Onderwijs en Opvoeding (W.V.O.). Spelling 'Wiskunde-Werkgroep' ontleend aan de titels van de artikelen: Joh.H. Wansink, De Wiskunde-Werkgroep van de W.V.O., *Euclides* 28-5 (januari 1953), 197–205, en H.J. Jacobs jr., Welke ontwikkelingsmomenten zijn er in het werk van de Wiskunde-Werkgroep van de afgelopen 25 jaar op te merken? *Euclides* 37-1 (september 1961), 1–10.
- 13 D. van Hiele-Geldof en G. Krooshof, *Wiskunde voor de mms* (J.B. Wolters, Groningen 1960). Mevrouw Van Hiele was in 1958 overleden. Krooshof was mede-auteur.
- 14 Archief H. Freudenthal, Jaarverslag NOCW 1958.
- 15 Gesprek J. Guichelaar met J.A.F. de Rijk, december 2010.
- 16 Jacobs, Wiskunde-Werkgroep 25 jaar (volledige titel zie noot 12), 10; Zsafia Ruttkay, De man met zes pseudoniemen, *NAW* 5/1-3 (september 2000), 282–286; Bespreking filmstrips van A.J. Poelman en Bruno Ernst door P.G.J. Vredenduin, *Euclides* 36, 91–92.
- 17 Archief NOCW, notulen 8-3-1960.
- 18 Archief H. Freudenthal, brieven Freudenthal aan Krooshof 9-3-1960, Krooshof aan Freudenthal 11-3-1960, Freudenthal aan Krooshof 12-3-1960, Freudenthal aan Broeder Erich 12-3-1960, Broeder Erich aan Freudenthal (briefkaart), Freudenthal aan Krooshof 11-4-1960, Krooshof aan Freudenthal 12-4-1960, Freudenthal aan Krooshof 14-4-1960, Freudenthal aan Broeder Erich 14-4-1960.
- 19 Archief J.H. Wansink, brieven Wansink aan uitgever Noordhoff 15-7-1960, uitgever Noordhoff aan Wansink 19-7-1960.
- 20 Archief J.H. Wansink, brieven Wansink aan uitgever Wolters 22-7-1960; Wansink aan Loonstra 16-10-1960, Wansink aan Van der Blij 21-10-1960.
- 21 Archief J.H. Wansink, notulen vergadering 22-12-1960. Niet vermeld is wie vergaderden.
- 22 Archief NOCW, notulen 9-2-1961.
- 23 *Euclides* 36-8 (mei 1961), 287–288.
- 24 *Euclides* 46-5 (januari 1971), 161.
- 25 Archief NOCW, brief Krooshof aan Freudenthal 29-9-1961; Jaarverslag NOCW 1962.
- 26 Deze verklaring werd enige malen door de auteurs gehoord.
- 27 Gesprek auteurs met A.B. Oosten 26-7-2016.
- 28 Archief NOCW, notulen NOCW 30-11-1961.
- 29 Archief NOCW, brieven Wansink aan uitgever Wolters 2-12-1961; Krooshof aan Wansink 27-7-1962, sub b.
- 30 *Euclides* 37, 267.
- 31 *Euclides* 38, 89; Archief Nederlandse Vereniging van Wiskundeleraren (NVvW), brief Wansink aan Hufferman 6-11-1962.
- 32 Archief NOCW, brieven Broeder Erich aan Wansink (ongedateerde kaart); Krooshof aan Wansink 27-7-1962; Broeder Erich aan Krooshof 28-7-1962; Krooshof aan Wansink 31-7-1962 (kaart); Wansink aan Krooshof 1-8-1962; Krooshof aan Wansink 28-9-1962.
- 33 Archief NOCW, brief Krooshof aan Bruno Ernst, Freudenthal en uitgever Wolters 14-5-1962.
- 34 Archief H. Freudenthal, brieven Krooshof aan Freudenthal 29-9-1961, Krooshof aan Freudenthal 14-10-1966 (kaart), Freudenthal aan Krooshof 16-3-1962, Krooshof aan Freudenthal 26-3-1962, Krooshof aan Freudenthal 16-4-1962, Freudenthal aan Krooshof 18-4-1962, Krooshof aan Freudenthal 6-5-1962, Freudenthal aan Broeder Erich 8-5-1962.
- 35 Archief H. Freudenthal, briefwisseling Freudenthal en Broeder Erich 12-11-1962 t/m 8-12-1962 (zeven brieven).
- 36 www.mathematicalpie.com.
- 37 *De Tijd De Maasbode* 14-9-1963. Archief H. Freudenthal, briefkaart Broeder Erich aan Krooshof 15-9-1963; Freudenthal kreeg de briefkaart doorgestuurd van Krooshof.
- 38 Gesprek auteurs met H.A.C. Huijsmans 28-9-2016. Velines = vereniging van leraren in natuur- en scheikunde.
- 39 Archief NOCW, Kasboek Stichting Jeugd en Wiskunde (= SJW), vanaf 1964.
- 40 Archief NOCW, brief Krooshof aan Freudenthal 25-4-1963; Notulen NOCW 10-5-1963.
- 41 Archief NOCW, brieven Krooshof aan NOCW 23-5-1963, NOCW aan Van Tooren 20-6-1963.
- 42 Frits Boersma, *Het Tweede VCL, de geschiedenis van een merkwaardige school* (1999), pp. 55–57, 119.
- 43 Mededeling van zijn oud-leerling J. van de Craats 17-9-2016.
- 44 Archief NOCW, brief Krooshof aan Monna 20-7-1963. N.B.: A.F. Monna was intussen secretaris van de NOCW. Verder zijn 'ulo' en 'mulo' twee namen voor hetzelfde schooltype.
- 45 Archief NOCW, brief Krooshof aan NOCW 23-5-1963.
- 46 Archief NOCW, brief Freudenthal aan redactie 16-11-1965, Kasboek SJW 1966.
- 47 Mededeling A.B. Oosten 26-7-2016.
- 48 Archief NOCW, brieven Krooshof aan NOCW 7-5-1966, Van Tooren aan NOCW 11-5-1966, Krooshof aan Monna 2-6-1966, Krooshof aan Monna 21-7-1966, Monna aan Krooshof 2-8-1966.

Herman te Riele

Archivaris en Inspecteur der Boekerij, KWG
Centrum Wiskunde & Informatica, Amsterdam
herman@cwi.nl

Nieuws

Mededelingen van het (K)WG: 1958–2017

Van januari 1958 tot en met december 2017 zijn de **Mededelingen van het (Koninklijk) Wiskundig Genootschap** verschenen en aan de leden verstuurd, van 1958–2001 in gedrukte vorm, van 1999–2017 in elektronische vorm. De allereerste uitgave meldt: “Ingevolge een besluit van het Bestuur van het Wiskundig Genootschap zal voortaan de tot nu toe gebruikelijke maandelijkse convocatiekaart worden vervangen door een uitvoeriger bulletin.” Na zestig jaar heeft het bestuur om verschillende redenen besloten deze vorm van communicatie met de leden te beëindigen. Dit werd op 1 december 2017 in de op één na laatste Mededelingen aan de leden meegedeeld (zie kader). De bestuursbeslissing tot opheffing van de Mededelingen is een agendapunt op de komende Algemene Ledenvergadering van het KWG tijdens het Nederlands Mathematisch Congres op 3 en 4 april 2018 in Veldhoven. In dit artikel legt Herman te Riele enkele memorabele gegevens betreffende de Mededelingen vast.

De belangrijkste informatie in de Mededelingen waren de incidentele ‘Mededelingen van het Bestuur’, met bijvoorbeeld de aankondiging van het jaarlijkse Nederlands Mathematisch Congres, van Algemene Ledenvergaderingen, van statutenwijzigingen en van belangrijke eenmalige gebeurtenissen, zoals de overgang van de Epsilon-uitgeverij van Ferdinand Verhulst naar het KWG en de oprichting van het Platform Wiskunde Nederland.

Vaste rubrieken waren: Agenda; Colleges, voordrachten en cursussen; Personalia; Promoties; Vacatures. Vanaf januari 1969 werd een rubriek ‘Boekbesprekingen’ in de gedrukte Mededelingen opgenomen. Van 1971–1976 was J. H. van Lint redacteur van deze rubriek en vanaf 1977–1998 W. van der Meiden. Deze rubriek maakte traditioneel een omvangrijk deel uit van het gedrukte boekje.

Een bijzondere Mededeling uit november 1961 was een omvangrijk wiskundig cryptogram van de hand van N. G. de Bruijn. De oplossing werd gepubliceerd in de Mededelingen van januari 1962 met de vermelding dat aan vijf goede inzenders, onder wie ene heer H. Brandt Corstius, als beloning een boekenbon van f 2,50 was toegekend.

Organisatie

De Mededelingen zijn vanaf de start in 1958 tot september 2001 in gedrukte vorm verschenen en per post aan de leden toegestuurd.

Ze verschenen maandelijks, met uitzondering van de maanden juni, juli en augustus, dus negen keer per jaar. Vanaf 1999 werd ook een elektronische versie geproduceerd: die verscheen ongeveer twintig keer per jaar en werd per e-mail verstuurd aan de leden die daar prijs op stelden en e-mail konden ontvangen. Bijna drie jaar lang hebben de gedrukte en de elektronische versie dus naast elkaar bestaan, als service naar de leden in verband met de overgang naar het digitale tijdperk.

Uit de Mededelingen 2017, nr. 20

Beëindiging Elektronische Mededelingen van het KWG per 1-1-2018

Per 1 januari 2018 zullen de Elektronische Mededelingen van het KWG worden stopgezet. De reden hiervoor is dat het lastig is om per e-mail agenda en nieuwsberichten te verspreiden zonder klachten te krijgen over leesbaarheid of aantal klikken die nodig zijn om de Mededelingen op het scherm zichtbaar te maken. De huidige opzet is verouderd en kost de opstellers veel tijd. Verder verschaalt het aanbod en er bestaat enige twijfel of alle onderdelen van de Mededelingen gelezen worden.

Voor de agenda is de Wiskunde Persdienst beschikbaar en nieuwsberichten staan o.a. op de WPD en/of de KWG website.

De Mededelingen van het Bestuur die regelmatig aan het begin van de Elektronische Mededelingen worden opgenomen blijven bestaan maar in een andere vorm: ze worden vanaf 1-1-2018 als tekstbericht aan de KWG-leden, van wie we een correct e-mailadres hebben, toegezonden met als Subject: ‘Mededeling(en) van het KWG-bestuur’. Dit zijn bv. aankondigingen van het NMC, van Algemene Ledenvergaderingen, van Statutenwijzigingen en van andere voor het Genootschap belangrijke zaken.

Mocht u toch prijs stellen op regelmatige toezending van agenda en nieuwsberichten dan verzoeken we u mee te denken over een nieuwe opzet.

Voor evt. commentaar/suggesties, mail naar wiskgenoot@wiskgenoot.nl.

De zes redacteuren van de Mededelingen

N.G. de Bruijn (jan. 1958–mei 1960)
 A. Heyting (september 1960–september 1968)
 F. Oort (oktober 1968–mei 1972)
 C.G. Lekkerkerker (september 1972–december 1984)
 H.G. Pijls (januari 1985–april 2003)
 H.J.J. te Riele (mei 2003–december 2017)

De Mededelingen stonden onder leiding van een redacteur (zie kader). Zij waren verantwoordelijk voor het eindresultaat dat naar de leden verzonden werd. Daarnaast was er een groep correspondenten — bestaande uit contactpersonen op de verschillende academische wiskunde-instellingen — die de meeste kopij aanleverden. Het redactieadres voor de gedrukte versie was het toenmalige Mathematisch Instituut, nu Korteweg–de Vries Instituut voor Wiskunde, van de Universiteit Amsterdam. Het redactieadres voor de elektronische versie was het Centrum Wiskunde & Informatica (CWI).

De gedrukte versie werd geproduceerd door het toenmalige Mathematisch Centrum (MC), nu CWI. Dit is een van de vele (K)WG-activiteiten die door het MC/CWI zijn (c.q. worden) ondersteund.



V.l.n.r. Tom Koornwinder (trouw en kritisch lezer van de Mededelingen), Henk Pijls (de voorlaatste redacteur), Joke Blom, Minnie Middelberg met achter zich haar collega en beschermheer Ruud Heerenveen, Annette Kik en Herman te Riele.

De volgende MC/CWI'ers hebben daarbij een belangrijke rol gespeeld: Annette Kik als correspondent, Chester Thomson als editor en verzender, Minnie Middelberg als kopijverwerker en Jan Schipper en Jos van der Werf als drukker.

Vanaf haar aantreden als secretaris en webmaster van het KWG in 2011 heeft Joke Blom zich ingezet voor het mede-redigeren, verzenden en archiveren van de elektronische versie van de Mededelingen. Deze zijn te vinden op www.wiskgenoot.nl/Mededelingen.

Afscheid

Het beëindigen van de ElMedKWG (de gebruikelijke afkorting voor de lange naam) is op zich geen reden tot een feestje maar de laatste redacteur wilde deze gebeurtenis toch niet ongemerkt voorbij laten gaan. Tijdens een koffie-met-gebak-bijeenkomst op 13 december 2017 werd Minnie Middelberg in de bloemen gezet voor haar jarenlange inzet bij het verzamelen en editen van de kopij van de Mededelingen en werd het CWI hartelijk bedankt voor de fantastische ondersteuning van de Mededelingen gedurende hun zestigjarig bestaan.



Herman te Riele, Minnie Middelberg en Joke Blom

Walter Daems

Faculteit Toegepaste Ingenieurswetenschappen
Universiteit Antwerpen
walter.daems@uantwerpen.be

Paul Levrie

Faculteit Toegepaste Ingenieurswetenschappen
Universiteit Antwerpen
Departement Computerwetenschappen
KU Leuven
paul.levrie@uantwerpen.be

Evenement Abelprijs

Abelprijs 2017 voor Yves Meyer

Yves Meyer ontving in 2017 de Abelprijs (die samen met de Fieldsmedaille als de Nobelprijs voor de wiskunde wordt beschouwd) omwille van zijn fundamentele bijdrage aan de wavelettheorie. Naast deze meest prestigieuze wiskundeprijs won Meyer ook al de Salemprijs (1970), de Carrièreprijs (1972), de grote prijs van de Franse Académie des Sciences (1984), en de Gaussprijs (2010). Als eerbetoon en ook gewoon omdat het enorm boeiend is, gaan Walter Daems en Paul Levrie dieper in op het leven en werk van de laureaat en meer specifiek op de theorie der wavelets.

Van wereldoorlog tot wereldklasse

Toen Yves Meyer op 19 juli 1939 te Parijs werd geboren, liep de politieke spanning in Europa hoog op. De tweede wereldoorlog stond voor de deur. Niets — buiten zijn Franse afkomst — deed vermoeden dat op die doordeweekse woensdag een groot wiskundige het levenslicht zag. Bijna tachtig jaar later is Yves Meyer bekend om zijn bijdragen op het vlak van harmonische analyse, getaltheorie, singuliere integraal-operatoren (Calderóntheorie) en wavelets. Hij is gelauwerd als lid van de Académie des Sciences (1993), ontving de C.F. Gaussprijs (2010), werd Fellow van de AMS en won vorig jaar de Abelprijs (2017), deze laatste voor zijn bijdrage aan de wavelettheorie.

Opleiding

We keren ongeveer 75 jaar terug in de tijd. Ten gevolge van de oorlog verhuist de familie Meyer naar Tunesië. Yves groeit op in Tunis waar hij naar school gaat in de Lycée Carnot, die hij zelf omschrijft als 'een intellectueel erg stimulerende omgeving', onder meer omwille van de erg goede leraren. Zijn liefde gaat vooral uit naar wijsbegeerte en letteren, maar hij blijkt ook erg goed te zijn in wiskunde.

Net zeventien geworden, keert de jonge Meyer terug naar Frankrijk waar hij een voorbereidend jaar volgt om dan toela-

tingsexamen te doen in de École Normale Supérieure (ENS) de Paris in de rue d'Ulm (waar onder anderen ook Louis Pasteur les volgde en waar je wiskunde en fysica, maar ook letteren kon studeren). Ondanks zijn buitengewone wiskundetalent twijfelt Meyer nog over zijn toekomst. De keuze voor wiskunde is op dat ogenblik louter economisch gemotiveerd. Ongeveer een

jaar later eindigt hij als eerste in dat toelatingsexamen, waarna hij zijn studies start aan de ENS.

Zijn liefde voor wijsbegeerte en letteren is geen onbelangrijk detail: tijdens zijn studies heeft hij meer contact met de studenten wijsbegeerte en letteren dan met zijn wetenschapscollega's. Een van zijn medeleerlingen omschreef hem als 'de enige wetenschapper waarmee je kon praten'. Zijn echte passie voor wiskunde komt pas later. Zijn sociale karakter (geen evidentie voor exacte wetenschappers) zou later een ongelooflijke troef blijken.

In 1960 breekt de Algerijnse oorlog uit. Alle jonge mannen worden opgeroepen om dienst te doen in het leger, tenzij ze bezig



Yves Meyer

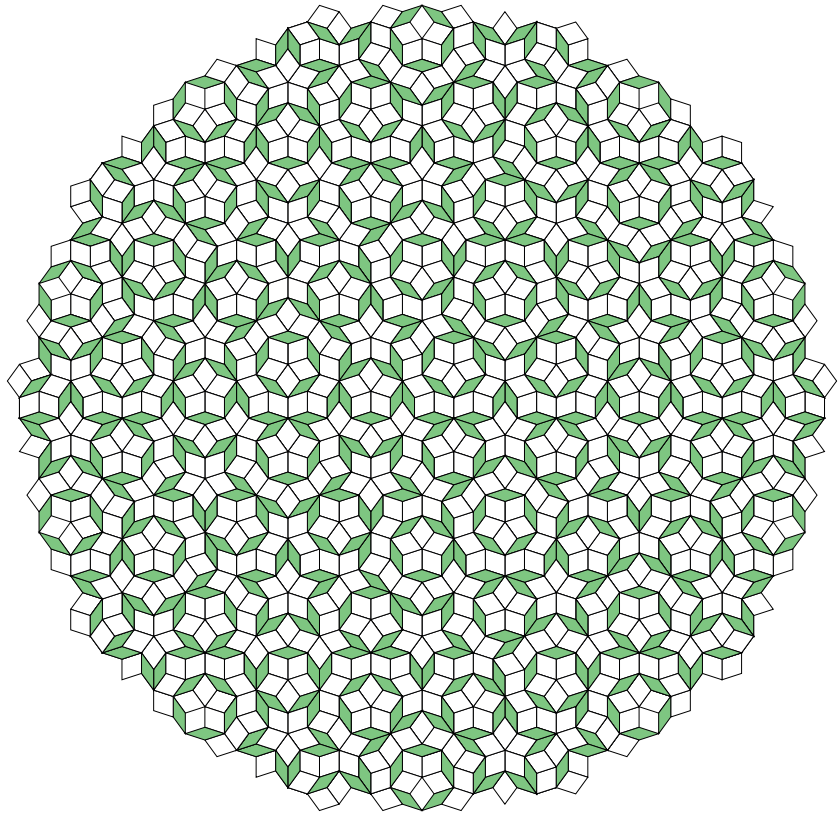
zijn met een doctoraat. Meyer zei hierover recent [17]: “Beginning a Ph.D. to avoid being drafted would be like marrying a woman for her money.” Ook Meyer wordt dus opgeroepen maar vraagt om les te mogen geven. Dat wordt toegestaan en hij geeft gedurende drie jaar les in de Prytanée Nationale Militaire, een van de zes militaire scholen in Frankrijk, gelegen in de Loire-streek.

Doctoraat

Na zijn legerdienst wordt hij in 1963 aangeworven als assistent in het departement wiskunde van de Université de Strasbourg. Op dat ogenblik werkten daar veertien professoren en veertien assistenten. Als assistent kreeg je de volledige vrijheid in het kiezen van een onderwerp voor een PhD en het zoeken van een promotor. Meyers keuze wordt bepaald door het lezen van een boek (uit 1935) van Antoni Zygmund [18]: *Trigonometric Series*. Nadat hij een tijdje heeft gewerkt op dit onderwerp, gaat hij op zoek naar een promotor. Op advies van Pierre Cartier, een van de wiskunde-professoren, neemt Meyer contact op met Jean-Pierre Kahane (1926–2017), professor aan het Centre d’Orsay de l’Université de Paris-Sud. Meyer had in Tunis al kennisgemaakt met Kahane, toen die in de Lycée Carnot een lezing gaf over wiskunde, meer bepaald over Fourierreeksen. Toen hij Kahane zijn resultaten liet zien en vroeg of hij hem bij zijn verdere onderzoek wilde begeleiden, antwoordde Kahane: “Dat zou belachelijk zijn. Je hebt klaarblijkelijk al een doctoraat geschreven.” Even later behaalt Meyer dan ook officieel zijn doctoraat, in 1966, met Kahane als promotor.

Het Calderón-programma

Datzelfde jaar wordt Meyer aangenomen aan de Université de Paris-Sud, waar hij zijn samenwerking met Kahane verder uitdiept. Hij verandert hiervoor van onderzoeksonderwerp, wat normaal was voor startende doctores: ze moesten zich losmaken van onder de vleugels van hun promotor en bewijzen dat ze zelfstandig onderzoek konden doen. Meyer neemt de omgekeerde weg (hij had immers al volledig zelfstandig zijn doctoraatsonderzoek gevoerd) en zet in de voetsporen van Kahane mee zijn schouders onder de getaltheorie. Hij begint te werken op diofantische benaderingen, lost in die periode een belangrijk probleem op dat verband houdt met getallen van Pi-



Figuur 1 Penrose-betegeling.

sot en Salem en harmonische analyse [13], en wint hiermee in 1970 de Salemprijs. Dit onderzoek leidt tot de eerste echt grote bijdrage van Meyer aan de wiskunde: hij ontwikkelt de theorie van de modelsets. De Meyersets zijn naar hem genoemd. Er zijn ook links met de theorie van de *mean-periodic functions*, waarvoor Meyer samenwerkt met Jean Delsarte, een van de grondleggers van de Bourbaki-groep.

Dit onderzoek vindt later nog toepassing in de chemie: in 1981 bestudeert N.G. de Bruijn de niet-periodieke betegelingen van het vlak die Roger Penrose in 1974 had uitgedacht (zie Figuur 1). De Bruijn bewijst dat een Penrose-betegeling kan gezien worden als een projectie op een vlak van een rooster in vijf dimensies. Hij legt daarbij de link met het werk van Meyer. In 1982 ontdekt Daniel Shechtman kristallen waarin de atomen op een aperiodieke manier gerangschikt zijn, zoals bij de Penrose-betegelingen, de zogenaamde quasi-kristallen, wat hem in 2011 de Nobelprijs chemie oplevert. Interessante kanttekening: in 2007 vindt de fysicus Peter Lu gelijkaardige patronen op Islamitische bouwwerken uit de vijftiende eeuw [10].

Meyer werkt in die periode ook op ergodische theorie, samen met Benjamin Weiss,

en bewijst dat Rieszproducten isomorf zijn met Bernoulli shifts [15].

In 1974 verandert Meyer opnieuw van onderzoeksonderwerp. Rond 1960 startte Alberto Pedro Calderón met wat nu bekend staat als het ‘Calderón-programma’, een onderzoek dat draait rond singuliere integraaloperatoren. Samen met Ronald Raphael Coifman (Yale University, bekend als de man die de ruis probeerde te verwijderen van een opname van Johannes Brahms die piano speelt, op een Edison-cilinder daterend uit 1889) slaagt Meyer erin om in dit onderzoeksgebied een aantal belangrijke resultaten te bewijzen. Hieruit blijkt al een eerste keer het vermogen van Meyer om bruggen te slaan tussen verschillende domeinen in de wiskunde. Tijdens een lunch met een van de gaststudenten in het Centre d’Orsay, Alan McIntosh, weet hij de connectie te leggen tussen het werk van Tosio Kato (de promotor van Alan McIntosh in Berkeley) over operatortheorie en het werk van Calderón (in Chicago) en bewijst zo — als kers op de taart — in 1982 [2] het vermoeden van Calderón.

Van 1980 tot 1986 geeft Meyer ook les aan de École Polytechnique te Parijs. Daar begint het avontuur met de wavelets.

Een fotokopieerapparaat, olie en trillingen

Zoals hij zelf zegt komt Meyer in 1984 bijna per toeval in contact met wavelets. Het verhaal gaat als volgt: het hoofd van zijn afdeling aan de École Polytechnique, Jean Lascoux, had de gewoonte alles te fotokopieren wat hij wilde lezen. Dat had als gevolg dat collega's die zelf kopieën wilden maken, vaak moesten wachten. Zo ook Meyer. Op een dag in september 1984 stond Meyer te wachten tot het zijn beurt was, en om de tijd te doden had hij (in tegenstelling tot vele collega's die geïrriteerd waren door Lascoux's monopolie op de kopieermachine) de gewoonte om over wiskunde te praten met Lascoux. Die gulheid om alles te delen (die hij al van kindsbeen meedroeg) bleek alweer de 'juiste blik over het muurtje' op te leveren. Lascoux toonde hem een preprint van een artikel van een theoretisch fysicus uit Marseille, Alex Grossmann, omdat hij dacht dat dit Meyer wel zou interesseren. Coauteur was Jean Morlet, een geofysicus van een groot Frans oliebedrijf die om praktische redenen (het zoeken naar olie in de ondergrond) bij Grossmann terecht was gekomen. Eenvoudig gesteld stuurde men vibraties de grond in om vervolgens hun echo's te analyseren. Uit de frequenties van die echo's kan je informatie afleiden over de dikte en de samenstelling van de grondlagen. Maar omdat de echo's van die verschillende lagen met elkaar interfereren, is het erg moeilijk om er de juiste informatie uit te halen: de Fouriertransformatie schiet dan tekort. Morlet had het geprobeerd met de short-time Fouriertransformatie (of Gabortransformatie) [7], maar merkte op dat werken met een vaste breedte voor het analysevenster, niet hielp. Het artikel gebruikte een nieuwe methode die Meyer bekend voorkwam en die hij was tegengekomen bij het werken met Calderón–Zygmund-operatoren.

Heaviside, Fourier en Gabor

Laten we even enkele stappen terug zetten in de signaalanalyse (of meer wiskundig: functie-analyse). De zoektocht naar inzicht in specifieke kenmerken van signalen ('features' in het Engels) is eeuwenoud en speelt zich af tussen twee opponenten: tijd en frequentie. In die zoektocht proberen we signalen te ontbinden in basiscomponenten in de hoop dat die ons meer inzicht geven in de kenmerken van de signalen (analyse) of dat ze ons gemakkelijker operaties op signalen laten uitvoeren (bewerking of synthese).

Aan het ene eind van de schaal kunnen we signalen ontbinden volgens basiscomponenten die oneindig veel detail bieden in de tijd, maar geen detail in de frequentie. Oliver Heaviside was een van de eersten om een signaal te beschouwen als een som van verschoven eenheidsimpulsen met behulp van een functie (of correcter *distributed*) die later bekend zou worden als de Diracimpuls [8]. Hij creëerde de impulsdecompositie:

$$f(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(\tau) \delta(t - \tau) d\tau. \quad (1)$$

Het andere eind van de schaal werd bestudeerd door Joseph Fourier [6]. Volgens het idee van Fourier ontbinden we een signaal in componenten die oneindig veel detail bieden in de frequentie, maar geen detail in de tijd, met name de Fourierkernen $e^{j\omega t}$:

$$f(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} F(\omega) e^{j\omega t} d\omega. \quad (2)$$

waarbij $F(\omega)$ de Fouriergetransformeerde van het signaal f is en kan berekend worden als:

$$F(\omega) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(t) e^{-j\omega t} dt.$$

We noteren deze transformatie zo: $f \xrightarrow{\mathcal{F}} F$.

De theoretische fundamenten voor signaalontbindingen liggen in de lineaire operatortheorie en de uitbreiding van het begrip vectorruimte tot ruimtes met een oneindige dimensie. Hierbij bieden de Hilbertruimtes $L^2(\mathbb{R})$ en $\ell^2(\mathbb{Z})$ het nodige fundament om het concept van het ontbinden van N -dimensionale vectoren in goedgekozen basisvectoren door te trekken naar het ontbinden van (continue en discrete) functies. Het begrip *scalair product* speelt hierin een sleutelrol. Voor functies f en g van de tijd t in $L^2(\mathbb{R})$ noteren we dit als $\langle f(t), g(t) \rangle$ en definiëren we dit als

$$\langle f, g \rangle = \int_{-\infty}^{+\infty} f(t) g^*(t) dt.$$

waarbij $g^*(t)$ de complex toegevoegde is van $g(t)$. Hieraan kunnen we eventueel ook nog een gewichtsfunctie toevoegen.

Indien de verzameling basisvectoren $\{b_\gamma(t)\}$ met $\gamma \in \Gamma$ een orthogonale familie vormt, wat wil zeggen

$$\langle b_{\gamma_1}, b_{\gamma_2} \rangle = \begin{cases} 1 & \text{als } \gamma_1 = \gamma_2, \\ 0 & \text{als } \gamma_1 \neq \gamma_2, \end{cases}$$

dan kunnen we de ontbinding van een functie in termen van de basisvectoren b_γ ,

$$f(t) = \int_{\Gamma} F(\gamma) b_\gamma(t) d\gamma$$

berekenen als:

$$F(\gamma) = \langle f, b_\gamma \rangle = \int_{-\infty}^{+\infty} f(t) b_\gamma^*(t) dt.$$

Deze formule kan bijvoorbeeld gebruikt worden om de waarden van $F(\omega)$ in (2) te berekenen.

Om een weg te banen tussen de twee extremen, tijd en frequentie, moeten we op zoek naar basisvectoren die het midden houden tussen de basisvectoren van de impulsdecompositie (1) en de Fourierdecompositie (2). Dit zijn basisfuncties $\phi_\gamma(t)$, ook wel atomen genoemd, die een beperkte voetafdruk hebben in tijd en frequentie. Indien we ervoor kiezen dat

$$\int_{-\infty}^{+\infty} |\phi_\gamma(t)|^2 dt = 1,$$

dan vormt $|\phi_\gamma(t)|^2$ een welgevormde (waarschijnlijkheids)dichtheidsfunctie waardoor we — geïnspireerd door de beschrijvende statistiek — de positie t_γ en breedte $\sigma_{t,\gamma}$ in de tijd van de basisfunctie $\phi_\gamma(t)$ kunnen definiëren als:

$$t_\gamma = \int_{-\infty}^{+\infty} t |\phi_\gamma(t)|^2 dt,$$

$$\sigma_{t,\gamma}^2 = \int_{-\infty}^{+\infty} (t - t_\gamma)^2 |\phi_\gamma(t)|^2 dt.$$

Indien we stellen dat $\Phi_\gamma(\omega)$ de Fouriergetransformeerde is van $\phi_\gamma(t)$ dan kunnen we (op basis van Parsevals theorema) een gelijkaardige positie en breedte in het frequentiedomein berekenen als:

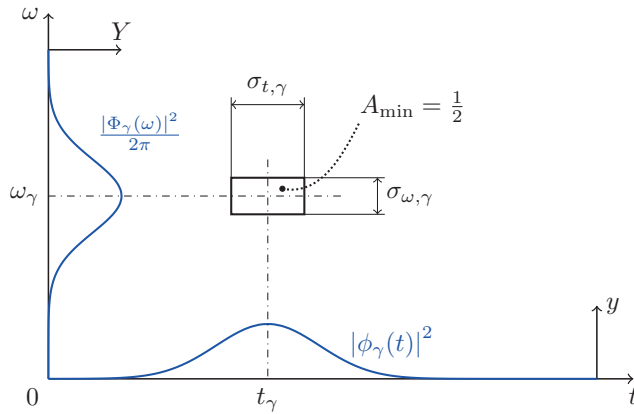
$$\omega_\gamma = \int_{-\infty}^{+\infty} \omega \frac{|\Phi_\gamma(\omega)|^2}{2\pi} d\omega,$$

$$\sigma_{\omega,\gamma}^2 = \int_{-\infty}^{+\infty} (\omega - \omega_\gamma)^2 \frac{|\Phi_\gamma(\omega)|^2}{2\pi} d\omega.$$

De breedte van de atomen is een maat voor hoe gedetailleerd de informatie is die de signaalontbinding ons oplevert. Er blijkt een fundamentele ondergrens aan dit detailniveau te zijn [11], met name

$$\sigma_{t,\gamma} \sigma_{\omega,\gamma} \geq \frac{1}{2}$$

wat we om evidente redenen ook wel het *Heisenberg onzekerheidsprincipe* noemen (zie Figuur 2).



Figuur 2 De minimale afmeting van de atomen $\phi_\gamma(t)$ wordt begrensd door het Heisenberg onzekerheidsprincipe.

Dennis Gabor¹ stelde voor om als atomen de *shiftable windowed Fourier kernel* te gebruiken [7]:

$$\phi_{\tau,\xi}(t) = w(t-\tau) e^{j\xi t}$$

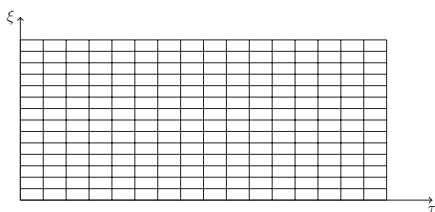
waarbij ξ de hoekfrequentie voorstelt en $w(t)$ een symmetrische, genormaliseerde vensterfunctie is, dat wil zeggen $w(t) = w(-t)$ en $\int_{-\infty}^{+\infty} |w(t)|^2 dt = 1$. Deze verschoven vensterfunctie zorgt ervoor dat de Fourierkern beperkt wordt tot een vast venster rond een vrij gekozen positie τ .

Hierbij moeten we opmerken dat de verzameling Gabor-kernels niet langer een basis vormt voor $L^2(\mathbb{R})$, ze is namelijk overcompleet. We spreken dan ook niet langer over een Gaborbasis, maar over een Gaborwoordenboek. Het Gaborwoordenboek vormt het fundament voor de short-time Fouriertransformatie S.

$$\begin{aligned} f(t) &\xrightarrow{S} F(\tau, \xi) = \langle f, \phi_{\tau, \xi} \rangle \\ &= \int_{-\infty}^{+\infty} f(t) w(t-\tau) e^{-j\xi t} dt \end{aligned}$$

Dikwijls geeft men $|F(\tau, \xi)|^2$ grafisch weer als een zogenaamd *spectrogram*. Het feit dat de atomen een vaste breedte hebben in tijd en frequentie, levert een spectrogram met uniforme dekking op (zie Figuur 3).

Men kan aantonen dat de inverse transformatie bestaat en gelijk is aan



Figuur 3 Uniforme dekking van de tijd-frequentieruimte door de short-time Fourier-atomen.

$$f(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} F(\tau, \xi) w(t-\tau) e^{j\xi t} d\xi d\tau$$

waaruit blijkt dat de voorstelling van Figuur 3 waarbij de atomen naast elkaar worden voorgesteld niet correct is. Eigenlijk hebben we een oneindig dichte dekking van het τ, ξ vlak nodig om het oorspronkelijke signaal te reconstrueren.

Wavelets

Een fundamenteel nadeel van het gebruik van vaste vensterfuncties is dat ze atomen met een constante breedte opleveren, zowel in tijd als in frequentie, en dat is waar Jean Morlet tegenaan liep. Samen met Grossmann ontwikkelt hij een theorie om signalen te analyseren op basis van basisfuncties die net zoals de basisfuncties van Gabor gelokaliseerd zijn in tijd en frequentie, maar ditmaal met een variabele breedte. Het is op dat ogenblik dat Meyer de preprint van Morlet en Grossmann in handen krijgt, en onmiddellijk de trein neemt naar Marseille, om met hen samen te werken. Daar ontmoet hij ook Ingrid Daubechies. Hij was, zoals hij het zelf zegt [5], als het ware de vierde muskietier.

We starten met een generatorfunctie $\psi(t)$, de *moederwavelet* genaamd, die dan geschaald en verschoven wordt:

$$\psi_{\tau,s}(t) = \frac{1}{\sqrt{s}} \psi\left(\frac{t-\tau}{s}\right), \quad s \in \mathbb{R}_0, \tau \in \mathbb{R}.$$

De factor $1/\sqrt{s}$ zorgt ervoor dat elke wavelet ongeacht zijn schaling dezelfde lengte $\|\psi(t)\|$ heeft.

Zo krijgen we dan de *continue wavelet-transformatie* (CWT):

$$f(t) \xrightarrow{W} F(\tau, s) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(t) \frac{1}{\sqrt{s}} \psi^*\left(\frac{t-\tau}{s}\right) dt.$$

Net zoals bij de short-time Fouriertransformatie, wordt $|F(\tau, s)|^2$ ook hier frequent grafisch weergegeven in een zogenaamd *scaleogram*.

Om een bruikbare wavelettransformatie op te leveren die ook omkeerbaar is, moet de moederwavelet voldoen aan de *toelaatbaarheidsvoorwaarde*:

$$0 < C_\psi = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{|\Psi(\omega)|^2}{|\omega|} d\omega < +\infty \quad (3)$$

waarbij we veronderstellen dat $\psi(t) \xrightarrow{F} \Psi(\omega)$. Vaak worden wavelets genormaliseerd zodanig dat $C_\psi = 1$. De vergelijking (3) betekent impliciet dat $\Psi(0) = 0$, waardoor de gemiddelde waarde van $\psi(t)$ nul moet zijn. Anders gesteld: $\psi(t)$ moet een oscillerend karakter hebben, het is dus een golf.

Onder deze toelaatbaarheidsvoorwaarde kunnen we de wavelettransformatie inverteren. Voor reële wavelets kan dit door gebruik te maken van:

$$f(t) = \frac{1}{2\pi C_\psi} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{s^2} \int_{-\infty}^{+\infty} F(\tau, s) \psi_{\tau,s}(t) d\tau ds. \quad (4)$$

Merk op dat in de discussie over wavelets tot nog toe nergens geëist wordt dat de wavelets onderling orthogonaal zijn. Meyer leek toen als eerste² een wavelet voor te stellen (in het frequentiedomein), nu gekend als de Meyer-wavelet (zie Figuur 4) die het mogelijk zou maken om het waveletwoordenboek te beperken tot een (orthogonale) basis [4,14]:

$$\Psi(\omega) = \begin{cases} 0 & \text{tenzij,} \\ \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \begin{cases} e^{j\frac{\omega}{2}} \sin\left(\frac{\pi}{2} \nu\left(\frac{3|\omega|}{4\pi} - 1\right)\right) & \text{als } \frac{2\pi}{3} \leq |\omega| \leq \frac{4\pi}{3}, \\ e^{j\frac{\omega}{2}} \cos\left(\frac{\pi}{2} \nu\left(\frac{3|\omega|}{4\pi} - 1\right)\right) & \text{als } \frac{4\pi}{3} \leq |\omega| \leq \frac{8\pi}{3}, \end{cases} \end{cases}$$

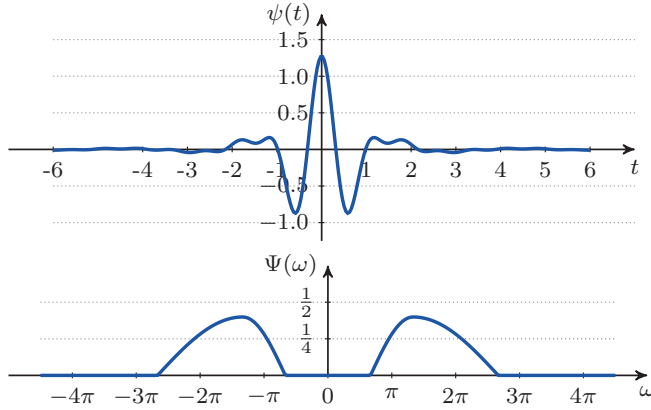
waarbij

$$\nu(x) = \begin{cases} 0 & \text{als } x < 0, \\ x & \text{als } 0 \leq x \leq 1, \\ 1 & \text{als } x > 1. \end{cases}$$

Meyer werkte in die tijd intens samen met Ronald Coifman en Ingrid Daubechies (VUB Brussel, 1987–1994 Bell Labs, 1994–2011 Princeton University, sinds 2011 Duke University) om de wavelettheorie verder te ontwikkelen.

Meyer toonde aan wat voor de short-time Fouriertransformatie niet mogelijk bleek, namelijk dat het aantal waarden van τ en s dat men moest beschouwen kon beperkt worden tot

$$s = s_0^n \quad \text{en} \quad \tau = m s_0^n \tau_0$$



Figuur 4 The Meyer moederwavelet in het tijdsdomein (boven) en het frequentiedomein (onder).

met s_0 een goed gekozen reële schalingsverhouding (verschillend van 0 en 1), τ_0 een goede basisverschuiving en $m, n \in \mathbb{Z}$, waarbij de bekomen set wavelets een orthonormale basis vormt voor $L^2(\mathbb{R})$.

De reconstructieformule (4) beperkt zich dan tot:

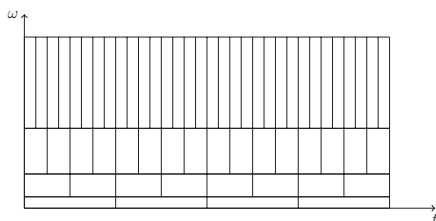
$$f(t) = \frac{1}{2\pi C_\psi} \sum_{m,n \in \mathbb{Z}} F(ms_0^n \tau_0, s_0^n) \psi_{ms_0^n \tau_0, s_0^n}(t)$$

waarbij vaak gekozen wordt voor $s_0 = 2$ (dyadische wavelets). Dit leidt tot een niet-uniforme dekking van de tijd-frequentieruimte (zie Figuur 5).

Het begrip wavelets kan overigens nog verruimd worden tot bi-orthogonale wavelets. We verlaten dan het idee van een orthogonale waveletbasis die dient om zowel het signaal op te projecteren (analyse) als het te reconstrueren (synthese). In plaats daarvan gebruiken we een willekeurige, niet-orthogonale waveletbasis en beschouwen die samen met de bijhorende reciproke basis. Een dergelijk stel van twee basissen noemen we bi-orthogonaal. De enige voorwaarde waaraan een waveletbasis moet voldoen om een volledige reconstructie mogelijk te maken is:

$$A^2 \leq \sum_{m,n \in \mathbb{Z}} |\langle f, \psi_{ms_0^n \tau_0, s_0^n}(t) \rangle|^2 \leq B^2$$

voor een willekeurige $f \in L^2(\mathbb{R})$ en



Figuur 5 Niet-uniforme dekking van de tijd-frequentieruimte door de (dyadische) wavelettransformatie-atomen.

$A, B \in \mathbb{R}_0^+$. Als aan deze voorwaarde voldaan is, dan noemen we deze basisfuncties een *frame* [4]. Indien $A = B$, dan spreken we van een *tight frame* en is de basis orthogonaal. De vorige vergelijking kan op die manier beschouwd worden als een veralgemening van het theorema van Plancherel. Als $A \neq B$, dan kan een reciproke basis gevonden worden (in waveletterminologie een *duaal frame*), die volledige reconstructie toelaat. Het zijn dergelijke bi-orthogonale (Cohen–Daubechies–Feauveau [1]) wavelets die ook in de JPEG2000-compressiestandaard worden gebruikt. Indien u een film in digitaal formaat bekijkt is de kans groot dat deze wavelets achter de schermen aan het werk zijn.

Multiresolutie-analyse

Toen Meyer in 1986 in de Verenigde Staten van Amerika een cursus over wavelets verzorgde, werd hij gecontacteerd door een landgenoot die aan de Universiteit van Pennsylvania doctoraatsonderzoek deed naar beeldverwerking: Stéphane Mallat [9]. Mallat, toen slechts 23 jaar, had het briljante inzicht dat verschillende wetenschappelijke community's eigenlijk met hetzelfde onderwerp bezig waren: hij, als beeldverwerker met piramide-algoritmes, de signaalverwerkers met subband coding, de spraakverwerkers met kwadratuurspiegelfilters en de fysici met wavelets. Meyer, toen 47 jaar oud, had de gave om deze jonge hengst naar waarde te schatten en hem te helpen zijn punt te bewijzen. Op korte tijd ontwikkelden ze samen fundamentele inzichten die bekend zouden worden als multiresolutie-analyse en die iedereen plots deed beseffen dat ze allen hetzelfde probleem aan het oplossen waren. De artikelen die hun inzichten beschrijven (onder

andere [12]), verschenen met als enige auteur Stéphane Mallat, een indrukwekkende generositeit van Meyer. De ingenieurs die zich bezighielden met signaalverwerking werden zo plots intense gebruikers van de theorie der wavelets waar ze tot dan toe minachtend op neerkeken als *Spielerei* van de wiskundigen.

Het idee is dat wavelets toelaten om $L^2(\mathbb{R})$ te beschouwen als een sequentie van in elkaar gesloten ‘multiresolutie’ subruimtes V_i met

$$\{0\} \subset \dots \subset V_2 \subset V_1 \subset V_0 \subset V_{-1} \subset V_{-2} \subset \dots \subset L^2(\mathbb{R})$$

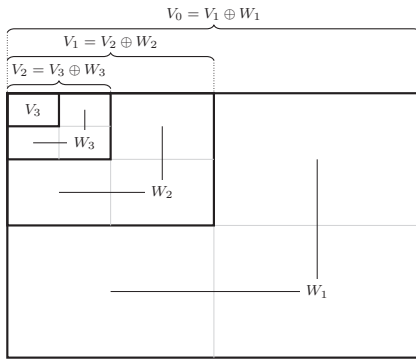
waarbij we een signaal f uit de ruimte $L^2(\mathbb{R})$ kunnen benaderen door het te projecteren op V_i wat benaderingen oplevert van het signaal f met voor dalende indexen i een stijgende nauwkeurigheid. Die stijgende nauwkeurigheid benoemen we als stijgende *resolutie* (vermogen om fijne details te beschrijven). Om te kunnen spreken van een multiresolutie-analyse moeten de verzamelingen V_i aan een aantal voorwaarden voldoen zoals (1) translatie-invariantie voor gehele veelvouden van 2^i binnen het resolutieniveau, (2) schalingsinvariantie met schalingsfactor 2^{j-i} tussen de niveaus en (3) genereerbaarheid van de subruimte V_0 op basis van een eindig aantal zogenaamde *schalingsfuncties*.³ Dit laatste wil zeggen dat de schalingsfunctie(s) en hun getransleerde varianten de subruimte V_0 volledig opspannen. Indien we een goede (set) schalingsfunctie(s) kunnen bepalen zodat de unie van alle subruimtes *topologisch dicht* is in $L^2(\mathbb{R})$, en de subruimtes orthogonaal zijn, dan kunnen we spreken van een multiresolutie-analyse. Dit wil zeggen dat we elke signaal $f \in L^2(\mathbb{R})$ met een arbitraire resolutie kunnen benaderen.

Ook hier bewijst orthogonaliteit zijn dienst. Als we vertrekken van een schalingsfunctie $\phi(t)$ die orthogonaal is ten opzichte van zijn verschoven varianten en een beperkte voetafdruk heeft, dan kunnen we omwille van dit laatste eenvoudig aantonen dat de schalingsfunctie van V_0 kan geschreven worden als een eindige lineaire combinatie van de (getransleerde) schalingsfuncties op niveau V_{-1} (immers $V_0 \subset V_{-1}$):

$$\phi(t) = \sum_i \alpha_i \phi(2t - i). \quad (5)$$

Indien we de bijhorende moederwavelet $\psi(t)$ definiëren als

$$\psi(t) = \sum_i \beta_i \phi(2t - i) \text{ met } \beta_i = (-1)^i \alpha_{-i} \quad (6)$$



Figuur 6 Multiresolutie-analyse voor digitale beelden.

dan kan men aantonen dat de ruimte W_0 die door $\psi(t)$ en haar geschaalde varianten wordt opgespannen (die ook samen een orthogonale verzameling functies vormen) ook een deel is van V_0 . De specifieke keuze van $\psi(t)$ door een omgekeerde en alternerende sequentie van a_i te nemen in combinatie met de orthogonaliteit van de schalingsfuncties, leidt tot $W_0 \perp V_0$ en ook $V_{-1} = V_0 \oplus W_0$. De sequentie a_i noemt men doorgaans de *scalingsgetallen* en de sequentie $(-1)^i a_{-i}$ de *waveletgetallen*. De subruimten V_i en W_i noemen we respectievelijk schalingsruimten en waveletruimten op niveau i .

Multiresolutie-analyse wordt heel aanschouwelijk indien we het toepassen op digitale beelden. Bij tweedimensionale discrete wavelettransformaties organiseert men de berekening meestal zodanig dat



Figuur 7a Foto (512x800) van een monumentale bogenrij in Città Di Castello (Italië).



Figuur 7c Reconstructie van de foto uit Figuur 7a waarbij enkel de V_3 -benadering gebruikt werd. Deze benadering gebruikt slechts 1/64 van de hoeveelheid gegevens van de oorspronkelijke foto; het kwaliteitsverlies is merkbaar.

de projectiecoëfficiënten van V_i op V_{i+1} terecht komen in het linkse, bovenste kwadrant van de figuur. De projectiecoëfficiënten op W_{i+1} komen terecht in de drie overige kwadranten. De recursieve toepassing van dit principe wordt geïllustreerd in Figuur 6.

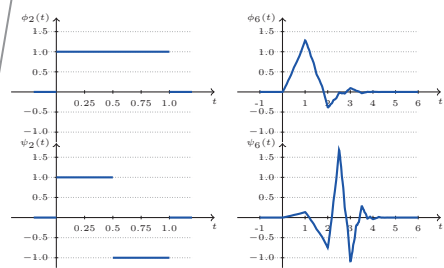
We pasten dit principe toe op de foto van Figuur 7a. Driemaal toepassen van deze multiresolutie-projectiestap, levert ons het beeld van Figuur 7b. De reconstructie van de foto op basis van V_3 levert het resultaat van Figuur 7c op. Merk op dat we deze foto kunnen reconstrueren met slechts 1/64 van de originele hoeveelheid gegevens. Dit is meteen ook een illustratie van het gebruik van wavelets om gegevens (met verlies van nauwkeurigheid) te comprimeren. Een betere keuze van wavelet (bijvoorbeeld Daubechies-6, zie Figuur 7d) met een iets fijnzinnigere compressiemethode (verwaarlozen van de waveletcomponenten kleiner dan 4 procent van de maximale componentwaarde) in plaats van het domweg negeren van alle W_1 - tot en met W_3 -componenten), leidt tot een gecompriimeerd beeld dat op de afdruk grootte en met slechts 1/6 van de originele hoeveelheid gegevens met het blote oog niet te onderscheiden is van het origineel.

De jacht op wavelets

Tot voor Meyers ontmoeting met Mallat werden wavelets ad hoc opgesteld. Ver-



Figuur 7b Multiresolutie-analyse van de foto uit Figuur 7a op basis van Haarwavelets (zie ook Figuur 6).



Figuur 7d Illustratie van de moederschaalfunctie ($\phi(t)$) en de moederwaveletfunctie ($\psi(t)$) voor de Haarwavelets (links) gebruikt in deze figuur en de Daubechies-6 wavelets (rechts) van het compressievoorbeeld (uit de tekst).

gelijkingen (5) en (6) leveren echter een systematische constructieprocedure op om orthogonale wavelets met een beperkte voetafdruk op te stellen. Hoewel dit al een hele stap vooruit is, laat dit nog de opening voor doordachte keuzes wat betreft de schalingsgetallen α_i .

Een van de doelstellingen zou immers kunnen zijn om bij de ontbinding van niveau V_{i-1} in $V_i \oplus W_i$, die we gemakkelijksheidshalve even voorstellen als:

$$f_{V_{i-1}} = f_{V_i} + f_{W_i},$$

zoveel mogelijk signaalenergie naar het schalingsdeel te leiden ($\|f_{V_i}\|^2 \gg \|f_{W_i}\|^2$). Dit schalingsdeel noemt men gewoonlijk de trend van het signaal en het waveletdeel de fluctuatie. Indien we even een sprongetje maken naar de discrete wavelettransformatie, dan wil dit zeggen dat de fluctuatiecoëfficiënten kleiner zullen zijn dan de waveletcoëfficiënten en we ze dus met minder bits kunnen coderen dan het schalingsdeel. Dit laat effectief toe om signalen (of beelden) te comprimeren zonder noemenswaardig verlies aan detail. We kunnen de signaalenergie in het waveletdeel beperken door de wavelets (c.q. de waveletgetallen) zo te kiezen dat ze zoveel mogelijk waveletmomenten

$$M_{p,\psi} = \int_{-\infty}^{+\infty} t^p \psi(t) dt$$

nul maken. De toelaatbaarheidsvoorwaarde leerde ons eerder al dat $M_{0,\psi} = 0$. We illustreren dit verband tussen deze momenten en de signaalenergie in het waveletdeel voor zachtglooiende signalen. Beschouw als voorbeeld een signaal f met N continue afgeleiden in de buurt van t_0 . We kunnen f in dit continue deel rond t_0 schrijven als een afgebroken Taylorreeks rond t_0 (waarbij $t_c \in [t_0, t]$):

$$f(t) = \sum_{i=0}^{N-1} \frac{1}{i!} f^{(i)}(t_0) (t-t_0)^i + \frac{1}{N!} f^{(N)}(t_c) (t-t_0)^N$$

Voor het gemak van de notatie veronderstellen we dat de wavelets reëel zijn en dat $t_0 = 0$ en $t_c = c$. Indien we dit deel van het signaal projecteren op een wavelet die zich concentreert in de buurt van $t_0 = 0$, dan krijgen we (wegens de lineariteit van het scalair product en dus ook de wavelettransformatie):

$$\begin{aligned}
F(0,s) &= \left\langle f, \frac{1}{\sqrt{s}} \psi\left(\frac{t}{s}\right) \right\rangle \\
&= \sum_{i=0}^{N-1} \frac{f^{(i)}(0)}{i!} \left\langle t^i, \frac{1}{\sqrt{s}} \psi\left(\frac{t}{s}\right) \right\rangle \\
&\quad + \frac{f^{(N)}(c)}{N!} \left\langle t^N, \frac{1}{\sqrt{s}} \psi\left(\frac{t}{s}\right) \right\rangle \\
&= \sum_{i=0}^{N-1} \frac{f^{(i)}(0)}{i!} \int_{-\infty}^{+\infty} t^i \frac{1}{\sqrt{s}} \psi\left(\frac{t}{s}\right) dt \\
&\quad + \frac{f^{(N)}(c)}{N!} \int_{-\infty}^{+\infty} t^N \frac{1}{\sqrt{s}} \psi\left(\frac{t}{s}\right) dt \\
&\downarrow \text{substitueer } w = t/s \\
&= \sum_{i=0}^{N-1} \frac{f^{(i)}(0)}{i!} s^{i+\frac{1}{2}} \int_{-\infty}^{+\infty} w^i \psi(w) dw \\
&\quad + \frac{f^{(N)}(c)}{N!} s^{N+\frac{1}{2}} \int_{-\infty}^{+\infty} w^N \psi(w) dw \\
&= \sum_{i=0}^{N-1} \frac{f^{(i)}(0)}{i!} s^{i+\frac{1}{2}} M_{i,\psi} \\
&\quad + \frac{f^{(N)}(c)}{N!} s^{N+\frac{1}{2}} M_{N,\psi}.
\end{aligned}$$

Indien we er in slagen om de wavelet-momenten $M_{0,\psi}$ tot en met $M_{N-1,\psi}$ nul te

maken (door een gerichte keuze van de α_i), dan is $\langle f, \psi(\frac{t}{s}) \rangle = O(s^{N+\frac{1}{2}})$ en vermoedelijk klein. Dit idee vormt het fundament van de Daubechieswavelets (waarvan de Haar-wavelets een bijzonder geval vormen).

Later

Door het lezen van een artikel waarin gepostuleerd wordt dat de Navier–Stokes-vergelijkingen kunnen opgelost worden met behulp van wavelets, belandt Meyer in wat hij zelf noemt zijn Navier–Stokes-periode. Hij werkt later onder andere ook nog op compressed sensing [3], een techniek om uit een beperkt aantal samples van een signaal (te klein om te voldoen aan het bemonsteringstheorema van Shannon) toch het oorspronkelijke signaal te reconstrueren.

In 2010 wint hij de Gaussprijs, een prijs die toegekend wordt aan een persoon die belangrijk wiskundig werk geleverd heeft dat ook toepassingen kent buiten de wiskunde. De JPEG2000-standaard voor compressie van digitale beelden is bijvoor-

beeld een gevolg van het werk van Meyer op gebied van wavelets. Recent nog, in 2015, werden de eerste gravitatiegolven waargenomen (bij de botsing van twee zwarte gaten), met een techniek die gebruikmaakt van wavelets.

Voor de volledigheid vermelden we nog even dat Meyer van 1985 tot 1996 aan de Université Paris-Dauphine werkte, van 1995 tot 1999 onderzoeksdirecteur was aan het Centre National de la Recherche Scientifique (CNRS), om dan aan de École Normale Supérieure de Cachan te gaan werken, waar hij in 2003 emeritus werd. Maar zoals zovele gepassioneerde wetenschappers lijkt het woord emeritaat niet aan Meyer besteed.

Het bredere kader

Onze wandeling door de wereld van de wavelets werd sterk gekleurd door onze gids, Yves Meyer. Voor een iets ruimer kader verwijzen we graag naar de geciteerde literatuur en naar het fijne artikel van collega Ooninckx [16].

Noten

- 1 Dennis Gabor (1918–2006), Hongaars-Britse ingenieur en fysicus, heeft twee belangrijke bijdragen aan de wetenschap geleverd: de holografie (waarvoor hij ook de Nobelprijs ontving) en de short-time Fouriertransformatie of Gabortransformatie.
- 2 Een Zweeds wiskundige, Jan-Olov Strömberg, deed reeds enkele jaren voordien een eerste voorstel tot orthogonale wavelet en ook Alfréd Haar deed het hem vele jaren eerder voor (omstreeks 1910). Meyer heeft overigens achteraf Jan-Olov gefeliciteerd als ‘de echte vader van de wavelets’.
- 3 De schalingsfuncties worden ook wel eens vaderwavelets genoemd.

Referenties

- 1 A. Cohen, I. Daubechies en J.C. Feauveau, Biorthogonal bases of compactly supported wavelets, *Communications in Pure & Applied Mathematics* 45 (1992), 485–560.
- 2 R. Coifman, A. McIntosh en Y. Meyer, The Hilbert transform on Lipschitz curves, *Mini-conference on Partial Differential Equations*, Centre for Mathematical Analysis, The Australian National University, Canberra, 1982, pp. 26–69.
- 3 I. Daubechies, Yves Meyer–Gauss Prize 2010, *Proceedings of the International Congress of Mathematicians*, Hyderabad, India, 2010.
- 4 I. Daubechies, A. Grossmann en Y. Meyer, Painless nonorthogonal expansions, *Journal on Mathematical Physics* 27(5) (1986), 1271–1283.
- 5 B.I. Dundas, Interview with Abel Laureate Yves Meyer, *Newsletter of the EMS* (September 2017), 14–22.
- 6 J. Fourier, *Théorie analytique de la chaleur*, Firmin Didot Père et Fils, Paris, 1822.
- 7 D. Gabor, Theory of Communication, *Journal of the Institution of Electrical Engineers, part III, Radio and Communication* 93 (1946), 429–457.
- 8 O. Heaviside, *Electromagnetic Theory*, Vol. II, “The Electrician” Printing and Publishing Company Ltd., London, 1899.
- 9 B. Hubbard, *The World According to Wavelets*, A.K. Peters, 1996, pp. 38–51.
- 10 P.J. Lu en P.J. Steinhardt, Decagonal and Quasi-Crystalline Tilings in Medieval Islamic Architecture, *Science* 315(5815) (2007), 1106–1110.
- 11 S. Mallat, *A Wavelet Tour of Signal Processing (The Sparse Way)*, 3rd Edition, Academic Press, 2008.
- 12 S. Mallat, A theory for multiresolution signal decomposition: the wavelet representation, *IEEE Transactions on Pattern Analysis and Machine Intelligence* 11(7), (2007), 674–693.
- 13 Y. Meyer, *Nombres de Pisot, Nombres de Salem et Analyse Harmonique*, Lecture Notes in Mathematics, Springer, 1970.
- 14 Y. Meyer, *Ondelettes et opérateurs*, Vol. I–III, Actualités Mathématiques, Hermann, 1990.
- 15 Y. Meyer en B. Weiss, Les produits de Riesz sont des Bernoulli shifts, *Séminaire de probabilités de Rennes*, 1974.
- 16 P. Ooninckx, Wavelets: een hype of toch meer? *Nieuw Archief voor Wiskunde* 5/2(2) (juni 2001), 120–126.
- 17 U. Persson, An EMS interview with Yves Meyer, part I and II, *IAMP News Bulletin* (July 2011), 4–11; (October 2011), 6–14.
- 18 A. Zygmund, *Trigonometric Series*, Vol. 1 en 2, Cambridge University Press, 2002.

Gert Heckman

IMAPP, Afdeling Wiskunde
Radboud Universiteit Nijmegen
g.heckman@math.ru.nl

Boekbespreking Jacques Tits, *Œuvres – Collected Works, Volumes I-IV*

Verzameld werk van Jacques Tits

In 2008 ontvingen Jacques Tits en John Griggs Thompson de Abelprijs voor hun “profound achievements in algebra and in particular for shaping modern group theory” (zie abelprize.no). Tits werd daarbij geroemd om de wijze waarop hij groepen op een nieuwe manier als meetkundige objecten wist te zien. Naar aanleiding van het verschijnen van het verzameld werk van Tits belicht Gert Heckman het gebied waarop Tits actief was.

Groepen en meetkunde

Een groep G is een verzameling met een productregel, dat wil zeggen een binaire operatie $G \times G \rightarrow G$ is gegeven, die associatief is, een eenheidselement heeft en waarbij ieder element een inverse heeft. De moeder aller groepen is de groep $\text{Sym}(X)$ van alle bijecties op een verzameling X met compositie van bijecties als productregel. Een ondergroep G van $\text{Sym}(X)$ komt dus met een realisatie van G als transformatiegroep op X . Zulke groepen G laten in de regel zekere algebraïsche of meetkundige structuren op X invariant, en het is interessant op zoek te gaan naar die structuren op X , waarvoor G kan worden gekarakteriseerd als de groep van alle bijecties op X die de betreffende structuur invariant laten.

Opgemerkt dient te worden dat zo’n meetkundige realisatie van een groep G verre van uniek is. Denk bijvoorbeeld aan de alternerende groep A_5 , die enerzijds optreedt als groep van rotaties van de icoosaëder, en die anderzijds als enkelvoudige groep de onoplosbaarheid van de algeme-

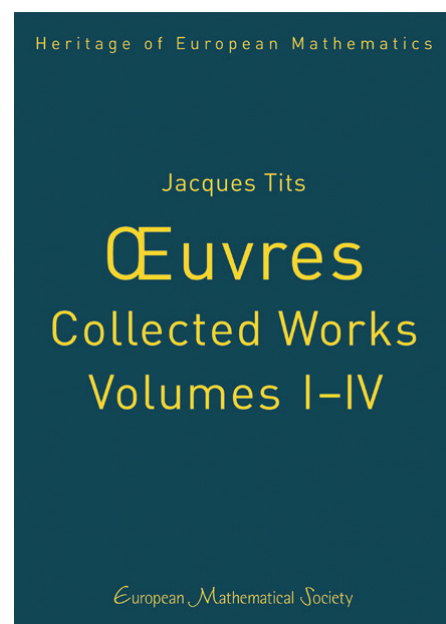
ne vijfdegraadsvergelijking door middel van worteltrekken tot gevolg heeft. Felix Klein heeft in zijn icoosaëderboek uit 1884, dat opnieuw is uitgegeven in 1990 in een prachtige band door Peter Slodowy, een natuurlijk verband gegeven tussen deze twee verschillende realisaties van A_5 .

Een belangrijk voorbeeld is een eindig-dimensionale vectorruimte V over een lichaam F , en $\text{GL}(V)$ de groep van lineaire transformaties van V .

De klassieke groepen $\text{SL}(V)$, $\text{O}(V, g)$ en $\text{Sp}(V, \omega)$, die respectievelijk volume, een niet-ontaarde symmetrische bilineaire vorm g en een niet-ontaarde antisymmetrische bilineaire vorm ω behouden, zijn belangrijke ondergroepen van $\text{GL}(V)$ afkomstig van Hermann Weyl. Meer in het algemeen zijn algebraïsche groepen ondergroepen van $\text{GL}(V)$ die door polynoomvergelijkingen kunnen worden gedefinieerd.

De classificatiestelling van Wilhelm Killing en Élie Cartan zegt dat in geval $F = \mathbb{C}$ de enkelvoudige algebraïsche groepen op isomorfie na ofwel klassieke groepen ofwel

van exceptioneel type E_6 , E_7 , E_8 , F_4 of G_2 zijn. Het is regel om enkelvoudig te lezen als enkelvoudig modulo eindig centrum. Deze classificatie roept direct een vervolgvraag op: Wat is dan wel de meetkundige betekenis voor deze vijf exceptionele groepen? Voor G_2 werd deze vraag reeds in 1914 beantwoord door Cartan, namelijk als



Jacques Tits, *Œuvres – Collected Works, Volumes I-IV*, European Mathematical Society, 3963 p., ISBN 9783037191262, €598,00.

automorfismengroep van de octonionen, een alternatieve delingsalgebra van dimensie 8. Het woord alternatief betekent dat de associatieve wet $(xy)z = x(yz)$ niet langer algemeen geldig behoeft te zijn, maar alleen vereist wordt als $x = y$ of $y = z$.

Het projectieve vlak

De lijnen in $\mathbb{R}^3$ door de oorsprong vormen de punten van het reële projectieve vlak $\mathbb{P}^2(\mathbb{R})$, terwijl de lijnen in $\mathbb{P}^2(\mathbb{R})$ bestaan uit de collectie van die lijnen door de oorsprong in $\mathbb{R}^3$, welke in een gegeven vlak liggen. Projectieve vlakken kan men evenzo construeren met $\mathbb{R}$ vervangen door een willekeurig lichaam F , of de associatieve delingsalgebra $\mathbb{H}$ van quaternionen, en zelfs de alternatieve delingsalgebra $\mathbb{O}$ van octonionen. Dit soort projectieve vlakken heten ook wel coördinaat-projectieve vlakken.

Een abstract projectief vlak is een verzameling $\mathcal{P}$ van punten met een collectie deelverzamelingen $\mathcal{L}$ van lijnen, die aan een paar eenvoudige axioma's voldoen. Ieder tweetal verschillende punten ligt op een unieke lijn, en er bestaan vier punten, waarvan geen drie op een lijn liggen. En dual, ieder tweetal verschillende lijnen snijdt elkaar in een uniek punt, en er bestaan vier lijnen, waarvan geen drie elkaar in een punt snijden. Coördinaat-projectieve vlakken zijn abstracte projectieve vlakken. In zijn *Grundlagen der Geometrie* uit 1899 bewees Hilbert dat coördinaat-projectieve vlakken over een lichaam kunnen worden gekarakteriseerd als die abstracte projectieve vlakken, waarin de stelling van Pappos geldt, terwijl de stelling van Desargues gezien kan worden als karakterisering van coördinaat-projectieve vlakken over een associatieve delingsalgebra. Deze in-steek werd in 1933 verder uitgewerkt door Ruth Moufang. Zij bewees dat coördinaat-projectieve vlakken over een alternatieve delingsalgebra gekarakteriseerd kunnen worden als abstracte projectieve vlakken, waarin de stelling van de volledige vierhoek geldt.

De symmetriegroep van het projectieve vlak over de octonionen werd in 1950 door Chevalley, Schafer en Borel gerelateerd aan de exceptionele groepen van type F_4 en E_6 . Freudenthal zette dit werk voort met zijn tekst *Oktaven, Ausnahmegruppen und Oktavengeometrie* uit 1951, hetgeen later zou uitmonden in het magisch vierkant van Freudenthal, waarin ook de resterende ex-



Jacques Tits

ceptionele groepen E_7 en E_8 figureerden. Het werd een actief onderzoeksthema op het Mathematisch Instituut in Utrecht van de jaren vijftig, met gerelateerd werk door Van der Blij, Schellekens, Springer en Veldkamp. In deze tijd stapte ook Jacques Tits in, aanvankelijk volgend met opnieuw de bestudering van het projectieve vlak over de octonionen, maar na enkele jaren leidend met zijn creatie van Tits-meetkunde, een universele aanpak om voor alle enkelvoudige algebraïsche groepen, zowel klassiek als exceptioneel, een axiomatische meetkunde te definiëren, met deze groepen als symmetriegroep.

Coxeter-groepen

Meetkunde kun je doen in ruimten van willekeurige dimensie. Dit inzicht brak in het midden van de negentiende eeuw krachtig door in het werk van Schläfli en Riemann. Riemanns Habilitatievoordracht uit 1854, getiteld 'Über die Hypothesen, welche der Geometrie zu Grunde liegen', is een juweel van de hoogste karaat. Enkele jaren daarvoor had Schläfli de platonische lichamen in hogere dimensie geclassificeerd. Zijn lange artikel, 'Theorie der vielfachen Kontinuität', haalde echter niet de *Crelle Journal*, en bleef op de plank liggen. De symmetriegroepen van deze platonische lichamen zijn (irreducibele) ondergroepen van $O(\mathbb{R}^n)$ voortgebracht door spiegelingen, maar er zijn meer eindige (irreducibele) spiegelingsgroepen in $O(\mathbb{R}^n)$ dan deze. Gefascineerd door dit werk van Schläfli be-

studeerde Donald Coxeter rond 1930 deze spiegelingsgroepen W uitvoerig: classificatie met behulp van Coxeter-diagrammen, de Coxeter-presentatie van W met voortbrengers $S \subset W$ en relaties $(st)^{m_{st}} = 1$ met $M = (m_{st})$ de Coxeter-matrix, met $m_{ss} = 1$ en $m_{st} = m_{ts} \geq 2$ voor $s \neq t$. Dit alles wordt piekfijn uitgelegd in het meest succesvolle deel uit de Bourbaki-reeks: *Groupes et Algèbres de Lie, Chapitres 4,5 et 6*, uit 1968.

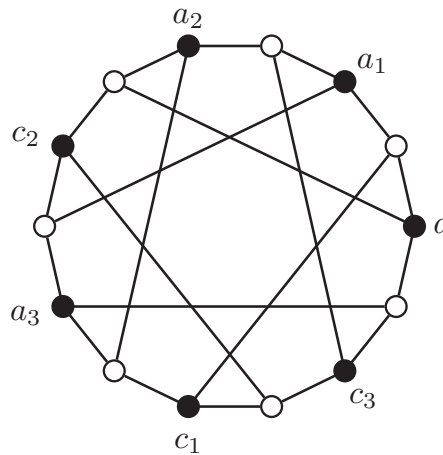
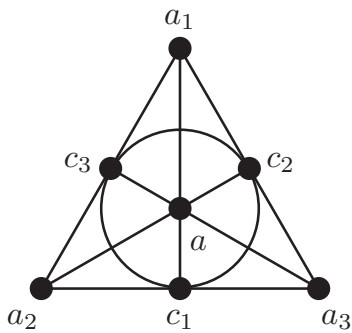
Geheel tegen de traditie van het anoniem Bourbaki-collectief wordt Tits in het voorwoord expliciet bedankt voor de talrijke conversaties en kostbare hulp bij het schrijven van deze drie hoofdstukken. De ongepubliceerde tekst van Tits, *Groupes et géométries de Coxeter* uit 1961, relevant voor de opzet van dit Bourbaki-deel, is in zijn verzameld werk opgenomen. De stelling van Tits over de trouwheid van de meetkundige representatie van een algemene Coxeter-groep is er een 'uit het Boek'. De bouwkundige terminologie van kamers, wanden, plinten, galerijen, appartementen en gebouwen als natuurlijke taal voor het werk van Tits gaat ook terug naar dit Bourbaki-deel.

Lijkt dit Bourbaki-deel primair geschreven als een uiteenzetting van de combinatorische infrastructuur van de enkelvoudige algebraïsche groepen, het belang ervan strekt echter veel verder. Coxeter-groepen zijn alomtegenwoordig, bijvoorbeeld in de singulariteitentheorie, of bij de studie van roosters uit de algebraïsche meetkunde, denk aan de middel-homologieroosters van Del Pezzo-oppervlakken of K_3 -oppervlakken, of bijzondere roosters zoals het Leech-rooster met zijn bijbehorende sporadische Conway-groepen, of voor hypergeometrische functies. Deze ubiquiteit van Coxeter-groepen blijft verrassen.

Tits-meetkunde

Een gebouw is een simpliciaal complex Δ , dat een vereniging is van deelcomplexen, genaamd appartementen, met de volgende eigenschappen: ieder appartement is een Coxeter-complex, ieder tweetal simplices A, A' in Δ is bevat in een appartement, en voor twee van zulke appartementen Σ, Σ' is er een isomorfisme $\Sigma \rightarrow \Sigma'$ dat A en A' puntsgewijs vast laat.

Een eenvoudig voorbeeld om in gedachten te hebben is een projectief vlak met puntenverzameling $\mathcal{P}$ en lijnenverzameling $\mathcal{L}$. Het bijbehorende vlagcomplex $\Delta(\mathcal{P}, \mathcal{L})$ is een graaf met $\mathcal{P} \sqcup \mathcal{L}$ als knopen en inci-



Het Fano-vlak (links) en het bijbehorende Tits-gebouw (rechts).

dente paren $(p, L) \in \mathcal{P} \times \mathcal{L}$ met $p \in L$ als verbindingen. Een projectieve driehoek is de configuratie van een drietal punten niet op een lijn en het drietal lijnen door elk tweetal punten. Nemen we als appartementen de zeshoeken, met als knopen de drie punten en drie lijnen van een driehoek en verbindingen de zes incidente paren, dan wordt $\Delta(\mathcal{P}, \mathcal{L})$ een gebouw.

Het Fano-vlak is het projectieve vlak $\mathbb{P}^2(\mathbb{F}_2)$ over een lichaam $\mathbb{F}_2$ van slechts twee elementen. Het heeft zeven punten en zeven lijnen, in overeenstemming met de bovenstaande linker figuur. Het bijbehorende Tits-gebouw is de incidentiegraaf van het Fano-vlak, aangegeven in bovenstaande rechter figuur. Het heeft zeven zwarte knopen corresponderend met de verzameling $\mathcal{P}$ van punten en zeven witte knopen corresponderend met de verzameling $\mathcal{L}$ van lijnen, en heeft 21 takken corresponderend met de incidente paren. De automorfismengroep van het Fano-vlak of het bijbehorende Tits-gebouw is de enkelvoudige groep $\text{PGL}_3(\mathbb{F}_2)$ van orde 168. Deze rijke symmetrie is uit beide figuren niet zo duidelijk, maar volgt door op te merken dat de punten van het Fano-vlak corresponderen met de vectoren in $\mathbb{F}_2^3$ verschillend van 0.

Het bovenstaande laat zich generaliseren naar projectieve ruimten $\mathbb{P}^n(F)$ van hogere dimensie over een lichaam F , en geeft op analoge wijze een gebouw hebbend bij de projectieve groep $\text{PGL}_{n+1}(F)$. De appartementen zijn de Coxeter-complexen van de symmetrische groep $\mathcal{S}_{n+1}$.

Meer in het algemeen hebben enkelvoudige algebraïsche groepen geassocieerde vlagvariëteiten, waar weer gebouwen aan gekoppeld kunnen worden, die als automorfismengroep de oorspronkelijke groep hebben.

De automorfismengroep G van een gebouw heeft een zogenaamd BN -paar, waarbij de letter B voor Borel staat en N de normalisator van $B \cap N$ in G is. De quotiëntgroep $N/(B \cap N)$ is de Coxeter-groep van het gebouw. Voor enkelvoudige algebraïsche groepen is de Coxeter-groep van het gebouw de bijbehorende Weyl-groep. Maar er zijn gebouwen, waarvan de Coxeter-groep niet kristallografisch is, en waarvan de automorfismengroep dus geen algebraïsche groep kan zijn.

Voor enkelvoudige algebraïsche groepen over $\mathbb{Q}_p$ hebben Bruhat en Tits een variatie op het thema van Tits bedacht, het zogenaamde Bruhat–Tits-gebouw, waarvan de Coxeter-groep de bijbehorende affine Weyl-groep is. Het Bruhat–Tits-gebouw kan worden gezien als het ultrametrisch analogon van de symmetrische ruimten voor de betreffende groep over $\mathbb{R}$. Een symmetrische ruimte is een samenhangende Riemannse variëteit waarvoor geodetische spiegeling in ieder punt een globaal gedefinieerde isometrie geeft. Alle enkelvoudige Lie-groepen treden op als symmetriegroep van een symmetrische ruimte, zo bewees Élie Cartan. En omgekeerd is de symmetriegroep van een irreducibele enkelvoudig samenhangende symmetrische ruimte (verschillend van de euclidische rechte) steeds

een (half)enkelvoudige Lie-groep. Analoog zegt een stelling van Tits dat voor ieder irreducibel gebouw met als Coxeter-groep een affine Weyl-groep van rang minstens drie er een enkelvoudige algebraïsche groep over een p -adisch lichaam is met dat Bruhat–Tits-gebouw. Het werk van Cartan en Tits geeft de voorbeelden par excellence over het verband tussen meetkunde en groepentheorie, zoals verwoord in 1872 door Felix Klein in zijn Erlanger Programm. Zowel de symmetrische ruimten van Cartan als de Bruhat–Tits-gebouwen zijn gereedschappen bij de studie van automorfe representaties van een enkelvoudige algebraïsche groep in de adelische setting, en de bestudering hiervan is een centraal thema in het Langlands-programma.

De mij hier toegemeten ruimte alsmede mijn beperkte kennis beletten mij meer te schrijven over het indrukwekkende werk van Tits, in vier copieuze delen van zo'n duizend bladzijden per deel. Zijn werk gaat over de meetkundige betekenis van de enkelvoudige groepen, de elementen van het periodiek systeem der symmetrie. Hebben die exceptionele of sporadische enkelvoudige groepen, pas gevonden na ijverige classificatie, nu daadwerkelijk betekenis, of moeten we ze louter zien als accidentjes, gelieerd aan kleine getallen? Het is een zeer fundamentele vraag, die iedere specialist in deze branche zich wel eens stelt. In zijn inaugurele rede aan het Collège de France uit 1975 lijkt Jacques Tits (voor wat betreft de sporadische groepen) te opteren voor de tweede keus, maar daar zij dan wel bij opgemerkt dat zijn levenswerk getuigt van een onvermoeide inzet voor de eerste keus.

Overigens lijkt Tits op latere leeftijd het bovenstaande geluid iets te nuanceren. Bij een interview ter gelegenheid van de aan hem en Thompson toegekende Abel-prijs in 2008 werd hen de vraag gesteld, of de exceptionele of sporadische groepen ons iets belangrijks te vertellen hebben, in de wiskunde of in de natuur? Thompson grapt de vraag weg, door te zeggen dat hij geen fysicus is. Maar Tits is serieus: "Het is misschien naïef dit te zeggen, maar ik heb het gevoel dat wiskundige structuren van een dermate schoonheid als de Monster iets van doen moeten hebben met de natuur."

Werner Lazeroms

IMAU
Universiteit Utrecht
w.m.j.lazeroms@uu.nl

Roderik van de Wal

IMAU
Universiteit Utrecht
r.s.w.vandewal@uu.nl

Onderzoek

De dynamica van ijskappen

De ijskappen rond de Noordpool en de Zuidpool zijn de laatste tijd steeds vaker in het nieuws. Om de ontwikkeling van deze ijskappen ten gevolge van klimaatverandering te bestuderen, kunnen we gebruik maken van numerieke modellen. Werner Lazeroms en Roderik van de Wal geven een overzicht van de belangrijkste fysische en wiskundige principes achter deze ijskapmodellen, met bijzondere aandacht voor de grote drijvende ijsplaten op Antarctica.

Klimaatverandering, zeespiegelstijging en de mogelijke gevolgen hiervan voor onze samenleving zijn de laatste jaren veelvuldig in het nieuws. Traditioneel lijkt hierbij de aandacht vooral uit te gaan naar Groenland en het Noordpoolgebied. Vanuit Nederlands oogpunt zijn dit relatief nabij gelegen gebieden waar de effecten van klimaatverandering op de ijskappen goed zichtbaar zijn. Ook het wegsmelten van gletsjers in de Alpen, voor velen een bekende vakantiebestemming, is hiervan een duidelijk voorbeeld [11].

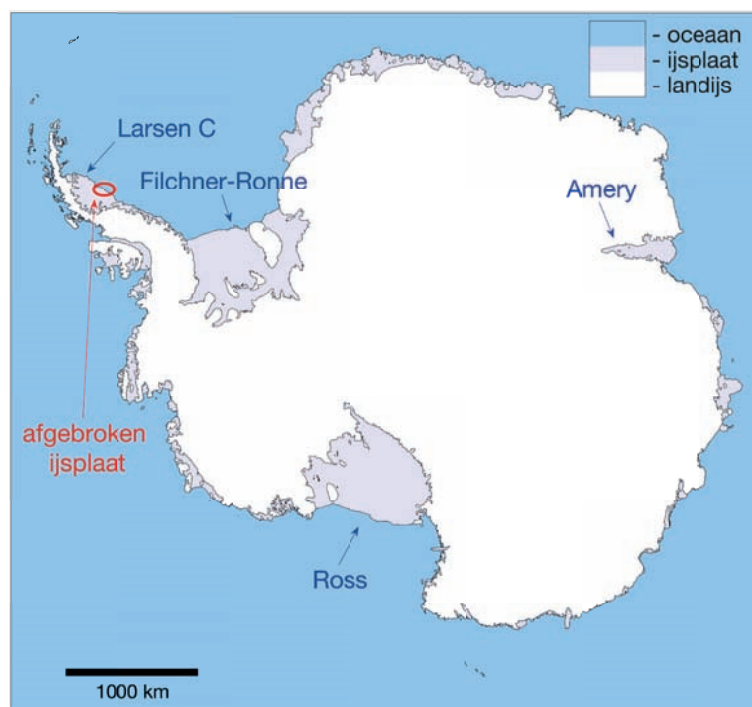
Maar recentelijk krijgt ook het veel koudere Antarctica, waar 90 procent van al het ijs op aarde zich bevindt, meer media-aandacht. Een dramatisch voorbeeld is het afbreken van een stuk ijsschots met een oppervlakte van 5800 km² van de Larsen C-ijsplaat afgelopen zomer [7]. Hierbij moet wel vermeld worden dat dit stuk drijfijis niet direct zal bijdragen aan de zeespiegelstijging, omdat het al dreef voordat het afbrak. Ook is het nog onduidelijk of en hoe het afbreken van de ijsschots samenhangt met de opwarming van de aarde, aangezien het afkalven van ijsbergen een natuurlijk proces is, hoewel er vaak slechts kleinere ijsbergen gevormd worden.

Wel laat dit voorbeeld zien dat ijskappen en gletsjers ingewikkelde dynamische systemen vormen, die op verschillende

manieren massa kunnen verliezen. Het dynamische aspect zit niet alleen in het wegsmelten van ijs, zoals we dat bijvoorbeeld kennen van ijsblokjes in een glas water, of het afbreken van stukken ijs aan de rand van een ijsplaat. Op veel langere tijdschalen stroomt het ijs door de zwaartekracht

naar beneden en kan het min of meer als een viskeuze vloeistof beschouwd worden. Verder zijn er interessante dynamische verschillen tussen landijs en drijvende ijsplaten.

De vraag is hoe al deze aspecten kunnen worden samengevoegd in een wiskundig model, waarmee we meer te weten kunnen komen over de ontwikkeling van de ijskappen onder invloed van een veranderend klimaat. Tegenwoordig bestaan tal van numerieke modellen waarmee de ijskappen kunnen worden gesimuleerd op tijdschalen van duizenden jaren [1].



Figuur 1 Topografie van de Antarctische ijskap volgens de Bedmap2-dataset [3]. De drijvende ijsplaten langs de kust zijn weergegeven in grijs met de namen van enkele belangrijke ijsplaten in blauw.

In dit artikel volgt een overzicht van de basisprincipes achter deze dynamische ijskapmodellen, met speciale aandacht voor Antarctica en de interactie tussen ijskappen en de oceaan.

De Antarctische ijskap en massabalans

Antarctica is een continent in het Zuidpoolgebied dat vrijwel volledig bedekt is met ijs en qua oppervlakte groter is dan Europa (Figuur 1). De Antarctische ijskap bestaat voor het grootste deel uit een laag ijs (gemiddelde dikte 2 km) die op het land rust en via de vele gletsjers naar beneden stroomt. Maar Antarctica verschilt wezenlijk van andere ijskappen door de aanwezigheid van zeer grote drijvende ijsplaten aan de randen van de ijskap, waar het gletsjerijs in contact komt met het oceaanooppervlak. De duidelijkste voorbeelden hiervan zijn het Ross-ijsplateau en het Filchner-Ronne-ijsplateau, beide qua grootte vergelijkbaar met Frankrijk of Spanje.

Een dwarsdoorsnede van dit systeem van ijskap en ijsplaat is te zien in Figuur 2. Aan de linkerkant ligt het landijs dat door de zwaartekracht richting de oceaan stroomt. Aangezien de dichtheid van ijs, ρ_i , kleiner is dan die van (zout) water, ρ_w , zal de ijslaag blijven drijven wanneer de ijsdikte H onder een bepaalde waarde komt. Via de bekende wet van Archimedes is eenvoudig af te leiden dat voor een verticale doorsnede van dit drijvende ijs de volgende conditie geldt:

$$\rho_i H = \rho_w (H - h) < \rho_w (s - b), \quad (1)$$

met h de hoogte van het ijs boven het zeeniveau s en b de 'hoogte' van de zeebodem (zie Figuur 2). De gelijkheid in (1) geeft de balans tussen zwaartekracht en archime-

deskracht. Hierbij hebben we aangenomen dat ρ_i constant is over de gehele ijslaag, wat strikt genomen niet geldt dichtbij het oppervlak waar de ijslaag bestaat uit een mengsel van sneeuw en niet volledig samengedrukt ijs. De ongelijkheid in (1) stelt simpelweg dat de dikte van het ijs onder zeeniveau kleiner moet zijn dan de waterdiepte, zodat het ijs de bodem niet raakt. Conditie (1) geeft dus aan voor welke dikte H de ijslaag drijft en kan in ijskapmodellen worden gebruikt om onderscheid te maken tussen de drijvende ijsplaten (*ice shelves*) en de rest van de ijskap (*ice sheet*). De lijn die de grens vormt tussen deze twee gebieden van de ijskap wordt *grounding line* genoemd.

We kunnen nu een massabalans opstellen voor het systeem in Figuur 2. Zoals gebruikelijk in de continuümmechanica kan dit door middel van infinitesimale volume-elementen, waarbij we weer uitgaan van homogene ijskolommen met dichtheid ρ_i en dikte $H(x, y)$. De ijslaag kan als incompressibel worden beschouwd, oftewel $\nabla \cdot \mathbf{v}(\mathbf{x}) = 0$ met $\mathbf{v} = (u, v, w)$ het snelheidsveld van het ijs. Deze laatste conditie kunnen we verticaal integreren over de ijslaag met bovenkant $z = h(x, y)$ en onderkant $z = h(x, y) - H(x, y)$:

$$w|_{z=h} - w|_{z=h-H} = - \int_{h-H}^h \nabla \cdot \mathbf{v}_h(\mathbf{x}) dz \quad (2)$$

met $\mathbf{v}_h = (u, v)$ de horizontale snelheidscomponent en het punt $z = 0$ op dezelfde hoogte als het zeeniveau. Vergelijking (2) kan worden herschreven door gebruik te maken van zogenaamde kinematische randvoorwaarden aan de bovenkant ($z = h$) en onderkant ($z = h - H$) van de ijslaag,

dat wil zeggen de verticale snelheid w moet overeenkomen met de beweging van de randen. Cruciaal hierbij is dat er zowel boven als onder een externe massaflux bestaat door sneeuwval en afsmelting. Voor de bovenrand krijgen we dan:

$$\frac{\partial h}{\partial t} + \mathbf{v}_h|_{z=h} \cdot \nabla h = w|_{z=h} + S, \quad (3)$$

met andere woorden de totale afgeleide van de ijshoogte h is gelijk aan de verticale snelheid plus een bronterm S (*surface mass balance*), die positief is voor neerslag en negatief voor afsmelting. Een vergelijkbare conditie krijgen we aan de onderkant, waar we een bronterm B (*basal mass balance*) definiëren. Door deze randvoorwaarden te substitueren in (2) en in het rechterlid de divergentie uit de integraal te halen, krijgen we uiteindelijk de volgende vergelijking voor de massabalans (zie bijvoorbeeld [10] voor details):

$$\frac{\partial H}{\partial t} + \nabla \cdot (\bar{\mathbf{v}}_h H) = S + B, \quad (4)$$

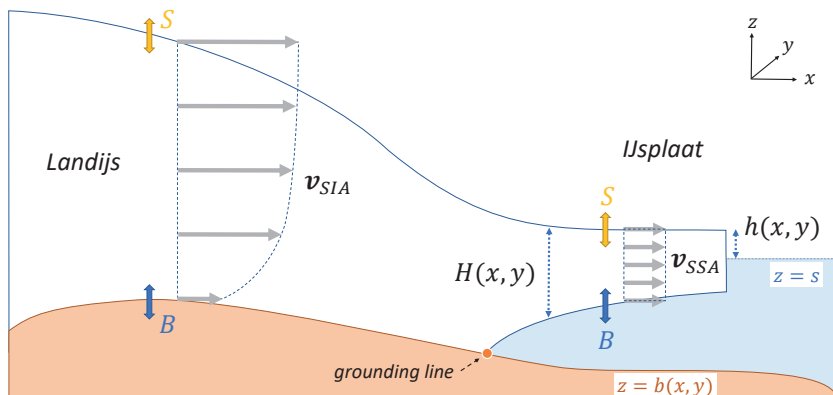
met $\bar{\mathbf{v}}_h$ de verticaal gemiddelde horizontale snelheid. De afleiding van (4) komt sterk overeen met die van de bekende *shallow water equations*, waaraan de brontermen S en B zijn toegevoegd.

Samengevat komt de massabalans (4) erop neer dat de ijslaag met dikte H wordt getransporteerd via het snelheidsveld $\bar{\mathbf{v}}_h$, waarbij zowel aan het oppervlak als aan de bodem massa kan worden toegevoegd via neerslag/aanvriezing of verdwijnen via afsmelting. Om de ontwikkeling van de ijslaag te modelleren moeten we dus zowel het snelheidsveld als de brontermen S en B bepalen. De oppervlakteterm S , die de interactie tussen ijskap en atmosfeer beschrijft, wordt bepaald uit observaties of atmosfeermodellen [13] en zullen we hierina als gegeven beschouwen. Op de term B aan de onderkant komen we later terug.

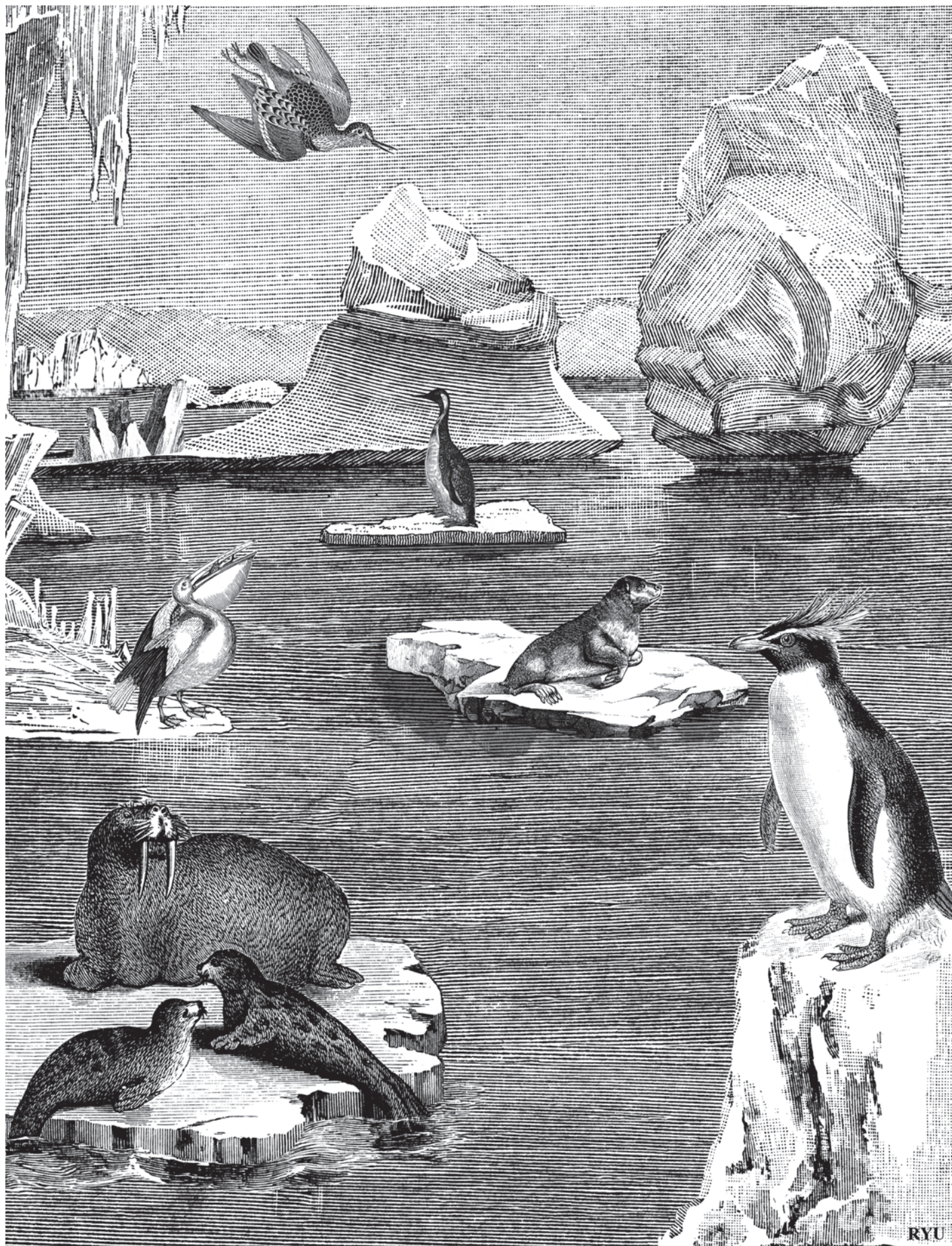
Een andere belangrijke term in de *globale* massabalans, die niet voorkomt in de *lokale* vergelijking (4), is het afkalven van ijsbergen aan de rand van de ijsplaten (rechterkant van Figuur 2), zoals het eerder genoemde stuk van de Larsen C-ijsplaat. Dit proces is lastig te modelleren, want het vereist gedetailleerde kennis van het ontstaan van scheuren in het ijs. We zullen dit verder buiten beschouwing laten.

Dynamische modellen

Om het snelheidsveld $\mathbf{v}$ te bepalen, gebruiken we de impulsbalans (tweede wet



Figuur 2 Verticale doorsnede van de Antarctische ijskap. Het landijs (links) stroomt door de zwaartekracht richting de oceaan, waar het wordt tegengehouden door een drijvende ijsplaat (rechts). Het horizontale snelheidsveld voor het landijs (v_{SIA}) varieert met de diepte, terwijl voor de ijsplaat (v_{SSA}) juist de horizontale variaties van belang zijn.



van Newton). We kunnen hierbij meteen vaststellen dat ijs een zeer hoge viscositeit heeft, zodat interne versnellingen verwaarloosbaar zijn. De impulsbalans wordt dan beschreven door de Stokes-vergelijkingen:

$$\nabla \cdot \boldsymbol{\sigma} + \rho_i \mathbf{g} = 0, \quad (5)$$

met $\boldsymbol{\sigma}$ de spanningstensor en $\mathbf{g}$ de zwaartekrachtsversnelling. Verder is een constitutieve relatie nodig tussen de spanningstensor en de snelheidsgradiënt $\nabla \mathbf{v}$. We gaan hierbij uit van de volgende (isotrope) vorm:

$$\boldsymbol{\sigma} = -p\mathbf{I} + \boldsymbol{\tau}, \quad \boldsymbol{\tau} = 2\eta\mathbf{D}, \quad (6)$$

waarin p de mechanische druk is, $\mathbf{I}$ de eenheidstensor, $\boldsymbol{\tau}$ de schuifspanningstensor, $\mathbf{D} := \frac{1}{2}(\nabla \mathbf{v} + [\nabla \mathbf{v}]^T)$ de deformatiesnelheidstensor en η de (effectieve) viscositeit, naar analogie met de vloeistofmechanica. Ijs is echter verre van een klassiek Newtons medium met constante η . Een veel gebruikte (empirische) relatie volgt uit de zogenaamde wet van Glen [4], die een machtsverband $D \sim \tau^n$ tussen deformatiesnelheid en schuifspanning veronderstelt. De effectieve viscositeit in (6) wordt dan:

$$\eta = \frac{1}{2}A(T)^{-\frac{1}{n}}D^{\frac{1-n}{n}}, \quad D = \sqrt{\frac{1}{2}\text{tr}\{\mathbf{D}^2\}}, \quad (7)$$

met $A(T)$ een temperatuurafhankelijke voorfactor. De exponent n kan worden bepaald uit laboratoriumexperimenten, waarbij $n = 3$ de beste fit lijkt te geven. Uit (7) volgt dan $\eta \sim D^{-2/3}$, dus de viscositeit neemt af als de snelheidsgradiënt (of schuifspanning) toeneemt. Volgens dit model is ijs dus *shear thinning*, zoals bijvoorbeeld ketchup en bloed. Verder hangt de viscositeit in hoge mate af van de ijstemperatuur. Merk echter op dat ijs in werkelijkheid een ingewikkeld anisotroop materiaal is waarvoor (6) en (7) niet algemeen geldig zijn.

Desalniettemin vormen (5)–(7) samen met de conditie $\nabla \cdot \mathbf{v} = 0$ de basis van veel ijskapmodellen. Voor een gegeven geometrie van de ijskap vormen deze vergelijkingen een gesloten systeem voor het bepalen van het snelheidsveld $\mathbf{v}$. Een volledige numerieke oplossing van de Stokes-vergelijkingen is echter zeer rekenintensief vanwege de niet-lineaire viscositeit en de vaak ingewikkelde ijskageometrie. Daarom bestaan er een aantal benaderingen van de impulsbalans, die in principe verschillend zijn voor landijs en drijvende ijsplaten.

De eerste benadering is de zogenaamde *Shallow Ice Approximation (SIA)* die vooral geldt voor het binnengebied van de ijs-

kap (links in Figuur 2). We maken hierbij gebruik van de observatie dat de ijsdikte H veel kleiner is dan de horizontale lengteschaal L , ofwel $\delta := H/L \ll 1$. Typische lengteschalen zijn namelijk $H \sim 1$ km en $L \sim 1000$ km (Figuur 1). Vanwege het viskeuze karakter van de verschijnselen, die maakt dat abrupte veranderingen snel uitsmeren, kunnen we dan zowel de geometrie $h(x, y)$ als $\boldsymbol{\sigma}$ en $\mathbf{v}$ als langzaam variërende functies van x en y beschouwen, met andere woorden de horizontale afgeleiden zijn $O(\delta)$. Door middel van asymptotische expansies in δ vinden we dan een sterk vereenvoudigde impulsbalans (5) die geldt tot op $O(\delta^2)$:

$$\frac{\partial \tau_{xz}}{\partial z} = \frac{\partial p}{\partial x}, \quad \frac{\partial \tau_{yz}}{\partial z} = \frac{\partial p}{\partial y}, \quad \frac{\partial p}{\partial z} = -\rho_i g. \quad (8)$$

Een consistente benadering vereist dat $\tau_{xz}/p = O(\delta)$ en $\tau_{xy}/p = O(\delta^2)$, met andere woorden de verticale schuifspanningen domineren. Merk op dat deze benadering vergelijkbaar is met de *shallow water equations* en andere bekende asymptotische benaderingen met een slanke geometrie.

Aan het oppervlak $z = h(x, y)$ geldt continuïteit van spanningen als randvoorwaarde, ofwel $\tau_{ij}|_{z=h} = p|_{z=h} = 0$. Uit de derde vergelijking in (8) volgt dan:

$$p(x, y, z) = \rho_i g[h(x, y) - z]. \quad (9)$$

Door deze drukverdeling te substitueren in de eerste vergelijking in (8), vinden we:

$$\begin{aligned} \frac{\partial \tau_{xz}}{\partial z} &= \rho_i g \frac{\partial h}{\partial x} \\ \Rightarrow \tau_{xz} &= -\rho_i g(h - z) \frac{\partial h}{\partial x}. \end{aligned} \quad (10)$$

De verticale spanningsverdeling heeft dus de interessante eigenschap dat deze alleen afhangt van de lokale geometrie $h(x, y)$. Via de relaties (6) en (7) kan een gesloten uitdrukking voor het snelheidsveld worden gevonden. Voor een 1-dimensionale stroming $u(x, z)$ komt dit neer op:

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} \frac{\partial u}{\partial z} &= A(T) \tau_{xz}^n \\ &= -A(T) \left(\rho_i g(h - z) \frac{\partial h}{\partial x} \right)^n. \end{aligned} \quad (11)$$

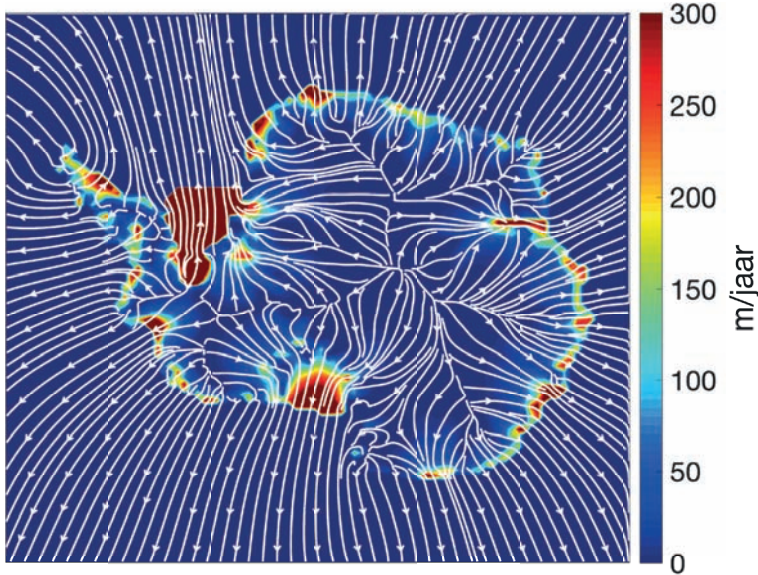
We zien dat ook de snelheid u alleen afhangt van de lokale geometrie (we veronderstellen gemakshalve dat $A(T)$ constant is). Om (11) te integreren hebben we een extra randvoorwaarde nodig. De snelheid aan de ondergrond is niet noodzakelijk nul (zoals in de bekende *no-slip*-conditie uit de stromingsleer), omdat het ijs behalve door deformatie ook over een dun laagje water

aan de bodem naar beneden kan glijden. Dit smeltwater ontstaat door de hoge druk onder het ijs en een kleine warmteflux vanuit de aarde (geothermie). De glijnsnelheid $u|_{z=b}$ kan worden uitgedrukt als functie van de bodemweerstand, $\tau_{xz}|_{z=b}$ (zie bijvoorbeeld [12]), waardoor er een gemengde randvoorwaarde $f(u, \partial_z u)|_{z=b} = 0$ ontstaat.

Samengevat komt de SIA-benadering erop neer dat de deformatie van de ijskap wordt veroorzaakt door de zwaartekracht (met andere woorden de lokale geometrie) en de bodemweerstand, wat een duidelijk verticaal snelheidsprofiel veroorzaakt met de hoogste snelheden nabij het oppervlak. Het resultaat is een gesloten uitdrukking voor het snelheidsveld als functie van de lokale geometrie.

Het moge duidelijk zijn dat deze benadering alleen zinvol is als de ijslaag op een vaste bodem ligt die de weerstand veroorzaakt. Voor de drijvende ijsplaten (rechts in Figuur 2) is de situatie heel anders. We kunnen aannemen dat de ijsplaat (opnieuw met een aspect ratio $\delta \ll 1$) zonder schuifweerstand over het oceaanwater glijdt en alleen een normaalkracht vanwege de waterdruk ondervindt. De horizontale snelheden (u, v) zijn daarom onafhankelijk van z en het ijs zal zich horizontaal verspreiden. Voor een vergelijkbare asymptotische benadering in δ is nu onder andere vereist dat $\tau_{xz}/p = O(\delta)$ en $\tau_{xy}/p = O(1)$: horizontale schuifspanningen domineren. In de impulsbalans (5) zullen alleen de krachten $\partial_x \tau_{xz}$ en $\partial_y \tau_{yz}$ in de z -richting $O(\delta^2)$ worden. Dit staat bekend als de *Shallow Shelf Approximation (SSA)*. Om de horizontale snelheid (u, v) te bepalen, moet uiteindelijk een stelsel van twee gekoppelde tweede-orde partiële differentiaalvergelijkingen worden opgelost [5, 10].

In de praktijk gebruiken de dynamische ijskapmodellen dus SIA voor het landijs en SSA voor de ijsplaten. In het overgangsbied, waar het ijs vaak via nauwe berggletsjers naar de ijsplaten stroomt, zullen beide methoden gecombineerd moeten worden, omdat zowel horizontale spanningen als bodemweerstand hier belangrijk zijn. Dit brengt vaak numerieke problemen met zich mee. Verder hebben we tot dusver de thermodynamica buiten beschouwing gelaten, terwijl de temperatuurverdeling in het ijs van belang is voor bijvoorbeeld de viscositeit (7) of de aanwezigheid van smeltwater aan de bodem. De meeste ijskapmodellen berekenen daarom een volledig 3-dimen-



Figuur 3 Horizontaal snelheidsveld $\bar{v}_h$ (verticaal gemiddeld) berekend door het ijskapmodel IMAU-ICE. De kleuren geven de absolute waarde van de vector $\bar{v}_h$ weer. Merk op dat de kleuren zijn afgekapt aan het einde van de ijsplaten, hoewel het snelheidsveld in het hele domein gedefinieerd is.

sionaal temperatuurveld via een advectie-diffusievergelijking voor energie [5,10].

Figuur 3 laat een voorbeeldsimulatie zien met het ijsmodel IMAU-ICE van de Universiteit Utrecht. We gebruiken hierbij de huidige geometrie van Antarctica als beginconditie en laten het model draaien tot het ijsvolume nagenoeg constant blijft (circa 100.000 jaar in het model). Het is duidelijk dat de snelheden het grootst zijn voor de ijsplaten.

Interactie met de oceaan

Omdat een wezenlijk deel van Antarctica uit drijvende ijsplaten ontstaat, is de interactie van deze ijsplaten met de omringende oceaan, uitgedrukt in de bronterm B in (4), een belangrijk proces voor de ontwikkeling van de ijskap. Zeer recente studies laten zien dat sommige ijsplaten in rap tempo aan de onderkant wegsmelten door warm oceaanwater [9]. Aangezien de ijsplaten al drijven, zal het wegsmelten ervan nauwelijks een directe bijdrage leveren aan de zeespiegelstijging (dit volgt immers uit de wet van Archimedes, zie ook (1)). Er is echter wel een belangrijke indirecte bijdrage, omdat het landijs op zijn plaats gehouden wordt door de aanwezigheid van de ijsplaten. Het volledig wegsmelten van de ijsplaten zou dit landijs versneld in zee laten stromen [2], met een versnelde zeespiegelstijging tot gevolg.

De massaflux B aan de bodem van ijsplaten hangt onder anderen af van de oceaanstromingen in de holtes onder de

ijsplaten. In het algemeen zijn dit ingewikkelde stromingen die bepaald worden door zowel dichtheidsverschillen (temperatuur- en zoutgradiënten) als de Coriolis-kracht. Het belangrijkste mechanisme voor de dynamica in deze holtes is echter het volgende proces, dat vereenvoudigd is weergegeven in Figuur 4. Op grote dieptes dichtbij de grounding line is het vriespunt laag (soms een paar graden onder nul) vanwege de hoge druk en het zoute water. Hier zal het ijs sneller smelten, waardoor er een hoeveelheid zoet water ontstaat met een lagere dichtheid dan het omringende zoute water. Door dit dichtheidsverschil stroomt het smeltwater omhoog langs de bodem van de ijsplaat in de vorm van een

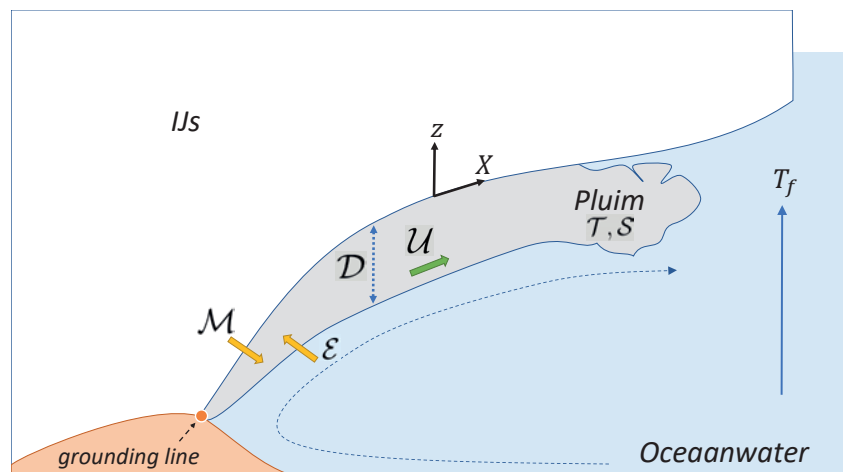
turbulente pluim (*gravity current*). Dit veroorzaakt een circulatie in de holte, waardoor (warmer) oceaanwater van buiten de holte wordt aangezogen dat het smelten bij de grounding line versnelt.

Als we driedimensionale effecten loodrecht op het vlak van Figuur 4 buiten beschouwing laten, kan dit systeem worden beschreven met een quasi-1-dimensionaal model [6] dat uit drie lagen bestaat: het ijs, de pluim en het omgevingswater. De pluim heeft een dikte $\mathcal{D}(X)$, een snelheid $\mathcal{U}(X)$, een temperatuur $\mathcal{T}(X)$ en een zoutgehalte $\mathcal{S}(X)$ als functie van de coördinaat X langs de bodem van de ijsplaat, waarbij de laatste drie variabelen gemiddeld zijn over de pluimdikte. Verder definiëren we $\mathcal{M} := -B$, de *melt rate*, die bepaald wordt door de energiewisseling tussen ijs en pluim:

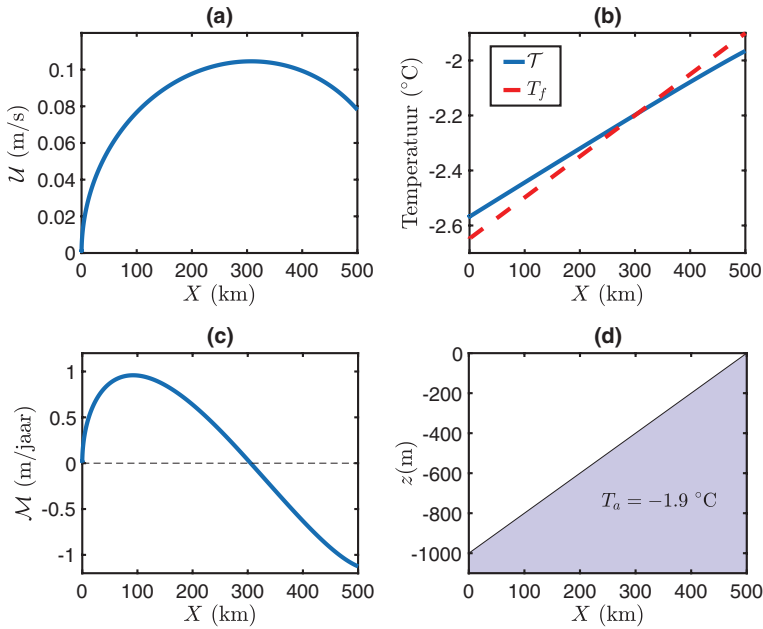
$$\rho_i L_i \mathcal{M} = \rho_w c_w \gamma(\mathcal{U}) \cdot [\mathcal{T} - T_f(z, \mathcal{S})], \quad (12)$$

met L_i de smeltwarmte van ijs, c_w de soortelijke warmte van water, γ een warmteoverdrachtscoëfficiënt, die (lineair) afhangt van $\mathcal{U}$, en T_f het lokale vriespunt, afhankelijk van diepte z en het zoutgehalte $\mathcal{S}$ in de pluim. Vergelijking (12) geeft de balans tussen de warmte die nodig is voor de faseovergang en de toegevoerde warmteflux uit de pluim (warmtegeleiding in het ijs verwaarlozen we). We zien dat de afsmelting $\mathcal{M}$ toeneemt als de pluimsnelheid $\mathcal{U}$ toeneemt. Verder is $\mathcal{M}$ positief voor $\mathcal{T} > T_f$ en negatief (herbevrozing) voor $\mathcal{T} < T_f$, waarbij het vriespunt T_f lineair afhankelijk is van $\mathcal{S}$ en z :

$$T_f(z, \mathcal{S}) = \lambda_1 \mathcal{S} + \lambda_2 - \lambda_3 z, \quad (13)$$



Figuur 4 Schematische weergave van de oceaancirculatie onder de ijsplaten, aangedreven door een pluim van zoet smeltwater die wordt gevormd doordat het vriespunt T_f afneemt met de diepte. De dynamica van de pluim kan worden beschreven met een quasi-1D-model voor de variabelen $(\mathcal{D}, \mathcal{U}, \mathcal{T}, \mathcal{S})$ en de afsmelting $\mathcal{M}$ [6,8].



Figuur 5 Uitkomst van het 1D-pluimmodel [6] voor een constante helling: (a) pluimsnelheid $\mathcal{U}$, (b) pluimtemperatuur $\mathcal{T}$ en vriespunt T_f , (c) afsmelting $\mathcal{M}$, (d) weergave van gebruikte geometrie en omgevingstemperatuur T_a .

met λ_i constante coëfficiënten. Typische waarden van T_f liggen tussen -3°C en 0°C .

De vraag is nu hoe de pluimvariabelen ($\mathcal{D}, \mathcal{U}, \mathcal{T}, \mathcal{S}$) zich ontwikkelen naarmate de pluim zich omhoog beweegt in de X -richting, zodat we uit (12) de afsmelting kunnen bepalen. Voor het bovengenoemde quasi-1D-model [6] kan een stelsel van vier gewone differentiaalvergelijkingen opgesteld worden, die overeenkomen met behoud van massa, impuls, energie en zout in de pluim. Voor de massabalans krijgen we:

$$\frac{d}{dX}(\mathcal{D}\mathcal{U}) = \mathcal{M} + \mathcal{E}, \quad (14)$$

met andere woorden de massaflux van de pluim (links) wordt bepaald door een influx

van smeltwater $\mathcal{M}$ vanuit het ijs en een influx $\mathcal{E}$ (*entrainment*) van omgevingswater door turbulente menging. Soortgelijke vergelijkingen krijgen we voor de impulsflux $\frac{d}{dX}(\mathcal{D}\mathcal{U}^2)$, de warmteflux $\frac{d}{dX}(\mathcal{D}\mathcal{U}\mathcal{T})$ en de zoutflux $\frac{d}{dX}(\mathcal{D}\mathcal{U}\mathcal{S})$. Dit stelsel kan samen met (12) numeriek worden opgelost voor willekeurige geometrieën en omgevingscondities.

Een voorbeeldberekening voor een constante helling van de ijsbodem en constante omgevingstemperatuur is te zien in Figuur 5. We zien dat de pluim zich vanuit rust omhoog beweegt tot een maximumsnelheid $\mathcal{U}_{\max}$ en daarna wordt afgeremd doordat de drijfkracht (dichtheidsverschil tussen pluim en omgeving) afneemt. De

pluimtemperatuur $\mathcal{T}$ neemt toe door de influx van omgevingswater, maar dit gebeurt minder snel dan het verloop van het vriespunt T_f , zodat $\mathcal{T} - T_f$ halverwege van teken verandert. Beide effecten geven via vergelijking (12) een interessant profiel voor $\mathcal{M}$: de afsmelting is maximaal dichtbij de grounding line, maar verandert halverwege van teken, met andere woorden er vindt herbevrozing plaats. Dit algemene profiel is op veel plaatsen ook zichtbaar in de observaties [9]. In de meest recente ijsmodellen kan de curve in Figuur 5(c) worden geparametriseerd om de afsmelting onder de ijsplaten te modelleren [8]. Om overall realistische smeltwaarden te krijgen zal echter een gedetailleerd model van de oceaanstroming onder de ijsplaten nodig zijn, dat zowel de dichtheidsgradiënten in het omgevingswater als een volledige drie-dimensionale stroming beschrijft.

Conclusie

We hebben een overzicht gegeven van de basisprincipes achter numerieke modellen van ijskappen. Deze modellen kunnen worden gebruikt om de ontwikkeling van ijskappen over lange tijdschalen te bestuderen. Er zijn duidelijk veel fysische processen van belang voor de massabalans en stroming van het ijs. Sommige processen, zoals de afsmelting onder de ijsplaten, kunnen slechts tot een bepaald detailniveau expliciet opgelost worden zonder de simulaties te rekenintensief te maken. Er is daarom nog veel werk nodig om de verschillende processen op een realistische en efficiënte manier te kunnen beschrijven en te vergelijken met de spaarzame metingen die er zijn.

Referenties

- 1 B. de Boer e.a., Simulating the Antarctic ice sheet in the late-Pliocene warm period: PLISMIP-ANT, an ice-sheet model intercomparison project, *The Cryosphere* 9 (2015), 881–903.
- 2 R.M. DeConto en D. Pollard, Contribution of Antarctica to past and future sea-level rise, *Nature* 531 (2016), 591–597.
- 3 P. Fretwell e.a., Bedmap2: improved ice bed, surface and thickness datasets for Antarctica, *The Cryosphere* 7 (2013), 375–393.
- 4 J.W. Glen, The creep of polycrystalline ice, *Proc. R. Soc. Lond. A* 228 (1955), 519–538.
- 5 P. Huybrechts, A 3-D model for the Antarctic ice sheet: a sensitivity study on the glacial-interglacial contrast, *Clim. Dyn.* 5 (1990), 79–92.
- 6 A. Jenkins, A one-dimensional model of ice shelf-ocean interaction, *J. Geophys. Res. Oceans*, 96 (1991), 20671–20677.
- 7 M. Keulemans, Spectaculair stuk drijfsj zo groot als Noord-Brabant scheurt los van Antarctica, *De Volkskrant*, 12 juli 2017.
- 8 W.M.J. Lazeroms e.a., Modelling present-day basal melt rates for Antarctic ice shelves using a parametrization of buoyant meltwater plumes, *The Cryosphere* 12 (2018), 49–70.
- 9 E. Rignot e.a., Ice-shelf melting around Antarctica, *Science* 341 (2013), 266–270.
- 10 C.J. van der Veen, *Fundamentals of Glacier Dynamics*, A.A. Balkema, Rotterdam, 1999.
- 11 N. Waarlo, Zo willen wetenschappers het smelten van gletsjers tegengaan, *De Volkskrant*, 15 juli 2017.
- 12 J. Weertman, On the sliding of glaciers, *J. Glaciology* 3 (1957), 33–38.
- 13 J.M. van Wessem e.a., The modelled surface mass balance of the Antarctic Peninsula at 5.5 km horizontal resolution, *The Cryosphere* 10 (2016), 271–285.

Casper Albers

Psychometrie & Statistiek
Rijksuniversiteit Groningen
c.j.albers@rug.nl



Column Casper sees a chance

De Moivre–Gauss–Laplace: extraordinarily normal

The normal distribution is well-known for its versatility. You can use it for almost all types of statistical analyses. The mathematical underpinnings of this distribution are less well-known, which is a pity as these are an example of mathematical beauty.

Probably the most-used statistical distribution is the normal distribution, also known as the Gaussian distribution, after its ‘inventor’, Carl Friedrich Gauss. This distribution, classified with mean μ and variance σ has density

$$\phi(x | \mu, \sigma^2) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}},$$

which has the familiar bell shape (see Figure 1).

Normality of residuals is the standard assumption when performing basic statistical analyses such as the t -test, ANOVA or linear regression. The normal distribution appears in statistical mechanics. The normal distribution appears as approximating distribution of the binomial, Poisson, χ^2 and Student- t -distribution. Furthermore, the Central Limit Theorem dictates that whatever exotic shape the population distribution has, the distribution of the sample mean will always converge to a normal distribution as the sample size goes up.

De Moivre

Thus, normality is everywhere. But why does this distribution has the shape it has? For that, we have to look at the history of the normal distribution, which is nicely outlined in [5]. The first instances of the normal distribution, attributed to De Moivre [1] in the early eighteenth century, occur as the limiting distribution of the binomial distribution.

The normal distribution, however, is more often used as an error curve. Even the old Greeks realised that their measurements

were not free of error and used some ad hoc ways to improve their measurement. For instance, Hipparchus used the middle of the range of measurements. At the end of the eighteenth century, Thomas Simpson and Pierre Laplace both developed a distribution for the error. Other ‘bell curves’ have also been considered.

Looking at Figure 1, these curves have a few things in common: (i) small errors are more likely than large errors, (ii) the distribution is symmetrical around 0 (or, in general, around μ): the probability of an error of value ε is equivalent to that of value $-\varepsilon$. These are very sensible properties for an error distribution.

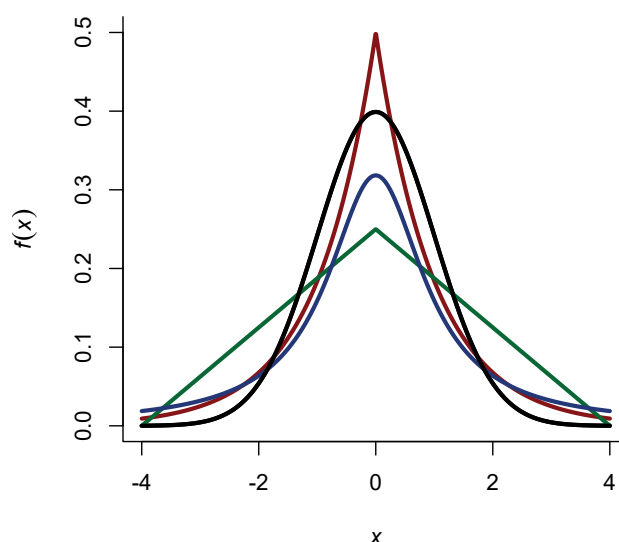


Figure 1 Four bell curves: the standard normal distribution (black), the Cauchy distribution (blue), Simpson's distribution (green) and Laplace's distribution (red).

Gauss

In 1809, Gauss derived ‘his’ curve by extending these two properties with: (iii) the error distribution should be differentiable (thus, excluding Simpson’s and Laplace’s suggestions), (iv) having several measurements of the same quantity, the most likely value of the quantity being measured is their average.

Strikingly, these four properties alone are sufficient to reach the normal distribution: no other distribution satisfies these four properties.

Proof

Gauss provided a remarkably elegant proof for this claim. Translated into ‘modern terminology’, the essence of the proof is as follows (based on [5, pp.104–105]).

Let $\phi(x)$ be the probability density function of the random error, let μ be the true (unknown) value of the measured quantity, and let n independent observations yield estimates $x_1, \dots, x_n$. Property (i) implies $\phi(x)$ is maximal at $x = 0$, and property (ii) implies $\phi(-x) = \phi(x)$. Using property (iii) we can define $f(x) = \phi'(x)/\phi(x)$, then $f(-x) = -f(x)$.

Since we assume independence of the errors $(x_i - \mu)$, the joint density of the n errors is given by

$$\Phi = \prod_{i=1}^n \phi(x_i - \mu).$$

Property (iv) states that the sample mean $\bar{x} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n x_i$ is the maximum likelihood estimate, which means that Φ is maximised at the value $\bar{x}$: $\partial\Phi/(\partial\mu | \mu = \bar{x}) = 0$. Thus,

$$\begin{aligned} 0 &= -\phi'(x_1 - \mu)\phi(x_2 - \mu) \cdots \phi(x_n - \mu) \\ &\quad - \phi(x_1 - \mu)\phi'(x_2 - \mu) \cdots \phi(x_n - \mu) \\ &\quad \vdots \\ &\quad - \phi(x_1 - \mu)\phi(x_2 - \mu) \cdots \phi'(x_n - \mu) \\ &= -\left(\frac{\phi'(x_1 - \mu)}{\phi(x_1 - \mu)} + \frac{\phi'(x_2 - \mu)}{\phi(x_2 - \mu)} + \cdots + \frac{\phi'(x_n - \mu)}{\phi(x_n - \mu)} \right) \Phi. \end{aligned}$$

Using our function $f(x)$, we can write this as

$$f(x_1 - \bar{x}) + f(x_2 - \bar{x}) + \cdots + f(x_n - \bar{x}) = 0.$$

Suppose now that $x_1 = x$ and $x_2 = x_3 = \cdots = x_n = x - nN$ for arbitrary values x and N . Then the formula above can be rewritten as

$$f((n-1)N) = (n-1)f(N).$$

From the theory of differential equations, we know that this (recall the continuity of f) implies that for some $k \in \mathbb{R}$: thus, $\phi'(x)/\phi(x) = kx$. Integration with respect to x provides

$$\ln \phi(x) = \frac{k}{2}x^2 + c \rightarrow \phi(x) = Ce^{kx^2/2}.$$

As $\phi(x)$ must have its maximum at 0, k must be negative. Substituting $k = -1/\sigma^2$, we obtain $\phi(x) \propto e^{-x^2/(2\sigma^2)}$. As

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2/(2\sigma^2)} dx = \sqrt{2\pi\sigma^2},$$

we obtain

$$\phi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} e^{-\frac{1}{2} \frac{x^2}{\sigma^2}},$$

thus concluding our proof.

Gauss also provided a second proof, based on the least-squares properties. As for a normal distribution, the least squares estimator and maximum likelihood estimator coincide, this proof follows much of the same reasoning.

Laplace

It would only have taken a small twist of fate, and we would have known the Gauss distribution as the Laplace distribution. Only a year after Gauss’ publication (and based on work he did some 25 years earlier), Laplace published [3] a mathematical underpinning of the normal distribution based on the central limit theorem. In what is now known as the De Moivre–Laplace theorem, he proved that, if $x_n \sim \text{Bin}(n, p)$ then

$$\lim_{n \rightarrow \infty} P\left(\frac{X_n - np}{\sqrt{np(1-p)}} \leq x\right) = \int_{-\infty}^x \phi(t) dt.$$

For this reason, statisticians such as Karl Pearson called what we now call the normal distribution the Gauss–Laplace distribution (unfortunately ignoring the work by De Moivre nearly a century earlier). Pearson propagated against the use of the terminology ‘normal distribution’ as this might “lead people to believe all other distributions of frequency are in one sense or another abnormal” [4]. Given the vast statistical heritage of Pearson, we don’t have to feel sorry that this advice of his hasn’t been followed. Given the sheer range of applications, no other distribution than that by De Moivre, Gauss and Laplace would be worthy of the name ‘normal’.

References

- 1 A. De Moivre, *Approximatio ad Summam Terminorum Binomii $(a+b)^n$ in Seriem Expansi* (1733).
- 2 C.F. Gauss, *Theoria Motus Corporum Coelestium*, Perthes et Besser, Hamburg, 1809.
- 3 P.S. Laplace, *Mémoire sur les approximations des formules qui sont fonctions de très grands nombres et sur leur application aux probabilités*, *Mémoires de l'Académie des sciences de Paris* (1810).
- 4 K. Pearson, *Notes on the history of correlation*. *Biometrika* (1920).
- 5 S. Stahl, *The evolution of the normal distribution*, *Mathematics Magazine* 79(2) (2006) 96–113.

Jan van de Craats

Korteweg-de Vries Instituut voor Wiskunde
Universiteit van Amsterdam
j.vandecraats@uva.nl

Henk Pijls

Korteweg-de Vries Instituut voor Wiskunde
Universiteit van Amsterdam
h.g.j.pijls@uva.nl

Onderzoek

De kromme gevormd door de toppen van de parabolen door drie gegeven punten

Door drie gegeven punten in het reële vlak, niet op één lijn, gaan oneindig veel parabolen, elk met een eigen asrichting. Jos de Wit, een vroegere collega van Jan van de Craats op de KMA in Breda, vroeg zich af wat de kromme is die gevormd wordt door de toppen van die parabolen. Henk Pijls en Jan van de Craats zochten het uit.

Voor Jos de Wit

Wat is de kromme die gevormd wordt door de toppen van de parabolen door drie gegeven punten in het reële vlak? We zullen laten zien dat het een algebraïsche kromme is van graad 7 met drie asymptoten. Die asymptoten zijn evenwijdig aan de zijden van de driehoek die gevormd wordt door de gegeven punten, en elke asymptoot verdeelt de andere twee driehoekszijden in de verhouding 3:1 (zie de Figuren 1 en 2).

Ter oriëntatie bekijken we eerst een bijzonder geval voor de ligging van de drie gegeven punten — we zullen ze verder de *basispunten* noemen — omdat daarbij de berekeningen overzichtelijk en eenvoudig zijn. Stel dat $(0,0)$, $(1,0)$ en $(0,1)$ de basispunten zijn. Men verifieert gemakkelijk dat de volgende vergelijking, met t als parameter, de *parabolenbundel* beschrijft door die basispunten:

$$(x+ty)^2 - x - t^2y = 0. \quad (1)$$

Voor elke keuze van t definieert (1) namelijk een kegelsnede die door die basispunten gaat. Voor een vast gekozen t ongelijk aan 0 of 1 heeft de kegelsnede precies één punt gemeen met elke lijn $x+ty=c$, en dat is alleen mogelijk als de kegelsnede een parabool is. De asrichting van

de parabool is dan evenwijdig aan de lijn $x+ty=0$. Voor $t=0$ ontaardt de parabool in het lijnenpaar $x^2-x=0$, voor $t=1$ in het lijnenpaar $(x+y)^2-(x+y)=0$ en voor $t=\infty$ (dat wil zeggen $1/t=0$; deel vergelijking (1) door t^2) in het lijnenpaar $y^2-y=0$. Omgekeerd maakt ook elke parabool door de drie basispunten deel uit van die parabolenbundel.

In de top van een niet-ontaarde parabool staat de raaklijn loodrecht op de as. De top $(x(t), y(t))$ van een niet-ontaarde parabool uit de bundel kan daarom als volgt worden berekend. Definieer

$$F(x, y) = (x+ty)^2 - x - t^2y.$$

De gradiënt $\nabla F = (\frac{\partial F}{\partial x}, \frac{\partial F}{\partial y})$ in een punt (x, y) van de parabool $F(x, y) = 0$ staat loodrecht op de raaklijn, dus in de top is de gradiënt een vector die evenwijdig is aan de asrichting. Aangezien

$$\frac{\partial}{\partial x} F(x, y) = 2(x+ty) - 1$$

en

$$\frac{\partial}{\partial y} F(x, y) = 2t(x+ty) - t^2$$

geldt in de top $\frac{\partial}{\partial x} F(x, y) : \frac{\partial}{\partial y} F(x, y) = (-t) : 1$, dus

$$2(x+ty) - 1 = -t(2t(x+ty) - t^2)$$

hetgeen kan worden vereenvoudigd tot

$$x+ty = \frac{1+t^3}{2(1+t^2)}. \quad (2)$$

Schrijf vergelijking (1) van de parabool als

$$(x+ty)^2 - (x+ty) - (t^2-t)y = 0.$$

Substitutie van (2) geeft dan een vergelijking waaruit y als functie van t kan worden opgelost, en vervolgens kan, weer met behulp van (2), ook x als functie van t worden gevonden. Het resultaat is dat voor de top $(x(t), y(t))$ van de parabool geldt dat

$$x(t) = \frac{P(t)}{Q(t)}, \quad y(t) = \frac{R(t)}{Q(t)}, \quad (3)$$

waarbij

$$\begin{aligned} P(t) &= t(t^3+1)(t^3+2t-1), \\ Q(t) &= 4t(t-1)(t^2+1)^2, \\ R(t) &= (t^3+1)(t^3-2t^2-1). \end{aligned}$$

De kromme Γ die gevormd wordt door alle toppen uit de genoemde parabolenbundel heeft dus de rationale parametrisatie (3). Snijden van Γ met een willekeurige lijn $\alpha x + \beta y + \gamma = 0$ geeft de vergelijking

$$\alpha P(t) + \beta R(t) + \gamma Q(t) = 0.$$

Voor $\alpha \neq 0$ is dit een vergelijking van graad 7 en voor $\alpha = 0$ van graad 6.

In het algemeen is een *algebraïsche kromme* in het vlak de nulpuntenverzameling van een polynoomvergelijking in x en y . Omdat bewezen kan worden dat elke kromme met een rationale parametrisatie een algebraïsche kromme is (zie later voor

een toelichting in dit bijzondere geval), volgt hieruit dat Γ een algebraïsche kromme is van graad 7.

De asymptoten

De parametrisatie (3) stelt ons in staat Γ te tekenen (zie Figuur 1) en enige meetkundige eigenschappen van Γ af te leiden. Allereerst geldt voor $t = 0$ dat $P(0) = Q(0) = 0$ en $R(0) = -1$, maar

$$\lim_{t \rightarrow 0} x(t) = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{P(t)}{Q(t)} = \frac{1}{4},$$

$$\lim_{t \rightarrow 0} |y(t)| = \infty,$$

dus de lijn $x = \frac{1}{4}$ is een verticale asymptoot van Γ , behorende bij $t \rightarrow 0$. Verder geldt voor $t \rightarrow \pm\infty$,

$$\lim_{t \rightarrow \pm\infty} |x(t)| = \infty,$$

$$\lim_{t \rightarrow \pm\infty} y(t) = \lim_{t \rightarrow \pm\infty} \frac{R(t)}{Q(t)} = \frac{1}{4},$$

dus de lijn $y = \frac{1}{4}$ is een horizontale asymptoot van Γ .

Voor t ongelijk aan 0 of 1 geldt

$$x(t) + y(t) = (x(t) + ty(t)) - (t-1)y(t)$$

$$= \frac{1+t^3}{2(1+t^2)} - \frac{R(t)}{4t(t^2+1)^2} \quad (4)$$

zodat, wegens $R(1) = -4$,

$$\lim_{t \rightarrow 1} (x(t) + y(t)) = \frac{1}{2} + \frac{1}{4} = \frac{3}{4}.$$

Er geldt bovendien dat $\lim_{t \rightarrow -1} |x(t)| = \lim_{t \rightarrow -1} |y(t)| = \infty$, dus de lijn $x + y = \frac{3}{4}$ is een asymptoot van Γ voor $t \rightarrow 1$.

De parameterwaarde $t = -1$ geeft de oorsprong als punt van Γ . Het unieke reële nulpunt t_0 van $t^3 - 2t^2 - 1$ geeft een tweede snijpunt van Γ met de lijn $y = 0$. Vergelijking (4) geeft dan, wegens $R(t_0) = 0$ en $t_0^3 = 2t_0^2 + 1$,

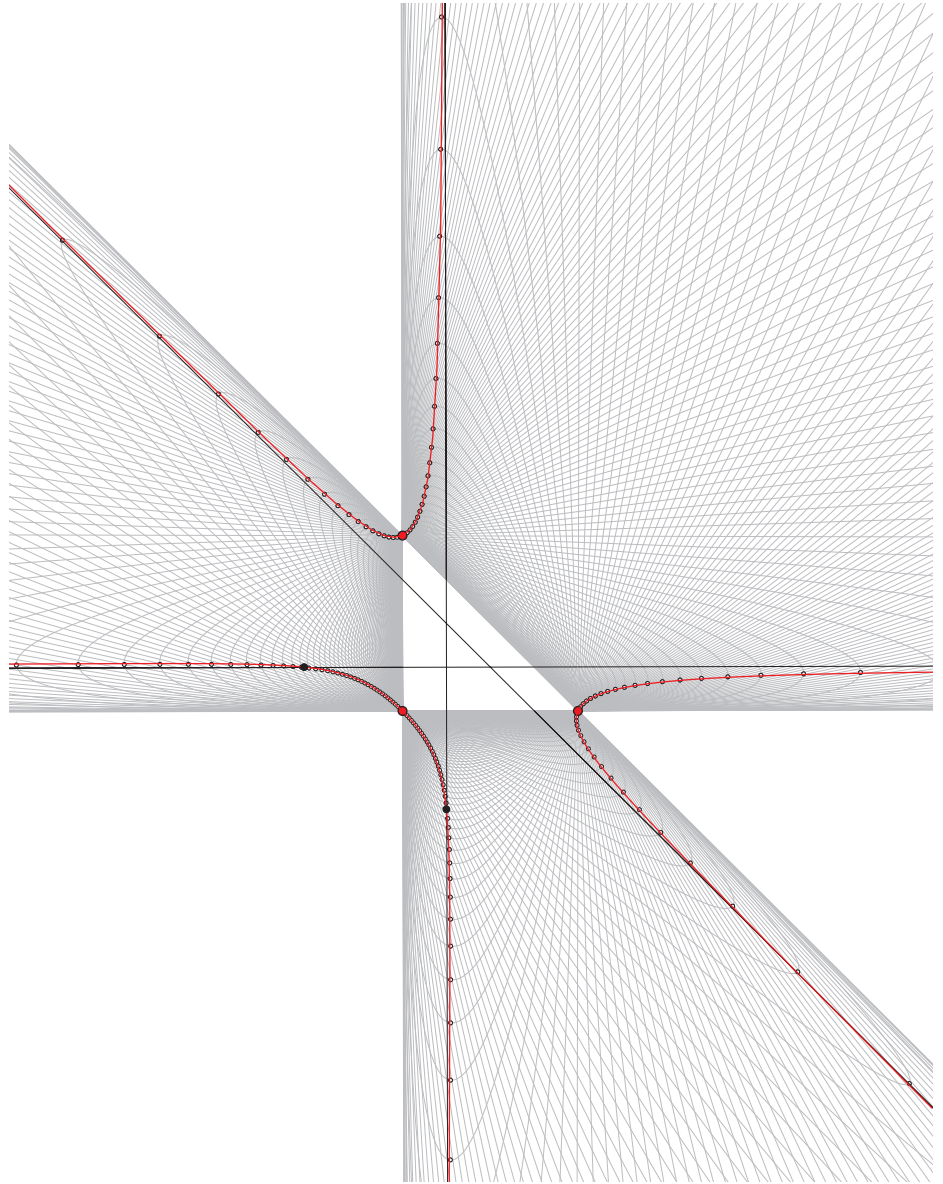
$$x(t_0) + y(t_0) = \frac{1+t_0^3}{2(1+t_0^2)} = \frac{1+2t_0^2+1}{2(1+t_0^2)} = 1,$$

dus dat snijpunt ligt ook op $x + y = 1$, met andere woorden, het is het punt $(1, 0)$. Op grond van symmetrie ligt dus ook $(0, 1)$ op Γ , dus Γ gaat door alle drie de basispunten van de parabolenbundel.

De snijpunten van Γ met de asymptoot $x = \frac{1}{4}$ voldoen aan $4P(t) = Q(t)$ (zie (3)), dus, na deling door $4t$,

$$(t^3 + 1)(t^3 + 2t - 1) = (t - 1)(1 + t^2)^2.$$

Deze vergelijking heeft twee reële wortels, namelijk $t = 0$ (het punt op oneindig van de asymptoot) en $t \approx -0,329693$. De bijbehorende y -waarde is $y \approx -0,560576$. Even-



Figuur 1 Een collectie van parabolen door de basispunten $(0,0)$, $(1,0)$ en $(0,1)$. De toppen van de parabolen zijn gemarkeerd, evenals de drie asymptoten van de toppenkromme Γ . Ook Γ zelf is getekend (in rood). Twee van de drie asymptoten snijden Γ . Die snijpunten zijn gemarkeerd.

zo heeft Γ precies één eindig reëel snijpunt met de asymptoot $y = \frac{1}{4}$. De bijbehorende x -waarde is $x \approx -0,560576$. Een soortgelijke berekening laat zien dat Γ geen eindige reële snijpunten heeft met de asymptoot $x + y = \frac{3}{4}$ (zie ook Figuur 1).

Γ is een algebraïsche kromme

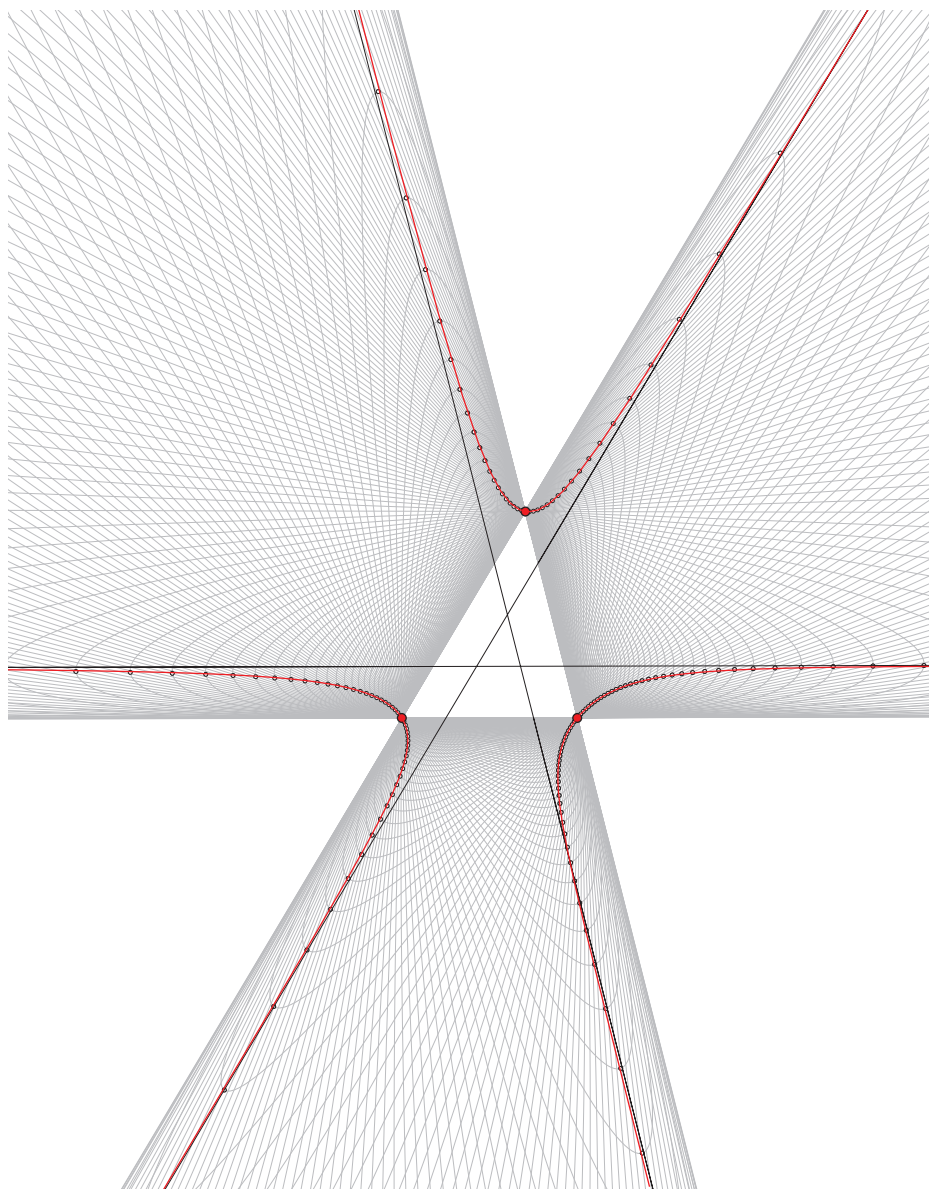
Rest nog het bewijs dat Γ een algebraïsche kromme is. Schrijf hiertoe de rationale parametrisatie (3) als

$$P(t) - xQ(t) = 0,$$

$$R(t) - yQ(t) = 0.$$

Uitwerken van de haakjes geeft in de linkerleden polynomen in t met constanten of lineaire uitdrukkingen in x respectievelijk y

als coëfficiënten. Bij elk punt (x_0, y_0) van Γ hoort een t_0 zó, dat na substitutie van t_0 , x_0 en y_0 aan de beide vergelijkingen voldaan is. Dat betekent dat de beide polynomen in t voor het paar (x_0, y_0) deelbaar zijn door een factor $t - t_0$. Nodig en voldoende opdat twee polynomen een niet-constante gemeenschappelijke factor hebben, is dat hun *resultante* nul is (zie bijvoorbeeld Van der Waerden [2, p.103 e.v.], of zoek op Wikipedia onder *resultant polynomial*). De resultante van de beide genoemde polynomen kan geschreven worden als een determinant waarvan de elementen coëfficiënten van de polynomen zijn, dat wil dus zeggen getallen of lineaire uitdrukkingen in x of y . Die determinant geeft, na ont-



Figuur 2 Een collectie van parabolen door de drie vaste punten $(-1,0)$, $(1,0)$ en (a,b) waarin $a \approx 0,4091$ en $b \approx 2,354$. De toppen zijn gemarkeerd en de drie asymptoten zijn getekend. Ook de kromme Γ is getekend (in rood).

wikkeling, een polynoom $H(x,y)$ in x en y , en de vergelijking $H(x,y) = 0$ is een polynoomvergelijking in x en y van Γ . Inderdaad is Γ dus een algebraïsche kromme.

Het algemene geval

In het algemene geval van drie willekeurige basispunten, geen drie op één lijn, kunnen we het coördinatenstelsel zo kiezen dat de basispunten gegeven worden door $(-1,0)$, $(1,0)$ en (a,b) met $b \neq 0$ (met deze keuze behouden de formules veel symmetrie).

Men verifieert gemakkelijk dat de parabolenbundel door die basispunten gegeven wordt door de vergelijking

$$(bx + (t-a)y)^2 - (t^2-1)by = b^2 \quad (5)$$

met t als parameter. Voor $t = -1$ ontgaat de parabool in het lijnenpaar

$$(bx - (1+a)y)^2 = b^2,$$

dat wil zeggen in de lijn door $(-1,0)$ en (a,b) en de daaraan evenwijdige lijn door $(1,0)$. De parameterwaarde $t = 1$ geeft het lijnenpaar

$$(bx + (1-a)y)^2 = b^2,$$

dat wil zeggen de lijn door $(1,0)$ en (a,b) en de daaraan evenwijdige lijn door $(-1,0)$, en $t = \infty$ geeft het lijnenpaar $y^2 - by = 0$ (deel (5) door t^2 en laat $1/t \rightarrow 0$).

De asrichting van een niet-ontgaande parabool uit de bundel is evenwijdig aan de lijn $bx + (t-a)y = 0$. In de top (x,y) van de

parabool staat de raaklijn loodrecht op de asrichting. Via de gradiënt van het linkerlid van (5) leidt dit tot de volgende vergelijking waaraan alle toppen (x,y) met hun bijbehorende parameterwaarde t moeten voldoen:

$$-b[2b(bx + (t-a)y)] = (t-a)[2(t-a)(bx + (t-a)y) - (t^2-1)b].$$

Deze vergelijking kan worden herschreven als

$$bx + (t-a)y = b \frac{(t-a)(t^2-1)}{2(b^2 + (t-a)^2)} = bA(t) \quad (6)$$

waarin

$$A(t) = \frac{(t-a)(t^2-1)}{2(b^2 + (t-a)^2)}.$$

Merk op dat $A(t)$ voor alle reële t gedefinieerd is en dat $A(1) = A(-1) = 0$.

Een algebraïsche kromme van graad 7

De toppenkromme, dat wil zeggen de kromme van de toppen van alle parabolen uit de parabolenbundel (5), noemen we weer Γ . Via substitutie van (6) in de vergelijking (5) van de parabool kunnen we de y -coördinaat van zo'n top $(x(t), y(t))$ als functie van t schrijven:

$$y(t) = \frac{b}{(t^2-1)}(A(t)^2-1). \quad (7)$$

Met behulp van (6) vinden we vervolgens ook $x(t)$ als functie van t :

$$\begin{aligned} x(t) &= A(t) - \frac{t-a}{b}y(t) \\ &= A(t) - \frac{t-a}{t^2-1}(A(t)^2-1). \end{aligned} \quad (8)$$

De vergelijkingen (7) en (8) geven na uitwerking een rationale parametrisatie van Γ van de vorm

$$x(t) = \frac{P(t)}{Q(t)}, \quad y(t) = \frac{R(t)}{Q(t)},$$

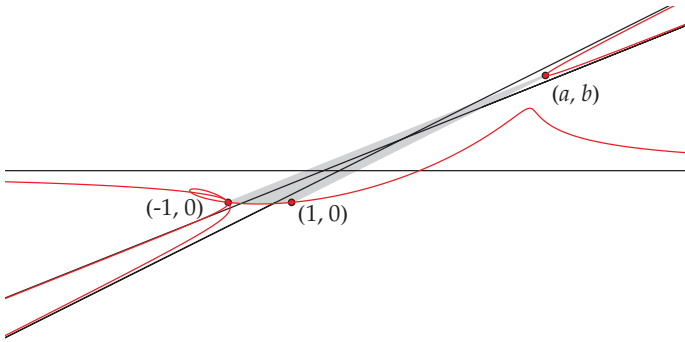
waarin $P(t)$, $Q(t)$ en $R(t)$ polynomen zijn in t , respectievelijk van de graad 7, 6 en 6, namelijk

$$P(t) = t^7 + \text{lagere-ordeterminen}, \quad (9)$$

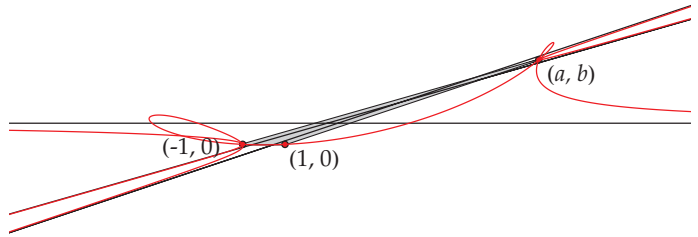
$$Q(t) = 4(t^2-1)(b^2 + (t-a)^2)^2 = 4t^6 + \text{lagere-ordeterminen}, \quad (10)$$

$$R(t) = bt^6 + \text{lagere-ordeterminen}. \quad (11)$$

Net als in het eerder behandelde bijzondere geval volgt hieruit dat Γ een algebraïsche kromme is. Snijden van Γ met een willekeurige lijn $\alpha x + \beta y + \gamma = 0$ geeft een polynoomvergelijking van graad 7 als $\alpha \neq 0$ en van graad 6 als $\alpha = 0$ en dus is Γ een algebraïsche kromme van graad 7.



Figuur 3 De zevendegraads kromme Γ met basispunten $(-1, 0)$, $(1, 0)$ en (a, b) en de drie asymptoten voor $a = 9$ en $b = 4$. De basispuntendriehoek is grijs gekleurd.



Figuur 4 De zevendegraads kromme Γ met basispunten $(-1, 0)$, $(1, 0)$ en (a, b) en de drie asymptoten voor $a = 13$ en $b = 4$.

De asymptoten van de toppenkromme

We bepalen nu de asymptoten van Γ . Ze zullen optreden voor $t \rightarrow \infty$ en voor $t \rightarrow \pm 1$ omdat in die gevallen de parabool ontgaat in een lijnenpaar.

Uit (11) en (10) volgt

$$\lim_{t \rightarrow \pm \infty} y(t) = \frac{b}{4},$$

dus de lijn $y = \frac{b}{4}$ is een horizontale asymptoot van Γ (merk hierbij op dat $\lim_{t \rightarrow \pm \infty} |x(t)| = \infty$). Die asymptoot is evenwijdig aan de lijn $y = 0$ door de basispunten $(-1, 0)$ en $(1, 0)$, en ze verdeelt de beide andere zijden van de basispuntendriehoek in de verhouding 3:1.

Voor $t \neq \pm 1$ geldt

$$\begin{aligned} bx(t) + (1-a)y(t) &= bx(t) + (t-a)y(t) - (t-1)y(t) \\ &= bA(t) - \frac{b}{t+1}(A(t)^2 - 1) \end{aligned}$$

en dus geldt $\lim_{t \rightarrow 1} (bx(t) + (1-a)y(t)) = \frac{b}{2}$ wegens $A(1) = 0$. Omdat $\lim_{t \rightarrow 1} |x(t)| = \infty$ volgt hieruit dat de lijn $bx + (1-a)y = \frac{1}{2}b$ een asymptoot is van Γ voor $t \rightarrow 1$. Deze asymptoot is evenwijdig aan de lijn $bx + (1-a)y = b$ door de basispunten $(1, 0)$ en (a, b) en ze verdeelt de andere zijden van de basispuntendriehoek in de verhouding 3:1.

Evenzo geldt voor $t \neq \pm 1$ dat

$$\begin{aligned} bx(t) - (1+a)y(t) &= bx(t) + (t-a)y(t) - (t+1)y(t) \\ &= bA(t) - \frac{b}{t-1}(A(t)^2 - 1) \end{aligned}$$

en dus geldt $\lim_{t \rightarrow -1} (bx(t) - (1+a)y(t)) = -\frac{b}{2}$ wegens $A(-1) = 0$. Omdat $\lim_{t \rightarrow -1} |x(t)| = \infty$ volgt hieruit dat de lijn $bx - (1+a)y = -\frac{1}{2}b$ een asymptoot is van Γ voor $t \rightarrow -1$. Deze asymptoot is evenwijdig aan de lijn $bx - (1+a)y = -b$ door de basispunten $(-1, 0)$ en (a, b) en ze verdeelt de andere zijden van de basispuntendriehoek in de verhouding 3:1.

Γ gaat door de drie basispunten

We laten nu zien dat Γ door de drie basispunten $(-1, 0)$, $(1, 0)$ en (a, b) van de parabolenbundel gaat.

Laat t_1 een reële oplossing zijn van $A(t) = -1$, dat wil zeggen van de derdegraadsvergelijking

$$(t-a)(t^2-1) + 2(b^2 + (t-a)^2) = 0. \quad (12)$$

Dan geldt $y(t_1) = 0$ wegens (7) en $x(t_1) = -1$ wegens (8) dus Γ gaat door het basispunt $(-1, 0)$.

Evenzo, laat t_2 een reële oplossing zijn van $A(t) = 1$, dat wil zeggen van de derdegraadsvergelijking

$$(t-a)(t^2-1) - 2(b^2 + (t-a)^2) = 0. \quad (13)$$

Dan geldt $y(t_2) = 0$ wegens (7) en $x(t_2) = 1$

wegens (8), dus Γ gaat door het basispunt $(1, 0)$.

Laat t_3 een reële oplossing zijn van $A(t) = t$, dat wil zeggen van de derdegraadsvergelijking

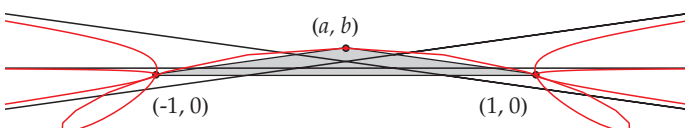
$$(t-a)(t^2-1) - 2t(b^2 + (t-a)^2) = 0. \quad (14)$$

Dan geldt $y(t_3) = b$ wegens (7) en $x(t_3) = a$ wegens (8), dus Γ gaat door het basispunt (a, b) . Zie Figuur 2 voor een illustratie van het voorgaande.

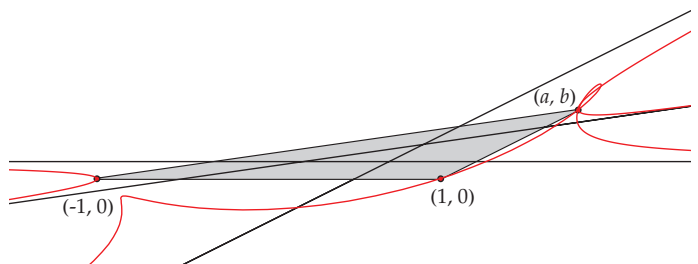
Voorbeelden van lussen in Γ

De vergelijkingen $A(t) = -1$, $A(t) = 1$ en $A(t) = t$, dat wil zeggen (12), (13) en (14), bepalen het gedrag van Γ in de drie basispunten. Het zijn alle drie derdegraadsvergelijkingen, dus ze hebben elk minstens één reële oplossing. In de situatie van Figuur 1 en Figuur 2 zijn alle andere oplossingen niet-reëel, maar voor andere keuzes van a en b hoeft dit niet het geval te zijn. In Figuur 3, met $a = 9$ en $b = 4$, is er één tak van Γ die niet alleen door $(1, 0)$ gaat, maar ook door $(-1, 0)$. Γ maakt daar een lus, en Γ gaat dus drie maal door dat basispunt.

In Figuur 4, met $a = 13$ en $b = 4$, gaat diezelfde tak van Γ ook met een lus door het derde basispunt (a, b) . Merk op dat er in dit geval rechten zijn die Γ in 7 verschillende reële punten snijden. Dat laatste is



Figuur 5 De zevendegraads kromme Γ met basispunten $(-1, 0)$, $(1, 0)$ en (a, b) en de drie asymptoten voor $a = 0$ en $b = 0,14$.



Figuur 6 De zevendegraads kromme Γ met basispunten $(-1, 0)$, $(1, 0)$ en (a, b) en de drie asymptoten voor $a = 1,8$ en $b = 0,4$.

ook het geval in Figuur 5, waarin $a = 0$ en $b = 0,14$ gekozen is, en waarin er lussen zijn in de basispunten $(-1,0)$ en $(1,0)$ maar niet in het basispunt (a,b) . In Figuur 6, waarin we $a = 1,4$ en $b = 0,4$ hebben gekozen, is er alleen een lus in het basispunt (a,b) .

Criteria voor lussen in de toppenkromme

Het is welbekend dat een derdegraadsvergelijking

$$t^3 - 3c_1 t^2 + 3c_2 t - c_3 = 0$$

met reële coëfficiënten c_1, c_2, c_3 drie verschillende reële wortels t_1, t_2, t_3 heeft dan en slechts dan als de discriminant

$$D = (c_3 - c_1 c_2)^2 - 4(c_2 - c_1^2)(c_1 c_3 - c_2^2) \\ = -\frac{1}{27}(t_1 - t_2)^2(t_2 - t_3)^2(t_3 - t_1)^2$$

negatief is (zie bijvoorbeeld de presentatieslides [1]).

De derdegraadsvergelijking (12), dat wil zeggen $A(t) = -1$, bepaalt het gedrag van Γ in het basispunt $(-1,0)$. Laat $D_1(a,b)$ de bijbehorende discriminant zijn. De derdegraadsvergelijking (13), dat wil zeggen $A(t) = 1$, bepaalt het gedrag van Γ in het basispunt $(1,0)$. Laat $D_2(a,b)$ de bijbehorende discriminant zijn. De derdegraadsvergelijking (14), dat wil zeggen $A(t) = t$, bepaalt het gedrag van Γ in het basispunt (a,b) . Laat $D_3(a,b)$ de bijbehorende discriminant zijn. De ongelijkheden $D_1(a,b) < 0$, $D_2(a,b) < 0$ en $D_3(a,b) < 0$ definiëren gebieden in het ab -vlak waarvoor Γ een lus maakt in respectievelijk de basispunten $(-1,0)$, $(1,0)$ en (a,b) . Ze kunnen bijvoorbeeld met behulp van computeralgebra worden geplot. Op die manier hebben we de (a,b) -combinaties gevonden voor Figuur 3, 4, 5 en 6.

In ten hoogste twee basispunten een lus

Figuur 4 en 5 laten zien dat het mogelijk is dat de toppenkromme Γ tegelijkertijd een lus bezit in twee van de drie basispunten. We zullen nu bewijzen dat Γ niet in alle drie de basispunten een lus kan hebben.

Een lus in het basispunt (a,b) met $b \neq 0$ treedt op dan en slechts dan als vergelijking (14) drie verschillende reële wortels heeft. Schrijf die vergelijking als

$$(t-a)(t^2 - 2at + 1) + 2b^2 t = 0. \quad (15)$$

Definieer

$$f(t) = (t-a)(t^2 - 2at + 1) + 2b^2 t.$$

De afgeleide is

$$f'(t) = 3t^2 - 6at + (1 + 2a^2 + 2b^2)$$

met $12(a^2 - 1) - 24b^2$ als discriminant. Voor $-1 < a < 1$ is de discriminant negatief, dus dan is $f'(t) > 0$ voor alle t en bijgevolg is f dan een stijgende functie. Vergelijking (15) heeft voor $-1 < a < 1$ dus altijd precies één oplossing. Dat betekent dat er voor $-1 < a < 1$ geen lus in het basispunt (a,b) kan zijn.

We tonen nu aan dat er voor $a \geq 1$ en $b \neq 0$ geen lus in het basispunt $(1,0)$ kan optreden. Zo'n lus treedt op dan en slechts dan als vergelijking (13) drie verschillende reële wortels heeft. Schrijf die vergelijking als

$$(t-a)(t^2 - 2t + (2a-1)) = 2b^2. \quad (16)$$

Definieer

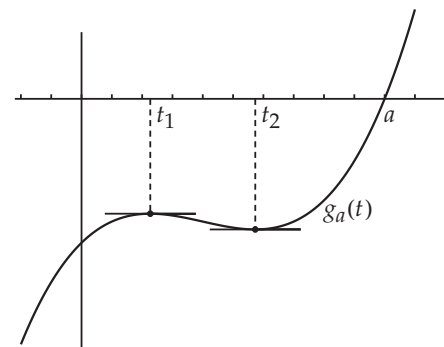
$$g_a(t) = (t-a)(t^2 - 2t + (2a-1)).$$

De afgeleide is

$$g'_a(t) = 3t^2 - (4+2a)t + (4a-1)$$

met $4(a-1)(a-7)$ als discriminant. Voor $1 < a < 7$ is de discriminant negatief dus dan geldt $g'_a(t) > 0$ voor alle t . Bijgevolg is $g_a(t)$ dan een stijgende functie en heeft vergelijking (16) precies één oplossing. Dit geldt ook voor $a = 1$ want $g_1(t) = (t-1)^3$. Dat alles betekent dat er voor $1 \leq a < 7$ geen lus is in het basispunt $(1,0)$.

Voor $a \geq 7$ is de situatie als volgt. Door $g_a(t)$ te schrijven in de vorm $g_a(t) = (t-a)((t-1)^2 + (2a-2))$ zien we dat $t = a$ dan het enige nulpunt van $g_a(t)$ is. Dan geldt $g_a(t) < 0$ voor $t < a$ en $g_a(t) > 0$ voor $t > a$, dus voor alle oplossingen van (16) moet $t > a$ gelden. De nulpunten van



Figuur 7 De grafiek van $g_a(t)$ voor $a = 10$.

de afgeleide $g'_a(t)$ zijn

$$t_{1,2} = \frac{1}{3}(2 + a \pm \sqrt{(a-1)(a-7)})$$

en een eenvoudige berekening toont dat t_1 en t_2 beide kleiner dan a zijn als $a \geq 7$. Voor $a \geq 7$ en $t \geq a$ is $g'_a(t)$ dus positief, en bijgevolg is $g_a(t)$ daar een stijgende functie, zodat vergelijking (16) precies één oplossing heeft. Zie Figuur 7.

Conclusie: voor $a \geq 1$ heeft (16) precies één oplossing, en dan treedt er dus geen lus op in het basispunt $(1,0)$. Op grond van symmetrie treedt er dan voor $a \leq -1$ geen lus op in het basispunt $(-1,0)$.

Combinatie van de bovenstaande resultaten leert dat er geen toppenkromme Γ bestaat met een lus in elk van de drie basispunten. $\square$

Naschrift

Met het bovenstaande is de vraag van Jos de Wit naar de kromme die gevormd wordt door de toppen van de parabolen door drie gegeven punten beantwoord. Voor ons was het verrassend om te ontdekken hoe zo'n op het eerste gezicht eenvoudige vraag tot zulke mooie en betrekkelijk gecompliceerde wiskunde kan leiden. Er blijven natuurlijk nog wel vervolgvragen over, bijvoorbeeld naar voorwaarden waaronder de asymptoten reële snijpunten hebben met de kromme. Of de vraag naar eventueel aanwezige reële dubbelpunten van de kromme buiten de basispunten (zie voor voorbeelden hiervan Figuur 3, 4, 5 en 6).

Voor een verwante, maar veel eenvoudiger te beantwoorden vraag, zie het artikel 'Parabolenparade' van Jos de Wit en Jan van de Craats in *Euclides* [3].

Referenties

1 Jan van de Craats, De meetkunde van de derdegraadsvergelijking, presentatieslides van een lezing op 22 februari 2007, <https://staff.fnwi.uva.nl/j.vandecraats/CubicScreen.pdf>.

2 B.L. van der Waerden, *Algebra I*, Springer, 1971

3 Jos de Wit en Jan van de Craats, Parabolenpa-

rade, *Euclides* 93(1), (september 2017), 19–20, zie ook <https://staff.fnwi.uva.nl/j.vandecraats/DeWitdvc.pdf>.

Rutger Kuiper

School of Mathematics and Statistics
Victoria University of Wellington, New Zealand
mail@rutgerkuiper.com

Research Stieltjes Prize 2015

An introduction to (algorithmic) randomness

In 2015 Rutger Kuiper has been awarded the Stieltjes Prize, which recognises the best PhD in Mathematics in the Netherlands. The prize was awarded for his thesis entitled *Computability, Probability and Logic*, which he completed at the Radboud University Nijmegen. After receiving his PhD he became a research fellow at the Victoria University of Wellington. In this article he describes his research at Victoria, which focuses on computability theory, with an emphasis on algorithmic randomness.

What does it mean for a sequence to be *random*? You probably have an intuitive idea of what a random sequence is, but how do we formalise this in a mathematically rigorous way? To motivate what comes next, let us look at the (initial digits of) a few infinite sequences of zeroes and ones:

$$\begin{aligned}x_1 &= 00000000000000000000\dots \\x_2 &= 010101010101010101\dots \\x_3 &= 11001001000011111101\dots \\x_4 &= 00100101110101011101\dots\end{aligned}$$

Take a break and consider for a moment: which of these sequences would you consider to be random sequences?

Would you consider x_1 to be random? Probably not, since it only contains zeroes, no ones, and therefore does not look very random. What about x_2 ? This time it has both zeroes and ones, but the sequence follows a very clear pattern and therefore again should not be considered to be a random sequence. On the other hand, x_3 looks much more random, since there does not seem to be a clear pattern. However, if we were to write π in binary, we would see that

$$\pi = 11.001001000011111101\dots$$

and if we compare this to x_3 , suddenly x_3

does not seem to be random any longer.

So, how do we actually get an example of a random sequence? Something that we can write down easily follows a pattern and is therefore not random by any reasonable definition of randomness. The key to obtaining a random sequence is using a probabilistic method to generate it. To obtain x_4 , we flipped a coin, denoting heads by 1 and tails by 0. With a coin flip having an equal probability to land on heads or tails, there should not be any easy way of predicting what x_4 is going to look like, in the sense that even if we know the first 37 elements of the sequence, there is no way of knowing whether the 38th element is going to be a zero or a one. Thus, x_4 should be considered random.

So, we now have three examples of sequences that should not be considered random, and one example of something that should be considered random. Again, we would like to have a mathematically rigorous definition of what exactly it means to be random, and we now have three examples of sequences that should fail this definition, and one example of something that should pass it. We will use this as a starting point and try to build our mathematical definition from the ground up.

The law of large numbers

Recall the *law of large numbers* from probability theory:

If we flip a coin infinitely many times, and we denote by h_n the number of times we see heads amongst the first n flips, then with probability 1,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{h_n}{n} = \frac{1}{2}.$$

Our standard example of a random sequence, x_4 , was obtained by flipping a coin like this. Thus, our sequence x_4 will (probably) satisfy the following property:

Definition 1. Given an infinite sequence x of zeroes and ones, if we let $\#x \upharpoonright n$ be the number of ones amongst the first n elements of the sequence, we say that x satisfies the *law of large numbers* if

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\#x \upharpoonright n}{n} = \frac{1}{2}.$$

More informally, x satisfies the law of large numbers if, when we look far enough in the sequence, roughly half of the elements are zeroes, and roughly half of the elements are ones. Intuitively a random sequence should not be biased towards zeroes or ones, so a random sequence should satisfy the law of large numbers. We could therefore try to use this as a definition of randomness.

Let us go back to our examples at the beginning. The non-random sequence x_5 does not satisfy the law of large numbers, which is a good sign. However, x_2 does satisfy it, while we decided this sequence

should not be called random. Thus, we need a stronger definition.

Normal numbers

Let us have another look at the sequence

$$x_2 = 0101010101010101\dots$$

This sequence satisfies the law of large numbers, because the digits 0 and 1 both appear roughly half the time. Let us consider what happens if we consider blocks of two digits in x_2 . We see that x_2 contains the blocks:

$$01, 10, 01, 10, 01, 10, 01, \dots$$

In other words, we never see the other two blocks of length 2: 00 and 11. Again, thinking about coin flips, if one flips a coin twice and records both the results, then the four possibilities (heads,heads), (tails,tails), (heads,tails) and (tails,heads) all occur with probability $\frac{1}{4}$. Thus, in a random sequence we do not just want each digit to occur roughly half the time, but we also want each block of two digits to occur roughly one quarter of the time. Generalising this to blocks of arbitrary length we get to the following definition.

Definition 2. Let x be an infinite sequence of zeroes and ones. We say that x is *normal* (in base 2) if for every positive natural number k , and every block b of k many zeroes or ones, if we let $N(x, b, n)$ be the number of times the block b occurs amongst the first n digits of x , then

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{N(x, b, n)}{n} = \frac{1}{2^k}.$$

(The notion of normality — in arbitrary bases — was introduced by Borel, when we talk about normality we mean the special case of normality in base 2.)

Because x_1 does not satisfy the law of large numbers it is certainly not normal, and x_2 is not normal either as argued above. What about x_3 ? Perhaps surprisingly, it is not known whether the sequence x_3 , which we obtained from the binary expansion of π , is normal, so we do not know whether this definition is able to determine the nonrandomness of x_3 . On the other hand, the sequence x_4 obtained by flipping coins is (with probability 1) normal.

Does this mean we are done? Let us consider the following sequence:

$$x_5 = 0110111001011101110001001101011100\dots$$



Rutger Kuyper in New Zealand

There is a pattern in this sequence that might not be immediately obvious: we write the natural numbers $0, 1, 2, 3, \dots$ in binary, and form the sequence x_5 by concatenating all these binary numbers together in order. The sequence x_5 we obtain this way is called *Champernowne's sequence*. This sequence is known to be normal, so would be random if we took normality as our definition of randomness. However, it does not seem very reasonable to consider x_5 to be random. After all, it was generated using such an easy pattern and therefore it is very easy to compute the digits of this sequence.

Church stochasticity

Going back to Champernowne's sequence x_5 , why exactly is it non-random? We noticed that it is very easy to reconstruct the pattern used to define x_5 . In particular, it is very easy to give an infinite set W of po-

sitions at which we know for sure the digit is a one. In particular, if we were to restrict x_5 to W , i.e. we throw away all the digits at positions not in W , we get a sequence that only contains ones and therefore no longer even satisfies the law of large numbers.

Again, if we think about a sequence of coin tosses, if we were, for example, to ignore all the even coin tosses and only record the odd ones, the resulting sequence should still satisfy the law of large numbers. Thus, we would like to say that a sequence is random if every infinite subsequence, that is a sequence obtained by removing all but infinitely many digits, satisfies the law of large numbers.

Unfortunately, that is too strong a property: such sequences do not exist. Indeed, every infinite sequence contains either infinitely many zeroes or infinitely many ones, so we can always find an infinite

subsequence which only contains zeroes or ones! How do we resolve this?

Until now, we have been talking about randomness without talking about algorithmic randomness, and this is the point at which the algorithmic part of the title comes into play. In algorithmic randomness, one uses tools from computability theory to define and work with randomness. To do so, one needs a rigorous definition of what it means to be *computable*, which was given by Turing. Instead of giving the rigorous definition here, think about a function $f: \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$ as being *computable* if there is a procedure such that any capable human could, given enough paper and time, work out $f(n)$ given any number $n \in \mathbb{N}$. Equivalently, such a function f is computable if it can be implemented using your favourite programming language.

Using the notion of a computable function, we can now restrict to certain nice, easy subsequences, which are selected in a computable way using the technical notion of a *computable selection function* (we omit the exact definition). Now, we say that a sequence is *Church stochastic* if every subsequence selected by a computable selection function satisfies the law of large numbers. It is known that every Church stochastic sequence is normal, so this is a strengthening of our previous notion of randomness. Chaitin's sequence is not Church stochastic, but our sequence x_4 obtained using coin flips is (with probability 1).

So, does that mean that Church stochasticity is the definition of randomness we were looking for? Unfortunately not. Ville showed that there is an infinite sequence x_6 which is Church stochastic, but for every positive natural number n , if we look at the first n digits in the sequence, there are always more zeroes than ones (even though the ratio converges to $\frac{1}{2}$). Again, thinking about what happens when you repeatedly flip a coin, if you occasionally take a break when you get tired, sometimes you will have seen more heads than tails up until then, and sometimes you will have seen more tails than heads. Thus, the sequence x_6 should not be considered random.

Martin-Löf randomness

We now take our last step towards our definition of randomness, finally arriving at a notion that is fit to be called random.

This notion, called *Martin-Löf randomness*, was originally introduced by Martin-Löf as an abstracting of the computable selection functions defined above. One of the things that makes this definition so robust is that there are many equivalent definitions of it, of which we will here discuss the three most important ones.

Measure-theoretic definition

First, let us introduce Martin-Löf randomness using measure theory, as originally done by Martin-Löf. This definition requires more mathematical prerequisites than the alternatives down below, and the remainder of this article can be understood without understanding this section.

The standard topology on $2^{\mathbb{N}}$ is generated by the basic open sets

$$[\sigma] = \{x \in 2^{\mathbb{N}} \mid x \text{ extends } \sigma\},$$

where σ is any finite sequence of zeroes and ones (we denote this set by $2^{<\mathbb{N}}$). In other words, the open sets are the ones that can be written as a union of such basic open sets. Given any open set $U = \bigcup_{\sigma \in X} [\sigma]$, we say that X is *prefix-free* if for any two $\sigma, \tau \in X$, σ is not an extension of τ . We may assume without loss of generality that X is prefix-free. Then the measure $\mu(U)$ is $\sum_{\sigma \in X} 2^{-\text{length}(\sigma)}$.

Intuitively, a random x should not be in any 'easy' set of measure 0, and the collection of random x should have measure 1. This motivates the following definition.

Definition 3. A G_δ (or Π_2^0) set is a set of the form $V = \bigcap_{n \in \mathbb{N}} U_n$, where each U_n is open. We say that V is *effectively G_δ* (or Π_2^0) if there is a computable function $f: \mathbb{N} \times \mathbb{N} \rightarrow 2^{<\mathbb{N}}$ such that

$$V = \bigcap_{n \in \mathbb{N}} \bigcup_{m \in \mathbb{N}} [f(n, m)].$$

A *Martin-Löf test* is an effective G_δ set V as above such that $\mu(\bigcup_{m \in \mathbb{N}} [f(n, m)]) \leq 2^{-n}$. Finally, we say that $x \in 2^{\mathbb{N}}$ is *Martin-Löf random* if x is not in any Martin-Löf test.

How does this connect to the previous section? It turns out that every Martin-Löf random x is Church stochastic. Furthermore, Ville's sequence x_6 is not Martin-Löf random.

Thus, we strengthened our notion of randomness, and got rid of our bad example x_6 . Does this mean we have reached our goal and defined randomness in a

mathematically rigorous way? Of course that is an informal statement that cannot be formalised, let alone proven. However, the fact that we do not know of any counterexamples and have many equivalent definitions of Martin-Löf randomness seem to show that this is the definition we were looking for.

Definition using betting

This time, let us consider a fair casino, in which we are betting on the digits of a fixed infinite sequence of zeroes and ones $x \in 2^{\mathbb{N}}$, which is known by the casino but not by us. Our goal is to make as much money as possible. The rules of the casino are as follows.

- We initially start with one unit of money.
- We then split all our money between betting on 0 or 1.
- The first bit of x is then revealed to us. If this is a 0, the casino pays out twice our bet on 0. If it is 1, the casino pays out twice our bet on 1.
- We again split our (new) money between betting on 0 and 1.
- The second bit of x is now revealed to us. If this is a 0, the casino pays out twice our bet on 0. If it is 1, the casino pays out twice our bet on 1.
- We keep playing for as long as we like.

If the sequence x has a clear pattern on it, we would like to play in this casino, because it would be very easy for us to predict the next digit and make a lot of money this way. On the other hand, if the sequence is truly random, for example if the casino was just flipping a coin to generate the digits of x , we have no way of predicting the outcome and would therefore not expect to be able to make large profits (unless we got really lucky). This brings us to our second definition of Martin-Löf randomness.

Theorem 1 (Schnorr). A sequence $x \in 2^{\mathbb{N}}$ is Martin-Löf random if and only if there is no semi-effective betting strategy which guarantees arbitrarily large profits when betting on x if we keep playing as long as we want.

While this is the easiest definition of Martin-Löf randomness to explain, the fact that we need to talk about *semi-effectiveness* is perhaps not very satisfying. We will not go into the technical details here, but

let us mention that if we restricted ourselves to computable betting strategies we would get a notion of randomness called *computable randomness*, which is strictly weaker than Martin-Löf randomness but interesting in its own right.

Compression and randomness

Finally, let us discuss how Martin-Löf randomness relates to compressibility. Consider your favourite compression algorithm. How good is it at compressing these two finite sequences?

01010101010101010101
00100101110101011101

The first one is easy to compress: it can be described by saying that 01 should be repeated ten times. The second sequence on the other hand, again obtained by flipping a coin, does not have a clear pattern and hence can only be described by giving the full sequence. In other words, if one looks at any initial segment of a random sequence, one should be unable to compress that segment, or in other words should be unable to give a short description of it. And indeed, this gives us another characterisation of Martin-Löf randomness.

Theorem 2 (Schnorr). *A sequence x is Martin-Löf random if and only if its initial segments cannot be nontrivially compressed by a (partial) computable compression algorithm.*

(For technical reasons, one needs to restrict to *prefix-free* compression algorithms, but we will not go into further details here.)

Applications of randomness

Now that we know what randomness means mathematically, what can we do with this? In the field of algorithmic randomness, one way of studying randomness is to consider how it interacts with the usual tools and

concepts of computability theory. A more recent direction of study has been to consider how randomness interacts with usual mathematical theorems about ‘almost everywhere’ theorems. Consider, for example, the following theorem of Lebesgue:

Theorem 3 (Lebesgue). *Let $f : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$ be a function of bounded variation. Then f is differentiable almost everywhere.*

So far, we have been talking about computable functions on the natural numbers, and randomness of infinite binary sequences. There is a natural and robust way to extend and adapt these concepts to real numbers. So, we can talk about computable functions f of bounded variation, and Martin-Löf random elements of the unit interval. If a theorem holds at almost every point, that should be a strong indication that it holds for a random point. Furthermore, if we are lucky the converse might even hold and therefore give us an equivalent definition of Martin-Löf randomness. This is, in fact, true for the theorem just given.

Theorem 4 (Brattka, Miller and Nies [2]). *Let $x \in [0, 1]$. The following are equivalent:*

1. *x is Martin-Löf random.*
2. *Every computable $f : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$ of bounded variation is differentiable at x .*

Another interesting direction is to look at Brownian motion. It turns out that Martin-Löf randomness is also the right notion to talk about many almost surely theorems about Brownian motion, as studied by Allen, Bienvenu and Slaman [1].

A different approach: Baire category

As we saw above, one way of defining Martin-Löf randomness is by using effective measure 0 sets. Sets which have measure 0 can be seen as sets which

are ‘small’. There is another way to talk about the smallness or largeness of sets, using category. Recall that a set is *meagre* if it is contained in a countable union of closed nowhere dense sets. We would like to say that a set is ‘random’ if it is not in any *effective closed nowhere dense set*, which is done in the following definition.

Definition 4. A closed set $V \subseteq 2^{\mathbb{N}}$ is a Π_1^0 -class if there is a computable function $f : \mathbb{N} \rightarrow 2^{<\mathbb{N}}$ such that $V = 2^{\mathbb{N}} \setminus \bigcup_{n \in \mathbb{N}} [f(n)]$. We say that $x \in 2^{\mathbb{N}}$ is *1-generic* if for every Π_1^0 -class V we have that $x \notin V \setminus \text{Int}(V)$.

Thus, 1-genericity is another way of talking about ‘random’ points, but using category instead of measure. Many theorems about Martin-Löf random reals have analogues in terms of 1-generics, although this is not always the case.

It is easy to adapt this definition to the real numbers, and hence we can talk about generic elements of $[0, 1]$ as well. Just as in the previous section, we wonder how this notion interacts with category almost everywhere theorems. In fact, there is a nice analogue of the differentiability characterisation of Martin-Löf randomness given above, obtained by studying a theorem of Bruckner and Leonard.

Theorem 5 (Kuyper and Terwijn [4]). *Let $x \in [0, 1]$. The following are equivalent:*

1. *x is 1-generic.*
2. *Every differentiable computable function $f : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$ has continuous derivative at x .*

Further reading

The standard reference works on algorithmic randomness are Downey and Hirschfeldt [3] and Nies [5]. There is also the excellent nontechnical (and significantly shorter) account by Terwijn [6].

References

1. K. Allen, L. Bienvenu and T. Slaman, On zeros of Martin-Löf random Brownian motion, *Journal of Logic and Analysis* 6(9) (2014), 1–34.
2. R. Brattka, J.S. Miller and A. Nies, Randomness and differentiability, *Transactions of the American Mathematical Society* 368(1) (2016), 581–605.
3. R.G. Downey and D.R. Hirschfeldt, *Algorithmic Randomness and Complexity*, Springer, 2010.
4. R. Kuyper and S.A. Terwijn, Effective genericity and differentiability, *Journal of Logic and Analysis* 6(4) (2014), 1–14.
5. A. Nies, *Computability and Randomness*, Oxford University Press, 2008.
6. S.A. Terwijn, *The Mathematical Foundations of Randomness, The Challenge of Chance*, N.P. Landsman and E. van Wolde, eds., Springer, 2016, pp. 49–66.

Jenneke Krüger*Freudenthal Instituut
Universiteit Utrecht
j.h.j.kruger@uu.nl***Jan Guichelaar***Amsterdam
j.guichelaar4@gmail.com***Harm Jan Smid***Leiden
harmjansmid45@gmail.com***Evenement** Fifth International Conference on the History of Mathematics Education (ICHME-5)

Verspreiding van wiskundige kennis

Geschiedenis van wiskundeonderwijs en geschiedenis van wiskunde zijn nauw verwante onderzoeksgebieden. In Nederland zijn gedurende de laatste twintig jaar een zestal proefschriften over aspecten van de geschiedenis van wiskundeonderwijs verschenen. Internationaal zijn verscheidene onderzoekers, ook docent-onderzoekers, met dit vakgebied bezig. De tweejaarlijkse 'International Conference on the History of Mathematics Education' (ICHME) biedt onderzoekers en geïnteresseerde amateurs een platform voor ontmoeting en uitwisseling. De vijfde ICHME was in september 2017 in Nederland. Jenneke Krüger, Jan Guichelaar en Harm Jan Smid doen verslag van de conferentie en lichten toe waarom en voor wie in het bijzonder geschiedenis van wiskundeonderwijs een belangrijk onderwerp is.

De eerste ICHME was in 2009 in Reykjavik, geïnitieerd en georganiseerd door Kristín Bjarnadóttir (University of Iceland), Fulvia Furinghetti (University of Genoa) en Gert Schubring (Universidade Federal do Rio de Janeiro). Sindsdien is elke twee jaar een conferentie geweest, in achtereenvolgens Lissabon, Uppsala, Turijn en Utrecht. Van elke conferentie is een aantal bijdragen uitgegeven in *Proceedings* (peer-reviewed), met de titel 'Dig where you stand'. Het initiatief om de vijfde conferentie in Nederland te houden kwam van Harm Jan Smid, bestuurslid van de (voormalige) Werkgroep Geschiedenis van Reken- en Wiskundeonderwijs van de NVvW.

ICHME-5 vond dus plaats in Utrecht, van 19–22 september 2017. In een passende

omgeving, het fraaie historische Academiegebouw in het centrum van Utrecht, presenteerden sprekers uit achttien verschillende landen resultaten van hun onderzoek aan een even internationaal publiek. De stemming was geanimeerd en in de pauzes en aan het eind van elke dag gingen de discussies onder de circa vijftig aanwezigen volop door. Danny Beckers (VU) gaf een stimulerende openingslezing met als titel 'A millennium of math education in the Netherlands, 1215–2000'. Het programma telde daarnaast veertig presentaties, verdeeld over vier dagen.

De Nederlandse Vereniging van Wiskundeleraars (NVvW) nam de organisatie op zich, in samenwerking met het Freudenthal Instituut en het Descartes Centre, beide

onderdeel van de Universiteit Utrecht. De NVvW stelde zich bovendien garant voor eventuele tekorten. Een internationaal programmacomité, samengesteld uit drie Nederlandse onderzoekers en drie onderzoekers uit andere landen, beoordeelde de 47 binnengekomen abstracts. De namen van de leden van het organiserend comité en van de leden van het programmacomité zijn te vinden op de conferentie website, www.ichme-5.nl (Information/Conference).

Op woensdagmiddag 20 september was er specifiek aandacht voor de geschiedenis van het Nederlandse wiskundeonderwijs. Studenten, docenten van lerarenopleidingen en overige belangstellenden konden tegen gereduceerd tarief aan de middag deelnemen.

Het programma

Hier volgen wat voorbeelden van onderwerpen, zoals behandeld door de sprekers.

Danny Beckers doorliep in zijn openingslezing de periode 1215–2000 twee maal: één keer vanuit het gezichtspunt van wetgeving en voorschriften op het gebied van (wiskunde-) onderwijs en één keer vanuit het gezichtspunt van de idealen

voor wiskundeonderwijs. Beide keren was het beginjaar 1215, toen tijdens het vierde Lateraans concilie het besluit viel dat iedere kerk en parochie een school moest hebben. Het (lager) onderwijs was gedurende enkele eeuwen behoorlijk vrij: er was geen vastgelegd curriculum en de ouders betaalden per vak, voor rekenonderwijs ook wel per onderwerp. Pas vanaf het begin van de negentiende eeuw kwamen er landelijke wetten, voorschriften en opleidingen voor onderwijzers, met daarin een belangrijke plaats voor wiskunde. Hoger technisch onderwijs kwam ook in Nederland tot stand. Als we uitgaan van idealen voor wiskundeonderwijs is de indeling veel fijnmaziger. Er waren in de periode waarin de wetgeving niet veranderde wel belangrijke ontwikkelingen in de idealen, de doelstellingen en de inhoud van het wiskundeonderwijs. In toenemende mate zag men wiskunde als nuttige of zelfs noodzakelijke kennis, toegesneden op wat het individu dacht nodig te hebben. In de achttiende eeuw werd wiskunde bovendien een manier om de wereld beter te begrijpen, een oefening voor de geest, de manier om de natuur onder controle te brengen. Zoveel mogelijk mensen moesten wiskundeonderwijs krijgen om de maatschappij, de natie, tot bloei te brengen. In de negentiende eeuw kreeg, met de komst van klassikaal onderwijs, de didactiek van wiskundeonderwijs geleidelijk meer aandacht. Danny Beckers behandelde in vogelvlucht veranderingen in idealen voor wiskundeonderwijs en de invloed daarvan op het onderwijs.

Confucius

Ongeveer een kwart van de sprekers presenteerde onderzoek over een periode vóór de negentiende eeuw, dus voorafgaand aan de ontwikkeling van nationale onderwijssystemen en de structuur in vakken die nu vanzelfsprekend lijkt. Jan Hogendijk ('Mathematical astronomy for a brilliant student in the 13th century') vertelde over een lopend onderzoek met betrekking tot een manuscript uit de Islamitische wereld. Man Keung Siu ('Let them speak; hear them speak, old Chinese wisdom on mathematics education') toonde met behulp van historisch onderwijsmateriaal en citaten van Chinese geleerden en wiskundigen, vanaf de tweede eeuw v. Chr. tot eind negentiende eeuw, wat de achterliggende filosofie met betrekking tot leren en onderwijzen in de confuciaanse cultuur

inhield en nog steeds inhoudt. Belangrijk is een structurering van lesmateriaal in verschillende niveaus, van eenvoudig naar complex, met binnen elk niveau een aantal variaties van een probleem. Zo mogelijk worden verschillende oplossingsmethoden besproken en geoefend. Dit is al zichtbaar in de verzameling wiskundige problemen *Nine Chapters on the Mathematical Art* (Jiuzhang Suanshu, ca 100 v.Chr.) en latere commentaren op deze verzameling. Als voorbeeld probleem 15 uit hoofdstuk 9:

Gegeven een rechthoekige driehoek met rechthoekszijde $a = 5$ bu. en rechthoekszijde $b = 12$ bu. Hoe groot is de zijde van het ingeschreven vierkant?

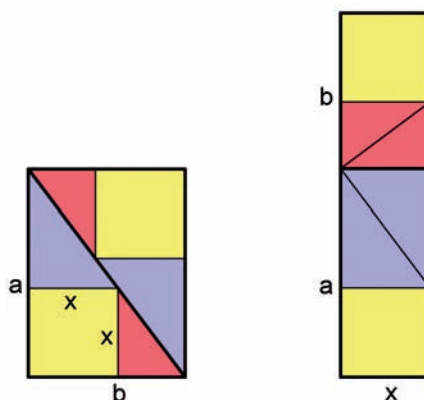
Antwoord: 3 en $9/17$ bu.

De eerste oplossingsmethode is een voorschrift: de zijde van het vierkant is gelijk aan het product van de rechthoekszijden gedeeld door de som van de rechthoekszijden. Een tweede methode gebruikt ontleden en hergroeperen (Figuur 1). Een derde methode maakt gebruik van verhoudingen en evenredigheid.

Studenten moesten veel parate kennis hebben, maar in de begeleidende teksten benadrukken de auteurs door de eeuwen heen dat uit het hoofd leren gepaard moet gaan met actief verwerven van inzicht. Dit volgt uit de leer van Confucius, geïllustreerd door enkele citaten.

"Learning without thought is labour lost; thought without learning is perilous." (Confucian Analects)

"He who attains sincerity chooses the good and holds fast to it. This involves the extensive study of it, close inquiry into it, careful deliberation of it, clear distinction of it, and earnest practice of it." (Doctrine of the Mean)



Figuur 1 Tweede oplossingsmethode voor *Nine chapters*, hfdst. 9 problem 15, midden 3e eeuw.

"Still, once our intimate reading of it [a text] and careful reflection on it have led to a clear understanding of it, we must continue to question. Then there might be additional progress. If we cease questioning, in the end there'll be no additional progress." (Zu Xhi, twaalfde eeuw)

In de 21e eeuw onderschrijven Chinese onderwijskundigen nog steeds deze ideeën. De toenemende invloed van ICT is ook in deze onderwijsfilosofie een grote uitdaging.

Didier Henrion

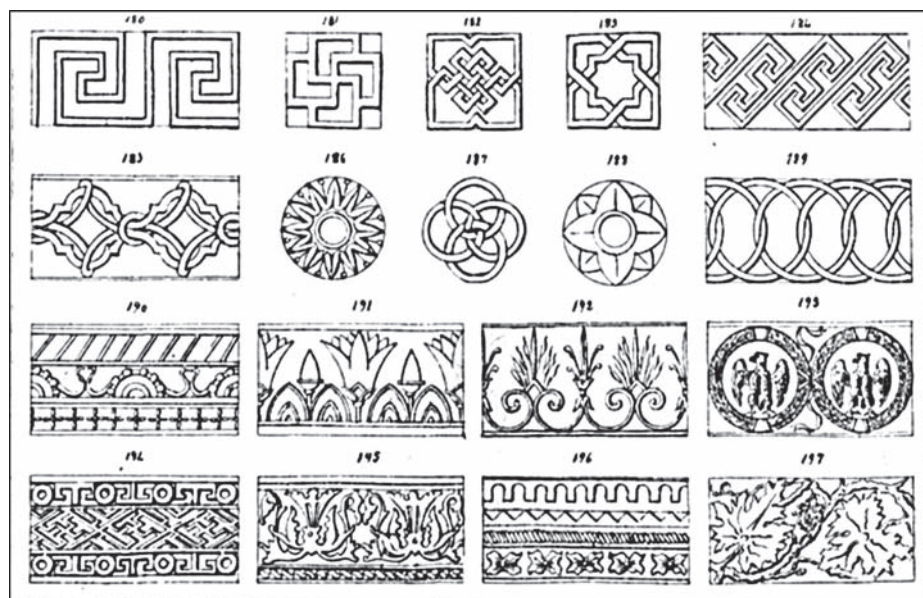
Frédéric Metin ('Didier Henrion and the transmission of Dutch mathematics in Paris') liet een en ander zien uit zijn lopende onderzoek naar een wiskundedocent in Parijs, begin zeventiende eeuw, die waarschijnlijk sterk beïnvloed was door de Nederlandse ingenieurswiskunde uit die periode.

Didier Henrion publiceerde tussen 1613 en 1632 boeken in de volkstaal over onder meer rekenen, algebra, trigonometrie, logaritmen, vestingbouw en de proportionaalpasser, waarschijnlijk als eerste auteur in Frankrijk. Hij noemde als bronnen vrij veel wiskundigen uit de Nederlandse Republiek, onder andere Simon Stevin, Jacques Alleaume (leerling van Stevin), Samuel Marolois en Ludolf van Ceulen. Alleaume, Stevin en Marolois werkten als ingenieur voor prins Maurits.

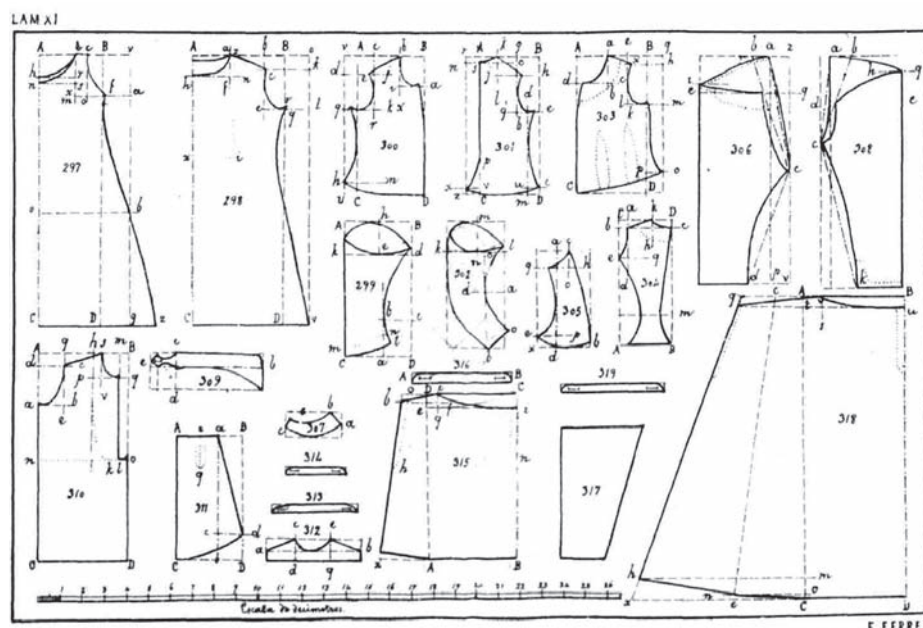
Er zijn volgens Metin opvallende overeenkomsten tussen de vermoedelijk eerste publicatie van Henrion, *Mémoires Mathématiques* (Figuur 2), en het lesprogramma van de Duytsche Mathématique, de opleiding voor militaire ingenieurs in Leiden, waarvoor Stevin het leerplan schreef en waar Ludolf van Ceulen de eerste professor was. In het voorwoord van de *Mémoires Mathématiques* schreef Henrion onder andere

"...ce que plusieurs tresdoctes auteurs, comme Montroyal, Clavius, Stevin, Pithicus & autres, ont aussi fait très amplement, mais en Latin: bien est vray, qu'il y a la traduction de Stevin, mais en fort grand volume."

[hetgeen verscheidene zeer geleerde auteurs, zoals Montroyal, Clavius, Pithicus en anderen, ook uitvoerig hebben gedaan, maar in het Latijn: weliswaar is er de ver-



Figuur 5 Toepassingen in Ferrer (1897).



Figuur 6 Patronen voor kleding als toepassing van meetkunde, Ferrer (1897).

Onderwerp	Toepassing
Rechte lijnen, algemeen	Figuren vouwen
Bewerkingen met rechte lijnen	Tekenen van eenvoudige kantpatronen
Hoeken	Tekenen van hoeken voor een fries
Schaal	Knippen van patronen voor kleding
Omtrek	Tekenen van eenvoudige guirlandes
Omtreksboog	Verschillende guirlandes tekenen
Hoekmeting	Ingewikkelde haakpatronen
Driehoeken	Van een stuk stof een vierkant vouwen
Veelhoeken	Meetkundige figuren in patronen voor kleding

Tabel 1 Meetkundige onderwerpen en toepassingen, Ferrer (1897).

Nederlandse middag

Tijdens de ‘Nederlandse’ middag liet Michiel Doorman (‘The emergence of meaningful geometry in the Netherlands during the 20th century’) iets zien en ervaren van de veranderingen in het Nederlandse elementaire meetkundeonderwijs in de tweede helft van de twintigste eeuw, met als pioniers Dieke van Hiele-Geldof en Tatyana Ehrenfest. Als introductie tot meetkunde krijgen leerlingen nu opdrachten in 3D die intuïtieve meetkundige redeneringen uitlokken (Figuur 7, Figuur 8), gevolgd door contextrijke opdrachten voor leerlingen van 12 tot 16 jaar. Dit is een aanpak waar ook Freudenthal zeer achter stond.

Die woensdagmiddag spraken Dirk de Bock en Bert Zwaneveld over wiskundeonderwijs in de jaren zestig van de twintigste eeuw, de periode waarin New Math het wiskundeonderwijs beïnvloedde. Martin Kindt behandelde de ontwikkeling van differentiaal- en integraalrekening in het voortgezet onderwijs (vanaf 1958) en Jenneke Krüger vertelde over een vroege voorloper van differentiaalrekening: het gebruik van fluxierekening voor de oplossing van maximum-minimumproblemen door onderwijzers in het midden van de achttiende eeuw. Harm Jan Smid behandelde het ontstaan en de ontwikkeling van verenigingen van leraren wiskunde in de twintigste eeuw en Martinus van Hoorn sloot daarop aan met een presentatie over *Euclides*, het tijdschrift van de NVvW, in de periode 1945–1976, de periode van New Math en andere ontwikkelingen in het wiskundeonderwijs. Wat verder terug in de tijd ging Henk Hietbrink met een verhaal over het onderwijs door Jacob de Gelder, begin negentiende eeuw.

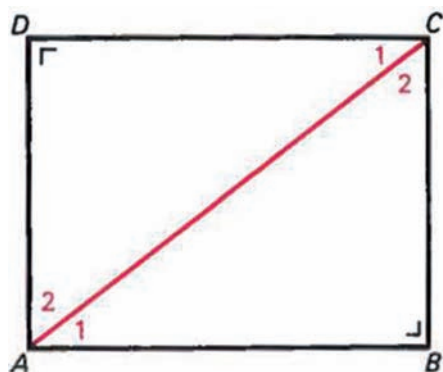
Verscheidene sprekers behandelden aspecten van rekenonderwijs, onder meer aan de hand van leerlingenwerk uit eind negentiende eeuw (Luciane de Fatimai Bertini) en rond 1950 (Elisabete Zardo Burigo), hoofdrekenen (Kristin Bjarnadóttir) en de abacus (Viktor Freiman, Alexei Volkov). Boeken en manuscripten ten behoeve van onderwijs vormen een bron van informatie. Verschillende aspecten van tekstboeken kwamen ter sprake: het concept ‘intuïtie’ in boeken voor calculus (Viktor Blasjo), vocabulaire en structuur van tekst in oude manuscripten (Alexei Volkov), de invloed van een enkel individu op de keuze van tekstboeken in een centralistisch systeem (Kristin Bjarnadóttir, Alexander Karp), en



Figuur 7 Het meisje op de bank zegt dat de vogels in gevaar zijn; de jongen aan tafel snapt haar niet. Leg uit. (2002)

de wijze van redeneren in boeken voor trigonometrie in Scandinavië (Andreas Christensen). Een overzicht van het wiskundeonderwijs gedurende een langere periode in een land of regio kan dienen als raamwerk voor bestaande onderzoeken en als uitgangspunt voor nieuw onderzoek. Een aanzet hiervoor gaven Eva Lakoma voor Polen, Luigi Pepe voor Italië en Ezzaim Laabid voor Marokko.

Zie www.ichme-5.nl/program voor een volledig overzicht van de sprekers en onderwerpen. De *Proceedings* zullen, als alles volgens plan verloopt, eind 2018 verschijnen, zowel digitaal als in een beperkte papieren oplage.



Figuur 8 Toon aan dat de driehoeken ABC en ADC congruent zijn (1976).

Tot slot

Wiskundeonderwijs is een belangrijke vector in de verspreiding van wiskundige kennis, op verschillende niveaus; het is een voorwaarde voor verdere ontwikkeling van wiskunde en voor het kunnen gebruiken van wiskunde, bijvoorbeeld in beroepen. Alleen al om deze reden is geschiedenis van wiskundeonderwijs van belang.

Wiskundedocenten en aanstaande wiskundedocenten kunnen door inzicht in de geschiedenis van hun vakgebied meer oog krijgen voor de continuïteit en de veranderingen in dat vakgebied. Het huidige wiskundeonderwijs is geworteld in het verleden en die wortels gaan ver terug. In Nederland levert geschiedenis van het wiskundeonderwijs soms een onderwerp voor een scriptie en er zijn, naast een beperkt aantal proefschriften, enkele boeken gepubliceerd over aspecten van de geschiedenis van het wiskundeonderwijs, onder andere door Martin Kindt en door Adri Treffers. *Euclides*, het blad van de NVvW, publiceert regelmatig onderwerpen uit de geschiedenis van wiskundeonderwijs. Aan enkele universiteiten en hogescholen besteedt men aandacht aan geschiedenis van wiskunde; impliciet komt daarin soms geschiedenis van onderwijs aan de orde. Met name voor studenten van opleidingen

tot leraar wiskunde kan geschiedenis van wiskundeonderwijs een rijke en aantrekkelijke bron vormen voor onderzoek. Boeken over wiskunde uit vorige eeuwen en oude manuscripten zijn een goed uitgangspunt en een groeiend aantal is digitaal beschikbaar.

Er is ook bij docenten belangstelling voor geschiedenis van wiskundeonderwijs. In 1995 ontstond de Historische Kring Rekenen en Wiskunde Onderwijs (HKRWO), op initiatief van Ed de Moor (1933–2016). Een van de activiteiten van de HKRWO was een jaarlijks symposium van één dag, bestemd voor leraren, met voordrachten over onderwerpen uit de geschiedenis van het wiskundeonderwijs. In 2012 werd de HKRWO een werkgroep van de NVvW onder de naam Werkgroep Geschiedenis Reken- en Wiskunde Onderwijs (WGRWO); de activiteiten van de werkgroep bleven dezelfde. Eind 2016 is de WGRWO gefuseerd met het netwerk Geschiedenis van de Wiskunde, een netwerk van wiskundigen en lerarenopleiders wiskunde, waarvan de leden streven naar meer aandacht voor geschiedenis van wiskunde in hun onderwijs. Het resultaat van de fusie is de Werkgroep Geschiedenis, zie nvww.nl/werkgroepen/werkgroep-geschiedenis.

De laatste activiteit van de WGRWO was de organisatie van ICHME-5. De Werkgroep Geschiedenis zet de organisatie van het jaarlijkse symposium voort. Op 7 oktober trok symposium nr. 23, “Het meten van de wereld”, een flink aantal bezoekers. Zie (nvww.nl/werkgroepen/werkgroep-geschiedenis/symposia/symposium-xxiii/) voor de onderwerpen en sprekers.

Dankwoord

Verscheidene mensen waren betrokken bij de organisatie van de conferentie, echter één persoon in het bijzonder moet genoemd worden. De enthousiaste, inventieve en deskundige inbreng van Heleen van der Ree (NVvW), zowel voor als tijdens ICHME-5, heeft in hoge mate bijgedragen aan het succes van deze conferentie.

Frank van der Duijn Schouten
voorzitter Wiskunderaad
f.a.vander.duijnschouten@vu.nl

Nieuws De Wiskunderaad

De toekomst van de wiskunde in Nederland

In dit artikel schetst Frank van der Duijn Schouten, voorzitter van de Wiskunderaad, de stand van zaken met betrekking tot de uitvoering van *Een Deltaplan voor de Nederlandse Wiskunde* en legt daarmee tevens verantwoording af over de werkzaamheden van de raad in 2017.

Voorgeschiedenis

In 2014 publiceerde het Platform Wiskunde Nederland (PWN) zijn visiedocument *Formulas for Insight and Innovation* [3]. Het in maart 2016 aan de minister van OCW aangeboden rapport *Een Deltaplan voor de Nederlandse Wiskunde* [1], op verzoek van PWN en NWO opgesteld door een commissie onder leiding van Jacob Fokkema, vertaalde de aanbevelingen uit het Visiedocument in een programma van twintig concrete acties. Het Deltaplan stelde een integraal pakket aan maatregelen voor, onder andere de verdere profilering van het wiskundeonderzoek via de vier wiskundeclusters, intensivering van de samenwerking in het universitaire onderwijs, vernieuwing van de lerarenopleiding, meer aandacht voor het innovatieve vermogen van de wiskunde en versterking van de nationale organisatie van de discipline. De commissie Fokkema betoogde dat met deze integrale aanpak, in de vorm van het zogenoemde 'wiskundehuis', de Nederlandse wiskunde onder meer in staat gesteld wordt positie te kiezen in de Nationale Wetenschapsagenda en een rol van betekenis te spelen in de publiek-private samenwerking met het bedrijfsleven en de publieke sector.

Omdat veel plannen in de wetenschappelijke wereld al snel na het uitbrengen ervan in de vergetelheid geraken, werd in het Deltaplan voorgesteld een *Commissie Implementatie Deltaplan Wiskunde* in te stellen, die samen met PWN de voortgang van de bouw van het wiskundehuis zou moeten bewaken en faciliteren. Deze commissie is per 1 januari 2017 op verzoek van het ministerie van OCW door PWN en NWO ingesteld en daarbij omgedoopt tot Wiskunderaad [5].

Door de instelling van de Wiskunderaad kan het momentum worden behouden dat ontstond met de presentatie van het Deltaplan en de aanbidding ervan aan de minister van OCW. De Wiskunderaad rapporteert aan het bestuur van PWN, het Algemeen Bestuur van NWO en het domeinbestuur Exacte en Natuurwetenschappen (voorheen Exacte Wetenschappen [2]) en houdt zich beschikbaar voor overleg met het ministerie. De Wiskunderaad is ingesteld voor een periode van vier jaar (2017–2021) en zal na twee jaar (begin 2019) op zijn effectiviteit worden geëvalueerd.

De Wiskunderaad bestaat uit zeven leden. De leden van de Wiskunderaad worden niet gehinderd door persoonlijke belangen en weten op professionele wijze

om te gaan met institutionele belangen. De leden van de raad worden voor twee jaar benoemd en zijn eenmaal herbenoembaar. De Wiskunderaad is als volgt samengesteld:

- Karen Aardal (TUDelft)
- Onno Boxma (TU/e)
- Hans van Duijn (ex-rector TU/e)
- Frank van der Duijn Schouten (ex-rector Tilburg University en VU)
- Swier Garst (NVvW)
- Bert Kroese (CBS)
- Eric Opdam (UvA)

Het secretariaat van de Wiskunderaad berust bij NWO:

- Petra de Bont
- Christiane Klödtz
- Amber Kerkhofs

Voortgang in 2017

Terugkijkend over 2017 kan worden vastgesteld dat binnen de wiskundegemeenschap in Nederland goede voortgang is geboekt bij de constructie van het wiskundehuis. Onder verwijzing naar de acties van het Deltaplan Wiskunde kan de volgende voortgang worden gemeld:

Actie 3: Versterking van de fundamenteën van het wiskundehuis

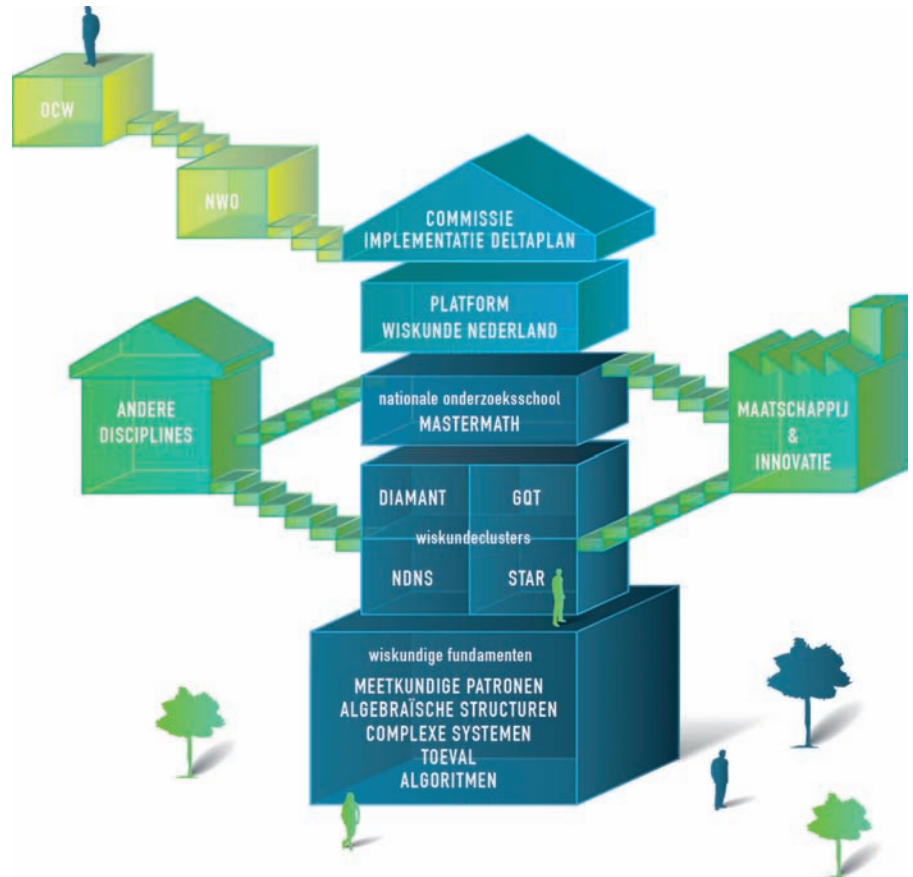
Hoewel in het Deltaplan Wiskunde voor de versterking van de fundamenteën van de

wiskunde geen specifiek budget was voorzien ("We vertrouwen op een accres voor de wiskunde in het kader van de reguliere financiering van het hoger onderwijs door OCW en de facultaire verdeel- en formatieplannen. Tevens vertrouwen we op ontwikkelingen binnen NWO"), acht de Wiskunderaad deze actielijn moeilijk realiseerbaar zonder de beschikbaarheid van extra middelen. Daarom besteedde de Wiskunderaad in 2017 specifieke aandacht aan de vraag hoe de benodigde middelen ter versterking van de fundamenteën van het wiskundehuis beschikbaar zouden kunnen komen. In samenspraak met de Raad voor Natuur- en Scheikunde, onder voorzitterschap van Robbert Dijkgraaf [4], is de Wiskunderaad in overleg getreden met het ministerie van OCW. Inzet van deze besprekingen was een pleidooi voor een sectorale aanpak van het wetenschapsbeleid, waarbij voor bepaalde wetenschapssectoren (zoals de sector wiskunde, natuurkunde en scheikunde) gekozen wordt voor een integrale en nationale aanpak over de volle breedte van onderwijs, onderzoek en maatschappelijke dienstverlening. In deze sectorale aanpak worden middelen op nationaal niveau beschikbaar gesteld met een ruime looptijd van tenminste tien à vijftien jaar, op basis van door de sector zelf opgestelde plannen en doelen. Een noodzakelijke voorwaarde voor deze benadering is een breed maatschappelijk en politiek vertrouwen dat de betreffende wetenschapssector in staat is tot een hoge graad van nationale zelforganisatie.

Op grond van de brief die de minister van OCW recentelijk naar de Tweede Kamer heeft gestuurd, is de verwachting gerechtvaardigd dat deze sectorale aanpak een belangrijke pijler zal worden onder het beleid waarmee het ministerie van OCW in de loop van 2018 naar buiten zal komen. Via het Deltaplan heeft de wiskunde laten zien tot nationale zelforganisatie in staat te zijn en staat ze dus goed gepositioneerd om op dit beleid van de overheid in te spelen. De samenwerking met de Raad voor Natuur- en Scheikunde versterkt hierbij de positie van de wiskunde in belangrijke mate.

Actie 4: Consolidering van de wiskundeclusters

De structuur van het Nederlands wiskundig onderzoek via de vorming van vier clusters heeft inmiddels vruchten afgeworpen. Door de reeds jarenlange samenwerking in



Het wiskundehuis zoals afgebeeld in het Deltaplan

dit clusterverband heeft NWO voldoende vertrouwen dat de nationale samenwerking binnen de wiskunde geen eendagsvlieg is en dat daarom aan deze clusters ook een rol kan worden toebedeeld bij de toekenning van middelen uit de tweede geldstroom. In 2016 en 2017 zijn door het gebiedsbestuur Exacte Wetenschappen (2016) en het domeinbestuur Exacte en Natuurwetenschappen (2017) twee subsidiërondes voor de wiskundeclusters uitgezet: in 2016 voor tenure track-posities met daaraan gekoppeld PhD-posities en in 2017 voor PhD's, beide op basis van matching door de wiskunde-instituten. Daarnaast zijn in 2016 en 2017 aan ieder cluster middelen toegekend voor reguliere clusteractiviteiten. Deze activiteiten dragen onder meer bij aan profilering van de clusters, de verbinding tussen de clusters en de bevordering van kennisuitwisseling tussen onderzoekers.

Actie 5: Oprichting van nationale onderzoeksschool Mastermath

De evaluatie van Mastermath is in 2017 uitgevoerd en heeft geleid tot aanbevelingen ter versterking van de positie van Mas-

termath. Hoewel de aanduiding 'nationale onderzoeksschool' voor Mastermath zich niet goed verdraagt met de verantwoordelijkheid die lokale onderzoekscholen dragen voor de kwaliteit van het onderwijs (en daarom verder niet zal worden gebezigd), zal de rol van Mastermath bij het coördineren en faciliteren van het Nederlandse aanbod van master- en PhD-onderwijs in de wiskunde verder worden versterkt door de nationale samenwerking verder te formaliseren en structureel te verankeren.

Actie 10: Vernieuwing van het Nederlands Mathematisch Congres

In april 2018 zal het Nederlands Mathematisch Congres (NMC) in Veldhoven volgens een nieuwe formule plaatsvinden. Het NMC kan hiermee een bijdrage leveren aan de versterking van de landelijke samenwerking binnen de wiskunde en tevens bijdragen aan de internationale profilering van de Nederlandse wiskunde.

Actie 13: Aandacht voor de wiskunde in andere opleidingen

De Wiskunderaad zal in nauw contact blijven met zowel het college van bètadeca-

nen als van de 4TU.AMI-decanen. In 2017 heeft met beide gremia wederzijds gewaardeerd overleg plaatsgevonden. Zonder in de eigen verantwoordelijkheid van de individuele faculteitsbesturen te treden acht de Wiskunderaad het van belang de positie van de wiskundeafdelingen als leverancier van het wiskundeonderwijs aan belendende disciplines tot een gemeenschappelijk bespreekpunt van decanen te maken. Ook door de PWN-commissie Onderwijs (zie ook actie 15, 16 en 17 hieronder) zal dit thema worden geagendeerd.

Actie 15: *Instelling van een permanente curriculumcommissie*

PWN heeft haar commissie Onderwijs gerevitaliseerd en daarmee een goede stap gezet op weg naar positionering als een landelijke permanente curriculumcommissie voor zowel het voortgezet onderwijs als mogelijk ook voor het startjaar van de wiskundige bachelorprogramma's. De commissie heeft recentelijk een visiestuk opgesteld over wiskunde in het vo, als input voor het ontwikkelteam rekenen/wiskunde binnen Curriculum.nu en als intern discussiestuk binnen de Nederlandse Vereniging voor Wiskundeleraren (NVvW).

Actie 16/17: *Universitaire vorming van leraren/bij-en nascholing van leraren*

In samenspraak met de NVvW brengt de commissie Onderwijs van PWN de behoefte in kaart aan nationale coördinatie van de eerstegraads lerarenopleidingen en aan

na- en bijscholing van zittende docenten. De commissie is voornemens het opstellen van beroepsprofielen voor leraren op de verschillende niveaus van het vo ter hand te nemen en zou als vorm van zelfregulering ook een rol kunnen gaan spelen bij de verdere ontwikkeling van het lerarenregister voor wiskundedocenten.

Hoe verder in 2018?

De financieringsstructuur van het wetenschappelijk onderwijs is de afgelopen decennia stilzwijgend maar wel ingrijpend gewijzigd. De bekostiging per student is zodanig gedaald dat de koppeling aan wetenschappelijk onderzoek zijn vanzelfsprekendheid heeft verloren. Substantiële stijging van studentenaantallen geeft tegenwoordig voor instellingen naast reden tot vreugde ook reden tot zorg. De bekostiging uit de eerste geldstroom voorziet immers slechts in het onderwijsdeel van de taak van het wetenschappelijk personeel. Bij stijgende studentenaantallen zullen daarom andere geldbronnen moeten worden aangeboord, dan wel de koppeling tussen wetenschappelijk onderwijs en onderzoek moeten worden losgelaten. Dat in de tweede geldstroom hier de wal het schip gaat keren wordt inmiddels manifest in de huidige lage honoreringspercentages waarmee NWO zich geconfronteerd ziet.

Drie weken na de watersnoodramp van 1 februari 1953 werd door de Nederlandse overheid de Deltacommissie geïnstalleerd. De instelling van de commissie Fokkema

had meer tijd nodig: al in het eerste decennium van deze eeuw diende zich voor de Nederlandse wiskunde een rampscenario aan: studentenaantallen waren tot dermate lage proporties gedaald dat de overleving van de wiskunde als zelfstandige discipline binnen het universitaire bestel ter discussie kwam te staan. Zoals de Deltacommissie niet koos voor een provinciale benadering, maar een integrale aanpak voorstelde, zal ook het veilig stellen van de toekomst van de wiskunde alleen gevonden kunnen worden in een nationale aanpak. Als we in Nederland de belangrijkste karakteristieken van het universitair onderwijs (te weten financiële laagdrempeligheid, sterke koppeling aan wetenschappelijk onderzoek en hoog wetenschappelijk ambitieniveau) naar de toekomst veilig willen stellen, dan levert alleen een nationale sectorale aanpak een perspectievolle denkrichting. Want hoe de bekostigingsstructuur van de toekomst er ook uit zal zien, zeker is dat we ons in Nederland niet langer kunnen veroorloven energie te steken in disciplinaire concurrentie tussen instellingen onderling. Daarom geeft de keuze van de Nederlandse wiskundigen om op nationaal niveau de samenwerking nadrukkelijk te zoeken blijk van een toekomstgerichte visie. Het is zaak in die lijn verder te investeren. De uitvoering van het Deltaplan Wiskunde dient daarom met voortvarendheid te worden voortgezet. De Wiskunderaad hoopt daaraan ook in 2018 zijn bijdrage te leveren. ☺

Referenties

1 nwo.nl/deltaplan-wiskunde

2 nwo.nl/over-nwo/nieuw+nwo
(vanaf 2017 kent NWO een nieuwe organisatiestructuur met een centrale Raad van Bestuur en drie domeinbesturen)

3 platformwiskunde.nl/visie-document

4 raadns.nl

5 wiskunderaad.nl

Robbert Fokkink

*Delft Institute of Applied Mathematics
TU Delft
r.j.fokkink@tudelft.nl*

Boekbespreking Geert Jan Olsder

Rondzwervingen door een toegepast wiskundig heuvellandschap

Geert Jan Olsder was hoogleraar wiskundige systeem- en besturingstheorie in Delft van 1983 tot en met 2008. Hij heeft zijn uittreerede uitgewerkt tot een boek, dat onlangs is verschenen bij Delft Academic Press. Het is een wiskundige autobiografie waarin persoonlijke herinneringen en wiskundige onderwerpen op humoristische wijze aan elkaar worden geregen. Robbert Fokkink beprekt het boek en licht er een hoofdstukje uit.

De kleine Geert Jan was al op jonge leeftijd gefascineerd door sterrenkunde en voerde thuis op de boerderij allerlei experimenten uit. Het liefst wilde hij ellipsoloog worden, maar dat beroep bestond niet en dus studeerde hij wiskunde. Aanvankelijk ging dat moeizaam. Het kostte als ellipsoloog enige moeite om terug te schakelen van kosmische grootheden naar delta's en epsilon's. Een ontmoeting op de schaatsbaan leidde tot een promotie in de regeltechniek gevolgd door een postdocpositie in Stanford. Toen hij terugkwam uit de Verenigde Staten schreef Olsder samen met Tamer Başar het standaardwerk over dynamische speltheorie. De basis voor een academische carrière was gelegd.

Toen China enkele jaren geleden de eenkindpolitiek afschafte, haalde Olsder het wereldnieuws omdat hij ooit een artikel had geschreven dat de directe aanleiding bleek te zijn geweest van deze Chinese politiek. Een Chinese delegatie had een werkbezoek gebracht aan de Universiteit

Twente, waar Olsder toen werkzaam was. Song Jian, een raketdeskundige, maakte deel uit van die delegatie. Vanwege de gezamenlijke interesse voor regeltechniek werden Olsder en Song aan elkaar gekoppeld. Toen het gesprek wat begon te stoken, vertelde Olsder over zijn recente artikel waarin regeltechniek werd toegepast op geboortecijfers. Song spitste de oren. Later bleek dat hij naar aanleiding van dit gesprek architect van de eenkindpolitiek was geworden. Het is slechts een van de vele onderhoudende anekdotes in dit boek. De lezer leert niet alleen praktische zaken zoals het nut van de brandgang als gedachtegang of de techniek van het korenbinden, maar vooral veel wiskunde, zoals het verschil tussen de Nash-oplossing en de Stackelberg-oplossing, het gebruik van maxplus-algebra's voor dienstregelingen of het omwerken van een optimaal pad tot een differentiaalvergelijking. Nergens verzandt het boek in techniek. Iedereen die weet wat een cosinus is, kan dit

boek lezen. Ik vond het jammer dat ik het zo snel uit had en dat is eigenlijk mijn enige kritiek op dit boek. Dit en het feit dat een boerenzoon uit Oost Groningen misschien een zuiniger prijsje had kunnen onderhandelen met de uitgever. Twaalf euro vijftig voelt als zoveel meer dan tien euro.



Geert Jan Olsder, *Mijn rondzwervingen door een toegepast wiskundig heuvellandschap*, Delft Academic Press, 91 p., ISBN 9789065624178, €12,50.



Song Jian en Geert Jan Olsder

Om een indruk te geven van de inhoud van het boek volgt hier een fragment waarin Geert Jan Olsder uitlegt wat een differentiaalspel is.

The Lady in the Lake

“Laat ik nu een klassiek voorbeeld geven van de theorie der differentiaalspelen, een achtervolgingsspel. Een jongedame zwemt in een ronde vijver en een oudere man met duidelijk ondeugende gedachtes en de zwemkunst niet machtig, staat aan de wal. De jongedame, niet gediend van deze man, laat ik haar L noemen van Lady, wil niet eeuwig in de vijver blijven rondzwemmen; zij wil naar de kant en eenmaal aan wal kan zij harder (weg-)rennen dan de man. Haar doel is daarom die wal te bereiken op een punt waar die man dan op datzelfde moment niet is. De man, M , die alleen langs de kant kan rennen, wil net het omgekeerde.

De zwemsnelheid van L is v en de rensnelheid van M is 1. Als v groot is zal L aan M kunnen ontsnappen, als v klein is niet. De te beantwoorden vraag is: hoe groot moet v zijn, of hoe klein kan v zijn, opdat L nog net aan M kan ontsnappen? We nemen aan dat er zich gedurende dit achtervolgingsspel geen vermoeidheidsverschijnselen zullen voordoen; L kan net zo lang met snelheid v blijven zwemmen als zij wil en de man kan steeds met snelheid 1 blijven rennen. Beide spelers zien elkaar en

kunnen instantaan op elkaars bewegingen reageren.

Het blijkt dat de straal van de vijver geen rol speelt en die heb ik voor het gemak in onderstaande analyse op 1 gezet. De vijver is in de figuur weergegeven door de grote cirkel met punt C als middelpunt. De kleinere cirkel, ook met C als middelpunt is een hulpcirkel die straal v heeft. Binnen

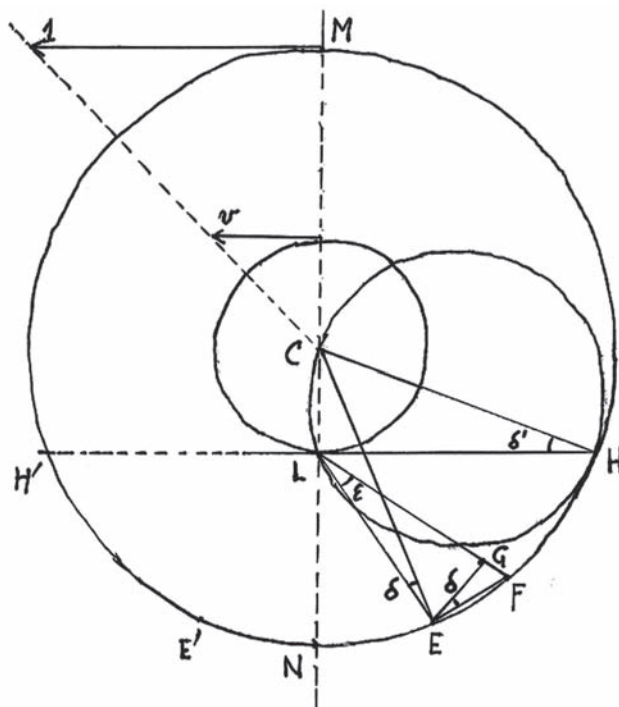
die hulpcirkel kan L altijd zo zwemmen dat het middelpunt C zich precies tussen M en L blijft bevinden, hoe de man ook rent (L 's hoeksnelheid ten opzichte van het middelpunt van de vijver is hier immers groter dan die van M). Zij zwemt vanuit het middelpunt C diametraal weg van de man. Buiten die hulpcirkel lukt dat niet meer.

Stel nu dat we op het punt zijn aangekomen waarbij L (ady) zich in het punt L van de figuur bevindt en M (an) in punt M . Wegens die grotere hoeksnelheid binnen de kleine cirkel kan L zich altijd in zo'n positie precies tegenover de man manoeuvreren (dat kan zelfs in eindige tijd, maar dat gaan we hier niet aantonen). De eerste gedachte die nu waarschijnlijk opkomt is om L vervolgens naar punt N te laten zwemmen. L heeft daar $\frac{1-v}{v}$ tijdseenheden voor nodig. M moet dan een halve cirkel (links- of rechtsom) afleggen en dat kost hem π tijdseenheden. Als nu

$$\pi > \frac{1-v}{v}$$

dan kan L aan M ontsnappen. De cruciale v is te berekenen door in bovenstaande formule het $>$ -teken te vervangen door het $=$ -teken; de bijbehorende v is dan 0,2415.

Maar ook met een nog kleinere v kan L aan M ontsnappen. Laten we daartoe eens twee eindpunten voor L aan de wal, waar zij heen zou kunnen zwemmen, E en F ,



Schematische weergave van The Lady in the Lake.

bekijken. Stel, eerst gaat ze in richting E . Ze zal dit in een rechte lijn doen omdat een kromme lijn meer tijd kost en dan kan M dichterbij komen. Wel moet ze bij richting E weten dat de man links om de vijver gaat rennen (tegen de klok in dus), wat niet zeker is. Daarom gaat L eerst een fractie van een seconde vanuit punt L richting N zwemmen. De man moet nu iets doen, anders verliest hij tijd. Kiest hij linksom, dan gaat L vervolgens richting E , zou de man voor rechtsom hebben gekozen, dan kiest L voor het punt E' , verticaal gespiegeld ten opzichte van E gelegen. Voor het verdere verhaal neem ik aan dat de man linksom heeft gekozen en L dan richting E gaat. De man blijft linksom rennen zolang L buiten de hulpcirkel blijft; zou hij omkeren dan verliest hij immers terrein. De hoek MCL , waarbij dan nu L en M de bewegende posities van beide spelers zijn, is kleiner, en wordt steeds kleiner, dan 180° zolang L buiten de kleine cirkel blijft en de man linksom door blijft rennen.

Wat als L nu F zou kiezen in plaats van E als punt van aan wal gaan? Dan moet zij een stuk GF extra zwemmen en de man een stuk EF extra. De vraag is nu of $(\text{lengte } GF)/(\text{lengte } EF)$ kleiner of groter is dan v . Is die verhouding kleiner dan v , dan is het voor L voordeliger om naar F te zwemmen in plaats van naar E . Noem de hoek tussen de lijnstukken EG en EF δ ; die hoek is bij benadering gelijk aan de hoek tussen EL en EC . Die benadering is exacter naarmate de hoek ε , de hoek tussen de benen LE en LF , kleiner is en tot nul nadert. (Ik

geef toe, ik doe hier een beetje *hand waving*, maar de foutjes die er bij positieve ε nog zijn, zijn tweede-orde-effecten die op het uiteindelijk bewijs geen invloed hebben — dit moet u van me aannemen.) De hoek δ is kleiner dan de hoek δ' , zoals aangegeven in de figuur. Punt H is hierbij geconstrueerd als het snijpunt van de vijverwal met de raaklijn aan de hulpcirkel in punt L . De hoek δ' is groter dan de hoek δ omdat E buiten de nog niet genoemde hulpcirkel door de punten C , L en H ligt. Immers, een bekende stelling zegt dat: het lijnstuk CL wordt vanuit alle punten op die cirkelrand onder dezelfde hoek δ gezien (vanuit punten op de lange cirkelboog tenminste). Deze laatste cirkel ligt helemaal binnen de vijver, behalve punt H dan, wat gemakkelijk te bewijzen is, omdat hoek CLH 90° is. Omdat $\delta' > \delta$, is ook $\sin \delta' = v$ groter dan $\sin \delta = \frac{\text{lengte } GF}{\text{lengte } EF}$ en de conclusie is dat L beter in richting F kan zwemmen dan in richting E .

Maar dan kun je deze redenering doorzetten en het potentiële eindpunt F vergelijken met een ander eindpunt nog ietsje verderop. Even doordenkend blijkt dan dat het beste wat zij kan doen, is vanuit punt L (preciezer: ietsje pietsje daarbuiten zodat M zijn renrichting moet kiezen) in richting H zwemmen. Mocht M besloten hebben om rechtsom te gaan vanuit punt M in plaats van linksom, nadat L heel even richting N is gegaan, dan gaat L , nu vervolgens richting H' .

L zou nog even kunnen overwegen naar een punt op de kant boven punt H

te zwemmen, maar dan wordt $\sin \delta$ van de bij dat punt behorende δ weer kleiner dan $\sin \delta'$, nog afgezien van het feit dat die rechte baan eerst weer de binnencirkel induikt, waarbij je terug bij af bent. Punt H is daarom het punt waar de dame in een rechte lijn heen moet zwemmen vanuit punt L .

Nu is de cruciale snelheid v_c van L te berekenen; v_c is die snelheid waarmee L en M gelijktijdig in H aankomen als ze beiden hun optimale strategieën, zoals boven aangegeven, gebruiken. Als $v > v_c$, dan kan zij aan M ontsnappen, anders niet. Die cruciale snelheid blijkt te zijn $v_c = 0,21723\dots$ (numeriek berekend). Voor degenen onder u die dit zouden willen narekenen, v_c is de oplossing van de vergelijking

$$\pi + \arccos(v) = \frac{\sqrt{1-v^2}}{v}.$$

Het linkerlid in deze vergelijking is de tijd die de man nodig heeft om van zijn positie M naar punt H te gaan, via de lange kant van de rand van de vijver (de afstand NH langs de rand volgt uit $\cos(\angle NCH) = CH/CL = v$); het rechterlid is de tijd die de dame nodig heeft om van punt L naar punt H te zwemmen.

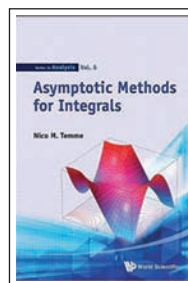
Ik heb dit voorbeeld ook wel eens uitgelegd in omgevingen waarin ik vermoedde dat er een feministische sfeer zou kunnen heersen en daar heb ik veiligheidshalve de jongedame vervangen door een visser in een roeibootje zonder visakte en de man door een politieagent langs de kant die de visser wil gaan bekeuren.” ☺

Boekbesprekingen

| Book Reviews

Redactie: Hans Cuypers en Hans Sterk

Review Editors NAW - MF 7.092
Faculteit Wiskunde & Informatica
Technische Universiteit Eindhoven
Postbus 513
5600 MB Eindhoven
reviews@nieuwarchief.nl
www.win.tue.nl/wgreview



Nico M. Temme

Asymptotic Methods for Integrals

World Scientific Publishing, 2015

xxii + 605 p., prijs \$158.00

ISBN 9789814612159

Op het gebied van de asymptotiek als onderdeel van de wiskundige analyse zijn natuurlijk al verscheidene boeken verschenen, elk met een eigen doelstelling en vaak gekoppeld aan een toepassingsgebied. Vaak betreft dit het asymptotische gedrag van oplossingen van differentiaalvergelijkingen bij grote/kleine parameterwaarden of de asymptotiek van speciale functies bij grote/kleine argumenten. Het boek van Nico Temme kent een gedetailleerde behandeling van de asymptotiek van speciale functies zoals we die aantreffen in de fysica en de stochastiek met niet alleen aandacht voor het opzetten van asymptotische ontwikkelingen, maar ook voor het efficiënt numeriek berekenen van coëfficiënten hierin. Er is een overzichtelijke indeling van de te behandelen stof. Het boek is opgedeeld in zeven delen, die verder weer in hoofdstukken zijn onderverdeeld. Aan het einde treft de lezer een uitgebreide bibliografie aan van boeken die tot ongeveer 2010 zijn verschenen. Het boek is een nieuw standaardwerk op het gebied van de asymptotiek van speciale functies en kent een hoge informatiedichtheid. Voor bewijzen wordt de lezer vaak verwezen naar het bekende standaardwerk *Asymptotics and Special Functions* uit 1997 van F.W.J. Olver. Met publicaties van een groot aantal artikelen heeft de schrijver al eerder een belangrijke bijdrage geleverd aan het onderzoek van de asymptotiek van speciale functies. In het boek wordt frequent naar die artikelen verwezen. Zoals te verwachten is bij het thema van dit boek, wordt er een overvloed van methoden en technieken aangeboden die van de lezer enig doorzettingsvermogen vereist. Hierna wordt kort ingegaan op de inhoud van de zeven delen die dit boek kent.

Het eerste deel van het boek behandelt standaardbegrippen en basismethoden uit de asymptotiek, zoals de Laplace-methode en de zadelpuntmethode. Het is een algemene inleiding met methoden die niet alleen worden geïllustreerd aan de hand van vele voorbeelden maar ook geplaatst worden in een historisch perspectief, wat dit boek doet uitstijgen boven een gemiddeld leerboek. Voor bewijzen wordt veelal verwezen naar het eerder genoemde boek *Asymptotics and Special Functions* van Olver, zoals het bewijs van het klassieke lemma van Watson. Menigmaal verwijst de auteur naar zijn eigen artikelen. Die veelvuldige verwijzigingen van bewijzen werken enigszins belemmerend voor een lezer die voor het eerst kennismaakt met asymptotiek en niet van 'bladeren' houdt. Het eerste deel wordt afgesloten met een heldere behandeling van het zogenaamde Stokes-fenomeen aan de hand van het asymptotische gedrag van de Airy-functie.

In het tweede deel worden de basismethoden toegepast op de gammafunctie, de incomplete gammafunctie, de Airy-functies, de Bessel-functies, de Kummer-functies en de hypergeometrische functies. Het gaat niet alleen om het vinden van geschikte asymp-

totische ontwikkelingen, maar ook om het numeriek berekenen van coëfficiënten en functiewaarden. Fundamenteel in dit deel, maar in feite in het gehele boek, zijn de integraalrepresentaties en integraaltransformaties voorafgaande aan het bepalen van asymptotische ontwikkelingen. Zo wordt een apart hoofdstuk gewijd aan de Mellin–Barnes-integralen en de Mellin-transformaties.

Het derde deel opent met de methode van de stationaire fase toegepast op integralen van het type $F(\omega) = \int_a^b e^{i\omega\phi(t)} \psi(t) dt$. Het asymptotische gedrag van deze integraal wordt in belangrijke mate bepaald door het gedrag van de functies $\phi(t)$ en $\psi(t)$ in de buurt van kritieke punten. De auteur gaat hier uitgebreid op in.

Vanaf het vierde deel is de focus gericht op de uniforme asymptotiek. Dit is van belang in geval meerdere parameters in de integraal voorkomen en ook bij de analyse van typische verschijnselen die optreden wanneer bijvoorbeeld zadelpunten en singulariteiten ‘dicht’ bij elkaar liggen. Door middel van een nauwkeurige analyse wijst de auteur gebieden voor parameterwaarden aan waarvoor bepaalde asymptotische ontwikkelingen gelden. De schrijver geeft hierbij een overzicht van standaardvormen die hierbij optreden en die daarna aan de hand van verschillende voorbeelden worden behandeld. Een van die voorbeelden verwijst naar het bekende boek van De Bruijn, *Asymptotic Methods in Analysis*, waarin de invloed van polen in de buurt van een zadelpunt wordt geanalyseerd. Het vierde deel wordt afgesloten met Hermite-type ontwikkelingen van integralen. Verschillende klassen van polynomen spelen daarbij een rol, zoals de Hermite-, Gegenbauer- en Laguerre-polynomen.

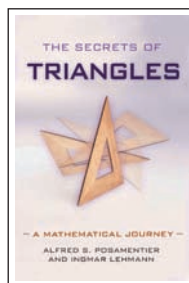
Een afzonderlijk deel (deel 5) wordt besteed aan uniforme methoden gerelateerd aan integralen van het type Laplace: $\int_0^\infty t^{\lambda-1} e^{-zt} f(t) dt$. Door een keuze van verschillende functies $f(t)$ leidt deze integraal naar zekere klassen van speciale functies, zoals de gemodificeerde Bessel-functies, de Kummer-functie, de parabolische cilindervunctie en ratio's van de gammafunctie.

Deel 6 verzamelt uitputtend vele voorbeelden van uniforme asymptotische ontwikkelingen voor speciale functies zoals de Legendre-functies, parabolische cilindervuncties en de gegeneraliseerde Bessel-functies. In een apart hoofdstuk wordt een methode ontwikkeld waarmee asymptotische ontwikkelingen van de Stirling-getallen van het eerste en tweede soort gevonden kunnen worden. De auteur gaat ook in een separaat hoofdstuk in op de asymptotiek van de integraal $\int_0^1 \cos(bx + a/x) dx$ voor grote waarden van a en b . Blijkbaar is voor het asymptotisch gedrag de verhouding b/a bepalend.

In het laatste deel (deel 7) behandelt de auteur de asymptotiek van verdelingsfuncties uit de stochastiek. Het inverteren van een cumulatieve verdelingsfunctie is een voor de praktijk belangrijke opgave. Uitgaande van een algemene representatie van een verdelingsfunctie, die bruikbaar is voor verschillende klassen van verdelingsfuncties, zoals de incomplete gammafunctie, wordt een asymptotische reeks voor de inverse afgeleid bij grote/kleine parameterwaarden.

Afsluitend mogen we zeggen dat het boek een waardevolle toevoeging is aan de uitgebreide literatuur op het gebied van de asymptotiek voor speciale functies. Het boek is zeer constructief en technisch van aard en gericht op een praktische gebruiker in technisch/wetenschappelijke toepassingsgebieden van de wiskunde. De lezer zal er dan ook weinig abstracte analyse in aantreffen.

Hennie ter Morsche



Alfred S. Posamentier, Ingmar Lehmann

The Secrets of Triangles
A Mathematical Journey

Prometheus Books, 2012

387 p., prijs € 21,99

ISBN 9781616145873

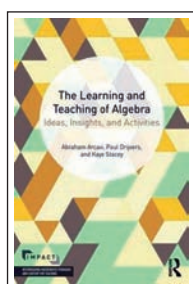
De titel is niet overdreven, want ook voor degenen onder u die denken best wel veel te weten over driehoeken onthult dit boek vele (ook voor mij tot nu toe) onbekende en vaak uiterst opmerkelijke eigenschappen van driehoeken en fraaie relaties tussen wat je daar zoal in of omheen kan tekenen of construeren. Wie bijvoorbeeld de *negenpuntsdriehoek* van Feuerbach kent (met daarop de middens van de drie zijden van een driehoek, de voetpunten van de drie hoogtelijnen en de middens van de drie lijnstukken van de hoekpunten naar het hoogtepunt van de driehoek) weet misschien niet dat die beroemde cirkel bovendien niet alleen de ingeschreven cirkel maar ook nog eens de drie aangeschreven cirkels van die driehoek raakt en daarmee kan deze cirkel gepromoveerd worden tot de *dertienpuntsdriehoek* van Feuerbach. En hij/zij weet misschien ook niet dat de straal ervan exact de helft is van de straal van de omgeschreven cirkel van de driehoek!

Voor een tweede voorbeeld van relatief onbekende maar waarlijk schitterende eigenschappen verbinden we de eerder genoemde voetpunten van de drie hoogtelijnen van een driehoek ABC zodat er een driehoek DEF ontstaat. Nu blijken die hoogtelijnen van driehoek ABC tevens de bissectrices te zijn van de hoeken van driehoek DEF ! Verrassend! En, de drie driehoeken die nu om driehoek DEF heen liggen zijn ook nog eens niet alleen onderling gelijkvormig, maar zelfs gelijkvormig aan de oorspronkelijk driehoek ABC ! Fraai! En, driehoek DEF heeft ook nog eens de kleinste omtrek van alle driehoeken PQR met P , Q en R op de respectievelijke zijden van driehoek ABC ! Grappig! Nog een laatste voorbeeld. Neem een willekeurig punt P op de omgeschreven cirkel van een driehoek ABC . Teken door P loodlijnen op de zijden van driehoek ABC . De drie voetpunten daarvan liggen altijd op één lijn!

Een ander erg leuk hoofdstuk gaat over het construeren (met een ongemarkeerde liniaal en een passer) van een driehoek als drie elementen daarvan zijn gegeven. In het eerste deel van dit hoofdstuk geven de auteurs een overzicht van alle 95 mogelijke — essentieel verschillende — combinaties van drie uit de groep van 15 basiselementen van een driehoek (de drie zijden, de drie hoeken en de lengtes van de drie zwaartelijnen, de drie hoogtelijnen en de drie bissectrices van de hoeken), vervolgens welke van die 95 combinaties een construeerbare driehoek bepalen en ten slotte hoe die (63) gevallen uitgevoerd kunnen worden. Neem nu even de tijd om te proberen driehoek ABC te construeren waarvan gegeven is de grootte van hoek A , de lengte van zijde a ertegenover en de lengte van de hoogtelijn uit A . De prachtige oplossing die bestaat uit negen stappen zou al een reden kunnen zijn onverwijd dit boek aan te schaffen. In het tweede deel van dit hoofdstuk staan ook nog voorbeelden van constructies van driehoeken waarvan twee van de bovengenoemde elementen zijn gegeven en tevens de straal van de omgeschreven cirkel.

In dit schitterende boek waar de pure schoonheid van de meetkunde in al zijn glorie van de pagina's kan worden geschept, wordt een en ander gelukkig helder en zorgvuldig stap voor stap uitgelegd en bewezen in een taal en een notatie die zeer goed te volgen is voor iemand met het niveau van 6 vwo met wiskunde B in het profiel (maar dan liefst wel onder het oude programma, dus inclusief de mijns inziens uiterst nuttige bewijshoofdstukken) en dus zeker ook voor de huidige 6 vwo-leerling die dus het nieuwe — qua bewijzen helaas uitgekleden — programma wiskunde B volgt, maar die zo gelukkig is wiskunde D in het profiel te hebben opgenomen (mits zijn/haar leraar er natuurlijk voor heeft gekozen een of meerdere bewijsmodules aan te bieden).

Het laatste op zich niet oninteressante hoofdstuk over driehoeken en fractals (met ook een klein uitstapje naar de driehoek van Pascal) past mijns inziens niet in de opzet van dit boek, want het is juist het meetkundige deel (dat gelukkig bijna 90 procent uitmaakt van het geheel) dat boeit, verrast en je af en toe doet achterover slaan van ongeloof. Kortom, dit boek is een schatkamer voor de meetkundig geïnteresseerde en voor elke wiskundeleraar een inspiratiebron (ook voor het maken van vele intrigerende en originele bewijsopgaven). *Joop van der Vaart*



Abraham Arcavi, Paul Drijvers, Kaye Stacey
**The Learning and Teaching of Algebra
Ideas, Insights and Activities**

Routledge, Taylor & Francis Group, 2017
xiv+144 p., prijs €38,99
ISBN 9780415743723

The book makes a valuable contribution to the existing literature (e.g. K. Stacey, H. Chick and M. Kendal, Eds., *The Future of Teaching and Learning of Algebra: The 12th ICMI Study*. Kluwer, 2004) in terms of the teaching and learning of algebra. At the same time it is different, in various ways: one of the differences is that it has been co-authored by three authors, rather than edited, which provides the reader with a more coherent reading. It is composed of five chapters, including one on 'lessons from history', 'seeing algebra through the eyes of the learner', 'emphases in algebra teaching', and one addressing the challenges of 'algebra education in the digital era'. As said in the preface, the book addresses the 'problématique' of teaching and learning school algebra, but moreover the authors propose interesting ideas and (annotated) examples for mathematics educators to work on with their students — this makes the book very 'usable' and dynamic.

Without any intentions of evaluating the book, for me the purpose of this short review/commentary is to set out how the different chapters of the book have provoked me to reflect on a particular issue connected to the teaching and learning of algebra. For me as a mathematics teacher educator, algebra has always been about 'algebraic reasoning': "Algebraic reasoning is a process in which students generalize mathematical ideas from a set of particular instances, establish those generalizations through the discourse

of argumentation, and express them in increasingly formal and age-appropriate ways." (p. 99 of J. Kaput and M. Blanton, 'Algebrafying the elementary mathematics experience in a teacher-centered, systemic way', in: T. Romberg, T. Carpenter and F. Dremock, Eds., *Understanding Mathematics and Science Matters*, Lawrence Erlbaum Associates, 2005, pp. 99–125.)

And I see this confirmed in the book. My first reading of the contents (and the index) revealed little mention of algebraic reasoning (although 'proof' was mentioned on several occasions). However, reading through the chapters, and in particular through the excellent examples, I appreciated to see algebraic reasoning (implicitly or explicitly) becoming visible in each chapter and nearly each example. Whether looking for patterns, for example, or forming generalizations from experiences with numbers, and later with the use of a meaningful symbol system, or exploring the concepts of pattern and functions, algebraic reasoning seems to permeate our ways of thinking. Every student has the capacity to think algebraically because algebraic reasoning is essentially the way we as humans interact with the world. Moreover, algebraic reasoning is present in many instances of our lives, and it is now recognized that algebraic reasoning is an important element of instruction, also of young students so that powerful mathematical ideas become accessible to all students. In my view the book contributes in a significant way to supporting the realization of this goal. *Birgit Pepin*



Walter D. van Suijlekom

Symmetrie in de Deeltjesfysica

Epsilon Uitgaven, deel 85, 2016
vi + 91 p., prijs €17,00
ISBN 9789050411578

Dit boek gaat over de classificatie van elementaire deeltjes. Het algemene idee is dat elementaire deeltjes beschouwd worden als vectoren (toestanden) in de representatieruimte van een irreducibele representatie van een symmetriegroep. Dit idee werd reeds rond 1930 door Heisenberg en Wigner geformuleerd en is zeer succesvol gebleken.

Het boek is ontstaan uit voordrachten van de auteur voor een PWN-vakantiecursus, en is bedoeld voor wiskundigen, maar ook voor vwo-scholieren op zoek naar uitdaging. Het is een inleiding en vereist dan ook geen speciale voorkennis, hoewel enige vertrouwdheid met het formalisme van de quantummechanica is aan te bevelen.

De symmetriegroepen die hier een rol spelen, zijn $U(1)$, $SU(2)$ en $SU(3)$; deze worden in hoofdstuk 2 geïntroduceerd. In hoofdstuk 3 worden hiervan representaties geconstrueerd, onder andere de 8-dimensionale representaties van $SU(3)$. De term 'gemengd symmetrische' tensoren, die hierbij wordt gebezigd, is evenwel misleidend (in feite onjuist).

Vanaf hoofdstuk 4 wordt dit alles toegepast en komt de natuurkunde aan bod. Zo wordt in hoofdstuk 5 het quarkmodel uit-

eengezet en wordt de Eightfold Way behandeld: de achtvoudige weg van Gell-Mann (Nobelprijs 1969). Dan volgt in hoofdstuk 6 het uitsluitingsprincipe van Pauli en in hoofdstuk 7 het Standaard Model met de quarks, de leptonen en de ijkbosonen en uiteraard het Higgs-deeltje. De symmetriegroep hier is $U(1) \times SU(2) \times SU(3)$. In hoofdstuk 8 ten slotte wordt behandeld hoe interacties tussen deeltjes corresponderen met vervlechtingsoperatoren (*intertwining operators*) tussen representaties.

Het boek is weliswaar een eerste inleiding, maar het bevat toch uitgebreide informatie en het geeft een aardige indruk van de 'zoo' van elementaire deeltjes op basis van representatietheorie. De gebruikte wiskunde is helder en van het juiste niveau. De rol en betekenis van symmetrie in de quantumtheorie, als ook het verband van symmetrie met 'behouden grootheden' (stelling van Noether) blijven — noodgedwongen — onderbelicht. De wiskundige lezer had hier wellicht iets meer over willen vernemen.

Henk Pijls



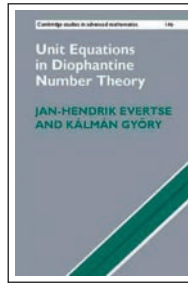
Henk Tijms

Kansrekening van Alledag, een Wereld vol Verrassingen

Epsilon Uitgaven, deel 86, 2016
viii + 68 p., prijs €12,00
ISBN 9789050411585

Al jaren is Henk Tijms zeer succesvol met het schrijven over grap-pige, eigenaardige en verrassende aspecten van de kansrekening. Hij kreeg hier zelfs de prestigieuze Expository Writing Award voor van de American Society of Operations Research. Dit boek bevat een bloemlezing van zijn populair-wetenschappelijke bijdrages aan *STATOR* en de Numberplay-blog van de *New York Times*. Dit levert een indrukwekkende collectie van verrassende voorbeelden van kansrekening in het dagelijkse leven op. Elke bijdrage bestaat uit een korte beschrijving van het probleem, waarna eveneens kort wordt uitgelegd hoe de situatie in een kansrekeningprobleem kan worden vertaald en hoe dit probleem wordt opgelost. Tussen neus en lippen door worden zo een groot aantal sleutelresultaten uit de kansrekening, zoals de Wet van Benford, het bestaan van een grote cykel in een random permutatie, de centrale limietstelling, optioneel stoppen, of de lengte van de langste rij van koppen of munten in worpen met een eerlijke munt, besproken. Ook de rol van simulaties in de kansrekening wordt zo besproken aan de hand van het klassieke quizmaster- of Monty Hall-probleem. Er is zelfs een hoofdstuk met de zeven mooiste formules uit de kansrekening, waarin de achtergrond in de stochastische besliskunde van de schrijver duidelijk naar voren komt. Al met al levert dit een zeer amusant en leesbaar geheel op, waarin in 68 pagina's 16 verschillende alledaagse kansrekeningproblemen de revue passen. Het boek is bruikbaar bij inleidende colleges kansrekening op universiteit of hbo, maar ook op de middelbare school aansluitend bij kansrekening-modulen. Elk van de onderwerpen is geschikt om een les op te baseren, of om als modelleeropdracht te gebruiken.

Remco van der Hofstad



Jan-Hendrik Evertse, Kálmán Györy

Unit Equations in Diophantine Number Theory

Cambridge Studies in Advanced Mathematics 146
Cambridge University Press, 2016
378p., prijs £49.99
ISBN 9781107097605

The book concerns unit equations and their applications (mostly in algebraic number theory and arithmetic geometry). Unit equations are linear equations $a_1x_1 + \dots + a_nx_n = 1$, with unknowns $x_1, \dots, x_n$ taken from a multiplicative group of finite rank in the complex numbers. An important special case is when the units are taken from the unit group of the ring of integers of a number field. Since many Diophantine problems can be reduced to solving a system of unit equations, these equations are far more basic than one might naively think. Basic problems are whether there are finitely many solutions, and if yes, how many and whether there is an upper bound for their size (in this setting typically the notion of height is used to measure size).

The authors work since the 1970s in this area and are well-known experts who contributed many interesting and important results. The book clearly reflects their command and overview of the subject. Thus one might hope that this book will become a standard work. In my review I will give some arguments why I strongly expect that this will (and should!) indeed happen.

Understanding the book requires only basic knowledge in algebra (groups, commutative rings, fields, Galois theory and elementary algebraic number theory). In particular the concepts of height, places and valuations play an important role. However, results in this area tend to be quite technical and this makes the reading not as easy as one might expect. Indeed, the subject is technical by nature also since the existing methods (e.g. linear forms in logarithms, more on this later) lead to bounds that are not very 'clean' and very likely far from best possible. It is perhaps helpful to first have a look at the 1988 survey article by Evertse, Györy, Stewart and Tijdeman, which was at the basis of this book, in order to get accustomed to the subject. It is easily found online by googling for 'S-units and their applications'.

The first three chapters of the book deal with preliminaries. They contain few proofs, but lots of pointers to the extensive literature. They are written in a well-structured and systematic way as indeed is the whole book.

In the third, more specialized, chapter the authors collect some fundamental and deep results from Diophantine approximation and transcendence theory. A basic result here is Roth's celebrated theorem on the approximation of algebraic numbers by rationals (hence the term 'Diophantine approximation'). It states that if α is a real algebraic number that is not a rational number and $\epsilon > 0$, then there are finitely many integer pairs (x, y) with $y > 0$ such that $|\alpha - x/y| \leq \max(|x|, |y|)^{-2-\epsilon}$. Roth was awarded a Fields Medal in 1958 on the strength of this result. Schmidt's Subspace Theorem generalizes Roth's theorem to simultaneous approximation. Roughly speaking we want to have solutions making a bunch of linear forms all small in an appropriate sense (not just one, as in Roth's theorem).

The transcendence result mentioned is also associated with a Fields Medal! Namely, that of Baker (1970), who used it to derive effective bounds for the solutions of some Diophantine equations, and to solve the class number problem of finding all imaginary quadratic fields with class number 1. His result gives a non-trivial lower bound for how small say $a \log 2 + b \log 3$ (a linear form with a and b as variables with logarithms as coefficients) can be with $-N \leq a \leq N$ and $-N \leq b \leq N$. Indeed, it works likewise for linear forms in logarithms with an arbitrary number of variables. Certainly $a \log 2 + b \log 3 \neq 0$ for any $(a, b) \neq (0, 0)$, as equality would lead to the impossible identity $2^a = 3^{-b}$. With the help of Baker's theorem lots of Diophantine problems can be attacked. For example, in 1974 Tijdeman used it to show that the Catalan equation $x^p - y^q = 1$ has only finitely many solutions with $x, p, y, q > 1$. However, the drawback of this method is that it typically leads to huge bounds on the size of the solutions. For example, it does not allow the Catalan conjecture that $x^p - y^q = 1$ with $x, p, y, q > 1$ has only $(x, p, y, q) = (3, 2, 2, 3)$ as solution to be established. (That was only achieved in 2004 by Mihailescu using very different methods.)

After the recapitulation of important material in the first three chapters, the stage is set for the heart of the book consisting of Chapters 4–10.

Chapter 4 deals with effective results for unit equations in two unknowns over number fields (an example being S -unit equations with S a finite set of places including all the archimedean ones). Here the solutions are shown to be bounded in height. By Northcott's theorem this implies that there are only finitely many solutions. The authors derive the best upper bounds to date for the heights of its solutions by means of the best known effective estimates, due to Matveev (2004) and Yu (2007), for linear forms in logarithms. Aside from the material from the earlier chapters some geometry of numbers is being used. Further, the celebrated *abc*-conjecture is briefly discussed in this chapter.

For some classes of concrete Diophantine equations using the LLL lattice basis reduction algorithm upper bounds for the sizes of the solutions can be substantially reduced and the Diophantine equation then solved using a computer. Indeed, in Chapter 5 the algorithmic resolution, i.e. finding actually all solutions, of concrete unit equations in two unknowns is considered and the role of the LLL lattice basis reduction algorithm explained. In this process it is important that the basic objects are given effectively, that is in such a way that they can serve as an input for an algorithm (Chapter 1 fleshes out some details).

In Chapter 6 unit equations in several unknowns are considered. There is currently a big difference with the two-unknowns case in that for three or more unknowns still no effective results are known. However, here ineffective finiteness results can be established that allow to give an explicit upper bound for the number of non-degenerate solutions. There are two main approaches here to derive such results, one of which is based on the p -adic subspace theorem of Schmidt and Schlickewei (and followed in this book), the other being based on Faltings' product theorem. The chapter discusses also the classic result of Beukers and Schlickewei (1996), who showed that if H is a subgroup of $K^* \times K^*$ of finite rank r , with K^* the non-zero elements of a field K of characteristic zero, then the equation $x_1 + x_2 = 1$ has at most $2^{8(r+1)}$ solutions (x_1, x_2) with $(x_1, x_2) \in H$. A detailed proof of this result is given, which is not based on the deep subspace theorem, but instead uses some

theory of hypergeometric functions. The latter allow one to explicitly construct certain important auxiliary polynomials in Diophantine approximation which have to vanish to high order.

Chapter 7 considers analogues of the results of Chapter 6 over function fields, with a strong emphasis on the characteristic zero case. The preliminaries for this chapter are discussed in Chapter 2. In the function field case Mason's *abc*-theorem for polynomials (which for number fields is a very difficult open problem) plays the role of the earlier bounded-height results.

Chapter 8 deals, among others, with equations $a_1 x_1 + a_2 x_2 = c$, where the unknowns x_1 and x_2 are taken from the unit group of an arbitrary finitely generated $\mathbb{Z}$ -subalgebra of the complex numbers. It is shown that the finitely many solutions of such an equation can be determined in principle if the underlying algebra is explicitly given in a well-defined sense. Here, Mason's theorem, the effective results from Chapter 4 and some effective specializations play an important role.

Chapter 9 deals with decomposable form equations in an arbitrary number of unknowns. These are equations of the type $F(x_1, \dots, x_n) = a$, where F is a decomposable form, that is the product of homogeneous linear forms in n variables, a is a non-zero constant, and the solutions $x_1, \dots, x_n$ are taken from the integers or more generally from finitely generated $\mathbb{Z}$ -subalgebras of the complex numbers. Important classes are the Thue equations, which are decomposable form equations in two unknowns, norm form equations, where the underlying decomposable form is the norm of a linear form, and discriminant form equations, which have close ties with algebraic number theory.

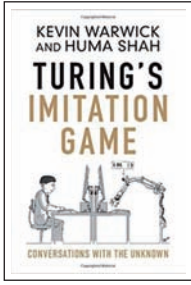
The authors present a finiteness criterion for decomposable form equations and show that it is equivalent with the finiteness criterion of unit equations given in Chapter 6. In some special cases they provide effective results. If the finiteness criterion is not satisfied, still the solutions can be meaningfully grouped into a finite set of infinite families.

The final chapter gives a sketchy overview of various applications of unit equations; it relies heavily on the material from Chapters 4 and 6. We mention here prime factors of sums of integers and the zero-multiplicity of linear recurrences. The latter deals with the question how often a non-trivial k -th order linear recurrence can assume the value zero. Here the subspace theorem shows that this zero multiplicity is finite (and a very difficult theorem of W. Schmidt, mentioned without proof in the book gives an upper bound which is triply exponential in k).

A number of further applications are given in a second book of the authors entitled *Discriminant Equations in Diophantine Number Theory* (CUP, 2016), which also relies considerably on the material from Chapters 4 and 6.

I think my review amply demonstrates the importance of the mathematics discussed in this book. This and the structured way in which the authors approach their subject, makes for challenging (due to the technical nature of the material), but rewarding reading. In addition to providing a survey, the authors improve both formulations and proofs of various important existing results in the literature, making their book also a valuable asset for researchers in this area. Given how specialized this field is, the help of the authors in answering some of my mathematical questions related to it was very useful in preparing this review. I thank them for their fast and clear answers.

Pieter Moree



Kevin Warwick, Huma Shah

Turing's Imitation Game
Conversations with the Unknown

Cambridge University Press, 2016

202 p., prijs £24.99

ISBN 9781107056381

De 'Imitation Game' is eind jaren veertig van de vorige eeuw bedacht door de veelzijdige (wiskundige, logicus, cryptograaf, informaticus, mathematisch bioloog) Alan Turing als manier om de moeilijk scherp te krijgen vraag of machines intelligentie kunnen vertonen te benaderen via een imitatiespel: inmiddels bekend als de Turingtest. Wat precies de Turingtest is, en in hoeverre hiermee machine-intelligentie kan worden aangetoond en eventueel al aangetoond is, is minder duidelijk dan men wellicht op het eerste gezicht zou kunnen denken. Dit boek onderzoekt deze vragen.

Het boek opent met een hoofdstuk dat de context schetst waarin Turing opereerde ten tijde van het ontwikkelen van de test, en ook wat voor persoonlijkheid en wetenschapper hij was. Het doet dit onder meer door middel van interviews met personen met wie Turing samenwerkte.

The Imitation Game valt daarna uiteen in twee delen: het eerste behandelt de achtergronden van de Turingtest, het tweede concentreert zich op een drietal recent uitgevoerde testseries waar de auteurs organisatoren van waren.

Het eerste deel laat onder meer zien hoe de Turingtest, geïntroduceerd in hoofdstuk 2, evolueerde naar een vorm die twee belangrijke zaken expliciet maakt die in populaire versies vaak onderbelicht blijven. De test wordt uitgevoerd met een machine en een mens in twee gescheiden ruimten, die communiceren met een panel van menselijke beoordelaars. De communicatie is via een medium zoals een tekstueel interface, dat mens/machine alleen onderscheidbaar maakt door de inhoud van de communicatie. Een machine passeert de test als deze de beoordelaar verkeerd kan laten oordelen over welke ruimte de mens dan wel de machine bevat. Een eerste saillant punt is dus, dat de machine de test reeds passeert als deze de beoordelaar (bewust...) kan misleiden, bijvoorbeeld door de conversatie te sturen in een richting die dit mogelijk maakt. Een tweede saillant punt is, dat het passeren van de test intelligentie beoogt aan te tonen: niet noodzakelijk menselijke intelligentie.

Het criterium voor slagen voor de test was in 1950 door Turing expliciet gemaakt als: (An) "average interrogator will not have more than 70% chance of making the right identification after five minutes of questioning".

In hoofdstuk 3 van het eerste deel wordt een summier overzicht gegeven van kunstmatige intelligentie als onderzoeksveld.

Onder meer noties als zwakke en sterke kunstmatige intelligentie, bewustzijn, en op regels dan wel kunstmatige neurale netwerken gebaseerde benaderingen worden genoemd. Er is geen verdere uitwerking van bijvoorbeeld de aanpak met neurale netwerken of de daarmee behaalde resultaten.

Hoofdstuk 4 behelst ontvangst van de test. Hoofdstuk 5 bespreekt vroege conversatie-programma's als de beide op een beperkt domein werkzame Eliza (psychotherapeut) en Parry (paranoïde patiënt), en de meer algemeen bevroegbare Eugene Goostman. Hoofdstuk 6 evalueert de reacties op en conclusies getrokken uit ervaringen met verschillende varianten van Turingtests uitgevoerd met zulke programma's.

Het tweede deel gaat in detail in op drie 'recente toernooien'. *Reading University 2008* (Hoofdstuk 7). Hier werd de standaard Turingtest gebruikt. Geen van de machines bleek in staat aan het criterium te voldoen, al kwam een van de kandidaten in de buurt met 25%.

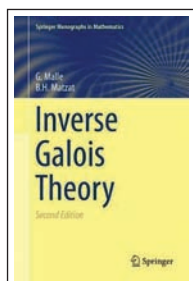
Bletchley Park 2012 (Hoofdstuk 8). Dit toernooi concentreerde zich op het vergelijken van de standaard variant een-op-een waarbij telkens een van de twee kandidaten vijf minuten werd ondervraagd met de variant waarbij de ondervrager beide kandidaten simultaan kon bevragen; de laatste bleek moeilijker voor de machine. Een interessante draai was, dat de test uitgebreid was met de mogelijkheid dat nu ook beide ruimtes een machine of beide een mens konden bevatten: de bezetting met twee mensen bleek niet altijd identificeerbaar voor de beoordelaars. Hoewel Watson inmiddels het talige spel *Jeopardy* succesvol bleek te kunnen spelen, was er nog geen variant beschikbaar die conversaties als in de Turingtest kon voeren. Hoewel er vooruitgang was geboekt in de kennis van domein en gedrag bleek het vooral moeilijk een machine een 'menselijk' aandoende response te laten geven. De topscore was inmiddels 29%.

The Royal Society 2014 (Hoofdstuk 10). Aan dit hoofdstuk gaat een interessant hoofdstuk vooraf waarin diverse ontwikkelaars van machines voor dit toernooi hun visie geven. Bij dit toernooi werd grosso modo de standaard versie gebruikt. Doel was vooral na te gaan of de conversatie verbeterd was. De Eugene Goostman-versie voor dit toernooi slaagde voor de 30%-test. Wat dit precies betekent wordt bediscussieerd aan het eind van dit hoofdstuk — het laatste hoofdstuk gaat in op reacties, positief en negatief, op dit laatste toernooi.

Het boek biedt een interessant overzicht van de ontwikkelingen op het gebied van de Turingtest. Zoals de bescheiden titel correct aangeeft concentreert het zich op de test, en niet op de machines die eraan moeten voldoen. De reviewer was, gezien de uitwerkingen van sessies, niet altijd overtuigd dat de machines terecht slaagden voor de test, maar is terughoudend met dit oordeel omdat de naam van de tweede auteur, Huma, de verdenking oproept dat hij misschien toch door een bijna Human zelf aan een test werd onderworpen.

Ruurd Kuiper

Recent verschenen publicaties. Als u een van deze boeken wilt bespreken of als u suggesties heeft voor andere boeken voor deze rubriek, laat dit dan per e-mail weten aan reviews@nieuwarchief.nl.



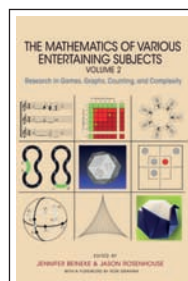
Gunter Malle, Bernd Heinrich Matzat

Inverse Galois Theory

Springer, 2018

ISBN 9783662554197

springer.com/9783662554197



Jennifer Beineke, Jason Rosenhouse (Eds.)

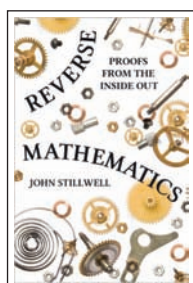
The Mathematics of Various Entertaining Subjects, Volume 2 Research in Games, Graphs, Counting, and Complexity

Foreword by Ron Graham

Princeton University Press, 2017

ISBN 9780691171920

press.princeton.edu/titles/11171.html



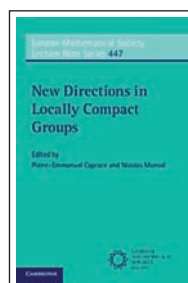
John Stillwell

Reverse Mathematics Proofs from the Inside Out

Princeton University Press, 2018

ISBN 9780691177175

press.princeton.edu/titles/11143.html



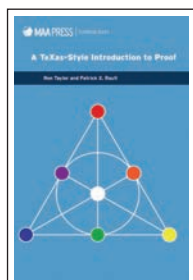
Pierre-Emmanuel Caprace, Nicolas Monod (Eds.)

New Directions in Locally Compact Groups

Cambridge University Press, 2018

ISBN 9781108413121

cambridge.org/9781108413121



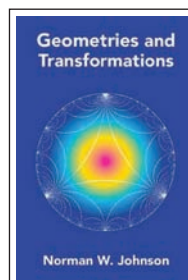
Ron Taylor, Patrick X. Rault

A TeXas Style Introduction to Proof

MAA Press, 2017

ISBN 9781939512130

bookstore.ams.org/text-35



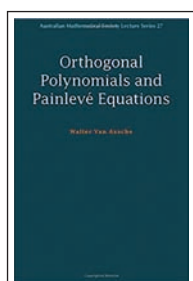
Norman W. Johnson

Geometries and Transformations

Cambridge University Press, 2018

ISBN 9781107103405

cambridge.org/9781107103405



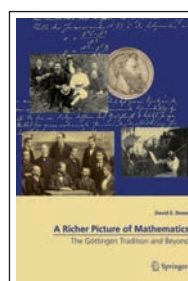
Walter Van Assche

Orthogonal Polynomials and Painlevé Equations

Cambridge University Press, 2017

ISBN 9781108441940

cambridge.org/9781108441940



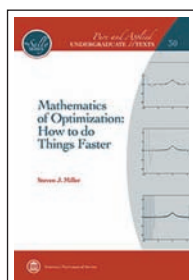
David Rowe

A Richer Picture of Mathematics The Göttingen Tradition and Beyond

Springer, 2018

ISBN 9783319678184

springer.com/9783319678184



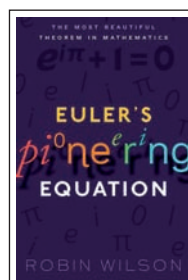
Steven J. Miller

Mathematics of Optimization: How to do Things Faster

MAA Press, 2017

ISBN 9781470441142

bookstore.ams.org/amstext-30



Robin Wilson

Euler's Pioneering Equation The Most Beautiful Theorem in Mathematics

Oxford University Press, 2018

ISBN 9780198794929

oup.com/academic/product/9780198794929

Problemen

| Problem Section

This Problem Section is open to everyone; everybody is encouraged to send in solutions and propose problems. Group contributions are welcome. For each problem, the most elegant correct solution will be rewarded with a book token worth €20. (To compete for the book token you should have a postal address in The Netherlands.)

This edition contains a Star Problem (C*) for which the proposer does not know any solution. For the first correct solution sent in within one year there is a prize of €100.

Please send your submission by e-mail (LaTeX is preferred), including your name and address to problems@nieuwarchief.nl.

The deadline for solutions to the problems in this edition is 1 June 2018.

Problem A

Let f be a function from the set of positive integers to itself such that, for every n , the number of positive integer divisors of n is equal to $f(f(n))$. For example, $f(f(6)) = 4$ and $f(f(25)) = 3$. Prove that if p is prime then $f(p)$ is also prime.

Problem B

Let n be a positive integer and $F \subseteq 2^{[n]}$ a family of subsets of $[n] = \{1, 2, \dots, n\}$ that is closed under taking intersections. Suppose that

1. For every $A \in F$ we have: $|A|$ is not divisible by 3.
2. For every pair $i, j \in [n]$ there is an $A \in F$ such that $i, j \in A$.

Show that n is not divisible by 3.

Problem C* (proposed by Hendrik Lenstra)

Cut three squares of equal size in exactly the same way into three pieces each in such a way that the resulting nine pieces can be rearranged to form a regular twelve-gon. Open question: Can you cut the three squares into *eight* pieces that form a regular twelve-gon?

Erratum

Problem C in the previous issue of NAW had an error. Instead of $a^n + b^n \equiv 1 \pmod{m}$ it should read $a^n \equiv b^n \equiv 1 \pmod{m}$. The corrected problem can be found on the NAW website: <http://www.nieuwarchief.nl/serie5/pdf/naw5-2017-18-4-295.pdf>.

Edition 2017-3 We received solutions from Mohammad Aassila (Strasbourg), Herbert Beltman (Amsterdam), Aart Blokhuis (Eindhoven), Bas Edixhoven (Leiden), Alex Heinis (Amsterdam), Ammar Yasir Kiliç (Hellevoetsluis), Alexander Lemmens (Leuven), Quinten Lootens (Waregem), Hans van Luipen (Zaltbommel), Hendrik Reuvers (Maastricht), Hans Samuels Brusse (Den Haag), Toshihiro Shimizu (Kawasaki) and Djurre Tijsma (Zeist). The book tokens for problems A, B and C go to Herbert Beltman, Quinten Lootens, respectively René Pannekoek.

Problem 2017-3/A

Let n be a natural number and suppose that $A_1, \dots, A_n$ are different subsets of $\{1, \dots, n\}$. Prove that there is a $k \in \{1, \dots, n\}$ such that $A_1 \setminus \{k\}, \dots, A_n \setminus \{k\}$ are different.

Solution Solved by Herbert Beltman, Aart Blokhuis, Ammar Yasir Kiliç, Alexander Lemmens, Hans van Luipen, Hendrik Reuvers, Hans Samuels Brusse, Toshihiro Shimizu en Djurre Tijsma.

The solutions are all very similar. Below is Toshihiro Shimizu's solution. The book token has to stay at home and goes to Herbert Beltman.

By contradiction. We assume that for any integer $k = 1, 2, \dots, n$, we can select $i \neq j$ such that $A_i \setminus \{k\} = A_j \setminus \{k\}$ i.e. $A_i = A_j \sqcup \{k\}$ or $A_j = A_i \sqcup \{k\}$ where $A \sqcup B$ means $A \cup B$ and A and B are disjoint. Construct undirected graph $G = (V, E)$ with $V = \{A_1, A_2, \dots, A_n\}$. Draw an edge between A_i, A_j with label k if $A_i = A_j \sqcup \{k\}$ or $A_j = A_i \sqcup \{k\}$ (if there are multiple pairs i, j , select only one edge). Then, G has n edges. A forest graph has at most $n - 1$ edges, so the graph has a cycle. Say the cycle has edges labeled $k_1, k_2, \dots, k_m$. Then, from some set A , we can get $A \sqcup \{k_1\}$ by adding or removing $k_2, k_3, \dots, k_m$. This is impossible.

Problem 2017-3/B (proposed by Hans Zantema)

Let $f, g: \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$ be strictly increasing functions. Prove that there exists an $n \in \mathbb{N}$ such that $f(g(g(n))) \geq g(f(n))$.

Solution Solved by Herbert Beltman, Aart Blokhuis, Alex Heinis, Ammar Yasir Kiliç, Alexander Lemmens, Quinten Lootens, Hans van Luipen, Hendrik Reuvers, Hans Samuels Brusse, Toshihiro Shimizu and Djurre Tijsma. All solutions are similar. Here is the solution by Quinten Lootens.

By contradiction, assume $f(g(g(n))) < g(f(n))$ for all n . Since f is strictly increasing we can say that $n \leq f(n)$. Our assumption $f(g(g(n))) < g(f(n))$ and $n \leq f(n)$ imply that $g(g(n)) < g(f(n))$. Since g is increasing we have that $g(n) < f(n)$. Let us look at $g^3(n) < f(g(g(n))) < g(f(n))$, so $g^2(n) < f(n)$. Repeating this for $g^4(n) < f(g(g(n))) < g(f(n))$, we find $g^3(n) < f(n)$, et cetera. If we keep going we can prove that $g^t(n) < f(n)$ for all t . This is clearly impossible so the contradiction has been reached.

Problem 2017-3/C (proposed by René Pannekoek)

Determine all $n \in \mathbb{N}$ such that $2^n - 1$ divides $3^n - 1$.

Solution We received solutions from Mohammad Aassila, Aart Blokhuis, Bas Edixhoven, Ammar Yasir Kiliç, Alexander Lemmens and Toshihiro Shimizu. Several people wrote that they really liked this problem. That is why this time the book token goes to the contributor of the problem. René Pannekoek has also posted a similar problem online:

<https://math.stackexchange.com/questions/2337536/for-which-n-does-2n1-divide-10n1>

There you can also read what made him come up with this problem. All solutions involve quadratic reciprocity. Some solutions are very short and similar to the following solution by Aart Blokhuis.

For $n = 1$, and depending on your definition of $\mathbb{N}$ and divisibility, $n = 0$ the divisibility holds trivially, we show that these are the only n . If $n > 0$ is even, then $2^n - 1$ is divisible by 3, and $3^n - 1$ clearly not, so assume $n > 1$ is odd and $2^n - 1 \mid 3^n - 1$. Let p be a prime factor of $2^n - 1$, then $3^n = 1 \pmod{p}$, and n is odd, so the order of $3 \pmod{p}$ is odd, and hence 3 is a quadratic residue $\pmod{p}$ (because $3^{(p-1)/2} = 1$). Using quadratic reciprocity we see that this means that $p \equiv \pm 1 \pmod{12}$. It follows that $2^n - 1$, being the product of primes that are $\pm 1 \pmod{12}$ is itself $\pm 1 \pmod{12}$, but if n is odd, and at least 3, then $2^n - 1$ is $7 \pmod{12}$. Contradiction.

The following proof by Bas Edixhoven takes a different route and puts the problem in perspective. Assume that $n > 1$ and n is odd. Let $N := 2^n - 1$. Then $N \equiv 1 \pmod{3}$, hence N is not divisible by 3. Hence 3 is an invertible element of the ring $\mathbb{Z}/N\mathbb{Z}$. We will show that the order of 3 in the multiplicative group $(\mathbb{Z}/N\mathbb{Z})^\times$ is even, thereby showing that $3^n \neq 1$ in $(\mathbb{Z}/N\mathbb{Z})^\times$ (because n is odd), hence that N does not divide $3^n - 1$. If N is a prime number (such primes are called Mersenne primes, there are at this moment (2017) about 49 examples, see <https://en.wikipedia.org/wiki/Mersenneprime>), then the reader can check that quadratic reciprocity implies that 3 is not a square in $\mathbb{Z}/N\mathbb{Z}$, and hence its order in $(\mathbb{Z}/N\mathbb{Z})^\times$ is even. The proof of quadratic reciprocity via the field $\mathbb{Q}(\zeta_N)$ then motivates what follows (without the assumption that N is prime).

To show that the order of 3 in the multiplicative group $(\mathbb{Z}/N\mathbb{Z})^\times$ is even, it suffices to give a group morphism $(\mathbb{Z}/N\mathbb{Z})^\times \rightarrow \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$ such that 3 is mapped to 1. We get such a morphism via an action of $(\mathbb{Z}/N\mathbb{Z})^\times$ on the ring $\mathbb{Z}[\zeta_N]$ (the subring of $\mathbb{C}$ generated by $\zeta_N := e^{2\pi i/N}$). Indeed, already Gauss showed that the polynomial $\Phi_N = \prod_{a \in (\mathbb{Z}/N\mathbb{Z})^\times} (X - \zeta_N^a)$ has coefficients in $\mathbb{Z}$ and is irreducible over $\mathbb{Z}$, hence $\mathbb{Z}[\zeta_N] = \mathbb{Z}[X]/(\Phi_N)$. Therefore, for each $a \in (\mathbb{Z}/N\mathbb{Z})^\times$ there is an automorphism σ_a of $\mathbb{Z}[\zeta_N]$ such that $\sigma_a(\zeta_N) = \zeta_N^a$, and the map $(\mathbb{Z}/N\mathbb{Z})^\times \rightarrow \text{Aut}(\mathbb{Z}[\zeta_N])$, $a \mapsto \sigma_a$ is a morphism of groups (it is an isomorphism but we do not use that). We claim that the quadratic ring $\mathbb{Z}[\sqrt{-N}]$ is a subring of $\mathbb{Z}[\zeta_N]$, and we will prove it below; for now, assume that this is so. The composition

$$(\mathbb{Z}/N\mathbb{Z})^\times \rightarrow \text{Aut}(\mathbb{Z}[\zeta_N]) \rightarrow \text{Aut}(\mathbb{Z}[\sqrt{-N}])$$

(with the second map sending σ to its restriction on $\mathbb{Z}[\sqrt{-N}]$) is then the desired morphism. Let us indeed check that 3 in $(\mathbb{Z}/N\mathbb{Z})^\times$ is sent to the non-trivial element of $\text{Aut}(\mathbb{Z}[\sqrt{-N}])$. For that, we consider the automorphism σ_3 on $\mathbb{Z}[\zeta_N]/3\mathbb{Z}[\zeta_N] = \mathbb{F}_3[X]/(\Phi_N)$. Let Frob_3 denote the map $z \mapsto z^3$ from $\mathbb{F}_3[X]/(\Phi_N)$ to itself. This is a ring morphism, the 3-Frobenius map. Let $\tilde{\zeta}_N$ denote the image of ζ_N in $\mathbb{Z}[\zeta_N]/3\mathbb{Z}[\zeta_N]$. As $\sigma_3(\tilde{\zeta}_N) = \tilde{\zeta}_N^3 = \text{Frob}_3(\tilde{\zeta}_N)$, σ_3 induces the map Frob_3 on $\mathbb{Z}[\zeta_N]/3\mathbb{Z}[\zeta_N]$. The inclusion $\mathbb{Z}[\sqrt{-N}] \subset \mathbb{Z}[\zeta_N]$ induces a morphism of rings $\mathbb{Z}[\sqrt{-N}]/3\mathbb{Z}[\sqrt{-N}] \rightarrow \mathbb{Z}[\zeta_N]/3\mathbb{Z}[\zeta_N]$. We note that $\mathbb{Z}[\sqrt{-N}]/3\mathbb{Z}[\sqrt{-N}] = \mathbb{F}_3[X]/(X^2 + N)$ and that $X^2 + N = X^2 + 1$ in $\mathbb{F}_3[X]$ is irreducible. Therefore $\mathbb{Z}[\sqrt{-N}]/3\mathbb{Z}[\sqrt{-N}]$ is a field and the morphism of rings

$$\mathbb{Z}[\sqrt{-N}]/3\mathbb{Z}[\sqrt{-N}] \rightarrow \mathbb{Z}[\zeta_N]/3\mathbb{Z}[\zeta_N]$$

is injective, and therefore the restriction of σ_3 to $\mathbb{Z}[\sqrt{-N}]$ induces the 3-Frobenius endomorphism on $\mathbb{Z}[\sqrt{-N}]/3\mathbb{Z}[\sqrt{-N}]$, which is non-trivial.

It remains to prove the claim that $\mathbb{Z}[\sqrt{-N}]$ is a subring of $\mathbb{Z}[\zeta_N]$. We write $N = N_1 N_2^2$, with N_1 square free. For every odd prime p we let $p^* := p$ if $p \equiv 1 \pmod{4}$ and $p^* := -p$ if $p \equiv -1 \pmod{4}$. Gauss already showed that for every odd prime p , there is an element $g_p \in \mathbb{Z}[\zeta_p]$ such that $g_p^2 = p^*$ (g_p is called a Gauss sum, and the formula is $g_p = \sum_a \varepsilon_p(a) \zeta_p^a$, where a ranges over $\mathbb{F}_p^\times$ and ε_p is the Legendre symbol). As $N_1 \equiv -1 \pmod{4}$, the number of primes p dividing N_1 with $p \equiv -1 \pmod{4}$ is odd. Hence $-N_1 = \prod_{p|N_1} p^* = \prod_{p|N_1} g_p^2$, and therefore $-N_1$ is a square in $\mathbb{Z}[\zeta_N]$, and therefore $-N$ as well.

Let us end with a few remarks. For initiated readers the proof is very natural and can be shortened much: the quadratic characters of $(\mathbb{Z}/N\mathbb{Z})^\times$ correspond to the quadratic subfields of $\mathbb{Q}(\zeta_N)$; the discriminant of $\mathbb{Q}(\sqrt{-N})$ is $-N_1$ and therefore (explicit class field theory for $\mathbb{Q}$, or call it Kronecker-Weber) $\mathbb{Q}(\sqrt{-N})$ is contained in $\mathbb{Q}(\zeta_{N_1})$. We made an effort to make the proof as short and self-contained as possible. We could have included a proof of $g_p^2 = p^*$ as well, but we also liked to include two references to Gauss. There is a way around the Gauss sum argument, if one uses from Galois theory that, for every odd prime p , $\mathbb{Q}(\zeta_p)$ has a unique quadratic subfield, whose discriminant is divisible only by p and therefore equal to $\mathbb{Q}(\sqrt{p^*})$.

I would like to finish by thanking René Pannekoek for the pleasure that thinking about his problem has given me.

