

Inhoud | Contents

Evenement | Event

- 139 **Workshop Lorentz Center: Dynamics on zero-dimensional spaces: new connections**

Olga Lukina

Maatschappij | Society

- 140 **Restzetels, hoe zit dat?**

Henk Don

Onderzoek | Research

- 150 **The e -value**

Rianne de Heide

Onderwijs | Education

- 152 **Bespreking examen vwo wiskunde B 2024: Misschien was het wel een heel goed wiskunde B-examen**

Wim Caspers

Evenement | Event

- 167 **ICME-15: Come and be counted!**

Mark Timmer, Kees Hoogland

Onderzoek | Research

- 170 **Quantum information theory and many-body physics**

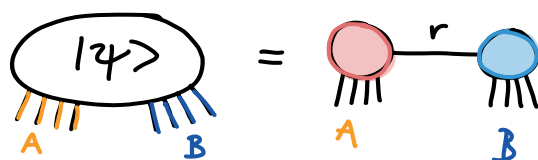
Freek Witteveen

Onderzoek | Research

- 184 **The Cohen–Lenstra principle**

Alex Bartel

170



Freek Witteveen, winnaar van de Stieltjesprijs 2021–2022, over zijn onderzoek in de kwantuminformatietheorie.

179



De Nationale Wiskunde Dagen beleefden dit jaar al weer de 30ste editie. Rob van Oord doet verslag.

- 131 **Redactioneel** *Fred Drissen*

- 132 **Agenda** *Edward Berengoltz*

- 134 **Nieuws** *Edward Berengoltz*

- 137 **Nieuws van Young KWG** *Young KWG Board*

Evenement | Event

- 155 **NMC 2024: A great moment to be part of Dutch mathematics**

Nicos Starreveld, Renee Hoekzema

Column | New Impulse

- 159 **Bijections, broccolis and the brain**

Serte Donderwinkel

Column | Better than blackboard

- 161 **The prior knowledge problem**

Nelly Litvak, Fulya Kula

Column | Wiskundigen in den vreemde

- 178 **Das gute Le(o)ben**

Niels Langeveld

Evenement | Event

- 179 **NWD: Maak wiskunde zichtbaar, dat is uitdagend en mooi!**

Rob van Oord

Column | Rianne takes her chance

- 183 **A plea for a new statistical paradigm**

Rianne de Heide

- 189 **Boekbesprekingen** *Hans Cuypers, Hans Sterk*

Colofon

Het Nieuw Archief voor Wiskunde is een uitgave van het Koninklijk Wiskundig Genootschap en verschijnt vier maal per jaar. Het tijdschrift richt zich op eenieder die zich beroepsmatig met wiskunde bezighoudt, als academisch of industrieel onderzoeker, student, leraar, journalist of beleidsmaker. Het stelt zich ten doel te berichten over ontwikkelingen in de wiskunde in het algemeen en in de Nederlandse wiskunde in het bijzonder.

ISSN 0028-9825

Adres

Nieuw Archief voor Wiskunde
Centrum Wiskunde & Informatica
Postbus 94079, 1090 GB Amsterdam
tel. 020-5924288
redactie@nieuwarchief.nl
www.nieuwarchief.nl

Hoofredactie

Raf Bocklandt (r.r.j.bocklandt@uva.nl)
Renee Hoekzema (r.s.hoekzema@vu.nl)

Eindredactie/Bladmanager

Fred Drissen (fred@nieuwarchief.nl)

Redactie

Francesca Arici (UL), Edward Berengoltz (UvA), Viktor Blåsö (UU), Hans Cuypers (TU/e), Robbert Fokkink (TUD), Teun Koetsier (VU), Nelly Litvak (TU/e), Diletta Martinelli (UvA), Nicolaos Starreveld (UvA), Hans Sterk (TU/e), Mark Timmer (UT)

Problemenrubriek (problems@nieuwarchief.nl)

Onno Berrevoets en Daan van Gent

Bureauredactie

Taeke Roukema

Illustraties

Ryu Tajiri

Vormgeving

Susanne Laws (omslag)
Kitty Molenaar (ontwerp)

Druk

Veldhuis Media

Advertenties

advertenties@nieuwarchief.nl

Koninklijk Wiskundig Genootschap

www.wiskgenoot.nl

Platform Wiskunde Nederland

www.platformwiskunde.nl

European Mathematical Society

www.euro-math-soc.eu

International Mathematical Union

www.mathunion.org

Koninklijk Wiskundig Genootschap

Het Koninklijk Wiskundig Genootschap (KWG) is een landelijke vereniging van beoefenaren van de wiskunde. In 1778 opgericht onder de zinspreuk 'Een onvermoeide arbeid komt alles te boven' is het 's werelds oudste nationale wiskundegenootschap. Leden ontvangen het Nieuw Archief voor Wiskunde als onderdeel van hun lidmaatschap.

Bestuur

Mathisca de Gunst (VU, voorzitter), Thomas Rot (VU, penningmeester), Charlene Kalle (UL, secretaris), Barry Koren (TU/e, vice-voorzitter), Danny Beckers (VU, inspecteur der Boekerij), Jop Briët (CWI), Rogier Bos (UU), Niels Kolenbrander (UL), Alef Sterk (RUG).

Secretariaat

Koninklijk Wiskundig Genootschap
Centrum Wiskunde & Informatica
Postbus 94079, 1090 GB Amsterdam
wiskgenoot@wiskgenoot.nl

Ledenadministratie KWG / Abonnementen

admin@wiskgenoot.nl, tel. 020-5924193
Wijzigingen of opzegging kunt u ook doorgeven door in te loggen op www.wiskgenoot.nl.

Contributie

Tarieven per jaar (bij betaling per automatische incasso krijgt u € 2,50 korting):

- gewoon lid: € 97,50
 - reciprociteitslid: € 77,50
 - gepensioneerden en werklozen: € 52,50
 - aio's, oio's, studenten: € 42,50 (max. 4 jaar)
 - lid zonder Nieuw Archief: € 57,50
- Studenten en pas afgestudeerden kunnen een jaar lang gratis lid worden.

Voor verzending van het Nieuw Archief naar het buitenland wordt een portotoeslag van € 10 in rekening gebracht.

Instituten in Nederland en buitenland kunnen zich abonneren op het Nieuw Archief voor Wiskunde voor € 105 (Nederland), € 115 (Europa) of € 117,50 (buiten Europa).

Members of foreign societies

Members of *SIAM*, the *Société Mathématique de France*, the *Gesellschaft für Angewandte Mathematik und Mechanik*, the *Deutsche Mathematiker-Vereinigung*, and of the *American, Australian, Belgian, Indian, London, Spanish, and South-African Mathematical Societies* living outside of the Netherlands pay € 77,50 instead of the full membership fee of € 97,50 a year. Conversely, these foreign societies, as well as the VvS+OR and the NVORWO, have reduced membership fees for KWG members. A postage charge of € 10 is added for members living abroad but in Europe, and a charge of € 12,50 for members living outside of Europe.

Exchange subscriptions

Koninklijk Wiskundig Genootschap Library
Centrum Wiskunde & Informatica
P.O. Box 94079, NL-1090 GB Amsterdam
KWG-exchange@cwil.nl

Informatie voor auteurs

Kopij

Kopij dient per e-mail te worden aangeboden aan kopij@nieuwarchief.nl. Voor meer informatie en auteursinstructies zie www.nieuwarchief.nl.

Volgende nummers

nummer	maand verschijnen	deadline kopij
25(3)	september 2024	verstrekken
25(4)	december 2024	01-08-2024
26(1)	maart 2025	01-11-2024
26(2)	juni 2025	01-02-2025

Instituuts- en bedrijfsleden

De publicaties van het KWG worden mede mogelijk gemaakt door de bijdragen van de volgende instituten en bedrijven.



Centrum Wiskunde & Informatica



Universiteit van Amsterdam



Vrije Universiteit Amsterdam



Rijksuniversiteit Groningen



Universiteit Leiden



Radboud Universiteit Nijmegen



Universiteit Utrecht



Technische Universiteit Delft



Technische Universiteit Eindhoven



Universiteit Twente



Elsevier



ORTEC

Op het omslag

Een stuk touw heeft twee uiteinden, behalve als het touw een lus vormt, dan heeft het geen uiteinden. In beide gevallen is het aantal uiteinden even. Deze simpele observatie heeft verstrekende gevolgen in de wiskunde en daarbuiten. Lees het artikel van Thomas Rot op pagina 73.

Losse eindjes

Dit semester doen we op de Universiteit van Amsterdam een klein experiment. Voor de honoursprogramma's van de bacheloropleidingen scheikunde en wiskunde bieden we een gemeenschappelijk vak aan met de titel *Knopentheorie en Moleculen*. In dit vak behandelen we eerst de wiskundige basis van knopen, zoals: wat is precies een wiskundige knoop? Wanneer zijn twee knopen equivalent, en hoe kan je twee knopen onderscheiden door middel van knopeninvarianten? Het wiskundige hoogtepunt is de constructie van het Jonespolynoom, maar daarna volgt er nog een heel gedeelte over toepassingen in de scheikunde, zoals geknoopte eiwitten en DNA-strengen, dat eindigt met een practicum waarin de studenten zelf zulke moleculen op de computer simuleren.

Bovendien hadden we het geluk dat we voor ons vak ook Erica Flapan konden strikken om twee gastlezingen te geven. Zij is niet alleen de hoofdredacteur van de *Notices of the AMS*, maar ook de auteur van het boek *Knots, Molecules, and the Universe: An Introduction to Topology* en een expert in het vakgebied van topologische scheikunde (of moet ik chemische topologie zeggen?). In een van haar lezingen had ze het onder meer over welke knopen er zoal in eiwitten kunnen opduiken en hoe die knopen erin komen.

Daar zit precies het wrijvingsvlak tussen de wiskunde en de scheikunde. Om het zich gemakkelijk te maken, beschouwen wiskundigen een knoop als een gesloten lus in de ruimte. In de

praktijk start je natuurlijk eerst met een open streng, waarin je een 'knoop' legt en dan pas verbind je de uiteinden aan elkaar. Pas helemaal op het einde wordt de 'knoop' een 'echte (wiskundige) knoop', maar als scheikundige of bioloog ben je wel geïnteresseerd in hoe die knoop tot stand kwam en vaak ook hoe je dat kan vermijden, want een geknoopt eiwit kan soms voor heel wat medische problemen zorgen. Wiskundig is dit een uitdaging, want net zoals je niet precies kan vastleggen wanneer een draad door het oog van een naald is, is het moeilijk te zeggen of een open streng al geknoopt is of niet.

In de topologie zijn de banaalste dingen het moeilijkst hard te maken, maar juist dat levert vaak interessante nieuwe inzichten op. Neem nu nog maar het feit dat een verzameling strengen altijd een even aantal eindpunten heeft, is niet zo triviaal als het lijkt. Het was zelfs het onderwerp van de lezing van Thomas Rot op het Wintersymposium van het KWG. In dit nummer brengt hij een uitgebreid verslag van deze lezing, waarin hij vertelt tot welke interessante wiskunde al die losse eindjes kunnen leiden. 

Raf Bocklandt, hoofdredacteur

Korteweg-de Vries Instituut, Universiteit van Amsterdam

Agenda

| Upcoming Events

juni 2024

3 juni 2024

□ The Quantum Leaps of Harry Buhrman

Afscheidssymposium voor theoretisch informaticus en medeoprichter van QuSoft Harry Buhrman.

plaats CWI, Amsterdam

info cwi.nl/en/events

5 juni 2024

□ Conferentie lerend netwerk rekenen mbo

Bijeenkomst over de ontwikkeling van het rekenonderwijs in het mbo.

plaats nog te bepalen

info elbd.sites.uu.nl

7 juni 2024

□ Collaborations with African Partners

Discussies met vijf geleerden uit verscheidene Afrikaanse landen, onder wie de Senegalese wiskundige Moustapha Fall, over wetenschappelijke samenwerking met Afrika.

plaats Universiteit van Amsterdam

info kdvi.uva.nl/news-and-events/events

13–14 juni 2024

□ Real-world Applications of Geometry and Algebra

Workshop over toepassingen van abstracte wiskunde in het bedrijfsleven.

plaats TU Eindhoven

info sites.google.com/view/applications-of-algebra

14 juni 2024

□ Begeleidersnetwerk rekenen-wiskunde primair onderwijs

Bijeenkomst voor vakdidactici in het primair onderwijs voor uitwisseling van ervaringen en expertise.

plaats 't Veerhuis, Nieuwegein

info elbd.sites.uu.nl

19 juni 2024

□ Oud-Nederlandse wiskunde

Vakbijeenkomst voor wiskundedocenten over 16de- en 17de-eeuwse Nederlandse meetkunde en algebrateksten, in het bijzonder van Claes Pietersz. van Deventer.

plaats Hogeschool van Amsterdam

info betapartners.nl/oud-nederlandse-wiskunde

20 juni 2024

□ BMS-ANed Spring Meeting

Seminarium over statistische en machine-learningmethoden in de besliskunde.

plaats Erasmus MC, Rotterdam

info vvsor.nl/biometrics/events

22 juni 2024

□ Junior Wiskunde Olympiade

Nationale wiskundewedstrijd voor de top 200 deelnemers aan de Kangoeroewedstrijd inclusief workshop door Vierkant voor Wiskunde.

plaats Vrije Universiteit, Amsterdam

info wiskundeolympiade.nl/junior

24–25 juni 2024

□ NDNS+-workshop Twente

Jaarlijkse workshop van het cluster Nonlinear Dynamics of Natural Systems.

plaats U-Park Hotel, Universiteit Twente

info utwente.nl/en/eemcs/sacs/ndns

juli 2024

1–5 juli 2024

□ Algebraic Structures in Gauge Theory and Geometry

Workshop over de samenwerking tussen wis- en natuurkunde in de context van ijktheorieën op 4-dimensionale variëteiten.

plaats Lorentz Center@Oort, Leiden

info lorentzcenter.nl

1–5 juli 2024

□ SPDEs Below Sea Level

Conferentie over recente ontwikkelingen omtrent stochastische partiële differentiaalvergelijkingen.

plaats TU Delft

info spde-delft2024.com

8–12 juli 2024

□ Multiple Scales: Theory and Applications

Workshop over (wiskundige) theorie en toepassing van dynamische systemen die op meerdere schalen optreden.

plaats Lorentz Center@Oort, Leiden

info lorentzcenter.nl

Suggesties voor deze agenda zijn welkom.

Redacteur: Edward Berengoltz

agenda@nieuwarchief.nl

augustus 2024

5–9 augustus 2024

Phase Retrieval in Mathematics and Applications

Workshop over wiskundige signaalverwerking en de problemen daaromtrent.

plaats Lorentz Center@Oort, Leiden

info lorentzcenter.nl

5–11 augustus 2024

31st International Mathematics Competition

Internationale wiskundewedstrijd in Bulgarije voor teams van wiskundestudenten.

plaats American Univ. in Bulgaria, Blagoëvgrad

info imc-math.org.uk

23–24 augustus 2024

Vakantiecursus 2024 Amsterdam

Jaarlijkse cursus voor wiskundeleraars in Nederland en Vlaanderen, georganiseerd door PWN en PWV, met dit jaar als thema groepentheorie en de Banach–Tarski-paradox.

plaats CWI, Amsterdam

info platformwiskunde.nl/vakantiecursus

26–30 augustus 2024

Random Media and Random Fields

Workshop over Random Media and Random Fields mede georganiseerd door Evgeny Verbitskiy en Frank den Hollander (UL).

plaats Lorentz Center@Oort, Leiden

info lorentzcenter.nl

september 2024

6–7 september 2024

Vakantiecursus 2024 Antwerpen

Jaarlijkse cursus voor wiskundeleraars in Nederland en Vlaanderen, georganiseerd door PWN en PWV, met dit jaar als thema groepentheorie en de Banach–Tarski-paradox.

plaats Campus Groenenborger, Antwerpen

info platformwiskunde.nl/vakantiecursus

13 september 2024

Finale Nationale Wiskunde Olympiade

De laatste ronde van de Nederlandse olympiade voor middelbare scholieren.

plaats TU Eindhoven

info wiskundeolympiade.nl

20 september 2024

33ste Wiskundetoernooi

Wedstrijd voor honderd teams van vier of vijf middelbare scholieren.

plaats Radboud Universiteit, Nijmegen

info ru.nl/wiskundetoernooi

22 september 2024

MathFest 2024 – feest van de wiskunde

Tweede editie van festival MathFest met allerlei wiskundige activiteiten voor jong en oud.

plaats Volkssterrenwacht Beisbroek, Brugge

info platformwiskunde.be/mathfest-2024

25–27 september 2024

48ste Woudschoten Conference Nederlands-Vlaamse SCS

Jaarlijkse conferentie van de Scientific Computing Society met als thema numerieke wiskunde in optica en levenswetenschappen.

plaats Hotel Woudschoten, Zeist

info wsc.project.cwi.nl/woudschoten-conferences

28 september 2024

Symposium XXX Werkgroep Geschiedenis

Dertigste editie van het symposium van de Werkgroep Geschiedenis van de Nederlandse Vereniging van Wiskundeleraars.

plaats Domstad, Utrecht

info nvww.nl/werkgroep-geschiedenis

oktober 2024

11 oktober 2024

Bekendmaking Olympiadewinnaars

Online bekendmaking winnaars Nationale Wiskunde Olympiade 2024.

plaats YouTube

info wiskundeolympiade.nl

november 2024

2 november 2024

Jaarvergadering NVvW

Jaarlijkse vergadering en studiedag van de Nederlandse Vereniging van Wiskundeleraars.

plaats Ichthus College, Veenendaal

info nvww.nl

8 november 2024

Prijsuitreiking Nationale Wiskunde Olympiade

De prijsuitreiking voor de winnaars van de Nederlandse wiskundeolympiade.

plaats TU Eindhoven

info wiskundeolympiade.nl

8 november 2024

Netwerkbijeenkomst Wiskunde A-lympiade & Wiskunde B-dag

Discussies over de genoemde evenementen en het voorbereiden en beoordelen van meedoen-de leerlingen.

plaats Universiteit Utrecht

info wiskundeintams.sites.uu.nl

11–14 november 2024

DDQC III en satellietworkshop

De derde editie van de Data-Driven Queueing Challenges-conferentie over uitdagingen in de wachtrijtheorie, met aansluitend nog een workshop.

plaats Eurandom, Eindhoven

info ddqc.io

22 november 2024

Wiskunde A-lympiade 2024

Voorronde van de jaarlijkse competitie voor leerlingen uit de bovenbouw havo/vwo met wiskunde A in hun pakket.

plaats eigen school

info wiskundeintams.sites.uu.nl

22 november 2024

Wiskunde B-dag 2024

Een competitie voor leerlingen uit de bovenbouw havo/vwo die wiskunde B in hun pakket hebben. Leerlingen werken in kleine teams de hele dag aan een wiskundig probleem.

plaats eigen school

info wiskundeintams.sites.uu.nl

Nieuws

| News

Deze rubriek is een kroniek van wiskundige activiteiten in Nederland. Toekomstige activiteiten worden aangekondigd en van voorbije activiteiten wordt verslag gedaan. Wilt u uw aankondiging of verslag in deze rubriek geplaatst zien? Stuur ons dan uw bijdrage, zo mogelijk met illustratie. De redactie behoudt zich het recht voor berichten te weigeren of in te korten.

Redacteur: Edward Berengoltz
 nieuws@nieuwarchief.nl

Abelprijs 2024 naar Franse stochasticus

De prestigieuze Abelprijs is op 21 mei door Harald V van Noorwegen uitgereikt aan Michel Talagrand van het CNRS in Parijs voor “zijn baanbrekende bijdrage aan waarschijnlijkheidsleer en functionaal-analyse met uitstekende toepassingen in de mathematische fysica en statistiek.” De Fransman is gepromoveerd in Parijs en heeft reeds meerdere prijzen op zijn naam staan. De Abelprijs bekroont een specifiek drieluik in Talagrand's werk: (1) suprema van verwachtingswaarden in stochastische processen; (2) schattingen in hoe verre verschillende toevalsvariabelen ‘elkaars willekeur compenseren’ en tot grotere voorspelbaarheid leiden; (3) zijn bewijs voor de formule van Parisi voor de vrije energie van zogeheten spinglas-materie in de vastestoffysica.

abelprize.no



Foto: Peter Badge / Typo1

Michel Talagrand

Rekenvaardigheid voortgezet onderwijs benedenmaats

De stand van 's lands wiskundeonderwijs en de tanende reken- en taalvaardigheden van jongeren zijn al geruime tijd onderwerp van jeremiades. De Onderwijsinspectie heeft recentelijk een naar eigen zeggen zorgwekkend rapport gepubliceerd hieromtrent. Het onthult dat circa driekwart van alle tweedeklassers in het vmbo het zogenaamde referentieniveau 1F niet had bereikt in schooljaar 2021–2022 — een niveau dat al in groep 6 zou moeten zijn behaald. Ook uit het havo en vwo klinken zulke berichten, zij het gepaard met minder schokkende percentages.

Een voorbeeld van zo'n 1F-opgave is de volgende. Van drie kinderen met exotische namen heeft eentje acht biljetten van €10, een ander drie van €20 en het derde één van €100. Wie heeft het meeste geld?

De Onderwijsinspectie heeft tevens en voor het eerst een steekproef onder 200 middelbare scholen verricht, waaruit is gebleken dat de verschillen in reken- en taalvaardigheid groot zijn. Sommige doen het goed, maar een derde heeft een ‘herstelopdracht’ gekregen voor het wiskundeonderwijs en bijna de helft voor taal. Matthijs van den Berg van de Onderwijsinspectie stipt als één mogelijke probleemfactor aan dat middelbare scholen ervan uitgaan dat leerlingen er binnenkomen met voldoende basisrekenvaardigheden. Daar dat niet zo is, vallen zij van de gaffel in de greep. Hij stelt onder andere meer wiskundelestijd voor en meer expliciet gebruikmaken van de geleerde wiskunde bij andere vakken als economie en natuurkunde. Tegenwoordig gebeurt dat hoegenaamd

nooit. Ook terdege motiveren hoe wiskunde nuttig is, zou kunnen helpen, zegt hij.

De inspecteur-generaal verlangt nu van de politiek een lange-termijnaanpak met navenante financiering. *De Telegraaf*

Onderwijsramp door realistisch rekenen

Dé oorzaak van de treurnis in het rekenonderwijs is het realistisch rekenen, is de hoofdboodschap van Sezgin Cihangir, directeur van het Nederlands Mathematisch Instituut, in een interview met *HP/De Tijd*. Hij reageert ‘moedeloos’ op het rapport van de Onderwijsinspectie (zie boven) en concludeert geschrokken dat het onderwijs een ‘steeds verder zinkend schip’ is. “Kinderen op de basisschool moeten weer degelijk oefenen bij de rekenles in plaats van een lesmethode gebruiken die begint met veel plaatjes, raadseltjes en context.” Ook in *De Telegraaf* noemt hij deze methode, die de wiskundige essentie verhuult maar vanaf de basisschool schering en inslag is, stevast als boosdoener.

Nu bestonden zulke verhaaltjessommen — rekenopgaven in dagelijkslevencontext — zelfs al onder de goede Willem I, maar toentertijd draaiden ze om het rekenen met allerlei grootheden en maten zonder afleidende plaatjes of teksten.

Enter realistisch rekenen. Dit is ontstaan in de jaren zeventig en erop gericht om kinderen als individu de stof te laten ontdekken. ‘Wierookonderwijs’ noemt Cihangir het, zinspelend op de hippie-tijd. Het behelst een veelvuldigheid aan talige verhaaltjessommen waar kinderen in verdwalen en waarvoor ze niet één juiste oplossingsstrategie (zoals staartdelen) leren. Dat er geen andere lesmethode, hoe wetenschappelijk onderbouwd ook, op de lerarenopleiding wordt gedoceerd, en dus op basisscholen gebruikt, bestempelt hij als “de succesvolste framing van de afgelopen twintig jaar”.

Het NMI verzorgt een cursus basale rekenvaardigheden genaamd *Foutloos Rekenen*, waar veelal kinderen uit lagere sociale klassen aan meedoen. Juist zulke, vaak allochtone, gezinnen hechten veel waarde aan goed onderwijs opdat hun voor dubbeltjes geboren kinderen een toekomst als kwartjes in het verschiet ligt. Wel hangt er een prijskaartje aan de cursus, die daarom niet voor iedereen weggelegd is. Goede reken- en taalvaardigheden zijn hiervoor cruciaal, meent Cihangir. Onderzoeksresultaten schragen telkens zijn uitspraak dat “dertig procent van havo- en vwo’ers [niet kan] rekenen. Dat is echt van de zotte.” Dit leidt tot devaluatie van diploma’s langs de gehele linie, met alle gevolgen van dien, aldus Cihangir.

Ook heeft het NMI met de Radboud Universiteit de lesmethode *Wetenswaardig* ontwikkeld (niet alleen voor rekenen) met hetzelfde uitgangspunt als de cursus: eenduidige en directe instructie zonder ‘wolligheden’. Cihangirs hoop is dat het afschaffen van realistisch rekenen het tij kan keren. *HP/De Tijd*

Kees Oosterlee benoemd tot SIAM-fellow

De Society for Industrial and Applied Mathematics heeft dit jaar onder anderen Kees Oosterlee, hoogleraar kwantitatieve methoden in financiële wiskunde in Utrecht, tot fellow benoemd. Hij wordt onderscheiden voor zijn “uitstekende bijdragen aan de meerroostermethode en de financiële wiskunde, en uitzonderlijke dienstbaarheid jegens deze onderzoeksgemeenschappen.”

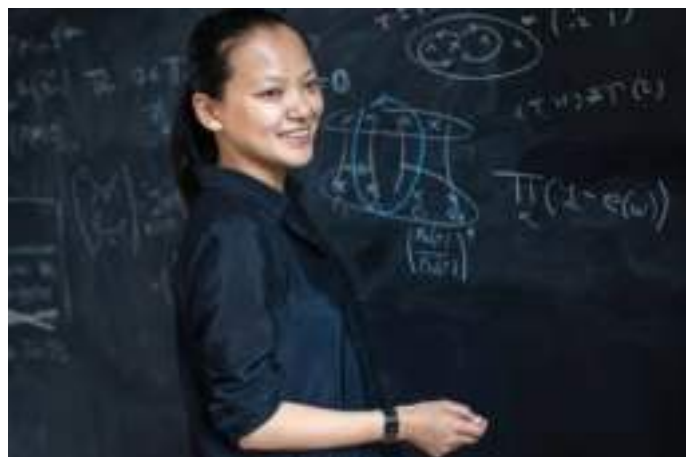
Na zijn promotieonderzoek in Delft heeft Oosterlee zijn habilitatie in Keulen volbracht en later bij onder andere de TU Delft en het CWI in Amsterdam gewerkt. *sinews.siam.org*

Vici-beurs van NWO voor Miranda Cheng

Een van de Vici-beurzen voor 2023 is toegekend aan wis- en theoretisch natuurkundige Miranda Cheng. Zij staat bekend om haar werk aan het maneschijnvermoeden, (vals) modulaire vormen, machine learning en de rol van K3-oppervlakken in de snaartheorie.

Haar Vici-premie is bestemd voor onderzoek naar topologische invarianten en het “creëren [van] KI-gestuurde rekentools voor systemen met niet-triviale topologie, die impact zullen hebben op vakgebieden van wiskunde tot technologie”. Cheng, oorspronkelijk afkomstig van Taiwan, heeft eerder al een ERC Starting Grant en een Vidi-beurs ontvangen. Ook was ze in 2020 op televisie te zien bij het VPRO-programma *Grote Vragen*.

Ze is bij Gerard ’t Hooft en Erik Verlinde in de leer geweest en na postdocs aan Harvard en het CNRS in Parijs bij de Universiteit van Amsterdam gekomen, waar ze bij zowel de wis- als natuurkunde-afdelingen toeft. Ze werkt thans ook bij de Academia Sinica op Taiwan. *nwo.nl*



Miranda Cheng

Lesuitval wiskunde op voortgezet onderwijs zet zich voort

De rekenles raakt van de regen in de drup: belangenorganisatie Ouders & Onderwijs constateert dat middelbare scholen te kampen hebben met schielijk groeiende lesuitval, meldt directrice Lobke Vlaming aan *De Telegraaf*. Het vinden van bekwame vervangers bij ziekte lijkt steeds moeilijker te worden, zodat ongeschikte of dure invallers (of überhaupt niemand) de wiskundelessen overnemen. In een enquête, begin maart 2024 afgenomen bij zo’n 470 leraren, beaamt 10% van de bevroegden dat op de betreffende school minstens drie maanden géén wiskundeles is gegeven. Dit is een stijging van bijna de helft ten opzichte van 2023. (Van het aantal scholen, de verdeling mavo/havo/vwo noch de demografie van de leerlingen wordt melding gedaan.)

Jelmer Evers, vicevoorzitter van de Algemene Onderwijsbond, stelt dat het toenemende lerarentekort zich allengs in een crisis ontaardt. Vooral bij Nederlands en wiskunde ziet hij een forse

leegloop op de lerarenopleiding. Uit onderzoek van de Algemene Rekenkamer blijkt bovendien dat tijdelijke invallers een school dikwijls veel meer kosten dan docenten in vaste dienst, bericht het *FD*. Het demissionaire kabinet heeft anderhalf miljard euro uitgetrokken tegen het docententekort en werkt aan een wetsvoorstel om externe inhuur te beperken tot 5% van het schoolbudget. Een kwart van de scholen zit daar al (soms ver) boven. *De Telegraaf en het FD*

Prestigieuze Europese subsidie voor Peter Grünwald

Peter Grünwald, senioronderzoeker machine learning aan het CWI en hoogleraar statistisch leren in Leiden, heeft de ERC Advanced Grant van € 2,5 miljoen gekregen voor onderzoek naar een nieuwe theorie in de statistiek, gebaseerd op de zogeheten e-waarde om significantie van resultaten te staven. Deze e-waarde is een verbetering ten opzichte van oudere methoden in dat zij beter kan worden toegepast als de randvoorwaarden van het onderzoek veranderen en bovendien gevoeliger is voor fouten.

Grünwalds met de beurs bekroonde radicale voorstel “zal statistiek zowel veiliger als flexibeler maken — waardoor we betrouwbaardere conclusies kunnen trekken op basis van minder gegevens”. Hij is in 1998 gepromoveerd bij het ILLC in Amsterdam en heeft eerder al Vidi-, Vici- en TOP-1-beurzen gekregen, als ook de begeerde Van Dantzigprijs voor statistiek en besliskunde. *cwi.nl*

Willem R. van Zwet Award 2024 uitgereikt door VVSOR

De Nederlandse Vereniging voor Statistiek en Operations Research heeft op 21 maart de Willem R. van Zwet Award voor beste proefschrift in de statistiek en besliskunde uitgereikt aan Richard Post. Deze is bij Edwin van den Heuvel en Hein Putter gepromoveerd aan de TU Eindhoven op de dissertatie *Causal Effect Heterogeneity: statistical formalization and analysis of the individual causal effect*. De jury is onder de indruk van zijn aanpak van een controversieel onderwerp binnen de causaliteitsleer waarbij zowel theorie als toepassing aan bod zijn gekomen.

De prijs is vernoemd naar de gevierde statisticus Willem Rutger van Zwet (1934–2020). Wouter Kool van de Universiteit van Amsterdam heeft een eervolle vermelding gekregen. *vvsor.nl*

Algebraïsche gigant Jacques Dixmier 100 jaar

De Franse wiskundige Jacques Dixmier is op 24 mei 100 jaar oud geworden. Hij is vooral bekend vanwege zijn resultaten in de theorie van Lie- en operatoralgebra's, waarin boeken als *Algèbres enveloppantes* en *Les algèbres d'opérateurs dans l'espace hilbertien (algèbres de von Neumann)* standaardlectuur zijn. Bovendien zijn werk aan onder andere C^* - en Von Neumannalgebra's heeft hij mee geschreven aan meerdere delen van Bourbaki's *Éléments de mathématique*. Tevens is hij het oudste nog levende Bourbaki-lid, voor welk genootschap hij in 1949 werd gevraagd door Samuel en Serre.

Na zijn schooltijd in Versailles is hij in 1942 aan de École normale supérieure gaan studeren. Later in de oorlog werd hij (onbewapend) lid van het verzet en hij is in 1944 kort gearresteerd en zelfs beschoten geweest door de Gestapo. Aan de Université de

Paris is hij in twee jaar gepromoveerd bij Gaston Julia, die evenwel collaboreerde met de nazi's, zodat het contact wat stroeffjes liep.

Dixmier heeft grote bijdragen geleverd aan representatietheorie en operatoralgebra's, geïnspireerd door Julia's lezingen over Hilbertruimten. Hij heeft ook de naam ‘Von Neumannalgebra’ geïntroduceerd naar Dieudonné's suggestie.

Hij heeft zelf twintig promovendi begeleid, onder wie Alain Connes. Na zijn pensioen in 1984 en nog vijf jaar bij het IHES is de Fransman weinig actief geweest qua onderzoek. Wel heeft hij sciencefictionboeken geschreven, ondanks het feit dat hij nooit een computer heeft gehad. Dixmier heeft de Ampère- en Leroy P. Steele-prijzen gewonnen, de Émile Picardmedaille voor zijn gehele oeuvre, en ook de Prix de l'État.



Jacques Dixmier

Koninklijk Wiskundig Genootschap

□ NMC

Op 2 en 3 april vond in Lunteren een zeergeslaagde NMCplaats, met onder andere de Beeger-lezing door Andrew Sutherland (MIT) en de Indagationes Mathematicae Best Paper Prize-lezing door Shaked Koplewitz (Citadel). Verder was er voor het eerst een sessie van Young KWG (over AI), en werd de Stieltjes-prijs toegekend aan Lucas Slot (CWI en Tilburg University).

□ KWG-bestuur

Op de Algemene Ledenvergadering op 2 april is Eric Cator (RU) benoemd tot de nieuwe vice-voorzitter (per september 2024), Thomas Rot (VU) is benoemd tot de nieuwe penningmeester en Charlene Kalle (UL) tot de nieuwe secretaris. Niels Kolenbrander (UL) krijgt de drie KWG-tijdschriften in zijn portefeuille.

□ Teun Koetsier benoemd tot erelid KWG

Op de Algemene Ledenvergadering op 2 april is Teun Koetsier benoemd tot erelid van het KWG. Teun was van 2006–2023 voorzitter van Stichting Epsilon en van 2002–2023 lid (en later voorzitter) van de Commissie voor Persoonlijke Archieven van Wiskundigen. Daarnaast is hij sinds 1988 een gewaardeerd redactielid van het *Nieuw Archief voor Wiskunde*.

Recent verschenen:

□ **Epsilon Uitgaven** (www.epsilon-uitgaven.nl)

Zebra 71. *Origami en Wiskunde*, Jacoliene van Wijk, Amy Besamusca, € 10.

Thomas O. Rot

Department of Mathematics
VU Amsterdam
t.o.rot@vu.nl

Research

Ropes have an even number of ends

On 13-01-2024 the annual KWG Wintersymposium was held in the Academieggebouw in Utrecht. The symposium had the theme ‘inzichtelijk abstract’. Thomas Rot gave a lecture on his favourite theorem from topology. This article is a written account of this lecture. Audience comprised mostly of high school teachers and that is also the target audience of this article.

My favourite theorem

I appreciate simple mathematical ideas which have far-reaching consequences. My favourite theorem in mathematics is such an idea.

Theorem 1. *Ropes have an even number of ends.*

Here and below we assume that ropes have finite length. The proof of this theorem shows that a single rope is either a circle or an interval, which both have an even number of ends. It follows that a finite number of points is the boundary of some

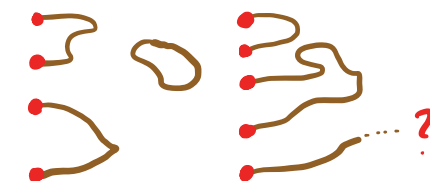


Figure 1 An even number of points is the boundary of some ropes, while an odd number of points is not the boundary of some ropes.

ropes if and only if the number of points is even, see Figure 1. The formal statement is that the boundary of a compact (finite length) one-dimensional manifold (rope) has an even number of boundary points (ends).

To explain why I love this theorem, I will discuss some of its consequences which at first glance do not seem to have to do anything with ropes. We will see that the theorem can be used to escape a maze, to understand how often subspaces intersect, to explain why the Klein bottle cannot be made to fit into $\mathbb{R}^3$ without self-intersections and why each closed planar curve contains an inscribed rectangle. I will end with a brief outlook on cobordism theory which is the natural home of Theorem 1.

Escaping a maze

How can you determine quickly if you can escape a maze such as in Figure 2? There is a trick with which you can answer this question very quickly: Draw any curve from the starting point somewhere in the maze to the outside (any *generic* curve to be precise, see Figure 3). Count the number of

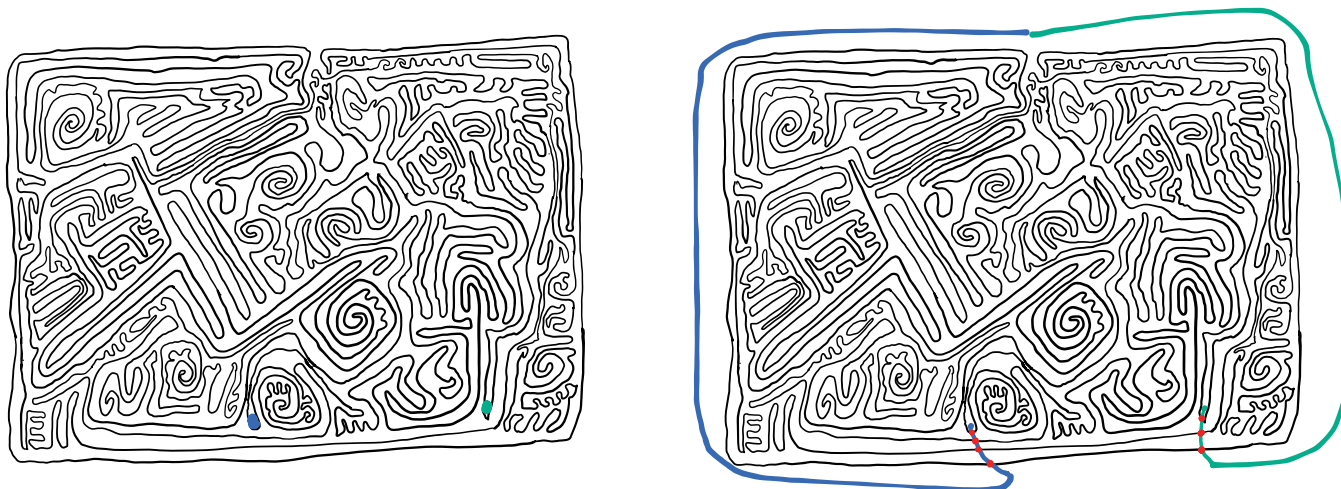


Figure 2 How to quickly determine if you can escape a maze as on the left? Draw any curve to the outside and determine if the number of intersections with the maze is even or odd. If it is even, you can escape, if it is odd you can't. In the maze above you can escape from the blue point, as the number of intersections is four (even), but you cannot escape from the turquoise point, as the number of intersections is three (odd).

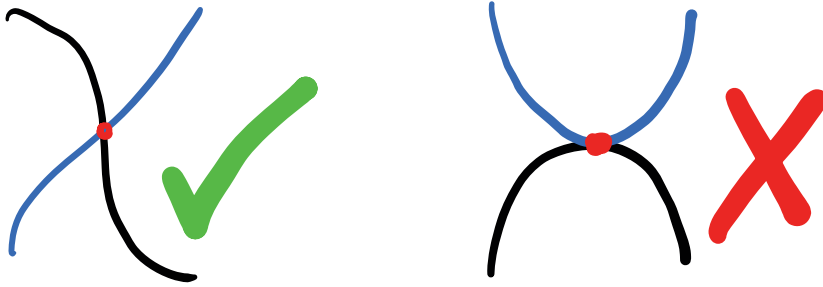


Figure 3 Counting intersections should only be done when the curves meet transversely. On the left a transverse intersection is depicted, while on the right a non-transverse intersection is depicted: the two curves are tangent to each other. A somewhat deep fact in differential topology is that generically curves only have transverse intersections. By an arbitrary small perturbation of the curve all intersections will be transverse, and transversality is preserved under small enough perturbations.

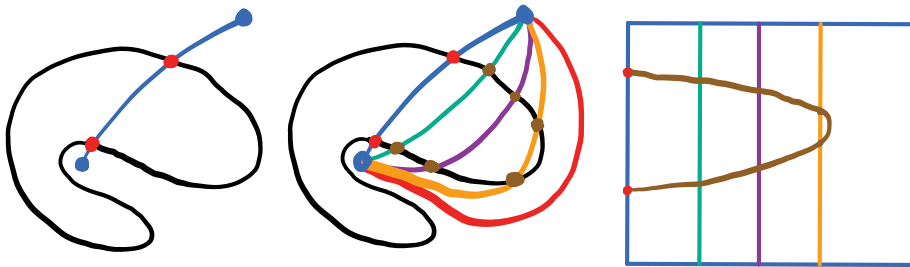


Figure 4 Can we escape this very simple maze on the left? Yes: the curve in blue intersects the maze twice, which is even. Why is this number even? Imagine deforming the blue curve to the red curve as in the middle picture. The red curve is an actual escape route. We can keep track of the intersections with the maze during this deformation. This is depicted on the right: In brown the intersections of all the curves with the maze are drawn. These are ropes, and the ends of these ropes are the intersections of the original curve with the maze. This shows that the intersection is even if we can escape. A slightly more complicated argument shows that this condition is also sufficient. To avoid a flood of complaints I need to be precise: we assume that the maze is a connected closed simple curve.

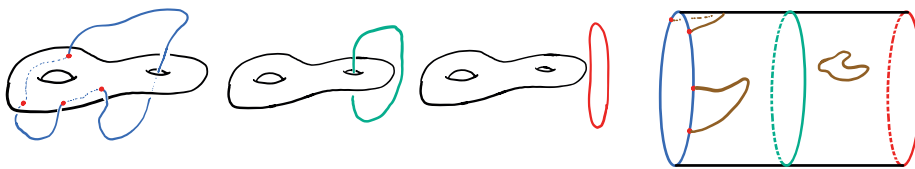


Figure 5 The number of intersections of a closed surface and a closed curve in three dimensions is even. The proof is analogous of the proof described in Figure 4: deform the curve to lie outside the surface and keep track where the family of curves intersect the surface. This traces out ropes, whose ends are the original intersections, which must therefore be even. Note that one of the ropes is a closed curve itself, which did not occur in Figure 4.

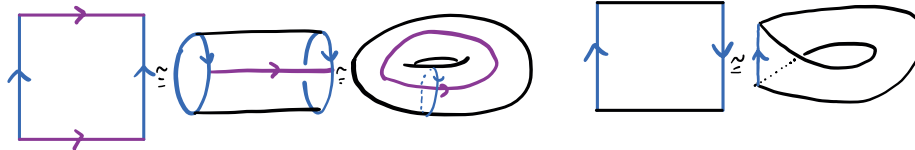


Figure 6 Gluing edges of a polygon pairwise is a way to construct surfaces. On the left the torus is constructed, which is a closed surface (without boundary). The Möbius strip, does have a boundary. It is also not orientable.

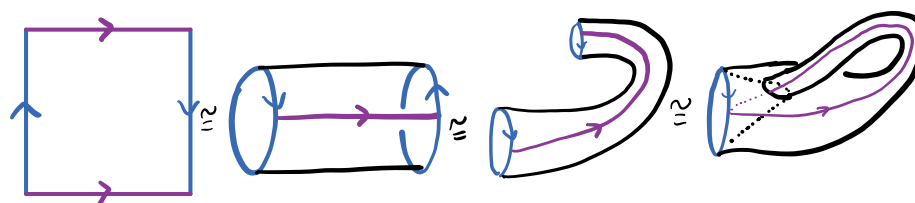


Figure 7 Identifying the square as on the left produces the Klein bottle. The Klein bottle is a closed non-orientable surface and cannot be put inside three dimensions. The Klein bottle contains a Möbius strip: The complement of a small neighborhood of the purple curve is a Möbius strip

intersections of this curve with the maze. If the number of intersections is even, you can escape, but if the number of intersections is odd, you cannot escape. Why this works is explained in Figure 4.

What we have shown is that the parity of the number of intersections between a curve with a closed curve, is constant under deformations which keep the endpoint of the curve fixed. A similar argument also shows that any two closed curves in the plane intersect each other in an even number of points. In turn this statement can be generalized to higher dimensions. Here is the statement in three dimensions.

Theorem 2. *A closed curve and a closed surface intersect in an even number of points in three dimensions.*

A surface is called closed if it does not have a boundary and if it is compact. Compactness intuitively means that the surface does not extend out to infinity. In Figure 5 a proof of Theorem 2 is sketched.

Non-orientable surfaces

Compact surfaces can be constructed by a gluing process: Take a finite number of polygons, and glue the edges pairwise. If each edge is glued to another one a closed surface is constructed, if not all edges are glued a compact surface with boundary is made. An interesting example of a compact surface with boundary is the Möbius strip, see Figure 6.

The Möbius strip is not orientable and has a boundary. The Klein bottle is an example of a *closed* non-orientable surface, see Figure 7. Depicting the Klein bottle is harder than depicting the Möbius strip. It is not possible to fit, or *embed*, the Klein bottle in three dimensions without self-intersections. Let me state this as a theorem.

Theorem 3. *The Klein bottle cannot be embedded in $\mathbb{R}^3$.*

We will follow the wonderful argument of Samelson [5] to prove this. Imagine, with a contradiction in mind, that the Klein Bottle *does* embed in three dimensions. Then in Figure 8 it is shown that if the Klein bottle would embed, that there would also have to exist a closed curve which intersects the Klein bottle *once*. But Theorem 2 tells us that this is impossible. Hence the Klein bottle does not embed in $\mathbb{R}^3$. Note

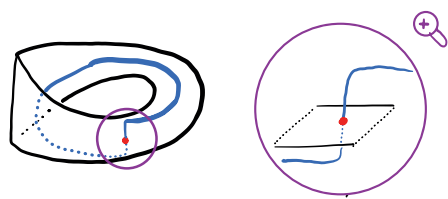


Figure 8 In a neighborhood of a Möbius strip in three dimensions we can find a loop that intersects the Möbius strip once. This does not contradict Theorem 2 as the Möbius strip has a boundary and is therefore not closed. The Klein bottle contains a Möbius strip. If the Klein bottle would embed in three dimensions, we can construct a blue curve following the Möbius strip contained in the embedded Klein bottle. The blue curve can be made not to intersect the Klein bottle in any other point, as it can be made arbitrary close to the Möbius strip. Thus the number of intersections of the Klein bottle and the curve is odd, which contradicts Theorem 2. The Klein bottle therefore cannot be embedded in three dimensions.

that the existence of the curve that intersects the Möbius strip once does not contradict Theorem 2 as the Möbius strip has a boundary and is therefore not closed.

Any surface that is non-orientable contains a Möbius strip. The argument just given proves the following theorem.

Theorem 4. *A closed non-orientable surface does not embed in $\mathbb{R}^3$.*

Even though it is possible to embed the Möbius strip in three dimensions, we cannot prescribe the behavior of the boundary of the Möbius strip completely at will. For example we have the following corollary, which we will need later.

Corollary 1. *The Möbius strip cannot be embedded in three dimensions in such a way that the boundary of the Möbius strip is contained in the plane $\{(x, y, z) \mid z = 0\}$ and the interior of the Möbius strip is contained in the upper half space $\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid z > 0\}$.*

To see that this corollary follows from Theorem 4 one imagines capping off the curve with a disc in the lower half-space $\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid z < 0\}$ in a smooth manner. This produces an embedded non-orientable closed surface in three dimensions which is not possible by Theorem 4. Thus the Möbius strip cannot be embedded in this way.

A surprising Möbius strip

A critique topologists often have to answer to is that they play with toys that they invent themselves. “It is nice that non-orientable surfaces exist, but as they cannot

be found in three dimensions, what is the point of studying them?” Here I would like to argue that the Möbius strip is not only a mathematical curiosity for the sake of it, but naturally occurs in the world around us. Imagine a particle constrained on a closed curve in the plane. Mathematically we can parametrize this particle by a circle, and a particle is then just a point on the circle. What about two particles? If we can distinguish the particles from each other the particles can be parametrized by the product of two circles, which is a torus, see Figure 9. But if the particles are indistinguishable this is not correct, see Figure 10. We need to make identifications on the torus, as multiple points on the torus correspond to the same configuration if we cannot distinguish the particles. If we identify these points we obtain a Möbius strip! In Figure 11 a graphical proof of this fact is shown. The Möbius strip occurs naturally as the configuration space of pairs of

unordered points on a curve! We will now use this fact in an unexpected way.

Pegs in curves

We now turn to discuss the proof, due to Herbert Vaughan, of a curious fact in plane geometry. The Nieuw Archief has already paid attention to the history of this result: Robbert Fokkink gave a beautiful historical account [2]. I do not have anything to add to the historical account, but I do want to give a few more details on the proof as it fits nicely with the mathematics we have discussed so far.

A priori this theorem does not have anything to do with ropes and non-orientable surfaces. The statement that we will prove is the following:

Theorem 5. *Every smooth simple closed curve in the plane contains four distinct vertices that form a non-degenerate rectangle.*

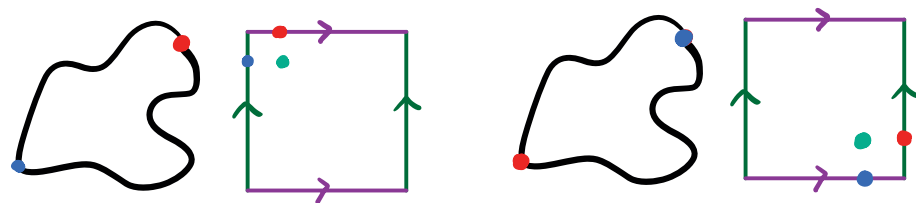


Figure 9 The space of ordered pairs of points on the curve is a torus. The x and y coordinates of a point on the square in the picture each represent a point on the curve. The torus is obtained by gluing the square as prescribed. In the picture the configuration of the points on the left is different from the configuration of the points on the right as we can distinguish which point is red, and which point is blue, see also Figure 10.

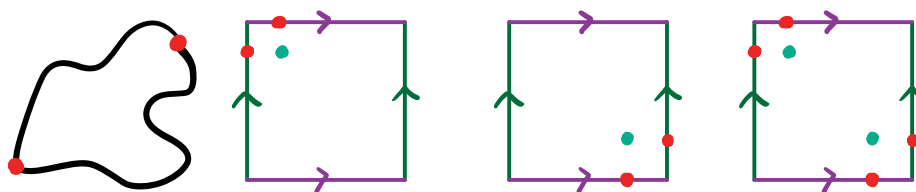


Figure 10 The space of unordered pairs of points on the curve can be visualized similar to the ordered pairs of points on the curve as in Figure 9. However, the two configurations in the middle figures correspond to the same pair of unordered points on the curve. We can therefore think of the space of unordered pairs of points on the curve as the picture on the right, where points are identified if they are mirrored on the diagonal.

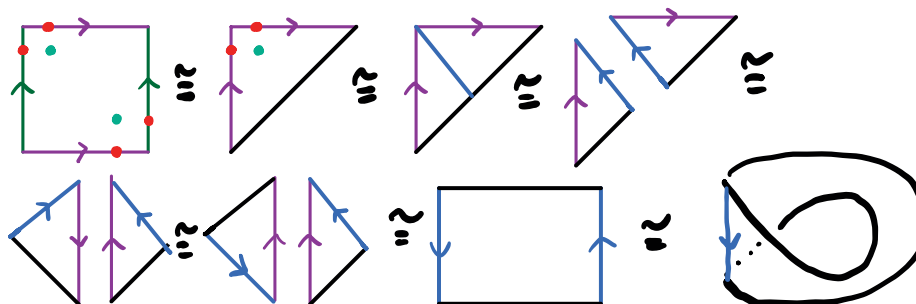


Figure 11 The space of unordered pairs of points on the circle is the Möbius strip. By Figure 10 we can see this space as the space of two points on the torus ‘mirrored’ on the diagonal. To parametrize these points we only need to keep track of the point in the upper triangle. We do need to keep in mind that the green line now will be identified with the purple line. Cutting the obtained surface along the blue line, and gluing it back reveals that this space was the Möbius strip in disguise.

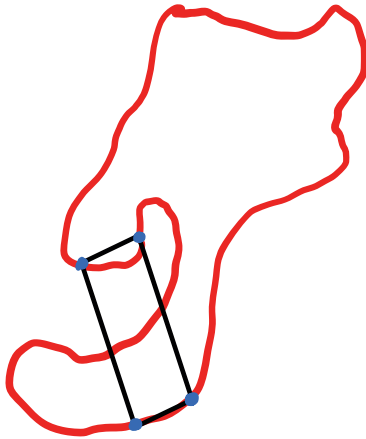


Figure 12 Greene and Lobb proved that every smooth simple closed curve in the plane contains uncountably many rectangles whose vertices lie on the given curve. We prove the existence of only one.

See Figure 12 for an example of such a rectangle. We call these rectangles *inscribed rectangles*. Recently there is renewed interest in this problem as Greene and Lobb [3] proved a much stronger result:

Theorem 6. *Every smooth simple closed curve contains uncountably many inscribed rectangles, at least one for each aspect ratio of the long and short side of the rectangle.*

The proof of this theorem is outside the scope of this article, but see [2] for a sketch of the proof (I should remark about a small typo in the end of [2]). For the contradiction Greene and Lobb construct a *Lagrangian* Klein bottle, not a symplectic one.)

We will prove Theorem 5 now. The only ingredient missing is a fact from Euclidean Geometry. To determine if four points form a rectangle, it suffices to show that pairs of these points have a common midpoint and the distance from all points to the midpoint is the same, see Figure 13. Let O be the space of pairs of points on the closed curve. Thus $(x, y) \in O$ means that $x \in \mathbb{R}^2$,

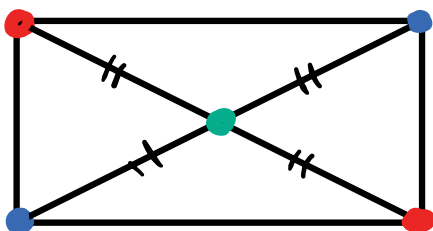


Figure 13 Two pairs of points (the red and blue points) form a rectangle if and only if the midpoint of the red points equals the midpoint of the blue points and the distance to the common midpoint (turquoise) is the same. This is an exercise in Euclidean geometry.

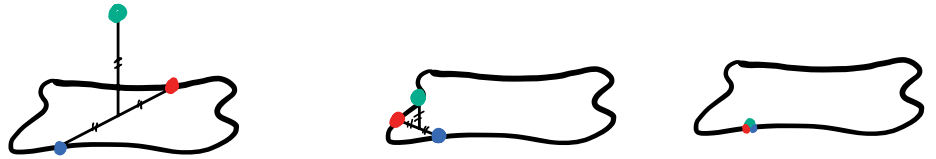


Figure 14 Some values of the function $f : O \rightarrow \mathbb{R}^3$. The red and blue point are mapped to the point above the midpoint, with height the distance to the midpoint. Note that this function is invariant under swapping the red and blue point, and if the red and blue point get closer to each other, the height goes to zero.

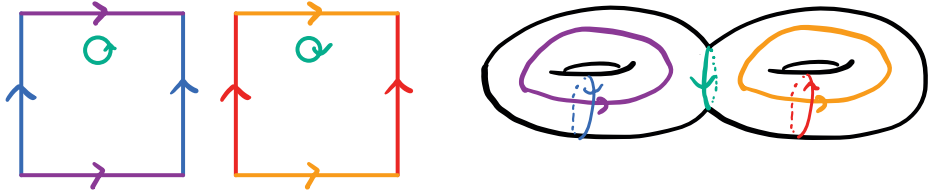


Figure 15 The connected sum of two tori is a genus-two surface. All orientable surfaces are either the two-sphere, the torus or connected sums of tori. All non-orientable surfaces are either the real projective plane $\mathbb{RP}^2$, or connected sums of those.

$y \in \mathbb{R}^2$ and that x, y both lie on the curve. This space O is topologically the same as a torus by the discussion in the previous section. Define the function $f : O \rightarrow \mathbb{R}^3$ by

$$f(x, y) = \left(\frac{1}{2}(x + y), \frac{1}{2}\|x - y\| \right).$$

The expression $\frac{1}{2}(x + y) \in \mathbb{R}^2$ is the midpoint between the two points x and y on the curve, and $\frac{1}{2}\|x - y\|$ is the distance from the points to the midpoint. In Figure 14 some values of the function are depicted. A nice movie about this function can be found on the channel 3Blue1Brown of Grant Sanderson [6]. The function has three important properties: (i) It satisfies $f(x, y) = f(y, x)$, so we can view $f : U \rightarrow \mathbb{R}$ as a function on the space U of *unordered* points on the curve. Recall that this space is topologically a Möbius strip! (ii) The height of the point $f(x, y)$ is always ≥ 0 with equality if and only if $x = y$. (iii) If $f(x, y) = f(x', y')$ then the points x, x', y, y' lie on a rectangle, see Figure 13

Summarizing: The map f maps the Möbius strip U to $\mathbb{R}^3$, where the boundary of the strip is mapped to the curve in the $x - y$ plane and the interior of the Möbius strip has positive z coordinate. If there is *no* inscribed rectangle on the curve, the map f is injective and gives an embedding of the Möbius strip in a way that contradicts Corollary 1. As this contradicts the corollary, the hypothesis that f is injective is false. Thus an inscribed rectangle must exist!

The cobordism ring and a theorem of Thom

I would like to end by putting my favourite Theorem 1 in a broader mathematical

context. Curves and surfaces are examples of smooth manifolds: spaces that locally resemble Euclidean space $\mathbb{R}^n$, and which have a notion of differentiability. We also have manifolds with boundary, which locally resemble $\mathbb{R}^n \times [0, \infty)$. Closed manifolds, manifolds which are compact and do not have a boundary, are of particular interest to topologists.

Classifying closed manifolds up to diffeomorphism, the natural notion of sameness of manifolds, is very hard. In low dimensions we can make progress: A closed zero-dimensional manifold is a finite number of points, and two zero-dimensional manifolds are diffeomorphic if and only if they have the same number of points. A connected closed one-dimensional manifold is diffeomorphic to a circle, and one-dimensional closed manifolds are classified by the number of connected components.

Connected two-dimensional surfaces come in two families. The first family are the orientable surfaces. These are the two dimensional sphere, the torus, and the genus- g surfaces. The connected sum of two surfaces is obtained by removing two small discs and gluing the resulting surfaces along the new boundaries together. The genus- g surfaces can be obtained by repeatedly taking a connected sum with a torus, see Figure 15. There is also a family of non-orientable surfaces. These are constructed by connected sums of the real projective plane $\mathbb{RP}^2$. The real projective plane is obtained by gluing a square as in Figure 7 but flipping the orientation of one of the purple edges. The Klein bottle is the connected sum of $\mathbb{RP}^2$ with

itself. All non-orientable surfaces can be constructed by taking further connected sums with $\mathbb{RP}^2$.

In three dimensions one also can make progress in the classification, but this is much harder. After three, the music stops. The diversity of four-dimensional manifolds is staggeringly vast. It is so big that one can show that in a precise sense *no* reasonable classification of closed four-dimensional manifolds is possible.

One way to proceed with a classification of manifolds is to take a coarser notion of sameness. If more things are declared the same, fewer distinct classes remain, and it might be possible to classify them. For example we can classify manifolds by their dimension, but this relation is too coarse to be really useful in the study of manifolds. Thom [7] surprised the mathematical community in the fifties by classifying closed manifolds in every dimension up to *cobordism*. Two closed manifolds M, N are cobordant if there exists a compact manifold with boundary W such that the boundary ∂W is the disjoint union of M and N , see Figure 16. Diffeomorphic manifolds are cobordant, so this is indeed a coarser notion of sameness compared to diffeomorphism. Using our classification of low-dimensional manifolds, we also get a classification of manifolds up to cobordism in low dimensions.

The following is a reformulation of Theorem 1 from the beginning of this article.

Theorem 7. *Every closed zero-dimensional manifold is either cobordant with the empty manifold, or with the manifold with one point. There are two cobordism classes of zero-dimensional manifolds: the class of ‘even number of points’ and the class of ‘odd number of points’.*

Dimension one is boring. Every circle is the boundary of a disc. Thus the circle is cobordant with the empty manifold. We say that the circle is nullbordant. As any closed one-dimensional manifold is a finite number of circles we get the following theorem.

References

1. Beyoncé, Single Ladies (Put a Ring on It), 2008, <https://youtu.be/4m1EFMoRFvY>.
2. R. Fokkink, Het square peg-probleem, *Nieuw Arch. Wisk.* 5/22 (2021), 107–112.
3. J.E. Greene and A. Lobb, The rectangular

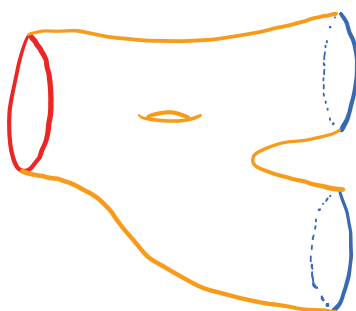


Figure 16 The red manifold and the blue manifold (which has two components) are cobordant. There exists a manifold, of one dimension higher, whose boundary is the union of the red and blue manifold. Another example seen on the left of Figure 1. The zero-dimensional manifold with an even number of points is nullbordant (cobordant with the empty set). On the right it is shown that an odd number of points is *not* nullbordant..

Theorem 8. *Every one-dimensional manifold is nullbordant. There is only one cobordism class of one-dimensional manifolds.*

Dimension two is interesting. All orientable surfaces are nullbordant. To see this one can embed the surface in $\mathbb{R}^3$ and take the inside as a bounding three dimensional manifold.

Half of the non-orientable surfaces are nullbordant. The Klein bottle for example is the boundary of a three-dimensional manifold. Imagine the Klein bottle as a family of circles parametrized by a circle as in the middle picture of Figure 7. Filling in these circles with discs produces a three-dimensional compact manifold whose boundary is the Klein bottle.

The surface $\mathbb{RP}^2$ is not nullbordant, which is harder to see. It is possible to use my favourite Theorem 1 to prove this (for the initiated the Euler characteristic modulo 2 is a cobordism invariant), but it would take us too far astray to discuss this further. All surfaces are either cobordant with the Klein bottle, or with $\mathbb{RP}^2$, which gives:

Theorem 9. *There are two cobordism classes of two-dimensional manifolds. Every closed two-dimensional manifold is either nullbordant, or cobordant with $\mathbb{RP}^2$.*

In these three theorems on the cobordism classes we heavily used the classi-

fication of the manifolds *up to diffeomorphism*. It was Thom’s great insight [7] that manifolds of *all* dimensions can be classified up to cobordism, *even though we cannot classify the manifolds themselves!*

The set of cobordism classes can be equipped with a rich algebraic structure. We can define an addition operation by the disjoint union of manifolds, and a multiplicative operation by the Cartesian product of manifolds. These operations satisfy properties like commutativity, associativity and distributivity, just like ordinary addition and multiplication. This turns the set N_* of cobordism classes of closed manifolds into a (graded) ring. (We listen to the advice of Beyoncé. We like it, so we put a ring on it [1].) The unit 0 for addition is represented by the empty manifold, and the unit 1 for multiplication is represented by a point. An interesting feature of the cobordism ring is that $[M] + [M] = 0$ for all cobordism classes $[M]$, as two disjoint copies of a closed manifold M is the boundary of the ‘cylinder’ $M \times [0, 1]$. This is similar to calculating modulo 2, i.e. in $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$. Thom’s theorem is now a computation of the ring of cobordism classes of manifolds.

Theorem 10. *The cobordism ring N_* is isomorphic to the polynomial algebra $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}[x_2, x_4, x_5, x_6, x_8, \dots]$ with one generator x_k in dimension k for each $k \neq 2^i - 1$.*

Much more is known about the cobordism ring and variants of it, but many open questions remain. Cobordism theory remains central in algebraic and differential topology. ☛

The slides (in Dutch), which contain more pictures, are available on www.few.vu.nl/~trt800.

Acknowledgements

I would like to thank Renee Hoekzema, Michael Jung and Mark Timmer for comments on a draft of this article. I would also like to thank Carmen Oliver Huidobro for discussions during the writing of her bachelor thesis on Greene and Lobb’s theorem.

4. M. Meyerson, Balancing acts, *Topology Proceedings* 6(1) (1981), 5975.
5. H. Samelson, Orientability of hypersurfaces in $\mathbb{R}^n$, *Proc. Amer. Math. Soc.* 22 (1969).

6. G. Sanderson, Who cares about topology?, <https://www.3blue1brown.com/lessons/inscribed-rectangle-problem>.
7. R. Thom, Quelques propriétés globales des variétés, *Comment. Math. Helv.* 28 (1954).

Sem Borst

Faculteit Wiskunde en Informatica
Technische Universiteit Eindhoven
s.c.borst@tue.nl

Marieke Kranenburg

Networks
Universiteit van Amsterdam
m.kranenburg@uva.nl



Evenement

Eurandom viert 25-jarig jubileum

Van 15 tot 17 april vierde Eurandom haar 25-jarig jubileum met een feestelijke driedaagse conferentie. Meer dan honderd deelnemers kwamen naar Eindhoven voor deze gelegenheid. De conferentie bood volop gelegenheid tot terugkijken op het verleden en vooruitkijken naar de toekomst, waarbij wetenschappelijke presentaties werden afgewisseld met sociale activiteiten.

De conferentie werd op maandag geopend door Sem Borst, de huidige directeur van Eurandom. Het wetenschappelijke programma begon vervolgens met een keynote-lezing van Peter Bühlmann, waarna verschillende presentaties rond het thema 'Latest Theoretical Developments for Neural Networks' werden gegeven. Na de lunchpauze gaf Hansjörg Albrecher een tweede keynote, gevolgd door drie presentaties in de sessie met als titel 'Collective Behavior of Interacting Stochastic Systems'. Het laatste inhoudelijke onderdeel van de dag was een interactieve workshop getiteld 'Toekomstige workshopformats in een veranderende wereld', waarin de vraag centraal stond of de huidige manier waarop conferentieprogramma's vaak worden opgezet wel beantwoordt aan het doel ervan, namelijk het elkaar ontmoeten, inspireren en nieuwe samenwerkingen verkennen. Ter afsluiting van de dag werd tijdens de borrel een 'connection game' gespeeld, waarbij deelnemers verbanden moesten vinden tussen losse kaarten met namen van Eurandom betrokkenen of onderwerpen. Dit speelse element zorgde ervoor dat niet alleen oude contacten werden versterkt, maar ook nieuwe random contacten werden aangegaan.

Op dinsdag werden de keynote-lezingen gegeven door Zbigniew Palmowski en Nina Gantert. De onderzoekssessie richtte zich op het thema 'Statistics in the Machine Learning Era'. 's Middags was er tijd voor reflectie. Wim Senden, de eerste algemeen directeur van Eurandom, nam het publiek mee op een reis door de geschiedenis van het instituut, en Sem Borst besteedde aandacht aan de meer recente ontwikkelingen, waaronder de overgang van een postdoc- en PhD-instituut naar een workshopcentrum op het gebied van stochastiek. Na deze presentaties deelden verschillende voormalige postdocs en promovendi hun herinneringen en

schetsten zij wat hun tijd bij Eurandom voor hen heeft betekend in hun loopbaan. Per touringcar ging de groep naar het Evoluon voor een inspirerende rondleiding door het museum en het conferentiediner.

Op woensdag werden twee parallelle tracks georganiseerd: 'Statistical Theory for Sound Data Analysis' en 'Random Spatial Structures: New Developments and Perspectives'. Aan het einde van de middag namen de laatste deelnemers afscheid, waarmee de drie dagen werden afgesloten. Wij kijken terug op een geslaagd evenement, waarin jong en oud het Eurandom-gevoel volop hebben kunnen ervaren.



Rianne de Heide

Afdeling Wiskunde
Vrije Universiteit Amsterdam
r.de.heide@vu.nl

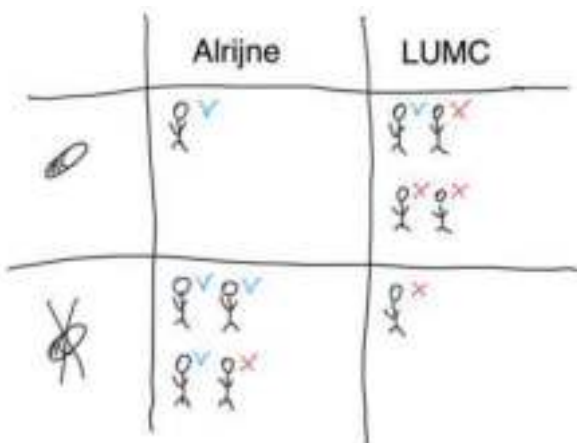


Column Rianne grijpt haar kans

Statistiek als kookboek

Rianne de Heide zal op regelmatige basis in dit blad een column schrijven over een actueel statistisch onderwerp.

Stel we willen weten of een nieuw medicijn beter werkt dan de huidige standaard. We testen het in twee ziekenhuizen: het Alrijne in Leiderdorp en het LUMC in Leiden. Aan sommige patiënten die binnenkomen geven we het nieuwe medicijn, en aan andere het oude. In werkelijkheid gaat het eerder om tientallen of honderden, maar om het voorbeeld eenvoudig te houden, houden we het hier zonder verlies van algemeenheid klein. Stel de aantallen zijn als in Figuur 1. We zien hier dat één persoon in het Alrijne het nieuwe medicijn heeft gekregen, en vier personen in het LUMC. In het Alrijne hebben vier personen het oude medicijn gekregen, en één in het LUMC. Stel nu dat de uitkomsten zijn zoals in de figuur: de persoon in Alrijne met het nieuwe medicijn herstelt, in het LUMC herstelt er één en drie niet. Van de personen in het Alrijne met het oude medicijn herstellen er drie, de vierde niet, en ook degene in het LUMC herstelt niet.



Figuur 1

Laten we kijken naar het herstelpercentage voor de vier subgroepen:

- Alrijne + Nieuw: 100%
- Alrijne + Oud: 75%

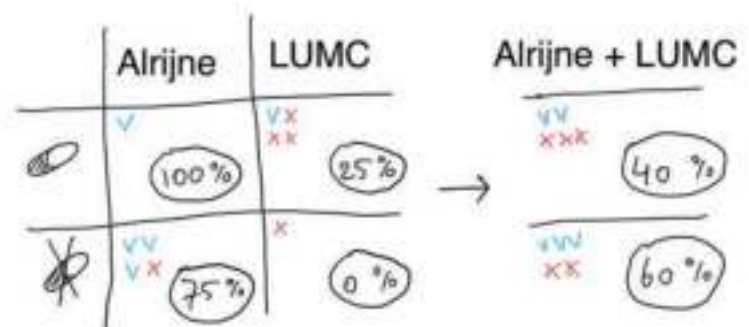
Het lijkt dat in de groep patiënten in het Alrijne, het nieuwe medicijn een verbetering brengt in het herstelpercentage.

- LUMC + Nieuw: 25%
- LUMC + Oud: 0%

Ook in de groep patiënten in het LUMC lijkt het nieuwe medicijn een goed resultaat op te leveren. Maar wat gebeurt er, als we de patiënten in beide ziekenhuizen op een hoop gooien (zie Figuur 2), en dan kijken naar het herstelpercentage?

- Nieuw: 40%
- Oud: 60%

Huh? Nu lijkt het nieuwe medicijn juist schadelijk! Wat is hier aan de hand?



Figuur 2

Simpsons paradox

Dit is een voorbeeld van Simpsons paradox. En dit is niet iets wat kan worden opgelost met wiskunde en statistiek. We moeten ons verdiepen in de achterliggende praktijk om de juiste conclusie te kunnen trekken. Het kan bijvoorbeeld zo zijn dat de ziekere patiënten in het LUMC terecht komen, en als het ook nog zo is dat het nieuwe medicijn heftige bijwerkingen heeft waardoor men het alleen aan de ziekste patiënten wil geven, dan hebben de patiënten in het LUMC die het nieuwe medicijn krijgen om te beginnen al een veel lagere herstelkans. Dan is het niet vreemd dat meer mensen die het nieuwe medicijn krijgen niet herstellen, zelfs als het medicijn een positief effect heeft op de herstelkans. Was dit echter een gerandomiseerd experiment, dan kun je naar de gecombineerde data kijken en concluderen dat het nieuwe medicijn een slecht idee is.

Kookboekstatistiek

Ik begin een statistiekcollege graag met Simpsons paradox. Het vereist nog geen enkele voorkennis, maar iedereen ziet meteen dat statistiek verraderlijk kan zijn als je de context buiten beschouwing laat. Veel mensen denken dat statistiek een kookboek is met recepten die je kunt volgen om tot een uitkomst te komen, vaak een beslissing, bijvoorbeeld of we een nulhypothese wel of niet verwerpen. Zo worden statistiekvakken ook vaak gegeven bij opleidingen waar ze het moeten toepassen. Zijn de data normaal verdeeld? Volg het recept: *t*-toets. We kunnen kiezen uit verschil-

lende smaken: zijn de samples paired?, (on)gelijke variantie?, et cetera. En niet zelden zie ik op social media beslisbomen voorbijkomen met een breed scala aan hypothesetoetsen. Wat rest is op een knopje drukken in SPSS, en voilà, een wel of niet significant resultaat. Naast gevaarlijk, maakt het (toegepaste) statistiekvakken ook verschrikkelijk saai, zoals Mark van der Wiel ook laatst in een blog betoogde [2]. Ik denk dat het beter is om de principes van de statistische methodologie goed uit te leggen (bijvoorbeeld: hypothesetoetsen), met een aantal veelvoorkomende specifieke methodes (bijvoorbeeld: de *t*-toets) als voorbeelden. Om bij het hypothesetoetsen — mijn favoriete onderwerp — te blijven: wanneer je het hoe en wat snapt van het ontwerpen van methodes met als vereiste het begrenzen van een Type I fout, snap je ook sneller dat er dingen fout gaan als je je niet aan de regels houdt. Zo geeft 55% van de psychologen toe [1] aan *optional stopping* [3] te doen met *p*-waardes, wat de kans op fout-positieven (gigantisch) opblaast.

Dit alles is precies wat ik zo leuk vind aan statistiek: er is altijd een interactie tussen de wiskundige theorie, en de context van de praktijk waarvoor je die theorie bedenkt. Net zoals ik denk dat het voor mensen die statistiek toepassen goed is als ze de principes van de achterliggende theorie begrijpen, denk ik dat het voor wiskundige statistici goed is, om zich te laten inspireren door de praktijk. Niet zelden geven praktische problemen aanleiding tot de meest elegante wiskundige statistiek. Ik hoop daar in volgende columns voorbeelden van te laten zien. ↩



Referenties

¹ L. K. John, G. Loewenstein en D. Prelec, Measuring the prevalence of questionable research practices with incentives for truth telling, *Psychological Science* 23(5) (2012), 524–532.

² Mark van de Wiel, <https://blog.vvsor.nl/2024/03/statistics-is-boring>.

³ Kijken naar de data of (tussen)resultaten en besluiten om wel of niet nog wat data aan het experiment toe te voegen.

Raf Bocklandt

Korteweg-de Vries Instituut voor Wiskunde
Universiteit van Amsterdam
raf.bocklandt@gmail.com

Edward Berengoltz

Korteweg-de Vries Instituut voor Wiskunde
Universiteit van Amsterdam
edikabb@xs4all.nl

Interview Tom Koornwinder

Een speciale gelegenheid

Op 15 september 2023 vond op de Universiteit van Amsterdam het symposium ‘Special functions and their applications’ plaats, ter ere van de 80ste verjaardag van Tom Koornwinder. Een ideale gelegenheid voor het Nieuw Archief om Tom te strikken voor een interview en zodoende maakten we een afspraak om eens bij hem thuis op de thee te gaan.

Tom Hendrik Koornwinder is geboren in Rotterdam in 1943 als nakomer met drie oudere zussen. Het gezin woonde in het Oude Noorden, een wijk uit de late negentiende eeuw.

“Het Oude Noorden was een levendige wijk met veel winkels en vrij eenvoudige mensen, veel arbeiders. Mijn vader had samen met twee broers een timmermans-werkplaats en was aannemer. Wij woonden boven de zaak op twee woonverdiepingen en een plat stuk boven de uitbouw naar achteren.”

De brandgrens bevond zich minder dan een kilometer van huize Koornwinder. Hoewel het puin in het naoorlogse centrum al snel was opgeruimd, waren er aanvankelijk nog grote vlaktes en ruïnes. Nieuwbouw en herstel kwamen echter fluks op gang. Genoeg werk dus — helpen bij het timmeren deed de jonge Tom echter niet.

“Dat zou mijn vader niet zo leuk gevonden hebben, want ik was erg onhandig. Ik kwam uit een goed Nederlands Hervormd gezin en mijn moeders ideaal was dat ik dominee zou worden. Ik ben naar het gymnasium gegaan maar het was duidelijk dat ik

wat beter scoorde in de exacte vakken. Het werd toch geen theologie studeren dus.”

Tom was de eerste van het gezin die naar de universiteit is gegaan. De wis- en natuurkundeleraren in de hogere klassen van school waren weliswaar goed en stimulerend, maar niet per se doorslaggevend geweest voor de studiekeuze.



Tom Koornwinder

“Eigenlijk wilde ik natuurkunde studeren; ik las boekjes over elementaire deeltjes en zo en daar wilde ik wel meer over weten. Leiden was de dichtstbijzijnde universiteit en daar ben ik op kamers gaan wonen. Er was veel practicum en, ja, gegeven dat ik niet zo handig ben... Met wat extra wiskundevakken algebra en topologie kon ik een dubbel kandidaatsexamen afleggen.”

Experimentele fysica was al snel van de baan. Voor zijn doctoraal volgde Tom zowel theoretische natuurkundevakken als wiskundevakken. Daarenboven kon hij aan de slag bij het Leidse wiskunde-instituut.

“Ik kon vrij snel assistent worden op het Mathematisch Instituut. Ik was ook erg door de wiskunde gegrepen met haar precieze bewijzen, wat in de natuurkunde onhaalbaar is. Op een gegeven moment besloot ik alleen maar wiskunde te studeren.

Jaap Murre was een bekend algebraïsch meetkundige maar wij hadden direct het eerste analysevak van hem. Dat was gedegen en indrukwekkend. Als je daar nu mee aan zou komen in september, dan slagen er niet zoveel! Het tentamen was echter schriftelijk en meer gericht op concretere rekenopgaven uit het werkcollege.

In het tweede jaar kregen we analyse van Aad Zaanen. Topologie was bij Ton van de Ven, beide mondeling. Willem van Est gaf college lineaire algebra in het eerste jaar. Bij hem ben ik ook afgestudeerd op

basis van zijn college Lie-groepen. Hij gaf me een oud artikel van Hermann Weyl over de representatietheorie van compacte Lie-groepen. Daarvoor moest ik heel wat uitvoeren en dat heb ik opgeschreven.

Ik geloof niet dat zo'n scriptie echt een verplichting was zoals nu. Voor het doctoraal moest je vooral een bepaald aantal tentamens halen. In 1968 ben ik afgestudeerd; het heeft vrij lang geduurd want naast mijn studies deed ik ook nog heel wat andere zaken."

Roerige tijden

"In 1961 ben ik lid geworden van gezelligheidsvereniging Catena, een deel van de Federatie van Unitates en Bonden; een soort gematigde tegenhanger van het corps. In plaats van een groentijd was er een kennismakingstijd. Het kon wel eens zuur zijn maar je werd niet kaalgeschoren of zo. Met een aantal eerstejaars van allerlei opleidingen richtten we een dispuut op — dat werd nogal gedomineerd door de alfa's; er heerste een beetje een negentiende-eeuwse sfeer. Ik heb daar lezingen over eigen interesses gehouden.

Mijn zussen waren toen al uitgevlogen en gehuwd. Onze moeder was veel ziek; de thuissfeer was daarom wat drukkend. Ik was een vrij traditionele student en Nederlands Hervormd maar ben geleidelijk van het geloof afgeraakt. Mijn vrouw heb ik leren kennen in het linkse studentenmilieu."

Tom en Marita hebben elkaar in 1966 ontmoet en kregen het jaar daarop een relatie. Zij studeerde geschiedenis met specialisatie Middeleeuwen. Voor haar doctoralexamen deed ze een bijvak Arabische taal- en letterkunde om zo ook Arabische bronnen uit die periode te kunnen lezen. Hun huwelijk volgde in 1968 en Toms doctoraal een half jaar nadien.

"Ervonden allerlei linkse activiteiten plaats zoals Vietnamprotesten, de ban-de-bomdemonstraties en de studentenvakbeweging. Er waren ook *teach-ins*, waar we beide bij betrokken waren: lange avonden met discussies over actuele onderwerpen.

Als uitvloeisel daarvan volgde een studenteninitiatief om een polemologische bibliotheek op te zetten. Professor Röling, hoogleraar volkenrecht in Groningen, was de initiator van de polemologie (de studie van oorlog en vrede) in Nederland. Hij was onze held; we hebben hem ook eens naar

Leiden gehaald voor een lezing. We verzamelden boeken en kregen de universiteit zo ver om ons een kamer te geven om die neer te zetten. Het doel was een polemologisch instituut op te richten, maar dat is er toen niet gekomen."

Later is het echtpaar minder actief geworden in deze sfeer. Het revolutionaire elan was tegen de jaren tachtig, toen de protesten tegen de kruisraketten plaatsvonden, bijvoorbeeld wel getaand. Het gedachtegoed zijn de twee wel blijven aanhangen.

"De doctoraalassistentenbaan liep af en leidde niet direct tot iets nieuws. Ik ben gaan solliciteren en kreeg zowel van het Mathematisch Centrum [thans CWI, red.] in Amsterdam als van het Mathematisch Instituut in Utrecht een aanbieding. Ik heb voor Amsterdam gekozen. De natuurkunde sprak me nog steeds wel aan en daar was een afdeling mathematische fysica onder leiding van hoogleraar Hans Lauwerier, die daar een dag per week werkte. Hij was daarnaast ook betrokken geweest bij het deltaplan. Ik startte wat moeizaam; werd niet direct op weg geholpen met bepaalde onderwerpen. Het was toen niet zo dat je van iemand een onderwerp kreeg, maar je moest zelf zoeken."

Zorgen maakte Tom zich niet: promovendi kregen toentertijd namelijk een aanstelling voor onbepaalde tijd. Pas een aantal jaren later zouden er tijdelijke contracten komen. Onderwijl zochten Marita en hij een woning. Inmiddels aangeschoven vertelt zij:

"We woonden natuurlijk alle twee in Leiden op kamers en hebben toen een kamer gevonden op de Breestraat tegenover het stadhuis. Daar waren we ingetrokken voor we getrouwd waren, dus die situatie kon beter niet te lang duren. We zijn thuis gehuwd en hoefden alleen de straat maar over te steken!"

Toen Tom die aanstelling in Amsterdam kreeg, zijn we daarnaartoe verhuisd. Daar was net als nu een groot huizenkort maar via een tip zijn we in Amsterdam-Noord terechtgekomen. Aan de rand van de stad was een nieuwbouwproject, uitkijkend over de weilanden. Tot onze verrassing konden we daar een vierkamerflat huren. Daar zijn later ook onze kinderen geboren."



Richard Askey

Toms promotieonderzoek aan het MC werd pas goed aangezwengeld in het academisch jaar 1969/1970 toen daar de Amerikaan Richard Askey (1933–2019), expert op het gebied van speciale functies en orthogonale polynomen aan de University of Wisconsin-Madison, voor zijn sabbatical kwam vertoeven. Hij ging direct een grote reeks voordrachten geven en een aantal promovendi speciale onderwerpen suggereren.

Dankzij Askey werd Toms interesse voor speciale functies aangewakkerd. Aldus is ook diens promotieonderwerp ontkiemd. De zogeheten additieformule voor Gegenbauer- of twaalf ultrasferische polynomen was namelijk bekend; deze volgt door in een slimme basis de reproducerende kern van sferische harmonischen van gegeven graad uit te drukken in de Gegenbauer-polynomen. Een soortgelijke additieformule zou ook moeten bestaan voor de algemenere Jacobi-polynomen, was het idee. (Zie kader op de volgende pagina.)



Het Instituut Mittag-Leffler in Zweden, waar Tom in 1970–1971 heeft gewerkt.

“Askey zei: ‘Zoek daar eens naar.’ Misschien zou er een interpretatie zijn met groepen; hij wist dat ik een achtergrond had in de representatietheorie. Het jaar daarop zou er tevens een themajaar komen aan het Institut Mittag-Leffler in Djurs-holm, nabij Stockholm.

Er was al een speciaal jaar geweest over commutatieve harmonische analyse; het jaar daarop volgde de *niet*-commutatieve harmonische analyse met de IJslander Sigurður Helgason (1927–2023) van het MIT als voornaamste gast. Hij zou daar een lange serie voordrachten geven. Er waren plaatsen voor promovendi om er het jaar door te brengen en Askey had een aanbevelingsbrief voor me geschreven.”

Het hoge noorden

En zo togen Marita en Tom in de zomer van 1970 op avontuur naar het hoge noorden. “We huurden een busje bij een autoverhuurder in Amsterdam die ons met onze spullen naar Zweden bracht. Het was een lange tocht met heel wat oponthoud aan de grensovergangen, zodat we zelfs een nacht in het busje hebben moesten doorbrengen. Het Institut Mittag-Leffler had geen accommodatie beschikbaar voor ons en dus kregen we in een studentenflat twee kamers naast elkaar; de ene kamer richtten we in als slaapkamer en de andere als woonkamer. In totaal zijn we een heel jaar in Scandinavië verbleven: gedurende het academisch jaar woonden we in Zweden en daarna hebben we nog een rondreis gemaakt naar Finland en helemaal tot in het noorden van Noorwegen bij Hammerfest.”

Academisch gezien was hun verblijf in Zweden heel interessant voor allebei. Marita vond aansluiting bij het historisch instituut en verdiepte zich in de geschiedenis van de vikingen in middeleeuws Rusland, terwijl Tom onderzoek deed naar de eigenschappen van complexe sferische harmonischen en hun gedrag onder de werking van de unitaire groep.

“Ik werkte op de eenheidssfeer in een complexe ruimte en daar blijkt je complexwaardige polynomen op de schijf te krijgen in variabelen z en $\bar{z}$. Het eenvoudigste geval bleek de Zernike-polynomen te zijn, naar Nobelprijswinnaar Frits Zernike. Die schijfpolynomen, waarvoor ik eerst de additieformule afleidde, hebben een expliciete

uitdrukking in Jacobi-polynomen, zodat de additieformule daarvoor volgt.

Het ging best vlot en ik had eigenlijk snel moeten publiceren maar ik was onervaren en dus gaf ik mijn werk eerst aan Helgason, de grote man daar. Hij wist weinig van speciale functies af en gaf het door aan Christian Berg uit Kopenhagen. Die vond het mooi; ik had het ook aan Askey

gestuurd en hij was laaiend enthousiast. Pas terug op het MC werd het in de rapporten daar gepubliceerd.

Daarnaast kon ik in Zweden heel wat internationale contacten leggen. Een ervan was Mogens Flensted-Jensen uit Kopenhagen, die later professor geworden is aldaar. Hij is helaas in 2020 overleden. Met hem deed ik onderzoek naar de con-

Additieformule voor Jacobi-polynomen

De *Jacobi-polynomen*, vernoemd naar de Pruisische wiskundige Carl Gustav Jacobi, zijn een van de drie klassen klassieke orthogonale polynomen. Zij veralgemenen tevens een aantal bekende families zoals de Legendre- en de Chebyshev-polynomen.

Zijn $\alpha, \beta \in \mathbb{R}_{>-1}$. Dan zijn de Jacobi-polynomen $\{P_n^{(\alpha, \beta)}\}_{n \in \mathbb{Z}_{\geq 0}}$ op normering na de unieke familie polynomen zodanig dat iedere $P_n^{(\alpha, \beta)}$ van graad n is en dat zij orthogonaal zijn in de volgende zin:

$$\int_{-1}^1 P_n^{(\alpha, \beta)}(x) P_m^{(\alpha, \beta)}(x) w^{(\alpha, \beta)}(x) dx = 0$$

precies wanneer $m \neq n$. Hier wordt geïntegreerd over het interval $[-1, 1]$ tegen de gewichtsfunctie $w^{(\alpha, \beta)}(x) := (1-x)^\alpha (1+x)^\beta$. We normeren $R_n^{(\alpha, \beta)} := P_n^{(\alpha, \beta)} / P_n^{(\alpha, \beta)}(1)$.

Als nu $\alpha = \beta$, dan krijgt men de Gegenbauer- of ultrasferische polynomen $R_n^\alpha := R_n^{(\alpha, \alpha)}$, voor welke reeds een additieformule bekend was. Voor vaste dimensie $d \geq 2$ en graad n kunnen we namelijk de harmonische polynomen in d reële veranderlijken, homogeen van de graad n , beschouwen. Hun beperkingen tot de eenheids-sfeer $S^{d-1} \subset \mathbb{R}^d$ zijn de welbekende *sferische harmonischen*. Kieze men een geschikte orthonormale basis $\{Y_1, \dots, Y_{N(n, d)}\}$ voor de $N(n, d)$ -dimensionale reële ruimte van deze functies, dan geldt er voor alle $v, w \in S^{d-1}$ dat

$$R_n^{(d-3)/2}(v \cdot w) = \frac{1}{N(n, d)} \sum_{j=1}^{N(n, d)} Y_j(v) Y_j(w),$$

met $v \cdot w$ het standaardinproduct. Nemen we nu

$$v = (\cos \theta_1, \sin \theta_1 \cos \varphi, \sin \theta_1 \sin \varphi, 0, \dots, 0) \quad \text{en} \quad w = (\cos \theta_2, \sin \theta_2, 0, \dots, 0),$$

dan volgt uit bovenstaande de *additieformule voor Gegenbauer-polynomen*:

$$\begin{aligned} R_n^\alpha(\cos \theta_1 \cos \theta_2 + \sin \theta_1 \sin \theta_2 \cos \varphi) \\ = \sum_{k=0}^n c_{k, n}^\alpha (\sin \theta_1 \sin \theta_2)^k R_{n-k}^{\alpha+k}(\cos \theta_1) R_{n-k}^{\alpha+k}(\cos \theta_2) R_k^{\alpha-1/2}(\cos \varphi). \end{aligned}$$

De coëfficiënten $c_{k, n}^\alpha$ zijn bekend. Het geval $d = 2$, oftewel $\alpha = -\frac{1}{2}$, met $\varphi = 0$ of π onttaart in de middelbareschoolregel

$$\cos(n(\theta_1 \pm \theta_2)) = \cos n\theta_1 \cos n\theta_2 \pm \sin n\theta_1 \sin n\theta_2,$$

vanwaar de term additieformule.

Iets soortgelijks kan, mutatis mutandis, worden gedaan in de *complexe* wereld. De *schijfpolynomen* $R_{m, n}^\alpha$ op de eenheidsschijf in $\mathbb{C}$ — dit zijn complexe polynomen van de graden m in z en n in $\bar{z}$, orthogonaal ten opzichte van de gewichtsfunctie $(1 - |z|^2)^\alpha$ — laten zich uitdrukken in de Jacobi-polynomen via

$$R_{m, n}^\alpha(re^{i\theta}) = r^{|m-n|} e^{i(m-n)\theta} R_{\min\{m, n\}}^{(\alpha, |m-n|)}(2r^2 - 1).$$

Zij spelen de rol van de (reële) Gegenbauer-polynomen op de complexe eenheidssfeer in $\mathbb{C}^d$. Met behulp van Toms additieformule voor schijfpolynomen (die weer gebruikmaakt van complexe sferische harmonischen) volgt uit deze uitdrukking de additieformule voor Jacobi-polynomen.



Toms verdediging op 5 februari 1975 in de Oude Lutherse Kerk in Amsterdam, met paranimfen José Maas en Nico Temme.



Tom met twee oud-promovendi (links Erik Koelink, rechts Jasper Stokman) bij de promotie van Maarten van Pruijssen te Nijmegen op 19 december 2012.

volutiestructuur geassocieerd met Jacobi-functies en later in de jaren zeventig hebben we ook nog vaker samengewerkt aan dit onderwerp.”

Tevreden met de behaalde resultaten keerde Tom terug naar Amsterdam, maar toen hij zijn onderzoek daar voortzette aan het Mathematisch Centrum deed hij een onaangename ontdekking.

“Ik bracht veel tijd door in de mooie bibliotheek van het MC. Daar was een Russisch reviewtijdschrift, naar het Engels vertaald — op een gegeven ogenblik vond ik daar-in het werk dat ik gedaan had! Naoem Vilenkin was in de Sovjet-Unie zeer actief in de speciale functies en groepentheorie en zijn promovenda Sjapiro had mijn werk al gedaan, een paar jaar eerder [4]. Ik had het wel helemaal onafhankelijk gedaan maar het was niet zo fijn natuurlijk. De additieformule met volledige parameterwaarden hadden ze overigens niet.”

Tom bleef niet bij de pakken neerzitten en ging op zoek naar manieren waarop hij zijn werk kon uitbreiden naar algemenere situaties.

“Ik had al kennisgemaakt met polynomen in twee variabelen en ook symmetrische ruimten gezien. Laat ik misschien kijken naar orthogonale polynomen in meerdere variabelen en symmetrische ruimten van hogere rang, dacht ik. Met rang 2 valt nog te rekenen en dat bleek heel succesvol. De

wortelsystemen BC_2 en A_2 heb ik toen al-lebei aangepakt. De symmetrische ruimten zijn dan bijvoorbeeld een Grassmannvariëteit en $SL(3, \mathbb{R}) / SO(3, \mathbb{R})$. Ik kon die polynomen voor algemene parameterwaarden behandelen: dat was, zo rond 1974, het begin van de Jacobi-polynomen geassocieerd met wortelsystemen. Twaalf jaar later hebben Gert Heckman en Eric Opdam het voor algemene rang gedaan, uiteraard ook geïnspireerd door de compacte symmetrische ruimten maar vervolgens direct werkend met wortelsystemen.

“Het proefschrift kwam pas in 1975. Het was wat moeizaam om een heel, doorlopend proefschrift te schrijven dus toen werd het idee om te promoveren op gepubliceerde artikelen met een aparte inleiding. Askey kon helaas geen copromotor zijn; waarschijnlijk was daar geen budget voor.”

Hans Lauwerier was promotor en hiermee werd Tom (evenals vele andere Nederlandse wiskundigen) onderdeel van een indrukwekkende academische stamboom die terugreikt tot lieden als Euler, Galilei en Huygens [5].

Een quantumsprong

Hoewel het destijds gebruikelijk was dat nieuw-gepromoveerden vriendelijk verzocht werd om uit te kijken naar een andere baan, was het Mathematisch Centrum heel tevreden over Toms werk en inzet en hij bleef nog een hele tijd als onderzoeker verbonden aan het instituut.

“In die tijd had ik ook een intensieve samenwerking met Gerrit van Dijk. Ik leerde hem eind jaren zeventig kennen toen hij een jong hoogleraar in Leiden was, gespecialiseerd in analyse op Lie-groepen. We organiseerden seminars over Lie-groepen en medio jaren tachtig gaf ik ook sommige van zijn doctoraalcolleges in Leiden — bijvoorbeeld over Fouriertheorie — wanneer hij te druk met bestuurszaken was. Van Dijk had toen veel promovendi en was een drukbezet man. Om die reden stuurde hij ook enkelen van hen naar mij door voor begeleiding. Een van deze was Erik Koelink, die nu hoogleraar is in Nijmegen. Een andere promovendus van mij die hoogleraar (aan de UvA) is geworden, is Jasper Stokman.”

Wiskundig gezien waren de jaren tachtig voor Tom een buitengewoon interessante periode want in dat decennium vond er een heuse omwenteling plaats in zijn vakgebied.

“Dat was een fascinerende tijd, vooral de tweede helft. Er waren veel nieuwe ontwikkelingen, zoals de opkomst van quantumgroepen en de ontdekking van Macdonald-polynomen. Over die nieuwe q -polynomen geassocieerd met wortelsystemen stuurde Ian Macdonald (1928–2023) in 1987 herhaaldelijk manuscripten rond. [Zie ook Macdonalds necrologie elders in dit nummer, red.] In één variabele waren q -speciale functies al veel langer bestudeerd, maar sinds 1975 ontstond er bij Askey in

Madison (Wisconsin) nieuwe q -interesse, wat in 1985 leidde tot de Askey–Wilson-polynomen en het Askey-tableau om hypergeometrische orthogonale polynomen te ordenen. Er kwam zo een ware revolutie op gang. Ik was enorm geïnteresseerd in die dingen en heb daar zelf ook heel wat werk in verricht, hetgeen uiteindelijk geleid heeft tot een van mijn belangrijkste artikelen [2].

De bekendste Macdonald-polynomen zijn die van het A -type omdat ze heel veel toepassingen hebben, onder andere in de combinatoriek, maar je kunt zulke polynomen construeren voor elk wortelsysteem. Geïnspireerd door het verband tussen de Askey–Wilson- en de Macdonald-polynomen van type BC probeerde ik een nieuwe familie polynomen te vormen met twee extra parameters die de Macdonald-polynomen van type BC_n zouden veralgemenen en dat lukte. Deze polynomen worden Macdonald–Koornwinder-polynomen genoemd of kortweg ook wel Koornwinder-polynomen.

De ontdekking van deze polynomen gebeurde toen ik uitgenodigd was op een werkbezoek in Ivoorkust. Ik zat toen in Hôtel du Golf aan een lagune in Abidjan, de vroegere hoofdstad van het land. Dit luxe hotel zou later nog een belangrijke rol spelen tijdens de burgeroorlog in Ivoorkust.”

Naar de UvA

Intussen onderging het Mathematisch Centrum heel wat veranderingen. In 1980 verhuisde het naar het huidige Science Park

in de Watergraafsmeer en in 1983 werd het omgedoopt tot Centrum voor Wiskunde en Informatica. Die naamsverandering bleek uiteindelijk ook een voorbode voor nog ingrijpendere wijzigingen.

“Eind jaren tachtig verkeerde het CWI in moeilijk financieel vaarwater. De informatici hadden tijdelijk geld gebruikt voor structurele aanstellingen en daardoor was er een groot tekort. Uiteindelijk werd besloten om te stoppen met de afdelingen zuivere wiskunde en mathematische fysica. Hoewel ik oorspronkelijk bij Lauwerier bij de toegepaste wiskunde zat, was ik in de loop der jaren opgeschoven naar de zuivere wiskunde — later werden de zuivere en toegepaste afdelingen samengevoegd tot de groep AAM (Analyse-Algebra-Meetkunde) onder leiding van Michiel Hazewinkel.

Begin jaren negentig werd seniormedewerkers bij AAM — zoals Arjeh Cohen, Odo Diekmann en mijzelf — verzocht op zoek te gaan naar een nieuwe baan aan een universiteit en zo kwam ik na een sollicitatie terecht bij de UvA, waar ik in 1992 hoogleraar analyse werd.

Bestuurstaken zijn ook een onderdeel van het hoogleraarschap. Onze Faculteit Wiskunde en Informatica fuseerde met Natuur- en Sterrenkunde tot de faculteit WINS, geleid door Karel Gaemers, en tot zijn faculteitsbestuur trad ik toe met de portefeuille onderzoek. Dit duurde echter niet lang, want de faculteit zou verder gaan fuseren met scheikunde en biologie, waar-

toe Walter Hoogland als kwartiermaker en beoogd decaan van de grotere faculteit werd aangesteld. De meeste portefeuillehouders in het bestuur, waaronder ik, voelden zich daardoor te veel beperkt en traden uit het bestuur.

Ook moesten in 1997, wegens een wijziging in de Wet op het Hoger Onderwijs en Wetenschappelijk Onderzoek, de voormalige vakgroepen ruim baan maken voor onderzoeks- en onderwijsinstituten. Aan de UvA ontstond het Korteweg-de Vries Instituut voor Wiskunde, waarvan ik de eerste directeur werd.

Een veranderend landschap

In die tijd zag het wiskundelandschap er ook nog heel anders uit dan nu.

“Het was een boeiende periode met twee concurrerende onderzoeksscholen: de Thomas Stieltjesschool, vanuit Leiden geleid, en het Mathematical Research Institute (MRI), vanuit Utrecht. Het land werd eigenlijk opgedeeld. Ze moesten een onderzoeksprogramma schrijven en er was vergeleken met MRI vrij veel analyse in Stieltjes. Maar bij MRI zat dan bijvoorbeeld wel weer Hans Duistermaat.

Net voordat ik bij de UvA aantrad was Stieltjes gevormd en had de UvA zich daarbij aangesloten. Deze keuze voor Leiden was mogelijk ingegeven door goede persoonlijke banden.

NWO wilde die onderwijscholen stimuleren en stelde toen een miljoen gulden beschikbaar voor Stieltjes waarmee



Tom op het CWI in 1990. De afdeling Analyse-Algebra-Meetkunde (AAM) was toentertijd in portakabins gehuisvest.



Eric Opdam, Tom Koornwinder, Katsuhisa Mimachi en Masatoshi Noumi tijdens een conferentie in Ann Arbor, Michigan, 10 juni 1989.



Tom Koornwinder met Richard Askey bij diens tachtigste verjaardag in 2013

Foto: Patsy Wang-Iverson

gasten voor een tijdje konden worden uitgenodigd. In het kader van analyse en Lie-groepen hebben we bijvoorbeeld Charles Dunkl, Pavel Etingof, Ian Macdonald en Masatoshi Noumi gehad.

De twee onderzoeksscholen zijn in 2005 gestopt en de huidige onderzoeksclusters zijn ervoor in de plaats gekomen. [DIAMANT, GQT, NDNS en STAR, red.] Een jaar na mijn emeritaat, dus in 2009, ben ik lid geweest van de landelijke onderzoeks-visitatiecommissie, wat natuurlijk een ruim zicht op de wiskunde veronderstelde. Ik ben sindsdien in onderzoek actief gebleven. Tot het begin van de coronaperiode kwam ik een paar dagen per week naar het instituut. Vele jaren deelde ik daar een ka-

mer met mijn twintig jaar oudere emerituscollega Jaap Korevaar. Wel beperkt mijn focus zich tegenwoordig veel meer tot mijn eigen gebiedje en tot mijn andere liefhebberijen zoals zingen.”

In dat eigen wiskundige vakgebied, de analyse, merkte Tom wel een verandering op.

“In relatie tot andere onderdelen van de wiskunde en bij toepassingen in de natuurkunde heb ik zien gebeuren dat de analyse minder prominent is geworden ten gunste van algebra en meetkunde. Deze verschuiving was voor het eerst goed merkbaar op het ICM in Helsinki in 1978. Binnen de

analyse beoefen ik een tamelijk ouderwets deel dat zich vooral met gelijkheden bezighoudt, zoals in Eulers tijd. In de negentiende eeuw kwam er veel meer nadruk op ongelijkheden; denk maar aan de klassieke epsilon-delta-formuleringen voor limieten en continuïteit. Dat is alleen maar sterker geworden.

In mijn vakgebied van de speciale functies ontmoet ik echter expliciete identiteiten die iets canonieks hebben en van een platonische schoonheid zijn. Ik heb dit in mijn oratie in 1993, getiteld ‘Gelijk en ongelijk in de analyse’, ook aangestipt [3]. Askey heeft veel bijgedragen aan een revalidatie van deze zaken. De benadering is evenwel algebraïscher geworden met meer focus op onderliggende structuren en hun classificatie, zoals die van irreducibele wortelsystemen en het Askey-tableau.”

En zo zijn we terug bij de persoon waarmee Toms wiskundige carrière begon. Net zoals Askey hem heeft geïnspireerd, heeft Tom ook zelf een nieuwe generatie wiskundigen aangespoord.

“Als ik terugkijk, blijkt het erg in mijn aard te liggen om vooral in eenvoudige situaties, waar ik goed mee kan rekenen, iets nieuws te ontwikkelen. Ik zie er dan meestal van af om dat zelf verder te generaliseren, maar vind het mooi om te zien hoe zoiets soms wordt opgepakt en dat ik de kiem daarvoor heb gelegd.”

Met recht en reden kunnen we stellen dat de kiemen die Tom heeft gelegd in vruchtbare grond zijn gevallen en tot bloei zijn gekomen zowel in Nederland als daarbuiten. ➤

Referenties

- 1 T. H. Koornwinder, The addition formula for Jacobi polynomials I: Summary of results, *Indagationes Mathematicae* 34(2) (1972), 188–191.
- 2 T. H. Koornwinder, Askey–Wilson polynomials for root systems of type BC , *Contemporary Mathematics* 138 (1992), 189–204.
- 3 T. H. Koornwinder, Gelijk en ongelijk in de

analyse, oratie, Stichting Mathematisch Centrum, 1993, <https://staff.fnwi.uva.nl/t.h.koornwinder/art/popular/oratieboek.pdf>.

- 4 Н. Я. Виленкин & Р. Л. Шапиро, Неприводимые представления группы $SU(n)$ класса I относительно $SU(n-1)$, *Известия высших учебных заведений, Математика* 7(62) (1967), 9–20. [N. Ja. Vilenkin en R. L. Sjapi-

ro, Irreducibele representaties van de groep $SU(n)$ van de klasse I met betrekking tot $SU(n-1)$, *Bulletin der Hogere Onderwijsinstellingen, Wiskunde*.]

- 5 The Mathematics Genealogy Project, Academic Genealogy of Tom Hendrik Koornwinder, https://staff.fnwi.uva.nl/t.h.koornwinder/mathgenealogy_thk.pdf.

Gert Heckman

IMAPP
Radboud Universiteit Nijmegen
g.heckman@math.ru.nl

Tom Koornwinder

Korteweg-de Vries Instituut voor Wiskunde
Universiteit van Amsterdam
thkmath@xs4all.nl

Eric Opdam

Korteweg-de Vries Instituut voor Wiskunde
Universiteit van Amsterdam
e.m.opdam@uva.nl

In Memoriam Ian Grant Macdonald (1928–2023)

Brits wiskundige kwam graag naar Nederland om aan de representatietheorie van groepen te werken

Ian Macdonald was een Brits wiskundige, bekend van zijn bijdragen op het gebied van Lie-theorie, combinatoriek en speciale functies. Hij volgde zijn opleiding aan het Trinity College in Cambridge, waar hij in 1952 afstudeerde. In plaats van aansluitend promotie-onderzoek te doen werkte hij vijf jaar lang als overheidsambtenaar, waarna de aantrekkingskracht van de wiskunde hem terugbracht naar de universiteit, met aanstellingen in Manchester, Exeter, Oxford en Londen. Hij werd in 1979 gekozen tot Fellow van de Royal Society. In 2002 ontving hij een eredoctoraat van de Universiteit van Amsterdam. In zijn dankwoord sprak hij zijn waardering uit dat hem ten langen leste toch nog de titel van doctor ten deel was gevallen. Daarnaast vertelde hij dat hij zich de afgelopen twee decennia bij tijd en wijle op wiskundig vlak meer in Nederland dan in zijn eigen vaderland thuis had gevoeld. Wij zullen in deze bijdrage eerst enkele hoogtepunten van Macdonalds werk uit de jaren zeventig bespreken. Daarna komt zijn werk vanaf midden jaren tachtig over *orthogonale polynomen geassocieerd met wortelsystemen* aan bod. Het was dit onderwerp waarin ons eigen werk nauw met dat van Macdonald was verweven met wederzijdse stimulering, dankzij brieven en gesprekken tijdens de geregelde bezoeken, die hij aan ons land bracht. Het onderstaande is daarom niet alleen een overzicht van Macdonalds werk maar geeft ook een stukje Nederlandse wiskundegeschiedenis.

De wortels van Macdonalds werk

Om iets van het werk van Macdonald te begrijpen is het nodig te weten wat een wortelsysteem is. Deze term wordt uitgelicht in het kader op de volgende pagina. De theorie van wortelsystemen en hun symmetriegroepen is een hoofdstuk in de euclidische meetkunde, dat zich goed laat begrijpen door een tweedejaarsstudent wiskunde met enige kennis van lineaire algebra en groepentheorie. De irreducibele wortelsystemen, die niet te schrijven zijn als directe som van twee kleinere, worden geclassificeerd met letters

$$A_n, B_n, C_n, D_n, E_6, E_7, E_8, F_4, G_2$$

en bijbehorende Coxeter-diagrammen. Maar dankzij het werk van Claude Cheval-

ley uit de jaren vijftig weten we dat zij ook de taal zijn van de combinatorische infrastructuur van de enkelvoudige algebraïsche groepen $G(\mathbb{F})$ over een lichaam $\mathbb{F}$. De representatietheorie van deze groepen geeft aanleiding tot subtiele identiteiten in termen van wortelsystemen, waarmee anderzijds de representatietheorie ook berekenbaar wordt.

Dit inzicht ontstond rond 1925 in het werk van Hermann Weyl met zijn in worteltermen expliciete formule voor de irreducibele karakters van een compacte enkelvoudige Lie-groep, gerealiseerd als een compacte reële vorm van $G(\mathbb{C})$. Weyl bewees zijn formule met transcendent methoden. Een algebraïsche afleiding van de karakterformule met behulp van de kwa-

dratische *Casimir-operator* werd in 1954 door Freudenthal gevonden.

Later herhaalde zich dit in het werk van Harish-Chandra [6] uit 1958 met zijn beschrijving van de elementaire bolfuncties voor een Riemannse symmetrische ruimte $G(\mathbb{R})/K$ met K een maximaal compacte ondergroep van de niet-compacte enkelvoudige reële Lie-groep $G(\mathbb{R})$. De elementaire bolfuncties zijn eigenfuncties van een commuterend stelsel lineaire partiële differentiaaloperatoren, en hierbij speelt ook nu de in worteltermen expliciete uitdrukking voor de kwadratische Casimir-operator een dominante rol.



Ian Macdonald leidt zijn voordracht in bij het verkrijgen van zijn eredoctoraat in 2002.

Wortelsystemen en hun Weyl-groepen

Zij V een euclidische vectorruimte van dimensie n met inwendig product $(\cdot, \cdot)$. Voor $\alpha \in V$ een niet-nulvector noteren we met

$$s_\alpha(\lambda) = \lambda - 2(\lambda, \alpha) / (\alpha, \alpha) \alpha$$

de orthogonale spiegeling in V met het orthoplement van α als spiegel. Een *wortelsysteem* R in V is een eindige collectie niet-nulvectoren in V die V opspant en zo dat

$$s_\alpha(\beta) \in R \text{ en } 2(\beta, \alpha) / (\alpha, \alpha) \in \mathbb{Z}$$

voor alle wortels $\alpha, \beta \in R$. Meestal wordt ook nog verlangd dat $\mathbb{Z}\alpha \cap R = \{\pm \alpha\}$ voor alle $\alpha \in R$. Zo'n R heet dan een *gereduceerd* wortelsysteem. De ondergroep W van de orthogonale groep $O(V)$ voortgebracht door de spiegelingen s_α voor $\alpha \in R$ heet de *Weyl-groep* van R .

Belangrijke resultaten van Macdonald

In deze wereld heeft Macdonald essentiële resultaten geboekt, waarvan wij in chronologische volgorde een drieluik presenteren.

Als eerste werd het p -adisch analoog voor de elementaire bolfuncties op $\mathbf{G}(\mathbb{Q}_p) / \mathbf{G}(\mathbb{Z}_p)$ aangekondigd door Macdonald [15] in 1968. Zijn uitwerking [16] hiervan is gebaseerd op voordrachten op het Ramanujan Institute in Madras in 1970 en is zeer toegankelijk geschreven. Dit boek was exclusief en gratis verkrijgbaar door een brief naar de auteur te sturen. In zekere zin is het p -adische geval eenvoudiger, omdat de elementaire bolfuncties worden gegeven door een expliciete formule (voor $\mathbf{G} = \mathbf{GL}_n$ in termen van Hall–Littlewood-polynomen [20, §V.3]), terwijl dat in de regel niet zo is in het reële geval van Harish-Chandra. Macdonalds expliciete formule was een van de ingrediënten voor Robert Langlands voor het formuleren van zijn vermoedens [12, p. 39].

Om het tweede resultaat te begrijpen zeggen we eerst wat over de *karacterformule van Weyl*. Deze geeft de waarde van het karakter op een maximale torus als quotiënt van twee Fourier-polynomen, die beide scheefsymmetrisch zijn voor de Weyl-groep W . De uitdrukking in de teller bevat een parameter λ — het *hoogste gewicht* van Élie Cartan — die de irreducibele representatie karakteriseert. In de noemer staat dezelfde uitdrukking met $\lambda = 0$ gesubstitueerd, en deze wordt de *Weyl-noemer* genoemd.

De *Weyl-noemerformule* herschrijft de Weyl-noemer als een product over de *positieve* wortels $\alpha > 0$, dat wil zeggen de wortels die aan een kant van een vast gekozen generieke lineaire deelruimte van V van codimensie 1 liggen. In deze formule van

de vorm $\Sigma = \Pi$ staan in de uitwerking van het product termen met plus en min die tegen elkaar wegvallen, waardoor er in de som minder termen overblijven dan aanvankelijk gedacht. Macdonald realiseerde zich dat een zelfde verschijnsel voorkomt bij *Jacobi's tripelproductidentiteit*

$$\begin{aligned} & \sum_{m \in \mathbb{Z}} (-1)^m q^{m(m-1)/2} z^m \\ &= \prod_{n=1}^{\infty} (1 - q^n) (1 - q^n z^{-1}) (1 - q^{n-1} z). \end{aligned}$$

Dit is een klassieke formule in termen van θ -functies waarin q, z complexe variabelen zijn (met $z \neq 0$ en $|q| < 1$) en hij herkende hierin de structuur van het affiene wortelsysteem van type $\tilde{A}_1$. Vervolgens vond hij analoge identiteiten voor alle andere affiene wortelsystemen [17]. Via specialisatie vond hij ook eenvoudige somformules voor η^d met *Dedekinds èta-functie* gegeven door

$$\eta = q^{1/24} \prod_{n=1}^{\infty} (1 - q^n)$$

en d de dimensie van een compacte, enkelvoudige Lie-groep. De theoretisch fysicus Freeman Dyson had voor enkele waarden van d die identiteit ook gevonden. In een belangwekkend artikel [5] betreurde hij zijn gemiste kans, omdat de fysicus Dyson en de mathematicus Dyson niet met elkaar gesproken hadden. Alternatieve bewijzen van de Macdonald-identiteiten werden later gegeven door Victor Kac [8] en Eduard Looijenga [14].

Ten slotte had Macdonald een speciale voorliefde voor de algemene lineaire groep $\mathbf{GL}_n$ en de symmetrische groep S_n , de ‘All-embracing Majesties’ van respectievelijk de lineaire algebraïsche en de eindige groepen, zoals Weyl ze wel liefkozend noemde. De representatietheorie heeft

hier een sterk combinatorische inslag, met methoden die weliswaar elementair maar niet altijd eenvoudig zijn. Eind jaren zeventig schreef hij er zijn invloedrijke boek *Symmetric Functions and Hall Polynomials* [20] over, met een sterk uitgebreide tweede editie in 1995. Voor dit werk ontving hij in 2009 de Leroy P. Steele Prize for Mathematical Exposition.

Macdonalds contact met de Lage Landen

Het zal rond 1984 geweest zijn dat Macdonald te gast was bij zijn goede vriend Tonny Springer in Utrecht, en bij het stafcolloquium een voordracht hield over zijn constantetermvermoedens [18]. Noteren we de Weyl-noemer als

$$\Delta = \prod_{\alpha > 0} (e^{\alpha/2} - e^{-\alpha/2}),$$

dan zegt het *constantetermvermoeden* dat

$$\text{CT}(\Delta^{2k}) = \prod_{j=1}^n \binom{kd_j}{k}$$

voor alle $k \in \mathbb{N}$. Hierbij staat CT voor de constante term van het betreffende Fourierpolynoom, en $d_1, \dots, d_n$ zijn de graden van de fundamentele invarianten van de Weyl-groep van het betreffende wortelsysteem R van rang n . Voor de klassieke reeksen A_n, B_n, C_n, D_n was deze formule bekend dankzij werk van Selberg, Dyson en Good. Maar voor de exceptionele wortelsystemen E_6, E_7, E_8, F_4, G_2 was het nog een open vraag.

In de jaren 1985–87 werkten Gert Heckman en Eric Opdam een theorie van multivariabele hypergeometrische functies uit, die voor speciale waarden van de bovengenoemde parameter k met de bolfuncties van Harish-Chandra samenvielen. Bij hun werk ging het onder meer om de existentie van een stelsel commuterende differentiaaloperatoren, die de gezochte functies als eigenfuncties hadden, dus om een natuurlijke deformatie in k van de commutatieve algebra gevonden door Harish-Chandra. Voor symmetrische ruimten van rang 1, waaronder bijvoorbeeld hyperbolische ruimten, zijn de bolfuncties inderdaad Gaussische hypergeometrische functies (in het compacte geval Jacobi-polynomen), zoals al bij Harish-Chandra stond te lezen. Voor wortelsystemen BC_2 en A_2 had Tom Koornwinder [9], als onderdeel van zijn proefschrift uit 1975, de commuterende differentiaaloperatoren en bijbehorende polynomiale eigenfuncties reeds gegeven.

Ook voor algemene rang waren deze zaken voor wortelsystemen van type A (Jack-polynomen) en BC inmiddels behandeld, met expliciete uitdrukkingen voor de commuterende differentiaaloperatoren (Sekiguchi, Debiard). Maar het ging Heckman en Opdam nu om een uniforme aanpak voor alle wortelsystemen zonder noodzakelijkerwijs expliciete uitdrukkingen.

In het slothoofdstuk [24] van zijn in januari 1988 verdedigde proefschrift lukte het Opdam met analytische methoden de existentie van dit hypergeometrisch stelsel voor algemene wortelsystemen te bewijzen. Dit gaf tegelijk ook de volledige orthogonaliteit van *Jacobi-polynomen geassocieerd met wortelsystemen*. In een verrassende wending liet Opdam korte tijd later zien dat de resultaten uit zijn proefschrift toegepast konden worden om het constantetermvermoeden voor algemene wortelsystemen te bewijzen [25].

Ondertussen had Macdonald in 1987 handgeschreven manuscripten rondgestuurd die de polynomen beschreven welke we nu als Macdonald-polynomen kennen. Zijn eerste manuscript behandelde een klasse van symmetrische polynomen met twee parameters q en t . Deze extrapoleerden zowel de Jack-polynomen als de Hall–Littlewood-polynomen door toevoeging van een q -parameter. Ook gaf hij een expliciet stelsel van commuterende differentie-operatoren waarvan zijn polynomen eigenfuncties waren. In hetzelfde jaar en onafhankelijk had Simon Ruijsenaars [27] dit expliciete stelsel gegeven. In 1988 bewees Koornwinder [10], [20, §VI.6] een zogenaamde *Pieri-formule* voor Macdonalds nieuwe klasse van polynomen door te bewijzen dat er een dualiteit bestaat tussen

de variabele en spectrale parameters. Dit was geïnspireerd door zo'n eigenschap van de continue q -ultrasferische polynomen (waarin Macdonalds polynomen in het geval van twee variabelen worden uitgedrukt). Koornwinder was daar goed mee bekend door het werk van zijn leermeester Dick Askey [1]. Macdonald behandelt genoemde klasse van symmetrische polynomen uitgebreid in [20, Chapter VI].

De volgende twee manuscripten van Macdonald uit 1987 betroffen q -analoge van Jacobi-polynomen geassocieerd met wortelsystemen—het directe q -analogon dus van de polynomen van Heckman en Opdam uit diezelfde tijd, die door een limiet $q \rightarrow 1$ uit Macdonalds polynomen te verkrijgen zijn. Voor wortelsysteem van type A zijn deze polynomen bevat in Macdonalds klasse van symmetrische functies, dus dit zal hem zeker gemotiveerd hebben. Wellicht is het werk van Heckman en Opdam, waarvan hij tijdens een aantal bezoeken aan Leiden in 1987 en 1988 (als spreker en als opponent bij Opdams promotie) direct hoorde, ook een motivatie geweest. De extra q -vrijheid stelde Macdonald in staat om de orthogonaliteit van zijn q -polynomen elementair te bewijzen, en daarmee volgde het resultaat ook in de limiet voor $q \rightarrow 1$. Macdonald gaf voor zijn geval ook vermoedens voor norm en evaluatie in het eenheidselement van de polynomen. In het limietgeval geven die zijn door Opdam bewezen oudere vermoedens. In 1988 bundelde Macdonald de twee manuscripten tot een manuscript [19] en vermeldde er ook Opdams proefschrift en bewijs van het constantetermvermoeden. Zijn polynomen staan nu bekend als *Macdonald-polynomen geassocieerd met wortelsystemen*.

Wat er verder uit voortvloeide

In het voorjaar van 1989 gaf Heckman [7] een torische uitbreiding van het werk van Charles Dunkl [4] (zijn *Dunkl-operatoren*), en daarmee zowel een elementaire constructie van de hypergeometrische differentiaaloperatoren die Opdam [24] langs transcendente weg had geconstrueerd, als ook een elementair bewijs van de orthogonaliteit van hun polynomiale eigenfuncties, én van hun norm en evaluatie in de eenheid. Er rees de vraag naar een q -differentieconstructie voor het geval van Macdonald. Die werd al snel beantwoord.

In het najaar viel in Berlijn de muur en in de zomer van het volgende jaar waren er rond het ICM in Kyoto vele Russen, waaronder Ivan Cherednik. Enkele jaren later waren alle vermoedens van Macdonald door Cherednik in stellingen omgezet [2]. Ivan was niet altijd makkelijk te lezen, maar behulpzame auteurs als Opdam [26] en Macdonald [22] hielpen ons begrijpen. Het sleutelwoord was *Hecke-algebra*: allereerst de affiene Hecke-algebra van Iwahori en Matsumoto uit de p -adische wereld, de gedegenerende Hecke-algebra van Drinfeld [3], en voor de dualiteit tussen variabele en spectrale parameter de *dubbele affiene Hecke-algebra* van Cherednik. De commuterende gegeneraliseerde Dunkl-operatoren hadden *niet-symmetrische* (niet W -invariante) Macdonald-polynomen als eigenfuncties en deze werden onder de symmetrisatie-afbeelding op de symmetrische (W -invariante) Macdonald-polynomen geprojecteerd.

Een andere nieuwe ontwikkeling [11] betreft wat nu bekend staat als *Koornwinder–Macdonald-polynomen*. Dat begon tijdens een werkbezoek van Tom Koornwinder



De erepromotie van Macdonald in de Oude Lutherse Kerk in Amsterdam op 8 januari 2002. Aan het spreekgestoelte Eric Opdam en geheel rechts Gerrit van Dijk.



Greta en Ian Macdonald (links) in Amsterdam tijdens een workshop over speciale functies ter gelegenheid van Tom Koornwinders (midden, met rugzak) 60ste verjaardag in 2003.

Foto: Peter van Ende Boas

Foto: Margrit Rösler en Michael Voit

aan Ivoorkust in december 1987. [Zie ook het interview met Tom Koornwinder elders in dit nummer, red.] Hij vond daar een significante uitbreiding met twee parameters van de 3-parameterfamilie van Macdonald-polynomen geassocieerd met het niet-gereduceerde wortelsysteem van type BC_n (waarbij q nu niet meer als parameter wordt opgevat). Dit was tegelijk ook een uitbreiding tot n variabelen van de 4-parameterfamilie van Askey–Wilson-polynomen [1] in één variabele. Ook voor dit geval formuleerde Macdonald vermoedens en deze konden weer met Hecke-algebra-methoden bewezen worden [22, 28].

In de net beschreven periode vanaf circa 1985 deden ook de *quantumgroepen* hun intrede. Geleidelijk werd duidelijk dat q = quantum: Macdonald-polynomen en (in mindere mate) Koornwinders uitbreiding daarvan leven voor speciale parameterwaarden als bolfuncties op quantumgroepen [13, 23].

De auteurs van dit artikel hebben, elk vanuit zijn eigen perspectief, de hier beschreven periode als enorm fascinerend ervaren. Allerlei ontwikkelingen, voortgekomen uit heel verschillende motivaties, bleken in elkaar te grijpen.



Macdonald tijdens de Amsterdamse grachtenboottocht bij de genoemde workshop in 2003. Naast hem Suzanne Faraut.

Macdonald als persoon

Tot slot nog iets meer over Ian Macdonald als persoon en wiskundige. Hij was een zeer begaafd spreker. Tijdens zijn Bourbaki-voordracht midden jaren negentig [21] zat een van ons naast Jim Arthur, een expert in het *Langlands-programma*. Na afloop was deze even stil en zei toen: “What an outstanding expositor.” Wij voelden ons inderdaad bevoorrecht dat Macdonald zo geregeld in Nederland was om zijn inzichten met ons te delen.

Ian werd daarbij doorgaans vergezeld van zijn Belgische echtgenote Greta. Ian had geen rijbewijs, dus zij chauffeerde en hij las kaart. Tijdens een voordracht begin jaren negentig begon Ian aldus:

“If you have a mathematical problem, there are four things you can do:
1. Prove it. 2. Disprove it. 3. Generalize it.
4. Forget about it.”

Iedereen moest lachen, maar hij was natuurlijk ook gewoon serieus. Als je opties 1 en 2 goed hebt overdacht, dan kun je voordat je er de brui aan geeft altijd nog optie 3 overwegen. Alsof hij zich haast een beetje verontschuldigde dat hij alweer optie 3 ging bewandelen. Steeds bleken zijn generalisaties correcte vermoedens te zijn, en hij was daarmee een stimulans voor anderen.

Ian was ontegenzeggelijk een wiskundige met een zeer klassieke inslag. Tijdens zijn opleiding in Cambridge moet de geest van Hardy en Ramanujan nog hebben rondgewaard. Ian had een zeer uitzonderlijke begaafdheid voor formules, maar terugkijkend op zijn werk zijn al die formules erop gericht de representatietheorie van de enkelvoudige algebraïsche groepen (over een lichaam of ring) beter te begrijpen. 

Referenties

- R. Askey en J. Wilson, Some basic hypergeometric orthogonal polynomials that generalize Jacobi polynomials, *Memoirs Amer. Math. Soc.* 319 (1985).
- I. Cherednik, Double affine Hecke algebras and Macdonald's conjectures, *Ann. Math. (2)* 141 (1995), 191–216.
- V.G. Drinfeld, Degenerate affine Hecke algebras and Yangians, *Funct. Anal. Appl.* 20 (1986), 58–60.
- C.F. Dunkl, Differential-difference operators associated to reflection groups, *Trans. Amer. Math. Soc.* 311 (1989), 167–183.
- F.J. Dyson, Missed opportunities, *Bull. Amer. Math. Soc.* 78 (1972), 635–652.
- Harish-Chandra, Spherical functions on a semisimple Lie group I, *Amer. J. Math.* 80 (1958), 241–310.
- G.J. Heckman, An elementary approach to the hypergeometric shift operators of Opdam, *Invent. Math.* 103 (1991), 341–350.
- V.G. Kac, Infinite-dimensional Lie algebras and Dedekind's η -function, *Funct. Anal. Appl.* 8 (1974), 68–70.
- T.H. Koornwinder, Orthogonal polynomials in two variables which are eigenfunctions of two algebraically independent partial differential operators, I, II and III, IV, *Indag. Math.* 36 (1974), 48–66, 357–381.
- T.H. Koornwinder, Self-duality for q -ultraspherical polynomials associated with the root system A_n , (1988), ongepubliceerd.
- T.H. Koornwinder, Askey–Wilson polynomials for root systems of type BC , *Contemp. Math.* 138 (1992), 189–204.
- R.P. Langlands, Problems in the theory of automorphic forms, in *Lectures in Modern Analysis and Applications, III*, Lecture Notes in Math. 170, Springer, 1970, pp. 18–86.
- G. Letzter, Quantum zonal spherical functions and Macdonald polynomials, *Adv. Math.* 189 (2004), 88–147.
- E. Looijenga, Root systems and elliptic curves, *Invent. Math.* 38 (1976), 17–32.
- I.G. Macdonald, Spherical functions on a p -adic Chevalley group, *Bull. Amer. Math. Soc.* 74 (1968), 520–525.
- I.G. Macdonald, *Spherical Functions on a Group of p -adic Type*, Ramanujan Institute for Advanced Study in Mathematics, Madras, 1971.
- I.G. Macdonald, Affine root systems and Dedekind's η -function, *Invent. Math.* 15 (1972), 91–143.
- I.G. Macdonald, Some conjectures for root systems, *SIAM J. Math. Anal.* 13 (1982), 988–1007.
- I.G. Macdonald, Orthogonal polynomials associated with root systems (1988), aanvankelijk ongepubliceerd, later verschenen in *Sém. Lothar. Combin.* 45 (2000), B45a.
- I.G. Macdonald, *Symmetric Functions and Hall Polynomials*, Clarendon Press, 1995, Second Edition.
- I.G. Macdonald, Affine Hecke algebras and orthogonal polynomials, *Astérisque* 237 (1996), 189–207.
- I.G. Macdonald, *Affine Hecke Algebras and Orthogonal Polynomials*, Cambridge University Press, 2003.
- M. Noumi, M.S. Dijkhuizen and T. Sugitani, Multivariable Askey–Wilson polynomials and quantum complex Grassmannians, in *Special Functions, q -Series and Related Topics*, Fields Institute Communications 14, Amer. Math. Soc., 1997, pp. 167–177.
- E.M. Opdam, Root systems and hypergeometric functions IV, *Compositio Math.* 67 (1988), 191–209.
- E.M. Opdam, Some applications of hypergeometric shift operators, *Invent. Math.* 98 (1989), 1–18.
- E.M. Opdam, Harmonic analysis for certain representations of graded Hecke algebras, *Acta Math.* 175 (1995), 75–121.
- S.N.M. Ruijsenaars, Complete integrability of relativistic Calogero–Moser systems and elliptic function identities, *Comm. Math. Phys.* 110 (1987), 191–213.
- S. Sahi, Nonsymmetric Koornwinder polynomials and duality, *Ann. Math. (2)* 150 (1999), 267–282.

Sharmila Gunasekaran

IMAPP

Radboud University Nijmegen

sharmila.gunasekaran@ru.nl

Column New Impulse

Across the pond from Toronto to Nijmegen

In this column, researchers who have been recently appointed to one of the Dutch mathematics institutes, introduce themselves.

My name is Sharmila Gunasekaran. I am an assistant professor in mathematics at Radboud University. I'm originally from Coimbatore, Tamil Nadu, India. After high school, I pursued a combined undergraduate and master's degree called Integrated Master of Science in Physics. It's a 5-year program. Then, I moved to Canada for my graduate studies, where I lived for the last ten years before becoming an assistant professor in Nijmegen.

I always wanted a research career, but I didn't settle on mathematics until later. I initially studied physics, but it was during my fourth year when I learned about general relativity that I started leaning toward mathematics. So, I decided to pursue a PhD focusing on mathematical problems in general relativity. I did an MSc in mathematics to fill in some gaps before starting my PhD.

During my postdoc at the University of Alberta, I worked on Quasi-Einstein manifolds with Eric Woolgar, Eric Bahuaud and Hari Kunduri. My time in Alberta was enriching, even though it was during the pandemic with lockdowns. I also spent a year at the Fields Institute as part of a thematic program before coming here.

It was during my postdoc in Toronto that I learned about an opening at Radboud University. I wasn't considering moving continents, but the presence of many international researchers at the Fields Institute's program meant I could explore and discuss opportunities. A colleague, Annegret Burtscher, encouraged me to apply. I liked that there's a great concentration of people working in all aspects of general relativity here, so I decided to make the jump across the pond. I'm grateful for Annegret's support since I decided to move.

Navigating the academic landscape here has been a learning curve, with variations in structures, lecture arrangements, assessment methods, and research funding compared to North America. Adapting to these differences has been an ongoing process, but amidst the professional challenges, I find solace in

the fact that the university and city have ample opportunities for relaxation and recreation. Outside of work, I find joy in playing badminton and volleyball and listening to music (for example Hindustani music played by Saskia Rao de-Haas on her cello), debates and podcasts (like *The New Yorker's* fiction and poetry podcasts or *99% invisible* on art, architecture and design). I indulge in some light reading. I was taking music lessons during my PhD which was interrupted due to scheduling conflicts, but I hope to revive that soon.

I miss some small everyday pleasures like being able to read and understand ads placed at bus stops and shops and the names of local restaurants and coffee shops. Overall, not knowing Dutch has a substantial effect — hopefully, I can change that in a few years. The familiarity of the hills and mountains in Canada is something I long for, a stark contrast to the flat landscapes here.

Research-wise, the department is diverse and international. There is a chance for me to use the diverse expertise here to solve interdisciplinary problems and work on questions relevant to current gravitational experiments. I hope to do this long-term. 



Teunis M. Klapwijk

Kavli Institute of Nanoscience, TU Delft, and
Descartes Centre, Utrecht University
tmklapwijk@gmail.com

History

Medieval surveying of wetlands with a shadow quadrant

Last year Teunis Klapwijk wrote his Master Thesis *The Frisian Maasland wilderness and Lotharingian learning in the early 11th century*. This article, based on this thesis, is about the very early influence of Arabic geometric knowledge via Lorraine to the area south of Delft. From the perspective of the history of mathematics, it means a diffusion of knowledge through practice, a hundred years before translations from Arabic to Latin emerged. That is why it is also interesting as a cross-cultural phenomenon. In addition, it is a first report, that shows clearly why an astrolabe is useful for wetland surveying.

The arrival of the tangent

The history of trigonometry as written by Glen van Brummelen [4] begins with the use of the sine and the development of the sine-table in the context of astronomy. The tangent (and cotangent) appear in the study of sundials. They are used in the quantification of the length of a shadow cast by a stick, a *gnomon*, placed perpendicular to the surface of the earth and exposed to sunlight. The relevant quantity is the ratio of the length of the stick to the length of the shadow or the inverse. Van Brummelen discusses the topic further by describing the work of several scholars in the Islamic world, in particular Abū'l Wafā (AD 940–998) and al-Bīrūnī (AD 973–c.1048). Note that both lived at the turn of the millennium, a period in which Arabic-Islamic science flourished.

Shifting the attention to the developments in the Latin West, van Brummelen leaves astronomy as the main driver for trigonometry and moves towards practical geometry (p. 223). The words *Practica Geometriae* concern, in particular in the 12th century, the determination of heights and depths by focusing on the ratio of two lengths perpendicular to each other [24, 26, 29]. Intriguingly, in describing this

type of measurements the use of an Islamic instrument, an astrolabe, is mentioned in the early 12th century by Hugh of St. Victor [26]. The mathematical content of the method is explained and taught using similar triangles with a common angle, which brings us also to tangents and cotangents. The earliest appearance of this type of surveying in the Latin West is in a text called *Geometria Incerti Auctoris*, which is attributed by Menso Folkerts [7, 8] to a Lotharingian author from the middle of the 11th century. This means that it coincides chronologically with a scientifically productive time in the Arabic-Islamic world.

These bits and pieces of information suggest that part of the history of trigonometry, including the cross-cultural exchange between the Arabic-Islamic world and the Latin West, may be revealed by studying practical geometry. The practice of surveying is often discussed in the context of determining areas of irregularly shaped fields, and interpreted as useful for taxation. However, surveying is also important to lay out a design to construct a cathedral and to monitor its integrity [31]. In this article I focus on the latter type of surveying, but instead of the construction of a cathedral, I focus on the construction of

the geometrical pattern of the landscape in the western part of the Netherlands. These large patterns are unthinkable without the support of skilled work of surveyors. Their work on a large scale, which started in the first two decades of the 11th century, turned wetlands into agricultural soil. In my recent study [15] this landscape has been used as a source of historical information to reconstruct the specific surveying practice used in this application. It appears to be an early and influential intersection between the Arabic-Islamic world and the Latin West.

Exploiting the wetlands: the 'cope'

The estuary of the Rhine-Meuse delta was initially a vast inaccessible wetland, which was converted, from the early 11th century onwards, into new agricultural territory. The practice meant that excess water had to be removed from largely unused wetlands (peat) by interspersing them with drainage channels, which resulted in usable fertile soil. A striking element of the methodology were the long farming areas with identical width-to-length ratios, expressed in integers as, for example, 1:24 [10]. This new approach had an advantage in providing equal economical starting conditions for several farmers at the same time. These two aspects together, meant that a large geometrical pattern had to be set out (Figure 1) in a swampy environment in preparation of the actual work of digging drainage-ditches. The undrained morass-like area is difficult to access on foot because of its non-uniform wetness with many sinkholes. Access to such a

surface requires at every step the use of a stick to test the depth of the swamp before proceeding. Alternatively, one follows the natural creeks by canoe until one finds a relatively dryer patch. These conditions must have formed a major challenge for the wetland-surveyors, for which a new approach was a solution, which, as far as we know, was applied first in Western Frisia (presently called Holland). The resulting new geometrical patterns became known as ‘cope’, an often occurring word in the toponyms of the Holland-Utrecht lowlands [17,18].

An example with an emphasis on the hydrological and agricultural aspects is shown in Figure 1. It is inspired by the analysis of Chris de Bont, a historian of geography [2]. The dark blue line indicates a canal which connects to a natural watercourse, which discharges ultimately into the sea. The light blue lines are ditches dug in the wetlands at a suitably chosen mutual distance d , which is the basic length-unit of the design. In the example, the ditches have an arbitrarily chosen length of $16d$ and the whole geometrical unit consists of eight farms, with at the end an additional ditch, parallel to the discharge canal. Through this extra ditch at the end one avoids that the area close to the end becomes unusable because of water emerging out of the uncultivated peat. The natural water-flow is from right to left, which should agree with the inclination of the peat bog. The peat itself is represented as a rugged, brownish landscape, representing the natural inhomogeneity of the swamp. The mutual distance d is based on the ex-

perience of the local farmer in using the soil. The purpose of the ditches is to drain the peatland to a level at which the soil is dry enough for agriculture for most of the year. Hence, there is a balance between the average rainfall and the diffusion of the excess water through the peat to the ditches. The distance is therefore determined by an empirical hydrological parameter representative for this water diffusion process. The parallel running ditches assure that over the whole length the soil experiences uniform wetness-conditions. If d is chosen too large, the farmer will encounter too wet soil conditions for more days of the year.

All blue lines were visible in the landscape and may even persist until the present day. They represent the hydrological functionality. The white dashed lines are included to assist in explaining the work of the surveyor, whose work is needed to prepare the peatland before constructing the geometrical block of eight farms. Note that the construction is quite different from constructing a building, which involves assembling and stacking material. In the case of peatland, the main action to be taken is removing material, which means digging a canal and the trenches in the right direction. But this digging has been done in such a way that it leads to a unit which is geometrically correct to fulfil the requirements of obtaining eight identical farms of the same degree of dryness and area, suggesting for this specific example a settlement which could be called in Dutch ‘Achthoven’ indicating eight identical farms. How does one proceed to achieve the ‘sameness’ [19]?

Geometrical grids

In studying the early implementation of the method [15] it was inferred that the surveyors used units of a width-to-length ratio of 1:2, which are depicted by the white dashed lines in Figure 1. In the example, one farm has a property with a length of 8 times a basic double-square unit. The ratio of 1:2 occurs also for the dimensions of the whole block. As soon as one has taken into account the material properties, the methodology is quite generic, leaving freedom to take a larger area by making longer farms and of course making more of them in parallel. The purpose of this section is to explain how the preference for farms with a width-to-length ratio of 1:24 is connected to an interlocked geometrical structure based on double-square units.

One of the challenges in creating a landscape with identical units is that the size exceeds the human scale. The commonly used instrument of the Romans to overcome this problem is the *groma*. It is a pole with a horizontal cross on top, made of two rigid rods perpendicular with respect to each other. At each end a plumb line is attached. The four arms of the cross are pulled downwards by identical weights, to ensure that the cross is horizontally level. By lining up visually two of these plumb lines, one direction is fixed, while a line perpendicular to the first is the line viewed along the two other plumb lines. The length along these two orthogonal directions is measured linearly by using some reference length, often called a *decempeda*, a length of ten feet.

In covering a large area one creates a large grid of squares, which requires a rigid network of squares. Starting with one square one will find that in a first attempt one ends up with a square which deviates from the desired properties of an ideal square. The square is most likely slightly distorted, although this is not easily notable by the human eye in the field. A common solution [19] is to check the length of the diagonal. We know that it should be equal to $\sqrt{2}$, which is an inconvenient irrational number. However, fortunately it was known, also in the medieval Latin world, that it is quite accurately given by a ratio of two whole numbers: $\sqrt{2} \approx 17/12$. Given this insight it is convenient to construct a square grid of units with sides equal to 120 feet, 12 *decempeda*, and check, when expanding the grid, continuously the diag-

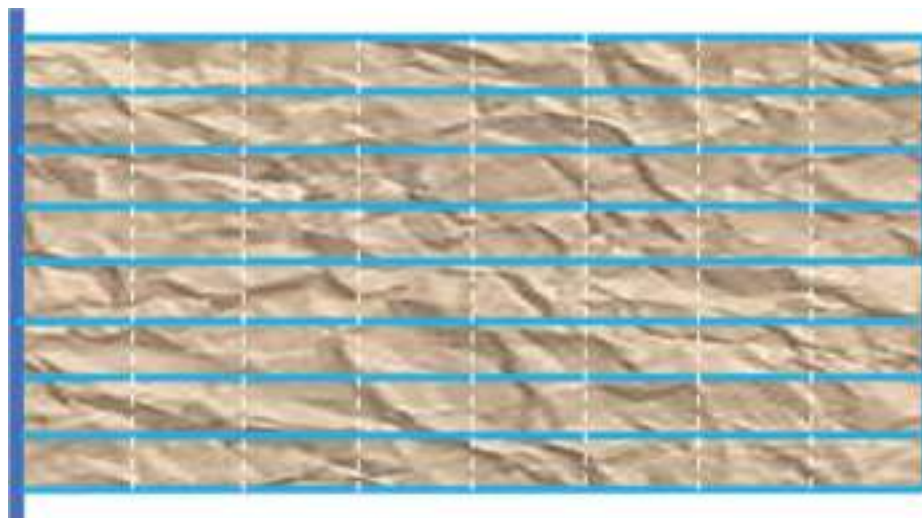


Figure 1 A sketch to represent a possible lay-out of eight farms in a peatland environment taking into account primarily hydrological and agricultural considerations [2].

onal is 170 feet. Through this measuring and checking one expands the grid, giving a regular grid divided into equal square cells. When completed it may consist of a large rectangular unit, as if it has been laid down from a bird's eye perspective. All these measurements are linear measurements in units of a locally accepted measuring standard.

Although such a *centuration* is frequently encountered in Roman settlements, this is quite different from the medieval settlements found in the western part of the Netherlands. The difference is significant because the knowledge of the Roman *agrimensores* was taught routinely in the medieval abbeys and cathedral schools, because of the importance of agriculture for the economy of these institutions [8,19]. The geometrical structure of long agricultural units separated from each other by carefully aligned ditches, running in parallel, is abundantly present in cultivated peatlands. Their interpretation based on hydrological arguments, as summarised in Figure 1, is quite generally accepted. However, these standard large scale geometrical structures are difficult to construct in wetlands by following the practice taught by the Romans. The wetness of the soil makes the process of walking around with a measuring rod, the *groma*, and checking frequently for the diagonal very cumbersome. An innovation is needed not only for the hydrological functionality but also for the surveying methodology.

In textual sources a number of extra pieces of information are available, which refer to or specify the dimensions of the geometrical structures. None of them appear to be the result from hydrological or agricultural requirements. They have been collected together in Figure 2 and I will argue that this gives information about the applied surveying methodology. Prior to discussing a number of details the main conclusion is that the surveyors used in practice a basic unit with a width-to-length ratio of 1:2 (Figure 2), with a length which appears in texts with the word *vore lanc* or *voorling*. A particular striking piece of information is the Bremer contract from 1106, which speaks about the creation of hundreds of farms with a length of 720 rods and a width *d* of 30 rods, separated from each other by ditches [10,17,18]. This contract with *Hollandi* is clearly based on an established concept, traces of which are visible in the landscape northeast of Leiden and south of Delft. By combining it with information from textual sources [17,18] this results in fields with a length of 60 rods stitched together in one direction to a maximum of 12, making a total length of 720 rods. This suggests that the original concept can be called *twaaflhoven*, meaning a total unit of 12 farms consisting of 12 units in parallel with a ratio of width-to-length ratio of 1:24, each constructed from 12 units of a width-to-length ratio of 1:2 (cf. Figure 2). This means that to construct a rigid geometrical grid the square of the Romans is replaced by a rectangle of

two squares. As I will argue these specifics are compatible with the proposed surveying methodology.

A construction with basic units with a width-to-length ratio of 1:2 means that it poses even more challenges to maintain the rigidity of the grid by repeatedly measuring the diagonal. In this case it should have, instead of a length of $d\sqrt{2}$, a length of $d\sqrt{5}$ rods. For $\sqrt{5}$ an approximation of comparable accuracy is $\approx 161/72$. Since this is certainly not a simplification in comparison to using squares, another reason must have facilitated this change. Fortunately, an indication is provided by the emergence in the 11th century of the subject called *Practica Geometriae* in the Latin world, which is based on the *quantitative* use of *visual* information [4,24,26,29].

Early example near Delft

The specific lay-out with the emphasis on the numbers and ratios, shown in Figure 2, appears to be related to the earliest examples of systematic developments of wetlands, which can be partially inferred from textual material and accurate maps. The argument leading to the construction of a grid based on units with a width-to-length ratio of 1:2 is based on the arrival of the subject of *Practica Geometriae*, which emphasises the use of a visual method advertised for the determination of heights of towers and depths of wells. However, *Practica Geometriae* was not taught in the Latin world in the context of surveying, although such a lateral application appears in texts from the Arabic-Islamic world. To obtain further clarity about the surveying methodology used in 11th century Holland. An indication is provided in a text called *De diversitate temporum* written between 1021–1024 by Alpertus of Metz. He reports that count Dirk III and “his men divide the land in a way that each one of them obtains a lot for agriculture” [21]. Our interest is in additional evidence for the early use of visual information. Fortunately, such evidence is apparent in the area around the city of Delft [15].

The beginnings of the systematic cultivation-history of the estuary in the western part of the Netherlands can be identified in Rijnland and Delfland [17,18]. Both names are used, even today, to indicate the watermanagement bodies. The first one refers to the borders of the Old Rhine, which passes through Leiden. The area shows archaeological continuity dating back to the

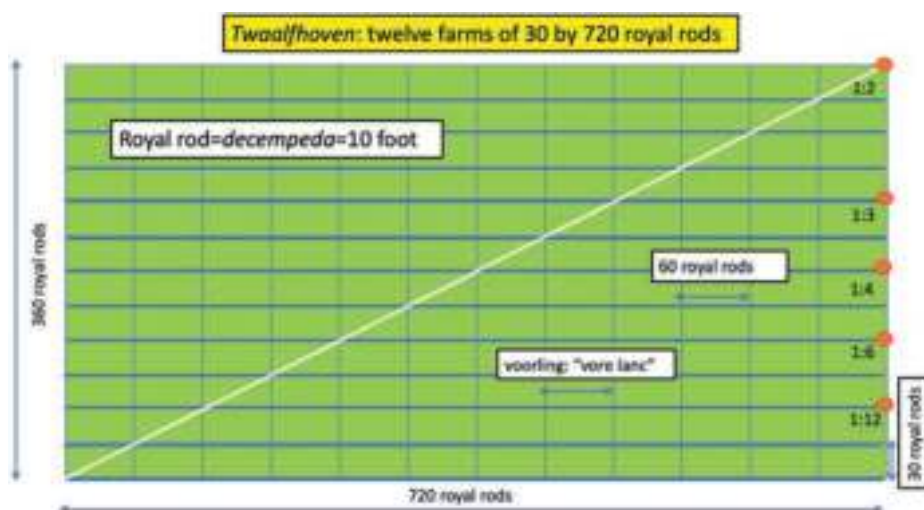


Figure 2 A sketch of the inferred lay-out of the initial approach to wetland-planning using the basic principles of the Roman *agrimensores*, but modified by the use of the optical method for angles with a fixed length to width ratio. Note that the horizontal separations between the parcels are drainage-channels. The vertical lines marks the end of each ‘voorling’, the length unit used in the textual material. The diagonal (white arrow) represents an angle of $\arctan(0.5) \approx 26.6^\circ$, consistent with a length of the diagonal equal to $\sqrt{5}$ times the width.



Figure 3 Selection of the map of Kruikius of the area Delfland, just south of the city of Delft (1712). In the red circle the name St. Maertensrecht refers to a property of St. Maerten's church in Utrecht. The two yellow lines indicate edges of two reclamation-blocks, between them a piece called *Ruyven* indicating unreclaimed peatland 'ruvene'.

occupation by the Romans with the Rhine as the main artery for transport and also as a boundary marker for the Roman empire. In the following centuries the waterflow through the Rhine diminished considerably because of the formation of the *Lek* and the *Hollandse IJssel* who both cut across the vast peatland discharging the excess water in the Maas-Merwede system. Around the turn of the millennium this Maas-Merwede system had become the main traffic route from Northwestern Europe towards the North sea. It had raised the importance of the area called Delfland. In its name, meaning 'delled land', it already refers to human action. The name itself is currently used for its watermanagement body, a reminder of the fact that a large part is below sea-level and needs continuous pumping to prevent flooding. These artificial living conditions started with the creation of '*de Delf*' a more or less linear watercourse constructed in the 11th century [21] with a length of about one kilometer. From a mathematical point of view, its linearity is a pretty strong statement, which deserves further scrutiny. In addition, the statement speaks about a finite length expressed in modern units of measurements. The significance, or insignificance, of both must be discussed in the context of the 11th century.

We are fortunate that the administration of Delfland has ordered around 1712 an accurate documentation of the landscape in the form of very high quality maps of the area [30]. They are based on data measured

by triangulation and printed by the same professionals, named Kruikius, whose interest was in getting the maps as accurate as possible within the possibilities of the 18th century (Figure 3). Their accuracy can still be verified in present-day landscape structures. Nevertheless, it might come across as a leap of faith to assume that the landscape, that was accurately registered in 1712, contains also direct information from medieval times. In justifying such a claim, which I make, one needs to take into account that the watercourses of Delfland are constructed in the wet material called peat. The occupation of the swamps meant the creation of canals, both to get access to parts with more dry peat, and to obtain a surface suitable for agriculture (Figure 1). It is now well known that over the ages the surface erodes, which leads to its gradual lowering [2]. Fortunately, this vertically oriented erosion only rarely leads to lateral changes. So the direction of the early watercourses in the peatland may be preserved even if the surface, over the ages, got several meters lower. This means that, unless significant interaction with the sea closer to the coast provides disruptive forces, the watercourses of 1712 retain the geometrical structure chosen at their construction.

Figure 3 shows the area south of the city of Delft overlaid by a few differently coloured lines. The two yellow ones illustrate the extension of the lower side of the rectangle in which Hof van Delft is written, and the

upper side of the part just below the name Ruyven, next to another rectangle called Abtsregt. The name Ruyven is a name derived from 'ruvene', meaning 'uncultivated peat', which signifies that it was between two cultivated blocks. The two yellow lines come together at a town called Schipluyde (present-day Schipluiden). This village is located at a meandering creek known as the Gaech (Gaag). The two extrapolated yellow lines signal the presence of one object which has been used as a visual beacon in the landscape to create the sides of the two structures south of Delft. This beacon could have been some dwelling at the western side of the Gaech. However, another possibility is that the line points to a farmstead on the eastern side of the Gaech, because it is connected to a long stretch of land extending eastwards, which is labeled as *St. Maertensrecht* (red circle). This name indicates that it was owned by the bishopric of Utrecht, in particular St. Martin's Cathedral. It is common in case of remote ownership also to own a farmhouse, usually called an *Uithof*. A few centuries later, a castle was erected at this location known as *Keenenburg*.

The two yellow lines clearly indicate the common use of visual information for the construction of straight lines in the landscape with a length of about two kilometres and a beacon at a distance of at least another three kilometres. In addition, we have highlighted a number of parallel lines as well as perpendicular lines (blue and white lines), which are associated with the northern block. The blue line indicates the part of the original and present *Delf*, whereas the white lines are boundaries of a block in the landscape. A search of possible locations that could have been used as a beacon to construct the blue and white straight segments turned out to be unsuccessful. This led to the conjecture, that the collection of four lines were part of a rectangular geometrical structure. The conjecture was also inspired by information about areas, which were developed later, where the 'cope' had become a dominant feature. The upper right hand corner of the rectangle is where currently the settlement *Delfgauw* is located. The road from there to the south is presently known as the *Zuideindseweg*. Note that this road, despite of a distance of 2.4 km, runs parallel to the canal the *Delf*. Another significant detail is that just above the upper left-hand

corner an important archaeological site is present, known as *Koningsveld* [28]. At this location the Abbey of Koningsveld was created in 1246 by Ricardis, aunt of count Willem II of Holland, who was also emperor of the Holy Roman Empire. This property was donated to her while referring to it as the former *curtis* of the family of the count [20], which was since then relocated to the site of the city of Delft.

The conclusion is that these remnants, visible on a map of 1712, and also today, refer to the construction of a rectangle, as shown in Figure 2, in an area dominated by peat, with the fingerprints of the counts of Holland as the actors. The archaeological information collected at the site of the Abbey of Koningsveld and the supplementary textual information points towards an occupation in the early 11th century [28]. The dimensions of the rectangle are of the order of 1.2 km wide and 2.4 km long, which suggests that a large rectangular structure was created with outer dimensions, in agreement with the sketch of Figure 2, having a width-to-length ratio of 1:2. Finally, it confirms that the dimensions were intended to provide identical areas for each farmer and were obtained with a surveying methodology designed to cover a large area based on a rigid grid-structure. Its orientation, which should support the desired waterflow, should be implemented with the needed geometrical rigidity for which a clearly visible object in Schip-luiden was used. (The distance between the Zuideindseweg in Delfgauw and the Delftse Schie is according to Google Maps 2.32 km, which assuming a distance of 7200 foot implies that the surveyors have used as a standard a foot of about 32 cm. The empirically relevant distance between the original drainage trenches must have been about 96 m.)

The shadow quadrant

The early 11th century wetland lay-out of Holland, as suggested in Figure 2, is more complicated than the one transmitted from the Roman *agrimensores* but would be compatible with the principles of the *Practica Geometriae*. However, the *Practica Geometriae* appears in Latin texts, which are from a later date and do not refer to the surveying as described here. But in these texts, which describe the measurements of heights of towers and depths of wells an instrument, called an astrolabe [3, 14, 22],

is used. Therefore it is worth to study how an astrolabe might have been used to create the pattern shown in Figure 2.

In turning the attention to an astrolabe, in the spirit of the *Practica Geometriae*, one must focus on the backside of the astrolabe as depicted in Figure 4. It shows a drawing from a medieval manuscript of the *Bibliotheca Vaticana* and a more detailed one from the historian of astronomy John North [22]. The latter can be used to explain the use for surveying. The crucial ingredients are the rotatable *alidade* and the *shadow quadrant*. The markings on the periphery of the circular plate are ignored, because they are not relevant for the present discussion but rather for astronomy [23]. The alidade rotates around a sharply defined point in the center. The hands of the alidade are constructed in such a way that one side lines up exactly with the center of rotation. At the end of these hands a visor is mounted which allows for the selection of a line of sight which goes through the center of rotation and along the two aligned sides of the hands. The red arrow has been added to identify one particular direction for a ray of light. It can be approached by rotating the alidade until the point is reached where the sides of the hands are in the direction of the red arrow. The second item is the shadow quadrant of which in the left drawing, in a medieval manuscript, only one is sketched whereas in the more accurate modern drawing, two are present. Each of the sides of the quadrants is divided into 12 units. They are called shadow quadrants because they can be used to determine the hour of the

day, but they are also used for measuring in *Practica Geometriae*. For example, the direction of the red arrow cuts the vertical part of the quadrant at 6 units, whereas the distance from the central point to this vertical is 12 units. The direction of the red arrow is at an angle for which the ratio between the opposite side and the adjacent side, in other words the tangent, is 6:12 or 1:2. This is true for any similar triangle, which makes it possible to scale a length at a distance to a smaller length nearby. Taking these divisions one notices that one has available a number of angles with suitable ratios: 1:2, 1:3, 1:4, 1:6, 1:12 and even 1:24. Rather than using the full range of values of the tangent one has a few selected angles available with convenient ratios of whole numbers.

With this information it is easy to understand the lay-out shown in Figure 2. For practical reasons one has chosen to construct with a grid for which the width-to-length ratio is 1:2. By using the shadow quadrant the verification for 1:2 is, in comparison to 1:1, reduced to choosing simply another angle for the alidade. The length of the 1:2 diagonal is about 190 meter, which allows for both voice- and vision-communication in the field. Using such a unit one can stitch together the full pattern, with various ways to check the rigidity. For example, in Figure 2 with the red dots at the right hand side the various points are indicated corresponding to the different angles and ratios mentioned above. Through these one can check and ensure the rigidity of the whole block and also the rigidity of the various parallel running lines, as



Figure 4 Left: Drawing of the backside of an astrolabe showing a shadow-quadrant in a manuscript dating from before 1054, written by Hermann of Reichenau (*Bibliotheca Vaticana*, lat. 598 f. 119'). Right: Accurate sketch of the backside of an astrolabe including the alidade. The red arrow indicates a possible direction of the line of sight [20] representing an angle for which the horizontal length is twice as long as the vertical length.

well as of the boundaries. The initial orientation of the block is to be based on the inclination of the local landscape to use the natural direction of the waterflow. The beacon at Schipluiden is most important at the initial stage when the first unit is being constructed. It can also be used for a check when several units are placed in a row. After the surveyor has laid out the desired pattern the actual construction consists of the removal of peat along a number of straight lines, i.e. just digging the trenches. This sheds light on the fact that in text about the early settlements of Esselijkerwoude and Rijnsaterwoude northeast of Leiden, the size of the farms is expressed with a length of 12 ‘voerlinc lanc’ later becoming the word ‘voorling’. It is a measure for a length of the basic unit, used to construct the whole block. The practice of the construction means digging a ‘voor’ in the peat of that length. The specific length in the medieval text is a remnant of the practice of laying out a grid in wetland by using the shadow quadrant. Similarly, the requirements of the size of the farms, expressed as 1:24 through 30 rods by 720 rods, mentioned in the Bremer contract of 1106, follows from this practice.

Lotharingia

The identified wetland-technology contains several specific geometrical elements, which tie the early history of the western part of the Netherlands, through the astrolabe, unexpectedly strong to the Arabic-Islamic knowledge. Also strikingly, the local ruler Dirk III became in 1018 the subject of a raid at the instigation of Emperor Heinrich II by a coalition of bishop Adelbold II of Utrecht, bishop Balderik of Liège and count Godfried of Verdun (nicknamed ‘the prisoner’). The raid failed, but the composition of the coalition suggests that the local ruler Dirk III was taken seriously in his actions in the wetlands. He was obviously expanding his territory in a way which drew widespread attention and invoked a perception of power. Given the early stage of the development of the area it is unlikely that military or economic power was the main source of concern, although control of the traffic by merchants to the North Sea did play a role. The present analysis of the actions of count Dirk III indicates, at least in retrospect, that his power might have been, perhaps partially, the effective use made of the newly arrived

Arabic-Islamic knowledge. The effectiveness in supporting the large-scale expansion of territory into peatland may have been a striking message. How does Dirk III fit into the *upper strata* of the educated community of North Western Europe?

In the 10th century a leading intellectual in Lotharingia was Gerbert of Aurillac, who would later become pope Sylvester II (999–1003). Gerbert was born around 946 in Auvergne and died in Rome on May 10th, 1003. He studied in Spain, from where he moved to Rome. Here he attracted the attention of the German emperor Otto the Great, who chose him to educate his son Otto II. A few years later Gerbert was appointed to lead the cathedral school of Reims, a position through which he became an educator of quite a few intellectuals and sons of the ruling elite. In his teaching he clearly deviated from the standard program of the medieval *quadrivium* in particular with respect to astronomical and geometrical topics. For example, in 984 he writes to a certain Lupitus of Barcelona to request a copy of his Arabic-to-Latin translation of a book on astronomy [21]. A large fraction of Gerbert’s correspondence is extant, including an answer to a question raised to him by the scholar Adelbold II, who would become bishop of Utrecht in 1010 and who played a key role in the events of 1018. Adelbold, born in 975, was asking about how to determine correctly the value of the area of an equilateral triangle with height h and base a (see [9] pp. 48–49), for which Gerbert provides the correct route to the answer. They clearly know each other well and Gerbert respects Adelbold’s qualities as a scholar. It meant that in 1018 archbishop Adelbold II was well-prepared to appreciate the new knowledge, which was apparently used effectively in Frisia. A few years after this collision of forces, in 1025, two scholars Ragimbold of Cologne and Radolf of Liège exchange letters discussing the difference between acute, right and obtuse angles [12, 27]. This discussion is very well known in the history of science, most often quoted as an indication of the low level of mathematical knowledge in the Middle Ages. In one of these letters Radolf also refers to an astrolabe in his possession, which he likes to copy, but offers to show it to Ragimbold [3]. Details are missing but the context of their exchange is geometry, which suggests that the use in surveying may have been part of the conversation,

rather than astronomy. The use of an astrolabe in astronomy becomes prominent in the texts attributed to a scholar in the Abbey of Reichenau, Hermann the Lame, born in 1013 and deceased in 1054. He is credited for having written the first understandable text in Latin about the construction and function of an astrolabe for astronomical purposes [13] in the 3rd or the 4th decade of the 11th century. This sequence of events suggests that the astrolabe may have arrived in Lotharingia first and put to use in surveying of the wetlands as testified by the landscape. The subsequent appearance in the exchanged letters and in explanatory texts is most likely a testimony of a learning process of scholars in response to proven practice.

Given these traces of increasing interest and awareness of the Arabic-Islamic heritage the biographical details about the upbringing of the Frisian count Dirk III are important. His grandfather died in 988 while having received from king Otto III in 985 the rights to own and develop the land between the Liora (currently De Lier) and the Hollandse IJssel, the area which was to become Delfland. In this arrangement in which the widow of Otto II, the empress Theophanu (of Greek descent), played a key role, diplomacy of Gerbert and archbishop Egbert of Trier were crucial. In the negotiations count Siegfried of Luxemburg worked together with Egbert on behalf of the diocese of Trier. Notably, archbishop Egbert was the second son of Dirk II, while the oldest son Arnulf, father of Dirk III, was married to Liutgarde, the eldest daughter of Siegfried of Luxemburg. After the death of Dirk II in 988 the rightful heir was Arnulf, which meant that the Luxemburg family as well as the Frisian family had through their family-ties a strong interest in the whereabouts of Frisia. Unfortunately, in an attempt to implement his rule Arnulf was killed in battle in 993, which leaves Dirk III, still a minor, as the heir to the property in Holland (at the time still called Frisia). It means that the assigned ownership of the land between Liora and the Hollandse IJssel was resting on the shoulders of a minor, Dirk III, under custody of his mother Liutgard of Luxemburg. In comparison to possible alternatives the most likely place for the educational upbringing of Dirk III in 993 was the Abbey of Echternach in present-day Luxemburg [15]. The cathedral school of Reims was no longer in the

secure hands of Gerbert and Liège had not developed yet into prominence as the Athens of the north. In contrast Siegfried of Luxemburg had been consistently building a well functioning school and library at the Abbey of Echternach, in collaboration with the archbishop of Trier, Egbert.

Is there any sign of Arabic-Islamic influence on the intellectual conditions of the Abbey of Echternach from 993 onwards? Echternach's abbey is part of the diocese of Trier, which includes also the Abbey of Mettlach, which had close ties with the school in Reims. In 993, the year in which Arnulf died, a remarkable transfer occurred at the initiative of archbishop Egbert of Trier by moving the abbot Lioffin from Mettlach to Echternach. Lioffin had been active as builder of a chapel in Mettlach, with remnants still visible today. Upon Lioffin's entry from Mettlach into Echternach several books entered the library. One of those

books was recently found to be bound in a piece of parchment, which had served as an abacus-table as used by Gerbert of Aurillac. This abacus-table contained the Arabic numerals as recently described by Charles Burnett [5]. If indeed the minor Dirk III was prepared for his future role in Frisia through an education in Echternach he must have been aware of the practical significance of the Arabic-Islamic science. Meanwhile Echternach's active interest in the settlements in Holland and Friesland in the early 11th century is apparent from a list of names of settlements discovered in another manuscript from Echternach and discussed by Blok [1, 6, 16, 25]. Given the analysis of the landscape of Frisia, which can be dated in the early 11th century, and is to be attributed count Dirk III, it is reasonable to conclude that a shadow-quadrant and alidade as present on an astrolabe has been used. The medieval surveying of

the wetlands of Frisia provides, an extra indication of the physical presence of the Arabic-Islamic instrument called the astrolabe, prior to 1018. This observation is consistent with its availability in Liège in 1025 [3, 12, 27]. Although the latter textual information is often quoted to illustrate the low level of mathematical knowledge in the Middle Ages [12], it is worth noting that the application of the shadow quadrant and alidade is a mathematically correct way to use the linear propagation of light to lay-out a large scale area. It is an early demonstration of the power of reliable knowledge. 

Acknowledgments

I am grateful to my supervisors at Utrecht University, Viktor Bläsö and Marco Mostert, for their open-minded approach in coaching the author, an experimental physicist, as an historian of medieval science.

References

- 1 D.P. Blok, De Hollandse en Friese kerken van Echternach, *Naamkunde* 6 (1974), 167.
- 2 Chris de Bont, *Vergeten land. Ontginning, bewoning en waterbeheer in de Westnederlandse veengebieden (800–1350)*, Alterra Scientific Contributions, Vol. 27, Alterra, 2009.
- 3 Arianna Borrelli, *Aspects of the Astrolabe*, Zeitschrift für Wissenschaftsgeschichte, Südhofts Archiv, Vol. 57, Franz Steiner Verlag, 2008.
- 4 Glen van Brummelen, *The Mathematics of the Heavens and the Earth. The Early History of Trigonometry*, Princeton University Press, 2009.
- 5 Charles Burnett, The abacus of Echternach in ca. 1000 AD, *SCIAMVS* 3 (2002), 91–108.
- 6 L. Delisle, Mémoire sur d'anciens sacramentaires, in: *Mémoires de l'Institut Français, Académie des Inscriptions et Belles-Lettres*, Vol. XXXII, Imprimerie nationale, 1886, p. 57.
- 7 Menso Folkerts, The Geometry II ascribed to Boëthius, in *Essays on Early Medieval Mathematics; The Latin Tradition*, Variorum Collected Studies, Routledge, 2003, pp. IX(1–9).
- 8 Menso Folkerts, Die Mathematik der Agrimensoren-Quellen und Nachwirkung, in Eberhard Knobloch and Cosima Möller, eds., *In den Gefelden der Römischen Feldmesser. Juristische, wissenschaftliche, historische und sprachliche Aspekten*, De Gruyter, 2014.
- 9 Menso Folkerts and Barbara Hughes, The Latin mathematics of medieval Europe, in Menso Folkerts, Barbara Hughes, Roi Wagner, J. Lennart Berggren and Viktor J. Katz, eds., *Sourcebook in the Mathematics of Medieval Europe and North Africa*, Princeton University Press, 2016.
- 10 Günther Franz, Erzbischof Friedrich von Bremen schließt einen Vertrag mit holländischen Siedler, in *Quellen zur Geschichte des Deutschen Bauernstandes im Mittelalter*, Deutscher Verlag der Wissenschaften, 1873, pp. 168–172.
- 11 Thomas Freudenhammer, Lupitus of Barcelona: On the identity of a tenth century scientific translator, *Südhofts Archiv* 104 (2020), 139–151.
- 12 Edward Grant, *Physical Science in the Middle Ages*, Cambridge University Press, 1977, p. 14.
- 13 David Juste, Hermann der Lahme und das Astrolab im Spiegel der neuesten Forschung, in Felix Heiner and Thomas Zotz eds., *Hermann der Lahme. Reichenauer Mönch und Universalgelehrter des 11. Jahrhunderts*, Kohlhammer Verlag, 2016.
- 14 David A. King, *In Synchrony with the Heavens. Studies in Astronomical Timekeeping and Instrumentation in Medieval Islamic Civilization*, Instruments of Mass Calculation (Studies X–XVIII), Vol. 2, Brill, 2005.
- 15 Teunis M. Klapwijk, *The Frisian Maasland Wilderness and Lotharingian Learning in the Early 11th Century*, MSc Thesis in History and Philosophy of Science, University of Utrecht, August 2023.
- 16 V. Leroquais, *Les sacramentaires et les missels manuscrits des bibliothèques publiques de France*, Vol. I, Paris, 1924, p. 121.
- 17 H. van der Linden, *De Cope. Bijdrage tot de rechtsgeschiedenis van de openlegging der Holland-Utrechtse laagvlakte*, Van Gorcum, 1955.
- 18 H. van der Linden, De koningsroede. Een herziening van De Cope op het punt van de middeleeuwse ontginningsmethodiek, in *Jaarboek van de Middeleeuwse geschiedenis*, Uitgeverij Verloren, 2000, pp. 7–43.
- 19 Emanuele Lugli, *The Making of Measure and the Promise of Sameness*, Chicago University Press, 2019.
- 20 J.F. Niermeyer, *Delft en Delfland. Hun oorsprong en vroegste geschiedenis*, Burgersdijk & Niermans, 1944.
- 21 Kees Nieuwenhuijsen and Tim de Ridder, eds., *Ad Flaridingun. Vlaardingen in de elfde eeuw*, Uitgeverij Verloren, 2012.
- 22 John North, The astrolabe, *Scientific American*, 230 (1973), 96–106.
- 23 C. Philipp and E. Nothaft, Measurements of altitude and geographic latitude in Latin astronomy, 1100–1300, *Archive for History of Exact Sciences* 77 (6) (2023), 537–577.
- 24 Leonardo of Pisa, *Fibonacci's De Practica Geometrie*, translated by Barnabas Hughes, Springer, 2008.
- 25 A. Reiners, in *Publ. de la Section historique de l'Institut Royal Grand-Ducal de Luxembourg*, Vol. XL, 1889, p. 30.
- 26 Hugh de Saint Victor, *Practical Geometry*, translated by Frederick A. Homann, Medieval Texts in Translation, Vol. 29, Marquette University Press, 2010.
- 27 Paul Tannery, Une correspondance d'écclâtres du XI siècle, *Comptes Rendus des séances de l'Académie des Inscriptions et Belles-Lettres* 41(2) (1897), 214–221.
- 28 Gerrit Verhoeven, *De derde stad van Holland. Geschiedenis van Delft tot 1795*, Uitgeverij WBooks, 2015.
- 29 Stephen K. Victor, *Practical Geometry in the High Middle Ages: Artis cuiuslibet consummati and the Pratique de Geometrie*, American Philosophical Society, 1979.
- 30 C.G.D. de Wilt, G.J. Klapwijk, J.D. van Tuijl and A.C. Ruseler, *Delflands kaarten belicht*, Hoogheemraadschap van Delfland / Uitgeverij Verloren, 2000.
- 31 Nancy Wu, *Ad Quadratum. The Practical Application of Geometry in Medieval Architecture*, Routledge, 2002.

Raffaella Mulas

Department of Mathematics
Vrije Universiteit Amsterdam
r.mulas@vu.nl

Proof by example Portraits of women in Dutch mathematics

Renee Hoekzema

From the March issue Renee Hoekzema is one of our Editors-in-Chief. She is an Assistant Professor in the Department of Mathematics at VU Amsterdam. Renee was born in Utrecht, in 1987. In 2009, she earned two bachelor's degrees in mathematics and physics/astronomy, with a minor in biogeology, from Utrecht University. She then furthered her education at the same university, obtaining two master's degrees in mathematics and theoretical physics in 2012. Following her studies in Utrecht, Renee pursued doctoral studies at Oxford University, completing a PhD in earth sciences in 2015 and a PhD in mathematics in 2018. Her academic journey also includes postdoctoral appointments at the University of Copenhagen, at the Max Planck Institute for Mathematics in Bonn, and back at the University of Oxford. In 2022, Renee was awarded a Veni grant from the Dutch Research Council (NWO), and she joined the Department of Mathematics at VU Amsterdam. Her colleague Raffaella Mulas interviewed her last April.

Thank you, Renee, for taking the time to meet me. I would like to start by talking about your challenging, fascinating and very unique academic path. What drove you to pursue such diverse fields of study?

"Thanks for interviewing me! I think I always had a very broad interest. When I started university I really wanted to study all three subjects: physics, maths and earth science. I might have finished three bachelor's and three master's degrees, but someone recommended that I should just start doing research instead. So, after my maths & physics masters, I started a PhD in paleontology. The research was fun, but I also missed maths. In fact, I had a dream that I was a mathematician and when I woke up I knew that that's what

I wanted to do! So I finished the paleontology PhD and started a second one in algebraic topology with Ulrike Tillmann, who was very supportive.

In hindsight, the lack of female role models had contributed to me not choosing to continue with maths before. Meeting amazing female mathematicians at Oxford such as Ulrike Tillmann and Francis Kirwan changed my point of view. As a mathematician I do research in maths, physics, biology and even paleontology, so in the end I'm combining all of my interests!"

You made very exceptional choices! And I understand your point about the importance of having female role models. I find it impressive that you were able to merge your different expertises in mathematics, physics, paleontology and biology. Not only do you have a deep knowledge of each of these subjects, but you also connect them in your research, and you did so in your Veni grant proposal as well. Can you tell me something about it?

"As part of my maths PhD I studied 'shapes inside shapes' and their evolution through time (in maths language: manifolds with submanifolds and cobordisms on them). When I started writing the Veni, someone recommended that I



Renee Hoekzema

Painted by Annelie Kerkhof

stay close to my heart, and rather than thinking about what would please a committee, write the proposal about what I really wanted to do. Now the cobordisms theory I was studying had close links to certain theories in mathematical physics called topological quantum field theories, so there was a clear link there. On the other hand, during my masters I had done an amazing course on vertebrate paleontology for which I wrote an essay titled ‘Evolution of vertebrates through the eyes of parasitic flatworms’ (which I personally thought was hilarious because flatworms don’t have eyes). Back then I was already curious about whether one could make a mathematical model to study the phylogeny (evolutionary descent) of a group of hosts together with the evolution of the parasites living on them (and co-evolution more generally). I realized that from the point of view of maths, this is also a shape within a shape evolving through time (namely a tree inside a tree), and therefore connected to the maths/physics projects that I had been thinking about. Putting these all together, I wrote a proposal called ‘Shapes inside shapes in mathematics, physics, and biology’.”

Amazing! There is also another subject that plays a role in your Veni grant. At the end of your proposal, you talk about collaborative projects with artists along the theme of ‘shapes inside shapes’...

“I grew up in a crossover art/science family, so art has always been close to my heart. I love drawing and painting and I also like to sing. I’m currently setting up

a collaboration with a pair of installation/theater artists that aims to capture the experience of understanding something in maths, without explicitly involving maths itself, but with a flavor of shapes inside shapes. It’s a very exciting process!”

Beautiful! Now, I need to ask you: Renee, what are you not good at?

“Haha, there’s plenty of things I’m not good at! I have a terrible memory for example, and I’m easily distracted.”

But this doesn’t stop you from doing anything! You are also a tireless traveler. You travel a lot for conferences and research visits, but also for pleasure. What has been your most beautiful trip so far?

“Last year my partner and I made a tour of South East Asia which was amazing. We spent a few days on a Thai island where the beach was perfectly white and the sea was turquoise blue and crystal clear. You could walk into the water and immediately see corals and seahorses. I didn’t know a place like that existed!

I also feel very fortunate being able to make beautiful trips for work. Recently I had a conference in Kyoto for example, which was also stunning.”

And the most adventurous one?

“I made a solo trip to Costa Rica at some point which was really spectacular! The Costa Rican rainforest is one of the most biodiverse places on Earth, and I found myself thinking about how every square meter contained at least one animal that could kill you (or at least seriously poison you). From the cute poison dart frogs to

the vipers, scorpions and Brazilian wandering spiders—one of the most deadly spiders in the world, of which I saw quite a few. At some point at the end of a night tour of the jungle, my phone had died after taking many pictures of snakes and giant insects. I didn’t have a torch and I had to walk back through the jungle in the dark. That was probably one of the most adventurous things I’ve ever done.”

Wow! Besides traveling, art and research, what makes you happy?

“Walks and games with my family and partner, and our baby on the way!”

Nice! I love the portrait of you that your mother, Anneke Kerkhof, painted and that you have on your website. May I use it for this article?

“Of course! My mom’s artwork has always been the decor of my life and she’s a great source of inspiration for me, so I was honored when she decided to make a portrait of me!”

You are going to be a great source of inspiration for your baby on the way! Thank you for all the beautiful things that you have shared. 

Acknowledgements

This interview has first appeared on the website of the Mathematics Department of VU Amsterdam. I therefore wish to thank the department for the permission to reproduce it here. I also want to thank Francesca Arici and Diletta Martinelli for their support, and for encouraging the publication of this article in NAW. Finally, I am very grateful to Renee Hoekzema for this wonderful interview.

Flora M. Spieksma

Mathematisch Instituut
Universiteit Leiden
spieksma@math.leidenuniv.nl



Uitsnede schilderij Trudy Kramer

Flora Spieksma

Oratie

Optimalisering: hoe fundamenteeler hoe beter

Op 1 juni 2021 werd Flora ('Floske') Spieksma benoemd tot hoogleraar mathematische besliskunde aan de Universiteit Leiden. Dit artikel is een weergave van haar oratie, die vanwege corona uitgesteld was tot 1 september 2023.

Zotteklap

Tijdens de voorbereiding van deze oratie kreeg ik veel bezorgde reacties van genodigden over het onderwerp van deze rede. Dit is natuurlijk zeer begrijpelijk. In ieder willekeurig wiskundeartikel bent u binnen twee regels het spoor volledig bijster. Weest gerust. Dat overkomt mij net zo bij het opslaan van een willekeurig artikel van een analyse- of algebra-collega: ik kom alleen een paar regels verder dan u! Erasmus geeft u wellicht een psychisch steuntje bij monde van de Zotheid [3, XXXII]:

“De wetenschappen zijn immers... de bitterste vijand van het menselijk geslacht... uitgedacht tot verderf der mensheid... Want het primitieve geslacht, dat in het gouden tijdperk de aarde bevolkte, leefde instinctief, alleen volgens de aanwijzingen van de natuur en had geen wetenschap van node”

Mark Kac, een Poolse wiskundige die in 1963 Lorentz hoogleraar in Leiden was, beaamt dit in zekere zin in zijn autobiografie [7, pp. 1–2]:

“In the summer of 1930... I had been stricken by an acute attack of a disease which at irregular intervals afflicts all mathematicians.... I became obsessed by a problem. The symptoms are familiar and easily recognized, especially by the victims' wives, since they consist in a marked increase in antisocial behavior. Loss of sleep and appetite is also frequent. In my case the symptoms were especially pronounced; so much so, in fact, that my family was beginning to worry”

Wetenschappelijk onderzoek en in het bijzonder wiskundig onderzoek lijkt dus een verderfelijke en ziekmakende bezigheid.

Maar... houdt de Zotheid ons niet enigszins voor de mal? Zaten in dat ‘gouden tijdperk’ mensen tevreden naakt in de kou te kauwen op wat verzamelde vruchten en op een met de handen gevangen rauwe vis? Dat gelooft u zelf niet! Mensen hebben toch altijd de drang gehad hun leven te willen veraangenamen en te verlichten door de wereld om zich heen beter proberen te begrijpen en te controleren. Het gevolg van deze begripsdrang is dat u veel meer

wiskundige bagage hebt dan u dacht, en uw hele leven veel meer door wiskunde beheerst wordt dan u zich mogelijk realiseert!

Denkt u alleen al aan het decimale stelsel. Op school hebt u geleerd, dat het getal 2023 van achter naar voren gelezen moet worden als $3 \times 1 + 2 \times 10 + 0 \times 100 + 2 \times 1000$, oftewel als $3 \times 10^0 + 2 \times 10^1 + 0 \times 10^2 + 2 \times 10^3$. Van achteren naar voren neemt de macht van 10 waarmee vermenigvuldigd wordt met 1 toe.

Dit stelsel heeft twee bijzonderheden. Ten eerste is het een zogenaamd positioneel systeem. Dat wil zeggen, dat de positie van een cijfer in een getal zijn bijdrage aan de waarde van dat getal bepaalt. Ten tweede, als een macht van 10 niet ‘mee mag doen’ in de berekening, schrijven we een ‘0’ op de desbetreffende plaats. Positionele systemen, zonder gebruik van de 0, bestonden al in de Oudheid. Maar pas met de introductie van de 0 als tiende cijfer was tegen 900 in India [1, p. 239] ons decimale stelsel ‘klaar’. De overgang van het Romeinse cijfersysteem naar het decimale stelsel heeft echter tot in de zestiende eeuw geduurd!

Een belangrijke rol hierbij is door Leonardo Pisano oftewel Fibonacci, gespeeld. In zijn *Liber Abaci* uit 1202 propageert hij niet alleen het decimale stelsel als een superieur getalsysteem, maar be-

handelt hij ook de bekende algoritmes als ‘onder elkaar vermenigvuldigen’, ‘optellen met onthouden’ en ‘staartdelen’, die een direct gevolg zijn van de decimale schrijfwijze van het getallenstelsel [13, Chapter 13]. Voor de duidelijkheid: het woord ‘algoritme’ betekent ‘rekenmethode’ of ‘rekenrecept’.

Hierdoor heeft het *Liber Abaci* een niet te onderschatten invloed gehad op met name het handelsrekenen! U moet er toch niet aan denken om honderd getallen foutloos op te tellen of twee grote getallen te vermenigvuldigen in Romeinse cijfers? En als u dat toch probeert, denkt u dan niet stiekem decimaal?

De vervolgstap naar het moderne binaire stelsel lijkt klein, maar blijkt pas in de zestiende–zeventiende eeuw bedacht en door Leibniz in zijn artikel van 1703 [9] uitgewerkt. Denk u dus vooral wel binair, want anders hadden onze huidige computers niet bestaan en ook uw huidige ver-Smarte leven niet! Een eeuwige tijd voor een ‘return on investment without bounds’ van wiskundig denken... mag dat tegenwoordig nog?

In de dertiende eeuw zouden decimaal stelsel, optellen met onthouden en onder elkaar vermenigvuldigen voor u als 6 à 8-jarige angstaanjagende kost zijn geweest. Nu is het zo geïntegreerd in uw dagelijkse leven, dat u er niet eens meer over nadenkt.

Ik heb niet voor niets toepassingen binnen het handelsrekenen genoemd. Mijn leerstoel, de ‘mathematische besliskunde’, is onderdeel van zogenaamde toegepaste wiskunde. De mathematische besliskunde is een betrekkelijk jong boompje in het wiskundebos, met twee uitlopers: de discrete besliskunde over ‘kans’-loze problemen en de stochastische besliskunde over ‘kans’-rijke problemen.

Als eerste zal ik wat over de geschiedenis van deze leerstoel vertellen. Vervolgens zal ik met behulp van enkele voorbeelden de discrete en stochastische uitlopers toelichten. Aan de hand van deze voorbeelden zal ik daarna mijn oratie-titel proberen te verklaren. Ten slotte zal ik nog ingaan op mijn visie en hoop voor de toekomst van de besliskunde in Leiden.

Mathematische besliskunde in Leiden

De toegepaste wiskunde in Leiden is opgezet door Guus Zoutendijk. In 1964 kwam hij naar Leiden als hoogleraar numerieke

wiskunde, voorganger dus van onze rector. Hij heeft vervolgens de leerstoelen mathematische statistiek (met hoogleraar Willem van Zwet), waarschijnlijkheidsrekening (met de latere hoogleraar Jaap Fabius), en informatica (met hoogleraar en Himalaya-beklimmer Alexander Verrijn Stuart) weten in te stellen. De naam ‘informatica’ is overigens door Zoutendijk bedacht [8], geheel in de geest van Simon Stevin, de bedenker van (onder andere) het woord ‘wiskunde’.

In 1971 veranderde hij van leerstoel en werd hij zowel hoogleraar mathematische besliskunde als Eerste Kamerlid voor de VVD, tot hij in 1975 naar Delta Lloyd vertrok. In 1976 werd hij opgevolgd door Arie Hordijk, die in 2005 met emeritaat ging. De leerstoel bleef vacant tot de komst van interim WD en mijn oudste wetenschappelijke broertje Frank van der Duijn Schouten per 1 oktober 2020. Na zijn vertrek negen maanden later, ben ik hem op deze leerstoel opgevolgd.

Zoutendijk had daarnaast in 1969 een pas afgestudeerde student als medewerker weten aan te trekken: Lodewijk Kallenberg. Besliskundig Nederland kent hem als hoogleraar-directeur van het Landelijk Netwerk Mathematische Besliskunde, dat hij van 1993 tot zijn emeritaat in 2010 geleid heeft. Al jaren draait het Landelijk Netwerk mee met mastercursussen binnen het nationale wiskunde-masterprogramma Mastermath. De wiskundige en besliskundige B.V. Nederland heeft hiermee een uniek aanbod aan master-onderwijs dat zijn weerga in de wereld niet kent! Helaas lijkt de enthousiaste interesse van zeer goede studenten hiervoor uit andere EU-landen tegenwoordig actief ontmoedigd te worden. Te veel werk voor de collega’s. Hoezo? Zulke studenten zijn de ‘krenten in de pap’, en die colleges worden toch gegeven.

Kallenberg is in 2010 met emeritaat gegaan en gelukkig is daar in 2019 Odysseas Kanavetas bijgekomen, omdat ik opleidingsdirecteur (afgekort: OD) was geworden.

Ik heb mijn hele academische leven in Leiden gesleten op een half jaar Berkeley na, en wel sinds het ontstaansjaar van het roemruchte witte-mannenschilderij van Rein Dool! Na mijn promotie ben ik dus niet uit Leiden vertrokken, wat tegenwoordig het gebruik is.

De reden hiervoor is verwant aan de titel van mijn oratie. Besliskunde-onderwijs

en onderzoek binnen een theoretisch wiskunde-instituut. Ik voel me zelf onprettig als ik de fundamenteen van de theorie die ik gebruik niet begrijp. In mijn eerste jaar begreep ik niets van kansrekening. Ik heb bij wijze van spreken nog nachtmerries van een kanssometje over hoeveel mensen in de lift van een flatgebouw gemiddeld per verdieping uitstappen. Het was een totaal mysterie voor mij waarom *mijn* redenering fout en de gegeven redenering correct was, en dat maakt een mens onzeker. Twee jaar later met de kennis van het vak maattheorie [4, p. 104, opgave 11] was dat sommetje een trivialiteit, wat een opluchting! Het probleem was blijkbaar het ontbreken van een heldere systematiek om de gestelde vraag te structureren en vervolgens te vertalen naar een wiskundige formulering. Wellicht hielp tegen die tijd ook de toegenomen omvang van mijn intussen opgebouwde ‘trukendoos’...

Voorbeelden uit de besliskunde

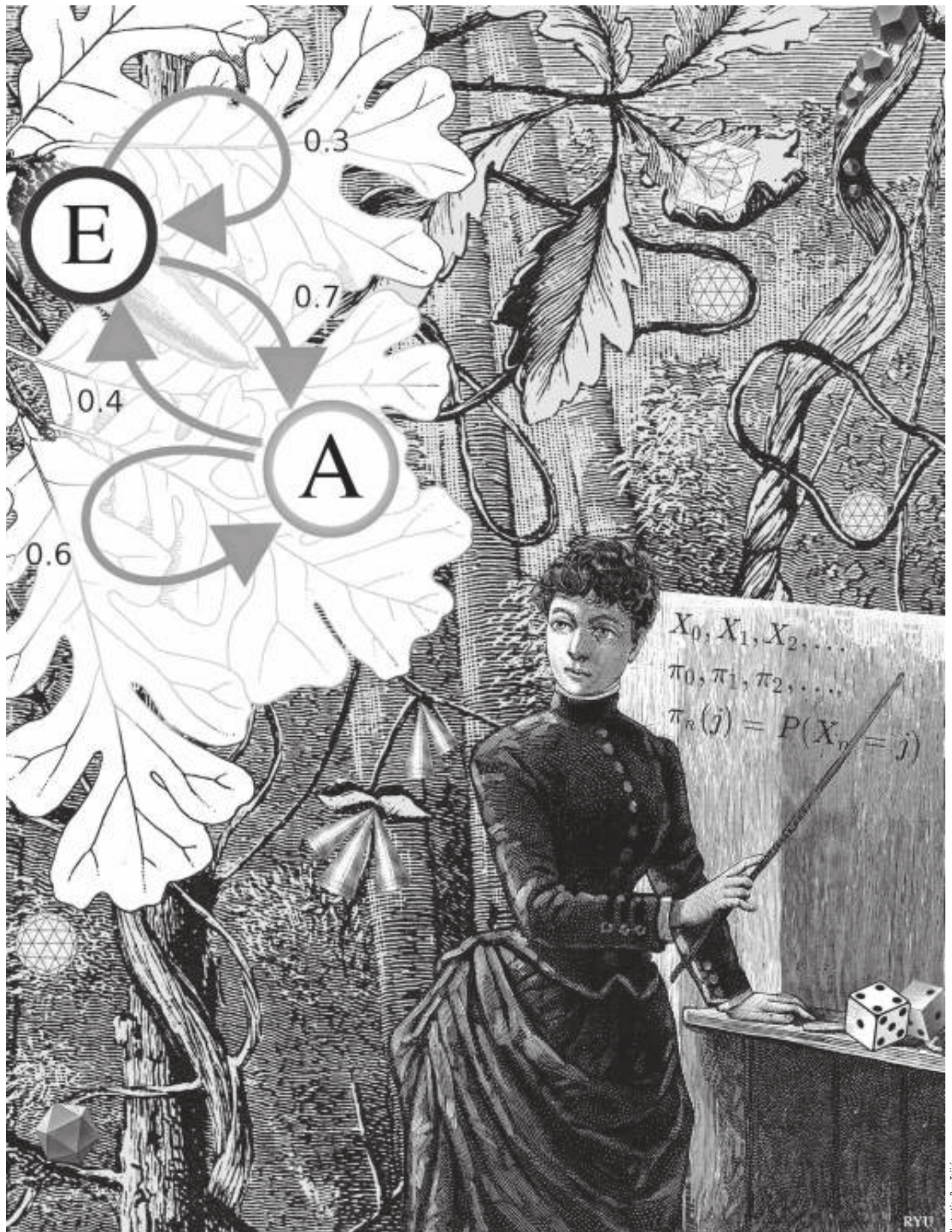
Discrete besliskunde: ‘Kans’-loze voorbeelden

Het eerste ‘kans’-loze voorbeeld is het bachelorproject, genaamd ‘Het bachelorseminarium als toewijzingsprobleem’. De resultaten hiervan worden op ons instituut dankbaar gebruikt.

Het bachelorseminarium als toewijzingsprobleem [11]. Bij onze bacheloropleiding is het bachelor-afstudeerproject via een seminarium ingericht. Hiervoor leveren docenten bij de organisatie een aantal mogelijke projecten in. De studenten mogen vervolgens een voorkeurslijstje van maximaal vijf projecten kiezen.

De organisator moet vervolgens een toewijzing van projecten aan studenten zó maken dat zoveel mogelijk studenten een zo hoog mogelijke voorkeur toegewezen krijgen. Hij heeft dit jarenlang met de hand gedaan en mopperde op de hoeveelheid werk die dit kostte. Waarom dus niet een bachelorproject formuleren over de toewijzing van de bachelorprojecten? Zo gezegd zo gedaan. Ik geloof dat dat het populairste project van dat jaar was!

Toen de hiervoor uitverkoren studente naar de toewijzing van dat jaar keek, zag ze binnen een paar minuten al een betere oplossing. Te proberen om met de hand de beste oplossing te vinden leidt dus niet gegarandeerd tot succes!



Het toewijzingsprobleem is een klassiek probleem waarvoor een algoritme bekend is, dat in de praktijk snel werkt. Dat algoritme zou in principe als uitkomst ook halve projecten aan driekwart student kunnen toekennen. Afronden van zo'n soort oplossing kan een héél slecht resultaat geven, maar het bijzondere van het toewijzingsprobleem is dat dát niet kan gebeuren. Dat kun je bewijzen en onze studenten hebben ook geleerd hoe.

Dit kwam ons goed van pas! Eigenlijk wilden we niet precies de standaardvorm van dit toewijzingsprobleem oplossen. Waarom niet? Als docent vind ik het prima om een lijstje van nieuwe en oude niet-gebruikte projecten in te leveren, zodat de studenten meer keuzemogelijkheden hebben. Maar dat wil natuurlijk niet zeggen dat ik tijd heb om alle projecten van het lijstje te begeleiden. Het moest dus mogelijk zijn voor docenten om een maximum te kunnen opgeven voor het aantal te begeleiden projecten. De vraag was dus of de navenante aanpassing van het algoritme nu wél uitkomsten zou kunnen hebben in de vorm van het toewijzen van een half project aan vijf-achtste student. Door de kennis van de onderliggende wiskunde van dit algoritme, konden we laten zien dat ook in dit geval zulke uitkomsten niet kunnen voorkomen.

Voor al die ouders en kinderen die geleden hebben onder de lotingen voor een middelbare school in Amsterdam, Haarlem,...: de toewijzing van scholen aan potentiële scholieren zou op een analoge manier aangepakt kunnen worden!

Een komische noot: één van mijn bachelor-scriptanten vertelde mij onlangs zelf-voldaan, dat hij en de mede-fans van besliskunde in de bachelorgroep meteen met elkaar gingen onderhandelen over hoe zij het best hun prioriteitenlijstjes konden invullen, zó dat ieder van hen een favoriet project zou krijgen. Inzet van speltheorie, waarover ze in mijn colleges ook het één en ander hadden geleerd. Meer weten is beter en kennis is de kunst!

Het volgende 'kans'-loze probleem komt uit een heel recent project binnen de 'Mathematics and Science Communication and Society' master.

Het enigma achter de Enigma[2]. Als u de film *The Imitation Game* hebt gezien, dan weet u dat de Enigma de machine was die de Duitsers in de tweede wereldoorlog ge-

bruikten voor het coderen van de communicatie met hun gevechtseenheden. Iedere gevechtseenheid had zelf ook een Enigma voor het decoderen van de geseinde gecodeerde berichten. De oorspronkelijke boodschap werd op de Enigma in het commando-centrum gecodeerd, en vervolgens via Morse overgeseind naar bijvoorbeeld een onderzeeër. Op de plaatselijke Enigma werd de gecodeerde boodschap vervolgens ingetypt, waarna de oorspronkelijke boodschap weer tevoorschijn kwam.

U weet dan vast ook dat de Enigma gekraakt is, grotendeels zelfs al voor 1940. U weet misschien niet, dat dit een Gesamtprojekt is geweest van een aantal landen, waaraan niet alleen de Britten, maar met name ook de Polen een cruciale bijdrage hebben geleverd.

Ik zal kort de werking van de Enigma schetsen. Op het oog is het een typemachine, met een extra bord met 26 lampjes, elk met een verschillende letter. Als je bijvoorbeeld een *A* typt, en het lampje met de letter *D* licht op, dan betekent dit dat *A* wordt gecodeerd als een *D*. Er loopt dus een elektrische stroom van de letter *A* naar lampje *D*.

De letter *D* wordt vervolgens overgeseind, en op de Enigma op de onderzeeër ingetypt, waarna lampje *A* oplicht. Dat betekent dat als letter *A* als een *D* wordt gecodeerd, dan wordt letter *D* als een *A* gecodeerd.

Omdat letters dus in paren worden gecodeerd, is het aantal mogelijke coderingen van het alfabet 'slechts'

$$25 \times 23 \times 21 \times \dots \times 3 \times 1 = \frac{26!}{2^{13}13!} \approx 8 \text{ biljoen,}$$

onoplosbaar toch? Dit is niet alles! Het elektrische circuit en daarmee de codering van de Enigma kan worden ingesteld. Bovendien verandert het na elke type-aanslag. Dit is een van de redenen dat het elektrische circuit van zo'n Enigma bij het begin van een codering bekend moet zijn bij de ontvangers. Anders zou decodering onmogelijk zijn. Een extra complicatie voor de krakers, maar... ook voor het beveiligen van de communicatie hierover tussen zender en ontvanger! Veilige communicatie is een zwakke schakel door het stereotype menselijke gedrag om verordonneerde inspanning te minimaliseren! Verandert ook ú niet uw wachtwoord minimaal als u dat te vaak moet doen? Dit heeft het succes-

vol kraken van de Enigma mede mogelijk gemaakt.

Mijn studente heeft een Python-programmaatje van 500 regels geschreven om de werking van de Enigma in de computer na te spelen. Dat hielp haar om uit de verspreide literatuur te begrijpen hoe de machine werkt. Daarna hebben we een formule opgesteld voor de codering van het alfabet afhankelijk van het 'start' elektrische circuit en van het aantal reeds gedane type-aanslagen.

Wat heb je hieraan? Niet alleen een simpeler en korter programma. Het fundamentele aspect is, dat het nu kinderspel is om de formules voor andere alfabetten te bepalen. Het 'patroon' van de codering is door het opstellen van een wiskundige formule geconcretiseerd. Uit de formule volgt dan ook direct na hoeveel type-aanslagen dezelfde codering van het alfabet weer 'terugkomt' ($25 \times 26 = 650$). Het is daarmee bijvoorbeeld ook mogelijk om destijds ontwikkelde kraakmethodes te doorgronden en het effect op de kraakbaarheid van de Enigma ten gevolge van fancy coderingsopties. Een leuk scriptie-onderwerp!

Er is nog een reden waarom ik dit voorbeeld heb gekozen. Volgens sommige mensen was de werking van de Enigma allang bekend en begrepen, en beschreven in onder andere de biografie van Alan Turing door Hodges [5], waarop *The Imitation Game* is gebaseerd. Deze beschrijving is echter nog ver af van een wiskundige formule. De daarvoor belangrijke finesses kun je uit de beschrijvingen in de literatuur niet gemakkelijk opmaken. Erger nog, ondanks het feit dat de werking van de Enigma al geprogrammeerd was, moesten wij nog behoorlijk wat denkstappen zetten om een expliciete formule tevoorschijn te toveren. Een impliciet gevolg is dat de notie 'begrip' niet universeel is. Dit compliceert het doen van interdisciplinair onderzoek, het kost een enorme tijdsinvestering en reduceert met kans één je kans op bevordering tot nul!

Stochastische besliskunde: 'Kans'-rijke voorbeelden

Meer dan de helft van de scripties die ik sinds 2010 heb begeleid betreft onderwerpen uit de discrete dus 'kans'-loze besliskunde. Mijn specialisatie daarentegen behoort tot de 'kans'-rijke, dat wil zeggen stochastische besliskunde. Over stochastiek oftewel kansrekening heeft de

beroemde kansrekenaar ‘Mathemagicus’ Persi Diaconis het volgende gezegd [16, p. vii]:

“Our brains are just not wired to do probability problems very well.”

Steven Tijms spreekt in [16] over de ‘tegen-intuïtieve logica van toeval’. Dit is geruststellend voor een beginnende wiskunde-student, maar maakt het belang van een gedegen theoretische basis des te groter.

Wat zijn de ‘dikste’ wortels van het genoemde kwaad van des-intuïtie? Ik zal dit illustreren aan de hand van de gokkers-valkuil in rood/zwart-roulette.

Gokkers-valkuil in rood/zwart-roulette [15, 16]. Stel we gaan een avondje gokken in het casino van Monte Carlo. Om het simpel te houden, zetten we alleen op rood of zwart in. U weet dat er 18 zwarte, 18 rode en 1 groen vakje (voor de bank) zijn, in het totaal 37 vakjes. Als we op zwart inzetten, en het balletje valt op zwart, dan hebben we gewonnen, en krijgen we onze inzet dubbel uitgekeerd (onze winst is dus gelijk aan de inzet). Als het balletje niet op zwart valt, dan zijn we onze inzet kwijt! Omdat er 18 zwarte vakjes zijn, is de winstkans $18/37$, en de verlieskans $1 - (18/37) = 19/37$. Als we op rood inzetten, krijgen we precies het tegenovergestelde resultaat. De winst- en de verlieskansen zijn echter precies dezelfde als bij inzetten op zwart, en de verlieskans is altijd groter dan de winstkans.

De gokkers-valkuil is precies wat er in Monte Carlo in 1913 aan de orde was: het balletje bleef en bleef maar op zwart vallen, 1, 2, 3, ... keer, het hield maar niet op! De spelers raken er steeds harder van overtuigd dat het volgende balletje toch echt op rood gaat vallen, *de kans moet immers steeds groter worden dat dat gebeurt*. De inzetten op rood stijgen en stijgen, vermogens worden verloren... pas bij de 27ste keer valt het balletje op rood.

De spelers hebben zich als lemmingen linea recta in de valkuil gestort! Immers, de roulette heeft geen geheugen en onthoudt echt niet, waarop ze het balletje de vorige keren heeft laten vallen. De winstkansen voor op rood dan wel op zwart inzetten zijn dezelfde. Dus is elk rijtje van 26 mogelijke uitslagen waarbij het balletje alleen op rode en zwarte vakjes valt even waarschijnlijk. Het rijtje ‘26 keer zwart’ gebeurt met dezelfde kans als het rijtje

‘26 keer afgewisseld zwart en rood’, en die is $(18/37)^{26} < (1/2)^{26} \approx 1/64.000.000$.

Wellicht denkt u nu aan de wet van de grote aantallen. Wat zegt deze in ons geval? Als je dagen lang achter elkaar door zou spelen, dan benadert het percentage zwart en rood in het rijtje successievelijke roulette-uitslagen (als we de groene uitslagen niet meetellen) steeds meer de 50%, voor bijna alle rijtjes! Is dit niet tegenstrijdig?

De finesse zit hem in dat ‘bijna alle’: van alle mogelijke rijtjes van 26 zwarte en rode roulette-uitslagen, is er maar eentje met alleen zwart, of met alleen rood. Er zijn er 26 met precies één rode en 25 zwart, en omgekeerd, en er zijn er precies 325 met 2 zwarte en 24 rode. Maar van de in totaal $2^{26} \approx 64.000.000$ zwart-rood rijtjes, zijn er (met behulp van Stirlings formule) rond de 10.500.000 met precies evenveel zwart als rood. In de wereld van rijtjes van 26 zwarte en rode roulette-uitslagen zijn verreweg de meeste voor ongeveer de helft zwart en voor ongeveer de helft rood. De overige rijtjes worden steeds zeldzamer in aantal ten opzichte van het woud van rijtjes met gemiddeld de helft rood en zwart, naarmate de rijtjes langer worden.

Is het dan onwaarschijnlijk dat het balletje 26 keer achter elkaar op zwart valt in een casino ergens op de wereld? In honderd jaar, met 9000 casino’s die het hele jaar 24/7 open zijn, en waar rood-zwart roulette wordt gespeeld, is die kans vrijwel één. Dit is een voorbeeld van de *wet van de reuze grote aantallen*, geïntroduceerd door Diaconis en Mosteller [15, p. 79]. Misschien zouden de Intelligent Designers deze ook eens in aanmerking kunnen nemen?

Een ander bekend valkuilerig voorbeeld is: hoe groot is de kans dat een staatsloterijwinnaar een tweede keer de staatsloterij wint? Hoe groot is de kans dat iemand in Nederland in een bepaalde tijdsperiode twee keer de staatsloterij wint, zoals mijn eigen betovergrootvader plus-minus 150 jaar geleden... Een leuk puzzeltje voor thuis?

Het volgende voorbeeld van een bekende gokstrategie is gerelateerd aan de wet van de reuze grote aantallen.

Is er een winnende strategie in rood/zwart-roulette? Op internet kunt u de zogenaamde martingaal-strategie als gokstrategie in rood/zwart-roulette aangeprezen vinden:

- begin met 10 (euro) in te zetten;
- elke keer dat u wint, zet u 10 in;
- als u verliest, verdubbelt u de inzet. U blijft uw inzet verdubbelen tot de eerste keer dat u wint.

Stel dat u drie keer achter elkaar verliest, en de vierde keer wint. Dan hebt u achtereenvolgens 10, 20, en 40 ingezet en dus in het totaal $10 + 20 + 40 = 70$ verloren. De vierde keer zet u 80 in, die u wint. Uw winst is dus $80 - 70 = 10$.

Zo’n rij verliezende inzetten, afgesloten met een winnende inzet noemen we een ‘reeks’. Dan is uw winst na elke reeks 10 euro. Omdat er met kans 1 een winnende zet komt, wint u dus altijd! Is er dan een winnende strategie?

De Nederlandse gok-advieswebsite Meneer Casino [10] zegt over rood/zwart-gokken met een startkapitaal van €10.000, waarbij de gokker steeds op rood inzet:

“Maar er komt 100% zeker een moment dat het balletje verkeerd rolt. Tien keer achter elkaar rood komt vaker voor dan je denkt. En als dat moment komt, ben je alle winsten die je met het systeem hebt gemaakt kwijt. Meneer Casino raadt de martingale-strategie dan ook af. En pas op: in de algemene voorwaarden van online casino Bingoal staat dat het casino je account kan sluiten en je geld in beslag kan nemen als je de martingale gebruikt, omdat deze strategie ‘fraude’ zou zijn.”

Jammer, maar bovenal een misleidende uitspraak. Voor de tiende inzet hebt u niet genoeg geld meer om te verdubbelen, en na het tiende verlies bent u plat gezegd platzák!

Nog sterker: u lijdt gemiddeld genomen op *elke reeks* verlies. De kans dat u achter elkaar 10 verliezende inzetten doet is weliswaar *piepklein* ($\pm 13/10.000$), maar dan verliest u ook het *grote* kapitaal van €10.000. De grotere kans om te eindigen met de winst van €10 binnen 10 zetten weegt daar niet tegenop, analoog aan de wet van de reuze grote aantallen. Een eenvoudig sommetje laat zelfs zien dat het gemiddelde verlies per reeks groter wordt naarmate de gokker met een groter startkapitaal begint!

Onze intuïtie laat ons ook in de volgende situatie in de steek.

Bijna één pot nat: gokmodel en wachtrij. Door rood/zwart-roulette te spelen, fluctueert ons kapitaal als een kansproces. We zetten nu steeds €1 in. Met kans 18/37 neemt het kapitaal met één toe, en met kans 19/37 neemt het met één af. De roulette heeft geen geheugen, en dus hangen die kansen niet af van hoe vaak we al gegokt hebben, of hoe het huidige kapitaal tot stand is gekomen. Zo'n proces heet een 'Markov-keten', vernoemd naar de bedenker ervan, de Russische wiskundige Andrej Markov (1856–1922). Markov-ketens spelen een centrale rol in mijn onderzoek.

Vrijwel dezelfde Markov-keten kan een model voor de fluctuatie van de lengte van de rij voor een kassa of scanpunt bij de supermarkt zijn: als er per minuut met kans 18/37 een nieuwe klant in de rij aankomt, en met kans 19/37 een klant klaar is met afrekenen, dan krijgen we hetzelfde kansproces als voor de fluctuatie van het kapitaal in het gokmodel. Er is wel een verschil wanneer de rij leeg is, of de gokker blut: in het wachtrijmodel komt er dan weer met kans 18/37 in de volgende minuut een klant aan bij de kassa. De gokker daarentegen is en blijft blut, en daardoor blijft zijn kapitaal 0.

Bij deze kansen is het gemiddelde aantal klanten bij de kassa gelijk aan 18. Dat is veel, en niet echt goed management van de supermarkt. De *variabiliteit* van het kansproces gooit roet in het eten. Om dit te begrijpen gebruiken we dat de gemiddelde tijd tussen opeenvolgende klant-aankomsten gelijk is aan 37/18 en de gemiddelde duur die de cassière nodig heeft om een klant te helpen is 37/19. Als nu precies om de 37/18 minuut een klant aan zou komen, en de bediening precies 37/19 minuut zou duren, dan zou een klant onmiddellijk geholpen worden en nooit hoeven wachten. Kans-effecten kunnen dramatische gevolgen hebben. En die dramatische gevolgen zijn erger naarmate de gemiddelde tussen-aankomsttijden en bedieningsduren minder verschillen! Intuïtief zou u dit niet verwachten, maar het is precies hetzelfde fenomeen, als waardoor files ontstaan.

Ter afsluiting de beantwoording van een standaardvraag.

Moet u altijd in de kortste rij gaan staan? De supermarkt besluit om een extra kassa (of scanpunt) te openen met een precies even efficiënte cassière. Het kansproces

dat het aantal klanten in de rijen voor de kassa's beschrijft is onderhevig aan beslissingen, namelijk aan welke rij een aankomende klant wordt toegewezen. Een strategie is een toewijzingsregel van aankomende klanten, afhankelijk van de klantenaantallen bij de twee kassa's. Een optimale strategie is de regel die de gemiddelde verblijfsduur van klanten in hun rij minimaliseert. Dit is een voorbeeld van een Markov-beslissingsketen.

Van nature kiezen klanten bij aankomst bij de kassa's degene met de kortste rij! Als sinds 1977 is bekend dat dit ook optimaal is. Hmm, hoe vaak heb ik u net als Bob den Uyl [17] in *Een zwervend bestaan* niet horen roepen dat u altijd in de foute rij staat als u de kortste hebt gekozen? Dat klopt: twee cassières zijn zelden precies even efficiënt. Het is niet bekend wat dan de optimale strategie is, maar in elk geval niet het kiezen van de kortste rij. De laatste jaren heb ik met promovendi enige technieken ontwikkeld, waarmee we hopen dit probleem voor mijn afscheids-oratie op te lossen!

Een wis en zeker fundament?

Ik heb geprobeerd u op een reisje door mijn wis-wereld mee te nemen. Aan de hand van deze ervaringen zal ik u proberen te overtuigen waarom fundamenteeler beter zou zijn, wat ik daarmee bedoel en waarom ik me daar druk over maak.

Ik heb u al verteld dat ik toegepast wiskundige ben. Recent kwam mij de column 'Wiskundig de ware' van collega Ionica Smeets in *de Volkskrant* [14] onder ogen. Daarin staat dat een 'toegepast wiskundige' iemand is, die binnen een beperkte tijdsduur de beste benadering berekent van een optimale strategie voor een gegeven praktisch probleem. Een toegepast wiskundige is slechts een veredelde rekenaar? Een van mijn studenten geeft in zijn master-scriptie een bondige karakterisatie van toegepaste wiskunde, waarvan ik denk dat die beter past bij onze onderzoekspraktijk [6]:

"In my view Applied Mathematics is about describing real life situations in the language of mathematics. Using this description we can provide insights in the effects of the decisions that can be made."

Toegepast wiskundig onderzoek begint dus met het beschrijven van een probleem in wiskundige taal.

- Zo'n wiskundige beschrijving moet een duidelijke aannames over het probleem bevatten, en een inzichtelijke motivatie voor de keuze ervan. Het is geen goede praktijk om voorwaardes op te leggen omwille van het gemak, of voorwaardes die niet of met grote moeite verifieerbaar zijn. Daarentegen is abstractie om de abstractie overkill.
- Voor het verwerven van een scherp inzicht is het van belang om de onderliggende wiskundige theorie grondig te beheersen. Je moet heel precies weten waarom wat waar is, en waar de rek in zit! De veelvuldige onzorgvuldigheden in de literatuur vereisen alleen maar gebruik te maken van uitspraken die je zelf ook geverifieerd hebt of waarvan je weet dat ze correct zijn. Prachtige vergeten pareltjes uit oudere literatuur kunnen je hierbij helpen.

In de besproken voorbeelden heb ik de zegeningen van fundamenteel onderzoek proberen te illustreren. Ik zal ze hieronder samenvatten.

Toewijzingsprobleem: illustreert het belang van de wiskundige achtergronden voor het verkrijgen van inzicht in de complexiteit van een probleem bij het introduceren van extra eisen.

Enigma: laat zien dat de beschrijving van een probleem in wiskundige taal de structuur van het probleem aan het licht brengt. Dat geeft inzicht in de eigenschappen van het probleem. Programmeren vereist niet het gedetailleerde begrip nodig voor een wiskundige beschrijving! Dat laatste vereist een gedegen wiskundige training.

Gok- en wachtrijmodellen: laten het belang van een abstracte scholing inzake stochastische problemen zien. Onze intuïtie laat ons op meerdere manieren in de steek, waardoor in de media misleidende informatie wordt gegeven. De beloning van een mathematische formulering van een probleem is dat op het oog niet verwante problemen in essentie hetzelfde kunnen zijn.

Daarnaast is mijn ervaring uit colleges en scriptiebegeleidingen dat de theorievorming op het gebied van abstracte stochastische processen, in het bijzonder Markov-processen, niet altijd eenduidig en inzichtelijk is. De beginner wordt overspoeld door een woud aan technische

condities waarvan het merendeel overbodig is voor de basisstellingen. Dit obstrueert begrip meer dan dat het daartoe bijdraagt. Ditzelfde geldt voor de combinatorische speltheorie. Daar speelt bovendien nog een rol dat de argumenten dusdanig verbaal zijn, dat de verificatie van de correctheid ervan moeizamer is dan de complexiteit van het argument lijkt te rechtvaardigen.

Onderwijs en onderzoek: nu en later

Het Leidse besliskunde-onderzoek was en is vooral gericht op de reeds genoemde Markov-ketens en Markov-beslissingsketens. In stochastisch besliskundig Nederland was dit de laatste drie decennia van de vorige eeuw een van de actiefste onderzoeksgebieden. Met de komst van Michel Mandjes hebben we er in Leiden iemand bijgekregen met een grote faam op dit gebied! Welkom! Het interessante van het Leidse besliskunde-onderwijs is dat er in 2010, toen ik als éénpersoons, éénvrouwsclubje overbleef, een prachtig door Kallenberg ontwikkeld besliskunde-bachelorprogramma lag, waarin de fundamenteen werden behandeld van alle besliskunde-vakken die in ons nationale wiskunde masterprogramma werden en worden gegeven.

Het is een populaire richting: ruim 10% van alle bachelor- en master-afstudeerprojecten gaat door besliskunde-handen! Meer dan de helft is 'kans'-loos, dus niet ons onderzoeksveld. Met mijn emeritaat over twee jaar dreigt deze laatste richting te verdwijnen, tenzij er een geschikte opvolger gevonden kan/mag worden. Een stochastische collega kan namelijk een extra vakgebied er niet 'zo maar eventjes' bij doen. Elementaire colleges geven, allé, scripties begeleiden vergt toch iets meer inspanning en kennis van zaken.

Natuurlijk is niets voor de eeuwigheid, behalve de volgorde van de letters van het alfabet en het decimale stelsel. Het is echter wel van belang om een zo 'breed' mogelijk wiskundeprogramma te blijven aanbieden: talent voor discrete besliskunde is niet hetzelfde als talent voor de stochastische kant. Een student moet zijn eigen 'niche' kunnen vinden.

Heel verrassend is een oud-student van mij volgens een van mijn collega's een 'rising star' in het rooster-softwarebureau waar hij werkt, maar hij was geen opvallende student in de stochastische besliskunde. Daarentegen had ik tien jaar

geleden een wis- en natuurkundestudent die bewust een stage had gekozen op het gebied van de veranderende structuur van ons energienetwerk door de overgang naar schone energie. Hij wist een onderhoudsstrategie van de elektriciteitskabels te ontwikkelen voor het Westland, waardoor de 'return on investment'-tijd hierin omlaag is gegaan [6]. Dit is een stochastisch probleem. Discrete problemen waren hoege-naamd niet aan hem besteed, en hij werkt al jaren aan problemen rond het energienetwerk bij TNO.

Wat betreft onderzoek zijn er op dit moment maatschappelijk uitdagende problemen. Markov-beslissingsketens zijn een onderdeel van 'Reinforcement Learning', dat weer tot de Machine Learning (afgekort: ML) behoort. ML is "een vorm van Kunstmatige Intelligentie (AI) die gericht is op het bouwen van systemen die van de verwerkte data kunnen leren of data gebruiken om beter te presteren" [12]. Aangezwengeld door het succes van AlphaGo, het op AI gebaseerde programma dat voor het eerst de mens in Go versloeg, is het een enorme hype geworden. Theoretisch onderzoek naar het waarom, wanneer en hoe goed ML-algoritmes werken, is moeilijk en blijft achter bij het gebruik ervan. Een van mijn statistiekcollega's heeft onderzoek gedaan, waaruit gebleken is dat er gebrek is aan goede validatie en calibratie van ML-modellen. Daarom ligt hier een uitdagend en relevant fundamenteel probleem, zeker als je denkt aan mogelijk grote investeringen op grond van resultaten van ML-algoritmes.

Een andere uitdagende richting betreft de wachttijdtheorie. Lange tijd werd er alleen maar uitgegaan van 'brave' klanten. Nu zult u vast naar een andere rij overlopen wanneer u denkt dat deze sneller is, of u gooit de hoorn op de haak als u te lang in een telefonische wachtrij zit. Als u dat doet, bent u een 'strategische klant'. In de besliskundegroep wordt momenteel onderzoek gedaan aan modellen waarin klanten strategisch gedrag mogen vertonen. Dit introduceert een speltheoretisch element in de modellen.

Ik zou zelf in de toekomst graag problemen rond het verschil tussen 'sociaal optimum' en 'individueel optimum' bestuderen. Hoe zou je prikkels kunnen introduceren opdat het individuele optimum ook sociaal optimaal is? Evenmin nieuw, maar het lijkt alsof er in de huidige maatschappij

meer gestuurd wordt op individuele optima dan op sociale. Voor een individu is het optimaal om van alles over internet te bestellen en gratis terug te kunnen sturen, waarna de teruggestuurde producten worden vernietigd. Duurzaamtechnisch en sociaal is dat zeker niet optimaal!

Call centers hanteren vaak de 80-20 regel als gewenst minimaal serviceniveau, dat wil zeggen dat minstens 80% van de klanten binnen hooguit 20 seconden in gesprek moet komen met een medewerker. Zou u klanten die al langer dan die 20 seconden in de rij staan niet genadeloos lekker laten blijven wachten? Voor u is dat beter, als u beoordeeld wordt op het halen van het vereiste service niveau. Het gevolg is dat zo'n klant beter kan ophangen en opnieuw bellen.

In mijn werkzame leven ben ik regelmatig actief geweest in bestuurlijke kringen. Ik moest mijn weg zoeken als landelijk eerste vrouwelijke wiskunde OD en als eerste vrouwelijke WD in de Leidse Faculteit W&N, ook al was dat interim. Waar een man een stevig standpunt mag hebben, wordt een vrouw met een eigen mening als agressief of onprofessioneel weggezet door een hogere bestuurder, en zij moet dat maar braaf slikken. Het ligt mij nog zwaar op de maag dat ik samen met mijn vrouwelijke kompaan in het managementteam anderhalf jaar geleden ben afgezet, en niet wegens slecht functioneren. Het was soms een toer om inspiratie te vinden, hoe met bepaalde situaties om te gaan.

Een inspirerend voorbeeld was professor Willem van Zwet. Als decaan van de Faculteit W&N moest hij rond 1980 een reorganisatie doorvoeren waarbij drie van mijn wiskundedocenten werden ontslagen. Een daarvan kon rechter worden, voor de twee anderen heeft hij zich persoonlijk ingezet om een andere baan te vinden binnen hun expertiseveld en hun interesse. Dat is hem, maar natuurlijk, gelukt. Exemplarische nazorg avant la lettre en hoe je als bestuurder met je verantwoordelijkheden om zou kunnen gaan. Altijd bereid om met iedereen de discussie aan te gaan en te luisteren. Voor mij een bestuurlijk rolmodel. Het zou fijn zijn om af en toe een blik op zijn portret aan de muur te kunnen werpen, en ook van anderen aan wie ik fijne herinneringen heb. Ik mis onze oude-witte-mannenportretten.

Mogelijk is de verwijdering van deze portretten een individueel optimum voor

sommige collega's en studenten. Ik zou een sociaal optimum willen voorstellen: dat van de omgekeerde beeldenstorm. Geen verwijdering, maar toevoeging van portretten van alumni 'waar wij trots op zijn', zoals

- Tatjana van Aardenne-Ehrenfest, voor de oorlog als wiskundige in Leiden gepromoveerd, maar als huisvrouw mocht ze geen baan hebben. Van Zwet sprak altijd met veel enthousiasme over haar messcherpe vragen tijdens colloquia, waar iedereen voor rilde.
- Ronald Venetiaan, oud-student wiskunde in Leiden en vijftien jaar president van Suriname.
- Zijn dochter Shanti Venetiaan, oud-studente wiskunde in Leiden, doctor in de wiskunde in Suriname, huidige rector van de Anton de Kom Universiteit en hoogleraar wiskundige statistiek, en in alle drie de eerste vrouw in onafhankelijk Suriname.

We zouden als universiteit onze Indische, Surinaamse en Caribische alumni die naar

Nederland zijn gekomen om te studeren uit onze annalen kunnen de-anonimiseren, zoals sultan Henkie, onafhankelijkheidsstrijder en later sultan van Djokja, wiens corpsbul met veel bombarie in het paleis van Djokja pronkt, en die vele anderen die aan onze universiteit gestudeerd hebben en iets voor hun eigen landen betekend hebben.

Vivat academia. Ik heb gezegd.

Dankwoord

Laatst werd mij gevraagd of ik 'trots was als vrouw'? Dat zegt me niets. Maar ik ben ontzettend dankbaar jegens al die mensen die mij gesteund en gehoord hebben. Het is een bijzondere eer voor mij om opvolger te zijn van gerenommeerde wetenschappers als Arie Hordijk en Frank van der Duijn Schouten. Ik dank ook mijn collega's binnen en buiten Nederland voor hun steun en vertrouwen. Peter Stevenhagen, voor al het enthousiasme waarmee hij als opleidings- en wetenschappelijk directeur mij in mijn carrière stimuleerde. Onder de smoes dat "ik mij hiermee op de kaart kon zetten", heeft

hij mij het bewerkelijke Mastermath-college 'Stochastic Processes' weten aan te smeren, waar ik veel plezier van hebt gehad. Als hij in het najaar 2019 geen project 'Vrouwen op het MI' was gestart, was ik zeker nooit hoogleraar geworden. Dank voor de oneindige creatieve energie, waarmee hij altijd overal kansen ziet en grijpt. Ik hoop dat we daar nog lang de vruchten van mogen plukken! Frank van der Duijn Schouten versterkte het MT van Mieke en mij in oktober 2020 als interim-WD. Wij moesten eerst elkaars kat uit de boom kijken, maar het vertrouwen kwam met respect. Hij heeft mijn benoeming tot stand weten te brengen! Wat een eer om zo'n superbestuurder in actie te zien: in coronatijd geheel open zijn conclusies over de problematiek op het MI kunnen trekken op basis van vele gesprekken, zonder een individuele vooropgestelde mening. Gianne Derks, nadat ik tweemaal kortstondig WD ben geweest van het Mathematische Instituut heeft zij de eer de eerste vrouwelijke WD-MI te zijn met een complete bestuurstermijn. Uit een mailing van haar concludeer ik dat zij een mijns inziens vermeend onveiligheidsprobleem dat door drie decanen in drie jaar steeds in een impasse was geraakt, grotendeels heeft laten verdampen. Is dit weer een geval van besturen dat beter verloopt als hier niet alleen mannen bij betrokken zijn? Ik wens haar alle succes toe als directeur van het Mathematisch Instituut.

Referenties

- 1 C. B. Boyer en U. C. Merzbach, *A History of Mathematics*, Wiley, 1989, tweede druk.
- 2 I. Dekkers, *The Enigma Behind the Enigma Machine*, Masterscriptie, UL, 2023.
- 3 D. Erasmus, *De Lof der Zotheid*, vertaling van A. Dirkzwager en A. C. Nielson, Paris, 1960.
- 4 J. Fabius en W. R. van Zwet, *Grondbegrippen van de Waarschijnlijkheidsrekening*, Mathematisch Centrum, 1980, derde druk.
- 5 A. Hodges, *Alan Turing: The Enigma*, Princeton University Press, 2014.
- 6 N. Jansen, *Reduction of Return on Investment Time and Failures in the Distribution Grid by Measuring Temperature and Current on Cable Joints*, Masterscriptie, UL, 2014.
- 7 M. Kac, *Enigmas of Chance. An Autobiography*, University of California Press, 1987.
- 8 L. C. M. Kallenberg, U kunt wel gaan, *Afscheidsrede*, 2010.
- 9 G. W. von Leibniz, Explication de l'Arithmétique Binaire, *Mémoires de l'Académie Royale des Sciences*, Paris, 1703, pp. 85–89.
- 10 Meneer Casino, Online casino tips, <https://meneercasino.com/online-casino-tips/roulette-strategie-systemen>.
- 11 J. Mourits, *Het bachelorseminarium als toewijzingsprobleem*, Bachelorscriptie, UL, 2019.
- 12 Oracle, What is machine learning? <https://www.oracle.com/nl/artificial-intelligence/machine-learning/what-is-machine-learning>.
- 13 L. E. Sigler, *Fibonacci's Liber Abaci. A Translation into Modern English of Leonardo Pisano's Book of Calculation*, Springer, 2002.
- 14 I. Smeets, Wiskundig de Ware, column 'Ionica antwoordt met wiskunde', *de Volkskrant*, 23 juli 2023.
- 15 H. Tijms, *Suprises in Probability – Seventeen Short Stories*, CRC Press, 2019.
- 16 S. Tijms, *Chance, Logic and Intuition – An Introduction to the Counter-Intuitive Logic of Chance*, World Scientific, 2021.
- 17 B. den Uyl, *Een zwerfend bestaan*, Querido, 1977.
- 18 W. Winston, Optimality of the Shortest Line Discipline, *Journal of Applied Probability* 14 (1977), 181–189.

Raf Bocklandt

Korteweg-de Vries Institute for Mathematics
University of Amsterdam
r.r.j.bocklandt@uva.nl

Diletta Martinelli

Korteweg-de Vries Institute for Mathematics
University of Amsterdam
d.martinelli@uva.nl

Nicos Starreveld

Korteweg-de Vries Institute for Mathematics
University of Amsterdam
n.j.starreveld@uva.nl

Interview Claudia Flandoli

With comics, science can be understood on different levels

Claudia Flandoli is an author of comics and an illustrator, with a keen interest in science topics. She teaches educational illustration at ISIA (Higher Institute for Artistic Industries) Urbino, where she has studied graphic design. Currently she works as a freelancer in Cambridge, UK. Last year she gave a short talk during the opening of IMAGINARY in Amsterdam, and she also designed the poster for the local exhibition. Our editors Raf Bocklandt, Diletta Martinelli and Nicos Starreveld had an interview with her about art and science.

How did you get involved with science illustration?

"After high-school I didn't really know what to do. I was interested in biology, but I liked all scientific topics. I was convinced by my parents to try medicine, mostly because of its professional perspectives. I started but it wasn't my thing. I liked biology, for me biology and medicine are two sides of the same coin, namely how life works. During my bachelor project I had to think more about my future. I was doubting if I wanted to go into research, which demands long-term commitment. I liked short-termed projects more. During my bachelor project I started making comics and I really liked it, then I decided to start with a master in graphic design and science illustration. I fell in love with it! I only wanted to learn more! In the end I did my master thesis in visualization of proteins.



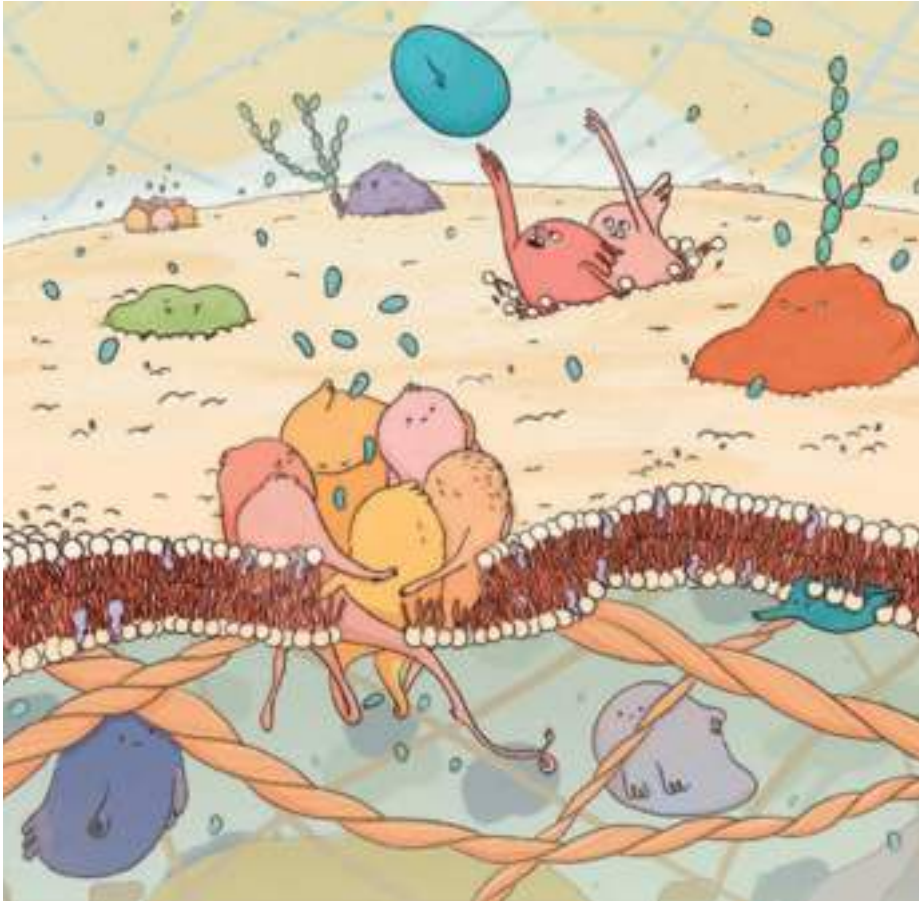
The poster for IMAGINARY in Amsterdam. Can you find the mathematics in the poster?

I was enthusiastic about making comics. I started communicating publishers and newspapers if they would be interested in a collaboration. My first comic was about Xyllela, a parasite infecting olive trees in the South of Italy. My second comic was in 2015 about vaccination, a hot topic. After that I started getting requests.

My first big project was with *Donna Moderna*, a very popular fashion magazine in Italy. The director wanted to also communicate some scientific discoveries to the readers. She thought that comics would be a less scary form to communicate science. You can create characters, make jokes, or make a funny drawing of some bacteria!"

EGMO: operatione panino

On the occasion of the 2018 European Girls' Mathematical Olympiad, the magazine *Comics&Science* has dedicated an issue to the topic of women in maths. Claudia was asked to write a comic story about the EGMO. She decided to write the story of four young girls going to the Olympiad: Emmy Noether, Ada Lovelace, Sofia Kovalevskaja and Ipazia!



Personal project: Life on a cell membrane.

“This comic shares bonding moments of students doing mathematics. It was a very touching comic. I remember I started reading a diary of the tutor of a group who went to the Mathematics Olympiad. About the traveling, their daily routines, being there, and participating in the Olympiad. So, I came up with the idea to make the comic as a diary. And since the Olympiad

was in Florence the tutor’s name is Dante! I decided to take famous women mathematicians participating in the team because this would make it more appealing for mathematicians, I could also make some inside jokes.

I studied a little bit the biographies of these mathematicians, and I thought what people with such biographies would do as

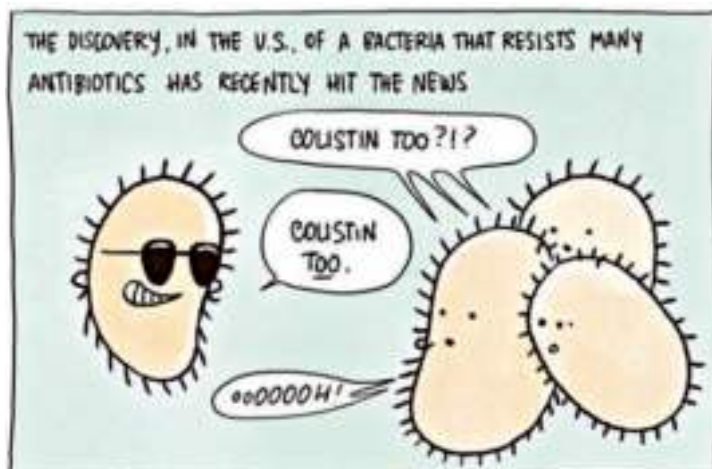
teenagers participating in the Olympiad in our time. For example, Emily Noether was not getting paid as a woman doing research, hence her character in the comic is a tutor at her school who is not getting paid. Sofia Kovalevskaja was involved in politics; and so is the character in the comic. Reading about them helped me build the characters and understand their way of thinking.”

What is the strength of comics in communicating science?

“Each medium has its strengths. When you write, you can delve into a lot of details within just one page. In comics, however, you need more space to achieve the same depth in the subject. On the other hand, comics have the advantage of having pictures, which can make difficult concepts easier to understand. Indeed, you have two levels of understanding that work in synergy: the text, and the picture. There are other advantages: comics are perceived as less scary, which may help you reach a broader audience; people can relate to the characters and be involved in the narrative. Finally, comics can be a good way to show the people behind science, including mathematicians.”

You have done work in math?

“My very first project was about Infinity. I was contacted by mathematician Bruno Codenotti, who wanted to write a book for teenagers. We decided for a combination of comics followed by more detailed explanations. We spent many hours discussing with Bruno about the content, how we wanted to present some concepts, and





Emmy Noether, Ada Lovelace and Ipazia preparing for the EGM0, The Women in Math Issue, *Comics&Science* 001/2018.

how the comics and the scientific explanations could strengthen each other. What I realized when working with Bruno is that mathematicians need to be very precise with the language they use. You cannot just play and mix words or make jokes the whole time because you can communicate something that is wrong.

I think the hardest part with mathematics is when you want to communicate a topic to readers who have no experience with it. You must motivate them to spend time and energy in your explanation. In biology it is different, you may need many details to explain some concepts, but they concern phenomena readers can relate to. Understanding mathematics often needs a lot of background, you need to be a very good communicator. But the societal im-

pact of such collaborations between scientists and artists can be huge!"

Are you inspired by collaborations between science and art?

"Absolutely! But before starting such a collaboration you need to have clear what your goal is, do you want to explain the science or be inspired by it. As an artist I don't only want to explain science, but also to be inspired by it. When you want to explain science, you need to be very careful not to be misunderstood. When you do art, it is not to explain the science, but to get a feeling from it.

We have in Cambridge a version of 'Pint of science' (hosted at nine locations in the Netherlands), it is an international project where scientists are asked to give a short

presentation about their research in their local pub, bar, cafe or public space. In Cambridge they have paired this exhibition with another cool exhibition which is called 'Creative reactions', where they asked volunteers from art to be paired to the scientists and create a piece of work inspired from the science. And you see many different results. For example, you see that the outcomes depend on how they react to each other. In a collaboration both sides should be open about how the other one will interpret some piece of work. There should be room for creativity. Sometimes mathematicians expect a precise representation of their work, but the funny thing is that when working with an artist you can get something which is totally opposite from what you expect! I really love this interplay!"



Left and right: Poster artworks for the May 12 conferences at Tor Vergata University of Rome. Middle: Book about infinity.

Nelly Litvak

Department of Mathematics and Computer Science
Eindhoven University of Technology
n.v.litvak@tue.nl



Column Better than blackboard

How students learn

In this column ‘Better than blackboard’ Nelly Litvak writes about teaching mathematics at university. She will address problems that many university teachers face.

Recently I saw a quote from the famous technology executive and author Sheryl Sandberg: “We cannot change what we are not aware of, and once we are aware, we cannot help but change.” This is a spot-on explanation why I cannot teach the same way as I did ten years ago, and why I am so passionate about the change in education.

I’ve been reading a lot of books and articles about how people learn in general, and learn mathematics in particular. It all started with the book *Mathematical Mindsets* [1] by Jo Boaler that landed on my hands by sheer chance in 2017. When I’ve got an opportunity, I made a point to meet Boaler at Stanford, where she works, because her work meant so much to me. After that more books followed, perhaps most remarkable was *How We Learn* [3] by Stanislas Dehaene, and there were many others.

By now my self-acquired knowledge about how people learn, formed a virtual wall between me and my lectures ten years ago. I cannot stand in front of the class in full awareness how little learning is happening in students’ brains right now. I cannot unknow what I know about the learning process. And, as Sheryl Sandberg rightfully noticed, I cannot help but change.

I mentioned bits and pieces about how people learn, in my previous columns, but I believe the topic deserves a column in its own right. I don’t expect that every reader will immediately share my drive for

change. Maybe you will find some points controversial, even simply wrong. But I hope at least you will see why we cannot ignore this knowledge in how we teach.

The four factors of effective learning

All aspects of effective learning, of course, cannot be covered in one page, as I will try to do. There are tons of books about it. Yet, I will try to provide a concise summary of the main points. My short formulations might not be sufficiently nuanced, but they work for me, and, in my experience, for my colleagues as well.

From all my readings, I have parsed the following four factors that greatly influence students’ learning.

1. Engagement. People cannot learn by passively listening or watching. These modes of learning are good enough to gain information, but not to learn as in ‘master the subject’. Learning happens when people are actively involved, when they do something. This is why the innovative university Minerva [4] has a non-negotiable requirement for design of every class: 100% of the students must be actively involved at least 75% of the time. When they choose activities, their driving question is: “What are the other students doing?” And “listening” is not a good answer. Each student must be actively working on something at least 75% of the time.

2. Inconsequential error feedback. We all gladly say that “we learn from mistakes”. For learning, it is very important that students are encouraged to make mistakes. This is obvious, but this is not the whole story. Turns out, it is equally important that students feel safe to make mistakes. The students should be able to come up with a wrong solution and get feedback, with no consequences. This was the idea that struck me most in Jo Boaler’s book [1]: the errors must be celebrated because when students make errors it means they are learning! Celebrating errors is not common in our classrooms. As for feedback, I am often annoyed when an exam is called ‘a feedback moment’. Because an exam is exactly the opposite of the ‘inconse-



Engagement

quential error feedback'. In the exam, students receive a grade; the number may tell them that they are not good enough but doesn't tell how to improve. And for sure this feedback is far from inconsequential: students are punished for every mistake by points reduction. 'Punished' is not my formulation, this is what students say. This sounds like anything but a safe space for errors. And this is not a good news for learning.

3. *Spacing.* We learn best when we do it consistently in small portions at regular intervals. This is a well-known fact, but for me the most convincing argument came from [3]. It is about the working of our brain, and very roughly it goes as follows. When we learn something during the day, the new knowledge is stored in our operational memory. Then during sleep this knowledge is transferred to the long-term memory. There is only so much information that our operational memory can hold during the day, and only so much that our brain can transform to the long-term memory during the night. The information that is not held or transformed, is basically lost. And this is why it is not possible to learn a lot in a very short time. In fact, [3] suggests optimal spacing intervals. The best strategy is to learn in small portions during several weeks, and then come back to this knowledge in increasing intervals of a month, two months, six months, one year, et cetera.

4. *Sleep.* It is not under our control how much students sleep at night, but the importance of sleep for learning is huge and fascinating [3,4]. During sleep, information is transformed from short- to long-term memory, and new neuronal connections appear to tie the newly learned information to the existing knowledge. This is why sometimes you wake up with a new idea, or you can suddenly play a difficult piano passage that you practiced yesterday with no success. The process of forming new neuronal connections takes several days. So, for reliable learning, good sleep is needed every day! Maybe, as an organization, we can take this into account. For instance, we can create a safe and friendly environment so that our students don't lose their sleep to stress. And maybe we shouldn't start classes at 8:45?



Students learn from mistakes when they feel safe to make them

Illustration: Mara Chelărescu

We do all these already, don't we?

Strictly speaking, the classical 'lecture-tutorial-exam' course design doesn't contradict the four factors of effective learning that I described above. Students can stay engaged in the lectures, for instance, by writing notes and asking questions. Students can practice and make mistakes, and tutorials are there for a perfectly safe inconsequential feedback. Students can follow the course plan and learn gradually week by week. And then they can sleep all they want with piece in their heart.

They can do it. Except they don't. They massively skip the lectures, listen passively, and cannot stay focused. The attendance of tutorials takes a drastic nosedive after the first one-two weeks. It would be fine if students used this time to study independently. But they usually don't. Most of the learning happens right before the

test. And without spacing, there is no deep understanding. The knowledge is scattered and grade-driven. At the end, even if the student passed the test, we cannot count on their knowledge in follow-up courses.

I often hear from colleagues, "So what? We offer the opportunity and it's up to the students to take it." I used to share this opinion long ago, and now I don't. I try to help my students to learn effectively, and I hope I will convince you that I have a point.

Attempts to implement effective learning

In my courses, I explicitly include engagement, inconsequential error feedback, and spacing in the course design. Not always successfully, but I consciously try.

For engagement, I use flipped classroom. I ask the students to watch videos or read a book before the class, and this leaves the time in the class for interaction.

I already wrote about some of my methods, see my previous columns [5, 6, 7]. Usually I use online quizzes or let students work on problems in groups. Lately I noticed that students get tired if the same activity (say, an online quiz) is used again and again during the same class, so now I am experimenting with alternating quizzes with solving problems in small groups. In Minerva [4] they have several templates of in-class activities and they may use several different activities in one class. Ideally, I would like to do so, too.

Inconsequential error feedback is probably the most challenging part because it is infeasible to give written or face-to-face feedback individually to each student in any medium-to-large course. Usually I do this by letting students work in groups and then the teachers walk around and give feedback on the group work. Another method is to let students work on a problem and then show the solution and let them correct their own solutions together. I also use digital tests where we add, in advance, comments to the correct and wrong answers; the students can see the comments after submitting the test. Very recently we tried the system where the final grade was composed of many small weekly tests (mostly digital), and students could retake any test many times. This is not exactly ‘inconsequential’ feedback, but due to many attempts students were not afraid to fail, and this is exactly what inconsequential feedback is about.

For the spacing, most effective system that I used so far were weekly tests that contribute to the grade. Almost all students attempted the tests each week. Successfully or not, they were working on our course each week, and this is exactly what the idea of spacing is. But I also use mandatory submissions. There is no grade, but without submission the student cannot take part in the exam. I try not to impose unnecessary dead-lines, sometimes my dead-line is the exam date. And yes, some students submit everything on the last day. Yet, this is rather exception than the rule. It is quite clear to any reasonable student that it is impossible to solve eight quizzes and eight problems in two days. Usually, if there is no dead-line, the students submit their work gradually but with delay of two/three weeks.

I cannot comment about the sleep. I just hope that students don't lose sleep because of my courses.

“Don’t you pamper students too much?”

This is the comment that I hear most of the time: “Don’t you pamper your students too much?” This is usually followed by: “The students are adults, therefore they should take responsibility for their own learning.” Okey, I hear you. And as a mathematician, I suggest to look logically at this statement.

First, the assumption is that the students are adults. What does that mean? Let’s try to come up with a definition. By law, we define adult as a person who is at least 18 years old. This does imply, for instance, that the person has the right to drive, to vote, to get married, and is responsible for their action in the court of law. However, does this immediately imply that this person can study effectively?

Suppose, going by my readings, effective studies means: being engaged, looking for feedback, studying at regular intervals, and going to bed on time. This sounds like awful lot of will power, motivation and discipline. Nobody suddenly wakes up with all these qualities on their 18th birthday. These abilities have to form gradually. Being an 18+ in itself doesn’t imply that the person is able to study effectively.

Okey, let’s say that the person is adult when their body is full-grown. Then vast majority of students don’t fall under this definition. Human brain grows till age of about 25. In that sense, our students are not yet completely grown ups.

Alright, let’s say the person is adult when they are responsible, disciplined, understand the value of feedback and don’t procrastinate. If this describes your students, good for you! In fact, good for

you, if this describes your PhD students, or co-workers. By that definition, many people never grow up! Otherwise, why do we have all these time management courses for perfectly grown up professionals? Why all these books about procrastination? Why all these New Year resolutions broken by the end of January? Think about yourself, do you never procrastinate and always look for error feedback?

Expecting a perfectly disciplined class is not only unrealistic. Recently, I was taken aback by yet another thought, from yet another article: we don’t teach the students self-discipline, but do expect it in our course design, therefore, we strongly benefit those students who had better chances to learn it, for instance, at home. Not all students had such chances. We say, we give them responsibility, but de facto we introduce inequity.

When I say it, colleagues mostly agree, but they ask: “Then, is it my responsibility to teach those skills?” No, not really. I believe that ideally there should be a course, at the beginning of the study, that explains to students how human brain learns, and teaches them successful learning strategies.

However, as teachers, we can do something, too. I believe, I don’t pamper my students. Engagement, spacing, and error feedback are necessary for effective learning. Therefore, as a teacher, I believe it is my responsibility to design interactive classes, to give students specific tasks with specific timeline, and give them feedback on these tasks. It is the students’ responsibility to execute the tasks to the best of their ability, do this on time, and use feedback to improve. In my view, this is an adequate amount of responsibility.

Difference bachelor and master students?

The next comment I often get, is that such close guidance is perhaps necessary for first year students, maybe bachelor students, but master students should be able to direct their own learning. My answer to this is that engagement, inconsequential error feedback, and spacing, are necessary for learning of anything, by any human, including the master students. However, indeed, implications on course design are different because master students generally are more experienced and motivated, and we can count on their cooperation. Also, the classes are often smaller, we



Illustration: Mara Chelărescu

Spacing

might know each student by name. This makes a huge difference because in a small group every student naturally feels seen and heard.

Therefore, when we teach a specialized MSc course, we have much more freedom in choosing learning forms. For instance: a classical blackboard explanation of a proof with follow-up discussion may work for a small motivated audience; in a small class, we can involve everyone in a live conversation, we don't need an online quiz for that; we may give students more freedom in choosing assignments or formulating their own; we may even let them choose their own deadlines.

The bottom line is that the teacher must organize engagement, inconsequential error feedback, and spacing in any course, regardless the age, background and motivation of participants. The specifics of the audience are important only in how to include this in a course design.

Is math special?

This is another comment that I often get: "Math is not just the same as other skills, math is different, right?" My answer is, somewhat yes, but not really. Math is perhaps more cumulative than other subjects, next bit of knowledge builds strongly on everything that came before. Also, math is a purely intellectual skill, it generally doesn't involve any equipment.

Yet, the process of grasping a mathematical topic, connecting it to other topics, and mastering the art of mathematical argument, is the learning process that occurs in a human brain and requires the same elements: engagement, inconsequential error feedback, and spacing. In fact, I have first read about this in the book of Boaler [1] which is about teaching math.

So, with respect to effective learning, mathematics is not special. I would even say, due to its purely intellectual nature, learning mathematics is the example of learning in its purest form.

Is there an evidence that it works?

In the last twenty years there has been a boom in commercial education for adults, and all these courses are organized this way: with engagement, feedback and spacing, adjusted to the audience.

We at university shouldn't look down at commercial education. My mother runs an online school on communication, so



Sleep

I know first-hand that it is a very difficult business. They must deliver effective learning, because their client pays money to learn. If the learning process is ineffective, the company simply goes bankrupt. I may only hope that universities take a note of how people teach when they must earn every cent on the quality of learning only.

Classes bleeding empty

From somewhere about 2017, attendance of my classes started noticeably reducing, especially in courses for non-math students. It was a common phenomenon, all teachers experienced that, and it became even worse after the Covid pandemic. From what I know from others and my experience, it is not uncommon to have less than 30% students at the lecture (or it's interactive equivalent), and tutorials bleed almost empty by week 4.

What pained me most was that I saw 30 students at the lecture and 150 at the exam. This made me feel completely useless as a teacher. I felt that the only thing the students wanted from me is a grade, as in "Tell me what I have to write so that you give me a six." I could be pragmatic about it, but I happened to be idealistic and believing in my added value for the students. This is why I strongly feel, this low attendance is not okay.

Many colleagues say: "It is not a problem, it is academic freedom. Every student learns differently and chooses what works for them." No and no.

No, every human without brain disorder, learns in exactly the same way: by

getting information, trying, failing, getting feedback, and trying again. Think about anything that you learned: math, playing instrument, sport, cooking... anything! I bet you didn't learn anything in any other way.

And no, students have a very limited information which class is important because they don't know the subject. I am hired as expert in the subject. As an expert and a teacher, I have a better judgement which activity is useful for students' learning. I know exactly which errors they make, which parts are difficult. Yes, the students may have individual preferences for one work form over another. But any work form is better than skipping the class.

It is simply not true that the students skip the classes because these classes are genuinely not useful. Procrastination, other priorities, personal problems, just forgetting to set the alarm, are much more likely reasons. You know it yourself. Usually the students who skip classes are the ones who need the classes most. This is not the evidence of a good judgement.

Some people say, I am fine if even one student attends. I see your point, but unfortunately this doesn't sound like an economically viable workflow. A teacher in empty classroom that sits 70 students is a massive waste of resources.

And I don't buy the argument of academic freedom. Academic freedom is about choosing your topic of study and research, not about skipping classes. I also don't see the logic, why we are so adamant and sensitive about that freedom. In high school, attendance is mandatory. At work, professionals tend to attend all their scheduled meetings. Why the university is suddenly the life-time low, when one can choose whether or not to attend their scheduled activities?

Let's be honest. We don't believe in good judgement of students which classes to attend. In such conversations I often feel that all these arguments about students being adults and their freedom are mostly excuses to resist the change.

A plea for mandatory attendance

So I have this unpopular opinion: I am for mandatory attendance. Don't get me wrong. I don't suggest to demand mandatory attendance for the courses in their current form. I do believe that for a student

in the back row, a video is a superior substitute to the live lecture.

What I suggest is this: every new course should be designed for effective learning, and there should be mandatory attendance for every class. Is the class useful? Then I don't see the reason why students should skip it. Is the class not so useful? Let's not give it. Is the class useful for some students? Let's make attendance mandatory for this particular group. Is there an adequate online substitute? Let's monitor that students actually worked on it.

Implementing mandatory attendance is easier than one may think. In our recent weekly tests in a course for 300 students, we took example from our colleagues in Computer Science at the TU/e and used attendance slips, see Figure 1. During the test, student assistants collected the slips and marked attendance in a shared Excel file. In another course for Computer Science at the TU/e, my colleagues are experimenting with registering attendance automatically with students' campus IDs. And my favourite is the Wooclap quiz software where I can ask students to login. Then a teacher may require, say, answering at least 75% of quiz questions during the entire course. This is not only mandatory attendance but also mandatory engagement.

Administration is greatly simplified if you require not 100% attendance but, say, 75%. This will prevent the avalanche of e-mails from students who are ill or have other good reasons to skip a class. If they want to skip more than allowed, you may require to contact their study advisor for exception. There will be probably a few cases like this, but not many if you are flexible enough.

[course name], attendance card

Weekly test nr:	
Name:	
Student id:	
Signature:	

Figure 1 Attendance slip. We copy five slips per page in Word and then print and cut them in the university printshop.

Once attendance is marked in Excel, you are basically done. If you are an Excel wizard, you can easily implement any requirement. If you are Excel-incapable like me, then a good student assistant will easily do the job. We were particularly lucky with a TA who not only registered attendance and grades, but also wrote a manual how to do it for the next year.

While writing this column, I saw a tweet from Robert Talbert, one of the authors of [2], about the strong correlation between attendance and results, and the promise to write more about attendance in his upcoming blog. The time is ripe, and I am going to do it.

In Q1 of 2024/25 I will start teaching a new elective course. The course has a very innovative design, mainly by my talented young colleague Mike van Santvoort. When we were filling out the Osiris form, I paused a bit before I checked the box 'mandatory attendance'. It was uncommon for me, and somewhat daring. But I do believe it is right.

Reclaiming my joy of teaching

My main motivation for staying in academia, was teaching. I loved it from day one. I loved giving lectures, and I had many compliments from the students. Until gradually I saw that no matter what I say, I was losing the contact with the students,

and turning into a grading machine. This greatly threatened my joy of teaching. And I know I am not the only one.

Now that I committed to engagement, error feedback, and spacing, I am enthusiastic again.

I cannot say that students love and support my methods one hundred percent. Some do. Some others may complain about my mandatory assignments, beg for an extra point, and ask to revert to the traditional system. But I know I am doing the right thing, even if not all experiments work out as expected. Theoretically, I know this from my readings. But I can see it, too. When I set students to work, I do often notice the spark again, I see them making errors and helping each other, I get wonderful deep questions even from non-math students. I also see enthusiastic reactions from many colleagues, especially young colleagues, and some try new methods, too.

I realize now that my joy of teaching was very much centred around my story, my enthusiasm, my ability to explain clearly. I still like to tell a story, but now my motto is 'It's not important what I say, it's important what students do'. Now I enjoy my attempts, successful or not, to put the students in the centre of attention. And I will keep trying because this is their right place. Seeing them learning effectively is the greatest reward for me.

References

1

J. Boaler, *Mathematical Mindsets: Unleashing Students' Potential through Creative Mathematics, Inspiring Messages and Innovative Teaching*, Wiley, 2022.

2

D. Clark and R. Talbert, *Grading for Growth: A Guide to Alternative Grading Practices that Promote Authentic Learning and Student Engagement in Higher Education*, Taylor & Francis, 2023.

3

S. Dehaene, *How We Learn: Why Brains Learn Better than any Machine... for now*, Penguin, 2021.

4

B. Kerrey, *Building the Intentional University: Minerva and the Future of Higher Education*, MIT Press, 2018.

5

N. Litvak, We shouldn't give classroom lectures anymore, *Nieuwe Archief voor Wiskunde* 5/24(3) (2023), 145–149.

6

N. Litvak, What's our goal in teaching math to non-math students? *Nieuwe Archief voor Wiskunde* 5/25(1) (2024), 51–56.

7

N. Litvak and L. Weedage, Do we teach what we preach? *Nieuwe Archief voor Wiskunde* 5/24(4) (2023), 233–238.

8

M. Walker, *Why We Sleep: Unlocking the Power of Sleep and Dreams*, Simon and Schuster, 2017.

Stijn Cambie

Department of Computer Science
KU Leuven
stijn.cambie@hotmail.com

Column Wiskundigen in den vreemde

How bureaucracy can destroy a peaceful mathematical journey in the UK

In deze rubriek doen wiskundigen verslag van hun ervaringen als wetenschapper in den vreemde. Nu de Belg Stijn Cambie terug aan de slag is in zijn geboorteland, werd gevraagd om ervaringen te delen na passages in de UK en Zuid-Korea. Hoewel er meer culturele verschillen en leuke weetjes over Zuid-Korea te vertellen zijn, verhaalt hij hier alleen over zijn UK-avontuur.

One can learn, conclude or be warned the most by hearing extreme cases (but it turns out that those special cases are more common than should be), and thus the invitation to write about experiences abroad will be taken to inform young colleagues about all that may come and should be thought about.

Academia has changed over the years. While 60 years ago, people could immediately start as a professor, or choose a post-doctoral position as the intended follower of an academic spot, nowadays young academicians are expected to have worked abroad. A few years ago, I chose to go for an adventure towards the UK, and hereby share part of the story. Before that, I enjoyed my PhD, balanced with social and sports activities, between 2017 and 2021 in Nijmegen. It was a wonderful and carefree time. When the end of the PhD at the Radboud University was coming nearer, I considered a postdoc in the UK. In June 2021, after sending an application and doing an interview, I got an offer for nine months at Warwick University with *Start date* 1-11-21.

I started to arrange the necessities (documents) for the paperwork. On August 25, my dedication to research may have saved my life. While working at the office till 22:30, an unfortunate situation happened at my home. Not going into details, but in that period, the focus was not on the arrangements to go to the UK. It took a while before there was a spot for the official language test (the final piece for the visa procedure) available. A 250-page thesis written in English was no valid proof for the authorities. In September the English proficiency test could finally take place and I passed easily with 49/50 (33/50 is the threshold).

When early October housing was arranged for one year, I got warned that the visa would not be processed by 1-11-21 and a new starting date was set: *start date* 10-01-22. Every week, HR has to change the starting date of some international employee. This was far from ideal, but the university did not want to accept better dates. No employer in the UK will let a contract start on a holiday (e.g. a Sunday or New Year), as HR do not expect you to

work then. On the other hand they expect us, due to our role (e.g. professors and those wanting to become professor), to work outside office hours.

While being unemployed, I could start a new collaboration (advice not to have academic gaps) and moved back in at my parents' place in Belgium. The administration for unemployment benefits did not happen within time. Different organisations in Belgium and the Netherlands pinpointed to each other, making it complex; forms had to be filled in and rejections were made afterwards, while none wanted to listen to the situation such that I could know how to handle it correctly.

On the day the visa for the UK was obtained, the professor in Warwick mentioned he would move to South-Korea. This led to an unclear situation for a while. Since the postdoc was financed by a personal grant of the professor and the university does not earn money by employing postdocs, they changed the contract in the UK to the moment the grant funding would terminate; *End date* 31-03-22.

Early 2022, the covid regulation forced some rules. I took a covid test in Belgium, bought covid tests (multiple times as it depends on the way one gets in the country) and worked a period in quarantine on possible projects. A 'Right to Work Check' was executed, once arrived in the UK. It turned out I was registered as a tourist or visitor when entering the UK. So while the skilled



Walk in Snowdonia

workers visa was processed on 17-11-21, it would only be valid if I entered the UK after the 10th of January. During a meeting, it was mentioned that I was forced to leave the UK and come back again to be able to be paid for my work. Contact with the Home Office, did not lead to anything: “Thank you for contacting the Home Office. We aim to provide a response within twenty working days.” Giving me no option, a trip to Dublin was booked, to visit a new city while resolving the visa problem. It turned out that this was not OK. Due to the common travel area (CTA), an agreement related to Ireland and Northern-Ireland, returning to the UK would not change my setting. Something that was not mentioned during the meeting with the administrative staff. All they told about this communication error was: “We did not expect you to go to Ireland.” As such, after a flight towards Madrid and immediately one back to the UK, a stamp was received, once having asked (as it is not necessary according to the border control). During the flight, the final ideas resolving a conjecture by Frankl were found as well. After all these bureaucratic flights (which due to the covid pandemic and the climate change should be avoided by common sense), I was officially employed at Warwick University between the *Start date* 20-1-22 and *End date* 31-3-22.

Social life

Once I would be settled, it was the idea to immediately spend a nice weekend in South-England with a girl visiting me from the Netherlands, together with common friends living in the UK. Due to the visarun, these bright plans turned out different. As a result, that time was not pleasant for either of us, and she later concluded that further meetings were not worth it.

By joining Internations and Meetup, I prepared to do activities within the UK with locals. But only mid March it worked out to do a first (and also last) citytrip, with two other expats from the platform. A 360° view from Snowdon's summit was captured by video. A picture cannot fully show the beauty seen that weekend.

The UK has more Areas of Outstanding Natural Beauty, but only a few have been explored (a period of 9 months would have been sufficient to do all of them). Also a local running club was joined, where I was the new guy up to the moment leaving was unavoidable again.

Working in the UK

Due to the consequences of covid, I was unlucky and have only been able to work 5 days together physically with others in the UK (not even all during the employment period). Some other expats had already been at the university for over a year without collaborating physically together. In that regard, once things were settled out, the way of working did not change much. One can work virtually with people anywhere in the world. It is as such also a pity that the only project which started in the UK was a few days before the end of the contract. The latter being finished in a next period of unpaid unemployment. Other decisions turned out unfortunate and implied that the contract in South Korea could only start mid May. With the moving between the UK, the Netherlands and Belgium, there was no hope on any kind of stipend for the intermediate period. The contrast of the outcome of working hard was very clear during a visit to a friend

working in IT, who earned 20 000 Euros a month at that moment. While the university of Warwick would consider a (partial) refund on relocation costs and costs related to the visarun, they never answered on that. Related to this, an international begging for money in London mentioned that the employer had taken her documents and did not pay for the work of two months. Without documents, someone has no rights in the UK.

Looking back to the employment at the UK

One can understand the situation the best after all has passed. Someone asked me back then “How would you see yourself happy?”, on which I responded that working on the mathematical problems intriguing me, while being able to travel a bit in a new country, without other concerns, seemed great.

While moving and mathematics was a big part of the journey, it was not the way intended at all. It is surprising how far in the future an international move can have administrative consequences. Taxes and especially insurance still depend on the status from a few years before. Hereby, it was even not surprising that the transfer of information on taxes from South-Korea happened more fluently than with the UK as ex-EU state.

Two years after the whole situation, finally an answer from UKVI (UK Visa instance) came

“Whilst our team issue usually 2 weeks prior to cos work start dates and 2 weeks after I can see from the visa application form that you put down your travel date as 10/1/2022 (the same date you were due to start work) and so the case worker issued correctly in line with your chosen travel date. Whilst you have noted that the government at the time imposed a quarantine period due to covid, this is not controlled by UKVI. We did have a covid hotline in place at the time you came into the UK, and this was set up for refund requests/queries but from what I can see, you did not raise this at the time.”

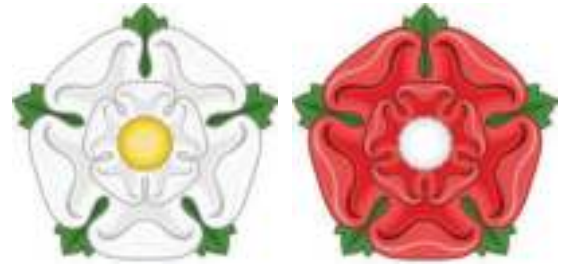
In a system which has many institutions and instances, there are conflicting governmental decisions, and no one will feel responsible for bad endings or will even apology for real. It seems issues are resolved for them by letting it expire, while we should be aware of everything. Of course, with the combination of a pandemic, Brexit, a resignation and unfortunate home situation, this story is extreme. But knowing that already in just one university, every week contract dates of expats change, it is better to be aware of worst-case scenarios. And also under different circumstances, many people who were in academia, can relate to big chunks of the experiences. One can wonder about special arrangements for academics, giving them a special status, as similar rules have been applied before e.g. for sports people.

During times were international collaborations are easily held online as well, one can especially wonder about rules around mobility requirements, as was e.g. the case for <https://web.archive.org/https://www.thenetworkcenter.nl/Open-Positions/openposition/30/8-Postdoctoral-fellows-in-Stochastics-and-Algorithmics-COFUND> and why people knowing how the administration and other practical aspects work in a country, are excluded. Does the government also realise or care about the created difficulties on e.g. social life?



Edward Berengoltz

Korteweg-de Vries Instituut voor Wiskunde
Universiteit van Amsterdam
edikabb@xs4all.nl



Geschiedenis

De wiskundige, de boze schoonmoeder en de koningsmoord

In mei 2023 is Karel III van Engeland gekroond volgens een schitterende, eeuwen duurzame traditie. Maar niet alles was als vanouds: zo verliep de troonsopvolging bijvoorbeeld vreedzaam en betrok zij geen spionerende wiskundigen. Hoe anders is dat in het verleden geweest... Edward Berengoltz neemt ons mee terug naar de Middeleeuwen.

Londen, einde zomer, 1483. Een man met dokterstas loopt richting Westminster Abbey. De kathedraal wordt zwaar bewaakt op orders van de kersverse koning Richard III, maar hij mag gewoon naar binnen. Hij begeeft zich naar het vertrek van de abt, waar een statige vrouw hem opwacht. Hij opent zijn tas en overhandigt haar een brief die niemand anders onder ogen mocht krijgen — een brief waarin plannen werden gesmeed om Richard van de Engelse troon te stoten.

Dit klinkt als de achterflap van een roman, maar nee, dit is echt: de dame is Koningin Elizabeth Woodville, vrouw van

wijlen Koning Eduard IV. De man is professioneel arts, astronoom en... wiskundige — die zich middenin Englands grootste complot sinds tijden bevindt [8].

Ben je boos, pluk een roos

Jarenlang vormde Engeland het strijdtoneel van de zogenaamde Rozenoorlogen. Het onderwerp heet notoir ingewikkeld te zijn maar de beknoptste samenvatting luidt als volgt: twee zijtakken van de regerende dynastie, de huizen Lancaster en York, streden om de kroon. Scharen baronnen, earls en hertogen moordden elkaar uit. Eduard IV van York en Hendrik VI van

Lancaster hadden elkaar driemaal afgewisseld als koning. Sinds 1471 prevaleerden de Yorks. Eduard overleed echter onverwachts in april 1483 en zou worden opgevolgd door zijn minderjarige zoon, die op dat moment in Wales zat, als Eduard V.

De ambitieuze weduwe Elizabeth Woodville, thans koningsmoeder, wilde haar zoon fluks gekroond zien en wachtte hem op in Londen. Helaas! Hoewel Richard, de jongere broer van Eduard IV, zijn neefje openlijk trouw zwoer, onderschepte hij met eigen troepen ijlings diens processie en nam hem in gijzeling. Eduard V werd overgebracht naar de Tower of London¹ in afwachting van zijn kroning (conform traditie) en Richard liet zichzelf aanstellen als regent. Een veeg teken...

Richards motieven blijven ongewis. Geloofde hij echt dat 's konings huwelijk met



Figuur 1 Eduard IV, zijn vrouw Elizabeth Woodville, zijn broer Richard III, Margaret Beaufort en haar zoon Hendrik VII; alle schilderijen uit de zestiende eeuw.

Elizabeth, dat in het geheim en tot veler ontsteltenis was voltrokken, bigaam was, zodat niet bastaardneefje Eduard V maar *hijzelf* de rechtmatige troonopvolger ware? Of was dat voor de bühne? Elizabeth rook in elk geval onraad en nam haar toevlucht in Westminster Abbey. Richard sloeg toe: hij bracht zijn leger naar Londen en sloot ook Elizabeths jongere zoon op bij diens broer. Intussen verzochten groepen Londenaren hem zowaar om koning te worden: zij achtten Elizabeths huwelijk inderdaad ongeldig. Beter ten halve gekeerd...? Het euvel was nu fait accompli: in juni overreedde Richard het parlement om het huwelijk nietig te verklaren en hem tot koning uit te roepen. Op 6 juli 1483 werd hij in de Abbey gekroond tot Richard III.

Wat er met de *Princes in the Tower* is gebeurd, is nooit duidelijk geworden. 's Zomers werden de jongens steeds minder gezien totdat nagenoeg iedereen, hun moeder inclusief, overtuigd was van hun dood. Had de arglistige Richard zijn neefjes laten vermoorden? Dat dachten in elk geval velen.² Hoewel voorheen populair bij den volke en gesteund door het parlement, ging het nu bergafwaarts voor de geschandvlechte Richard: zowel de toornige Lancasters als de verdeelde Yorks zagen hun kans schoon voor wraak.

Manusje-van-alles

Wie was die wiskundige spionagearts? Over het leven van deze Lewis van Caerleon uit Wales, is niet veel bekend. Hij begon rond 1465 in Cambridge aan de studie medicijnen. Tegen 1481 bezat hij de graad van doctor, maar het is onduidelijk van welke universiteit. Deze arts leek echter weinig interesse in academische geneeskunde te hebben: in 1466 kreeg hij een forse boete van 20 shillings³ omdat hij er geen college in had gegeven [5]. In plaats daarvan werkte hij fervent aan wiskunde, astronomie en astrologie.⁴

Hij annoteerde, commenteerde, tabelleerde, mat, rekende, en voorspelde. Naast eigen werk kopieerde en bundelde hij ook geschriften van (veelal, maar niet

Een eeuwenlange reis

Het manuscript van de British Library is veelvuldig van eigenaar gewisseld via veilingen, bibliotheken en antiquariaten. De vroegst bekende koper kondigt zichzelf aan bovenaan pagina 1: *Henricj Spelmanj liber. empt. 11^o Apr. 1606*. Dit is historicus Sir Henry Spelman, die het werk op 11 april 1606 heeft aangeschaft en in wiens familie het bleef alvorens in 1709 te worden geveild in Londen. Het is in 1715 zelfs door niemand minder dan Koning George I gekocht en aan Cambridge gedoneerd. Recentelijk dreigde het manuscript het land te verlaten door een overzeese aankoop, maar na ingrijpen van de Minister van Cultuur kon de British Library eind 2020 genoeg geld bijeenrapen om het te kopen [2]. Zie [1] voor de koppeling naar de scan. De latere eigenaren hebben soms ook inhoudelijke annotaties achtergelaten: zoals de afbeeldingen in dit artikel laten zien, is her en der bijvoorbeeld modernere notatie voor getallen neergepend. Opmerkelijker: een zekere zestiende-eeuwse sterrenkundige heeft allerlei toevoegingen gedaan, zoals een voorspelling van het einde van de wereld [5]. Dit stond voor 1765 op de agenda — men lijkt de memo echter te hebben gemist.

uitsluitend, Engelse) sterrenkundigen uit de veertiende en vijftiende eeuwen. Hij was kritisch waar nodig en trok soms materiaal van zijn voorgangers in twijfel, welk hij dan aanvulde met eigen metingen of berekeningen [7]. Maar ook in zijn eigen werk bracht hij zo nodig correcties aan. Zoals een middeleeuwse geleerde betaamt, schreef hij in het Latijn, in welke taal hij Lewys of Lodowycus Caerlyon, *in medicinis doctor*, tekende.

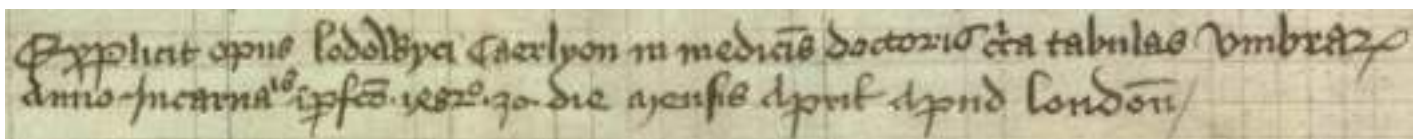
Nou valt dokter Lewis ook onder de categorie 'wiskundigen'. Blijkens zijn oeuvre was hij bedreven in de euclidische en bolmeetkunde, die hij aanwendde om hemelmechanica te beschrijven. Hij verzamelde en tabelleerde niet alleen gegevens, maar legde ook uit hoe zij tot stand waren gekomen en gebruikt konden worden om wiskundig maans- en zonsverduisteringen en nachteveningen te voorspellen. Hij kon de groottes, posities, magnitudes en tijdsduren van de (half)schaduw berekenen en alles verklaren aan de hand van de meetkunde van zon, maan en aarde; denk aan parallaxen, elongaties en rechte klimmingen [5]. Hij raadpleegde de *Geometria Euclidis* — zo heette toentertijd Euclides' *Elementen* — en een (anoniem) middeleeuws commentaar op Ptolemaeus' *Almagest*. Ook kopieerde hij de oudere Moorse bronnen uit Toledo.⁵ Lewis was zich actief bewust van deze rol als 'erfge-

naam' van de sterrenkundige traditie en haar continuïteit [5].

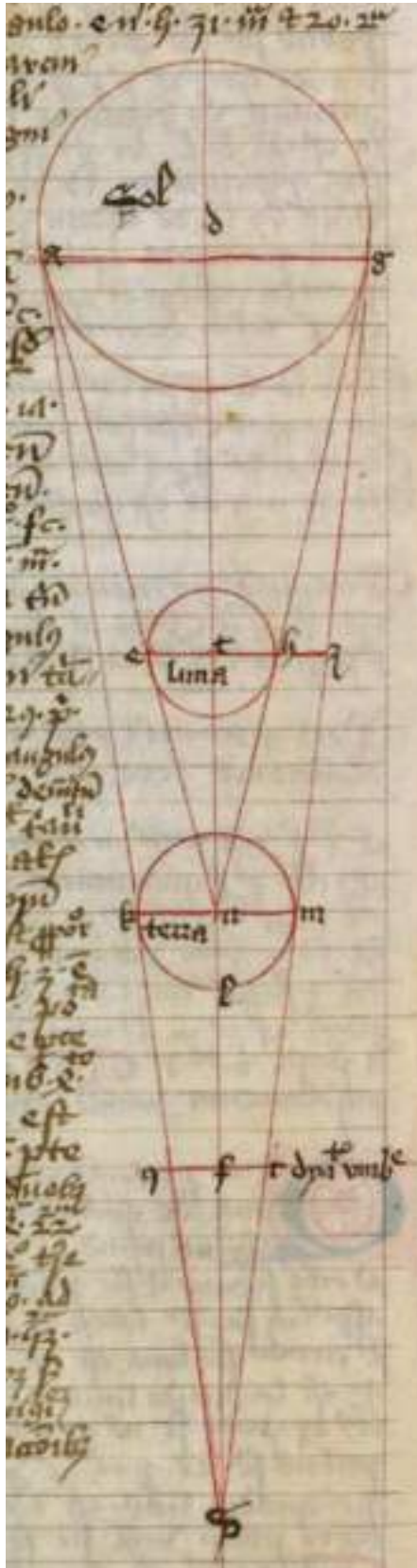
In [4] staan lijsten van Lewis' publicaties en de vele werken van anderen die hij gebruikt of gekopieerd heeft. Sommige behelzen directe waarnemingen met titels als *Tabula punctorum eclipsis solaris ad Londoniensis* maar andere verraden Lewis' wiskundige aard. Bijvoorbeeld: *Tabule continentes numeros quadratos et cubitos cum radicibus eorundem*, oftewel 'Tabellen bevattende kwadratische en kubische getallen met dierzelfde wortels'. Een andere wiskundige titel luidt *De modo calculandi eclipsium geometrice sine tabulis*; dat wil zeggen, 'Over de manier van meetkundig uitrekenen van verduisteringen zonder tabellen', wat onmiddellijk aantoonde dat hij ook abstract meetkundig redeneerde en niet alleen waarnemingen deed.

De British Library heeft in 2020 een origineel manuscript van Lewis gekocht en (virtueel) beschikbaar gesteld; zie het kader hierboven. Het is een schitterend, gebonden presenteerexemplaar van 192 folia en hij heeft deze omnibus zelf samengesteld, getuige zinsneden als *per me Lodowycum*. In het kader op de volgende pagina wordt Lewis' meetkundige berekening van pagina 52 ter illustratie uitgelicht.

Maar naast verduisterde hemellichamen was Lewis ook verwickeld in een duister complot...



Figuur 2 Lewis sluit af (p. 38): *Explicit opus Lodowyci Caerlyon in medicinis doctoris circa tabulas umbrarum Anno Incarnationis imperfecto 1482º 30 die mensis Aprilis apud Londonem*, oftewel "Afgerond [is] het werk van Lewis van Caerleon, doctor in de medicijnen, omtrent tabellen van schaduw in het onvoltooide jaar van de Menswording 1482 op de 30ste dag van de maand april nabij Londen."



Figuur 3 Weergave van een zonsverduistering op p. 52. *Luna* blokkeert het licht van *Sol* op *terra*. De punten heten, van boven naar beneden en links naar rechts: *a, d, g, e, t, h, z, k, n, m, l, q, f, c, S*. Boven de zon is net te lezen dat de hoek *enh* 31 minuten en 20 'tweeden' oftewel boogseconden bedraagt. Gelijk links van *terra* staat bijvoorbeeld *proporcio* in middeleeuwse steno; daar wordt een verhouding van lijnstukken bepaald.

Een st(r)aaltje meetkunde

Lewis' tekst is gebaseerd op het vijfde boek van Ptolemaeus' *Almagest*, dat hij veelvuldig citeert. Hij begint met een verontschuldiging dat elders de 'benodigde orde' ontbreekt en kondigt aan dat hij nu zelf de maximale afstand van de zon en maan tot het middelpunt van de aarde zal berekenen gebruikmakend van Ptolemaeus' werk. Zie de schets van een zonsverduistering in Figuur 3, waarin zon, maan en aarde op één lijn liggen.

Er volgt een technisch verhaal: "Neem aan, zoals Ptolemaeus, dat de hoek $\angle enh$, die de maan aan beide zijden omvat, 31 boogminuten en 20 seconden bedraagt [...]" (Alle getallen worden in zestigtallig stelsel gegeven, zoals men lang in de sterrenkunde heeft geplacht.) De gewenste afstanden worden vervolgens meetkundig berekend: bogen en koorden, gelijkvormige driehoeken, parallellogrammen en omgeschreven cirkels passeren de revue. Af en toe verbetert Lewis zijn Griekse voorganger: hij geeft de straal van de maan als $17'32''21'''$ aardstralen⁶ terwijl Ptolemaeus $17'33''$ hanteert, "hetgeen [echter] volstaat voor het bewijs".

Voorts wordt een hulplijn ingeschakeld: de lijn onder de aarde aangegeven als *dyametros umbre* in de figuur. "Evenzo zal de lijn *fc*, de halfdiameter van de schaduw [die de aarde op de maan zou werpen in geval van juist een maansverduistering], $45'38''$ [aardstralen] zijn en de lijn *fc* staat dubbel tot de lijn *th* met drie vijfden erbij opgeteld." Zij staat precies even ver van de aarde als de maan en voor de verhouding *fc* : *th* neemt Lewis dus Ptolemaeus' waarde, die gebaseerd is op waarnemingen uit de Oudheid, zodat de zonnediameter vanaf het centrum van de aarde inderdaad $31'20''$ bedraagt.

Lewis weet de Griekse berekening na te bootsen, waarbij hij de resulterende waarden verscherpt. De afstanden tussen aarde en maan (*nt*), zon (*nd*) en de top van de schaduwkegel (*ns*) — welke Ptolemaeus geeft als 59, 1210 en 268 aardstralen, respectievelijk — komen omgerekend naar decimalen uit op 59,9994, 1209,4167 en 267,9981. De daadwerkelijke maximale afstand tussen aarde en maan (ruim 62 aardstralen) komt aardig overeen. Die tussen de aarde en de zon is echter een fikse factor 20 te klein!

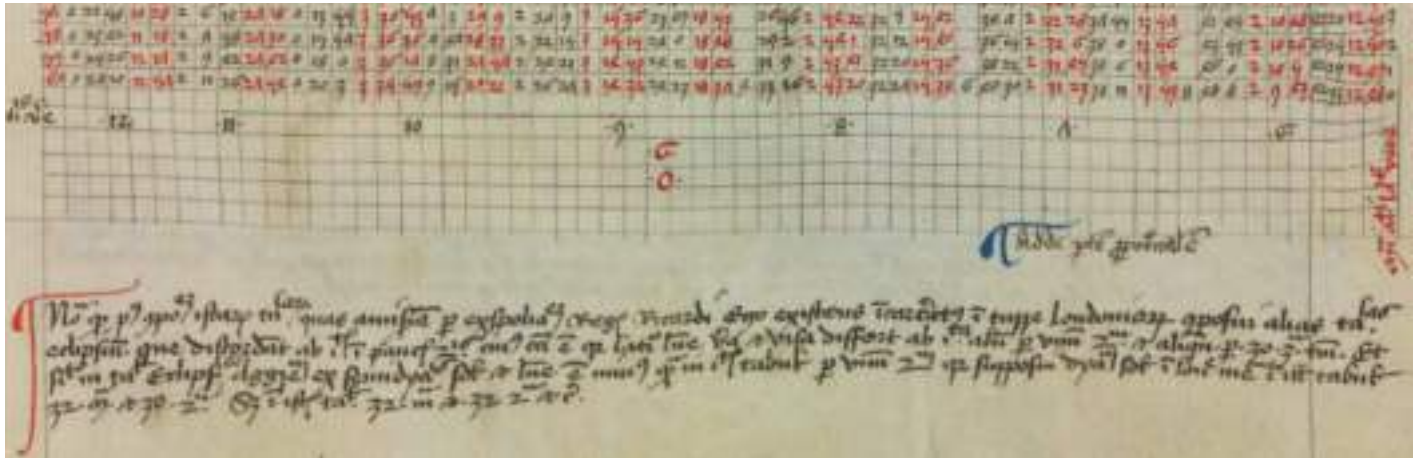
Aan de meetkunde ligt dit niet: de bewijzen zijn feilloos. Die verhouding $fc : th = 2\frac{3}{5}$ lijkt het doel echter ruimschoots te hebben gemist — waarschijnlijk heeft dit te maken met het feit dat de oude Grieken de afstand tot de zon enorm hebben onderschat, zodat die schaduw te groot uitvalt. Daarenboven lijkt het erop dat de beste Ptolemaeus af en toe getallen heeft verzonnen opdat zijn berekeningen uitkwamen overeenkomstig die van Aristarchus en Hipparchos. Zie [3, §2.1.1 en §3] voor meer uitleg en uitgebreide foutenanalyse.

De brief voor de koningin

Laten we terugkeren naar de brief die Lewis aan Elizabeth bezorgde. De voormalige koningin werd streng bewaakt maar als haar lijfarts kon hij moeiteloos binnenkomen: de ideale spion. De afzendster was het hoofd van Huize Lancaster en Elizabeths rivale: Lady Margaret Beaufort, een nicht van Hendrik VI en eveneens Lewis' patiënte. We slaan de politieke achtergrond over; volstaat te zeggen dat zij en haar man tegen de Yorks hadden gevochten en ze nu voor hun zoon Henry Tudor een baantje als Koning van Engeland ambieerde. Deze bevond zich in Franse ballingschap sinds de eclatante Yorker overwinning van 1471. Richards coup bood Margaret, die haar huik naar de wind hing door met de Yorks te konkelfoezen, echter een mogelijkheid. Haar brief

stelde voor om Henry uit te huwelijken aan Elizabeths oudste dochter, waarmee de bloedlijnen van York en Lancaster verenigd zouden worden. O ja; eerst moest Richard alleen nog uit de weg worden geruimd [8].

De dames sloten een verbond met Lewis als bode. Ook heeft hij geholpen het huwelijk te faciliteren. In het najaar van 1483 werd een — naar verluidt door Henry en Lewis gesteunde — opstand tegen de koning opgerold. Lewis' aandeel in dit complot bleef niet onopgemerkt; in januari 1484 werd hij gearresteerd en opgesloten in de Tower vanwege zijn banden met de Lancasters. Zijn naam komt weliswaar niet voor op de veroordeeldenlijst, maar zelf schrijft hij wel over zijn gevangennamen *in turre Londoniorum*. Bovendien werden zijn werken en boeken geconfisqueerd.



Figuur 4 Onderkant van een waarnemingstabel op p. 65 van een andere astronoom, uitgebreid door Lewis. De eerste regel van de noot onderaan is goed leesbaar: *Nota quod post compositionem istarum tabularum quas amiseram per expoliationem Regis Ricardi Ego existens incarceratus in turre Londoniarum composui alias tabulas eclipsium*. In vertaling: “Merk op dat na het opstellen van die tabellen die ik had verloren door de plundering van Koning Richard, ik, gevangen zijnde in de Tower of London, andere verduisteringstabellen heb samengesteld.”

Nochtans veronachtzaamde Lewis zelfs vanuit de gevangenis zijn werk niet: hij verrichte observaties en stelde nieuwe tabellen op. Hij noemt zelfs spitsvondig dat deze enigszins afwijken van de waarden die hij “kwijt was door de beroving van Koning Richard”, omdat hij vanaf een andere plek mat. Hij produceerde nauwkeurige voorspellingen van verduisteringen [4] én wiskundige methoden om ze uit te rekenen [5].

Rozengeur en maneschijn

Op 7 augustus 1485 toog Henry Tudor met een hoofdzakelijk Frans leger naar Engeland ten strijde. Op de 22ste vond de beroemde Slag bij Bosworth plaats. Richards grotere leger bestormde de tegenstander heuvelafwaarts. Henry's troepen braken de charge in wigformatie, waarop Richard persoonlijk met zijn zwaar bewapende garde aanviel. Hij streed dapper, maar de verdediging van Henry's voetsoldaten bleek

sterker. De koning werd van zijn paard geworpen en door een piekenier doorkliefd, waarna zijn naakte, verminkte lichaam onplechtig is begraven.⁷

De overwinnaar werd tot Hendrik VII gekroond en in januari 1486 huwde hij Elizabeths dochter zoals hun moeders bekosttoofd hadden. De rozen van Lancaster en York werden verenigd in het symbool van de nieuwe dynastie: de Tudorroos. Na jaren van krijg was het pais en vree.

Figuur 5 Schitterende “tafel der vermenigvuldiging en deling en trekking van wortels [...]” op p. 122. Langs de traplijn kunnen wij bijvoorbeeld de kwadraten 1, 4, 9, ..., 49 aflezen (met steeds een 0 ervoor in het linker hokje). Maar Lewis werkt met een 60-talig stelsel! Daarna volgt dus niet 0 64 maar 1 4. De 1 dient te worden gelezen als 60-voud; op dezelfde manier zien we $9 \times 9 = 121$, $6 \times 10 = 10$ en $20 \times 20 = 640$. Merk ook de allerlaatste kolom en de rij direct onder de titel op, waar de getallen later door iemand anders met modernere symbolen zijn opgeschreven. Het verschil met de middeleeuwse 4 (een stropdasje), 5 (een sikkelt) en 7 (een dakje) is bijvoorbeeld goed te zien.

Figuur 6 *Tabula equacionis dierum in motu et in tempore per me Lodowycum Caerlyon noviter facta anno domini 1485 in turre Londoniarum*, te weten de “Tabel van vergelijking der dagen in beweging en tijd door mij, Lewis van Caerleon, opnieuw gemaakt in het jaar des Heeren 1485 in de Tower of London” op p. 121. Blijkbaar was hij de oorspronkelijke tabel kwijt ten gevolge van zijn gevangennamen. De kolommen corresponderen met de tekens (signa) van de dierenriem: Aries (ram), Taurus (stier), Gemini (tweelingen), Cancer (kreeft), enzovoort. Ook hier zijn de moderne getalsetjes direct daarboven en meest rechts veel later toegevoegd.

...in theorie, althans; duurzaam bleek de rust namelijk niet. Na luttele maanden kregen Margaret en Elizabeth slaande ruzie over hun beider koninklijke stand, waarmee Lancaster en York weer slaags raakten. Deze voortdurende strijd zou een schaduw op Hendriks verder vrij geslaagde regeerperiode werpen [8].

Díe verduistering heeft Lewis echter niet kunnen fruiken. De dokter is vrij snel na Bosworth vrijgelaten. Hij kreeg vanaf 1486 een zeer royaal pensioen voor de rest van zijn leven en werd geridderd. Hendriks eerbetonen lijken inderdaad te bevestigen dat hij heeft samengezworen tegen Richard III en daarvoor was opgesloten. Naast zijn werk als ’s konings lijfarts en hofastroloog bleef hij doorgaan met wetenschap. Som-



Figuur 7 Halve groot (2 pence) van Hendrik VII uit de periode 1504–09. Onder hem zouden Engelse munten voor het eerst een getrouw profielportret van de koning vertonen.

mige werken heeft hij aan Cambridge en Oxford gedoneerd, zodat deze bewaard zijn gebleven.

Lewis’ sterfdatum is onbekend maar zijn naam bleef opduiken in de koninklijke boekhouding tot circa 1494–1495. Hoe dan ook lijkt het erop dat, alle intriges ten spijt, het gesternte hem dit laatste deel van zijn leven gunstig gestemd geweest is.

Dankwoord

Ik wil dr. Viktor Blåsjö en dr. Raf Bocklandt enorm bedanken voor hun advies en hulp bij het ontcijferen van Lewis’ middeleeuwse hanepoten en de koppeling met Ptolemaeus’ werk. Daarnaast ben ik dr. Laure Miolo van de geschiedenisfaculteit in Oxford—expert op het gebied van laat-middeleeuwse wetenschappelijke handschriften—erkentelijk voor haar opmerkingen en correcties.

Noten

- Ook Hendrik VI, de vorige koning, had er gevangen gezeten en was hoogstwaarschijnlijk vermoord—op bevel van Eduard IV—door Richard [8]. Deze lijkt dus niet wars van duistere daden te zijn geweest.
- Een eeuw later werd het ‘bevestigd’ in Shakespeares *Richard III*, maar het toneelstuk is sowieso niet altijd historisch nauwkeurig.
- Dat is precies één pond sterlingzilver. De shilling zou als munt pas in de zestiende

- eeuw worden geïntroduceerd, maar als rekenenheid had hij al eeuwenlang bestaan.
- Horoscopen waren in die tijd een onontbeerlijke wetenschap en politieke machtsfactor: op vervalste voorspellingen kon de doodstraf staan. Gelukkig was de roddelglossy nog niet uitgevonden.
- Lees bijvoorbeeld in [6] welke reizen de Griekse genees-, sterren- en wiskunde hebben afgelegd, met name via de Arabieren en

Saracenen.

- Dat wil zeggen, $\frac{17}{60} + \frac{32}{3600} + \frac{21}{216000} = 0,2923$. Deze fractie van de tegenwoordig bekende straal van de aarde bedraagt 1862,4 km, wat slechts 7% groter is dan de echte waarde en welgeteld 1,1 km beter dan Ptolemaeus.
- Het heeft er meer dan vijf eeuwen gelegen. In 2012 werd zijn stoffelijk overschot gevonden en geïdentificeerd, om vervolgens fatsoenlijk ten grave te worden gebracht.

Referenties

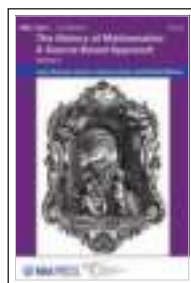
- British Library, *Lewis of Caerleon, Collected Astronomical and Mathematical Works*, https://searcharchives.bl.uk/primo-explore/fulldisplay?vid=IAMS_VU2&docid=IAMS032-003707019&context=L (Public Domain).
- British Library, *Lewis of Caerleon manuscript saved for the nation*, *Medieval manuscripts blog*, 2020, <https://blogs.bl.uk/digitisedmanuscripts/2020/11/lewis-of-caerleon-manuscript-saved-for-the-nation.html>.
- C.C. Carman, Rounding numbers: Ptolemy’s calculation of the Earth-Sun distance, *Archive for History of Exact Sciences* 63(2) (2009), 205–242.
- P. Kibre, Lewis of Caerleon, Doctor of Medicine, Astronomer, and Mathematician (d. 1494?), *Isis* 43(2) (1952), 100–108.
- L. Miolo, An astronomer’s personal notebook: Lewis of Caerleon & CUL MS Ee.3.61 Part 1, resp. Part 2, *Cambridge University Library Special Collections blog*, 2021, <https://specialcollections-blog.lib.cam.ac.uk/?p=21223>, resp. <https://specialcollections-blog.lib.cam.ac.uk/?p=21258>.
- V. Moller, *The Map of Knowledge. How Classical Ideas were Lost and Found: a History in Seven Cities*, Picador, 2020.
- K. Snedegar, Caerleon, Lewis (d. in or after 1495), physician and astronomer, *Oxford Dictionary of National Biography*, Oxford University Press, 2004.
- D. Starkey, Crown & Country. The Kings & Queens of England, *The Man Who Would Be King*, HarperPress, 2011, Chapter 14.

Boekbesprekingen

| Book Reviews

Redactie: Hans Cuypers en Hans Sterk
Secretariaat: Enna van Dijk

Review Editors NAW - MF 5.092
Faculteit Wiskunde & Informatica
Technische Universiteit Eindhoven
Postbus 513
5600 MB Eindhoven
reviews@nieuwarchief.nl
www.win.tue.nl/wgreview



June Barrow-Green, Jeremy Gray, Robin Wilson

The History of Mathematics: A Source-Based Approach, Volume 2

AMS/MAA Textbooks Vol. 61

MAA Press, 2022

xiv + 687 p., prijs \$ 89.00

ISBN 9781470443825

Een eerder deel ging over de periode tot 1600 (besproken door Luuk Hoevenaars, zie *NAW*, 5/21(2) (2020), 138–139); in dit tweede deel wordt de geschiedenis van de wiskunde tussen 1650 en 2000 besproken. In 21 hoofdstukken worden heel verschillende aspecten van de wiskunde besproken. Voor een inhoudsopgave, zie: <https://bookstore.ams.org/text-61>.

Uit de Introduction: “...this book addresses questions about the *history* of mathematics, not mathematical questions with a historical flavour... We are interested in understanding who did the mathematics and why? ... Historians produce arguments, based on their selections of evidence; their conclusions are not so much facts as opinions.”

In deze bespreking wordt niet een overzicht gegeven van alle onderwerpen die de revue passeren, maar ik geef een paar opmerkingen over de opzet, de mooie en sterke aspecten van dit boek en ik vermeld een paar kritische kanttekeningen. Wiskundigen in hun vak, persoonlijke omstandigheden, culturele en sociale omstandigheden uit de tijd worden besproken, en analyses van sommige wiskundige bewijzen worden gegeven. In 68 ‘Boxes’ (apart gezette teksten) worden bewijzen en uitleg gegeven. Verder zijn er veel afbeeldingen van wiskundigen en illustreren figuren de tekst. Alles bij elkaar een aantrekkelijke en informatieve bladspiegel.

Een mooi voorbeeld: in Box 20 op pagina 227 wordt het bewijs van Euler in 1734 van het ‘Bazel-probleem’ gegeven,

$$\sum_{n \geq 1} \frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6}.$$

Er worden bijvoorbeeld vier bewijzen besproken die Gauss gaf in 1799 van de ‘hoofdstelling van de algebra’ (van elk polynoom over de complexe getallen zijn alle nulpunten complexe getallen, dat wil zeggen een dergelijke veelterm is te ontbinden in lineaire factoren), en één van die bewijzen wordt geanalyseerd (pp. 532–535). De bespreking van de ontdekking van de niet-euclidische meetkunde in Hoofdstuk 14, pp. 373–412, vind ik mooi en helder. De historische lijnen worden duidelijk geschetst, veel details worden besproken. Hier mag de lezer zelf een mening vormen wie voor het eerst deze meetkunde beschreef (zie pagina 386). De beschrijvingen van Newton, Euler, Klein, Poincaré, Hilbert, zowel van hun werk als van persoonlijke omstandigheden zijn informatief en mooi.

Het boek sluit af met een (onvolledige) bespreking van de 23 problemen die Hilbert presenteerde op het ICM 1900. De boodschap van de auteurs is dat er een nieuwe tijd is aangebroken. De discussie tussen Hilbert en Minkowski of dit een goed onderwerp is voor een dergelijke voordracht wordt besproken. Voor verdere uitleg worden een paar referenties gegeven. Ik had graag wat meer tekst, complete vermelding van de problemen, wat er nu over bekend is, en meer verwijzingen gezien over deze mijlpaal in de wiskunde.

De auteurs beperken zich tot het bespreken van wiskundig materiaal uit de gekozen tijd, terwijl modernere ontwikkelingen meestal niet vermeld worden. Dat lijkt een bewuste en duidelijke keuze. Met deze keuze ben ik het niet eens. Het zou beter zijn om naast notatie en begrippen uit de besproken tijd ook een moderne en duidelijke beschrijving van het wiskundige materiaal te geven. Wiskundige uitleg laat op vele plekken in dit boek te wensen over.

Op de pagina's 417–419 wordt het 'principe de continuité' van Poncelet besproken; waar de uitleg en definitie van Poncelet toen niet erg duidelijk was, en tijdgenoten niet begrepen wat er bedoeld werd, blijft ook hier de uitleg in de lucht hangen. We weten nu dat Poncelet gelijk had, zijn formulering kan eenvoudig in moderne taal gegeven worden, en een bewijs is niet moeilijk. Een historische beschrijving zou dit ook op deze manier moeten geven, en op zijn minst, met een eenvoudige verwijzing, de lezer vertellen wat de status van dit principe is. Op pagina 423 wordt het 'porisme' van Poncelet besproken, 1822, dat noemen we nu de *sluitingsstelling* van Poncelet. Hier breekt het op dat de auteurs te weinig aandacht geven aan beschouwingen van meetkunde over $\mathbb{R}$ versus meetkunde over $\mathbb{C}$. Dit verdient een betere tekst in een historisch overzicht van meetkunde in de negentiende eeuw. De auteurs geven in dit geval, naar mijn smaak, onvoldoende verwijzingen, discussies en argumenten voor dit interessante aspect van meetkunde in de negentiende eeuw. Zoals het porisme besproken wordt, in een speciaal geval over $\mathbb{R}$, is het juist, onjuist indien beschreven over $\mathbb{C}$, terwijl een goede formulering in alle gevallen eenvoudig te geven is.

Op pagina 428 wordt de 'classificatie van kubische krommen' vermeld, met een vermelding van Newton (1667/1704), en met een verwijzing naar Euler (pagina 240, 'classified cubics in 16 species', op pagina 428 een verkeerde verwijzing naar 8.2). Uit de onduidelijke tekst van dit boek kan ik niet begrijpen wat de 'classificatie' inhoudt, waarom die van Newton incompleet was, en ook wordt er niet vermeld hoe dit door Plücker later werd opgelost. Een historische beschrijving van een wiskundig begrip vraagt om een heldere definitie; een moderne beschrijving van dit onderwerp zou op zijn plaats zijn geweest. Op pagina 237 vinden we een discussie van de 'stelling van Bézout': tel het aantal snijpunten van vlakke krommen van graad m respectievelijk n . Euler (in 1751) slaagde er niet in om een goede definitie te geven van 'snijpuntsmultipliciteit'. In 1779 gaf Bézout een andere benadering. Dit boek geeft dit weer (pagina 237) als: "All that it does is to establish that the resultant has degree mn , and so the curves meet in mn points." Ja, de eerste bewering is van Bézout afkomstig, de tweede beslist niet. Dit gaat over algebraïsche krommen over $\mathbb{R}$. Dat er veel minder snijpunten kunnen zijn was toen al bekend, en is eenvoudig in te zien (we weten nu precies 'waarom'). De auteurs zouden eenvoudig een correcte bewering kunnen geven: vermeld waar we een goede definitie van multipliciteiten vinden (niet moeilijk in moderne taal), en concludeer dat de bewering van Bézout impliceert dat over $\mathbb{C}$ er inderdaad mn snijpunten zijn, geteld met multipliciteiten: dat doet recht aan Bézout en geeft de lezer nu precieze informatie.

De tekst van dit boek geeft de lezer soms ruimte om tot een eigen oordeel te komen, maar ook worden 'feiten' vermeld waar een open vraag meer op zijn plaats zou zijn. Hier is één voorbeeld, pagina 523. We schrijven $\pi(x)$ voor het aantal priemgetallen kleiner dan $x \in \mathbb{R}$. De *priemgetalstelling* (Prime Number Theorem, PNT) zegt

$$\pi(x) \sim \frac{x}{\log x}, \quad x \rightarrow \infty,$$

bewezen door Hadamard en de la Vallée Poussin in 1896. In dit boek wordt (alleen) beweerd dat Gauss dit vermoedde in 1793 (pagina 523). Van historici mag je verwachten dat ze in een dergelijke situatie voldoende informatie geven, een vraag stellen en het vormen van een mening aan de lezer over laten. Gauss heeft aantallen priemgetallen onder bepaalde grenzen in 1793 uitgerekend (met een omvang en precisie die adembenemend is). In een brief aan Encke in 1849 documenteert Gauss een vermoeden, dat later de PNT zal zijn, en plaatst dit historisch in 1793. In 1798 publiceert Legendre zijn eerste druk van *Essai sur la théorie des nombres*, met daarin een vermoeden, met ondersteuning door tabellen, dat later een vorm van de PNT zal blijken te zijn. Het lijkt mij dat beide aspecten, vermoedens van Gauss en van Legendre, vermeld dienen te worden bij de voorgeschiedenis van de PNT, en ik zie geen duidelijke conclusie over de prioriteit van dit vermoeden.

Bij de bespreking van de Riemann-hypothese zie ik een verwarrende fout, pagina 524. De auteurs beweren dat de eerste niet-triviale nulpunten van $\zeta(-)$ zijn:

$$\frac{1}{2} \pm 14.1 \cdot \sqrt{-1}, \quad \frac{1}{2} \pm 21.01 \cdot \sqrt{-1}, \quad \frac{1}{2} \pm 30.4 \cdot \sqrt{-1}.$$

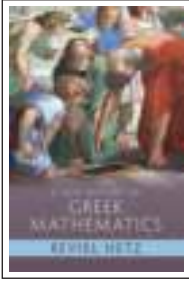
Hierbij dient vermeld te worden dat $\frac{1}{2} \pm 14.1 \cdot \sqrt{-1}$ een *benadering* is, en beslist niet de exacte waarde, dat vermoed wordt dat niet-triviale nulpunten van de vorm $\frac{1}{2} \pm \omega \cdot \sqrt{-1}$ zijn, maar dat het onbekend is of $\omega \in \mathbb{R}$ transcendent is of niet (een open probleem); bovendien is het tweede nulpunt $\approx \frac{1}{2} \pm 21.022 \cdot \sqrt{-1}$.

De auteurs beschrijven een gebeurtenis in 1854: "Gauss was examiner of a thesis by a brilliant young student at Göttingen, Bernhard Riemann. This thesis was part of Riemann's final examination in mathematics (the Habilitation, which earned him the right to lecture at German universities)." Ik ben verbaasd dat historici dit schrijven. Juiste informatie is eenvoudig te vinden. In 1851 promoveerde Riemann, met Gauss als promotor, op een proefschrift met als titel *Grundlagen für eine allgemeine Theorie der Funktionen einer veränderlichen complexen GröÙe*. In 1853 had Riemann de voorbereidingen klaar voor zijn 'Habilitation': een artikel over Fourier-reeksen en drie onderwerpen voor een voordracht; Gauss koos daaruit: *Über die Hypothesen, welche der Geometrie zu Grunde liegen*; door deze keuze werd de tekst van Riemann bewaard. Riemann gaf zijn voordracht op 10 juni 1854. Zowel het proefschrift als de tekst van deze voordracht van Riemann hebben een grote invloed gehad op ontwikkelingen in de wiskunde.

Ontwikkelingen van de algebraïsche meetkunde in de tweede helft van de negentiende eeuw komen er bekaaid vanaf. De grote invloed van Riemann, en bijvoorbeeld werk van Hurwitz, Klein, Brill, Noether en vele anderen worden niet vermeld.

In een eerdere boekbespreking, NAW 5/21(4) (2020), 280–282, vermeldde ik al wat ik leerde van de recent overleden Henk Bos: *trek geen conclusies die je niet kunt maken op grond van de geschreven tekst van de auteur*. In de historische beschrijvingen van wiskunde kunnen we ons beter beperken tot vragen in plaats van conclusies als het historische materiaal niet eenduidig is. Bij het lezen van het boek dat nu besproken wordt had ik in sommige gevallen liever vragen dan conclusies gezien.

Samenvattend: het is een boek met mooie beschrijvingen. Ondanks enkele hinderlijke fouten en onduidelijke beschrijvingen, en het ontbreken van belangrijke onderwerpen, kan een kritische lezer zien wat wiskundigen bewogen heeft in deze periode. Frans Oort



Reviel Netz

A New History of Greek Mathematics

Cambridge University Press, 2022

xvi + 523 p., prijs € 40,95

ISBN 9781108833844

Reviel Netz, een gerenommeerd Stanford hoogleraar schreef dit monumentale boek. Met dit adjectief neem ik niet een voorschotje op mijn bespreking, maar bedoel ik letterlijk dat het een monument is in die zin dat het een vrij compleet beeld probeert te schetsen van de oude Griekse wiskunde in de oude context. Gedrukt op zwaar papier hebben de ruim 500 pagina's tot een zwaarwegend (ruim 1 kg) boek geleid. Of dit boek een zwaarwichtig beeld schetst en of het in inhoudelijke zin een monument genoemd kan worden komt later in deze bespreking wel aan de orde. Voor een juist begrip is het van belang dat we eerst even naar de auteur kijken. Stanford hoogleraar, maar de verwachting dat we te maken hebben met een wiskundige, wordt in de persoonsbeschrijving en in de presentatie van de inhoud gelogenstraft. Hij is classicus van opleiding en professie en gespecialiseerd in de oude Griekse wijsbegeerte annex antieke geschiedenis en dito sociologie. Wel, zoals hij het zelf naar voren brengt, met een passie voor de wiskunde. De uiterst lovende recensies op de achterflap over ons boek van de twee vermaarde emeriti Sir Geoffrey Lloyd en Victor Katz voeren natuurlijk de spanning op. Dat doet ook het in de titel gebruikte epitheton 'new'. En je vraagt je dan gelijk af wat dit 'new' betekent: weer eens een nieuw boek of komt hij met nieuwe inzichten? Natuurlijk zijn er de afgelopen tientallen jaren vele boeken verschenen over deelonderwerpen van de Griekse wiskunde, maar het streven naar een compleet overzicht daarvan en een beschrijving van de doorwerking van de antieke tijd is sinds lang niet meer ondernomen. We moeten een honderdtal jaren terug, namelijk naar het boek *A History of Greek Mathematics* van Sir Thomas Heath. Gecombineerd met het genoemde 'new' wordt de spanning alleen maar groter. Dit alles neem je als recensent tot je, wanneer je vol verwachting aan het boek begint, redenen genoeg om je in het boek onder te dompelen.

Het boek begint traditioneel, zoals we gewend zijn, chronologisch komen de bekende periodes, denkers en schrijvers aan de orde. Wel in enigszins stroef Engels, waardoor het geheel wat archaïsch aandoet. Maar niet getreurd, gewoon doorzetten. Maar dan kom je toch een aantal zaken tegen waar de wenkbrauwen gaan fronsen. Wanneer hij aankomt bij Euclides vraagt hij zich af of Euclides wel echte wiskunde heeft bedreven of was hij 'slechts' een samenvatter was zonder echte bijdrage aan de fundamente van ons vak. Dit dilemma pakt hij door het boek heen telkens weer op en uiteindelijk is zijn conclusie negatief (!) ten aanzien van Euclides. De motivering van zijn standpunt komt echter het 'dat vind ik' niet te boven: mager, onder de maat en beslist niet overtuigend.

Wel is Netz goed op dreef wanneer hij zijn eigen vak laat spreken, onder andere bij de bespreking en beschrijving van de sociologie van bijvoorbeeld het oude Athene en de relatie met Alexandrië. Dan wordt zijn taal ineens stellig en wordt afgezien van wat

'hij vindt'. Cultuur was in de hoogtijdagen van het oude Griekenland vooral wijsbegeerte en geen wiskunde. En hij stelt zich dan de open-deur-vraag of wiskunde wel 'ironic and surprising' kan zijn, hetgeen hij beschouwt als kenmerken van de Hellenistische cultuur. Wat betreft Archimedes vindt hij het belangrijk (en uit de context van het verhaal maak ik op dat hij het verbazingwekkend vindt) dat Archimedes nooit oplossingen geeft van vraagstukken die hij anderen voorlegde. Alsof dit wel zo'n verbazing moet wekken! Bij Apollonius wordt de taal enthousiast: "...as brilliant, as surprising as Archimedes" door de "repeated application of the mechanism of proportion"; "...the typical way in which Apollonius asserted himself as a master: the bombardment of subtlety". Tamelijk bombastisch en weinig onderbouwd.

Netz worstelt ook met het beeld van wiskunde in relatie tot de natuurwetenschappen, de astronomie en de muziek. Weliswaar gebruikt hij te pas en te onpas de woorden 'mathematisering van de werkelijkheid', maar wanneer dat aan de orde is, vindt hij in verhandelingen die daarover gaan geen natuurkunde. En verhandelingen over proporties in de muziek zijn in zijn ogen verdacht: geen muziek, maar is het wel wiskunde? Kennelijk vindt hij dit erg belangrijk, want deze discussie komt door het hele boek voor. Is een Griekse astronoom nu natuurwetenschapper, of wiskundige? Waar maak je je druk over, waarom is dat belangrijk en moeten er zoveel woorden aan gewijd worden? Op diverse plaatsen maakt Netz een combinatie van astronomie en astrologie, terwijl hij niet echt duidelijk maakt waarom hij dergelijke onderwerpen daar en op die manier aan de orde stelt.

Plotseling worden tijdens een doorlopende tekst woorden als isomorfisme, topologisch en vectormodel gebruikt, terwijl daar in het geheel geen reden toe is. Maar het is erger: 'isomorfisme' staat niet in relatie tot een functioneel verband, 'topologisch' gebruikt hij in de betekenis van niet-kwantitatief, soms zelfs als 'waarschijnlijk' of 'ongeveer' en 'vector-model' gebruikt hij waar geen vector ter sprake komt. Zeer kwalijk! Hier wrekt zich zijn achtergrond als niet-wiskundige.

Het boek hinkt op tegenstrijdige gedachten. Soms denk je dat het geschreven is voor een doelgroep die net op de middelbare school zit, zoals bij de triviale uitleg van de samenstelling van ons zonnestelsel. Maar dan weer worden er slechts enkele woorden gewijd aan het begrip precessie met de veronderstelling dat de jonge onwetende het dan begrijpt. Dit komt niet op een enkele plaats voor maar systematisch. Uitleg van wiskundige onderwerpen gebeurt soms zorgvuldig, uitvoerig, vooral met gebruikmaking van de methodes uit de oudheid, soms wordt de uitleg achterwege gelaten, de ene keer met de motivering dat het 'gemakkelijk' is, de andere keer dat het te 'moeilijk' is. Een rationale achter die keus is niet te vinden in de tekst. Het is zelfs zo dat op diverse plaatsen in de tekst gewoon wiskundige onzin gedebiteerd wordt. De afhankelijkheid van oude astronomen van uitvoerige tabellen leidt bij hem tot de opmerking dat ook nu wetenschap afhankelijk is van onbegrepen inhouden: "Science is full of black boxes."

Een simpel voorbeeld waaruit blijkt dat Netz echt de plank mis slaat is het volgende: Tijdens een oorlog in de oude klassieke tijd verschanste men zich voor de aanvallers achter de muren van de eigen stad. Met ladders tegen de muren werden die beklommen en geprobeerd op die wijze de stad in te nemen. De aanvoerder van het aanvallende leger had enkele vuistregels die hij hanteerde bij het besluit hoe lang die ladders moesten zijn, wanneer de

ladder de helft van zijn lengte op de grond van de muur afstaat (dit laatste was de eerste vuistregel). Gemakkelijk is in te zien dat zo'n ladder dan ten minste zo'n 16% langer moest zijn dan de hoogte van de muur. Neem in plaats van 16% een lengtevermeerdering van 20%, want dat is op het rumoerige slagveld eenvoudig te hanteren en je hebt een tweede werkbare vuistregel. Maar wat schrijft Netz: de aanvoerder van het aanvallende leger gaat met de stelling van Pythagoras uitrekenen hoe lang de ladder precies moet zijn. Onbegrijpelijk dat een kenner van de klassieke oudheid dit naar voren brengt, alsof een aanvoerder in het heetst van de strijd die tijd kan nemen, afgezien nog van het feit hoe hij zo'n berekening snel moest uitvoeren.

De schrijver ruimt veel plaats in voor de Griekse astronomie, wel zo'n 120 pagina's lang. Op sommige punten verslikt hij zich, speciaal waar hij tot enkele filosofische bespiegelingen komt. Hij vindt de Griekse astronomen vooral instrumentalisten die gericht zijn op het voorspellen van hemelverschijnselen, maar "they are not a window into the hidden reality that lies behind those observables". Maar even verder noemt hij astronomen wel degelijk 'realisten' en vervolgens vindt hij Ptolemaeus geen kosmoloog. Warrig en rammelend, met een hoog gehalte aan 'dat vind ik'.

Zoals eerder gezegd ruimt hij ontzettend veel plaats in voor het onderscheid tussen astronomie en wiskunde, tussen muziek en wiskunde, tussen meetkunde en de fysische werkelijkheid. En komt hij tot uitspraken als "the *Almagest* is more 'necessary' than the *Elements*", wat dat noodzakelijke dan ook betekent. Op vele plaatsen in het boek claimt de schrijver dat hij de opvolger is van Heath. (Overigens zegt Katz dat in zijn review op de achterflap ook!) Bovendien stelt hij expliciet dat bij diverse wiskundige zaken alle schrijvers van de afgelopen honderd jaar conclusies verkeerd hebben getrokken en dat hij het bij het rechte eind heeft. Voortdurend schrijft Netz: "ik vind", "ik geloof", "wat ... als" en dergelijke, en dan komt er weer iets dat zogenaamd nieuw is, maar wat in de meeste gevallen ook al door anderen en met name ook al door Heath is aangetoond of weerlegd. Ik zou veel meer plaatsruimte moeten vragen wanneer ik alle fouten en missers zou opschrijven. Ik laat dat dus achterwege.

Wat in mijn ogen wel aardig is, is de beschrijving aan het eind van het boek waarbij Netz zijn eigen stiel oppakt en een wetenschapsfilosofische en sociologische beschrijving geeft van het oude Griekenland in relatie tot het oude Babylonië. Ook Omar Khayyam komt daar natuurlijk nog ter sprake. Ik zal mijn bespreking straks eindigen met een kwatrijn van hem dat Netz op pagina 465 citeert. Waar hij in dit deel van het boek de lijn doortrekt naar het begin van onze jaartelling, ja naar de Renaissancetijd in Europa en vervolgens zelfs naar de moderne tijd tot in onze jaren en eeuw toe, is zijn beschrijving veel te stellig zonder dat hij aangeeft waarom hij van mening is dat de Griekse wiskunde bepalend is geweest voor de latere ontwikkelingen tot nu toe. Alleen stellen dat dat zijn mening is zonder overtuigende bewijsvoering is onvoldoende. Bovendien maakt hij ten aanzien van de moderne ontwikkelingen in de wiskunde in relatie tot de oude Griekse wiskunde opmerkingen die iedere grond missen. Netz kan goed schrijven als het maar geen wiskunde betreft. Wel instructief is zijn beschrijving van de tijd (begin van onze jaartelling) van Pappus en daarna, waarin de geïsoleerde geleerde zich meer en meer ontwikkelde tot leraar. De combinatie wetenschap en onderwijs kwam hoe langer hoe meer in zicht. En niet uitsluitend voor mannen; Hypatia die

de school van haar vader voortzette, was lerares en geleerde: een lichtend voorbeeld vanuit vroege tijden. We herkennen de functie-combinatie geleerdheid-onderwijs uit de oudheid tot in de huidige tijd. Het boek besluit met een uitvoerige index van elf pagina's, die op zichzelf een heel nuttige functie kan vervullen.

Tot slot het beloofde kwatrijn van Khayyam (in het Engels):

My mind has never lacked learning,
Few mysteries remained unsolved;
I have meditated for seventy-two years night and day,
To learn that nothing has been learned at all.

Concluderend: Al lezend kreeg uw recensent vanaf het begin het onheimische gevoel dat de tekst niet door een wiskundige geschreven is. Dat kan verfrissend zijn om jouw eigen denkwijze te spiegelen aan die van een 'buitenstaander', maar dan moet je niet telkens het gevoel krijgen op het verkeerde been gezet te worden. Met talloze missers en hier en daar wiskundige onzin. En dat is in dit boek het geval. Ook de presentatie van typisch wiskundige zaken gaat uitermate stroef en bepaald niet op de wijze waarop wij wiskundigen getraind zijn. Dus: Is het boek een monument? Beslist niet. Geeft het zwaarwichtige kennis door? Neen. Hoe 'new' is het boek? Dat valt zwaar tegen. Hoe konden Lloyd en Katz zulke lovende woorden schrijven? Onbegrijpelijk. Vormt dit boek de opvolger van het boek van Heath? In genen dele. Onbegrijpelijk dat niet een aantal wiskunde-historici voorafgaand aan publicatie hun vingers hebben gelegd bij missers in de tekst en de schrijver hebben geadviseerd die te herstellen. Het boek is naar mijn mening ongeschikt om hieruit de oude Griekse wiskunde te gaan bestuderen: het leidt tot onjuiste conclusies.

Wim Kleijne



Michael Artin

Algebraic Geometry Notes on a Course

Graduate Studies in Mathematics 222
American Mathematical Society, 2022
x + 318 p., prijs \$ 85.00
ISBN 9781470471118

Omdat de jongere wiskundigen onder ons waarschijnlijk de schrijver van het boek niet kennen, zal ik alvorens het boek te bespreken de meermaals gelauwerde auteur (Steel Prize (2002), Wolf Prize (2013), National Medal of Science (2013)) introduceren. Michael ('Mike') Artin, die nu 89 is, is in Hamburg geboren als de zoon van de grote algebraïcus Emil Artin. In de jaren vijftig van de vorige eeuw kwam hij via zijn promotor Oscar Zariski in aanraking met de Italiaanse algebraïsche meetkunde die toen net door Zariski en André Weil van degelijkere fundamenteen voorzien was. Artin kwam op Harvard ook in aanraking met het werk van Alexander Grothendieck die net de schema-taal aan het ontwikkelen was en in het bijzonder de aandacht op de rol van nilpotenten vestigde die tot dan toe in de meetkunde genegeerd waren. Artin heeft een wezenlijke rol gespeeld in die toen spectaculaire nieuwe ontwikkelingen. Het is opmerkelijk dat hij op hoge leeftijd met kennelijk veel plezier en inzet zo'n zeven jaar een semester lang een inleidend college

algebraïsche meetkunde aan het Massachusetts Institute of Technology in Boston heeft gegeven.

Het is een moeilijke taak om in slechts één semester studenten een indruk te geven van de algebraïsche meetkunde, en zeker als je, zoals Artin, de bewijzen zo kort mogelijk wilt houden. Als compromis is voor deze colleges besloten om over de complexe getallen te werken, maar de presentatie is zodanig dat in een vervolgclege schema's vrij makkelijk begrepen kunnen worden.

Het boek begint met vlakke krommen in het affiene en projectieve vlak. Hier worden onderwerpen zoals duale en biduale krommen behandeld, onder andere als voorbereiding voor de Plücker-formules. De klassieke aanpak om via resultanten en discriminanten snijmultipliciteiten voor krommen te berekenen wordt gebruikt om de stelling van Bézout af te leiden. Het is leuk te zien hoe een versie van Hensels lemma gebruikt wordt om de orde van verdwijnen van de resultante van twee polynomen met de meetkundige ligging van raaklijnen in verband te brengen.

Het tweede hoofdstuk gaat over affiene algebraïsche meetkunde en benut de nodige commutatieve algebra, waarvan de bekend veronderstelde begrippen en stellingen heel handzaam in het laatste hoofdstuk te vinden zijn. In dit (tweede) hoofdstuk wordt onder andere Hilberts Nullstellensatz afgeleid, morfismen komen aan de orde en localisaties worden besproken. De auteur geeft een mooi bewijs van de sterke Nullstellensatz dat van Rainig afkomstig is (jammer genoeg zonder verwijzing). Gezien de algebraïsche aard van dit hoofdstuk past het begrip *spectrum* goed in dit hoofdstuk, zij het dat dit alleen maximale idealen betreft; niet verwonderlijk in verband met de beperking tot variëteiten.

Het volgende hoofdstuk is een logisch vervolg: het gaat hier over projectieve variëteiten. Dit hoofdstuk eindigt met een korte behandeling van Graßman-variëteiten en met een korte toepassing voor oppervlakken die lijnen bevatten.

In het derde hoofdstuk komt het dimensiebegrip aan de orde nadat er over gehele uitbreidingen en de normalisatie is gesproken. Verder wordt Chevalley's eindigheidsstelling besproken (als X een variëteit is, Y een deelvariëteit van $X \times \mathbb{P}^N$, en de vezels

van de projectie $\pi : Y \times \mathbb{P}^N \rightarrow X$ zijn eindig, dan is π eindig), en een elegant bewijs, afkomstig van Schelter (zonder verwijzing). Het hoofdstuk eindigt met een mooie toepassing voor dubbele overdekkingen van het affiene en het projectieve vlak.

De Zariski-topologie gaat een beslissende rol spelen in hoofdstuk 5. Er wordt onder andere bewezen dat projectieve variëteiten proper zijn (dat wil zeggen het equivalent van compact in de complexe topologie).

In de volgende drie hoofdstukken wordt er naar een schoven-theoretisch bewijs van de stelling van Riemann–Roch voor krommen toegewerkt. De route wordt verkort door een axiomatische invoering van cohomologie van schoven te geven met behulp van ad hoc gedefinieerde co-rand-afbeeldingen. Verderop wordt dan bewezen dat deze uniek zijn.

De auteur vindt, naar mijn mening terecht, dat er minstens één toepassing van Riemann–Roch gegeven moet worden. Hij geeft twee klassieke toepassingen, het bestaan van een optelling op elliptische krommen, en verder de overeenkomst van de verschillende noties van geslacht van een kromme. Minder klassiek is de stelling van Birkhoff–Grothendieck dat een vectorbundel op $\mathbb{P}^1$ splitst in lijnbundels. Het is verrassend dat de auteur daarvan een mooi kort bewijs opgenomen heeft.

Deze lezingen zijn op een bijzonder zorgvuldige en didactische wijze uitgewerkt. De student krijgt precieze instructies in het voorwoord. Hij vindt aan het einde van het boek een begrippenlijst, een lijst van notaties en een korte becommentarieerde literatuurlijst. Het is verbazingwekkend dat de auteur zoveel gevarieerd op elementaire wijze in zo'n 300 pagina's behandeld heeft. Ook verfrissend zijn de opmerkingen die hij her en der maakt, zoals op pagina 119: "Our conclusions are intuitively plausible, but to be sure about them, we need to study dimension carefully." Of, op pagina 271: "My father, Emil Artin, once said: 'One doesn't really understand differentials, but one can learn to work with them.'"

Kortom, dit boek is niet alleen een aanrader voor een eerste kennismaking met de algebraïsche meetkunde, ook de doorgewinterde meetkundige kan er veel plezier aan beleven. *Chris Peters*

Recent verschenen publicaties. Als u een van deze boeken wilt bespreken of als u suggesties heeft voor andere boeken voor deze rubriek, laat dit dan per e-mail weten aan reviews@nieuwarchief.nl.



Sonja Cox, Martin Hutzenthaler, Arnulf Jentzen

Local Lipschitz Continuity in the Initial Value and Strong Completeness for Nonlinear Stochastic Differential Equations

AMS, 2024

ISBN 9781470467012

bookstore.ams.org/memo-296/1481



Egbert Brieskorn, Walter Purkert

Felix Hausdorff

Mathematician, Philosopher, Man of Letters

translated by David Rowe

Springer, 2024

ISBN 9783031521348

springer.com/9783031521348