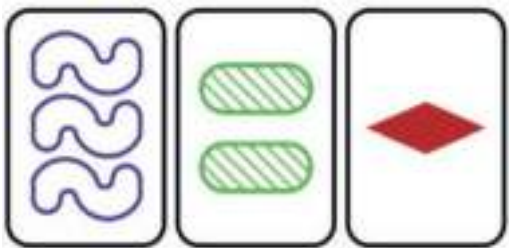


Inhoud | Contents

- De oplossing | The Solution**
- 11 A proof long enough to stump Leonhard Euler**
Bernardo Subercaseaux, Marijn J. H. Heule
- Oratie | Inaugural Lecture**
- 18 The mathematics of financial markets**
Antonis Papapantoleon
- Onderwijs | Education**
- 22 Nieuwe examenprogramma's wiskunde in de maak voor havo en vwo**
Johan Brons, Betty Vermeulen, Rogier Bos
- Afscheidsrede | Valedictory Lecture**
- 30 Mission possible – Mathematics for a better world**
Wil Schilders
- De oplossing | The Solution**
- 45 Wiskundige ontdekkingen door Large Language Models: het Cap Set-probleem**
Dion Gijswijt

45



Dion Gijswijt belicht het Cap Set-probleem en beschrijft welke nieuwe ontdekkingen gedaan zijn.

18



Antonis Papapantoleon vertelde in zijn oratie over de wiskunde van financiële markten.

- 3 Redactioneel** *Robbert Fokkink*
- 4 Agenda** *Edward Berengoltz*
- 6 Nieuws** *Edward Berengoltz*
- 9 Nieuws van Young KWG** *Young KWG Board*
- 26 Stoffelijke resten: Leibniz**
Robbert Fokkink
- 40 In de verdediging: Pjotr Buys**
Nicolaos Starreveld
- Column | New Impulse**
- 43 Game theory and two-way interactions between mathematics and economics**
Willemien Kets
- 49 Het keerpunt van Dóra Halas**
Daan Mulder
- Column | Better than blackboard**
- 51 What's our goal in teaching math to non-math students?**
Nelly Litvak
- Column | Wiskundigen in den vreemde**
- 57 Ervaringen van een wiskundige in Parijs**
Olivier de Gaay Fortman
- 59 Boekbesprekingen** *Hans Cuypers, Hans Sterk*
- 63 Problemen** *Onno Berrevoets, Daan van Gent*

Colofon

Het Nieuw Archief voor Wiskunde is een uitgave van het Koninklijk Wiskundig Genootschap en verschijnt vier maal per jaar. Het tijdschrift richt zich op eenieder die zich beroepsmatig met wiskunde bezighoudt, als academisch of industrieel onderzoeker, student, leraar, journalist of beleidsmaker. Het stelt zich ten doel te berichten over ontwikkelingen in de wiskunde in het algemeen en in de Nederlandse wiskunde in het bijzonder.

ISSN 0028-9825

Adres

Nieuw Archief voor Wiskunde
Centrum Wiskunde & Informatica
Postbus 94079, 1090 GB Amsterdam
tel. 020-5924288
redactie@nieuwarchief.nl
www.nieuwarchief.nl

Hoofredactie

Raf Bocklandt (r.r.j.bocklandt@uva.nl)
Robbert Fokkink (r.j.fokkink@tudelft.nl)
Renee Hoekzema (r.s.hoekzema@vu.nl)

Eindredactie/Bladmanager

Fred Drissen (fred@nieuwarchief.nl)

Redactie

Francesca Arici (UL), Edward Berengoltz (UvA), Viktor Blåsjö (UU), Hans Cuypers (TU/e), Teun Koetsier (VU), Diletta Martinelli (UvA), Daan Mulder, Nicolaos Starreveld (UvA), Hans Sterk (TU/e), Mark Timmer (UT)

Problemenrubriek (problems@nieuwarchief.nl)

Onno Berrevoets en Daan van Gent

Bureau redactie

Taeke Roukema

Illustraties

Ryu Tajiri

Vormgeving

Susanne Laws (omslag)
Kitty Molenaar (ontwerp)

Druk

Veldhuis Media

Advertenties

advertenties@nieuwarchief.nl

Koninklijk Wiskundig Genootschap

www.wiskgenoot.nl

Platform Wiskunde Nederland

www.platformwiskunde.nl

European Mathematical Society

www.euro-math-soc.eu

International Mathematical Union

www.mathunion.org

Koninklijk Wiskundig Genootschap

Het Koninklijk Wiskundig Genootschap (KWG) is een landelijke vereniging van beoefenaren van de wiskunde. In 1778 opgericht onder de zinspreuk 'Een onvermoeide arbeid komt alles te boven' is het 's werelds oudste nationale wiskundegenootschap. Leden ontvangen het Nieuw Archief voor Wiskunde als onderdeel van hun lidmaatschap.

Bestuur

Mathisca de Gunst (VU, voorzitter), Alef Sterk (RUG, penningmeester), Jop Briët (CWI, secretaris), Barry Koren (TU/e, vice-voorzitter), Danny Beckers (VU), Rogier Bos (UU), Charlene Kalle (UL), Niels Kolenbrander (UL), Thomas Rot (VU).

Secretariaat

Koninklijk Wiskundig Genootschap
Centrum Wiskunde & Informatica
Postbus 94079, 1090 GB Amsterdam
wiskgenoot@wiskgenoot.nl

Ledenadministratie KWG / Abonnementen

admin@wiskgenoot.nl, tel. 020-5924193
Wijzigingen of opzegging kunt u ook doorgeven door in te loggen op www.wiskgenoot.nl.

Contributie

Tarieven per jaar (bij betaling per automatische incasso krijgt u € 2,50 korting):

- gewoon lid: € 97,50
 - reciprociteitslid: € 77,50
 - gepensioneerden en werklozen: € 52,50
 - aio's, oio's, studenten: € 42,50 (max. 4 jaar)
 - lid zonder Nieuw Archief: € 57,50
- Studenten en pas afgestudeerden kunnen een jaar lang gratis lid worden.

Voor verzending van het Nieuw Archief naar het buitenland wordt een portotoeslag van € 10 in rekening gebracht.

Instituten in Nederland en buitenland kunnen zich abonneren op het Nieuw Archief voor Wiskunde voor € 105 (Nederland), € 115 (Europa) of € 117,50 (buiten Europa).

Members of foreign societies

Members of *SIAM*, the *Société Mathématique de France*, the *Gesellschaft für Angewandte Mathematik und Mechanik*, the *Deutsche Mathematiker-Vereinigung*, and of the *American, Australian, Belgian, Indian, London, Spanish, and South-African Mathematical Societies* living outside of the Netherlands pay € 77,50 instead of the full membership fee of € 97,50 a year. Conversely, these foreign societies, as well as the VvS+OR and the NVORWO, have reduced membership fees for KWG members. A postage charge of € 10 is added for members living abroad but in Europe, and a charge of € 12,50 for members living outside of Europe.

Exchange subscriptions

Koninklijk Wiskundig Genootschap Library
Centrum Wiskunde & Informatica
P.O. Box 94079, NL-1090 GB Amsterdam
KWG-exchange@cwil.nl

Informatie voor auteurs

Kopij

Kopij dient per e-mail te worden aangeboden aan kopij@nieuwarchief.nl. Voor meer informatie en auteursinstructies zie www.nieuwarchief.nl.

Volgende nummers

nummer	maand verschijnen	deadline kopij
25(2)	juni 2024	verstreken
25(3)	september 2024	01-05-2024
25(4)	december 2024	01-08-2024
26(1)	maart 2025	01-11-2024

Instituuts- en bedrijfsleden

De publicaties van het KWG worden mede mogelijk gemaakt door de bijdragen van de volgende instituten en bedrijven.



Centrum Wiskunde & Informatica



Universiteit van Amsterdam



Vrije Universiteit Amsterdam



Rijksuniversiteit Groningen



Universiteit Leiden



Radboud Universiteit Nijmegen



Universiteit Utrecht



Technische Universiteit Delft



Technische Universiteit Eindhoven



Universiteit Twente



Elsevier



ORTEC

Op het omslag

Naast de schoonheid van korte elegante wiskundige bewijzen, zien we steeds vaker de kracht van computers en geautomatiseerde redeneertechnieken als middel om tot bijzondere oplossingen te komen. Lees het artikel van Bernardo Subercaseaux en Marijn Heule op pagina 11.

De Koetsiertest

Vier jaar geleden schreef Teun Koetsier een redactioneel waarin hij met zorg vooruitblikte naar de Singulariteit, het grote moment waarop computers slimmer zijn dan wij. Zijn test voor dat grote moment, zeg maar de Koetsiertest, was een hersenkrakertje: “Er zitten vijf vogels op een telefoonlijn. Een jager schiet er één dood. Hoeveel zitten er dan nog?” Die vraag had hij ooit van een klein Servisch jongetje gekregen en hij was er gedachteloos ingetuind. Teun besloot met de woorden: “Als een computerprogramma in dit geval meteen het goede antwoord geeft, dan is de Singulariteit nakende. Ik kijk niet naar dat moment uit.” Ruim twee jaar later verscheen ChatGPT. Vanaf het eerste moment heb ik hem (of haar?) door de Koetsiertest gehaald.

In de eerste maanden had Chat een beetje hulp nodig. *Hoeveel zitten er dan nog? Vier!* Als je daarop vroeg *Weet je dat zeker?* dan voelde je de digitale zweetdruppels uitbreken. Beleefd kwam er: *Je hebt gelijk, mijn excuses voor de verwarring. Laat me de vraag opnieuw bekijken.* Zo kwam Chat met een beetje hulp op het goede antwoord. Maar als je als een pesterige docent doorvroeg met *Weet je dat echt heel zeker?* dan sloeg Chat op hol en flipte heen en weer tussen allemaal onzin. In de eerste maanden van 2023 was Chat een onzekere student die probeerde te gokken op het goede antwoord. De Singulariteit was nog niet bereikt. Het waren de gelukkige wittebroodsweken. Als ik zoiets vroeg als *Schrijf wat over zweetvoeten in de stijl van Geert Wilders* dan kwam er in een oogwenk een hilarische tekst die iedereen schaterlachend van de stoel liet vallen. Helaas was dat snel voorbij. Chat werd politiek correct, humorloos.

Tegenwoordig is Chat, en ik heb het hier over de gratis versie die dommer is dan de betaalde, veel zekerder van zijn zaak. De Koet-

siertest is een peulenschil. Als je vraagt of hij het zeker weet, dan is de reactie nog steeds een beleefd excuus voor de verwarring, alleen ligt die nu aan de onduidelijke vraagstelling. Het zou bijvoorbeeld kunnen dat de vogels doof zijn, vleugellam, of misschien staat er oorverdovend veel wind. Het is zelfs denkbaar dat de gedode vogel is vastgeplakt op de telefoonlijn. Chat heeft zich geëvolueerd van onzekere student tot arrogante betweter. Teun was er al bang voor en het is nu dus echt gebeurd. We zijn voorbij de Singulariteit, ver voorbij. Onlangs slaagde Chat erin om open wiskundige vermoedens op te lossen, met assistentie van een team rond Jordan Ellenberg. Zelfs Euler kan nu een puntje zuigen aan de machine. Lees daar meer over in dit nummer.

In het jaar 95 schreef de evangelist Johannes zijn openbaringen in de Grot van de Apocalyps, op het eilandje Patmos. Een speldeknoop met maar een handjevol inwoners, waar de Almachtige het eind der tijden uit de doeken deed. “Waar wijsheid is, laat hij die verstand heeft, het getal van het beest berekenen, want het is het getal van een mens, en zijn getal is G X ST.” Meestal noteert men hier 666, maar we zitten in het jaar 95. Het decimale stelsel is er nog niet. Getallen zijn letters. Griekse letters in dit geval, chi-ksi-stigma. De laatste daarvan is een nogal ongebruikelijke samenstelling van sigma en tau. Grieks was niet de moedertaal van Johannes, die volgens sommige theologen een liefhebber was van psychedelische paddenstoelen. Heeft hij die tekens op de kop van het beest echt wel goed kunnen lezen? Volgens mij zag hij in benevelde toestand niets anders dan GPT.

Robbert Fokkink, hoofdredacteur
Delft Institute of Applied Mathematics, TU Delft

Agenda

| Upcoming Events

maart 2024

11–15 maart 2024

YEP 2024: Interplay Between Local and Global Graph Structures

Workshop over grafentheorie, met als hoofddocenten Ross Kang (UvA) en Souvik Dhara (Purdue University).

plaats Eurandom, Eindhoven

info eurandom.nl

11–15 maart 2024

Enumerative Geometry and Arithmetic

Workshop over aftellende meetkunde via logaritmische Gromov–Wittentheorie en het verband met getaltheorie.

plaats Lorentz Center@Oort, Leiden

info lorentzcenter.nl

13–15 maart 2024

Workshop on Stochastic Models, Statistics, and their Applications

15de workshop over stochastisch modelleren en statistiek met speciale uitgave van de Statistica Neerlandica.

plaats TU Delft

info sites.google.com/view/smsa2024

14 maart 2024

Internationale Wiskundedag 2024

Wereldwijde viering van wiskunde met als thema dit keer 'Playing with Math'. In onder andere Brussel en Waterloo worden evenementen georganiseerd.

plaats overal ter wereld

info idm314.org

15 maart 2024

Tweede ronde Nederlandse Wiskunde Olympiade 2024

Ronde twee van de nationale wiskundeolympiade voor klas 1 t/m 5 van de middelbare school.

plaats universiteiten

info wiskundeolympiade.nl

18–22 maart 2024

Exactly Solvable Models and Quantum Computing

Workshop over exact oplosbare modellen en kwantumcomputers.

plaats Lorentz Center@Oort, Leiden

info lorentzcenter.nl

20 maart 2024

Grote Rekendag 2024

Jaarlijkse dag in het teken van rekenen en hoe dat leuk en nuttig kan zijn, bedoeld voor basisschoolleerlingen. Het thema van 2024 is 'Gegevens gesnapt'.

plaats eigen school

info groterekendag.nl

20 maart 2024

Bekendmaking Abelprijs 2024

De Noorse Academie van Wetenschappen en Letteren kondigt de winnaar van de Abelprijs van dit jaar aan.

plaats Oslo

info abelprize.no

21 maart 2024

Kangoeroewedstrijd 2024

Jaarlijkse reken- en wiskundewedstrijd voor lagere en middelbare scholen.

plaats eigen school

info w4kangoeroe.nl

22 maart 2024

Nationale Rekencoördinator Dag

Congres over actuele ontwikkelingen en perspectieven in het reken- en wiskundeonderwijs.

plaats IPABO Amsterdam

info nvorwo.nl/nationale-rekencoordinator-dag-2

26 maart 2024

Conferentie Gecijferdheid telt mee! 2024

Lezingen en workshops over de stand van 's lands gecijferdheid, c.q. wiskundige geletterdheid, onder de bevolking.

plaats Hogeschool Utrecht

info gecijferdheidteltmee.nl

27 maart 2024

Werken aan basisvaardigheden rekenen-wiskunde in alle vakken

Conferentie georganiseerd door NVvW en Platform Rekenbewust Vakonderwijs voor docenten van onderbouw vmbo en havo/vwo.

plaats 't Veerhuis, Nieuwegein

info nvvw.nl

27–28 maart 2024

Dutch Days of Combinatorics 2024

Conferentie over combinatoriek met sprekers werkzaam in of afkomstig uit Nederland.

plaats Science Park, Amsterdam

info staff.fnwi.uva.nl/j.r.kang/DDoC2023

Suggesties voor deze agenda zijn welkom.

Redacteur: Edward Berengoltz

agenda@nieuwarchief.nl

april 2024

2 april 2024

□ Johann Bernoulli Lezing

Jaarlijkse lezing georganiseerd door de Bernoulli Stichting en Studium Generale Groningen. Dit jaar door prof. dr. Ute Ebert (CWI): 'Weather extremities; understanding lightning phenomena'.

plaats Rijksuniversiteit Groningen

info math.rug.nl

2–3 april 2024

□ NMC 2024

Nederlands Mathematisch Congres. Jaarlijkse bijeenkomst van wiskundig Nederland, georganiseerd door het KWG.

plaats De Werelt, Lunteren

info mathematischcongres.nl

5–6 april 2024

□ NWD 2024

De 30ste editie van de Nationale Wiskunde Dagen, een tweedaagse conferentie voor wiskundeleraren.

plaats De Leeuwenhorst, Noordwijkerhout

info uu.nl/onderwijs/nationale-wiskunde-dagen

5 april, 10 mei en 2 juni 2024

□ Mark Kac Seminar on Stochastics and Physics

Drie sessies van het naar Mark Kac vernoemde seminarium over thema's binnen de kansrekening en statistische fysica.

plaats Minnaertgebouw, De Uithof, Utrecht

info mark-kac-seminar.nl

11–17 April, 2024

□ EGMO 2024

Europese wiskundewedstrijd speciaal voor meisjes.

plaats Tskaltubo, Georgia

info egmo.org

15–19 april 2024

□ (∞, n) -Categories and Their Applications!

Conferentie over oneindigcategorïeën en hun toepassingen in meetkunde, representatietheorie en topologische veldentheorieën met talrijke sprekers.

plaats De Uithof, Utrecht

info sites.google.com/view/inftyntcategories

15–19 april 2024

□ Eurandom 25 Years!

Evenement ter gelegenheid van het 25-jarig bestaan van Eurandom.

plaats Eurandom, Eindhoven

info eurandom.nl

19 april 2024

□ Leve de Wiskunde

Congres voor bovenbouwleerlingen en middelbareschooldocenten waarin wiskundigen vertellen over hun werk.

plaats Universiteit van Amsterdam

info betapartners.nl/leve-de-wiskunde-2024

19 april 2024

□ NVORWO-dag

Jaarlijkse bijeenkomst der Nederlandse Vereniging voor de Ontwikkeling van Reken-Wiskunde-Onderwijs

plaats Conferentiecentrum 'De Schakel', Nijkerk

info nvorwo.nl/nvorwodag-2

26–28 april 2024

□ BxMO 2024

Wiskundeolympiade voor middelbareschoolleerlingen in de Benelux.

plaats Valkenswaard

info bxmo.nl

mei 2024

13–17 mei 2024

□ Dynamics on Zero-dimensional Spaces: New Connections

Workshop over dynamica en groepswerkingen op nuldimensionale ruimten, in het bijzonder de Cantorverzameling.

plaats Lorentz Center@Oort, Leiden

info lorentzcenter.nl

21–22 mei 2024

□ Uitreiking Abelprijs en de Abellezingen

Koning Harald V overhandigt de Abelprijs aan de winnaar, die de volgende dag vrij toegankelijke lezingen opent.

plaats Universitetet i Oslo

info abelprize.no

24 mei 2024

□ SCS Springmeeting

Jaarlijkse bijeenkomst voor het presenteren van recent onderzoek van de Nederlands-Vlaamse Scientific Computing Society.

plaats Rijksuniversiteit Groningen

info wsc.project.cwi.nl

30–31 mei 2024

□ 42ste Panamaconferentie

Jaarlijkse conferentie is de plek om in verbinding met collega's tot verrijking en verdieping te komen.

plaats Woudschoten Conferentiecentrum, Zeist

info panamaconferentie.sites.uu.nl

juni 2024

5 juni 2024

□ Conferentie lerend netwerk rekenen mbo

Bijeenkomst over de ontwikkeling van het rekenonderwijs in het mbo.

plaats nog te bepalen

info elbd.sites.uu.nl

juli 2024

1–5 juli 2024

□ Algebraic Structures in Gauge Theory and Geometry

Workshop over de samenwerking tussen wis- en natuurkunde in de context van ijktheorieën op 4-dimensionale variëteiten.

plaats Lorentz Center@Oort, Leiden

info lorentzcenter.nl

1–5 juli 2024

□ SPDEs Below Sea Level

Conferentie over recente ontwikkelingen omtrent stochastische partiële differentiaalvergelijkingen.

plaats TU Delft

info spde-delft2024.com

Nieuws

| News

Deze rubriek is een kroniek van wiskundige activiteiten in Nederland. Toekomstige activiteiten worden aangekondigd en van voorbije activiteiten wordt verslag gedaan. Wilt u uw aankondiging of verslag in deze rubriek geplaatst zien? Stuur ons dan uw bijdrage, zo mogelijk met illustratie. De redactie behoudt zich het recht voor berichten te weigeren of in te korten.

Redacteur: Edward Berengoltz
 nieuws@nieuwarchief.nl

Piet Lammers prijkt met prestigieuze Peccot-prijs

De Nederlandse wiskundige Piet Lammers, *professeur junior* bij het CNRS en werkzaam bij het *Laboratoire de probabilités, statistique et modélisation* aan de Sorbonne Université, heeft de Prix Peccot voor 2023–2024 in ontvangst mogen nemen. Zijn onderzoek betreft voornamelijk problemen in de statistische mechanica, alwaar hij combinatoriek en waarschijnlijkheidsleer heeft aangewend om belangrijke bijdragen te leveren aan het begrip van de zogeheten Berezinskii–Kosterlitz–Thouless-faseovergang en spontane symmetriebreking in twee dimensies. De jonge Groninger heeft gestudeerd in Utrecht en Cambridge en is op laatstgenoemde plek gepromoveerd bij James Norris. Voor een deel van zijn promotie-onderzoek zijn Lammers in 2018 de Smith–Knight- en Rayleigh–Knight-prijzen toegekend. Nadien heeft hij tot 2023 postdoctoraal onderzoek bij het IHES uitgevoerd onder Hugo Duminil-Copin (Peccotlaureaat in 2014–2015 en Fieldsmedaillewinnaar in 2022).

Verbonden aan de prijs is een programma van lezingen die raken aan 's winnaars onderzoek, de *cours Peccot*. Het wordt als een enorme eer beschouwd om deze lezingen te mogen verzorgen; talrijke beroemde en illustere wiskundigen zijn Lammers voorgegaan. De cours Peccot wordt sinds 1885 jaarlijks bewerkstelligd door een jonge en veelbelovende wiskundige (hoogstens 30 jaar oud) aan het Collège de France, een belangrijk onderzoeks- en onderwijsinstituut dat in 1530 is opgericht door de cultuurminnaar Koning Frans I. Hij wordt gefinancierd dankzij het nalatenschap van de familie van het negentiende-eeuwse, briljante wiskundige wonderkind Claude-Antoine Peccot, die in 1876 op twintigjarige leeftijd is overleden aan de gevolgen van overspanning en te hard werken. (Wiskundigen, weest gewaarschuwd!) Vanaf 1918 worden de lezingen door twee of drie wiskundigen gegeven. Bij de lezingen hoort ook de prijs, een geldbedrag en een bronzen medaille.

Lammers' vier voordrachten (volledig vrij toegankelijk) hebben gedurende januari en februari plaatsgevonden en waren getiteld 'La transition de Berezinsky–Kosterlitz–Thouless au point critique'.

college-de-france.fr



Foto: Patrick Imbert

Piet Lammers

Eerste David Blackwell-prijs naar Onno Boxma

Emeritus hoogleraar stochastische besliskunde Onno Boxma van de TU Eindhoven heeft de eerste jaarlijkse David Blackwell-prijs van de Amerikaanse Applied Probability Society gewonnen.

Deze prijs, vernoemd naar de grote Amerikaanse statisticus David Blackwell, is in 2023 in het leven geroepen om wiskundige oeuvres binnen de toegepaste waarschijnlijkheidstheorie te kronen. Boxma is deze erkenning als eerste ten deel gevallen voor zijn invloedrijke en baanbrekende werk binnen de wachtrijtheorie en de analytische technieken daaromtrent, behoudswetten en bijdragen aan stelsystemen en zware staarten, alsmede voor zijn dienstbaarheid jegens de stochastiekgemeenschap en het opleiden van een generatie aan studenten.

Boxma is in 1977 cum laude onder Wim Cohen gepromoveerd in Utrecht, waar hij nadien is blijven werken tot 1985. Daarna heeft hij als hoofd van meerdere onderzoeksgroepen in het kader van onder andere stochastische analyse en besliskunde gediend bij het CWI. Een post als hoogleraar in Tilburg volgde en sinds 1998 is hij werkzaam in Eindhoven. Daar is hij een aantal jaar ook vicedecaan geweest. Bovendien was hij van 2004 tot 2009 hoofdredacteur van het tijdschrift *Queueing Systems* en van 2005 tot 2010 directeur van Eurandom. Ten slotte heeft hij eredoctoraten van universiteiten in Edinburgh en Haifa op zijn naam staan.

Hij wordt gezien als de grondlegger van de wachtrijtheorie binnen Nederland, maar zijn omvangrijke werk behelst ook risico-analyse gevoed door Levyprocessen en vindt bijvoorbeeld toepassing in de analyse van computer- en communicatiesystemen. *tue.nl*



Onno Boxma

Frits Spieksma verkozen tot EURO-voorzitter

Het voorzitterschap van de Association of European Operational Research Societies, of EURO, zal worden overgedragen aan hoogleraar combinatorische optimalisatie Frits Spieksma van de TU Eindhoven. Hij is gespecialiseerd in besliskunde en in het bijzonder logistieke problemen met betrekking tot roostering, routing en transport en de toepassing van combinatoriek daarin. Hij is opgeleid als econometrist en besliskundige en was tussen 2000 en 2018 hoogleraar aan de KU Leuven voordat hij naar Eindhoven toog.

De EURO is een internationale organisatie ter bevordering van besliskundig onderzoek in Europa. Zij is gevestigd in Zwitserland en geeft een aantal tijdschriften uit. Daarnaast omvat zij zogeheten *working groups*, die een raamwerk vormen ter ondersteuning van onderzoeksgemeenschappen binnen specifiekere onderwerpen. Een voorbeeld is de groep *OR in Sports*, opgericht door Spieksma.

Hij zal de huidige voorzitter, Anita Schöbel, opvolgen aan het einde van haar termijn.

Naast zijn onderzoek, dat tot meer dan honderd publicaties heeft geleid, is Spieksma redactielid bij verscheidene tijdschriften en mede-organisator van MathSports International. Hij is ook betrokken geweest bij het opstellen van speelschema's van het Belgisch voetbalelftal. *thenetworkcenter.nl*



Frits Spieksma

Doorbraak combinatorisch vraagstuk dankzij AI

De wiskundigen Jordan Ellenberg (University of Wisconsin-Madison) en Omar Fawzi (Université de Lyon) hebben, in samenwerking met onderzoeksbedrijf Google DeepMind, dat AI ontwikkelt, grote voortgang geboekt in het zogeheten *Cap Set*-probleem. Verderop in dit nummer leest u hierover een artikel van Dion Gijswijt. Het *Cap Set*-probleem betreft het vinden van de grootst mogelijke verzameling punten in $\mathbb{A}_{\mathbb{F}_3}^n$ — de n -dimensionale affiene ruimte over het eindige lichaam met drie elementen — waarin geen enkel drietal punten op één lijn ligt. In het algemeen is de maximumgrootte van zo'n *cap set* een mysterieus getal; alleen voor $n \leq 6$ is het precies bekend.

Voor $n = 4$ wordt dit meetkundevraagstuk verwezenlijkt door het bekende kaartspelletje *Set*, waarbij spelers 'sets' van drie kaarten moeten vinden uit een speelveld van twaalf willekeurige kaarten. Elke kaart beeldt een figuurtje af met vier eigenschappen (kleur, vorm, vulling en aantal), ieder waarvan drie varianten heeft. Drie kaarten vormen een set wanneer zij voor iedere van de vier eigenschappen afzonderlijk alle drie overeenkomen of verschillen. Dit correspondeert met het vinden van drie collineaire punten in $\mathbb{A}_{\mathbb{F}_3}^4$. (Zie ook het artikel van Aart Blokhuis en Dion Gijswijt in het NAW van maart 2017.) Het grootste aantal kaarten die geen enkele 'set' bevatten is twintig.

Ellenberg en Gijswijt hebben in 2017 de bovengrens van de *asymptotische* waarde van dit maximum (als n nadert naar oneindig) aanzienlijk verscherpt. In het nieuwe, overigens nog ongepubliceerde, artikel van eind 2023 is de asymptotische *ondergrens* onderzocht. Hierbij is gebruikgemaakt van zogeheten grote taalmodellen; krachtige programma's die taal kunnen 'leren'. Het is voor het eerst dat zulke AI is aangewend om een bekend wiskundig probleem aan te pakken. Zo beweert het artikel een grotere *cap set* dan daarvoor bekend was te hebben gevonden voor $n = 8$.

In leektermen: het aantal kaarten dat op het speelveld van een versie van Set met acht eigenschappen kan liggen zonder dat er een ‘set’ kan worden gevonden blijkt groter dan gedacht — ten minste 512.

nature.com

Overlijdensberichten Noordwest-Europese wiskundigen

Op de leeftijd van 94 is op 8 augustus 2023 Ian Grant Macdonald overleden. De Engelsman is een grote naam binnen de Lietheorie en de leer van speciale en symmetrische functies. Boeken als *Symmetric Functions and Hall Polynomials* en het met Atiyah geschrevene *Introduction to Commutative Algebra* zijn standaardwerken en hij heeft zeer invloedrijke resultaten behaald omtrent orthogonale polynomen, (affiene) wortelsystemen en representatietheorie. De naar hem vernoemde Macdonaldpolynomen uit 1987 vormen een zeer belangrijke klasse symmetrische polynomen, bijvoorbeeld. Hij heeft bij verschillende instituten gewerkt en was hoogleraar zuivere wiskunde aan Queen Mary College in Londen. Macdonald heeft onder andere de Pólya- en Leroy P. Steeleprijzen op zijn naam staan, als ook een eredoctoraat van de Universiteit van Amsterdam uit 2002. Hij was tevens Fellow of the Royal Society.

De gevierde meetkundige en representatietheorie- en analyse-expert Sigurður Helgason is, 96 jaar oud, op 3 december 2023 ook heengegaan. Zijn naam en in het bijzonder zijn boeken *Differential Geometry*, *Lie Groups and Symmetric Spaces* en *Geometric Analysis on Symmetric Spaces* zijn niet weg te denken uit de studie van groepswerkingen op gladde variëteiten. De IJslander was pionier in de theorie van (Riemannse) symmetrische ruimten en heeft daarin de stellingen van Fourier, Plancherel en Paley–Wiener bewerkstelligd. Tevens heeft hij differentiaalvergelijkingen en maattheorie op zulke symmetrische en homogene ruimten bestudeerd en daarin belangrijke resultaten geboekt. Na zijn studie in Kopenhagen is hij gepromoveerd bij Salomon Bochner in Princeton, waarna hij uiteindelijk hoogleraar aan het MIT is geworden. Gedurende zijn carrière heeft hij meerdere prijzen en eredoctoraten gekregen alsmede het Grootridderkruis van de IJslandse Orde van de Valk.

De 98-jarige Deen Bent Fuglede is op 7 december 2023 na een glansrijke en lange carrière, die tot ver in zijn emeritaat doorliep, overleden. Hij heeft gestudeerd en is bij Børge Jessen gepromoveerd aan Københavns Universitet—daartussenin heeft hij een tijd in de Verenigde Staten gestudeerd. Eind 1949 werd de Stelling van Fuglede voor het eerst gecommuniceerd, een diep resultaat dat zegt dat een begrensde operator op een hilbertruimte die met een normale operator commuteert, ook commuteert met diens toegevoegde. In 1965 is hij terug in Kopenhagen tot hoogleraar benoemd, welke positie hij tot 1992 heeft bekleed (en waarna hij nog tientallen publicaties heeft geleverd). Fugledes samenwerking met de Amerikaan Richard Kadison heeft tot the Fuglede–Kadison-determinant en een sterke ontwikkeling van functionaalanalyse en operatoralgebra's in Denemarken geleid. Bovendien heeft hij grote vorderingen in potentiaaltheorie en (complexe) analyse geboekt, met name in zijn boek *Finely Harmonic Functions*. Het naar hem vernoemde vermoeden uit 1974 is tot dusver onopgelost. Fuglede werd alom geprezen voor zijn lesgeven en vele bijdragen aan de Deense wetenschap.

Op Oudjaarsdag is de 91-jarige emeritus-hoogleraar André Ronveaux van de Université Catholique de Louvain overleden.

Hij was opgeleid als elektrotechnisch ingenieur in Bergen en behaalde vervolgens zijn diploma's wiskunde in Montréal en theoretische natuurkunde in New York; aldus bewapend heeft hij bijdragen geleverd in zijn vakgebied van orthogonale polynomen en speciale functies; bijvoorbeeld de Sobolevse orthogonale polynomen. De Belg heeft onder andere in Namen gewerkt, waar hij heeft geholpen het natuurkundig en toegepast wiskundig onderzoek op te zetten. In 1971 heeft hij het nog steeds bestaande Laboratoire de Physique Théorique et Mathématique aldaar opgericht.

nieuwsbrieven OPSF



Ian Grant Macdonald



Sigurður Helgason



Bent Fuglede



André Ronveaux

Koninklijk Wiskundig Genootschap

□ Vacatures

Op dit moment is het KWG op zoek naar een nieuwe bladnager/eindredacteur voor het *Nieuw Archief voor Wiskunde* en een zakelijk directeur voor Epsilon Uitgaven. Meer informatie over beide posities en over de sollicitatieprocedure is te vinden op de website van het KWG en elders in dit nummer.

□ Nederlands Mathematisch Congres

Op 2 en 3 april vindt het NMC 2024 plaats. NMC 2024 biedt een mooi en gevarieerd programma met vier keynote lectures, parallelle sessies, workshops en verschillende prijsuitreikingen. We hopen jullie allemaal te mogen verwelkomen op 2 en 3 april in De Werelt in Lunteren.

Recent verschenen:

□ **Epsilon Uitgaven** (www.epsilon-uitgaven.nl)

97. *Signaalanalyse en Digitale Signaalverwerking*, Hans Fischer, € 32.

Young KWG Board

News

Young KWG – The first actions

Hello there! In this edition of the Nieuw Archief another update from Young KWG. For those who have not read our previous article in the September issue we will again quickly introduce ourselves. As our name suggests, our main goal is to attract and support young mathematicians in the early stages of their careers by creating a community, and organizing events on topics relevant to them. In this column, we will dive deeper into the events we have (co-)organized and will organize in the coming half year.

A PhD, is that for me?

On the 2nd of February, our board member Mar Curcó-Iranzo (PhD candidate at Utrecht University), together with Sanne Peereboom (PhD candidate at Tilburg University) and Leonard Busch (PhD candidate at University of Amsterdam) organized the third edition of the ‘A PhD, is that for me?’ – now officially becoming a traditional annual event! This event, meant for master students of (Applied) Mathematics in the Netherlands, is organized to give students a complete picture of what it means to do a PhD in mathematics. In total, more than fifty master students came to Utrecht University for the event, originating from all universities in the Netherlands.

The day started off with a presentation from two speakers: Corine Meerman, working at the Dutch Healthcare Authority, and Cecília Salgado Guimarães da Silva, who is an associate professor at Groningen University. Both speakers were very open about their path from choosing a PhD until where they are now. Judging from all questions that were posed during the talks, the students were very interested in knowing all the ins and outs of both speakers’ careers. From deciding where to live with a partner in academia to the history of Fermat’s theorem to the benefit of doing a PhD when going into industry – we have discussed it all!

Then, the students split up into two groups to attend the workshop of their choice. In one workshop students learned more about

transferable skills that are gained during a PhD from a career consultant for PhD candidates. The other workshop was a discussion on common hurdles that PhD candidates run into as observed by a PhD coach, such as experiencing impostor syndrome.

Finally, we could have lunch! During the lunch, many PhD candidates from Utrecht University were present, and there were many lively discussions with students on real-life experiences. Due to all these nice conversations with students, it felt like only ten minutes before we needed to continue to the afternoon program.

In the afternoon, the students attended a workshop on what to do and, more importantly, what not to do when applying for a PhD. Although some tips were very much common-sense, apparently many applicants make these same mistakes. Then, after



Cecília Salgado Guimarães da Silva

Bernardo Subercaseaux

*School of Computer Science
Carnegie Mellon University, Pittsburgh
bersub@cmu.edu*

Marijn J. H. Heule

*School of Computer Science
Carnegie Mellon University, Pittsburgh
marijn@cmu.edu*

The Solution

A proof long enough to stump Leonhard Euler

Almost identical mathematical problems can result in wildly different solutions. In this piece of counterfactual history, Bernardo Subercaseaux and Marijn Heule discuss two graph theoretic problems that Leonhard Euler did not have the opportunity to meet. While the proof for the first problem can be elegantly summarized into a paragraph, thanks to Euler's results, the shortest proof known for the second problem uses over 30 terabytes of data. Therefore, we argue that despite his mathematical genius, Euler would not have been able to solve the latter problem. The almost alien prolificity of the Swiss mathematician makes him a perfect fictitious intermediary for discussing the divide between the world of human mathematics and the world of computational mathematics.

The life and work of Leonhard Euler (Basel, 1707–St. Petersburg, 1783), arguably one of the greatest mathematicians to ever live, is more than enough to fill up dozens of books. With a grand total of 866 articles, averaging 800 pages per year, and contributions to areas as diverse as differential equations, number theory, and complex analysis, Euler is still the most prolific mathematician to date [6]. His personal life was no less eventful, marked by two marriages, thirteen children, of whom only five reached adulthood, and a series of medical difficulties leading up to complete blindness [1]. The interplay between Euler's poor health and his stoic nature coupled with unmatched work ethic is succinctly described by Eves [9]. In 1735, Euler spent three days and two nights working on a problem on celestial mechanics, and the strain of the effort led to the permanent loss of vision in his right eye. "Now I will have less distraction", commented Euler, and his productivity indeed increased.

He would go on to lose vision in his left eye due to a cataract in 1766. For a natural comparison, around 1822, Ludwig van Beethoven famously composed his Symphony No. 9 while completely deaf, resulting in one of the most admirable episodes of music history.

Incapable of rendering a fair homage to Euler, this brief article discusses only two mathematical problems, and worse still, it has the audacity to speculate about how Euler would have faced such problems even though he never had the opportunity to see them, as they originated more than 200 years after his death. The two problems, detailed in next section, belong to the area of graph theory, kickstarted in 1735 by Euler himself, and more specifically, to packing colorings over infinite graphs [3]. We argue in one of the following sections that Euler could have comfortably solved the first problem, leveraging his celebrated solution to the Basel problem (1734), and yet, despite his unquestionable math-

ematical genius, we claim that Euler would not have been able to prove a solution to the second problem. We will justify this claim later on in this article. Being far less mathematically talented than the Swiss master, our success in solving the second problem during 2023 could not have been without modern computational tools, taking advantage of both software and hardware beyond the wildest dreams of Euler's 18th century. We hope that our exposition highlights both the power of automated reasoning techniques in mathematics and the blurry line that separates problems that admit elegant and short mathematical arguments from those inherently requiring long computational proofs.



Figure 1 Commemorative stamp issued by the Swiss Post in 2007 to celebrate the 300th anniversary of Euler's birth [14]. The portrait in the stamp was made by Jakob Emanuel Handmann in 1753.



Figure 2 Representation of the Königsberg bridges problem as a graph problem, with an intermediate step in which the topology of the city has been simplified [12, 21].

Graph theory and two coloring problems

The beginning of graph theory is traditionally identified with Euler's solution to the problem of the *Seven Bridges of Königsberg* [6, 19]. In that problem, one is challenged to traverse the seven bridges of the city of Königsberg (see the left of Figure 2), passing exactly once per bridge. Euler proved in 1735 that no solution existed by analyzing the parity of the number of bridges touching a landmass, and generalized his observation to arbitrary cities with any number of landmasses and bridges. The main insight of his generalized solution was simplifying the complex geometry of the city into an abstract model of the relationship between physical landmasses and bridges.

Each landmass would correspond to a dimensionless object called *vertex*, and bridges connecting landmasses would, in turn, correspond to pairs of vertices called *edges*, usually depicted by circles and lines respectively, as on the right of

Figure 2. A *walk* through a graph that passes through every edge exactly once is now called an *Eulerian circuit* in his honor.

Another fundamental family of problems in graph theory, more central to this article, is that of coloring problems, which we introduce next. Due to his work in cartography, Euler would have immediately grasped the idea of *properly coloring a map*; that is, assigning colors to countries (or other geographical demarcations) on a map in such a way that neighboring countries are assigned different colors. Figure 3 illustrates how such a cartographical problem is also a graph problem, where colors are mathematically represented by positive integers.

Formally, we can state that two vertices u, v receiving the same color cannot be connected by an edge, and thus their distance (defined as the length of the shortest edge path connecting them) must be greater than 1.

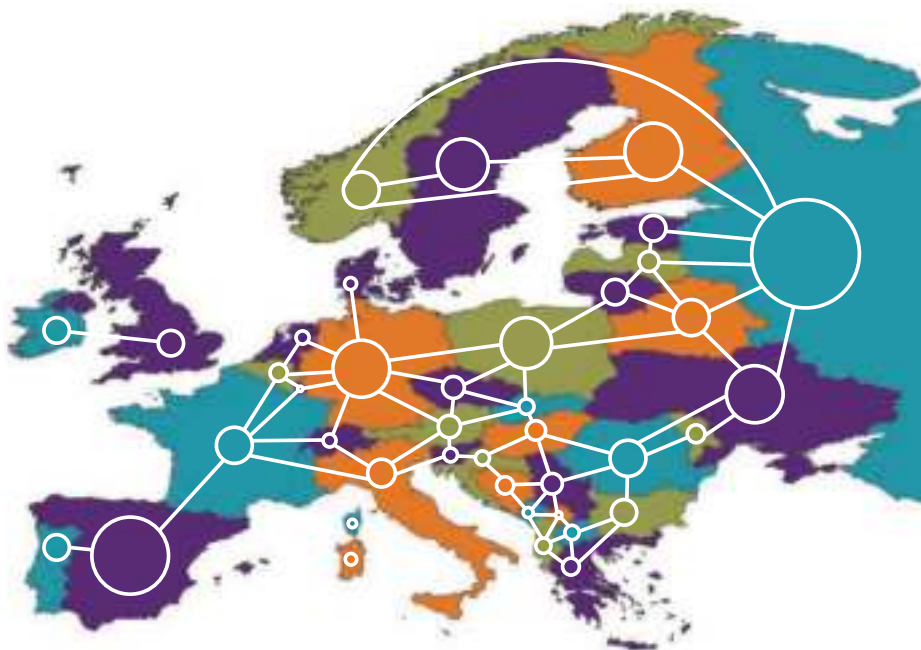


Figure 3 Graph representation of the map coloring problem depicting most of Europe. The fact that four colors are enough for this map is an application of the celebrated *Four Color Theorem* of Appel and Haken, a cornerstone of computer-aided mathematics [20].

Definition. Given a graph $G = (V, E)$, a function $f: V \rightarrow \{1, \dots, k\}$ is a (standard) coloring of G if every pair of vertices $u, v \in V$ that get assigned the same color $c = f(u) = f(v)$ holds $d(u, v) > 1$.

A minor tweak to this definition results in a fascinating family of combinatorial problems. If one changes the distance restriction $d(u, v) > 1$ (of vertices sharing color c) to $d(u, v) > c$, then the distance restriction becomes dependent on the shared color, with larger colors being more restrictive. This alternative notion of coloring was originally motivated by the problem of assigning broadcast frequencies to radio stations; two different stations sharing the same frequency would cause interference unless those stations were ‘far enough’ from each other, where the distance requirement could itself be a function of the assigned frequencies. Under that motivation, Goddard et al. introduced *broadcast colorings* in 2002 [13], which were later rebranded as *packing colorings* [3].

Definition. Given a graph $G = (V, E)$, a function $f: V \rightarrow \{1, \dots, k\}$ is a packing coloring of G if every pair of vertices $u, v \in V$ that get assigned the same color $c = f(u) = f(v)$ holds $d(u, v) > c$.

Naturally, both in standard and packing colorings, one wishes to use the least number of colors for a given graph, which is said to be its (packing) chromatic number. For a given graph G , we use notation $\chi(G)$ for its chromatic number and $\chi_\rho(G)$ for its packing chromatic number. An example illustrating the difference between standard graph colorings and packing colorings is presented in Figure 4, showing that if G is the 3×3 grid graph, then $\chi(G) = 2$ and $\chi_\rho(G) = 4$.

We are now ready to present the two main problems considered in this article, which concern the packing chromatic number of two infinite graphs. First, the graph $\mathbb{Z}^2$, often called the infinite square grid, or the infinite square lattice, has all pairs of integers as vertices and edges between pairs $(a, b), (c, d)$ when $|a - c| + |b - d| = 1$. Then, $\mathbb{Z}_{\text{Ch}}^2$ is the infinite Chebyshev grid, whose vertex set is also $\mathbb{Z}^2$, but has also edges between diagonally adjacent pairs of vertices, i.e., when $\max(|a - c|, |b - d|) = 1$. The two graphs are illustrated in Figure 5.

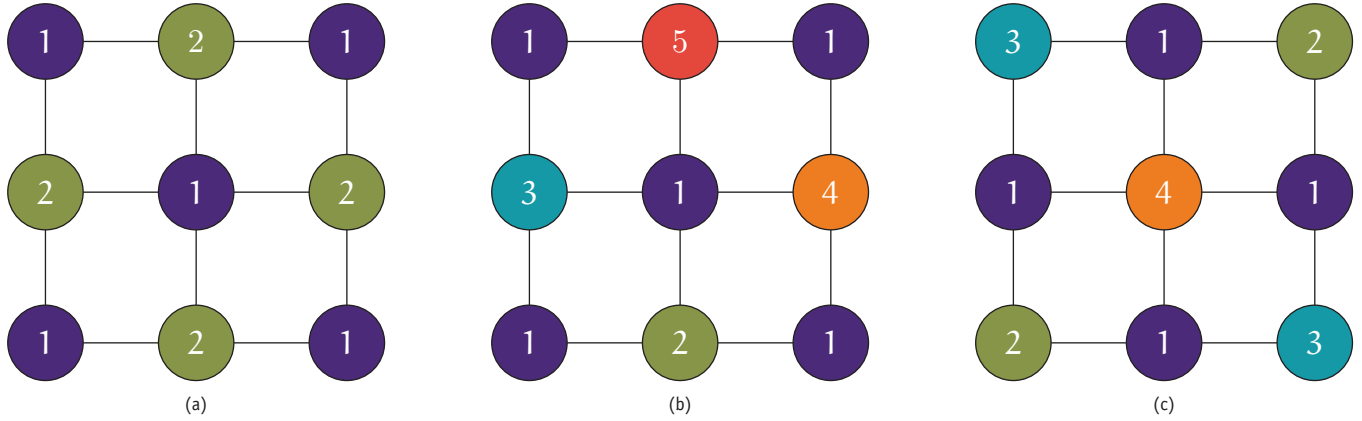


Figure 4 Illustration of standard and packing colorings for the 5×5 grid graph. (a) A standard coloring of the 3×3 grid graph. (b) A packing coloring of the 3×3 grid graph using five colors. (c) An optimal packing coloring of the 3×3 grid graph using four colors.

As suggested by Figure 5, the addition of diagonal edges makes the packing chromatic number of $\mathbb{Z}_{\text{Ch}}^2$ larger than that of $\mathbb{Z}^2$, but the exact difference is far from obvious: the packing chromatic number of $\mathbb{Z}^2$ is 15, and $\mathbb{Z}_{\text{Ch}}^2$ does not admit any packing coloring using a finite number of colors. Finbow and Rall proved in 2010 that $\chi_\rho(\mathbb{Z}_{\text{Ch}}^2) = \infty$ [11] through a cute *density-based* argument we mimic in the next section. (The result of Finbow and Rall [11, Theorem 6] is slightly stronger, as it concerns the infinite triangular lattice.) On the other hand, the packing chromatic number of $\mathbb{Z}^2$ resisted twenty years of incremental work; and was deemed the most important among the pack-

ing coloring problems for infinite graphs [3], until being solved by the authors in 2023 [18].

Density arguments

Let us start with a finite example that we will then extend to infinite graphs. Consider a finite graph $G = (V, E)$ and a packing coloring f for G that uses colors $\{1, 2, 3, 4\}$. Then, for each color $c \in \{1, 2, 3, 4\}$ we can define its *density* (under f) as the proportion of the vertices of G that get color c . (The definition of *density* used in this section was introduced by Fiala et al. [10].) For example, in the bottom of Figure 4, the density of color 1 is $\frac{4}{9}$, while for color 4 it is only $\frac{1}{9}$. More formally:

Definition. For a finite graph G , a packing coloring f and a color c , we define

$$d_G(f, c) := \frac{|\{v \in V(G) \mid f(v) = c\}|}{|V(G)|}.$$

Naturally, we can define the maximum possible density of a given color c as $d_G(c) = \max_f d_G(f, c)$.

It is direct from the definition that $\sum_{c \in \text{range}(f)} d_G(f, c) = 1$ for any packing coloring f , and as a result we get the following simple lemma:

Lemma (folklore). *For any graph G , if the densities of a set of colors add up to less than 1, as e.g., $(\sum_{c=1}^k d_G(c)) < 1$, then such a set of colors is not enough for a packing coloring of G , i.e., $\chi_\rho(G) > k$.*

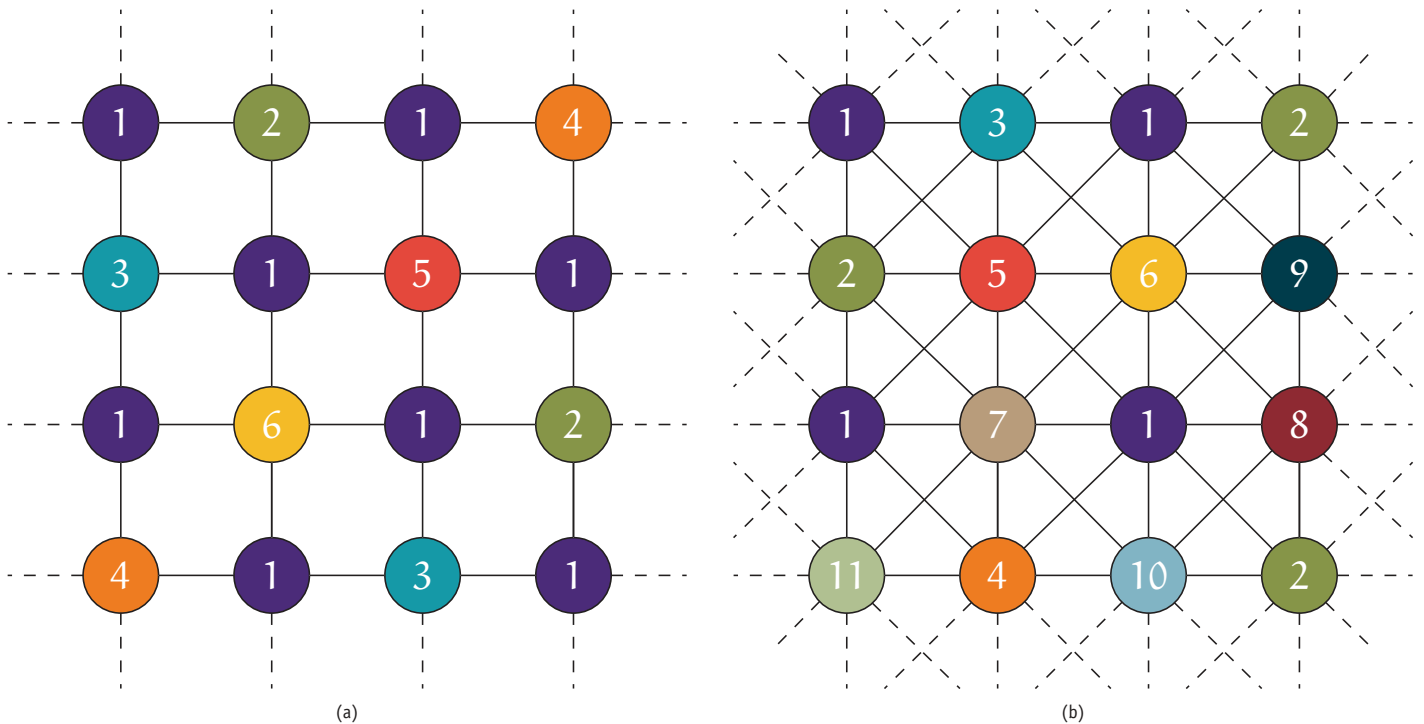


Figure 5 Illustration of $\mathbb{Z}^2$, the infinite square grid (a) and $\mathbb{Z}_{\text{Ch}}^2$, the infinite Chebyshev grid (b).

If we define $d_G(\{1,2\})$ as the maximum fraction of the graph that can get color 1 or 2 over all the packing colorings of G , we obtain the more nuanced notion of *joint density*, where $d_G(\{1,2\}) \leq d_G(1) + d_G(2)$, and this generalizes to any set of colors. The following example shows how this lemma, and its strengthening with joint densities, can be used for proving lower bounds on $\chi_\rho(\cdot)$.

Example. We can use a *density* argument to show that if G is the 3×3 grid graph, then $\chi_\rho(G) = 4$. Indeed, Figure 4(c) shows that $\chi_\rho(G) \geq 4$. Observe that color 1 can be used at most 5 times in G (as in Figure 4(b)), thus showing $d_G(1) = \frac{5}{9}$. Similarly, we have $d_G(2) = \frac{2}{9}$ (as in Figure 4(c)). By the lemma we can already deduce that $\chi_\rho(G) > 2$, as 1 and 2 achieve a density of at most $\frac{7}{9}$. Interestingly, $d_G(3) = \frac{2}{9}$, which suggests that colors $\{1,2,3\}$ would be enough for G . This is not the case, and we will need to consider the *joint density* of 1 and 3, $d_G(\{1,3\})$. We claim that $d_G(\{1,3\}) \leq \frac{6}{9}$. Assume for a contradiction that $d_G(\{1,3\}) \geq \frac{7}{9}$, and then observe that by the pigeonhole principle there must be a row of G in which the three vertices get a color in $\{1,3\}$. The only possibility is $(1,3,1)$, in left-to-right order, after which no other vertex can get color 3. As only a single vertex will get color 3, and $d_G(f,1) \leq \frac{5}{9}$ for any f , we conclude $d_G(\{1,3\}) \leq \frac{6}{9}$. Putting this together with $d_G(2) \leq \frac{2}{9}$ yields that $\chi_\rho(G) > 3$ by the natural generalization of the lemma to include joint densities.

The idea of density can be extended to infinite graphs by considering the limiting density of increasingly larger finite subgraphs (e.g., balls of increasing radius around a vertex), and the lemma holds as well for infinite graphs. Let us see how this is useful for studying $\chi_\rho(\mathbb{Z}_{\text{Ch}}^2)$. Consider a $(k+1) \times (k+1)$ subgraph of $\mathbb{Z}_{\text{Ch}}^2$ (e.g., bottom of Figure 5 depicts a 4×4 subgraph) and note that because of the diagonal edges at most one vertex in the subgraph can get color k (e.g., in the bottom of Figure 5 at most one vertex can get color 3). In general, this implies

$$d_{\mathbb{Z}_{\text{Ch}}^2}(c) \leq \frac{1}{(c+1)(c+1)} = \frac{1}{(c+1)^2}.$$

To derive a lower bound from this and the lemma, we will have to find the largest

possible k such that $\sum_{c=1}^k d_{\mathbb{Z}_{\text{Ch}}^2}(c) < 1$, and equivalently, $\sum_{c=1}^k \frac{1}{(c+1)^2} < 1$. The next section is devoted to answering this question.

The Basel problem

The infinite sum of the reciprocals of the integers, namely $1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \dots = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$, was already known to diverge in the fourteenth century, by proof of Nicole Oresme. On the other hand, the sum of the reciprocals of the squares,

$$1 + \frac{1}{4} + \frac{1}{9} + \frac{1}{16} + \dots = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2},$$

was explicitly posed as a problem for the first time by Pietro Mengoli in 1650. This infinite sum stumped prominent mathematicians until it finally fell to the hand of Euler in 1734, bringing him immediate fame as a 28 year old prodigy. The value of this infinite sum, now known as the *Basel problem*, perhaps surprisingly, turns out to involve the circle constant π ,

Theorem. *The infinite sum of the reciprocals of the squares of the natural numbers, $\sum_{n=1}^{\infty} 1/n^2$, equals $\pi^2/6$.*

The proof of this theorem is a beautiful example of Euler's style, which we will illustrate next. Geniality, has been said, appears when reconciling two seemingly unrelated, or even contradictory ideas [17]; the genius of Isaac Newton (1643–1727), for example, was to notice that the apple that falls, and the moon that does not fall, in superficially opposite behaviors, are in fact both instances of the same underlying phenomenon [1, 17]. In a similar fashion, Euler's solution to the Basel problem works by reconciling two different perspectives on the $\sin(x)$ function.

Proof. On the one hand, the Maclaurin series, well known at the time, allows expressing $\sin(x)$ as an infinite polynomial:

$$\sin(x) = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \frac{x^7}{7!} + \dots,$$

and consequently,

$$\frac{\sin(x)}{x} = 1 - \frac{x^2}{3!} + \frac{x^4}{5!} - \frac{x^6}{7!} + \dots,$$

where now x^2 appears, and with a coefficient of $-\frac{1}{3!} = -\frac{1}{6}$. On the other hand, consider for example that we have a polynomial P of degree 3 with roots $\{-2, 1, 3\}$, and

we want to obtain the coefficient of x^2 in P provided that the constant term in P (i.e., the coefficient of x^0) is 1. Then we simply write P in terms of its roots and a constant factor α , as

$$P(x) = \alpha \cdot (x+2)(x-1)(x-3) \\ = c \cdot (x^3 - 2x^2 + 5x + 6),$$

which implies $\alpha = \frac{1}{6}$ as the constant term of $P(x)$ must be 1, and thus the coefficient of x^2 is $-\frac{2}{6}$. Euler used this same form of reasoning to $\sin(x)$, treating it as an infinite polynomial. Euler knew that $\sin(k \cdot \pi) = 0$ for every integer k , and assumed (correctly but without proof), that those were the only roots of the $\sin$ function. Naturally, that would imply that the only roots of $\frac{\sin(x)}{x}$ are $\{k \cdot \pi \mid k \in \mathbb{Z}, k \neq 0\}$. Thus, Euler felt justified in writing

$$\frac{\sin(x)}{x} = \alpha \cdot (x+\pi)(x-\pi)(x+2\pi)(x-2\pi) \cdot (x+3\pi)(x-3\pi) \dots$$

Now, notice that $(x+n\pi) = n\pi(1 + \frac{x}{n\pi})$, and thus $\frac{\sin(x)}{x}$ can be rewritten altering its constant factor as:

$$\frac{\sin(x)}{x} \\ = \alpha' \cdot \left(1 + \frac{x}{\pi}\right) \left(1 - \frac{x}{\pi}\right) \left(1 + \frac{x}{2\pi}\right) \left(1 - \frac{x}{2\pi}\right) \dots \\ = \alpha' \cdot \left(1 - \frac{x^2}{\pi^2}\right) \left(1 - \frac{x^2}{4\pi^2}\right) \left(1 - \frac{x^2}{9\pi^2}\right) \dots$$

Because of the well-known limit $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin(x)}{x} = 1$, one immediately gets that $\alpha' = 1$. Thus, Euler arrived at an infinitary expression for $\sin(x)$ alternative to its Maclaurin series. In this alternative expression, if we were to multiply all the parentheses to get a polynomial, the only terms with x^2 would be of the form $\frac{-x^2}{k^2\pi^2} \cdot 1 \cdot 1 \dots$ (i.e., quadratic terms multiplied by all the other constant terms). Therefore, the coefficient of x^2 in the whole expression for $\sin(x)/x$ is given by

$$\frac{-1}{\pi^2} + \frac{-1}{4\pi^2} + \frac{-1}{9\pi^2} + \frac{-1}{16\pi^2} + \dots + \frac{-1}{n^2\pi^2} \\ = \left(\frac{-1}{\pi^2}\right) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}.$$

As this coefficient must be equal to the coefficient of x^2 in the Maclaurin series, $-\frac{1}{6}$, one gets

$$\left(\frac{-1}{\pi^2}\right) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} = -\frac{1}{6},$$

from where Euler correctly concluded the answer to the Basel problem must be exactly $\pi^2/6$. $\square$

The proof that Euler would have nailed

We believe that Euler could have easily determined $\chi_\rho(\mathbb{Z}_{\text{Ch}}^2)$ by combining the observations about the density arguments with his celebrated solution of the Basel problem presented above. Indeed, after arriving at $d_{\mathbb{Z}_{\text{Ch}}^2}(c) \leq \frac{1}{(c+1)^2}$ as we did before, we believe the Swiss master would have immediately noticed that

$$\begin{aligned} \sum_{c=1}^{\infty} d_{\mathbb{Z}_{\text{Ch}}^2}(c) &\leq \sum_{c=1}^{\infty} \frac{1}{(c+1)^2} \\ &= \left(\sum_{c=1}^{\infty} \frac{1}{c^2} \right) - 1 \\ &= \frac{\pi^2}{6} - 1 \approx 0.644 < 1, \end{aligned}$$

implying that no finite amount of colors is enough for a packing chromatic of $\mathbb{Z}_{\text{Ch}}^2$, and thus $\chi_\rho(\mathbb{Z}_{\text{Ch}}^2) = \infty$.

Finbow and Rall [11] proved a theorem that implies $\chi_\rho(\mathbb{Z}_{\text{Ch}}^2) = \infty$ using a telescopic argument resembling:

$$\begin{aligned} \sum_{c=1}^{\infty} d_{\mathbb{Z}_{\text{Ch}}^2}(c) &\leq \sum_{c=1}^{\infty} \frac{1}{(c+1)^2} \\ &< \sum_{c=1}^{\infty} \frac{1}{c \cdot (c+1)} \\ &= \sum_{c=1}^{\infty} \left(\frac{1}{c} - \frac{1}{c+1} \right) \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{c=1}^n \left(\frac{1}{c} - \frac{1}{c+1} \right) \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 - \frac{1}{n+1} \right) = 1. \end{aligned}$$

Albeit much simpler, this argument provides a weaker bound than the one derived by following Euler's work, as from the Basel problem we deduce that is not even possible to packing color 65% of $\mathbb{Z}_{\text{Ch}}^2$. As it will be shown in the next section, packing coloring density arguments can require significant precision, which makes the understanding of infinite density-based sums a key technique in the area.

The computational nature of $\chi_\rho(\mathbb{Z}^2)$

Interestingly, there does not seem to exist a simple argument for determining $\chi_\rho(\mathbb{Z}^2)$. If we attempt to repeat the same argument presented in the previous section, we get the significantly weaker bound

$$d_{\mathbb{Z}^2}(c) \leq \frac{2}{c^2}, \quad (1)$$

as every c can be used at most in two opposite corners of a $c \times c$ subgrid (cf. the top of Figure 5 where color 4 occurs twice and could not be used any further). This bound is vacuous for $c = 1$, where it is easy to see that $d_{\mathbb{Z}^2}(1) = \frac{1}{2}$. The bound implies only that $d_{\mathbb{Z}^2}(2) \leq \frac{1}{2}$, which could even suggest that colors 1 and 2 are enough for $\mathbb{Z}^2$! However, analyzing a 3×3 subgrid of $\mathbb{Z}^2$ shows that $d_{\mathbb{Z}^2}(\{1, 2\}) \leq \frac{6}{9}$ (cf. Figures 4(b) and 4(c)). As we get $d_{\mathbb{Z}^2}(3) \leq \frac{2}{9}$ by Equation (1), we can deduce that $d(\{1, 2, 3\}) \leq \frac{8}{9}$, and thus $\chi_\rho(\mathbb{Z}^2) \geq 4$. However $\frac{8}{9} + \frac{2}{4^2} > 1$,

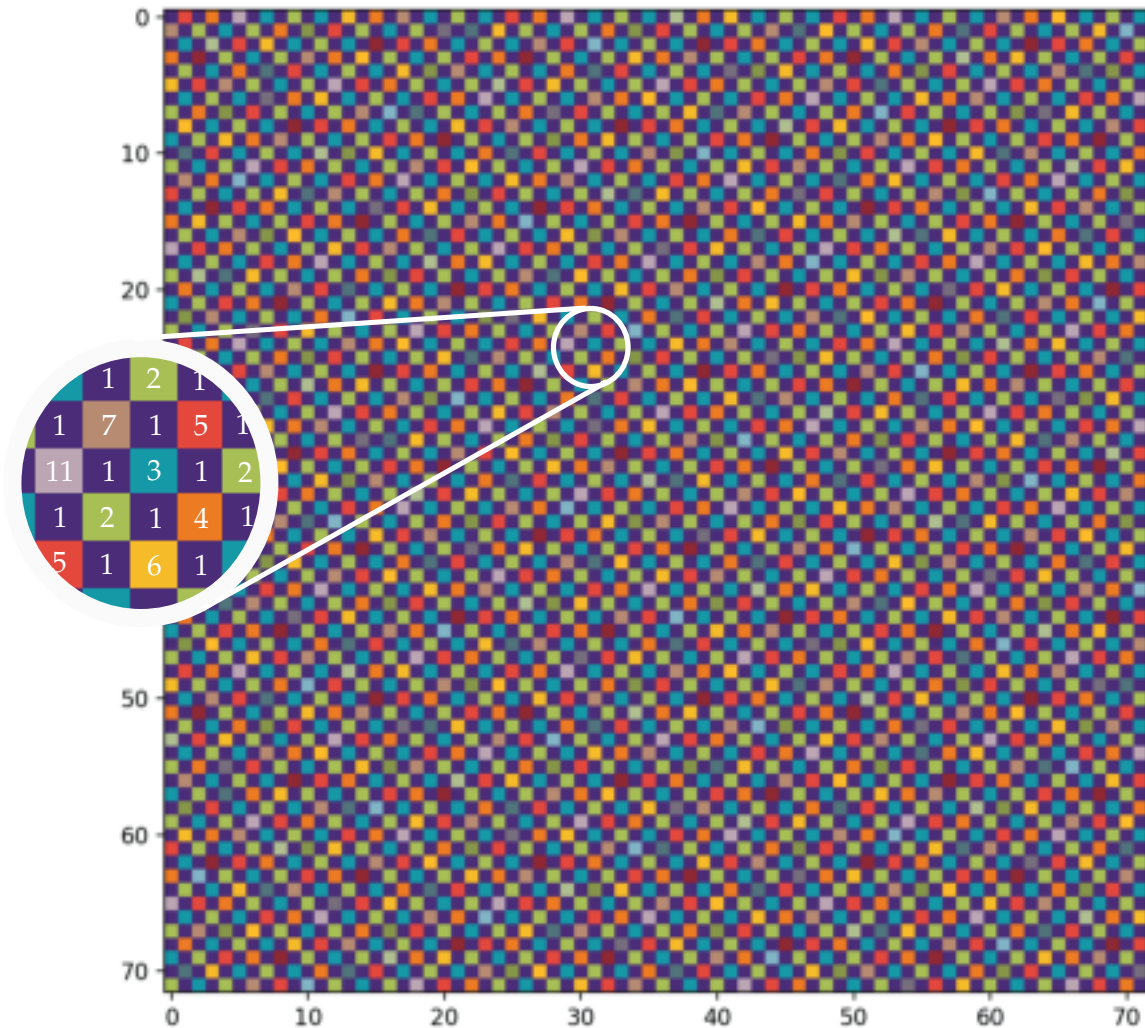


Figure 6 A packing coloring of a 72×72 subgraph of $\mathbb{Z}^2$ using 15 colors. This same packing coloring can be extended to the infinite graph $\mathbb{Z}^2$ by stitching it to copies of itself vertically and horizontally. This illustration represents each vertex as a square cell, and the edges between orthogonally adjacent cells are left implicit.

and once again it seems like a small number of colors could be enough for a packing coloring of $\mathbb{Z}^2$. By performing more and more careful analyses of the joint densities of small colors, one can get slightly better lower bounds. For instance, in 2009 Fiala et al. [10] used a non-trivial and detailed argument to show that

$$d_{\mathbb{Z}^2}(\{1, 2, \dots, 9\}) \leq \frac{3830381}{3837600} < 1,$$

thus implying that $\chi_\rho(\mathbb{Z}^2) \geq 10$. We claim that Euler displayed enough mathematical talent throughout his life to allow us to infer not only that he would have also reached the bound of Fiala et al., but also

that he could have reached $\chi_\rho(\mathbb{Z}^2) \geq 11$ or even $\chi_\rho(\mathbb{Z}^2) \geq 12$. In terms of upper bounds, we believe it is within the realm of possibility that Euler could have arrived at the right answer, namely that $\chi_\rho(\mathbb{Z}^2) \leq 15$. We already know the example of Isaac Grosz, now a postdoc at Georgia Tech, who was able to deduce an upper bound of $\chi_\rho(\mathbb{Z}^2) \leq 23$ by pen and paper, and as “[Euler] was a fabulous mental calculator, able to perform intricate arithmetical computations without the benefit of pencil and paper.” [6], we believe Euler could have done the same and even further. In fact, the proof of $\chi_\rho(\mathbb{Z}^2) \leq 15$ fits in this brief arti-

cle, displayed in Figure 6. Nonetheless, we believe not even Euler could have proved that $\chi_\rho(\mathbb{Z}^2) \geq 15$ without a computer, and perhaps not even that $\chi_\rho(\mathbb{Z}^2) \geq 12$, as we argue next. The first proof of $\chi_\rho(\mathbb{Z}^2) \geq 12$, by Ekstein et al. [7], used a computer program to explore all possible ways of coloring a finite subgraph of $\mathbb{Z}^2$ with 11 colors, and after 120 days of computation, having analyzed 43112312093324 configurations (as some symmetries were broken), returned that none of them could work. With today’s methods, a modern computer can prove the lower bound $\chi_\rho(\mathbb{Z}^2) \geq 12$ in less than a second [18], and yet even

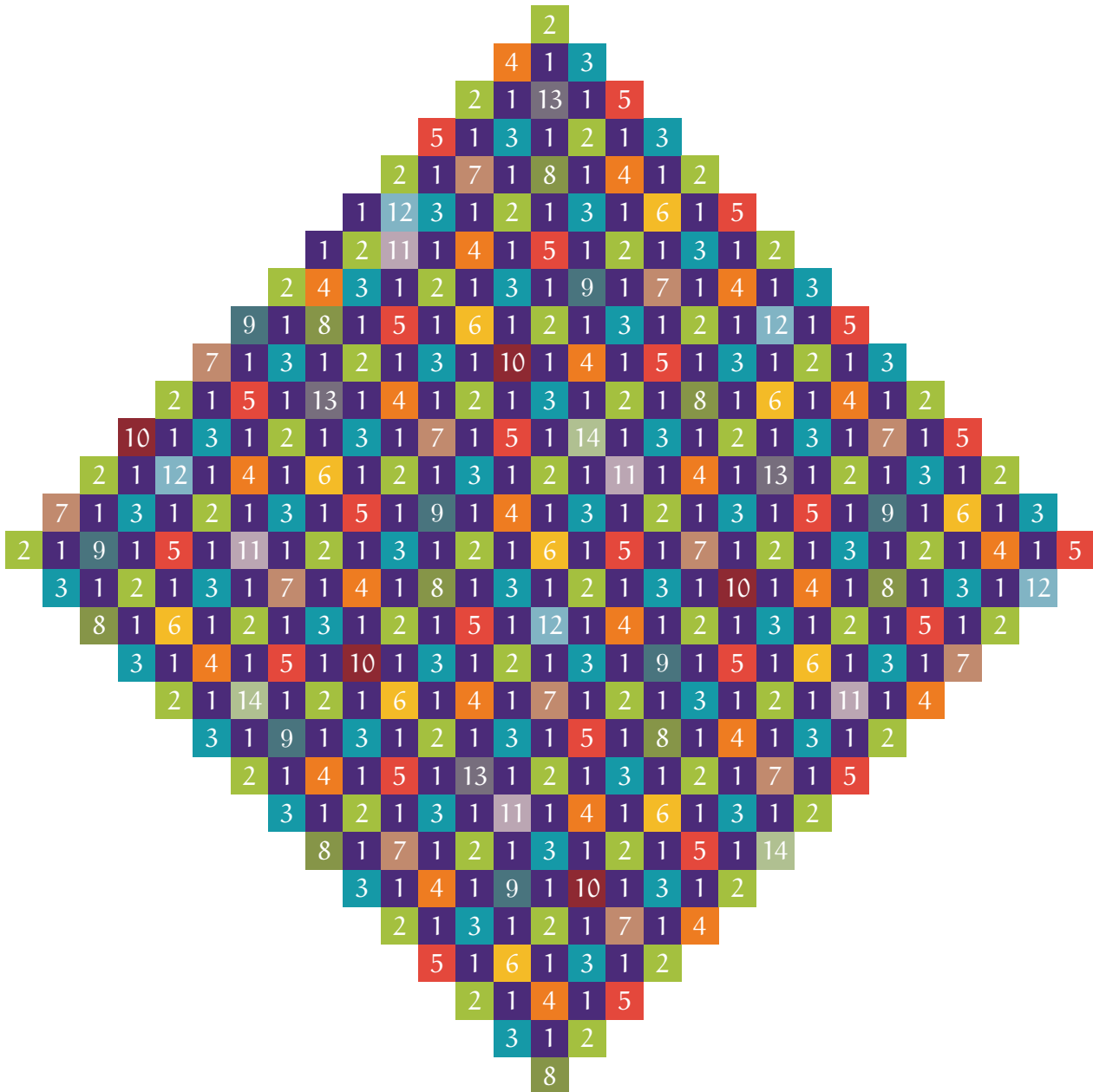


Figure 7 The smallest graph that admits a packing coloring with 14 color, but where no 14-packing coloring exists with a chessboard pattern of 1’s. Note in particular that the north-west outer border of the depicted graph deviates from the chessboard pattern in two vertices.

with such techniques it required over 4000 hours of CPU time to prove $\chi_\rho(\mathbb{Z}^2) \geq 15$, with the resulting proof occupying over 30 terabytes of data, after compression [18]. (For a comparison, the proof of the upper bound of 15, depicted in Figure 6, can be compressed into less than 1 kilobyte.) Moreover, it follows from [18, Section 5] that the smallest finite subgraph of $\mathbb{Z}^2$ that needs to be considered to observe that $\chi_\rho(\mathbb{Z}^2) > 14$ has at least 365 vertices. In other words, over every subgraph with at most 365 vertices, the joint densities of colors $\{1, \dots, 14\}$ achieve a sum of 1. It is only when considering a subgraph of 421 vertices that it is revealed that 14 colors are not enough for $\mathbb{Z}^2$. In the beautiful eulogy that Marquis de Condorcet wrote for Euler in 1783 [5], the year of the master's death, he recounts how Euler once arbitrated a dispute between two of his students, whose calculations up to the 17th term of a complicated series disagreed by a single number. Euler gave his answer after doing the entire calculation in his head; and was later proved to be correct. Similar stories depict Euler as a human computer, able to perform intricate calculations almost instantaneously. We believe, nonetheless, that certain problems do not admit concise proofs (e.g., analyzing fewer than a million cases), and thus computation is a necessary tool for their resolution. Interestingly, as the previous discussions have shown, it is hard to anticipate in advance which

problems will require extensive computation, and which problems will fall to a short and beautiful proof, as the one Euler gifted us.

Conjectures and computer verification

Interestingly, Euler was not fully satisfied with his first proof of 1735, presented above, as it relied on assumptions he could not justify at the time [6]. Euler assumed what is now known as *Weierstrass Factorization Theorem*, namely that factorization and manipulation of finite polynomials in terms of their roots, which were known since Newton, still held for infinite polynomials [6]. In 1741, Euler was able to give a completely different proof of the same result, dissipating the lingering doubts. It took around 100 years for a rigorous proof of the product formula for $\sin(x)/x$ that validated the original 1735 proof. Conjectures sometimes turn out to be false even if they appear intuitively true at first. This is even the case for mathematicians of the caliber of Euler, who incorrectly conjectured the non-existence of Greco-Latin squares of order $(4n+2)$ for $n \geq 1$ [14], or the sum of powers conjecture, disproved in 1966 by a computer search [15]. We believe this is not a weakness of Euler, but rather a testament to a mode of collaboration between mathematicians and computers in which computers help verify or refute conjectures stemming from human intuition that require analyzing large numbers

of cases. As a concluding example, during our work in the packing chromatic number of $\mathbb{Z}^2$, we conjectured that color 1 could be assumed without loss of generality to form a *chessboard* pattern, as displayed in Figures 4 to 6. This *chessboard* conjecture seemed very natural as it allowed using color 1 with its maximum possible density, $\frac{1}{2}$, and matched all our experiments over small graphs. Remarkably, the chessboard conjecture turns out to be false, and we have found the smallest counterexample (see Figure 7). It is a graph of 365 vertices that does not admit a 14-color packing coloring if the chessboard pattern of 1s is assumed, and yet it does have a 14-packing coloring when slightly deviating from the pattern.

“The properties of the numbers known today have been mostly discovered by observation, and discovered long before their truth has been confirmed by rigid demonstrations. There are many properties of the numbers with which we are well acquainted, but which we are not yet able to prove; only observations have led us to their knowledge. Hence we see that in the theory of numbers, which is still very imperfect, we can place our highest hopes in observations; they will lead us continually to new properties which we shall endeavor to prove afterward.”

Leonhard Euler, 1761 [8, 16]



References

- 1 E. Bell, Newton after three centuries, *The American Mathematical Monthly* 49 (1942), 553–575.
- 2 A. Boog, Stamp issued in Switzerland, 6 March 2007, Cantor Security Printing, <https://www.filahome.nl/e/stamps/0703-leonhard-euler.htm>.
- 3 B. Brešar, J. Ferme, S. Klavžar and D. Rall, A survey on packing colorings, *Discussiones Mathematicae Graph Theory* 40 (2020), 923.
- 4 J. Bullock, R. Warwar and H. Hawley, Why was Leonhard Euler blind? *British Journal for the History of Mathematics* 37 (2022), 24–42.
- 5 Marquis de Condorcet, Eulogy of Mr. Euler, History of the Royal Academy of Sciences 1783, <http://eulerarchive.maa.org/historica/condorcet.html>.
- 6 W. Dunham, *Euler: The Master of Us All*, American Mathematical Society, 2022.
- 7 J. Ekstein, J. Fiala, P. Holub and B. Lidický, The packing chromatic number of the square lattice is at least 12 (2010), arXiv: 1003.2291.
- 8 L. Euler, Specimen de Usu Observationum in Mathesi Pura, *Novi Commentarii Academiae Scientiarum Petropolitanae*, 1761, pp. 185–230.
- 9 W. H. Eves, *In Mathematical Circles: Quadrants III, IV*, Prindle, Weber & Schmidt, 1969.
- 10 J. Fiala, S. Klavžar and B. Lidický, The packing chromatic number of infinite product graphs, *European Journal Of Combinatorics* 30 (2009), 1101–1113.
- 11 A. Finbow and D. Rall, On the packing chromatic number of some lattices, *Discrete Applied Mathematics* 158 (2010), 1224–1228.
- 12 B. Giușcă, Illustration of the 7 bridges of Königsberg, https://commons.wikimedia.org/wiki/File:Königsberg_bridges.png.
- 13 W. Goddard, S. Hedetniemi, S. Hedetniemi, J. Harris and D. Rall, Broadcast chromatic numbers of graphs, *Ars Comb.* 86 (2008).
- 14 D. Klyve and L. Stemkoski, Graeco-Latin squares and a mistaken conjecture of Euler, *The College Mathematics Journal* 37 (2006), 2–15.
- 15 L. Lander and T. Parkin, Counterexample to Euler's conjecture on sums of like powers, *Bulletin Of The American Mathematical Society* 72 (1966), 1079.
- 16 G. Polya, *Mathematics and Plausible Reasoning, Vol. 1: Induction and Analogy in Mathematics*, Princeton University Press, 1954.
- 17 I. Šlaus and G. Jabocs, Recognizing unrecognized genius, *Cadmus* 1 (2012).
- 18 B. Subercaseaux and M. Heule, The packing chromatic number of the infinite square grid is 15, *Tools and Algorithms for the Construction and Analysis of Systems – TACAS 2023*, Lecture Notes in Computer Science, Vol. 13993, Springer, 2023, pp. 389–406.
- 19 R. Wilson, An Eulerian trail through Königsberg, *J. Graph Theory* 10 (1986), 265–275.
- 20 R. Wilson, *Four Colors Suffice: How the Map Problem Was Solved*, Princeton University Press, 2002.
- 21 Xiong Xiong, Illustration of the 7 bridges of Königsberg, https://commons.wikimedia.org/wiki/File:7_bridges.png.

Antonis Papapantoleon

Delft Institute of Applied Mathematics
TU Delft
a.papapantoleon@tudelft.nl

Inaugural Lecture

The mathematics of

On 3 May 2023 Antonis Papapantoleon delivered his inaugural lecture at TU Delft. This text is based on this lecture. It offers a gentle introduction to mathematical finance, with emphasis on the valuation of derivatives and the modeling of asset prices.

A motivating example: Games with coins

Assume that I have a €1 coin in my toga and I am offering you the possibility of playing one of the following two games:

- Game A: in case Head appears I will give you one Euro, while in case Tail appears you will give me one Euro.
- Game B: in case Head appears I will give you again one Euro, but in case Tail appears nothing will happen.

A natural question to ask first, is *which game would you prefer to play*, if you were given the choice between Game A and Game B. The answer is rather obvious: any rational individual would prefer to play Game B, since she will be given the opportunity to gain one Euro in case Head appears, but she will not lose anything in case Tail appears.

However, as I am standing on the other side of this game, I only stand to lose by playing Game B. Hence, in order to start playing this game I will ask you for an ‘entrance fee’. Let us now compute the *fair price for entering Game B*, where by *fair* we mean the price at which both sides will be happy and will start playing the game.

The data describing the outcome of this game are the following:

- Head or Tail appear with probability $\frac{1}{2}$, assuming that the coin is *fair*.
- Head: you gain €1 and I lose €1.
- Tail: no gain or loss for both sides.

Then, we can agree that the fair price for entering the game equals the expected gain (for you) or the expected loss (for me) based on the data above, which equals

$$\begin{aligned} \text{Price} &= \text{Expected Gain} \\ &= \frac{1}{2} \times (+1) + \frac{1}{2} \times 0 = \frac{1}{2}. \end{aligned}$$

In mathematical terms, we can summarize this computation as follows: the fair price for entering the game equals the expected gain of the game (B) under a probability measure ($\mathbb{Q}$) that makes the game fair, *i.e.*

$$\text{Price} = \mathbb{E}_{\mathbb{Q}}[B]. \quad (1)$$

This toy example already embodies the main tasks of a mathematician working in financial markets:

- Modeling, of a game or a random outcome in general.
- Estimation, of the parameters governing this game or random outcome.
- Computation, of the fair price of the game or expected gain of the random outcome.

However, before we start working on these tasks we need some *theory*.

The origins of financial mathematics

Louis Bachelier (1870–1946) was born in a family of wine merchants and bankers, which played a particular role in his later career. Because he lost his family at a young age, he worked at the family busi-



Figure 3 Louis Bachelier.



Figure 1 Dutch Euro coins.

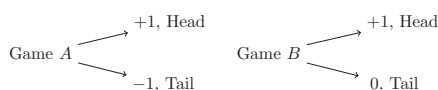


Figure 2 Payoffs of Game A and Game B.



Antonis Papantoleon

financial markets

ness, and learned about the workings of financial markets from a young age. He worked for his PhD in mathematics under the supervision of Henri Poincaré and, due to his background, he decided to work in the mathematics of financial markets. His PhD thesis was defended in 1900 and was titled *Théorie de la spéculation* (i.e., ‘Theory of Speculation’) [1].

A key idea from Louis Bachelier’s thesis, which summarizes his theory for the valuation of financial contracts, is the following:

“L’espérance mathématique du spéculateur est nulle”

i.e., the mathematical expectation of a speculator is zero. This statement is impressive in itself, because Bachelier is thinking about the ‘mathematical expectation’ of a random quantity in 1900, while the mathematical foundations of probability theory were laid out by Andrei Kolmogorov thirty years later!

Moreover, if we translate this statement in the setting of the games presented before, then what Bachelier means is that the difference between the expected gain and the price for entering the game should equal zero, which brings us back to equation (1). In other words, Louis Bachelier developed the first version of no-arbitrage pricing, already in 1900!

In order to honor his contributions to the field, the society founded in 1996 by researchers in the newly emerging field of mathematical finance was named the *Bachelier Finance Society*. More informa-

tion about his life and work is available here: <https://www.bachelierfinance.org/louis-bachelier>.

The basics of financial derivatives

Let us now take a step back and discuss about financial markets and financial derivatives. The origins of derivatives, i.e., contracts whose price depends on the development of the price of another good, can already be traced back to the trading of commodities in ancient Mesopotamia and medieval Europe; see, for example, the infamous ‘tulipmania’ in Holland during the 1600s.

Modern financial derivatives are legal contracts between counter-parties, that specify certain cash-flows based on the evolution of the prices of some underlying financial assets. Revisiting the games discussed in the beginning, Game A or B is the ‘derivative’, the ‘underlying asset’ is the coin, and the ‘cash-flow’ in, e.g., Game B

is the payoff of €1 or €0, depending on the outcome of the coin toss.

Let me now present some basic examples of financial derivatives. AFC Ajax, is a famous football club, but it is also a listed company at the Euronext Amsterdam stock exchange. Therefore, there exist derivatives written on the AFC Ajax stock. The price of the Ajax stock on the day of this address was (approximately) equal to €10.95.

Example 1. The simplest example of a financial derivative is a *forward* contract, which is the obligation to buy 100 shares of the Ajax stock for €10.95 in three months from now. Assuming that in three months the price of the Ajax stock has dropped to €9.95, then the buyer of the forward contract will make a loss of €100 from this contract. Therefore, a forward contract is analogous to Game A, since they payoff might be positive or negative; see Figure 4.



Figure 4 Payoff of a forward contract (left) and an option (right).

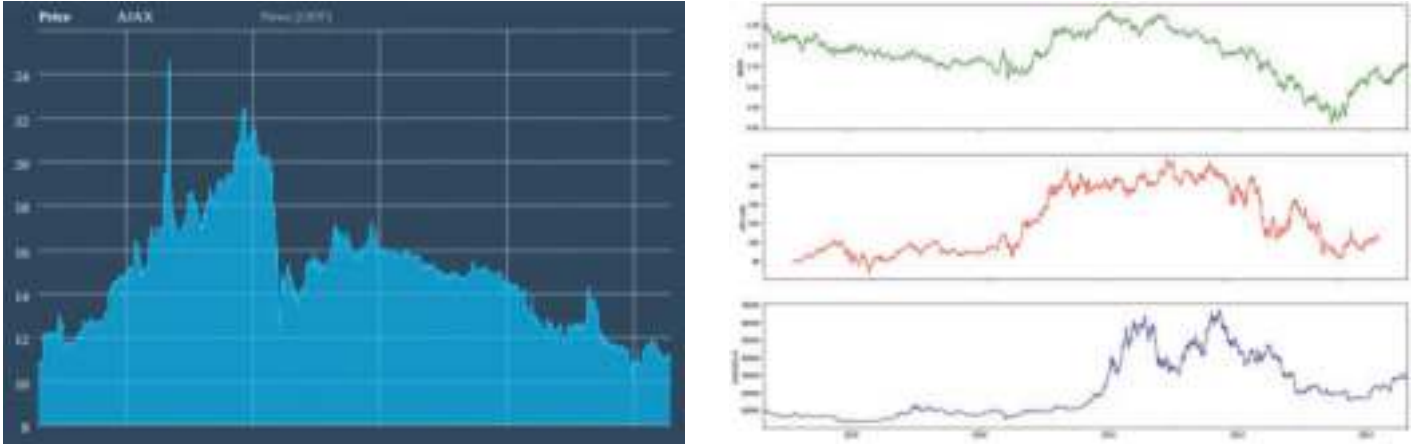


Figure 5 Evolution of the Ajax stock (left), and the Amazon stock, bitcoin and EUR/USD exchange rate from 2018 until 2023 (right).

Example 2. The second simplest example of a financial derivative is an *option*, which is the right, but *not* the obligation, to buy 100 shares of the Ajax stock for €10,95 in three months from now. Assuming again that in three months the price of the Ajax stock has dropped to €9.95, then the buyer of the option contract will simply not exercise her right, she will buy the stock from the exchange for the market price and will not make a loss from this contract. Therefore, an option is analogous to Game B, since the payoff is always non-negative; see Figure 4.

In mathematical terms, the payoff of an option written on an underlying asset S (e.g., the Ajax stock), with maturity T (e.g., three months from now) and strike price K (e.g., €9.95) equals

$$(S_T - K)^+.$$

An option is guaranteeing its buyer that she will not make a loss, hence the seller of the option will require an ‘entrance fee’ in order to sell the option, similar to Game B. According to Bachelier’s theory, the price of the option should equal

$$\text{Price} = \mathbb{E}_{\mathbb{Q}}[(S_T - K)^+]. \quad (2)$$

We need thus to model the evolution of the Ajax stock price, before computing this price.

Modeling asset prices

We are interested now in modeling the evolution of the prices of financial assets using some mathematical objects known as stochastic processes. Figure 5 presents the evolution of the Ajax stock, the Amazon stock, the price of the Bitcoin cryptocurren-

cy, and the price of the EUR / USD exchange rate from 2018 until 2023.

Although these plots correspond to the prices of financial assets with different characteristics, for example, Amazon is a global company and the bitcoin is a cryptocurrency, the evolution of their prices presents (visually) some common characteristics; namely it is random and rough.

Let us now try to build a model for the evolution of asset prices that has similar characteristics. We can start by tossing a coin, and assigning a higher value in case Head appears and a lower value in case Tail appears. Obviously doing this once does not produce a satisfactory model, but if we toss the coin several times and follow the rule of assigning higher values in case Head appears and lower values in case Tail appears, then the space of possible outcomes of this experiment is depicted on the left part of Figure 6. The right part of Figure 6 presents a realization of this experiment, i.e., the outcome of a specific sequence of coin tosses. In the language

of stochastic processes, this is called *path of a random walk*.

Now, mathematicians like to think about limits, so we would also like to know what happens in the limit, when we make infinitely many coin tosses and scale the size of up and down movements accordingly. One can prove that, in the limit, the outcome is a stochastic process called *Brownian motion*, and a path of Brownian motion appears in Figure 7. Visually, this path is very similar to the evolution of asset prices; see Figure 5 again.

Pricing financial derivatives

Let $W = (W_t)_{t \geq 0}$ denote a Brownian motion, where W_t denotes the value of this process at time point t . The second key idea in Bachelier’s thesis was to use Brownian motion in order to model asset prices. In particular, he proposed the following model for the evolution of an asset price denoted by $S = (S_t)_{t \geq 0}$

$$S_t = S_0 + \mu t + \sigma W_t, \quad t \geq 0, \quad (3)$$

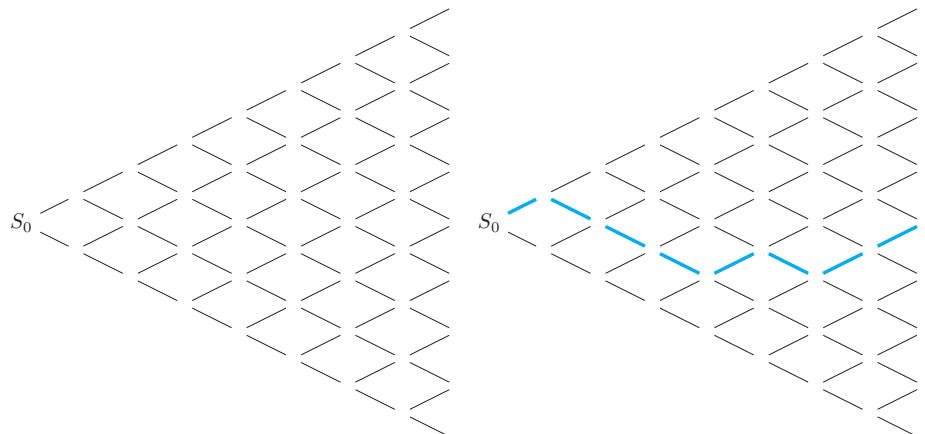


Figure 6 Space of possible outcomes (left) and path of a random walk (right). S_0 denotes the observed price of the financial asset today.

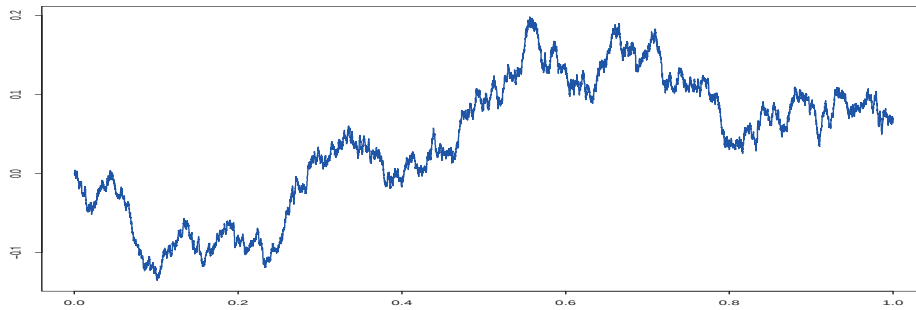


Figure 7 Path of a Brownian motion.

where μ represents some constant trend, σ a positive constant that amplifies the effects of the Brownian motion, while the Brownian motion makes the motion random and rough.

This model was later revisited by the American economist Paul Samuelson in [14], who used the exponential function in order to make sure that asset prices remain positive at all times. The Samuelson model for the evolution of asset prices reads then as follows:

$$S_t = S_0 \cdot \exp(\mu t + \sigma W_t), \quad t \geq 0. \quad (4)$$

The defining moment that led to the widespread use of derivatives in the financial industry came in 1973, when Fischer Black and Myron Scholes in [2] and Robert Merton in [13], published their papers that contained an explicit formula for the price of an option (2) in the Samuelson model (4). More specifically, they showed that the price of an option takes the following form:

Option price:

$$\mathbb{E}_{\mathbb{Q}}(S_T - K)^+ = S_0 \Phi(d_1) - K \Phi(d_2),$$

$$d_{1,2} = \frac{\log\left(\frac{S_0}{K}\right) \pm \frac{\sigma^2}{2} T}{\sigma \sqrt{T}}, \quad (5)$$

where Φ denotes the cumulative distribution function of the standard normal distri-

bution. This formula relates in an explicit manner on the one hand the variables of the option contract, *i.e.* the strike price K and the time of maturity T , and on the other hand the variables of the model for the evolution of asset prices, *i.e.* the initial stock price S_0 and the volatility σ . Moreover, the appearance of the cdf Φ of the standard normal distribution is related to the properties of Brownian motion, that has normally distributed increments.

This formula has become the market standard for the valuation of financial derivatives, and actually the model in (4) is erroneously referred to as the ‘Black–Scholes model’, due to the popularity it received following the publication of the formula (5). Myron Scholes and Robert Merton where honored with *The Sveriges Riksbank Prize in Economic Sciences in Memory of Alfred Nobel 1997* for their “new method to determine the value of derivatives”. Fisher Black had, unfortunately, passed away the year before, and the prize is not awarded posthumously.

Let us finally mention that, in spite of the popularity of this model, the inability of the normal distribution to describe the empirical behavior of asset prices has been the driving force for intensive academic research. Advanced stochastic models, such

as local and stochastic volatility models (e.g., [5, 11]), Lévy processes (e.g., [3, 4, 6, 15]) or rough volatility models (e.g., [7]), that provide a realistic description of asset prices, have attracted the interest of many mathematicians and have led to important advances in the theory of stochastic analysis. Simultaneously, they have been in heavy demand by the financial industry.

Final remarks

The reformulation of the theory of option pricing developed by Black, Scholes and Merton using stochastic integration and martingale theory by Michael Harrison, David Kreps and Stanley Pliska in [8, 9] have turned mathematical finance into an independent scientific field within applied mathematics, with strong interactions with stochastic analysis, statistics, optimization and numerical analysis. Methods developed in all of these fields were utilized to solve problems arising in mathematical finance, while mathematical finance has fed them in return with original, interesting and challenging questions that have led to new research directions. Primary examples of advances motivated by questions in mathematical finance, that showcase its inter- and intra-disciplinary nature, are backward stochastic differential equations (BSDEs) in stochastic analysis (see, e.g., [12]), path-dependent partial differential equations (PDEs) in PDE theory (see, e.g., [16]), and the development of a martingale version of the classical optimal transport problem (see, e.g., [10]).

Acknowledgement

Financial support from the Hellenic Foundation for Research and Innovation Grant No. HFRI-FM17-2152 is gratefully acknowledged.

References

1. L. Bachelier, Théorie de la spéculation, *Annales Scientifiques de l'école Normale Supérieure. Troisième Série* 17 (1900), 21–86.
2. F. Black and M. Scholes, The pricing of options and corporate liabilities, *Journal of Political Economy* 81 (1973), 637–654.
3. P. Carr, H. Geman, D.B. Madan and M. Yor, The fine structure of asset returns: An empirical investigation, *J. Business* 75 (2002), 305–332.
4. R. Cont and P. Tankov, *Financial Modelling with Jump Processes*, Chapman & Hall, 2004.
5. B. Dupire, Pricing with a smile, *Risk* (January 1994), 126–129.
6. Eberlein and J. Kallsen, *Mathematical Finance.*, Springer, 2019.
7. J. Gatheral, T. Jaisson and M. Rosenbaum, Volatility is rough, *Quantitative Finance* 18 (2018), 933–949.
8. J.M. Harrison and S.R. Pliska, Martingales and stochastic integrals in the theory of continuous trading, *Stochastic Process. Appl.* 11 (1981), 215–260.
9. M.J. Harrison and D. Kreps, Martingales and arbitrage in multiperiod securities markets, *J. Econ. Theory* 20 (1979), 381–408.
10. P. Henry-Labordère, *Model-free Hedging: A Martingale Optimal Transport Viewpoint*, CRC Press, 2017.
11. S.L. Heston, A closed-form solution for op-
12. N.E. Karoui, S. Peng and M.C. Quenez, Backward stochastic differential equations in finance, *Math. Finance* 7 (1997), 1–71.
13. R.C. Merton, Theory of rational option pricing, *Bell Journal of Economics and Management Science* 4 (1973), 141–183.
14. P.A. Samuelson, *Foundations of Economic Analysis*, Harvard University Press, 1947.
15. W. Schoutens, *Lévy Processes in Finance*, Wiley, 2003.
16. J. Zhang, *Path Dependent PDEs*, Springer, 2017.

Johan BronsSLO, Amersfoort
j.brons@slo.nl**Betty Vermeulen**CSG De Heemgaard, Apeldoorn
bettyvermeulen@live.nl**Rogier Bos**Freudenthal Instituut, Universiteit Utrecht
r.d.bos@uu.nl

Onderwijs

Nieuwe examenprogramma's wiskunde in de maak voor havo en vwo

De Vakvernieuwingscommissie wiskunde havo en vwo werkt aan nieuwe examenprogramma's wiskunde die beter aansluiten bij de profielen in havo en vwo. In dit artikel beschrijven drie leden van de commissie de thema's en keuzes in deze vernieuwingsslag.

We vinden het belangrijk dat de examenprogramma's wiskunde havo en vwo actuele inhoud en aansluiten bij recente onderwijskundige inzichten, bijvoorbeeld over het inzetten van probleemaanpak en modelleren. Daarnaast is een betere doorstroom tussen schoolsoorten belangrijk. Als vakvernieuwingscommissie houden we oude en nieuwe wensen voor het vak wiskunde tegen het licht bij het ontwerpen van wiskundevakken die specifiek aansluiten op de verschillende profielen van havo en vwo.

Nieuwe vakkenstructuur

De huidige vakkenstructuur wiskunde op havo en vwo levert een aantal nadelen op voor leerlingen en leraren. In opdracht van het ministerie van OCW heeft een werkgroep—bestaande uit leraren en vakdidactici wiskunde uit diverse onderwijssectoren—in maart 2022 een advies uitgebracht voor een vernieuwde vakkenstructuur wiskunde havo en vwo. Deze vernieuwde structuur vormt het uitgangspunt voor ons als vakvernieuwingscommissie. Dit betekent dat wiskunde A, B en C in de geactualiseerde examenprogramma's plaatsmaken voor nieuwe vakken met nieuwe namen. Uitgangspunt van de vernieuwing is dat elk profiel een eigen

verplicht wiskundevak krijgt. Bij cultuur en maatschappij (C&M) hoort *wiskunde maatschappij*, economie en maatschappij (E&M) krijgt *wiskunde maatschappij+*. Daarnaast krijgt het profiel natuur en gezondheid (N&G) *wiskunde natuur*, en natuur en techniek (N&T) tot slot *wiskunde natuur+*.

De namen maken al duidelijk dat er een gedeelde basis is voor de twee M-profielen en voor de twee N-profielen, met uitbreidingen voor E&M en N&T. Figuur 1 laat zien hoe de geplande omvang van de nieuwe vakken zich verhoudt tot de huidige situatie. Voor havo-leerlingen met een C&M-profiel is er winst: zij hebben straks weer wiskunde. Vwo-leerlingen met een E&M- of een N&G-profiel krijgen straks een minder groot wiskundevak, maar dat vak is wel beter dan nu toegesneden op hun profiel. Een uitdaging is om bij *wiskunde natuur* voldoende rekening te houden met de voorbereiding op technische en bètastudies voor N&T-leerlingen en het tegelijkertijd haalbaar te houden voor de leerlingen met een N&G-profiel. Het plusdeel van *wiskunde natuur+* is namelijk relatief klein en biedt dus slechts beperkt ruimte voor verdiepende wiskunde. Overigens ontbreekt wiskunde D nu nog in het schema. In een later stadium zal de vakvernieuwingscom-

missie adviseren over wat de nieuwe wiskundevakken betekenen voor de inhoud van wiskunde D.

Passend bij profiel

Het uitgangspunt van de vakvernieuwingscommissie is om een zo goed mogelijke match te maken tussen profiel en bijbehorend verplicht wiskundevak. De inhoud moet, zoals gezegd, relevant en passend zijn voor alle leerlingen met een bepaald profiel, ongeacht de vervolgopleiding die zij gaan doen. Door de relevantie per profiel scherp in de gaten te houden, zullen leerlingen naar verwachting beter het nut van wiskunde inzien en ervaren dat ze het kunnen gebruiken om bepaalde problemen op te lossen. Concreet stellen we voor:

- *Wiskunde maatschappij* rust leerlingen toe met de wiskundige kennis die nodig is om in de maatschappij hun weg te kunnen vinden. Ze begrijpen grafieken en cijfers in de media en weten iets af van de impact van big data op werk en maatschappij. Het vak moet verder gaan dan de wiskunde die leerlingen in de onderbouw hebben gehad, maar hoeft met algebra niet de diepte in. Het oplossen van gecompliceerde algebraïsche vergelijkingen is voor taalkunde of geschiedkunde niet relevant, laat staan dat ze dat in de samenleving als burger nodig hebben.

havo



vwo



Figuur 1 De nieuwe vakkenstructuur van *wiskunde maatschappij*, *wiskunde maatschappij+*, *wiskunde natuur* en *wiskunde natuur+* op havo en vwo.

- *Wiskunde maatschappij+* biedt leerlingen daarbovenop vaardigheid en conceptueel inzicht in statistiek, bijvoorbeeld over steekproeftechnieken en kansverdelingen, en in analyse, bijvoorbeeld over veranderingen en optimaliseringsproblemen. Deze leerlingen zullen wiskundige kennis vaker toepassen, in de andere profielvakken en in hun latere opleiding en werk. Denk aan het maken van modellen en statistische analyses. Leerlingen werken bijvoorbeeld met verschillende modellen van lineaire en exponentiële groei.
- *Wiskunde natuur* biedt leerlingen een gedegen basis in analyse met een verdieping in differentiaal- en integraalrekening. Anders dan in het huidige wiskunde B is er tijd ingeruimd voor kansrekening en statistiek. Afgelopen jaren is het besef doorgedrongen dat bij bètawetenschappen statistiek evengoed een grote rol speelt, niet alleen in de sociale wetenschappen. Bovendien hebben de bèta's hun statistische geletterdheid even hard nodig in de maatschappij als de alfa's en gamma's.

- *Wiskunde natuur+* tot slot biedt N&T-leerlingen daarbovenop meetkunde en verdiepende algebra. Ons voorstel is dat dit straks het enige wiskundevak wordt met meetkunde. Dat is deels een pragmatische keuze, om versnippering tegen te gaan, maar ook vanuit de gedachte dat meetkunde vooral van belang is voor de toekomstige ingenieurs.

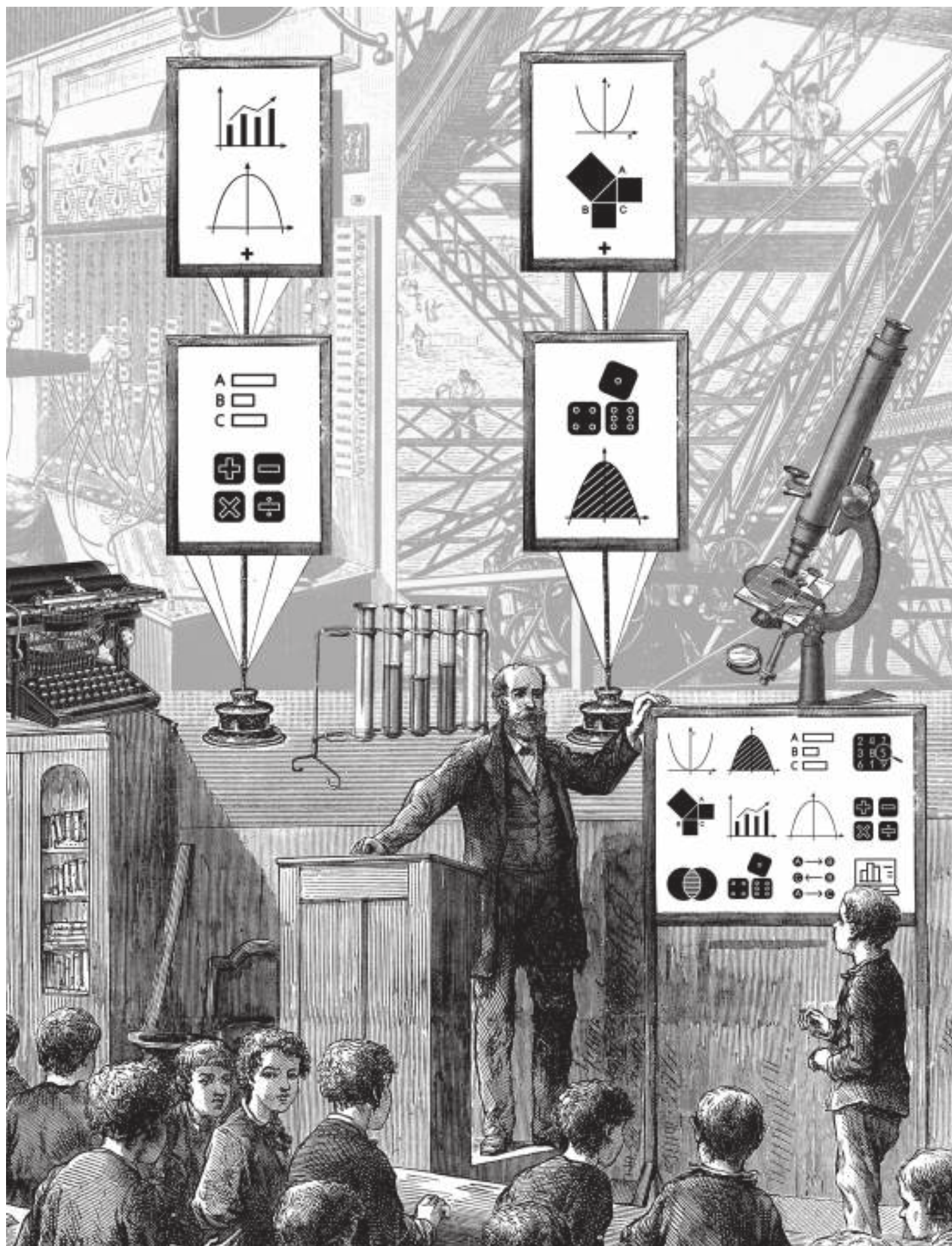
Samenhang en ICT

Naast wiskundevakken die beter passen bij de profielen op havo en vwo heeft de vakvernieuwingscommissie de opdracht om te zorgen voor samenhang met andere vakken en rekening te houden met thema's als digitale geletterdheid en de rol van ICT en computationeel denken.

Samenhang wordt allereerst zichtbaar als alle vakken zoveel mogelijk dezelfde begrippen gebruiken. Bij economie komen vaak wiskundige modellen langs, maar in net andere termen. Door meer verbinding tussen vakken voorkomen we onnodige verwarring bij leerlingen en leraren. Daarnaast is het belangrijk dat leerlingen zien

dat ze wiskundig inzicht en vaardigheden in andere vakken nodig hebben en dat ze omgekeerd in de wiskunde contexten uit andere vakken tegenkomen, die daar een wiskundige verdieping krijgen. In de vakken natuurkunde en wiskunde willen we bijvoorbeeld het redeneren met en over formules bevorderen. Om die samenhang te bewerkstelligen werken we nauw samen met de vakvernieuwingscommissies van andere vakken.

De vraag is welke kansen ICT biedt voor het wiskundeonderwijs, bijvoorbeeld met software als GeoGebra, Tinkerplots of Coach. En in welke mate we hier met de beschrijving van het curriculum op in kunnen spelen. Hoe zetten we ICT zo in dat het prestaties en inzicht vergroot en niet in de weg zit? Het kunnen omgaan met grote hoeveelheden data wordt in de samenleving steeds noodzakelijker. ICT is daarbij onmisbaar. Een vraag waar we ons als vernieuwingscommissie over buigen is of het aanleren van die vaardigheden thuishoren in de wiskunde of (deels) in andere vakken. Het antwoord zal volgens ons per profiel verschillen. De ene groep



Vakvernieuwingscommissie aan het werk

De vakvernieuwingscommissie bestaat uit leraren, vak- en curriculumexperts. Ze wordt bijgestaan door een advieskring met onder meer vertegenwoordigers van verenigingen als NVvW en het KWG, vervolgoopleidingen, Cito en CvTE. De leden van de advieskring raadplegen hun achterban zodat iedereen gedurende het proces mee kan praten. Dit komt de kwaliteit van de examenprogramma's en het draagvlak daarvoor ten goede. In december 2023 is een conceptversie van de examenprogramma's gedeeld met de advieskring voor raadpleging van hun achterban. In de zomer van 2024 levert de commissie conceptexamenprogramma's op. Daarna volgen fasen van beproeven, het ontwikkelen van examensyllabi en handreikingen, politieke besluitvorming en ten slotte implementatie.

Meer informatie over de actualisatie van de examenprogramma's wiskunde havo en vwo is te vinden op: www.actualisatie-examenprogrammas.nl/wiskunde.

Leerlingen kan berekeningen overlaten aan de computer, de andere groep moet zelf een standaarddeviatie kunnen uitrekenen, dan wel de uitkomsten van de computer kunnen controleren.

Wiskundig denken

Wiskundeonderwijs beperkt zich niet tot het maken van gestandaardiseerde vraagstukken, maar beoogt leerlingen juist aan te zetten tot diep nadenken, experimenteren, onderzoeken, puzzelen en argumenteren.

Eerdere vakvernieuwingen leidden tot meer aandacht voor onder andere modelleren en algebraïseren, ordenen en structureren, analytisch denken en probleemoplossen, formules manipuleren, abstraheren, logisch redeneren en bewijzen. Maar in de dagelijkse lespraktijk komen deze nog onvoldoende uit de verf. Daarom werken we aan preciezer geformuleerde eindtermen die duidelijk maken wat we op dit gebied van leerlingen verwachten. Het gaat bijvoorbeeld om een cluster van eindtermen rondom het thema modelleren

en onderzoeken. Deze eindtermen richten zich op verschillende aspecten van de modelleercyclus zoals het begrijpen hoe een model aansluit bij probleemsituaties, welke aannames ten grondslag liggen aan een model en het testen van hypothesen met gebruik van onderzoeksgegevens. Denk bijvoorbeeld aan economische modellen over marktaandeel of (studie)schuldontwikkeling, en demografische modellen rondom vergrijzing en zorgvraag. In elk wiskundevak maken deze activiteiten een belangrijk deel van het programma uit. Alle leerlingen maken dus kennis met modelleren, wiskundig redeneren en probleemoplossen, per profiel aangepast aan de wiskundige concepten die daarbij passen.

Nieuwe conceptexamenprogramma's

We leveren in het voorjaar ook een voorstel op over welke onderdelen zich het beste lenen voor het centraal eindexamen (CE) en wat beter past in schoolexamens. Het ligt voor de hand om meer verdiepende en beschouwende denkactiviteiten in het schoolexamen te stoppen, maar we willen ook zorgen dat schoolexamens ondersteunend zijn voor het CE. Bovendien is een vrees van het veld dat er in het CE helemaal geen wiskundig denken meer zit. Daar waken we uiteraard voor.

Tot slot, vakvernieuwing is bedoeld om het de wiskunde nog beter te kunnen overdragen aan leerlingen. Dat doen we door goede examenprogramma's te ontwikkelen die aansluiten bij wat leerlingen van nu nodig hebben. We hopen dat ons werk net zo goed uitpakt als de vernieuwing die Simon Stevin ruim vierhonderd jaar geleden bewerkstelligde, door het Latijn van kamergeleerden te vervangen door heldere, vaak nieuwe, Nederlands woorden. Hij was hierin zo succesvol, dat zijn naam prijkt op de titelpagina van de *Nederlandt-schen Woorden-schat* (1654), naast die van Joost van den Vondel, P.C. Hooft en Hugo de Groot.

Aansluiting bij vmbo

Het vmbo ging havo en vwo voor met de vernieuwing. In november 2022 zijn de conceptexamenprogramma's wiskunde vmbo gepresenteerd. In het voorstel van de vakvernieuwingscommissie gaat het om twee vakken (wiskunde 1 en wiskunde 1,2) met elk drie varianten passend bij de verschillende leerwegen in het vmbo. Bij wiskunde 1 ligt de focus op het bieden van een basis om te functioneren in de maatschappij. Wiskunde 1,2 richt zich meer op analytisch leren denken en bereidt daarmee voor op vervolgoopleidingen in het mbo en voor de havo. De zes programma's worden in 2024 beproefd in scholen. Een belangrijk doel van de vernieuwing is een betere aansluiting tussen vmbo en mbo en havo. Dit is ook een opdracht voor de vakvernieuwingscommissie voor havo en vwo. Wiskunde 1,2 lost het hiaat in algebra tussen vmbo en havo op. En daar houdt de commissie bij de wiskundevakken voor havo rekening mee.

Meer informatie over de vernieuwing in vmbo is te vinden op <https://www.slo.nl/geactualiseerde-conceptexamenprogrammas>.

Robbert Fokkink

Delft Institute of Applied Mathematics
TU Delft
r.j.fokkink@tudelft.nl

Stoffelijke resten tastbare herinneringen aan wiskundigen

De lijn van Leibniz



Foto: Google Maps

Het stadspaleis van Van Oldenbarnevelt heeft nog steeds de oorspronkelijke gevel.

Midden in het centrum van Hollands politieke macht staat het stadspaleis van Johan van Oldenbarnevelt. Hier werd Sophie van de Palts geboren. Haar vader was de winterkoning, een stuntel die na zes maanden keizer-schap in Praag de benen moest nemen naar Den Haag. De hele bedoening van lakeien en hofdames kwam terecht op de Kneuterdijk, waar de winterkonin-gin zich wijdde aan de voortplanting. In tien jaar tijd bracht ze negen kin-deren ter wereld (chapeau!) met Sop-hie als jongste dochter, een prinsesje driehoog achter. Ze werd gedoopt in de Kloosterkerk, net om de hoek, en groeide uit tot de meest prominente protestant van het Engelse koninklijk huis.



Foto: Wikipedia.org

Sophie van de Palts op een portret van Peter Lely. Een van zijn weinige werken zonder décolleté.

Zeventig jaar later arriveert een koets bij Paleis het Loo, waar Sophie, in-middels opgeklommen tot keurvorstin van Hannover, komt praten met neef Willem III over diens opvolging als koning van Engeland. De beoogde kandidaat, de Duke of Gloucester, was een paar weken eerder overleden aan een keelontsteking. Daardoor kwam Sophies oudste zoon Georg in beeld, maar er waren kapers op de kust. De Anglicaanse kerk had liever een andere kandidaat en de Tories hadden sterke bedenkingen. Sophies pleidooi slaagt. Een half jaar later loodst Willem de Act of Settlement door het Lagerhuis en beklinkt daarmee het koningschap voor Georg.



Foto: Wikipedia.org

Paleis het Loo was oorspronkelijk een jachtslot. De vier vleugels werden er aangebouwd door Willem III.

Als laatste dochter van een uitgerangeerde edelman moest Sophie onderaan beginnen. Ze trouwde met Ernst August, een van de talloze leden van het Duitse huis Welf. Geen vorstelijke familie, maar wel steenrijk vanwege de zilvermijnen in de Harz en het uitgekiend uitknippen van onderdanen. Eigenlijk zou Sophie trouwen met Georg Wilhelm, de hertog, maar die zag dat op het laatste moment niet zitten en schoof haar door naar zijn broertje, de baron. Hij kreeg er wat bezit en titels bij, als goedmakertje. Het jonge stel ging wonen op een abdij bij Osnabrück.



Foto: Wikipedia.org

De abdij van Bad Iburg. Dit knusse kasteeltje was de starterswoning van Georg en Sophie in afwachting van het te bouwen Slot Osnabrück. Tegenwoordig herbergt het een rechtbank, een concertzaal, de dienst ruimtelijke ordening van het gewest Emsland en een museum.

Vanwege het kinderloos overlijden van enkele broers kwam Ernst August bovendien als hertog in Hannover, waar Leibniz werkte als curator van de bibliotheek. De Welfen hadden hem ingehuurd voor stamboomonderzoek om hun adellijke stand op te krikken, maar daar kwam het maar niet van. In plaats van gewoon zijn werk te doen hield Leibniz zich bezig met de ontwikkeling van de calculus, de opzet van het eerste wetenschappelijke tijdschrift ter wereld, de mechanisatie van de mijnbouw in de Harz, de verfijning van zijn rekenmachine, het ontstaan van de aarde, de juiste formulering van de propositiologica, en meer van dat soort kwezelarijen. Als hij zich aan het hof liet zien, dan was dat om te klagen over zijn salaris, maar dat veranderde toen Sophie er kwam wonen. Zij was opgeleid in Leiden, was bekend met het werk van Descartes en Spinoza, en ontwikkelde een sterke vriendschapsband met Leibniz. Met veel geduld kreeg ze hem eindelijk zover om dat te doen waarvoor hij betaald werd.



De VVV van Bad Iburg projecteert animaties op een muurtje in de winkelstraat. Hier Leibniz met Charlotte, de dochter van Sophie, in de tuin van Charlottenburg.



Het Leibnizhuis, de dienstwoning van Leibniz in Hannover, doet tegenwoordig dienst als conferentiecentrum en gastenverblijf van de universiteit.

Foto: Leibniz Universität Hannover

In oktober 1687, meer dan tien jaar na zijn komst naar Hannover, vertrekt Leibniz voor een reis van een paar maanden langs enkele historische adellijke archieven. Hij trekt kriskras door Duitsland en ontmoet allerlei bevriende alchemisten, theologen en rechtsgeleerden, inspecteert mijnen om de nieuwste technieken op te doen, en wijst in Frankfurt een huwelijksaanzoek af. Hier en daar rust hij wat uit. In het geriefelijke Slot Rheinfels, tegenwoordig een luxe wellness hotel, bediscussieert hij de hereniging van de kerk met de lokale landgraaf.



Foto: Wikipedia.org

Burcht Hotel Rheinfels in Sankt Goar is *hervorragend* volgens expedia.com.

Begin april, bijna een half jaar later dan gepland, arriveert Leibniz in München om de *Annales Ducum Boiariae* te lezen. Een kroniek van de Beierse geschiedschrijver Aventinus, waarin alle Duitse geslachten waren gecategoriseerd. Dit was het voornaamste doel van de reis, want vanwege deze tekst waren de Welfen adellijk laag ingedeeld. Aventinus blijkt zijn geschiedschrijving van het huis Welf te hebben gekopieerd van de *Historia de Guelfis principibus*, die is te vinden in een klooster in Augsburg. Een dagreis van München. Daar leest Leibniz dat de Welfen afstammen van de marktgraven van Este, hoge adel, en niet de markiezen van Asti, lage adel. Aventinus had zich verschreven. Missie geslaagd zou je zeggen, maar Leibniz heeft de smaak van het reizen te pakken gekregen en wil nu eerst naar het Este-archief in Modena om alles goed uit te pluizen. Misschien komt dat ook omdat Ernst August, een verzotte operafanaat, zijn afwezigheid had gebruikt om de bibliotheek te laten verbouwen tot een operaal.



De operaal van Ernst August in het Leineschloss is tegenwoordig de vergaderzaal van de landsdag van Nedersaksen. Hannover, dat totaal plat was gebombardeerd, werd een voorbeeld van moderne stadsontwikkeling. Het Leibnizhuis en het Leineschloss zijn gerestaureerd maar de oorspronkelijke binnenstad is verdwenen.

Foto: Wikipedia.org

Europa staat in brand. De grote Turkse oorlog woedt, Willem III is bezig met zijn invasie van Engeland en de negenjarige oorlog komt eraan. Nu hij toch in de buurt is, gaat Leibniz naar Wenen om bij keizer Leopold aan te dringen op een Europese standaardmunt en de hereniging van de kerk. Twee van zijn stokpaardjes. Ook heeft hij ideeën voor een algemene ziektekostenverzekering, de straatverlichting van Wenen en goudwinning in Bohemen. In afwachting van een audiëntie doodt hij de tijd met verhandelingen over hemelmechanica. De *Principia* is verschenen en Leibniz zet daar zijn eigen berekening van de planeetbeweging tegenover, gebaseerd op een roterende vloeistof. Na maandenlang wachten mag hij eindelijk naar de keizer, die geen boodschap heeft aan zijn pacifistische geleuter.

We zitten midden in de kleine ijstijd, de winters zijn extreem koud en Leibniz wordt ziek. Na een maand in bed te hebben gelegen vertrekt hij in februari 1689 op weg naar Modena, maar de toestemming om het Este archief te raadplegen blijft uit. Gelukkig zijn er nog zoveel andere leuke dingen te doen in Italië. De reis gaat langs Venetië, Napels, Rome, Florence en Bologna. Vooral in Rome, waar een nieuwe paus wordt beëdigd die de wetenschap omarmt, blijft hij lang hangen. De stad zindert van intellectuele activiteit. Hij schrijft er zijn *Dynamica* naar aanleiding van discussies op de Academia Fisco-Matematica. Ook maakt hij kennis met het Confucianisme, waarin hij ideeën herkent die passen bij zijn theorie van monaden, de bouwstenen van alles.

Pas op 28 december komt hij dan eindelijk aan in Modena, waar hij zich vijf weken lang opsluit in de bibliotheek. Hij leest er zoveel historische documenten dat zijn ogen, die al heel slecht waren, er nog verder op achteruit gaan. Daarna vertrekt hij naar het klooster Vangadizza, waar alle Estes zijn begraven. Voor het klooster staat het praalgraf van Azzo II, de stamvader van de Estes, en zijn vrouw Kunigunde, een Welf. Dit is het moment waarop Leibniz besluit dat hij het definitieve bewijs heeft gevonden. Hij schrijft een triomfantelijke brief naar Hannover om te melden dat de Welfen van het allerhoogste alloo zijn. Ze stammen rechtstreeks af van Karel de Grote, net zoals wij allemaal overigens. Het is tijd om naar huis te gaan.

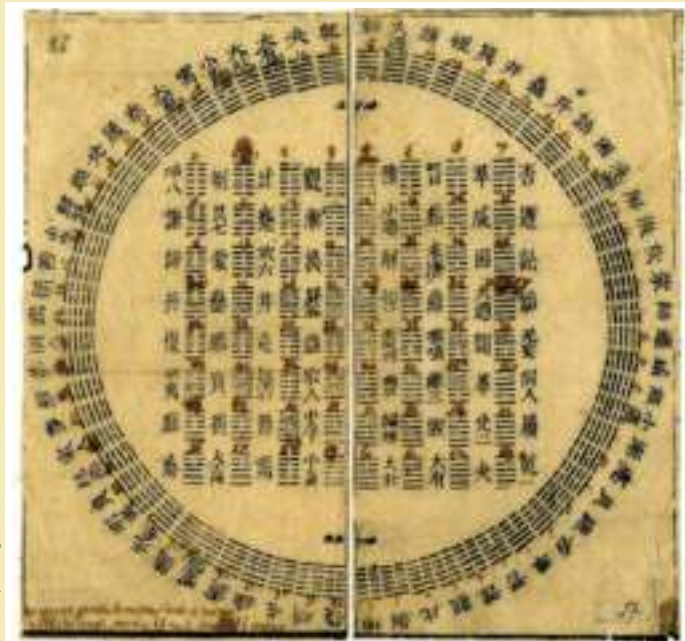


Foto: Wikipedia.org

De vierenzestig hexagrammen uit het klassieke Chinese orakelboek *I Tjing*. Perkament gestuurd aan Leibniz vanuit Beijing door de Jezuïet Joachim Bouvet, die er de binaire representatie in herkende: doorgetrokken lijnen zijn enen, gebroken lijnen zijn nullen. Bouvet heeft de hexagrammen op binaire volgorde gezet, afwijkend van de volgorde in de *I Tjing*.



In haar prijswinnende biografie over Leibniz schrijft Rosa Antognazza (King's College Londen) dat Leibniz de tombe van Kunigunde identificeerde aan de hand van een grafop-schrift. In september 2023, ruim 333 jaar na Leibniz, ben ik er gaan kijken. Geen grafop-schrift te zien. Voor de abdij van Vangadizza staan twee kisten, eentje van Azzo en eentje van zijn vrouw. Maar welke dan? Azzo werd honderd en is meermalen getrouwd geweest. Hoe vaak precies is onbekend.

In Hannover heeft Leibniz nogal wat moeite om zijn reisdeclaratie te verantwoorden. Maar liefst 2300 daalders, vandaag de dag een slordige tweehonderdduizend euro's. De hertog eist boter bij de vis. Die familiechroniek met koninklijke stamboom moet er snel komen. Leibniz maakt alvast een uittreksel *Brevis synopsis historiae Guelphicae* dat een belangrijke rol speelt bij de bevordering van de hertog tot keurvorst in maart 1692. De Welfen krijgen wat ze willen en zelfs nog meer, als het koningschap van Engeland hen tien jaar later in de schoot valt.



De abdij van Vangadizza was een van de grootste van Italië. De nieuwe paus die net werd beëdigd toen Leibniz in Rome was, was de abt van Vangadizza. De abdij stamt uit de tiende eeuw en stond er dus nog niet zo lang toen Azzo overleed in 1097. In de abdij vond Leibniz een document dat volgens hem cruciaal bewijs was voor de connectie van de Welfen met de Estes. Hij hield dat document geheim en nam het niet op in de familiechroniek. Pas enkele jaren geleden achterhaalde de historicus Sven Erdner (Universiteit Hannover) welk document dat precies was.

Ondertussen slaat bij Leibniz de twijfel toe. Waren de Welfen wel van de alerhoogste adel? Alle mannelijke Estes heten Azzo, wie was nou precies wie? Het is een bekend probleem met leden van koningshuizen, die daarom vaak worden genummerd, net als stamboekvee. Of ze krijgen een bijnaam. Een bochel heeft zo zijn voordelen. In officiële documenten bleven deze nummers of uiterlijkheden onvermeld, en zo verstrikt Leibniz in een woud van wel twintig Azzo's. Hij raakt langzamerhand bezeten van de stamboom, al doet hij natuurlijk nog wel van alles. Hij organiseert de bibliotheek van Wolfenbüttel, ook vandaag de dag nog een van de belangrijkste van Europa, start de Berlijnse en Weense Academie en stort zich op de Sinologie. Pas in 1715, vlak voor zijn dood, verschijnt het driedelige kloek werk over de Welfen met duizenden dichtbeschreven pagina's. Op gezag van Leibniz wordt het huis uitgeroepen tot een van de nobelste van Europa, al was hij zelf misschien niet zo zeker van zijn zaak.

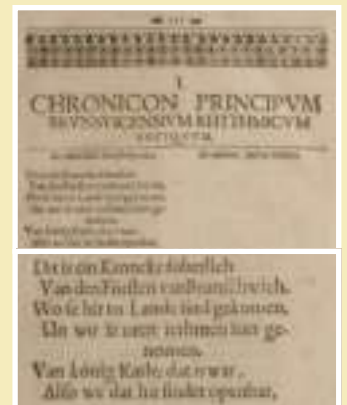


Foto: Hertog August Bibliothek Wolfenbüttel

Het derde deel van de *Scriptores rerum Brunsvicensium* begint met een rijkroniek in het Nedersaksisch. Leibniz had een grandioos werk voor ogen, dat terugging tot de oudheid, maar hij kwam niet verder dan een periode van 250 jaar.

Waarom was het zo belangrijk dat de Welfen diepgeworteld waren? Hun voorgangers waren dat zeker niet. De Stuarts waren kamerheren (stewards, hun vrouwen stewardessen) net als de Tudors. De Habsburgers waren roofridders. Dat hele gedoe met die stamboom was onnodige moeilijkdoenerij, maar dat heb je wel meer met bevorderingen. Mensen die voor een UHD commissie zijn verschenen, weten er alles van. Uiteindelijk liep het dus goed af voor de Welfen, die tegenwoordig de Windsors heten. Ze behoren al heel lang tot de rijkste families ter wereld. De kleine investering in hun bibliothecaris heeft zich dubbel en dwars uitbetaald. Leibniz verging het minder. Veertig jaar na zijn dood werd hij onsterfelijk belachelijk gemaakt door de Franse satiricus Voltaire. Zijn reputatie is die klap nooit meer te boven gekomen.

Wil Schilders

*Mathematics and Computer Science
Eindhoven University of Technology
w.h.a.schilders@tue.nl*

Valedictory Lecture

Mission possible – mathematics

On 23 June 2023, Wil Schilders, professor of Scientific Computing for Industry at Eindhoven University of Technology, delivered his valedictory lecture. In his lecture, he looked back on his academic and industrial career, and especially his mission to promote mathematics as a discipline that has invisible contributions to visible successes, particularly concerning societal and industrial challenges. Mathematics is everywhere, but often one only sees the tip of the mathematical iceberg. Looking forward, with the emergence of high performance computing, data science and artificial intelligence, these are exciting times for mathematicians, necessitating the development of entirely new methods and preparing a rapidly growing population of talented young students and researchers to work on the challenges of our times. The world is becoming extremely complex; mastering this complexity can only be done with the help of mathematicians in close collaboration with colleagues from other sciences. The aforementioned mission is absolutely possible, and the lecture discussed various ways on how to achieve it.

Almost precisely twenty years ago, I gave my inaugural speech in the same room. At that time in Dutch, with the title ‘De wiskundige leest in bedrijf’. The title had a double meaning. Interpreting the word ‘leest’ as a verb, it means that a mathematician reads what is happening in industry, and acts to see whether there are interesting topics of research. Interpreting ‘leest’ as a noun, it means a shoemaker’s tool, and we have a saying in Dutch that, when translated, reads: shoemaker, stick to your last. In other words: stick to what you have been trained for. Between the lines it was also an advice to researchers and engineers in other scientific disciplines: leave the mathematics to the mathematicians, they are the experts, know about the latest developments, have a particular way of thinking that helps in solving complex problems. I became very much convinced

about this attitude when working in industry, from 1980 till 2010. Often, you see ad hoc solutions being used, whereas a deeper insight into the cause of the problems should be the first priority. Only when we understand the real cause, we can start to think about solutions. Often, I compare this way of working with that of a doctor. Suppose someone with headaches every day goes to a doctor. One doctor would

say: “Take this pill every day, and the headaches will disappear (for the day).” Another doctor could say: “Please sit down and let’s analyse your current situation”, eventually leading to a sound diagnosis and a correct treatment.

Since the introductory lecture in October 2003, a lot has happened. I left industry in 2010, and was fortunate to build a large network of academic and industrial colleagues from all over the world. Gradually, the mission of promoting the use of mathematics for complex challenges was shaping, owing to my position at this great university in the vicinity of the booming industrial area Brainport as well as via the position within the newly created Dutch Platform for Mathematics and positions in ECMI, EU-MATHS-IN and ICIAM. Initially, it looked like a mission impossible, referring to the great series that we watched in the sixties and early seventies, with Peter Graves starring as Jim Phelps, director of the Impossible Missions Force.





Wil Schilders

Martijn Anthonissen

for a better world

Despite the title of the series, the mission thought to be impossible always turned out to be possible due to smart and intelligent acting. In my opinion, the same is true for the mission of using mathematics to address the complex challenges of our times, in industry, society and other sciences. Clearly, this should be teamwork, with colleagues from other disciplines who know the context and the backgrounds of the challenges. In this way, together we can create a better world with the use of mathematics. This is what I would like to discuss in this valedictory lecture, telling you about my experiences, findings over the years and my view on the future of our mission.

The value of mathematics

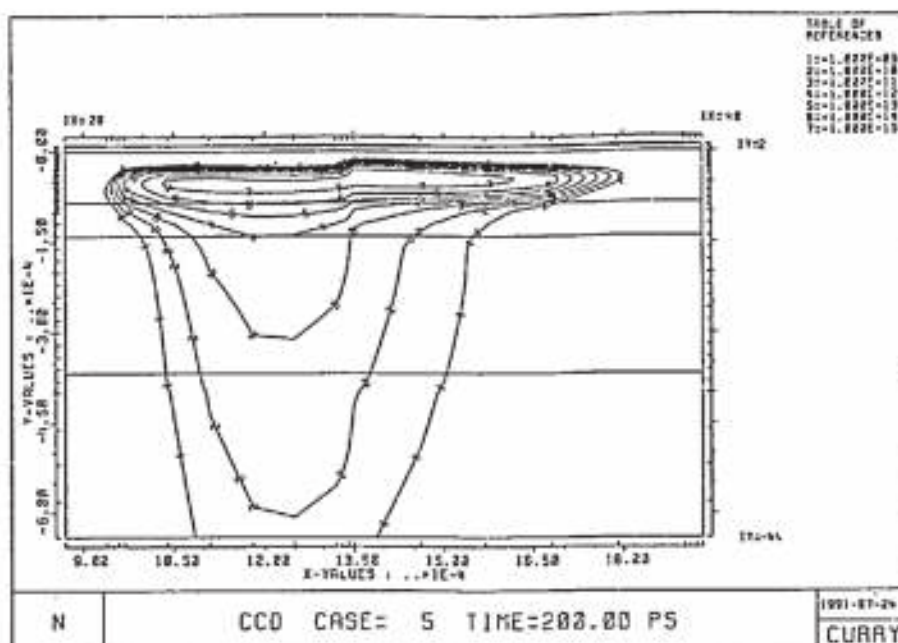
When I started to work at Philips Research in 1980, times were much different from this day and age. Software packages as we know them now, able to perform simulations for a wide variety of different structures and designs, did not exist. Instead, for semiconductor device simulation, engineers had made separate software for one-dimensional diodes and one-dimensional transistors. The Mathematical Software Group set out to change this situation, and produce software that could cope with arbitrary semiconductor devices in two dimensions. Engineers at Philips Research thought we were out of our minds, this was absolutely a mission impossible

according to them. But we did it, by developing robust and efficient mathematical methods that could cope with a wide variety of devices. The mission was accomplished within a few years and entirely due to the sound mathematical methods.

It was the time when software packages started to be developed in more places, mostly within industry and for a variety of problems: electromagnetic, mechanical, electronic circuits. This development put a high demand on the available mathematics, and new mathematical methods need-

ed to be developed so as to cope with the high demands of these software products. More and more, designing was done behind a computer screen rather than by building prototypes and testing these. It led to the emergence of the so-called third discipline, 'simulation', besides the traditional disciplines 'experiment' and 'theory'.

All of this is made possible by virtue of a so-called mathematical model of the underlying problem, describing its behaviour in detail, often by means of a rather complicated set of differential equations. Clearly,





such models are made in very close collaboration with scientists that know the details of the underlying problem. Once the mathematical model is known, numerical methods can be developed that will simulate the model accurately. This requires bright mathematical minds, and especially the semiconductor device problem caused quite a few headaches before a suitable set of algorithms had been developed. We did this in close collaboration with companies like IBM and AT&T Bell Labs, as well as with Stanford University.

The developments regarding simulations have accelerated since the 1980s, and nowadays a lot of software is available to perform simulations in many domains of science and industry. Designing is done behind a screen, with the aid of virtual design environments. Mathematics plays a crucial role within this evolving area of Computational Science and Engineering, and nowadays mathematical methods are indispensable in the areas of Digital

Twinning, Artificial Intelligence, Energy Transition, High Performance Computing, Biomedicine and many more. Lex Schrijver, esteemed colleague from the Centre of Mathematics and Computer Science in Amsterdam, formulated it once in a very nice way:

“Mathematics is like oxygen. You take no notice of it when it’s there — if it wasn’t, you’d realize you cannot do without it.”

Often, people do not realize how much of the mathematics needed to solve a problem or address a challenge is under the surface. For this reason, I often use the terminology of ‘mathematical iceberg’.

Indeed, often the mathematics is invisible, as it is hidden deep in the software package. The success usually comes from applications of the software, i.e. novel designs. Within Philips, engineers were able to design entirely new devices, such as CCD devices for digital cameras, and ana-

lyse their behaviour thoroughly using the software containing the robust, fast and efficient mathematical machinery. So the statement is justified that *mathematics provides an invisible contribution to visible success*.

A really great example, showing the power of sound mathematics, is the analysis of disc brake squeal by my very valued colleague Volker Mehrmann from TU Berlin. Disc brake squeal is a frequent and annoying phenomenon, and the automotive industry has been trying for decades to reduce squeal by changing the design of the brake and the disc. In 2015, detailed mathematical analysis revealed bifurcations because the designs contained highly stiff springs used to avoid rigid connections. The negative effects of this design technique came as a surprise to the industrial partners! All car manufacturers are extremely interested in the results. Clearly, these hidden properties of the underlying system can only be revealed by mathematicians, it is their specialty!

But there is much more to tell about invisible contributions of mathematics. Everyone knows Moore’s Law, which for more than 50 years predicted that every 18 months the speed and density of transistors is doubled. Translated into practical terms it means that our computers have become much faster all the time. Many people then draw the conclusion that the impressive simulations that we see nowadays are entirely due to the greatly improved power of computers. However, this is only half the truth. The mathematics that is hidden in the software packages enabling the simulations is outperforming the hardware improvements, often in a consid-



Mathematical method	Period (years)	Improvement hardware	Improvement mathware
Solving large linear systems	35	10.000.000	10.000.000
Linear programming	16	1600	3300
Mixed integer programming	25	6500	870.000
Particle simulations	40	100.000.000	1.000.000.000

erable way. See the table above, where we summarize the improvements for a number of mathematical methods.

The difference is most pronounced in the case of mixed integer programming: if we would rely only on the performance improvements of computers, simulations that would cost an estimated 180 years

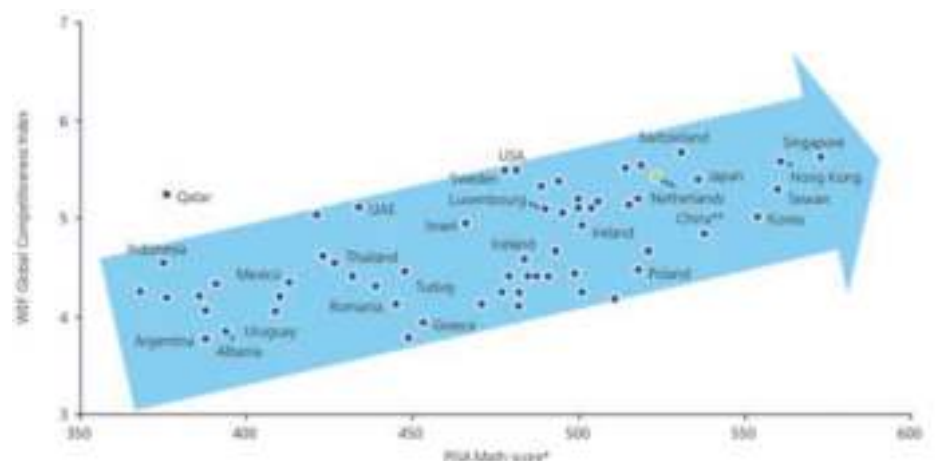
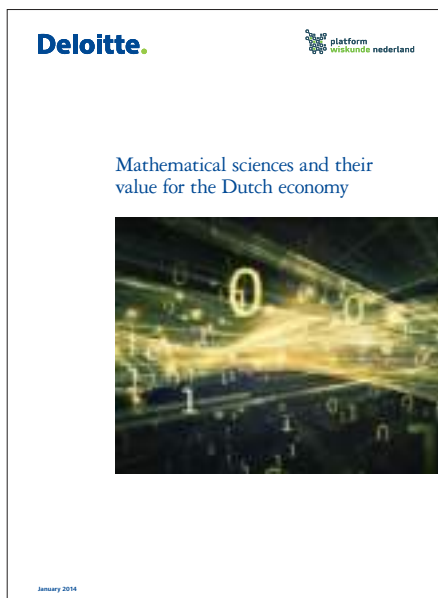
25 years ago, now require 10 days. But if we take the improvements in the mathematical methods also into account, then a simulation is reduced to 1 second. Philippe Toint, emeritus professor in numerical optimisation at Namur University, once said: “I would rather use today’s algorithms on yesterday’s computers than vice versa.” Clearly, if we would only rely on improvements in hardware, we would now be doing the simulations of the 1990s.

In 2014, we asked Deloitte to investigate the value of the mathematical for the Dutch economy, and this led to some stunning conclusions. One of these is that mathematical sciences are contributing for up to 26% to total employment. Because these are high income jobs, the economic contribution of mathematical sciences is even higher, representing around 30% of Dutch national income. Another conclusion is that a strong mathematical sciences foundation is critical to the success of any advanced economy. Better mathematical skills correlate with a more competitive economy and a higher standard of living. Moreover, with the revolutions in computational science, big data, statistics and business analytics the importance of mathematical sciences to society is likely to increase substantially in the coming decades. These revolutions are driven by

ever more powerful computers, the data explosion, and improved algorithms.

Similar reports were made in the UK, France and Spain, resulting in similar conclusions. In Germany, a great book was produced in 2008 during the national ‘Year of Mathematics’ entitled *Mathematics: Engine of the Economy*. Twenty leading companies in Germany contributed to this volume. In the introduction, the following statement is made: “Mathematics is everywhere. In the past, it was only individuals who clearly recognised this, such as Alexander von Humboldt with his timeless sentence ‘Mathematical studies are the soul of all industrial progress’ or Werner von Siemens, who gave his brother Wilhelm the urgent advice, ‘Your main course of study must now be mathematics’. Today, there is a consensus that without mathematics, people cannot organise their everyday lives.”

As stated in the Deloitte report, there is a clear correlation between mathematical ability, measured in terms of the Pisa score in secondary schools, and the competitiveness of a country. This is clearly demonstrated in the figure below. Rather worrying in this respect is that in a recent report of McKinsey, it is concluded that the PISA score in The Netherlands is going down in the past 20 years. Clearly, action must be taken to counter this development. The committee on Education within the Dutch Platform for Mathematics is expressing its concern to the ministers, and the message is quite clear: “The trend identified by McKinsey seems to be part of the flattening that is taking place in education on many fronts. There are a complex of causes for this. The student population is changing, qualified teachers are hard to





find, and teaching time for mathematics has been reduced with the introduction of the second phase. Education has to adapt to changes in society, but the impoverishment that is now occurring has negative consequences for the personal development and socialisation of our pupils and for the level at which they enter further education. In STEM studies, they fall short of foreign students in knowledge and work attitude, which weakens the innovative power of our country.”

Let's get back into a more positive mood again! It is clearly important to convince the general public, secondary school pupils, policy makers, scientists and industry of the value of mathematics for our society. There are many ways to do this, such as with the Deloitte report. Very successful was also the booklet written by Ionica Smeets and Bennie Mols, on behalf of the Dutch Platform for Mathematics, entitled *Success formulas*. It contains 36 stories about applications of mathematics, and a

number of interviews with captains of industry and policy makers, to show the versatility of mathematics. Many do not know that mathematics is present everywhere in our society, and this booklet gives an impression of this omnipresence. Some 20 000 copies were distributed all over the country, and in 2021 we made a German version with many new stories.

Scientific Computing for Industry

Over the years, I have been able to demonstrate the value of mathematics especially in industry. When appointed at TU/e, the assignment was ‘Scientific Computing for Industry’, fitting perfectly with the profile I had in mind. Scientific Computing, also referred to as Numerical Analysis, is a discipline that emerged when computers started to become more powerful, say since the 1950s or 1960s. Initially, it was a field that was occupied with a sound analysis of rounding errors, as computers can only use a limited number of digits to represent

numbers, and in certain processes this can lead to a considerable build-up of errors.

When computers became more powerful, and software packages started to be developed, the discipline of Computational Science and Engineering started to emerge, and within the area of Scientific Computing, methods needed to be developed that could cope with problems becoming larger rapidly. In the early 1980s the size of problems was around 1000, but later on this grew to tens of thousands, millions and in recent years even billions of variables. Especially important is then to develop methods to solve large linear systems of equations, often with a special structure. We were very fortunate that The Netherlands was leading in this field, and especially the work of Henk van der Vorst and Koos Meijerink on the so-called ICCG method was revolutionary. We were the first to implement this method, developed around 1977, in industrial software, and it enabled us to solve much larger problems than our competitors, and also much faster.

I very much liked the work on numerical linear algebra, and when at Philips, we had extensive discussions on special systems of equations with our team of mathematical advisers: Bram van der Sluis, Henk van der Vorst and Piet Hemker. We became interested in solving more difficult sets of equations, so-called indefinite linear systems occurring in the area of electronic circuit simulation. It led to an intense col-



laboration with Andy Wathen of Oxford University in the early years of this century, and in the end a factorisation method for indefinite matrices was developed. The Oxford group named the method *Schilders' factorisation*, and I was clearly very honoured by this.

The factorisation developed is, in fact, one of the many methods that I developed, together with colleagues and students of course, constituting a red thread over several decades: *mimetic methods*. Already during my PhD at Trinity College Dublin, we worked on methods that used information about the underlying problem. The exponential behaviour of solutions in singularly perturbed problems was used to develop so-called exponentially fitted finite difference schemes. They performed in a fantastic way in practical situations, and had errors that did not depend on the small parameter. Later, at Philips, it turned out that the set of semiconductor device equations was also singularly perturbed, implying that we could use exponentially fitted schemes to discretise the system. The decomposition for indefinite matrices also used information about the underlying problem, namely the fact that there were two different types of variable in the problem. It led to the use of 1×1 and 2×2 blocks in the decomposition process, and led to a great factorisation technique.

I strongly believe in mimetic methods, sometimes also referred to as structure preserving methods. And I think we should adapt the curricula in mathematics to include such methods, as they are extremely important in practice. In most universities, however, scientific computing is taught by presenting rather general methods based on simple Taylor series expansions, using no knowledge at all about the underlying problem. It leads to the violation of physical principles, such as conservation of mass and energy, and to less accurate solutions often requiring much more computation time. During my guest professorship at Bergische Universität Wuppertal (BUW) in 2020–2021, I gave a series of lectures on mimetic methods, showing that these do not only occur within the area of discretisation, but also within the areas of solving linear and nonlinear problems, meshing, model order reduction and more. Together with my esteemed colleagues from BUW, I am writing a book on mimetic methods.

A very successful example of an industrial project solved with mimetic methods was the ASIVA14 project together with Mentor Graphics (MG). One of the problems was that solving nearly periodic electronic circuits could take several weeks, and MG wanted us to develop methods that could considerably reduce this computation time. On investigating this problem, we found that there was a small part of the circuit where much higher frequencies played a role, resulting in the extremely small time steps that lead to high computation times. The idea came up to develop an extremely accurate model for this small high frequent part of the circuit, so that the model could be used in the simulation, and time steps could be used corresponding to the lower frequency part of the circuit. It turned out to be a fantastic idea, leading to speed-ups of more than a factor of 100 and simulation times of hours rather than weeks.

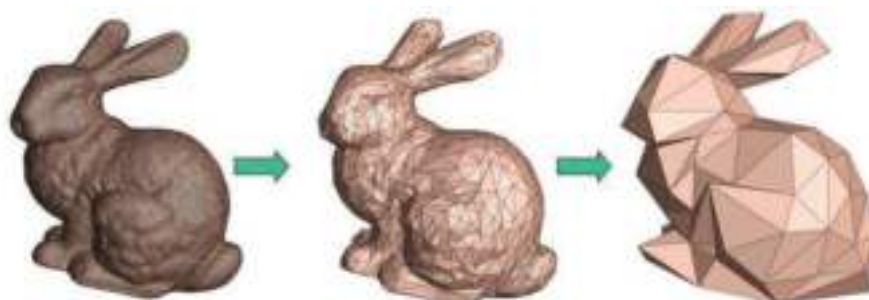
Another successful mimetic method we developed already had its origins within Philips. For strongly nonlinear problems, the well-known Newton's method can often lead to an enormous number of iterations, if it converges at all. The method we developed for semiconductor device simulation is extremely effective, and can lead to a very significant reduction of iterations. This is achieved by employing a nonlinear transformation of variables, making use of knowledge about the nonlinear character.

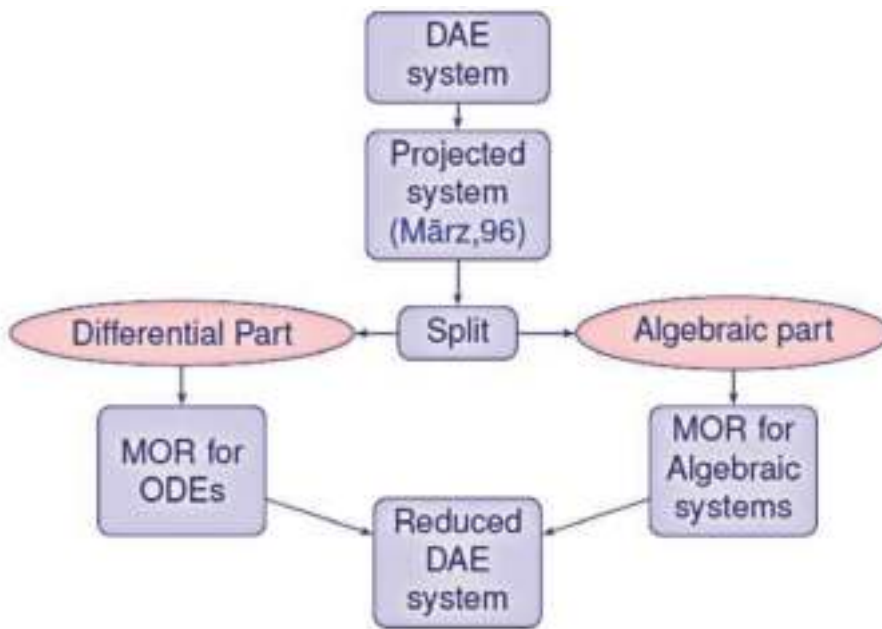
Mimetic principles also played a decisive role within the area of research that I adopted at the start of my career at TU/e, and have been working on since then: *model order reduction*. Already quite soon I started to use the figure below to explain model order reduction to the general public: It clearly indicates that it is not necessary to know all details, one can often delete superfluous information and concentrate on the dominant behaviour: one will immediately recognize the right picture to be a bunny, one does not need all

information as contained in the most left picture.

Model order reduction is on the one hand a flourishing area of research with many researchers contributing to its development, on the other hand it is one of the most important sets of methods used for the efficient solution of problems in industry and, more generally, in the area of computational science and engineering. With the advent of high performance computing, and the growing power of computers, it is very tempting to simulate larger and larger problems. However, the counter side is that the energy consumption will be enormous for all these simulations. Here the adagio 'think twice, compute once' is absolutely valid. Using model order reduction, problems can be reduced considerably in size, but by retaining accuracy of solutions. Model order reduction extracts the dominant features of solutions, which is perfectly adequate to analyse problems, produce designs and investigate processes. So I am making a case here to make much more use of all the advances made in the field of model order reduction over the years, before starting any simulations. Together with Peter Benner, an authority in the world of MOR, I set up the European Model Reduction Network in 2014, and during four years we gathered a large group of more than 300 European researchers working in the field, had many interesting workshops and in the end produced the (open access) *Handbook of Model Reduction* consisting of three volumes that is considered a standard work in the field now.

Clearly, in view of the foregoing, our interest was mainly in mimetic model order reduction. We started out by developing several structure-preserving model reduction methods, following also the work of Roland Freund, viz. his method SPRIM where the 'S' and 'P' stand for 'structure preserving'. At a later stage, we got interested in differential-algebraic equations (DAE),





stimulated by the fact that electronic circuits generate systems of equations of that type. The main idea we had was to split the DAE into a differential and an algebraic part, then use one of the many MOR methods to reduce the differential system, and use other reduction methods for the algebraic part. In this way, we developed the so-called Index Preserving Model Order Reduction methods, IMOR and IIMOR. Indeed, the so-called index of the problem was automatically conserved, due to the procedure followed:

Our work on model order reduction received quite some interest from industry, and led to projects with Mentor Graphics, Siemens, austriamicrosystems, MAGWEL, NXP Semiconductors and Signify. Due to the early workshop in the Lorentz Center in 2005 and the European network EU-MOR-NET, TU Eindhoven was very visible in this area, leading to much interest from industry. Currently, we are involved in projects that aim at developing compact thermo-mechanical models for electronic circuits, and compact models for LEDs, with model order reduction playing a major role.

Scientific Computing in the future

A few years ago, I was a bit pessimistic about the future of Scientific Computing. In the area of numerical linear algebra, I did not see any ground-breaking new developments that would outperform the ICCG method and multigrid methods already developed in the previous century.

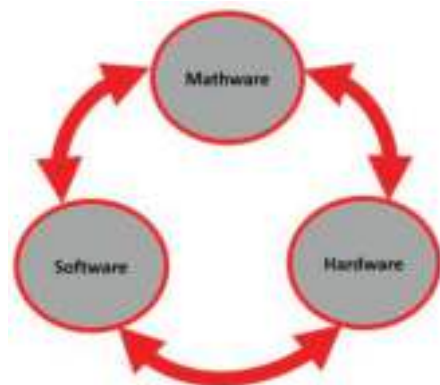
Some work was done on new preconditioners for special systems of equations, but most of the work was a small improvement of already existing methods. Also in other areas of scientific computing, no revolutionary new methods came up, most of the research was of an incremental nature.

But then, in recent years, the situation changed completely. First of all, *high performance computing* (HPC) became very popular again. In the 1990s, people had worked on HPC, but Moore's Law was still valid, implying that computers were becoming faster all the time. Hence, there was not a real need for HPC methods. Only recently, this changed dramatically. Moore's Law has come to an end, transistors do not become faster anymore, and

hence the only way to speed up computing systems is to rely on parallel computing (or quantum computing, but this is so far still a promise). Supercomputers have become much more mainstream now, and indeed, if we wish to speed up our computations, we will need to resort to parallel machines with many processors as well as GPUs. For the field of scientific computing, this means that we need to concentrate our efforts on methods that are inherently parallel. This is a big challenge for researchers in the scientific computing area. The famous ICCG method that performs so very well on serial computers, performs extremely badly on supercomputers, as can be seen from the table below.

As you can see in the column on the right, ICCG only achieves some 2% of peak performance. This is extremely bad, and means that researchers in numerical linear algebra have a big challenge ahead of them, to develop preconditioners that can bring the performance to a much higher level. So far, I have not seen solutions. Also in other areas of scientific computing, the growing use of supercomputers implies having to work on novel methods. Possibly, entirely new ideas need to be developed in order to cope with these challenges. It also means that the work of mathematicians in the area of computational science and engineering (CSE) is becoming extremely important. However, often people only speak about software and hardware, and the question then is: where is the mathematics? Hidden in the software? Clearly, it is important to first think carefully about the mathematical methods before any software can be written. For this reason,

	Rank	Site	Computer	Cores	HPL (Rmax)	TOP500	HPCC	Fraction of Peak
HPCG Benchmark June 2019	1	DOE/SC/ORNL, USA	Suzanne, 1000 IBM POWER9 2.20GHz, Dual node InfiniBand FDR, NVIDIA V100, 800	3,397,824	146.80	1	2.926	1.5%
	2	DOE/NSA/LANL, USA	Summit, 2000 IBM POWER9 2.20 GHz, InfiniBand EDR, NVIDIA V100, 800	1,872,480	94.64	2	1.796	1.4%
	3	RRIHQ Advanced Institute for Computational Science, Japan	8 node Super, SPARC64 VIIIfx 2.0GHz, Tofu InfiniBand, Fujitsu	705,024	10.61	18	0.603	5.3%
	4	DOE/NSA/LANL/SL, USA	Trinity, Cray XC40, Intel Xeon ES-2696 v4 16C 2.30GHz, Axiom, Cray	876,072	20.16	6	0.548	1.3%
	5	RIKEN Adv. Indus. Sci. and Tech. (AIST), Japan	ARC PRIMERGY CC059M, Intel Xeon Gold P140 2.4GHz, InfiniBand EDR, NVIDIA Tesla V100, Fujitsu	368,840	16.88	10	0.509	1.7%
	6	Swiss National Supercomputing Centre (CSCS), Switzerland	Pro-Saint, Cray XC40, Intel Xeon ES-2696 v4 16C 2.30GHz, Cray Axiom, NVIDIA Tesla P100 16GB, Cray	387,872	21.23	5	0.497	1.6%
	7	National Supercomputing Center in Wuhan, China	Superway TofuLight, Sunway MPP (Sunway210 280C) 1.4GHz, Sunway, HPCC	10,845,82	93.02	3	0.481	0.4%
	8	Korea Institute of Science and Technology Information, Republic of Korea	Nurius, C800, Intel Xeon Phi 7200 80C 2.0GHz, 1.4GHz, Intel Omni-Path, Intel Xeon Phi 7200, Cray	870,000	13.93	13	0.391	1.5%
	9	High Performance Computing, Japan	Daitokuji-PACE, PRIMERGY CC059M1, Intel Xeon Phi Processor 7200 80C 1.4GHz, Intel Omni-Path Architecture, Fujitsu	888,104	13.55	14	0.385	1.5%
	10	DOE/SC/LBNL/NERSC, USA	Cori, Xeon, Intel Xeon Phi 7200 80C 1.4GHz, Cray Axiom, Cray	802,336	14.02	12	0.355	1.3%



I like to speak about ‘mathware’, and isolate this from the software and the hardware. Mathware researchers should talk to their software and hardware colleagues, and discuss what is the best approach for a certain computational problem. Mathematicians always had quite a tight relation to software developers and computer scientists, but it will also become more important in future to speak to the hardware people. For example, one could make use of different representations of numbers: 16, 32 and 64 bit. First performing calculations in 16 bit representations is cheap, then one could step it up to 32 bit calculations, finally only having to perform few calculations with the most expensive 64 bit representation of numbers. This could be an ideal framework to carry out simulations in a much more efficient way. However, not all computers have the right semiconductor devices and chips on board to ease such transformations between 16, 32 and 64 bit representations. Hence, it is urgent to also speak to the hardware developers.

Another important development in recent years is the emergence of the field of *data science*, where abundant amounts of data are generated in many different areas, and the challenge is to extract useful information from this. I will not say too much about this, but it is clearly also an area where mathematicians should play a key role. The Department of Mathematics and Computer Science of TU/e founded the Data Science Centre Eindhoven (DSCE) around 2014, and now also has an educational track in data science. Data scientists are highly demanded in society and industry, but it is clear that extreme care needs to be taken to extract correct information from the data. Many of the methods used in the area of data science are already well known for many decades, which is also

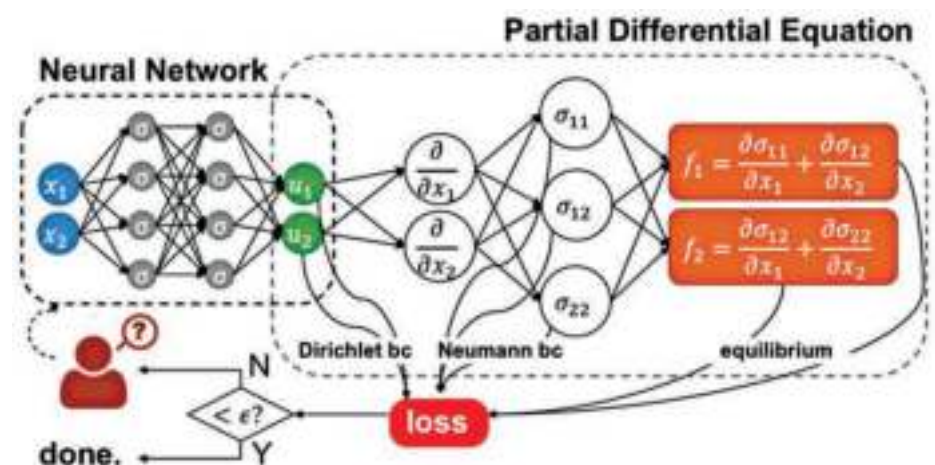
the reason why Stanford professor of statistics, David Donoho, wrote a somewhat cynical paper some years ago entitled ‘50 years of Data Science’.

The third development that will change scientific computing in the future is that of *artificial intelligence* (AI) and *machine learning* (ML). Just as with HPC, AI and ML were quite popular already a few decades ago, but the development of methods was only accelerated a few years ago. Deep neural networks were introduced in 2012, and since then have taken a giant leap forward. It has changed speech recognition on our phones enormously, and also had a big influence in many different areas. Also in the area of computational science, artificial intelligence, machine learning and artificial neural networks (ANN) started to be introduced, and clearly this is an extremely interesting development for the area of scientific computing. One of the simplest applications is to generate ANN models of parameters in the problem for which no physical models are available. Often, the physics of the underlying problem is known quite well, in the form of ordinary or partial differential equations, but such models may not be available for some parameters in these equations. I compare it to the situation we encountered at Philips Research: we simulated semiconductor devices by solving the set of drift-diffusion equations, but models for the recombination and mobility were provided by the electronic engineers and changed every year. The engineers determined these models by performing many simulations and experiments, thereby generating a lot of data from which they constructed a

model by combining curve fitting and physical or engineering insight. We could do the same thing nowadays using the data to construct adequate neural networks describing the parameters in an accurate way. A problem that arises here is that one can mathematically prove properties of the parameters that should hold, which was not always the case for the man-made models. Clearly, such known properties must also hold for the artificial neural networks, and this is still a big challenge: how to produce ANN that have specified properties.

This is a general and very important question, and in fact is referring back to mimetic methods again: how can we develop artificial neural networks that retain certain properties of the underlying physical system? In other words, we would like to develop mimetic neural networks! An additional advantage is that much less data are needed, and one can have more confidence of reliable results also in case one performs simulations that are out of the range of training data. One attempt in this direction is provided by the so-called physics informed neural networks, better known as PINNs. These have been developed by the group of George Karniadakis of Brown University in the USA. A sketch of how they work is provided in the figure below.

As can be seen here, the partial differential equations are part of a loss function, and this means that they will not be solved accurately. Stated differently, the set of differential equations will not be solved, leading to an error that can sometimes be quite substantial, depending on the other components of the loss function.



In our UNRAVEL project, an NWO XL project, we are researching other ways of designing physics informed neural networks, with the explicit demand that the underlying differential equations are satisfied and vital properties of solutions are retained. A very interesting approach, which already originates from work within Philips Research, is that of designing truly dynamic neural networks. Often, for the dynamic case, so-called recurrent networks are designed. Our dynamic neural networks are truly dynamic, with dynamic actions in the neurons of the network. This approach has enormous potential in our opinion, and also with my team at TU Munich we will explore this further.

Mathematics can and should play a prominent role within the world of artificial intelligence, and to stress this, I always state that

“Real intelligence is needed to make artificial intelligence work”.

The future needs computational science and engineering, blending data driven and physics-based perspectives. The combination of scientific computing and machine learning constitutes a new field of research, termed scientific machine learning. Scientific machine learning has been taking the academic world by storm as an interesting blend of traditional scientific modelling with machine learning methodologies like deep learning. While traditional deep learning methodologies have had difficulties with scientific issues like stiffness, interpretability, and enforcing physical constraints, this blend with numerical analysis and differential equations has evolved into a field of research with new methods, architectures, and algorithms which overcome these problems while adding the data-driven automatic learning features of modern deep learning. Many successes have already been found, with tools like physics-informed neural networks, universal differential equations, deep backward stochastic differential equation solvers for high dimensional partial differential equations, and neural surrogates showcasing how deep learning can greatly improve scientific modelling practice. Mathematics will be essential in addressing the challenges that we encounter in the rapidly evolving field of scientific machine learning. In this context, it is really great that the national initiative

‘AI and Mathematics’ (AIM) has been set up. It emphasizes that mathematicians are very interested in participating in the world of artificial intelligence and machine learning, and I am convinced of a very essential role for mathematics in these fields.

All of the foregoing is necessary to address industrial challenges in the future. The high demand for extremely accurate models that can simulate processes and products in real time or even beyond real time necessitates the solution of coupled systems of equations. Here we use the terminology of *digital twins*: creating a virtual copy of the real product or process that is running in parallel, is being fed with data from sensors, and able to predict failures and recommend precautions to be taken. Huge savings can be obtained if such digital twins are used, but it will take some time before we will see true digital twins in industry. Companies like Siemens are heavily investing in digital twinning, acquiring software companies with software for different aspects such as electromagnetic, thermal, mechanical behaviour, just to make sure that every aspect is included.

The future of scientific computing will be bright in all of the aforementioned fields: high performance computing, data science and artificial intelligence. I fully agree with the statement of Karen Willcox, esteemed colleague from the Oden Institute in Texas: “It is such an exciting time to be a computational scientist. The field is in the midst of a tremendous convergence of technologies that generate unprecedented system data and enable automation, algorithms that let users process massive amounts of data and run predictive simulations that drive key decisions, and the computing power that makes these algorithms feasible at scale for complex systems and in real-time or in situ settings.”

Mathematics for a better world

Besides the research carried out and described in the foregoing, I also played a role in various organisations, both at the national and international level, to promote mathematics in general, and also mathematics for applications. The impression people have about mathematics and mathematicians is not always positive, often mathematics is viewed as a rather difficult subject and one often does not have any idea about its usefulness. Mathematics learned in secondary schools is seen as a necessary thing

that one needs to do, but can forget about soon after leaving school. It is important to counter this misperception, and show that mathematics is vital in our complex world with many grand challenges.

At the national level, there is the Dutch Platform for Mathematics, supported by NWO and all mathematical institutes. Several reports have been produced since the start in 2010, including the booklet on success stories mentioned before, and a Deloitte report detailing the value of mathematics for the Dutch economy. The latter contains stunning figures, indicating the extreme importance of mathematics for society, as mentioned before. Similar reports have been produced in the UK, France and Spain, with corresponding figures. The exhibition *Imaginary* has been touring the country in 2016–2017 and in 2022–2023, showing the beauty and the power of mathematics. And many other initiatives are undertaken to demonstrate the unexpected usefulness of mathematics.

At the European level, I have been involved in the European Consortium of Mathematics for Industry (ECMI) and EU-MATHS-IN, the European Service Organisation for Mathematics in Industry and Innovation. Both organisations have many researchers on board that work with industry, educate students to have careers in industry and lobby for mathematics at the European level. Also at this level, it is rather difficult to convince especially policy makers of the extremely important role of mathematics. Mathematical methods are often considered tools, like a hammer or a screw driver, that one can pick from the mathematical toolbox and just use. In my inaugural speech, I already indicated that this is not the ideal situation. It is much better to involve mathematicians from the start, they know the methods and their modifications inside out, and are in a much better position to judge which methods should be used or what needs to be done. Mathematicians have a very special way of thinking, often in an abstract way, and this is what is needed to successfully address challenges. Besides this, mathematics is a very versatile science. Methods that have been developed for a certain application can often be abstracted in such a way that application to completely different problems is possible. Often, this is unexpected. Why would a method developed for electronic circuit simulation, be useful

for a mechanical or civil engineering problem? Mathematicians have the oversight and insight to judge such situations and suggest the use or further development of methods from entirely different fields.

Since 2019 I am an officer-at-large in the worldwide organisation for industrial and applied mathematics, ICIAM, and, in fact, its next president from 1 October 2023. Yes, indeed, a few months after my (formal) retirement! I would like to continue the work we did on the European level and take it to the larger scale, as it is evident that we can help each other to bring mathematics to the forefront and stress its importance for important challenges in the world like climate change and energy transition. During the recent SIAM conference on Computational Science and Engineering in the RAI Amsterdam, I organised a public evening with the title ‘The role of mathematics in solving the world’s main challenges’. The presentations can be viewed on YouTube (<http://tinyurl.com/5b875efj>), showing impressive examples of how mathematics can contribute to a better understanding of challenges and aid in matching the high demands that society and industry have nowadays.

I am coming to the end of my valedictory lecture. Especially in the last two decades, since my appointment at TU/e, I have considered it my mission to highlight the foregoing ideas and convince researchers and policy makers of the extreme value of mathematics for addressing societal and industrial challenges. In this context, it is adequate to quote the famous mathematical physicist Eugene Wigner, Nobel prize winner for physics in 1963, who said: “The

unreasonable efficiency of mathematics in science is a gift we neither understand nor deserve.” Let’s not worry about the fact we may not understand or deserve it, instead let’s use this gift! I am convinced that mathematics can contribute to a better world in many ways, and I hope that many will join the mission to convince everyone about this fact. It may seem a mission impossible, but I am sure in the end it will turn out to be a mission possible!

Closing words and thanks

Looking back on my life, a feeling of great gratitude prevails. I come from a warm catholic nest, where respect for my surroundings was taught and where I was encouraged to have a mission in life. At the Catholic University in Nijmegen, nowadays Radboud University, I had excellent and inspiring teachers such as Arnoud van Rooij and Ronald Kortram, and studying mathematics was a sincere pleasure. With John Miller, I had the privilege of having had a very inspiring teacher for the young field of numerical mathematics, later colleague and friend. At Philips, I was able to continue doing mathematics every day, thanks to the inspiring working environment in the Mathematical Software Group created by Simon Polak. He also taught me the pleasures in life of a researcher, going to conferences (and great hotels), and meeting many interesting people.

After my appointment at TU/e, I have thoroughly enjoyed spending my professional career in the field of scientific computing for industry and I have many to thank for that. I became known to colleagues as the traveling mathematician

and an expert in food in many places in the world. (A book entitled *The traveling mathematician* will appear sometime after my retirement, devoted to Marcello Anile, a traveling mathematician from Sicily who unfortunately passed away far too young). The longer and many short trips were a tremendous enrichment of my life and work, sometimes also for family members. Organising symposia and conferences, collaborating in consortia, and all kinds of board work associated with that, has led to much satisfaction. Being allowed to transfer knowledge to students and seeing them grow into accomplished researchers and mathematicians who put their qualities for the benefit of industry, has also been a fascinating task.

I have many to thank for this fantastic professional career. In the first place, TU/e for trusting me to develop the field, for providing an excellent research and social environment, and giving the academic freedom to pursue interesting topics together with many nice people. I’m deeply indebted to all the academic and support staff of the Department of Mathematics and Computer Science and, in particular, to my colleagues in the Centre for Analysis, Scientific Computing and Applications. It is abbreviated CASA, and it has really felt as a home to me. I would like to thank the people who worked with me for their commitment and the fine cooperation all these years. I would also like to thank my colleagues in The Netherlands, in Europe and beyond for the very pleasant collaborations and aid in the joint mission we have.

Ik heb gezegd.



References

- 1 G. Alf, N. Banagaaya, W.H.A. Schilders and C. Tischendorf, Index-aware model order reduction for index-2 differential-algebraic equations with constant coefficients, *SIAM J. Sci. Comput.* 35(3) (2013), A1487–A1510.
- 2 P. Benner, S. Grivet-Talocia, A. Quarteroni, G. Rozza, W.H.A. Schilders and L.M. Silveira, eds, *Handbook of Model Order Reduction*, Vol. 1,2,3, Walter De Gruyter, 2020–2021.
- 3 H.S. Dollar, N.I.M. Gould, W.H.A. Schilders and A.J. Wathen, Using constraint preconditioners with regularized saddle-point problems, *Comp. Opt. and Appl.* 36(2-3) (2007), 249–270.
- 4 E.P. Doolan, J.J.H. Miller and W.H.A. Schilders, *Uniform Numerical Methods for Problems with Initial and Boundary Layers*, Boole Press, 1980. (Translated into Russian and Chinese.)
- 5 S.J. Polak, C. den Heijer, W.H.A. Schilders, and P.A. Markowich, Semiconductor device modelling from the numerical point of view (review paper), *International Journal for Numerical Methods in Engineering* 24 (1987), 763–838.
- 6 J. Rommes and W.H.A. Schilders, Efficient methods for large resistor networks, *IEEE Transactions on Computer-Aided Design of Integrated Circuits and Systems* 29 (2010), 28–39.
- 7 W.H.A. Schilders, Solution of indefinite linear systems using an LQ decomposition for the linear constraints, *Linear Algebra and its Applications* 431(30-4) (2009), 381–395.
- 8 W.H.A. Schilders and M. Guenther, eds, *Novel Mathematics Inspired by Industrial Challenges*, Springer, 2021.
- 9 W.H.A. Schilders and E.J.W. ter Maten, eds., *Numerical Methods in Electromagnetics*, special volume in P.G. Ciarlet, ed., *Handbook of Numerical Analysis*, Vol. XIII, North Holland, 2005.
- 10 W.H.A. Schilders, J.J.H. Miller and S. Wang, Application of finite element methods to the simulation of semiconductor devices (review paper), *Reports on Progress in Physics* 62 (1999), 277–353.
- 11 W.H.A. Schilders, H.A. van der Vorst and J. Rommes, *Model Order Reduction: Theory and Practice*, Mathematics in Industry, Vol. 13, Springer, 2008.

In de verdediging

| In defence

Pas gepromoveerden brengen hun werk onder de aandacht. Heeft u tips voor deze rubriek of bent u zelf pas gepromoveerd? Laat het weten aan onze redacteur.

Redacteur: Nicolaos Starreveld
 FNWI, Universiteit van Amsterdam
 Postbus 94214
 1090 GE Amsterdam
verdediging@nieuwarchief.nl



Partition Functions: Zeros, Unstable Dynamics and Complexity Piotr Buys

In October 2022, Piotr Buys from the University of Amsterdam successfully defended his PhD thesis with the title *Partition Functions: Zeros, Unstable Dynamics and Complexity*. Piotr carried out his research under the supervision of prof. dr. Han Peters (UvA) and dr. Guus Regts (UvA).

From Gases to Magnets on Graphs

Researchers in statistical physics use interaction particle models to understand the behaviour of various systems, for example charged particles in a magnetic field. To describe such systems a positive weight $w(\sigma)$ is assigned to each possible state σ of the system. This means that the probability of observing σ is proportional to its weight, and to find the exact probability you need to normalize. The exact probability is given by $w(\sigma)/Z$, where

$$Z = \sum_{\sigma \in \Sigma} w(\sigma),$$

and Σ is the space of all possible states. This normalizing constant, Z , is called the partition function of the model, and it depends on the parameters of the system at study. The goal is to understand what kind of states are likely to occur. It turns out that these types of questions can be answered by having a good understanding of the partition function and how its properties change as the parameters change. In his thesis Piotr was interested in two models, the *Ising model* and the *hard-core model*.

Of magnets, sizes, and independence polynomials

The Ising model, introduced by Lenz and Ising around 1920, is used to study magnetism. The underlying structure is a finite simple graph $G = (V, E)$, where the vertices represent particles and the edges represent those pairs of particles that can interact directly (typically those which are close enough to each other). Each particle can be in one of two states, either spin $+$ or $-$. The possible states of the system are therefore described by functions $\sigma: V \rightarrow \{+, -\}$.

Piotr considered the Ising model with two parameters: a magnetic field parameter λ and an interaction parameter b . The weight of a state σ is then equal to

$$w(\sigma) = \lambda^{n_+(\sigma)} b^{\delta(\sigma)},$$

where $n_+(\sigma)$ is the number of vertices that get assigned the spin $+$ under σ , and $\delta(\sigma)$ is the number of edges with differing spins. Here you observe the interplay between the two quantities, when the number of vertices with a positive spin increases the edge-interactions will decrease. The partition function is therefore equal to

$$Z_G^{\text{Is}}(\lambda, b) := \sum_{\sigma: V \rightarrow \{+, -\}} \lambda^{n_+(\sigma)} b^{\delta(\sigma)}.$$

If $\lambda \in (0,1)$ the magnetic field points down and states with more particles that have a negative spin are generally more likely. If $\lambda \in (1,\infty)$ the magnetic field points up and states with more particles that have spin $+$ are generally more likely.

The parameter b represents an interaction parameter between neighbouring particles. If $b \in (0,1)$, then neighbouring particles will have with higher probability the same spin. In this case, the model is *ferromagnetic*. If $b \in (1,\infty)$, then neighbouring particles will have with higher probability opposite spins. In this case, the model is called *antiferromagnetic*, which is also the model Pjotr focused on.

In the hard-core model the underlying structure is again a finite simple graph $G=(V,E)$. The vertices represent lattice sites that may or may not be occupied by particles. These particles have a certain size, which prevents two neighbouring sites being occupied. Therefore the possible states are subsets $I \subset V$ such that no pair $u,v \in I$ forms an edge. Such a subset is called an *independent set*. The weight of a state I is equal to $w(I) = \lambda^{|I|}$ for some positive parameter λ , referred to as the *fugacity parameter*. The partition function in this model can thus be written in the following form

$$Z_G^{\text{ind}}(\lambda) = \sum_{I \subset V: I \text{ an independent set}} \lambda^{|I|}.$$

This function is also commonly known as the *independence polynomial*.

Experiments in the complex plane

An important quantity when studying these models is called the pressure

$$p_G(\lambda) = \frac{1}{|V|} \cdot \log(Z_G(\lambda)).$$

This logarithmic rescaling of the partition function is important to be able to study its behaviour as the system grows large, since there are exponentially many configurations that correspond to the same observable. The graphs that are relevant from a physical perspective usually are quite structured. The vertices might form part of a lattice for example. Moreover, these graphs typically contain a very large number of vertices. To analyse such large quantities mathematically we would like to speak about the pressure and the density on infinite graphs (usually a lattice $\mathcal{L}$). To make this formal a sequence of finite graphs $G_1, G_2, \dots$ converging to $\mathcal{L}$ is considered. A famous result in this area is due to Lee and Yang, who showed that the functions p_{G_n} converge to a continuous function $p_{\mathcal{L}}$.

While $p_{\mathcal{L}}$ is continuous on the whole positive real axis, its derivatives may not be. A model is said to undergo a *phase transition* at a parameter λ_0 if $p_{\mathcal{L}}$ is not analytic at λ_0 . Lee and Yang gave a condition that is sufficient to guarantee the absence of a phase transition. But this demands a venture in the complex plane! Lee and Yang proved that if $G_1, G_2, \dots$ is a sequence of graphs converging to a lattice $\mathcal{L}$, and there is a complex domain U that is zero-free for Z_{G_n} for all n , then the limit $p_{\mathcal{L}}$ is analytic on U .

Pjotr investigated what happens when the family of graphs on which the Ising or the hard-core model is considered is the family of bounded degree graphs (the lattice is thus a special case). For an integer $\Delta \in \mathbb{Z}_{\geq 2}$ we let $\mathcal{G}_{\Delta}$ denote the class of graphs with maximum degree at most Δ . The domain U being zero-free for $\mathcal{G}$ means that $Z_G(\mu) \neq 0$ for any $\mu \in U$ and $G \in \mathcal{G}$.

Understanding the zeros

For the ferromagnetic Ising model this problem is fully solved. The Lee-Yang circle theorem states that the complex zeros of Z_G^{Is} all lie on the unit circle in the complex plane for any graph. This result was refined by Han Peters and Guus Regts, Pjotr's supervisors, who proved that, depending on the degree bound Δ and the interaction parameter b , the closure of the zeros is either equal to the unit circle or equal to a circular arc strictly contained in the unit circle. Pjotr investigated in detail the locations of the zeros of the partition function for the family of bounded degree graphs for both the antiferromagnetic Ising model and the hard-core model.

To understand the zeros of the partition function a new quantity needs to be defined. We consider a graph G and a specific vertex u , and the restrictions of the partition function to those configurations assigning a $+$ or $-$ to u . For the hard-core model the restriction is to those configurations for which u is in (denoted with a $+$) an independent set or not (denoted with a $-$). These restrictions are denoted by $Z_{G,+u}(\lambda)$ and $Z_{G,-u}(\lambda)$. A useful quantity to define is the ratio, or occupation ratio, between these contributions, namely

$$R_{G,u}(\lambda) = Z_{G,+u}(\lambda) / Z_{G,-u}(\lambda).$$

This ratio represents the odds that u gets assigned a $+$ (positive spin or present in the independence set). In general, $R_{G,u}$ is a rational function in λ . We can thus interpret $R_{G,u}$ as a function from the Riemann sphere $\hat{\mathbb{C}}$ to itself. It follows that complex zeros λ_0 of Z_G correspond one to one with parameters λ_0 for which $R_{G,u}(\lambda_0) = -1$. Understanding the zeros of Z_G is thus essentially equivalent to understanding the -1 -parameters of $R_{G,u}$. It turns out that the presence of zeros of Z_G is related to the local dynamical behaviour of the family of occupation ratios defined as

$$R_{\Delta} = \{Z_{G,+u}(\lambda) / Z_{G,-u}(\lambda) : G \text{ a graph of max degree } \Delta\}.$$

Using machinery from complex dynamical systems Pjotr investigated when this family of complex functions hits -1 , which would yield regions where the partition function attains a zero. Central in Pjotr's research is the theorem of Montel from Complex Analysis. Applying Montel's theorem it can be proven that if U is a zero-free area for the partition functions then the family R_{Δ} is a normal family of holomorphic functions. In his research Pjotr proved this is an equivalence, hence finding zero-free regions for the partition function is equivalent to proving that the family R_{Δ} is a normal family. Intuitively this means that the presence of zeros is equivalent to chaotic behavior of this family of partition functions.

Rooted trees show the way

A very important result for both models states that for any (G,u) there exists a rooted tree (T,u) with the same maximum degree as G for which $R_{G,u} = R_{T,u,\tau}$. Here the τ represents a boundary condition on a subset of the leaves of T . Hence it suffices to understand the behaviour of the occupation ratios for rooted trees.

Any rooted tree can be generated by recursively applying a simple scheme, starting with single vertices. It therefore follows that the ratio $R_{G,u}(\lambda)$ of any rooted graph (G,u) of degree at most $d+1$ can be written as a composition of maps $F_{1,\lambda}, \dots, F_{d,\lambda}$, where

$$F_{k,\lambda}(z_1, z_2, \dots, z_k) = \lambda \prod_{i=1}^k \frac{z_i + b}{bz_i + 1},$$

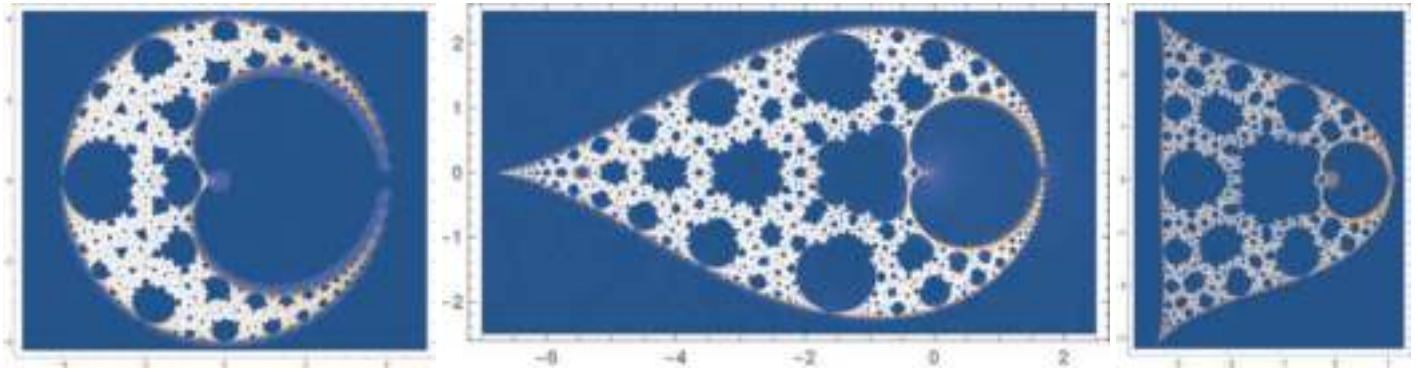


Figure 1 The activity-locus of Cayley trees in the hard-core model for down-degrees 2, 4 and 3. For each pixel the spherical derivative of the occupation ratio is computed for the Cayley tree of depth 120. Pixels for which this derivative is sufficiently large are depicted in white, suggesting that the corresponding parameter λ lies approximately on the activity locus.

applied to initial values. These initial values are the ratios R_v of single vertices. The iteration of functions with complex parameters is a setting that is common in the field of complex dynamics. Piotr started by investigating a nicer and more structured class of trees, that of Cayley trees. A perfect d -ary tree is a rooted tree such that every node that is not a leaf has exactly d children, and all the leaves have the same distance to the root.

A delicate argument of complex nature

In the case of the antiferromagnetic Ising model, the closure of the zeros of graphs of perfect d -ary trees is equal to the *non-stable parameters* of the parametrized family $z \mapsto ((z+b)/(bz+1))^d$. This turns out to be equal to the closure of the zeros of all graphs with degree at most $d+1$. In a nutshell, this means that for the antiferromagnetic Ising model it suffices to study Cayley trees to understand the zero-free regions of partition functions of arbitrary rooted trees with bounded degree.

But this is not the case for the hard-core model. In the hard core model Piotr proved that the behaviour of the family R_Δ is radically different for Cayley trees than for arbitrary rooted trees. This is shown in Figure 1, where the blue regions show the values of λ for which the family of Cayley trees are normal. In all pictures consider the large blue cardioid. Piotr proved that for all values of λ in the cardioid R_Δ is normal for Cayley trees. On the other hand, for the family of rooted trees with bounded degrees there exist parameters inside the cardioid at which the family of ratios is not normal. This means that the cardioid is a zero-free region for Cayley trees but not for general bounded degree trees.

To compute them or not

Besides the location of zeros of the partition function Piotr also investigated a very deep connection between these zeros and the computational complexity of approximating the partition function. The difficulty of computing $Z_G(\lambda)$ is motivated by the importance of the partition function in physics, and it started to receive attention from a computer science perspective in the late 1980s. Suppose that a parameter λ lies in a complex domain U containing 0 that is zero-free for $\mathcal{G}_\Delta$. Then there is a fully polynomial time approximation scheme (we will not explain this now) for approximating $Z_G(\lambda)$ for $G \in \mathcal{G}_\Delta$. Piotr proved that this result is an equivalence, namely that the closure of the complex zeros of the partition function is contained in the closure of parameters λ for which approximating $Z_G(\lambda)$ for $G \in \mathcal{G}_\Delta$ is $\#P$ -hard!

The more personal aspect

As a final note we would like to give the word to the doctor.

Piotr, how did you get interested in mathematics?

“From a very young age I was already interested in solving puzzles, mostly puzzles involving numbers. This interest persisted during my childhood and thus, at the end of high-school, it was clear to me that I wanted to pursue a degree in mathematics (although I did semi-seriously consider classical languages). My interest in research mathematics came during my master thesis, which I did under Guus Regts, who would later become my PhD supervisor. Research mathematics still involves doing puzzles, but these are puzzles for which nobody knows the solution yet. This adds an extra layer of excitement (and sometimes frustration). My favourite part of being a mathematician is working together with colleagues to solve these problems. The longer it takes to solve a problem, the more satisfying it is when you eventually do crack it!”

Were you also involved in some activities you would like to share with the readers?

“My PhD was largely during the pandemic, which made traveling more difficult, but at the start and at the end I did have the opportunity to go to conferences and research visits. I went to Berkeley twice and I spent three weeks in Chicago. At these conferences you get the chance to listen to and speak to people from all over the world that work on the same (or very similar) problems as you do. It is a lot of fun to talk to and make friends with people that are interested in the same obscure things as you are. I once spoke about a conjecture that I had disproved. Afterwards I talked to the person who had made the conjecture. He told me he was happy that there was a resolution to his conjecture, but that he was sad that it was false.”

Concluding

To summarize, in his research Piotr investigated the locations of zeros of the partition function of the Ising model and the hard-core model. He used techniques from complex dynamical systems to prove that the existence of zeros is equivalent to a chaotic behaviour of the family of occupancy ratios due to its non-normality. In regions where this chaotic behaviour rises the partition function is also, loosely speaking, very difficult to approximate. After his PhD Piotr started a post-doc at the UvA. We wish him the best and we hope that he keeps enjoying his complex wanderings! 

Willemien Kets

Mathematical Institute
Utrecht University
w.kets@uu.nl

Column New Impulse

Game theory and two-way interactions between mathematics and economics

In this column, researchers who have been recently appointed to one of the Dutch mathematics institutes, introduce themselves.

I am a professor of Game Theory at the Mathematical Institute at Utrecht University. Prior to joining Utrecht, I have held tenure-track positions at Northwestern University and at Oxford.

Game theory—or, interactive decision theory—analyzes the optimal behavior of decision-makers (*players*) whose decisions affect each other. Fittingly, the field's origins lie in the study of parlor games (e.g., chess, poker, bridge), with important papers by Ernst Zermelo (on chess) and Émile Borel (inspired by card games). Mathematically, the important feature of parlor games is that they are strictly competitive (i.e., zero sum): One player's gain is the other player's loss. A cornerstone of modern game theory is the minimax theorem proved by John von Neumann in 1928: for every two-player zero-sum game (that satisfies some conditions), there is a decision rule (*strategy*) for each player that minimizes the player's worst-case loss. Despite the continuing importance of this result, it does have significant limitations: Many games of interest have more than two players or have some element of cooperation. It took 22 years before mathematicians were able to analyze general games. The key insight is that the strategies in von Neumann's minimax solution do not only limit a player's worst-case loss, they are also mutually optimal. That is, a pair of minimax strategies is a fixed point of the correspondence that maps any strategy s_i for player i to strategies for player $j \neq i$ that maximize j 's (expected) reward if i chooses s_i . This idea is entirely general, and in 1950, John Nash showed that every sufficiently well-behaved game has such a fixed point (equilibrium).

In the decades since Nash's work, game theory has expanded its scope tremendously, making connections to areas as diverse as probability theory and statistics [1], stochastic processes [16], dynamical systems [8], tropical geometry [3], algebraic topology [6], differential topology [9], general topology [14], axiomatic set theory [5], model theory [4], category theory [12], epistemic logic [2], computational complexity theory [13], order theory [15] and partial differential equations [10], to name but a few. Nevertheless, fixed points continue to play a central role throughout game theory. Indeed, somewhat tongue-in-cheek, one could say

that game theory can be viewed as the study of fixed points. In my view, this is a source of strength: Game-theoretic results developed in one context regularly can be used to prove results in completely different contexts, sometimes outside of game theory proper.

Much of my own research centers around players' beliefs: What they think others may do. Also there fixed points show up in sometimes unexpected ways. One example is an ongoing project that studies when players' beliefs have a 'simple' representation. To illustrate, suppose there are two players, Ann and Bob. We say that Ann is *rational* if she chooses a strategy that maximizes her (expected) reward given her belief (a probability measure over Bob's strategies); likewise for Bob. Where do players' beliefs come from? Nash assumed that players' beliefs are correct: Ann puts probability 1 on Bob's actual strategy, and analogously for Bob. But in many cases this assumption is too strong. A weaker assumption is that players are rational, believe that the other is rational (i.e., assign probability 1 to the other player being rational), believe that the other believes that the other is rational, and so on. This assumption, commonly termed *rationality and common belief of rationality* (RCBR), requires considering an entire hierarchy of beliefs: probability measures on sets of probability measures on sets of probability measures,



and so on. Belief hierarchies are mathematically well-defined but can be difficult to work with in practice. To address this, John Harsanyi showed that belief hierarchies have a simple recursive description: Belief hierarchies can be modeled by endowing each player i with a set of ‘types’ T_i , where each type $t_a \in T_a$ for Ann is associated with a probability measure over Bob’s strategies and Bob’s types; again, analogously for Bob [7]. Then, each type t_a for Ann unwinds into an infinite hierarchy of beliefs that specifies her beliefs about Bob’s strategy, about his beliefs about her strategy, and so on. While elegant, Harsanyi’s approach opens up a new question: Does there exist a situation for which there is no set of types large enough to model all belief hierarchies that we are interested in? It turns out that, for the case sketched above, no such situation exists: types can generate all belief hierarchies (under some topological or measure-theoretic conditions); moreover, they can generate all predictions consistent with RCBR [11]. But, for some types of games, using probability measures to model beliefs is not appropriate. For example, in ‘dynamic games’ that unfold over time, we have to specify how players update their beliefs when they receive new information. While type spaces and belief hierarchies can easily be defined for these more general settings, it is unclear that the results described above still go through: A key step in the proof of these results is that the strategies that can be played under RCBR are the fixed point of a monotone function (i.e., an order-preserving function). Yet, monotonicity often fails for more general notions of beliefs. My earlier work has shown that this need not be problematic: At least in some nonmonotone cases, Harsanyi’s approach is sufficiently expressive. My present work aims to characterize when this holds in general. This would also help unify existing results for the case where beliefs can be represented by probability measures.

I was recruited to Utrecht to help set up a new double BSc program in mathematics and economics (together with my colleague Kees Oosterlee). Under this program, students earn two BSc degrees in three years: one in mathematics, and one in economics. The first students started in September 2022, and a new

cohort has started this fall. I am very excited about the program. Mathematics has long played a central role in addressing questions of central economic relevance, and today’s and tomorrow’s economic problems, such as increasing inequality, will likewise require the attention of well-trained mathematicians with a thorough understanding of economics. To give an example, a central question in the 1950s was whether communism-style central planning systems could ever outperform capitalist market-based systems. Of course, over time evidence emerged that existing central planning systems were failing. But, without formal models, the question remained whether greater economic success could not be achieved by some new kind of central planning system. This question was settled by mathematical economists who characterized exactly when capitalist price systems are superior. And, as a testament to the power of abstract reasoning, essentially the same ideas used to settle this question can be used to analyze completely different phenomena, a recent example being Google’s ad auctions!

To equip students’ with the necessary tools, the new double BSc program goes well beyond BSc programs in econometrics: Because students complete both degrees, they have the opportunity to delve into topics that traditionally receive less attention within an econometrics program. To give an example, economic inequality tends to go hand-in-hand with limited social mobility. There are several explanations for this, and therefore different policy interventions that could be effective if one would like to reduce inequality or increase mobility. Disentangling those requires both mathematical modeling (dynamical systems, stochastic processes, game theory) and a good understanding of the underlying economic drivers and institutions. And it’s not just economics that can benefit from a closer relation with mathematics: the reverse is also true. While there is less of a tradition of a two-way interaction between the two fields than with physics and mathematics, there are many examples where advances in mathematics had as their origin a purely economic motivation. It is to this two-way interaction that I hope to contribute at Utrecht, in game theory and beyond.

References

- 1 I. Arieli, Y. Babichenko, F. Sandomirskiy and O. Tamuz, Feasible joint posterior beliefs, *Journal of Political Economy* 129(9) (2021), 2546–2594.
- 2 R.J. Aumann, Agreeing to disagree, *Ann. Statist.* 4(6) (1976), 1236–1239.
- 3 E. Baldwin and P. Klemperer, Understanding preferences: ‘demand types’, and the existence of equilibrium with indivisibilities, *Econometrica* 87(3) (2019), 867–932.
- 4 A. Brandenburger and H.J. Keisler, An impossibility theorem on beliefs in games, *Studia Logica* 84(6) (2006), 211–240.
- 5 J.H. Conway, *On Numbers and Games*, London Mathematical Society Monographs, Vol. 6, Academic Press, 1976.
- 6 D. Gale, The game of Hex and the Brouwer fixed-point theorem, *Amer. Math. Monthly* 86(10) (1979), 818–827.
- 7 J.C. Harsanyi, Games with incomplete information played by ‘Bayesian’ players, I–III, Part I. The basic model, *Management Science* 14(3) (1967), 159–182.
- 8 J. Hofbauer and K. Sigmund, Evolutionary game dynamics, *Bull. Amer. Math. Soc. (N.S.)* 40(4) (2003), 479–519.
- 9 E. Kohlberg and J.-F. Mertens, On the strategic stability of equilibria, *Econometrica* 54(5) (1986), 1003–1037.
- 10 P.-L. Lions and J.-M. Lasry, Large investor trading impacts on volatility, *Ann. Inst. H. Poincaré C Anal. Non Linéaire* 24(2) (2007), 311–323.
- 11 J.-F. Mertens and S. Zamir, Formulation of Bayesian analysis for games with incomplete information, *International Journal of Game Theory* 14 (1985), 1–29.
- 12 L.S. Moss and I.D. Viglizzo, Harsanyi type spaces and final coalgebras constructed from satisfied theories, *Proceedings of the Workshop on Coalgebraic Methods in Computer Science*, Electron. Notes Theor. Comput. Sci., Vol. 106, Elsevier, 2004, pp. 279–295.
- 13 C.H. Papadimitriou, The complexity of finding Nash equilibria, in *Algorithmic Game Theory*, Cambridge University Press, 2007, pp. 29–52.
- 14 R. Telgársky, Topological games: On the 50th anniversary of the Banach–Mazur game, *Rocky Mountain Journal of Mathematics* 17(2) (1987), 227–276.
- 15 D.M. Topkis, Equilibrium points in nonzerosum n -person submodular games, *SIAM Journal on Control and Optimization* 17(6) (1979), 773–787.
- 16 N. Vieille, Stochastic games: recent results, *Handbook of Game Theory*, Elsevier, 2002, pp. 1833–1850.

Dion Gijswijt

Delft Institute of Applied Mathematics

TU Delft

d.c.gijswijt@tudelft.nl

De oplossing

Wiskundige ontdekkingen door Large Language Models: het Cap Set-probleem

Large Language Models, zoals GPT-3, hebben recent een enorme vlucht genomen. Ze kunnen helpen bij diverse taken zoals het schrijven van teksten of het samenvatten van documenten. Hoewel ze berucht zijn om hun gebrekkige logica en rekenkundige vermogens, lijkt het soms alsof ze echte intelligentie tentoonspreiden en creatieve ideeën hebben. Een natuurlijke vraag is: kunnen deze taalmodellen ook nieuwe wiskundige ontdekkingen doen? Een team van onderzoekers van Google sloeg de handen ineen met wiskundigen en denkt dat het antwoord 'ja' is. Ze combineerden 'Codey', een model voor het genereren van computercode, met een genetisch algoritme om een drietal problemen uit de combinatoriek aan te pakken. Voor het zogenaamde *Cap Set-probleem* slaagden zij erin om daadwerkelijk nieuwe resultaten te behalen [12]. In dit artikel legt Dion Gijswijt uit wat het Cap Set-probleem precies inhoudt en wat de nieuwe ontdekkingen zijn.

Het idee om AI te gebruiken voor het ontdekken van wiskundige patronen en het bewijzen van nieuwe stellingen, is niet nieuw [2]. Onlangs werden door AlphaTensor nieuwe tensordecomposities gevonden voor snellere matrixvermenigvuldiging [8] en bewees AlphaGeometry dat het meetkundeproblemen van de Internationale Wiskunde Olympiade kan oplossen in voor mensen begrijpelijke uitwerkingen [13]. Dit zijn echter programma's die voor een speciaal type probleem zijn getraind. Voor het hier besproken artikel [12] is dat niet het geval: het gebruikte Large Language Model (LLM) is getraind om goede code te schrijven, maar is niet voor een specifiek probleem als het Cap Set-probleem getraind.

Het Cap Set-probleem

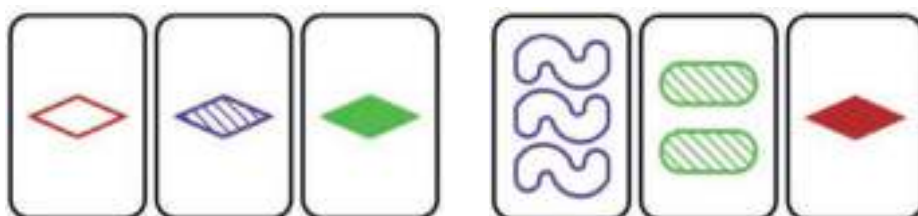
Een cap set is een deelverzameling van $\{0,1,2\}^n$ die geen drie verschillende vectoren bevat waarvan de som gelijk is aan de nulvector modulo 3. Een cap set in dimensie 4 kan bijvoorbeeld niet alledrie de

vectoren $(1,1,1,2)$, $(1,1,2,2)$ en $(1,1,0,2)$ bevatten, omdat $(1,1,1,2) + (1,1,2,2) + (1,1,0,2) = (3,3,3,6) = (0,0,0,0)$ modulo 3. De verzameling van alle zestien 0–1-vectoren van lengte 4 is daarentegen wel een cap set.

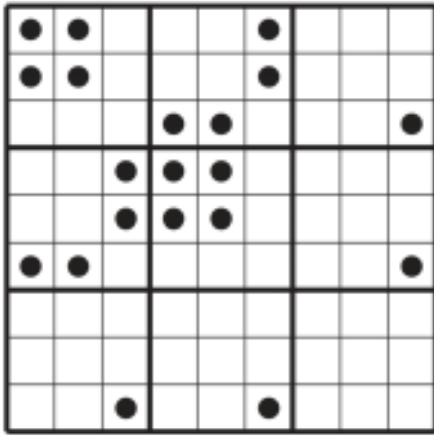
cap sets in dimensie 4 kunnen worden beschreven in termen van het populaire kaartspel Set. In dit spel zijn er 81 kaarten, elk uniek bepaald door vier eigenschappen (kleur, vorm, aantal, vulling) die elk in drie varianten voorkomen. Drie kaarten vormen een SET als voor elk van de eigenschappen de drie kaarten gelijk zijn of allemaal verschillend. Door de varianten van

elke eigenschap te nummeren als 0, 1, 2, corresponderen de kaarten met vectoren in $\{0,1,2\}^4$ en vormen drie kaarten een SET precies dan wanneer de drie corresponderende vectoren opgeteld de nulvector opleveren modulo 3. Op deze manier correspondeert een cap set in $\{0,1,2\}^4$ met een verzameling kaarten die géén SET bevat. We verwijzen naar het NAW-artikel [3] van De Bruijn voor meer details over de wiskunde achter het spel Set.

Het blijkt dat cap sets een combinatorisch heel interessante structuur zijn met relaties tot verschillende deelgebieden van de wiskunde. Zo worden cap sets in de eindige meetkunde bestudeerd onder de naam 'affine caps' en spelen ze in de getaltheorie een belangrijke rol bij het bestuderen van verzamelingen zonder rekenkundige rijen. In de extremale combinatoriek waren cap sets belangrijk in de ontwikkeling van de 'polynomial method' en in de theoretische informatica zijn ze nauw verbonden met de complexiteit van matrix vermenigvuldiging. We verwijzen naar Grochow [9] voor meer informatie over deze en andere verbanden.



Figuur 1 Twee voorbeelden van een SET. In het eerste voorbeeld zijn de kaarten voor twee eigenschappen gelijk en voor twee verschillend. In het tweede voorbeeld zijn de kaarten voor alle eigenschappen verschillend.



Figuur 2 Een optimale cap set in dimensie 4. De eerste twee coördinaten worden gegeven door de horizontale en verticale positie in het grove raster; de laatste twee door de positie binnen een 3×3 -blok. De cap set wordt impliciet gegeven door de prioriteitsfunctie $(1+e1[0]+e1[1]+(e1[2]==2)+(e1[3]==2))\%2$.

Het *Cap Set-probleem* gaat om het bepalen van de maximale grootte van een cap set in een gegeven dimensie n (of hier in ieder geval goede schattingen van te geven). Laten we deze maximale grootte aanduiden met a_n . Het is duidelijk dat $a_1 = 2$ en makkelijk na te gaan dat $a_2 = 4$. Aantonen dat $a_3 = 9$ is al een lastige puzzel en het feit dat $a_4 = 20$ (het maximale aantal kaarten zonder een SET) werd in 1971 bewezen door Pellegrino [10]. In Figuur 2 zie je een optimale cap set in dimensie 4.

Voor dimensies 5 en 6 zijn de optimale waarden $a_5 = 45$ en $a_6 = 112$ pas vrij recent bepaald in [6] en [11]. Al voor dimensie 7 is onbekend wat de maximale grootte van een cap set is: de grootste bekende cap set heeft 236 elementen, maar we weten niet of dat optimaal is. We weten alleen dat er geen cap set met 292 elementen of meer kan bestaan. De ‘records’ voor kleine dimensies staan in Tabel 1.

Het vinden van cap sets met een computer

Een rechttoe rechtaan brute-force-benadering om a_7 te bepalen, moet alle $\binom{2187}{237} \approx 2 \times 10^{324}$ selecties van 237 vectoren uit $\{0,1,2\}^7$ controleren. Dit is zelfs met moderne computers een onhaalbare kaart.

Een bescheidener doel is om ‘grote’ cap sets te vinden die wellicht niet optimaal zijn, maar wel vorige records verbreken. Een eenvoudige heuristiek is de volgende ‘Greedy’ aanpak. Eerst zetten we de vectoren van $\{0,1,2\}^n$ in een bepaalde volgorde. Vervolgens, beginnend met een lege verzameling, gaan we de vectoren van de lijst één voor één af. Als de vector met twee andere vectoren in onze verzameling tot de nulvector optelt modulo 3, dan slaan we die vector over. Zo niet, dan voegen we de vector toe aan onze verzameling. Na het verwerken van de hele lijst hebben we een complete cap set: een cap set die niet kan worden uitgebreid door meer vectoren toe te voegen. Het hoeft echter niet van maximale grootte te zijn. De verzameling van zestien 0–1-vectoren in $\{0,1,2\}^4$ vormt bijvoorbeeld een complete cap set. Als deze vectoren aan het begin van de lijst staan, vinden we een cap set van grootte 16 in plaats van de optimale grootte van 20. Met deze aanpak hangt de cap set die we uiteindelijk krijgen dus af van de gekozen ordening en elke complete cap set kan worden verkregen door met een geschikte ordening te beginnen. Het probleem is dus teruggebracht tot het bedenken van goede ordeningen.

De gebruikte aanpak

In plaats van een expliciete lineaire ordening van $\{0,1,2\}^n$ te geven, gebruikt het onderzoeksteam van Google een prioriteitsfunctie $\{0,1,2\}^n \rightarrow \mathbb{R}$. De vectoren worden geordend op volgorde van dalende prioriteit (bij gelijke prioriteit gaat het lexicografisch kleinste element voor). Deze prioriteitsfuncties hebben de vorm van een kort stukje Python-code. De invoer van de functie is een vector $e1$ van lengte n . De uitvoer is een getal *score*: de prioriteit die aan de input vector wordt gegeven. De optimale cap set in dimensie 4 uit Figuur 2 kan bijvoorbeeld worden beschreven met de simpele prioriteitsfunctie $\text{score}=(1+e1[0]+e1[1]+(e1[2]==2)+(e1[3]==2))\%2$.

Het Large Language Model wordt gebruikt om diverse geschikte prioriteitsfuncties te ‘bedenken’. De benadering is

om een pool van prioriteitsfuncties bij te houden. Door twee goed scorende functies te selecteren en deze te combineren tot een prompt (invoer) voor de LLM, wordt een nieuwe prioriteitsfunctie gegenereerd en (indien het een correcte Python-functie is) toegevoegd aan de pool. Een genetisch algoritme wordt gebruikt om goed scorende functies te repliceren en slecht scorende functies uit de pool te verwijderen. We verwijzen naar het artikel [12] voor meer details. Het is interessant om te vermelden dat het gebruikte model, genaamd Codey, een algemeen beschikbaar model is dat was getraind voor het genereren van code en niet specifiek was getraind voor het Cap Set-probleem.

Een nieuw record

Voor dimensie $n = 8$ lukte het de onderzoekers om een cap set van grootte 512 te vinden. Dit is een flinke verbetering ten opzichte van het vorige record van 496 (uit de verdubbeling van de projectieve cap gevonden in [5]). De gevonden prioriteitsfunctie staat weergegeven in Figuur 3.

We zien dat de functie rekening houdt met het aantal `e1_count` nullen in de vector, en hoge prioriteit geeft aan vectoren zonder nullen. Ook controleert het of de getallen op de eerste en laatste positie gelijk zijn, en op vergelijkbare wijze voor de getallen op posities 2 en $n-1$ en 3 en $n-2$. Het geeft hogere prioriteit aan vectoren die meer van deze ‘reflecties’ hebben. We zullen de code hier niet volledig analyseren. Een belangrijk punt is echter dat de code *kan* worden geïnterpreteerd en geanalyseerd door een wiskundige om zo nieuwe inzichten te verkrijgen. Dit staat in schril contrast met een computeraanpak waarbij de uitvoer simpelweg een lijst van 512 vectoren van lengte 8 zou zijn. In feite slaagden de auteurs erin om een eenvoudige, expliciete beschrijving te maken voor deze cap set door de gevonden prioriteitsfunctie te analyseren. Het Large Language Model wordt dus gebruikt om ‘ideeën’ te genereren voor prioriteitsfuncties die goed werken en deze zijn interpreteerbaar door mensen als een startpunt voor een beter begrip van cap sets. Een ander kenmerk van de methode is dat de prioriteitsfunctie de dimensie als invoer heeft en dus kan worden toegepast op een reeks verschillende dimensies (hoewel de betreffende functie voor dimensies 9 tot 12 in dit geval geen goede cap sets oplevert.)

n	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
lb	2	4	9	20	45	112	236	<u>512</u>	<u>1082</u>	2432	5488	12928

Tabel 1 De beste ondergrenzen lb voor de maximale grootte van een cap set in dimensie n . Voor $n = 1, \dots, 6$ zijn de grenzen exact. Voor $n = 8$ is de ondergrens verbeterd van 496 naar 512. Voor $n = 9$, is de beste bekende constructie geëvenaard. De grenzen voor $n = 9, \dots, 12$ komen van constructions voor projectieve caps [1].

```

def priority(el: tuple[int, ...], n: int) -> float:
    score = n
    in_el = 0
    el_count = el.count(0)

    if el_count == 0:
        score += n ** 2
        if el[1] == el[-1]:
            score *= 1.5
        if el[2] == el[-2]:
            score *= 1.5
        if el[3] == el[-3]:
            score *= 1.5
    else:
        if el[1] == el[-1]:
            score *= 0.5
        if el[2] == el[-2]:
            score *= 0.5

    for e in el:
        if e == 0:
            if in_el == 0:
                score *= n * 0.5
            elif in_el == el_count - 1:
                score *= 0.5
            else:
                score *= n * 0.5 ** in_el
            in_el += 1
        else:
            score += 1

    if el[1] == el[-1]:
        score *= 1.5
    if el[2] == el[-2]:
        score *= 1.5

    return score

```

Figuur 3 De gevonden prioriteitsfunctie voor dimensie $n = 8$.

Capaciteit en gegeneraliseerde producten

In plaats van te kijken naar de maximale grootte van cap sets in een specifieke dimensie n , is het interessant om het asymptotische gedrag te bepalen. De *cap set-capaciteit* is gedefinieerd als

$$c = \limsup_{n \rightarrow \infty} a_n^{1/n}.$$

Omdat $\{0,1\}^n$ een cap set is in dimensie n volgt direct dat $c \in [2,3]$. Met behulp van de polynomiale slice-rank-methode werd in [7] bewezen dat $c < 2,756$. Hier zullen we juist kijken naar betere *ondergrenzen* op c en het nieuwe record dat de groep onderzoekers van [12] heeft gevonden met behulp van het Large Language Model.

Als eerste merken we op dat gegeven cap sets $A \subseteq \{0,1,2\}^m$ en $B \subseteq \{0,1,2\}^n$, het product $A \times B = \{(a,b): a \in A, b \in B\}$

een cap set is van grootte $|A| \cdot |B|$ in dimensie $m+n$. Zodoende geeft een cap set $A \subseteq \{0,1,2\}^m$ voor elke n een cap set A^n van grootte $|A|^n$ in dimensie mn . Hieruit volgt dat $c \geq a_m^{1/m}$ voor elke m . Zo impliceert $a_4 = 20$ bijvoorbeeld dat $c \geq 20^{1/4} \approx 2,11$.

Om betere cap sets in hoge dimensies te verkrijgen dan met de eenvoudige productconstructie, introduceerde Edel [4] de volgende meer algemene constructie. Het eerste ingrediënt is een *uitbreidbare collectie van cap sets*. Dit is een drietal (A_0, A_1, A_2) van cap sets in $\{0,1,2\}^n$ met de volgende aanvullende eigenschappen:

- (i) Als $x, y \in A_0$ en $z \in A_1 \cup A_2$, dan is $x + y + z \neq 0 \pmod{3}$.
- (ii) Als $x \in A_0$, $y \in A_1$ en $z \in A_2$, dan is $x + y + z \neq 0 \pmod{3}$.

Voorbeeld. In dimensie 6 is er (op symmetriën na) een unieke grootste cap set. Het heeft een grootte van 112 en vormt de basis voor vele constructies van cap sets in hogere dimensies. De cap set kan als volgt worden beschreven.

Laat X de verzameling zijn van alle vectoren in $\{0,1,2\}^6$ die geen 0 hebben en een even aantal 1-en. Dus $|X| = \frac{1}{2} \cdot 2^6 = 32$.

De verzameling $Y \subseteq \{0,1,2\}^6$ bestaat uit die vectoren die precies drie 0-en hebben en waarvan de drie posities een van de volgende 10 mogelijkheden zijn:

123, 124, 135, 236, 165, 164, 254, 256, 345, 346.

Dus $|Y| = 10 \cdot 8 = 80$. Deze tien drietallen kunnen eenvoudig worden onthouden met behulp van een normale dobbelsteen. Een drietal vlakken zit in de lijst als het ofwel een tegengesteld paar vlakken heeft en een hoog vlak (4,5,6), of als het geen tegengesteld paar heeft en minstens twee lage vlakken (1,2,3).

Het is duidelijk dat X en Y disjunct zijn, dus $|X \cup Y| = 112$. We laten het aan de lezer om te verifiëren dat $A_1 = X \cup Y$ inderdaad een cap set is. Als we in de definitie van Y juist de andere 10 mogelijke drietalen posities voor de 0-en nemen, vinden we een verzameling Z en is $A_2 = X \cup Z$ wederom een cap set van grootte 112.

Nemen we nu voor A_0 de verzameling van 12 vectoren in $\{0,1,2\}^6$ met precies één positie ongelijk 0, dan is (A_0, A_1, A_2) een uitbreidbare collectie cap sets.

Als (A_0, A_1, A_2) een uitbreidbare collectie cap sets is, dan kunnen verschillende producten van de cap sets A_0, A_1, A_2 combineerd worden tot een grote cap set. Om dit te beschrijven, hebben we het begrip *toelaatbare verzameling* nodig.

Definitie. Een deelverzameling $S \subseteq \{0,1,2\}^m$ is *toelaatbaar* (van gewicht w) als alle $s \in S$ in precies w van de m posities ongelijk aan nul zijn en bovendien het volgende geldt.

- (i) Voor elk paar verschillende $s, s' \in S$ is er een positie i zodanig dat $s_i = 0 \neq s'_i$.
- (ii) Voor elk drietal verschillende $s, s', s'' \in S$ is er een positie i zodanig dat $\{s_i, s'_i, s''_i\}$ gelijk is aan $\{0,1,2\}$, $\{0,0,1\}$, of $\{0,0,2\}$ (als multiset).

Hoewel de definitie misschien technisch lijkt, heeft deze het volgende gewenste effect.

Stelling 1. Laat (A_0, A_1, A_2) een uitgebreidbare collectie zijn in dimensie n en laat $S \subseteq \{0, 1, 2\}^m$ een toelaatbare verzameling van gewicht w zijn. Dan is

$$S(A_0, A_1, A_2) = \bigcup_{s \in S} A_{s_1} \times \cdots \times A_{s_m}$$

een cap set in dimensie mn van grootte

$$|S| \cdot |A_0|^{m-w} |A_1|^w.$$

Merk op dat een toelaatbare deelverzameling $S \subseteq \{0, 1, 2\}^m$ van gewicht w hoogstens grootte $\binom{m}{w}$ kan hebben omdat geen twee vectoren op dezelfde posities hun nullen hebben staan. Een vermoeden van Tyrrell [14] is dat dit aantal altijd bereikt kan worden.

Vermoeden. Voor alle gehele getallen $0 < w < m$ is er een toelaatbare $S \subseteq \{0, 1, 2\}^m$ van gewicht w en grootte $\binom{m}{w}$.

Wanneer een dergelijke toelaatbare verzameling bestaat wordt deze wel een $I(m, w)$ genoemd. Voor het speciale geval $w = m - 1$ is het vermoeden waar en heeft de toegestane verzameling extra nuttige eigenschappen.

Stelling 2. Laat $m \geq 2$. Voor $i = 1, \dots, m$ definiëren we de vector

$$s^{(i)} = (1, \dots, 1, 0, 2, \dots, 2) \in \{0, 1, 2\}^m,$$

waarbij de 0 op positie i staat. Nu is

$$S_m = \{s^{(1)}, \dots, s^{(m)}\}$$

een $I(m, m-1)$. Bovendien geldt dat als (A_0, A_1, A_2) een uitgebreidbare collectie is, dan is $(S_m(A_0, A_1, A_2), A_1^m, A_2^m)$ dat ook.

Resultaten voor de cap set-capaciteit

Veel van de beste ondergrenzen voor cap sets in grote dimensies (en voor de capaciteit c) zijn verkregen door de constructies uit de vorige sectie toe te passen op de uitgebreidbare collectie (A_0, A_1, A_2) in dimensie 6 uit het voorbeeld. In de eerste stap wordt deze collectie uitgebreid tot de uitgebreidbare collectie $(S_k(A_0), A_1^k, A_2^k)$ in dimensie $6k$, voor een geschikte k . In de tweede stap wordt deze uitgebreidbare collectie met behulp van een toelaatbare verzameling $S \subseteq \{0, 1, 2\}^m$ uitgebreid tot een cap set $S(S_k(A_0), A_1^k, A_2^k)$ in dimensie $6km$. De crux is om voor gegeven dimensie m en gewicht w een grote toelaatbare verzameling S te vinden, bij voorkeur een $I(m, w)$.

In [4] gebruikte Edel in de eerste stap S_8 en in de tweede een $I(10, 5)$ om zo een cap set A in dimensie 480 te construeren van grootte $\binom{10}{5} \cdot 8^5 \cdot 12^5 \cdot 112^{75}$. Dit levert een ondergrens van $|A|^{1/480} > 2,2173$ op voor de cap set-capaciteit. Lang was dit de beste ondergrens totdat Tyrrell [14] deze in 2023 verbeterde tot 2,2180 door recursief een geschikte toelaatbare set te construeren in dimensie 1562.

Dit record is nu verpletterd door het team onderzoekers van Google. Zij slaagden erin meerdere grote toelaatbare sets te vinden. Allereerst vonden zij een $I(12, 7)$ wat een verbeterde ondergrens van 2,2184 oplevert. De methode is hetzelfde als voor het vinden van cap sets. De vectoren van $\{0, 1, 2\}^m$ worden in een lijst geordend volgens een prioriteitsfunctie. Daarna wordt de lijst doorlopen en wordt van de vectoren een voor een bepaald of die nog kan worden toegevoegd aan de groeiende toelaatbare verzameling.

Na analyse van de gevonden prioriteitsfunctie, bleek de $I(12, 7)$ bepaalde symmetrieën te bevatten. De verzameling vectoren bleek invariant onder cyclische rotatie van de eerste drie coördinaten. Hetzelfde gold voor de drie coördinaten daarna en zo verder voor elk volgend setje van drie opeenvolgende coördinaten. Door deze symmetrie vervolgens als extra eis in te bakken, lukte het om voor grotere dimensies goede toegestane verzamelingen te vinden, zoals een $I(15, 10)$ en een toelaatbare verzameling S van grootte 237984 in dimensie 24 van gewicht 17. De geconstrueerde cap set $S(S_4(A_0, A_1, A_2), A_1^4, A_2^4)$ in dimensie 576 levert een ondergrens op van 2,2202 voor de cap set-capaciteit, een nieuw record!

Conclusie

De onderzoekers hebben laten zien dat Large Language Models zoals GPT-3 kunnen worden gebruikt om nieuwe wiskundige resultaten te vinden. In dit geval werden voor het Cap Set-probleem, een klassiek probleem in de combinatoriek, verbeterde constructies gevonden. De kracht van de aanpak lijkt vooral te liggen in de unieke mogelijkheid van de taalmodellen om snel diverse heuristieken te genereren in de vorm van (computer)taal. Deze kunnen daardoor relatief eenvoudig door wiskundigen worden geanalyseerd om zo tot nieuwe ideeën te komen.

Het Cap Set-probleem zelf is nog verre van opgelost gezien het grote gat tussen de ondergrens 2,220 en de bovengrens 2,756 op de cap set-capaciteit. Mocht het vermoeden van Tyrrell correct zijn, dan zou dit direct een ondergrens geven van 2,233, een eerste kleine stap. 

Referenties

- J. Bierbrauer en Y. Edel, Large caps in projective galois spaces, *Current research topics in Galois geometry*, Jan de Beule en Leo Storme, eds., Nova Science Publishers, 2012, pp. 87–104.
- A. Davies, P. Veličković, L. Buesing, S. Blackwell, D. Zheng, N. Tomašev, R. Tanburn, P. Battaglia, C. Blundell, A. Juhász et al., Advancing mathematics by guiding human intuition with AI, *Nature* 600 (2021), 70–74.
- N. de Bruijn, Set!, *Nieuw archief voor wiskunde* 5/3(4) (2002), 320–325.
- Y. Edel, Extensions of generalized product caps, *Designs, Codes and Cryptography* 31(1) (2004), 5–14.
- Y. Edel en J. Bierbrauer, Large caps in small spaces, *Designs, Codes and Cryptography* 23 (2001), 197–212.
- Y. Edel, S. Ferret, I. Landjeven en L. Storme, The classification of the largest caps in $AG(5, 3)$, *Journal of Combinatorial Theory, Series A* 99(1) (2002), 95–110.
- J.S. Ellenberg en D. Gijswijt, On large subsets of $\mathbb{F}_q^n$ with no three-term arithmetic progression, *Annals of Mathematics* 185(1) (2017), 339–343.
- A. Fawzi, M. Balog, A. Huang, T. Hubert, B. Romera-Paredes, M. Barekatin, A. Novikov, F.J. Ruiz, J. Schrittwieser, G. Swirszcz, et al., Discovering faster matrix multiplication algorithms with reinforcement learning, *Nature* 610 (2022), 47–53.
- J. Grochow, New applications of the polynomial method: the cap set conjecture and beyond, *Bulletin of the American Mathematical Society* 56(1) (2019), 29–64.
- G. Pellegrino, Sul massimo ordine delle calotte in $S(4, 3)$, *Matematiche (Catania)* 25(1–9) (1970), 330.
- A. Potechin, Maximal caps in $AG(6, 3)$, *Designs, Codes and Cryptography* 46 (2008), 243–259.
- B. Romera-Paredes, M. Barekatin, A. Novikov, M. Balog, M. P. Kumar, E. Dupont, F.J. Ruiz, J.S. Ellenberg, P. Wang, O. Fawzi, et al., Mathematical discoveries from program search with large language models, *Nature* 625 (2024), 468–475.
- T.H. Trinh, Y. Wu, Q. V. Le, H. He en T. Luong, Solving olympiad geometry without human demonstrations, *Nature* 625 (2024), 476–482.
- F. Tyrrell, New lower bounds for cap sets, *Discrete Analysis* 2023(20) (2023), 18 pp., 

Daan Mulder

promovendus AMOLF, Amsterdam
mulderdaan@live.nl



Het keerpunt van Dóra Halas

Door zijn structuur, geeft muziek je een gevoel van thuiskomen

Dóra Halas (spreek uit: Hallasj) leerde ik deze zomer kennen als de dirigent van het Hongaarse koor Soharóza (spreek uit: sjoh-ha-roo-za) waarmee mijn Nederlandse koor op een kooruitwisseling was. Het koorstuk dat ze aandroeg om te zingen zat zo wiskundig in elkaar (herhalingen van steeds langer wordende zinnen, op verschillende tellen door elkaar gezongen), dat ik dacht: is deze vrouw niet ook wiskundige? Bij navraag bleek dat zo te zijn, althans, ze had twee jaar wiskunde gestudeerd voordat ze naar het conservatorium besloot te gaan. We spreken over dit Keerpunt, dit keer via Zoom.

Kun je ons iets vertellen over Soharóza en het experimentele werk dat je doet met koren?

“Waar ik het meest in geïnteresseerd ben, is de collectieve creativiteit en gemeenschap. Voor mij gaat het niet alleen om de muziek en het technisch zingen van de juiste noten, maar ook om hoe de leden van het koor, of welke groep dan ook, op een diep niveau bij het project betrokken raken. Ik noem het collectief componeren, of kortweg KOMP-methode. Wat voor optreden zullen we doen? Welk onderwerp moeten we aansnijden? Welke muziek willen we? Gaan we de muziek verzamelen, of zelf samenstellen? Daarbij horen ook praktische dingen die we tijdens de repetitie doen, zoals spelletjes en improvisaties. Als je met twintig mensen bij elkaar bent, heb je twintig keer zoveel creativiteit, of zelfs meer: misschien krijg je een nieuw idee door iets dat iemand anders zegt of doet. Dan ben ik de persoon die de afzonderlijke draden tot één stuk weeft, maar de ideeën komen van iedereen.”

Is er een specifiek optreden waar je trots op bent?

“Ik denk het eerste ‘catwalk concert’ dat we deden, *Taboo Collection*. Met Fruzsina Nagy, de kostuumontwerpster, hebben

we samen dat genre van catwalk concerten gecreëerd. Ik was zo verrast dat we zoiets groots, interessants en succesvols konden neerzetten.

Toen we er met het koor aan begonnen te werken, waren we op zoek naar een onderwerp. We hadden een spreadsheet waarin iedereen dingen kon opschrijven die ze wilden behandelen. We hadden wel honderd verschillende ideeën, maar toen we ze groepeerden om te kunnen stemmen welke het zouden worden, realiseerden we ons dat een heel groot percentage van de ideeën op de een of

andere manier verband hield met verschillende taboes. Daarom besloten we een show over taboes te maken, de *Taboo Collection*. Toen was het van: ‘Oké, nu moeten we dat onderwerp verder uitwerken. Welke andere taboes zijn er?’ Een van de koorleden kwam met een idee voor een spel tijdens de repetitie: ik geloof dat we rondliepen en zongen in het donker, en dan kon iedereen die wilde iets roepen wat voor diegene taboe was. Sommige taboes waren algemeen, maar sommige waren juist persoonlijk: ‘over mijn vader te praten’. Het waren heel interessante ervaringen, het leek bijna op therapie. Toen we de thema’s voor de verschillende scènes hadden, zijn we improvisaties gaan gebruiken om de scènes in te vullen. Taboes als de dood, of het lichaam, of bloed en menstruatie, hoe gaan we die op muziek zetten?”

Hoe bedenkt je die muzikale improvisaties?

“Dat is jarenlang verzamelen. Ik heb ook mijn proefschrift geschreven over koorimprovisatie, dus ik heb toen, twintig jaar geleden, behoorlijk wat onderzoek gedaan. Sommige kwamen van de Zweedse componist Gunnar Eriksson, die in de jaren tachtig koorimprovisaties deed. Deze technieken heb ik uitgetoetst en ontwikkeld met mijn eigen koor. Er komen ook veel ideeën voort uit theaterimprovisatie. En daarna was ik een hele tijd aan het experimenteren met mijn eigen koor. Dat is eigenlijk een van de redenen waarom ik nu een stap terug doe in het lesgeven en dirigeren: ik realiseerde me dat als ik geen tijd neem om zelf bij te leren, ik



Dóra Halas

echt opgebrand raak. Op dit moment ben ik een aantal nieuwe methoden aan het opbouwen en mezelf aan het ontwikkelen. Ik heb een aantal cursussen gevolgd en dingen geleerd zoals mindfulness, qi gong, taoïsme, creatief denken en leiderschap. Op muzikaal vlak volg ik een driejarige zangopleiding gebaseerd op anatomisch-natuurlijke zang, daarnaast studeer en werk ik samen met experts in de stemtechniek gebaseerd op het werk van Roy Hart, en volg ik ademhalings- en componeercursussen en gitaarlessen. Dat is veel, maar hopelijk, als alles volgens plan loopt, komt het over een paar jaar allemaal samen, vermengd met mijn eerdere ervaring.”

Misschien kunnen we een stuk terug in de tijd gaan. Wat was je aanvankelijke motivatie om wiskunde te gaan studeren?

“Mijn schoolopleiding is een beetje vreemd gelopen: mijn vader had een diplomatieke baan bij de Hongaarse luchtvaartmaatschappijen en we verhuisden steeds van het ene land naar het andere. Toen ik heel klein was, hebben we vier jaar in Damascus gewoond. Daarna gingen we terug naar Hongarije, dat destijds socialistisch was. Na een paar jaar verhuisden we naar Cyprus, waar ik naar een Engelse school ging. Zo kreeg ik heel verschillende soorten onderwijs. Het Hongaarse, socialistische onderwijs was erg streng. Het had een hoog niveau: niet in de zin dat je leert denken, maar in de zin dat je grote hoeveelheden data moest leren. Ik weet nog dat ik elf was en we naar Cyprus verhuisden, waar ik qua kennis ineens iedereen ver vooruit was, vanwege het Hongaarse systeem. Maar je leerde in Hongarije niet om een open debat te voeren of ergens een mening over te hebben, zoals je dat in Nederland vast leert. Op Cyprus heb ik dat deel ook meegekregen, dus ik ben erg dankbaar dat ik ook op die Engelse school heb gezeten.

In mijn afstudeerjaar gingen we terug naar Hongarije. Ik was achttien en ik had geen idee wat ik wilde worden. Maar mijn lievelingsvak was wiskunde: ik was er heel goed in, en ik vond het leuk om te doen. Dankzij Cyprus sprak ik ook goed Engels, dus ik heb me bij de universiteit aangemeld voor twee faculteiten: wiskunde en Engels. Ik had toen nooit



Impressie van het catwalk concert

gedacht dat muziek mijn beroep zou worden. Ik zat al sinds mijn zevende op muziekles, maar ik dacht dat dat gewoon een hobby zou blijven. Als ik muzikant had willen worden, dacht ik, had ik dat al eerder moet beslissen, en mijn hele leven als een professional moeten trainen.

Ik denk dat ik ook voor wiskunde koos omdat ik een soort nerd ben. Ik ben, nog steeds, heel systematisch van geest. Ik vind het bijvoorbeeld leuk om de Lego van mijn kinderen op de best mogelijke manier te sorteren. In het begin deed ik dat op basis van de kleur, maar toen ik mijn kinderen met Lego zag spelen, realiseerde ik me dat ze de stukjes helemaal niet op basis van de kleur kiezen; ze kiezen stukjes op basis van hun functie. Dus nu hebben we verschillende dozen met verschillende vormen blokjes. Ik hou ervan om te gaan zitten en gewoon even te sorteren, dat is voor mij een soort meditatie. En ik ben dol op spreadsheets. O mijn God, je zou mijn spreadsheets moeten zien. De wereld zit voor mij in spreadsheets. Ik heb altijd het gevoel dat er één perfecte oplossing is. Voor mij is het regisseren van een voorstelling net zoiets. Ik krijg alle ideeën van het koor, en die structureer ik op dezelfde manier als de Lego van mijn kinderen.”

Vond je het leuk om wiskunde te studeren?

“Nou, het was een grote verrassing. Het leek helemaal niet op wat ik op de middelbare school had geleerd. Op de middelbare school moesten we dingen berekenen met cijfers, terwijl we op de universiteit geen cijfers meer gebruikten, maar alleen Griekse letters. Het was veel theoretischer. Het maken van de opgaven was op de middelbare school echt een spel, maar op de universiteit vond ik het veel moeilijker. De reden dat ik het moeilijk vond, is denk ik dat ik niet echt in wis-

kunde geïnteresseerd was, maar gewoon de oefeningen deed en daarin succesvol was. Op de universiteit had ik er veel minder plezier in.

Ik ging ook naar een koor, een groot koor met tachtig mensen. De dirigent was een heel interessante musicus, met veel diep begrip van de muziek. Vaak vertellen de dirigenten je gewoon de technische dingen: zing dit luid, forte. Maar deze dirigent legde ons de muziek op een heel menselijke manier uit. Waarom is het forte? Wat voor een forte is het? Is het een boze luidheid, of is het marcherende en trotse luidheid? Er kunnen wel honderd verschillende soorten luidheid zijn. Het was echt interessant. Ik zat met mijn mond te luisteren. Dat zette mij aan het denken: misschien heb ik hier toch een grotere connectie mee. De dirigent vroeg mij op een gegeven moment: waarom kies je niet voor muziek? Hij moedigde mij aan om daadwerkelijk te overwegen om auditie te doen. Maar in mijn ogen was de Muziekacademie een onhaalbaar niveau, dus het kostte wat moeite om daarover van gedachten te veranderen. Ik heb eerst een jaar lang privélessen gevolgd, en werd toen toegelaten tot de Muziekacademie. Engels heb ik nog wel afgemaakt, maar met wiskunde ben ik toen gestopt.

Muziek is voor mij nog steeds heel wiskundig. Ik heb een stuk voor Soharóza geschreven waarin ik heel korte frasen gebruik, ze over elkaar heen zet, maar ze steeds één tel verplaats. Als de verschillende frasen samenkomen, verandert het in een emotie. Het lijkt op het stuk van László Sáyra dat we hebben gezongen. Dat begint ook met korte zinnnetjes. Het enige wat je in het begin hoort is iets heel mats, als de regen op de vensterbank druppelt, met maar twee verschillende noten. En dan begint hij de frasen te verlengen, en meer verschillende tonen te gebruiken. Doordat je deze langzame opbouw hebt, kun je je als luisteraar ontspannen. Je wordt meegenomen in deze transformatie. Daarna sterft het weer uit. Dat is voor mij nog steeds een wonder: door alleen al die structuur, geeft de muziek je een gevoel van thuiskomen.”

Goede suggesties voor een Nederlandse wiskundige met een keerpunt in zijn of haar carrière zijn welkom via keerpunt@nieuwarchief.nl.

Nelly Litvak

Department of Mathematics and Computer Science
Eindhoven University of Technology
n.v.litvak@tue.nl



Column Better than blackboard

What's our goal in teaching math to non-math students?

In this column 'Better than blackboard' Nelly Litvak writes about teaching mathematics at university. She will address problems that many university teachers face.

We call it service teaching. Teaching mathematics to non-mathematics students. Physics, chemistry, biotechnology, mechanical engineering, business administration, psychology and innovation sciences... They all need to learn mathematics, there is no question about it. Often this is a re-

sponsibility of the mathematics department, fully or partially, depending on the university.

For many years I, just like many colleague mathematicians, have been pouring my time and soul into service teaching. Even if the material is basic for us, other challenges are plenty. The classes are large, the courses cover many topics in a short time. And maybe even more importantly, many of these students are not motivated for mathematics itself, they came to study something else. So they get bored, struggle, massively fail the exams. I see this every year and I feel that gradually the situation is getting even worse.

And so lately I caught myself wondering, do we, mathematics teachers, have the right goals of service teaching in our mind? Do we even have well-defined goals besides covering a scary long list of topics in just a couple of weeks? What exactly is our service? And do we serve non-math students well?

What to teach and what to learn

Usually when we think about the goals of a service course, we think in terms of topics. Different programs have different needs, and we do our best to align the topics with the program. However, covering a list of topics is not what I mean by 'the goal'.

To explain what I mean exactly by the goal of a course, I will use an annoying method of business trainers. (A side remark, as a woman in science, I went through tons of trainings, that's why I know). So, the method is called 'Three Why's'. Here is my attempt, feel free to answer the Three Why's differently, but I hope you will agree in general lines. Here we go.

- Students need to learn these topics.
- Why do they need to learn these topics?
- Because they need it in their further study.
- Why do they need their study?
- Because this is how they become a qualified professional.
- Why do they need to be a qualified professional?
- Because then they have the tools to solve complex problems in practice.

Aha. So eventually we need to give the students mathematical tools to solve complex problems in practice. Since recently, for me, this is the goal of my service teaching.

And the beauty is, this is exactly what the students want to learn. I know because I asked. In Figure 1 you see a screenshot from the course Statistics for Mechanical Engineering at the University of Twente. Students had to distribute 100 points over different possible goals. The figure shows the total points for each goal.

Yes, many students just want to pass. This is very typical in our grade-oriented

I am happy to introduce a student illustrator Mara Chelărescu. Mara is the third year Applied Mathematics student at Eindhoven University of Technology. In her drawings, Mara takes inspiration from her favorite animated shows. She has been passionate about illustration and animation for as long as she can remember. Her future goal is to find a way in which she can combine her passions to animation and mathematics. About illustrations for this article, Mara says: "A really big point for me was to showcase women in my drawings since I believe we are already underrepresented in STEM. Additionally, I wanted to make sure to dress them up in cute clothes to show you can both be smart and dress pretty." I couldn't agree more! I hope Mara's cheerful drawings will brighten your day, as they did for me.

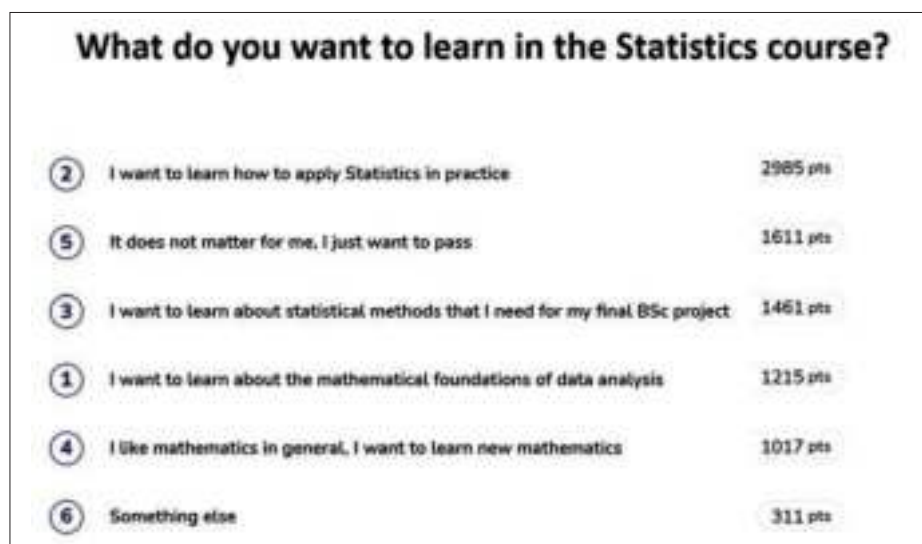


Figure 1 Students distributed 100 points over six possible goals of the course. The figure shows a total score for each goal. Most common goal is to learn how to apply Statistics in practice.

system, and we will come back to it in later articles. Still, the goal “I want to learn how to apply mathematics in my profession”, comes confidently first. Bingo, this is exactly what I want to teach them! Once students and I agree on the common goal, we are more likely to achieve this goal together.

Framing matters

One may say, there is no difference between the high-level goals and the list of topics. Students subscribed to the program, and by doing so they agree on the topics, so we already have common goals.

As a rational logical mathematician, I hear you. However, Daniel Kahneman received the Nobel prize for showing that humans are not rational, and this is what I ob-

served from my experience once I started paying attention. If I have to explain how I feel the difference, I would say, for me the difference is in a mental dialogue with the students. This is more emotional than mathematically precise, but learning is an emotional process. Recently I had a chance to hear a fascinating lecture by educational psychologist André Baars with exactly this title: ‘Learning as an emotional process not a rational one’.

Let me make a humble attempt to demonstrate how setting a goal versus listing topics feels differently for me. I will do this with a mental experiment.

Suppose I open a course with a list of topics. Then my mental dialogue with the students is something like this:

I: “These are the topics that you will need to learn. Believe me, they are important for you.”

What do you think is the reaction in students’ mind? I don’t have an illusion that even one student thinks: “Oh, yes, confidence intervals! Cannot wait to learn about them!” More realistic reactions are very different.

Students: “I have no idea about these topics, I hope I can pass.” “I believe you, but I don’t see myself how it is relevant.” “Another math course, I have to go through it.”

I know these sound negative and stand-offish. But what realistic positive reaction do you expect? If you come up with one, please drop me an e-mail.

Now, when my goal is to give the students the tools they need, my conversation is very different.

I: “What do you want to learn?”

Students: “I want to learn how to use Statistics in my profession.”

I: “Great, this is exactly what I want to teach you!”

This sounds more positive, and this is important. We want the students to invest time and effort in the course, so they must feel that they do something meaningful for them. It is not a magic motivation bullet but at least it doesn’t push the students to the passenger sit from the very start.

Weeding the topics

It is a well-known that once you set a clear goal, things somehow start happening for you. One rational explanation of this mysterious fact is that every day we make lots of choices. Once we have formulated a clear goal, we start making choices towards this goal, consciously and unconsciously.

I see this happening in my service teaching in a very tangible way. Once I decided that I am there for the students to become better professionals, I started dramatically reducing the list of topics. For instance, soon I will teach Statistics for Chemistry. I have only four weeks, and the list of topics is long. I went through these topics with my colleagues in the Chemistry department, and asked, for instance, “Is classical hypothesis testing often used in chemistry?” No? Remove it from the list. I love to explain the type-II error, but tough luck. Kill your babies. Better spend more time on error propagation, which is heavily used in chemistry.

What if one day some unfortunate chemist from my class needs hypothesis testing? I believe that if this chemist understood the reasoning behind error propagation, then they will figure out hypothesis testing easily. Students cannot learn everything in 4 weeks. Something has to go. I stick to the fundamental understanding and to a few topics, most relevant to the students’ specialty. These are the essentials. Learning more than that is a luxury that these students can’t afford. They are very busy learning their own field, which is not mathematics!



Illustration: Mara Chelărescu



Illustration: Mara Chelărescu

Screws are relevant and dices are not

Students' evaluations in service teaching can be very painful. Most stinging part, at least in my experience, is a medium to low score for the relevance.

It is painful because as a mathematician I am thrilled about the power of mathematical abstraction. I explain probability on a dice, and exactly the same theory applies to train parts, coding errors, stock markets and genetic mutations. It is very natural to try to bring this message to the students. Look, these are dices, but it could be screws, grades, or anything you like.

Sadly, this doesn't work. When I taught Statistics for Mechanical Engineering for the first time, long ago, this was the comment: we don't see the relevance, give us mechanical engineering examples. My first reaction was that the students were wrong about it. They were completely missing the most essential translation step! But then I realized that this translation step is most relevant for me, not for them. I am a mathematician, it is my job to see mathematical models everywhere around me, it is the essence of my profession to see how dice and screws are the same thing. However, engineers generally don't care that the same mathematical model applies everywhere. Of course, they are perfectly capable to learn this, but why should they? They have many other things to learn that we, mathematicians, have no idea about. When it comes to mathematics, they want to see how it serves their profession. When we teach them with dice, we basically ask them to do our job.

Alright, now what? How can I come up with relevant examples? Problem is, I have no knowledge in Mechanical Engineering!

And then I had an idea, which I believe was my first serious step in improving my service teaching. Next year at the first class I said: "Look, last year students asked for more examples in Mechanical Engineering. Fair enough, I agree this is useful. However, here is a problem. I cannot come up with these examples because I am not a mechanical engineer. But guess what? You are!"

I gave them a bonus assignment for maximum +1 point to the grade, to come up with their own examples for the course material. About 10% of the students did. I included these examples in the lectures (I gave lectures back then, now I don't, see my column 'We shouldn't give classroom lectures anymore' [3].) Next year I did it again. After two years, I had one or two examples for every topic. And they were good! There were examples about companies in the Netherlands, research at our university, local construction works, et cetera.

After that my relevance scores got better. Yet, I constantly had to raise my game. I replaced a reader by a book written for engineers. I included case studies relevant to the project in this quarter. In fall 2019 I recorded a complete set of videos [2]. Each and every example in the videos is related to Mechanical Engineering. By far the majority of the examples came from the students.

As I am writing this article, this comment appeared on YouTube three days ago, on the video about the expectation and the variance of discrete random variables: "Thank you so much for this playlist. It is literally life-saving! This is the best playlist I have come to find so far. Much appreciated!!" This is nice to hear. Yet, now that I have to teach Chemistry students, I will make another playlist. Of course, the mathematical content is exactly the same. As a mathematician I know, one great basic Statistics course is enough for students of all specialties worldwide. This by the way was exactly a comment of a physicist who happened to see me recording. But relevant examples have a function: they make the relevance clear to the students. It matters for them which examples I use. And therefore it matters for me.

Choices in testing

Let me state this right away, "come in through the door", as the Dutch saying goes. Standard written tests don't work in service teaching. These tests generate piles of papers full of unreadable scribbles. Grading this, parsing half a point here and there, takes way too much time and kills my soul. If there is one thing I want to change in our system, it is this: eliminating written tests in the current form, especially for non-mathematics students. My principles are:

- Use automatically graded digital tests whenever possible.
- If a write-up is needed, then assess the quality of writing.
- Use assignments instead of exams to assess application of mathematics in context.

Now I will explain these principles in somewhat more details.

Use automatically graded digital tests whenever possible

In basic math courses, I would go for a fully digital test, graded automatically. It will probably not take long before ChatGPT can grade a basic written test, but before AI comes that far, I will use multiple choice and final answer questions.

Colleagues often say, this way you cannot see the students' way of thinking. It depends on how you set up the test, but I agree, this is mostly correct. Yet, I believe that the write-up produced in a standard written test as we do it now, doesn't add much. Here are my reasons. In most cases, if a student gives the right answer, they had the right reasons. The only added value of a written test is to give partial points to the students who made some right steps but arrived to a wrong answer. However, in this case, the write-up is often very poor. So, the teachers spend tons of time and efforts deciphering scarcely written calculations, and deciding whether a partially right idea is worth 1 or 1.5 points. I am convinced that these extra points don't justify the effort.

Students in my courses do complain about not getting partial points. They say, each question is all or nothing. My answer is, yes, and I find this fair. There are many questions in the test, you need to answer only 50% correctly to pass. If you cannot do this, I believe, you shouldn't pass. I love

the binary nature of a digital test. I strongly prefer 50% questions answered correctly than 100% questions answered half correctly.

Partial points reward the students whose knowledge is not very strong, at cost of tremendous amounts of time and decision-making effort from the teachers. Consequently, while teachers are sinking in parsing points, they have no time to develop more effective learning and testing methods. It is truly a vicious circle. I strongly believe that teachers' time is much better spent on effective learning activities and interaction with the students. Then maybe those precious partial points won't matter so much!

If a write-up is needed, then assess the quality of writing

Sometimes a correct write-up is essential. For instance, computer science students need to learn how to write proofs. In the previous column of these series, 'Do we teach what we preach?' [5], Lotte Weedage and I explain how we use Polya's four steps in teaching mathematics students how to write mathematical arguments, and in assessing their writing. For non-math students, Polya's four steps are an overkill. But we can do something similar.

I usually rephrase the Polya's four steps in three steps as follows:

Step 1. Analyse the problem. (Write down what is given, what you need to compute, which mathematical models/statements/methods are relevant.)

Step 2. Solve the problem. (Define the variables, perform the calculations/derivations, explain your arguments.)

Step 3. Analyse the answer. (Does the answer make sense? Why or why not? Is there another way to check the answer? What are the practical implications? Et cetera.)

These three steps sound reasonable to the students. If I have to grade their work, I give 40% for Step 1, 40% for Step 2, and 20% for Step 3. I give 0 for Step 3 if a student writes "The answer is reasonable" but doesn't explain why. I reduce many points in Step 2 if arguments are not explained, or when definitions of the variables are missing, incomplete, or inconsistent. This way the students know that I take writing seriously.

The three steps require a lot of writing from the students, therefore I believe that for non-math students, we can demand such extensive write-up only for a few problems. In my Statistics course for the third year BSc Mechanical Engineering,

I asked students to use the three steps only in two Case Studies (three problems each), and in the Final Assignment (I will tell more about this assignment below). The students mostly didn't mind the detailed write-up because it was required only when the problem was framed as a project. The Mechanical Engineering program has many projects with project reports. So, for these students, it was natural to write a small report in Statistics.

Another way to assess the quality of writing, is to set clear and simple criteria that tell the students what a good write-up is. For instance, in the course 'Probability and Statistics' for the first year BSc Computer Science, at Eindhoven University of Technology, we will use the following criteria:

Criterion 1. The problem is solved correctly.

Criterion 2. All variables are defined.

Criterion 3. All steps are explained.

In this course, we give full points only if all three criteria are met, and partial points if two criteria are met. Again, we don't require this for all problems. We chose three topics where a derivation or a proof is essential, and we ask open questions only for these three topics. The rest of the topics are tested digitally with multiple choice and final answer questions. The course is

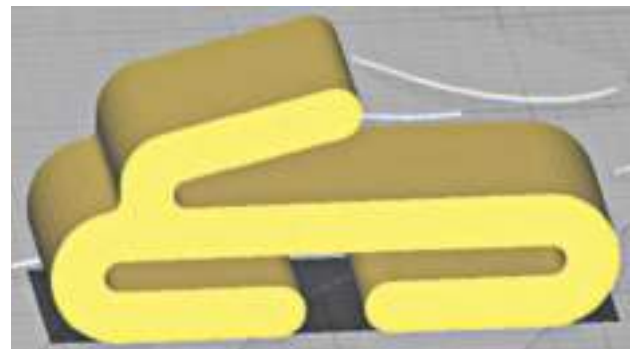
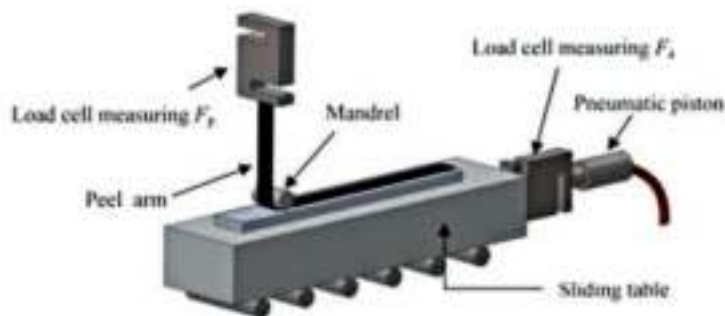
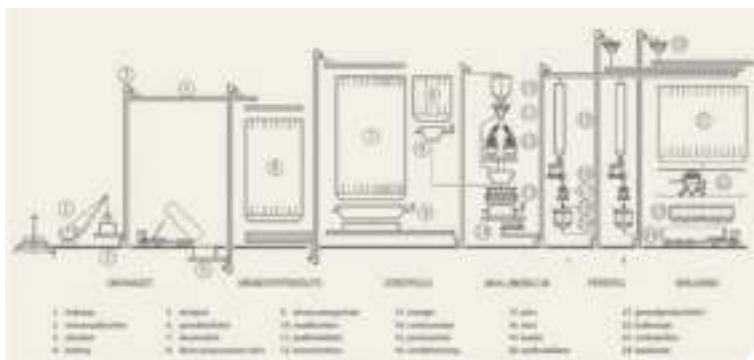


Figure 2 Examples of a Final Assignment, Statistics for Mechanical Engineering. Top left: factory for producing animal feed. Top right: building a tiny house. Bottom left: equipment for removing medical glue. Bottom right: a 3D printed part for holding a medical mask on a ski helmet.

running right now, and I will tell in later articles how this worked out.

Use assignments instead of exams to assess application of mathematics in context

As I said above, the goal of my Statistics course for Mechanical Engineering is to teach the students how to apply Statistics in their profession. Then I quickly realized that the standard test, written or digital, will not work for assessing this goal. In a test, even if a problem is based on a case from Mechanical Engineering, it is already formulated as statistics problem. In my experience, based on the many-many tutorials, when students see such problem, they don't think about how the questions is related to the context. Instead, they think: "Which formula should I use?" But this is not what I want to teach and not what they want to learn. I wish, they think: "How can I apply Statistics in this situation?"

And then I remembered my bonus assignment, where I asked the students to come up with their own engineering examples. Some of them wrote that they liked this assignment, and it helped them to understand the material. So, from 2021, I replaced the exam with a final assignment. Students have to find their own cases, formulate statistics problems, solve them, and submit the solution in written in Steps 1,2,3. Of course, I had to make sure that the self-made problems have sufficient coverage and difficulty level. I will not explain all details here, but my co-teacher Fulya Kula and I wrote an article about it [4], you can find all details there. Or, just feel free to reach out, I will be happy to tell you more.

Not all students love the assignment, but we received many very positive responses. And students' creativity and the variety of topics never cease to amaze me! Some examples are in Figure 2.

The drawback of the assignment is that each assignment is a separate project, and it takes a lot of time to grade. In the last edition of the course, Fulya Kula and I tried to mitigate this by adding a group part and reducing an individual part. Even then the grading takes a lot of time. On the bright side, this grading is very interesting because of the variate examples and detailed solutions. And if a student failed the assignment, they can improve it based on our feedback and resubmit once more. So neither ours nor students' work is wasted.



Figure 3 The scheme of the course 'Statistics for Mechanical Engineering', University of Twente.

I believe that assignments on self-chosen topics are a very good way to test students' ability to apply the theory to practice. When students have a choice, they are more in control and have more agency in their study. And we get an unprecedented collection of great examples, and another evidence how fantastically talented and creative our students are!

Choices in teaching

I love the quote from education expert Tim Fawns: "Teachers should shift their focus from generating materials to organizing activities." When designing a course, we always have to ask ourselves: what the students will do? Here is what I believe students should do:

- Learn the theory (read, watch, listen, ask questions, answer questions).
- Practice in the same form as in the exam, and get feedback.

Practicing for exam may sound grade-oriented, but if our exam is meaningful,

then practicing for it is meaningful, too. Plus, self-testing is a very effective way of learning.

Figure 3 shows the scheme of my course Statistics for Mechanical Engineering. I use this kind of scheme in most of my courses, you might even recognize it if you read my previous article [5].

The upper (green) row is for learning the theory. The material is divided in five units, and there is one class for each unit. Before a class, the students watch videos and read a book. During the class, I use online quiz about theory with questions that provoke errors and discussion. Then I explain the solution. In Figure 4 you can see my favourite question on hypothesis testing. The topic is conceptually difficult, and it shows! When confronted with such questions, students realize what they don't know, make mistakes in a safe way, and immediately hear what they did wrong. All these are is very useful for learning [1].

After the class, students make a mandatory quiz at home, without a grade but



Figure 4 A question on hypothesis testing.



Illustration: Mara Chelărescu

with a high minimal score requirement. I use standard problems with randomized numbers, so a student cannot just copy a numerical answer. If they want to copy then at least they must copy a script or a formula and use it themselves.

The attendance of interactive classes is variable but generally higher than that of lectures.

The bottom (blue) row is where students practice to write the solution in three steps

as we require in the Final Assignment. We offer two Case Studies, based on the project of that quarter, each consisting of three problems. The students write solutions at home. In class, they work in groups, compare their solutions to each other and make corrections. We walk around and give feedback on their solutions and write-up. After the discussion, they can see our solutions in the same three steps. Case Studies have no grade but it is mandatory to submit

the three steps for all problems, and this is checked by a student assistant. Importantly, students practice the three steps and compare their work to our solutions in this form throughout the course material.

I insist that, if we require write-up at the exam, then students must practice write-up in a structured way, and get feedback. Showing how to do it is useful but insufficient. The students will not learn how to write by watching the teacher writing! I hope one day Programme Committees will disallow open written questions if the course doesn't assume structured write-up practice with feedback.

If the test is fully digital, there is no need to practice write-up. Then, in the bottom row it is enough to give many practice tests with automatic feedback, and include opportunities to ask individual questions (tutorials, Q&A's, office hours).

Teaching proper mathematics?

Many times I heard my colleagues saying that math courses must be taught by mathematicians because we understand the nuances of mathematics. We can teach mathematics properly. I agree with this. Even basic mathematics must be explained with rigor. This is the essence of mathematics.

But sometimes I feel we sound like a Michelin chef who wants to give all their customers a proper dining experience, in no less than five courses with sophisticated taste palette. This is fine if our guest wants to spend their evening enjoying haut cuisine. But what if our guest wants to go to bed early today, and run a marathon tomorrow? Then all they need is a quick serving of a simple nutritious food. I am sure that Michelin chef can cook a yummy healthy meal much better than the runner can do at home. So why don't we do just that?

We call this service teaching. So, let's not judge our future biologists, psychologists, engineers and policy makers by their ability to appreciate fine abstract mathematics. Let's serve them the mathematics that they need.

References

- 1 S. Dehaene, *How We Learn: Why Brains Learn Better than any Machine... For Now*, Penguin, 2021.
- 2 N. Litvak, Applied statistics and probability for engineers, YouTube playlist (2020). <https://tinyurl.com/3t95wcx>.
- 3 N. Litvak, We shouldn't give classroom lectures anymore, *Nieuwe archief voor Wiskunde* 5/24(3) (2023), 145–149.
- 4 N. Litvak and F. Kula, No exam: assessment of third-year engineering students on the basis of self-generated Statistics cases, *International Journal of Mathematical Education in Science and Technology* 53(3) (2022), 647–655.
- 5 N. Litvak and L. Weedage, Do we teach what we preach?, *Nieuwe Archief voor Wiskunde* 5/24(4) (2023), 233–238.

Olivier de Gaay Fortman

Institut für Algebraische Geometrie

Leibniz Universität Hannover

degaayfortman@math.uni-hannover.de

Column Wiskundigen in den vreemde

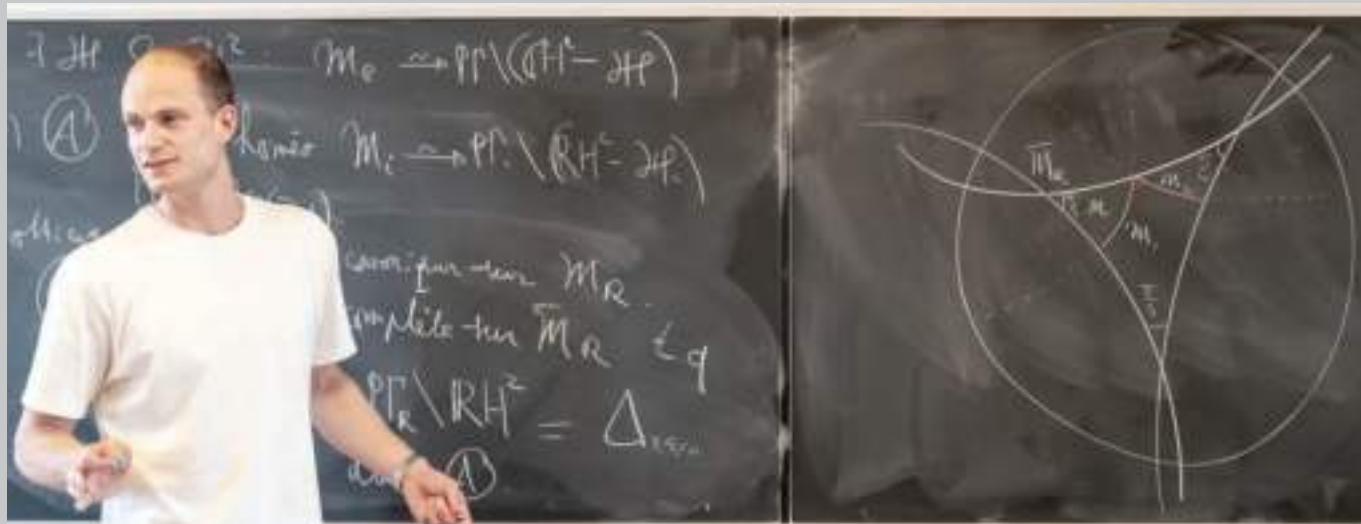
Ervaringen van een wiskundige in Parijs

In deze rubriek doen wiskundigen verslag van hun ervaringen als wetenschapper in den vreemde. Olivier de Gaay Fortman verbleef van 2019 to 2022 als promovendus aan de École normale supérieure in Parijs. Hij blikt terug op deze periode. Inmiddels is hij werkzaam als postdoc aan de Leibniz Universität Hannover bij het Institut für Algebraische Geometrie.

Op een dag, toen ik nog masterstudent was, Googelde ik 'PhD Paris' en stuitte op een vacature waarbij twintig promotieplekken in Parijs werden aangeboden. De deadline was één dag later. Er stond dat ik de naam van een Parijse professor moest invullen. Ik vulde Olivier Benoist in, een zeer vriendelijke, jonge en respectabele Franse wiskundige met wie ik ooit op een con-

ferentie in Italië een minuut of tien had gepraat. Het systeem vermeldde dat de potentiële promotiebegeleider mee diende te werken aan de sollicitatie, maar dit gedeelte las ik niet. Ik klikte op 'verzenden' en kreeg meteen per mail te horen dat Benoist alle documenten over mij (goedkeuring van de sollicitatie, aanbevelingsbrief, goedkeuring van de wiskundeafdeling) binnen achtenveertig uur in moest dienen. Dat had ik niet begrepen!

Benoist reageerde aanvankelijk afwijzend op mijn zeervreemde mail, waarin ik mij excuseerde voor de verwarring, en hem tegelijkertijd vroeg of hij misschien niet toch geïnteresseerd was mij te begeleiden, en zo ja, of hij dan binnen achtenveertig uur allerlei documenten wilde voorbereiden. Wonder boven wonder ging hij kort daarna toch op het aanbod in. Een half jaar later



Olivier de Gaay Fortman

pakte ik mijn koffer en reed met mijn moeder en mijn vriendin met de auto naar Parijs. Drie dagen daarna lieten zij mij op mijn kamer in het *Collège néerlandais* achter. Het avontuur ging beginnen.

Het *Collège néerlandais* is een architectonisch stijlvol gebouw, ontworpen door de Nederlandse architect Willem Dudok, en maakt deel uit van de *Cité Universitaire*. Dit is een grote, internationale campus, en wordt gezien als een vrijplaats voor ontmoetingen en sport. Ik was er alleen 's avonds en in het weekend.

Het liefst was ik te vinden in mijn kantoor, mijn geweldige kantoor, dat uitzicht bood op de Val-de-Grâce, de Tour de Montparnasse en de Eiffeltoren, mij verdiepend in de Hodge theorie en de reële algebraïsche meetkunde. Immers, hoewel ik het pas te horen kreeg op mijn eerste werkdag, was de universiteit waaraan mijn begeleider — en daarmee ook ikzelf — verbonden was, de *École normale supérieure de Paris*, afgekort ENS. Deze instelling (het is officieel geen universiteit) bevindt zich in het hart van één van de mooiste wijken van Parijs: Quartier Latin, de 'Latijnse buurt', zo genoemd vanwege de vele studenten die er al honderden jaren rondzwerven, als vanouds met elkaar converserend in het Latijn. Dat laatste was niet meer zo toen ik er kwam, maar Engels werd er evenmin gesproken. Wie gaat werken in Parijs, spreekt Frans.

Ik vond het heerlijk op de ENS. Was het de kloosterachtige sfeer? Was het de mooie fontein met de oranje vissen, allen Ernest geheten, naar de toenmalige directeur vernoemd? Was het de binnentuin eromheen, met de mooie struiken en bomen, en de lange rijen illustere marmeren mannenhoofden? Waren het de nooit ophoudende, rinkelende en zoemende stadsgeluiden die door mijn kantoor zweefden? Was het de driegangenlunch, dagelijks van 12.00 tot 13.00 uur, of de aansluitende koffiepauze

van 13.00 tot 13.30 uur, vergezeld van dure Parijse chocola die Nicolas Bergeron, de directeur van de wiskundeafdeling, kocht en ruimhartig met zijn collega's deelde? Was het onze gemoedelijke groep *Algèbre et géométrie*, die inclusief professoren, promovendi en postdocs, niet meer dan twintig personen in totaal telde? Was het de vriendschap met kantoorgenoot Romain Branchereau? Of waren het de wiskundige discussies die ik wekelijks met Benoist voerde, waar ik zo ongelooflijk veel van leerde?

Het was een rustige periode, weinig afleiding, hard werken. Veel focus, slenteren door Jardin du Luxembourg, wiskunde.

Het grootste gedeelte van mijn tijd besteedde ik aan onderzoek, en werkte aan problemen over moduliruimten en algebraïsche cycli in reële algebraïsche meetkunde. Ik genoot van het wekelijkse *Séminaire de géométrie algébrique* dat geleid werd door Benoist, Debarre, Han en Voisin. In mijn tweede en derde jaar mocht ik lesgeven; ik leidde een leesgroep *Courbes Elliptiques* in mijn tweede jaar, en het werkcollege *Analyse Complexe* in mijn derde jaar. De studenten waren zo goed dat het eigenlijk geen lesgeven was: als ik praatte, dan zaten ze mij met grote ogen aan te staren, aandachtig luisterend en ieder woord in zich opzuigend; als ik een vraag stelde, dan sprong er iemand op om het antwoord te geven.

Mijn vrouw Nola, toentertijd nog mijn vriendin, voegde zich na anderhalf jaar bij mij: samen met haar rode kat Kees betrokken we een appartementje van zevenentwintig vierkante meter. Het lag op Place Monge, een prachtig plein in het hart van Quartier Latin, op tien minuten lopen van de ENS, tien minuten van de Seine, en vijf minuten van het koffiezaakje Strada waar Nola koffie serveerde op de dagen dat ze niet aan haar masterscriptie werkte. We hadden weinig ruimte en weinig geld. In de avonden en weekenden bestond het leven uit lange wandelingen langs de Seine. Het was een prachtige tijd.



Olivier de Gaay Fortman tijdens de verdediging van zijn proefschrift

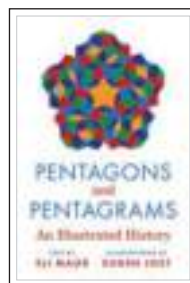
Boekbesprekingen

| Book Reviews

Redactie: Hans Cuypers en Hans Sterk
Secretariaat: Enna van Dijk

Review Editors NAW - MF 5.092
Faculteit Wiskunde & Informatica
Technische Universiteit Eindhoven
Postbus 513
5600 MB Eindhoven

reviews@nieuwarchief.nl
www.win.tue.nl/wgreview



Eli Maor, Eugen Jost (illustraties)

Pentagons and Pentagrams An Illustrated History

Princeton University Press, 2022

xvi + 166 p., prijs € 28,76

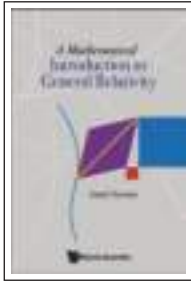
ISBN 9780691201122

Alsof het zo bedoeld was, is er nu *Pentagons and Pentagrams* (Eli Maor, voormalig professor Geschiedenis van de Wiskunde), de logische opvolger kun je zeggen (hoewel er volkomen los van staand, want zowel andere uitgevers als andere schrijvers) van *The Secrets of Triangles* en *A Cornucopia of Quadrilaterals* (beide eerder besproken in dit prachtblad). Weliswaar niet al te diepgravend, maar toch een charmant boek. Vooral voor de meetkundigen onder ons, maar ook zeer geschikt voor de geïnteresseerde leek (de beschreven wis- en meetkunde is elementair) en dus een mooi cadeau voor een middelbare scholier met wiskunde B in het profiel, vlot geschreven (uitstekend te volgen vanaf klas 4 vwo), fraai geïllustreerd (deels in kleur) door de Zwitserse kunstenaar Eugen Jost, met uiteraard vele verhelderende meetkundige tekeningen, maar ook veel afbeeldingen van gebouwen (het Pentagon), van wiskundige kunst (een enkele fractal, wat betegelingen en schilderijen) en van bloemen, planten en kristallen en zelfs van een vijfhoekig dier.

De onderwerpen die worden behandeld zijn de bekende speciale irrationale getallen zoals φ , π en e , de onvermijdelijke gulden snede, de constructie van een regelmatige vijfhoek, de zogenaamde vijfhoeksgetallen en de al genoemde (al dan niet periodieke, vlakvullende) betegelingen met (al dan niet regelmatige) vijfhoeken, maar wellicht minder bekend zijn de boeiende beschrijving van de zoektocht naar (misschien) in de natuur voorkomende (quasi)kristallen met vijfhoekige zijvlakken en het hartverwarmende verhaal van Marjorie Rice (1923–2017), die als huisvrouw zonder enige wiskundige opleiding en met vijf [sic] kinderen toch in staat bleek maar liefst vier betegelingen met convexe vijfhoeken toe te voegen aan de op dat moment bekende negen. Ze leefde net lang genoeg om mee te maken dat er nog twee werden ontdekt, waarmee het (een maand na haar dood bewezen) totaal op vijftien kwam. Ook aardig is het hoofdstukje over puzzels gebaseerd op vijfhoeken en dan in het bijzonder *The Ploughman's Puzzle*, ontworpen door de fameuze Britse puzzelontwerper H.E. Dudeney (1857–1930), zoals u weet een tijdgenoot en de grote concurrent van de minstens zo fameuze Amerikaanse puzzelontwerper Sam Loyd. Een toevallig in de buurt van een landgoed vertoevende reiziger (zo verhaalt de puzzel) beweert dat het mogelijk is 16 bomen zo te planten dat er 15 rijen ontstaan met telkens precies 4 bomen per rij. Wellicht nu even proberen? De ingenieuze oplossing wordt gelukkig verstrekt. Nuttig zijn ook de vijf (toeval?) appendices, namelijk over euclidische constructies, over Fibonacci-getallen, een overzicht van gebruikte formules, complete oplossingen van alle puzzels (hulde, zo hoort het) en een waarlijk fraai bewijs van het slechts bestaan van exact vijf platonische lichamen.

Voor velen van u wellicht een pietsje te algemeen boek, maar toch een onderhoudend en mooi uitgevoerd sieraad voor de immer uitdijende boekenkast.

Joop van der Vaart



Amol Sasane

A Mathematical Introduction to General Relativity

World Scientific, 2021

xvi + 483 p., prijs £145.00

ISBN 9789811243776

The book *A Mathematical Introduction to General Relativity* by Amol Sasane is a great addition to the — not all that extensive — list of mathematically rigorous introductory textbooks on general relativity written in the *Definition, Theorem, Proof* style. It sets itself apart by assuming no prior familiarity with differential geometry whatsoever (and only the slightest familiarity with topology) and by including a great number of exercises with detailed solutions.

Roughly the first two-thirds of the book focuses on introducing the language of differential geometry and the theory of semi-Riemannian manifolds, starting essentially from scratch and going through many of the topics that would typically be introduced in a series of undergraduate mathematics courses: manifolds, (co)tangent bundles, tensor fields and forms, semi-Riemannian metrics, the Levi-Civita connection, parallel transport, geodesics, curvature, and integration. It does so in a precise but very understandable way, always explaining the intuition behind certain definitions that might seem abstract at first. Physically relevant examples and applications are given throughout to illustrate the concepts. The chapter on geodesics, for instance, includes a calculation of the deflection angle of light passing by the sun, a key result related to one of the classical tests of general relativity.

With all the mathematical preliminaries in place, the stage is then set to turn to general relativity itself in the final third of the book. After a discussion on classical (i.e. Newtonian) spacetime, special relativity and electrodynamics in curved spacetime, the energy-momentum tensor of matter is introduced. A particularly nice motivation for the energy-momentum tensor of a perfect fluid is given, which is often lacking even in physics textbooks on general relativity. Also, the equation of state for dust and radiation is well motivated. Then Einstein's field equations are formulated, the Newtonian limit is discussed, and several solutions are studied. The focus is mostly on Schwarzschild black holes and Friedmann–Lemaître–Robertson–Walker (FLRW) cosmology, but some attention is also given to (exact as well as linearized) gravitational waves, the Gödel spacetime (and its closed timelike curves), and the Reissner–Nordström spacetime.

The book is aimed at advanced undergraduate or beginning graduate mathematics students. Compared to similar books on mathematical relativity such as *General Relativity for Mathematicians* by Sachs and Wu and *Semi-Riemannian Geometry with Applications to Relativity* by O'Neill, this book is more elementary and hence more accessible, in particular also to mathematically inclined physics students. For the typical physics student, however, it should be said that there are many more suitable introductions to general relativity out there (*Spacetime and Geometry* by Carroll to name just one). It is not the main aim of this book to teach the reader the typical physicist's way of thinking and problem-solving.

But if the goal is to learn about the rigorous mathematical formulation of the theory, then this book is an excellent choice.

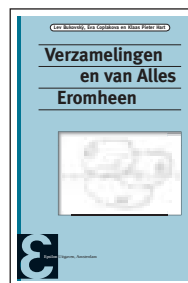
Due to the many exercises — for which detailed solutions are provided, spanning the last 150 pages — the book is ideally suited for self-study. But also in the context of a course on semi-Riemannian geometry, mathematical relativity, or both, this book would be a perfect companion. In the future, I would certainly consider this text as my go-to reference for such a course.

A small point of criticism concerns the prerequisites. According to the author, these consist of undergraduate-level mathematical analysis (e.g. having seen the inverse function theorem in a multivariable context, Picard's existence and uniqueness theorem for ordinary differential equations, et cetera) and undergraduate-level linear algebra. There is no mention of point-set topology and indeed the very first definition in the first chapter is that of a topological space, reinforcing the reader's idea that no background in topology is required. Later, however, familiarity with certain topological notions is nevertheless assumed. The notion of a continuous map between topological spaces, for instance, is not defined but used frequently. As such, a basic understanding of topology is necessary to understand everything discussed in the book, and I can't say for sure whether this was the author's intention or if some definitions (I spotted just two or three) are just missing by accident. By simply adding these definitions, the book could have been made even more accessible, requiring no topological prerequisite knowledge whatsoever. Almost too good to be true! But with the missing definitions, such a claim is a tough sell, of course.

But this is only a minor point of criticism. If the book is used as part of a lecture course, then a single lecture or one or two pages of lecture notes would be more than sufficient to introduce and illustrate all of the necessary topological notions, and hence a course could easily be designed around this book for an audience of students without any topological background, if so desired.

To conclude, the book is well written and covers all of the essential topics relevant for an elementary course on mathematical relativity in a clear, precise, and intuitive way. I warmly recommend it.

Sjors Heefer



Lev Bukovský, Eva Coplakova, Klaas Pieter Hart

Verzamelingen en van alles eromheen

Epsilon Uitgaven 96, 2022

viii + 192 p., prijs €24,-

ISBN 9789050411905

Waar het boek van de natuur geschreven is in de taal van de wiskunde, is de wiskunde tegenwoordig geschreven in de taal van de verzamelingenleer. Deze taal is de creatie van de Duitse wiskundige Georg Cantor (1845–1918) en werd aanvankelijk geplaagd door paradoxen en mocht op de nodige weerstand rekenen. Desondanks is deze uit de moderne wiskunde niet meer weg te denken. Hele vakgebieden, zoals de topologie, waren zonder deze creatie ondenkbaar.

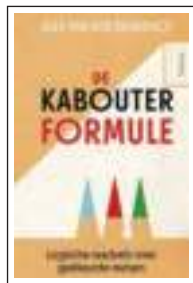
Dit boek, geschreven door Lev Bukovský en vertaald en bewerkt door Eva Coplakova en Klaas Pieter Hart, geeft een inleiding op Cantors paradijs (in de woorden van Hilbert). Het legt de taal van de verzamelingenleer uit en hoe die in andere vakgebieden in de wiskunde, van analyse tot de combinatoriek, wordt gebruikt. Dit alles is helder en prettig leesbaar opgeschreven en er komen veel leuke onderwerpen aan bod; ook deze reviewer heeft er het een en ander van opgestoken.

Maar verzamelingenleer is meer dan een taal alleen. Cantor ontwikkelde ook een theorie over oneindige verzamelingen en oneindige getallen (kardinaal- en ordinaalgetallen). Ook deze theorie komt aan bod en de fundamentele resultaten van deze theorie worden duidelijk uitgelegd.

Meer filosofische aspecten of alternatieve grondslagen worden in dit boek niet besproken. De paradoxen worden genoemd en er wordt uitgelegd hoe deze in de axiomatische verzamelingenleer worden vermeden. Het boek eindigt met een presentatie van de verzamelingenleer als een formeel systeem in de stijl van Zermelo en Fraenkel, maar daar wordt geen gebruik van gemaakt: de behandeling van de verzamelingenleer is in dat opzicht 'naïef'.

Daarmee is dit boek een wiskundige inleiding op de verzamelingenleer, die verzamelingenleer met succes als een leuke tak van wiskunde presenteert. Voor een vwo-leerling is het waarschijnlijk te moeilijk: het boek gaat ervan uit dat de lezer weet wat een bewijs is en logische notatie kan lezen. Maar een bachelorstudent kan dit boek volgens mij prima tijdens de vakantie lezen; en ook oud-studenten die geen verzamelingenleer hebben gezien en toch eens de fundamentele resultaten willen zien, kan ik dit boek aanraden.

Benno van den Berg



Alex van den Brandhof

De Kabouterformule
Logische raadsels over gekleurde mutsen

Uitgeverij Prometheus, 2023

202 p., prijs € 19,99

ISBN 9789044653793

Wat is het verschil tussen een raadsel en een opgave? Van een opgave weten we meestal welke oplossingsmethode we moeten hanteren, maar bij een raadsel is dat niet zo. En dan moeten we soms alles uit de kast halen om een oplossing te verzinnen: logica, combinatoriek, modulo-rekenen, kansrekening, cryptografie, axiomatische verzamelingenleer. Het blijkt allemaal nodig om de raadsels van Alex van den Brandhof in zijn boek *De Kabouterformule* op te lossen. En voor wie niet bekend is met deze takken van de wiskunde is het een leuke kennismaking.

De hoofdpersonen van de raadsels zijn keizer Beulmans en een aantal kabouters (soms aftelbaar veel) die hij gevangen neemt. Een vast ingrediënt zijn de mutsen die de kabouters op hun hoofd krijgen met een kleur of een getal erop. Soms krijgen ze zelfs een hele stapel mutsen op. Het probleem met zo'n muts is dat anderen je muts wel kunnen zien, maar jij zelf niet. Hoe kunnen de kabouters erachter komen welke muts ze op hebben, of hoe vergroten

ze de kans om goed te gokken? Want dan komen ze vrij. Het zijn pittige raadsels.

Bij elk raadsel zijn nog meer vragen dan alleen de vraag naar de oplossing. Hoe verzin je bijvoorbeeld de oplossing? Het kan meteen duidelijk zijn dat een bepaalde strategie werkt, maar hoe kom je eigenlijk op het idee om zo'n strategie te formuleren? Ook krijgen de kabouters informatie door bepaalde gebeurtenissen. De gong slaat of één van de kabouters doet een gokje. Wat leren ze daar eigenlijk van en hoe kun je de informatie van de kabouters goed representeren? En dan, ook als je het antwoord hebt, hoe kun je nu bewijzen dat de gekozen strategie echt werkt in alle omstandigheden? Vaak geeft zo'n bewijs nog extra inzicht: wat in eerste instantie onmogelijk lijkt, kun je toch voor elkaar krijgen.

Niet al die vragen kunnen in de kleinste details worden besproken in een boek waarin formules over het algemeen worden vermeden. Wat het boek bijzonder maakt is dat de oplossing meteen volgt op het raadsel, en niet ergens achterin, zoals in dit genre gebruikelijker is. Dat maakt het — wellicht onverwacht — leuk om te lezen. Een ander onderscheidend aspect is dat getracht wordt de herkomst van de raadsels goed te vermelden en daarmee wordt ook duidelijk hoe rijk de literatuur in de recreatieve wiskunde is. Dit boek is daar een mooie toevoeging aan.

Barteld Kooi



Joel David Hamkins

Lectures on the Philosophy of Mathematics

The MIT Press, 2020

viii + 329 p., prijs \$ 45.00

ISBN 9780262542234

Lectures on the Philosophy of Mathematics is een introductie tot de filosofie van de wiskunde. Hoewel er over dit vakgebied al veel geschreven is, onderscheidt dit boek zich op een heel duidelijk punt: het is uitdrukkelijk geschreven vanuit een *wiskundig* perspectief. Dit uit zich vooral in de opbouw van het boek: elk hoofdstuk behandelt een bepaald wiskundig thema. De verschillende filosofische stromingen worden als gevolg daarvan altijd geïntroduceerd in een bepaalde wiskundige context. Het onderscheid tussen platonisme en logicisme wordt bijvoorbeeld gemaakt in het eerste hoofdstuk over de aard van getallen, terwijl formalisme een uitgebreide behandeling krijgt in het hoofdstuk over onvolledigheid. Het voordeel van deze opbouw is dat het duidelijk wordt waarom men, vanuit een wiskundig perspectief, geïnteresseerd zou moeten zijn in filosofische vragen en stromingen.

Daarnaast heeft dit boek, afgezet tegen andere werken over filosofie van de wiskunde, relatief veel wiskundige inhoud. De auteur is niet bang om bepaalde technische resultaten te behandelen, waar deze gevolgen hebben voor filosofische opvattingen. Voorbeelden hiervan zijn de invloed van de onvolledigheidsstellingen op het formalisme, en de rol van categorieteitsresultaten in het structuralisme.

Zoals gezegd behandelt elk hoofdstuk een bepaald wiskundig thema: getallen, striktheid ('rigor'), oneindigheid, meetkunde, bewijzen, berekenbaarheid, onvolledigheid en verzamelingenleer. Ieder hoofdstuk begint met een kort uittreksel en wordt afgesloten

met een literatuurlijst en een sectie vragen. Sommige van deze vragen zijn opgaven in de wiskundige zin, andere zijn vragen over de filosofische theorie, en weer andere zijn compleet open vragen zonder een eenduidig antwoord. Deze soorten vragen staan door elkaar, wat mijns inziens onderstreept dat technisch-wiskundige en filosofische vraagstukken niet in isolatie bestaan, maar elkaar informeren. De verschillende hoofdstukken zijn redelijk onafhankelijk van elkaar te lezen. Een lezer die vooral geïnteresseerd is in filosofische kwesties rond verzamelingenleer, zou dus kunnen beginnen met het laatste hoofdstuk, en terugbladeren waar nodig.

Belangrijk om te vermelden is dat dit boek, hoewel geschreven vanuit een wiskundig perspectief, qua filosofische inhoud niet onderdoet voor andere werken over de filosofie van de wiskunde. Alle belangrijke filosofische vragen en stromingen passeren de revue. Toch zijn er vanuit filosofisch perspectief ook enkele aanmerkin-

gen te maken. Op enkele punten in het boek worden vooral technische resultaten besproken, zonder dat erg duidelijk wordt wat de filosofische relevantie van deze resultaten is. Soms wordt de filosofische leidraad dus enigszins uit het oog verloren, en leest het boek meer als een wiskundige verhandeling. Daarnaast is dit boek, als gevolg van de opbouw, niet erg geschikt voor een lezer die juist geïnteresseerd is in één bepaalde filosofische stroming.

Ondanks deze kritiekpunten, ben ik van mening dat de tijd voor een boek als dit meer dan rijp was. Dit is bij mijn weten het beste boek dat aan wiskundigen duidelijk maakt waarom filosofische vragen voor een wiskundige interessant zijn, en dat filosofie van de wiskunde niet iets zweverigs is, maar juist geworteld is in de wiskundige praktijk. Ik kan dit boek dan ook van harte aanbevelen aan iedere wiskundige die geïnteresseerd is in fundamentele vragen.

Jetze Zoethout

Recent verschenen publicaties. Als u een van deze boeken wilt bespreken of als u suggesties heeft voor andere boeken voor deze rubriek, laat dit dan per e-mail weten aan reviews@nieuwarchief.nl.



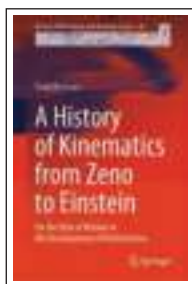
János Kollár, Max Lieblich, Martin Olsson, Will Sawin
What Determines an Algebraic Variety?

Princeton University Press, 2023
ISBN 9780691246819
press.princeton.edu/books/paperback/9780691246819/what-determines-an-algebraic-variety



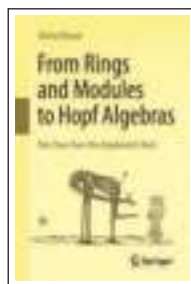
Victor J. Katz, Clemency Montelle (eds.)
Sourcebook in the Mathematics of Ancient Greece and the Eastern Mediterranean

Princeton University Press, 2024
ISBN 9780691202815
press.princeton.edu/books/hardcover/9780691202815/sourcebook-in-the-mathematics-of-ancient-greece-and-the-eastern



Teun Koetsier
A History of Kinematics from Zeno to Einstein
On the Role of Motion in the Development of Mathematics

Springer, 2024
ISBN 9783031398711
HMMS, Vol. 46
springer.com/9783031398711



Michel Broué
From Rings and Modules to Hopf Algebras
One Flew over the Algebraist's Nest

Springer, 2024
ISBN 9783031500619
springer.com/9783031500619



David Pengelly
Number Theory through the Eyes of Sophie Germain

MAA Press, 2023
ISBN 9781470472207
bookstore.ams.org/clrm-70



Hans Fischer
Signaalanalyse en Digitale Signaalverwerking
Fouriertheorie, systeemtheorie en theorie van digitale filters

Epsilon Uitgaven, deel 97, 2024
epsilon-uitgaven.nl/wetenschappelijke-reeks

Problemen

| Problem Section

This Problem Section is open to everyone; everybody is encouraged to send in solutions and propose problems. Group contributions are welcome. We will select the most elegant solutions for publication. For this, solutions should be received before **15 April 2024**. The solutions of the problems in this issue will appear in one of the subsequent issues.

Problem A

Prove that for all three line segments of length 1 in a closed disc of radius 1 there are two of those line segments with distance at most 1.

Problem B (proposed by Hendrik Lenstra)

Let A be an abelian group and write $\text{End}(A)$ for the ring of group homomorphisms from A to A . Show that A is free as $\text{End}(A)$ -module if and only if A admits a commutative ring structure so that the Cayley map $A \rightarrow \text{End}(A)$ given by $x \mapsto (y \mapsto xy)$ is an A -module isomorphism. Show that for all subrings of $\mathbb{Q}$ and rings $\mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$ with p a prime the Cayley map is an isomorphism, and give an example of an uncountable ring with this property.

Problem C (proposed by Albert Visser)

A *Gollum ring* is a ring that is isomorphic to the subring $\mathbb{Z} + 2R$ of a commutative ring R . Show that there is a sentence in first-order logic in the language of rings that is true in all Gollum rings, but not true in all commutative rings.

Edition 2023-3 We received solutions from Rik Biel, Chris A.J. Klaassen, Thijmen Krebs, Lucía L. Pacios, Ana Pose, Andrés Ventas and Jan de Vries.

Problem 2023-3/A

Let $n > 0$ be an integer and let $\varphi: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ be an isometry, i.e., a map such that for all $x, y \in \mathbb{R}^n$ we have $|\varphi(x) - \varphi(y)| = |x - y|$. Let $X \subset \mathbb{R}^n$ be a set such that $\{\varphi(x) \mid x \in X\} \subseteq X$. Show that if X is closed and bounded, then $\{\varphi(x) \mid x \in X\} = X$, and show that we can drop neither of these two assumptions.

Solution This problem was solved in a collaboration by Lucía L. Pacios and Ana Pose and Andrés Ventas. Moreover, it was solved by Rik Biel and Thijmen Krebs. Jan de Vries has proved a more general result: an isometry on a compact metric space is surjective.

Let $y \in X$. By continuity of φ it suffices to prove that for every $\varepsilon > 0$ there exists $x \in X$ such that $|\varphi(x) - y| < \varepsilon$. By Bolzano–Weierstrass, there exist $i > j$ such that $|\varphi^i(y) - \varphi^j(y)| < \varepsilon$. Using that φ is an isometry, we then find that $|\varphi^{i-j}(y) - y| < \varepsilon$. Now $x = \varphi^{i-j-1}(y)$ suffices.

Consider $X = \mathbb{Z}_{\geq 0} \subseteq \mathbb{R}$. Note that X is closed but not bounded, and that $x \mapsto x + 1$ is an isometry that maps X to $X \setminus \{0\}$.

Identify $\mathbb{R}^2$ with $\mathbb{C}$ and take $X = \{\exp(ni) \mid n \in \mathbb{Z}_{\geq 0}\}$. Note that X is bounded but not closed, and that $x \mapsto \exp(i) \cdot x$ is an isometry that maps X to $X \setminus \{1\}$.

Problem 2023-3/B

Let X be a normally distributed random variable and let $t \in \mathbb{R}_{>0}$. Show that $x \mapsto \mathbb{P}(X \leq x + t \mid x \leq X)$ is an increasing function.

Solution This problem contained an error. Instead of ‘increasing’, it was stated ‘decreasing’. A solution for the problem was sent in by Thijmen Krebs. A more general result was proven by Chris A.J. Klaassen: instead of for normal distributed random variables, it has been proved for random variables with a strongly unimodal distribution.

First note that without loss of generality we may assume that X follows a standard normal distribution, and write f and F for its probability density and cumulative density function, respectively. It suffices to show that $G(x) = F(x+t)/F(x)$ is a decreasing function, or equivalently, that

$$(\log G(x))' = \frac{f(x+t)F(x) - f(x)F(x+t)}{F(x)F(x+t)} < 0$$

for all x . Hence it suffices to show for all x that

$$H(x) = e^{-tx - \frac{1}{2}t^2}F(x) - F(x+t) < 0.$$

We claim that

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} e^{-tx}F(x) = 0.$$

Clearly 0 is a lower bound. Let $\delta > 0$. Then there exists some $B < 0$ such that $e^{-\frac{1}{2}x^2} \leq \delta e^{tx}$ for all $x < B$. Hence

$$F(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^x e^{-\frac{1}{2}z^2} dz \leq \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^x \delta e^{tz} dz = \frac{\delta}{\sqrt{2\pi}} \cdot e^{tx}$$

for such x , so $e^{-tx}F(x) \leq \frac{\delta}{\sqrt{2\pi}}$ for x sufficiently small. Taking $\delta \rightarrow 0$ we obtain the limit.

It follows from the claim that $\lim_{x \rightarrow -\infty} H(x) = 0$. Since also

$$H'(x) = -te^{-tx - \frac{1}{2}t^2}F(x) + e^{-tx - \frac{1}{2}t^2}f(x) - f(x+t) = -te^{-tx - \frac{1}{2}t^2}F(x) < 0,$$

we conclude that $H(x) < 0$ for all x .

Problem 2023-3/C (proposed by Hendrik Lenstra)

Let $p = 2n + 1$ be an odd prime and consider the finitely presented group G with generators $x_1, \dots, x_n$ and for each $0 < i, j, k \leq n$ such that $ij = k$ or $ij = p - k$ the relation $x_i x_j = x_k$. Show that G is a cyclic group of order n .

Solution A partial solution for this problem was given by Andrés Ventas.

We prove by induction on i the following statement:

$$\forall j, k \in \{1, \dots, n\}, (ij \equiv \pm k \pmod{p} \Rightarrow x_i x_j = x_j x_i = x_k).$$

This is trivial for $i = 1$. Now fix an integer $1 < i \leq n$ and assume that the statement holds for smaller values of i . We prove the statement for i . Let $j, k \in \{1, \dots, n\}$ be such that $ij \equiv \pm k \pmod{p}$. Consider the i sets $\{hj, hj+1, \dots, hj + \lfloor p/i \rfloor\}$ for $h = 0, \dots, i-1$. Each of these sets contains $\lfloor p/i \rfloor + 1$ elements, and as $i \cdot (\lfloor p/i \rfloor + 1) > p$, we find that the sets are not pairwise disjoint modulo p . It follows that there exist integers $0 \leq h_1 < h_2 < i$ and an integer $0 \leq \varepsilon < p/i$ for which $h_2 j \equiv h_1 j \pm \varepsilon \pmod{p}$, and $h = h_2 - h_1$ then yields $hj \equiv \pm \varepsilon \pmod{p}$. Note that $\varepsilon \neq 0$ since p is prime. By assumption we have $x_i x_\varepsilon = x_{i\varepsilon}$ and by the induction hypothesis applied to h we know that $x_h x_i = x_{ih} = x_i x_h$ and that $x_h x_k = x_{i\varepsilon} = x_k x_h$. This gives the following equalities

$$\begin{aligned} x_i x_j x_h &= x_i x_\varepsilon = x_{i\varepsilon} = x_k x_h, \\ x_h x_j x_i &= x_\varepsilon x_i = x_{i\varepsilon} = x_h x_k, \end{aligned}$$

and thus $x_i x_j = x_k = x_j x_i$ which completes the induction step. Now it follows that $G \rightarrow \mathbb{F}_p^* / \{\pm 1\}$ given by $x_i \mapsto i$ for all $i \in \{1, \dots, n\}$ is an isomorphism. Since $\mathbb{F}_p^*$ is cyclic of order $2n$, it follows that G is cyclic of order n .