

Inhoud | Contents

Artikelen | Features

- Evenement | Event**
 81 Een over het jaar verspreid NMC
Marieke Kranenburg, Wil Schilders
- Interview | Interview**
 85 David Aldous: Probability and the real world
Raf Bocklandt, Nicos Starreveld
- Column | Column**
 89 Two cultures
Piet Groeneboom
- Onderwijs | Education**
 92 Statistische inferentie in vwo 3
Marianne van Dijke-Droogers
- Onderzoek | Research**
 98 Universality for critical behavior of percolation processes on complex networks
Souvik Dhara
- Evenement | Event**
 102 Afgeleide categorieën in de tuin
Jasper van de Kreeke
- De oplossing | The Solution**
 107 Het square peg-probleem
Robert Fokink
- In Memoriam | Obituary**
 113 Aïda Beatrijs Paalman - de Miranda: Inspirerende hoogleraar zuivere wiskunde met hart voor onderwijs en studenten
Peter van Emde Boas, Jan van Mill, Jan Wiegerinck
- Onderwijs | Education**
 115 From Cape Town to Cameroon
Diletta Martinelli
- Evenement | Event**
 120 Over druppels en dubbels
Raf Bocklandt

Rubrieken | Departments

- 75 Redactioneel
Raf Bocklandt
- 76 Agenda
Nikki Levering
- 78 Nieuws
Nikki Levering
- 105 Het keerpunt van Bert Slagter
Daan Mulder
- 118 Proof by example: Vivi Rottschäfer
Francesca Arici, Clara Stegehuis
- 126 In de verdediging
Nicolaos Starreveld
- 129 Boekbesprekingen
Hans Cuypers, Hans Sterk
- 134 Problemen
Onno Berrevoets, Rob Eggermont, Daan van Gent

Uitgelicht

85



Een interview met David Aldous, de winnaar van de Brouwermedaille 2020.

115



Diletta Martinelli heeft deelgenomen aan verschillende projecten om wiskunde in Afrika te promoten.

Colofon

Het Nieuw Archief voor Wiskunde is een uitgave van het Koninklijk Wiskundig Genootschap en verschijnt vier maal per jaar. Het tijdschrift richt zich op eenieder die zich beroepsmatig met wiskunde bezighoudt, als academisch of industrieel onderzoeker, student, leraar, journalist of beleidsmaker. Het stelt zich ten doel te berichten over ontwikkelingen in de wiskunde in het algemeen en in de Nederlandse wiskunde in het bijzonder.

ISSN 0028-9825

Adres

Nieuw Archief voor Wiskunde
Centrum Wiskunde & Informatica
Postbus 94079, 1090 GB Amsterdam
tel. 020-5924288
redactie@nieuwarchief.nl
www.nieuwarchief.nl

Hoofredactie

Raf Bocklandt (r.r.j.bocklandt@uva.nl)
Robbert Fokkink (r.j.fokkink@tudelft.nl)

Eindredactie/Bladmanager

Fred Drissen (fred@nieuwarchief.nl)

Redactie

Francesca Arici (UL), Viktor Blåsjö (UU), Hans Cuypers (TU/e), Teun Koetsier (VU), Nikki Levering (UvA), Daan Mulder, Nicolaos Starreveld (UvA), Clara Stegehuis (UT), Hans Sterk (TU/e), Mark Timmer (UT)

Problemenrubriek (problems@nieuwarchief.nl)

Onno Berrevoets, Rob Eggermont en Daan van Gent

Bureau redactie

Anne van Grinsven

Illustraties

Ryu Tajiri

Vormgeving

Susanne Laws (omslag, begeleiding binnenwerk)
Kitty Molenaar (ontwerp)

Druk

Veldhuis Media

Advertenties

advertenties@nieuwarchief.nl

Koninklijk Wiskundig Genootschap

www.wiskgenoot.nl

Platform Wiskunde Nederland

www.platformwiskunde.nl

European Mathematical Society

www.euro-math-soc.eu

International Mathematical Union

www.mathunion.org

Koninklijk Wiskundig Genootschap

Het Koninklijk Wiskundig Genootschap (KWG) is een landelijke vereniging van beoefenaars van de wiskunde. In 1778 opgericht onder de zinspreuk: 'Een onvermoeide arbeid komt alles te boven' is het 's werelds oudste nationale wiskundegenootschap. Leden ontvangen het Nieuw Archief voor Wiskunde als onderdeel van hun lidmaatschap.

Bestuur

Barry Koren (TU/e, voorzitter), Wioletta Ruszel (TUD, penningmeester), Willem Jan Palenstijn (CWI, secretaris), Danny Beckers (VU), Rogier Bos (UU), Marie-Collette van Lieshout (CWI), Michael Mäger (RU), Alef Sterk (RUG), Jan Wiegerinck (UvA).

Secretariaat

Koninklijk Wiskundig Genootschap, CWI
Postbus 94079, 1090 GB Amsterdam
wiskgenoot@wiskgenoot.nl

Ledenadministratie KWG / Abonnementen

admin@wiskgenoot.nl, tel. 020-5924008
Wijzigingen of opzegging kunt u ook doorgeven door in te loggen op www.wiskgenoot.nl.

Contributie

Tarieven per jaar (bij betaling per automatische incasso krijgt u €2,50 korting):

- gewoon lid: €97,50
- reciprociteitslid: €77,50
- gepensioneerden en werklozen: €52,50
- aio's, oio's, studenten: €42,50 (max. 4 jaar)
- lid zonder Nieuw Archief: €57,50

Studenten en pas afgestudeerden kunnen een jaar lang gratis lid worden.

Voor verzending van het Nieuw Archief naar het buitenland wordt een portotoeslag van €10 in rekening gebracht.

Instituten in Nederland en buitenland kunnen zich abonneren op het Nieuw Archief voor Wiskunde voor €105 (Nederland), €115 (Europa) of €117,50 (buiten Europa).

Members of foreign societies

Members of SIAM, the *Société Mathématique de France*, the *Gesellschaft für Angewandte Mathematik und Mechanik*, the *Deutsche Mathematiker-Vereinigung*, and of the *American, Australian, Belgian, Indian, London, Spanish, and South-African Mathematical Societies* living outside of the Netherlands pay €77,50 instead of the full membership fee of €97,50 a year. Conversely, these foreign societies, as well as the VvS+OR and the NVORWO, have reduced membership fees for KWG members. A postage charge of €10 is added for members living abroad but in Europe, and a charge of €12,50 for members living outside of Europe.

Exchange subscriptions

Koninklijk Wiskundig Genootschap Library
Centrum Wiskunde & Informatica
P.O. Box 94079, NL-1090 GB Amsterdam
KWG-exchange@cw.nl

Informatie voor auteurs

Kopij

Kopij dient per e-mail te worden aangeboden aan kopij@nieuwarchief.nl. Voor meer informatie en auteursinstructies zie www.nieuwarchief.nl.

Volgende nummers

nummer	maand	verschijnen	deadline kopij
22(3)	september	2021	verstreken
22(4)	december	2021	01-08-2021
23(1)	maart	2022	01-11-2021
23(2)	juni	2022	01-02-2022

Instituuts- en bedrijfsleden

De publicaties van het KWG worden mede mogelijk gemaakt door de bijdragen van de volgende instituten en bedrijven.

	Centrum Wiskunde & Informatica
	Universiteit van Amsterdam
	Vrije Universiteit Amsterdam
	Rijksuniversiteit Groningen
	Universiteit Leiden
	Radboud Universiteit Nijmegen
	Universiteit Utrecht
	Technische Universiteit Delft
	Technische Universiteit Eindhoven
	Universiteit Twente

 Elsevier

 ORTEC

Op het omslag

Schatten hoeveel kauwgomballen van elke kleur er in een pot zitten als je maar een gedeelte ziet. Het werken met inferenties (gevolgtrekkingen) vormt het hart van de statistiek. Lees het artikel van Marianne van Dijke-Droogers over statistische inferentie in vwo 3 op pagina 92.

Een specifiek geval van sensitiviteit

En ja hoor, het was weer zover. 's Ochtends bij het ontbijt zat onze jongste dochter wat angstig voor zich uit te staren. Een lopende neus, een hardnekkige kuch en bovendien nog verhoging: drie symptomen en dus tijd voor een test. Voor de derde keer dit jaar maakten we een afspraak en begaven we ons naar het testcentrum in de wijk. Daar stond een goed ingepakte, vriendelijke dame ons op te wachten met een wattenstaafje in de hand. De procedure verliep vlot en na vijf minuten stonden we weer buiten, maar toch blijft het voor een tienjarige een licht traumatische ervaring wanneer dat staafje diep in de neus verdwijnt en lijkt door te schieten tot in de hersenen.

In tegenstelling tot de vorige keren liet de uitslag niet zo lang op zich wachten. De dag erop kregen we al een mailtje met het verdict. Negatief, de kans dat ze covid had was klein en dus kon ze na het weekend weer terug naar school. Maar hoe klein was die kans dan wel? In de krant stond een informatieve strip waarin werd gesteld dat je bij een negatieve test 80 procent kans had dat je geen corona had. Zo werd het ook geduid door een professor microbiologie, die in een interview waarschuwde dat bij een festival een op de vijf bezoekers met een negatief testresultaat toch positief kan zijn.

Bij het lezen van dat artikel gingen bij mij de alarmbellen af. De 80 procent die gebruikt werd verwees naar de sensitiviteit: de kans dat de test positief is als je covid hebt. De goeie ouwe Bayes indachtig is dit niet hetzelfde als de kans dat je negatief bent als je negatief test, want dit hangt ook nog af van hoe wijd verspreid het virus is. Ik was trouwens niet de enige die dit had opgemerkt en al gauw ontspon zich een twitterstorm waarin, uitgaande van de huidige prevalentie, berekend werd dat de correcte kans (op covid bij een negatieve test) eerder in de buurt van 2 procent lag dan van 20 procent.

Ik was dus nu voor 98 procent gerustgesteld. Alhoewel, voor een correcte berekening moest ik niet de prevalentie bij de algemene bevolking gebruiken maar die onder tienjarigen. Of nog beter, die onder tienjarige meisjes met een loopneus, en met een kuch, en ook nog koorts, maar wel geen buikpijn of reukverlies ... en zo kon ik nog wel even doorgaan. Kansen bepalen in het echte leven blijkt geen makkie. ❖

Raf Bocklandt, hoofdredacteur
Korteweg-de Vries Instituut, Universiteit van Amsterdam

Agenda

| Upcoming Events

juni 2021

3–4 juni 2021

□ NETWORKS Conference

Tweedaagse conferentie over de thema's 'Quantum Networks', 'Robust Optimisation', 'Large Deviations' en 'Scalable Network Algorithms and Performance'. Georganiseerd door NETWORKS.

plaats online

info thenetworkcenter.nl

7–9 juni 2021

□ Workshop YEQT XIV: Load Balancing and Scheduling for Distributed Service Systems

Veertiende editie van de Young European Queueing Theorists (YEQT) workshop.

plaats Technische Universiteit Eindhoven

info eurandom.nl

21–22 juni 2021

□ NDNS+ Twente Workshop

Tweedaagse workshop van het cluster NDNS+ (Nonlinear Dynamics of Natural Systems).

plaats Universiteit Twente

info ndns.nl

23 juni 2021

□ Grote Rekendag 'Op rekenreis!'

Dag voor alle basisscholen die helemaal in het teken staat van rekenen.

plaats basisscholen Nederland en Vlaanderen

info groterekendag.nl

juli 2021

5–6 juli 2021

□ Dimensionality Reduction and Inference in High-Dimensional Time Series

Tweedaagse workshop met onder andere een lezing van Siem Jan Koopman (VU).

plaats online

info sbe.maastrichtuniversity.nl

14–24 juli 2021

□ International Mathematical Olympiad (IMO)

Internationale wiskundecompetitie voor middelbare scholieren.

plaats Sint Petersburg, Rusland

info imo-official.org

19–23 juli 2021

□ Metrics in Multiparameter Persistence

Lorentz workshop, mede georganiseerd door Magnus Bakke Botnan (VU).

plaats Lorentz Center@Snellius, Leiden

info lorentzcenter.nl

26–30 juli 2021

□ Working Groups for Women in Operator Theory

Lorentz workshop, mede georganiseerd door Francesca Arici (RU).

plaats Lorentz Center@Oort, Leiden

info lorentzcenter.nl

augustus 2021

2–6 augustus 2021

□ Non-reversible Markovian Monte Carlo

Lorentz workshop, mede georganiseerd door Joris Bierkens (VU).

plaats Lorentz Center@Oort, Leiden

info lorentzcenter.nl

2–8 augustus 2021

□ International Mathematics Competition for University Students

28ste editie van de Internationale Wiskunde-wedstrijd voor Universiteitsstudenten.

plaats Blagoevgrad, Bulgarije

info imc-math.org.uk

9–13 augustus 2021

□ Learning from Insulators: New Trends in the Study of Conductivity of Metals

Lorentz workshop, mede georganiseerd door Marcello Seri (RUG).

plaats Lorentz Center@Oort, Leiden

info lorentzcenter.nl

Suggesties voor deze agenda zijn welkom.

Redacteur: Nikki Levering

agenda@nieuwarchief.nl

16–26 augustus 2021

Summer School Mathematics Education

Internationale Summer School over de recente ontwikkelingen op het gebied van wiskundeonderwijs en het onderzoeken van wiskundeonderwijs.

plaats Universiteit Utrecht

info utrechtsummerschool.nl

27–28 augustus 2021 en 3–4 september 2021

Vakantiecursus 2021

Vakantiecursus van PWN voor leraren en studenten van lerarenopleidingen en voor andere belangstellenden. Dit jaar is het thema ‘Stangenmeetkunde’.

plaats CWI Amsterdam en TU Eindhoven

info platformwiskunde.nl/vakantiecursus

30 augustus – 3 september 2021

A Topological Theory of Tangent Distributions

Lorentz workshop, mede georganiseerd door Álvaro del Pino Gómez (UU), Federica Pasquotto (UL) en Marcello Seri (RUG).

plaats Lorentz Center@Snellius, Leiden

info lorentzcenter.nl

30 augustus – 3 september 2021

Workshop YEP XVII: Interacting Particle Systems

Zeventiende editie van de Young European Probabilists (YEP) workshop.

plaats Technische Universiteit Eindhoven

info eurandom.nl

september 2021

1 september 2021

Dutch Math Community Event

Eerste editie van het Dutch Math Community Event, georganiseerd door de Commissie Innovatie van Platform Wiskunde Nederland.

plaats online

info platformwiskunde.nl

17 september 2021

Finale Nederlandse Wiskunde Olympiade

Nationale finale van de wiskundeolympiade voor middelbare scholieren.

plaats Technische Universiteit Eindhoven

info wiskundeolympiade.nl

24 september 2021

Onderwijs meets onderzoek

Symposium waarbij wiskundedocenten en onderzoekers in wiskunde educatie kijken naar de vraag wat educatie zelf en het onderzoek naar educatie voor elkaar kunnen betekenen.

plaats nog te bepalen

info mathematischcongres.nl

24 september 2021

Wiskundetoernooi

Wiskundetoernooi voor teams van middelbare scholieren. Een team bestaat uit 4 of 5 leerlingen uit 5–6 vwo en een begeleider.

plaats Radboud Universiteit, Nijmegen

info ru.nl/wiskundetoernooi

26–29 september 2021

International Conference on Computational Logistics (ICCL2021)

Conferentie voor wetenschappers in operations research, business analytics en artificial intelligence.

plaats online en/of Universiteit Twente

info iccl2021.nl

oktober 2021

2 oktober 2021

NVvW Geschiedenis-symposium

Symposium van de werkgroep Geschiedenis van de NVvW, met als thema ‘Coryfeeën met ideeën’. Sprekers belichten de vakdidactische visie van vedettes uit het wiskundeonderwijs.

plaats online

info nvvw.nl

6–8 oktober 2021

45th Woudschoten Conference 2021

Een jaarlijkse conferentie van de Nederlands-Vlaamse Numerieke Analyse-groepen, georganiseerd door de Werkgemeenschap Scientific Computing (WSC).

plaats Woudschoten, Zeist

info wsc.project.cwi.nl/events

16 oktober 2021

Junior Wiskunde Olympiade

Jaarlijks landelijke wiskundewedstrijd voor leerlingen van havo en vwo, georganiseerd door de VU in samenwerking met de Nederlandse Wiskunde Olympiade en W4Kangoeroe.

plaats Vrije Universiteit Amsterdam

info wiskundeolympiade.nl

25–29 oktober 2021

Nonlocality in Analysis, Numerics and Applications

Lorentz workshop, mede georganiseerd door Carolin Kreisbeck (KU Eichstätt-Ingolstadt) en Harbir Antil (George Mason University).

plaats Lorentz Center@Snellius, Leiden

info lorentzcenter.nl

november 2021

4 november 2021

CWI Lectures

Jaarlijkse lezingen, met dit jaar als thema ‘Decision Making under Uncertainty’. Sprekers zijn onder anderen Dick den Hertog (UvA) en Pinar Keskinocak (Georgia Tech).

plaats nog te bepalen

info cwi.nl

6 november 2021

Jaarvergadering NVvW

Jaarlijkse vergadering en studiedag van de Nederlandse Vereniging van Wiskundeleraren.

plaats nog te bepalen

info nvvw.nl/jaarvergadering

12 november 2021

Prijsuitreiking Nederlandse Wiskunde Olympiade

De prijsuitreiking van de finale van de Nederlandse Wiskunde Olympiade.

plaats Technische Universiteit Eindhoven

info wiskundeolympiade.nl

12 november 2021

Voorronde Wiskunde A-lympiade

Voorronde van de jaarlijkse competitie voor leerlingen uit de bovenbouw havo/vwo met wiskunde A in hun pakket.

plaats eigen school

info wiskundeintams.sites.uu.nl

12 november 2021

Wiskunde B-dag

Een competitie voor leerlingen uit de bovenbouw havo/vwo, die wiskunde B in hun pakket hebben. Leerlingen werken in kleine teams de hele dag aan een wiskundig probleem.

plaats eigen school

info wiskundeintams.sites.uu.nl

Nieuws

| News

Deze rubriek is een kroniek van wiskundige activiteiten in Nederland. Toekomstige activiteiten worden aangekondigd en van voorbije activiteiten wordt verslag gedaan. Wilt u uw aankondiging of verslag in deze rubriek geplaatst zien? Stuur ons dan uw bijdrage, zo mogelijk met illustratie. De redactie behoudt zich het recht voor berichten te weigeren of in te korten.

Redacteur: Nikki Levering
 nieuws@nieuwarchief.nl

László Lovász en Avi Wigderson winnen Abelprijs

De Noorse Academie voor Literatuur en Wetenschappen heeft de Abelprijs 2021 op 17 maart 2021 toegekend aan László Lovász (Eötvös Loránd University, Boedapest) en Avi Wigderson (Institute of Advanced Study, Princeton). Ze hebben de Abelprijs ontvangen voor hun onderzoek in het grensgebied tussen discrete wiskunde en theoretische informatica. In de motivatie van de jury staat dat dankzij het leiderschap van Lovász en Wigderson discrete wiskunde en theoretische informatica nu erkend zijn als centrale delen van de moderne wiskunde.

László Lovász werd in 1948 geboren in Boedapest, Hongarije. Zijn wiskundig talent werd al vroeg duidelijk, en als tiener won hij dan ook drie gouden medailles op de Internationale Wiskunde Olympiade. Hij ontmoette Paul Erdős, die hem introduceerde met grafentheorie, waaraan Lovász uiteindelijk veel bijdragen leverde. Een belangrijke bijdrage was het Lovász local lemma, die kan worden gebruikt om het bestaan van bepaalde grafen aan te tonen. De naam van Lovász is verder verbonden met het visionaire LLL-algoritme, dat hij samen met de Nederlandse wiskundigen Arjen en Hendrik Lenstra bedacht. Dit algoritme kan in polynomiale tijd een klasse van problemen in de discrete wiskunde oplossen die tot voorheen altijd als exponentieel werden geclassificeerd.

Avi Wigderson werd in 1956 geboren in Haifa, Israël. Hij heeft zeer belangrijke bijdragen geleverd aan de computationele complexiteitstheorie. Zo heeft hij onder andere gewerkt aan een centrale vraag over de rol van toeval en kansexperimenten in het versnellen van het oplossen van computationele problemen. Lang werd gedacht dat stochastische algoritmen mogelijkheden boden tot computationele versnellingen. Wigderson was onderdeel van het team dat wist aan te tonen dat het, onder bepaalde condities, mogelijk is deze stochastische algoritmen om te zetten in deterministische algoritmen. Dit heeft een grote invloed gehad op de kijk van computerwetenschappers op stochastische algoritmen.

abelprize.no, quantamagazine.org



Foto: Hungarian Academy of Sciences

László Lovász



Foto: Andrea Kane - Institute for Advanced Study

Avi Wigderson

Professor Richard Boucherie nieuwe voorzitter PWN

Met ingang van 15 maart 2021 is professor Richard Boucherie de nieuwe voorzitter van Platform Wiskunde Nederland (PWN). Hij volgt professor Sjoerd Verduyn Lunel (UU) op, die vanaf 2014 voorzitter van PWN was. Richard Boucherie is professor Stochastic Operations Research aan de Universiteit Twente, en mede-oprichter en -voorzitter van het Center for Healthcare Operations Improvement and Research. In het verleden was hij onder andere actief als hoofdredacteur van het NAW.

platformwiskunde.nl, utwente.nl

Bronzen EGMO-medaille vijftienjarige Allie Zong

In april was de tiende editie van de European Girls' Mathematical Olympiad (EGMO), een wedstrijd voor middelbare scholieres uit (voornamelijk) Europese landen. De wedstrijd wordt georganiseerd om wiskundetalent onder meisjes te stimuleren en bestaat uit twee dagen met elk drie opgaven. Deze EGMO-editie zou oorspronkelijk in Georgië plaatsvinden, maar werd door de coronamaatregelen een wedstrijd op afstand. Het Nederlandse team nam deel vanuit Egmond aan Zee, en werd begeleid door Gabriëlle Zwaneveld (student, TU Delft) en Dirk van Bree (promovendus, UU).

Het Nederlandse team bestond dit jaar uit Maud van Bokhoven (Stedelijk Gymnasium Nijmegen), Samantha Li, Allie Zong (Lorentz Casimir Lyceum Eindhoven) en Naomi Zwaneveld (Montaigne Lyceum Den Haag). Binnen het team behaalde Allie, die al twee jaar deelneemt aan het trainingsprogramma van de Wiskunde Olympiade, de hoogste score (13 punten), waarmee ze knap 149 van de 213 deelnemers achter zich liet. Dit betekende dat Allie, die pas vijftien jaar is en nog in de derde klas zit, een bronzen medaille in ontvangst mocht nemen.

wiskundeolympiade.nl



Abelprijslaureaat Isadore M. Singer overleden

Op 11 februari 2021 is Abelprijslaureaat Isadore M. Singer op 96-jarige leeftijd overleden. Isadore M. Singer ontving de Abelprijs in 2004, samen met Sir Michael Francis Atiyah. Zij kregen de prijs voor hun ontdekking van de indexstelling, die nieuwe verbanden wist te leggen tussen verschillende gebieden van de wiskunde en de mathematische fysica. Isadore M. Singer was Emeritus Institute Professor aan het Massachusetts Institute of Technology.

abelprize.no

Kuhn Award voor wiskundigen CWI en VU

Het artikel 'Optimizing barge utilization in hinterland container transportation', van Bernard Zweers (CWI), professor Rob van der Mei (CWI, VU) en professor Sandjai Bhulai (VU), heeft de Harald W. Kuhn Award 2020 ontvangen. Deze prijs wordt jaarlijks uitgereikt aan het best gepubliceerde artikel in het tijdschrift *Naval Research Logistics* van de voorgaande drie jaar.

Het artikel van Zweers, Van der Mei en Bhulai bestudeert het gebruik van binnenschepen in het achterland containertransport. De methode die zij voorstellen geeft transportkosten die wel 20%

lager zijn dan huidige methodes. *Naval Research Logistics* prijst met name de relevantie van het werk. Zeker in een land als Nederland zouden binnenvaartschepen voor containertransport een goed alternatief zijn voor vrachtwagens, gezien dit het wegtransport tussen de Rotterdamse haven en Duitsland kan verlagen en binnenvaartschepen relatief milieuvriendelijk zijn.

cwi.nl, math.vu.nl

Remco van der Hofstad lid KNAW-raad

Professor Remco van der Hofstad (Technische Universiteit Eindhoven) is de eer ten deel gevallen lid te mogen worden van de Raad voor Natuur- en Technische Wetenschappen van de Koninklijke Nederlandse Akademie van Wetenschappen (KNAW). De Raad bestaat sinds 2017 en heeft twintig leden. Het doel van de Raad is een wetenschapsbeleid en onderzoeksomgeving te creëren waarin excellent wetenschappelijk onderzoek in de natuur- en technische wetenschappen optimaal uitgevoerd kan worden. Zo doet de raad onder andere voorstellen voor advies over alle aspecten van de wetenschapsbeoefening.

Naast dit goede nieuws was er ook goed nieuws voor professor ingenieur Serge Hoogendoorn (TU Delft). Hij is dit jaar gekozen als een van de drieëntwintig nieuwe leden van het KNAW. Leden van het KNAW zijn vooraanstaande wetenschappers uit alle disciplines die gekozen worden op grond van hun wetenschappelijke prestaties. Een lidmaatschap is voor het leven, en de KNAW telt nu ongeveer vijfhonderdvijftig leden. Serge Hoogendoorn zal in september worden geïnstalleerd.

thenetworkcenter.nl, tudelft.nl

Franz Edelman Award voor het Zero Hunger Lab

INFORMS, de grootste internationale organisatie op het gebied van operations research en analytics, reikte dit jaar voor de vijftigste keer de Franz Edelman Award for Achievement in Advanced Analytics, Operations Research and Management Science uit. Op het INFORMS gala van 13 april 2021 werd bekend dat het Zero Hunger Lab van de Universiteit Tilburg, samen met het Wereldvoedselprogramma, deze award ontvangt. Het is al de derde keer dat deze prestigieuze award naar Universiteit Tilburg gaat. Het Zero Hunger Lab ontvangt de award voor OPTIMUS, een wiskundig model dat de optimale voedselhulp voor een bepaald land of gebied bepaalt. Het OPTIMUS model heeft ervoor gezorgd dat in sommige gevallen 15–20% meer mensen voedsel hebben kunnen verkrijgen voor hetzelfde hulpbudget. Het Zero Hunger Lab focust nu op het uitbreiden van OPTIMUS om deze robuuster te maken tegen de parameteronzekerheden in het model.

tilburguniversity.edu, informs.org

Derde prijs op PACE voor team van UvA en CWI

Het team van promovendi Ruben Brokkelkamp (CWI), Raymond van Venetië, Jan Westerdiep (UvA) en junior lecturer Mees de Vries (UvA) heeft de derde prijs gewonnen bij de Parameterized Algorithms and Computational Experiments Challenge (PACE) exact track 2020. Deze wedstrijd is in 2015 in het leven geroepen om een brug te slaan tussen het ontwerpen van geparametriseerde algoritmes en het gebruik van deze algoritmes in de praktijk. Onderwerpen zijn onder andere multivariate algoritmes, exacte algoritmes en 'fine-grained' complexiteit.

thenetworkcenter.nl

Koninklijke Onderscheiding voor Kees Vuik en Jos Baeten

Professor Kees Vuik en professor Jos Baeten hebben een Koninklijke Onderscheiding ontvangen en zijn beide benoemd tot Officier in de Orde van Oranje-Nassau. Deze onderscheiding wordt enkel verleend aan personen die zich lange tijd verdienstelijk hebben gemaakt voor de maatschappij.

Kees Vuik is hoogleraar numerieke analyse aan de TU Delft. Hij zorgde afgelopen jaren voor de komst van het Delft High-Performance Computing Centre, een supercomputer die wetenschappers en studenten van de TU Delft meer flexibiliteit zal geven, gezien er weinig beperkingen zijn in termen van hardware en software. Verder had hij een belangrijke rol bij het opzetten van het Delft Center for Computational Science and Engineering en het 4TU Applied Mathematics Institute. Ook werd Vuik in 2020 verkozen tot bestuurslid van de toonaangevende organisatie EU-MATHS-IN. Zijn bijdragen aan de samenleving bleven echter niet beperkt tot binnen de universiteitsmuren. Zo was hij vijftien jaar lang de penningmeester van een lokale afdeling van KWF Kankerbestrijding.

Jos Baeten was voor zijn pensioen in 2020 jarenlang de directeur van het Centrum Wiskunde & Informatica (CWI). Hij ontving de Koninklijke Onderscheiding voor zijn vele bijdragen aan de wiskunde en informatica, tijdens de viering van het 75-jarig bestaan van het CWI. Baeten droeg bij aan het opzetten van meerdere gezamenlijke masteropleidingen binnen Nederland. Verder maakte hij zich hard voor het uitwisselen van kennis tussen de publieke en private sector. Hij startte meerdere initiatieven om de banden tussen universiteiten en bedrijven te verbeteren. Verder zijn er onder zijn leiderschap meerdere CWI-onderzoekers een eigen spin-off bedrijf gestart.

tudelft.nl, cwi.nl



Kees Vuik



Jos Baeten

Foto: Suus van Rooijen

Griekse statisticus veroordeeld voor laster

Andreas Georgiou, voormalig directeur van het Griekse bureau voor de statistiek, is eerder dit jaar veroordeeld voor laster. Het is niet de eerste zaak tegen de statisticus, die al een tienjarige straf uitzit. Hij wordt ervan beschuldigd het Griekse begrotingstekort in 2009 hoger te hebben ingeschat dan deze was, wat tot de diepe economische crisis zou hebben geleid, omdat er daardoor extra leningen en bezuinigingen nodig waren. Andreas Georgiou werd echter pas in 2010 directeur van het Griekse bureau voor de statistiek, en zijn begrotingscijfers zijn allemaal goedgekeurd door het Europees bureau voor de statistiek (Eurostat). De American Statistical Association

Board (ASA) spreekt zich dan ook uit tegen de veroordelingen van Georgiou, en vindt dat de statisticus als zondebok wordt gebruikt. De lasteraanklacht waar Georgiou dit keer voor veroordeeld werd betrof uitspraken over de begrotingscijfers van zijn voorganger. Het Griekse recht is zo ingericht dat ook als uitspraken van Andreas Georgiou aantoonbaar waar zijn, hij evengoed voor laster veroordeeld kan worden, gezien hij met de uitspraken wel de eer en reputatie van zijn voorganger zou hebben beschadigd.

amstat.org

Tegenvoorbeeld 80-jaar oud algebra vermoeden gevonden

Giles Gardam, postdoc aan de Universiteit Münster, heeft een tegenvoorbeeld gevonden voor het unit conjecture, een vermoeden dat binnen de algebra al meer dan tachtig jaar een open probleem was. Het vermoeden werd in 1940 opgeschreven door Graham Higman, en is in de decennia daarna bekend geworden onder aanmoediging van Irving Kaplansky. Het zou samen met twee andere vermoedens in de algebra de boeken in gaan als de Kaplansky-vermoedens.

Het vermoeden gaat over het bestaan van multiplicatieve inversen. In het geval van de rationale getallen is de multiplicatieve inverse van een breuk simpelweg de breuk waar je mee moet vermenigvuldigen om het getal 1 terug te krijgen, en dus bestaat de multiplicatieve inverse voor alle breuken op 0 na. Het bestaan van multiplicatieve inversen is minder evident als de elementen uit een structuur komen die een getallensysteem met een algebraïsche groep combineert. Het unit conjecture stelt dat alleen de simpelste elementen binnen zo'n structuur een multiplicatieve inverse hebben. Gardam heeft echter een tegenvoorbeeld gevonden, binnen een structuur bestaande uit symmetrieën van driedimensionale kristallografische vormen. Zijn vondst zal het onderzoek naar de Kaplansky-vermoedens weer nieuwe stimulans geven.

quantamagazine.org

Koninklijk Wiskundig Genootschap

■ NMC Scientific Days

Op 6 en 7 april vonden de NMC Scientific Days plaats, als onderdeel van de NMC 2021 Series. Tijdens deze dagen werd de Brouwermedaille 2020 'online' uitgereikt aan David Aldous, die ter ere hiervan de Brouwerlezing gaf. Verder was er onder andere de Beegerlezing door David Harvey. Verderop in dit nummer staat een uitgebreid verslag van de NMC 2021 Series, gevolgd door een interview met David Aldous.

■ Algemene ledenvergadering

De jaarlijkse Algemene ledenvergadering van het KWG vond ook dit jaar online plaats, op 6 april tijdens de NMC 2021 Scientific Days. Alef Sterk (RUG) is toegetreden tot het bestuur. Theo van den Bogaart, Sonja Cox en Marije Elkenbracht zijn afgetreden als bestuurslid. Op de vergadering is een voorstel tot een contributieverhoging van vijf euro aangenomen.

Marieke Kranenburg

*Korteweg-de Vries Instituut voor Wiskunde
Universiteit van Amsterdam
m.kranenburg@uva.nl*

Wil Schilders

*Platform Wiskunde Nederland
w.h.a.schilders@tue.nl*

Evenement Nederlands Mathematisch Congres (NMC 2021 Series)

Een over het jaar verspreid NMC

Na het afgelasten van het Nederlands Mathematisch Congres (NMC) in 2020 heeft het landelijk organisatiecomité een format voor het NMC 2021 bedacht dat in alle gevallen doorgang kon vinden, online of op locatie. Dit heeft geresulteerd in de NMC 2021 Series: de verschillende elementen van het traditionele NMC zijn verspreid over een jaar met kortere online evenementen en met als hoogtepunt de NMC Scientific Days, die op 6 en 7 april plaatsvonden. Een impressie van Marieke Kranenburg en Wil Schilders, leden van het organisatiecomité.

Online evenementen

In januari werd de eerste online bijeenkomst gehouden: de prijsuitreiking van de Stieltjesprijs voor het beste proefschrift in de wiskunde aan Bente Hilde Bakker en de toekenning van de AMODO Award aan Kateřina Staňková (UM). In februari vond de eerste editie plaats van de 'What's cooking?'-sessie, waarin geïnteresseerden werden bijgepraat over de (beleids)ontwikkelingen in de Nederlandse wiskunde. In maart werd de NMC Series vervolgd door de online 'Speed dates with Industry', wat met acht deelnemende bedrijven en ruim tachtig deelnemende masterstudenten, promovendi en postdocs een boven verwachting groot succes werd. Op 15 maart besteedden vier sprekers aandacht aan het thema 'Mathematics for a better world' in het kader van de International Day of Mathematics. Alle online bijeenkomsten werden goed bezocht; bij elk evenement waren minstens vijftig geïnteresseerden aanwezig.

Deze kortere bijeenkomsten werden op 6 en 7 april vervolgd met de NMC Scientific Days: twee dagen vol lezingen van internationaal vooraanstaande wiskundigen en met parallelle sessies verzorgd door de wiskundeclusters, de Zwaartekracht-

programma's, het initiatief 'AIM' (AI and Mathematics) en wetenschappers werkzaam op het gebied van de geschiedenis van de wiskunde. Van deze twee dagen volgt hieronder het uitgebreide verslag.

NMC Scientific Days, 6–7 april

KWG-voorzitter Barry Koren opende de conferentie om 09.30 uur en bedankte de organisatoren voor het uitstekende werk dat verricht is. De keynote-sprekers die waren gevraagd voor de editie van 2020 hadden toegezegd tijdens NMC 2021 te spreken en daarmee ontstond er een breed en interessant programma. Barry meldde ook dat het aantal aanmeldingen de grens van 250 deelnemers had overschreden, waaronder ook enkele internationale deelnemers. De tweede openingsspreker, Arian Steenbruggen (voorzitter van NWO ENW), benadrukte dat, ondanks de onmogelijkheid van bijeenkomsten op locatie, NWO het belangrijk vindt om de Nederlandse wetenschappelijke gemeenschap bijeen te brengen, netwerken te faciliteren alsmede het uitwisselen van wetenschappelijke ideeën en resultaten. Zij was verheugd te zien dat er, ondanks alle moeilijkheden vanwege corona, het NMC in staat is geweest om een serie online evenementen

te organiseren in 2021. Een van de ambities van NWO is Nexus: het verbinden van agenda's, wetenschap en maatschappij. Om als zo'n Nexus voor de Nederlandse wiskunde te fungeren, geeft NWO financiële en organisatorische steun aan Platform Wiskunde Nederland, het Nederlands Mathematisch Congres, de Wiskunderaad, en andere kleinere platforms zoals AI en Wiskunde (AIM). Een andere NWO-ambitie is de financiering van onderzoek. Sinds 2005 verstrekt NWO ENW financiering voor wiskunde via de wiskundeclusters. Vorig jaar ontving elk wiskundecluster €73 000 voor de eigen clusteractiviteiten voor de komende jaren. Dit jaar zal NWO samen met de wiskunde-instituten circa 25 nieuwe promovendi in de clusters financieren. Ten slotte onderstreepte Arian Steenbruggen het belang van wiskunde voor wetenschap en maatschappij, en ze was dan ook blij met de aandacht voor zowel fundamentele als toegepaste wiskunde bij het NMC en het zeer succesvolle 'Speeddate with Industry'-evenement.

De eerste uitgenodigde spreker was Laure Saint-Raymond van ENS Lyon. Haar stijl van presenteren was verfrissend, niet de normale PowerPoint- of LaTeX-slides, maar handgeschreven notities. Ze sprak over de dynamica van het hardebollengas en over de vraag hoe irreversibel gedrag op macroscopische schaal kan ontstaan uit reversibele interacties op microscopische schaal. Deze vraag, die al 150 jaar onderwerp van discussie is, speelt een centrale rol in de statistische fysica. Ze liet zien hoe, in de zogenaamde Boltzmann-Grad-limiet,

een antwoord kan worden gevonden via een combinatie van stochastische, analytische en combinatorische technieken.

Deze eerste lezing werd gevolgd door parallelle sessies georganiseerd door STAR en QSC, voor de middagpauze, en door NETWORKS en DIAMANT na de lunch. In de sessie van het wiskundecluster STAR spraken Henk Don (RU), Luca Avena (UL) en Daniel Valesin (RUG). Henk liet zien hoe, met behulp van combinatorische ongelijkheden, een ondergrens kan worden afgeleid voor de kans dat twee punten van $\mathbb{Z}^d$ met elkaar verbonden zijn in kritieke puntpercolatie. Luca besprak een model voor de exploratie van complexe netwerken gebaseerd op een 'random rooted forest', een flexibele manier om een willekeurige graaf op te delen in subgrafen die in zekere zin uitgebalanceerd zijn. Daniel vertelde over puntpercolatie op random deelgrafen van $\mathbb{Z}^d$ waarvan de punten verdeeld zijn volgens de evenwichtsverdeling van een veeldeeltjessysteem, in het bijzonder het vortemodel en het contactproces. Met behulp van renormalisatietechnieken kan worden aangetoond dat de kritieke waarde voor percolatie niet-triviaal is.

In de sessie van het NWO Zwaartekracht-project Quantum Software Consortium (QSC) presenteerden Simon Apers (CWI en ULB Brussel), Jana Sotáková (UvA) en Michael Walter (UvA) hun onderzoek. Simon beschreef het gebied van 'graph sparsification', waarbij het aantal edges van een gegeven graaf efficiënt veel kleiner gemaakt kan worden met behoud van veel van de eigenschappen van de graaf, en gaf een quantumalgoritme wat polynomiaal sneller is dan het beste klassieke algoritme. Jana gaf een overzicht over nieuwe cryptografie gebaseerd op isogenieën op elliptische krommen. Dit soort cryptografie zou veilig moeten zijn tegen aanvallen van quantumcomputers. Michael beschreef een klassiek probleem uit de invarianttheorie (minimaliseer de norm van een gegeven vector onder de actie van een matrixgroep) en liet zien hoe dit verbonden is met diverse andere takken van de wiskunde en informatica, zoals quantuminformatietheorie, tensor ranks, en optimalisering.

Na de middagpauze was er de sessie van het Zwaartekracht-consortium NETWORKS, welke in het teken stond van het werk van Brouwermedaillewinnaar David Aldous. Hier spraken Shankar Bhamidi (Chapel Hill, North Carolina) en Pieter Kleer (UvT). Shan-

kar, in 2008 gepromoveerd bij David, concentreerde zich op drie onderwerpen: exponentiële random graaf-modellen; eerste-doorkomstpercolatie en propagatie van informatie; kritieke random grafen en opspannende bomen. Hij besprak de cruciale bijdragen van David. Ook deelde hij met zijn publiek een aantal adviezen van David die zijn leven als onderzoeker gekleurd hebben. Pieter Kleer concentreerde zich op de zogenaamde 'switch Markov chain', een MCMC-algoritme om simpele random grafen met voorgeschreven graden te genereren. Door stochastische omwisseling van de lijnen in de graaf wordt de uniforme verdeling bereikt. Dit vindt onder andere toepassing in hypothestetesten van nul-modellen voor complexe netwerken.

De tweede parallelle sessie in de middag werd verzorgd door het cluster DIAMANT. In deze sessie werden de lezingen verzorgd door Juan Peyrouquet (RUG), Lola Thompson (UU) en Cecilia Sagado (RUG). Alle drie de sprekers hebben sinds kort een positie in Nederland. Lola sprak over bestaande en nieuwe algoritmen voor het berekenen van een aritmetische functie (namelijk sommen van de Möbiusfunctie). Juan vertelde over een nieuwe methode voor niet-lineaire optimalisatie. Cecilia presenteerde haar werk aan een meetkundig probleem over het gedrag van een invariant (Mordell-Weil-rang) in een familie van elliptische krommen.

Later in de middag volgde er een sessie over het landelijke initiatief 'AI and Mathematics' (AIM). Peter Grunwald introduceerde de achtergrond van dit initiatief, waarna er een aantal vragen voor de toehoorders waren via het tool menti.com. Erg leuk, dynamisch, en de betrokkenheid van de deelnemers wordt zo meteen groter. De uitkomsten zijn bovendien leerzaam voor de initiatiefnemers achter AIM. Na dit aardige uitstapje waren er vijf lezingen van onderzoekers in Nederland die zich bezighouden met AI, maar in verschillende vakgebieden en vanuit verschillende invalshoeken. Zo concentreerden de laatste twee sprekers, Mathias Staudigl en Lara Scavuzzo Montana, zich op de vraag hoe machine learning (ML) gebruikt kan worden om wiskundige methoden te verbeteren, en dat dan op het gebied van optimalisatie en mixed integer programming. De andere sprekers keken juist vanuit de invalshoek hoe wiskunde kan bijdragen aan betere ML-algoritmen. Zo concentreerde Christoph Brune zich

op het construeren van laag-dimensionale modellen welke de afhankelijkheid van een parameter kunnen vatten ondanks de aanwezigheid van bifurcaties. Allard Hendriksen vroeg zich af: 'Can we learn without positive examples?', hetgeen een rol speelt als de precieze situatie niet verkregen kan worden. Oxana Manita sprak over benaderingseigenschappen van zogenaamde 'dropout networks'.

Brouwermedaille

Rond de klok van 16.30 uur werd de Brouwermedaille uitgereikt. De Brouwermedaille van het KWG wordt 3-jaarlijks toegekend sinds 1970 (zie de KWG-website voor de lijst van laureaten). De winnaar van de Brouwermedaille 2020 is David Aldous (Emeritus Professor, Statistics Department, University of California at Berkeley). Hij wordt geëerd voor zijn baanbrekende werk in de kansrekening. De medaille werd 'online' uitgereikt door KWG-voorzitter Barry Koren. De laudatio werd uitgesproken door Frank den Hollander, voorzitter van de nominatiecommissie.

Het werk van David bestrijkt zowel de zuivere als de toegepaste kansrekening. Zijn bijdragen worden gekarakteriseerd door een hoge originaliteit, gecombineerd met enorme diepgang, reikwijdte en schoonheid. In de afgelopen veertig jaar heeft David een groot aantal nieuwe concepten geïntroduceerd, die vele onderzoekers hebben geïnspireerd en welke hebben geleid tot bloeiende nieuwe onderzoeksgebieden. Zijn werk heeft niet alleen een grote invloed gehad op de kansrekening zelf, maar ook op andere disciplines. Tevens heeft hij veel bijgedragen aan de popularisatie van de kansrekening (zie zijn



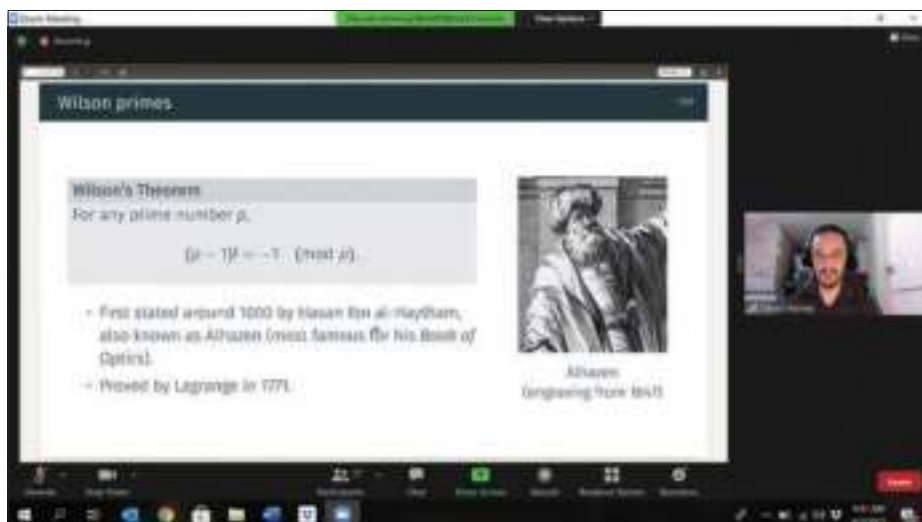
David Aldous

website ‘Probability and the Real World’). Enkele hoogtepunten uit het oeuvre van David zijn:

- ALOHA-protocol: een protocol dat gebruikt wordt voor onder andere communicatienetwerken. Het oorspronkelijke protocol is aangepast nadat David liet zien dat het niet altijd goed werkte.
- Aldous ‘tightness criterion’: legt een verband tussen de theorie van stochastische processen en zwakke convergentie, met behulp van zogenaamde stoptijden.
- Het ‘cut-off’-verschijnsel: een nieuw concept, geïntroduceerd samen met Persi Diaconis, waarbij een Markovproces plotseling naar evenwicht convergeert. Er blijken diepe verbanden met de algebra te bestaan.
- De continue stochastische boom: een serie artikelen over limieten van boomachtige structuren, die leiden tot een beter begrip van universaliteit.
- De Aldous–Hoover-stelling: een vergaande generalisatie van de Finetti’s stelling voor ‘exchangeable arrays’ van stochasten. Dit is een belangrijk hulpmiddel in diverse deelgebieden van de kansrekening geworden.
- Locale zwakke convergentie: een sleutelbegrip voor convergentie in random grafen.
- De ‘Poisson clumping heuristic’: een leidend begrip voor de beschrijving van zeldzame gebeurtenissen in stochastische processen. Ook dit leidt tot een beter begrip van universaliteit.
- Coalescentiemodellen: beschrijving van kritieke clusters in de Erdős–Rényi random graaf.

David heeft diverse prijzen ontvangen. Hij is fellow van de Royal Society, de American Academy of Arts and Sciences, de National Academy of Sciences, en de American Mathematical Society.

In zijn Brouwerlezing stelde David de vraag: “Waarom kunnen sommigen mensen een betere inschatting maken dan anderen van de kans op een eenmalige toevallige gebeurtenis?” Zijn verklaring, met een filosofische insteek, is dat de sleutel zit in het verlagen van de variantie. Hij suggereerde een theorie, met statistische ingrediënten, die onafhankelijk is van de onderliggende onbekende kansen. Een betere nauwkeurigheid kan alleen worden bereikt door het doen van inschattingen van vele gebeurtenissen.



David Harvey over de Wilson-priemgetallen

Algemene ledenvergadering KWG

Aan het einde van de eerste dag vond de jaarlijkse KWG-ledenvergadering plaats. Voorzitter Barry Koren gaf een kort algemeen overzicht over KWG in 2020, waarna de penningmeester, Wioletta Ruszel, de financiën doornam en de secretaris, Marie-Colette van Lieshout, een meer gedetailleerd overzicht gaf van activiteiten. Een en ander is te vinden op de website van KWG. Het dalende ledenaantal blijft een zorg van het bestuur, maar afgezien daarvan lopen zaken prima, met name is het *Nieuw Archief voor Wiskunde* nog steeds een prachtig visitekaartje, en blijft ook *Pythagoras* een mooi project, inmiddels al meer dan 60 jaar, ondanks de financiële zorgen. Om 18.45 uur sloot de voorzitter de ledenvergadering, en daarmee ook de eerste succesvolle dag van NMC 2021.

Beegerlezing

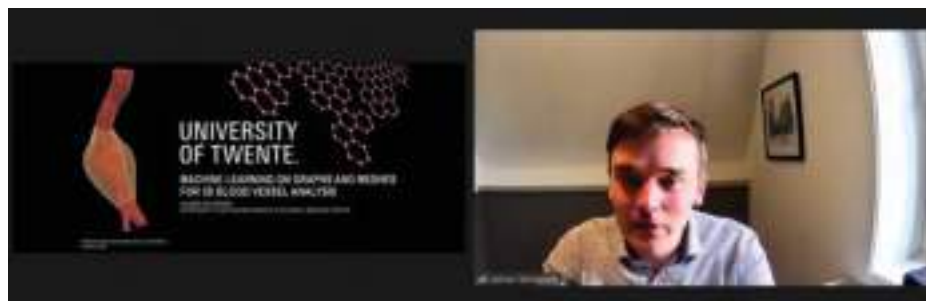
De tweede dag begon met een fantastische voordracht door David Harvey (UNSW Sydney) in het kader van de tweejaarlijkse Beegerlezing. Zijn voordracht handelde over snelle aritmetische algoritmen binnen de getaltheorie aan de hand van enkele toepassingen. In zijn introductie vertelde hij over het $O(n^2)$ -algoritme dat we allemaal op school aangeleerd krijgen voor het vermenigvuldigen van twee getallen. Men heeft lang gedacht dat het niet beter kon, maar vanaf 1962 zijn er ontwikkelingen geweest met een voorlopig hoogtepunt in 2019 met een algoritme (van de hand van Joris van der Hoeven en David Harvey) dat $O(n \log n)$ -operaties nodig heeft. Daarna kwamen er verschillende toepassingen aan

bod, als eerste de zogenaamde Wilson-priemgetallen, zie het screenshot hierboven voor de definitie.

Het aardige is dat Beeger, de naamgever van deze speciale NMC-voordrachten sinds 1989, ook een rol heeft gespeeld in het onderzoek gerelateerd aan de vraag om alle Wilson-priemgetallen te vinden kleiner dan een natuurlijk getal N : hij bewees een congruentie in 1920 en publiceerde deze in het tijdschrift *Messenger of Mathematics*. Een andere toepassing welke de revue passeerde was het berekenen van Bernoulli-getallen, welke voorkomen in de reeksontwikkeling van de functie $\frac{x}{e^x - 1}$. Openstaande vraag is nog steeds of we een bepaald Bernoulli-getal kunnen uitrekenen in quasi-lineaire tijd. De laatste toepassing handelde over zogenaamde irreguliere priemgetallen, waar Kummer zich onder andere mee bezighield. Dit probleem is nauw verwant aan de eerder genoemde Bernoulli-getallen. Al met al was het een boeiende en goed te volgen voordracht, uitstekend gepresenteerd. Complimenten aan de commissie welke de Beeger-spreker heeft gekozen!

Slotsessies

Na de pauze splitste het gezelschap zich op en woonde sessies bij van de wiskundeclusters GQT en NDNS+. In de sessie van het wiskundecluster NDNS+ spraken Stefanie Sonner (RU), Frits Veerman (UL) en Daniele Avitabile (VU). Stefanie vertelde over ruimtelijk heterogene biofilms. Met behulp van systemen van niet-lineaire reactie-diffusievergelijkingen kan hun dynamisch gedrag beschreven worden. Frits liet zien hoe de



Jelmer Wolterink over hoe machine learning kan helpen bij de diagnose van hart- en vaatziekten

stabiliteit van tweelaags grensvlakken begrepen kan worden met behulp van singuliere storingstheorie. Het onderzoek vindt toepassing in de beschrijving van het effect van cholesterol op het gedrag van 'phospholipid bi-layers'. Daniele besprak een bifurcatietheorie voor PDEs, in het bijzonder reactie-diffusievergelijkingen, geïllustreerd aan de hand van diverse voorbeelden.

De GQT-sessie werd verzorgd door drie jonge vrouwelijke talenten: Diletta Martinielli (UvA), Annegret Bartscher (RU) en Alessandra Cipriani (TUD). Diletta sprak over de birationale classificatie van algebraïsche variëteiten en hoe het dankzij het Minimal Model Program mogelijk is om drie zuivere hoofdsoorten te krijgen: Fano-variëteiten, Calabi-Yau en canoniek gepolariseerde variëteiten. Annegret vergeleek in haar presentatie de metrische ruimtestructuren van Riemann- en Lorentz-variëteiten, en liet zien hoe de convergentie van een reeks van zogenaamde 'warped product spacetimes' bestudeerd kan worden gebruikmakend van de nulafstand. Alessandra ten slotte introduceerde in haar lezing willekeurige interfaces in de context van conforme veldentheorieën, en concentreerde zich op het Gaussisch vrije veld (GFF).

's Middags waren er sessies van 4TU.AMI en 'Geschiedenis van de Wiskunde'. Laatstgenoemde sessie was geheel gewijd aan algoritmen: hun oorsprong, hun ontwikkeling door de eeuwen heen, en hun groeiende rol in moderne tijden, inclusief voor computers en kunstmatige intelligentie. Gerard Alberts (UvA) schetste het ontstaan van het begrip algoritme in het Midden-Oosten en India in de zevende en achtste eeuw. Merel Noorman (UvT) besprak ethische aspecten: de noodzaak om algoritmen te ontwerpen die neutraal zijn. Dit vormt een enorme uitdaging vanwege vele verborgen sociale aspecten. Sennay Ghebreab (UvA) ging in op de invloed van kunstmatige intelligentie op de maatschappij. Hij beargumenteerde dat

het nodig is om meer 'onder de motorkap' van algoritmen te kijken om ze neutraler en eerlijker te maken.

In de 4TU.AMI-sessie werd het onderwerp machine learning besproken. Lezingen werden gegeven door Remco Duits (TU/e), Jelmer Wolterink (UT) en Dirk van der Hoeven (UL). De eerste twee sprekers presenteerden nieuwe ideeën voor Convolutional Neural Networks (CCNs) of uitbreidingen daarvan, met een motivatie om ze te gebruiken voor beeldanalyse in medische toepassingen. Remco Duits introduceerde Groeps-equivariante Convolutionele Neurale Netwerken (G-CNNs) die ingebouwde symmetrieën mogelijk maken. Jelmer Wolterink presenteerde een nieuwe aanpak voor segment-labeling van de kransslagaderboom om te helpen bij de diagnose van hart- en vaatziekten (zie het screenshot hierboven). De neurale netwerken die voor deze aanpak werden gebruikt werden Graaf Convolutionele Neurale Netwerken met Aandacht genoemd. Dirk van der Hoeven's lezing ging over klassieke machine learning-benaderingen en begon met een mooie inleiding in de geschiedenis van het perceptron. Daarna introduceerde hij twee online leerinstellingen, namelijk de volledige informatie-setting en de zogenaamde bandit setting.

Het NMC werd afgesloten met twee plenaire lezingen. Eerst was het woord aan Bernd Sturmfels (MPI Leipzig en University of California). Hij hield een zeer geanimeerde lezing over een aantal onderwerpen binnen de enumeratieve algebraïsche meetkunde, waaronder een mooie uiteenzetting over het klassieke probleem van 3264 kegelsneden die raken aan vijf gegeven kegelsneden in het vlak. De lezing was voor een algemeen publiek met zeer mooie illustraties.

Assaf Naor (Princeton University) sloot het tweedaagse evenement af. Hij hield een heel mooie lezing over een klassieke

stelling van Fritz John, die stelt dat een n -dimensionale genormeerde ruimte met vervorming $\sqrt{n}$ ingesloten wordt in een Hilbertruimte. In zijn lezing besprak hij de indrukwekkende uitbreidingen van dit resultaat die van toepassing zijn op vragen in metrische geometrie en algoritmen.

Overige activiteiten

Met de NMC Scientific Days stopte de NMC Series 2021 niet. Inmiddels heeft de uitreiking van de Pythagorasprijs voor het beste profielwerkstuk in de wiskunde plaatsgevonden. Zowel de juryprijs als de publieksprijs is gegaan naar Femke Voogt van het Dongemond College in Raamsdonksveer voor haar werkstuk 'Hoger-dimensionaal boter, kaas en eieren'. Zij werd op de voet gevolgd door Daan Hoogcarspel, die als profielwerkstuk de lesmodule 'Deze titel is onwaar' heeft geschreven en door Casper Madlener die het werkstuk 'Getallen als sommen van kwadraten' schreef.

Gepland staan nog een tweede aflevering van 'What's cooking', de uitreiking van de KWG PhD-prijs en de bijeenkomst 'Onderzoek meets Onderwijs'. Voor het NMC 2022 wordt inmiddels nagedacht over opnieuw een NMC Series, waarin een aantal onderdelen welke nu online dienden te gebeuren, hopelijk weer op locatie kunnen plaatsvinden, maar een aantal succesvolle onderdelen, zoals de Speeddates, opnieuw online georganiseerd worden. Want, ondanks dat het gemis aan live contact wel echt een groot gemis was, heeft de gedwongen vernieuwing in 2021 ook zeker interessante mogelijkheden laten zien voor volgende edities van het NMC! En daarmee de kern van het NMC, ontmoeting tussen in Nederlandse werkzame wiskundigen, versterkend. ☞



Femke Voogt

Raf Bocklandt

Korteweg-de Vries Institute for Mathematics
University of Amsterdam
r.r.j.bocklandt@uva.nl

Nicos Starreveld

Korteweg-de Vries Institute for Mathematics
University of Amsterdam
n.j.starreveld@uva.nl

Interview David Aldous, winner Brouwer Medal 2020

Probability and the real world

On 6 April, during the NMC 2021 Scientific Days there was a postponed ceremony for David Aldous, the winner of the Brouwer Medal 2020. To get a better picture of the man behind the medal, Nicos Starreveld en Raf Bocklandt, editors of NAW, conducted a Zoom-interview with the laureate, during which they talked about life, work, teaching, and the interplay between probability and the real world.

Cambridge

David Aldous was born in 1952 in Exeter, a city in the southwestern tip of England. In 1970 he went to Cambridge University to study mathematics.

“At that time in England there was a sudden transition: in high school you are a child, in college you’re an adult, and I think that is much less the case nowadays. You had a lot of elective classes and you were not required to attend the lectures. Basically, you only had to do the exams at the end of the year. The unique feature of Cambridge and Oxford wasn’t the lectures but the fact that you had one-on-one or two-on-one tutorials with a graduate student or a faculty member. They assigned you problems for homework, but it was not graded. You just showed up for the tutorials, your tutor would ask how you did on the questions, and you would discuss the problems. In this way the supervisor would find out much quicker who was doing well and who needed help. This system is I think more personal than anywhere else in the world.”

At first his passion was mainly analysis, the interest in probability theory started

growing in the second year of his studies, when he followed a course on Markov Chains given by the probabilist and queueing theorist David Kendall.

“A funny story that I remember regards the final exams in the last year, my strongest subjects were general topology and probability, and Cambridge had this rule that the exams were set by someone who was not the instructor of the course. We had very good instructors for both courses but the final exam in topology was made by

John Conway and in probability by Béla Bollobás. They posed very creative questions which had almost nothing to do with the content of the courses, so I didn’t do so well.

After graduating, I went for one year to Yale University as part of an exchange program between the two universities. I still remember the lectures on weak convergence given by queueing theorist Ward Whitt, who was then a young assistant professor. Weak convergence was a topic that directly drew my attention as it combines in a very elegant manner analysis and probability theory. After the year in Yale, I returned to Cambridge. The university took me on as a graduate student without having completed all the official requirements. Things were all a bit more informal back then.”



The Brouwer Medal for David Aldous

Exchangeability

David Aldous obtained his PhD with a dissertation with the intriguing title *Two Topics in Probability Theory*. One of these topics concerned exchangeability and was inspired by work of John Kingman, who was a professor at the university of Oxford.

“At that time, John Kingman was investigating the subsequence principle. This was a very deep idea concerning limiting arguments of sequences of random variables. I remember taking the bus to Oxford, which although only 80 miles apart took about three hours to get to, to listen to Kingman’s lecture about this topic. At the end of the lecture, he formulated a very strong conjecture, which seemed natural but turned out to be wrong. I had already thought about this conjecture and had come up with a counterexample, but I wanted to be very cautious because he was the most famous probabilist in England. So back home, I wrote to a friend in Oxford to check it before giving it to Kingman.”

Traces of the subsequence principle are already present in the strong law of large numbers which states that, for any sequence of independent and identically distributed random variables $X_1, X_2, \dots$ the sample average $\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n X_i$ converges almost surely to the mean $\mu = \mathbb{E}X_1$. This holds not only for the average of the whole sequence, but also for the average of any of its subsequences.

In 1967 János Komlós proved the astonishing result that, for any sequence of random variables with bounded expectations $Y_1, Y_2, \dots$ (but not necessarily independent or identically distributed) there exists a subsequence $(Y_{n_i})_i$ and a random variable Y , such that its sample average, and that of all its subsequences, converge to Y . This discovery ignited a discussion among mathematicians on the universal character of such asymptotic results.

“Chatterji had formulated the following heuristic principle. Given a limit theorem for independently and identically distributed random variables under certain moment conditions, there exists an analogous theorem such that an arbitrarily-dependent sequence (under the same moment conditions) always contains a subsequence satisfying this analogous theorem. The limit theorem above is the precise form of



David Aldous

Photo: Wikimedia / George M. Bergman

this principle for the strong law of large numbers. Instead of formalizing a general framework Chatterji had proven some special cases [1].

Kingman was working on this topic and was certain exchangeability played a crucial role. His endeavour was to find an appropriate framework which would allow him to make the principle rigorous and to include all the special cases that had been proven by Chatterji in one general theorem. His approach relied on asymptotic exchangeability and resulted in Kingman’s conjecture (mentioned earlier) for which I had a counter-example.”

But this was not the end of the story. Aldous devised a more refined and mathematically precise version of the subsequence principle and showed that it is true both for any almost sure limit theorem and any weak limit theorem, subject only to some mild technical conditions.

The idea of Aldous was the following: from an arbitrary sequence of random variables $Y_1, Y_2, \dots$ with tight probability distributions (a natural condition which assures that no probability mass evades to infinity) he managed to extract a subsequence $(Y_{n_i})_i$ and relate it to an exchangeable sequence $(Z_i)_i$ with similar characteristics. Exchangeable sequences are sequences of random variables whose joint probability distribution remains unchanged after permutations

of the variables. This implies that every subsequence has the same distribution, and Aldous used this to show that certain types of properties of $(Z_i)_i$ are shared by subsequences of $(Y_{n_i})_i$.

“Exchangeability was back then an obscure topic in probability theory and not so many people cared too much about it. No one since 1981 has ever cared about this specific subsequence work. But another aspect of exchangeability, the analog of de Finetti’s theorem for arrays known loosely as Hoover–Aldous–Kallenberg theory, did emerge from obscurity twenty years later in the context of graphons. For me exchangeability is just there. What are the key ideas in mathematics? Symmetry is one of them if you think of group theory. If you ask how symmetry appears in probability theory then the answer is exchangeability.”

Berkeley

Not long after his PhD, Aldous got a job at the University of California in Berkeley, so in 1979 he moved across the Atlantic once more. He would remain there for the rest of his academic career because for someone working in probability theory Berkeley was an excellent choice.

“Berkeley was well known because of the Berkeley Symposium on Mathematical Statistics and Probability, which was held

about every five years from 1945 to 1972. In that era you didn't have many big international meetings in particular subjects. Somewhere in your library you can probably still find the proceedings of the Berkeley symposium and they contain a lot of interesting papers.

Everyone in the field knew that Berkeley was a center for probability and statistics even though they might not know who was actually working there. When I applied for my job in Berkeley, I remember walking down the corridor and being introduced to a kind old man. This turned out to be Jerzy Neyman, one of the founders of modern statistical testing. Just as you don't expect to walk into Euler or Gauss, you kind of assume that all the big textbook names are dead, so I had to restrain myself from shouting 'my god, you're still alive'. Now forty years later I'm waiting for someone younger to have that same reaction to me. I haven't heard it yet, but maybe someday ..."

Unlike in many other universities, the statistics group in Berkeley is not part of Mathematics but has its own separate department.

"When I arrived in 1979, its focus was mainly on mathematical statistics. It had the reputation of being one of the few places in the world where they were doing theoretical statistics. We had about 15 to 20 faculty members and we were teaching half of all the Berkeley students some introductory course in statistics. This was part of the reason of our existence. Most of the staff back then were hired for their research but we all taught some of these service courses.

Nowadays that has changed, and these courses are taught by specialist teachers, which I think is good for the standard of teaching because some of my colleagues and I were frankly not very good at teaching elementary statistics. In the first half of my career, I taught an introductory course in statistics to students who did not know any calculus or algebra. I actually enjoyed it because, contrary to an introductory course on analysis, you could draw a lot of your data and examples from newspapers. On the other hand, teaching a statistics course is like being a dentist, people don't really want to be there.

Because the statistics department and the mathematics department were sepa-

rate, math students could graduate without ever having followed a probability course. The math curriculum at Berkeley was very much focused on pure mathematics and probability was optional. In fact, some of the staff at the mathematics department did not consider probability to be part of mathematics at all. The two departments did not mingle that much; there were some older people who taught fifty-fifty at both departments but that had almost stopped by the time I arrived there. By the end of the nineties the connections were renewed and people like me were given a formal appointment at both schools. They finally agreed that probability and statistics were part of mathematics."

Microsoft

Although Aldous often jokingly says that he only held one job in his life, this is not entirely true. In 2009 he took a sabbatical year and moved to Seattle to work at Microsoft Research.

"My wife was born and raised in the San Francisco Bay Area and had lived there for whole of her life. She had some interest in moving sometime somewhere else and Seattle came to mind. Yuval Peres, a colleague of mine at Berkeley, worked at Microsoft Research and had some funding to invite me over for a sabbatical.

Microsoft Research is an interesting place. It acts a bit like an interface with the academic world and they employ a lot of

The Brouwer Medal

On the 6th of April David Aldous received the Brouwer Medal 2020 for his contributions to both pure and applied probability theory. The prize was awarded during the Scientific Days of the NMC 2021, which were held online due to COVID-restrictions.

In his laudation, Frank den Hollander, chair of the nomination committee, praised the great originality of Aldous's work combined with depth, breadth and beauty. He also indicated that Aldous has introduced a wealth of new concepts, which have had an enormous impact not only on probability itself, but also on other scientific fields. He has initiated flourishing new areas of research and has inspired researchers worldwide. In addition, he has contributed to the popularization of probability through numerous channels, such as his website 'Probability and the Real World'.

In particular, the committee highlighted the following scientific contributions:

- The ALOHA protocol, which is used in communication networks and was modified after Aldous proved that the original protocol was flawed.
- The probabilistic analysis of performance of algorithms in combinatorial optimization.
- The Aldous tightness criterion, which provides a connection between stopping times and tightness and links general theory of stochastic processes and weak convergence.
- The cut-off phenomenon for mixing times, a new concept for Markov processes pioneered with Persi Diaconis.
- His Landmark series of papers on limits of tree-like structures which lead to a better understanding of universality.
- His work on exchangeability that led to extensions of de Finetti's theorem and became a major tool in different areas of probability theory, including random graph theory.
- Local weak convergence, a key concept for convergence in random graphs.
- The Poisson clumping heuristic, a guiding notion for description of rare events with a wide range of applications
- His description of critical clusters in the Erdős–Rényi model for random graphs.
- Miscellaneous work on scale-invariant random spatial networks, discrete spatial networks, flows through random networks, recursive distributional equations, and stochastic models for phylogenetic trees.

The Brouwer medal is only one of the prizes and fellowships awarded to Aldous. He also received the Rollo Davidson Prize and the Loève International Prize in Probability, and became a Fellow of the Royal Society, the American Academy of Arts and Sciences, the American Mathematical Society and many more.

post-docs temporarily to know what is going on academically. Microsoft is incredibly careful about who they hire permanently. You can't get a job at Microsoft unless you worked for them as a kind of consultant for several years. You'll be well paid, so it is not like the gig economy, it is a bit like the tenure system in academia.

The research lab has about forty groups, each of which had about ten permanent people. They were supposed to be looking ahead at what Microsoft might be doing ten years down the line. Thirty-nine of these groups were doing something recognizable that might be relevant. Some were working on speech recognition or simultaneous spoken language translation, which were not at all doable at the time. Others were working on the Kinect-system, a motion controller that allowed you to play games by moving around.

I remember helping one of the groups that was modeling the parallel computations for their search engines. They were writing a paper about it in seven weeks to present at a conference. I was supposed to help them out with the math, but they kept changing the model every week. In mathematics we are a lot concerned with the complexity of algorithms and their running times, but it turned out that most of their problems were related to moving data around such that they were accessible by the different processors, which led to some interesting queueing problems."

Working at Microsoft also came with another perk for someone interested in statistics and probability: data.

"The fortieth group was the probability group, which was only there for obscure historical reasons. I mainly worked with them, and I didn't do much that was directly relevant for Microsoft. Around the same time their search engine Bing had just

come into operation, so they had access to a huge amount of new data. I got hold of a file with all the search queries that contained the word probability or chance. This gave me some real-world data to play with and I obtained some surprising insights.

It turned out that about half the chance queries had to do with health and medicine and about half of those with birth control and pregnancy. Another big part of the medical questions concerned cancer: if you are diagnosed with a certain cancer, what are the chances of surviving? Most of the nonmedical questions are still related to concrete personal events like accidents or career opportunities. Only a few people asked questions of a more philosophical nature, like the probability of life and evolution, or the vague 'probability of chance of something going wrong'."

An in-depth discussion on these search queries can be found on Aldous' website: https://www.stat.berkeley.edu/~aldous/RealWorld/bing_chance_topics.html.

Probability and the real world

Although many of Aldous' contributions to probability theory approach the subject from an abstract mathematical level, his ideas are often inspired by real life situations. An example of this is a toy model for waiting lines at a gate before boarding an airplane.

"Imagine you are waiting back in line at a passport control checkpoint. As people reach the front of the line they are being processed steadily, say it takes ten seconds to have a passport checked. Hence every ten seconds there is a departure from the queue. But not everyone in the queue moves forward constantly every ten seconds. When a person leaves the checkpoint, the next person moves up to the checkpoint, the next person moves up and

stops behind the now-first person, and so on, but this 'wave' of motion often does not move through the entire long line; instead, some person will move only a short distance, and the person behind will decide not to move at all.

I decided to make a model of this which is rather simple to understand quantitatively. This spatial queueing model is very interesting because it relates to something that has been very well studied, which is coalescing Brownian motion on the real line, but it relates bizarrely to it in the sense that time and space are interchanged. This was a funny discovery because I could just draw a picture of coalescing Brownian motion and then say that our model has exactly the same behavior with the only difference that time and space are interchanged, which unfortunately messes up the Markov property, and at a precise level this makes everything difficult. It was a fun problem to work on, in the end, we managed to explain an observation, but it didn't lead to something that can help you control or design queues."

Aldous has also contributed to the popularization of probability. In recent years he has taken an interest in various aspects of the real world that involve chance. On his website visitors can find a section 'Probability and the Real World', where they can read a plethora of interesting and stimulating ideas about everyday facts that relate to probability. So, if you want to know more about human biases, making predictions, (mis)using toy models, probability paradoxes or other mathematical curiosities, we strongly recommend you have a look and take a chance... ¶

Reference

- 1 D.J. Aldous, Subsequences of sequences of random variables, *Bulletin of the American Mathematical Society* 83(1) (1977), 121–123.

Piet Groeneboom

Delft Institute of Applied Mathematics
TU Delft
p.groeneboom@tudelft.nl



Column Piet takes his chance

Two cultures

Piet Groeneboom regularly writes a column on everyday statistical topics in this magazine.

Cultural differences

C. P. Snow wrote the essay *The Two Cultures*. I learn from Wikipedia (to which I also contribute from time to time) that it first existed in the form of a talk delivered the 7th of May 1959 in the Senate House, Cambridge, and that it was subsequently published as *The Two Cultures and the Scientific Revolution*.

This column is about the cultures of mathematical statistics and of medical statistics. It actually is my impression that people from the first category study papers written by people from the second category, but that the converse does not necessarily hold. But medical statisticians might profit from the newer insights of the mathematical statisticians.

There is always a danger that the phenomenon of ‘looking down on’ or the suggestion of it enters the picture. Pure mathematicians, looking down on applied mathematicians and vice versa (for different reasons). Mathematicians looking down on other sciences (“physicists do not know what a proof is”, “social science is no science”). We could even look down on our earlier selves at a time where we did not understand things which we now cannot imagine not understanding.

It is true that if a pure mathematician says something about statistics, I do not expect it to be very sensible, but the pure mathematician would not expect me to say something very sensible about his/her particular subject. There is just all this specialized knowledge one needs to understand what the current problems in the field are. The whole ‘looking down on’ is a kind of herd mentality (perhaps apart from the looking down on oneself).

Unfortunately, often oracles in the fields are cited to get verdicts on matters these oracles (and the persons who cite them) know nothing about. All this is to explain that it is not my goal to bash medical statistics, only to suggest that other methods (from mathematical statistics) could be used (being close enough to the field).

I was primarily interested in how the so-called reproduction number was estimated. But since I could not find concrete infor-

mation on how the RIVM (the Centre for Infectious Disease Control and Prevention of the National Institute for Public Health and the Environment) did this, I first focused on the estimation of the distribution of the incubation time about which (after some effort) I could find some more information.

Most of the literature on the estimation of the distribution of the incubation time can be found in journals of medical (not mathematical) statistics or just medical journals. These papers, unlike papers in mathematics, most of the time have many authors, and are often structured in the following way. First there is a summary of what colleagues in medical statistics or epidemiology have been doing. Then there is a summary of how data were collected, accompanied by multicolored pictures, meant as visualizations of the data. Next there might be some report on the use of simple parametric distributions (Weibull, gamma, log-normal, Erlang) in the estimation procedure. And then there might be some ‘ancillary material’, which has to be downloaded separately, and which might contain some formulas which are not included in the main body of the text. The ancillary material may even contain the real data.

If the estimates of the Weibull, gamma, log-normal and Erlang distributions are roughly the same, this fact is (mis)used to argue that these estimates are sound. But what if they are all far off the mark? And are these distributions really so different?

Let’s take a look now at a paper of the above type with nine authors: [7]. Its objective is (citing directly from the paper): “To estimate the length of the incubation period of COVID-19 and describe its public health implications.” It is indeed of the structure, described above. There is a multicolored picture on p. 3 (Figure 1) for the data on 181 cases. There are no formulas in the paper. There are references to what their direct colleagues did, for example the reference to [1] (which I discussed in my first column in this magazine). And, after some searching, I discovered the ancillary material in the ‘Reproducible Research Statement’ after the acknowledgements: “Statistical code and data set: available at [8].” This sounded promising: data on 88 subjects for the estimation of the distribution of the incubation time in [1], but data on 181 subjects would be available in [9]! Finding the right data set was again

(as with [1]) not entirely trivial, but anyway, in the end I could analyze these data with my own methods. Actually, to save the reader all this time-consuming searching, I put the data analyzed in [1] (and again analyzed by myself in [3]) into the main body of my text in [3].

Although the authors of [7] refer to [1], the model is different. The difference is that it is not assumed that we have exact data on when a person becomes symptomatic, but only have an interval in time for when this happened. In fact, in [1] there is also an interval, but this is only the interval of one day, whereas in [7] the interval can be 81 days. We have the following model.

There is an interval $[E_L, E_R]$ for the infection time and an interval $[S_L, S_R]$ for the time of becoming symptomatic. In the models used one can, just as in [3], shift the data in such a way that $E_L = 0$, which leaves us with three numbers: the time E ('Exit time' in the case of the data in [1], telling us when the person left Wuhan) and the times S_L and S_R , adapted for the shifting of E_L to zero. Denoting the time of becoming symptomatic by S , we have that S is the sum of the infection time I and the incubation time U . We assume, conditionally on the exit time E , that I and U are independent and also that the time of becoming infected is uniformly distributed on the interval $[0, E]$.

Now S can in fact lie in the interval $[0, E]$ (the person becomes symptomatic before the exit time E). In this case there is overlap between the intervals $[0, E]$ and $[S_L, S_R]$. Or we have that $E < S_L$ and then the incubation time U bridges the distance between the point $I \in [0, E]$ (infection time) and the point $S \in [S_L, S_R]$ (time of becoming symptomatic). It is very interesting that, in spite of the fact that we do not have a direct observation of I or U (we only know that their sum $S = I + U$ — time of becoming symptomatic — lies in some interval and that $I \leq E$), we can nevertheless estimate the density of the incubation time pretty well, *at least, if we use the right method!*

On the topic of interval censored data (and that is what we have here) there is a large literature in mathematical statistics, but this literature is usually completely ignored by (or unknown to?) the medical statisticians.

The model used by [7] is called the model for *doubly censored data*. I must add that this is how it is called by medical statisticians. In the world of mathematical statistics there is a completely different model which is also called the model for doubly censored data, on which there is the magnificent paper [6], but I'll stick to the use of this terminology in the world of medical statistics.

The analysis in [7] is based on [9] and uses the R package `coarseDataTools`, which is also created (among others) by Nicholas Reich and Justin Lessler, two of the nine authors of [7].

Now I would like to comment on the medical statistics paper [9]. This paper discusses both the model used in [1] and the model used in [7]. They call the model in [1] *single interval censored*. The log likelihood of a sample in the single interval censored case is of the form

$$\sum_{i=1}^n \log\{G(S_i) - G(S_i - E_i)\},$$

where n is the sample size, S_i the time of becoming symptomatic, E_i the exit time for the i th person, and G the (unknown) distribution function of the incubation time we want to estimate; $G(u) = 0$ if $u \leq 0$ (see also [4]).

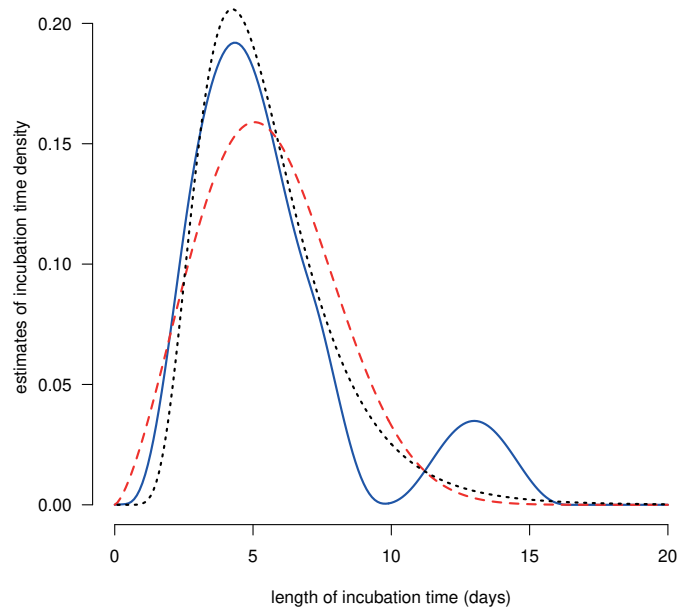


Figure 1 Estimates of the density of the incubation time for the data in [7], using bandwidth $h = 3.5$ for the nonparametric estimate. The red dashed curve is the Weibull estimate of the density for the data in [7], the black dotted curve the log-normal estimate of the density and the blue solid curve is the nonparametric estimate. Sample size is $n = 181$.

In the *doubly censored* case, though, the log likelihood is of the form

$$\sum_{i=1}^n \log[\mathbb{G}(S_{R,i}) - \mathbb{G}(S_{R,i} - E_i) - \mathbb{G}(S_{L,i}) + \mathbb{G}(S_{L,i} - E_i)],$$

where $\mathbb{G}(u) = \int_0^u G(x)dx$, $u > 0$, is the *integrated* distribution function G , where $\mathbb{G}(u) = 0$ if $u \leq 0$, and where $[S_{L,i}, S_{R,i}]$ is the interval for the time of becoming symptomatic for the i th person; E_i is again the exit time. So we maximize over a *convex* function $\mathbb{G}$ instead of a monotone function G .

It is clear that these maximization problems are totally different. Nevertheless, [9] has an appendix with the title 'Proof of non-equivalence in interval-censored likelihoods' to show that the likelihoods are not of the same type. May I say that this strikes me as a little bit odd?

I now take a look at the results of the parametric methods in [7] and compare these with the results of the nonparametric method. The estimates of the density (with respect to Lebesgue measure) of the incubation time distribution, based on the data in [7] are shown in Figure 1. I used the R package `coarseDataTools` to compute the parametric estimates based on the Weibull and log-normal distributions. The nonparametric estimate is bimodal, where the second mode is between 10 and 15. This could point to the existence of a subpopulation with longer incubation times of 10 to 15 days. The rigid parametric models do not allow this bimodality.

Note that we cannot make histograms of direct data here, and that we first have to perform the 'deconvolution' (see the concluding remarks below) of the time of becoming symptomatic into infection time and incubation time before we can produce the estimate of the incubation time. Moreover, even the time of becoming symptomatic is not directly observed, but only known to belong to a certain interval.

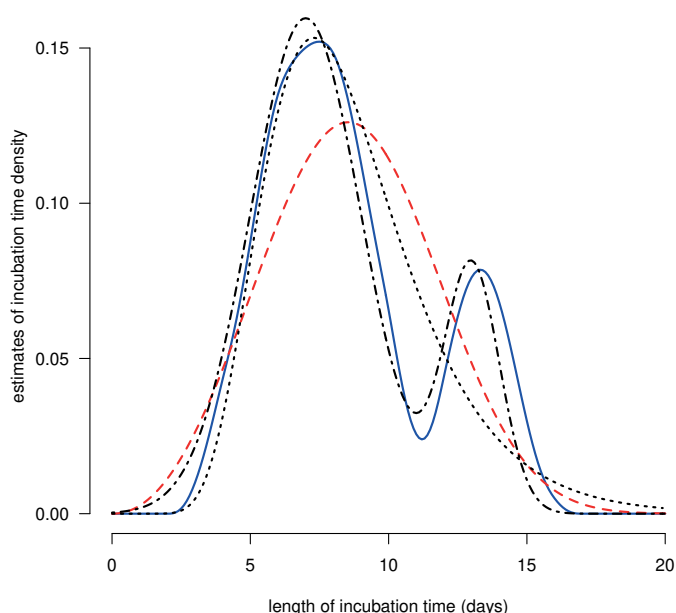


Figure 2 Estimates of the incubation time density for simulated data, using bandwidth $h = 3$ for the nonparametric estimate. The red dashed curve is the Weibull estimate of the density, the black dotted curve the log-normal estimate, the blue curve the nonparametric estimate and the black dashed-dotted curve the real density. Sample size is $n = 500$.

To see whether this bimodality could be real and yet completely missed by the parametric methods, I generated the incubation times from a mixture of normals on $[0, 20]$ by rejection sampling. I used a sample of $n = 500$ elements. The exit times E_i were generated from a uniform distribution on $[0, 30]$ and the infection times from a uniform distribution on $[0, E_i]$, conditionally on E_i . This yields sums S_i of the infection times and incubation times, upon which I dropped intervals $[S_{L,i}, S_{R,i}]$ by drawing uniform random variables on $[-3, -1]$ and $[1, 3]$. The R script for this can be found on [5] and was written by Slavik Koval.

Clearly the bimodality is indeed not noticed by the Weibull and log-normal estimates. On the other hand, the nonparametric estimate is remarkably close to the real density and completely reproduces the bimodality. The log-normal estimate seems a bit closer to the real density on the interval $[0, 7]$. Both parametric estimates compensate for the missing of the bimodality by a global shift to the right.

For the mathematical statisticians, there is still a lot of work to be done in this direction. For example, I gave in [3] a sketch of the proof that in the single interval censored model the optimal bandwidth in the estimation of the density will converge at rate $n^{-1/7}$

in a continuous version of the model, if n is the sample size, and that the rate of convergence of the estimate itself is $n^{-2/7}$. Why is this ‘asymptopia’, as it is called by some medical statisticians, of practical importance? It is important because it leads to an automatic method for choosing the bandwidth. We can only use this particular method if we know the rate of convergence. Apart from this, ‘asymptopia’ is implicit in the computation of the confidence intervals for the parametric methods, as computed by using the bootstrap in the R package `coarseDataTools`.

What these rates are for the doubly interval censored model is still unknown. It is clear, though, that if we want more accurate estimates of the density of the incubation time and other characteristics of the pandemic, we have to explore these matters further and have to abandon the classical parametric methods.

Conclusion

My goal was to get information on the length of the incubation time for COVID-19. This is of importance for quarantine measures, et cetera. But we do not have direct observations. What we can (almost) observe is the time of becoming symptomatic. This is the sum of the time to infection and the time from infection till being symptomatic (i.e., the incubation time). Under a conditional independence assumption the distribution of this sum is the *convolution* of the distribution of time till infection and incubation time. We want to pull out of this the information on the incubation time distribution: this is the *deconvolution* aspect. We can do this under some assumptions on the infection time distribution, for example that this distribution is uniform on the time interval (till leaving Wuhan, for example). On top of this there is still the difficulty that even the time till being symptomatic is not observed exactly: we only have an interval for it, sometimes a day, sometimes a lot of days. That is the *interval censoring* aspect.

I discussed the analysis of a new data set linked to [7], with the suggestion of bimodality (‘two cultures’ again), exhibited by the nonparametric estimate. To illustrate that the presence of possible bimodality will be missed by the parametric methods, as used in [1] and [7], I generated a bimodal incubation time distribution, and applied the different methods to this data set. Figure 2 clearly shows that the nonparametric estimate reproduces the bimodality remarkably well and that indeed the parametric estimates completely miss the bimodality and are inferior estimates in this situation. That the usual parametric methods do not pick up the bimodality is not so surprising, but it might be surprising that the nonparametric methods do so well here. The R scripts for producing the test data and the pictures in this column can be found in [5].

References

- 1 Jantien A. Backer, Don Klinkenberg and Jacco Wallinga, Incubation period of 2019 novel coronavirus (2019-nCoV) infections among travellers from Wuhan, China, 20–28 January 2020, *Euro Surveill.* 25 (2020).
- 2 Piet Groeneboom, Incubation time (2020), <https://github.com/pietg/incubationtime>.
- 3 Piet Groeneboom, Estimation of the incubation time distribution for COVID-19, *Statistica Neerlandica* (2020).
- 4 Piet Groeneboom, Nederland in tijden van corona, *Nieuw Archief voor Wiskunde* 5/21 (2020), 181–184.
- 5 Piet Groeneboom, Doubly censored data, (2021), https://github.com/pietg/doubly_censored_data.
- 6 M.G. Gu and C.-H. Zhang, Asymptotic properties of self-consistent estimators based on doubly censored data, *Ann. Statist.* 21(2) (1993), 611–624.
- 7 S.A. Lauer, K.H. Grantz, Q. Bi, F.K. Jones, Q. Zheng, H.R. Meredith, A.S. Azman, N.G. Reich and J. Lessler, The incubation period of coronavirus disease 2019 (covid-19) from publicly reported confirmed cases: Estimation and application, *Annals of Internal Medicine* 172 (2020), 577–582.
- 8 Steven A. Lauer, ncov_incubation (2020), https://github.com/HopkinsIDD/ncov_incubation.
- 9 Nicholas G. Reich, Justin Lessler, Derek A.T. Cummings and Ron Brookmeyer, Estimating incubation period distributions with coarse data, *Stat. Med.* 28(22) (2009), 2769–2784.

Marianne van Dijke-Droogers

Freudenthal Instituut

Universiteit Utrecht

m.j.s.vandijke-droogers@uu.nl

Onderwijs Een leertraject met een black box en statistisch modelleren via simulatiesoftware

Statistische inferentie in vwo 3

Ruim vier jaar lang werkte Marianne van Dijke-Droogers als docent-onderzoeker aan een promotieonderzoek naar het aanleren van statistische inferentie, waarop zij op 30 juni zal promoveren. Gedurende deze onderzoeksperiode bestonden haar werkzaamheden uit twee dagen lesgeven op de middelbare school en drie dagen onderzoek, gefinancierd door het DUDOC-programma van het ministerie van OCW. Het onderzoek vond plaats op het Freudenthal Instituut van de Universiteit Utrecht, onder begeleiding van Paul Drijvers en Arthur Bakker. In dit onderzoek werd met name gekeken of de inferentiële statistiek op een informele manier al in de onderbouw kan worden geïntroduceerd. Dit artikel presenteert het ontwerp en de leereffecten van het ontworpen leertraject.

Belang van statistische inferentie

De overweldigende hoeveelheid data, grafieken en voorspellingen met betrekking tot de COVID-pandemie in het afgelopen jaar illustreert het essentiële belang van statistiek. Op basis van data worden ingrijpende beslissingen genomen en uitspraken gedaan, zowel door burgers als professionals. Het is daarom van belang om de statistische geletterdheid van onze leerlingen te ontwikkelen. Dit houdt in dat leerlingen toegerust worden om statistische informa-

tie te interpreteren, kritisch te beoordelen en hier conclusies uit te trekken [9].

Het werken met inferenties (gevolgtrekkingen) vormt het hart van de statistiek. Als zodanig is het essentieel dat leerlingen zich bekwamen in het interpreteren van inferenties. Bij inferenties worden op basis van steekproefdata conclusies getrokken over een groter geheel of proces. Het interpreteren van de onzekerheid en het duiden van de waarschijnlijkheid van de conclusie is veelzijdig en complex.

Problemen aanleren inferentiële statistiek

In veel landen, waaronder Nederland, wordt statistische inferentie daarom pas behandeld in de bovenbouw van het voortgezet onderwijs of in het hoger onderwijs. Uit onderzoek blijkt dat inferentiële statistiek hier een struikelblok is voor veel leerlingen en studenten. De moeilijkheden van leerlingen worden met name veroorzaakt door een beperkt begrip van kernconcepten die nodig zijn voor inferenties [5,11] zoals steekproef, variatie en verdelingen. Deze conceptuele problemen worden verergerd door een sterke onderwijsfocus op het aanleren van complexe, formele procedures.

Inzet statistische modellen en modelleren

Om de moeilijkheden van leerlingen te overbruggen is in de afgelopen decennia gezocht naar *informele* onderwijsbenaderingen om conceptueel begrip te promo-

ten. Het aanbieden van informele inferentiële activiteiten op jongere leeftijd zou het leren van de complexere inferentiële statistiek op latere leeftijd kunnen vereenvoudigen [19].

De inzet van recente digitale leeromgevingen met opties voor statistisch modelleren, zoals de simulatiesoftware van VUstat en TinkerPlots, biedt een informele aanpak om het begrip van statistische concepten en modellen te verdiepen [3,8]. Inzicht in statistische modellen is van fundamenteel belang voor het interpreteren van statistische inferenties [13].

Het inbedden van informele statistische inferentie in eerdere leerjaren lijkt veelbelovend, met name in combinatie met het gebruik van digitale leermiddelen. Er is echter nog weinig bekend over hoe we dit op een effectieve manier kunnen inzetten in ons huidige onderbouwcurriculum.

Onderzoeksvraag en methode

Dit promotieonderzoek richtte zich op de vraag:

Hoe kan een theoretisch en empirisch gebaseerd leertraject leerlingen uit vwo 3 laten kennismaken met statistische inferentie?

Dit onderzoeksproject volgde een ontwerpgerichte aanpak [1]. Deze aanpak kenmerkt zich door een cyclisch proces waarin onderwijsmateriaal voor leeromgevingen wordt ontworpen, geïmplementeerd en geëvalueerd, voor vervolgcycli van (her)ontwerp en testen [14]. Het ontwerp van het leertraject werd geïnformeerd door theorieën over herhaalde steekproeven en statistisch modelleren [2,10,12,15,18] met behulp van een black box paradigmatische context [7]. In de beginfase richtten we ons vooral op de ontwikkeling van een theoretisch gefundeerd ontwerp, met daarin een specificatie van beoogde leerdoelen en de uitwerking hiervan in een (hypothetisch) leertraject. Naarmate het onderzoek vorderde, werden meerdere interventies met het leertraject uitgevoerd in de lespraktijk en geëvalueerd. Deze interventies werden in iedere cyclus opgeschaald in zowel de lengte van het leertraject als in het aantal deelnemers.

Ontwerp van het leertraject

In dit artikel zoomen we in op de resultaten van de derde, en tevens laatste, onderzoekscyclus. Op basis van de eerste

twee onderzoekscycli, een verdiepende casestudie en aanvullend literatuuronderzoek werd het (hypothetische) leertraject (her)ontworpen voor de derde cyclus. Deze cyclus omvatte het gehele traject van acht leerstappen, opgesplitst in twee vergelijkbare delen van vier: (1) experimenteren met een fysieke black box, (2) visualiseren van verdelingen, (3) onderzoeken van steekproevenverdelingen met behulp van simulatiesoftware, (4) interpreteren van steekproevenverdelingen voor inferenties in realistische contexten. De stappen 1 tot en met 4 zijn alleen gericht op categoriale data en in de stappen 5 tot en met 8 wordt gewerkt met numerieke data. Een overzicht van het gehele leertraject is weergegeven in Tabel 1. De tijdsomvang van het leertraject bestond uit zes lesuren per deel, met een totaal van 12 lesuren.

Implementatie van het leertraject

Het leertraject werd geïmplementeerd in een interventie onder 267 leerlingen in dertien klassen op verschillende scholen. Voor de analyse van de resultaten gebruikten we pre- en posttests en interventiematerialen — bestaande uit werkbladen van leerlingen, notities van docenten en onderzoeker. Om de significante leerwinst te interpreteren, hebben we de pre- en posttestresultaten van de leerlingen uit de interventiegroep vergeleken met nationale en internationale prestaties. Voor de nationale vergelijking gebruikten we de testresultaten van een vergelijkingsgroep ($n = 217$) die het reguliere vwo 3-curriculum volgde, en de internationale vergelijking werd gedaan aan de hand van een Australische studie [4] met vergelijkbare testopzet.

De pre- en posttest

De reguliere aanpak in de nationale vergelijkingsgroep ($n = 217$) bestond uit tien tot twaalf lessen gericht op beschrijvende statistiek. Om de resultaten van de interventie- en vergelijkingsgroep te kunnen vergelijken werden pre- en posttests ontwikkeld op basis van reeds bestaande tests om de statistische geletterdheid — en dan met name de statistische inferentie — van leerlingen te onderzoeken [6,16,17]. Statistische geletterdheid kan onderverdeeld worden in drie domeinen: (1) Statistische Inferentie, (2) Grafieken en Veranderingen, (3) Kans en Gemiddelde. Het ontworpen leertraject was vooral gericht op statisti-

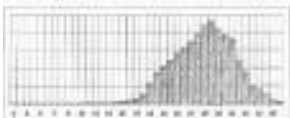
sche inferentie, het eerste domein. We vermoedden echter dat het leertraject ook een positieve invloed zou hebben op de andere twee domeinen. Het reguliere vwo 3-curriculum was voornamelijk gericht op domein twee en drie. De inzet van tests gericht op alle domeinen van statistische geletterdheid maakte het mogelijk om de resultaten van de interventiegroep te vergelijken met die van de vergelijkingsgroep.

Effecten van het leertraject

De nationale vergelijking van (post)testresultaten toonde aan dat de interventiegroep significant hoger scoorde op statistische geletterdheid, en in het bijzonder op het domein van statistische inferentie. Tabel 2 toont een overzicht van de resultaten voor de interventie- en vergelijkingsgroep. De laatste kolom in het vak met posttestresultaten toont het verschil in score tussen de interventie- en vergelijkingsgroep. Een one-way ANOVA toonde aan dat de interventiegroep significant hoger scoorde met $+0,33$ op statistische geletterdheid en $+0,67$ op statistische inferentie, beide met $p < 0,0005$. Tevens vonden we aanzienlijk positieve effecten voor de andere twee domeinen. Hoewel het leertraject niet gericht was op de andere domeinen, bleek het leertraject — bestaande uit een onderzoekgerichte aanpak met digitale middelen en meer complexe leeractiviteiten voor statistische inferentie — ook hier een positief effect te hebben.

De vergelijking van pre- en posttestresultaten maakte het mogelijk om de vooruitgang van leerlingen te onderzoeken. Deze vooruitgang is af te lezen in het onderste vak van Tabel 2 'Pre naar post'. Een gepaarde t -test toonde aan dat de interventiegroep bij de posttest significant hoger scoorde dan bij de pretest op alle domeinen van statistische geletterdheid, en met name op het domein statistische inferentie $+0,89$ met $p < 0,0005$. Tussen de pre- en posttest volgde de vergelijkingsgroep geen statistieklessen, wat zichtbaar is in de gelijkwaardige resultaten op beide tests voor deze groep. De leerlingen van de vergelijkingsgroep volgden de statistieklessen voorafgaand aan de pretest, waardoor hun resultaten op de pretest hoger zijn dan voor de interventiegroep.

De vergelijking met de internationale studie maakte het mogelijk om het geobserveerde verschil tussen beide groepen

Leerstep	Beschrijving	Voorbeeld van activiteiten	Leerdoel	Opbouw in leerstappen
<i>Categoriale data</i>				
1. Experimenteren met een fysieke black box 	Fysiek 'black box met balletjes'-experiment (met klein en groot kijkvenster)	Schat het aantal gele balletjes in de black box, gevuld met 1000 balletjes, door het (herhaaldelijk) schudden en onderzoeken van het aantal zichtbare balletjes	Leerlingen formuleren inferenties en maken kennis met concepten als steekproef, steekproefomvang, steekproefvariatie, frequentie en centrum- en spreidingsmaten, in de context van herhaalde steekproeven met een fysieke black box	Leerlingen ervaren dat steekproefresultaten variëren en dat een grotere steekproefomvang en meer herhalingen leiden tot een betere schatting van de populatie. Vervolg vraag: Wat gebeurt er als we de steekproefomvang en het aantal herhaalde steekproeven verder vergroten? Het uitvoeren van meer en grotere steekproeven is tijdrovend, daarom kan een gedachte-experiment helpen. De steekproevenverdeling van herhaalde steekproeven kan gebruikt worden om de waarschijnlijkheid van specifieke steekproefresultaten te bepalen. Vervolg vraag: Hoe kunnen we snel en eenvoudig de steekproevenverdeling van herhaalde steekproeven verkrijgen? Het gebruik van technologie kan helpen. Statistisch modelleren— inclusief het interpreteren van de steekproevenverdeling bij herhaalde steekproeven— kan gebruikt worden om de waarschijnlijkheid van specifieke steekproefresultaten te bepalen. Vervolg vraag: Kan statistisch modelleren meer algemeen gebruikt worden, in andere situaties en contexten? Vanuit stap 1 tot en met 4 ontstaat de vraag hoe statistisch modelleren gebruikt kan worden bij andere—niet categoriale—data
2. Visualiseren van verdelingen 	Grafiek als model (visualisatie) voor de frequentieverdeling bij herhaalde steekproeven met een black box	Schets de frequentieverdeling die je verwacht als het black box-experiment met groot venster 100000 keer wordt herhaald	Leerlingen kunnen een visualisatie tekenen van de verwachte steekproevenverdeling bij herhaalde steekproeven, leerlingen interpreteren de steekproevenverdeling om inferenties te formuleren over de waarschijnlijkheid van specifieke steekproefresultaten	
3. Modelleren van een black box (ICT) 	Simulaties van herhaalde steekproeven met een gemodelleerde black box in een steekproevenverdeling, voor het bepalen en interpreteren van de waarschijnlijkheid van specifieke resultaten	Gebruik TinkerPlots om de meest voorkomende steekproefresultaten te bepalen voor een black box gevuld met 750 gele en 250 oranje balletje, bij een steekproefomvang van 40	Leerlingen gebruiken statistisch modelleren in de digitale omgeving van TinkerPlots om (on)waarschijnlijke steekproefresultaten te bepalen, in de context van een black box [statistisch modelleren omvat het invoeren van een model, simuleren van (herhaalde) steekproeven, visualiseren van de steekproevenverdeling en interpreteren van de resultaten]	
4. Modelleren van realistische contexten (ICT) 	Modelleren van een specifieke situatie in TinkerPlots, voor het simuleren en interpreteren van de steekproevenverdeling en het beter begrijpen van de situatie (inclusief de bijbehorende onzekerheid)	Gebruik TinkerPlots om te bepalen welke steekproefresultaten je kunt verwachten als een steekproef met 30 leerlingen wordt uitgevoerd op een school met 300 leerlingen, bij onderzoek naar het aantal leerlingen dat dagelijks ontbijt (gegeven dat gemiddeld 70% van de vo-leerlingen dagelijks ontbijt)	Leerlingen gebruiken statistisch modelleren in de digitale omgeving van TinkerPlots voor het formuleren van inferenties, in de context van realistische probleemstellingen	

Tabel 1 Overzicht van stap 1–8 van het leertraject.

Leerstep	Beschrijving	Voorbeeld van activiteiten	Leerdoel	Opbouw in leerstappen
<i>Numerieke data</i>				
5. Experimenteren met een fysieke black box	Fysiek 'black box met briefjes'-experiment (de black box is gevuld met 4000 briefjes, elk briefje bevat gegevens over het geslacht en de lichaamslengte van een leerling uit klas 2, bijvoorbeeld: jongen–155 cm)	Neem een steekproef van 40 briefjes en vat de steekproefdata samen (bereken centrum- en spreidingsmaten, gebruik visualisaties), maak een schatting van de lichaamslengte van de 4000 leerlingen uit klas 2	Leerlingen formuleren inferenties in de context van een fysieke black box met briefjes (geslacht en lichaamslengte van 4000 leerlingen uit klas 2) met inachtneming van steekproefomvang, steekproefvariatie en centrummaten	Leerlingen bespreken hoe numerieke data van herhaalde steekproeven gebruikt kunnen worden om inferenties over de populatie te formuleren. Vervolgvrage: Hoe kan de onderliggende populatieverdeling—de lichaamslengte van de 4000 leerlingen op de briefjes in de black box—weergegeven worden op basis van de gevonden steekproefresultaten? Leerlingen formuleren inferenties over het populatiegemiddelde en de populatieverdeling op basis van de gevonden steekproefdata. Vervolgvrage: Wat zijn de effecten van grotere en meer steekproeven op de schatting van het populatiegemiddelde en de populatieverdeling? Het gebruik van technologie kan helpen bij het onderzoeken van deze effecten. Vanuit leerstep 7 ontstaat de vraag hoe het statistisch modelleren met numerieke data kan worden toegepast in andere contexten en situaties
6. Visualiseren van verdelingen	Verwachtingen over de populatie (lengte van 4000 leerlingen) samenvatten en visualiseren op basis van de gevonden steekproefdata in leerstep 5	Schets de frequentieverdeling die je verwacht voor de totale populatie, op basis van de gevonden steekproefresultaten in leerstep 5	Leerlingen schetsen een visualisatie van de populatieverdeling die ze verwachten op basis van de gevonden steekproefresultaten, leerlingen maken inferenties over de populatieverdeling en het populatiegemiddelde	
7. Modelleren van een black box (ICT)	Experimenteren met simulaties van (herhaalde) steekproeven, bij variatie in omvang en aantal herhalingen, in de context van de black box met briefjes uit leerstep 5 en 6	Gebruik TinkerPlots om de meest voorkomende steekproefresultaten te bepalen voor de (gegeven) gemodelleerde black box met briefjes die hoort bij leerstep 5	Leerlingen gebruiken statistisch modelleren in de digitale omgeving van TinkerPlots om (on)waarschijnlijke steekproefresultaten te bepalen, in de context van de black box met briefjes [statistisch modelleren omvat hier het simuleren van (herhaalde) steekproeven vanuit een <i>gegeven</i> model, visualiseren van de steekproevenverdeling van het steekproefgemiddelde, en het interpreteren van de resultaten]	
8. Modelleren van realistische contexten (ICT)	Modelleren van een realistische situatie in TinkerPlots, voor het simuleren en interpreteren van de steekproevenverdeling, en het beter begrijpen van de situatie (inclusief de bijbehorende onzekerheid)	Gebruik TinkerPlots voor het simuleren van herhaalde steekproeven (omvang 200) vanuit een verborgen populatiemodel van 4000 personen om de sporttijd van deze personen te onderzoeken en bepalen	Leerlingen gebruiken statistisch modelleren in de digitale omgeving van TinkerPlots om inferenties te formuleren, in realistische contexten en probleemstellingen	

Tabel 1 Overzicht van stap 1–8 van het leertraject. (vervolg)

		Interventiegroep (<i>n</i> = 267) M (SD)	Vergelijkingsgroep (<i>n</i> = 217) M (SD)	Interventiegroep – vergelijkingsgroep M(I) – M(V)
Pretest	SG	2,60 (0,61)	2,97 (0,68)	– 0,37***
	SI	2,45 (0,65)	2,72 (0,71)	– 0,27***
	GV	2,07 (0,63)	2,29 (0,58)	– 0,22***
	KG	3,29 (1,38)	3,92 (1,31)	– 0,63***
Posttest	SG	3,28 (0,69)	2,95 (0,78)	+ 0,33***
	SI	3,34 (0,84)	2,67 (0,84)	+ 0,67***
	GV	2,59 (0,81)	2,38 (0,88)	+ 0,21*
	KG	3,92 (0,88)	3,80 (1,06)	+ 0,12
Pre naar post	SG	+ 0,68 (0,86)***	– 0,02 (0,73)	0,70***
	SI	+ 0,89 (0,92)***	– 0,04 (0,71)	0,93***
	GV	+ 0,52 (0,98)***	+ 0,09 (0,94)	0,43***
	KG	+ 0,63 (1,53)*	– 0,11 (1,45)	0,74***

p* < 0,05, *p* < 0,005 en ****p* < 0,0005
 Noot: SG = statistische geletterdheid; SI, GV, KG zijn de drie domeinen binnen SG; SI = statistische inferentie; GV = grafieken en veranderingen; KG = kans en gemiddelde.

Tabel 2 Gemiddelde leerlingsscore op de domeinen van statistische geletterdheid bij de pre- en posttest voor de interventie- en vergelijkingsgroep, inclusief vooruitgang van pre naar post.

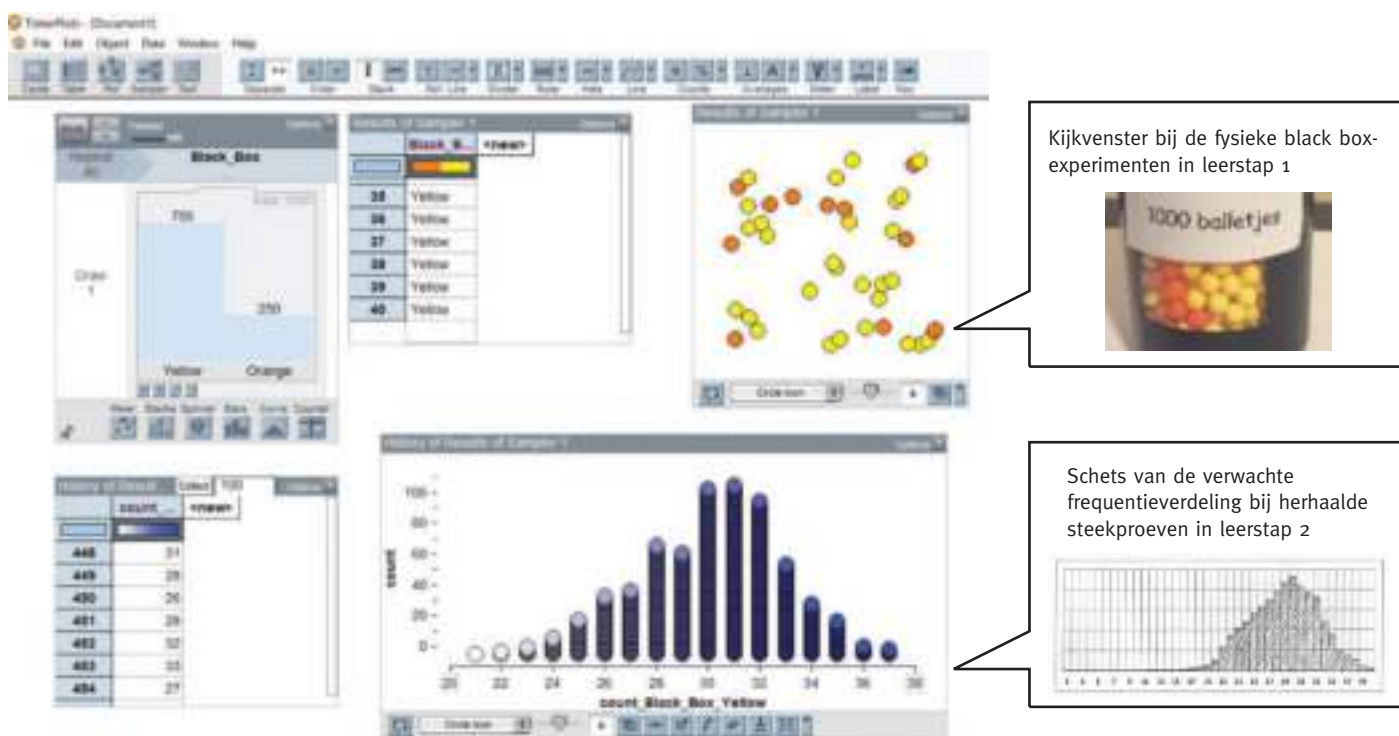
nader te interpreteren. Deze vergelijking toonde aan dat de posttestresultaten van de interventiegroep met 14–15-jarigen op statistische geletterdheid het meest overeenkwamen met die van Australische leerlingen in Grade 7–8 met een leeftijd van ongeveer 13 jaar. De resultaten van de vergelijkingsgroep met 14–15-jarigen waren het meest vergelijkbaar met die van

Australische leerlingen in Grade 6–7 met een leeftijd van ongeveer 12 jaar. Uit deze internationale vergelijking kunnen we concluderen dat de interventiegroep aanzienlijk hoger scoorde dan de vergelijkingsgroep met ongeveer één leerjaar verschil. Opvallend is dat de resultaten van beide groepen met leerlingen in de leeftijd van 14–15 jaar overeenkwamen met die van

aanzienlijk jongere Australische leerlingen. Vermoedelijk komt dit doordat het statistiekaanbod in Australië uitgebreider is dan in Nederland. De bevindingen vanuit zowel de nationale als internationale vergelijking toonden aan dat het leertraject een significant positief effect had op de statistische geletterdheid van de leerlingen, en in het bijzonder op het domein van statistische inferenties. Tevens signaleerden we positieve effecten voor de andere domeinen.

De leerstappen nader onderzocht

Om te onderzoeken *hoe* het leertraject werkt, werden zowel leerstapgerelateerde posttestitems als interventiematerialen – leerling werkbladen en docentnotities – geanalyseerd. De posttestresultaten toonden aan dat leerlingen die les kregen vanuit het leertraject significant hoger scoorden op *alle* specifiek leerstapgerelateerde doelen uit het leertraject dan leerlingen van de vergelijkingsgroep die het reguliere curriculum volgden. Deze leerstapgerelateerde doelen omvatten in leerstap 1 en 5 het gebruik van steekproeven, in leerstap 2 en 6 het visualiseren van verdelingen, in leerstap 3 en 7 het effect van herhaalde steekproeven en steekproefomvang, en in leerstap 4 en 8 het interpreteren van inferenties in realistische contexten. Dit



Figuur 1 De samenhang tussen het werken in de digitale omgeving van TinkerPlots in leerstap 3 (screenshot), en de fysieke black box-activiteiten in leerstappen 1 en 2 (tekstwolfsjes).

betekent dat elk onderdeel uit de opbouw in leerstappen, zoals gepresenteerd in de laatste kolom van Tabel 1, van essentieel belang is voor het totale leertraject. De analyse van werkbladen en notities van docenten en onderzoeker bevestigden het belang van de sterke samenhang in opbouw tussen elke leerstap uit het traject. Met name de koppeling tussen het fysieke experiment met de black box en de digitale leeromgeving (zoals weergegeven in Figuur 1) bevorderde het inzicht van leerlingen in statistische modellen en modellen. Dit inzicht maakte het voor leerlingen

mogelijk om vervolgens in leerstap 4 en 8 inferenties te interpreteren in realistische contexten.

Conclusie en aanbeveling

De bevindingen in deze studie toonden aan dat en hoe het ontworpen leertraject werkt. Een aanpak gebaseerd op herhaalde steekproeven met een black box gecombineerd met statistisch modelleren in de digitale omgeving van TinkerPlots, bleek vruchtbaar voor het introduceren van statistische inferentie. Beide ideeën hebben tevens potentieel voor inbedding

in meer complexe vervolgactiviteiten, zoals het toetsen van hypothesen en het vergelijken van groepen. Op basis hiervan kunnen we constateren dat huidige statistiecurricula met een sterk beschrijvende focus verrijkt kunnen worden met een inferentiële focus — in ieder geval voor de onderbouw van het vwo. Het voordeel hiervan is dat leerlingen meer leren over statistische inferenties en niet minder over de andere domeinen van statistische geletterdheid, om zo beter te anticiperen op vervolgstappen van de leerling binnen statistiekonderwijs. ☼

Referenties

- 1 A. Bakker, *Design Research in Education. A Practical Guide for Early Career Researchers*, Routledge, 2018.
- 2 R. Biehler, D. Ben-Zvi, A. Bakker en K. Maker, Technology for enhancing statistical reasoning at the school level, in M.A. Clements, A. Bishop, C. Keitel, J. Kilpatrick en F. Leung, eds., *Third International Handbook of Mathematics Education*, Springer, 2013, pp. 643–690.
- 3 R. Biehler, D. Frischemeier en S. Podworny, Editorial: Reasoning about models and modeling in the context of informal statistical inference, *Statistics Education Research Journal* 16(2) (2017), 8–12.
- 4 R. Callingham en J.M. Watson, The development of statistical literacy at school, *Statistics Education Research Journal* 17(1) (2017), 181–201.
- 5 A.E. Castro Sotos, S. Vanhoof, W. Van Den Noortgate en P. Onghena, Students' misconceptions of statistical inference: A review of the empirical evidence from research on statistics education, *Educational Research Review* 1(2) (2007), 90–112.
- 6 R.C. delMas, J. Garfield, A. Ooms en B. Chance, Assessing students' conceptual understanding after a first course in statistics, *Statistics Education Research Journal* 6 (2007), 28–58.
- 7 M.J.S. van Dijke-Droogers, P.H.M. Drijvers en A. Bakker, Repeated sampling with a black box to make informal statistical inference accessible, *Mathematical Thinking and Learning* 22(2) (2020), 116–138.
- 8 M.J.S. van Dijke-Droogers, P.H.M. Drijvers en A. Bakker, Statistical modeling processes through the lens of instrumental genesis, *Educational Studies in Mathematics* (2021), <https://doi.org/10.1007/s10649-020-10023-y>.
- 9 I. Gal, Adults' statistical literacy: Meaning, components, responsibilities, *International Statistical Review* 70(1) (2002), 1–25.
- 10 J. Garfield, D. Ben-Zvi, L. Le en A. Zieffler, Developing students' reasoning about samples and sampling variability as a path to expert statistical thinking, *Educational Studies in Mathematics* 88(3) (2015), 327–342.
- 11 C. Konold en A. Pollatsek, Data analysis as the search for signals in noisy processes, *Journal for Research in Mathematics Education* 33(4) (2002), 259–289.
- 12 H. Manor en D. Ben-Zvi, Students' articulations of uncertainty in informally exploring sampling distributions, in A. Zieffler en E. Fry, eds., *Reasoning About Uncertainty: Learning and Teaching Informal Inferential Reasoning*, Catalyst Press, 2015, pp. 57–94.
- 13 H. Manor en D. Ben-Zvi, Students' emergent articulations of statistical models and modeling in making informal statistical inferences, *Statistics Education Research Journal* 16(2) (2017), 116–143.
- 14 S. McKenney en T.C. Reeves, *Conducting Educational Design Research*, Routledge, 2012.
- 15 L.A. Saldanha en P.W. Thompson, Conceptions of sample and their relationship to statistical inference, *Educational Studies in Mathematics* 51(3) (2002), 257–270.
- 16 J.M. Watson en R. Callingham, Statistical literacy: A complex hierarchical construct, *Statistics Education Research Journal* 2 (2003), 3–46.
- 17 J. Watson en R. Callingham, Statistical literacy: From idiosyncratic to critical thinking, in G. Burrill en M. Camden, eds., *Curricular Development in Statistics Education: International Association for Statistical Education Roundtable*, International Association for Statistical Education, 2004, pp. 116–137.
- 18 J. Watson en B. Chance, Building intuitions about statistical inference based on resampling, *Australian Senior Mathematics Journal* 26(1) (2012), 6–18.
- 19 A. Zieffler, J. Garfield, R. delMas en C. Reading, A framework to support research on informal inferential reasoning, *Statistics Education Research Journal* 7(2) (2008), 40–58.

Souvik Dhara

Department of Mathematics
Massachusetts Institute of Technology
sdhara@mit.edu

Research Stieltjes Prize 2018

Universality for critical behavior of percolation processes on complex networks

In 2018 Souvik Dhara has been awarded the Stieltjes Prize for one of the two best PhD theses in mathematics in the Netherlands. The prize was awarded for his thesis entitled *Critical Percolation on Random Networks with Prescribed Degrees*, which he completed at Eindhoven University of Technology. He now is a postdoc at MIT in Cambridge, USA. In this article he discusses recent developments in percolation theory.

Complex networks are well-known tools to model complex architectures arising from applications in social, physical, and life sciences. The structural properties of complex networks have been intensively studied since the end of the nineties, and the current focus has shifted to dynamic processes taking place on networks, such as the spread of epidemics. Interestingly, these processes are often known to exhibit a *phase transition* phenomenon. In the context of epidemics, whether there will be an outbreak or not depends crucially on whether the infection probability is above or below the epidemic threshold. The behavior near the point of phase transition is called the *critical behavior*, which in a sense captures the mechanism of this phase transition. In the late nineties, physicists started studying critical behavior in complex networks due to their applications in condensed matter theory. The overall wisdom from this vast physics literature is that the intrinsic nature of the critical behavior is *universal* in the sense that the behavior does not depend on the exact description of the underlying complex network, but instead depends

only on macroscopic properties such as the degree distribution. In this article, we will discuss recent developments in the mathematical literature in the context of an elementary yet important process called percolation.



Souvik Dhara

Percolation phase transition

Consider a finite network G_n on n vertices, where each edge e is associated with an independent $\text{Uniform}[0,1]$ edge-weight U_e . The percolation process refers to the graph-valued stochastic process $(G_n(p))_{p \in [0,1]}$, where, at time p , we only keep edges satisfying $U_e \leq p$. The phase transition can be informally understood as follows: As p increases, and more edges keep getting added to the graph, there is a point when adding a just small fraction of edges (i.e., increasing p only slightly) suddenly makes a macroscopic connected component emerge. To define the phase transition more formally, let $C_{(k)}(p)$ denote the k -th largest connected component of $G_n(p)$. We say that *phase transition* occurs around the *critical value* $p_c = p_c(n)$, if for any $\varepsilon, \delta > 0$,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \mathbb{P}(|C_{(1)}(p)| > \delta n) = \begin{cases} 0 & \text{for } p < p_c(1-\varepsilon) \text{ (subcritical phase),} \\ 1 & \text{for } p > p_c(1+\varepsilon) \text{ (supercritical phase).} \end{cases} \quad (1)$$

The critical regime lies on the boundary between the subcritical and supercritical phases, where the system exhibits an intermediate behavior. To observe the critical behavior, one must take $p = p_c(1 \mp \varepsilon_n)$ in (1), for some $\varepsilon_n \rightarrow 0$ as $n \rightarrow \infty$. Interestingly, the critical behavior is not observed for any ε_n ; there is a range of ε_n where the

graph shows qualitatively similar features as the sub/supercritical phases and the critical behavior is observed only when ε_n is chosen appropriately. In most situations, this means that $\varepsilon_n = \Theta(n^{-\eta})$, where $\eta > 0$ is a constant depending on G_n . To build a more concrete understanding, let us dive deeply into a classical case where $G_n = K_n$, the complete graph.

Critical window on complete graph

Erdős and Rényi [6] were the first to identify the phase transition (1) on the complete graph K_n with $p_c = \frac{1}{n}$ and $\eta = \frac{1}{3}$. An array of subsequent research has given us a more complete understanding of the critical behavior around $p = (1 \mp \varepsilon_n)p_c$, which we now describe. The proofs of these results can be found in [8]. For a component C , let $\text{SP}(C)$ denote the number of surplus edges, i.e., the number of edges to be deleted to make C a tree. In a sense, $\text{SP}(C)$ measures the complexity of the structure of C .

Barely subcritical phase: $p = p_c(1 - \varepsilon_n)$ with $\varepsilon_n n^{1/3} \rightarrow \infty$. Then for each fixed $i \geq 1$, as $n \rightarrow \infty$,

$$\frac{|C_{(i)}(p)|}{2\varepsilon_n^{-2} \log(n\varepsilon_n^3)} \xrightarrow{\mathbb{P}} 1,$$

and

$$\mathbb{P}(\exists i: \text{SP}(C_{(i)}(p)) > 1) \rightarrow 0.$$

Thus, even if $p \approx p_c$, $K_n(p)$ shows the two characteristic features of the subcritical regime in this phase: first, the largest component is not distinctively larger than the second-largest component, and second, $K_n(p)$ is essentially a collection of trees.

Barely supercritical phase: $p = p_c(1 + \varepsilon_n)$ with $\varepsilon_n n^{1/3} \rightarrow \infty$. Then, as $n \rightarrow \infty$,

$$\begin{aligned} \frac{|C_{(1)}(p)|}{2n\varepsilon_n} &\xrightarrow{\mathbb{P}} 1, \quad \text{SP}(C_{(1)}(p)) \xrightarrow{\mathbb{P}} \infty, \\ \frac{|C_{(2)}(p)|}{|C_{(1)}(p)|} &\xrightarrow{\mathbb{P}} 0. \end{aligned}$$

Thus, in this regime, a unique giant component is born which outnumber all other components, and the giant is complex in the sense that there is a growing number of surplus edges.

Critical window: The phase transition takes place between the barely subcritical and supercritical regimes when $\varepsilon_n \sim n^{-\frac{1}{3}}$. This regime is known as the *critical window* for the phase transition. More precisely, the critical window is defined to be the values of p given by

$$p_c(\lambda) = p_c(1 + \lambda n^{-\eta}), \quad -\infty < \lambda < \infty, \quad (2)$$

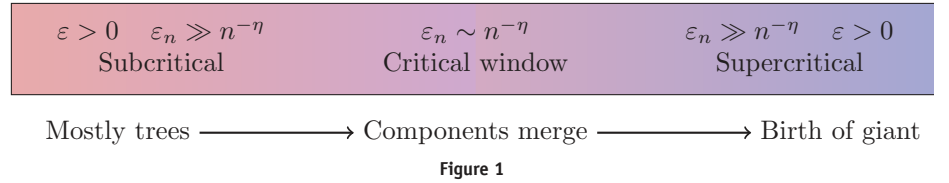


Figure 1

where $\eta = \frac{1}{3}$ for $G_n = K_n$. In this regime, the pioneering works of Janson, Knuth, Luczak and Pittel [7] and Aldous [2] identified some unique and fascinating features (described in more detail later). In fact, it was shown that $n^{-2/3}(|C_{(i)}(p)|, \text{SP}(C_{(i)}(p)))_{i \geq 1}$ converges to a non-degenerate random vector, in contrast with the sub/supercritical regimes described above. Non-degenerate scaling limits is the characteristic feature of the critical window. Further, for any $i \geq 1$, $\text{SP}(C_{(i)}(p))$ is of constant order, so that the surplus-edge count for large components starts to grow in the critical window. The above two properties hold for all values of λ in (2); in this sense, there is not a single critical value, but a whole ‘window’ of critical values over which the phase transition happens.

Paul Erdős described the percolation process as the race between the components to become the giant. The mental picture is that the collection of trees in the barely subcritical regime are the participants of this race and the component that outnumbers the other components in terms of the number of vertices wins the race. As the percolation parameter transitions through the critical window with λ increasing, components merge with each other and grow in size and complexity. Due to this merging dynamics, the largest component can consist of completely disjoint sets of vertices at two different times $\lambda_1 \neq \lambda_2$, and the race is on. However, at the end of the critical window, when λ becomes sufficiently large, the leader $C_{(1)}(p_c(\lambda))$ stops changing and this leader becomes the young giant component at the end of the critical window. At the barely supercritical phase, the race ends and the largest component stays the largest throughout the future of the percolation process. See Figure 1.

Scaling limits of critical components

We now describe the key scaling limit results about the percolation process in the critical window.

(1) *Evolution of component functionals.* For each fixed $-\infty < \lambda < \infty$, consider $p_c(\lambda)$

defined in (2), and define

$$\mathbf{Z}_n(\lambda) := (n^{-\rho} |C_{(i)}(p_c(\lambda))|, \text{SP}(C_{(i)}(p_c(\lambda))))_{i \geq 1}.$$

Then $(\mathbf{Z}_n(\lambda))_{-\infty < \lambda < \infty}$ can be viewed as a stochastic process as the percolation parameter transitions through the critical window, i.e. λ increases from $-\infty$ to $+\infty$. In the context of the ‘race to become a giant’, $(\mathbf{Z}_n(\lambda))_{-\infty < \lambda < \infty}$ describes the movie of this race. Therefore it is desirable to study the limit of $(\mathbf{Z}_n(\lambda))_{-\infty < \lambda < \infty}$.

For the complete graph, $\rho = \frac{2}{3}$, and Aldous [2] showed that $(\mathbf{Z}_n(\lambda))_{-\infty < \lambda < \infty}$ converges to a process called an augmented multiplicative coalescent. To intuitively understand this evolution, note that, after increasing λ slightly, a new edge might appear in the graph, and due to the homogeneity in the connectivity structure of K_n , this edge selects two end-points uniformly at random. For this reason, two components $C_{(i)}(p_c(\lambda))$ and $C_{(j)}(p_c(\lambda))$ merge if the end-points are selected from $C_{(i)}(p_c(\lambda))$ and $C_{(j)}(p_c(\lambda))$ respectively, which occurs at rate proportional to $|C_{(i)}(p_c(\lambda))| \times |C_{(j)}(p_c(\lambda))|$ and create a component of size $|C_{(i)}(p_c(\lambda))| + |C_{(j)}(p_c(\lambda))|$. This merging dynamics of a collection of particles according to the product of their sizes is known as the *multiplicative coalescent*. Moreover, following the same logic, a surplus edge is created in $C_{(i)}(p_c(\lambda))$ at rate proportional to $|C_{(i)}(p_c(\lambda))|^2$. The creation of surplus edges can also be augmented in the evolution of the component sizes (the augmented version was later observed in [3]).

(2) *Global metric structure.* One can also ask, not only about component functionals but about the *global structure* of these critical components. Of course, the term *global structure* is a bit vague; however, this can be formalized. Each component C can be viewed as a metric space, equipped with a measure on the associated Borel sigma-algebra. The metric on C is the graph-distance where (i) each edge has length one, (ii) the measure being proportional to the counting measure, i.e., for any $A \subset C$, the measure of A is given by $\mu_{\text{ct}}(A) = |A|/|C|$. Then, $C_{(i)}(p_c(\lambda))$ can be viewed as a ran-

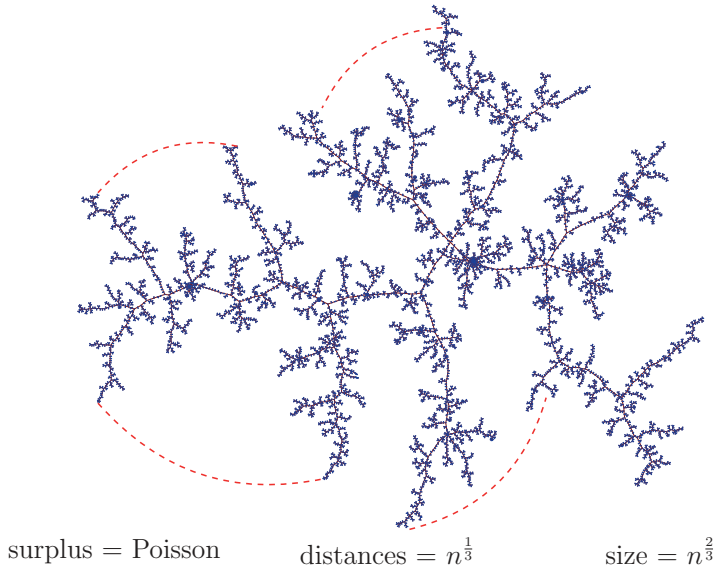


Figure 2 A visualization of the global structure of largest components in the critical window for $G_n = K_n$.

dom element from $\mathcal{M}$, the space of metric spaces with an associated probability measure. For $M = (M, d, \mu) \in \mathcal{M}$ and $a > 0$, define aM to be the measured metric space (M, ad, μ) . Then the goal is to

find the distributional limit of $((n^{-\delta} C_{(i)}(p_c(\lambda)))_{i \geq 1}$.

The limit is usually a random metric space that is compact with probability 1. Since the limit is obtained after rescaling of graph-distances by n^δ , the distances in $C_{(i)}(p_c(\lambda))$ scale as n^δ . The above quantity is an $\mathcal{M}$ -valued sequence. Of course, the topology on $\mathcal{M}$ is important, and one can consider the Gromov weak-topology, or stronger the Gromov–Hausdorff–Prokhorov topology.

Addario-Berry, Broutin and Goldschmidt [1] proved such a scaling limit result for $G_n = K_n$ with $\delta = \frac{1}{3}$. The description of this beautiful limiting random metric space is out of scope here, and the reader is referred to Figure 2 for a visualization of this metric space. (This is not an exact simulation. The picture is taken from Igor Kortchemski's website.) The visualization shows that the global structure of $C_{(i)}(p_c(\lambda))$ looks mostly like a tree with $n^{2/3}$ vertices with distances scaling like $n^{1/3}$, and the red lines indicate the surplus edges.

Effect of degree-inhomogeneity

Two major universality classes

While studying phase transition on complex networks, one is interested in the univer-

sality of the critical behavior with respect to the behavior on complete graphs. This has motivated extensive literature in physics and has led to a wide array of conjectures and heuristic deductions of the associated critical exponents. In a nutshell, these conjectures can be described as follows:

The intrinsic nature of the critical behavior does not depend on the exact description of the model, but only on moment conditions on the degree distribution. There are two major universality classes corresponding to the critical regime and the nature of the emergence of the giant depends on whether the degree distribution has an asymptotically finite third moment or infinite third moment.

In [5], our objective was to understand the notion of universality of this critical behavior. More precisely, suppose that we are given a degree sequence $\mathbf{d}^n = (d_i^n)_{i \in [n]}$ for each $n \geq 1$, and G_n is uniformly chosen from all graphs with degree sequence $\mathbf{d}^n$. Instead of stating the moment conditions, let us suppose that the asymptotic empirical degree distribution follows a power-law with exponent τ .

Erdős–Rényi universality class. For $\tau > 4$, the asymptotic empirical degree distribution has a finite third moment. In this case, the critical window turns out to be $p = p_c(1 + \lambda n^{-1/3})$, the maximal component sizes $|C_{(i)}(p_c(\lambda))|$, for any fixed i , are of the order $n^{2/3}$ in the critical regime, whilst typical distances in these maximal connected components scale like $n^{1/3}$.

Thus $\rho = \frac{2}{3}$ and $\eta = \delta = \frac{1}{3}$. Moreover, the evolution of $(\mathbf{Z}_n(\lambda))_{-\infty < \lambda < \infty}$ over the critical window $(\mathbf{Z}_n(\lambda))_{-\infty < \lambda < \infty}$ turns out to be same as the complete graph. Thus, the critical behavior is indistinguishable compared to that in the homogeneous instance of the complete graph.

Heavy-tailed behavior. For $\tau \in (3, 4)$, the asymptotic degree distribution has an infinite third moment, but a finite second moment. Here the critical window turns out to be $p = p_c(1 + \lambda n^{-(\tau-3)/(\tau-1)})$, $|C_{(i)}(p_c(\lambda))|$ is of the order $n^{(\tau-2)/(\tau-1)}$ for each fixed $i \geq 1$, whilst distances scale like $n^{(\tau-3)/(\tau-1)}$. Thus $\rho = (\tau-2)/(\tau-1)$ and $\eta = \delta = (\tau-3)/(\tau-1)$. The scaling limits for the component sizes and its metric structure turn out to be fundamentally different. Figure 3 is a visualization of the metric structure of these critical components. (This is not an exact simulation. The picture is taken from Igor Kortchemski's website.) As we can see in this case, the extremal-degree vertices play a crucial role in the connectivity pattern of the critical components, and if we remove these extremal degree vertices, then the critical components fall apart.

Why is finite third-moment condition important?

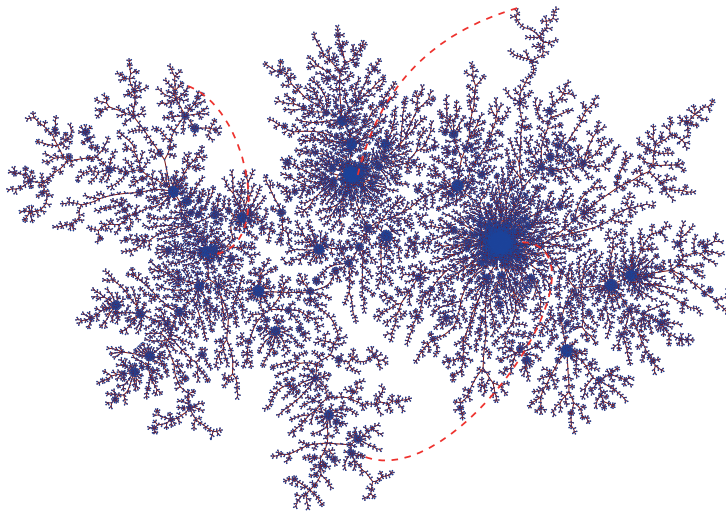
To understand the relevance of the finite third-moment condition, let us look at the local structures of G_n , the uniform graph with given degrees. For such random graphs, neighborhoods of most vertices can be approximated by neighborhoods of the root of an infinite random rooted tree. The degree of a neighbor of a vertex is approximately given by the *size-biased distribution*

$$\mathbb{P}(D_n^* = k) = \frac{k \times |\{i: d_i^n = k\}|}{\sum_i d_i^n}.$$

Therefore, the finite neighborhoods can be coupled with a branching process with progeny $D_n^* - 1$. The expectation is

$$\nu_n := \frac{\sum_i d_i^n (d_i^n - 1)}{\sum_i d_i^n}.$$

When the percolation probability is $p \approx \frac{1}{\nu_n}$, then the local neighborhood structure looks like a critical branching process, and therefore $p_c = \frac{1}{\nu_n}$. Notice now that the variance of this branching process depends on the third moment of the degree distribution. This is the reason why we observe



$$\text{surplus} = \text{Poisson} \quad \text{distances} = n^{\frac{\tau-3}{\tau-1}} \quad \text{size} = n^{\frac{\tau-2}{\tau-1}}$$

Figure 3 A visualization of the global structure of largest components in the critical window for $\tau \in (3, 4)$.

universality of these local neighborhood structures compared to the homogeneous model as long as the finite third-moment condition holds. On the other hand, if this condition fails, then vertices of extremal degree start appearing leading to structures like Figure 3.

A new universality class

Both the above universality classes assume a finite second-moment condition on the degree distribution. This condition fails if the power-law exponent of the degree distribution satisfies $\tau \in (2, 3)$. Such networks are often called *scale-free* networks in the literature and are of particular interest due to their ubiquitous appearance in the World Wide Web, social networks, protein interaction networks. One of the well-known features of scale-free networks is that these networks are *robust* under random edge-deletion, i.e., for any sequence

$(p_n)_{n \geq 1}$ with $\liminf_{n \rightarrow \infty} p_n > 0$, the graph obtained by applying percolation with probability p_n remains supercritical. Thus, in order to observe the percolation critical behavior, one needs to take $p_c \sim n^{-\eta}$ for some $\eta > 0$.

In this case, working with uniform graphs becomes challenging, since well-known algorithms to generate them do not work. Instead, let us consider a simpler model with independent edge connections. Suppose each vertex is equipped with weight w_i (think of it as the average degree), and the empirical distribution of w_i 's is asymptotically a power-law with exponent $\tau \in (2, 3)$. The graph G_n is constructed by keeping an edge between i and j with probability

$$p_{ij} := 1 - e^{-w_i w_j / \sum_i w_i}.$$

An investigation [4] about the critical be-

havior for this model shows that the critical window is given by

$$p_c(\lambda) = \lambda n^{-\frac{3-\tau}{2}} \quad \text{for } \lambda \in (0, \lambda_c),$$

for some explicitly computable λ_c . The key observation here is that the critical window is of finite length, i.e., $\lambda \in (0, \lambda_c)$, which is in stark contrast with the other behaviors above. Thus the race between components suddenly ends at a finite location of the critical window, and a tiny giant component emerges at $\lambda = \lambda_c$. This observation is rather surprising and had not been predicted by the extensive literature in the substantial physics community.

We have just started exploring the critical behavior on scale-free networks, with many interesting questions yet to be studied. For example, recalling the analogy of race between the components, currently, we know the scaling limits of the rescaled component sizes at each fixed location of this race, i.e., for each fixed $\lambda \in (0, \lambda_c)$. Can we understand the whole movie of this race as λ increases? The evolution of components is clearly quite different from the multiplicative coalescent, since all the large components merge with each other within a finite time. Also, can we understand the global structure of these critical components? The study of such questions will unravel completely new types of scaling objects, which makes the critical behavior of scale-free networks an interesting avenue of future research for all of us. $\diamond$

Acknowledgement

The author sincerely thanks his advisors Remco van der Hofstad and Johan van Leeuwen for their guidance in this project.

References

- 1 Louigi Addario-Berry, Nicolas Broutin and Christina Goldschmidt, The continuum limit of critical random graphs, *Probab. Theory Relat. Fields* 152(3) (2012), 367–406.
- 2 David Aldous, Brownian excursions, critical random graphs and the multiplicative coalescent, *Ann. Probab.* 25(2) (1997), 812–854.
- 3 Shankar Bhamidi, Amarjit Budhiraja and Xuan Wang, The augmented multiplicative coalescent and critical dynamic random graph models, *Probab. Theory Relat. Fields* 160(3) (2014), 733–796.
- 4 Shankar Bhamidi, Souvik Dhara and Remco van der Hofstad, Multiscale genesis of the tiny giant for percolation on scale-free random graphs (2021), in preparation.
- 5 Souvik Dhara, *Critical Percolation on Random Networks with Prescribed Degrees*, PhD Thesis, Eindhoven University of Technology, 2018, arXiv:1809.03634.
- 6 P. Erdős and A. Rényi, On the Evolution of Random Graphs, *Publ. Math. Inst. Hung. Acad. Sci.* 5 (1960), 17–61.
- 7 Svante Janson, Donald E. Knuth, Tomasz Łuczak and Boris Pittel, The birth of the giant component, *Random Struct. Algor.* 4(3) (1993), 233–358.
- 8 Svante Janson, Tomasz Łuczak and Andrzej Ruciński, *Random Graphs*. Wiley, 2000.

Jasper van de Kreeke

Korteweg-de Vries Instituut voor Wiskunde
Universiteit van Amsterdam
j.d.c.vandekreeke3@uva.nl

Evenement Zomerkamp Berlijn, 17–21 augustus 2020

Afgeleide categorieën in de tuin

Het afgelopen coronajaar zag heel wat conferenties, workshops en zomerscholen in het water vallen. Een domper voor veel beginnende onderzoekers, die in normale tijden volop van deze evenementen gebruikmaken om nieuwe wiskunde te leren, contacten te leggen en ideeën uit te wisselen. Jasper van de Kreeke, promovendus aan de Universiteit van Amsterdam, bleef echter niet bij de pakken neerzitten en organiseerde een zomerkamp in de tuin van zijn ouders in Berlijn. Het werd een van de weinige wiskundige-evenementen die live plaatsvonden tijdens de COVID-19-zomer. In dit artikel blikt hij terug op zijn experiment.

Met dank aan de deelnemers: Severin Barthelemy, Dominic Bunnnett, Lorenzo Dasti, Simon Felten, Felix Küng, Alejandra Rincón Hidalgo, Tom Sutherland.



Het conferentiecentrum

Het idee

Er is veel bericht over universiteiten die dicht gingen, sport en muziek die onmogelijk werden. Maar na de eerste schok kwam ik geheel tot rust en begon aan een intensieve periode van toewijding aan de wiskunde. Ik kreeg inzicht in wat mijn begeleider Raf Bocklandt me al maanden voorgoochelde, kon me zijn onderzoeksvragen eigen maken en het lukte me door te dringen tot concrete vragen waarop hij het definitieve antwoord niet wist.

In mei vorig jaar bleek de eerste coronagolf doorstaan. Mijn ouders wonen aan de rand van Berlijn en hebben hun rommelige tuin de afgelopen jaren enorm opgeruimd. “Jasper, heb je niet zin een kamp bij ons te organiseren?” Hun aanbod sloot precies aan bij wat ik nodig had: ik zou medepromovendi uitnodigen, we zouden samen aan wiskunde werken en ik zou mijn vragen ter debat stellen. Zij konden kamperen in de tuin en het open-air-karakter zou het evenement coronaproof maken.

De wiskunde

In mijn promotie heeft mijn begeleider me aan het werk gezet om na te denken over twee invarianten van A_∞ -categorieën: sta-



Aan het werk

biliteitscondities en deformaties. Een A_∞ -categorie is een soort categorie die naast de gewone compositie ook nog hogere producten heeft.

De eerste invariant bestudeert alle mogelijkheden om in een categorie C bepaalde objecten stabiel te noemen zodat ieder object een filtratie heeft waarin er in iedere stap een stabiele component bij komt. In de twintigste eeuw hebben Mumford [4] en King [3] antwoorden op deze vraag gevonden in het geval vectorbundels en modulen, en in 2001 ontwikkelde Bridgeland [1] in 2001 een concept van stabiliteitscondities dat ook werkt voor A_∞ -categorieën.

Het concept van deformaties kun je als volgt benaderen: Stel A is een algebra, dus een vectorruimte met een bilineair product $\mu: A \times A \rightarrow A$. Voor welke η is dan $\mu + \eta$ nog steeds een bilineair product? Deze vraag kun je ook voor de hogere producten stellen en zo kom je uit bij deformaties van A_∞ -categorieën.

Planning

Wie zou ik uitnodigen, en waaraan zouden we samen werken? Ik besloot promovendi te gaan winnen onder het overkoepelende thema ‘Derived Categories, Stability Conditions and Deformations’ en alle deelnemers de gelegenheid te geven vraagstukken in te sturen die zij op het kamp wilden oplossen.

Eind juni, nul deelnemers. Ik had de poster gemaild naar hoogleraren en promovendi, maar de aanmeldingen lieten op zich wachten. Overgaand naar mijn ultima ratio verstuurde ik mijn poster uitein-

delijk ook via de Europese mailinglijsten eager-gen-l en am-l. Eén dag later de verassing. Ik kreeg niet alleen aanmeldingen van promovendi, maar ook postdocs wilden meedoen. We werden een groep van acht. Na een eerste kennismaking via Zoom kregen we ook een eigen dynamiek: Severin nodigde Dominic en mij uit om van tevoren al gedachten uit te wisselen.

Vraagstukken voor het kamp

Eindelijk was het zover en zondag arriveerde Lorenzo, na twintig uur in de bus! De volgende dag kwamen ook de anderen en begonnen we met mini-presentaties waarin iedereen kon vertellen over zijn vraagstuk. Hiervoor had ik trouwens een schoolbord bij de lagere school uitgeleend.

Mijn eigen take: Laten we inzoomen op het geval van een *punctured surface* S . Dat is een gesloten oppervlak met een aantal punten eruit geknipt. Hiervan kun je een Fukaya-categorie $\text{Fuk}(S)$ maken met als objecten de krommen op dit oppervlak en als morfismen hun snijpunten. In het jaar 2014 publiceerden Haiden, Katzarkov en Kontsevich [2] een lang artikel waarin zij een groot deel van de stabiliteitscondities van een Fukaya-categorie van dit type bepalen.

Hoe bouwen deze legendarische auteurs die stabiliteitscondities? Door een uitgebreide analyse van de categorie $\text{Fuk}(S)$ concludeerden zij dat zogeheten kwadratische differentiaal op S stabiliteitscondities op $\text{Fuk}(S)$ opleveren.

In het voorjaar was ik op een ambitieus idee gekomen, echt iets om met mijn peers te bespreken: Als stabiliteitscondities op $\text{Fuk}(S)$ deels overeenkomen met meetkundige data op S , en we plakten twee dergelijke oppervlakken aan elkaar, dan zouden we een stabiliteitsconditie op het geplakte oppervlak moeten krijgen.

En nog een idee legde ik voor aan de groep: Raf had voorgesteld kwadratische differentiaal op bepaalde oppervlakken te interpreteren als A_∞ -deformaties van de afgeleide categorie van coherente schoven op S . Dit zou een correspondentie tussen stabiliteitstructuren en deformaties van verschillende categorieën opleveren. Maar ik had eerst een goed concept voor A_∞ -deformaties nodig, en hier had ik hulp voor nodig van mijn deelnemers.



Muziekavond

Groepsdynamiek

Mooie werkgroepjes vormden zich. “Where is my Dom?”, klonk het af en toe en dan maakte Alejandra kenbaar dat zij op zoek was naar haar oud-collega. Ook Lorenzo had met Alejandra en Felix steeds weer mooi debat. Zelf was ik veel in overleg met Severin en Tom. Achter de schermen moesten veel verantwoordelijkheden verdeeld worden. Mijn broer ging in ruil voor een zakgeldverhoging eten maken, en ik zou het initiatief nemen voor wandelingen door het bos of lunch bij café Koppelschänke.

’s Avonds na ons wiskundig werk namen we echt de tijd om op een andere manier samen bezig te zijn. Er werd geëkaart. Severin en ik speelden muziek uit de Huit Morceaux van Glière. Later kwam mijn broer erbij en jamden we met zijn vijven liederen als *Tell Me Ma* terwijl de anderen zongen.

Woensdag was de fietsexcursie door Berlijn. Reichstag, Siegessäule en Museumsinsel, we besloten ook over het eindeloze Tempelhofer Feld te fietsen dat nog tot 2010 een Berlijns vliegveld was geweest, en we eindigden in multicultureel stadsdeel Kreuzberg. Tussendoor was het Felix gelukt contact op te nemen met een oude kennis, wat de groep een gezamenlijk Koreaans diner opleverde.

DGLA, Frobenius en Takeda

De diverse input van mijn peers heeft me echt verder gebracht. Zo hielp Severin me aan de A_∞ -DGLA, een tool waarmee je A_∞ -deformaties kunt beschrijven. Verrassend genoeg bleek deze zowel voor de moduli-ruimte van deformaties als ook voor deformaties boven een ring R geschikt te zijn.

Simon en Tom hadden het steeds weer over Frobenius-structuren die op ruimten



Een coronaproof groepsportret

van stabiliteitscondities en deformaties zouden bestaan. Zij hebben mijn ogen voor dit onderwerp geopend.

Verder claimde ik groots dat stabiliteitscondities geplakt zouden kunnen worden en hintte Tom me er uiteindelijk op dat zijn collega uit Berkeley dit al had opgelost. We hebben er uitgebreid naar gekeken. Takeda [5] bleek bewezen te hebben dat stabiele krommen op een gedeeld oppervlak slechts aan één kant liggen en concludeerde inderdaad dat stabiliteitscondities bijeen kunnen worden geplakt.

Lessons learned

Na een week plezier kreeg ik bij de feedback-ronde te horen dat op ons kamp veel meer discussie mogelijk was geweest dan op de gemiddelde conferentie. Dit format zou meer bekend moeten worden, was het oordeel. We bleken echt geluk te hebben

gehad met de timing. De coronacijfers waren laag en pas in de verte zag je een tweede golf komen. Maar omdat er bijna geen andere evenementen live plaatsvonden was het kamp misschien juist een succes *vanwege* Corona.

Na het kamp was de wiskunde zo tastbaar dat ik kon beginnen een artikel te schrijven over deformaties van Fukaya-categorieën van punctured surfaces. Mij is ook duidelijk geworden dat ik naast punctured surfaces ook naar hogere dimensies zou moeten kijken. Iets voor volgende keer? Vele fenomenen zoals plakbaarheid zijn daar vooralsnog een mysterie.

Intussen is het me gelukt samen met Tom een groepje samen te stellen om deze zomer verder te gaan met dit werk, te gast bij het IAS in Princeton. Of we naar Amerika kunnen is nog onduidelijk, en anders organiseren we ik met plezier weer een nieuw kamp...

Referenties

- 1 T. Bridgeland, Stability conditions on triangulated categories, *Annals of Mathematics* 166(2) (2007), 317–345.
- 2 F. Haiden, L. Katzarkov, M. Kontsevich, Flat surfaces and stability structures, *Publications mathématiques de l’IHES* 126(1) (2017), 247–318.
- 3 A. King, Moduli of representations of finite dimensional algebras, *The Quarterly Journal of Mathematics* 45(4) (1994), 515–530.
- 4 D. Mumford, Projective invariants of projective structures and applications, *Proc. Internat. Congr. Mathematicians (Stockholm, 1962)*, Institut Mittag-Leffler, Djursholm, pp. 526–530.
- 5 A. Takeda, Relative stability conditions on Fukaya categories of surfaces, arXiv:1811.10592.

Daan Mulder

mulderdaan@live.nl



Het keerpunt van Bert Slagter

Het vereist moed om te zeggen: het moet anders

Dat de coronacrisis op iedereen een grote invloed heeft gehad, staat vast. Maar dat geldt misschien nog wel dubbel voor internetpionier, ondernemer en bitcoinexpert Bert Slagter (1982). In de loop van vorig jaar verwierf hij een belangrijke stem in het coronadebat, als wetenschapsjournalist, lid van het Red Team en criticaster van het regeringsbeleid. Terugblik op een bewogen jaar, en een vooruitblik op de (bitcoin)-toekomst.

Als iemand die veel bezig is met toeval, hoe groot had je twee jaar geleden de kans ingeschat dat je een soort BN'er zou worden?

(lacht) "Goeie vraag... Ik denk dat we de rol van toeval, of dat nou geluk is of pech, sterk onderschatten. Tegelijkertijd overschatten we vaak onze eigen competentie. Pech, het negatieve toeval, kun je niet voorkomen, maar je kunt je wel indekken. Het positieve toeval, zoals geluk, daar moet je je juist zoveel mogelijk aan blootstellen. De schrijver Nassim Taleb noemt dat de halterstrategie: een stang met aan beide kanten twee grote gewichten. Die manier van kijken heb ik wel geprobeerd op te nemen in zoveel mogelijk dingen die ik doe.

Toen het hele verhaal van corona op gang kwam, in januari vorig jaar, dacht ik: oké, dit is interessant. Ik wil nu nadenken over welke destructieve impact dit kan hebben, op mijzelf, mijn gezin, mijn bedrijf, mijn land. Tegelijkertijd wil ik me ook blootstellen aan de kansen die het biedt. Dus toen mijn Twitter-draadjes ontploften en ik gebeld werd door Tijs van den Brink of ik op de radio wilde komen, zei ik tegen alles 'ja'. Laten we maar eens kijken wat er gebeurt. Dus ja, het is toeval, maar ik heb toeval wel de mogelijkheid geboden om toe te slaan."

Je studeerde informatica en natuurkunde in Utrecht, maar bent er ook mee gestopt. Wat was jouw indruk van je studententijd?

"Ik ben informatica gaan studeren omdat ik de drie, vier jaar daarvoor al ontzettend veel bezig was met computers. Dat was in de tijd dat internet nog *upcoming* was. Ik had mezelf met een boek uit de bibliotheek leren programmeren. Je had nog geen Wikipedia.



Bert Slagter

In het eerste jaar van mijn studie had ik een bedrijf opgericht en vrij snel waren we met acht mensen. Dat kostte veel tijd en aandacht, en dat was eerlijk gezegd ook interessanter dan de studie zelf. Ik was bezig met internettechnologie, en op dat moment was de kennis daarover in de academie minder ver dan die daarbuiten. Het was een heel erg rommelige tijd, met de invoering van de bachelor-master. Op een gegeven moment had ik vakken gemist die niet meer bestonden en werd het heel schools, met aanwezigheidsplicht. Toen dacht ik: ik vind het mooi geweest.

In die tijd was het internet een roze wolk, iedereen vertrouwde elkaar, en tegelijk was het wildwest: de handel in kinderporno vierde hoogtijdagen, iedereen hackte iedereen, iedereen zocht trucjes om de telefoonrekening niet te hoeven betalen.

Eerst maakte ik met wat kennissen websites, voor driehonderd gulden. Maar rond 2000 konden we e-commerce-sites maken voor tienduizenden guldens. Dat sloeg helemaal nergens op. Waarom zou je voor een bedrijf dat gietvloeren maakt een webshop willen, in die tijd? Niemand was nog online. Kort daarna popte die dotcombubbel. De slinger ging van 'het internet lost alle problemen op' naar 'je hebt er helemaal niets aan', in twee jaar tijd. Dat klopte volgens ons ook niet. Toen ben ik samen met een vennoot Procurios gestart.

Inmiddels is Procurios een volwassen bedrijf geworden. Dat betekent dat het

wel loopt, zonder dat ik daar de hele dag heel erg druk mee ben. Ik ben nu meer aan het onderzoeken; lezen en schrijven over onderwerpen die ik tof vind. Die hebben vaak met complexiteit te maken: kunstmatige intelligentie, computernetwerken, speltheorie, bitcoin, financiële markten: allemaal voorbeelden van complexe systemen.”

Was je daarom ook zo snel geïnteresseerd in het coronavirus?

“Nou, er spelen daar een paar dingen een rol. Het meest praktische is dat ik best wel diep in de cryptogemeenschap zit, en die is heel erg internationaal georiënteerd. Al eind december hoorden we in die cryptogroepen: ‘Wat hier gebeurt met dat virus, dat is echt wel anders dan wat jullie in de Nederlandse media horen.’

Eerlijk gezegd had ik niet verwacht dat de rest van de wereld zo ontzettend slecht zou reageren. Op het moment dat Wuhan in lockdown ging, en er overall op de wereld mensen met corona werden gediagnosticeerd, had ik verwacht dat allerlei andere plekken in de wereld preventief maatregelen zouden nemen. Ik ging op 25 januari met mijn gezin skiën in Oostenrijk. En toen maakten wij de grap: nou, we hopen maar dat we straks Nederland nog in mogen. Ik was verbaasd dat er toen niks gebeurde.

Tijdens de ‘intelligente lockdown’ ben ik vooral bezig gegaan met uitleggen. Mensen zijn bang voor cijfers. Je merkt het heel erg bij journalisten, en bij politici. Je kunt wel zeggen: 10 procent van de mensen zorgt voor 80 procent van de besmettingen, maar dan moet je ook even uitleggen wat die dispersie, die *k*, betekent: als je iemand vindt die besmet is, dan is de kans klein dat die persoon zelf een superspreider is, maar dat de kans wel heel groot is dat hij besmet is door een superspreider. Dat soort dingen probeer je begrijpelijk te maken.

In juni, juli was corona bijna weg uit Nederland. Dat was zelfs het punt dat het OMT in een advies zei: we moeten toch besluiten in te dammen en het virus helemaal elimineren. Toen dacht ik: ‘Ik kan op vakantie, dit hebben we achter ons.’ Begin juli bleek dat er verdubbelingen waren, van 50, naar 100, naar

200, naar 400 positieve tests, zonder dat er wat gebeurde. Iedereen bleef op vakantie. Ik kreeg telefoontjes van fractievoorzitters: ‘Ik zie verdubbelingen, zie jij ze ook?’ Een aantal kamerfracties deed de oproep om terug te komen van recesses. Het kabinet vond dat niet nodig. Dat vond ik te bizar voor woorden. Amrish Baidjoe, een epidemioloog waarmee ik al een tijdje contact had, zei: ‘We doen een Zoom-call met nog meer mensen die bezorgd zijn.’

Begin augustus kwam het OMT met een advies, waarin ze zeiden: we kijken het nog even aan. Toen hebben we ons als tegenspraakteam aangeboden bij VWS. In de IT-wereld is het heel gebruikelijk om naast de mensen die de informatie beveiligen, het ‘Blue Team’ ook een ‘Red Team’ te zetten, hackers die je inhuurt om jou te testen. Zo zijn we aan onze naam gekomen. Begin september liep het al helemaal uit de klauwen in verschillende delen van Nederland en zijn we echt gaan schrijven. Maar toen duidelijk werd dat de herfstvakantie niet gebruikt zou worden om terug te gaan naar lage besmettingsniveau’s was voor mij al helder: het gaat hem weer niet worden. Dit wordt aanmodderen tot de lente.”

Ben je cynischer geworden van het afgelopen jaar?

(denkt lang na) “Ja, ik denk het wel. Ja.” (lange stilte)

Richt zich dat op de politiek, of op onvermogen?

“Ja, de combinatie van die twee. Ik begrijp nog wel dat er in februari, maart 2020 incompetent gereageerd is. Maar wat ik niet begrijp, is dat de zomer niet gebruikt is om de shit te fixen. Wat ik heb zien gebeuren, in de politiek, is dat er gewoon geen interesse was in competentie, in het echt goed oplossen. Dat heeft me wel cynischer gemaakt. Het ging om ego’s, het ging om politieke loopbanen, het ging er niet om de waarheid op tafel te krijgen.”

Maar als je het weet te fixen, dan ben je toch juist een fantastisch leider?

“Ja, dat zou je zeggen hè. Maar het vereist moed om te zeggen: het moet an-

ders. Dan moet je ook zeggen: we hebben het hiervoor niet goed gedaan. In de afgelopen tien jaar hebben we de GGD’s uitgekleeft, we hebben onze zorg teruggebracht tot een efficiënt minimum. Achteraf moeten we constateren dat dat niet zo handig was. Je moet van veel dingen toegeven: dat is niet goed gegaan. En er is geen moed, er is totale lafheid. Dat is mijn cynische zicht erop.”

Wat zijn de plannen voor je boek?

“Wat mijn broer Peter en ik heel leuk vinden is om complexe problemen begrijpelijk te maken. Corona, het klimaat, geldsystemen, dat vinden we allemaal interessant. We zijn bezig daarover te schrijven, maar ook aan het kijken hoe we het interactiever of breder kunnen maken dan alleen een boek. Het is een project voor een of twee jaar. We gaan wel een boek schrijven over bitcoin. Dat is nu een relevant onderwerp.

Hoe bitcoin er in de toekomst uit gaat zien, dat weet ik niet. Bitcoin is een neutraal netwerk, net als het internet dat is. Het is borderless, zonder grenzen, het is permission-less. Er is geen centrale partij bij betrokken. Zoals je in 1997 nog niet goed kon bedenken hoe het internet er nu uit zou zien, met Airbnb en Uber en Facebook en Whatsapp en TikTok en smartphones, en wifi en 5G, zo geldt dat voor bitcoin ook. Bitcoin zou het hele huidige geldsysteem kunnen vervangen. We lenen en we sparen bij een bank, maar dat is helemaal niet nodig. Want je kunt banken ook in algoritmes vatten: *decentralized finance*. Dat is allemaal voor over tien jaar. Het zou ook kunnen dat bitcoin beperkt blijft tot een middel om te sparen. Dat is heel moeilijk te voorspellen, of het beperkt blijft tot één bepaalde functie, of dat het over twintig jaar de technologie is onder praktisch alles wat met geld te maken heeft in ons leven.”

Meer lezen? Bezoek [LekkerCryptisch.nl](https://www.lekkercryptisch.nl). Het boek van Bert en Peter Slagter komt in oktober 2021 uit.

Goede suggesties voor een Nederlandse wiskundige met een keerpunt in zijn of haar carrière zijn welkom via keerpunt@nieuwarchief.nl.

Robbert Fokkink

*Delft Institute of Applied Mathematics
TU Delft
r.j.fokkink@tudelft.nl*

De oplossing

Het square peg-probleem

In de nieuwsrubriek van het septembernummer schreven wij dat Joshua Greene en Andrew Lobb het Toeplitz-vermoeden hadden bewezen. Verschillende lezers wezen ons erop dat Greene en Lobb niet dit vermoeden hadden opgelost, maar een generalisatie ervan, voor differentieerbare krommen. Reden voor een enigszins uit de hand gelopen rectificatie. Wat is het Toeplitz-vermoeden precies, wat hebben Greene en Lobb bewezen en hoe kwamen zij tot hun resultaat?

In de zomer van 1911 hield Otto Toeplitz een voordracht op de jaarlijkse bijeenkomst van het Zwitserse wiskundig genootschap, met de titel ‘Über einige Aufgaben

der Analysis Situs’. In de Verhandlungen [20, p.197] staat een beknopt verslag:

“Der Vortragende erzählt von zwei Aufgaben der Analysis Situs, zu denen er gelangt ist, und dann von der folgenden dritten, deren Lösung ihm nur für konvexe Kurven gelungen ist: Auf jeder einfach geschlossenen stetigen Kurve in der Ebene gibt es vier Punkte, welche ein Quadrat bilden.

Diskussion: Die Herren Fueter, Speiser, Laemmel, Stäckel, Grossmann.”

Deze ‘opgave’ van Toeplitz staat tegenwoordig bekend als het Square Peg-probleem: bevat elke Jordankromme een ingeschreven vierkant? Het is nog steeds niet opgelost, al is er wel de nodige voortgang geboekt. Greene en Lobb hebben laten zien dat elke *gladde* Jordankromme niet alleen een ingeschreven vierkant bevat, maar ook rechthoeken van willekeurige vorm. Hun bewijs berust op het feit dat er geen symplectische inbedding bestaat van de Kleinse fles in de vierdimensionale ruimte. Een diep resultaat dat illustreert hoe lastig de opgave van Toeplitz is. Er is

in de afgelopen eeuw dan ook hard gewerkt aan het Square Peg-probleem, met name in het Amerikaanse Midden Westen.

Urbana-Champaign

De eerste voortgang wordt geboekt door Arnold Emch, een Zwitser uit Solothurn, precies de plaats waar Toeplitz zijn probleem wereldkundig maakte. Je zou denken dat Emch daarbij in de zaal zou hebben gezeten, maar dat was niet het geval. Hij was een paar maanden eerder uit Solothurn vertrokken om hoogleraar wiskunde te worden aan de universiteit van Illinois, in Urbana-Champaign. Een collega daar, Aubrey Kempner, vertelde hem over het probleem. In 1913 bewees



Figuur 1 Otto Toeplitz promoveerde in Wrocław en werkte vervolgens in Göttingen, Kiel, Bonn en Jeruzalem. Hij is met name bekend vanwege zijn werk in operatorentheorie.



Figuur 2 Het embleem van de universiteit van Illinois. Een symbool van noeste arbeid.

Emch dat elke gladde convexe Jordankromme een ingeschreven vierkant bevat. In 1916 slaagde hij erin om dit resultaat te generaliseren tot stuksgewijs analytische krommen met een eindig aantal singulariteiten [2, 3]. Dat lijkt al heel dicht bij de oplossing van het Square Peg-probleem, maar toch staat het probleem dus nog steeds open.

In september 1959 arriveert Richard Jerrard in Urbana. Nog datzelfde jaar schrijft hij een artikel met een oplossing van het Square Peg-probleem voor analytische Jordankrommen [10]. Referenties naar Toeplitz of Emch, die een paar maanden eerder is overleden, ontbreken. Als motivatie voor zijn artikel verwijst Jerrard enkel naar werk over omschreven kubussen in de euclidische ruimte. Kennelijk is de uitgestrekte vlakke van het Midden Westen al reden genoeg om na te gaan denken over het Square Peg-probleem. Of misschien gaven collega's het elkaar door in de koffiekamer. In 1978 gaat Herbert Vaughan met pensioen en in zijn afscheidslezing bewijst hij het volgende.

Stelling. *Elke Jordankromme K bevat een ingeschreven rechthoek.*

Bewijs. Laat $T = \{(x, y) : x, y \in K\}$ en definieer $f : T \rightarrow \mathbb{R}^3$ door

$$f(x, y) = \left(\frac{x+y}{2}, |x-y| \right).$$

De eerste twee coördinaten van $f(x, y)$ vormen het midden van het segment xy en de derde coördinaat is de lengte van dit segment. Er geldt $f(x, y) = f(y, x)$, dus induceert f een afbeelding van de quotientruimte $M = \{\{x, y\} : x, y \in K\}$. Dit is een Möbiusband. Een ingeschreven rechthoek $xx'yy'$ in K correspondeert met twee diagonalen xy en $x'y'$ van gelijke lengte met een gemeenschappelijk midden. Met andere woorden, een ingeschreven rechthoek correspondeert met een dubbel punt van f . We moeten dus bewijzen dat f niet injectief kan zijn. Als f injectief is, dan is $f(M)$ een Möbiusband die ligt in de halfruimte $z \geq 0$ en die $z = 0$ snijdt in K . Door $f(M)$ af te sluiten met het inwendige van K in $z = 0$ zouden we dan een inbedding krijgen van het projectieve vlak in $\mathbb{R}^3$ en dat is onmogelijk. $\square$

Een juweeltje, dat verloren was gegaan als Mark Meyerson niet in het publiek had

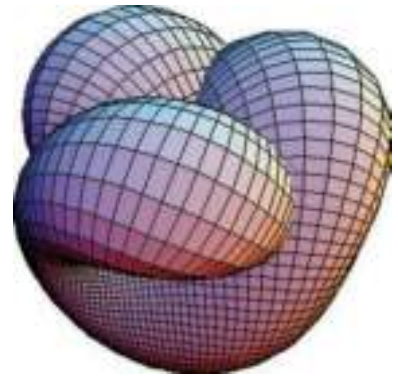


Figuur 3 Mark Meyerson was na zijn promotie een paar jaar postdoc in Urbana en bewaarde Vaughans bewijs voor het nageslacht

gezet. Hij was op dat moment postdoc in Urbana en tekende het op in een bijzonder mooi artikel [16], dat gaat over de tafelstelling die we hieronder nog tegen komen. De stelling van Vaughan geeft weliswaar geen oplossing van het Square Peg-probleem, maar plaatst het wel in een breder kader. De aspect ratio van een rechthoek is de verhouding tussen de lange en de korte zijde. Een vierkant heeft bijvoorbeeld aspect ratio 1. Een Jordankromme bevat dus altijd een rechthoek. Geldt er misschien meer?

Vermoeden. *Elke Jordankromme bevat ingeschreven rechthoeken van willekeurige aspect ratio.*

Dit heet het Rectangular Peg-probleem. Het is voor het eerst aan de orde gesteld door Brian Griffiths [6] en door Victor Klee en Stan Wagon [11]. In 2014 loofde Benjamin Matschke honderd euro uit voor een oplossing van dit vermoeden voor C^∞ -krommen, in een fraai overzichtsartikel in de *Notices* van de AMS [14]. Deze bonus hebben Greene en Lobb nu dus verdiend.



Figuur 4 Het oppervlak van Boy, een immersie van de projectieve ruimte in $\mathbb{R}^3$. De figuur heeft veel zelf-doringsnijdingen, wat er op wijst dat vlakke krommen veel ingeschreven rechthoeken bevatten.

Rest van de wereld

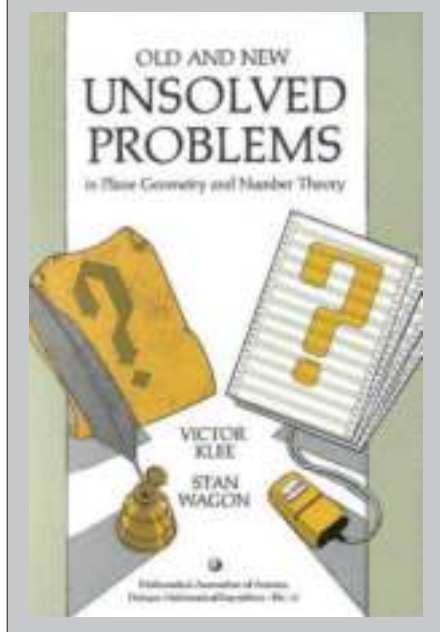
Er werd in Urbana hard gewerkt aan het Square Peg-probleem, maar de rest van de wereld zat ook niet stil. In 1929 bewijst Lev Schnirelmann dat elke gladde Jordankromme een ingeschreven vierkant bevat. Zijn artikel wordt vijftien jaar later opgenomen in een aflevering van *Uspekhi Matematicheskikh Nauk* (Russian Mathematical Surveys) met meesterwerken over beschouwende meetkunde [21]. Wat Schnirelmann ertoe bracht om na te denken over dit probleem is onduidelijk. Hij formuleert de stelling en bewijst die dan in zeven lemma's. Meer dan twintig jaar later reproduceert Heinrich Guggenheimer het resultaat van Schnirelmann met als motivatie: "... this theorem is of great intrinsic interest and the topological method invented for its proof seems capable of a wide range of other applications...". Schnirelmanns resultaat wordt in 1989 versterkt door Walter Stromquist [23], die erin slaagt de gladheidseis nog verder te verzwakken, naar wat hij 'lokaal monotone krommen' noemt. Dit zijn, informeel gezegd, krommen zonder cusps. Een hele lichte restrictie. Het is nu, meer dan dertig jaar later, nog steeds het resul-

Herbert Vaughan en New Math

Herb Vaughan was vanaf 1937 tot en met zijn pensioen in 1978 verbonden aan de universiteit van Illinois. Hij was intensief betrokken bij New Math, de hervorming van het Amerikaanse wiskundeonderwijs in het midden van de vorige eeuw. Max Beberman, de drijvende kracht achter New Math, was hoogleraar didactiek in Urbana. Samen met Vaughan schreef hij de tekstboekenserie *High School Mathematics*. New Math was te ambitieus en stuitte op enorme weerstand. Als Beberman sterft aan een hartaanval in 1971 rapporteert de *New York Times* dat leerlingen dankzij hem 3 en 19 optellen tot 112. New Math werd weggeschoven en vergeten. *Time Magazine* nam het uiteindelijk op in de lijst '100 worst ideas of the century'.

Unsolved Problems

In 1991 verschijnt *Unsolved Problems* van Victor Klee en Stan Wagon. Het is een verzameling van 24 problemen die iedereen kan begrijpen, maar niemand op kan lossen. De Riemann-hypothese zit erbij, de laatste stelling van Fermat (nog niet opgelost in 1991), het $3n+1$ -probleem. Elk probleem is beschreven vanuit een historisch perspectief, voorzien van verwante problemen en resultaten, nieuwe open vragen, oefenopgaven. Het Square Peg-probleem is nummer 11.



taat dat het dichtst bij de oplossing van het Square Peg-probleem komt.

In feite volgt Stromquist de aanpak van Emch, maar door superieure techniek reikt hij verder. Hij opent zijn artikel met een generalisatie van een lemma van Emch.

Lemma. *Laat $v \in K$ een punt op een gladde Jordankromme zijn. Dan bevat K een ingeschreven ruit met v als hoekpunt.*

Bewijschets. Parametriseer de kromme $\omega: [0,1] \rightarrow K$ met begin- en eindpunt $\omega(0) = \omega(1) = v$. Als $x = \omega(s)$ en $y = \omega(t)$ voor $s < t$ dan zeggen we dat xy booglengte $t-s$ heeft. Laat Q_v de verzameling van alle ingeschreven vierhoeken zijn met hoekpunt v . De som van de booglengtes van een ingeschreven vierhoek is gelijk aan 1, dus is Q_v te beschrijven met het 3-simplex

$$\Delta_3 = \{(x_1, x_2, x_3, x_4) : x_i \geq 0, \sum x_i = 1\},$$

waarbij de coördinaten staan voor de booglengtes en de eerste zijde begint bij v . De rand $\partial\Delta_3$ correspondeert met gedegeneerde vierhoeken met een zijde van booglengte nul, driehoeken dus. Het meest gedegeneerd zijn de eenhoeken, met een zijde van booglengte 1, die corresponderen met de extreme punten van Δ_3 :

$$\begin{aligned} v_1 &= (1, 0, 0, 0), & v_2 &= (0, 1, 0, 0), \\ v_3 &= (0, 0, 1, 0), & v_4 &= (0, 0, 0, 1). \end{aligned}$$

In het bijzonder heeft v_i zijde i met volle booglengte. Definieer $Q_i \subset Q_v$ als de gesloten verzameling van vierhoeken waarvan de i -de zijde de langste is (gemeten in de metriek op K , niet via booglengte). Dan is $Q_v = Q_1 \cup Q_2 \cup Q_3 \cup Q_4$. Meer algemeen is het opspansel van $\{v_i : i \in I\}$ bevat in de vereniging $\bigcup_{i \in I} Q_i$. Nu impliceert Sporners Lemma dat $\bigcap Q_i$ niet leeg is (deze toepassing van Sporners Lemma staat bekend als het KKM-lemma, zie [18, Lemma 2.4.4]). Met andere woorden, er bestaat een ingeschreven vierhoek waarvan alle zijden even lang zijn: een ruit met hoekpunt v . $\square$

De pijn in deze bewijschets zit in gedegeneerde ruiten, waarvan alle hoekpunten gelijk zijn aan v . Om het bewijs rond te krijgen, moet worden uitgesloten dat $\bigcap Q_i = \{v_1, v_2, v_3, v_4\}$. Hier is de gladheid van K voor nodig. Als $i \neq j$ dan is $v_i \in Q_j$ een geïsoleerd punt en is het KKM-lemma ook van toepassing op de remainder.

In zijn artikel introduceert Stromquist een sterkere, homologische vorm van het KKM-lemma. Stromquist definieert de graad van R_v (ingeschreven ruiten met hoekpunt v) in de homologiegroep $H_2(\partial\Delta_3, \mathbb{Z}/2\mathbb{Z})$ en laat zien dat deze gelijk is aan 1. Deze graad is additief. Als $R_v = A \cup B$ de vereniging is van twee disjuncte gesloten verzamelingen, dan hebben A en B een graad die optelt tot 1.

Een ruit $abcd$ is dun als $|ac| \geq |bd|$ en dik als $|ac| \leq |bd|$. In het bijzonder is $R_v = R_v^{\text{dun}} \cup R_v^{\text{dik}}$ de vereniging van dikke en dunne ruiten. De doorsnede $R_v^{\text{dun}} \cap R_v^{\text{dik}}$ is de verzameling van ingeschreven vierkanten met hoekpunt v . Als deze niet leeg is, zijn we klaar. Als de doorsnede wel leeg is, dan blijkt het mogelijk om een verwisseling uit te voeren van dik en dun via een homotopie, waaronder de graad constant blijft. Dit zou impliceren dat R_v^{dun} en R_v^{dik} dezelfde graad hebben en dat is niet zo. Dus moet een gladde kromme een ingeschreven vierkant bevatten.

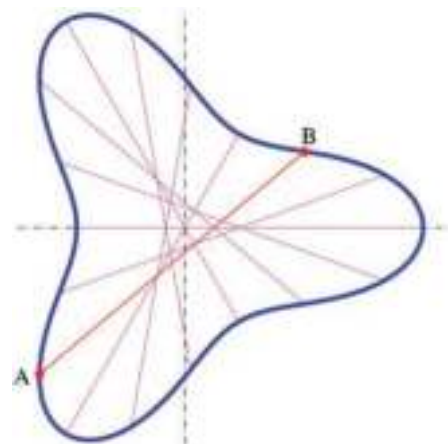


Figuur 5 Walter Stromquist hoorde over het Square Peg-probleem van zijn calculus leraar en latere schoonvader Lee Sonneborn, hoogleraar wiskunde in Michigan State University.

Tenslotte maakt Stromquist de stap naar lokaal monotone krommen via een limietargument en passeert daarmee Schnirelmann. Het is bijna de oplossing van het Square Peg-probleem, maar net niet. Een Tantaluskwelling. Op de vraag of hij hard heeft geprobeerd om het kloppend te maken voor willekeurige Jordankrommen schrijft Stromquist: “Absolutely! And I’m not about to give up.”

Convexe krommen

In 1911 meldde Toeplitz dat hij het Square Peg-probleem alleen had kunnen oplossen voor convexe krommen. In 1913 gaf Emch een bewijs voor gladde convexe krommen en het continue geval werd afgehandeld door Konrad Zindler [26] in 1921. Zie Figuur 6. Sinds 1970 is er een kortere weg, via de tafstelling van Roger Fenn [4].



Figuur 6 Een koorde die K verdeelt in twee stukken van gelijke lengte heet een bisector. Een Zindlerkromme heeft de eigenschap dat alle bisectoren even lang zijn. Deze krommen zijn voor het eerst bestudeerd in [26]. Verstoort in dat artikel staat Satz 35, dat elke convexe Jordankromme een ingeschreven vierkant bevat.

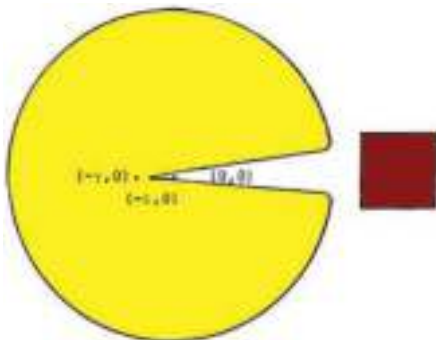
Stelling. Zij $D \subset \mathbb{R}^2$ een compacte convexe schijf en $f: \mathbb{R}^2 \rightarrow [0, \infty)$ continu zodat $\{f > 0\} \subset D$. Voor elke $d > 0$ is er een vierkant V met zijden van lengte d en centrum in D waarvoor f dezelfde waarden aanneemt op de hoekpunten van V .

Het goede nieuws voor picknickers op een berg in Zwitserland is dat zij een vierkante tafel altijd ergens horizontaal kunnen opstellen.

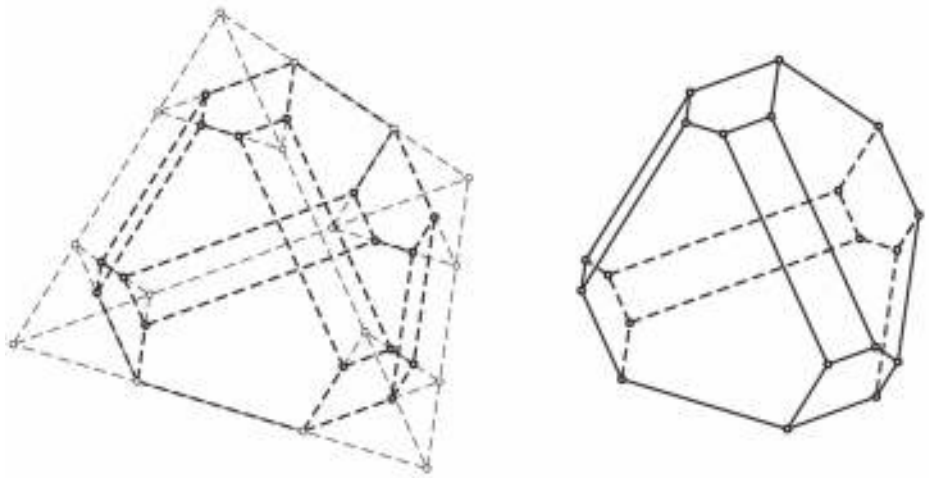
De tafelstelling impliceert dat elke continue convexe K een ingeschreven vierkant bevat, als volgt. Leg de oorsprong binnen K . Voor elk punt x dat wordt omschreven door K is er een unieke $t > 1$ met $tx \in K$. Neem $t = \infty$ voor de oorsprong. Definieer $f(x) = 1 - \frac{1}{t}$ binnen K en nul erbuiten. De niveaукrommen van f zijn gelijkvormig met K en elk vierkant tafeltje, hoe klein ook, kan op een niveaукromme worden geplaatst. Dus heeft K een ingeschreven vierkant.

Veelhoeken in krommen

Het vierkant is niet noodzakelijk de eerste geometrische figuur die opkomt. Wat valt er te zeggen over driehoeken of, meer algemeen, regelmatige veelhoeken in Jordankrommen? Het is eenvoudig om Jordankrommen te vinden zonder regelmatige n -hoeken voor $n > 4$. Ellipsen snijden cirkels in hoogstens vier punten. Het is minder eenvoudig om te bewijzen dat elke Jordankromme een gelijkzijdige driehoek bevat. Dit blijkt echter niet zo'n bijzondere eigenschap te zijn. De meest algemene vorm van een kromme is het beeld van $[0, 1]$ onder een continue afbeelding: een Peano-continuum. De volgende stelling is bewezen door Arthur Milgram [17].



Figuur 7 Mount Pacman overgenomen uit [16]. Deze berg heeft contourlijnen die cirkelvormig zijn met een inkeping tot $(-\epsilon, 0)$, net voorbij de oorsprong, voor $0 < \epsilon < \gamma$. De top van de berg ligt in $(-\gamma, 0)$. De tafel kan alleen horizontaal worden opgesteld met het midden boven de oorsprong. Als vier picknickers er omheen gaan zitten, valt er een in het ravijn. Dit voorbeeld van Meyerson laat zien dat de tafelstelling niet geldt als D niet convex is.



Figuur 8 Het cyclohedron, overgenomen uit [25]. Dit is een opblazing/afknotting van een simplex. De pijnpunten in het Polygonal Pegs-probleem zitten in de gedegenereerde veelhoeken, zoals we ook al zagen in Stromquists lemma. Het cyclohedron knipt die pijnpunten er als het ware uit. Vresica en Zivaljevic gebruiken equivariante homologie van het cyclohedron om te laten zien dat een gladde Jordankromme een ingeschreven vierkant bevat.

Stelling. Laat X een Peano-continuum zijn, zonder ingeschreven gelijkzijdige driehoeken. Dan is X homeomorf met het interval.

Dit resultaat van Milgram gaat terug op werk van Karl Menger over gelijkzijdige veelhoeken in krommen [15]. Menger en zijn promovendus Abraham Wald probeerden differentiaalmeetkunde te veralgemeniseren tot metrische ruimten. De stelling van Milgram gaat terug op de metrische definitie van een geodeet. Overigens kon Wald na zijn promotie maar moeilijk een baan vinden en zo kwam hij terecht in de statistiek. In een In Memoriam voor Wald in de *Annals of Statistics* schrijft Menger: “I believe that anyone who understands his work on curvature of surfaces will find that this work is second to none of Wald’s other achievements.” Een boude bewering. Abraham Wald is een van de grondleggers van de moderne statistiek.

Er zijn dus Jordankrommen zonder regelmatige n -hoeken voor $n > 4$, maar wat gebeurt er als we de n -hoeken een beetje

scheef neer kunnen zetten? Een n -hoek V heet affien-regulier als er een affiene transformatie is die V afbeeldt op een reguliere n -hoek. In 1972 formuleerde Branko Grünbaum het volgende vermoeden.

Vermoeden. Elke gladde Jordankromme bevat een ingeschreven affien-reguliere zeshoek.

Van zulk soort vermoedens zijn er meer. Siniša Vrećica en Rade Živaljević noemen dit Polygonal Pegs-problemen. Gegeven een klasse van veelhoeken, bevat elke gesloten kromme in $\mathbb{R}^d$ dan een kopie uit deze klasse? In [25] ontwikkelen zij een methode, die hen in staat stelt om niet alleen het resultaat van Stromquist te reproduceren, maar ook andere gevallen zoals Grünbaums Hexagonal Peg-probleem op te lossen.

Herbenoeming van het Toeplitz-vermoeden

Het vermoeden van Toeplitz is al meer dan honderd jaar oud, maar het heet pas sinds kort het Square Pegs-probleem. In 2008

De stelling van Rolle volgens Paul Lévy

Volgens Rolle heeft een gladde functie op het eenheidsinterval met $f(0) = f(1)$ ergens een horizontale raaklijn. Met andere woorden, je kunt een tafelblad balanceren op de grafiek van f . Maar als de tafel twee poten heeft, kun je hem dan ook horizontaal plaatsen op de grafiek? In 1934 bewijst Paul Lévy [12] dat er voor elk natuurlijk getal n een x is zodat $f(x) = f(x + \frac{1}{n})$. Alleen de breuken $\frac{1}{n}$ hebben die eigenschap, voor andere getallen in $(0, 1)$ geldt het niet. Dit resultaat is gegeneraliseerd door Heinz Hopf voor compacte samenhangende deelverzamelingen van het vlak. Zijn artikel is opgenomen in *Russian Mathematical Surveys* en staat direct na het artikel van Schnirelmann.



Figuur 9 Igor Pak is hoogleraar wiskunde aan UCLA. Hij werkt aan combinatoriek en kansrekening. Hij bedacht de naam Square Peg-probleem en gaf twee elementaire bewijzen voor polygonale K . Cole Hugelmeyer was undergraduate in UCLA en zat bij hem in de collegebank.

was Igor Pak bezig met zijn boek over discrete meetkunde en liep hij tegen het Toeplitz-vermoeden op. Hij zocht de geschiedenis ervan uit en gaf twee nieuwe, elementaire bewijzen in het speciale geval van stuksgewijs lineaire Jordankrommen [19]. Zijn eerste bewijs is gebaseerd op de aanpak van Richard Jerrard. Zijn tweede op de methode van Schnirelmann. Pak gaf het Toeplitz-vermoeden ook een nieuwe naam. Hij schrijft daarover:

“My preprint [19] was never meant to be a publication. I was in the middle of writing my book *Lectures on Discrete and Polyhedral Geometry* and felt this subject deserves more exposure. At that point the problem was known but the state of knowledge was a bit confusing due to the fact that a number of prominent proofs turned out to be false. So I modified Schnirelmann’s original (incorrect) argument to make a correct proof in the case of piecewise-linear curves.

I chose the most fun name I could find. I especially didn’t like the historically accurate ‘Toeplitz’s inscribed square problem’ since ‘Toeplitz’s’ is so heavy on the tongue. The name ‘square peg problem’ I came up with may have been mine, but it’s really a modification on the title of Griffiths’s much older paper on the subject, which is itself a near verbatim word play on the idiomatic expression ‘square peg in a round hole’. At least that’s how I arrived at the title of my paper. For some reason they became popular (both the name and the article) and the name stuck.”

De benaming slaat aan en zo krijgt het Toeplitz-vermoeden een klassiek klinkende naam. Een paar jaar later al openen Vrećica en Živaljević hun artikel met de woorden: “The classical square peg problem ... asks whether every Jordan curve in the plane has four points forming a square.” Daarna schrijft Maschke het fraaie overzichtsartikel ‘Survey of the square peg problem’. Als Terry Tao zich er vervolgens ook over buigt [24], kent de hele wereld het.

Het resultaat van Greene en Lobb

Vanwege deze toegenomen belangstelling verschijnen er veel nieuwe publicaties over het probleem. Sinds de voordracht van Toeplitz in Solothurn is de topologie niet stil blijven staan. Er kan geput worden uit een rijk instrumentarium. De doorbraak [8] komt van Cole Hugelmeyer, een promovendus in Princeton die werkt aan knopentheorie. Hij verlegt Vaughans afbeelding naar de vierde dimensie.

Stelling. *Elke gladde Jordankromme bevat een ingeschreven rechthoek van aspect ratio $\sqrt{3}$.*

Bewijsschets. Plaats de kromme K in het complexe vlak. De afbeelding

$$f_n(z, w) = \left(\frac{z+w}{2}, (z-w)^{2n} \right)$$

induceert een quotiënt-afbeelding op de Möbiusband $M = \{\{z, w\}; z, w \in K\}$. Dubbelpunten van deze afbeelding corresponderen met ingeschreven rechthoeken, waarvan de diagonalen een hoek maken die een veelvoud is van $\frac{\pi}{n}$. Als zulke ingeschreven rechthoeken ontbreken, dan hebben we een inbedding, waarbij de rand van M terecht komt op de kromme $K \times \{0\}$. Verwijder $U = \mathbb{C} \times D$ voor een schijf $0 \in D$. De rand ∂U is een (open) volle torus. De doorsnede van M en ∂U wikkelt zich één keer in de lengte en $2n$ keer in de breedte rond de torus. Als de afbeelding geen dubbelpunten zou bevatten, dan is het mogelijk om een Möbiusband te plakken in deze kromme, in het complement van U . Maar dat is onmogelijk volgens een resultaat van Joshua Batson [1]. In het bijzonder heeft K geen ingeschreven vierkant vanwege $n = 2$ en geen ingeschreven rechthoek van aspect ratio $\sqrt{3}$ vanwege $n = 3$. $\square$

Het is opmerkelijk hoe eenvoudig de oplossing van het Square Peg-probleem



Figuur 10 Cole Hugelmeyer, promovendus in Princeton. Over zijn werk aan het Square Peg-probleem schrijft hij: “I think I first got interested in the inscribed square problem after reading Terence Tao’s blog post on the subject. I thought about the problem and its variants on and off for years until eventually I had the idea to create a 4-dimensional generalization of Vaughan’s proof, which turned out quite well. I consider myself a knot theorist primarily, so I think this gave me a bit of a unique perspective on the problem.”

nu is geworden, al is daar natuurlijk wel het een en ander bij nodig. Gladde Jordankrommen hebben dus rechthoeken van aspect ratio’s 1 en $\sqrt{3}$ en dan zou je zeggen dat de ratio’s daartussen ook wel zijn ingeschreven. Dat is niet precies wat Hugelmeyer vervolgens bewijst in een tweede, veel diepgravender artikel [9]. Hij gebruikt een kansrekening argument om te laten zien dat de ratio’s van ingeschreven rechthoeken minstens een derde moeten zijn van het totaal. Een jaar later bewijzen Joshua Greene en Andrew Lobb [5] dat alle ratio’s zijn ingeschreven.

Stelling. *Elke gladde Jordankromme bevat een ingeschreven rechthoek van willekeurige aspect ratio.*

Bewijsschets. Plaats de kromme in het complexe vlak. Beschouw de twee afbeeldingen

$$f(z, w) = (z + w, (z - w)^2)$$

en

$$g(z, w) = (z + w, \rho^2(z - w)^2)$$

voor een complexe ρ op de eenheidscirkel. Beide afbeeldingen geven inbeddingen van de Möbiusband $M = \{\{z, w\}; z, w \in K\}$ die samenvallen op de rand. Als K geen ingeschreven rechthoeken bevat met diagonalen met hoek ρ , dan is de vereniging van $f(M)$ en $g(M)$ een inbedding van de Kleinse fles in $\mathbb{C}^2$. Deze inbedding is zelfs symplectisch te maken (oppervlakte-behoudend).

Het Knaster-vermoeden

Een topologische verhandeling is alleen compleet met een Pool. In ons geval is dat Bronisław Knaster, de eerste K in het KKM-lemma. Waar Toeplitz werd geboren, vond Knaster zijn rustplaats: Wrocław. De Jordankrommen hadden zich in de tussentijd bewogen over de kaart van Europa en daarom telt Toeplitz als Duitser en Knaster als Pool. In 1947 formuleert Knaster een vraag in het dan gloednieuwe tijdschrift *Colloquium Mathematicum*.

Probleem. *Est-il vrai qu'étant donné un ensemble de k points $p_1, p_2, \dots, p_k$ sur S_n et une fonction continue $f(p)$ où p parcourt S_n telle que $f(S_n) \subset E_{n-k+2}$ où $k = 2, 3, \dots, n+1$, il existe sur S_n un ensemble de points $q_1, q_2, \dots, q_k$ isométrique à $p_1, p_2, \dots, p_k$ et qui ont la même image dans E_{n-k+2} ? Et combien y a-t-il des tels ensembles?*

In een inleiding legt Knaster uit dat hij op dit probleem kwam via een vraag van Steinhilber, of je een driepoot altijd ergens horizontaal kunt opstellen op aarde. Je zou het een planetair tafelp probleem kunnen noemen. Knasters vermoeden is onjuist, al is het wel waar voor speciale n en k . Als $k = 2$ volgt het bijvoorbeeld uit de stelling van Borsuk en Ulam [7]. In 1989 gaf Vladimir Makeev [13] niet alleen een tegenvoorbeeld, maar bepaalde hij ook de nodige condities waaronder het vermoeden waar is.



Bronisław Knaster studeerde medicijnen in Parijs en was op familiebezoek in Warschau toen de eerste wereldoorlog uitbrak. Hij moest zijn studie onderbreken en kwam in de wiskunde terecht.

Dit is in tegenspraak met de stelling van Shevchishin [22], die zegt dat zo'n symplectische inbedding van de Kleinse fles niet bestaat. $\square$

Hetzelfde idee als dat van Hugelmeyer, opnieuw in combinatie met zwaar geschut. Het bewijs in [5] is kort, maar technisch geavanceerd en berust op een diep en lang artikel [22]. Overigens is het limietargument van Stromquist van toepassing en geldt het resultaat ook voor lokaal monotone krommen.

Topologische brokstukken

Topologie zit vol verrassende voorbeelden en een vergissing (wiskundig of bestuurlijk) is snel gemaakt. Voor het Square Peg-probleem is dit niet anders, zoals valt te lezen in de artikelen van Benjamin Matschke en Igor Pak [14, 19] en in het boek van Klee en Wagon [11]. Het meest bekend is een foutief bewijs uit 1950. Probleem 4325 uit de *American Mathematical Monthly* van 1949 luidde: "Show that on every simple closed plane curve there are four points which are the vertices of a square."

Een oplossing verscheen in het juni-nummer van 1950, gevolgd door ingezonden brieven in het februari-nummer van 1951 waarin werd gewezen op lacunes in deze oplossing. Een van die brieverschrijvers was Andrew Gleason, de promotor van Walter Stromquist. $\dashv$

Naschrift

Graag wil ik Mark Meyerson, Igor Pak en Walter Stromquist bedanken voor hun hulp bij het schrijven van dit verhaal.

Referenties

- 1 J. Batson, Nonorientable four-ball genus can be arbitrarily large, *Mathematical Research Letters* 21(3) (2014), 423–436.
- 2 A. Emch, Some properties of closed convex curves in the plane, *American Journal of Mathematics* 35 (1913), 407–412.
- 3 A. Emch, On some properties of the medians of closed continuous curves formed by analytic arcs, *American Journal of Mathematics* 38 (1916), 6–18.
- 4 R. Fenn, The table theorem, *Bulletin London Mathematical Society* 2 (1970), 73–76.
- 5 J.E. Greene en A. Lobb, The rectangular peg problem (2020), arXiv:2005.09193v1.
- 6 H.B. Griffiths, The topology of square pegs in round holes, *Proceedings London Mathematical Society* 62(3) (1991), 647–672.
- 7 H. Hopf, Eine Verallgemeinerung bekannter Abbildungs- und Überdeckungssätze, *Portugaliae Mathematica* 4 (1944), 129–139.
- 8 C. Hugelmeyer, Every smooth Jordan curve has an inscribed rectangle with aspect ratio equal to $\sqrt{3}$ (2018), arXiv:1803.07417v1.
- 9 C. Hugelmeyer, Inscribed rectangles in a smooth Jordan curve attain at least one third of all aspect ratios (2019), arXiv:1911.07336v1.
- 10 R.P. Jerrard, Inscribed squares in plane curves, *Transactions of the AMS* 98(2) (1961), 234–241.
- 11 V. Klee en S. Wagon, *Old and unsolved problems in plane geometry and number theory*, Mathematical Association of America, *Dolciani Mathematical Expositions* 11 (1991).
- 12 P. Levy, Sur une generalisation du theoreme de Rolle, *Comptes Rendus de l'Academie des sciences* 198 (1934), 424–425.
- 13 V.V. Makeev, The Knaster problem and almost spherical sections, *Mathematics of the USSR-Sbornik* 66(2) (1990), 431–438.
- 14 B. Matschke, A survey on the square peg problem, *Notices of the AMS* 61(4) (2014), 346–352.
- 15 K. Menger, The formative years of Abraham Wald and his work in geometry, *Annals of Mathematical Statistics*, 23(1) (1952), 14–20.
- 16 M. Meyerson, Balancing Acts, *Topology Proceedings* 6(1) (1981), 59–75.
- 17 A.N. Milgram, Some topologically invariant metric properties, *Proceedings National Academy of Sciences* 29 (1943), 193–196.
- 18 J. van Mill, *The infinite-dimensional topology of function spaces*, North-Holland, 2001.
- 19 I. Pak, The discrete square peg problem (2008), arXiv:0804.0657v1.
- 20 H. Sauerlander e.a., *Verhandlungen der Schweizerischen Naturforschenden Gesellschaft*, Band I, 1911. archive.org/download/verhandlungender1911schw
- 21 L.G. Schnirelman, On certain geometrical properties of closed curves, *Uspekhi Matematicheskikh Nauk* 10 (1944), 34–44.
- 22 V.V. Shevchishin, Lagrangian embeddings of the Klein bottle and the combinatorial properties of mapping class groups, *Izvestiya Rossiiskoi Akademii Nauk. Seriya Matematicheskaya* 73(4) (2009), 153–224.
- 23 W. Stromquist, Inscribed squares and square-like quadrilaterals in closed curves, *Mathematika* 36(2) (1989), 187–197.
- 24 T. Tao, An integration approach to the Toeplitz square peg problem, *Forum of Mathematics, Sigma* 5(e30) (2017).
- 25 S. Vrećica en R.T. Živaljević, Fulton-MacPherson compactification, cyclohedra, and the polygonal pegs problem, *Israel Journal of Mathematics* 184(1) (2011), 221–249.
- 26 K. Zindler, Über konvexe Gebilde II, *Monatshefte für Mathematik und Physik* 31 (1921), 25–56.

Peter van Emde Boas

*Institute for Logic, Language and Computation
Universiteit van Amsterdam
p.vanemdeboas@uva.nl*

Jan van Mill

*Korteweg-de Vries Instituut voor Wiskunde
Universiteit van Amsterdam
j.vanmill@uva.nl*

Jan Wiegerinck

*Korteweg-de Vries Instituut voor Wiskunde
Universiteit van Amsterdam
j.j.o.o.wiegerinck@uva.nl*

In Memoriam Aïda Beatrijs Paalman - de Miranda (1936–2020)

Inspirerende hoogleraar zuivere wiskunde met hart voor onderwijs en studenten

Op 11 mei 2020 overleed in Amsterdam op 84-jarige leeftijd Aïda Beatrijs Paalman-de Miranda, emeritus hoogleraar zuivere wiskunde aan de Universiteit van Amsterdam. Zij kwam als 17-jarige uit Paramaribo naar Nederland om in Amsterdam wiskunde te studeren en ontwikkelde zich tot prominent lid van het Mathematisch Instituut van de Universiteit van Amsterdam, de voorloper van het huidige Korteweg-de Vries Instituut voor Wiskunde. Haar oud-collega's Peter van Emde Boas, Jan van Mill en Jan Wiegerinck herdenken haar.

Aïda Beatrijs Paalman-de Miranda (voor intimi: letje) werd geboren te Uitvlugt (Suriname), studeerde wiskunde aan de Universiteit van Amsterdam en promoveerde daar cum laude in 1964 bij Han de Groot. In 1966 werd zij aan de Universiteit van Amsterdam benoemd tot buitengewoon lector, in 1967 tot gewoon lector, en met de stelselwijziging van 1980 werd zij gewoon hoogleraar met leeropdracht Zuivere Wiskunde. Met Ruth Curtain uit Groningen was zij daarmee de eerste vrouwelijke hoogleraar wiskunde in Nederland. In 1997 ging zij met vervroegd pensioen.

In haar proefschrift [9] uit 1964 geeft letje de state of the art weer van de theorie van topologische halfgroepen, inclusief maattheoretische aspecten en enkele resultaten over topologische transformatiegroepen. Haar uitstekend leesbare proefschrift geeft enerzijds een overzicht van toen bekende resultaten en behandelt anderzijds belangwekkende nieuwe ontwikkelingen, zoals de resultaten over compacte halfgroepen met nulelement en de analyse van bepaalde compacte halfgroepen waarvan de onderliggende topologische ruimte het eenheidssegment $[0, 1]$ is. Ook presenteert zij nieuwe resultaten op het gebied van invariante maten en dualiteitstheorie, gemotiveerd door klassieke stellingen van onder meer Pontryagin (zie [7]).

Een topologische halfgroep is een Hausdorffse topologische ruimte met een con-

tinue associatieve binaire operatie. Omdat op elke topologische ruimte triviale continue associatieve binaire operaties kunnen worden gedefinieerd, houdt de theorie van topologische halfgroepen zich bezig met die objecten die algebraïsch of topologisch 'eenvoudig' zijn. In letjes proefschrift gaat het voornamelijk over compacte topologische halfgroepen. Belangrijk is de vraag wanneer de binaire operatie op een topologische halfgroep een topologische groeps-

operatie is. Het is bekend, bijvoorbeeld, dat dit het geval is als de topologische halfgroep lokaal compact is en de binaire operatie van een groep afkomt (Ellis [3]).

letjes interesse voor topologische halfgroepen lijkt geen toeval. Haar promotor Han de Groot was begin zestiger jaren van de vorige eeuw, geïnspireerd door bekende resultaten over acties van compacte Lie-groepen op compacte variëteiten, geïnteresseerd in het probleem welke transformatiegroepen gerealiseerd kunnen worden als groepen lineaire continue zelfafbeeldingen van een Hilbertruimte (Copeland en de Groot [2]). Met zijn promovendus Baayen, bewees De Groot dat dit het geval was voor bepaalde lokaal compacte transformatiegroepen (Baayen en De Groot [1]). De groepen waarvoor hun bewijs werkt, werden *W-groepen* genoemd. In 1971 bewees letje in [10] met een buitengewoon slim argument, dat de lokaal compacte *W-groepen* precies de lokaal compacte σ -compacte groepen zijn, waarmee de reikwijdte van het hoofdresultaat in [1] precies werd vastgesteld. Dit is haar laatste publicatie die vermeld staat in MathSciNet. Haar focus lijkt vanaf 1971 te verschuiven naar onderwijs.

Latere ontwikkelingen op het gebied van topologische ruimten met een binaire operatie die topologie verbindt met algebra, betreffen onder meer de theorie van compacte Hausdorffse ruimten X met een rechts-continue binaire associatieve operatie $+$. Centraal in die theorie is het eenvoudige maar verrassende resultaat in Ellis [4, Lemma 2.9] dat er een element p is in X met $p + p = p$ (een zogenaamd *idempotent element*). Belangwekkende stellingen uit de oneindige combinatoriek konden met dit resultaat worden bewezen, waaronder het



Letje Paalman in 1968



Ietje Paalman in 1977

Foto: Peter van Emde Boas

vermoeden van Graham-Rothschild [5] en de stelling van Van der Waerden [11]. Zie Hindman en Strauss [8] voor bewijzen en referenties. Ietje was bij deze nieuwe ontwikkelingen niet zelf betrokken.

Aan het Mathematisch Instituut van de Universiteit van Amsterdam gaf Ietje tijdens haar volledige loopbaan onderwijs. Zij was elegant en zelfverzekerd; een inspirerende docent met 'uitstraling' en voor verlegen eerstejaars studenten misschien wel een tikje intimiderend. Ietjes colleges waren tot in de puntjes voorbereid en verzorgd. Zij aarzelde niet om geheel nieuwe colleges te ontwikkelen die bij de eerste editie reeds perfect overkwamen. Van nieuwe doctoraalcolleges waren (nog) geen syllabi. Dus alle definities, stellingen en bewijzen stonden in haar aantekeningen en werden in schoonschrift volledig op het bord gereproduceerd.

Keer op keer bleek hoeveel hart Ietje voor onderwijs en studenten had. Tijdens

de koffie of in de lunchpauze eind jaren zeventig, begin jaren tachtig, kon ze met groot enthousiasme over goede studenten vertellen. En ook met vrolijkheid, maar meer nog met mildheid, over een student die met de hakken over de sloot MO-A-examen deed, het heel dringend advies kreeg om het daarbij te laten, vervolgens op dezelfde manier MO-B deed, hetzelfde advies kreeg, en zich vervolgens voor het doctoraal inschreef. En meermaals gaf zij uiting aan haar zorgen en woede over het afschaffen van de MO-opleiding aan de universiteit en het verlies aan wiskundige kennis bij docenten, dat daarmee gepaard ging.

Tekenend is ook het volgende. Eind jaren negentig, Ietje was al met pensioen, kwam er een student langs die een jaar of vijftien eerder was gestopt met de studie. Hij wilde zijn doctoraal alsnog afmaken, topologie was zijn hoofdrichting geweest en hij moest nog twee tentamens doen. Ietje wilde hem wel helpen, hij mocht die

tentamens bij haar doen. Na vijftien jaar topologie weer oppakken is bijkans onmogelijk, maar toch, vooral dankzij Ietjes bereidwilligheid, inspanning en geduld lukte het hem de studie af te maken.

Ietje was vier keer (mede-)promotor: Jan Dijkstra (UvA, 1983), Fons van Engelen (UvA, 1985), Jan Baars (UvA, 1990) en Joost de Groot (VU, 1990). Tussen 1979 en 1981 was zij bestuurslid van het Wiskundig Genootschap (het huidige Koninklijk Wiskundig Genootschap).

Ietje had zeer goede sociale vaardigheden. Ze was bescheiden en vriendelijk en stond open voor nieuwe ontwikkelingen zowel binnen als buiten de wiskunde. Het is onze indruk dat zij zich in de 'mannenwereld' van het Mathematisch Instituut moeiteloos wist te handhaven; zij werd door iedereen gerespecteerd en gewaardeerd. Beroemd op het instituut is haar uitspraak begin jaren zeventig: "Ik geloof zeker niet dat een jongen intelligenter is dan een meisje". Voor die tijd was dat best een pittige uitspraak. Tijdens lunches op het Mathematisch Centrum was zij een gewaardeerde bridgespeler.

Hoe kwam Ietje als meisje van 17 uit Paramaribo ertoe om in Amsterdam wiskunde te gaan studeren? Een vraag die ook in Ietjes necrologie [6] door Margriet van der Heijden in de *NRC* van 20 mei 2020 naar voren komt. Het antwoord kennen we helaas niet.

Ietje was getrouwd met Dr. Dolf Paalman, hoofdapotheeker in het Slotervaartziekenhuis te Amsterdam. Zij laat een zoon, een dochter, en drie kleinkinderen achter. Met oud-collega's en oud-studenten hield Ietje tot het eind van haar leven contact. Wij zullen ons Ietje Paalman vooral herinneren als beminnelijk mens. ☺

Met dank aan Margriet van der Heijden voor nuttig commentaar.

Referenties

- 1 P.C. Baayen en J. de Groot, Linearization of locally compact transformation groups in Hilbert space, *Math. Systems Theory* 2 (1968), 363–379.
- 2 A.H. Copeland, Jr. en J. de Groot, Linearization of a homeomorphism, *Math. Ann.* 144 (1961), 80–92.
- 3 R. Ellis, A note on the continuity of the inverse, *Proc. Amer. Math. Soc.* 8 (1957), 372–373.
- 4 R. Ellis, *Lectures on Topological Dynamics*, Benjamin, 1969.
- 5 R.L. Graham en B.L. Rothschild, Ramsey's theorem for n -parameter sets, *Trans. Amer. Math. Soc.* 159 (1971), 257–292.
- 6 M. van der Heijden, Ze hield zielsveel van zuivere wiskunde, *Nieuwe Rotterdamsche Courant*, 20 mei 2020.
- 7 E. Hewitt en K.A. Ross, *Abstract Harmonic Analysis I*, Springer, 1979.
- 8 N. Hindman en D. Strauss, *Algebra in the Stone-Čech Compactification*, De Gruyter, 2012.
- 9 A.B. Paalman-de Miranda, *Topological Semigroups*, PhD thesis, Universiteit van Amsterdam, 1964.
- 10 A.B. Paalman-de Miranda, A note on W-groups, *Math. Systems Theory* 5 (1971), 168–171.
- 11 B.L. van der Waerden, Beweis einer Baudetschen Vermutung, *Nieuw Arch. Wiskunde* 2/19 (1927), 212–216.

Diletta Martinelli

*Korteweg-de Vries Institute for Mathematics
University of Amsterdam
d.martinelli@uva.nl*

Education

From Cape Town to Cameroon

Although mathematics became a truly worldwide endeavour in the last century, Africa remained a blank spot for a long time. Fortunately this is changing rapidly and many new initiatives have been launched to promote mathematics on the African continent. In the past few years, Diletta Martinelli, an assistant professor at the University of Amsterdam with a passion for geometry and education, has been involved in several of these projects. In this article she shares her experiences with us.

I was advised that a good place to start, if I wanted to explore the African mathematical landscape, was AIMS. That's the African Institute for Mathematical Sciences, or the African Institute for Minimising Sleep, as the students I met liked to call it when they were overwhelmed by assignments. AIMS is a pan-African network of different institutes of excellence. There are currently five centres (South Africa, Gha-

na, Senegal, Rwanda and Cameroon) and each institute offers a one-year master program that attracts talented students from all over the continent. In 2018 I visited the centre in Cape Town, in South Africa, where I co-supervised a student for his final project. In January 2020 I taught a course about Differential Geometry of curves and surfaces at AIMS-Cameroon in Limbè.

The academic year at AIMS starts with some introductory courses that aim to provide common foundations for the students and a kind of warm-up to mathematical courses taught in English. This requires a bit of adjustments for students coming from French or Arabic-speaking countries (AIMS provides language classes throughout the year). After that, the year is divided in blocks of three weeks and the classes are given by invited lecturers from local and foreign universities. From a personal point of view, I cannot recommend the experience more. It is incredibly immersive and I truly enjoyed the sense of community: you live and work in the same building with all the students, so you end up



A scenic view at Muizenberg Beach near the AIMS Institute



The AIMS institute in Cape Town

sharing much more than just the time of the lectures, including table tennis matches, French classes and trips to the beach. The students come from all over Africa, so only by chatting with them you can learn a lot about the different countries and study experiences. On top of that, the centre in Cape-Town is literally in front of Muizenberg beach, one of the most famous surfing beaches in South Africa, while the institute in Limbè is next to the botanical gardens and a wildlife centre with gorillas and baboons.

AIMS attracts students with very different backgrounds, from computer science and business to physics and pure mathematics. This is purposely done, to encourage team-work between people with different expertise in order to create the next generation of Africa innovators. This brings some challenges for the lecturers. In my class, for example, I had students that were taking a pure mathematics course for the first time, while others had seen already some pretty advanced material.

The three week block is very intense, with the students following three courses each involving several quizzes and assignments each week. Students are all hard-working and motivated, but for some of them it is hard to interiorise so many new notions and topics in such a short amount of time. Despite the stress, all the students I talked to were incredibly happy about their AIMS experience, they were valuing in particular the possibility of inter-

acting with the lecturers and the important network of contacts they were provided with.

During the weeks in Cameroon, I decided to organise a meeting with the female students of the centre, to share some experiences of being a woman doing mathematics. Even though the circumstances were sometimes very different it was easy to relate my experience with theirs. Unfortunately, I realised that certain stereotypes know no geographical boundaries. Given these difficulties, I was very happy to discover that AIMS has an active diversity-club that is organising several activities to promote a more inclusive environment.

I have also supervised (or co-supervised) four students from AIMS so far. The first one, Mahefa, was from Madagascar. I learned that the academic system in former colonies is still shaped around the curriculum of the former colonial power. Countries that were under French rule tend to have a stronger tradition in pure mathematics, and that is reflected in the interests of the students at AIMS. Mahefa was a very bright student, his project was on action of finite groups on compact Riemann surfaces. Most of the material was completely new to him, but he was very mature in handling the new material and very dedicated to the project. I co-supervised him together with Alberto Cazzaniga, a colleague and friend of mine that at the time held a postdoctoral fellowship in Cape Town. I interacted a lot also with Jean-Micheal, another student from Madagascar that Alberto was supervising on a project about Dynkin diagrams of ADE singularities. Mahefa and Jean-Micheal were inseparable and I was really happy when they both obtained a scholarship for the master program at the Central European University in Budapest. Mahefa has recently started a PhD in analysis and measure theory at TU Eindhoven.

After the course in Cameroon, three students had asked me to supervise them for their final AIMS thesis. Janvier, from Congo, worked on the Veronese surfaces and its secant variety, learning some basic concepts in algebraic geometry and tensor decomposition. Herilanto, from Madagascar, worked



Meeting with the female students in Cameroon



Teaching at the workshop in Nairobi

on elliptic curves, focusing on the basic definitions, the Weierstrass form and the automorphisms group, co-supervised also by Enrica Floris from Poitiers. And finally, I co-supervised Romaric, from Cameroon, together with Nicolau Sarquis from Auckland in New Zealand, on a project about introduction to Riemannian Geometry. The communication was not always smooth because the internet connection at AIMS is not completely reliable, so it was not easy to have Zoom meetings and we often had to rely on frequent email exchanges. The AIMS students have the help of local tutors, but not all of them have the necessary background to help the students with technical questions. Also, all of us had quickly to adjust to the new regulations and the difficult working conditions that we had to adopt in the effort to control the spread of the Coronavirus pandemic. Taking into account all these challenges, I was even more proud when all three of my students successfully defended their thesis and graduated from AIMS at the end of May last year.

All of them want to continue studying pure mathematics and do a PhD, ideally in a western university. Scholarships for a PhD position are very competitive, especially for students coming from Africa, so the path in front of them is far from smooth. However, not all of the students I met were dreaming about coming to Europe: Peguy, a PhD student in physics that worked as a tutor for my course, did a short internship in France and told me that after all the negative stereotyped he had to face there,

he decided not to apply to Europe again (plus “French food is too plain”). Agnes, a shy girl from Nairobi following my course, when I asked her what were her plans after AIMS, had not a moment of hesitation and said she wanted to study data science and specialise in sustainable agriculture, since water shortage due to climate change is one of the main problems that Africa will have to face in the near future and she wanted to help her country.

Outside of AIMS, I interacted with some research communities in pure mathematics at Makerere University in Uganda, at Ibadan in Nigeria and at the University of Nairobi in Kenya. In August 2018, I went

to Nairobi for three weeks where I co-organised a workshop in algebraic geometry and a pre-workshop school for local master students. The local researchers in Nairobi complained about the teaching overload and the isolation from the main mathematical community due to lack of funding for travelling to conferences and for research visits. Professor Jared Ongaro is dedicating a lot of time and energy in trying to strengthen the local algebraic geometry group. He is convinced that, at least for the moment, the best strategy is to help the best students to get PhD positions outside of Africa, hoping that after that at least some of them will decide to go back to Nairobi. Professor Ongaro was also stressing the importance of having workshops there and bringing foreign researchers to Nairobi to give both the students and the research community more possibilities of interactions and networking, even if only for a short time.

Africa has a fast-growing young population that in the next years will have even broader access to higher education. So, despite the many challenges that the African mathematical community is facing, there are several reasons to hope for the future. I am looking forward to the end of the pandemic and to be able to go back to Africa and keep learning about the local mathematics and explore possibilities of connection and interaction with western institutions. ✦

The website of AIMS is: www.nexteinstein.org.



Introductory talk about the Minimal Model Program at the AIMS Journal Club, Cape Town

Francesca Arici

Mathematisch Instituut
Universiteit Leiden
f.arici@math.leidenuniv.nl

Clara Stegehuis

Faculteit EWI
Universiteit Twente
c.steghuis@utwente.nl

Proof by example Portraits of women in Dutch mathematics

Vivi Rottschäfer

In ‘Proof by example’, Francesca Arici and Clara Stegehuis portray women in Dutch mathematics. This edition portrays Vivi Rottschäfer, professor by special appointment of Industrial Mathematics at the Korteweg-de Vries Institute of the University of Amsterdam and associate professor in the Analysis and Dynamical Systems group at Leiden University. Her expertise includes nonlinear dynamical systems, partial differential equations, pattern formation and singular perturbation theory. Her research currently focuses on mathematical modelling and analysis of applications from pharmacology and ecology.

Can you tell us about your path to becoming a mathematician? At what point have you realised you wanted to do mathematics?

“It was during the fourth year of high school when, all of a sudden, I started to like mathematics. I think this was the result of having a good teacher who was very enthusiastic about the subject.

On top of that, I had always wanted to become a teacher and my high school teacher recommended me to study mathematics in Utrecht, as it would be a good place for that. So I started my university studies there—even though my chemistry teacher thought this was a bad idea—and I really enjoyed it. I liked the work on my doctoral thesis so much that it made me realise I did not want to be in front of a group of high school students but I wanted continue with research. After completing my PhD, I was still happy with doing maths and research and that has been true ever since.”

How did you become interested in mathematical modelling and dynamical systems?

“During my studies, I liked most of the topics and I tended more towards the abstracter analysis. For example, I wrote a short thesis with Hans Duistermaat on De Rham cohomology. During the fourth year of my study, I followed a course on the theory of dynamical systems and I really liked it! So, I took more courses in that

direction, like PDEs, and ended up writing my doctoral thesis in that field.”

You are currently working on mathematical models of drug distribution in the brain. Can you tell us more about this? Are there any insightful results you have obtained?

“This is a joint collaboration with a colleague from the pharmacology department in Leiden and was the topic of the PhD thesis of Esmée Vendel [3–6]. We aim to develop a mathematical model that can describe the transport and binding of medication (drugs) in the brain. A lot of medication has to enter the brain and bind to its targets to have an effect. This is true for a drug that one takes to reduce headache or other pains, like paracetamol. We know paracetamol easily reaches the targets in the brain but there are many other drugs for which this is not the case. For instance, it could happen that a drug simply does not reach its target and thus has no effect. Also, it could be that the drug does reach the targets, but the dose is so low that it does not have any effect, or that, on the other hand, the dose is so high that the drug becomes toxic.

One of the main complicating factors is that one cannot perform measurements in the (human) brain, or at least, I would not volunteer for this! As a consequence, there hardly exists any data that shows the performance of a drug in the brain.



Vivi Rottschäfer

Therefore, there is a need for a model that is able to predict drug distribution and binding to targets in the brain, as well as elimination from the brain.

So far, we have taken a first step by developing a basic mathematical model that relies on brain physiology. The final goal is to develop a full-scale model (micro to macro) that in the future can help to select the best drug to use for a specific disease.”

What do you like the most about your work as a mathematician?

“I really enjoy working together with researchers from other disciplines, like pharmacology and ecology. This takes quite some time and effort, as one has to learn how to talk to researchers with a different background, but I find this very refreshing and stimulating.

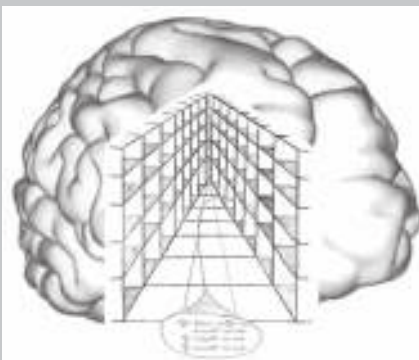
In my experience, these collaborations lead to new mathematical challenges in the modelling and in the analysis of the models. It turns out that one often has to develop new mathematical tools to be able to analyse the models at hand.”

Any concrete example in mind?

“Currently I am collaborating with researchers from the department of environmental sciences at Leiden and from the RIVM on a project that concerns the toxicity of nanoparticles that dissolve in nature. My collaborators came to me for a mathematical model that could describe the dissolution of nanoparticles. In experiments, one observes that this process stops after a certain time when the nanoparticles have dissolved partly, though it is not clear why the process stops. On top of that, there are several other challenges when modelling: for instance, the process is different when dissolving the particles in water compared to another solution and for different nanoparticles.

I hope that this will increase our knowledge of the toxicity of particles that are released in nature.

From a mathematical viewpoint there are still a lot of extensions that can be incorporated to make the model more realistic. For example, my collaborators told me that the particles also aggregate into larger clusters and that they precipitate.



Graphical representation of mathematical model for the brain

So far, we have assumed that this is not the case, and we might extend the model to take this aspect into account in the future. In any case, I anticipate that the results of this project will have an impact on society in the long run.”

Speaking of societal impact, you are the chair of the Innovation Commission (Commissie Innovatie) of PWN, the Dutch Platform for Mathematics. Can you tell us about your experience in the committee and about the activities you are organising?

“The aim of the Innovation Commission is to increase collaboration between mathematicians (from universities and universities of applied sciences) and companies and non-profit organisations. For this we organise several activities. First of all, we coordinate the organisation of the Study Group Mathematics with Industry (SWI) — [see Report on page 120 of this issue, Ed]. In relation to that, we also received funding to hire a ‘Contact person Mathematics and Companies’ who contacts the companies after the SWI to inquire if they have interest in continuing with the project and to be involved in long-term collaborations with mathematicians.

Apart from the SWI, we have organised a series of College Tours for companies, we award a prize for the best master thesis written in collaboration with a company, and we have a LinkedIn group where we post announcements and activities [1].

At the moment, we are in the process of organising the first Math Community Event that will take place online on 1 September 2021. Our goal is to bring together mathematicians from universities and universities of applied sciences, com-

panies, and non-profit organisations [2].

Moreover, we wrote a report, titled *Making Math work*, that outlines a plan to expand the activities of the Committee. We are very excited about going forward with the plans recommended in the report.”

Why do you think it is important that mathematicians invest time in transfer of knowledge to other disciplines, by taking part in events like the SWI?

“Well, why not? These collaborations can be very challenging and worthwhile. Personally, I find it gratifying to see that you can really contribute and make a difference. It usually takes quite some effort to understand what the companies taking part in the SWI are interested in, and what questions they would like to answer. Often, the process of formulating the right questions is an essential part of the project.

It is certainly an occasion where you can learn a lot, and it often leads to challenging mathematical questions. On top of that, participating in the SWI is fun, and often the projects from the Study Group are very nice examples of what you can do with mathematics.”

References

- 1 LinkedIn Wiskunde met de Industrie, <https://www.linkedin.com/company/studiegroep-wiskunde-industrie>.
- 2 Math Community Event, <https://platform-wiskunde.nl/math-community-event>, visited on April 10, 2021.
- 3 Esmée Vendel, Vivi Rottschäfer and Elizabeth C.M. de Lange, Improving the prediction of local drug distribution profiles in the brain with a new 2D mathematical model, in Special Issue: Mathematics to Support Drug Discovery and Development, *Bulletin of Mathematical Biology* 81(9) (2018), 3477–3507.
- 4 Esmée Vendel, Vivi Rottschäfer and Elizabeth C.M. de Lange, The need for mathematical modelling of spatial drug distribution within the brain, *Fluids and Barriers of the CNS* 16:12 (2019).
- 5 Esmée Vendel, Vivi Rottschäfer and Elizabeth C.M. de Lange, A 3D brain unit model to further improve prediction of local drug distribution within the brain, *PLOS ONE* 15(9) (2020), e0238397.
- 6 Esmée Vendel, Vivi Rottschäfer and Elizabeth C.M. de Lange, The 3D brain unit network model to study spatial brain drug exposure under healthy and pathological conditions, *Pharmaceutical Research* 37 (2020), 137.

Raf Bocklandt

Korteweg-de Vries Instituut voor Wiskunde
Universiteit van Amsterdam
r.r.j.bocklandt@uva.nl

Evenement Studiegroep Wiskunde met de Industrie 2020

Over druppels en dubbels

De Studiegroep Wiskunde met de Industrie (SWI) is een jaarlijkse bijeenkomst die de brug legt tussen de wiskundige wereld en het bedrijfsleven. Een week lang werken ongeveer vijftig tot tachtig wiskundigen, zowel van universiteiten en hogescholen als uit de privésector, samen aan een selectie problemen die worden aangedragen door bedrijven en non-profitorganisaties.

De SWI maakt deel uit van een internationaal netwerk van gelijksoortige studiegroepen, die geïnspireerd zijn op een initiatief van de universiteit van Oxford. Al in 1968 organiseerde deze universiteit een dergelijke meeting en over de jaren heen evolueerde dit tot een beproefd model dat werkt met een uitgekiend tijdschema gespreid over vijf dagen [1].

Op voorhand worden zes problemen gekozen uit inzendingen van bedrijven. Na de selectie stellen de bedrijven een beschrijving op van één of twee pagina's lang en vaardigen ze iemand af die de vraag zal presenteren op de eerste dag van de bijeenkomst. Na de presentaties gaan de deelnemers in kleinere groepen op zoek naar oplossingen.

Een cruciaal aspect van de studiegroep is de interactie tussen de wiskundigen en de contactpersonen van de bedrijven. Tijdens de week wordt de vraag van het bedrijf pas echt duidelijk en daarvoor is deze interactie nodig. Op die manier kunnen de wiskundigen beter begrijpen wel-



ke aspecten van het probleem ertoe doen en gefocust blijven op de zaken die voor het bedrijf van belang zijn. Hoe beter de chemie tussen wiskundigen en de bedrijfsdeelnemers, hoe beter de resultaten.

Aan het einde van de week presenteren de wiskundigen voor elk vraagstuk hun bevindingen en gieten dat in een wetenschappelijke proceedings, die in het Engels wordt opgesteld. Daarnaast wordt er ook een populaire proceedings opgesteld met Nederlandse samenvattingen voor elk van de problemen.

In Nederland worden de studiegroepen sinds 1998 bijna jaarlijks georganiseerd. Ze worden gesponsord door de Nederlandse Organisatie voor Wetenschappelijk Onder-

zoek (NWO) en vinden telkens op een andere locatie plaats. De organisatie wordt gecoördineerd door het 'Nationaal Comité SWI' dat valt onder de Commissie Innovatie van Platform Wiskunde Nederland (PWN). Dit comité bestaat uit Alessandro di Bucchianico (TU/e) en Vivi Rottschäfer (UL). Zij zorgen voor de financieringsaanvraag bij de NWO, ondersteuning bij de lokale organisatie, en staan in voor de bijbehorende website www.swi-wiskunde.nl.

Om een idee te geven van hoe het er in de studiegroep aan toegaat en met welke creatieve oplossingen de wiskundigen op de proppen komen, publiceren we hierna twee stukken uit de populaire proceedings van de SWI 2020. Deze vond plaats van 27–31 januari 2020 in Tilburg en werd georganiseerd door de opleiding Toegepaste Wiskunde van Fontys Hogescholen. De stukken zijn van de hand van Anouck Vrouwe, freelance wetenschapsjournalist en tekstschrijver (www.anouckvrouwe.nl), en zijn terug te vinden op eerdergenoemde website van SWI. ☞

Referentie

- 1 A. Araujo et al., *Handbook for Running a Sustainable European Study Group with Industry*, Mathematics for Industry Network (MI-NET), 2017, <https://mi-network.org>.



Een wedstrijdje druppelblazen

Vocht in je dure chipmachine is niet wat je wilt. VDL ETG vraagt de wiskundigen van de Studiegroep Wiskunde met de Industrie om de snelste manier om hangende druppels weg te blazen.

“En néé, jullie mogen geen andere oplossingen verzinnen. Geen hete lucht om de druppel te verdampen, geen doekjes, geen microgolven, enzovoort. Over al die mogelijkheden hebben wij al nagedacht. We willen alleen maar van jullie weten hoe we de druppels het beste weg kunnen blazen.” Dmitri Shestakov van VDL ETG probeert er streng bij te kijken, tijdens zijn presentatie aan het begin van de studiegroep. Hij weet hoe wetenschappers zijn, is er zelf een geweest — dwarsdenkers, altijd op zoek naar net even anders. Hij weet ook dat de studiegroep slechts één week duurt. Geen tijd te verspillen dus. Hij komt hier voor antwoord op zijn vraag: hoe blaas je een hangende druppel het snelst van een plaat? Hij weet dat die vraag niet simpel te beantwoorden is, anders was hij hier niet geweest. Dus hij wil snel tot de kern komen.

Wim Munters is docent wiskunde aan de Technische Universiteit Eindhoven. Van de Studiegroep Wiskunde met de Indus-

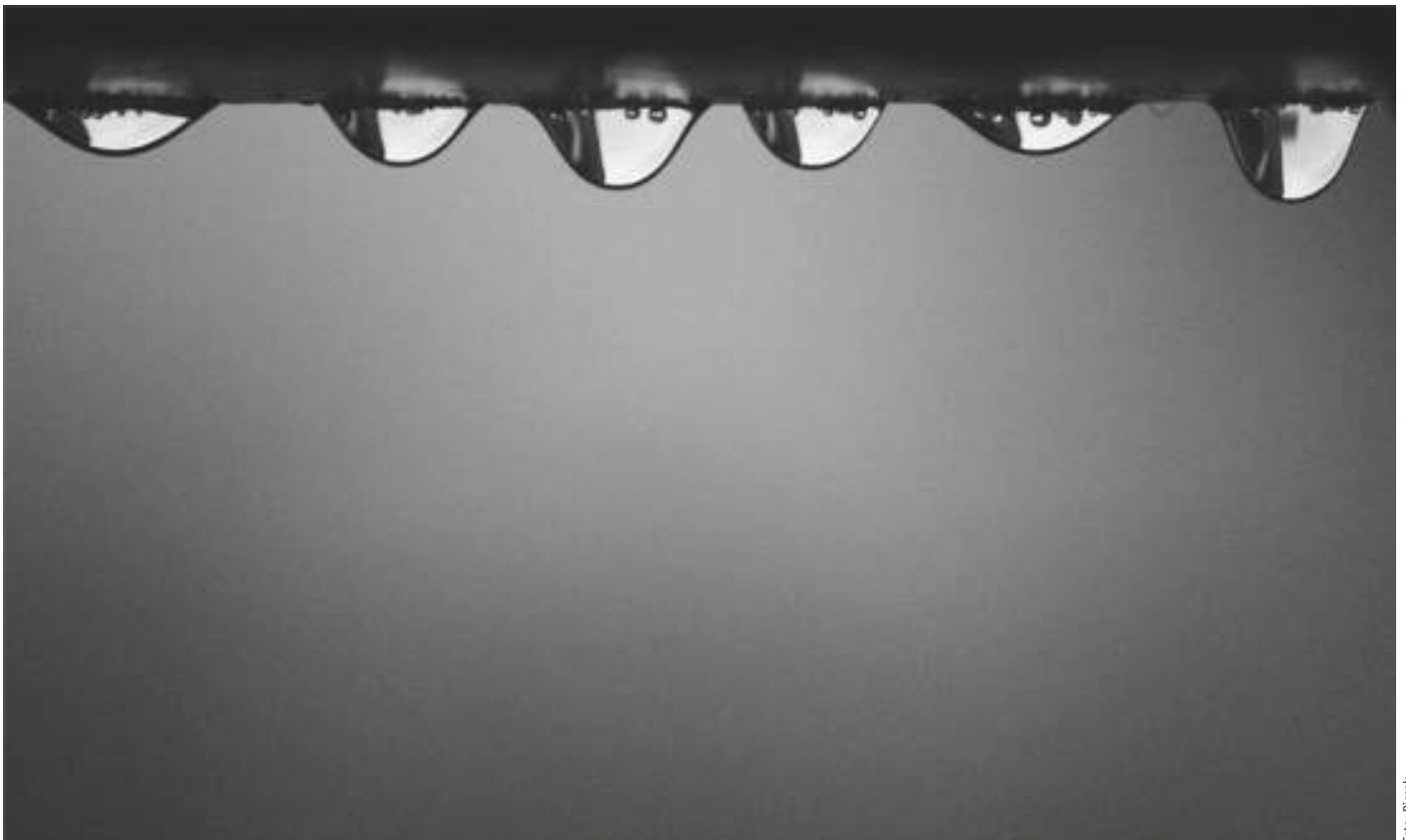
trie had hij nog nooit gehoord, tot collega Mark Peletier hem vroeg eens mee te kijken naar een van de ingebrachte bedrijfsvragen. Die van VDL ETG om precies te zijn, over het wegblazen van hinderlijke druppels. Voor hij het wist, zat Munters een week in Tilburg. “Een leerrijke ervaring. Intens ook,” lacht hij, “maar ook enorm interessant om met mensen met zoveel verschillende achtergronden samen te werken.” Hij vond de grote senioriteitsverschillen een interessant gegeven: “De jongeren kijken fris tegen de vraag aan, de ouderen brengen hun ervaring in. Een mooie mix.” Munters is van origine werktuigbouwkundige, en wandelde van daaruit de numerieke wiskunde binnen. Een fijne achtergrond voor de vraag van VDL ETG.

VDL ETG is gespecialiseerd in het ontwikkelen en produceren van precisieapparatuur en onderdelen daarvan. Voor chipmachinefabrikant ASML maakt het bedrijf waferhandlers. De wafer is de siliciumschijf waar de chips uit worden gemaakt. De wa-

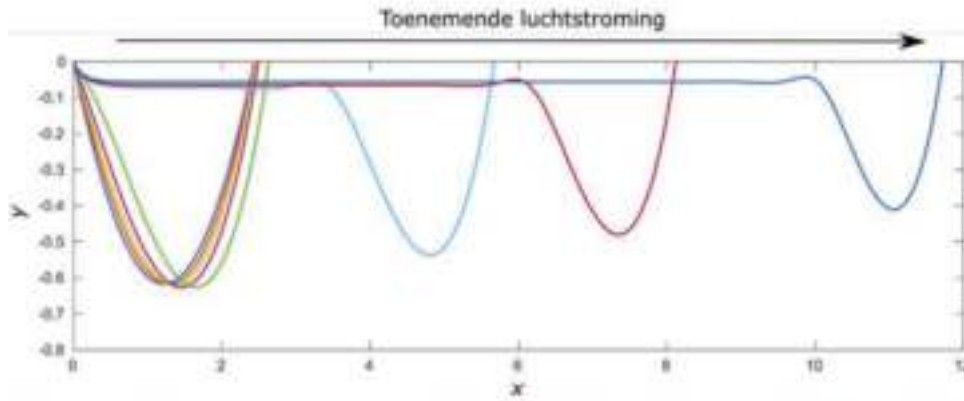
ferhandler is de module die de wafers van en naar de machine van ASML verplaatst. ASML bouwt onder meer immersie-chipmachines, waarbij water wordt gebruikt om de werking van de lens te verbeteren. Daar komt het vocht vandaan dat soms achterblijft onder de wafer. Er vormt zich dan een hangende druppel. Niet groot, hooguit een millimeter of twee, maar vocht in de machine is domweg onacceptabel. “Die druppel moet weg, zo simpel is het”, benadrukt Dmitri Shestakov.

De druppels weghalen is echter zo eenvoudig niet. VDL ETG gebruikt nu lucht om ze weg te blazen. “We willen die druppel zo snel mogelijk wegblazen, maar niet zo hard dat hij instabiel wordt en uiteenspat”, vertelt Shestakov. Wanneer dat gebeurt, ontstaan er tientallen kleinere druppels die nog moeilijk weg te krijgen zijn.

VDL ETG is naar de studiegroep gekomen voor inzicht in de snelste manier om de druppels weg te krijgen. Moet je steeds een beetje harder blazen, of gepulst



Hangende druppels (niet in de machine)



Simulatie van de vervorming van de druppel bij verschillende lichtsnelheden

misschien? Het gedrag van de druppel is complex, laat Shestakov met een filmpje zien. Zo oscilleert de druppel als hij wordt weggeblazen. Is dat gedrag van de druppel te modelleren? “Voor VDL ETG was deze week een eerste exploratieve verkenning”, vertelt Munters. De wiskundigen hadden dan ook weinig data om mee te werken, alleen het filmpje dat Shestakov had meegebracht. “In de wetenschap is er de heilige drie-eenheid theorie–simulaties–experimenten”, zegt Munters. “Je kan een model niet echt uitwerken, wanneer je over weinig experimentele data beschikt.” Voor de groep was het daarom helder wat er in de week moest gaan gebeuren: het vergelijken van geschikte modellen, zodat zij VDL ETG konden adviseren met welk model écht aan de slag te gaan.

De groep dook in de druppelliteratuur, om voeling te krijgen met het vakgebied en een gevoel voor ordegrottes te ontwikkelen. “Alleen dat was al prettig, ik heb nu een lange lijst relevante literatuur”, zegt Shestakov. “Onze ambitie was niet om een eigen model te bouwen”, aldus Munters. “We hebben vier in onze ogen geschikte modellen gekozen, van simpel tot complex, die zo goed mogelijk uitgevoerd en toen vergeleken.”

Het simpelste model, om mee te beginnen, was een krachtenbalans. Zo is er de kracht van de luchtstroom en de adhesie, die de druppel bij elkaar houdt. “Een heel eenvoudig model, met weinig aannamen”, benadrukt Munters. Het model liet zien dat de druppel al snel een maximumsnelheid bereikt. Blaas je dan nog harder, dan zorgt dat er enkel nog voor dat de druppel verder uitspreidt – niet dat hij harder gaat. Ook liet het model zien dat de vervorming van de druppel duidelijk van belang is voor de behaalde snelheid.

Na deze eerste stap haalden de wiskundigen het werkpaard van de stromingsleer van stal: de Navier–Stokes-vergelijkingen. “Die hebben we op meerdere manieren toegepast, allemaal eerst maar eens in 2D”, vertelt Munters. Navier–Stokes-vergelijkingen kunnen in rekentijd nogal uit de hand lopen. In de eerste toepassing namen de wiskundigen daarom aan dat de druppel slechts invloed had op het profiel van een deel van de luchtlaag, en niet op de hele luchtlaag. Dat maakte het probleem beter behapbaar. Er werd gekeken hoe de druppel vervormde, naar kleine trillingen in de druppel. Ook werd gekeken of deze methode naar 3D uitgebreid kon worden.

Daarna zetten de wiskundigen meerdere numerieke rekenpakketten in, ook nu weer met de aanname dat de luchtstroom zich niet teveel liet verstoren door de druppel. “We kregen de data die daar uitkwamen niet meteen sluitend, maar we zagen wel dat de modellen dezelfde fenomenen lieten zien”, aldus Munters. Zo had steeds harder blazen ook volgens deze modellen geen zin. De rekentijd bleef met een uur ook binnen de perken, een belangrijke voorwaarde. Na het gepuzzel in 2D wilde de groep zich ook nog voorzichtig wagen aan de driedimensionale versie van het probleem, ook nu weer met een numeriek Navier–Stokes-model. Om de rekentijd te beperken – de studiegroep duurt immers slechts een week – werd wederom opnieuw gekozen om alleen de stroming in de druppel zelf te modelleren.

“Hier zagen we dat de druppel ook in een constante luchtstroom kan gaan trillen”, aldus Munters. De groep had weinig tijd om diep in deze simulaties te duiken, maar kon wel concluderen dat ook 3D-berekeningen voor dit probleem haalbaar zijn voor VDL ETG. Een conclusie waar Shestakov door verrast is: “Ik dacht dat

dat niet te doen was, dus het is fijn te horen dat het mogelijk toch kan.” Op de exacte getallen moet je ons zeker niet vastpinnen, zegt Munters, maar alle vier de modellen gaven kwalitatief wel soortgelijke uitkomsten. De eerder genoemde conclusie dat harder blazen vanaf een bepaald punt geen zin meer heeft. Het trillen van de druppel, wat belangrijk is omdat de druppel daardoor immers uiteen kan spatten. “Ook lijkt er een soort natuurlijke trilling te zijn rond de 25 hertz”, vertelt Munters. “Als je de druppelsnelheid wilt verhogen, valt daar misschien wat te rapen.”

De groep raadde VDL ETG aan om een goede meetopstelling te bouwen, om data binnen te halen om de modellen mee te voeden. “Dat is ook hoe ik het aan zou pakken”, vertelt Shestakov na afloop. “Met je modellen een strategie uitzetten, en die toetsen.” Ook concludeerden de wiskundigen dat er met de lichtere modellen zeker al blaasstrategieën berekend kunnen worden, waarmee winst te verwachten valt. Voor goed inzicht is het echter aan te bevelen om vervolgens voor die gebieden de zwaardere driedimensionale berekeningen te gaan doen.

Shestakov kijkt tevreden terug op een succesvolle week. “Ik wist vooraf niet precies wat te verwachten, maar ik ben echt van mijn sokken geblazen. Met samenwerking kun je dus enorm veel bereiken in korte tijd. De groep heeft me geen magisch recept gegeven, maar dat had ik ook niet verwacht. Wat ze wel heeft gedaan, is me inzicht gegeven, en richting”, zei Shestakov na afloop van de week in zijn dankwoord. Hij pleit voor een uitbreiding van de studiegroep, als brug tussen onderzoek en bedrijfsleven: “Ik zou willen dat ik het hele jaar door zo’n team aan het werk kon zetten als ik met een vraag zat.” Anouck Vrouwe

Winnen zonder te verliezen

Een nieuw ratingsysteem voor het dubbelspel waarin elke wedstrijd telt, ook als spelers duidelijk in niveau verschillen. Dat is wat Helga Wiersma van de tennisbond KNLTB van de wiskundigen van de Studiegroep Wiskunde met de Industrie vraagt.

We zien soms gekke dingen bij de rating van spelers die dubbelen, vertelt Helga Wiersma van de tennisbond KNLTB de wiskundigen bij de start van de studiegroep. “Zoals minpunten bij een gewonnen wedstrijd.” Dan wint een duo een tenniswedstrijd, en gaat de rating van één van de spelers toch achteruit. Het is een onbedoeld bijeffect van het ratingsysteem voor dubbels van de KNLTB, waarbij het resultaat van de wedstrijd afhangt van de speelsterkte van de tegenstander. “We lossen dat nu op door de wedstrijd niet mee te laten tellen, maar dat is voor spelers natuurlijk ook niet leuk. Dan levert winst niets op voor je rating”, vertelt Wiersma, Manager Wedstrijdtennis bij de KNLTB.

Voor tennisers op niveau gaat tenissen niet alleen om een lekker potje ballen, maar ook om het verbeteren van hun speelsterkte — die weer bepaalt welke tegenstanders ze krijgen. Spelers hebben een individuele rating voor zowel het enkelspel als het dubbelspel. In het huidige ratingsysteem kent de KNLTB bij dubbelwedstrijden geen score toe wanneer het niveauverschil tussen de spelers groot is, wat geregeld zo is. “We willen graag toe naar een ratingsysteem waarbij elke gewonnen wedstrijd loont”, benadrukt Wiersma.

Het huidige ratingssysteem DDS (dynamisch speelsterkte systeem) is ontworpen voor het enkelspel, en daarna uitgebreid naar de dubbels. Het ratingsysteem is een stroomschema, waar twee uitkomsten mogelijk zijn: de wedstrijd telt mee, of geeft geen resultaat. De rating is het gemiddelde over de wedstrijden van een jaar, waarbij ook de rating van afgelopen jaar wordt meegenomen wanneer de speler minder dan zes wedstrijden speelt. “Voor iemand die veel speelt, hebben de wedstrijden aan het eind van het seizoen weinig invloed meer op hun rating, omdat we over zoveel wedstrijden middelen”, legt Wiersma uit.

De KNLTB heeft zelf al gekeken naar andere ratingsystemen. Zo was er bijvoorbeeld de rating van de Amerikaanse tennisbond, waarbij zelfs de setstanden ertoe doen. “Dat willen wij niet, omdat je rating dan achteruit kan gaan als je wél gewonnen hebt, maar met een klein verschil in setstanden”, vertelt Wiersma. “We vonden nog geen systeem dat helemaal aan onze wensen voldeed.” Wiersma heeft daarom het wensenlijstje van de KNLTB opgesteld en dat aan de wiskundigen voorgelegd.

“Ik tennis niet, maar ratings heb ik altijd interessant gevonden”, zo motiveert

deelnemer Len Spek zijn keuze voor het tennisvraagstuk. Het was Speks eerste studiegroep, hij had er van andere promovendi goede verhalen over gehoord. De wiskundige werkt bij de Universiteit Twente aan een promotieonderzoek naar het simuleren van netwerken van hersencellen. In 2021 is de Studiegroep Wiskunde met de Industrie aan zijn universiteit. Het leek ook zijn begeleider daarom een goed idee dat Spek dit jaar mee zou doen. “Ik was onder de indruk hoeveel progressie je in een paar dagen maakt wanneer je als groep gefocust aan één probleem werkt”, vertelt de wiskundige naderhand. Dat is ook wat Wiersma na afloop zegt: “Mooi vond ik dat iedereen bereid was mee te gaan in de denkrichting van een ander. Daarbij stelden de wiskundigen elkaar steeds vragen, hoe pakt dit dan uit, wat doen we dan daarmee? Vragend oplossend, zo zou ik het proces omschrijven.”

Vooraf had Spek verwacht dat er tal van ratingsystemen voor dubbels in de literatuur te vinden zouden zijn, maar dat viel tegen. “We vonden wat informatie over ratings bij online computerspellen, die ook in teams worden gespeeld. Die ratings voldeden niet aan onze eisen.” Dus ontkwamen de wiskundigen er niet aan om toch zelf wat te bedenken. Daarvoor begonnen ze bij een oud, veelgebruikt en gerespecteerd ratingsysteem: de Elo-rating, ontwikkeld door natuurkundige en schaker Árpád Élő in de jaren zestig. Het systeem is de standaard bij schaken en dammen. Dit systeem rekent voor elke wedstrijd een winstverwachting uit, gebaseerd op het krachtverschil tussen de spelers. Wint de sterkere speler, dan is dat in lijn met de verwachting: de rating van de winnaar stijgt dan slechts een beetje. Wint de zwakere speler echter tegen de verwachting in, dan heeft dat een groter effect. Spek: “Het mooie is dat je rating altijd stijgt als je wint, en daalt als je verliest, al is het soms maar een beetje.”

Het Elo-systeem is later verfijnd door statisticus Mark Glickman. Hij nam in zijn Glicko-rating de onzekerheid over de speelsterkte van een speler mee. De speelsterkte van een echte wedstrijdvreter is immers met meer zekerheid bekend dan



Foto: KNLTB

Damesdubbel

die van iemand die maar af en toe een wedstrijd speelt, of die een tijdje gestopt is en weer begint. “Als iemand met een onzekere rating speelt tegen iemand met een zekere rating, heeft die wedstrijd meer invloed op de rating van de onzekere speler dan op die van de welbekende speler”, legt Spek het mooie van het Glicko-systeem uit. Het meenemen van onzekerheid is iets wat de KNLTB graag wil. In dit systeem is het niet erg als de bond de speelsterkte van een herintredende speler verkeerd inschat: de Glicko-rating trekt dat snel weer recht, zonder grote schade voor de tegenstanders.

Het was de wiskundigen snel duidelijk dat zowel het Elo- als het Glicko-systeem geschikt zijn voor de KNLTB. Nu moest de stap van enkel- naar dubbelspel worden gemaakt, want beide systemen zijn ontworpen voor één tegen één. “We hebben flink gediscussieerd over hoe dat moest”, vertelt Spek. Moest je uitgaan van twee teams met een bepaalde sterkte die tegen elkaar spelen — als ware het een enkelspel tussen teams? Of was het beter om de wedstrijden te beschouwen als vier potjes van één iemand met drie anderen, waarvan er twee tegenwerken en een helpt? Spek: “Uiteindelijk zijn we toch maar gewoon uitgegaan van twee teams tegen elkaar, ook omdat dat beter uit te leggen is.” Want ook uitlegbaarheid was een eis van de KNLTB, om gemopper van spelers te voorkomen.

Bij een dubbelspel wordt de persoonlijke rating van de spelers in één team gecombineerd tot één gezamenlijke rating. Na de wedstrijd wordt de nieuwe teamrating weer opgesplitst in twee individuele ratings. De aanpak werd als volgt: twee spelers vormen samen een team met één rating, gebaseerd op de gecombineerde rating van de beide spelers. Vervolgens wordt er met het Elo- of Glicko-systeem een winstverwachting bepaald voor de wedstrijd, als ware het gewoon een wedstrijd van één tegen één. “Na de wedstrijd rolt er een nieuwe rating voor de teams

uit, zowel voor de winnaars als voor de verliezers. Die splits je uit naar de spelers”, vervolgt Spek. Bij deze aanpak zijn er twee belangrijke vragen. Hoe combineer je de ratings van de spelers vooraf en hoe verwerk je het resultaat van de wedstrijd in de individuele ratings? Spek: “Als de spelers even sterk zijn, is het makkelijk. Hun gezamenlijke rating is gelijk aan hun individuele ratings, en ze stijgen of dalen na afloop evenveel. Maar bij verschil in sterkte, wat is dan eerlijk? Neem je het gemiddelde van de individuele ratings? Of is vooral de sterkere speler bepalend voor de uitslag, of juist de zwakkere?” Om daar inzicht in te krijgen, gebruikten de wiskundigen een dataset met uitslagen van de KNLTB. Spek: “Het gemiddelde van twee ratings blijkt een behoorlijk goede voorspeller van de uitslag, ook als het niveauverschil tussen twee spelers in één team groot is.” Hij geeft hierbij wel aan dat dit deels het gevolg kan zijn van het huidige ratingssysteem, dat beide spelers bij winst ongeveer gelijk belooft. “Dat zou je nog kunnen onderzoeken.”

De wiskundigen keken ook of bij gemengd dubbel de man of de vrouw meer bepalend is voor de uitslag, maar ook geslacht lijkt niet uit te maken. De wiskundigen raden de KNLTB dan ook aan om voor de rating van een team gewoon de individuele ratings te middelen. Zij gaven de tennisbond ook de formules om de nieuwe gezamenlijke rating weer netjes te splitsen naar de spelers. “Het mooie was dat we hier een exacte oplossing voor konden geven”, vertelt Spek. Voor de fijnproevers: die formule is afgeleid uit een minimalisatie van het verlies van informatie over de wedstrijd.

De wiskundigen presenteerden uiteindelijk twee systemen: een dubbelspelversie van het Elo-systeem en het complexere Glicko-systeem. “In het Glicko-systeem is de formule voor het splitsen van het resultaat niet zo eenvoudig uit te leggen aan de spelers”, zegt Spek. “Glicko heeft zeker onze voorkeur, omdat je er onzekerheid in speel-

sterkte in meeneemt”, zegt Wiersma na afloop. “Het principe van het systeem krijgen we wel uitgelegd zonder die formules.”

Het is niet zo dat het ratingsysteem klaar is voor implementatie. Spek: “De bond moet nog wel keuzes maken.” Zo groeit de onzekerheid van een rating van een niet-spielende tennisser met de tijd, maar hoe snel dat gaat is een parameter die de bond kan kiezen. “Kies je een snelle groei van de onzekerheidsfactor, dan zullen ratings sterker fluctueren.” Spek legt uit dat je daar misschien niet voor alle type spelers dezelfde keuze wil maken. “Zo spelen professionele tennissers maar weinig KNLTB-wedstrijden, terwijl hun niveau vrij constant is. Daar wil je dat de onzekerheid langzaam oploopt. Bij jeugdspelers kan je meer onzekerheid inbouwen, omdat jeugd zich snel ontwikkelt”, zegt Spek. Hij adviseert om hier keuzes te maken op basis van speeldata. Wiersma benadrukt dat de veranderingen in de rating moet kloppen met het gevoel: “Spelers willen een rating die meebeweegt met de wedstrijden, maar niet alle kanten opschiet.”

De KNLTB verwacht de resultaten te implementeren, maar niet van vandaag op morgen. Wiersma wil graag meer data-analyse doen voordat er beslist wordt hoe je twee ratings tot één combineert: “Het kan zijn dat de sterkere speler toch iets meer invloed heeft. Daar zou ik graag nog eens goed naar kijken voordat we besluiten of we de ratings middelen, of toch een iets andere verhouding gebruiken.” Wiersma verwacht dat ook de rating van de singles verandert. “Het lijkt me wat gek om met twee systemen naast elkaar te werken.” Wiersma overlegt met de studiegroep wat er nog moet gebeuren voor de implementatie kan beginnen. Het uitwerken van de details wordt misschien een afstudeerproject. “Ik heb bewondering voor wat de groep in een week heeft bereikt”, zegt Wiersma. “Het was een project waarvan we al een tijdje wisten dat we er wat mee wilden. Door deze week heeft het vleugels gekregen.”

Anouck Vrouwe

In de verdediging

| In defence

Pas gepromoveerden brengen hun werk onder de aandacht. Heeft u tips voor deze rubriek of bent u zelf pas gepromoveerd? Laat het weten aan onze redacteur.

Redacteur: Nicolaos Starreveld
FNWI, Universiteit van Amsterdam
Postbus 94214
1090 GE Amsterdam
verdediging@nieuwarchief.nl



Finite Approximation and Continuous Change in Spectral Geometry Abel Boudewijn Stern

In maart 2021 heeft Abel Boudewijn Stern van de Radboud Universiteit Nijmegen zijn proefschrift verdedigd en de graad van doctor toegekend gekregen. De titel van zijn proefschrift luidt *Finite Approximation and Continuous Change in Spectral Geometry*. Zijn promotor was dr. Walter D. van Suijlekom.

Spectrale meetkunde

Abels promotieonderzoek gaat over de spectrale meetkunde: de studie van de relatie tussen de vorm van meetkundige objecten en frequenties. Meer in het bijzonder gaat de spectrale meetkunde over de vorm van Riemannse variëteiten en het spectrum van operatoren van het Laplace-type (frequenties van stationaire hitte- of geluidsgolven). Een voorbeeld van zo'n relatie is hoe de vorm en het materiaal van een muziekinstrument het geluid bepalen. Andersom kan je aan de klank van een instrument al aardig wat horen over de vorm ervan. Abels proefschrift bestaat uit twee delen: een aanpak van spectrale meetkunde op basis van een eindig deel van het spectrum, en een nieuw concept van 'continue Schattenklassen' dat aansluit bij het spectrale perspectief op correspondenties tussen meetkundige vormen.

In de spectrale meetkunde zijn mensen geïnteresseerd in de verbanden tussen het spectrum van een differentiaaloperator, meestal de Laplacian of, meer algemeen, een operator van het Laplace-type, en de meetkunde van de ruimte waarop deze operator wordt toegepast, in het algemeen een Riemannse variëteit. De intuïtie hierachter heeft te maken met warmte. De warmtevergelijking is een PDE waarin de tijdsevolutie wordt bepaald door de Laplacian. Kennis over haar spectrum levert informatie over hoe warmte stroomt op een gegeven gebied. Laten we een gedachte-experiment doen. Stel dat je in een donkere kamer bent en het enige dat je kan zien is hoe warmte stroomt op het oppervlak van een object. Deze 'animatie' kan informatie geven over de vorm van het object, ofschoon je het object niet direct kan zien. Warmte zal alle gaatjes en bijzonderheden van de meetkunde van het object onthullen. Maar wat zegt de wiskunde hierover?

Een inverse-probleem

Laten we beginnen met een voorbeeld, het probleem van Dirichlet. Zij $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$ een 'mooi' gebied en beschouw de Laplacian Δ , toegepast op een functie $f \in C^2(\Omega)$. We willen het volgende eigenwaardeprobleem oplossen:

$$\Delta f = \lambda f$$

onder de voorwaarde dat f voldoet aan de Dirichlet-conditie $f|_{\partial\Omega} = 0$. In dit geval zijn alle eigenwaarden discreet en reëel. Bovendien

geldt er ook dat $0 < \lambda_1(\Omega) \leq \lambda_2(\Omega) \leq \dots \leq \lambda_n(\Omega) \leq \dots \rightarrow \infty$. Voor sommige keuzes van Ω kunnen de eigenwaarden en de eigenvectoren exact worden bepaald, maar in het algemeen is het een heel moeilijk probleem. Dit voorbeeld illustreert een direct resultaat, want de vorm van Ω zegt hier iets over het spectrum van de Laplacian. In de spectrale meetkunde is men vooral geïnteresseerd in de omgekeerde kwestie, namelijk: wat kunnen we zeggen over de meetkunde als we informatie ter beschikking hebben over het spectrum? Een voorbeeld hiervan is de asymptotische formule van Weyl, die een verband legt tussen het spectrum van de Laplacian en het volume van het gebied $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$.

Can you hear the shape of a drum?

Een bekende vraag met betrekking tot dit probleem is de volgende: “Stel dat twee Riemannse variëteiten hetzelfde spectrum hebben, zijn ze dan isometrisch?” Deze vraag werd vooral bekend door Marc Kac met zijn artikel ‘Can you hear the shape of a drum?’. Snel nadat Kac zijn artikel publiceerde, vond wiskundige John Milnor twee 16-dimensionale tori die hetzelfde spectrum hebben, maar die niet isometrisch zijn. In twee dimensies duurde het nog tot 1992 totdat wiskundigen Carolyn Gordon, David Webb en Scott Wolpert twee verschillende gebieden construeerden die wel isospectraal zijn.

Het spectrum alleen kan dus helaas niet alle geheimen van de meetkunde onthullen. Desalniettemin, zoals gezien met Weyls formule, kan het spectrum van de Laplacian toch informatie geven over de vorm van de ruimte. De vraag is: hoe sterk is dit verband tussen de vorm en het spectrum? Tot nu toe hadden we een operator, de Laplacian (of een operator van het Laplace-type), en een vectorruimte van gladde functies waar we de operator op loslieten. Om de meetkunde volledig te kunnen beschrijven zijn deze twee ingrediënten niet voldoende. Wat mist er dan?

Wiskundige Alain Connes vond het derde ingrediënt. De informatie die mist van het tweetal $(\Delta, \text{ruimte van gladde functies})$ is hoe deze functies zich verhouden tot de werking van Δ . Deze extra informatie wordt volgens de stelling van Gelfand–Naimark gegeven door werking van de *algebra* van de ruimte van gladde functies op

dezelfde vectorruimte waar ook de Laplacian op werkt. Deze drie ingrediënten, de algebra, de operator en de Hilbertruimte, vormen een zogenaamd spectraal drietal.

Alain Connes

Laten we een poging wagen om te begrijpen hoe een spectraal drietal zich verhoudt tot de meetkunde van Riemannse variëteiten. Dankzij de reconstructiestelling van Connes is het voldoende om een wat eenvoudiger object te begrijpen, namelijk een spectraal drietal van het Dirac-type. Deze stelling zegt namelijk dat elk commutatief spectraal drietal correspondeert met een spectraal drietal van het Dirac-type. Een spectraal drietal van het Dirac-type, geassocieerd met een oriënteerbare Riemannse variëteit M , bevat de algebra $C^\infty(M)$ en een differentiaaloperator D van het Dirac-type. Deze operator is gedefinieerd op de variëteit M , voor de preciezen onder ons op een Hermitische vectorbundel E over M , als de formele wortel van een operator van Laplace-type, dus $D^2 = \Delta$. De keuze om met D te werken, en niet met Δ , zorgt ervoor dat de formules iets netter worden en de connectie met de natuurkunde iets duidelijker wordt.

De derde component van het drietal betreft de Hilbertruimte $L^2(E; M)$, die een gemeenschappelijke speelruimte vormt voor $C^\infty(M)$ en de operator D . In 1995 vroeg Connes of het zo is dat, onder milde voorwaarden op een algemeen spectraal drietal (A, D, H) , er altijd een unieke gladde compacte variëteit M bestaat zodat (A, D, H) , van het Dirac-type is geassocieerd met M . In 2008 gaf hij een bewijs hiervoor. Er is dus een een-op-eenverband tussen commutatieve spectrale dretallen en compacte Riemannse variëteiten. Kennis over het spectrale drietal is voldoende om alles te weten over de meetkunde van de corresponderende variëteit.

Incomplete informatie

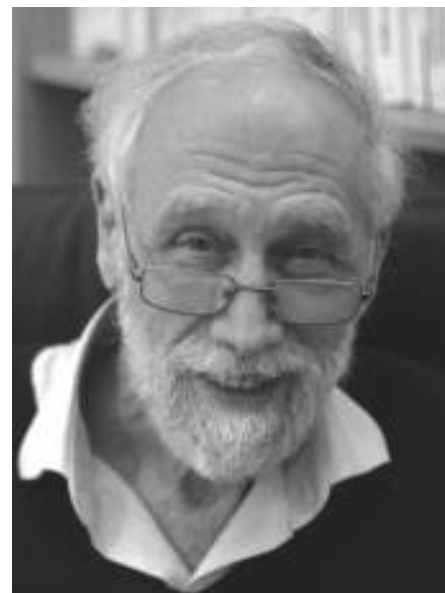
De problemen en de resultaten die hierboven worden geschetst, veronderstellen kennis over het hele spectrum van de Laplacian. In de praktijk is het niet mogelijk om zulke complete kennis te hebben, want informatie over het spectrum halen we uit waarnemingen, numerieke experimenten of simulaties met de computer.



Hermann Weyl



Marc Kac



Alain Connes

Daardoor is het belangrijk om te onderzoeken wat er gezegd kan worden over de vorm van de ruimte aan de hand van een klein deel van het spectrum.

In zijn proefschrift heeft Abel een methode ontwikkeld om vormen te beschrijven aan de hand van een gedeeltelijk spectrum. De methode die Abel heeft ontwikkeld is gebaseerd op zogenaamde ‘truncaties van spectrale drietallen van het Dirac-type’. Deze truncaties zijn op een natuurlijke manier gedefinieerd door middel van de spectrale projecties $P_\Lambda = 1_{[-\Lambda, \Lambda]}(D)$ op de eigenruimtes die corresponderen aan de eigenwaarden van de Dirac-operator D die begrensd zijn door Λ . In zijn proefschrift heeft Abel laten zien dat het mogelijk is om uit deze truncaties metrische ruimtes af te leiden die de bijbehorende variëteit steeds beter benaderen naarmate $\Lambda \rightarrow \infty$.

Samen met Lisa Glaser heeft Abel het PointForge-algoritme ontwikkeld, dat van een eindig stukje van de spectrale meetkunde tóch een bijna-isometrische benadering van een meetkundig object kan maken. Het algoritme werkt in drie stappen. Ten eerste construeert het een aantal sterk gelokaliseerde warmtegolven (als elementen van de Hilbertruimte), die als punten dienstdoen. Dit is mogelijk vanwege het (gedeeltelijke) spectrum dat we ter beschikking hebben.

Kers op de taart

Vervolgens laat het vanuit deze punten lokaal warmte stromen. Op een gegeven moment zullen deze hittegolven elkaar tegenkomen. Hoelang het duurt totdat ze elkaar tegenkomen zegt iets over de afstanden tussen de gekozen punten: dit is de Connes-metrik. Zo maakt het algoritme in de tweede stap een tabel met alle afstanden tussen de punten. Als laatste en als kers op de taart wordt er ook een grafenvisualisatiealgoritme, ontwikkeld door Abel en Lisa, toegepast om het resultaat isometrisch aanschouwelijk te maken.

De motivatie voor de ontwikkeling van eindige benaderingen in de spectrale meetkunde komt uit de kwantumzwaartekracht. In sommige theorieën van kwantumzwaartekracht, zoals in Causal Dynamical Triangulations, observeren wetenschappers reeksen ‘benaderde’ meetkundige objecten die ze graag met elkaar zouden willen vergelijken. De gewone invarianten uit de spectrale meetkunde zijn daar een interessant instrument voor. Daarom is het nuttig om te onderzoeken hoe ‘benaderde’ spectra gebruikt kunnen worden om invarianten van ‘complete’ spectra uit te rekenen. Daarnaast is er al een spectrale versie van het Standaardmodel, namelijk het Connes–Lott–Chamseddine–Barrett-model. Als we dat beter willen begrijpen en in het bijzonder willen begrijpen welke rol zwaartekracht daarin speelt, moeten we zien hoe de meetkundige informatie uit dat model samenwerkt met de natuurlijke energieschaal Λ van dat model.

Schatten-klassen op Hilbert-modules

In de spectrale meetkunde worden correspondenties tussen vormen (zoals veranderingen langs een tijdslijn) beschreven in termen van operatoren op Hilbert-modules over abelse C^* -algebra’s. Zulke

operatoren lijken op de meer bekende operatoren op Hilbertruimtes. Ze zijn echter een stuk algemener en dat levert een paar moeilijkheden op. In de spectrale meetkunde is het *spoor* een fundamentele invariant. Voor de door Abel bestudeerde operatoren bestond er nog niet zoiets als een spoor, laat staan een theorie van de daaraan gerelateerde Schatten-klassen. Het proefschrift van Abel introduceert dan ook een systematische theorie van sporen en Schatten-klassen in de context van zulke Hilbert-modules.

Het persoonlijke aspect

De wiskunde is mensenwerk, een proefschrift behelst alle ideeën en ontdekkingen die hebben geleid tot het verkrijgen van de graad van doctor. Maar het proefschrift was maar de eindbestemming, de tocht was veel rijker, vol met mooie herinneringen en ervaringen.

Een vraag aan de promovendus: Abel, wat herinner je je uit de afgelopen vier jaar?

“Ik heb mijn proefschrift geschreven in de eerste levensjaren van mijn kinderen, Jesse en Nina. Hoe het voor hén was dat ik met mijn promotie bezig was in die tijd kan ik nog niet zeggen, maar voor mij was het een bijzondere combinatie. Dat je midden in de nacht met een slapeloos kind op je arm nog éven een pen pakt om iets op te schrijven, en als het thuis eindelijk weer stil is, zelf wakker ligt omdat je het bewijs van de stelling net te pakken hebt. Het geeft het huiselijk leven een wiskundige onderstroom en het wiskundige leven een huiselijke context.

Ik heb tweeënhalf jaar intensief samengewerkt met Lisa Glaser, een postdoctoraal onderzoeker uit de theoretische natuurkunde. Ik heb ontzettend veel plezier gehad aan het samenwerken met Lisa. Theoretisch promotieonderzoek, zeker in een klein vakgebied, kan heel eenzaam zijn en het was heel fijn om een paar keer per week samen een kop thee te kunnen zetten en alle ideeën door te spreken, samen met de laptops in de code te duiken, vanuit huis over Skype het hele conceptartikel samen met de rode pen door te nemen, veganistische taart te eten bij het seminarium, en literatuurtips uit te wisselen over science fiction, Discworld, en natuurlijk kwantumzwaartekracht.

Omdat ik met mijn gezin in Den Haag woon maar promoveerde in Nijmegen, werkte ik al die jaren vele treinreizen lang in de stiltecoupé. Vooral aan het stuk tussen Utrecht en Nijmegen, niet zo druk bereisd, heb ik goede herinneringen; voor zover er goeie ideeën in het eerste deel zitten, zijn ze daar ontstaan, in het mistige ochtendlicht of in de vroege schemering van de terugreis. Het tweede deel, en het boek zelf, schreef ik in een paar maanden tijdens de eerste lockdown, halve dagen thuis aan een tafeltje in de slaapkamer, stuitende kinderen op de achtergrond, en ik ben blij verrast over hoe goed dat heeft uitgepakt. Misschien gaf het me wel een soort rust dat nu iederéén in zijn hoofd en in zijn kamertje zat opgesloten, en dat er gewoon geen tijd meer over was op de dag voor te hoge verwachtingen aan het onderzoek of twijfel aan het proefschrift: het was wat het was, en het was goed genoeg.”

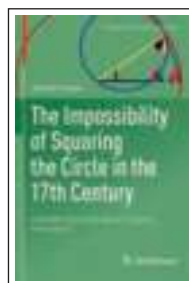


Boekbesprekingen

| Book Reviews

Redactie: Hans Cuypers en Hans Sterk

Review Editors NAW - MF 7.092
 Faculteit Wiskunde & Informatica
 Technische Universiteit Eindhoven
 Postbus 513
 5600 MB Eindhoven
reviews@nieuwarchief.nl
www.win.tue.nl/wgreview



Davide Crippa

The Impossibility of Squaring the Circle in the 17th Century
A Debate Among Gregory, Huygens and Leibniz

Birkhäuser, 2019

viii + 184 p., prijs €49,04

ISBN 9783030016371

Het voorliggende boek is tot stand gekomen door ondersteuning van het postgraduate project 'Bolzano and the Foundations of Analysis: A Sociological Exploration'. De ondertitel van het boek luidt 'A Debate Among Gregory, Huygens and Leibniz'. Deze twee zinnen geven meteen al wat informatie prijs over datgene wat de lezer kan verwachten.

Het centrale thema van de kwadratuur van de cirkel is uiteraard overbekend in brede kring. Zie in dit verband bijvoorbeeld ook het boek *Passermeetkunde* van prof.dr. S.C. van Veen uit 1951. Wat kan dit boek van Crippa daaraan nog toevoegen? De ondertitel maakt nieuwsgierig. Natuurlijk zijn de drie namen daarin eveneens overbekend en bij historici ook de verbanden tussen die drie. Maar toegespitst op het onderwerp van het boek wordt het al specifiek en de groep ingewijden wordt daarmee steeds kleiner. De namen geven aan dat we ons in de zeventiende eeuw bevinden. Een *thrilling* periode die we van oudsher de Gouden Eeuw noemden, maar vanwege allerlei contemporaine kritiek op handelingen in het verleden moet dat 'Gouden' er voor velen af. In ieder geval was het een periode vol van ontdekkingen en in de wetenschap vol van ontwikkelingen die hun weerga tot dan toe niet kenden. Natuurlijk streelt het onze ijdelheid dat we onder dit drieliet een van onze grootste geleerden aantreffen (of was hij de grootste?): Christiaan Huygens. Met het 'debat' tussen de drie zitten we dan in de tweede helft van de zeventiende eeuw.

De term 'kwadratuur' gebruiken we zoals bekend voor het bepalen van de oppervlakte onder vlakken begrensd door zekere krommen. En wel specifiek door middel van constructies met passer en liniaal (erfenis uit de oudheid) van vierkanten en dergelijke. De schrijver breidt de in de titel genoemde cirkel al in het begin uit met ellips en hyperbool en noemt dit drieliet 'centrale kegelsneden', namelijk die sneden met een middelpunt.

Over deze centrale kegelsneden publiceerde James Gregory tussen 1667 en 1676 zijn *Vera Circuli et Hyperbolae Quadrature*. Hij concludeerde dat de kwadratuur van centrale kegelsneden met genoemde elementaire middelen niet mogelijk was. Vrij snel na de publicatie ontspon zich in wetenschappelijke kring een levendige discussie over het thema, waar Leibniz vol vuur aan meedeed en onze Huygens eveneens zijn steentje aan bijdroeg. Het is buitengewoon instructief om kennis te nemen van de gevoerde discussies. Zeker ook om te lezen op welke wijze men elkaar attaqueerde: moderne felle woordenwisselingen zijn er niets bij. De zeeën gingen soms zeer hoog, zozeer zelfs dat bijvoorbeeld Huygens op zeker moment weigerde om verder met Gregory in discussie te gaan. Maar niet alleen vanuit historisch oogpunt is het belangwekkend om de ontwikkeling van het debat te volgen, zeker ook vanuit wetenschappelijk oogpunt is dit het geval. De discussie ging over zulke fundamentele kwesties dat deze in de huidige tijd nog hun echo's laten horen. Het ging namelijk in feite over het aantonen

van een onmogelijkheid: ontkenning van de existentiële bewering dat π een rationaal getal zou zijn. En dat is, zoals we weten, fundamenteel moeilijker dan het omgekeerde. In de tijd gezien heeft deze discussie een grote bijdrage geleverd aan de ontwikkeling van de wiskunde. Culminerend in de negentiende eeuw met het werk van Lindemann en het werk van vele anderen op het terrein van hogeregraadsvergelijkingen: zij tamboereren allen op dit belangrijke epistemologische thema. En ze hebben onveranderlijk tot fundamentele ontwikkelingen geleid.

Daarmee is het niet alleen vermakelijk om in dit boek de discussies te lezen, of om de bronnen van de epistemologie beter te kunnen zien, alsook om de ten tonele gevoerde personen met hun hebbelikheden en onhebbelikheden beter te leren kennen, maar ook om te zien hoe de wetenschap op zijn grondvesten kan schudden. In de woorden van de schrijver: "If the circle-squaring problem was unsolvable through finite algebraic methods, then the very meaning of exactness in geometry would have to be rethought and its bounds renegotiated." Onze voorgangers worstelden met dezelfde problemen als wij; dat maakt bescheiden en daarmee komen onze voorgangers dichterbij. De lessen van Descartes hadden tot de overtuiging geleid dat de algebra volledig was in relatie tot de meetkunde. De vraag die onder het gehele zeventiende eeuwse debat lag over het kwadratuurprobleem kan als volgt worden samengevat: kunnen eindige veeltermvergelijkingen willekeurig ieder meetkundig probleem beschrijven? Een probleem dat inderdaad een *thrilling* tweegbracht.

De schrijver presenteert het geheel buitengewoon helder en nauwkeurig, vele verwijzingen en annotaties zijn in het werk opgenomen. Het is dan ook een bewerking van zijn dissertatie over dit onderwerp. Het boek hoort in iedere universiteitsbibliotheek een plaats te krijgen en is mijns inziens een must zowel voor studenten wetenschapsgeschiedenis, met name in die van de wiskunde en de wijsbegeerte, als voor wiskundigen. Het is een genot om dit boek te lezen.

Wim Kleijne



C. Herbert Clemens

**Two-Dimensional Geometries
A Problem-Solving Approach**

American Mathematical Society, 2019

vii + 142 p., prijs \$89.00

ISBN 9781470447601

Dit boek is bedoeld als een eerste inleiding in de meetkunde, geschreven voor niveau eind middelbare school en begin universiteit. De opzet van de tekst is gebaseerd op het bekende motto van George Polya, wiens boek *How to solve it* een all time klassieker is voor de didactiek van wiskunde: "Mathematics, you see, is not a spectator sport. To understand mathematics means to be able to do mathematics. And what does it mean to be doing mathematics? In the first place, it means to be able to solve mathematical problems." Er staan in de 132 bladzijden van het boek van Clemens maar liefst 171 opgaven, met als doel dat men zelf flink moet oefenen. Niks mis met dit uitgangspunt.

De meetkunde hier is tweedimensionale meetkunde, te weten NG, EG, SG en HG voor Neutral, Euclidean, Spherical en Hyperbolic Geometry. Neutrale meetkunde is meetkunde met de axioma's van Euclides behalve het laatste, het parallellenpostulaat. Het zal later blijken euclidische of hyperbolische meetkunde te zijn. In hoofdstuk 2 wordt enige aandacht besteed aan de axiomatic, maar de behandeling daarvan is niet altijd even helder van opzet. We hebben een vlak met punten en lijnen, maar bij Axioma 2 blijkt er ook een afstandsbebegrip nodig. Klaarblijkelijk onderkent de schrijver mijn beginnende verwarring, want als laatste zin bij Axioma 2 staat: "This axiom and definition stuff is not as easy as it may seem!" Twee bladzijden verder lezen we: "Implicit in the axioms of neutral geometry is the existence of (a group of) rigid motions. That is, it is assumed that for any point $\hat{A}$ and each vector (i.e. direction) $\hat{V}$ emanating from $\hat{A}$, and given any second point $\hat{B}$ and any vector $\hat{W}$ emanating from $\hat{B}$, there exists a rigid motion $\hat{M}$ such that $\hat{M}$ takes $\hat{A}$ to $\hat{B}$, and direction $\hat{V}$ to direction $\hat{W}$." In de aansluitende opgave wordt gevraagd: "Give an example of a rigid motion that takes (1,2) to (3,5) and the tangent vector (1,0) emanating from (1,2) to the tangent vector (0,1) emanating from (3,5)."

Het is mij nu onduidelijk welke voorkennis bij de lezer wordt verondersteld. Bekendheid met het euclidisch coördinatenvlak? Maar als we in navolging van Descartes met coördinaten werken (en daarbij meetkunde tot algebra reduceren) zou het dan niet voor de hand liggen dat cartesische vlak in te voeren, de axioma's van Euclides als eigenschappen ervan te controleren, en de vraag te stellen of er nog andere meetkunde met die axioma's mogelijk is? Moet het begrip groep enigszins bekend zijn? Is vector en richting echt hetzelfde? En zo vraag ik me verwonderd af, waarom er nu plots overal een dakje op staat, terwijl dat bij de euclidische axioma's nog niet het geval was?

In hoofdstuk 5 wordt de oppervlakte van een bol met straal R berekend volgens de methode van Archimedes, terwijl de naam van deze gigant uit Syracuse onvermeld blijft.

Dat dakje komt terug in hoofdstuk 6 en 7. Punten van $\mathbb{R}^3$ met het standaard inwendig product $\bullet$ worden genoteerd met $\hat{X} = (\hat{x}, \hat{y}, \hat{z})$. De notatie om het inwendig product met een punt aan te geven is gebruikelijk, zeker bij de fysici, maar zo'n vetgedrukte bullet ben ik nog niet eerder tegen gekomen. De reden daarvoor zal wel zijn dat overal waar vermenigvuldigd wordt er puntjes worden gezet, bijvoorbeeld de inhoud van een piramide wordt $V = (1/3) \cdot B \cdot h$, terwijl wat mij betreft $V = Bh/3$ zou volstaan.

Lengten van krommen en oppervlakten van gebieden worden uitgelegd, en in het volgende hoofdstuk worden transformaties van enkele ruimten besproken. Die dakjes overal beginnen me nu echt te irriteren. En dan zijn we in hoofdstuk 8 halverwege het boek gekomen, waar we de vergelijking

$$K(x^2 + y^2) + z^2 = 1$$

tegenkomen, verlost van dakjes. Stellen we $K = 1/R^2$ met $R > 0$ een parameter en $\hat{x} = x$, $\hat{y} = y$, $\hat{z} = Rz$, dan hebben we het dus over de ronde bol

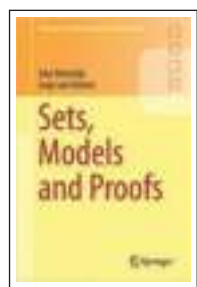
$$\hat{x}^2 + \hat{y}^2 + \hat{z}^2 = R^2,$$

met straal R in de standaard $\mathbb{R}^3$. Het is de opmaat voor wat K -meetkunde wordt genoemd: een Cartesische ruimte $\mathbb{R}^3$ met als inwendig product van de twee vectoren $V_1 = (a_1, b_1, c_1)$ en $V_2 = (a_2, b_2, c_2)$ de waarde $V_1 \bullet_K V_2 = a_1 a_2 + b_1 b_2 + c_1 c_2 / K$. In de resterende hoofd-

stukken wordt vervolgens met deze lineair algebraïsche opzet bolmeetkunde (voor $K > 0$) en hyperbolische meetkunde (voor $K < 0$) op een uniforme wijze behandeld. Al met al een elegante algebraïsche opzet voor elementaire meetkunde. De parameter $K = 1/R^2$ wordt zonder verdere toelichting de kromming van de meetkunde genoemd. Inderdaad hoe groter de straal R van een bol wordt hoe vlakker het boloppervlak lokaal wordt. Het was natuurlijk Gauss die deze K met goede reden zo als kromming definieerde, maar het is wellicht te lastig hier in deze beperkte algebraïsche setting daar meer over te zeggen.

Herbert Clemens is een uitstekend wiskundige, die zijn sporen heeft verdiend op het gebied van de complexe algebraïsche meetkunde. Ik leg wellicht wat veel zout op kleine slakjes, maar kan helaas dit huidige boek niet van harte aanraden om de eerstejaarsstudenten wiskunde wat extra gevoel voor meetkunde bij te brengen.

Gert Heckman



Ieke Moerdijk, Jaap van Oosten

Sets, Models and Proofs

Springer Undergraduate Mathematics Series

Springer, 2018

xiv + 141 p., prijs €19,61

ISBN 9783319924137

According to the preface this book is based on a course on Mathematical Logic that has been taught at the University of Utrecht for about the last twenty years. One would expect the title then to be just *Models and Proofs* but the book starts off with a chapter 'Sets', that could very well have been titled 'The Axiom of Choice' were it not for a section on cardinal numbers that leads us through the basic results on these: the result that is variously attributed to Cantor, Bernstein, Schröder, but which can already be found in notes by Dedekind of 1887; the basics on (un)countability, and the inequality $|A| < 2^{|A|}$. The rest of the chapter deals with the Axiom of Choice, its equivalents, and their uses in mathematics such as bases for vector spaces, Krull's theorem and so on.

This gives the students a succinct overview of what *choice* is about and how it affects various parts of mathematics; although it does not mention the thing we all learn in first-year analysis: the equivalence of ϵ - δ -continuity and sequential continuity.

Next comes 'Models', with a thorough discussion of languages, formulas and satisfaction. The chapter reflects the way we mostly do mathematics; we tend to (try and) prove: "if a structure satisfies ... then it satisfies ..." and this is how one formula φ is considered to be a consequence of another formula ψ : every structure that satisfies ψ must satisfy φ . The chapter gives us "what every young logician should know": compactness (using ultrafilters), substructures and elementarity, quantifier elimination, the Löwenheim-Skolem theorems, and categoricity. Not everything with equal depth but that is to be expected given the parameters of the book, and the course: one semester.

At half the length of 'Models' comes 'Proofs'. Not my favorite chapter but that is mostly because I have been used to linear

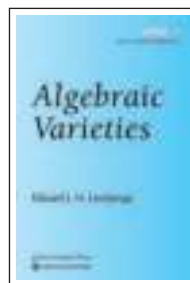
proofs when learning, using, and occasionally teaching mathematical logic. Proof trees are not for me but I assume that if one encounters them as the first method for formal derivations linear proofs will seem unwieldy. The main result of the chapter is of course Gödel's Completeness theorem: the semantic notion of consequence from the previous chapter is equivalent to the formal derivability in this one.

The book returns to 'Sets Again' in the fourth chapter to show that set theory can be treated as a theory to which the 'Models' and 'Proofs' chapters apply. The axioms are those of ZF(C) and it is shown that results from Chapter 1 and the existence of the real line can be derived from these.

The appendix offers subjects for further study, where some of the results mentioned may send a curious student down a fascinating rabbit hole or two.

I would certainly recommend this book to anyone wanting to know what Mathematical Logic is all about but I would tell them to take the historical comments with a grain of salt. That's the one complaint I have: too many of the historical 'facts' that I know something about are wrong, which then makes me doubt the other ones. But if you just ignore these you'll learn a fair amount of Mathematical Logic.

K.P. Hart



Eduard J.N. Looijenga

Algebraic Varieties Surveys of Modern Mathematics 15

International Press of Boston, 2020

x + 174 p., prijs \$48.00

ISBN 9781571463883

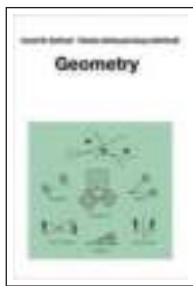
There are many ways in which one can teach a first course in algebraic geometry for graduate students (say first year master students in Europe). The teacher should give students who will continue in this direction a good motivation and background for the more advanced courses that follow the first course, as well as give the other students useful knowledge, and give all students a pleasant relation with the subject. Given that geometry and topology courses as of yet usually do not introduce their objects of study (manifolds) as topological spaces with, for every open subset, the set of functions under consideration, students have to get used to this point of view in this first algebraic geometry course. To make it not too hard, general sheaf theory and ringed spaces should be kept to a minimum. Category theory should only be used when it helps, and not for its own sake.

Another point is prerequisites from algebra. Algebraic geometry uses many techniques and results from commutative algebra, but usually students do not yet have that background. There are two solutions: teach a parallel commutative algebra course, or develop the required commutative algebra within the algebraic geometry course.

The book under review does give a pleasant, precise, almost completely self-contained introduction to the theory of algebraic varieties over arbitrary algebraically closed fields, developing

at the same time the necessary commutative algebra. First affine varieties are introduced. Then general varieties are introduced as topological spaces with a structure sheaf of functions that, locally, are isomorphic to affine varieties. This all happens in Chapter 1. Chapter 2 is about local properties of varieties: dimension, smoothness, differential forms, and a little bit of theory of sheaves of rings and sheaves of modules. In order to get to interesting results, Chapter 3 introduces projective varieties (the algebraist's notion of compact manifolds), with Grassmannians as a good example. It ends with a Bézout theorem for intersections of hypersurfaces in projective spaces. Finally, Chapter 4 is about smooth projective curves, the theorem of Riemann–Roch, and Serre duality.

Although the book is about geometry, it contains not a single figure, and neither exciting diagrams. The typesetter should have done a better job concerning line breaks. Still, I heartily recommend this book for a first course in algebraic geometry. One sees that the author has taught such a course many times, thereby optimising his notes, resulting in this book. I agree with the author that it is a good idea to use another book next to it; suggestions are given on his Utrecht home page, where the 2018–2019 version of his notes is freely available in pdf. *Bas Edixhoven*



Israel M. Gelfand, Tatiana Alekseyevskaya

Geometry

Birkhäuser, 2020
xxi + 420 p., prijs €41,41
ISBN 9781071602973

Uit de inleiding en uit reviews op internet blijkt dat dit boek bedoeld zou zijn voor leerlingen op de middelbare school. Daarmee doet het boek zichzelf enigszins te kort, want de consistente en heldere uiteenzetting van de grondslagen van de meetkunde kan iedereen met liefde voor de wiskunde bekoren. Ik althans heb dit boek met veel plezier doorgewerkt. Het is nergens echt moeilijk, de uitleg is steeds goed te volgen en vanuit elementaire principes is de stof logisch opgebouwd tot een redelijk niveau. Het boek is rijk voorzien van figuren, Exercises (met antwoord) en Problems (zonder antwoord).

De basis van de meetkunde wordt op een heldere en overzichtelijke manier behandeld. Het boek begint heel elementair met punten en lijnen. Na hierbij verrassend uitvoerig te hebben stilgestaan, voornamelijk met praktische kwesties rondom het feitelijk tekenen van lijnen en snijpunten, komen de hoeken erbij, gevolgd door driehoeken en vierhoeken. Het boek duikt iets dieper met de fascinerende Desargues-configuratie. Dit gaat als volgt. Neem twee lijnen die net niet parallel zijn. Het snijpunt van beide lijnen ligt dus ver buiten het papier. Neem vervolgens een willekeurig punt A . Met behulp van de Desargues-configuratie is het mogelijk een derde lijn te tekenen die door A en het fictieve snijpunt van de beide andere lijnen gaat.

Na het beroemde vijfde postulaat van Euclides gaat het boek nog even door over parallelle lijnen. Naast parallellogrammen en

trapezia worden driehoeken uitgebreid behandeld. De stelling van Pythagoras wordt op twee verschillende manieren bewezen en vervolgens uitgebreid naar niet-rechthoekige driehoeken. Het begrip gelijkvormigheid wordt geïntroduceerd en levert zelfs een derde bewijs voor de stelling van Pythagoras.

Het boek behandelt ook cirkels. De fraaie stelling van Ptolemaeus wordt bewezen (en ook deze stelling leidt in een bijzonder geval tot de stelling van Pythagoras). Ingeschreven en omgeschreven veelhoeken worden gebruikt om de omtrek van een cirkel, en daarmee π , te benaderen. Ten slotte gaat het boek in op het berekenen van oppervlakten van regelmatige veelhoeken. Het boek besluit met een uitgebreide woordenlijst.

Dit boek is een uitgebreide verhandeling over de principes van en enkele uitgebreidere berekeningen in de meetkunde. Het boek is buitengewoon helder, systematisch en evenwichtig van opbouw. Een tweetal minpunten. Het is jammer dat van de Problems geen uitwerking gegeven wordt, of zelfs maar een numeriek antwoord; en het is jammer dat bij een verwijzing naar een eerdere stelling of propositie geen paginanummer gegeven wordt. Nu moet er soms veel heen en weer gebladerd worden. *Jan Scholtmeijer*

Naschrift: op 22 maart 2021 is Jan Scholtmeijer plotseling overleden.



Shigeyuki Kondō

K3 Surfaces

EMS Tracts in Mathematics Vol. 32

European Mathematical Society, 2020
xiii + 236 p., prijs €78,00
ISBN 9783037192085

Dit boek is een Engelse vertaling van het Japanse origineel, aangevuld met twee extra hoofdstukken. De hoofdmoot van het boek behandelt complexe K3-oppervlakken.

Een K3-oppervlak is een enkelvoudig samenhangende tweedimensionale complexe variëteit met een nergens verdwijnende holomorfe 2-vorm. Het standaardvoorbeeld is een glad oppervlak van graad 4 in de driedimensionale projectieve ruimte. Een ander belangrijk voorbeeld is het Kummer-oppervlak, quotiënt van een complexe 2-torus onder de standaardinvolutie.

Fundamentele resultaten betreffende K3-oppervlakken zijn in de jaren 60–80 van de vorige eeuw bewezen door onder andere K. Kodaira (*Amer. J. Math.*, 1964), I.I. Pjateckiĭ-Šapiro en I.R. Šafarevič (*Izv. Akad. Nauk SSSR Ser. Mat.*, 1971), D. Burns en M. Rapoport (*Ann. Sci. École Norm. Sup. (4)*, 1975), A. Todorov (*Invent. Math.*, 1980) en ten slotte Y.-T. Siu (*Invent. Math.*, 1983). Deze resultaten resulteren in een beschrijving van de 20-dimensionale moduliruimte van K3-oppervlakken in termen van perioden ('Torelli-stellingen'). Als gevolg daarvan weet men dat alle K3-oppervlakken in elkaar te deformeren zijn en dus alle Kähler zijn en dezelfde differentieerbare structuur hebben. Dit uit de doeken te doen voor een publiek van beginnende wiskunde-onderzoekers is een van de hoofddoelen van het onderhavige boek.

De auteur heeft de nodige voorkennis op een overzichtelijke en bondige manier bij elkaar gezet in de hoofdstukken 1–3 en 5. Deze voorkennis omvat heel uiteenlopende zaken. In hoofdstuk 1 en 2 worden algebraïsche benodigdheden besproken: roostertheorie ontwikkeld door V. Nikulin (*Math. USSR Izv.*, 1980) en spiegelingsgroepen in hyperbolische ruimtes ontwikkeld door É. Vinberg (*Uspekhi Mat. Nauk* 40, 1985) en N. Bourbaki (*Groupes et algèbres de Lie*, Chap. IV, Hermann, Paris, 1968). Dan volgt in hoofdstuk 3 een korte uiteenzetting over complexe oppervlakken, hun classificatie en de plaats van K3-oppervlakken hierin, zoals voornamelijk door K. Kodaira beschreven. Zie hiervoor bijvoorbeeld het boek *Compact Complex Surfaces* van W. Barth, K. Hulek, A. van de Ven en de recensent (Springer, 2004).

Ter voorbereiding van de centrale Torelli-stellingen die in hoofdstuk 6 en 7 aan de orde komen, worden Kummer-oppervlakken aan het eind van hoofdstuk 4 uitgebreid besproken en de periodesgebieden die hierbij een rol spelen in hoofdstuk 5. Het bewijs volgt de ‘klassieke’ weg uit de geciteerde werken. Een wezenlijk ander bewijs vindt men in het recente boek *Lectures on K3 Surfaces* van D. Huybrechts (Cambridge University Press, 2016).

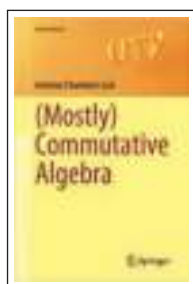
Vervolgens komen in hoofdstukken 8 en 9 een tweetal toepassing aan de orde: de structuur van automorfismen van K3-oppervlakken en, vervolgens, Enriques-oppervlakken en hun moduli. De laatste hebben een K3 als tweevoudige onvertakte overdekking. Dit biedt de mogelijkheid moduli van Enriques-oppervlakken met die van K3-oppervlakken te verbinden. De laatste paragraaf van hoofdstuk 9 is gewijd aan een fraaie familie van Enriques-oppervlakken die via de Hessiaan van kubieken in de driedimensionale projectieve ruimte worden geconstrueerd. Hierbij speelt een interessante configuratie van tien lijnen een rol met de symmetrie van de Petersen-graaf. In hoofdstuk 10 worden verbanden bekeken

tussen vlakke vierdegraadskrommen, zeg $f = 0$, en del Pezzo-oppervlakken van de vorm $t^4 = f$. Deze verbanden leiden tot een beschrijving van de moduli-ruimte van vlakke vierdegraadskrommen zoals in het artikel ‘A complex hyperbolic structure for the moduli space of curves of genus three’ (*J. Reine Angew. Math.*, 2000) van de auteur van dit boek. Daarna, in hoofdstuk 11, wordt het volgende onverwachte resultaat van S. Mukai (*Invent. Math.*, 1988) bewezen: elke eindige symplectische automorfismengroep van een K3-oppervlak is bevat in de Mathieu-groep M_{23} . Het hier gegeven bewijs is afkomstig van S. Kondō zelf. Het gebruikt voornamelijk roostertechnische overwegingen en verschilt daarmee van het oorspronkelijke bewijs. In het afsluitende hoofdstuk wordt aangetoond dat de automorfismengroep van het ‘generieke’ Kummer-oppervlak door klassiek bekende involuties wordt voortgebracht. Het Leech-rooster, een unimodulair rooster van rang 24, speelt hierbij een centrale rol.

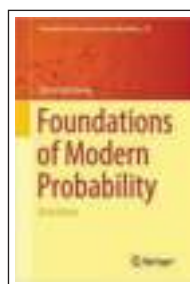
Dit boek is, zoals in de inleiding ervan staat, geschikt voor beginnende algebraïsch meetkundigen. Het bevat veel sprekende voorbeelden en ook enkele oefeningen. Toch komt er een verscheidenheid aan onderwerpen aan de orde, van basale, klassieke zaken betreffende moduli van K3- en Enriques-oppervlakken, tot verrassende meetkunde van specifieke oppervlakken en krommen in de laatste drie hoofdstukken. Deze laatste maken gebruik van klassieke constructies en modernere roostertechnieken die kunstig met elkaar verweven zijn. Ter vergelijking, het bij het begin van deze bespreking genoemde boek van D. Huybrechts dat eerder door mij in deze rubriek besproken werd, is voor meer ervaren wiskundigen geschreven en bevat weliswaar aanzienlijk meer materiaal, onder andere over karakteristiek p -onderwerpen, maar is technischer en compacter geschreven.

De European Mathematical Society heeft dit boek van S. Kondō in een prettig leesbare en verzorgde vorm uitgegeven. *Chris Peters*

Recent verschenen publicaties. Als u een van deze boeken wilt bespreken of als u suggesties heeft voor andere boeken voor deze rubriek, laat dit dan per e-mail weten aan reviews@nieuwarchief.nl.



Antoine Chambert-Loir
(Mostly) Commutative Algebra
Springer, 2021
ISBN 9783030615949
springer.com/9783030615949



Olav Kallenberg
Foundations of Modern Probability
Springer, 2021
ISBN 9783030618704
springer.com/9783030618704



Keith Kendig
**A Gateway to Number Theory
Applying the Power of Algebraic Curves**
MAA Press, 2021
ISBN 9781470456221
bookstore.ams.org/dol-57



Philippe Zaouati
Perelman's Refusal: A Novel
American Mathematical Society, 2021
ISBN 9781470463045
bookstore.ams.org/mbk-137

Problemen

| Problem Section

This Problem Section is open to everyone; everybody is encouraged to send in solutions and propose problems. Group contributions are welcome. We will select the most elegant solutions for publication. For this, solutions should be received before **15 July 2021**. The solutions of the problems in this issue will appear in the next issue.

Problem A (proposed by Onno Berrevoets)

A hot frying pan contains 2^{2021} potato slices. Each time we toss the slices, each slice has a chance of 0.5 to land on its other side. These probabilities are individually independent. How often do we need to toss the slices so that with probability at least 0.5 all slices will have lain on both sides?

Problem B (folklore)

- Five young ladies in a school walk in a line for ten days in succession. It is required to arrange them daily so every pair of ladies occupies all ten possible (pairs of) positions in this line. More precisely, it is required to find ten permutations $\pi_1, \dots, \pi_{10}$ of $\{1, 2, 3, 4, 5\}$ such that for all $i \neq j \in \{1, 2, 3, 4, 5\}$, and for all $i' \neq j' \in \{1, 2, 3, 4, 5\}$ there is a $k \in \{1, 2, \dots, 10\}$ such that $\{i', j'\} = \{\pi_k(i), \pi_k(j)\}$. Is this possible? If so, produce such permutations, and if not, prove so.
- Replace 5 by n (with $n \in \{4, 6, 7, 8, 9\}$) and replace 10 by $\binom{n}{2}$ in the above problem. For which of these values of n does a set of permutations as in the previous part exist?

Problem C (proposed by Onno Berrevoets)

Let R be a commutative ring, and consider the set X of R -ideals J with $J^2 \neq J$. Suppose that I is a maximal element of X (with respect to inclusion). Prove that I is a maximal ideal of R .

Edition 2021-1 We received solutions from Rik Bos, Pieter de Groen, Nicky Hekster, Marnix Klooster and Rutger Wessels.

Problem 2021-1/A (proposed by Daan van Gent and Hendrik Lenstra)

Let G and A be groups, where G is denoted multiplicatively and where A is abelian and denoted additively. Assume that A is 2-torsion-free, i.e. it contains no element of order 2.

Suppose that $q: G \rightarrow A$ is a map satisfying the parallelogram identity: for all $x, y \in G$ we have

$$q(xy) + q(xy^{-1}) = 2q(x) + 2q(y). \quad (1)$$

Prove that for all $x, y \in G$ we have $q(yx^{-1}y^{-1}) = 0$.

Solution We received solutions from Rik Bos, Nicky Hekster, Marnix Klooster, and Rutger Wessels. The solution provided uses the one by Nicky.

We let 1 denote the identity element of G , and 0 the identity element of A . Substituting $y = 1$ yields $2q(1) = 0$, whence $q(1) = 0$ since A is 2-torsion free. Substituting $x = 1$ in (1) gives

$$q(y) = q(y^{-1}) \quad \text{for all } y \in G. \quad (2)$$

In the case $x = y$, formula (1) implies

$$q(x^2) = 4q(x) \quad \text{for all } x \in G. \quad (3)$$

By switching the x and y in (1) we obtain $q(yx) + q(yx^{-1}) = 2q(y) + 2q(x)$, so using (2) we get $q(xy) + q(xy^{-1}) = q(xy) + q((yx^{-1})^{-1}) = q(xy) + q(yx^{-1}) = q(yx) + q(yx^{-1})$, hence

$$q(xy) = q(yx) \quad \text{for all } x, y \in G. \quad (4)$$

Applying (1) with x replaced by xy we see that

$$q(xy^2) = 2q(xy) - q(x) + 2q(y) \quad \text{for all } x, y \in G. \quad (5)$$

Next we claim that

$$q(xy^2x) = 4q(xy) \quad \text{for all } x, y \in G. \quad (6)$$

Indeed,

$$\begin{aligned} q(xy^2x) &\stackrel{(4)}{=} q(x^2y^2) \stackrel{(5)}{=} 2q(x^2y) - q(x^2) + 2q(y) \stackrel{(4)(3)}{=} 2q(yx^2) - 4q(x) + 2q(y) \\ &\stackrel{(5)}{=} 2(2q(yx) - q(y) + 2q(x)) - 4q(x) + 2q(y) \stackrel{(4)}{=} 4q(xy). \end{aligned}$$

It follows that

$$q(xy x^{-1} y^{-1}) = q((xy)(yx)^{-1}) \stackrel{(1)}{=} 2q(xy) + 2q(yx) - q(xy^2x) \stackrel{(4)(6)}{=} 4q(xy) - 4q(xy) = 0.$$

Problem 2021-1/B (folklore)

Prove that every Jordan curve (i.e. every non-self-intersecting continuous loop in the plane) contains four points A, B, C, D such that $ABCD$ forms a rhombus.

Solution We received a partial solution from Pieter de Groen. This is a sketch of a solution that is largely based on that, and will work in many simple cases. A full proof by Mark Nielsen can be found at <https://link.springer.com/content/pdf/10.1007/BF01265340.pdf>. Even more generally, Arthur Milgram proved in 1939 (published in PNAS in 1943 as ‘Some Topologically Invariant Metric Properties’) that for all $n \geq 3$, every Jordan curve contains an inscribed equilateral n -gon. It remains an open problem whether any Jordan curve contains an inscribed square. This problem is known by several names, such as the square peg problem, the inscribed square problem, or the Toeplitz’ conjecture.

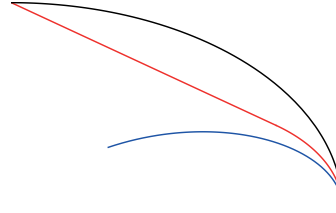
Let J be a Jordan curve, i.e. a non-self-intersecting continuous loop $J: [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}^2$. We write $J(t) = (x(t), y(t))$. Without loss of generality, we may assume that $J(0) = (0, 0) = J(1)$. Let $|J(t)| = \sqrt{x(t)^2 + y(t)^2}$ be the distance from $J(t)$ to the origin. Let m be the absolute maximum of $|J(t)|$, and let $t_m \in (0, 1)$ such that $|J(t_m)| = m$. Since J is continuous, for every $0 < r < m$, the equation $|J(t)| = r$ has a solution on both $(0, t_m)$ and $(t_m, 1)$. Let $S(r) := \{J(t) \mid |J(t)| = r, t \in [0, t_m]\}$ and let $S'(r) := \{J(t) \mid |J(t)| = r, t \in [t_m, 1]\}$. The union S of the sets $S(r)$ forms a closed, simply connected set (this being the image of the restriction of J to $[0, t_m]$), and so does the union S' of the sets in $S'(r)$.

Given the origin $A := (0, 0)$ and two distinct points $B = J(s_1)$, $C = J(s_2)$ at equal distance from the origin, the points A, B, C and $D := B + C$ are the vertices of a rhombus. In particular, for any $r \in (0, m]$, any pair of elements $B \in S(r)$ and $C \in S'(r)$ defines a rhombus with vertices A, B, C on J and top-vertex $D = B + C$.

We let $T(r) = \{B + C \mid B \in S(r), C \in S'(r)\}$ and $T = \bigcup_{r \in (0, m]} T(r)$. The set T is connected. Namely, the union of the sets $S(r) \times S'(r) \subset \mathbb{R}^4$ is connected, and T is the image of a continuous map with the former union as its domain. Note that there are some subtleties involved in showing connectedness of the union of the sets $S(r) \times S'(r)$; if one wants to walk from (B, C) to (B', C') , we cannot simply walk from B to B' and take the same path from C to C' , since for example on one path, the distance to the origin may be increasing while on another path, it might sometimes decrease. One may need to backtrack on occasion. We will not give a full proof here (and there may be an issue with sufficiently complicated Jordan curves).

We show that T contains a point in the exterior of J . Consider the curve near $(x(t_m), y(t_m))$. Then either there is a closed interval $[a, b]$ with $a \neq b$ containing t_m such that for all $a \leq t \leq b$ the distance from $(x(t), y(t))$ to $(0, 0)$ is equal to m , or no such interval exists. In both cases, for all $\epsilon > 0$, there is some $r \leq r_m$ such that there exist $t_1 \in S(r)$, $t_2 \in S'(r)$ with $t_1 \neq t_2$ such that the distance from $(x(t_1), y(t_1))$ to $(x(t_m), y(t_m))$ is less than ϵ . For ϵ sufficiently small, letting $B = (x(t_1), y(t_1))$ and $C = (x(t_2), y(t_2))$ yields $|D| > m$, so D lies in the exterior of the curve. If we can also find an element of T that is in the interior of the curve, we will be done, since by connectedness, T must intersect the curve somewhere.

The problem is that this does not necessarily happen; here is an example in which this is not the case:



The Jordan curve is the union of the top black path and the middle red path. Any rhombus with three vertices on the black path $(\cos(t), \sin(t))$ for $0 \leq t \leq \pi/2$ including the point $(1,0)$ will have its fourth vertex on the bottom blue path, parameterized by $(\cos(2t) - (\cos(t) - 1), \sin(2t) - \sin(t))$ for $0 \leq t \leq \pi/4$. The red path only intersects the blue path at $(1,0)$. The round part of the red path is part of the circle centered at $(0.5, 0)$ with radius 0.5 .

To fix this, we may need to choose a different starting point. Note that our argument that T contained a point outside of the curve was independent of our starting point A , so it now suffices to find any rhombus with three points on J such that its fourth point lies in the interior of J . By the Jordan curve theorem, the interior of J (is a well-defined concept and) is non-empty. Pick any point P in the interior. Since J is compact, there is a point B' at minimal positive distance from P . The line passing through BP intersects J in some other point C' such that P lies on the line segment $B'C'$. Again by compactness, we may assume the line segment $B'C'$ does not intersect J in any points other than B' and C' . Without loss of generality, P is the midpoint of this line segment. The perpendicular bisector of $B'C'$ intersects J again; let A be a point of this intersection at minimal distance to P . If there are two such points, we have found a rhombus. Otherwise, by choosing A to be the origin, we find $D' = B' + C'$ lies in the interior of J (since otherwise, there would be a point on the bisector closer to P that is also in J). The previous part of the argument now shows that the set T contains a point D that lies on J . This concludes the proof.

Problem C (proposed by Daan van Gent)

A *directed binary graph* is a finite vertex set V together with maps $e_1, e_2: V \rightarrow V$. (The edges are formed by the ordered pairs $(v, e_i(v))$ with $i \in \{1, 2\}$.)

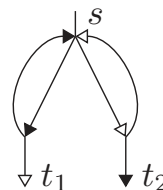
For $a, b, c, d \in \mathbb{Z}_{>0}$, an $(a:b)$ -to- $(c:d)$ *distributive graph* is a directed binary graph G together with distinct vertices $s, t_1, t_2 \in V$ such that G interpreted as a Markov chain has the following properties:

1. For all $v \in V$ the edges $(v, e_1(v))$ have transition probability $\frac{a}{a+b}$ and edges $(v, e_2(v))$ have probability $\frac{b}{a+b}$.
2. It has the initial state s with probability 1.
3. Both t_1 and t_2 connect to themselves, meaning $e_i(t_j) = t_j$ for all $i, j \in \{1, 2\}$.
4. It has a unique stationary distribution of t_1 with probability $\frac{c}{c+d}$ and t_2 with probability $\frac{d}{c+d}$.

Show that for all $a, b, c, d \in \mathbb{Z}_{>0}$ there exists an $(a:b)$ -to- $(c:d)$ distributive graph.

Solution We received no submissions from readers. This solution was provided by Daan van Gent.

First we construct $(a:b)$ -to- $(1:1)$ distributive graph for all a and b :



By 'substitution' it suffices to construct a $(1:1)$ -to- $(c:d)$ distributive graph for all c and d . Let $k \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$ such that $c + d \leq 2^k$. Make a complete binary tree with root s and such that there are 2^k leaves of equal distance to s . Connect c of those to t_1 and d of those to t_2 and connect the remaining $2^k - c - d$ to s .