

Inhoud | Contents

Artikelen | Features

- 9 **Evenement | Event**
De oorsprong van ergodentheorie
Frank den Hollander, Charlene Kalle
- 14 **Evenement | Event**
Life and work of Hillel Furstenberg *Benjamin Weiss*
- 21 **Evenement | Event**
Gregory Margulis and the Oppenheim conjecture:
some random reflections *Shrikrishna G. Dani*
- 28 **Evenement | Event**
Hallo, horen jullie mij? De kortste NWD
Rob van Oord
- 33 **Geschiedenis | History**
The map projection of portolan charts *Roel Nicolai*
- 42 **Column | Column**
The Statistics Scene *Piet Groeneboom*
- 47 **Geschiedenis | History**
De opkomst van de Groningse wis-, natuur- en
sterrenkunde in de negentiende eeuw
Henk Broer, Henk de Snoo
- 59 **In Memoriam | Obituary**
Willem Kuijk: Kleurrijke stimulerende algebraï-
cus *Teun Koetsier*
- 61 **Boekbespreking | Book Review**
Kuijks 'complementaristische' filosofie van de
wiskunde *Teun Koetsier*

Rubrieken | Departments

- 3 Redactioneel *Robbert Fokkink*
- 4 Agenda *Nikki Levering*
- 6 Nieuws *Nikki Levering*
- 31 Proof by example: Svetlana Dubin-
kina *Clara Stegehuis, Francesca Arici*
- 45 Het keerpunt van Jan Kalden
Daan Mulder
- 63 In de verdediging *Nicolaos Starreveld*
- 66 Boekbesprekingen
Hans Cuypers, Hans Sterk
- 71 Problemen
Onno Berrevoets, Rob Eggermont, Daan van Gent

Uitgelicht



In dit nummer veel aandacht voor de Abel-prijs: eerst een kort historisch overzicht over ergodentheorie, gevolgd door twee artikelen over de winnaars van 2020, Hillel Furstenberg en Gregory Margulis.



Rob van Oord nam deel aan de 'mini-NWD', een korte online editie van de Nationale Wiskunde Dagen.

Colofon

Het Nieuw Archief voor Wiskunde is een uitgave van het Koninklijk Wiskundig Genootschap en verschijnt vier maal per jaar. Het tijdschrift richt zich op eenieder die zich beroepsmatig met wiskunde bezighoudt, als academisch of industrieel onderzoeker, student, leraar, journalist of beleidsmaker. Het stelt zich ten doel te berichten over ontwikkelingen in de wiskunde in het algemeen en in de Nederlandse wiskunde in het bijzonder.

ISSN 0028-9825

Adres

Nieuw Archief voor Wiskunde
Centrum Wiskunde & Informatica
Postbus 94079, 1090 GB Amsterdam
tel. 020-5924288
redactie@nieuwarchief.nl
www.nieuwarchief.nl

Hoofredactie

Raf Bocklandt (r.r.j.bocklandt@uva.nl)
Robbert Fokkink (r.j.fokkink@tudelft.nl)

Eindredactie/Bladmanager

Fred Drissen (fred@nieuwarchief.nl)

Redactie

Francesca Arici (UL), Viktor Blåsjö (UU), Hans Cuypers (TU/e), Teun Koetsier (VU), Nikki Levering (UvA), Daan Mulder, Nicolaos Starreveld (UvA), Clara Stegehuis (UT), Hans Sterk (TU/e), Mark Timmer (UT)

Problemenrubriek (problems@nieuwarchief.nl)

Onno Berrevoets, Rob Eggermont en Daan van Gent

Bureau redactie

Anne van Grinsven, Claartje Ottens

Illustraties

Ryu Tajiri

Vormgeving

Susanne Laws (omslag, begeleiding binnenwerk)
Kitty Molenaar (ontwerp)

Druk

Veldhuis Media

Advertenties

advertenties@nieuwarchief.nl

Koninklijk Wiskundig Genootschap

www.wiskgenoot.nl

Platform Wiskunde Nederland

www.platformwiskunde.nl

European Mathematical Society

www.euro-math-soc.eu

International Mathematical Union

www.mathunion.org

Koninklijk Wiskundig Genootschap

Het Koninklijk Wiskundig Genootschap (KWG) is een landelijke vereniging van beoefenaars van de wiskunde. In 1778 opgericht onder de zinspreuk: 'Een onvermoeide arbeid komt alles te boven' is het 's werelds oudste nationale wiskundegenootschap. Leden ontvangen het Nieuw Archief voor Wiskunde als onderdeel van hun lidmaatschap.

Bestuur

Barry Koren (TU/e, voorzitter), Wioletta Ruszel (TUD, penningmeester), Marie-Colette van Lieshout (CWI, secretaris), Danny Beckers (VU), Theo van den Bogaart (HU), Sonja Cox (UvA), Marije Elkenbracht (ABN AMRO), Michael Müger (RU), Willem Jan Palenstijn (CWI), Jan Wiegerinck (UvA).

Secretariaat

Koninklijk Wiskundig Genootschap, CWI
Postbus 94079, 1090 GB Amsterdam
wiskgenoot@wiskgenoot.nl

Ledenadministratie KWG / Abonnementen

admin@wiskgenoot.nl, tel. 020-5924008
Wijzigingen of opzegging kunt u ook doorgeven door in te loggen op www.wiskgenoot.nl.

Contributie

Tarieven per jaar (bij betaling per automatische incasso krijgt u € 2,50 korting):

- gewoon lid: € 92,50
 - reciprociteitslid: € 72,50
 - gepensioneerden en werklozen: € 47,50
 - aio's, oio's, studenten: € 37,50 (max. 4 jaar)
 - lid zonder Nieuw Archief: € 52,50
- Studenten en pas afgestudeerden kunnen een jaar lang gratis lid worden.

Voor verzending van het Nieuw Archief naar het buitenland wordt een portotoeslag van € 10 in rekening gebracht.

Instituten in Nederland en buitenland kunnen zich abonneren op het Nieuw Archief voor Wiskunde voor € 100 (Nederland), € 110 (Europa) of € 112,50 (buiten Europa).

Members of foreign societies

Members of *SIAM*, the *Société Mathématique de France*, the *Gesellschaft für Angewandte Mathematik und Mechanik*, the *Deutsche Mathematiker-Vereinigung*, and of the *American, Australian, Belgian, Indian, London, Spanish, and South-African Mathematical Societies* living outside of the Netherlands pay € 72,50 instead of the full membership fee of € 92,50 a year. Conversely, these foreign societies, as well as the *VvS+OR* and the *NVORWO*, have reduced membership fees for KWG members. A postage charge of € 10 is added for members living abroad but in Europe, and a charge of € 12,50 for members living outside of Europe.

Exchange subscriptions

Koninklijk Wiskundig Genootschap Library
Centrum Wiskunde & Informatica
P.O. Box 94079, NL-1090 GB Amsterdam
KWG-exchange@cw.nl

Informatie voor auteurs

Kopij

Kopij dient per e-mail te worden aangeboden aan kopij@nieuwarchief.nl. Voor meer informatie en auteursinstructies zie www.nieuwarchief.nl.

Volgende nummers

nummer	maand	verschijnen	deadline kopij
22(2)	juni	2021	verstrekken
22(3)	september	2021	01-05-2021
22(4)	december	2021	01-08-2021
23(1)	maart	2022	01-11-2021

Instituuts- en bedrijfsleden

De publicaties van het KWG worden mede mogelijk gemaakt door de bijdragen van de volgende instituten en bedrijven.



Centrum Wiskunde & Informatica



Universiteit van Amsterdam



Vrije Universiteit Amsterdam



Rijksuniversiteit Groningen



Universiteit Leiden



Radboud Universiteit Nijmegen



Universiteit Utrecht



Technische Universiteit Delft



Technische Universiteit Eindhoven



Universiteit Twente



Elsevier



ORTEC

Op het omslag

Portolaankaarten, middeleeuwse zeekaarten van de Middellandse en Zwarte Zee, waren ondanks de beperkte kennis en meetinstrumenten in die tijd al erg nauwkeurig. Lees het artikel van Roel Nicolai op pagina 33. [Foto: een portulaan van Jacobus Russus uit Messina, Nationaal Archief.]

Koninklijke prijs

Dit nummer staat in het teken van de 17de Abelprijs, die is gewonnen door Hillel Furstenberg en Gregory Margulis. Een overzicht van hun leven en werk wordt gegeven door Shrikrishna G. Dani en Benjamin Weiss. Frank den Hollander en Charlene Kalle gaan terug naar de oorsprong van de ergodentheorie, de tak van wiskunde waar Furstenberg en Margulis fundamentele bijdragen aan hebben geleverd.

De 17de Abelprijs had de 117de prijs kunnen zijn, want al in 1902, het jaar van Abels honderdste verjaardag, waren er vergevorderde plannen om de prijs in het leven te roepen. Oscar II, koning van Zweden en Noorwegen, stond garant voor het prijzengeld. Hij was een liefhebber van wiskunde, had het zelf gestudeerd, en had ruim tien jaar eerder een wiskundeprijsvraag georganiseerd ter gelegenheid van zijn zestigste verjaardag. Die prijsvraag was gewonnen door Henri Poincaré met een artikel dat de basis legde voor de theorie van dynamische systemen. Een van de vele fundamentele resultaten uit dat werk, later gegeneraliseerd door Furstenberg, is de recurrentiestelling, die zegt dat je altijd nog een tweede kans krijgt, als je maar lang genoeg wacht. In het geval van de Abelprijs, duurde dat dus een eeuw.

In 1902 gooide de oplopende spanning tussen Noorwegen en Zweden roet in het eten. De twee landen waren destijds verbonden in een unie, vergelijkbaar met het huidige verband tussen Schotland en Engeland. Het breekpunt werd uiteindelijk de diplomatieke dienst. Noorwegen eiste eigen vertegenwoordigers in het buitenland en koning Oscar II, die ging over de ambassadeurs, weigerde dat. Daarop besloot het Noorse parlement dat “kongen har ophørt at fungere som norsk konge”. Zo verdween wiskundeliefhebber Oscar II uit beeld en was de Abelprijs van de baan.

Nu zou je denken dat Noorwegen na zo'n stevige anti-koninklijke onafhankelijkheidsverklaring zichzelf tot republiek zou uitroepen, maar zo ver ging men niet. Er werd een Deense prins gevonden die de functie van koning wel op zich wilde nemen. Enigszins aarzelend, want hij was nogal platzak. Een ruime hofhouding zat er niet in en een Abelprijs al helemaal niet. Daarom werd het idee een eeuw lang in de ijskast gezet. Nadat het Ekofisk-olieveld werd ontdekt, speelde geld geen rol meer en was het een kwestie van wachten. In Abels tweehonderdste geboortjaar zag de prijs dan eindelijk het licht. Vanaf het begin halen de winnaars de voorpagina's van de wereldpers.

Toonaangevende prijzen hebben drie kenmerken: een aansprekende naamgever, een mooie ceremonie, een royaal geldbedrag. Nederland heeft met de Brouwermedaille een aansprekende naamgever, maar de ceremonie is sober en een geldbedrag ontbreekt. Winnaars krijgen een oorkonde. Zelfs de landelijke pers wordt maar met moeite gehaald. Er is dus wel enige verbetering mogelijk. Onze koning geeft acte de présence bij verschillende prijsuitreikingen: de Erasmusprijs, de prijs voor de Vrije Schilderkunst, de prins Clausprijs. De Brouwermedaille past prima in dat rijtje. Is het misschien mogelijk om de ceremonie te verplaatsen naar het Paleis op de Dam? René Descartes heeft er overnacht en Johannes Hudde was er burgemeester. Het is een locatie met een wiskundetintje. Het KWG zou eens een balletje op moeten gooien over een koninklijke Brouwermedaille. ❦

Agenda

| Upcoming Events

Tot eind mei 2021

□ Webcursus afstandsleren in de wiskunde

Webcursus 'Tools voor digitaal lesgeven in de wiskunde' over de mogelijkheden binnen de digitale didactiek en het gebruik van webapplicaties als Desmos, H5P en GeoGebra.

plaats online

info mathelo.net

maart 2021

11 maart 2021

□ Speed Dates with Industry

Onderdeel van de NMC 2021 Series, waarin bedrijven kunnen speeddaten met promovendi en andere belangstellende deelnemers.

plaats online

info mathematischcongres.nl

12 maart 2021

□ Tweede ronde Nederlandse Wiskunde Olympiade

De tweede ronde van de Nederlandse Wiskunde Olympiade speelt zich af op de universiteiten.

plaats [universiteiten van Nederland](http://universiteiten.van.nederland)

info wiskundeolympiade.nl

12 maart 2021

□ Nationale Rekencoördinator Dag

Dag voor rekencoördinatoren en leerkrachten, waarop het rekenonderwijs van de basisschool centraal staat.

plaats Utrecht

info nr.cd.sites.uu.nl

18 maart 2021

□ W4 Kangoeroe

WereldWijdeWiskundeWedstrijd voor basis- en middelbare scholieren.

plaats op eigen scholen

info w4kangoeroe.nl

18 maart 2021

□ Annual Meeting Vereniging voor Statistiek en Operations Research (VVSOR)

Jaarlijkse bijeenkomst van de Vereniging voor Statistiek en Operations Research, met als thema het modelleren van de spreiding van COVID-19.

plaats online

info vvsor.nl

22–26 maart 2021

□ Graph Decompositions: Small Width, Big Challenges

Workshop, mede georganiseerd door Erik Jan van Leeuwen (UU).

plaats [Lorentz Center@Oort, Leiden](mailto:Lorentz.Center@Oort.Leiden)

info lorentzcenter.nl

24 maart en 23 juni 2021

□ Grote Rekendag 'Op rekenreis!'

Dag voor alle basisscholen die helemaal in het teken staat van rekenen. Dit jaar zijn er twee data gepland, zodat elke school de datum kan kiezen die het beste in het jaarrooster past.

plaats [basisscholen Nederland en Vlaanderen](http://basisscholen.Nederland.en.Vlaanderen)

info groterekendag.nl

april 2021

6–7 april 2021

□ Plenaire lezingen en parallelsessies NMC

Dit jaar vindt het jaarlijkse Nederlands Mathematisch Congres online plaats, verspreid over meerdere data, de zogenaamde 'NMC 2021 Series'.

plaats online

info mathematischcongres.nl

9 april 2021

□ Leve de wiskunde!

Congres voor wiskundedocenten. Wetenschappers die verbonden zijn (geweest) aan de UvA geven lezingen over hun werk in de wiskunde.

plaats online

info betapartners.nl

9–15 april 2021

□ European Girls' Mathematical Olympiad

Europese wiskundewedstrijd speciaal voor meisjes.

plaats Koetaisi, Georgië

info egmo.org

12 april 2021

□ Feilloos Veilen – de Nobelprijs voor Economie verklaard

Lezing van Jean-Jacques Herings (UM) over veiling- en speltheorie, en de bijdragen hieraan van Nobelprijswinnaars Milgrom en Wilson.

plaats Theater Diligentia, Den Haag

info natuurwetenschappen-diligentia.nl

Suggesties voor deze agenda zijn welkom.

Redacteur: Nikki Levering

agenda@nieuwarchief.nl

mei 2021

17–21 mei 2021

□ Multidimensional Continued Fractions and Euclidean Dynamics

Workshop, mede georganiseerd door Evgeny Verbitskiy (UL).

plaats Lorentz Center@Snellius, Leiden

info lorentzcenter.nl

20 mei 2021

□ Uitreiking KWG PhD-prijs

De uitreiking van de KWG PhD-prijs. Jaarlijkse prijs van het KWG oor het best gepresenteerde promotieonderzoek binnen de wiskunde. Onderdeel van de NMC 2021 Series.

plaats online of op locatie

info mathematischcongres.nl

20 mei 2021

□ Maatschappelijk-technologische vraagstukken in het bèta-onderwijs

Seminar voor lerarenopleiders STEM (wiskunde/rekenen en natuurwetenschappen/techniek).

plaats online

info elbd.sites.uu.nl

21 mei 2021

□ ECENT-ELWier conferentie

Jaarlijkse conferentie voor lerarenopleiders STEM (wiskunde/rekenen en natuurwetenschappen/techniek).

plaats online

info elbd.sites.uu.nl

25–28 mei 2021

□ Fixed-Parameter Computational Geometry III

Workshop, mede georganiseerd door Mark de Berg (TU/e) en Hans Bodlaender (UU).

plaats Lorentz Center@Oort, Leiden

info lorentzcenter.nl

juni/juli 2021

7–9 juni 2021

□ Workshop YEQT XIV: Load Balancing and Scheduling for Distributed Service Systems

Veertiende editie van de Young European Queueing Theorists (YEQT) workshop.

plaats Technische Universiteit Eindhoven

info eurandom.nl

14–24 juli 2021

□ International Mathematical Olympiad (IMO)

Internationale wiskundecompetitie voor middelbare scholieren.

plaats Sint Petersburg, Rusland

info imo-official.org

19–23 juli 2021

□ Metrics in Multiparameter Persistence

Lorentz workshop, mede georganiseerd door Magnus Bakke Botnan (VU).

plaats Lorentz Center@Snellius, Leiden

info lorentzcenter.nl

26–30 juli 2021

□ Working Groups for Women in Operator Theory

Lorentz workshop, mede georganiseerd door Francesca Arici (RU).

plaats Lorentz Center@Oort, Leiden

info lorentzcenter.nl

augustus 2021

2–6 augustus 2021

□ Non-reversible Markovian Monte Carlo

Lorentz workshop, mede georganiseerd door Joris Bierkens (VU).

plaats Lorentz Center@Oort, Leiden

info lorentzcenter.nl

16–26 augustus 2021

□ Summer School Mathematics Education

Internationale Summer School over de recente ontwikkelingen op het gebied van wiskundeonderwijs en het onderzoeken van wiskundeonderwijs.

plaats Universiteit Utrecht

info utrechtsummerschool.nl

27–28 augustus 2021 en 3–4 september 2021

□ Vakantiecursus 2021

Vakantiecursus van PWN voor leraren en studenten van lerarenopleidingen en voor andere belangstellenden. Dit jaar is het thema ‘Stangenmeetkunde’.

plaats CWI Amsterdam en TU Eindhoven

info platformwiskunde.nl/vakantiecursus

30 augustus – 3 september 2021

□ A Topological Theory of Tangent Distributions

Lorentz workshop, mede georganiseerd door Álvaro del Pino Gómez (UU), Federica Pasquotto (UL) en Marcello Seri (RUG).

plaats Lorentz Center@Snellius, Leiden

info lorentzcenter.nl

30 augustus – 3 september 2021

□ Workshop YEP XVII: Interacting Particle Systems

Zeventiende editie van de Young European Probabilists (YEP) workshop.

plaats online of gedeeltelijk online

info eurandom.nl

september 2021

17 september 2021

□ Finale Nederlandse Wiskunde Olympiade

Nationale finale van de wiskundeolympiade voor middelbare scholieren.

plaats Technische Universiteit Eindhoven

info wiskundeolympiade.nl

24 september 2021

□ Onderwijs meets onderzoek

Symposium waarbij wiskundedocenten en onderzoekers in wiskunde educatie kijken naar de vraag wat educatie zelf en het onderzoek naar educatie voor elkaar kunnen betekenen.

plaats nog te bepalen

info mathematischcongres.nl

26–29 september 2021

□ International Conference on Computational Logistics (ICCL2021)

Conferentie voor wetenschappers in operations research, business analytics en artificial intelligence.

plaats online en/of Universiteit Twente

info iccl2021.nl

Nieuws

| News

Stieltjesprijs voor Bente Bakker, NWO-prijs voor Kateřina Staňková

In de eerste virtuele bijeenkomst van de NMC 2021 Series (verspreid programma van het Nederlands Mathematisch Congres) is de Stieltjesprijs 2019–2020, voor het beste wiskundige proefschrift verschenen in het academisch jaar 2019–2020, uitgereikt aan Bente Bakker. Het proefschrift, waarmee Bente Bakker is gepromoveerd aan de Vrije Universiteit Amsterdam onder begeleiding van professor Jan Bouwe van den Berg en professor Rob van der Vorst, is getiteld *Nonlinear Waves in Local and Nonlocal Media – A Topological Approach*. In haar proefschrift analyseert Bente Bakker hoe methodes uit de algebraïsche topologie gebruikt kunnen worden in het bestuderen van oplossingen voor een grote groep reactie-diffusie vergelijkingen met nonlokale interacties. Hiervoor bestudeerde Bente Bakker onder andere *Carleman estimates*, waarvoor ze heeft aangetoond dat deze kunnen worden afgeleid voor vergelijkingen met non-lokale termen, iets wat daarvoor nog onzeker was. De jury van de Stieltjesprijs bestond dit jaar uit Erik van den Ban (UU), Odo Diekmann (UU), Aernout van Enter (RUG, voorzitter), Richard Gill (UL), Frans Oort (UU), Marc Uetz (UT) en Kees Vuik (TUD) en werd geholpen door Marieke Kranenburg (UvA, secretaris).

Naast de Stieltjesprijs werd ook de eerste NWO Domain Science Stairway to Impact Award uitgereikt aan Kateřina Staňková (UM). De award is voor wetenschappers die met hun resultaten effectieve stappen hebben gezet om een maatschappelijk probleem aan te pakken. Kateřina Staňková heeft de award gekregen voor haar bijdragen aan wiskundig-gebaseerde kankertherapieën. Zij heeft interdisciplinaire samenwerkingen opgezet om haar wiskundige modellen toepassing te laten vinden in klinieken. De dynamische speltheorie-modellen die ze heeft ontwikkeld voorspellen dat sommige kankerpatiënten baat zouden hebben bij een andere behandeling, waarin zij kleinere doses medicijnen minder frequent krijgen. Er wordt nu met deze behandeling geëxperimenteerd en de eerste resultaten zijn veelbelovend. *mathematischcongres.nl*



Bente Bakker



Kateřina Staňková

Foto: Joey Roberts

Deze rubriek is een kroniek van wiskundige activiteiten in Nederland. Toekomstige activiteiten worden aangekondigd en van voorbije activiteiten wordt verslag gedaan. Wilt u uw aankondiging of verslag in deze rubriek geplaatst zien? Stuur ons dan uw bijdrage, zo mogelijk met illustratie. De redactie behoudt zich het recht voor berichten te weigeren of in te korten.

Redacteur: Nikki Levering
 nieuws@nieuwarchief.nl

Wiskundigen helpen met spreiding coronapatiënten

Professor Ger Koole, Assistant professor René Bekker (VU) en dr. Michiel uit het Broek (RUG), experts op het gebied van zorglogistiek, hebben een statistisch model ontwikkeld om de bezettingsgraad van COVID-19-patiënten in de Nederlandse ziekenhuizen te voorspellen. Het model gebruikt wachtrijtheorie om aan de hand van patiënt-aankomsten de bezettingsniveaus in de ziekenhuizen

te schatten. Elke dag leveren alle ziekenhuizen in Nederland informatie over de patiënteninstroom. Koole, Bekker en Uit het Broek gebruiken deze data om één week vooruit de patiënteninstroom te voorspellen, zowel op de IC als in de kliniek. Deze voorspellingen worden door het Landelijk Coördinatiecentrum Patiëntenspreiding (LCPS) gebruikt om patiënten te herverdelen over de ziekenhuizen. Bij het advies voor de herverdeling die door de wetenschappers wordt gegeven, wordt ook rekening gehouden met uitgestelde zorg. Zo adviseren zij de overplaatsing van COVID-19-patiënten uit een ziekenhuis niet meteen stop te zetten als dit ziekenhuis de instroom weer aankan, maar de overplaatsingen door te laten gaan om de uitgestelde zorg weer op niveau te krijgen. *beta.vu.nl*

Recordopbrengst oktoberveiling en 100+1-veiling

Vanwege de coronacrisis was de jaarlijkse oktoberveiling van het Wereldwiskunde Fonds (WWF) online. Naast deze veiling werd er in november een unieke online 100+1-boekenveiling gehouden. Er werd fanatiek geboden, en de veilingen hebben samen dan ook een recordopbrengst van ruim €4500 opgeleverd. Tot 21 april is de Winterverkoop van het WWF. Op de veilingssite staan de jaargangen *Pythagoras*, buitenlandse studieboeken, Nederlandse schoolboekjes en opgavenboekjes te koop. Zoals bij alle veilingen van het WWF zal deze opbrengst volledig worden besteed aan projecten voor wiskundeonderwijs in ontwikkelingslanden. *nvvw.nl*

Clara Stegehuis wint Professor De Winterprijs

De Professor de Winterprijs, voor een toppublicatie van vrouwelijk talent aan de Universiteit Twente, is dit jaar gewonnen door Clara Stegehuis. Zij ontvangt de prijs voor de publicatie 'Optimal subgraph structures in scale-free configuration models' in *Annals of Applied Probability*, een publicatie samen met professor Remco van der Hofstad (TU/e) en professor Johan van Leeuwen (Tilburg University). Assistant professor Clara Stegehuis doet onderzoek naar grote netwerken, zoals het internet en sociale media netwerken. Haar onderzoek richt zich op het vinden van kleinere afwijkende subnetwerken binnen deze grote netwerken. Zij gebruikt statistische methodes voor het opsporen van deze afwijkende subnetwerken, waarvoor aanzienlijk minder rekenkracht nodig is dan het stap voor stap detecteren van afwijkende patronen. *utwente.nl*

Pieter Kleer ontvangt Gijs de Leve-prijs

Pieter Kleer heeft bij de online conferentie van het Landelijk Netwerk Mathematische Besliskunde (LNMB) afgelopen januari de Gijs de Leve-prijs ontvangen voor zijn proefschrift *When Nash met Markov*, waarop hij in 2019 is gepromoveerd aan de Vrije Universiteit. Deze prijs wordt eens per drie jaar uitgereikt aan het best verdedigde proefschrift binnen de mathematische besliskunde. Het proefschrift van Pieter Kleer bevat theoretische resultaten voor twee problemen. Het eerste probleem betreft het berekenen en analyseren van Nash-evenwichten in congestiespellen. Deze spellen worden bijvoorbeeld gebruikt voor het modelleren van verkeerscongestie. Een belangrijk resultaat is het feit dat onzekerheid in reistijd negatieve gevolgen kan hebben op de kwaliteit van de

evenwichten. Het tweede probleem waar Pieter Kleer resultaten voor heeft behaald is het genereren van grafen waarvan de graad van elk punt bekend is. Hij heeft een nieuwe analyse gegeven van een algoritme voor dit probleem. De jury was van mening dat Kleer met de behaalde resultaten voor deze twee problemen twee proefschriften in een heeft geschreven. *thenetworkcenter.nl, vu.nl*

Wolfgang Hackbusch ontvangt Heinz Gumin-prijs

Afgelopen november heeft professor Wolfgang Hackbusch (Max Planck Instituut) de Heinz Gumin-prijs voor wiskunde gewonnen. De Heinz Gumin-prijs voor wiskunde van de Carl Friedrich von Siemens Foundation is de hoogste wiskundeprijs van Duitsland en wordt sinds 2010 eens per drie jaar uitgereikt. Wolfgang Hackbusch ontvangt deze prestigieuze prijs voor zijn baanbrekende bijdragen in de numerieke wiskunde, in het bijzonder voor zijn bijdragen in de ontwikkeling van hiërarchische matrices en tensorcalculus. Zijn ontwikkelde methoden kennen toepassingen in de vloeistofdynamica en de kwantumchemie. Wolfgang Hackbusch ontving in 1996 reeds de Brouwermedaille van het Koninklijk Wiskundig Genootschap. *wiskgenoot.nl, mathematik.de*



Wolfgang Hackbusch

Jong Talent Aanmoedigingsprijs en ASML afstudeerprijs

Negen studenten in de wiskunde en technische wiskunde kregen op 30 november van de Koninklijke Hollandse Maatschappij der Wetenschappen een Jong Talent Aanmoedigingsprijs van 500 euro voor hun studieresultaten in het eerste studiejaar. De Jong Talent Aanmoedigingsprijzen zijn beschikbaar gesteld door ORTEC om de studie in wiskunde te stimuleren. Gerrit Timmer, chief strategy officer van ORTEC, reikte de prijzen online uit aan Tim van Dijk (RU), Yoav Eshel (VU), Koen Ligthart (TU/e), Jefta Pruim (RUG), Wei-Ting Sun (UT), Jorre The (UL), Jim van der Ven (TUD), Emiel Wiedijk (UvA) en Richard Wols (UU). Naast deze aanmoedigingsprijzen werd ook de ASML Afstudeerprijs Wiskunde uitgereikt. Deze prijs wordt jaarlijks toegekend aan een student die het afgelopen academisch jaar is afgestudeerd in de wiskunde en die naar de mening van de jury zich speciaal onderscheiden heeft. De jury kon dit jaar geen winnaar kiezen en daarom kwam er een gedeelde eerste plek voor Daan Rutten (TU/e) en Pim Spelier (UL). Beiden zijn inmiddels aan een promotietraject begonnen, respectievelijk aan het Georgia Institute of Technology en de Universiteit Leiden. *kmhw.nl*

KNAW Early Career Award voor Michael Walter

Assistant professor Michael Walter (UvA, QuSoft), wiskundige en theoretisch natuurkundige, heeft de Early Career Award van de Koninklijke Nederlandse Akademie van Wetenschappen (KNAW) ontvangen. Deze prijs wordt toegekend aan onderzoekers, werkzaam in Nederland, die aan het begin van hun carrière staan en een origineel en vernieuwend onderzoeksidee hebben. Michael Walter doet onderzoek naar quantumcomputers en verbindt deze onder andere met zwarte gaten, om nieuwe inzichten te krijgen in hoe ze werken. Met dit onderzoek is hij een pionier en zijn onderzoeksresultaten worden dan ook gebruikt in quantumcomputers in laboratoria over de hele wereld.

kdvi.uva.nl



Michael Walter

Foto: qusoft.org

Wiskundigen analyseren COVID-19-effect op hulpgesprekken 113.nl

Er is een samenwerkingsovereenkomst tussen het Centrum voor Wiskunde en Informatica, de Vrije Universiteit Amsterdam en Stichting 113 Zelfmoordpreventie, om het effect van COVID-19 op het onderwerp van de hulpgesprekken te onderzoeken. Tekstanalyses van gesprekken in het eerste half jaar van 2020 lieten zien dat COVID-19 in 14% van de gesprekken een onderwerp was. Verder kwam naar voren dat er een toenemende dankbaarheid is voor het hulpgesprek, sinds de invoering van de coronamaatregelen. Dankzij een COVID-19 subsidie hebben de onderzoekers een stimulans gekregen om innovatieve onderzoekstechnieken te ontwikkelen en toe te passen. Zij raden aan om hun technieken vaker toe te passen om een beter beeld te krijgen van de problematiek van hulpvragers.

113.nl, cwi.nl

Exacte oplossing voor simpel probleem pas na eeuwen gevonden

Wiskundige dr. Ingo Ullisch (Universiteit Chongqing) heeft, meer dan 270 jaar na de eerste studies naar het probleem, een exacte oplossing gevonden voor het geit-in-een-cirkelprobleem. De probleemstelling is simpel: als men een hectare gras omcirkeld met een rond hek en een geit aan de binnenkant van het hek vastzet aan een touw, hoe lang moet het touw dan zijn zodat de geit toegang heeft tot precies een halve hectare? De eerste versie van dit probleem werd gepubliceerd in 1748 en betrof de graasoppervlakte van een dier wat aan de buitenkant van het hek werd vastgemaakt. De geit-in-een-cirkelversie van het probleem verscheen in 1894 in de eerste editie van *American Mathematical Monthly*. Later verschenen er nog meer versies van het probleem. Zo pre-

senteerde wiskundige Marshall Fraser in 1984 het n -dimensionale geit-in-een-cirkelprobleem met daarbij een oplossing in het geval dat n naar oneindig gaat: de ratio van de lengte van het touw en de straal van de sfeer nadert wortel twee. Professor Emeritus Mark Meyerson (US Naval Academy) ontdekte een fout in het bewijs van Fraser, maar kwam wel tot dezelfde conclusie. Na een aantal resultaten voor onder andere het driedimensionale probleem, heeft dr. Ingo Ullisch afgelopen jaar dus eindelijk een exacte oplossing weten te vinden voor het probleem zoals in 1894 gepubliceerd. Ullisch gebruikte transcendente vergelijkingen en paste hier complexe analyse op toe. Zo kon hij deze vergelijkingen omzetten naar expressies voor de lengte van het touw waarmee de geit precies toegang heeft tot een half hectare. Met deze techniek heeft Ullisch een exacte oplossing kunnen vinden, welke de ratio van twee contourintegralen is.

quantamagazine.org

CWI viert 75-jarig bestaan

Met een feestelijk online evenement heeft het Centrum Wiskunde & Informatica (CWI) op 11 februari 2021 haar 75-jarig bestaan gevierd. Het CWI werd in 1946 opgericht onder de naam Mathematisch Centrum. Het doel van het instituut was “de systematische beoefening van de zuivere en toegepaste wiskunde in Nederland te bevorderen”. Later omarmde het instituut de informatica, en kreeg het haar huidige naam.

cwi.nl

Koninklijk Wiskundig Genootschap

■ NMC 2021 Series

Het Nederlands Mathematisch Congres 2021 vindt vanwege de coronamaatregelen dit jaar voornamelijk online plaats en verspreid over het jaar, de zogenaamde *NMC 2021 Series*. Op 28 januari vond reeds de uitreiking van de Stieltjesprijs aan Bente Bakker en de NWO Impact Award aan Kateřina Staňková plaats. Op 22 februari was er de sessie ‘What’s cooking?’ met informatie van Platform Wiskunde Nederland en van European Women in Mathematics. Op 11 maart is er de ‘Speed dates with Industry’. Op 15 maart wordt aandacht besteed aan de internationale wiskundedag. Op 6 en 7 april zijn er plenaire voordrachten en parallelsessies. Op 23 april wordt de Pythagorasprijs uitgereikt en op 20 mei de KWG PhD-prijs. Tot slot wordt op 24 september het symposium ‘Onderwijs meets Onderzoek’ gehouden, mede georganiseerd door de NVvW, het Freudenthal Instituut en SLO. Mocht de situatie het toelaten, dan zullen de laatste twee evenementen op locatie plaatsvinden. Voor het volledige programma zie mathematischcongres.nl.

Recent verschenen:

■ **Indagationes Mathematicae** (www.elsevier.com/locate/indag)

Special Issue in memory of Hans Duistermaat, Jan van Neerven en Gunther Cornelissen (eds.), Volume 32, Issue 1, 2021.

Frank den Hollander

Mathematisch Instituut
Universiteit Leiden
denholla@math.leidenuniv.nl

Charlene Kalle

Mathematisch Instituut
Universiteit Leiden
kallecccj@math.leidenuniv.nl

Evenement De Avond van de Abelprijs

De oorsprong van ergodentheorie

Ergodentheorie is geworteld in de statistische mechanica. Via de wiskunde heeft het zich verspreid over diverse wetenschapsgebieden. Frank den Hollander en Charlene Kalle geven in dit artikel een kort historisch overzicht naar aanleiding van de Abelprijs 2020.

Met het begrip ‘dynamisch systeem’ wordt ieder proces aangeduid dat zich ontwikkelt in de tijd, van pandemie tot planetenstelsel. Ergodentheorie is het vakgebied dat kansrekening inzet om een omschrijving te geven van het typische gedrag van een dynamisch systeem op de lange termijn. Deze aanpak heeft in de afgelopen 150 jaar tot veel successen geleid. In 2020 hebben Hillel Furstenberg en Gregory Margulis de Abelprijs ontvangen voor hun baanbrekend werk in en rond de ergodentheorie. Dit artikel is geschreven naar aanleiding van de KNAW-Webinar ‘Evening devoted to the Abel Prize’ over de levens en het werk van beide laureaten. We bespreken kort de opkomst van de ergodentheorie en geven, als opmaat voor de artikelen verderop in dit nummer van Benjamin Weiss en Shrikrishna Dani, een kleine toepassing van ergodentheorie in de getaltheorie.

De ergodenveronderstelling

Voor de oorsprong van ergodentheorie, en ook van het woord ergodentheorie, gaan we terug naar het werk van een van de belangrijkste natuurkundigen van de negentiende eeuw, de Oostenrijkse Ludwig Boltzmann (1844–1906). Boltzmann was een van

de grondleggers van de statistische mechanica, die zich richt op de beschrijving van de dynamica van systemen met enorme aantallen deeltjes. Vanwege deze aantallen is het onmogelijk om een precieze omschrijving te geven van het chaotische gedrag van de deeltjes op *microscopisch* niveau. Dankzij Boltzmanns baanbrekende ideeën over het inzetten van de wetten van de kansrekening (zie onder andere [5,6]), lukte het wel om uitspraken te doen over de *macroscopische* eigenschappen, zoals dichtheid, temperatuur en druk.

Het werk van Boltzmann wordt in het beroemde boek [9] van het echtpaar Paul Ehrenfest (1880–1933) en Tatjana Ehrenfest Afanassjewa (1876–1964) uiteengezet als een samenhangend geheel. Ehrenfest was een Oostenrijkse natuurkundige en student van Boltzmann. Ehrenfest-Afanassjewa was een Russische natuur- en wiskundige en studente van David Hilbert (1862–1943). In 1912, ook het jaar waarin [9] verscheen, verhuisden ze samen naar Nederland, waar Ehrenfest de opvolger werd van Hendrik Antoon Lorentz (1853–1928), als hoogleraar theoretische natuurkunde aan wat toen nog de Rijksuniversiteit Leiden heette. In 1919 werd hij benoemd als lid van

de Koninklijke Nederlandse Akademie van Wetenschappen.

Centraal in het werk van Boltzmann plaatsten de Ehrenfests de *ergodenveronderstelling*. Zoals omschreven in [9], stelt deze simpel gezegd dat een geïsoleerd systeem in evenwicht uiteindelijk alle mogelijke toestanden aanneemt waarvan de totale energie correspondeert met de veronderstelde totale energie van het systeem. De naam is ontleend aan de term *ergode* die door Boltzmann werd gebruikt in zijn baanbrekend artikel [7] uit 1884, maar de ergodenveronderstelling zelf staat nergens in het werk van Boltzmann zo expliciet opgeschreven als in [9].

Ondanks dat er wat discussie is geweest over de etymologie van het woord ‘ergode’ (zie bijvoorbeeld [10,15]), is de huidige consensus dat het een samenvoeging is van de Griekse woorden $\epsilon\rho\gamma\omicron\nu$, dat ‘werk’ of ‘actie’ en soms ook ‘energie’ betekent, en $\omicron\delta\omicron\varsigma$, dat ‘pad’ betekent. Boltzmann bedoelde er het volgende mee. Noem de veronderstelde totale energie van een geïsoleerd veeldeeltjessysteem E en noteer de verzameling van alle mogelijke toestanden van het systeem waarvan de totale energie gelijk is aan E met $\mathcal{E}$. In [7] is een ‘ergode’ een kansverdeling op $\mathcal{E}$ die invariant blijft door de tijd en waarvan de drager gelijk is aan heel $\mathcal{E}$. Het bestaan van een ‘ergode’ is equivalent met de ergodenveronderstelling.



Ludwig Boltzmann in 1902



Tatjana Ehrenfest Afanassjewa en Paul Ehrenfest in 1904

Een belangrijk gevolg van de ergodenveronderstelling is dat voor geschikte observabelen van het dynamische systeem het tijdsgemiddelde langs een baan van het systeem in de limiet van lange tijd gelijk is aan het gemiddelde van de observabele over alle toestanden uit $\mathcal{E}$ gewogen volgens de invariante kansverdeling, met andere woorden *tijdsgemiddelde* = *ruimte-gemiddelde*. De veronderstelling, zoals die in [9] geformuleerd is, bleek te sterk te zijn. In 1913 lieten de Duitse wiskundige Arthur Rosenthal (1887–1959) en de Zwitserse wiskundige Michel Plancharel (1885–1967) onafhankelijk van elkaar zien dat realistische gasmodellen hier niet aan kunnen voldoen (zie [8, 12, 14]). Ergodentheorie als vakgebied is ontstaan uit de zoektocht naar voorwaarden waaronder tijdsgemiddelden gelijk zijn aan ruimtegemiddelden.



John von Neumann, ergens tussen 1943 en 1945

Foto: Wikimedia Commons / Los Alamos National Laboratory

Ergodenstellingen

De wiskundige grondslag van ergodentheorie werd in 1931 gelegd toen de Amerikaans-Hongaarse alleskunner John von Neumann (1903–1957) en de Amerikaanse wiskundige George Birkhoff (1884–1944) twee verschillende versies van de ergodenstelling bewezen. Om deze stelling precies te maken beschouwen we een dynamisch systeem dat zich in discrete tijdstappen ontwikkelt. In de simpelste vorm bestaat zo'n systeem uit een *toestandsruimte* X en een *transformatie* $T: X \rightarrow X$ die de tijdsontwikkeling van het systeem geeft, in de zin dat als het systeem zich op een bepaald moment in toestand $x \in X$ bevindt, het zich een tijdstap later in toestand $T(x) \in X$ bevindt. We nemen aan dat het systeem de volgende twee eigenschappen heeft:

1. Er bestaat een kansverdeling $\mathbb{P}$ op de verzameling X die invariant blijft onder de tijdsontwikkeling. In dit geval heet de transformatie T *maatbehoudend*.
2. Het systeem is irreducibel in de zin dat als de toestandsruimte X een kleiner gebied $Y \subseteq X$ bevat waartoe de dynamica beperkt kan worden ($T^{-1}Y = Y$), dan is Y of verwaarloosbaar klein of zo goed als de hele ruimte ($\mathbb{P}(Y) = 0$ of $\mathbb{P}(Y) = 1$). In dit geval heet de transformatie T *ergodisch*.

De ergodenstellingen van Von Neumann en Birkhoff doen voor een observabele $f: X \rightarrow \mathbb{R}$ van het systeem een uitspraak over de convergentie van het tijdsgemiddelde van f langs de baan van een toestand $x \in X$ naar de gemiddelde waarde

van f over de hele ruimte X gewogen volgens de kansverdeling $\mathbb{P}$. Het tijdsgemiddelde is in dit geval de waarde

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \sum_{m=0}^{n-1} f(T^m x),$$

indien deze limiet bestaat. Hierin staat T^m voor m keer de samenstelling van T met zichzelf:

$$T^m := \underbrace{T \circ T \circ \dots \circ T}_{m \text{ keer}}.$$

Het ruimtegemiddelde geven we weer met een integraal: $\int_X f d\mathbb{P}$. De *ergodenstellingen* van Von Neumann [16] en Birkhoff [2, 3] geven, elk voor een ander soort convergentie, voorwaarden waaronder

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \sum_{m=0}^{n-1} f(T^m x) = \int_X f d\mathbb{P}. \quad (*)$$



George Birkhoff in 1910

Niet veel later verschenen er nog enkele andere versies van de ergodenstelling. Onder de aanvullende eisen dat X een compacte metrische ruimte is en T een continue transformatie is, en dat er maar één mogelijke tijdsinvariante kansverdeling $\mathbb{P}$ op X bestaat die goed gedefinieerd is op alle open deelverzamelingen, geldt de convergentie in (*) zelfs uniform voor continue observabelen $f: X \rightarrow \mathbb{R}$. In dit geval heet het dynamisch systeem *uniek ergodisch*.

Von Neumann maakte zijn resultaat bekend in de zomer van 1931. Uit bewaarde brieven blijkt dat Von Neumann en Birkhoff in de herfst van 1931 contact hebben gehad over de stelling van Von Neumann en dat Birkhoff in november 1931 nog bezig was met zijn bewijs. Toen duidelijk werd dat het artikel van Von Neumann [16] in januari 1932 in de *Proceedings of the National Academy of Sciences of the United States of America* zou verschijnen en dat Birkhoff probeerde zijn resultaten al in december 1931 in het zelfde tijdschrift gepubliceerd te krijgen, heeft Von Neumann aan Birkhoff gevraagd om de publicatie van zijn resultaat uit te stellen. Dat verzoek is niet gehonoreerd, en Birkhoffs artikelen [2, 3] zijn inderdaad in december 1931 verschenen. In maart 1932 heeft Birkhoff, samen met collega Bernard Koopman (1900–1981), een artikel gepubliceerd [4] dat een chronologisch overzicht bevat van alle belangrijke gebeurtenissen die voorafgingen aan de publicaties van [2, 3, 6]. Zie [17] voor meer informatie.

Eerste cijfers van de machten van twee

De betekenis van ergodentheorie op ons begrip van dynamische systemen is van onschatbare waarde gebleken. Tegelijk heeft ergodentheorie grote en opvallende doorbraken teweeg gebracht in andere wiskundige vakgebieden. De artikelen van Benjamin Weiss en Shrikrishna Dani verderop in dit nummer gaan daar dieper op in. Hier geven we een klein voorbeeld van een toepassing van ergodentheorie in de getaltheorie.

In 1881 viel het de Amerikaans-Canadese sterren- en wiskundige Simon Newcomb (1835–1909) op dat van logaritmetabellen de pagina's voor getallen waarvan het eerste decimale cijfer een 1 is veel meer gebruikerssporen vertoonden dan de andere pagina's. Ook zagen de pagina's er minder vaak gebruikt uit naarmate het eerste

decimale cijfer groter werd (zie [11]). Zijn conclusie was dat blijkbaar niet alle cijfers 1 tot en met 9 even vaak voorkomen als eerste decimale cijfer.

In 1938 ging de Amerikaanse natuurkundige Frank Benford (1883–1948) een stap verder. Hij bestudeerde in [1] allerlei grote numerieke dataverzamelingen en schatte de percentages waarmee de cijfers 1 tot en met 9 daarin voorkwamen als eerste decimale cijfer. Benford bekeek onder andere gegevens over populatiegrootten van de Verenigde Staten, gewichten van moleculen en atomen, getallen in de adressenlijst van de *American Men of Science* (die overigens ook de gegevens van vrouwen bevatte en later omgedoopt is tot *American Men and Women of Science*) en in een uitgave van *Readers Digest*. Tabel 1 bevat

1	2	3	4	5	6	7	8	9
30,6	18,5	12,4	9,4	8,0	6,4	5,1	4,9	4,7

Tabel 1 De percentages eerste decimalen per cijfer geobserveerd door Benford in [2].

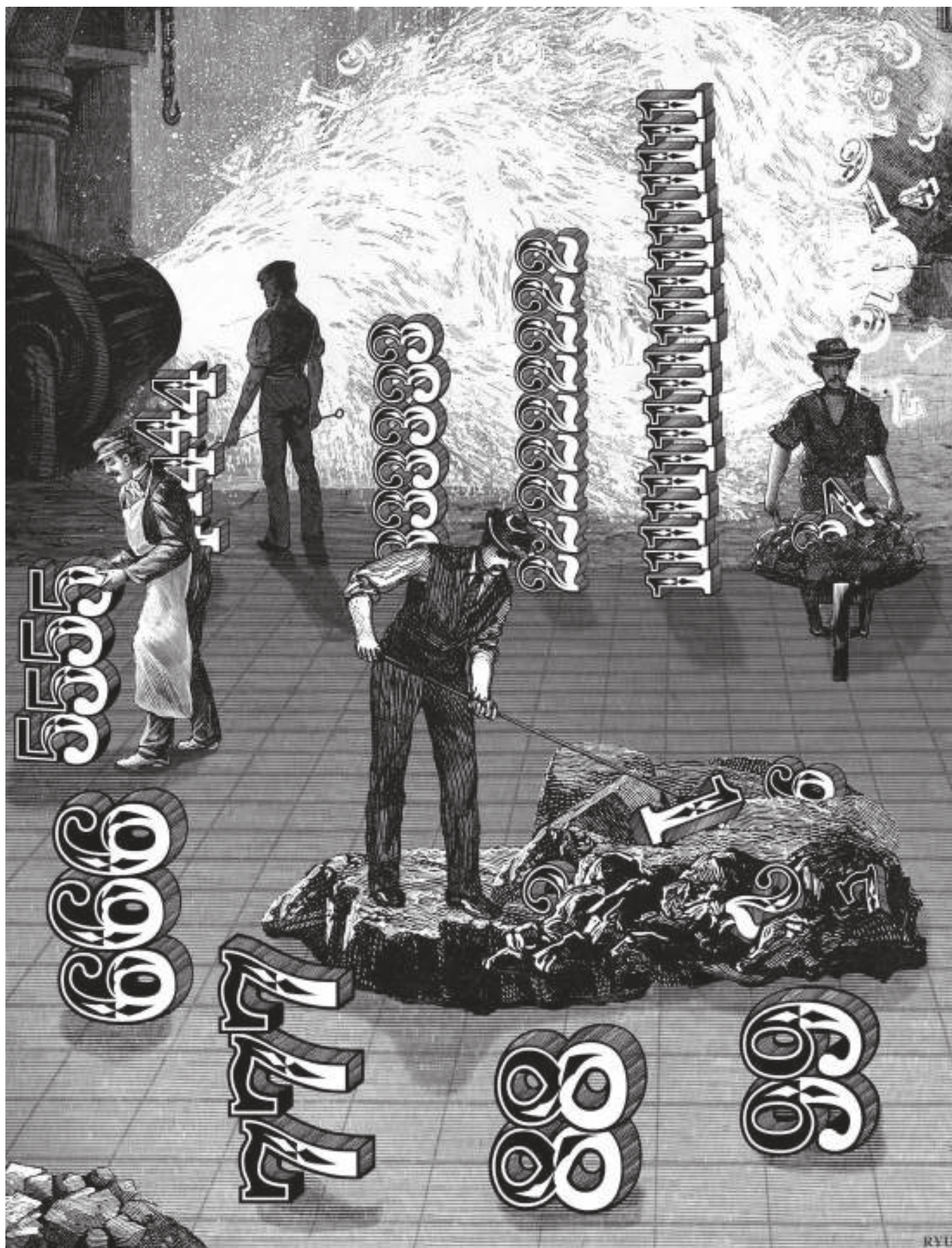
de percentages geobserveerd door Benford in [1]. De Wet van Newcomb–Benford vat deze observaties samen.

We laten zien dat ook de machten van twee voldoen aan de Wet van Newcomb–Benford. De rij eerste decimalen van deze machten is

$$1, 2, 4, 8, 1, 3, 6, 1, 2, \dots$$

Laat $k \in \{1, \dots, 9\}$ een mogelijk eerste cijfer zijn en gebruik voor ieder natuurlijk getal n de notatie $p_n(k)$ voor het aantal keer dat het cijfer k voorkomt in de eerste n getallen in bovenstaande rij. Dus $p_9(1) = 3$ en

Figuur 1 Een pagina uit de *Logarithmorum Chilias Prima*, de eerste logaritmetabel van de Engelse wiskundige Henry Briggs (1561–1635) uit 1617. Briggs was de eerste die voorstelde om de logaritme met basis tien te gebruiken.



$p_3(8) = 0$. De frequentie van het cijfer k in deze rij is dan

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{p_n(k)}{n},$$

indien deze limiet bestaat. Beschouw nu een willekeurig natuurlijk getal m . De eerste decimaal van 2^m is gelijk aan k precies dan als

$$k \times 10^j \leq 2^m < (k+1) \times 10^j$$

voor een zekere $j \geq 0$. Dit is hetzelfde als

$$^{10}\log k \leq m^{10}\log 2 \pmod{1} < ^{10}\log(k+1).$$

Laat $T: [0,1) \rightarrow [0,1)$ de transformatie zijn die gegeven wordt door

$$T(x) = x + ^{10}\log 2 \pmod{1}.$$

Dan is

$$T^m(0) = m^{10}\log 2 \pmod{1}.$$

Met andere woorden, $p_n(k)$ is gelijk aan het aantal keer dat de baan van 0 onder T in het interval $[^{10}\log k, ^{10}\log(k+1))$ ligt tijdens de eerste n tijdstappen. De observabele die hierbij hoort is de indicatorfunctie gegeven door

$$\begin{aligned} 1_{[^{10}\log k, ^{10}\log(k+1))}(x) &= 1 \\ \text{als } x &\in [^{10}\log k, ^{10}\log(k+1)), \\ 1_{[^{10}\log k, ^{10}\log(k+1))}(x) &= 0 \\ \text{als } x &\notin [^{10}\log k, ^{10}\log(k+1)). \end{aligned}$$

1	2	3	4	5	6	7	8	9
30,6	17,6	12,5	9,7	7,9	6,7	5,8	5,1	4,6

Tabel 2 De afgeronde percentages eerste decimalen voor de machten van twee.

Dit betekent dat de frequentie van het cijfer k gelijk is aan

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \sum_{m=0}^{n-1} 1_{[^{10}\log k, ^{10}\log(k+1))}(T^m(0)).$$

Door 0 en 1 met elkaar te identificeren wordt het interval $[0,1)$ compact en de transformatie T continu. Verder is T maatbehoudend en ergodisch met betrekking tot de uniforme kansverdeling op $[0,1)$, als gevolg van de irrationaliteit van $^{10}\log 2$. Zelfs blijkt T uniek ergodisch te zijn, wat betekent dat de gelijkheid in (*) geldt voor iedere continue observabele. Indicatorfuncties zijn niet continu, maar kunnen willekeurig goed benaderd worden door continue functies. Dit alles is voldoende om te kunnen concluderen dat (*) geldt voor $f = 1_{[^{10}\log k, ^{10}\log(k+1))}$. De gemiddelde waarde van deze indicatorfunctie over het interval $[0,1)$ is $^{10}\log(\frac{k+1}{k})$. Dit geeft Tabel 2.

In 1909 bewees de Duitse natuur- en wiskundige Hermann Weyl (1885–1955) dat voor ieder irrationaal getal $\alpha \in [0,1)$ de rij $\{n\alpha \pmod{1}\}_{n \geq 0}$ gelijk verdeeld is over het interval $[0,1)$. Dat wil zeggen dat voor ieder interval $I \subseteq [0,1)$ het gedeelte van de

rij dat in I ligt gelijk is aan de lengte van I . De Stelling van Weyl is op dezelfde manier als hierboven een direct gevolg van de ergodenstelling. In het algemeen geldt voor ieder irrationaal getal $\alpha \in [0,1)$ dat de transformatie $T: [0,1) \rightarrow [0,1)$ gegeven door

$$T(x) = x + \alpha \pmod{1}$$

uniek ergodisch is. Voor iedere $n \geq 0$ geldt $T^n(0) = n\alpha \pmod{1}$. Laat $I \subseteq [0,1)$ een interval zijn. Het gedeelte van de rij $\{n\alpha \pmod{1}\}_{n \geq 0}$ dat in het interval I ligt is gelijk aan

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \sum_{m=0}^{n-1} 1_I(T^m(0)),$$

waar 1_I de indicatorfunctie voor het interval I is. Uit de ergodenstelling volgt dat deze limiet gelijk is aan de gemiddelde waarde van de indicatorfunctie 1_I over het interval $[0,1)$.

In het artikel van Benjamin Weiss in dit nummer komt een diepe generalisatie van de Stelling van Weyl aan bod die is gevonden door Hillel Furstenberg, naast verschillende resultaten in diofantische benaderingen. Ook in het werk van Gregory Margulis over het Oppenheimvermoeden speelde het gebruik van ergodentheorie voor diofantische benaderingen een belangrijke rol. Shrikrishna Dani omschrijft dit in meer detail in zijn artikel verderop in dit nummer. $\clubsuit$

Referenties

- 1 F. Benford, The law of anomalous numbers, *Proc. Amer. Phil. Soc.* 78(4) (1938), 551–572.
- 2 G.D. Birkhoff, Proof of a recurrence theorem for strongly transitive systems, *Proc. Natl. Acad. Sci. USA* 17(12) (1931), 650–655.
- 3 G.D. Birkhoff, Proof of the ergodic theorem, *Proc. Natl. Acad. Sci. USA* 17(12) (1931), 656–660.
- 4 G.D. Birkhoff en B.O. Koopman, Recent contributions to the ergodic theory, *Proc. Natl. Acad. Sci. USA* 18(3) (1932), 279–282.
- 5 L. Boltzmann, Über die mechanische Bedeutungen des zweiten Hauptsatzes der Wärmetheorie, *Wiener Berichte* 53 (1866), 195–220.
- 6 L. Boltzmann, Studien über das Gleichgewicht der lebendigen Kraft zwischen bewegten materiellen Punkten, *Wiener Berichte* 58 (1868), 517–560.
- 7 L. Boltzmann, Ueber die Eigenschaften monozyklischer und damit verwandter Systeme des zweiten Hauptsatzes der Wärmetheorie, *Wissenschaftliche Abhandlungen* 3 (1884), 122–152.
- 8 S. Brush, *The Kind of Motion We Call Heat*, Studies in Statistical Mechanics, Vol. 6, North-Holland, 1976.
- 9 P. Ehrenfest en T. Ehrenfest-Afanassjewa, *The Conceptual Foundations of the Statistical Approach to Mechanics*, Dover Publications, 1991.
- 10 G. Gallavotti, Ergodicity, ensembles, irreversibility in Boltzmann and beyond, *J. Statist. Phys.* 78(5–6) (1995), 1571–1589.
- 11 S. Newcomb, Note on the frequency of use of the different digits in natural numbers, *Amer. J. Math.* 4(1–4) (1881), 39–40.
- 12 M. Plancharel, Proof of the impossibility of ergodic mechanical systems, *Transport Theory Statist. Phys.* 1(4) (1971), 309–311.
- 13 J. von Plato, Boltzmann's ergodic hypothesis, *Arch. Hist. Exact Sci.* 42(1) (1991), 71–89.
- 14 A. Rosenthal, Proof of the impossibility of ergodic gas systems, *Transport Theory Statist. Phys.* 1(4) (1971), 299–308.
- 15 J. Uffink, Boltzmann's work in statistical physics, *Stanford Encyclopedia of Philosophy*, 2014. <https://plato.stanford.edu/entries/statphys-Boltzmann>.
- 16 J. Von Neumann, Proof of the quasi-ergodic hypothesis, *Proc. Natl. Acad. Sci. USA* 18(1) (1932), 70–82.
- 17 J.D. Zund, George David Birkhoff and John von Neumann: a question of priority and the ergodic theorems, 1931–1932, *Historia Math.* 29(2) (2002), 138–156.

Benjamin Weiss

*Institute of Mathematics
Hebrew University of Jerusalem
weiss@math.huji.ac.il*

Event Abel Prize 2020

Life and work of Hillel Furstenberg

The Abel Prize 2020 was awarded to Hillel Furstenberg and Gregory Margulis “for pioneering the use of methods from probability and dynamics in group theory, number theory and combinatorics” (from the press release). Benjamin Weiss has worked closely with Hillel Furstenberg for more than fifty years. He describes Furstenberg’s life and work, highlighting some of his major contributions to topological dynamics and ergodic theory.

Hillel Furstenberg was born in 1935 in Berlin. His family succeeded in escaping from Nazi Germany soon after the Kristallnacht pogrom in November 1938. Their first stop was in England where his father died and with his mother and older sister they came to the United States in 1940. For the first year they lived with an uncle who had a poultry farm in New Jersey. They then moved to the Washington Heights neighborhood in New York City and his high school and college studies were at the Yeshiva University complex. While still in high school his mathematical abilities became evident and he was greatly encouraged and supported by Jekuthiel Ginsburg, the founding editor of the *Scripta Mathematica*. This was one of the very few journals at that time dedicated inter alia to the history of mathematics and its recreational aspects. Jekuthiel Ginsburg employed him in various tasks connected with the journal including translating articles from French and German.

He graduated Yeshiva University in 1955 with two degrees, both BA and MA and went on to Princeton University for his doctoral studies. His advisor was Salomon Bochner who just in that year, 1955, had published his influential book *Harmonic Analysis and the Theory of Probability*. Hillel submitted his thesis titled simply *Prediction Theory* in 1958. In the same year he married Rochelle Cohen from Chicago who had been very active in Bnei Akiva, a religious Zionist youth movement. During the following year he was an instructor at Princeton and then at MIT. In 1961 became an assistant professor at the University of Minnesota. He was a visiting professor at Princeton in 1963–1964 where I was privileged to take a course in probability theory with him. The last lectures of this course were devoted to a new concept ‘absolute independence’ which evolved into the theory of disjointness (see below). When he returned to Minnesota he was granted tenure as a full professor.

In 1965 he accepted an offer from the Hebrew University of Jerusalem, which he accepted, and it has remained his academic home until today. He supervised many students for their PhD degree, many of them became quite prominent. Most have remained in Israel and he is to a large extent responsible for Israel’s becoming a leading center in ergodic theory, topological dynamics and especially their applications to group theory, number theory and combinatorics. Prior to the Abel Prize he has received many prizes for his work including the Israel Prize and the Harvey Prize (1993), the Emet Prize (2004) and the Wolf Prize (2007).

1950s

Rather than trying to divide his work into different areas I will describe his work and its vast impact in a more or less chronological order. There is a commonly accepted wisdom that every colloquium talk in mathematical should contain at least one proof. In a similar vein I will include in this survey a complete summary of one of the first papers that Hillel wrote while he was still an undergraduate. It is titled ‘On the infinitude of primes’ and appeared in

the *American Mathematical Monthly* [7]. (Hillel's official first name is Harry and all of his earlier papers were published under that name. His Hebrew name is Hillel and he has been using it for all of his publications in the last forty years.) In it he gives a highly original proof of Euclid's theorem as follows. He topologizes the integers, positive as well as negative, by taking for a base for the topology all arithmetic progressions. In this topology each arithmetic progression is both closed and open. Now by contradiction assume that the set of primes $\{p\}$ is finite. Denote by A_p all multiples of p . These are arithmetic progressions and their union is therefore closed. But the complement consists of $\{-1, 1\}$ which is clearly not open, hence we have arrived at a contradiction.

1960s

His first major work was an expanded version of his thesis, published in 1960 in the *Princeton Annals of Mathematical Studies* under the title 'Stationary processes and prediction theory'. While at that time the prediction theory of stochastic processes was already highly developed it was Hillel's idea to study the possibility of developing a theory which involves only a single sample sequence. To accomplish this he used the pointwise ergodic theorem to show how to recover the distribution of an ergodic stationary stochastic process from a single typical sample sequence. He then introduced new methods from harmonic analysis to prove some special cases of the prediction problem. He also obtained as a byproduct of these new methods, dynamical proofs of some of the classical theorems of Hermann Weyl on equidistribution. Many of the original ideas that pervade his later work appear already in this monograph, applied to a very specific problem in probability.

In that same year (1960) he published, jointly with Harry Kesten, a fundamental paper [14] on the limiting behavior of the products of a sequence of independent, identically distributed random matrices. Their results were motivated in part by an observation made by Marc Kac that solving certain second order differential equations sometimes entails studying random products of 2×2 -matrices. This paper laid the foundations for the modern study of products of random matrices which has turned out to have many applications in mathe-

matics, physics and computer science. It also initiated Hillel's interest in the general study of non-commuting random products and the structures needed to describe their limiting behavior.

The results of these investigations were published in 1963, Hillel's annus mirabilis. Gian-Carlo Rota began his review of this paper [9] in the *AMS Math Reviews* with the words "This is a profound memoir", and instead of attempting to summarize it quoted at length Hillel's clear introduction. It is here that the fundamental role of stationary measures is exploited for the first time. This was also one of the motivations Hillel had for embarking on a highly original study of Lie Groups and their actions to which I return later. Before explaining what stationary measures are I will need to explain some of the basic concepts of topological dynamics which are perhaps not as well known as probability theory.

The abstract discipline had its origins in the qualitative study of solutions to the differential equations of classical mechanics. As such it was mainly concerned with actions of the reals on Euclidean space and their asymptotic properties. In the more abstract approach one takes as basic objects pairs (X, G, α) where X is a topological space, often assumed to be compact, and G is a topological group. The α is a continuous mapping from $G \times X$ to X , which for fixed $g \in G$ is a homeomorphism of X and as functions from X to X , $\alpha(g, \cdot)$ is a homomorphism from G to the group of homeomorphisms of X . The classic examples have $G = \mathbb{R}$, while the simplest case is when $G = \mathbb{Z}$ and then we often write simply (X, T) where T is a homeomorphism and corresponds to 1, so that one wants to study the properties of T^n , especially as n tends to infinity. We often abbreviate $\alpha(g, x)$ to simply gx where it is understood that we are discussing a fixed action. The orbit of a point x is the set $\{gx\}$ as g ranges over all the elements of the group.

Such an action is said to be *topologically transitive* if there is at least one dense orbit, i.e. at least one point such that the closure of its orbit is X . An action is said to be *minimal* if all orbits are dense. Closed G -invariant subsets E of X are called *minimal sets* if the restriction of the action to E is minimal. Any action contains topologically transitive subsets, and if X is compact then there is always at least one minimal set. This latter fact follows easily by an ap-

plication of Zorn's lemma. Perhaps the simplest examples of minimal actions of $\mathbb{Z}$ are irrational rotations of the circle, or more generally the higher dimensional tori $\mathbb{T}^d$.

One of the basic tools in topological dynamics is that of invariant measures. For groups G like $\mathbb{R}$, $\mathbb{Z}$, and more generally for all amenable groups, every action of G on a compact space has at least one invariant measure. For non-amenable groups like semi-simple non-compact groups invariant measures may not exist. However, for any probability measure μ on G there always exist measures ν on X such that $\int g * \nu d\mu(g) = \nu$ where $g * \nu$ is the push forward of the measure ν under the homeomorphism of X that is given by $g \in G$. Such measures are called *stationary measures*.

Hillel's proof of Weyl's equidistribution theorem was based on showing that certain kinds of extensions of these toral rotations have a property which is even stronger than minimality which is called *strict ergodicity*. This means that the action has a unique invariant measure with global support. These extensions were homeomorphisms of $\mathbb{T}^{d+r}$ of the form $F(u, v) = (u + \theta, v + f(u))$ where θ is an irrational rotation of $\mathbb{T}^d$ and f is a continuous function from $\mathbb{T}^d$ to $\mathbb{T}^r$. These actions are called *skew-products* because the second coordinate is being acted upon by a variable homeomorphism. In his thesis he took f to be given by some special integer matrix, and in the paper [8] he took up the general question as to when is such an extension, and even a tower of such extensions, strictly ergodic. This led him to the study of general *distal* actions. These are actions with the property that for all pairs of distinct elements $(x, y) \in X \times X$ the closure of the orbit $\{(gx, gy) : g \in G\}$ does not intersect the diagonal. Since the second coordinate is being acted upon by isometries the functions F of the above form define distal actions of $\mathbb{Z}$.

The simplest kinds of actions are the *equicontinuous* ones in which the homeomorphisms $\alpha(g, \cdot)$ form an equicontinuous family. In this case their closure in the group of homeomorphisms with the uniform topology form a compact group K and the space decomposes into minimal sets where each minimal set is a homogeneous space of K and the action by G is simply given by multiplication. The irrational rotations are just such examples. Naturally such actions are distal.



Hillel Furstenberg

Photo: abelprixano, Yoşef Adest

In [10] Hillel gave a beautiful concrete description of the structure of an arbitrary distal action of any locally compact group G . This structure theorem is the cornerstone of all later structure theorems in topological dynamics and served as the model for the structure theorems in ergodic theory which played such a key role in his remarkable ergodic theoretic proof of Szemerédi's theorem to which I will return below. In order to formulate the result we need some more definitions. If we have two actions α, β of G on compact spaces X, Y and a continuous mapping π from X onto Y that is equivariant, i.e. $\beta(g, \pi(x)) = \pi(\alpha(g, x))$ then we say that the action α is an *extension* of β while β is called a factor of α . In the case when the acting group is $\mathbb{Z}$ if the two systems are $(X, T), (Y, S)$ the equivariance is simply $\pi T = S\pi$.

Now the main notion we need is that of an *isometric extension*. An extension of an action on Y which is given by the map $\pi: X \rightarrow Y$ is called an *isometric extension* of Y if all fibers $\pi^{-1}(y)$ carry the structure

of a homogeneous space K/L of a compact metric group K and there is a continuous metric $d(x_1, x_2)$ defined on all pairs (x_1, x_2) such that $\pi(x_1) = \pi(x_2)$ such that the fibers are isometric to K/L and finally the key property: $d(x_1, x_2) = d(gx_1, gx_2)$ for all such pairs and all $g \in G$. The simplest such situation is when $X = Y \times K/H$ and for a continuous function $f: Y \rightarrow K$ one has $T(y, kH) = (Sy, f(y)kH)$. It is straightforward to check that an isometric extension of a distal system is also distal. If one has an infinite tower of successive extensions one readily obtains an action on the inverse limit of the compact spaces which is of course compact. Such an inverse limit of isometric extensions is also distal. The remarkable structure theorem that Hillel proved states:

Theorem 1. *Every distal system can be obtained from the trivial one point system by a combination of the operations of forming an isometric extension and taking inverse limits.*

In the first step of the tower, namely an isometric extension of the trivial system, one obtains an equicontinuous system. An immediate corollary of the theorem is then the surprising result that any distal system has an equicontinuous factor. It follows that groups with no equicontinuous actions, such as $SL(d, \mathbb{R})$ have no distal actions. However even for such groups there can be isometric extensions. More general structural results require some more definitions. The opposite of an isometric extension is a proximal extension. A pair of points (x_1, x_2) is called *proximal* if the closure of $\{(\alpha(g, x_1), \alpha(g, x_2)): g \in G\}$ in $X \times X$ has a nonempty intersection with the diagonal. An action (X, G, α) is called a *proximal action* if every pair of points (x_1, x_2) is proximal. An extension $\pi: X \rightarrow Y$ is called a *proximal extension* if every pair (x_1, x_2) such that $\pi(x_1) = \pi(x_2)$ is proximal. Later work by R. Ellis, E. Glasner, W. Veech and others showed that a very large class of actions, so called PI (proximal-isometric), can be obtained by a succession of proximal

and isometric extensions beginning with the trivial action on one point. All of these results rely in a fundamental way on Hillel's structure theorem.

The third paper of that year (1963) is titled 'A Poisson formula for semi-simple Lie groups' [11]. One of the motivations for that work came from the work on distal systems and isometric extensions. When one has a 'skew product transformation': $T(x, y) = (S(x), R(x)(y))$, where S is a fixed transformation, $R(x)$ is a transformation on the y -coordinate depending on x and one iterates this transformation, one is led to product transformations of the form $R^n(x) \cdots R^3(x) R^2(x) R(x)$. Assuming the transformations $R(x)$ come from a given group of transformations, one can hope to analyze this product in terms of properties of the group. The complexity of this expression led Hillel to consider the case where the successive $R^n(x)$ are independent random variables. For the case of a matrix group this is what Hillel worked on with Kesten. Now he turned to the general case of random walks of groups.

It is in this paper that the important notion of a strongly proximal action was introduced (although the name came later). An action of G on a compact space X is called *strongly proximal* if the action induced on the probability measures on X is proximal. For minimal actions this is the same as saying that for any probability measure μ on X there is a net g_i such that $g_i * \mu$ converges in the weak*-topology to a point mass. For a semi-simple Lie group G a compact homogeneous space $G/H = M$ is called a *boundary* if the natural action of G on M is strongly proximal. Hillel identified a unique maximal boundary which is now called the Furstenberg boundary of G . The Poisson formula referred to in the title is a generalization of the classical Poisson formula which represents every bounded harmonic function in the unit disk as an integral of a continuous function on the circle with respect to the Poisson kernel. Hillel defines harmonic functions on G and then gives an analogue of this formula using a kernel which is defined on the Furstenberg boundary. These boundaries have turned out to play an important role in areas far from the original probabilistic motivations, coming from random walks on G (a special case of this was the original paper on products of random matrices), such as the theory of C^* -algebras.

Just a few years later, in 1967, Hillel published a landmark paper titled 'Disjointness in ergodic theory, minimal sets, and a problem in Diophantine approximation' [12]. I can do no better in describing the impact of this work than by quoting from the review by Bill Parry (who was at that time one of the leading figures in ergodic theory and topological dynamics):

"The approach to ergodic theory in this remarkable paper is complementary to the one developed, mainly by the Russian school, associated with numerical and group invariants. In fact, the relationship investigated here between two measure-preserving transformations (processes) and between two continuous maps (flows) is disjointness, an extreme form of non-isomorphism. The concept seems rich enough to warrant quite a few papers, and these papers will no doubt be largely stimulated by the present one. An interesting aspect of the paper, apart from the new results it contains, is the entirely novel demonstration of a number of established theorems."

Needless to say his prediction has been more than fulfilled. I will not try to explain what disjointness is except to say that there are two separate (albeit similar) definitions, one for measure preserving systems and one for topological dynamical systems. He applied the measure theoretic version to a problem of filtering signals that have been distorted by random noise. On the topological side he proved a basic result about disjointness in topological dynamics and used this in a remarkable application of these new ideas to Diophantine approximation which I will now describe.

Among the equidistribution theorems that H. Weyl proved in his famous 1916 paper is the result that for any increasing sequence of integers a_n the fractional parts of $a_n x$ are equidistributed for a.e. real number x . For $a_n = n$ the only exceptions are rational numbers. However if a_n is a lacunary sequence, i.e. the ratios a_{n+1}/a_n are bounded away from one, then there are uncountably many exceptions. While the semigroup p^n is lacunary, the semi-group generated by co-prime integers p, q , i.e. $\{p^n q^m\}$ is easily seen to be non-lacunary. Hillel showed that for any non-lacunary semi-group Σ of integers and

every irrational θ the fractional parts of $\{\sigma\theta: \sigma \in \Sigma\}$ are dense in $[0, 1]$. Another way to formulate this is that the only closed invariant sets for the action of Σ on the unit circle $\mathbf{S} = \{z \in \mathbb{C}: |z| = 1\}$ by $z \rightarrow z^\sigma$ are finite sets of roots of unity and $\mathbf{S}$ itself. In contrast, for the action on $\mathbf{S}$ which is generated by a single integer k , there is a host of distinct invariant closed sets. These invariant sets can have arbitrary Hausdorff dimension between zero and one. This was the first 'rigidity result' that exhibited the dramatic difference between the action of a single transformation and an action by several commuting transformations.

In the setting of ergodic theory Hillel suggested that an analogous result should be true. Namely that the only purely non-atomic measure on $\mathbf{S}$ invariant under such a semigroup Σ is Lebesgue measure. This problem remains open until today.

The best partial results were obtained more than thirty years ago in works by R. Lyons, D. Rudolph and A. Johnson [29, 30, 31]. Without entering the detailed story the final result they achieved was that if the semigroup leaves a measure μ invariant, and μ has positive entropy under the action of some element of the semigroup then μ equals Lebesgue measure.

In most of the more recent works on rigidity of higher rank actions of algebraic origin there is a similar important role played by the entropy. It is these results in homogeneous dynamics that have had many applications to number theory and Diophantine approximation not to mention quantum unique ergodicity. I will say more about these matters below.

1970s

Returning to what came after the paper on disjointness, Hillel realized that the Diophantine result suggests some sort of transversality between the actions of multiplication by p and multiplication by q . He explored this in a lecture in 1969 at a symposium honoring his mentor S. Bochner [13] where he again developed some new ideas and formulated several conjectures which have stimulated many further developments. The study of the Hausdorff dimension of sets of the type that Hillel was considering in this paper was quite a narrow field fifty years ago. The work of B. Mandelbrot on fractals popularized the field and was one of the stimuli to many attempts to settle these conjectures. Quite

recently one of these conjectures was established independently by P. Shmerkin [32] and M. Wu [33] and I shall describe this in some detail as a nice illustration of the depth of Hillel's insights.

Let $\dim$ denote the Hausdorff dimension function for subsets of (X, d) , a compact metric space. Two closed subsets A, B of X are defined by Hillel to be *transverse* if

$$\dim(A \cap B) = \max\{0, \dim A + \dim B - \dim X\}.$$

Two continuous mappings T, S from X to X are said to be *transverse* if for all closed sets A and B that are T and S invariant, respectively the sets A, B are transverse.

The conjecture in question is:

Conjecture (1970). *Two positive integers a, b are said to be multiplicatively independent, if the ratio of their logarithms is irrational. For an integer m denote by T_m the map of the unit interval to itself defined by $T_m(x) = mx \pmod{1}$. The mappings T_a, T_b are transverse for all multiplicatively independent integers a, b .*

The two proofs of this conjecture by Shmerkin and Wu are quite different. Wu's proof makes use of one of the novel tools developed by Hillel in [13] to obtain some partial results towards his conjecture. Hillel introduced there spaces of measures on trees and Markov processes on these spaces. These ideas were later elaborated and given a geometric form as 'CP-processes'. Rather than giving a detailed definition of these processes I will quote Hillel's abstract to his 2008 paper titled 'Ergodic fractal measures and dimension conservation' [20]:

"A linear map from one Euclidean space to another may map a compact set bijectively to a set of smaller Hausdorff dimension. For 'homogeneous' fractals (to be defined), there is a phenomenon of 'dimension conservation'. In proving this we shall introduce dynamical systems whose states represent compactly supported measures in which progression in time corresponds to progressively increasing magnification. Application of the ergodic theorem will show that, generically, dimension conservation is valid. This 'almost everywhere' result implies a non-probabilistic statement for homogeneous fractals."

Coming back to his work on random walks and Lie groups in 1971 he published

"Random walks and discrete subgroups of Lie groups" [15] in which he gave a new application of probability theory to group theory. A discrete subgroup Γ of a non-compact connected Lie group G is called a *lattice* if the quotient space G/Γ has finite measure. This means that, there is a subset $D \subset G$ with finite left-invariant Haar measure and the translates $D\gamma, \gamma \in \Gamma$ cover G . Hillel's main result was that a lattice subgroup of $SL(d, \mathbb{R})$ cannot be isomorphic to a subgroup of $SL(2, \mathbb{R})$ (discrete or not). His proof goes via the study of the maximal boundaries and the Poisson boundaries. He constructs a random walk on a lattice subgroup Γ of $SL(d, \mathbb{R})$ whose Poisson boundary coincides with the maximal boundary of $SL(d, \mathbb{R})$. This work is related to the well-known Mostow rigidity and the methods of Hillel influenced the work of G. Margulis on super-rigidity.

At the retirement conference for G.A. Hedlund, one of the pioneers of the modern study of topological dynamics, Hillel presented his proof of the unique ergodicity of the horocycle flow. This was published in the following year [16] in the proceedings of that meeting. To explain this result we need to define what is the horocycle flow and what is unique ergodicity. A real flow (X, T_t) , here the acting group is the reals, is said to be *uniquely ergodic* if it has a unique invariant measure. This measure is ergodic and the system has a unique minimal set. The restriction of the action to the minimal set is strictly ergodic. As a consequence it follows that all orbits of the flow are equidistributed.

The horocycle flow has for its state space the unit tangent bundle of a 2-dimensional surface with constant negative curvature. The universal cover of such a space is the hyperbolic plane. In the unit disc model for the hyperbolic plane the geodesics are described by circular arcs that are perpendicular to the boundary. The horocycles are circles tangent to the boundary. Algebraically one can describe this as follows. Let $G = SL(2, \mathbb{R})$ and Γ a cocompact discrete subgroup. Let $X = G/\Gamma$ and T_t denote the one parameter subgroup $\begin{pmatrix} 1 & t \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ which acts on X by multiplication on the left. This is one of the two horocycle actions, the other is described by $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ t & 1 \end{pmatrix}$. Hedlund had shown that these horocycle flows were minimal and Hillel proved that they are also uniquely ergodic — hence strictly ergodic. This result was the first in a long series of

results classifying the invariant measures for actions by unipotent groups on homogeneous spaces. The major work here was done by Marina Ratner and the theory that she developed, called simply Ratner theory has been widely employed in applications of homogeneous dynamics to number theory and geometry.

In 1975 the Israeli Institute for Advanced Studies was established at the Hebrew University of Jerusalem. This institute has no permanent members, but serves as the venue for semester-long, or year-long, programs of intensive international activity in a specialized area. In the first year of the Institute, 1975–1976, Hillel was among the organizers of the program in ergodic theory. This included Donald Ornstein, from the US, Jean-Paul Thouvenot from France, Mike Keane from Holland, and others. There were also many visitors and among them was Konrad Jacobs, who was the leading figure in ergodic theory in Germany in the preceding period. At that time he was more interested in combinatorics and he gave a colloquium talk in which he presented E. Szemerédi's proof of the Erdős–Turan conjecture on arithmetic progressions in sets of integers with positive density.

Having learned about the result Hillel went on to give a completely different proof using methods from ergodic theory [17]. The first part of the new proof is formulating a result in ergodic theory which is equivalent to Szemerédi's theorem. This result is a far reaching generalization of the Poincaré recurrence theorem, it reads:

Theorem 2. *If $(X, \mathcal{B}, \mu, T)$ is a measure preserving system and $A \in \mathcal{B}$ has positive measure then for any positive integer k there is some $n > 0$ such that*

$$\mu(A \cap T^n(A) \cap T^{2n}(A) \cap \dots \cap T^{kn}(A)) > 0.$$

Poincaré's theorem is the case $k=1$ and this is called the multiple recurrence theorem. The fact that one can deduce Szemerédi's theorem from this multiple recurrence theorem was immediately clear to Hillel because it follows from what is now called the 'Furstenberg correspondence principle' which Hillel first exploited to great benefit in his thesis on prediction theory. This principle gives a precise rendering of the heuristics whereby the integers are seen as a measure space, density of a set representing its mea-

sure and the shift operation, $x \mapsto x + 1$, a measure preserving transformation. The existence of an arithmetic progression $\{a + id, i = 0, 1, \dots, k\}$ in a set of positive density takes on the meaning of a point in a set of positive measure recurring in the set after a power of the measure preserving transformation is applied k times in succession.

In the other direction it is straightforward to see that the combinatorial theorem implies the ergodic version. Having established this equivalence the big task remained of proving this multiple recurrence theorem. The first reduction is to use the ergodic decomposition of an arbitrary measure preserving transformation to an integral of ergodic systems. It remains then to establish the theorem for ergodic systems.

On the one hand it is quite easy to establish it for the Kronecker systems, which correspond to rotations on a compact group. At the other extreme are the *weakly mixing* systems. These are systems for which the unitary operator associated to the measure preserving transformation has no non trivial eigenfunctions. An equivalent definition is that the direct product of the system with itself is ergodic under the diagonal action. For these weakly mixing systems Hillel proved a multiple ergodic theorem, generalizing von Neumann's mean ergodic theorem. The multiple recurrence then follows from this.

The really difficult task was combining these two extreme kinds of behavior. For this Hillel developed a structure theorem for all ergodic systems. The first part is a measure theoretic analogue of distality. A *measure distal* system is one which can be represented as a tower of isometric extensions beginning with a Kronecker system. This is modeled on his structure theorem for distal transformations in the setting of topological dynamics. Next he generalized the notion of weakly mixing from simple systems to their extensions. A measure preserving system $(X, \mathcal{B}, \mu, T)$ is an *extension* of a measure preserving system $(Y, \mathcal{C}, \nu, S)$ if there is a measurable mapping $\pi: X \rightarrow Y$ mapping μ to ν and satisfying $\pi T = S\pi$. The extension is *relatively weakly mixing* if the relative product of X with itself over Y is ergodic. The exact definition of relative product is somewhat technical and I will omit it. Hillel's structure theorem can then

be formulated as follows (A similar result was obtained independently at the same time by R. Zimmer).

Theorem 3. *An arbitrary ergodic system is a relatively weakly extension of a measure distal system.*

Using this Hillel was able to fully prove the multiple recurrence theorem. Shortly afterwards the new methods showed their strength in the proof of a new combinatorial result on subsets with positive density in $\mathbb{Z}^d$. This work which was done jointly with Yitzhak Katznelson [24] was based on a generalization of the multiple recurrence theorem in which the powers of the transformation T were replaced by a general collection of $k + 1$ commuting measure preserving transformations $\{T_0, T_1, \dots, T_k\}$.

1980s–today

Hillel gave a marvelous exposition of these and many other results in his monograph *Recurrence in Ergodic Theory and Combinatorial Number Theory* [18], which was based on the Porter Lectures that he gave at Rice University in 1978. This monograph opened up an entire new field in the interface between dynamical systems and combinatorial number theory. Over the next ten years in a series of papers written jointly with Katznelson the new methods were able to prove many new combinatorial theorems. The paper which culminated the series titled 'A density version of the Hales–Jewett theorem' [26] established a density version of the combinatorial Hales–Jewett theorem, much as Szemerédi's theorem is a density version of the classic van der Waerden theorem.

Here is what the theorem says. One generalizes the notion of an arithmetic progression to something purely combinatorial. Let $WN(A)$ be the set of all words of length N over the alphabet $A = \{a_1, a_2, \dots, a_k\}$. For any $x \in A$ consider a word $w \in WN(A)$ in which x occurs at least once. Let $L = \{w(a_1), w(a_2), \dots, w(a_k)\}$ where $w(a_j)$ is obtained from $w(x)$ by replacing all copies of x by a_j . Then L is called a *combinatorial line*.

Theorem 4. *For any $\epsilon > 0$ and integer k there exists an $M(\epsilon, k)$ such that if $N > M(\epsilon, k)$ any set $S \subset WN(A)$ with cardinality $|S| > \epsilon N^k$ contains a combinatorial line.*

Here is a more geometric version which can be easily deduced from the above.

Theorem 5. *There is a function $Q(\epsilon, q)$ defined for $\epsilon > 0$ and q a prime power, so that if F is the field with q elements and V is a vector space over F of dimension $N > Q(\epsilon, q)$, and if $S \subset V$ is a subset with cardinality $|S| > \epsilon q^N$, then S contains an affine line.*

This latter theorem was established several years earlier in [25]. These results have been vastly extended over the years by many people, including Vitaly Bergelson [2] who was a student of Hillel. Bergelson's achievements include replacing arithmetic progressions by patterns based on polynomials of higher degree. In another development inspired by Hillel's structure theorem for ergodic systems a more refined structure theorem was found which involves special types of isometric extensions involving compact nilmanifolds. This was done in joint work of Bernard Host and Bryna Kra [28], and independently by Tamar Ziegler [34], who was also a student of Hillel. The role that the nil-systems play in the study of what have become to be known as non-conventional ergodic averages was originally discovered by Hillel and me, and appeared for the first time in the papers by J.-P. Conze and E. Lesigne [5, 6]. It was elaborated and applied to polynomial patterns in sets of positive density in [27].

Hillel returned to homogeneous dynamics in his paper titled 'Stiffness of group actions' [19]. In it he introduced the new notion of *stiffness*. If ν is a probability measure on a group G then an action of G on a space X is ν -*stiff* if every ν -stationary measure on X is invariant. Hillel showed that for carefully chosen ν on $SL(d, \mathbb{Z})$, namely probability measures ν so that the corresponding stationary measure on the boundary of $SL(d, \mathbb{R})$ is absolutely continuous with respect to Lebesgue, the action of $SL(d, \mathbb{Z})$ on $\mathbb{T}^d$ is ν -stiff. He conjectured that this should be true for any measure whose support generates $SL(d, \mathbb{Z})$. This insight was more than confirmed about ten years later in [3, 4], and further greatly generalized in [1].

In [22] Hillel and Glasner embark on a general study of stationary dynamical systems, that is actions of a group

G with a probability measure m and an action of G on a space X equipped with an m -stationary measure ν . They develop a general theory of factors, extensions and conditional measures. They prove a structure theorem and use it to establish a theorem of Szemerédi type for the group $\mathrm{SL}(2, \mathbb{R})$. In a further paper [23] they use the structure theorem to prove a version of multiple recurrence for sets of positive measure in a general stationary dynamical system.

Hillel came back to his ideas about fractals and ergodic theory in a wonderful series of lectures at Kent State University

which appeared in [21]. In it he develops a theory of *mini-sets* and *micro-sets* of a closed subset A of $\mathbb{R}^d$. A mini-set of A is just the intersection of A with a small square that is re-scaled to be of unit size, while the micro-sets of A are the limits in the Hausdorff metric of mini-sets of A . There is a new notion of dimension called the star-dimension and ergodic theory is used to show that the star-dimension of a set A is the maximal Hausdorff dimension of a micro-set of A . There are further results connected to preservation of dimension for homogeneous fractals and connections with ergodic theory.

I have tried to give a survey of some of the host of original ideas that are to be found in the publications of Hillel Furstenberg. This published work resembles the tip of an iceberg in the following sense. Generations of students and colleagues have benefited from his ideas spanning a range of mathematics going far beyond the areas I have touched on in the above. In addition his work has inspired countless developments which I have barely touched on. In conclusion I would like to thank Hillel for all that I have learned from him during all these years from 1963 until today. ☺

References

- Yves Benoist and Jean-François Quint, Mesures stationnaires et fermés invariants des espaces homogènes, *Ann. of Math.* (2) 174(2) (2011), 1111–1162.
- V. Bergelson and A. Leibman, Polynomial extensions of van der Waerden's and Szemerédi's theorems, *J. Amer. Math. Soc.* 9(3) (1996), 725–753.
- Jean Bourgain, Alex Furman, Elon Lindenstrauss and Shahar Mozes, Invariant measures and stiffness for non-abelian groups of toral automorphisms, *C. R. Math. Acad. Sci. Paris* 344(12) (2007), 737–742.
- Jean Bourgain, Alex Furman, Elon Lindenstrauss and Shahar Mozes, Stationary measures and equidistribution for orbits of nonabelian semigroups on the torus, *J. Amer. Math. Soc.* 24(1) (2011), 231–280.
- Jean-Pierre Conze, Emmanuel Lesigne, Sur un théorème ergodique pour des mesures diagonales, *C. R. Acad. Sci. Paris Sér. I Math.* 306(12) (1988), 491–493.
- Jean-Pierre Conze and Emmanuel Lesigne, Sur un théorème ergodique pour des mesures diagonales, *Publ. Inst. Rech. Math. Rennes – 1987-1, Probabilités*, Univ. Rennes I, 1988, pp. 1–31.
- Harry Furstenberg, On the infinitude of primes, *Amer. Math. Monthly* 62 (1955), 353.
- Harry Furstenberg, Strict ergodicity and transformation of the torus, *Amer. J. Math.* 83 (1961), 573–601.
- Harry Furstenberg, Noncommuting random products, *Trans. Amer. Math. Soc.* 108 (1963), 377–428.
- Harry Furstenberg, The structure of distal flows, *Amer. J. Math.* 85 (1963), 477–515.
- Harry Furstenberg, A Poisson formula for semi-simple Lie groups, *Ann. of Math.* (2) 77 (1963), 335–386.
- Harry Furstenberg, Disjointness in ergodic theory, minimal sets, and a problem in Diophantine approximation, *Math. Systems Theory* 1 (1967), 1–49.
- Harry Furstenberg, Intersections of Cantor sets and transversality of semigroups, in *Problems in Analysis*, Sympos. Salomon Bochner, 1969, Princeton Univ., 1970, pp. 41–59.
- Harry Furstenberg and Harry Kesten, Products of random matrices, *Ann. Math. Statist.* 31 (1960), 457–469.
- Hillel Furstenberg, Random walks and discrete subgroups of Lie groups, *Advances in Probability and Related Topics*, Vol. 1, Dekker, 1971, pp. 1–63.
- Harry Furstenberg, The unique ergodicity of the horocycle flow, in *Proceedings of the Conference on Topological Dynamics held at Yale University on August 23, 1972, in honor of Professor Gustav Arnold Hedlund on the occasion of his retirement*, Lecture Notes in Mathematics, Vol. 318, Springer, 1973, pp. 95–115.
- Hillel Furstenberg, Ergodic behavior of diagonal measures and a theorem of Szemerédi on arithmetic progressions, *J. Analyse Math.* 31 (1977), 204–256.
- Hillel Furstenberg, *Recurrence in Ergodic Theory and Combinatorial Number Theory*, M.B. Porter Lectures, Princeton University Press, 1981.
- Hillel Furstenberg, Stiffness of group actions, Lie groups and ergodic theory (Mumbai, 1996), *Tata Inst. Fund. Res. Stud. Math.* 14, Tata Inst. Fund. Res., Bombay, 1998, pp. 105–117.
- Hillel Furstenberg, Ergodic fractal measures and dimension conservation, *Ergodic Theory Dynam. Systems* 28(2) (2008), 405–422.
- Hillel Furstenberg, Ergodic theory and fractal geometry, *CBMS Regional Conference Series in Mathematics*, Vol. 120, American Mathematical Society, 2014.
- Hillel Furstenberg and Eli Glasner, Stationary dynamical systems, Dynamical numbers—interplay between dynamical systems and number theory, *Contemp. Math.*, Vol. 532, American Mathematical Society, 2010, pp. 1–28.
- Hillel Furstenberg and Eli Glasner, Recurrence for stationary group actions, *From Fourier analysis and number theory to Radon transforms and geometry*, Dev. Math. Vol. 28, Springer, 2013, pp. 283–291.
- Hillel Furstenberg and Yitzhak Katznelson, An ergodic Szemerédi theorem for commuting transformations, *J. Analyse Math.* 34, 275–291 (1979).
- Hillel Furstenberg and Yitzhak Katznelson, An ergodic Szemerédi theorem for IP-systems and combinatorial theory, *J. Analyse Math.* 45 (1985), 117–168.
- Hillel Furstenberg and Yitzhak Katznelson, A density version of the Hales–Jewett theorem, *J. Anal. Math.* 57 (1991), 64–119.
- Hillel Furstenberg and Benjamin Weiss, A mean ergodic theorem for $(1/N) \sum_{n=1}^N f(T^n x)g(T^{n^2} x)$, *Convergence in Ergodic Theory and Probability* (Columbus, OH, 1993), Ohio State Univ. Math. Res. Inst. Publ., Vol. 5, De Gruyter, 1996, pp. 193–227.
- Bernard Host and Bryna Kra, Nonconventional ergodic averages and nilmanifolds, *Ann. of Math.* (2) 161(1) (2005), 397–488.
- Aimee S.A. Johnson, Measures on the circle invariant under multiplication by a nonlacunary subsemigroup of the integers, *Israel J. Math.* 77(2) (1992), 211–240.
- Russell Lyons, On measures simultaneously 2- and 3-invariant, *Israel J. Math.* 61 (1988), 219–224.
- Daniel J. Rudolph, $\times 2$ and $\times 3$ invariant measures and entropy, *Ergod. Th. and Dynam. Syst.* 10 (1990), 395–406.
- Pablo Shmerkin, On Furstenberg's intersection conjecture, self-similar measures, and the L^q -norms of convolutions, *Ann. of Math.* (2) 189(2) (2019), 319–391.
- Meng Wu, A proof of Furstenberg's conjecture on the intersections of $\times p$ - and $\times q$ -invariant sets, *Ann. of Math.* (2) 189(3) (2019), 707–751.
- Tamar Ziegler, Universal characteristic factors and Furstenberg averages, *J. Amer. Math. Soc.* 20(1) (2007), 53–97.

Shrikrishna G. Dani

*UM-DAE Centre for Excellence in Basic Sciences
Vidyanagari Campus of the University of Mumbai
shrigodani@cbs.ac.in*

Event Abel Prize 2020

Gregory Margulis and the Oppenheim conjecture: some random reflections

Announcement of the Abel Prize to Hillel Furstenberg and Gregory Margulis highlighted once again the important role of ergodic theory and dynamics. Shrikrishna G. Dani who has cherished these topics life-long and had personal contact with both laureates, worked closely with Gregory Margulis on the Oppenheim conjecture. In this article he gives some random reflections on the research on this topic.

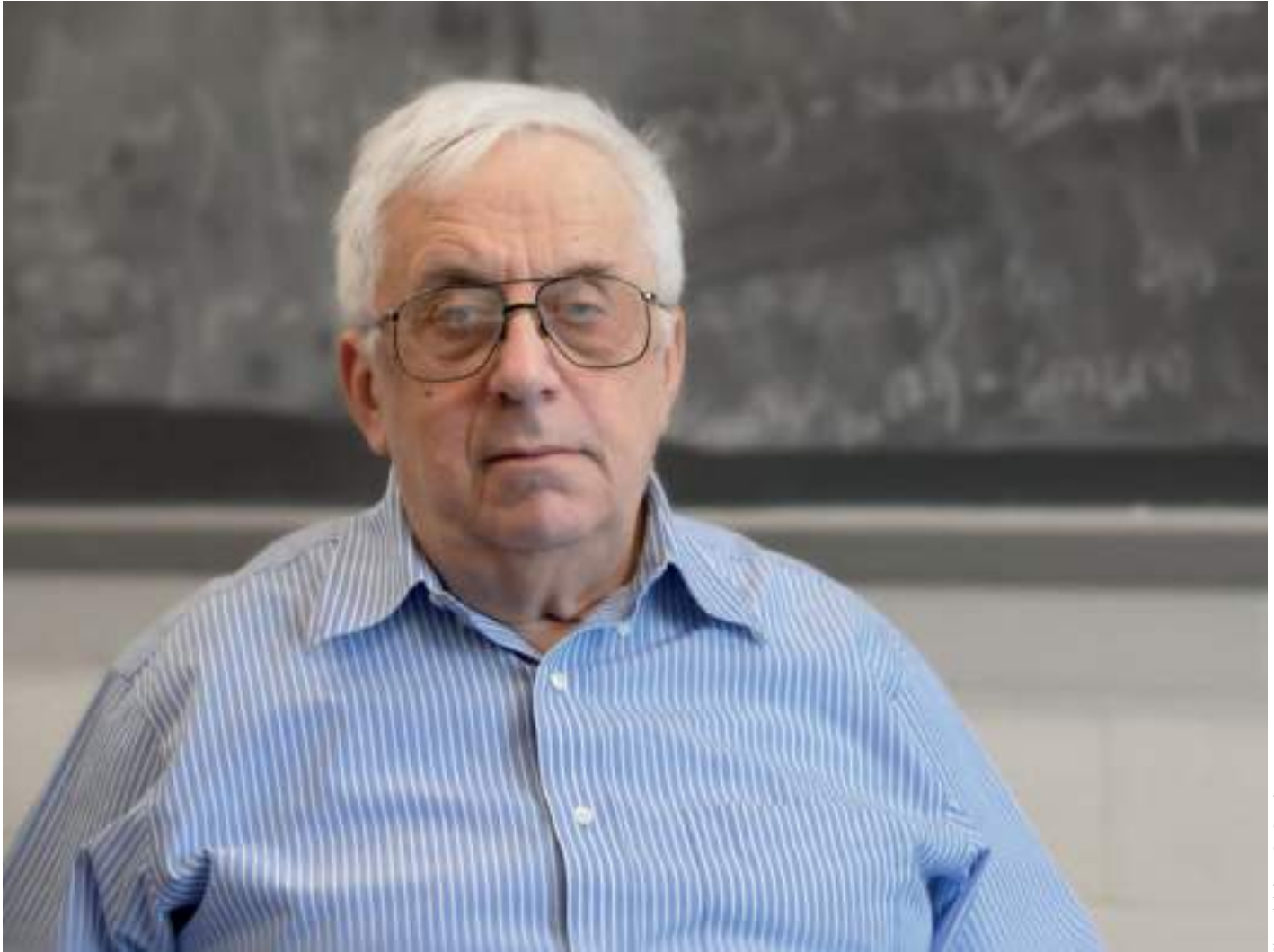
In 2006, on the occasion of Margulis turning 60, a conference was held at the Yale University, which I had the good fortune of being able to participate in, and in the course of my talk I made a reference to my being the collaborator of Margulis with the maximum number of joint papers with him. Though I believe I said it with a casual air, I knew it signified a lot, to me as also to others. Later that day Margulis mentioned to me, with no comment of his own, that G.A. Soifer had said to him that my assertion is not true and that he holds the claim. I remember looking into it and confirming, and telling Margulis, with some argument, that my statement did hold. Whatever the

precise status regarding comparisons in this respect, my identity as one of Margulis's principal collaborators has had a long life in public memory, and I often find people looking up to me in that spirit. Unfortunately the story underlying this concerns only a relatively short period, and more importantly relates only to the specific area around the Oppenheim conjecture and what has now come to be called homogeneous dynamics; I find the latter part a major limitation, though of course the area has been an important component of our respective profiles. As such find myself quite inadequate for instance to take on the role of a 'mathematical biographer'

of Margulis, though it would have been a very worthy cause in the context of his immense success, not only in terms of recognitions he has received, the Abel Prize being the latest feather in his cap, but also his bringing new direction and horizons to the broad area of ergodic theory and dynamics, transforming it radically, which would count for more for a future historian of mathematics. Here is however a feeble attempt to jot down my thoughts on our period together, that would hopefully become in some measure a part of a larger narrative at some stage.

The Oppenheim conjecture

While there are many layers to our mathematical relationship, it is the work on the *Oppenheim conjecture* that somehow stands out as a defining feature. The conjecture goes back to a 1929 paper of A. Oppenheim where it was proposed that



Gregory Margulis

Photo: abelprijs.no, Dan Rezetti

if Q is a real nondegenerate indefinite quadratic form in $n \geq 5$ variables which is not a scalar multiple of a form with rational coefficients (to be briefly referred to as ‘irrational’), then $|Q(x)|$ takes arbitrarily small values, as x runs over the set of all non-zero integer n -tuples. It may be recalled that for such a form with rational coefficients, by Meyer’s theorem there in fact exist non-zero integer n -tuples at which the value is zero, which apparently inspired the preceding statement, as well as the condition $n \geq 5$. It was realized later that in the case of irrational forms the same should hold for $n \geq 3$, and in particular this was stated as conjecture for diagonal forms in a paper of Davenport and Heilbronn in 1946. That the corresponding statement is not true for $n = 2$ is a simple consequence of the existence of what are called *badly approximable numbers*. In the sequel we shall thus understand the conjecture to be:

Oppenheim conjecture. *Let Q be a non-degenerate indefinite irrational quadratic form in $n \geq 3$ variables and let*

$$m(Q) = \inf\{|Q(x_1, \dots, x_n)| \mid x_1, \dots, x_n \in \mathbb{Z}, \max\{|x_1|, \dots, |x_n|\} > 0\}.$$

Then $m(Q) = 0$.

There is seen to have been considerable enthusiasm among number theorists for decades since its formulation, and numerous partial results were proved under various additional conditions involving a lower bound on the number of variables, or the signature of the form, or the structure of the form (e.g. diagonal form). The attention received by the problem is aptly illustrated by the survey article by D.J. Lewis [10], from 1973, covering the results obtained until the early 1970s.

For an enlightening account of the history of the results and methods from a lat-

er perspective, but covering also the early works insightfully, I strongly recommend to the reader the paper [13] of Margulis, which has been aptly titled simply as ‘Oppenheim conjecture’. In the opening paragraph the author states: “The different approaches to this and related conjectures (and theorems) involve analytic number theory, the theory of Lie groups and algebraic groups, ergodic theory, representation theory, reduction theory, geometry of numbers and some other topics. A comprehensive survey of the methods related to the Oppenheim conjecture is thus a long story.” Indeed, the story unfolds beautifully through the article.

The approach of the proof

One of the crucial ingredients in the subsequent complete proof of the conjecture by Margulis is what is called the Mahler compactness criterion.¹ The approach in-

volved in Margulis's proof of the conjecture consists of considering the action on the homogeneous space $SL(3, \mathbb{R})/SL(3, \mathbb{Z})$ by $SO(2, 1)$ (by multiplication on the left) and exploiting the fact that in view of the Mahler criterion the Oppenheim conjecture is essentially equivalent to the statement that every orbit of the $SO(2, 1)$ -action which is contained in a compact subset of $SL(3, \mathbb{R})/SL(3, \mathbb{Z})$ is compact. The initial understanding was that application of the Mahler criterion to the problem at hand, and even considering the issue in terms of lattices, is a phenomenon of the 1970s (more on this later), an important message in [13] is that these ideas are found, at least in a germinal form, in a 1955 paper of J.W.S. Cassels and H.P.F. Swinnerton-Dyer. Margulis recalls a good deal of details from the paper to bring out the point.² Referring to the equivalent condition in the group-theoretic framework as above Margulis comments "...in implicit form this equivalence appears already in Sec. 10 of [CaS] (and, in fact, is used to prove some of the results of the paper [CaS])." (Here [CaS] refers to [2], the 1955 paper by Cassels and Swinnerton-Dyer.) Margulis then notes that as that paper did not use the language of the theory of dynamical systems, for a long time the relation between the Oppenheim conjecture and problems in dynamical systems remained unknown to people studying group actions on homogeneous spaces, and that this changed when M.S. Raghunathan rediscovered the connection in the mid-seventies. He notes also that he was himself inspired by Raghunathan's observation, to follow the homogeneous space approach that lead him eventually to establishing the validity of the conjecture.

Interestingly M.S. Raghunathan, who was my thesis advisor at the Tata Institute of Fundamental Research, has no paper on the topic. The connection attributed to him as above was first noted in my paper [3], together with a more general conjecture proposed by him (and a related conjecture of my own). A few words regarding the overall context around this may be in order here. I should begin by mentioning that the 'Oppenheim conjecture' was very much a topic of general mathematical chat at the Tata Institute during the early 1970s, with the number theorist colleagues K.G. Ramanathan and S. Raghavan having made contributions related to the conjecture, in

the more general framework of algebraic numbers; (see [15, 16]). My wife, Jyotsna Dani, did her doctoral work with Raghavan. At the early stages of her work I had a joint paper with her, in the direction which later turned into the topic of the thesis, which was inspired by a suggestion of Raghavan. Referring to her thesis paper Raghunathan states in [17]: "Around this time Jyotsna wrote a paper on the density of certain subsets of the $\mathbb{R}$ -points of a vector space over a finite dimensional central division algebra over $\mathbb{Q}$. During some discussions about the paper with Dani, I realised that the question dealt with had a larger context and I suggested that one should look at orbits of horocycles in homogeneous spaces of finite Haar measure of semi-simple Lie groups." Actually he specifically suggested that the closures of orbits of unipotent one-parameter subgroups on G/Γ , where G is a Lie group consisting of $\mathbb{R}$ points of a semisimple algebraic group and Γ is a lattice in G , ought to be closed orbits of possibly larger subgroups of G , and pointed out how it would give a proof of the Oppenheim conjecture. I vividly remember his words, I may add, conveyed partly in jest, sitting on an office table with legs dangling, "call it my conjecture and prove it".³ I complied with the first part, in [3], where I found a suitable context in terms of the theme involved.⁴ If my understanding is correct Margulis became aware of the conjecture and the approach that was being proposed, before a written version of [3] materialized (even as a preprint), through another colleague, Gopal Prasad.

The news about the proof

The conjecture is known to have been proved by Margulis in 1984; the news spread rather slowly in those pre-email days, largely by word of mouth, and a few letters by post. I remember listening to a purported sketch of the proof, perhaps third or fourth hand in a chain involving David Kazhdan near the other end, in 1985 I think; what was described was hardly clear to me, and did little more than instilling a belief that a proof was indeed in place; curiously, and disappointingly, no details are found in [13] (which would have been a natural place to look for them) of any intermediate stages, and only published papers are mentioned and referred to, beginning with the *Comptes Rendus* announcement that appeared in

1987. I remember receiving a preprint in August 1987, with a clear and detailed proof, which later appeared in published form in 1989. A somewhat stronger form of the conjecture as mentioned above was proposed by Oppenheim in a 1952-paper, according to which for Q as in the earlier statement, for every $\epsilon > 0$ there exists an integral n -tuple x such that $0 < |Q(x)| < \epsilon$ (the first inequality is additional). Armand Borel mentions in [1]: "When informed (by the author, October 1987) of the fact that the Oppenheim conjecture was a slightly stronger one, he [Margulis] quickly completed his argument..." The latter appeared in [11].

Visiting the Max Planck Institute

It is common knowledge that as a Jewish mathematician in the former Soviet Union, Margulis faced discrimination in various ways and in particular could not be present at ICM-1974 at Helsinki to receive the Fields Medal that he was awarded that year. For an illuminating account around this the reader is referred to [14]. I may mention here that I found Margulis surprisingly devoid of bitterness or rancor on the count, seemingly attributing it to general inefficiency of the administrative systems in the USSR of the time—but, of course, my contact with him was well over a decade and half after the events in question.

By the late eighties the situation had changed substantially for better and Margulis was able to visit many institutions in the west. In particular in 1988 he was visiting the Max Planck Institute, Bonn, and he arranged with the help of Günter Harder, for me to visit there for a month. That period happens to be one of the most memorable ones of my life. At the Tata Institute and various other institutions of learning that I had the opportunity to visit by then, I had of course come face to face, and there were also mathematical interactions and socializing, with many illustrious mathematicians, but I was nevertheless quite overwhelmed by the weight of the situation that I was closeted with a Fields Medalist of yore who had now also solved a problem that I had prized, specially for the purpose of research collaboration. Margulis however put me completely at ease from the very first moment. I had at that time some results on minimal sets and it turned out that using them we could



Gregory Margulis with Armand Borel and David Kazhdan at the 2001 conference in honour of Raghunathan's 60th birthday.

Credit: TIFR Archives

strengthen the theorem proved by Margulis and its application to the Oppenheim conjecture.⁵ At some point when it became clear that we had landed on something worthwhile Margulis declared we should write it up for publication. Having been aware of some Russian works in which the author names were not in the alphabetical order, I remember asking Margulis in what order our names are to appear as authors, and being relieved by his reply, conveyed in all simplicity!

The month was hectic and I do not recall doing any sightseeing in Bonn during that visit (I may hasten to add that it was not my first visit there, so it did not bother me much). Various details had to be worked out. It was impressive to see Margulis addressing issues that arose along the way. It was not always easy to understand the solutions he offered at various stages. This was usually on account of the intricacies of his thought process, but sometimes also on account of linguistic issues. I remember once on our way to lunch I was mentioning to him a difficulty with a step in our plan and he kept insisting there is no difficulty — it is a case of “what is it called”, he said, trying to indicate what he meant by gestures, and then by way of a clue added “what you have for a map”. I temporarily gave up, as we were approaching the lunch place⁶, saying I will think it over. Only hours later I realized that the word he meant was ‘scale’ and he meant to say

that it is essentially a matter of rescaling, and indeed it was, when viewed in a certain way.

The task of writing out the result was upon me. This was still before the days when computers began to serve mathematicians as tools for keying in and editing their papers. Though apparently word-processors of some kind did exist I had never had the opportunity to set my eyes on one. The route to birth of a preprint went through a handwritten manuscript, to be passed on to a secretary/typist for type-writing it. The manuscripts themselves needed to be rewritten several times, since while the scope for editing a version, and perhaps more honestly the need for it on account of finding things unsatisfactory or erroneous, is often unbounded, the amount of editing a handwritten version can take in while still remaining comprehensible (and acceptable) to one's typist, is quite limited. The step of producing a satisfactory version was completed after returning to the Tata Institute; the paper reached the editors of *Inventiones Mathematicae* on 17 November 1988, and was published in 1989. In the meantime an announcement of the result with a short sketch of proof was also published in *Comptes Rendus*. Our result in the paper marked a certain convincing step between the Oppenheim conjecture and the Raghunathan Conjecture, or more accurately its generalized version which was later formu-

lated by Margulis for actions of a larger class of subgroups, than the unipotent one-parameters subgroups for which I had originally recorded it.

Indo–Soviet exchange program

Around this time there were also positive developments with regard to scientific exchanges with the USSR on the eastern front, and especially between India and USSR, which was to play a beneficial role towards continuation of our collaboration. An Indo–Soviet exchange programme had been set up, between the Department of Science and Technology of the Government of India on the Indian side and the USSR Academy of Science on the other side. And the person in-charge of the programme for mathematics from India was none other than my former teacher and colleague at TIFR, and the very spirit behind the conjecture I was after, M.S. Raghunathan. Thus it was a simple matter to wrangle for me to visit the USSR for a month, and subsequently also a visit by Margulis to the Tata Institute.

It was thus that I landed in Moscow in the winter of 1988–89 to be with Margulis for the second time. I was put up in the residency of the USSR Academy of Science which also housed at the time many Indians working in other areas of Science. While this brought some comfort in the cold and depressing weather, it also exposed me to some collective grumbling that the Academy was exploiting the exchange programme to put to use its facility which was otherwise unusable in the winter. Many of them felt short-changed to have had to undertake the visit during the period.⁷ As for myself, I would not have wanted to wait for good weather, given what was on my mind.

In Moscow I never got to see Margulis' office at, or even the general premises of, the Institute of Information Transmission, which finds much mention in writings on Margulis as a not so coveted academic institution to which he got consigned to, which nevertheless proved beneficial on account of exposing him to a problem on graphs related to information transmission that he beautifully solved.⁸ Margulis would visit me regularly at the residency and we would discuss our mathematics in my room there. In a way this suited me well, given the cold weather outside, but it gave a bit of a strange feeling that I was

unused to. Our endeavour during this time was to try and apply Margulis's technique in the proof of the Oppenheim conjecture to make further progress towards the Raghunathan conjecture. We set out with the case of the action of what we called the generic unipotent one-parameter subgroups of $SL(3, \mathbb{R})$ (viz. those for which the set of fixed points in $\mathbb{R}^3$, under the natural action, is one-dimensional), acting on the homogeneous space $SL(3, \mathbb{R})/SL(3, \mathbb{Z})$. We were able to establish the Raghunathan conjecture for these one-parameter subgroups. From the results we could deduce existence of solutions of inequalities as in the Oppenheim conjecture for a ternary quadratic form, which are at the same time near to a plane passing through the light cone of the quadratic form. As the work-out seemed rewarding enough in itself, it was turned into a paper. The work on the paper was however completed only during the subsequent visit of Margulis to Mumbai in March 1989, and the paper submitted in June 1989.

During the Moscow visit I had the privilege of visiting Margulis's home, and enjoying a lovely dinner and warm hospitality extended by him and his wife. On the day of my departure Margulis came to the residency to see me off. When everything was packed and I was all set to start to leave for the airport, Margulis mentioned to me a Russian custom that when you are ready and setting out on a journey you should sit and rest peacefully for a few moments. This I found rather interesting, and I often find myself putting it into practice since then.

An undemanding guest

Margulis's visit to India in March 1989, mentioned above, was for me mathematically just a continuation of our previous meeting, but at a personal level it greatly highlighted how simple and undemanding a guest he was, in terms of services at the accommodation and food habits. One day when I met him at the guest house I realized that he had somehow missed breakfast. I lived close by so I took him home. My idea was that my wife will fix something for him (regrettably I have been a typical Indian male), but on reaching home I found that she had been out. After an uncomfortable wait (there were no mobile phones then to ascertain the status) I decided to find something in the fridge and warm it up for him. I found some *sabu-*

dana khichadi which I thought would be a good choice, as it had some similarity with a snack I had in Russia. I warmed it up in our microwave and put it in a plate for serving to him. Even as I was readying the dish I had a feeling that something was not quite right, but not finding any alternative I served it for him, and a small portion for me to keep him company. On returning home my wife informed me that that stuff was never supposed to be warmed in a microwave, as it becomes chewy, and should have been warmed on a pan, over a bit of butter — one lives and learns; fortunately none of such home stuff is known to turn toxic by such misadventures. Margulis however finished the plateful clean, showing no sign of disapproval, and our discussions on the problem at hand proceeded unmindful of the parallel event!

ICM at Kyoto

In 1990 Margulis was invited to give a plenary talk at the ICM in Kyoto. This evidently gave him an occasion to reflect comprehensively on the developments in the topic and put the newfound knowledge and ideas in perspective. The formulations and conjectures that he put out in the talk and the associated article have played a major role in orienting subsequent researches on the topic. The Littlewood conjecture which is one of the problems which he highlighted, together with an approach based on dynamics on homogeneous spac-

es, akin to that for the Oppenheim conjecture, has been a theme involved in much subsequent work, and has brought more Fields medals to the area, even as in its complete form it remains unsolved as yet.

The Göttingen connection

I had the opportunity to spend the academic year 1990–91 and also the following summer of 1991, in Göttingen, at the invitation of Manfred Denker, under Sonderforschungsbereich-170, a special programme in Germany at that time aimed at promoting advanced research. Actually much of the year went by with my focusing on my other mathematical love, the theory of probability measures on groups. However, for the summer I was able to have a visit of Margulis to Göttingen arranged under the programme, and this made a big difference.

By this time the scenario around the Oppenheim and Raghunathan conjectures had changed dramatically, with the Raghunathan conjecture having been proved by Marina Ratner, in her landmark work. During the year Shahar Mozes and I had thought of some ideas on how Ratner's theorem on uniform distribution of trajectories of unipotent one-parameter subgroups may be applied to get some quantitative results related to the Oppenheim conjecture. However, Margulis came up with the crucial insight that rather than uniform distribution of individual trajectories, which



M.S. Raghunathan, author of the Raghunathan conjecture.



Gregory Margulis in the audience at one of the talks at the 2001 conference in honour of Raghunathan's 60th birthday. Jyotsna Dani is seen at his right in the row behind him. At the front right Yves Benoist and Armand Borel.

Credit: TFR Archives

concerns asymptotics of larger and larger segments of a trajectory from a fixed initial point and following a fixed one-parameter subgroup, we should consider larger and larger segments of trajectories starting from a convergent sequence of points, and following trajectories of a sequence of unipotent one-parameter subgroups, and consider the asymptotic distribution of the sequence of such segments. Such a broadening of perspective was to have a major impact on subsequent research.⁹

In Göttingen we set out to analyse the issue, now using Ratner's classification of invariant measures, and applying it to study quantitative aspects of the Oppenheim conjecture; let me content myself mentioning, without going into technical detail, that we were able to conclude in particular that for a quadratic form Q as in Oppenheim conjecture the number of integer n -tuple solutions x , of inequalities of the form $a < Q(x) < b$, where a, b are real numbers, contained in a ball of radius r centered at the origin, grows asymptotically at least as fast as cr^{n-2} for a constant c which can be explicitly described in terms of the given data. It was a very enriching experience for me to work on this paper with Margulis, with a variety of issues involved along the way. After the visit to Göttingen Margulis moved on to Yale University where he was to settle. I was to continue at Göttingen a little longer, and during this time I had my

first trans-atlantic (or across any seas for that matter) phone calls for a mathematical discussion, to sort out some issues that came up after his departure! It took a rather long time for the ideas to crystallize, as I went along my scheduled visits for the following year to MSRI, Berkeley and the University of Chicago, and a short two-week stint in between at Yale University arranged by Margulis. As I. M. Gelfand was to turn 80 the following year and Margulis had an invitation to contribute to a special issue of the *Advances in Soviet Mathematics*, being brought out in his honour on the occasion, we decided to submit it there, and it appeared as [8]. It has been a paper of ours, that has been cited with quite some regularity so far, for over a quarter century.

Further developments

Our result in [8] was nicely complemented in a work of Margulis with Eskin and Mozes (see [9]) showing that the asymptotic lower bounds correspond to the exact asymptotics involved when the signature of the quadratic form is different from (2,1) or (2,2), and does not hold in general for these cases, there being interesting counter-examples of crucial significance. The asymptotics in particular hold uniformly when $n \geq 5$, which fits well with Meyer's theorem for rational quadratic forms. The proof involves many new ideas from different areas. The result stands out as another

major landmark in the developments along the Oppenheim conjecture.

Much progress has been made in the area both in terms of broadening the scope and strengthening the results about values of the quadratic forms, the issue of effective versions, as well as the parallel problem of the Littlewood conjecture. Various ideas involved in the study have been applied fruitfully, after suitable generalizations, to problems in Diophantine approximation on manifolds, inspired by the Sprindzuk conjecture, in which also Margulis has played a major role. It would however make a much longer story beyond the scope of this narrative. While Ratner's work on invariant measures has provided a good deal of fuel for the activity, insights of Margulis have given it the drive and multiple directions to encompass a wide arena, transforming it beyond recognition.

I have also had the pleasure to contribute a bit of my own, and drawing some comfort that some of it has been of relevance to some of the later work of Margulis and his other collaborators, but I deeply miss the old days of collaboration with Margulis. Indeed our paths did merge now and then later as well, for shorter durations, sometimes with my getting benefit of being his former collaborator, and we did share mathematical discussions, but it could not be the same as before. Margulis was elected Honorary Fellow of the Tata Institute of Fundamental Research in 1996 and we were looking forward to seeing him more often in Mumbai. Unfortunately this was not to happen, though he did visit and participate in a conference that we organized, in 2001, to celebrate Raghunathan's 60th birthday, for which he served also as a member of the Organizing Committee.

Concluding remarks

Let me conclude these reflections with a couple of general comments. To be sure the contents and germinal ideas involved in Margulis's first proof of the Oppenheim conjecture have quite a different flavour from what was to evolve into the current form of the theory of homogeneous dynamics with its role as a major tool for addressing problems in Diophantine approximation, with the latter bearing a large imprint of the work of Marina Ratner on the Raghunathan conjecture, and the classification of invariant measures of flows on homogeneous spaces, in general. Nei-

ther was it the beginning of applications of homogeneous dynamics in number theory, as the cognoscenti would know, as the theme may be traced back at least to L. Auslander and other authors in the sixties, and I had also indulged in such an exercise and made some contributions in the seventies and early eighties. However, Margulis's proof marks a defining moment in the development of the theory, not just because of the spectacular achievement of settling a long-standing conjecture following the theme, but also its role channelling the energy of those working in homogeneous dynamics in dealing with problems

in Diophantine approximation. There is a parallel that may be noted, between the emergence of the area of Geometry of numbers from Minkowski's work on definite quadratic forms and that of the theory of homogeneous dynamics, which I once chose to call 'Dynamics of numbers' (see [5]), from Margulis's proof of the Oppenheim conjecture.

Another important feature of the proof is its great simplicity.¹⁰ In the development of mathematics, as in the case of industry, building up heavy machinery and being able to use it in a massive scale to solve problems methodically, and almost

algorithmically, is of course of paramount importance. However, innovations not involving the machinery of the time, working with bare hands so to speak, have a great appeal, and also play an important role in enabling one to rethink and build up our understanding to new heights. Margulis's proof of the Oppenheim conjecture stands out as an example in this respect. While such innovative, almost magical, ideas normally get integrated into the general theory, it is my feeling, which I believe Margulis would share, that in the present instance the full potential of the ideas still remains to be realized. $\diamond$

Notes

- 1 The criterion states that a sequence $\{\Lambda_j\}$ of lattices in $\mathbb{R}^n$ with a given discriminant (the volume of any fundamental parallelepiped) admits nonzero $x_j \in \Lambda_j$ with $\{x_j\}$ converging to 0 as $j \rightarrow \infty$, if and only if $\{\Lambda_j\}$ is a divergent sequence in the space of lattices; the latter space has a natural locally compact second countable topology with respect to which it is noncompact, and a sequence being divergent means it eventually escapes every given compact subset.
- 2 A further analysis comparing the respective approaches would however be of interest from a historical point of view.
- 3 Unfortunately I have no clear memory as to when this occurred, but the best fit seems to be sometime in 1975–76; in September 1976 I left the US for two years, and it has to be before that.

- 4 The second part unfortunately proved beyond me, but the pursuit was instrumental, I think, in the question being settled eventually by Marina Ratner.
- 5 In the equivalent result in the group theoretic formulation it amounted to proving that every $\mathrm{SO}(2,1)$ -orbit in $\mathrm{SL}(3, \mathbb{R})/\mathrm{SL}(3, \mathbb{Z})$ (not necessarily contained in a compact subset) is closed, unless it is dense, and this would imply that for a quadratic form as in the Oppenheim conjecture values at primitive integral points are dense in $\mathbb{R}$.
- 6 Incidentally, going for these lunches, together with other visitors and sometimes with Harder and/or Hirzebruch was an enjoyable experience; the joy would be augmented when sometimes Hirzebruch, then Director of the Institute, decided to foot the bill for everyone in company.

- 7 To be fair I should mention that the Academy took good care of us, and we were also provided 'interpreters', young people, who would take us around for sightseeing and shopping, so we did not depend for these chores on our collaborators, who may have found it hard to spare their time for the purpose.
- 8 I may mention however that I had the opportunity to visit the Moscow State University, where I participated and also gave a talk in Sinai's Seminar.
- 9 In a somewhat different flavour this featured also in a paper of Alex Eskin, Shahar Mozes and Nimish Shah, but the impact of Margulis's strategy is more direct.
- 10 The simplicity of the original proof also inspired further simplifications as in [7] and [4].

References

- 1 A. Borel, Values of indefinite quadratic forms at integral points and flows on spaces of lattices, *Bull. Amer. Math. Soc.* 32 (1995), 184–204.
- 2 J.W.S. Cassels and H.F. Swinnerton-Dyer, On the product of three homogeneous forms and indefinite ternary quadratic forms, *Philos. Trans. Roy. Soc. London Ser. A* 248 (1955), 73–96.
- 3 S.G. Dani, Invariant measures and minimal sets of horospherical flows on noncompact homogeneous spaces, *Invent. Math.* 64 (1981), 357–385.
- 4 S.G. Dani, On the Oppenheim conjecture on values of quadratic forms, in *Essays on Geometry and Related topics (Memoires Dédies à André Haefliger)*, Monographie de L'Enseignement Math., No. 38, Geneva, 2001, pp. 257–270.
- 5 S.G. Dani, Dynamics of numbers, Presidential address at the 80th Annual Conference of the Indian Mathematical Society, Dhanbad 2014, *The Math. Student* 84 (2015), 7–21.
- 6 S.G. Dani and G.A. Margulis, Values of quadratic forms at primitive integral points, *Invent. Math.* 98 (1989), 405–424.
- 7 S.G. Dani and G.A. Margulis, Values of quadratic forms at integral points: an elementary approach, *L'Enseignement Math.* 36 (1990), 143–174.
- 8 S.G. Dani and G.A. Margulis, Limit distributions of orbits of unipotent flows and values of quadratic forms, *Advances in Soviet Mathematics* 16 (1993), 91–137.
- 9 Alex Eskin, Gregory Margulis, and Shahar Mozes, Upper bounds and asymptotics in a quantitative version of the Oppenheim conjecture, *Ann. of Math. (2)* 147(1) (1998), 93–141.
- 10 D.J. Lewis, The distribution of values of real quadratic forms at integer points, in *Proc. Sympos. Pure Math.*, Vol. XXIV, American Mathematical Society, 1973, pp. 159–174.
- 11 G.A. Margulis, Discrete subgroups and ergodic theory, in *Number Theory, Trace Formulas and Discrete Groups, (Symposium in honour of A. Selberg)*, Academic Press, 1989, pp. 377–388.
- 12 G.A. Margulis, Dynamical and ergodic properties of subgroup actions on homogeneous spaces with applications to number theory, in *Proceedings of the International Congress of Mathematicians*, Vol. I, II (Kyoto, 1990), Mathematical Society of Japan and Springer, 1991, 193–215.
- 13 G.A. Margulis, Oppenheim conjecture, in *Fields Medalists Lectures*, World Sci. Ser. 20th Century Math., Vol. 5, World Scientific, 1997, pp. 272–327.
- 14 G. Daniel Mostow, Margulis, *J. Modern Dynamics* 2(1) (2008), 1–5.
- 15 S. Raghavan and K.G. Ramanathan, On a Diophantine inequality concerning quadratic forms, *Nachr. Akad. Wiss. Göttingen Math.-Phys. Kl. II* (1968), 251–262.
- 16 S. Raghavan and K.G. Ramanathan, Values of quadratic forms, *J. Ind. Math. Soc.* 34 (1970), 253–257.
- 17 M.S. Raghunathan, S.G. Dani as I have known him, *Contemporary Mathematics* 631 (2015), 1–3.

Rob van Oord

Waddinxveen
robvanoord@tiscali.nl

Evenement 27ste Nationale Wiskunde Dagen

Hallo, horen jullie mij?

De kortste NWD

De Nationale Wiskunde Dagen konden dit jaar vanwege de coronamaatregelen niet fysiek plaatsvinden. In plaats daarvan heeft de organisatie een online mini-NWD georganiseerd op vrijdagmiddag 29 januari. Deelnemer Rob van Oord doet verslag.

Door COVID-19 werd de NWD dit keer geheel digitaal gehouden. Alle geplande workshops, waaronder die van Marjan Botke en mij, zijn doorgeschoven naar (hopelijk) volgend jaar. Bij wijze van voorpret kregen we een 'blijde doos' opgestuurd. Daarin een aantal artikelen en flyers. Een SodaStream-waterfles waaruit je je dorst kon lessen tijdens de sessie achter je laptop die middag. Twee chocoladerepen van wiskundemethodes, alsof er maar twee smaken van

zijn... Een bouwplaat van een torentje naar ontwerp van Henk van der Vorst en een mondkapje met de tekst "IK ♥ WISKUNDE". Met een loep kon je de formule van het hartje lezen: $x^2 + (y - \sqrt[3]{x^2})^2 = 1$. Meteen naar even geprint met Geocadabra! Op internet vond ik ook nog andere formules voor een hartje, onder andere

$$\begin{aligned} x &= 16 \sin^3(t), \\ y &= 13 \cos(t) - 5 \cos(2t) - 2 \cos(3t) - \cos(4t). \end{aligned}$$



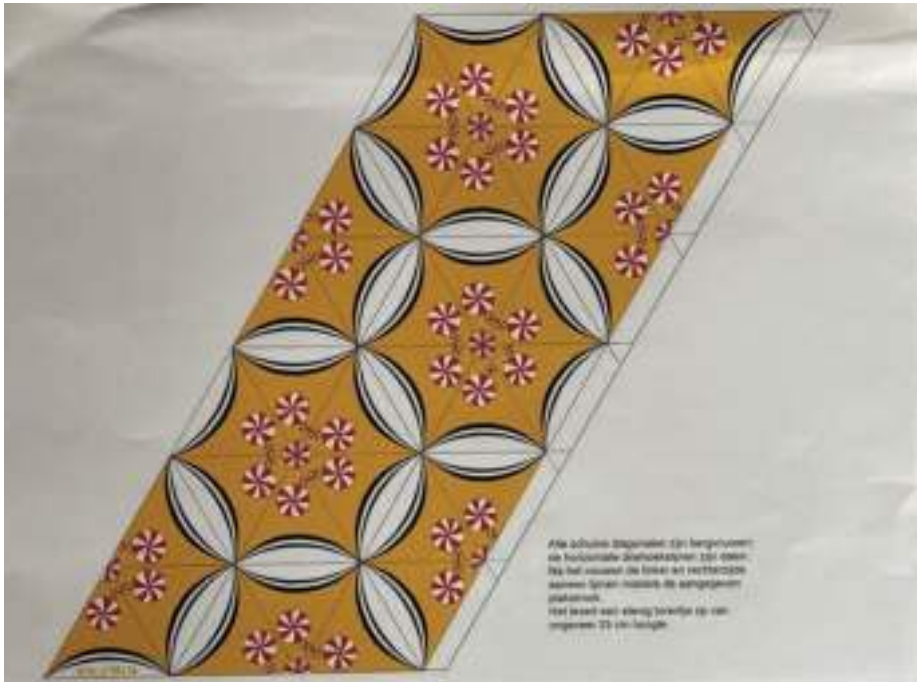
Figuur 1 Mondkapje uit de 'blijde doos'.

Zoom

Met ongeveer 350 collega's werden we via Zoom op de hoogte gehouden van alle activiteiten. Naast het enorme logo van de NWD stond Joke Daemen tussen een kunstwerk van Koos Verhoef en een torentje van Henk van der Vorst. Zo kondigde zij alle onderdelen van de NWD aan. Er was een lounge waarin je elkaar kon ontmoeten. Ik zag vele bekende collegavrienden die ik graag even wat wilde vragen of zeggen. Maar we waren allen *gemutet*, ofwel monddood gemaakt. Ik kon wel met hen chatten, maar nadat ik verschillende berichtjes had ingetikt kreeg ik ze niet verzonden. Met Enter lukte het in elk geval niet. Ik heb het patroon van het torentje op karton geprint, dan wordt het steviger. Met een passer gaatjes op de eindpunten van de vouwlijnen geprikt zodat de dalvouwen op de achterkant geritst kunnen worden. Maar het vouwen na het ritsen van alle vouwlijnen is best nog lastig. Het resultaat zie je in Figuur 2 rechts.

Lezing van Manjul Bhargava

Met bemoedigende woorden opende Robert Dijkgraaf vanuit Princeton deze 27ste editie. Hij liet weten dat data de toekomstige ontwikkelingen in wiskunde bepalen. Hij introduceerde de spreker van de enige lezing aan, de Indiase wiskundige Manjul Bhargava. Manjul werd in zijn jeugd via zijn grootvader, die dichter was, geïnspireerd door Indiase poëzie en muziek. In zijn lezing legde hij uit hoe nauw de po-



Figuur 2 Bouwplaat van een torentje naar ontwerp van Henk van der Vorst. Rechts het resultaat.



ezie in het Sanskriet en ritme verbonden zijn met wiskunde. Elke lettergreep van een gedicht heeft een lengte van 1 tel (k) of 2 tellen (L). Elke regel duurt 8 tellen. Je kunt nagaan dat er op dit gegeven 34 verschillende regels mogelijk zijn. LLLL, kkkkkkkk, LLLkk, LLkkkk, Lkkkkk geeft $1 + 1 + \binom{5}{3} + \binom{6}{2} + 7 = 34$ manieren.

Het aantal mogelijkheden met lettergrepen van 1 of 2 tellen bij regels met n tellen is het n -de getal uit de rij (1,2,3,5,8,...) van Fibonacci. Bij de Indiase cultuur zijn deze getallen sinds 700 v.Chr. bekend als Virahanka-getallen. Manjul legde de recursie van deze getallen als volgt uit. $v(0) = 1$; k ; $v(1) = 2$: kk of L . Het aantal mogelijkheden voor een regel met 1 tel meer is de optelling van het aantal manieren van de vorige term, waarachter 1 korte lettergreep komt (van 1 tel) en het aantal van die daarvoor, elk + 1 lange lettergreep (van 2 tellen) erachter. Kort gezegd voor $n > 2$ geldt $v(n) = v(n-1) + v(n-2)$, dit is juist de recursie van de Fibonacci-getallen. Ik moest denken aan een telprobleem dat ik in mijn lessen deed over het aantal manieren waarop een kikker over een beek heen kan springen met n stapstenen erin. Een kikker kan per sprong 1 of 2 stenen verder springen. Dit leidt ook tot een Fibonacci-getal voor het aantal manieren waarmee hij naar de overkant kan springen, met 1 of 2 stenen tegelijk. Deze leidraad bij de Indiase gedichten mondde uit

in een vuistregel ya ma ta ra ja bha na sa la ga, waarbij de onderstreepte lettergrepen 2 tellen zijn en de niet-onderstreepte 1 tel. In deze vuistregel zitten alle 8 mogelijkheden die je hebt met 3 lettergrepen verscholen. Met nullen en enen wordt de rij 0111010001. Elk drietal opeenvolgende cijfers in deze rij is verschillend van alle andere, ga maar na: 011, 111, 110, 101, 010, 100, 000 en 001. Soms wordt deze rij afgebeeld als een slang die in zijn eigen staart bijt. De 0 en 1 op het eind overlappen dan de 0 en 1 aan het begin. Dus een rondje



Figuur 3 Een slang die in zijn eigen staart bijt.

met 01110100, waarin ook alle drietallen met 0 en 1 geborgd zitten.

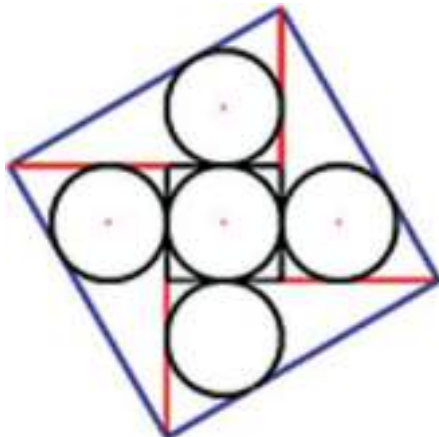
Er passeerden nog wat metrische woorden waarop wij de maat konden meeklappen. In een zaal vol met klappende collega's zou het een mooi effect gegeven hebben. Nu zat je in je eentje achter je beeldscherm te klappen.

Pubquiz

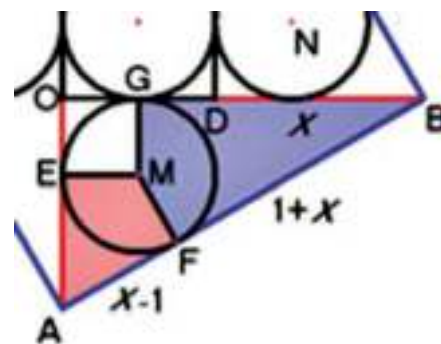
Na de lezing van Manjul kwam het frivole deel van de NWD, een pubquiz. Van tevoren was er de mogelijkheid om je met een team op te geven. Wij waren team 68. Wij, captain Yvonne Bik, Marjan Botke, Henk Hietbrink, Peter Kop en ik. Op papier een goed team, dacht ik. Marjan had een link gemaakt voor een team in Zoom. Via een klik werden we daardoor aan elkaar gekoppeld voor overleg bij de quiz. Ik klik en zie mijn hoofd op het scherm en roep "Hallo horen jullie mij?" De verbinding is gelegd. Maar tijdens de quiz kon ik de vragen, antwoordenbladen en de filmpjes maar moeilijk vinden. Al maar klikken op menu's en linkjes. Ik wist vaak niet waarover het ging. Ook al mailde Henk mij de vragen. Zoals gewoonlijk waren er veel vragen over films en muziek. Daar weet ik niet veel van. De puzzeltjes waren interessant, we waren helaas vaak te laat met inzenden van de (goede) antwoorden. We zijn er bij de eerste puzzel al ingetuind, misleid door het voorbeeld. Hoe groot is het kleinste vier-



Figuur 4 De 1,5-metervraag.



Figuur 5 De Japanse puzzel.



Figuur 6 Uitwerking oplossing Japanse puzzel.

kant waarin je met vijf personen (zonder dikte) kunt staan met inachtneming van de 1,5-meterregel. Wat vroeger vaak normaal was, in een hoek staan, waren we vergeten. Het roze vierkant is de oplossing. Wij hadden het blauwe vierkant met oppervlakte $(\frac{3}{\sqrt{2}} + 1,5)^2 \text{ m}^2$ in plaats van $(\frac{3}{\sqrt{2}})^2 = 4,5 \text{ m}^2$. Zie Figuur 4.

De Japanse puzzel bestaat uit vijf cirkels in een vierkant. De zijden van het vierkant zijn raaklijnen aan de buitenste cirkels die twee aan twee snijden op een van de raaklijnen van de binnenste cirkel. Zie Figuur 5. Eerst moet je analyseren hoe het figuur is opgebouwd. Henk heeft de vraag over hoeveel procent van het vierkant wordt bedekt door de vijf cirkels intussen met GeoGebra opgelost. Deze puzzel was lastiger.

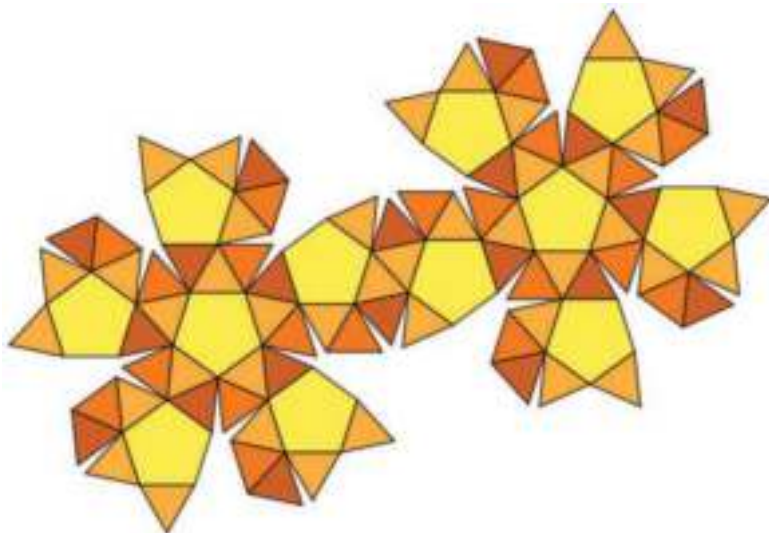
Voor dit verslag heb ik de oplossing uitgewerkt. Er blijkt dat de vier congruente driehoeken alle halve gelijkzijdige driehoeken zijn. Zie Figuur 6. Stel de straal van de cirkels op 1. Bij analyse heb ik gebruikgemaakt

van de regel dat raaklijnen loodrecht op de straal staan. Dus $AB \perp MF$ en $AB \perp BC$ (de driehoeken zijn tekens ten opzichte van elkaar een kwart slag (90°) gedraaid). De driehoeken OAB en $DB(C)$ zijn congruent. Stel $AO = x$, dan is ook $BD = x$. Verder is $OE = ME = MG = OG = GD = 1$ (straal). $AEMF$ en $BFMG$ zijn vliegers. Dus $AF = AE = x - 1$ en $BF = BG = 1 + x$, geeft $AB = AF + BF = x - 1 + 1 + x = 2x$. Nu geldt $\cos(\angle OAB) = \frac{x}{2x} = \frac{1}{2}$, dus $\angle OAB = 60^\circ$. $\triangle AEM$ is een ook halve gelijkzijdige driehoek. $EM = 1$, dus $AM = 2$ en $AE = \sqrt{3}$. $OA = x = 1 + \sqrt{3}$, dus $AB = 2x = 2 + 2\sqrt{3}$. De dekkingsgraad van de vijf cirkels is dus

$$\frac{5\pi}{(2 + 2\sqrt{3})^2} \cdot 100 = 52,6\%.$$

Dit had Henk ook.

De vraag over het aantal plakrandjes dat nodig is om een kubus mee dicht te plakken (7) was een eitje. Toen kwamen vragen over een veelvlak met heel veel zijvlakken.



Figuur 7 Bouwplaat van de stompe dodecaëder.

Er werd een deel van een bouwplaat getoond. Dat hoorde bij de bouwplaat van de stompe dodecaëder (*snub dodecahedron*). Dit is meer mijn terrein. Gelukkig had Marjan een plaatje van de volledige bouwplaat bij de hand. Zie Figuur 7. Er zijn 92 zijvlakken: 12 vijfhoeken en 80 gelijkzijdige driehoeken (gzd), waarvan 20 gzd op de plaatsen van de hoekpunten van de oorspronkelijke dodecaëder en $12 \times 5 = 60$ gzd op de zijden van de 12 vijfhoeken. Er zijn 150 ribben: van de $3 \times 80 = 240$ zijden op de driehoeken, worden $5 \times 12 = 60$ zijden, gemeen met de vijfhoeken, enkel geteld en worden de $240 - 60 = 180$ overige zijden, die de driehoeken met elkaar gemeen hebben, dubbel geteld; dus totaal $60 + 90 = 150$ ribben. Er zijn 60 hoekpunten: alle $5 \times 12 = 60$ hoekpunten van de vijfhoeken tellen mee. Een behoorlijk volumineus geval. Ik zie dat op de websites <https://enacademic.com/dic.nsf/enwiki/174894> en <https://memim.com/snub-dodecahedron.html> de aantallen edges en vertices zijn verwisseld. Foei. Wij kwamen tot 60 plakrandjes om een bouwplaat ervan mee dicht te plakken. Bij nader inzien zijn dit er 59. Immers, in de bouwplaat aan de buitenkanten zie je 8 keer hetzelfde patroon rondom een vijfhoek met 9 ribben al aan elkaar tot aan de vijfhoek ertussenin, in het midden nog 2 keer 9, en nog 1 waarmee beide helften aan elkaar zitten. Dus 91 van de 150 zitten al aan elkaar. Nog 59 plakrandjes nodig om de resterende ribben te kunnen plakken. Ik eindig met de felicitaties voor het winnende team 'unQnown'. Ik vraag me af hoe zij zo snel tot zo veel goede antwoorden konden komen. Maar Joke zei dat het een team met experts in puzzelen was. Volgend jaar graag weer een live NWD, waar ik niet hoeft te vragen "Hallo horen jullie mij?"

Clara Stegehuis

Faculteit EWI
Universiteit Twente
c.stegehuis@utwente.nl

Francesca Arici

Mathematisch Instituut
Universiteit Leiden
f.arici@math.leidenuniv.nl

Proof by example Portraits of women in Dutch mathematics

Svetlana Dubinkina

In ‘Proof by example’, Clara Stegehuis and Francesca Arici portray women in Dutch mathematics. This edition portrays Svetlana Dubinkina, assistant professor at the Vrije Universiteit Amsterdam. She investigates dynamical systems such as the weather with numerical methods. In this interview she tells about her research and her motivation for mathematics.

When did your interest in mathematics start?

“In school all technical subjects already fascinated me. Of course I did not yet know what mathematics really was. But my sister already decided to study physics, so I guess I then chose mathematics instead to be different from her. At university, I soon realized that mathematics was not at all the same as the computations in high school, but I still liked it very much.”

And this is also why you chose to stay in academia?

“Yes. In fact, during the first day of my studies, the dean of the faculty gave a speech for all mathematics students. He told us that our university was very strong in mathematics, and that we could even do a PhD abroad with our degree here. That stuck in my mind, and I indeed ended up doing a PhD abroad. But I always wanted to do science, so that was never a question for me.”

Could you describe what your research is about?

“My research is about dynamical models: systems of partial differential equations.

I am interested in their numerical approximations. Specifically, I investigate systems that satisfy the shadowing property. This property means that if you have a good guess for the initial state of your system, then a numerical approximation of the solution of this system is close to its real solution.”

Can you give an example of such a system?

“You can think of the weather for example. You can predict the weather with a numerical approximation of a dynamical system. However, these systems are extremely chaotic. A small change in the initial condition leads to a completely different prediction. This is also why the weather prediction becomes more uncertain when you predict more hours in advance. We resolve this with *data assimilation*: combining the dynamical model with external data to improve the precision of the initial condition. In practice, these external data are for example provided by satellites.

In data assimilation you minimize a cost function to obtain a solution of the system. However, when you have a lot of data, this cost function becomes very noisy. Then you can get stuck in a local



Svetlana Dubinkina

Photo: Victor Ladden



In a chaotic system, a small change in initial condition leads to a completely different solution.

minimum of the cost function, while you would like to get its global minimum. In my work, I use an operator approach instead to circumvent this noisy cost function. By finding the zero of an operator, you find a solution of the dynamical system without using a cost function. With this method, we can predict much further in advance compared to the standard methods.”

What is the most interesting problem you have been working on recently?

“Numerical approximations of dynamical systems often lead to many different solutions. However, only one corresponds to your real system. Together with my PhD student Nazanin Abedini I am working on investigating how close the different solutions from numerical approximations are to the real solution. I guess that this closeness depends on how much information one can observe. Going back to the example of the weather, you can for instance observe the tem-

perature or the wind speed, but you can only observe them at weather stations. We hope that our method can show where these weather stations should be located to get the most accurate prediction. This would be a major breakthrough in weather forecasting!”

And what result are you most proud of?

“Until now, the shadowing-based data assimilation approach relies on the assumption that you observe everything. This is of course unrealistic from a practical point of view. In recent work, my PhD student Bart de Leeuw and I showed that you can also use shadowing-based data assimilation if you only have partial observations. I am really proud of this result, as we showed something that nobody was able to show in the previous twenty years!”

You seem very enthusiastic about your research. Are there still any parts that you do not like?

“I do not really mind being stuck at a problem myself. However, I feel bad when my PhD students are stuck, because then I never really know what to do. On the one hand, I do not want to jump in and solve everything for them. On the other hand, I also do not want them to be stuck forever and lose motivation. I still do not have a standard recipe on how to deal with such situations.”

And what parts about research do you like the most?

“I like going to conferences and presenting my work. You get new ideas, and have lots of interaction. That is really motivating.”

You also recently co-authored a letter by the COVID-19 task force of EWM. What was this letter about?

“Statistically, women take care of children or elderly more often than men. And when something like a pandemic happens, we often go back to these traditional patterns. This makes women less productive during this pandemic. I already had a permanent position when the corona crisis unfolded, so at least I did not have any pressure from having a temporary contract. But for untenured young women it can be more problematic, as they often also have small children to care for. So in this letter we ask universities and evaluation committees to take this possible productivity drop into account. For example by increasing the time window over which women with children are evaluated. We really do not want to lose talented young scientists because of a temporary situation like COVID-19.”

Do you think that universities will listen to this request?

“We received many personal signatures from scientists who agree with the letter, even from outside mathematics. But beside that, organizations can also endorse the letter. Several organizations actually did so, such as KWG. So these organizations agree on the content of the letter. We hope that they will also act on it!”



Roel Nicolai

Department of Mathematics
University of Utrecht
r.nicolai@uu.nl

History

The map projection of portolan charts

The sudden appearance of portolan charts, realistic nautical charts of the Mediterranean and Black Sea, in the last quarter of the thirteenth century, is considered to be one of the most significant events in the history of cartography. Using analysis techniques available in geodesy, Roel Nicolai showed in [9, pp.133–200] that these charts are mosaics of regional charts that are considerably more accurate than had been assumed earlier. The good agreement of these regional charts with the Mercator map projection is even more remarkable. Map projections were unknown in the Middle Ages and the Mercator projection was developed some three centuries after the appearance of the oldest extant portolan chart. Therefore, virtually unanimous agreement exists among historians of cartography that its map projection must be coincidental. In this article, however, Nicolai shows, using probability calculus, that it is very unlikely that the map projection emerged as an unintentional by-product of the charts' construction.

Portolan charts are highly realistic medieval nautical charts of the Mediterranean and the Black Sea. They appear suddenly in the last quarter of the thirteenth century AD in the coastal zone around Genoa, Italy. Their extraordinary realism contrasts sharply with the qualitative nature of *mappae mundi*, archetypical medieval maps, based on a mental model of the world inspired by Christian religious ideas and ideas inherited from classical antiquity. Portolan charts represent an unprecedented step forward in cartography and set the standard for mapping and charting in the Age of Discovery and beyond. Portolan charts are the first maps attempted to be drawn to scale after Claudius Ptolemy's from the second century AD.

Portolan charts appear to be entirely unrelated to any other known map type

from medieval times and classical antiquity. The charts appear in the world of maritime trade, apparently made by mariners for mariners, without involvement of the clerical intellectual elite of the day. Their most remarkable characteristics are their accuracy and the surprisingly good agreement of their coastlines with those of a modern map on the Mercator map projection.

The charts are hand-drawn on vellum, a fine quality of parchment. Their dimensions were commonly dictated by the size of the animal skin used, typically about 100 cm by 75 cm. That defines their scale as approximately 1:5500000; 1 cm on the chart thus corresponds to about 55 km in the real world. The earliest portolan charts depict with remarkable accuracy the Medi-

terranean, the Black Sea and often the Atlantic coasts between the latitudes of the Canary Islands and the English Channel. Although the North Sea and the Baltic Sea are also drawn on many charts, these areas lack the maturity and detail of the core areas. Portolan charts are clearly nautical aids and as such they constituted a new cartographic genre; no earlier sea charts are known. The names of ports and landmarks were written at right angles with the coastline on the land side, important names in red ink and the remainder in black. Their cartographic style became the hallmark of all nautical charts until well into the eighteenth century.

A striking characteristic of these charts is the criss-cross pattern of straight lines drawn apparently at random across the entire chart. On closer inspection they form a regular pattern, known as a *wind rose*, created by interconnecting sixteen evenly spaced points on a (hidden) circle covering the larger part of the chart. The chart in Figure 1 has two wind roses, with their centres near Barcelona and Antalya respectively. The two wind roses are tangent in the middle of the chart, near Taranto. The wind rose lines were colour-coded to facilitate the selection of the correct compass bearing when navigating or planning a voyage. The availability of the wind rose



Figure 1 Portolan chart by Angelino Dulcert (1339).

provides an absolute orientation for the charts and reveals that the entire coastline image is rotated anticlockwise by about 9° . This angle remains more or less constant until about 1600 AD, when portolan charts oriented to true north begin to appear.

Most surviving charts were decorated with colourful city vignettes and pennants and were probably intended for prestige and display by their wealthy owners. However, charts for onboard use also existed, presumably as navigation aids, but most of such charts probably would have lacked these decorative elements and would have had a limited lifetime in the damp and salty offshore environment [10, p. 439].

Strange characteristics

Practically unanimous consensus exists that portolan charts are based on measurements, rather than on a purely mental model of the world. Portolan charts have a number of curious characteristics. They

appear suddenly, 'out of the blue', almost fully developed; no cartographic products are known that might be seen as precursors or prototypes. Consequently, there is no 'bread crumb trail' in the historical record that might shed light on how these charts were constructed and how they acquired their high accuracy. Equally strange is that hardly any development appears to have taken place *after* their first appearance: their key characteristics do not change; their core area was copied with few changes from chart to chart for the next four centuries. They did not become gradually more accurate; on the contrary, over time their coastlines become more stylized at the expense of coastal detail. Their typical shortcomings and defects were not resolved over time either; they exhibit regional scale and orientation differences from the first chart onward, and while some change can be detected in these properties, no steady improvement

is visible. Other shortcomings concern persistent errors in the details of the coastlines. All that is odd, because if medieval cartographers were capable of making such accurate charts, why did not the same skills permit them to resolve these shortcomings? The strangest property of these charts, apart from their accuracy, which will be discussed below, is the close resemblance of their Mediterranean, Black Sea and Atlantic coastlines with those of a modern map on the Mercator projection. The Mercator projection was invented by Gerard Kremer in the middle of the sixteenth century, while the oldest extant portolan chart, the so-called *Carte Pisane*, is dated to the last quarter of the thirteenth century. Moreover, the accuracy of portolan charts is much higher than the accuracy of contemporary, earlier and many later maps and charts. Not until the eighteenth century were new maps of comparable accuracy produced.

Existing views about the map projection

The view that the map projection of portolan charts is an unintentional by-product of the mapmaking process is firmly established in the community of researchers that studies these charts [3, pp. 385–386; 4, pp. 6–7, 186–187; 9, pp. 35, 327–335]. When referring to this issue at all, authors usually state matter-of-factly that portolan charts cannot be based on a map projection. This community consists predominantly of medievalists and historians of cartography with incidental representatives from other disciplines. Practically all have a background in the humanities rather than the exact sciences. Consequently, the hypothesis of the coincidental nature of the map projection has never been subjected to detailed numerical investigation and testing, but is taken for granted in this community.

Because the charts appeared in the maritime-commercial milieu, the commonly accepted notion is that medieval mariners systematically measured and recorded course bearing and distance sailed during their trading voyages. The data collected in that way is assumed to have provided the basis for chart construction. Many authors see confirmation of this hypothesis in the anticlockwise rotation angle of the map image of about 9° that all charts exhibit, which roughly agrees with the ‘average’ magnetic declination in the Mediterranean in the thirteenth century. Magnetic declination is the angle between true north and magnetic north; it varies by location and over time. Those authors that are specific enough to propose a construction method usually postulate central collation of all data somewhere along the Ligurian coast of Italy. Genoa and Pisa are prime candidates; it is from this area that the oldest extant portolan charts originate and both cities were dominant in maritime trade. Additionally, some unspecified schema of accuracy improvement is assumed, usually expressed in vague terms such as ‘progressively better estimates became available over time’, but some authors explicitly mention a process of averaging.

The historian of cartography David Woodward was one of the few who were fairly specific on how this process of mapmaking from a geometric framework of distances and bearings might have taken place. He did not mention bearings, despite compass bearings between points

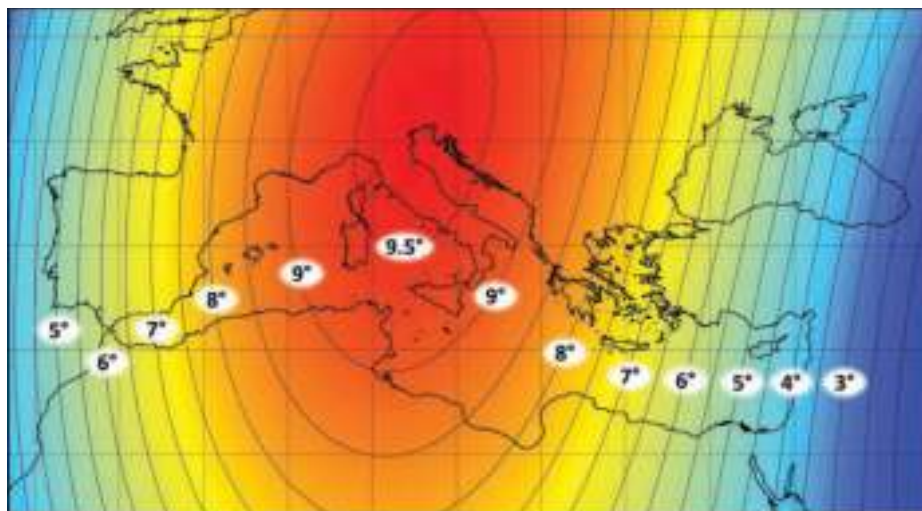


Figure 2 Magnetic declination from the paleomagnetic model CALS7k.2 for the year 1250. The contour interval is 0.5° and the positive values designate an easterly magnetic declination [9, p. 225].

being crucial for the construction of such a geometric framework.

“The cumulative experience of several centuries of coastal and other shipping in each of these basins could have led to the independent recording of traditionally known distances. The average distances derived from both coastal traverses and cross-basin routes could then have been used in the construction of a series of separate charts of the individual basins. [...] If these routes were plotted to form networks in each of the basins, each network might have assumed the form of a self-correcting closed traverse of each basin. The rigidity of this structure would, however, have depended on the availability of cross-basin distances, acting as braces to the framework. It is thus postulated that some system of empirical or stepwise graphic method of correcting these frameworks was used to achieve a ‘least-squares’ result” [3, p. 188].

Woodward was well aware that the method of least squares was not available in the Middle Ages; his intention is to suggest that all data conflicts would have been resolved by distributing them over the entire network of coastal points using a less formal graphic method. Most researchers approach this explanation intuitively and accept it as true. No one has checked whether it is feasible or realistic.

The distances, corrected for nominal chart scale, and the bearings between points are assumed to have been transferred to the map by plane geometry, that

is, ignoring the effects of earth curvature as well as magnetic declination, which was an unknown phenomenon at the time. More sophisticated methods cannot be assumed to have been available in the Middle Ages. Additionally, historians of cartography assume that some form of graphic adjustment was carried out by the cartographer in order to resolve the contradictions in the data due to the inevitable random errors in the measurements. The errors due to ignoring the curvature of the earth’s surface would have been subsumed in that graphical adjustment and are generally downplayed as ‘negligible’ or ‘relatively minor’. After this putative construction of the framework of the chart, the details of the coastline are presumed to have been drawn in.

The Mercator projection

In the fifteenth and sixteenth centuries mariners used nautical charts in ocean navigation which approximated the so-called *equidistant cylindrical projection* centred on the equator. Such a chart is also called a *plane chart*.

Although mariners criticized their nautical charts and attributed a host of navigation errors to them, the plane chart remained popular, mainly because it appeared to allow navigation problems to be solved by plane (Euclidean) geometry, that is, as if the earth were flat, although they were well aware of the earth’s spherical shape. There were two fundamental problems with the plane chart. Firstly, a straight line on the chart does not correspond with the track of a ship on a constant course.



Figure 3 World map on the equidistant cylindrical projection centred on the equator. The graticule interval is 15°.

Secondly and more importantly, an east-west line well away from the equator is shown too long on a plane chart, because on the spherical earth the meridians converge, but on the plane chart they do not.

Both problems were eventually solved by Gerard Kremer (Mercator), who, in 1569, published a world map on the carefully designed map projection that bears his name. Kremer designed the projection from the principle that any constant-course trajectory, that is, a loxodrome, should project as a straight line on the map, making the same angle with the meridians on the map as well as on the sphere. This can only be achieved at the expense of the scale of the map or chart, which consequently increases with latitude from unity at the equator to infinity at the poles. In Figure 4 it may be seen that Greenland and Africa have about the same area on the Mercator chart, while in reality Africa is fourteen times as large as Greenland. The varying latitude scale was counterintuitive to mariners, who had been educated with the idea that parallels are equidistant and expected to see this equidistance property reflected on their charts. The plane chart honours this, but the Mercator chart does not. This was one of the reasons why the Mercator projection was not an overnight success.

Gerard Kremer constructed his projection graphically and showed some early awareness of what is now known as differential geometry. Expressing latitude and longitude in radians, the corresponding line segments on the surface of the earth of two infinitesimal angular increments $d\varphi$ and $d\lambda$ are: $R \cdot d\varphi$ and $R \cdot \cos(\varphi) \cdot d\lambda$, when the radius of the spherical earth is R .

Adopting a similar coordinate system for the Mercator chart, spanned by the two

orthogonal (X and Y) axes, where the positive X -axis points east and the positive Y -axis north, Mercator's solution was to define:

$$\begin{aligned} dX &= R \cdot d\lambda, \\ dY &= \frac{R \cdot d\varphi}{\cos(\varphi)}. \end{aligned}$$

Integration of these differential quantities

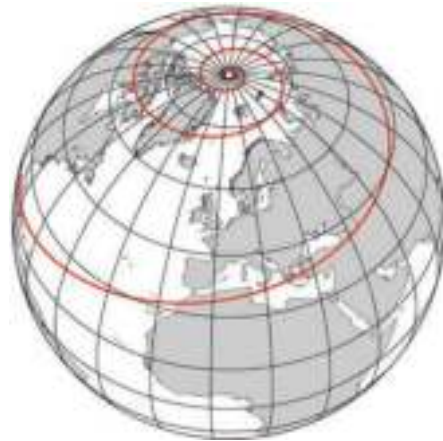


Figure 4 Loxodrome in an oblique perspective projection (left) and the Mercator projection (right) [9, p. 467, 470].

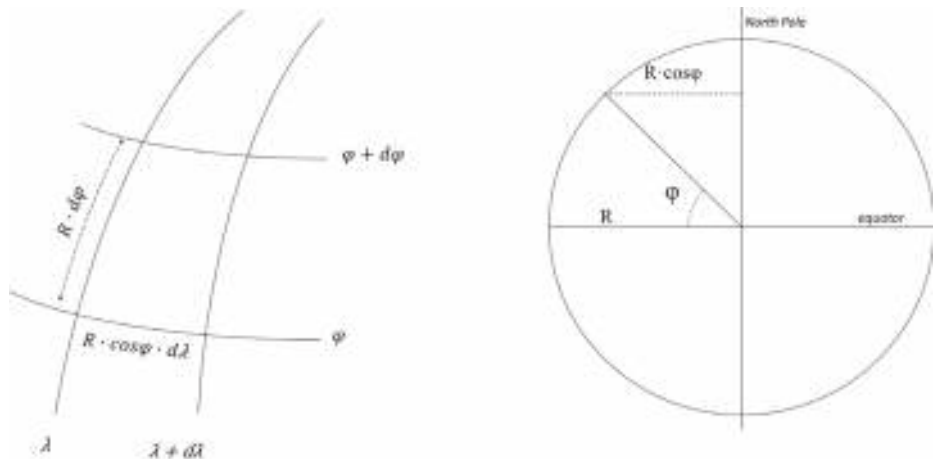


Figure 5 The geometry of the sphere.

yields (with integration constants set to zero):

$$\begin{aligned} X &= R \cdot \lambda, \\ Y &= R \cdot \ln \left(\tan \left(\frac{\phi}{2} + \frac{\pi}{4} \right) \right). \end{aligned}$$

Mercator constructed the graticule of his world map graphically, accumulating increments of $R \cdot \Delta\varphi / \cos(\varphi)$ to obtain the spacing of the parallels [6,5], with $\Delta\varphi = 1^\circ$. Although one might argue that, in principle, this would not have been beyond the capability of medieval natural philosophers, in practice it was. The development of the Mercator projection was specifically aimed at solving the problems experienced in ocean navigation and is linked to the discovery of the loxodrome by Pedro Nunes in 1537 [11]. The questions leading Gerard Mercator to his projection were never asked in the thirteenth century; at least there is no indication they were. A medieval Mercator projection would have been a (complex) solution for a non-existing problem.

The accuracy of portolan charts

The question of whether the Mercator map projection can emerge as an unintentional by-product of unrecognized magnetic declination and ‘plane charting’, that is, charting that ignores the effects of earth curvature, does not have a simple yes-or-no answer. While presently the curvature of the earth and magnetic declination in the thirteenth century are ‘known’ quantities, be it that magnetic declination has to be estimated using a paleomagnetic model (see Figure 2), the question of whether or not the effects of ignoring these factors would have had a measurable impact on portolan charts depends on the accuracy of those charts. If the random errors in portraying the coastlines, putatively caused by the limited accuracy of medieval navigation, are much larger than the effects of ignoring earth curvature and magnetic declination, the latter effects may not be measurable in the charts at all. This begs the question of what the accuracy of portolan charts is, which requires the concept of map accuracy to be defined first. The accuracy of a measurement is usually defined as the closeness of that measurement to its true value. One might therefore be tempted to expand this principle to a map: measure the coordinates of a set of recognisable points on the portolan chart and compare those with the ‘true’ values of those points in the ‘real world’. In similar

analyses such points are commonly called *identical points*. The coordinates of the identical points on the chart would be expressed in a cartesian coordinate system, while the modern positions of these points on the spherical earth would be expressed in terms of latitude and longitude. Cartesian coordinates cannot be compared directly with curvilinear coordinates; a direct comparison is therefore impossible. The relationship between the coordinates in both systems must therefore be established first and that takes us back to the map projection. However, the map projection is not sufficient to describe the relationship between the two sets of coordinates. Because the cartesian coordinate system of the portolan chart is arbitrary, at the very least a shift, a rotation and a scale difference between the two coordinate systems will have to be solved for. Because portolan charts are quite old, allowance should be made for deformation of the vellum on which the charts were drawn. This leads to the assumption of an affine transformation, with separate rotations and scale factors for both coordinate axes.

Each map projection introduces its own specific distortions to the geometry of points on the earth’s surface; those introduced by the Mercator projection were discussed in the previous section. Earlier research has established that the map projection that approximates the coastline

portrayal on portolan charts best is the Mercator projection [7, p.146,149].

The complete model that describes the relationship between cartesian X, Y coordinates of the portolan chart and latitude, longitude of the spherical earth (in matrix form) is as follows.

$$\begin{pmatrix} X \\ Y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} T_X \\ T_Y \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} k_X & 0 \\ 0 & k_Y \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \cos \theta_X & \sin \theta_Y \\ -\sin \theta_X & \cos \theta_Y \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \lambda \\ \bar{\varphi} \end{pmatrix}$$

where:

X, Y : coordinates of the identical point in the cartesian coordinate system of the portolan chart;

T_x, T_y : origin shift (translation) of the internal (X, Y) coordinate system of the portolan chart;

$\bar{\varphi}$: isometric latitude of the identical point:

$$\bar{\varphi} = \ln \left[\tan \left(\frac{\varphi}{2} + \frac{\pi}{4} \right) \right].$$

φ, λ : latitude and longitude of the identical point (in radians) in the reference dataset;

k_x, k_y : scale factors of the X -axis and the Y -axis. Together these parameters determine the scale of the portolan chart relative to the internal (X, Y) coordinate system. The radius R of the spherical earth is absorbed by the scale factors.

θ_x, θ_y : rotation angles about the portolan chart’s X and Y -axis respectively.



Figure 6 Composite of rectified regional charts of the Dulcert portolan chart (1339) [9, p.198].

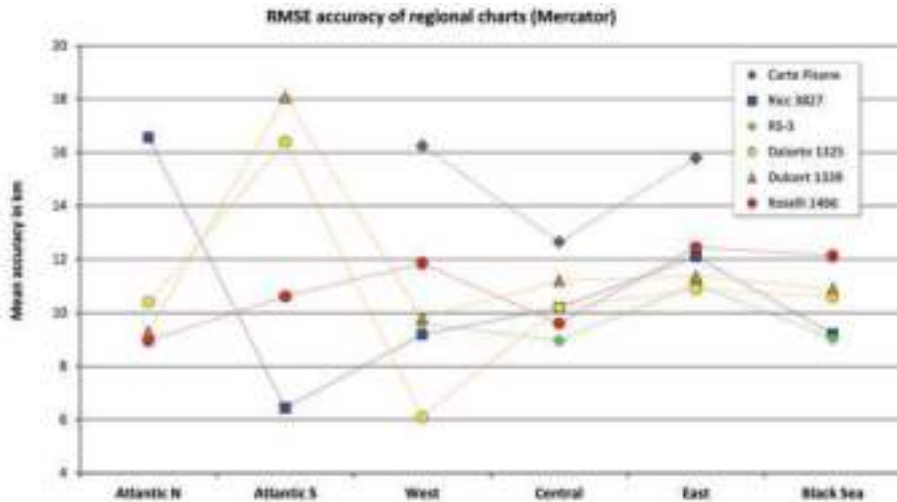


Figure 7 Mean point accuracy of regional charts.

The matrix equation above is non-linear; evaluation in ‘linearized’ form about approximate values is required in order to apply Least-Squares Estimation and iterate to a final solution.

Portolan charts have long been known to have regional scale variations. Best known from literature are the scale of the Atlantic coasts, which is too small, and the scale of the Black Sea, which is too large. David Woodward, the historian of cartography cited above, hypothesizes that the subbasins of the Mediterranean were charted first. This is how I approached the analysis of portolan charts, using statistical testing of the identical point residuals to establish homogeneous clusters of points. That revealed the existence of five or six regional charts, shown in Figure 6.

These regions are quite consistent for the six early portolan charts that I analysed, but their boundaries do not coincide neatly with the boundaries of subbasins. Some regional charts exhibit overlaps, with the common section of coastline modified by the cartographer to achieve a smooth join [9, p.199]. Each region has its own distinct scale, rotation and shift parameters, which justifies the conclusion that portolan charts are indeed mosaics of regional charts. After the least-squares fit of the portolan chart to the modern dataset, the fit of the identical points will not be perfect. Small discrepancies remain, known as *residual errors* or *residuals*. The Mean Squared Error (MSE) of all residuals, or its square root, the RMSE, is a measure of how well the portolan chart agrees with a modern dataset, in other words its accuracy. The large number of identical points used, 836 for the Dulcert

portolan chart, allows reliable estimates for the accuracy of the regional charts to be computed. The RMSE values of the latitude residuals and the longitude residuals were calculated separately. The larger of the two represents the accuracy of the regional chart [9, p. 129–132].

The accuracy of all regional charts, computed for six portolan charts, is shown in Figure 7. The mean of all 37 accuracy values, weighted by the number of contributing points, is 11.3 km, which is exceptionally good. With an average scale of the charts of 1:5500000, this amounts to about 2 mm on the chart. Latitude and longitude have approximately the same accuracy.

Some geodetic quality-control concepts

Modern maps and charts are based on geodetic measurements that determine the positions (coordinates) of a set of control points covering the area to be mapped. Until about the middle of the twentieth century the only way to achieve that was by triangulation, that is, by measuring the angles of triangles spanned by any three intervisible control points. The earliest known map, or rather series of maps, to have been constructed in accordance with this principle is the so-called Cassini map of France from the first half of the eighteenth century. Broadly speaking, this is still how maps are made today.

Any measurement of a physical or geometric quantity in the real world is subject to random, or *stochastic*, variation. In a geodetic network those variations will cause discrepancies in the measured geometry of the points, for example, the

sum of the measured angles of any triangle will rarely be exactly 180°. A measurable geometric quantity, such as an angle or a distance, may thus be seen as a random or stochastic variable. These variables are assumed to have a normal or Gaussian error distribution. The misclosures in a measured geodetic control network are commonly resolved through Least-Squares Estimation, which allows computation of the vector of improved (least-squares) estimates $\hat{m}$ of the measurements vector m by minimizing the weighted sum of the squares of the vector of residuals v :

$$\hat{m} = m + v.$$

The sum of the weighted squared residuals E is found through the matrix expression: $E = v^T \cdot W \cdot v$ where the weight matrix W is the inverse of the covariance matrix Q of the measurements: $W = Q^{-1}$ and v^T is the transposed vector of residuals v [1, p. 14]. Numerical considerations usually dictate reduction of the covariance matrix Q by a constant scaling factor σ_0^2 (a scalar): $Q = \sigma_0^2 \cdot G$. In the case of the accuracy analysis of a portolan chart, discussed in the previous paragraph, the measurement variables are the cartesian X and Y coordinates of the identical points on the chart. The best fit to the modern Mercator chart by Least-Squares Estimation was conducted with $G = I$ (identity matrix). The resulting MSE of each regional chart is then an estimate of σ_0^2 .

When the individual measurements are all Gaussian-distributed random variables, the sum of the weighted squared least-squares residuals will have the chi-squared distribution with b degrees of freedom, where b is the number of ‘redundant’ or ‘surplus’ measurements, that is, the number of measurements over and above the minimum measurements to calculate the coordinates of all points of the geodetic network. More commonly, however, the variable $S = E/(b \cdot \sigma_0^2)$ is used for quality control. It is virtually impossible to measure any large geodetic network without gross errors occurring in some of the measurements [1, p.14]. The variable S is Fisher-distributed with degrees of freedom b and ∞ . It is used for a statistical test to reveal the possible existence of gross errors in the measurements. In the example of Figure 8, $b = 20$. The test with *significance level* $\alpha = 1\%$ would lead to rejection of the null hypothesis (= no gross errors in

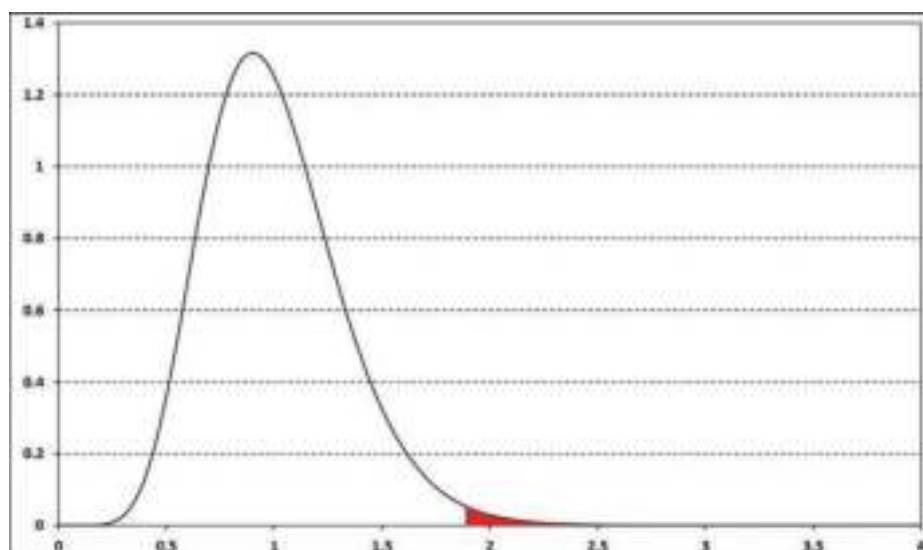


Figure 8 Fisher probability density function with degrees of freedom b and ∞ and 1% right-hand rejection zone.

any of the measurements) when S is greater than the right-hand critical value associated with the significance level. In Figure 8 that would be 1.87 for a significance level of 1%. The complement, the number range from zero to 1.87 is called the 99% *confidence interval*. This means that an extreme value of S , that is, $S > 1.87$, has a probability of occurring of less than 1%.

The F-test was introduced by Ronald A. Fisher in the 1920s and offers a means of identifying gross errors in the data. Whether or not the effect of one or more gross measurement errors in a geodetic network are discoverable with this test will depend on the magnitude of the errors and the geometric design of the network. More sensitive tests have therefore been devel-

oped for the analysis of complex geodetic networks, but those refinements will not concern us here. See [2, p. 14].

Around 1935 Jerzy Neyman and Egon Pearson placed hypothesis testing on more secure footing by introducing the concepts of Type I and Type II errors [12, pp. 282–285]. In modern medical tests a Type I error is referred to as a *false positive* result, while a Type II error is called *false negative*. A value of S smaller than its critical value does not guarantee the absence of errors in the data. The probability of a Type I error in Figures 8 and 9 is the red shaded area, that is, the probability of the null hypothesis (= no gross errors in the data) being incorrectly rejected. When the test variable S is corrupted by one or more gross errors, it is still

a random variable, but with a *non-central Fisher* distribution, represented in Figure 9 by the right-hand curve. The probability of a Type II error is the grey shaded area in Figure 9 and equates to the probability that the alternative hypothesis (= there is at least one gross error in the data) is incorrectly rejected and an actual gross error in the data is not noticed. The probability of *not* making a Type II error is known as the *power of the test*. In geodetic networks the gross error(s) in the measurements lead(s) to a bias or gross error in the test variable S . Because the magnitudes of those errors are rarely known, classical Neyman–Pearson theory recommends fixing the power of the test to a suitably large number such as 80% or 90% and then working back to the magnitude of bias that may actually be found with that probability. Neyman and Pearson's work led to the sobering realization that the actual error-detection capability is considerably worse than Fisher's work seemed to suggest. For geodetic applications this was refined to considerable detail by Willem Baarda at Delft University of Technology in the 1960s [8].

Is the map projection coincidental?

In the Middle Ages, triangulation as a technique had not yet been invented and no suitable geodetic instruments were available anyway. Instead, a marine network of distances and compass bearings between coastal points is usually assumed as the basis for portolan chart construction.

The principle that I used to establish whether or not the map projection of portolan charts is coincidental consists of inverting Neyman and Pearson's idea of fixing the power of the test and then working out the magnitude of the gross error in the test variable. That gross error can be calculated by simulating the hypothetical medieval charting process with 'measurements' calculated exactly for the sphere, that is, spherical (loxodromic) distances and magnetic bearings between the points of a conjectural medieval maritime network. I split up the entire network into subnetworks covering the western and eastern Mediterranean and the Black Sea. Magnetic declination was estimated from the paleomagnetic model CALS7k.2 model for the year 1250 (Figure 2). The conjectural design of the western Mediterranean network, taking into account trade routes, prevailing wind direction in summer and

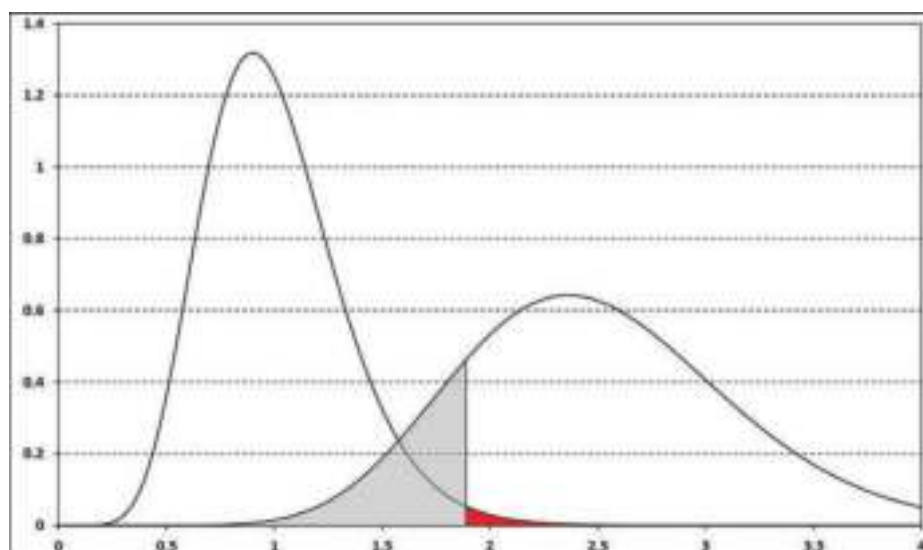


Figure 9 Central F-distribution, associated with the null hypothesis, on the left, and non-central F-distribution, associated with the alternative hypothesis, on the right.

the sailing properties of medieval ships, is shown in Figure 10, in which each line represents a bearing and distance pair.

A hypothetical medieval cartographer would have constructed his chart from this set of bearing and distance data in any of very large number of ways. It is impossible to test all, but it is possible to constrain the options to a limited number of realistic scenarios. I evaluated what I consider the most plausible scenario, assuming that our hypothetical cartographer would start in Genoa or Pisa, the area considered to be the ‘birth place’ of portolan charts, and that he would begin by charting the coastline using the data of the relatively short coastal legs. He would have come across his first ‘loop misclosure’, finding two positions for Marsala, Sicily 89 km apart. Such data conflicts due to plane charting are exclusively in east-west direction [9, pp. 471–482]. We do not know how the cartographer might have dealt with such a conflict, but my assumption is that he would have adjusted a section of the North African coastline from, for example, Algiers to Cap Bon by compressing it to eliminate the data conflict. The section before adjustment is shown in grey in Figure 10. As mentioned above, adjustment of a section of coastline was a cartographic technique that was well-understood by portolan chart makers. Portolan chart making in the medieval Mediterranean was conducted by

small commercial enterprises, often within a family, and it would have been in the cartographer’s interest to avoid making unnecessary, small changes to the entire chart. I used a threshold value of 15 km for data conflicts. Assuming that Corsica and Sardinia would have been charted from the Italian coast and Majorca from the Spanish, most contradictions are relatively small, with the exception of the long east-west courses to Majorca. In Figure 10 the red lines indicate misclosures greater than 15 km that cannot be reduced further by shifting locations of points without increasing the misclosures in other network points too much. It has to be borne in mind that the medieval cartographer would not have been able to separate the errors due to plane charting and the stochastic errors in the navigation measurements with which he is presumed to have been working.

This iterative process I executed yielded a set of simulated ‘medieval’ positions for all network points that would have formed the framework for further charting. The iterative computation of the networks for the eastern Mediterranean and the Black Sea networks yielded similar datasets. The key question is: to what extent does the shape of these networks agree with the correct modern geometry on a Mercator chart?

To answer this question, a least-squares fit of this ‘medieval’ set of coordinates against the corresponding set of modern

Mercator coordinates was executed, applying the same affine model as used for the real portolan charts. This removed any differences in rotation, non-orthogonality of coordinate axes and (differential) scale and yielded a sum of squared residuals, but now this contains exclusively the compounded gross errors or bias, caused by ignoring earth curvature and magnetic declination. Let that bias be designated by B . Had the appropriate Mercator corrections and magnetic declination been applied prior to the network calculation, the calculation would have yielded the correct (unbiased) Mercator coordinates of all points and $B = 0$.

How large is that bias B in the test parameter S for the three networks? The consensus among historians of cartography translates to $B \approx 0$, because agreement with the Mercator projection is believed to be automatic. However, calculation of this bias yields the following figures:

$$B_{\text{Western Mediterranean}} = 76.3 \text{ km}^2,$$

$$B_{\text{Eastern Mediterranean}} = 98.2 \text{ km}^2,$$

$$B_{\text{Black Sea}} = 41.1 \text{ km}^2.$$

It was established earlier that the mean accuracy of the regional charts of a portolan chart is 11.3 km. The square of this figure, 129 km², is an estimate of the variance factor σ_0^2 discussed in the previous section. Using this figure to normalize the values for the biases listed above yields:

$$B'_{\text{Western Mediterranean}} = 0.59,$$

$$B'_{\text{Eastern Mediterranean}} = 0.76,$$

$$B'_{\text{Black Sea}} = 0.32.$$

The mathematical expectation of S under the null hypothesis (that is, Mercator corrections and magnetic declination corrections applied) equals unity. Under the alternative hypothesis it equals $1 + B'$:

$$E\{S | H_0\} = 1,$$

$$E\{S | H_A\} = 1 + B'.$$

Applying the statistical testing principle and using a right-hand significance level of 1% yields the following P -values (probabilities) of a Type II error occurring:

$$\text{Western Mediterranean: } P = 0.0018,$$

$$\text{Eastern Mediterranean: } P = 3 \cdot 10^{-7},$$

$$\text{Black Sea: } P = 0.31,$$

for the western Mediterranean see Figure 11. For the eastern and western Mediterranean the F-test leads to rejection of the alter-

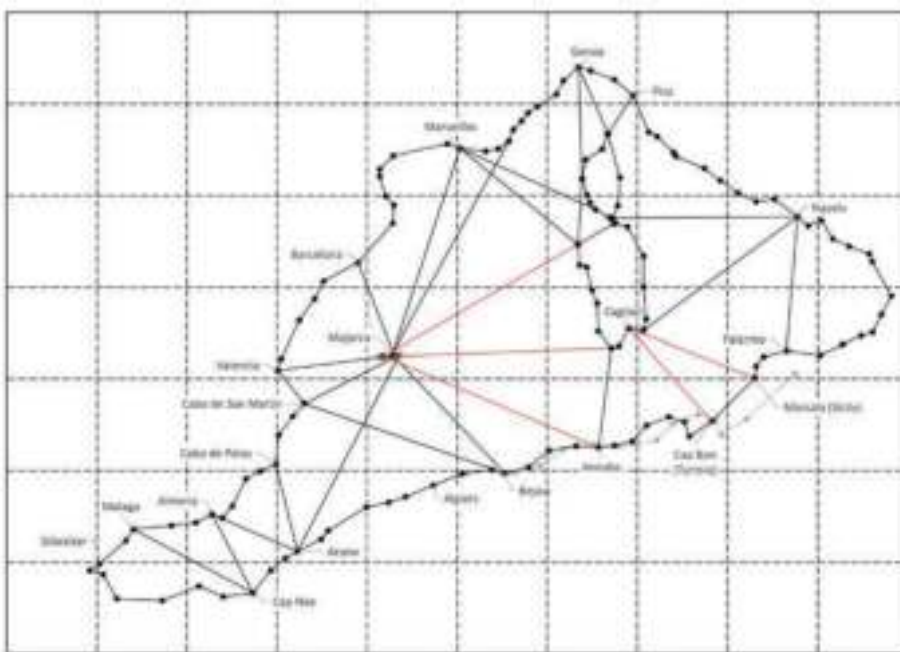


Figure 10 Conjectural geodetic network in the western Mediterranean, hypothetically underlying the construction of a portolan chart and drawn by plane charting and ignoring magnetic declination. The grid interval is 200 km.

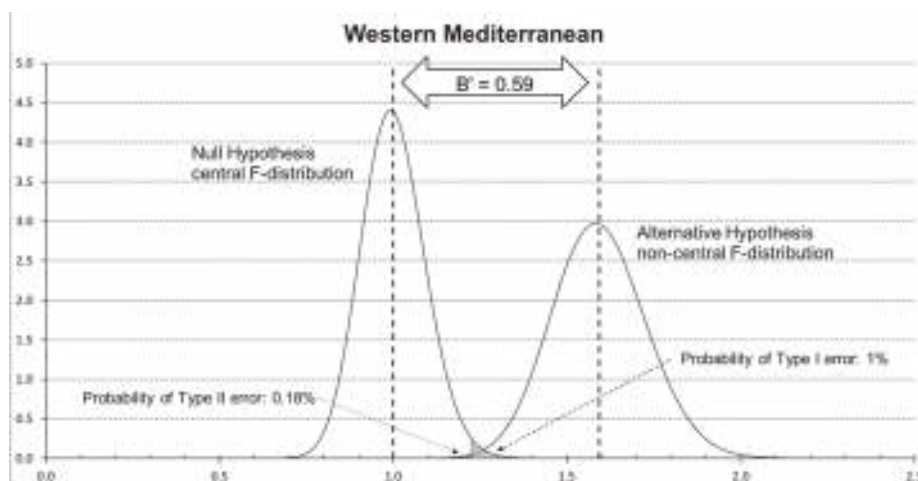


Figure 11 Probability density functions of the (normalized) MSE under the null hypothesis (= Mercator projection is not accidental) and under the alternative hypothesis (= Mercator projection is coincidental) for the western Mediterranean.

native hypothesis which postulates the coincidental emergence of the Mercator projection. Only for the Black Sea, which is much smaller and mappable with a smaller set of control points, a realistic possibility of 31% can be said to exist. The probability that the Mercator projection would result coincidentally in all three regions can be considered negligible. The corresponding *P*-value would be obtained by multiplying the three values shown above.

The caveat must be made that only a single charting solution has been tested. An alternative method of medieval charting than described above (see Figure 10) might reduce the bias values slightly. However, the discrepancy between the spherical geometry of the earth and the Euclidean geometry of the map in each region remains the same and a different schemes of plane

charting would redistribute the inevitable data conflicts in different, but similar ways. That would result in some variations in the bias values shown, but it is unlikely that these values would become so small that a coincidental Mercator projection would become a realistic possibility, given how small the total *P*-value is for the scenario evaluated, but, plausible though this may be, it is impossible to prove rigorously. Previously, I had calculated a least-squares solution for the plane charting of the three networks, following Woodward's suggestion described earlier in this article [9, pp. 508–516]. Surprisingly, the bias (*B*) values for this solution were considerably larger: $B = 165 \text{ km}^2$, $B = 329 \text{ km}^2$ and $B = 58 \text{ km}^2$.

A coincidental emergence of the Mercator projection would have to result from a fortuitous combination of random mea-

surement errors and arbitrary plane charting corrections, such that the resulting residuals would mimic, to a sufficient extent, the magnetic declination in every compass bearing as well as the latitude-dependent Mercator distance magnification in every distance.

Concluding remarks

The emergence of a Mercator or Mercator-like projection on medieval portolan charts as a coincidental by-product of a simple charting method that ignored earth curvature and magnetic declination is highly unlikely.

As a professional geodesist I am unable to suggest an alternative realistic mechanism that would accidentally generate the Mercator projection. I will therefore conclude that the map projection of portolan charts is most probably an intentional feature. That creates a significant challenge for historians who now will have to explain how this is possible in the light of the evidence expounded in this paper. However, no researcher worth their salt ought to shirk from such a challenge; challenges are what drives science forward.

The calculations in this article focussed on the question of the map projection of portolan charts and therefore made the implicit assumption that medieval navigation was accurate enough to yield a chart of the accuracy of the Mediterranean portolan charts. That aspect could not be addressed in this article and neither could relevant historical aspects; they are covered in my book.

References

- 1 W. Baarda, *Statistical Concepts in Geodesy*, Publications on Geodesy New Series, Vol. 2, No. 4, Netherlands Geodetic Commission, Delft, 1967.
- 2 W. Baarda, *A Testing Procedure for Use in Geodetic Networks*, Publications on Geodesy New Series, Vol. 2, No. 5, Netherlands Geodetic Commission, Delft, 1968.
- 3 T. Campbell, Portolan charts from the late thirteenth century to 1500, in J.B. Harley and David Woodward, eds., *The History of Cartography, Vol. 1—Cartography in Prehistoric, Ancient and Medieval Europe and the Mediterranean*, University of Chicago Press, 1987.
- 4 J.A. Gaspar, *From the Portolan Chart of the Mediterranean to the Latitude Chart of the Atlantic. Cartometric Analysis and Modeling*, PhD Thesis, Universidade Nova de Lisboa, 2010.
- 5 J.A. Gaspar and H. Leitão, Squaring the Circle: how Mercator constructed his projection in 1569, *Imago Mundi* 66(1) (2014), 1–24.
- 6 W. Krücken, Ist das 'Rätsel der (Konstruktion der) Mercator-Karte von 1569' [Hermann Wagner] gelöst? Unpublished, www.wilhelm-kruecken.de.
- 7 S.A. Loomer, *A Cartometric Analysis of Portolan Charts: A Search for Methodology*, PhD Thesis, University of Wisconsin-Madison, 1987.
- 8 M. Molenaar, *De Delftse School. De ontwikkeling van een kwaliteitstheorie voor geodetische metingen, 1930–1980*, Geodetisch-Historische Monografieën Nr.4, Stichting De Hollandse Cirkel, 2020.
- 9 R. Nicolai, *The Enigma of the Origin of Portolan Charts. A Geodetic Analysis of the Hypothesis of a Medieval Origin*, Brill, Leiden, 2016.
- 10 R.J. Pujades I Bataller, *Les cartes portolanes: la representació medieval d'una mar solcada*, trans. Richard Rees, Lunwerg Editores, Barcelona, 2007.
- 11 W.G.L. Randles, Pedro Nunes and the discovery of the loxodromic curve (1537), *Journal of Navigation* 50 (1997).
- 12 D. Spiegelhalter, *The Art of Statistics. Learning from Data*, Penguin Random House, 2020.

Piet Groeneboom

*Delft Institute of Applied Mathematics
TU Delft
p.groeneboom@tudelft.nl*



Column Piet takes his chance

The Statistics Scene

Piet Groeneboom regularly writes a column on everyday statistical topics in this magazine.

As a starting columnist I am suddenly confronted with a lot of choices to make. For example, in telling a story, giving the reader a feel of the statistics scene, should I mention names or should I avoid that? I also have to avoid 'name dropping', which means that an older scientist tries to impress younger scientists with all the famous people he/she is acquainted with and whose names might mean nothing to the persons he/she addresses: "Peter A. told me..., and yes he had a point... On the other hand, Jerry said..."

The additional danger of using names is that people are getting afraid of telling you something. "OK, I will tell you about our investigation of the confidence intervals in our COVID-19 research, but only if you promise not to make a mean joke about it in your column!"

Concluding this initial digression: I will use names, unless it would put the person in a negative light. And I will say "the statistician/probabilist..." to identify them for the reader. Some of the people in my story are on the picture below.

The Dutch statistics scene used to be dominated by professor Willem van Zwet, who passed away last year. Nowadays Aad van der Vaart (for a photo, see [7]) has perhaps taken over this torch. There were festivities in Leiden on the occasion of his 60th birthday where he became Knight in the Order of the Dutch Lion. On Wednesday that week there was a very pleasant dinner party at the Hortus in Leiden, where I was also invited and shared a table with a couple of prominent statisticians and Aad's wife and son, see the picture.

Moulinath Banerjee, a statistician on the opposite of the table from me, asked a waiter to take a picture of us. On the left of the table behind our table we see the 'rock star in statistics' Bradley Efron, 'the inventor of the bootstrap'. I'll come to speak about the bootstrap later. The organizers called him 'rockstar' (following a Dutch habit of combining separate words to one word, see [8] — at the time of this writing), but I read on internet: "rockstar is an energy drink, a video-game company, and a really terrible song by Nickelback which no one would ever want to be compared to, associated with, or forced to listen to." So I use two words, because I do not want Brad to be associated with these things. I was told that a famous saying of Bradley Efron is that he needed a whole year



Picture taken at the dinner in Hortus Leiden in 2019. Counterclockwise from the left: Piet Groeneboom, Maryse Loranger (wife of Aad van der Vaart), Pascal van der Vaart (son of Aad), Vera Wellner (wife of Jon Wellner), Moulinath (Mouli) Banerjee, Jon Wellner, Susan Murphy, Marloes Maathuis. On the left at the next table: Brad Efron, the 'rock star in statistics'.

to ‘unlearn’ mathematics, coming out of college (Caltech), meaning that only after a year of unlearning he was able to work on the really relevant things in statistics.

A pressing question (often) is: we have probability theory and statistics, what is the difference? At the mathematics departments of Dutch universities there used to be — apart from other chairs — two chairs, a chair for probability theory and a chair for mathematical statistics. In the eighties of the preceding century, when I became professor of mathematical statistics at the University of Amsterdam, there were big cuts in budget, which actually continued to affect me (us) during my career at the university. As a consequence I had meetings where I had to explain (unsuccessfully) to the pure mathematicians the difference between probability theory and mathematical statistics. They wanted to reduce the two chairs to one chair. I was even told that I got the position in Amsterdam because they thought I could do both chairs.

It may therefore be amusing to recall events taking place at the Mathematical Sciences Research Institute (MSRI) in Berkeley in 1991, where this issue was discussed at the beginning of a lecture I had to deliver there. As a matter of fact, I had prepared a speech on these events in Berkeley for Aad’s dinner party (see above), but did not deliver my speech at the appropriate moment, although I was very much encouraged to do so by the statistician Marloes Maathuis — sitting to the left of me at the picture of the dinner table (“Piet, this is your chance!”) — and probabilist/statistician Eric Cator (not on the photo). On my way to the Hortus from the Leiden train station I had even practiced my speech sitting down on a Leiden cafe terrace so that I could deliver it from memory.

One of our great novelists, Simon Vestdijk, has a passage in a book where he says: “My decisive error was not to drink (alcohol) before the event” (which therefore did not develop as hoped for). I guess I made the same mistake at the dinner party, staying completely sober.

But at a similar event (retirement dinner of the Dutch/British statistician Richard Gill in Leiden) I actually was not (completely) sober and I was at that time motioned to sit down during my speech by a prominent female member of the present Leiden statistics scene. This time, being completely sober, I was very reluctant to see the same scene of being motioned to sit down develop again. I abandoned therefore my plan to speak.

In the US it was and perhaps still is the habit to start a lecture with an awful joke or at least some appetizers, and so I started my lecture in Berkeley at MSRI by saying that many probabilists say that statistics is applied probability, in particular probabilists looking for a job, but that I did not agree with this point of view. For one thing because the motivation is very different for the members of the two groups. Just after having said this, Aad van der Vaart who was in the audience asked loudly: “When did you discover this, yesterday?” What could I say? I had my usual blackout, trying to think about the meaning of this interruption. So there was a short silence, after which Aad added for reasons again not clear to me: “Of course, I am ten years younger than you!” Actually, I found this rather amusing, because I knew that the distance was in fact larger than that. But it reminded me of an earlier event in Tashkent or rather Uzbekistan. I must confess that it was perhaps not very logical to think of that event, but neither was the succession of the two interruptions (I think), unless there is some higher point of view uniting the two interruptions.

The first World Congress of the Bernoulli Society was held in Tashkent in 1986 and there had (somewhat half-heartedly) been

some social events scheduled, one of them being the non-supervised climbing of a mountain near Tashkent. This type of activity has some appeal to me, so I joined a small group, containing Aad van der Vaart and the specialist in the theory of extreme values Laurens de Haan, to climb this mountain.

For some reason I was the only person to reach the top of the mountain that day. In preparation of my speech in Hortus Leiden I checked my recollection of the event with Aad at the dinner party and he remembered it very clearly. In my climbing to the top I had released rocks (by which ‘rock star’ gets yet another meaning) and Aad had been forced to go downhill with his face to the top to keep an eye on the rocks I had set into motion in climbing to the top. I just learned this at the dinner party from Aad and intended to include it in my speech. Some people even interpreted this mountain event as my attempt to kill the competition! So Aad’s second interruption at my MSRI lecture was possibly inspired by his anger about it. In our next climb of a mountain he would be first on the top!

After my lecture at MSRI Joel Zinn, an American probabilist who was in the audience, asked me whether Aad was my ‘shill’. He did not use the word shill (which I learned later from the statistician Jon Wellner, also on the picture), but asked whether this was a pre-arranged act. This sounded to me like an attractive interpretation of what happened, and since that time I have been very prone to having ‘shills’ in the audience, willingly or unwillingly. For example, the probabilist/statistician Eric Cator was my shill in Seattle, in the so-called ‘prelim’ course, preparing students to the preliminary exam for being allowed to write a PhD (we have no such thing in the Netherlands). If your shill in the audience shouts “Nonsense!” just after you made some statement, the students immediately wake up and you have their undivided attention.

So,..., I now described the gist of my intended speech at the dinner party, which would in particular have been interesting for Aad’s wife and son, sitting to the right of me on the photo of the dinner party. I did not expect to be able to do that! So at least one good thing (for me) came out of becoming a columnist of NAW.

And finally: what is the difference between probability theory and mathematical statistics? The answer is very simple: probability theory works with *one* probability measure, statistics deals with a whole family (usually uncountable) of probability measures. This distinction leads to totally different methods one has to use. To illustrate this, I continue where I left off in my first column [6].

The distribution of the incubation time of COVID-19

The column [6] was about the estimation of the distribution of the incubation time of COVID-19. It was written in Dutch. This as a consequence of a misunderstanding. It was because my predecessor Casper Albers had written his last columns in Dutch, although he had started in English. A colleague in Rome wrote to me that he understood 80% using Google Translate. If I also want to reach people like him, it is better to write in English.

The Dutch/British statistician Richard Gill asked me to write a more technical paper on the same subject for the Dutch journal *Statistica Neerlandica*, which publishes in English. I actually did that, although another colleague told me that publishing in *Statistica Neerlandica* meant that my paper was lost for science (since *Statistica Neerlandica* is often not available in foreign libraries). But I realized that, by an agreement between Wiley and Delft University of Technology, my paper would have ‘open access’ on internet, and that therefore the ‘lost for science’ matter might

not be too serious. Richard is associate editor of the journal. *Statistica Neerlandica* has a publishing system run by Wiley, which means that they prefer manuscripts written in MS Word and handle manuscripts via a firm in India which does indeed not understand TeX, let alone BibTeX. Anyway, it has (after a rather difficult communication with the firm in India) been published now [5] and shows that the typical rate for the nonparametric density estimator is $n^{2/7}$ in a continuous version of the model, if n is the sample size. I think this result is new. As spelled out in the Appendix of [5], it hinges on the computation of an adjoint in an (infinite dimensional) Hilbert space and there is no explicit solution one can use. One has in fact to solve an integral equation numerically. I really wished that we could get to this result in a simpler way, but this is where we stand right now. It uses a local version of a theory on differentiable functionals, initiated by a paper of Aad van der Vaart [10].

Fortunately, the operators on the Hilbert space have an interpretation as conditional expectations, which facilitates their computation. Another interesting aspect is that the limit distribution of the full nonparametric maximum likelihood estimator in this model is still unknown, but that we can nevertheless derive the limit distribution of the density estimator based on it. I wonder whether I still will be alive when finally these insights will reach the community of epidemiologists and medical statisticians.

The Dutch/South African probabilist Guus Balkema noticed that the bandwidths I was using for the SMLE (Smoothed Maximum Likelihood Estimator) and the density estimator, based on the nonparametric MLE (Maximum Likelihood Estimator), were 3 and 4, corresponding to the formulas (3) and (4) in my column, respectively. He said: “So you advocate the nonparametric MLE, because you do not need any parameters there, but do you choose the bandwidth parameters on the basis of the numbers of your formulas?” An astute remark, which launched me on the automatic bandwidth selection theory in this case. I find this issue rather fascinating and have some partial solutions in [5], but the matter is still not completely solved. I use the bootstrap for this (not Efron’s original bootstrap), but I may say more on this in a column later this year.

I also got a very interesting referee report which I cannot resist citing from. The referee says: “This is a technical follow-up of an earlier contribution in Dutch by the same author. In that Dutch paper, the author makes several remarks that suggest a limited knowledge where mathematical epidemiology of infectious diseases is concerned. That is no problem for a column-like contribution in Dutch, but should be remedied in a formal publication like the

one envisaged here. The author should study the literature and place his contribution in the proper context.”

Ignorance is bliss... The good news is that the referee allows me to reveal my ignorance in my columns for NAW (“no problem”). Unfortunately, the referee does not say what all this relevant literature is that I should have cited. It would mean that perhaps someone has now derived the limit distribution of the MLE in the model above? Or that someone else derived the $n^{2/7}$ rate of the density estimate based on it and determined the (normal) limit distribution? All this is very relevant for the confidence intervals which certainly will be too narrow if one uses the parametric models, apart from the fact that the corresponding estimators of the density will be inconsistent.

Another thing of interest is that the associate editor did not know who this referee was; he originally thought that it was the person whom he had asked to do the refereeing, but since this person first declined, the referee was chosen by AI (Artificial Intelligence) and his/her name was hidden from him. There is of course the suspicion that there is a connection with the RIVM, but this is only speculation. It was indeed my goal to reach the RIVM (the Centre for Infectious Disease Control and Prevention of the National Institute for Public Health and the Environment, this full name was one of the benefits of the refereeing of my paper [5]), but this has been an utterly unsuccessful endeavour so far. It might not get better after my present column.

The corresponding author of [1] never answered my questions about the difficulties with the R scripts on the accompanying site. The (lack of) information on the computation of the reproduction number in [9] is still unchanged. At a request on the COVID-19-mod forum, I translated Mathematica files for an epidemiological model into C++ and from there to R, using Rcpp. This helped of course to brush up my “limited knowledge where mathematical epidemiology of infectious diseases is concerned”. I also bought and read the nicely written book [3], but this is not really very up-to-date on the statistical treatment of these problems (if I may say so).

It surprised me that many epidemiologists seem to use Mathematica for simulations. Mathematica is great and I use it a lot, but not for simulations. In fact, the simulations in the Mathematica files became much faster in my C++ implementation. However, my translation of the Mathematica files is now sitting for seven months in a private repository of my GitHub site [4] because there were (if I understood correctly) plans to write a paper on it which did not materialize, in spite of the original enthusiasm about this (“Super!”). Hopefully there will be some movement in all this before the next pandemic starts raving around the earth. ☺

References

- 1 Jantien A. Backer, Don Klinkenberg and Jacco Wallinga, Incubation period of 2019 novel coronavirus (2019-nCoV) infections among travellers from Wuhan, China, 20–28 January 2020, *Euro Surveill.* 25 (2020).
- 2 Tom Britton and Gianpaolo Scalia Tomba, Estimation in emerging epidemics: bases and remedies, *J. R. Soc. Interface* 16 (2019).
- 3 Odo Diekmann, Hans Heesterbeek and Tom Britton, *Mathematical Tools for Understanding Infectious Disease Dynamics*, Princeton University Press, 2013.
- 4 Piet Groeneboom, Incubation time, <https://github.com/pietg/incubationtime>, 2020.
- 5 Piet Groeneboom, Estimation of the incubation time distribution for covid-19, *Statistica Neerlandica*, 2020.
- 6 Piet Groeneboom, Nederland in tijden van corona, *Nieuw Archief voor Wiskunde* 5/21 (2020), 181–184.
- 7 Leiden University, Symposium Aad van der Vaart, 2019, <https://www.universiteitleiden.nl/en/news/2019/06/symposium-aad-van-der-vaart>.
- 8 Leiden University, Statistical rockstar, 2019, <https://www.universiteitleiden.nl/en/news/2019/06/statistical-rockstar-brad-efron-opens-leiden-statistics-centre>.
- 9 RIVM, De zorg voor morgen begint vandaag. Rekenmodellen openbaar en toegankelijk, 2020, <https://www.rivm.nl/coronavirus-covid-19/hoer-berekeningen-bijdragen-aan-bestrijding-van-virus/rekenmodellen>.
- 10 A.W. van der Vaart, On differentiable functionals, *Ann. Statist.* 19 (1991), 178–204.

Daan Mulder

mulderdaan@live.nl



Het keerpunt van Jan Kalden

Je weet pas of je voorspelling goed is als je hem kunt vergelijken met de werkelijkheid

Een marinier-commando die na zijn dienst terechtkomt in de wereld van de data-analyse, en de wiskunde weet te gebruiken zodat ambulances sneller ter plaatse kunnen zijn. Dat is het bijzondere verhaal van Jan Kalden (1964). Het verhaal heeft ook een donkere rand: Kalden verloor na een zeer ernstig motorongeluk zijn beide benen. De kast met prijzen die hij na zijn ongeluk vulde met handbike-overwinningen, toont aan dat zijn doorzettingsvermogen onaangetast is.

Hoe kwam je erbij om marinier te worden?

“Al in de brugklas bedacht ik dat ik officier der mariniers wilde worden. Ik vroeg me af: wat zijn de *toughest* lui, die het meest uitgedaagd worden? Ik was al veel met sport bezig. Wedstrijdjudo, kickboksen, wielrennen. Ik liep om de dag hard. Iedereen op het gymnasium-*bèta* nam een achtste vak, maar ik niet. Ik wilde sporten, ik wilde naar het KIM, het Koninklijk Instituut voor de Marine. Voor ze je daar toelaten moet je allerlei testen doen: fysieke testen, psychologische testen, intelligentietesten. Van de velen die het probeerden werd een enkeling aangenomen. Ik moest alleen zorgen dat ik mijn Latijn zou halen. Daar heb ik toen voor gezorgd.

Na mijn tijd bij het Korps Mariniers ben ik als manager gaan werken bij de afdeling CardBase Management bij Interpay, dat nu Equens heet. Daar was ik met financieel verkeer bezig. Ik werkte er net een jaar toen ik, in 1998, het ongeluk kreeg. Ik had twee verbrijzelde benen en mijn overlevingskansen werden zeer laag ingeschat. Dat is echt een keerpunt ge-

weest. Eenmaal thuis dacht ik: hoe moet ik mijn leven weer oppakken? Wat zijn mijn sterke kanten?

Ten eerste ben ik gaan zwemmen. Bij de allereerste slagen merkte ik al: dat gaat makkelijk. Dus ik zwemmen, en

zwemmen, en zwemmen. Ik was zo een uur non-stop baantjes aan het trekken. Toen hebben ze me ingeschreven voor het Nederlands kampioenschap in mijn categorie en ben ik Nederlands kampioen geworden. Een half jaar later was ik Nederlands recordhouder, op de 50 meter schoolslag.

Het handbiken had ik inmiddels ook geleerd. Elke keer als ik een rondje reed dacht ik daarna: ben ik nou moe? Nee. Toen las ik over een rondje Lac Léman (Meer van Genève), dat is 177 kilometer.



Jan Kalden

Dat leek me wel wat. Ik zat daar met Australiërs, Amerikanen, Duitsers, Noren, Ieren, en al die lui hadden carbon frames en aerodynamische punthelmen op. Bij de start drong iedereen spichtig naar voren. Ik hoefde niet te winnen, ik was benieuwd of ik het uit kon fietsen. Ik reed eerst 28 gemiddeld, daarna 30. Ik fietste naar een groepje voor me, om even in de slipstream te kunnen hangen. Daarna haalde ik ze in, en fietste ik weer verder naar het volgende groepje. Zo ging dat door. Ik vroeg op een gegeven moment: 'Who is in front of us?' Antwoord: 'What do you mean?' Ik zei: 'Who is in front of us?' 'Nobody!' Zonder dat te beseffen zat ik ineens in de kopgroep. Ik ben iets van tiende geworden.

Ik was op zoek naar mijn fysieke grenzen. Ik had bedacht: ik ga een wereldrecord long distance handcycling vestigen. Die records worden normaal gesproken gevestigd op zo'n ovale baan, maar ik fiets veel liever buiten. Dus ik heb gekozen voor een rondje IJsselmeer, met nog wat omwegen: een rondje IJsselmeer++. Ik heb 456 kilometer in 24 uur gefietst. Toen we klaar waren, dacht ik: ben ik nou moe? Ik heb slaap, jazeker. Maar moe? Nee. Toen dacht ik: waar ben ik nou eigenlijk mee bezig? Ik stop ermee en ga gewoon lekker fietsen.

Behalve fysiek wilde ik me ook intellectueel bewijzen. Ik was na het ongeluk op zoek naar wat ik nog kon. Ik ben weer gaan schaken. Eerst moest ik bij elke zet denken: wat moet ik ook alweer doen? Het lukte me niet om met mijn hoofd bij het spel te blijven. Als je zo'n klap hebt gehad, moet je eerst trainen om je geheugen te ondersteunen. Daar bleek het schaken een heel goed hulpmiddel voor te zijn: op een gegeven moment lukte het weer om te winnen. Dat was mijn ultieme bewijs dat mijn denkvermogen weer de oude was.

Na dat ongeluk kwam ik er ook achter dat ik iets met data had. Daar begint mijn wiskundeverhaal. Ik deed CardBase Management en dacht: op basis waarvan maken we eigenlijk een inschatting van het aantal te verwerken transacties? Dus ik ging rondvragen. De antwoorden waren nogal vaag: 'We hebben hier de lijn van vorig jaar, die trekken we dan door. 10% komt erbij vanwege reclame.'

Ik zei: 'Wat is hierop dan je foutmarge?' Dat wisten ze niet. Ik dacht: dat gaan we aanpakken.

Ik ben naar de Universiteit van Porto gegaan. Op basis van mijn verhaal werd er een masterstudent toegewezen om mij te helpen. Ik had ook contact met mensen uit Bremen die voorspellingen deden met wavelets, wiskunde die met name toegepast wordt om elektromagnetische fenomenen te verklaren, en een groep uit Leuven die bezig was met non-linear dynamics, en ook een andere groep die chaostheorie deed, uit Göttingen. Iedere groep maakt een model vanuit zijn eigen cultuur, vanuit zijn eigen denken, maar als je je vastlegt op één model, zie je misschien iets over het hoofd."

Maar hoe weet je dan welk model je moet gebruiken?

"Je weet pas of je voorspelling goed is als je hem kunt vergelijken met de werkelijkheid. Ik gaf die groepen 90% van de data om mee te modelleren, en 10% hield ik zelf, als 'fridge data'. Door te kijken wat het model voorspelde op basis van die 90%, kon ik dus zien hoe goed het model werkte, door het met die 10% die ik in de ijskast had bewaard te vergelijken. Ik voorspelde dus eigenlijk het verleden, terwijl daarvoor iedereen dacht: ik doe nu een voorspelling, dan kan ik later zien wat er van gekomen is.

Sinds het ongeluk bedenk ik altijd dit soort methodes, terwijl ik dat daarvoor niet had. Professor Peter Maas van de Universiteit Bremen verwoordde dat op een mooie manier: 'Think out of the box and make Applied Mathematics applicable.' Binnen data science gerelateerde projecten moet de wiskunde leiden tot bruikbare oplossingen, die ons voldoening geven. Strakke schema's van procesdenkers tonen creatieve geesten de kortste route naar de uitgang. Met diezelfde aanpak heb ik als leidinggevende gewerkt bij MasterCard Europe.

Toen ik werd gevraagd om hoofd ambulancedienst van de GGD in Amsterdam te worden, ben ik daar gaan werken. Ook daar heb ik gelijk gevraagd hoe er met de planning werd gewerkt. Op basis waarvan zet je je capaciteit in? Daar kreeg ik eigenlijk geen antwoord op. Met

alles wat ik wist van transacties dacht ik, dit moet je ook kunnen voorspellen. Ik heb contact gezocht met Rob van der Mei, van het CWI. Hij zei: 'Heb je data voor me?' Die had ik. Verschillende PhD's hebben zich er mee bezig gehouden, ik heb nog in *Het Parool* gestaan: 'Hoe wiskunde levens redt'. Ik ben zelf gered door een ambulance. Ik dacht: ik ben gered, nu heb ik ook anderen gered. Ik heb iets teruggedaan.

Op een gegeven moment wilde ik toch weer terug naar defensie. Toen ik een bericht kreeg van het Joint Informatievoorziening Commando, ben ik daar weer met data bezig gegaan. Zo maak ik onder andere voorspellingen over de instroom, doorstroom en uitstroom van het personeel."

Heb je het er naar je zin?

"Ik heb alle vrijheid: bij alle opdrachten die ik krijg mag ik zelf bepalen hoe ik die invul. In mijn huidige omgeving zou ik bij wijze van spreken willen betalen om er te mogen werken. Ik begrijp snel hoe we onbekende fenomenen met behulp van data en algoritmes kunnen visualiseren en voorspellen. Om dit te kunnen uitvoeren motiveer ik wiskundigen, *data scientists* en onderzoekers in de AI om de individuele puzzelstukjes te vinden die de gehele puzzel vormen."

Hoe ga je om met tegenslag?

"Ik zeg altijd 'the trend is your friend'. Als ik in een goed spoor zit, dan blijf ik zo lang mogelijk op dat spoor zitten. Maar je groeit vast in je patronen, het wordt een vaste manier van doen. De anomalie, zoveel keer de standaarddeviatie, hetgeen je niet kunt voorspellen, dat brengt je juist tot andere inzichten. Door een anomalie moet ik anders gaan nadenken. Afwijkingen zijn voor mij goud waard, maar de trend zelf ook."

Goede suggesties voor een Nederlandse wiskundige met een keerpunt in zijn of haar carrière zijn welkom via keerpunt@nieuwarchief.nl.

Henk Broer

*Bernoulli Instituut voor Wiskunde, Informatica en
Kunstmatige Intelligentie, Rijksuniversiteit Groningen
h.w.broer@rug.nl*

Henk de Snoo

*Bernoulli Instituut voor Wiskunde, Informatica en
Kunstmatige Intelligentie, Rijksuniversiteit Groningen
h.s.v.de.snoo@rug.nl*

Geschiedenis

De opkomst van de Groningse wis-, natuur- en sterrenkunde in de negentiende eeuw

In dit artikel behandelen Henk Broer en Henk de Snoo de relatief late opkomst van de wis-, natuur- en sterrenkunde in het Groningen van de negentiende eeuw, tegen de achtergrond van de situatie elders in Nederland en in Europa. Met de komst van de Bataafse Republiek in 1795 was ook de organisatie van de universitaire wereld in Nederland een politiek onderwerp geworden. Uiteindelijk bleek de wetgeving uit 1863 en 1876 te leiden tot een wetenschappelijke cultuur, waarin de wis-, natuur- en sterrenkunde niet alleen konden gedijen, maar zelfs een internationale rol konden spelen.

Dit artikel beschrijft de opkomst van de Groningse wis-, natuur- en sterrenkunde in de negentiende eeuw aan de hand van de beoefenaren. De stad Groningen lag in het toenmalige Nederland geografisch geïsoleerd, eerst in 1870 werd zij rechtstreeks (via Zwolle) per spoor bereikbaar. Ook de Groningse universiteit nam in Nederland een tamelijk geïsoleerde positie in: in vergelijking met de andere Nederlandse universiteiten waren de aantallen studenten en hoogleraren laag. In het begin van de negentiende eeuw was het voortbestaan

van de universiteit in gevaar geweest en de dreiging van opheffing bleef er lang boven hangen. Daarnaast was er altijd het gevaar dat grote namen ‘weggekocht’ zouden worden. Pas met de wet op het hoger onderwijs uit 1876, die ook aanleiding gaf tot de oprichting van de Universiteit van Amsterdam, ontstond een meer stabiele situatie.¹ Toen er in de loop der zeventiger jaren door de nieuwe wet wat meer financiële armslag ontstond, kwam er ruimte voor een natuurwetenschappelijke cultuur.

Daar waar Groningen de negentiende eeuw ingegaan was met één hoogleraar in de wis-, natuur-, en sterrenkunde waren er in 1877 vier hoogleraren met eigen specialisaties. Dit betekende natuurlijk ook een vraag naar gepaste huisvesting. Door verschillende omstandigheden zou het echter nog jaren duren voor de ruimere financiële mogelijkheden ten volle benut gingen worden: vooralsnog zat de nieuwe hoogleraar sterrenkunde achter een bureau gegevens te onderzoeken en deed de hoogleraar natuurkunde zijn metingen op een meetrillende zolder.² Desondanks ziet men aan het eind van de negentiende eeuw toch aansluiting bij de internationale gelederen voor de wis-, natuur- en sterrenkunde.

Wat opvalt is dat de Groningse universitaire wereld in de negentiende eeuw grotendeels werd bevolkt door de gegoeide burgerij; hoewel men ook telgen van,

bijvoorbeeld, minder bedeelde dominees tegenkomt. In aantal overheerste het mannelijk geslacht. Elders in het land was dat niet veel anders. Pas tegen het eind van de negentiende eeuw is er een kentering. De onderwijshervormingen van Thorbecke uit 1863, die tot de invoering van de hbs leidden, hebben hier onbedoeld mede aan bijgedragen [1].

Dit artikel is als volgt opgebouwd. Voor een goed begrip van de ontwikkelingen in de negentiende eeuw wordt eerst de voorgeschiedenis kort samengevat. Hierbij spelen op de achtergrond ook de ontwikkelingen elders in Nederland en in Europa een rol en tevens de politiek omwentelingen rond de overgang van de achttiende naar de negentiende eeuw. Daarna volgt een aantal paragrafen waar telkens enkele prominente figuren worden besproken. In de laatste paragraaf volgen enkele conclusies. Het geheel wordt besloten met een notenapparaat.

Voorgeschiedenis en achtergrond

Rond 1600 begon de Gouden Eeuw van de Nederlandse wiskunde, met namen als Simon Stevin (1548–1620), Adriaan Adriaansz. Metius (1571–1635), Frans van Schooten (1615–1660), Johannes Hudde (1628–1704) en Christiaan Huygens (1629–1695). De toenmalige Nederlandse universiteiten te Leiden (opgericht in 1575), Franeker (1585), Groningen (1614), Utrecht (1636) en Harderwijk (1648) dienden alle voornamelijk ter bescherming van het ware geloof. Zowel in Groningen als in sommi-

ge andere vestigingsplaatsen speelden de wis-, natuur- en sterrenkunde vanaf het begin een, vaak bescheiden, rol in het onderwijs. Voor achtergrond informatie over deze Gouden Eeuw zij globaal verwezen naar [42, 50, 61, 62].

De uit de Zuidelijke Nederlanden afkomstige Nicolaus Mulerius (Brugge 1564–Groningen 1630) was in 1614 de eerste die in Groningen wis- en sterrenkunde doceerde; daarnaast gaf hij ook geneeskunde. Hij werd opgevolgd door:

- Matthias Pasor (Herborn 1599 – Groningen 1658), werkzaam in Groningen van 1629 tot zijn dood in 1658;
- Johannes Borgesius (Westerwijtwerd 1618 – Groningen 1652), werkzaam in Groningen van 1646 tot zijn dood in 1652;
- Joachim Borgesius (Groningen 1625 – Groningen 1666), broer van voorgaande, werkzaam in Groningen van 1654 tot zijn dood in 1666;
- Johannes Bertling (Groningen 1626 – Groningen 1690), werkzaam in Groningen van 1667 tot zijn dood in 1690, doceerde logica en wiskunde tussen 1667 en 1669.

De laatste werd pas in 1695 opgevolgd door de Zwitser Johann Bernoulli (Basel 1667 – Basel 1748), een wiskundige van grote internationale statuur, in contact met al zijn geleerde tijdgenoten en lid van vrijwel alle Europese academies. Bernoulli was een der grondleggers van de ‘variatierekening’, later verder ontwikkeld door

onder meer Leonard Euler (1707–1783) en Joseph-Louis Lagrange (1736–1813), en die een centrale rol zou spelen in vrijwel alle wetenschappen. Zijn wiskundig zeer begaafde zoon Daniel werd in 1700 in Groningen geboren [21]. Tot Bernoulli’s leerlingen behoren naast Daniel ook de Groninger Tiberius Heemsterhuis (1685–1766) en niemand minder dan Euler. In 1705 vertrok Bernoulli met zijn gezin uit Groningen terug naar Basel [51, 59].

Het duurde bijna twintig jaar voordat Bernoulli werd opgevolgd door:

- Johannes Petrus de Crosa (Lausanne 1663 – Lausanne 1750), ook bekend als Jean-Pierre de Crousaz, werkzaam in Groningen tussen 1724 en 1726;
- Nicolaas Engelhard (Bern 1696 – Haren 1765), werkzaam in Groningen van 1728 tot zijn dood in 1765;
- Frederik Adam Widder (Oppenheim 1724 – Groningen 1784), werkzaam in Groningen als lector van 1752, als buitengewoon hoogleraar vanaf 1767 en als gewoon hoogleraar vanaf 1773 tot zijn dood in 1784;
- Antonius Brugmans (Hantum 1732 – Groningen 1789), werkzaam in Groningen van 1767 tot zijn dood in 1789.

Vooral de laatsten waren hoofdzakelijk bekend als filosofen en allen moesten balanceren op het slappe koord tussen de vijandige protestantse facties van destijds; tegenstellingen die nog terug gingen op het Twaalfjarig Bestand (1609–1621). Een aantal, waaronder Bernoulli, had ook een medische achtergrond, en dat zou tot in de negentiende eeuw zo blijven. Voor achtergrond informatie zij globaal verwezen naar [8, 13, 20, 35, 34, 42, 45, 50, 52, 60, 61, 62]; zie ook [54] voor de broers Borgesius.

Elders in Nederland en Europa

In vergelijking met landen als Frankrijk en Duitsland, met namen als Bernoulli’s leerling Euler, Jean le Rond d’Alembert (1717–1783), Lagrange, Pierre-Simon de Laplace (1749–1827), Carl Friedrich Gauß (1777–1855) en Augustin-Louis Cauchy (1789–1857), kwam het Nederland van de latere achttiende en begin negentiende eeuw er op het gebied van de wis-, natuur- en sterrenkunde nogal bekaaid af, dit geheel in de geest van Potgieter [56]. Hetgeen Nederland in dit tijdvak te bieden had bestond voornamelijk uit de Leidse natuurkundige Willem Jacob ’s Gravesande



Nicolaus Mullerius (1564–1630)



Johann Bernoulli (1667–1748)

(1688–1743), de wis- en sterrenkundige Pieter van Musschenbroek (1692–1761), werkzaam in Duisburg, Utrecht en Leiden, en de wis- en natuurkundige Jean Henri van Swinden (1746–1823) die zowel in Franeker als in Amsterdam doceerde [50]. Op het gebied van biologie, genees- en scheikunde zijn verder nog te noemen Herman Boerhaave (1668–1738), Jan Ingenhousz (1730–1799) en Martinus van Marum (1750–1837) [8].

Aan het eind van de achttiende eeuw werden vele genootschappen opgericht, zowel voor educatieve als culturele doeleinden: verlichtingsidealen werden overgenomen door de samenleving. Een van die genootschappen was het Wiskundig Genootschap, opgericht in 1778, en het behoort tot de oudste nationale wiskundige genootschappen ter wereld [2,30]. Aanvankelijk waren de leden voornamelijk amateurs en praktisch georiënteerde wiskundigen, zoals landmeters, onderwijzers, boekhouders en instrumentmakers. Geheel in het teken des tijds schreef het Wiskundig Genootschap in 1807 de volgende prijsvraag uit: “Van welk nut is de Wiskunde in de voornaamste beroepen des gewoonen levens?” In de loop van de negentiende eeuw zou een nieuwe groep van beroepswiskundigen toetreden. Andere voorbeelden van bovengenoemde genootschappen die in dit artikel ter sprake komen zijn de Maatschappij tot Nut van het Algemeen uit 1784, het Gezelschap ter beoefening der proef-ondervindelijke wijsbegeerte, later Koninklijke Maatschappij voor Natuurkunde, uit 1793 en het Natuurkundig Genootschap te Groningen uit 1801.

Politieke ontwikkelingen rond 1800

Het huidige Groningse verhaal begint in 1789 bij de opvolging van Brugmans en het is van belang om iets van de toenmalige politieke constellatie en de houding ten opzichte van het onderwijs te begrijpen. Aan het eind van de achttiende eeuw werd de Republiek der Zeven Verenigde Nederlanden (1588–1795) namelijk geteisterd door ingrijpende politieke veranderingen, waarin patriotten (kezen) en orangisten tegenover elkaar stonden [58]. Er was een economische terugval en er heerste armoede op zeer grote schaal. Deze politieke verdeeldheid zou nog lang doorwerken. De Bataafse Republiek, die in 1795 met steun van de patriotten werd uitgeroepen, ging in 1806 uiteindelijk over in het Koninkrijk

Holland onder Lodewijk Napoleon.³ De inlijving bij het Franse Keizerrijk kwam in 1810 tot stand en duurde tot 1813, toen het Franse leger van Napoleon Bonaparte werd verslagen bij Waterloo. De gebeurtenissen tussen 1795 en 1813 maakten dat allerlei eeuwenoude structuren veranderden en dat er een zekere centralisatie van het bestuur over de provincies gelegd werd. Of in die eenheidsstaat ruimte zou zijn voor meerdere universiteiten was zeer de vraag. In 1796 werd er in ieder geval gesproken over één Nationale Universiteit (gevestigd te Leiden).⁴ Niet lang daarna, onder Frans bewind, sneuvelde de universiteiten van Harderwijk en Franeker, en ook die van Utrecht wankelde. En men keek met argusogen naar het bestaansrecht van de universiteit van Groningen (tussen 1812 en 1813 Keizerlijke Universiteit), ook na de Franse tijd.

Na de val van Napoleon Bonaparte in 1813 kregen de orangisten hun zin en keerde Willem VI, prins van Oranje, terug als Willem I en ging als soeverein vorst regeren. Op 16 maart 1815 zou hij zichzelf uitroepen tot Koning van het Verenigd Koninkrijk der Nederlanden, dus inclusief de Zuidelijke Nederlanden, en Groothertog van Luxemburg; de erfopvolging werd een feit. De Zuidelijke Nederlanden zouden door de Belgische opstand van 1830 een afsplitsing afdwingen.⁵ In het nieuwe koninkrijk overleefde veel van de Franse besluitvorming, onder andere de inrichting van het onderwijs: ook na de afsplitsing bleef dat zo. Het zou tot 1863 en 1876 duren voordat eerst

het middelbaar en vervolgens het hoger onderwijs via Thorbeckes nieuwe wetten geregeld zouden worden.

Van 1789 tot 1835:

Baart de la Faille en Brouwer

Het was in de roerige overgangperiode, tussen de Republiek der Zeven Verenigde Nederlanden en het (Verenigd) Koninkrijk der Nederlanden, dat Jacob Baart de la Faille en Seerp Brouwer in Groningen werkzaam waren.

Jacob Baart de la Faille (Den Haag, 20 juli 1757 – Groningen, 1 april 1823) had als vader dr. Jacob Baart (Baert) de la Faille (1716–1777), die op 28 juli 1750 in Franeker bij Petrus Camper (1722–1789) in de wijsbegeerte was gepromoveerd. De vader doceerde wis- en natuurkunde (waaronder ‘physica experimentalis’) aan een aantal Haagse instellingen, waaronder de (Haagse) Fundatie van Renswoude, en beschikte over een breed samengesteld instrumentenkabinet. Ongetwijfeld mede dankzij de vooropleiding die zijn vader hem had kunnen geven, promoveerde de zestienjarige zoon Jacob I op 5 mei 1774 in de wijsbegeerte aan de Leidse universiteit; daarna studeerde hij nog in Utrecht en Parijs. Bij terugkomst in Den Haag trad hij in de voetsporen van zijn vader, voordat hij in 1789 benoemd werd tot hoogleraar te Groningen, om de kort daarvoor overleden Antonius Brugmans op te volgen. Hij bracht het instrumentenkabinet van zijn vader mee naar Groningen.



Jacob Baart de la Faille (1757–1823)



Seerp Brouwer (1793–1856)

Het *Natuurkundig Genootschap* te Groningen werd in 1801 opgericht door onder meer de studenten Theodorus van Swinderen (1784–1851) (door Joh. Huizinga [33] liefkozend ‘het wonderkind Dorus’ genoemd) en Sibrandus Stratingh (1785–1841), maar er waren ook rechten- en medische studenten bij betrokken. Zij waren hiertoe mede geïnspireerd door het onderwijs van Jacob Baart de la Faille (1757–1823) en Petrus Driesen (1753–1828) en op aandringen van de eerste. De activiteiten van het Genootschap bestonden (en bestaan deels nog steeds) uit het organiseren van voordrachten, zowel door de leden als door genodigden, en het demonstreren van proeven. De eerste helft van de negentiende eeuw was een van de bloeiperioden van dit Genootschap, dat vanaf 1976 het predicaat ‘koninklijk’ voert. Het Genootschap vormde een verbinding tussen de universiteit en het middelbaar onderwijs, met name met de in 1864 opgerichte Rijks-hbs te Groningen. Verschillende Groningse wis-, natuur- en sterrenkundigen zouden een belangrijke rol binnen het Natuurkundig Genootschap spelen. Informatie over het Natuurkundig Genootschap kan men vinden in [11, 24, 27, 29]; ook interessant is Enschedé in 1876 uitgesproken feestrede [24] ter gelegenheid van het 75-jarig bestaan van het NG.

Jacob I moet een begenadigd docent zijn geweest. Het waren zijn colleges en experimenten die er in 1801 mede toe geleid hebben het Natuurkundig Genootschap op te richten. Jacob I was zelf ook lid van dit Genootschap geworden en heeft daar diverse lezingen gegeven. Zijn zoon Jacob II Baart de la Faille (1795–1867), later hoogleraar geneeskunde, speelde een prominente rol als bestuurslid in het Genootschap; deze was ook prorector geweest van de eerste senaat van het in 1815 opgerichte Groninger Studenten Corps *Vindicat atque Polit.* In september 1812 maakt Jacob I kennis met de kunstenaar Antoine-Ignace Melling (1763–1831) die in dat jaar rondtrekt door de Noordelijkste delen van het Franse Keizerrijk, om schetsen te maken van de nieuwe ingelijfde gebieden [53]. Hij geeft Melling een korte inleiding in de plaatselijke geschiedenis en brengt hem in contact met de kunstverzamelaar

Pieter Roelfzema (1745–1826) en diens tweede vrouw, de kunstenaar Albarta ten Oever (1772–1854) [41].

Op de universiteit was Jacob I niet de eerste de beste: bij het tweede eeuwfeest van de universiteit was het aan hem om op 11 oktober 1814 promotor te zijn bij de formele promotie van Jan Constantijn Driesen (1790–1824), welke gelegenheid bijgewoond werd door Willem I. Daarbij sprak hij de rede ‘Oratio de deliciis, quae percipiuntur ex disciplinis mathematico-physicis’ uit. Jacob I verkocht in 1817 zijn instrumentenkabinet aan de universiteit. In zijn nadagen heeft Baart de la Faille veel fysieke ongemakken gekend. Toen Seerp Brouwer hem in 1823 opvolgde bleek de verzameling instrumenten in slechte staat te verkeren.

Seerp Brouwer (Franeker, 8 februari 1793 – Leeuwarden, 30 juli 1856) kwam uit een doopsgezinde domineesfamilie. Vader Jan

Brouwer (1760–1838) was lid van allerlei geleerde genootschappen en curator van het gymnasium. Zoon Seerp bleek een uitbinker op de Latijnse school in Leeuwarden. Brouwer studeerde godgeleerdheid, geneeskunde en wis- en natuurkunde in Franeker en ging in 1811 (na de opheffing van de Academie van Franeker) naar Leiden, waar hij in 1816 promoveerde in de verloskunde. Samen met studiegenoten Abraham Boxman (1796–1856) en Johan Arnold Aemilius Willem van Rappard (1794–1826) liet hij zich op 19 oktober 1816 in Göttingen inschrijven als student voor het wintersemester.⁶ Daarna bezocht hij nog de universiteiten van Heidelberg en Tübingen. Bij terugkeer in Leiden promoveerde hij in de wiskunde op 15 oktober 1817. Deze laatste promotie was bij Cornelis Ekema (1773–1826), die als docent ook de overstap van Franeker naar Leiden gemaakt had.

Interessant zijn de militaire intermezzi in Brouwers carrière als Leids student. Zo werd hij in 1813, nog onder Napoleon, onvrijwillig ingelijfd als lid van de Garde d’Honneur. Hij verbleef enkele maanden in Duitsland en, na de Völkerschlacht bij Leipzig, was hij in de buurt van Hanau getuige van de terugtocht van het Franse leger. Uiteindelijk ontsnapte hij met enkele leeftijdsgenoten uit Mainz, waar nog een Frans garnizoen had standgehouden, en kon hij veilig thuiskomen bij zijn ouders in Leeuwarden. In 1815, na Napoleons ontsnapping uit Elba, werd Brouwer sergeant-majoor bij de vrijwillige jagers van de Leidse studentenweerbehaarheid en vertoefde in de zomer als zodanig nog enige tijd aan de Franse grens (in de buurt van Mons en Valenciennes): hij was inmiddels een warm vaderlander geworden. Hij was een der organisatoren van het herinneringsfeest in 1840 van de compagnie vrijwillige jagers uit 1815; ook bij de viering in 1855 in Arnhem was hij aanwezig.

In 1817 keerde Brouwer terug naar Leeuwarden als geneesheer, waar hij een aantal jaren zou verblijven. Als Jacob van Lennep (1802–1868) en Dirk van Hogendorp (1797–1845) in 1823 op hun bekende trektocht door Nederland de stad Leeuwarden aandoen krijgen ze, volgens hun reisverslag, op vrijdag 13 juni bezoek van Seerp Brouwer, “Med. Dr. thands beroepen hoogleeraar te Groningen”.⁸ Brouwer zou van 1823 tot 1835 hoogleraar wis- en natuurkunde te Groningen zijn als opvolger van Baart de

De *Hogeschool van Franeker* (of Academie van Friesland) werd gevestigd in 1585. Een van de wiskundigen van betekenis aldaar was Adriaan Adriaansz. Metius (1571–1635); zelfs René Descartes (1596–1650) heeft in de zomer van 1629 Metius bezocht. Na een aanvankelijke bloei, vooral in de godgeleerdheid, raakte de hogeschool in verval en werd in 1811, onder het bewind van Napoleon, per decreet opgeheven. Na de Franse tijd werd in 1815, als compensatie nog een (Rijks-) Atheneum opgericht, maar dat werd in 1843, bij gebrek aan studenten, ook weer opgeheven. De bekende Jean Henri van Swinden (1746–1823) was van 1766 tot 1785 hoogleraar in Franeker, voordat hij naar het Atheneum in Amsterdam vertrok. Er waren ook professoren die uiteindelijk in Groningen belandden, zoals Brugmans in 1767 en later Ermerins en Enschedé; vergelijk [14]. Eise Eisinga (1744–1828), die een planetarium in zijn huis in Franeker bouwde, heeft nooit gestudeerd, maar is wel, op grond van zijn verdiensten, in 1797 tot curator van de hogeschool benoemd.⁷



Gideon Jan Verdam (1801–1866)

la Faille. Tijdens de ‘Groninger ziekte’ (een soort malaria of tyfus) van 1826 liet hij zich nogmaals inzetten als geneesheer. Maar of hij veel voldoening van zijn werk in Groningen heeft gehad? Bij zijn aantreden snoepten achtereenvolgens Van Swinderen en Jacobus Albertus Uilkens (1772–1825) enige colleges van hem af met bijbehorende inkomsten. Brouwer hield alleen wis- en sterrenkunde over en stelde zich daarom er maar mee tevreden de studenten met behulp van zijn uitstekende kijker die hij op de bovenverdieping van zijn huis had staan, in te wijden in de pracht van de sterrenhemel. Hij nam zelf ontslag in 1835, zonder enige aanspraak op pensioen, en werd als hoogleraar opgevolgd door Jan Willem Ermerins. Brouwer vestigde zich uiteindelijk opnieuw te Leeuwarden, ditmaal als huiskamergeleerde. Van 1842 tot 1845 was hij lid van de Tweede Kamer der Staten Generaal.

In de tijd van Brouwer was er een beweging naar meer op de praktijk afgestemd onderwijs. In dit kader werd Gideon Jan Verdam (Mijdrecht, 2 december 1801 – Leiden, 29 oktober 1866) in 1827 aangesteld als lector praktische mechanica in Groningen, zie ook [8]. Hier schreef hij het eerste deel van zijn vierdelige standaardwerk *Gronden der toegepaste werktuigkunst*; van het volledige werk [65] verscheen onmiddellijk een Duitse vertaling; zie ook [57]. Door de te geringe belangstelling voor zijn colleges was Verdam al het volgend jaar weer vertrokken. Verdam zou later hoogleraar wiskunde in Leiden worden.

Van 1835 tot 1881:

Ermerins, Enschedé, Mees, Rink en Kapteyn

Na het vrijwillige vertrek van Brouwer in 1835 kwam Jan Willem Ermerins vanuit het Atheneum in Franeker naar Groningen. Hij werd in Franeker opgevolgd door Willem Adriaan Enschedé, die bij de sluiting van het Atheneum in 1843 ook naar Groningen zou komen. Beiden zetten vanuit Franeker de traditie voort van de eerder genoemde Van Swinden om dagelijks meteorologische waarnemingen te verrichten. Zowel Ermerins, als rector in Franeker, en Enschedé, als student in Leiden, hebben te maken gehad met de afsplitsing van de Zuidelijke Nederlanden. Ermerins werd in 1868 opgevolgd door Rudolf Adriaan Mees. Tengevolge van de wet op het hoger onderwijs uit 1876 werden in 1877 nieuwe posities voor wiskunde en sterrenkunde gecreëerd, waarop Hendrik Jan Rink en Jacobus Cornelius Kapteyn terechtkwamen, zie de volgende paragraaf. Als hoogleraar ging Enschedé in 1881 met pensioen. Daar waar Ermerins en Enschedé nog voornamelijk ‘geleerden’ waren geweest, ziet men bij hun opvolgers een steeds grotere nadruk komen te liggen op eigen onderzoek en een drang om resultaten te publiceren.

Jan Willem Ermerins (Zierikzee, 19 februari 1798 – Groningen, 2 maart 1869) werd geboren in een aanzienlijke familie waarvan een aantal leden hoge functies vervulden in de ambtenarij en de rechterlijke macht. Zijn middelbare schoolopleiding genoot hij aan de Latijnse school in Zierikzee. Erme-

rins studeerde tot en met zijn promotie in Leiden, waar hij in 1824 promoveerde met Ekema als een van zijn promotoren, net als Seerp Brouwer dat had gedaan. Tijdens zijn opleiding had hij in Parijs contacten met de bekende natuurkundige André-Marie Ampère (1775–1836). Na zijn promotie werd hij praktiserend geneesheer te Den Haag, om spoedig daarop, in 1825, door ‘s konings keuze te worden beroepen als hoogleraar te Franeker, met als leeropdracht ‘mathesis, physica, logica en metaphysica’. Aldaar bekleedde hij het rectoraat voor een periode van drie jaar, voordat hij het in 1832 overdroeg. In november 1830 had hij als hoofd van de Franeker professoren afscheid genomen van de studenten uit Franeker (en Groningen) die zich aangemeld hadden voor de strijd tegen de opstandige Belgen (daartoe aangespoord door Willem I) en later aan de tiendaagse veldtocht zouden deelnemen. Na een verblijf van tien jaar in Franeker werd hij in 1835 hoogleraar in Groningen, als opvolger van Seerp Brouwer.⁹

Belangrijk is zijn ‘fysisch kabinet’, eerst al in Franeker, maar daarna ook in Groningen, waarvoor later op de bovenste verdieping van het in 1850 gebouwde Academieggebouw ruimte werd gemaakt. Dit kabinet bevatte naast allerlei natuurkundige instrumenten en proefopstellingen ook medisch materiaal. Hiervoor was jaarlijks een budget van 800 gulden beschikbaar. Ermerins moet een erudiet en begenadigd docent geweest zijn. Van zijn hand verscheen onder meer ‘Beschrijving van het Electro-dynamischen toestel van Ampère’ [26].



Jan Willem Ermerins (1798–1869)



Willem Adriaan Enschedé (1811–1899)

Ermerins was ook actief lid van het Natuurkundig Genootschap, waar hij regelmatig voordrachten hield en enige tijd optrad als bestuurder. Verder werd hij in 1830 lid van het Koninklijk Nederlands Instituut dat na opheffing overging in de Koninklijke Academie van Wetenschappen. Hij was buitengewoon lid van verdienste van het Wiskundig Genootschap. Nadat hij in 1845 een aanzoek uit Leiden verwierp, ook al betrof dit de opvolging van de gerenommeerde wis- en sterrenkundige Pieter Johannes Uyenbroek (1772–1844), werd hij in 1846 versierd met de orde van de Nederlandse Leeuw. Tevens kreeg hij van de Groningse universiteit bij die gelegenheid een magneto-elektrisch toestel met inscriptie voor zijn kabinet.

In dit verband is ook vermeldenswaardig dat hij meedacht over het stellen van een bliksemafleider op de Martinitorren, waarvoor hij een zilveren blad met het stadswapen ontving.

Behalve wis- en natuurkunde doceerde Ermerins ook sterrenkunde, hetgeen hem in 1838 bracht tot een vertaling van het uit 1833 stammende werk *Treatise on Astronomy* door Sir John Herschel (1792–1871) als *Handleiding bij de beoefening der sterrekunde*, bedoeld voor lezers “uit den beschaafden stand”. Bij de komst van Enschedé in 1843 ging een aantal onderdelen uit het takenpakket van Ermerins, waaronder de sterrenkunde, over naar Enschedé. In 1843 schrijft Ermerins het merkwaardige pamflet ‘Bedenkingen tegen de pogingen door de algemeene christelijke synode der hervormde kerk bij Z. M. den Koning aangevend, om de Studenten in de Godgeleerdheid aan onze Hoogeschoolen te ontslaan van alle verpligte Studie in de Mathesis’, kom daar nu nog maar eens om.

Ermerins ging in 1868 met pensioen. Men krijgt de indruk dat zijn laatste jaren aan de universiteit een stagnatie hadden gekend; het was aan Rudolf Adriaan Mees om een frisse wind te laten waaien.

Willem Adriaan Enschedé (Haarlem, 20 april 1811 – Groningen, 13 april 1899) werd geboren in de bekende drukkersfamilie van die naam. Op zestienjarige leeftijd ging hij studeren in Leiden, waar hij dienst nam bij de vrijwillige jagers der Leidsche Hoogeschool. Als korporaal deed hij mee aan de tiendaagse veldtocht tegen de opstandige Belgen. In 1834 promoveerde hij in Leiden

in de wis- en natuurkunde, bij de al boven genoemde Uyenbroek.

Hierna, in 1835, werd Enschedé op 24-jarige leeftijd hoogleraar aan het Atheneum te Franeker, waar hij Jan Willem Ermerins opvolgde, die kort daarvoor naar Groningen vertrokken was. Na de sluiting van het Atheneum in 1843 werd Enschedé, op zijn verzoek (hij mocht kiezen), toegevoegd als buitengewoon (gewoon vanaf 1847) hoogleraar aan de universiteit te Groningen om daar collega van Ermerins te worden. Uiteindelijk werd zijn leeropdracht: ‘differentiaal- en integraalrekening, analytische meetkunde, analytische mechanica, astronomie en meteorologie’. Hierdoor kreeg Ermerins de gelegenheid zich meer toe te leggen op natuurkunde proeven in zijn ‘fysisch kabinet’. Na de dood van Uyenbroek in 1844 werd ook Enschedé voorgedragen voor een benoeming in Leiden, maar net als Ermerins bleef hij liever in Groningen. Bij de overdracht van het rectoraat in 1852 hield hij een oratie over Bernoulli [23]: een lofrede met een voor die tijd tamelijk volledig overzicht van Bernoulli’s leven, gebaseerd, naar eigen zeggen, op primaire bronnen.

Enschedé was evenals Ermerins actief in het Natuurkundig Genootschap. Ter gelegenheid van het 75-jarig bestaan van het Natuurkundig Genootschap hield hij in 1876 een feestrede [24]. In 1881 werd hij als hoogleraar opgevolgd door Pieter Hendrik Schoute.¹⁰ Enschedé moet een druk man geweest zijn. Sinds 1851 was hij namelijk ook bibliothecaris der universiteit. Als zodanig

heeft Enschedé zeer veel betekend, zowel voor het boekenbestand, catalogisering als de behuizing. Na zijn emeritaat als hoogleraar bleef hij nog bibliothecaris tot 1886; men vroeg zich bij zijn vertrek af wie hem zou willen opvolgen voor slechts 800 gulden per jaar (een leraar wiskunde aan een hbs kon al gauw het dubbele verdienen). In 1889 schonk Enschedé zijn jarenlang dagelijks bijgehouden meteorologische gegevens aan het in 1854 opgerichte Koninklijk Meteorologisch Observatorium (later KNMI), met Christophorus Henricus Dedericus Buys Ballot (1817–1890) nog als directeur. Enschedé was een der organisatoren van het herinneringsfeest in augustus 1841 van de compagnie vrijwillige jagers uit 1831.

Rudolf Adriaan Mees (Rotterdam, 27 september 1844 – Groningen, 15 februari 1886) was een telg uit de bekende bankiersfamilie van die naam. Zijn vader en ook verschillende oudooms waren lid van de Koninklijke Academie van Wetenschappen. Mees volgde een versnipperde middelbare schoolopleiding in Amsterdam; in 1846 was de Latijnse school daar vervangen door een gymnasium en velen konden zich niet met de nieuwe regelingen verenigen. Daarna studeerde Mees natuurkunde aan het Atheneum (nu Universiteit) van Amsterdam en in Utrecht, waar hij uiteindelijk ook promoveerde. Hij werd in zijn onderzoek gestimuleerd door Buys Ballot en Cornelius Hubertus Carolus Grinwis (1831–1899) en promoveerde in 1867 in Utrecht bij Richard (Rijk) van Rees (1798–1875). Ondertussen



Rudolf Adriaan Mees (1844–1886)



Hendrik Jan Rink (1847–1883)

had Mees onder meer het in 1854 opgerichte Eidgenössisches Polytechnikum te Zürich bezocht, waar hij in contact kwam met de thermodynamicus Rudolph Clausius (1822–1888) en de wiskundigen Elwin Bruno Christoffel (1829–1900) en Friedrich Prym (1841–1915). Dit geheel droeg bij aan Mees' ontwikkeling in de mathematische fysica.

Mees had reeds een benoeming als leeraar aan een hbs willen aanvaarden, toen hij in 1868, nog geen 24 jaar oud, werd beroepen als hoogleraar in Groningen als opvolger van Ermerins en collega van Enschedé.¹¹ Zijn leeropdracht bestond uit 'natuurkunde, meteorologie, hogere wiskunde en astronomie'. Het onderdeel astronomie was in een eerder stadium van Ermerins naar Enschedé overgegaan en kwam nu weer terug bij de opvolger van Ermerins. Overigens zou in 1877 weer een herschikking van vakken plaatsvinden; bij die gelegenheid ging de astronomie over naar de nieuwe collega Kapteyn. Mees was geïnteresseerd in experimenten in tegenstelling tot zijn promotor Van Rees. Aanvankelijk kon Mees uit de voeten in het 'fysisch kabinet' op de zolder van het nieuwe Academiegebouw. Maar in het jaarverslag 1882–1883 kan men lezen: "De Physika behoort eindelijk tot haar recht te komen", en "jaar in jaar uit moet de hoogleeraar zich tevreden stellen met een gebouw, dat geene enkele vloer bezit, die niet met de andere deelen van het gebouw meêtrilt. Men moest begrijpen, dat een fysisch laboratorium niet t'huis behoort op eene bovenverdieping", vergelijk [36, p. 32].

Mees gaf schitterende colleges [22] in de mathematische fysica en hij had veel aandacht voor de Maxwellse elektriciteitsleer. Hij was actief in het Natuurkundig Genootschap, ook als bestuurslid, en lid van de Koninklijke Akademie van Wetenschappen. In 1879 was Mees de promotor van Heike Kamerlingh Onnes (1853–1926), die in 1886 zijn overlijdensbericht voor deze Akademie zou schrijven. Mees werd opgevolgd door de natuurkundige Herman Haga.

Hendrik Jan Rink (Tiel, 12 juni 1847 – Groningen, 14 september 1883) werd geboren in een eeuwenoude Tielse familie van juristen.¹² Rink werd in Delft opgeleid tot civiel ingenieur en ging vervolgens naar Utrecht, waar hij in 1871 promoveerde bij de reeds genoemde Grinwis in de mathematische fysica.¹³

Na benoemingen aan de hbs te Tiel en te Delft aanvaardde Rink in 1877 het ambt van hoogleraar wiskunde te Groningen. Daarmee moet hij een van de eerste hbs-leraren zijn geweest, die hoogleraar in Groningen werd. Het gevolg van deze benoeming was een aanzienlijke verlichting van Enschedé's onderwijstaken. Rinks oorspronkelijke leeropdracht luidde 'beschrijvende meetkunde, differentiaal en integraalrekening, theorie der functien'. Ook verving hij Mees, die uitviel wegens ziekte, bij diens colleges mathematische fysica. Waren zijn eerste publicaties van natuurkundige aard, zijn later werk betrof de complexe analyse dat werd gepubliceerd in buitenlandse tijdschriften. Door zijn geheel onverwachte overlijden is Rinks werk in die richting dus vroegtijdig afgebroken.

Naast het eigen werk zette Rink zich in om bij het grote publiek belangstelling te kweken voor wetenschappelijke zaken. Reeds in Delft was hij bijvoorbeeld als bestuurslid en spreker betrokken bij de Maatschappij tot Nut van het Algemeen. Ook voor de Koninklijke Maatschappij voor Natuurkunde hield hij een aantal voordrachten. Op maatschappelijk gebied was Rink eveneens actief, zoals uit zijn lidmaatschap van de Groningse gemeenteraad moge blijken. Bij de begrafenis waren geen toespraken, maar de *Provinciale Groninger Courant* schreef: "Rink die een open oog had voor de publieke zaak en met de benijdenswaardige zucht was bezielde de studeerkamer bij wijlen te verwisselen met het terrein van het werkelijke leven,

ontving van zijne medeburgers menig blijk van de hooge schatting, waarin hij bij hen stond aangeschreven."

Van 1881 naar de twintigste eeuw: Schoute, De Boer, Kapteyn en Haga

Toen Pieter Hendrik Schoute in 1881 aantrad als opvolger van Enschedé kwam het onderwijs in de wis-, natuur- en sterrenkunde geheel in handen te liggen van een groep betrekkelijk jonge mensen: Mees, Rink, Schoute, Kapteyn. Maar de hooggestemde verwachtingen werden wreed verstoord: op 14 september 1883 stierf Rink, zoals gezegd, totaal onverwacht en op 15 februari 1886 stierf ook de reeds lang ziekelijke Mees. Beiden waren veelbelovend geweest, maar te vroeg gestorven om naam te maken. Het was dus aan Schoute, de Boer (opvolger van Rink), Haga (opvolger van Mees) en Kapteyn (al sedert 1877 hoogleraar) om als wis-, natuur- en sterrenkundigen Groningen de twintigste eeuw binnen te leiden en aansluiting te zoeken bij de internationale geleerden.

Pieter Hendrik Schoute (Wormerveer, 21 januari 1846 – Groningen, 18 april 1913) werd geboren uit ouders die een industrieel molenaarsbedrijf runden. Met twee broers die al in het bedrijf zaten kon Schoute na zijn gymnasium opleiding gaan studeren; eerst in Delft en daarna wiskunde in Leiden. In Leiden is hij gepromoveerd bij David Biërens de Haan (1822–1895) om vervolgens les te gaan geven aan de hbs te Nijmegen en Den Haag. In betrekkelijk korte



Pieter Hendrik Schoute (1846–1913)



Floris de Boer (1846–1908)

tijd maakte hij naam als meetkundige en werd hij beroepen als hoogleraar te Groningen voor de opvolging van Enschedé. Was Schoute in eerste instantie nog vooral geïnteresseerd in regeloppervlakken, een meetkundig onderwerp dat destijds in zwang was, kreeg hij in het begin van de jaren negentig belangstelling voor hoger-dimensionale meetkunde, vooral in de dimensie vier. Zijn werk omtrent de algebraïsche bepaling van de driedimensionale secties van vierdimensionale Platonische lichamen werd opgemerkt door de autodidact Alicia Boole Stott (1860–1940), een dochter van de bekende wiskundige George Boole (1815–1864); zij had inmiddels dezelfde secties op louter meetkundige wijze bepaald. Beiden gingen later verder met de bestudering van niet-reguliere lichamen in vier dimensies.

Schoute had veertien promovendi waaronder Willem van der Woude (1876–1974), later hoogleraar in Leiden, en Emanuel Lodewijk Elte (1881–1943). Schoute heeft veel betekend voor het Wiskundig Genootschap en ook was hij actief binnen de Koninklijke Akademie van Wetenschappen. Daarnaast heeft hij internationaal een vooraanstaande rol gespeeld, zowel door zijn onderzoek, als door zijn organisatorische inzet bij *Revue semestrielle des publications mathématiques*; vergelijk [5]. Dit was een in 1893 begonnen voorloper van de *Mathematical Reviews*, die opgezet was samen met Willem Kapteyn (1849–1927), Jan Cornelis Kluyver (1860–1932), Diederik Johannes Korteweg (1848–1941), Hendrik (Hk) de Vries (1867–1954) en (de wiskundige) Pieter Zeeman (1850–1915).

Floris de Boer (Assendelft, 3 maart 1846 – Groningen, 21 december 1908) werd geboren in een welgestelde boerenfamilie, waar een verdere opleiding echter niet voor de hand lag. Zijn jongere broer Klaas de Boer (1852–1936) werd boer, burgemeester van Assendelft, en later lid van de Tweede Kamer. Toch werd Floris in de gelegenheid gesteld wiskunde te gaan studeren in Leiden (via aktes en een toelatingsexamen), waar hij, net als Schoute, promoveerde bij Bierens de Haan. De Boer begon zijn carrière van 1871 tot 1879 als leraar aan de hbs te Deventer om daarna leraar aan de hbs te Leiden te worden. In 1884 werd hij beroepen als hoogleraar wiskunde te Groningen voor de opvolging van Rink; de eerdere kandidaat Thomas Jan Stieltjes

(1856–1894) was door het ministerie afgevoerd vanwege een gebrek aan formele diplomas. De Boer bekleedde het rectoraat van de universiteit in 1895/96. In het bijzonder valt te noemen dat hij optrad als promotor bij het eredoctoraat van Kluyver, hoogleraar wiskunde te Leiden. Kluyver speelde een belangrijke rol in de vernieuwing van het universitaire wiskunde curriculum. Bij de overdracht van het rectoraat in 1896 hield de Boer, in het voetspoor van Enschedé in 1852, een oratie [15] getiteld 'De familie Bernoulli in de geschiedenis der wiskunde'.¹⁴ Toen hij in 1907 hartproblemen kreeg, werden zijn colleges tijdelijk waargenomen door de latere sterrenkundige Willem de Sitter (1872–1934).

Jacobus Cornelius Kapteyn (Barneveld, 19 januari 1851 – Amsterdam, 18 juni 1922) was een wis- en sterrenkundige op de overgang naar de twintigste eeuw. Hij ging in Utrecht studeren na op zestienjarige leeftijd toelatingsexamen gedaan te hebben. Net als zijn oudere broers Nicolaas Pieter en (de eerder genoemde) Willem en, onder meer, Hendrik Jan Rink, promoveerde hij bij de al genoemde Utrechtse hoogleraar Grinwis in de mathematische fysica. Kapteyn werd in 1877 hoogleraar sterrenkunde, waarschijnlijkheidsrekening en mechanica te Groningen, daarmee het takenpakket van Enschedé ontlastend. Zonder eigen observatiemogelijkheden was hij tussen 1885 en 1900 met David Gill van de Kaapsterrenwacht bezig geweest met de Cape Photographic Durchmusterung.



Jacobus Cornelius Kapteyn (1851–1922)

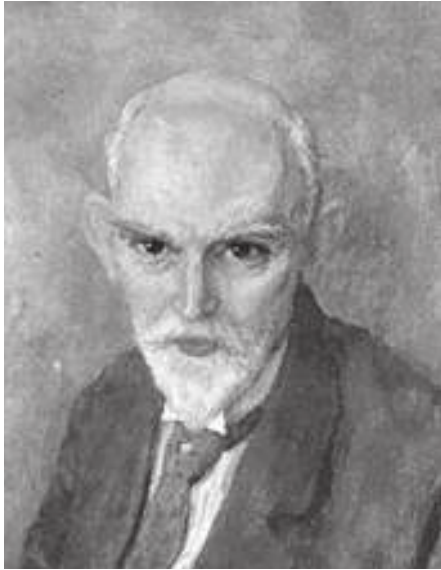
Dit betrof het jarenlang in Groningen uitmeten van fotografische platen. Dit werk maakte veel indruk en hij werd in een klap beroemd. Hiervoor kreeg hij in 1902 de Gold Medal van de Royal Astronomical Society. Die statistische kennis leidde ook tot werk in de biologie, bijvoorbeeld *Skew Frequency Curves in Biology and Statistics* met de Wageningse wiskundige M.J. van Uven (1878–1959). Voor de enorme invloed die Kapteyn heeft gehad op het sterrenkundig onderzoek, zowel nationaal als internationaal; vergelijk [47]. Kapteyn heeft ook een grote rol gespeeld in het Natuurkundig Genootschap: hij hield hier vele lezingen; hij was bovendien bestuurslid van het genootschap en voorzitter van de wetenschappelijke afdeling [29,47]. Tevens was hij actief binnen de Koninklijke Akademie van Wetenschappen.

Willem de Sitter studeerde aanvankelijk wiskunde en was in 1901 bij Kapteyn gepromoveerd, waarna hij zich richtte op de sterrenkunde.¹⁵ In het zelfde jaar waarin hij de zieke de Boer verving werd hij hoogleeraar sterrenkunde in Leiden.

Herman Haga (Oldeboorn, 24 januari 1852 – Zeist, 11 september 1936) ging naar de hbs en het gymnasium in Arnhem en studeerde van 1871 tot 1876 natuurkunde in Leiden. Op school raakte hij voor het leven bevriend met Hendrik Antoon Lorentz (1853–1928). Tijdens zijn studie was hij in 1874–1875 observator bij de sterrenwacht. Hij promoveerde, net als Lorentz, bij Petrus Leonardus Rijke (1812–1899), en wel in



Herman Haga (1852–1936)



Willem de Sitter (1872–1934)

1876 op het proefschrift *De absorptie van stralende warmte door waterdamp*. Daarna was hij een jaar assistent natuurkunde in Straatsburg bij August Kundt (1839–1894). Bij terugkomst in Nederland werd hij leraar in de natuurkunde en kosmografie aan de hbs in Apeldoorn en later in Delft (waar hij zijn onderzoek kon voortzetten in het laboratorium van de Polytechnische school). In 1886 kwam zijn benoeming in Groningen tot hoogleraar in de natuurkunde en meteorologie. Haga was zeer teleurgesteld bij het zien van het fysisch kabinet en er werd aangedrongen op een spoedige verbetering, vergelijk [37, p.30]. Het nieuwe (ijzervrije) natuurkundig laboratorium kwam in 1892 onder zijn leiding tot stand. Later zou hij nog een rol spelen binnen het Natuurkundig Genootschap, ook als bestuurslid. Landelijk was hij actief in de Koninklijke Akademie van Wetenschappen.

Met zijn promovendus Cornelis Harm Wind (1867–1911) deed hij later spraakmakend onderzoek naar de verstrooiing van röntgenstraling aan kristalroosters waarbij het golfkarakter van deze straling aangetoond werd. Wind was lector mathematische physica en fysische chemie in Groningen tussen 1895 en 1902.¹⁶ Pogingen om Wind te bevorderen tot hoogleraar werden gedwarsboomd door het ministerie; in 1902 werd hij directeur van het KNMI en vervolgens hoogleraar in Utrecht. Andere vooraanstaande leerlingen van Haga waren Lodewijk Hendrik Siertsema (1863–1945), tussen 1901 en 1904 lector in Leiden en daarna hoogleraar in Delft, Cornelis Schou-



Cornelis Harm Wind (1867–1911)

te (1874–1960), de latere adjunct-directeur van het KNMI, en Ekko Oosterhuis (1886–1966), tweede man van het Natuurkundig Laboratorium van Philips onder Gilles Holst (1886–1968). Voor meer details zie [7,8].

Ten slotte

In de eerste paragraaf werd de bloeiperiode besproken van de Nederlandse natuurwetenschappen in de Gouden Eeuw. Ook werd het achttiende eeuwse achterblijven hiervan besproken in vergelijking tot de ontwikkelingen elders in Europa, zowel op het gebied van onderzoek als in de organisatie. De rectorale rede van Baart de la Faille in 1799, de laatste Groningse rede van de achttiende eeuw getiteld 'Oratio de vero felicitatis sensu' sluit deze eeuw af en in 1896 zegt Floris de Boer [15] hierover: "Nadat Nederland geruime tijd aan de spits der wiskundige beschaving had gemarkeerd, verliet het plotseling de gelederen geheel, en nam gedurende langer dan een eeuw zelfs geen plaats in de achterhoede meer in." Deze malaise betrof niet alleen de wiskunde maar de natuurwetenschappen in het algemeen.

De basis van de moderne onderzoeksuniversiteit werd gelegd door het netwerk van universiteiten dat aan het eind van de achttiende eeuw in de grotere Duitse staten onstond en waar vaak op hoger niveau onderwijs werd gegeven dan in de Republiek der Zeven Provinciën; vergelijk [8, 1, p.308]. In het Nederland van de negentiende eeuw verbeterde dit langzaam, waarbij Thorbeckes onderwijswetgeving van 1863

en 1876 voor een stroomversnelling zorgde. Hierna kregen de diverse onderdelen van de natuurwetenschappen een meer zelfstandige rol met uiteindelijk ook een eigen behuizing; naast de wis-, natuur-, en sterrenkunde was dit ook het geval voor de scheikunde, de kristallografie en de plant- en dierkunde [3,8].

Landelijk was een duidelijk nieuw elan te bespeuren, vooral zichtbaar in de natuur- en scheikunde, waarin een veelheid aan Nobelprijzen een nieuwe Gouden Eeuw markeerde. Belangrijk verschil met voorheen was de internationale oriëntatie van het onderzoek. In Groningen waren sleutelfiguren van deze opbloei Schoute, Kapteyn en Haga. Het nieuwe elan was ook te bespeuren toen Haga, op 17 september 1900, de eerste Groningse rectorale rede van de twintigste eeuw uitsprak: 'De ontwikkeling der natuurkunde in de 19e eeuw'.¹⁷

Slechts één keer kwam het voortbestaan van de universiteit nog ter sprake; na de brand van het academiegebouw op 30 augustus 1906 bleken enkele kamerleden voorstander van opheffing te zijn. De studentenaantallen waren dan ook niet erg hoog; het duurde tot de tweede wereldoorlog voordat het jaarlijkse aantal van circa 400 gestegen was tot 1200. De academische bezetting bleef tot die tijd grotendeels ongewijzigd. In een vervolgartikel zal aandacht besteed worden aan de Groningse wiskunde (inclusief de mathematische fysica) in de periode 1900–1950. ☛

Dankwoord

Wij zijn dank verschuldigd aan Klaas van Berkel, Boele Braaksma, Steven Duintjer Tebbens, Aernout van Enter, Jan Guichelaar, Martinus van Hoorn, George Huitema, Wout Knol, Piet van der Kruit, Jan van Maanen en Jaap Top voor discussies en hulp bij de totstandkoming van dit artikel. Onze belangstelling voor de geschiedenis van de wis- en natuurkunde in de eerste eeuwen van het bestaan van de Groningse universiteit werd gewekt op de alumnidag voor Groningse wiskunde alumni op 13 mei 1992 toen dr. Wout Knol (in 1970 gepromoveerd bij C.S. Meijer) een kleine expositie had ingericht over dit onderwerp en werd verder versterkt door Gerard Sierksma [60]. Een speciaal woord van dank aan de achterkleinkinderen Albert Schoute en Laura Leussink-de Boer voor het geven van achtergrondinformatie over Pieter Hendrik Schoute en Floris de Boer, respectievelijk.

De Groninger website. De geschiedenis van de individuele wiskundigen in Groningen door de eeuwen heen wordt behandeld op de website

www.math.rug.nl/bernoulli/Geschiedenis waar een gedetailleerde beschrijving, verwijzing naar geschriften en ook meer algemene achtergrondinformatie te vinden is; vergelijk [18].

Noten

- 1 In het Organiek Besluit van 1815 werd het onderwijs geregeld op een manier die goed aansloot bij het Nederland van na de Bataafse Republiek en de Franse overheersing, maar het werd al snel een anachronisme [8, I, p. 528]. Het Organiek Besluit voorzag in vijf faculteiten: Theologie, Rechten, Geneeskunde, Wis- en Natuurkunde, en Bespiegelende Wijsbegeerte en Letteren; verder was er een ruim geformuleerd studieprogramma. Uiteindelijk werd het middelbaar en hoger onderwijs na decennia van onduidelijkheid geregeld in de wetten van 1863 en 1876 [4]. Met de wet op het middelbaar onderwijs van Johann Rudolph Thorbecke (1798–1872) [1] uit 1863 werd de hogere burgerschool (hbs) tot stand gebracht, waarbij specifiek gedacht werd aan een opleiding die klaarstoomde voor de ‘nijvere maatschappij’, denk aan fabriek of kantoor. Ook werden toen de hogere beroepsopleidingen (voor veterinaire geneeskundigen en voor civiele en landbouwkundige ingenieurs) bij wet geregeld. Daarnaast regelde de wet op het hoger onderwijs van 1876 (Thorbecke was inmiddels overleden) de opleiding aan het gymnasium (de vroegere Latijnse school) en de universiteit, waarbij de nadruk lag op algemene ontwikkeling in de klassieke zin. De toegang tot de universiteit bleef voorbehouden aan gymnasium leerlingen, tenzij een aanvullend examen werd afgelegd (bijvoorbeeld, na het behalen van onderwijsakten). Pas in 1917 werden deze aanvullende eisen opgeheven. Overigens had men wel directe toegang tot de Polytechnische School te Delft en het was niet ongebruikelijk om na Delft de studie voort te zetten aan een universiteit. Een relatief goede betaling trok voor de hbs de beste leraren aan en de grote aandacht voor exacte vakken gaf de vijfjarige hbs-opleiding (er was ook een driejarige versie) in de praktijk een semi-academisch karakter, hetgeen vaak leidde tot een beroep als onderzoeker. De scheefgroei tussen de intentie van Thorbeckes wetgeving en haar uitwerking werd in 1891 gesignaleerd door de bekende scheikundige J. H. van 't Hoff (1851–1911) [4]. De bloei van de exacte vakken aan de Nederlandse universiteiten rond de eeuwwisseling is rechtstreeks te herleiden tot het succes van de hbs. Menig hoogleraar begon zijn carrière als hbs-leraar en tot ver in de twintigste eeuw zouden hoogleraren betrokken blijven als gecommitteerden bij de eindexamens van het middelbaar onderwijs. Een belangrijk gevolg van de wet uit 1876 was de stichting van de Universiteit van Amsterdam en het voortbestaan van de Universiteit van Groningen, waarvan de toekomst aan een zijden draadje had gehangen. Bovendien gingen de universiteiten met ingang van 1877 jaarverslagen publiceren (waarin, hoewel het Latijn geen voertaal meer was, het onderwijs nog wel in het Latijn werd vermeld). Een algemeen overzicht voor de Groningse ‘Faculteit Wis- en Natuurkunde’ in de jaren na 1877 kan men nalezen in [3]. Tot slot moet nog vermeld worden dat vanaf het begin van de negentiende eeuw tot ver in de twintigste eeuw, een prijsvragencultuur heeft bestaan. Na het Organiek Besluit van 1815 gingen universiteiten prijsvragen uitschrijven en medailles uitreiken. Men loste een prijsvraag op onder een pseudoniem, bijvoorbeeld ‘Luctor et Emergo’ of ‘Stenen voor Brood’, en men maakte zich bekend bij een winnende inzending. Deze cultuur wordt beschreven in [48]. Merk op dat het Wiskundig Genootschap al eerder prijsvragen uitschreef.
- 2 Het gedenkboek *Academia Groningana* MDCXIV–MCMXIV bespreekt de periode 1877–1914 onder de titel ‘Uitbreiding en Opbloei’. Er heerste een grote bouwactiviteit, die onder andere leidde tot Haga’s natuurkundig laboratorium uit 1892, gevestigd op de hoek van de Kraneweg en de Westersingel. Het ministerie gaf geen groen licht voor een sterrenwacht. Kapteyns astronomisch laboratorium werd na verschillende omzwervingen uiteindelijk in 1911 aan de Broerstraat gevestigd – schuin achter het Academiegebouw; vergelijk [8, 9, 47].
- 3 Onder leiding van koning Lodewijk Napoleon, en met medewerking van onder anderen Van Marum en Van Swinden, kwam in 1808 het Koninklijk Instituut van Wetenschappen, Letterkunde en Schoone Kunsten tot stand, dat in 1851 overging in de Koninklijke Akademie van Wetenschappen (KAW), sinds 1938 ‘Koninklijke Nederlandse Akademie van Wetenschappen’ (KNAW) geheten.
- 4 In 1799 verscheen het resultaat van een enquête die in de Bataafse Republiek was gehouden bij alle onderwijsinstellingen naar het onderwijs in Nederland [12]. Daarin kan men kennismaken van de personele bezetting en hun salariering bij de universiteiten in Leiden, Franeker, Groningen, Utrecht en Harderwijk. Die universiteiten waren al sinds hun oprichting op dezelfde wijze georganiseerd. De voertaal was officieel Latijn maar ging geleidelijk over in het Nederlands. Tot aan de negentiende eeuw hadden de universiteiten alle een academiegebouw waar voordrachten gegeven konden worden en waar ook bestuurlijke lichamen bijeen konden komen. Een daarvan was de senaat, bestaande uit alle hoogleraren; de vergaderingen hiervan werden geleid door de *rector magnificus*, een functie die jaarlijks onder de hoogleraren rouleerde. Veel colleges werden overigens bij de hoogleraar thuis gegeven. Hoogleraren waren vaak eerder ‘geleerden’ dan onderzoekers, en dat kon op latere leeftijd wel eens voor geestelijke stagnatie zorgen. Tot aan het begin van de negentiende eeuw beoogde de universiteit een opleiding te verzorgen voor studenten die zich later in de maatschappij moesten bewegen. Het besef dat het onderwijs mee kon helpen om de nieuwe tijd het hoofd te bieden was wel aanwezig maar het duurde lang voordat actie werd ondernomen.
- 5 Bij zijn terugkeer in 1814 had Willem I nog gezegd: “Ons gemeene Vaderland is gered: De oude tyden zullen weldra herleeven.” De afsplitsing werd aangemoedigd door het klinken van het duet ‘Amour sacré de la patrie’ uit Daniel Aubers opera *La muette de Portici*, die ter gelegenheid van de verjaardag van Willem I op 25 augustus 1830 in Brussel werd uitgevoerd.
- 6 Boxman was later burgemeester van Gorkum en maakte naam als dichter. Van Rappard werd advocaat en was wethouder in Arnhem. Zowel Brouwer als Boxman hebben de Göttingse periode beschreven. Sybrand Jan Hingst (1834–1890), een zoon van Brouwers zuster Gepke (1791–1863), publiceerde in 1887 een deel van het Göttingse dagboek van zijn oom Seerp in een juridische publicatie, zie [31, pp. 208, 209]. Boxman beschreef deze periode uitgebreid in brieven aan familie en vrienden. Brouwer had ook al over zijn eerdere militaire ervaringen als garde d’honneur herinneringen opgeschreven, zie [19].
- 7 Eisinga was wolkammer van professie, maar bouwde het bekende planetarium in zijn woonhuis om een voorspelling uit theologische hoek omtrent het nakende einde van de wereld te ontcrachten. Zijn werk werd bezocht en bewonderd door van Swinden; zie [63, 64]. Eisinga was een patriot die vanwege zijn politieke overtuigingen tussen 1787 en 1792 verbannen was uit Friesland.
- 8 Jacob van Lennep en zijn vriend Dirk van Hogendorp maakten in 1823 een reis te voet, per trekschuit en per diligence door de ‘Noord-Nederlandsche provintiën’ (van het Verenigd Koninkrijk der Nederlanden). Niet alleen ontmoetten ze op 13 juni Seerp Brouwer, maar op 15 en 16 juni ook diens broer Wopke Brouwer (1801–1827) en latere zwager ds. Henri Delprat (1791–1871). Eerder op 9 juni werden ze al door de oude Eise Eisinga in zijn planetarium rondgeleid (“jammer dat dit kunstgewrocht niet te verplaatsen is en met het huis vergaan moet”). Op 19 juni vond in Groningen een ontmoeting plaats met Theodorus van Swinderen. In de nacht van 21 juni werd van Hogendorp in de Groningse herberg de Toelast bijna lijfelijk aangevallen door dronken studenten die hem zijn anti-liberale houding verweten. Van Lennep constateerde een gebrek aan beschaving bij Groningse studenten en noemde als een van de oorzaken daarvan het tijdschrift *Vaderlandsch Verlichtingskwispel* door van Barthold Henrik Lulofs (1787–1851), Gronings hoogleraar Nederlandse taal en wel-sprekendheid; vergelijk [40].
- 9 De Groningse hoogleraar geneeskunde François Zacharias Ermerins (1808–1871) was een volle neef van Jan Willem Ermerins. Een van Jan Willems zonen was Robert Carel Ermerins (1829–1907) die rond 1860 advocaat in Haarlem was. Daar raakte hij gelieerd met de arrondissements-ijker Johannes Theodorus Munnich (1812–1878) via Het Photographisch Etablissement Munnich & Ermerins, dat series stadsgezichten van Haarlem, Amsterdam en Rotterdam op de markt bracht. Later dook hij op in Sint-Petersburg, waar hij als ambtenaar werkzaam was bij de keizerlijke bibliotheek, onder de naam Roman Ivanovitch Ermerin. Aldaar voorzag hij adellijke families van genealogische achtergronden.
- 10 De dag voor de intrede van Schoute zou Enschedé zijn afscheidsrede houden, maar ziekte weerhield hem ervan deze rede uit te spreken. In [25] legde Enschedé zijn leven in Franeker en in Groningen onder de loep. Het blijkt dat zijn interesse in de natuurkunde voortdurend overschaduwd werd door wiskundige onderwijstaken, die hem veel inspanning kostten. Interessant is om te lezen hoe zeer het voortbestaan van de universiteit lange tijd in het geding was geweest. Enschedé had vier promovendi, waarvan er

- twee een zekere bekendheid kregen. Daniël Jan Steyn Parvé (1825–1883) was ambtenaar onder Thorbecke geweest en werd later inspecteur bij het middelbaar onderwijs [46]. Als zodanig merkte hij in 1879 op: “Aan enkele scholen worden tot mijn leedwezen ook vrouwelijke leerlingen opgenomen” en “Het is mogelijk dat meisjes, door ambitie gedreven, door groote inspanning trachten niet voor de jongens onder te doen; maar het is de vraag of dit zonder groote schade voor haar gezondheid zal kunnen gebeuren” [17, p. 183]. De andere promovendus die hier genoemd moet worden is de arts en wiskundige Arnold Willem Alings (1822–1895), schoonzoon van Ermerins, die later directeur was van het doveninstituut aan het Guyotplein te Groningen. Alings was ook als bestuurslid actief binnen het Natuurkundig Genootschap,
- 11 In april 1871 schreef Aletta Henriëtte Jacobs (1854–1929) uit Sappemeer zich in als student medicijnen in Groningen. Een jaar later, in oktober 1872, waren Enschedé en Mees betrokken bij haar examen Wis- en Natuurkunde, voorbereidend op de studie geneeskunde. Zij werd bevorderd *non sine laude*. Bij haar inschrijving was Jacobs slechts in het bezit van een diploma leerling-apotheker geweest en ze vroeg dispensatie van het toelatingsexamen en voor de verplichte colleges Grieks, Latijn en logica. In het in 1871 opgerichte *Studenten Weekblad* schreef Kamerlingh Onnes dat, in tegenstelling tot wat een eerdere briefschrijver beweerde, het logisch was om bij gebrek aan voorbereidend onderwijs voor meisjes dispensatie te vragen; vergelijk [22].
 - 12 De jurist Pieter Rink (1851–1943) was een jongere broer van Hendrik Jan. Pieter had als politicus achtereenvolgens zitting in de gemeenteraad van Tiel, de Provinciale Staten van Gelderland, in de Tweede Kamer, het kabinet De Meester en in de Eerste Kamer. Hij kan worden beschouwd als een van de grondleggers van de liberale partij. Als minister had Pieter Rink met de universiteit van Groningen te maken. Na de brand van het oude academiegebouw op 30 augustus 1906 legde hij reeds op 12 november 1906 de nieuwbouwplannen aan de Tweede Kamer voor en verdedigde die met succes toen enkele kamerleden in de brand een aanleiding zagen om de universiteit van Groningen maar gelijk op te heffen [16]. O tempora o mores.
 - 13 Als student had Rink in 1870 samen met zijn vriend Victor Julius (1851–1902, later hoogleraar in Utrecht) een brief aan de curatoren in Utrecht geschreven waarin zij pleitten voor betere voorzieningen bij de praktische oefeningen en voor de aanstelling van een assistent; vergelijk [49]. Zij stelden dat het onmogelijk was om zich te bekwamen in praktische oefeningen, terwijl men als natuurkundedocent aan een hbs dergelijke oefeningen zou moeten leiden.
 - 14 In Nederlandse wiskundige kringen bestond historische belangstelling. Korteweg had in 1894 een rectorale rede over de Gouden Eeuw van de wiskunde gehouden. De persoon Johann Bernoulli was al in het midden van de negentiende eeuw weer in de belangstelling gekomen. Bierens de Haan was op 15 mei 1847 *summa cum laude* in Leiden bij Verdam gepromoveerd op het proefschrift *De lemniscata Bernouilliana* [10]. Enschedé stond als bibliothecaris in contact met Bierens de Haan, die zelf een grote collectie historische wiskundige boeken bijeenbracht [55]. Mogelijk door Bierens de Haan geïnspireerd hield Enschedé zijn verhandeling in 1852. Ook Willem Boele Sophius Boeles (1832–1902) behandelde Bernoulli tamelijk uitgebreid in [13]. Bierens de Haan zou later veel aandacht besteden aan de Gouden Eeuw van de Nederlandse wiskunde en onder anderen met Korteweg het verzameld werk van Christiaan Huygens uitgeven.
 - 15 De Sitters theoretisch onderzoek had vooral betrekking op de door Laplace gesignaleerde resonante beweging van de Galileïsche manen van Jupiter, waarbij hij recent werk van de bekende Franse wiskundige Henri Poincaré (1854–1912) succesvol kon toepassen. De latere Delftse hoogleraar wiskunde Simon Cornelis van Veen (1896–1978) is in 1927 bij de Sitter gepromoveerd op ‘Periódieke oplossingen in commensurabiliteitsgebieden met toepassing op het probleem der lacunes in het stelsel der asteroïden’. De Sitters werk aan de algemene relativiteitstheorie heeft meer bekendheid gekregen [28].
 - 16 Op 14 en 15 april 1898 werd door Haga, Wind en ‘enige andere geleerden’ een vakantiecursus aangeboden aan hbs- en gymnasiumleraren, waarbij in het Gronings Laboratorium ook aanschouwelijke experimenten werden uitgevoerd [37]. Men sprak van een “gevoel van naïef, ongekunsteld genot” bij diegenen die “aesthetischen zin hebben voor goed gedachte en goed uitgevoerde proeven”. Zulke vakantiecursussen stamden van buitenlandse universiteiten; in Nederland was Leiden een jaar eerder daarmee begonnen.
 - 17 Haga beëindigt zijn rede met: “Uit het tweede gedeelte van het in dit uur gesprokene, zal U wel duidelijk gebleken zijn, dat al zijn onze inzichten op electrisch gebied geheel van aard veranderd, de willekeurige grens van een eeuw niet teruggevonden wordt in den ontwikkelingsgang der natuurkunde. Wat is electriciteit? wat is de aether? wat is het mechanisme der toestandsveranderingen waaraan men zooveel toeschrijft? Dat zijn de vragen, die als het ware onmiddellijk zich aan ons opdringen en door wier beantwoording de besproken verschijnselen eerst tot een goed afgerond geheel zouden worden. Het zijn de vragen, die wij, lettende op hetgeen deze 19de eeuw tot stand heeft gebracht, met vertrouwen stellen aan de twintigste eeuw.” Daarin noemt hij het behoud van arbeidsvermogen (energie) en de nieuwe inzichten in de elektro-magnetische verschijnselen als de twee voornaamste ontwikkelingen; vergelijk [39, 44]. In datzelfde jaar hield Lorentz, toen ook rector in Leiden, waarin hij ruwweg dezelfde ontwikkelingen schetst; vergelijk [6, 43].

Referenties

- 1 R. Aerts, *Thorbecke wil het. Biografie van een staatsman*, Prometheus 2018.
- 2 P. Baayen, ‘WISKUNDIG GENOOTSCHAP’ 1778–1978: some facts and figures concerning two centuries of the Dutch Mathematical Society ‘Een onvermoeide arbeid komt alles te boven’, *NAW* 3/26 (1978), 177–205.
- 3 D. Baneke, *De Groningse eeuw van de natuurwetenschappen*, Boekvorm Uitgevers 2005 [vertaald *The Groningen Science Era*, Boekvorm Uitgevers 2005].
- 4 J. Bank en M. van Buuren, 1900. *Hoogtij van burgerlijke cultuur*, Sdu, 2000.
- 5 D.J. Beckers en G. Alberts, Wiskundige Verlusting – De tijdschriften die het genootschap wel en niet uitgaaf, *NAW* 5/10 (2010), 20–26.
- 6 F. Berends en D. van Delft, *Lorentz, gevierd fysicus, geboren verzoener*, Prometheus, 2019
- 7 K. van Berkel, De onbekende Herman Haga medeoprichter van de NNV, *Nederlands Tijdschrift voor Natuurkunde* 77(8) (2011), 296–298.
- 8 K. van Berkel, *Universiteit van het Noorden. Vier eeuwen academisch leven in Groningen*, Deel 1: *De oude universiteit 1614–1876*; Deel 2: *De klassieke universiteit 1876–1945*, Verloren, 2014; 2017.
- 9 K. van Berkel, *Dijksterhuis. Een biografie*, Bert Bakker, 1998.
- 10 D. Bierens de Haan, *De lemniscata Bernouilliana*, C.G. Sulpke, Amsterdam, 1847.
- 11 A. Blaauw, B. Boekschoten, P.J.U. Kooistra, D. Leijenaar, F. Smit, H. van der Windt, M. van Wijhe en K. Wiese, *Een spiegel der wetenschap: 200 jaar Koninklijk Natuurkundig Genootschap te Groningen*, Profiel Bedum, 2001.
- 12 P.Th.F.M. Boekholt (red.), *De onderwijs-*
quête van 1799, Paterswolde, 2006.
- 13 W.B.S. Boeles, Levenschetsen der Groninger Hoogleraren, in: W.J.A. Jonckbloet, *Gedenkboek der Hoogeschool te Groningen ter gelegenheid van haar vijfde halve eeuwfeest*, Groningen, 1864.
- 14 W.B.S. Boeles, *Frieslands Hoogeschool I; II* (eerste helft); *II* (tweede helft), Leeuwarden, 1878; 1879; 1889.
- 15 F. de Boer, De familie Bernoulli in de geschiedenis der wiskunde (rede bij de overdracht van het rectoraat 1896), in *Jaarboek der Rijks-Universiteit te Groningen*, 1895–1896, Wolters, 1896.
- 16 A. Bornebroek, *Pieter Rink (1851–1941), van regent tot volksvertegenwoordiger*, Delft, 2014
- 17 O. Bottema, *Van steen tot schelp*, Technische Hogeschool Delft, 1971.

- 18 H.W. Broer en H.S.V. de Snoo, Wiskundigen in Groningen, *NAW* 5/20 (2019), 277–279.
- 19 S. Brouwer, *Journal van mijne reize als Garde d'Honneur*, 1813 (aanwezig in het archief van de familie Delprat).
- 20 W. van Bunge, H. Krop, B. Leeuwenburgh, H. van Ruler, P. Schuurman en M. Wielema, *Dictionary of seventeenth and eighteenth century Dutch philosophers* I, II, Thoemmes Press, 2003.
- 21 H.G. Dehling en J.A. van Maanen, Een plaque voor Daniel Bernoulli: Kleine Groninger en grote wetenschapper, *NAW* 5/4 (2003), 254–257.
- 22 D. van Delft, *Heike Kamerlingh Onnes. Een biografie: de man van het absolute nulpunt*, Bert Bakker, 2005.
- 23 W.A. Enschedé, *de Johanne Bernoullio eximio mathematico*, Groningen, 1852.
- 24 W.A. Enschedé, *Het Vijf-en-zeventigjarig bestaan van het Natuurkundig Genootschap te Groningen*, R.J. Schierbeek, Groningen, 1876.
- 25 W.A. Enschedé, *Afscheidsrede van Dr. W.A. Enschedé bij het neêrleggen van het hoogleraarsambt aan de Universiteit te Groningen, den 19 September 1881*, R.J. Schierbeek, Groningen, 1881.
- 26 J.W. Ermerins, Beschrijving van het Electrodynamischen toestel van Ampère, in: H.C. van Hall, W. Vrolik en G.T. Mulder (red.), *Bijdragen tot de natuurkundige wetenschappen*, Vol. 3, Amsterdam, 1828.
- 27 F.G. Groneman e.a., *Het Honderdjarig Bestaan van het Natuurkundig Genootschap te Groningen, gevierd op 1 en 2 maart 1901*, Gebroeders Hoitsema, Groningen, 1901.
- 28 J. Guichelaar, *Willem de Sitter, Einstein's friend and opponent*, Springer, 2018.
- 29 J. Guichelaar en G.B. Huitema, Verbinden en verspreiden – De kracht van het Koninklijk Natuurkundig Genootschap te Groningen, in: J. Guichelaar, G.B. Huitema en H. de Jong (red.), *Zekerheden in waarnemingen Natuurwetenschappelijke ontwikkelingen in Nederland rond 1900*, Verloren, 2012.
- 30 M. van Haaften, *Het Wiskundig Genootschap: zijn oudste geschiedenis, zijn werkzaamheden en zijn beteekenis voor het verzekeringswezen*, Noordhoff, 1923.
- 31 S.J. Hingst, Twee keerpunten in het rechts-onderwijs aan de Duitse academies, *Rechtsgeleerde bijdragen en bijblad*. 2 (1887), 202–215.
- 32 M.C. van Hoorn, Gymnasia en hbs'en vóór de Tweede Wereldoorlog, *Historisch jaarboek Groningen* (2007), 7–34.
- 33 Joh. Huizinga, *Geschiedenis der Universiteit gedurende de derde eeuw van haar bestaan*, in: *Academia Groningana MDCXIV–MCMXIV*, Noordhoff, 1914.
- 34 A.H. Huussen jr. (red.), *Onderwijs en onderzoek: studie en wetenschap aan de academie van Groningen in de 17e en 18e eeuw*, Verloren, 2003.
- 35 J.I. Israel, *The Dutch republic*, Oxford University Press, 1998.
- 36 *Jaarboek der Rijks-Universiteit te Groningen 1882–1883*, Wolters, 1883.
- 37 *Jaarboek der Rijks-Universiteit te Groningen 1885–1886*, Wolters, 1886.
- 38 *Jaarboek der Rijks-Universiteit te Groningen 1897–1898*, Wolters, 1898.
- 39 *Jaarboek der Rijks-Universiteit te Groningen 1899–1900*, Wolters, 1900.
- 40 M.E. Kluit, *Nederland in den goeden ouden tijd*, Utrecht, 1942 [Dagboek van Jacob van Lennep, opnieuw uitgegeven door G. Mak en M. Mathijssen, *Lopen met Van Lennep – De zomer van 1823*, Waanders, 2010].
- 41 E. Knol en H. Klarenbeek, *Albarta ten Oever (1772–1854), een vrouw in de kunst*, Groninger Museum, 2017.
- 42 D.J. Korteweg, Het bloeitijdperk der wiskundige wetenschappen in Nederland – Redevoering uitgesproken op den jaardag der Amsterdamsche Universiteit den 8sten Januari 1894, *Jaarboek van de Universiteit van Amsterdam*, Bezorgd door J.P. Hogendijk (zie <http://www.jphogendijk.nl/sources/korteweg.html>).
- 43 A.J. Kox, *Hendrik Antoon Lorentz, 'Een levend kunstwerk'*, Balans, 2009.
- 44 A.J. Kox, De Nederlandse natuurkunde rond 1900, in: J. Guichelaar, G.B. Huitema en H. de Jong (red.), *Zekerheden in waarnemingen – Natuurwetenschappelijke ontwikkelingen in Nederland rond 1900*, Verloren, 2012.
- 45 H.A. Krop, J.A. van Ruler en A.J. van der Jagt (red.), *Zeër kundige professoren beoefening van de filosofie in Groningen van 1614 tot 1996*, Verloren, 1997.
- 46 J.H.J. Krüger, De eerste inspecteurs van het middelbaar onderwijs. 'Het toezicht zal vooral op hem aankomen, het zal zijn onverdeelde zorg vorderen.' *Studium* 10(3), (2018) 131–141.
- 47 P.C. van der Kruit, *Jacobus Cornelius Kapteyn, Born Investigator of the Heavens*, Springer, 2014.
- 48 M.J. van Lieburg, *De academische prijsvragen; Een inventarisatie en annotatie van de prijsvragen – uitgeschreven door de Nederlandse universiteiten 1815–1968*, Erasmus Publishing, 2007.
- 49 F. van Lunteren, 'Van meten tot weten'. De opkomst der experimentele fysica aan de Nederlandse universiteiten in de negentiende eeuw, *Gewina* 18 (1995), 102–138.
- 50 J.A. van Maanen, The Netherlands, in: I. Grattan Guinness (ed.), *Companion Encyclopedia of the History and Philosophy of the Mathematical Sciences*, Vol. II, Routledge, 1994.
- 51 J.A. van Maanen, *Een complexe grootheid: leven en werk van Johann Bernoulli 1667–1748*, Epsilon Uitgaven 34, 1995.
- 52 J.A. van Maanen, Matthias Pasor (1599–1658), *Oxford Dictionary of National Biography*, 2004.
- 53 A.-I. Melling, *Lettres de Hollande et des villes Anséatiques. Brieven uit Holland en de Hanzesteden*, Foundation Custodia, Waanders, 1997.
- 54 *Nieuw Nederlandsch Biografisch Woordenboek* (NNBW).
- 55 K. van Ommen en H.J.M. Bos, De Bibliotheca mathematica van Bierens de Haan, *NAW* 5/4 (2003), 243–251.
- 56 E.J. Potgieter, *Jan, Jannetje en hun jongste kind*, De Gids, 1842; Taal en Tekens, 2020.
- 57 W. Rekers en T. Koetsier, On the teaching of mechanical engineering in the Netherlands in the early nineteenth century: The work of G.J. Verdam (1802–1866), in: *12th Congress of the International Federation for the Theory of Mechanism and Machine Science, Besançon 2007*, 18–21 (2007), 1–6.
- 58 S. Schama, *Patriots and Liberators*, Collins, 1977.
- 59 G. Sierksma, Johann Bernoulli (1667–1748): His ten turbulent years in Groningen, *Mathematical Intelligencer* 14 (1992), 22–31.
- 60 G. Sierksma, The mathematical sciences in Groningen before and after Bernoulli's stay, *NAW* 4/13 (1995), 37–48.
- 61 D.J. Struik, *Het land van Stevin en Huygens*, Pegasus, 1958; SUN, 1979.
- 62 D.J. Struik, *Geschiedenis van de Wiskunde*, Aula 1990 [in 2008 opnieuw uitgegeven in de reeks *vantoen.nu*].
- 63 J.H. van Swinden, *Beschrijving van het Eisinga-Planetarium te Franeker*, 1780, opnieuw uitgegeven door Uitgeverij van Wijnen, Franeker, 1994 [hierin zijn tevens opgenomen W. Eekhoff, *Het leven van Eisinga en eene geschiedenis van zijn PLANETARIUM 1851* en M.A.M. van Hoorn, *Beschrijving van het Eisinga-Planetarium*].
- 64 H. Terpstra, *Friesche Sterrekunst – Geschiedenis van de Friese sterrenkunde en aanverwante wetenschappen door de eeuwen heen*, T. Wever, Franeker, 1981.
- 65 G.J. Verdam, *Gronden der toegepaste werktuigkunst. I, II, III en IV*, Groningen 1829–1837 [in het Duits vertaald door Christian Heinrich Schmidt in 1834–1838, *Grundsätze der angewandten Werkzeugwissenschaft und Mechanik*].

Teun Koetsier

Afdeling Wiskunde
Vrije Universiteit Amsterdam
t.koetsier@vu.nl

In Memoriam Willem Kuijk (1934–2020)

Kleurrijke stimulerende algebraïcus

Op 2 november 2020 overleed te Antwerpen Willem Kuijk, emeritus hoogleraar in de algebra aan de Universiteit Antwerpen. Teun Koetsier geeft een kort overzicht van het leven en werk van Kuijk, gevolgd door de toespraak die Hendrik Lenstra schreef voor Kuijks uitvaart.

Willem Kuijk werd op 19 november 1934 in Amsterdam geboren in een orthodox Christelijk milieu waar veel over theologie en politiek werd gesproken. Het gezin hoorde bij de Gereformeerde Gemeenten en zijn vader Egbert Kuijk was actief binnen de SGP. Dat leidde in de oorlog tot een conflict. De SGP-leider Gerrit Kersten keurde verzet tegen de bezetter af; hij beschouwde de oorlog als een straf van God. Vader Kuijk zag dat anders en werd uit de kerk en uit de SGP gezet.

Wim Kuijk ging naar de hbs, haalde het diploma hbs-B en wilde eigenlijk daarna naar de kunstacademie, maar dat leek zijn vader veel te frivol. Dus werd het wiskunde want dat stond op de tweede plaats. Ook in zijn studietijd bleek de brede belangstelling van Kuijk. Theologische en filosofische kwesties bleven hem boeien.

Na zijn studie werd hij wiskundeleraar in deeltijd en begon hij aan de Vrije Universiteit een promotieonderzoek bij Piet Mullender. Dat leidde tot een proefschrift getiteld *Over het omkeerprobleem van de Galoistheorie*, waarop hij in 1960 bij Mullender promoveerde.

Na daarna twee jaar op het Mathematisch Centrum te hebben gewerkt werd Kuijk assistant-professor en al snel associate-professor in Canada aan de McGill University in Montreal. Daar promoveerde in 1966 zijn eerste promovendus, Dion Gildenhuys. Van 1967–1968 was Kuijk verbonden aan het Institute for Advanced Study in Princeton. Op 1 mei 1969 werd hij benoemd tot hoogleraar in Antwerpen. Op 1 maart 1970 werd hij er gewoon hoogleraar. (In België kent men de graden: docent, hoofd-docent, hoogleraar, gewoon hoogleraar.) Van 1 oktober 1971 tot 1 oktober 1974 was hij tevens in deeltijd buitengewoon hoog-

leraar in de algebraïsche meetkunde aan de Vrije Universiteit in Amsterdam.

Zijn eerste promovendus aan de VU was Freddy van Oystaeyen, die in 1972 promoveerde. Er volgden nog twee promoties bij Kuijk aan de VU. Albert Holleman promoveerde in 1975 en Peter Kluit in 1976. In Leuven was Kuijk in 1975 een keer copromotor en in 1973, 1981, 1982 en 1991 promoveerden in Antwerpen respectievelijk Jacky Bogo, Guy van Steen, Jan Janssens en Lieven Smits bij Kuijk. Zijn productiefste promovendus was Freddy van Oystaeyen. Tot de leerlingen van Kuijk moet echter ook de vooraanstaande getaltheoreticus Jan Deneef worden gerekend. Kuijk was bij de promotie van Deneef in Leuven geen copromotor, maar zat wel in de commissie. Deneef schreef: “Het is wel zo dat Willem me daadwerkelijk fel beïnvloed heeft en dat ik echt heel veel aan hem te danken heb. Toen ik

in 1973 aan mijn doctoraat begon was hij de enige professor in Vlaanderen die actief bezig was met getaltheorie. Hij heeft me in contact gebracht met elliptische krommen waarvan ik gebruik heb gemaakt in mijn resultaten over het tiende probleem van Hilbert. Hij organiseerde in die tijd ook een tweewekelijks seminarie over modulaire vormen waarvan ik erg genoten heb. Ik heb van hem veel aanmoediging gekregen en ben hem dus erg dankbaar. Mijn promotor Bouckaert werkte op gans andere gebieden, maar had een heel brede kennis van vele takken van de wiskunde (ook algebra) en van hem heb ik ook veel geleerd”.

Wat de wiskunde betreft waren de zestiger jaren de productiefste periode van Kuijk, die bij al zijn wetenschappelijke publicaties de achternaam ‘Kuyk’ hanteerde. Hij publiceerde verschillende artikelen over Galoistheorie en lichaamsuitbreidingen. In de zeventiger jaren nam zijn wiskundige productie af. Hij was echter niet minder actief. In 1972 organiseerde hij de International Summer School on Modular Functions in Antwerpen. Zijn betrokkenheid bij het postdoctoraal onderwijs in Antwerpen kostte hem ook veel tijd. Hij verzocht om die reden in 1974 de Vrije Universiteit om zijn aanstelling niet te verlengen omdat er geen ruimte meer was voor zijn wekelijkse bezoeken aan Amsterdam.

In 1977 publiceerde Kuijk een filosofisch werk, *Complementarity in Mathematics – A First Introduction to the Foundations of Mathematics and its History*, gebaseerd op colleges die hij in Canada, in Antwerpen en in Amsterdam aan de VU had gegeven. Ook in de tachtiger jaren ging hij de breedte in. Hij publiceerde in het *Bulletin of Mathematical Biology* en zijn boek over complementariteit verscheen in 1982 in het Italiaans. Hij waagde zich zelfs aan een ‘neuropsychodynamische’ theorie van het leren van wiskunde (<https://www.jstor.org/stable/40247758?seq=1>). In de negentiger



Willem Kuijk



Willem Kuijk met zijn echtgenote Minke Zuidema (1934-2008) op het ICM in 1978 in Helsinki. Minke had ook wiskunde gestudeerd aan de VU en was lerares op een middelbare school.

jaren publiceerde hij samen met zijn promovendus Lieven Smits nog een aantal artikelen over wiskunde. Op 1 december 1994 ging Kuijk met emeritaat. Zijn idee was om wat meer aan wiskunde te gaan doen. In november 1997 kreeg hij echter een ernstige hersenbloeding waardoor zijn leven drastisch veranderde. Hij werd daarna

geleidelijk aan minder mobiel, en was de laatste tien jaren van zijn leven aan een rolstoel gebonden, maar wel helder van geest.

Met zijn goede internationale contacten en zijn stimulerende persoonlijkheid heeft Kuijk veel goed werk verricht. Ook na bijna een halve eeuw herinnert Gerke Nieuwland, oud-collega van de VU, zich nog Kuijks gro-

te enthousiasme voor de wiskunde in al haar manifestaties. In de koffiekamer gaf hij tegenover iedereen die het horen wilde hele verhandelingen over het werk waarmee hij op dat moment bezig was of waarover hij iets had gelezen. Kuijk was kleurrijk en verre van saai. Een andere collega-wiskundige, Frans Oort, die in 1966–1967 in Harvard werkte, vertelt het volgende verhaal. In onze beginjaren hadden Wim en ik veel contact, over wiskunde, maar ook op het persoonlijke vlak. Op een middag in 1967 kwamen we thuis in een voorstad van Boston, en we zagen een auto met een Canadees nummerbord voor de deur. Die was van Wim Kuijk, die vanuit Montreal 500 km had gereden om een verrassingsbezoekje af te leggen. “Wat had je gedaan als we niet thuis waren geweest?”, vroeg Frans. “Weer teruggereden naar Montreal”, zei Wim.

Voor zijn dood gaf Kuijk te kennen dat hij het zeer op prijs zou stellen als Hendrik Lenstra bij zijn uitvaart het woord zou voeren. In verband met de corona-pandemie is de tekst voorgelezen in aanwezigheid van alleen de familie. ❧

Met dank aan Nancy Coorens, Jan Denef, Egbert Kuijk, Hendrik Lenstra, Najat Mahni, Jan van Mill, Gerke Nieuwland, Frans Oort en Pieter Zuidema.

Bij de uitvaart van Willem Kuijk

Hendrik Lenstra, 14 november 2020

“Dames en heren,

De belangrijkste wiskundige die nu leeft, is de Fransman Jean-Pierre Serre, en hij is op dit moment 94 jaar oud. Willem Kuijk mag zich erop beroemen enige tijd als de rechterhand van Serre gefungeerd te hebben. Ik zal hem nu verder ‘Kuijk’ noemen, en ben blij dat het verschil tussen een i-grec en een lange ij hier niet te horen is.

Zijn werk met Serre begon, als ik het wel heb, in september van het jaar 1967, toen Serre aan McGill University te Montreal in Canada, waar Kuijk toen verkeerde, een serie colleges gaf. Kuijk maakte daar samen met een collega aantekeningen van, en Serre werkte die om tot een boek. Het boek was toen het uitkwam niet gemakkelijk te lezen, omdat het zijn tijd vooruit was. Dat bleek ook wel uit de royalty's, die elk jaar ongeveer vijf dollar bedroegen. Die royalty's deelden de drie auteurs eerlijk met elkaar, ook toen ze in een bepaald jaar om mysterieuze redenen negatief waren. In 1989 had het boek genoeg status verworven om in een reeks wiskundige klassieken herdrukt te worden.

In 1969 kreeg Kuijk een leerstoel in Antwerpen, en daar heeft hij zijn grootste triomf gevierd. Hij regelde geld van de NAVO om een grote zomerschool te organiseren, en op advies van Serre was die gewijd aan een onderwerp dat volgens hem meer aandacht verdiende dan het op dat moment kreeg, namelijk modulaire vormen. Met zijn tweeën hebben ze het programma samengesteld, en verder deed Kuijk al het werk.

De zomerschool is in alle opzichten een doorslaand succes geworden. Kuijk had overal aan gedacht. Om te beginnen had hij ervoor gezorgd dat de zomerschool plaatsvond tijdens de legendarische schaakmatch Fischer–Spassky, in de zomer van 1972. Dat zette de toon. De match kon op de Nederlandse televisie gevolgd worden, met commen-

taar van Euwe. Coen Zuidema, Kuijks zwager en dat jaar schaakkampioen van Nederland, gaf een simultaanseance. Serre, die een fervent tafeltennisser is, kon zich naar believen uitleven. Er was ook een aantal charmante gastvrouwen aanwezig, en iedereen vroeg zich af waar die voor dienden. Gelukkig was er een Amerikaanse professor die het antwoord op die vraag wist. En alle deelnemers herinneren zich de fantastische maaltijden, met net zoveel wijn als men op kon. Allemaal op kosten van de NAVO.

Maar het belangrijkste was natuurlijk de wiskunde. Verscheidene grote wiskundigen heb ik daar voor het eerst ontmoet, en ik was niet de enige die moeite had met de voordrachten die zij gaven. De grootste invloed had de zomerschool door de vier boekdelen die er uit voortkwamen. Kuijk nam het leeuwendeel van de redactie hiervan voor zijn rekening, en ze hadden zoveel succes dat er een paar jaar later nog twee vervolgdelen verschenen. Velen hebben het vak uit deze boeken geleerd. Hoe visionair Serres advies aan Kuijk geweest was, bleek wel toen ruim twintig jaar later de theorie waar de zomerschool aan gewijd was, een toepassing vond in het bewijs van de Laatste Stelling van Fermat. Die is daarmee ook een beetje de Stelling van Kuijk geworden.

Ik wil eindigen met een persoonlijk woord. Het was ook in het begin van de jaren zeventig dat ik mijn eerste echte stelling bewees. Het betrof een onderwerp waar Kuijk ook aan gewerkt had, en ik herinner me dat hij mijn eerste manuscript in detail doorwerkte. Hij wilde het naadje van de kous weten, hetgeen mij zeer stimuleerde. Hij gaf mij erg veel commentaar, nota bene op een geluidsbandje, dat ik zorgvuldig heb afgeluisterd. Van Kuijk heb ik geleerd hoe je een wiskundig bewijs zodanig moet presenteren dat het begrijpelijk is voor het publiek dat je voor ogen staat. Daar ben ik hem altijd dankbaar voor gebleven.

Dames en heren, Willem Kuijk was een gelukkig mens, die plezier in het leven had, en die de generositeit bezat om anderen in dat plezier en dat geluk te laten delen. Ik dank u voor uw aandacht.”

Teun Koetsier

Afdeling Wiskunde
Vrije Universiteit Amsterdam
t.koetsier@vu.nl

Boekbespreking Willem Kuijk, *Complementarity in Mathematics*

Kuijks 'complementaristische' filosofie van de wiskunde

In 1977 publiceerde Willem Kuijk *Complementarity in Mathematics – A First Introduction to the Foundations of Mathematics and its History*, gebaseerd op colleges die hij in Canada, in Antwerpen en in Amsterdam aan de VU had gegeven. Zoals bij al zijn publicaties hanteerde hij daarbij de achternaam Kuyk. Het boek bevat een inleiding in de logica en een beknopte goed geschreven geschiedenis van de filosofie van de wiskunde die uitloopt op een schets van Kuijks eigen visie op wat wiskunde is. Teun Koetsier bespreekt het boek.

Kuijks boek roept een tijdsbeeld op. In de eerste helft van de vorige eeuw werd de filosofie van de wiskunde gedomineerd door het debat over de grondslag van de wiskunde. Logicisme, formalisme en intuïtionisme waren de drie belangrijkste posities in het debat. De wiskunde werd gezien als een bouwwerk en de deelnemers aan de discussie poogden dat bouwwerk van een degelijke fundament te voorzien. Over de aard van dat fundament verschilden echter de meningen en daarbij kwam de intuïtionist Brouwer zelfs tot de conclusie dat op belangrijke punten het bouwwerk zelf ook moest worden gewijzigd.

Het ging in dat grondslagendebat niet om de vraag hoe wiskundigen tot hun resultaten komen, het ging niet om de 'context of discovery', maar om de 'context of justification', het eindresultaat van het wiskundig onderzoek, de stellingen met bewijs. (We danken het onderscheid aan Hans Reichenbach, die het in 1938 introduceerde. Zie [1].) Die nadruk op de fundering van wiskundige resultaten gaat terug op de Grieken. Dat is begrijpelijk, want wiskundige kennis lijkt niet gelegen in de heuristiek, maar in de resultaten. De resultaten leveren de zekerheid en daar kunnen we van vooruitgang spreken.

Men noemt de nadruk op de fundering wel 'foundationalisme'. (Het liefst zou ik de term 'fundamentalisme' hanteren maar die is te beladen.) Het twintigste-eeuwse foundationalisme heeft tot vele fascinerende resultaten geleid en dat doet dat soort grondslagenonderzoek nog steeds.

De vraag naar het wezen van de wiskunde is ermee echter niet beantwoord. Het risico dat foundationalisten lopen is dat ze één aspect van de wiskunde tot het enige essentiële uitroepen en dat leidt tot wonderlijke conclusies. Dat is heel duidelijk als je bijvoorbeeld bedenkt dat als wiskunde de wetenschap der formele systemen is in de zin van bijvoorbeeld Haskell Curry, we in ieder geval de absurde conclusie moeten trekken dat er voor de twintigste eeuw nooit echt wiskunde zou zijn bedreven [2]. Archimedes en Gauss zouden uitsluitend heuristisch bezig zijn geweest.

Het inzicht dat de filosofie van de wiskunde in ieder geval ook naar de praktijk van het wiskundig onderzoek moet kijken begon in de zestiger jaren van de vorige eeuw door te breken. De Hongaars Engelse filosoof Imre Lakatos speelde daarbij een sleutelrol. In 1963–1964 publiceerde hij in de *British Journal for the Philosophy of Science* een lang anti-foundationalistisch artikel getiteld 'Proofs and Refutations'. Zijn focus lag niet op het fundament maar op de wijze waarop de wiskunde zich ontwikkelt. De wiskunde verandert voortdurend, niet alleen in de heuristische fase maar ook daarna en Lakatos had daarover specifieke ideeën.

In het voetspoor van Lakatos is veel gebeurd. Prominente wiskundigen als Saunders Mac Lane [3] en Donald Knuth [4] kwamen ook tot conclusie dat de traditionele filosofie van de wiskunde belangrijke aspecten van het vak mist. Voor de meer filosofische benadering zij de lezer verwe-

zen naar bij voorbeeld David Corfield's *Towards a Philosophy of Real Mathematics* uit 2004 of *Perspectives on Mathematical Practices Bringing Together Philosophy of Mathematics, Sociology of Mathematics, and Mathematics Education* uit 2007 geredigeerd door Bart Van Kerkhove en Jean Paul van Bendegem.

De ontwikkeling heeft in 2009 zelfs geleid tot het ontstaan van een Association for the Philosophy of Mathematical Practice, APMP [5]. Voor een recent overzicht zie Y. Hamami en R.L. Morris [6].

Het boek van Kuijk uit 1977 paste binnen deze trend. Kuijk beschrijft de wiskunde als een product van de menselijke geest met vele aspecten die elkaar complementair aanvullen. Hij noemt er zeven.

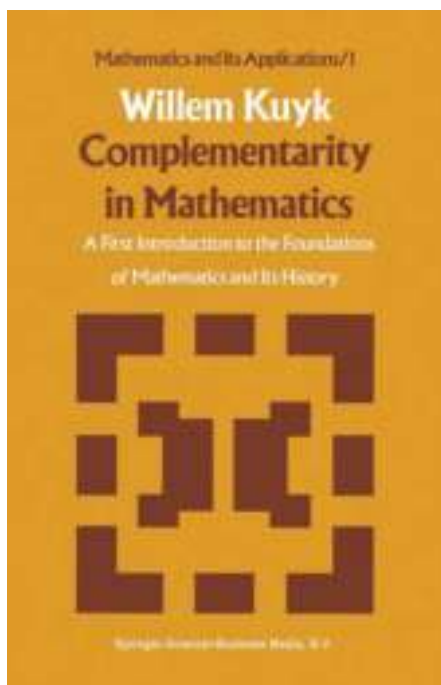
1. Het vermogen van de mens om begrippen te vormen en de 'naïeve' logica.
2. De taal als middel om informatie over te dragen.
3. De formele logica.
4. Het constructieve denken.
5. Intuïtie in de zin van het vermogen om dingen onmiddellijk in te zien.
6. De kwestie van primaire evident ware kennis versus afgeleide secundaire kennis.
7. De toepasbaarheid van de wiskunde.

Een bevredigende filosofie van de wiskunde moet aangeven hoe al die aspecten met elkaar samenhangen en dat op zo'n manier dat het unieke karakter van de wiskunde tot uitdrukking komt. In zijn boek doet Kuijk daartoe een interessante poging. Kernpunt is zijn stelling dat er in de wiskunde twee centrale soorten van bestaan zijn: het 'meetkundige' bestaan en het 'discrete' bestaan. Het gaat hier naar de mening van Kuijk om twee wezenlijk verschillende kwaliteiten van de wereld waarin we leven. De kwaliteit van ruimte en continuïteit leidt tot meetkundige en topologische noties en

de kwaliteit van aantal en discreet leidt tot numerieke: en algebraïsche noties. In Kuijks woorden "Indeed, if we were to state what makes mathematics such a 'sure' and indubitable science, then we would have to point out that its indubitableness does not simply flow from the abstract, formal or axiomatic, method, but that even the abstractions are made possible by, and owe their existence to the relatively simple and clear (as compared to the concepts of the natural sciences) basic mathematical intuitions of continuity and discreteness."

Het tellen van discrete eenheden enerzijds en de meetkundige karakterisering van de ruimte anderzijds lagen ten grondslag aan de vroegste wiskundige inzichten. Bij de Grieken domineerde de meetkunde, maar met de opkomst van de algebra, de analytische meetkunde en de analyse verschoof de nadruk naar het discrete, het manipuleren van karakters. Vanaf de negentiende eeuw werd het beeld weer complexer. Overal ziet Kuijk de twee wortels van de wiskunde zich manifesteren. Wiskunde is bij Kuijk evident in belangrijke mate een kwestie van mentaal construeren, maar hij is een liberale constructivist. Een constructivist die niet construeert binnen een precies gedefinieerd kader, maar slechts beperkt wordt door de eis dat datgene wat hij construeert te herleiden moet zijn tot meetkundige en/of numerieke noties. Vaak komen beide voor, maar in bijvoorbeeld de euclidische n -dimensionale topologie domineren vanuit het continue geconstrueerde noties en in bijvoorbeeld de algebraïsche getaltheorie of de numerieke analyse de vanuit het discrete geconstrueerde noties, volgens Kuijk.

Kuijk was duidelijk beïnvloed door de jonge Brouwer die in zijn dissertatie schreef: "Waar dus in die oer-intuïtie continu en discreet als onafscheidelijke complementen optreden, beide gelijkgerechtigd en even duidelijk." Hij volgde echter Brouwer niet in diens latere ontwikkeling. Het klassieke continuüm beschouwt hij als gegeven in de intuïtie en als uitgangspunt van ons mentaal construeren. En dat vereist volgens Kuijk in het geheel niet dat de menselijke geest in staat zou moeten zijn om actueel oneindige verzamelingen te creëren.



Het is interessant dat Kuijk uit zijn complementaristische visie normatieve consequenties trekt voor de verzamelingenleer. Hij mag dan een liberale constructivist zijn, er zijn grenzen aan wat kan worden geconstrueerd. Kuijk formuleert een epistemologische eis: hij eist dat bij het accepteren van een verzameling de 'vorm' van de elementen van tevoren vastligt. De verzameling polynomen van een bepaalde vorm is acceptabel. De verzameling meetkundige figuren van een bepaalde vorm eveneens. De verzameling van alle continue functies op het interval $[0, 1]$ mag daarentegen niet meedoen omdat er onvoldoende gemeenschappelijke vorm zou zijn. Kuijk beperkt ook om die reden de scope van het machtsverzamelingsaxioma tot aftelbare deelverzamelingen. Kuijk accepteert ook niet meer dan het aftelbare keuzeaxioma. Hij lijkt van mening te zijn dat alles wat daar boven uitgaat abstracte onzin is die het contact met het discrete en het continue kwijt is geraakt.

In het bijzonder de beperking tot het aftelbare machtsverzamelingsaxioma roept vragen op. De reële getallen vormen bij Kuijk een verzameling. De irrationale getallen vormen daarvan een deelverzameling, maar het complement daarvan, de collectie

irrationale getallen, is bij Kuijk geen verzameling!

Kuijk schrijft in dit verband over de eenheid van de wiskunde: "The answer is that mathematics is the exclusive science that studies the interplay and the connections between the mutually irreducible qualities of the discrete and the continuous, of number and spatiality. This interplay and these connections are not furnished by axiomatic decrees such as the axiom of the power set and the axiom of choice, but it is the mathematical disciplines themselves that by their methods and results establish these connections."

Het is opmerkelijk dat terwijl Kuijk op het standpunt staat dat alle belangrijke aspecten van de wiskundige praktijk in de beschouwing meegenomen moeten worden en je zou zeggen dat dat ook de theorie van Cantor moet omvatten, er hier toch een normatieve foundationalistische aap uit de mouw komt.

In 1982 verscheen een Italiaanse vertaling van Kuijks boek. Umberto Batocchi las het boek en merkte op dat hij erin tevergeefs had gezocht naar definities van de begrippen discreet en continu [7]. Dat is inderdaad een zwakte van het boek. Daarnaast blijft Kuijk nogal hangen in het abstracte. De lezer zou graag meer concrete voorbeelden willen zien van het samenspel tussen de kwaliteiten discreet en continu. (Ik denk in dit verband aan de wijze waarop Marcus Giaquinto in zijn boek *Visual Thinking in Mathematics* uit 2007 in hoofdstuk 12 met een aantal simpele voorbeelden het algebraïsch en het meetkundig redeneren analyseert.) Kuijk verwijst wel regelmatig naar de zeven aspecten van de wiskunde die in hun samenhang zouden moeten worden behandeld in een uitgewerkte complementaristische filosofie van de wiskunde, maar ook hier blijft de behandeling schetsmatig. Kuijk is er zich van bewust. Het boek is in feite een pleidooi voor een grondige studie van de geschiedenis van de wiskunde met Kuijks visie als uitgangspunt. Het zou zeker interessante case-studies kunnen opleveren. ◀

Met dank aan K. P. Hart voor zijn commentaar op een eerdere versie.

Referenties

- 1 <https://plato.stanford.edu/entries/reichenbach>.
- 2 Haskell Curry, *Outline of a Formalist Philosophy of Mathematics*, 1950.
- 3 S. Mac Lane, *Mathematics, Form and Function*, New York, 1986.
- 4 D. E. Knuth, Algorithmic thinking and Mathematical thinking, *American Mathematical Monthly* 92 (1985), 170–181.
- 5 <http://www.philmathpractice.org>.
- 6 Y. Hamami en R.L. Morris, Philosophy of

mathematical practice: a primer for mathematics educators, *ZDM Mathematics Education* 52 (2020), 1113–1126.

- 7 <http://www.cartesio-episteme.net/ep8/ep8-zeno-app.html>.

In de verdediging

| In defence

Pas gepromoveerden brengen hun werk onder de aandacht. Heeft u tips voor deze rubriek of bent u zelf pas gepromoveerd? Laat het weten aan onze redacteur.

Redacteur: Nicolaos Starreveld
FNWI, Universiteit van Amsterdam
Postbus 94214
1090 GE Amsterdam
verdediging@nieuwarchief.nl



Large Deviations for Stochastic Processes on Riemannian Manifolds *Rik Versendaal*

In September 2020 Rik Versendaal from the Delft University of Technology successfully defended his PhD thesis with the title *Large Deviations for Stochastic Processes on Riemannian Manifolds*. Rik carried out his research under the supervision of Prof. dr. Frank Redig, and Prof. dr. Jan van Neerven.

During his PhD Rik worked on large deviations for processes on Riemannian manifolds. In particular, he studied extensions of large deviations for random walks and Brownian motion on curved spaces. Furthermore, he also considered large deviations for random walks in Lie groups and large deviations for Brownian motion on evolving Riemannian manifolds, meaning that the Riemannian metric is time-dependent.

At the moment Rik is a postdoc at Utrecht University. Currently he is working on random (geometric) networks, both from a theoretical perspective but also on their practical applications.

Large deviation theory – the theory of the very rare

Large deviation theory is a mathematical theory, and a subfield of probability theory, that is concerned with quantifying the exponentially small probabilities of rare events, in particular deviations from the typical behaviour. Arguably the most well-known construction in probability theory is a random walk, i.e. a sum of independent random variables all having the same distribution. Since all these random variables have the same distribution they all have the same mean value and variance, denoted by μ and σ , respectively. The law of large numbers says that as the size of the sum grows, then the whole sum divided by the number of terms in the sum is almost equal to μ . A natural question that follows is whether we can say something about the deviations of this random walk from the typical behaviour as given by the law of large numbers. A first answer is given by the central limit theorem, which gives the ‘normal’ deviations. Moreover, the so-called large deviation principle provides the ‘large’ deviations. These three results are summarized in the Table 1, where $X_1, X_2, \dots$ denote independent and identically distributed random variables and $\mathcal{N}(0,1)$ denotes a random variable following the normal distribution with mean 0 and variance 1.

Where the law of large numbers only tells that the probability of large deviations goes to 0, the theory of large deviations is concerned with how fast this convergence is. Large deviations of random walks were first studied by Harald Cramér in the 1930s and a unified formalization of large deviation theory was developed later in the 1960s by the Indian mathematician and winner of the Abel Prize in 2010 Srinivasa Varadhan.

Law of Large numbers	Central Limit Theorem	Large Deviation Principle
$\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n X_i \rightarrow \mu$	$\frac{1}{\sqrt{n}} \sum_{i=1}^n \frac{X_i - \mu}{\sigma} \rightarrow \mathcal{N}(0, 1)$	$\frac{1}{n} \log \mathbb{P}\left(\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n X_i \geq x\right) \rightarrow -\Lambda^*(x)$
$\sum_{i=1}^n X_i \approx n\mu$	$\mathbb{P}\left(\sum_{i=1}^n X_i \geq n\mu + \sqrt{n}\sigma x\right) \approx \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_x^\infty e^{-\frac{y^2}{2}} dy$	$\mathbb{P}\left(\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n X_i \geq x\right) \approx e^{-n\Lambda^*(x)}$
The random walk behaves almost like $n\mu$.	The deviations of order $\sqrt{n}$ of the random walk from the typical behavior $n\mu$ are given by the normal distribution.	The large deviations, i.e. of order n , of the random walk from the typical behavior $n\mu$ are given by the Legendre transform of the logarithmic moment generating function, denoted by $\Lambda^*(x)$.

Table 1

Walking on geodesics

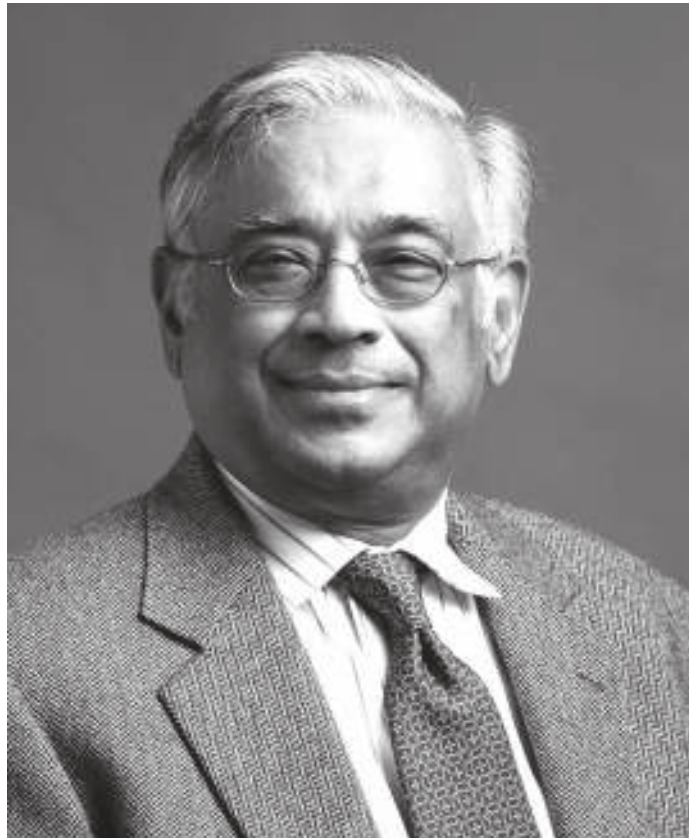
The results discussed above concern random walks in Euclidean spaces, but what happens when you start walking in curved spaces? In his thesis Rik was motivated by this question and studied random walks on manifolds. This generalization is far from straightforward because even the basic definition of a random walk has to be adapted with care. Let's have a look into this. Indeed, if someone would simply copy the approach from the Euclidean case, a problem you immediately run into is that you cannot add points in a manifold together and rescale by a factor. This problem already occurs when one considers the sphere, which is the prototypical example of a manifold.

To set this right, the increments $\{X_n\}_{n \geq 1}$ of the random walk $\sum_{i=1}^n X_i$ may be thought of as vectors. The addition of such a

vector then amounts to following the straight line in the direction of the vector for time 1 to assure that the entire vector is added. See the left picture in Figure 1 for a visualization of this interpretation. On a manifold, vectors providing directions are precisely the tangent vectors. Therefore, to make a 'step' of the random walk, a random tangent vector is considered. To make the next step the 'straight line' in that direction is followed. In Euclidean space, straight lines are lines of shortest distance between points, i.e., they are geodesics. On a manifold, following the 'straight line' means that the random walk has to follow the geodesic in that direction. The random walk is finally constructed by concatenating a number of random steps. This random walk after n steps is denoted by S_n and will be referred to as a geodesic random walk.



Harald Cramér



Srinivasa Varadhan

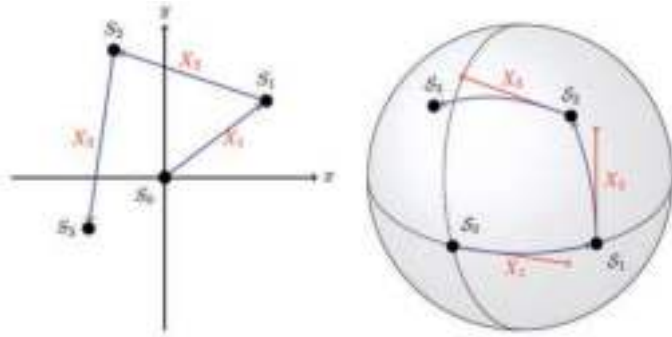


Figure 1 Visualization of the construction of a geodesic random walk. On the left, the interpretation of a random walk in Euclidean space as repeatedly following straight lines in the direction of vectors. On the right, this idea is extended to the sphere, where the walk follows geodesics in the direction of tangent vectors.

What remains is to define how the random walk can be rescaled by a factor $\frac{1}{n}$. This is done by rescaling the tangent vectors that yield the direction at which the walk moves. Equivalently, this corresponds to following the geodesics for time $\frac{1}{n}$ instead for time 1. The rescaled random walk is denoted by $(\frac{1}{n} * S_n)_n$.

The formal method to define a geodesic random walk relies on the Riemannian exponential map. Furthermore, because the space variable determines in which tangent space the increment should be, the random walk has to be defined recursively, this means that the direction of the n -th step is found given all the previous steps, namely S_{n-1} .

Two additional complications that arise in the Riemannian setting but not in the Euclidean, concern the proper definition of independent and identically distributed increments of the random walk. The crux is that the dependence of the direction of the n -th step and all the previous steps is purely geometric, in the sense that the previous steps of the random walk only determine the tangent space from which the new direction should be chosen. The second complication regards a proper definition of identically distributed increments. In general, the increments of a geodesic random walk do not live in the same tangent space. In order to overcome this, Rik relied on a technique called parallel transport, which was used to identify tangent spaces. Because the identification via parallel transport depends on the curve along which the vectors are transported the analysis is rather intricate.

In his thesis Rik managed to quantify the large deviations for scaled geodesic random walks on Riemannian manifolds. This result generalizes the previous known results for Euclidean spaces where the concepts of a random walk, an increment, a scaling and independence are rather straightforward to define. Besides random walks, Rik also studied another and more complicated stochastic process, the Brownian motion. A random walk as discussed above is a stochastic process in discrete time, you can imagine that the same questions can also be posed for stochastic processes in continuous time. In general, for every stochastic process where some typical behavior exists, think of a counterpart of the law of large numbers, you can ask the question of how the fluctuations around this typical behavior behave. The continuous-time stochastic process that Rik studied is the Brownian Motion.

In the Euclidean setting, Brownian motion $W(t)$ is usually defined as the unique continuous process with independent, stationary increments such that $W(t) - W(s)$ has a normal distribution with mean 0 and variance $t - s$. Since there is no clear way to define increments of a manifold-valued process, this approach is not suitable to define a Brownian motion on a manifold. It turns out that there are various methods, from geometric to probabilistic, to define a Brownian motion on a manifold if additional structure is considered. Rik managed to prove that for a Riemannian Brownian motion the probability it follows a certain path γ is exponentially small and the exponent is given by a rate function corresponding to the action of the path γ which depends on the Riemannian metric g .

Brownian motion on a Riemannian manifold – Pollen grains on a drop

In his thesis Rik also studied Brownian motion on a manifold that changes over time. More precisely, he considered manifolds with a Riemannian metric which changes over time. One can for example think of a sphere, whose radius varies in time. A motivation to proceed into this direction comes from molecular biology and the random movements of proteins in cell membranes. Cells usually deform over time, and this influences the stochastic process that describes the movement of the proteins. In the Euclidean case, the rate of a path has a physical interpretation, namely as an action of the path. Rik managed to prove the remarkable result that this interpretation is also true in Riemannian manifolds, even when equipped with a time-dependent metric.

The more personal aspect

Behind all dissertations there is always a person, with flesh and bones, who has endured the long path of a PhD trajectory and has produced the work at hand.

Were you also involved in some other activities and events during your PhD?

"I have done a research visit to the group of Anton Thalmaier in Luxembourg for two months. That is what helped me out in understanding how to deal with time-dependent geometry. Now I know the underlying idea where various 'magical' formula's come from. Furthermore, I was also a finalist for the KWG PhD Prize in 2019, where I got to present my PhD research in a short plenary talk at the NMC."

Are there some nice memories from the last four years you would like to share?

"It may not immediately sound like a nice memory, but it was a turning point in my PhD and a great triumph in the end. In my article on large deviations for geodesic random walks, I spotted a very tiny mistake in the proof when everything was as good as ready. Although the mistake was only one small equation, the consequences were huge, and I had to come up with quite some different arguments to make things work in the end. It was very frustrating, but the satisfaction was ever greater when I found the new approach that worked. It showed that even very small details can have a large impact."

◀

Boekbesprekingen

| Book Reviews

Redactie: Hans Cuypers en Hans Sterk

Review Editors NAW - MF 7.092
Faculteit Wiskunde & Informatica
Technische Universiteit Eindhoven
Postbus 513
5600 MB Eindhoven
reviews@nieuwarchief.nl
www.win.tue.nl/wgreview



Dylan P. Thurston (ed.)

What's Next? The Mathematical Legacy of William P. Thurston

Annals of Mathematics Studies, AMS-205
Princeton University Press, 2020
vi + 425 p., prijs \$ 75.00
ISBN 9780691167770

Fieldsmedaillewinnaar William P. (Bill) Thurston was een visionair meetkundige. Het is onmogelijk om deze bespreking niet met een aantal feiten uit zijn uitzonderlijke biografie te beginnen. Sinds zijn vroege jeugd oefende hij iedere dag 'visualisatie' (misschien omdat hij door aangeboren scheelzien geen dieptezicht had), waardoor hij, naar eigen zeggen, echt kon navigeren in vier en vijf dimensies. In navolging van zijn moeder, textielontwerper, was hij een fervent doe-het-zelver met een werkplaats waar hij van alles in elkaar knutselde. Deze vaardigheid was klaarblijkelijk erfelijk, ik herinner me dat een van zijn zoons, wiskundige en editor van het besproken volume, in onze woonkamer met stoelen, touw en paraplu's in de weer was om iets te illustreren. Om de stijl van Thurston te leren kennen is het de moeite waard om het korte YouTube-filmpje *Knots to Narnia* te bekijken waarin hij een groot touw ophangt en erdoor 'tussen werelden op en neer gaat' om uit te leggen waarom de klaverknoop niet te ontrafelen is. Hij had sterke meningen over wiskunde-onderwijs, gevormd, zo lijkt het, door zijn vrije opvoeding en het feit dat hij als peuter in Nederland naar een montessori-peuterspeelzaal ging en daarna niet meer kon aarden in het rigide Amerikaanse schoolsysteem; daarom was hij gaan studeren aan het New College of Florida, waar geen cijfers worden gegeven maar studenten eigen doelen stellen en die bespreken met tutores.

Het briljante werk van Thurston is uitzonderlijk visueel en meetkundig, en minimalistisch aan de algebra-kant. Als jonge wiskundige loste hij bijna alle vermoedens in de theorie van bladeringen op, hij veralgemeniseerde het vermoeden van Poincaré naar zijn 'Geometrisatievermoeden', een classificatieresultaat voor alle meetkundige vormen in drie dimensies (jaren later door Perelman bewezen), hij onthulde verbanden tussen complexe transformatiegroepen en 3D-meetkunde, complexe dynamica, enzovoort. Type-rend zijn de aantekeningen van zijn college over 'Geometry and Topology of 3-manifolds', online beschikbaar en gedeeltelijk ook als fysiek boek. Ik heb hier zelf de theorie van vezelproducten van orbifolds uit geleerd; de hoeveelheid plaatjes en concrete voorbeelden is overweldigend; het zijn *moeilijke* voorbeelden waarvan het doorgronden normale sterfelijke personen als mijzelf veel tijd kost, maar dan heb je ook wat.

Het hier besproken boek bevat hoofdzakelijk onderzoeksartikelen naar aanleiding van lezingen bij een conferentie uit 2014, georganiseerd na het plotse overlijden van Thurston op 65-jarige leeftijd aan zeldzame neuskanker. Studenten en beroemdheden uit de laag-dimensionale topologie zijn van de partij met substantiële onderzoeksbijdragen, zo ook een update van het ongepubliceerde werk uit 2012 van Thurston zelf aan lamineringen. Wat opvalt is dat de meeste artikelen een leesbare, 'meetkundige' inleiding hebben, en sommige zelfs — volledig in Thurston-stijl — vol staan met voorbeelden en plaatjes. Het boekwerk zal vooral experts in 3D-meetkunde, meetkundige groepentheorie en dynamica kunnen

bekoren. Neem als voorbeeld het artikel van Delecroix en Zorich waarin bestudeerd wordt hoe een biljartbal beweegt door een vlak waarin een regelmatig patroon van rechthoekige obstakels is geplaatst. De bal wijkt generiek na lange tijd t ongeveer $t^{2/3}$ van zijn startpositie af (het zogenaamde ‘wind-bomen-model’ van P. & T. Ehrenfest uit 1912; brownse beweging zou $t^{1/2}$ opleveren). In dit artikel bewijzen ze dat de diffusiesnelheid $2/3$ uit het rechthoekige geval soms willekeurig dicht bij 0 komt voor meer ingewikkelde, niet-convexe figuren (‘gefluister’), en vragen of het ook dicht bij 1 kan (‘kreten’). Na een toegankelijke inleiding vliegen de lezer al snel de methoden uit de Hodge-theorie van moduliruitmten van platte oppervlakken om de oren.

Zorgvuldig uitgegeven, modulo een paar rare drukfouten in de referenties van sommige artikelen, lijkt het vooral een werk voor de kenner, die zal smullen van de met verrassende inzichten volgestopte 400 pagina’s.

Gunther Cornelissen



Fabio Toscano

The Secret Formula
How a Mathematical Duel Inflamed
Renaissance Italy and Uncovered the Cubic
Equation

vertaald uit Italiaans door Arturo Sangalli
 Princeton University Press, 2020
 viii + 161 p., prijs \$24.95
 ISBN 9780691183671

Als er ooit (het boek is reeds in 2009 als *La Formula Segreta* gepubliceerd in het Italiaans) een spannend boek is verschenen over een wiskundig onderwerp, dan is het wel dit boek. Intriges, passie, geheimen, menselijke zwakheden, ze komen alle voorbij in het soepel geschreven verhaal van de speurtocht naar de oplossingsmethode van de algemene derdegraadsvergelijking. De reden dat dit welbekende verhaal nog maar weer eens wordt verteld is dat Toscano — nog meer dan daarvoor gedaan is — de beweegredenen van de hoofdpersonen (Scipio Dal Ferro, Ludovico Ferrari, maar vooral Niccolò Tartaglia en Gerolamo Cardano) heeft willen duidelijk maken. Dat hij dat op een dergelijke, uitermate gedetailleerde manier überhaupt heeft kunnen doen is niet alleen te danken aan de respectievelijke officiële publicaties (al dan niet met toestemming van de concurrent), maar vooral aan de grote hoeveelheid brieven en persoonlijke notities die op wonderbaarlijke wijze tot nu toe bewaard zijn gebleven.

Niccolò Tartaglia (hoofdpersoon 1) toonde zich bijvoorbeeld in die notities en brieven zeer bewust van het belang dialogen aan te gaan met andere wiskundige experts of liefhebbers teneinde zichzelf verder te ontwikkelen. Hij (en met hem anderen) werd niet alleen ingeschakeld om antwoorden of advies te geven op het gebied van diverse economische, bouwkundige en technische vragen, maar ook uitgedaagd om wiskundige problemen op te lossen; het was in die tijd (eind vijftiende, begin zestiende eeuw, alhoewel dat ook al eeuwen daarvoor het geval was) namelijk heel gewoon om een wiskundig duel aan te gaan, waarbij de winnaar niet alleen roem en prestige voor zichzelf (en voor zijn draagkrachtige opdrachtgever) vergaarde, maar vaak ook een geldbedrag kreeg of een salarisverhoging en soms zelfs een aanzienlijke verbetering

van zijn positie kon verwezenlijken. De ongeschreven regel was wel dat een probleem slechts kon worden aangeboden aan de uitgedaagde indien de aanbieder het probleem zelf kon oplossen (of tenminste de oplossing kende, wat niet hetzelfde is). Precies dat maakte dat Tartaglia weigerde te geloven dat de indiener van de vergelijking $x^3 + 3x^2 = 5$ zelf in staat zou zijn deze op te lossen met behulp van een algemene regel, simpelweg omdat die op dat moment niet bestond en zelfs voor onmogelijk werd gehouden. Er was wel een *meetkundige* manier bekend (Omar Khayyam, reeds in de elfde eeuw) om de (strikt positieve) oplossingen van derdegraadsvergelijkingen te construeren en er waren ook benaderingsmethoden bekend (onder anderen Fibonacci, in de dertiende eeuw), maar er was nog geen algemene algebraïsche formule.

De doorbraak kwam in 1535, toen Tartaglia als eerste de oplossingsmethode publiceerde van vergelijkingen van het type $x^3 + bx = c$ (en ook van het op dat moment als anders beschouwde type $bx + c = x^3$) en die bleek later een cruciale stap in het vinden van de algemene oplossingsmethode van een willekeurige derdegraadsvergelijking.

Enter Gerolamo Cardano. Na een periode als medicus begon Cardano (hoofdpersoon 2) zich steeds meer te bewegen op het gebied van de wiskunde, tot het punt dat hij (in 1539) Tartaglia benaderde om zijn toestemming te krijgen de eerder genoemde formule op te kunnen nemen in een boek waar hij op dat moment de laatste hand aan legde en dat uiteraard daardoor enorm aan belang zou winnen. Dat Tartaglia niet happig was iemand anders de credits te laten opstrijken voor zijn (enorme) prestatie is voorstelbaar, maar net zo voorstelbaar (gezien de desinteresse van Tartaglia zelf iets te willen publiceren en het grote belang voor het boek van Cardano) was ook de vraag van Cardano. Het uiteindelijk toch verschijnen van dat boek (bekend als *Ars Magna*) in 1545 — met de gewraakte oplossingsmethode, maar *zonder* toestemming van Tartaglia — markeert niet alleen het begin van de controverse die in dit boek uitvoerig wordt beschreven, maar is niets anders dan het begin van de moderne algebra, want de stap naar de complexe getallen (waarvoor in 1572 door Rafael Bombelli het pad werd geëffend) was nu nog maar een relatief kleine (hoe imposant ook op zichzelf) in vergelijking met de enorme stap die zojuist gezet was.

Voor het (soms zelfs dramatische) vervolg van deze controverse, uiteraard meenemende het niet te onderschatten belang van Scipio Dal Ferro (de waarschijnlijk eerste *ontdekker* van de algemene oplossingsmethode van een derdegraadsvergelijking) en van Ludovico Ferrari (een trouwe discipel van Cardano en de ontdekker van de algemene oplossingsmethode van een vierdegraadsvergelijking), maar ook hoe het verder ging met de protagonisten zelf, moet u dit onderhoudende en bij velen zeer spannende boek lezen.

Toscano heeft op indrukwekkende wijze alle (wiskundige en persoonlijke) elementen van het verhaal van een van de meest interessante wiskundige ontdekkingen ooit tot een consistent geheel weten te smeden, een verhaal waar iedere middelbare scholier met wiskunde B en wiskunde D in het profiel (en dus ook een toekomstige wiskundestudent) en zeker iedere wiskundeleraar kennis van zou moeten nemen, al was het alleen maar om het doorzettingsvermogen, de toewijding, de rivaliteit, de passie en zelfs de pijn te ervaren die nodig zijn geweest om de wiskunde en de wiskundigen van de zestiende eeuw significant verder te brengen na een gigantische periode van stilstand (althans op dit terrein) van zo'n 3000 jaar...

Joop van der Vaart



Bjorn Poonen

Rational Points on Varieties*AMS Graduate Studies in Mathematics, Vol. 186**American Mathematical Society, 2017**xv + 337 p., prijs \$83.00**ISBN 9781470437732*

Steven Dale Cutkosky

Introduction to Algebraic Geometry*AMS Graduate Studies in Mathematics, Vol. 188**American Mathematical Society, 2018**xii + 484 p., prijs \$83.00**ISBN 9781470435189*

Wat is een goed boek om algebraïsche meetkunde uit te leren, om standaard feiten te leren en theorie op te zoeken? In deze bespreking beschrijven we twee net verschenen leerboeken en vragen wij ons af of zij voor deze kwalificatie in aanmerking komen. Om beide leerboeken op waarde te kunnen schatten binnen het vakgebied, vertel ik eerst iets over de ontwikkeling van dit vak, door een paar hoogtepunten te beschrijven.

In de negentiende eeuw zien we de eerste grote ontwikkelingen. Riemann, Klein en Hurwitz bewijzen nieuwe resultaten en ontwikkelen nieuwe inzichten. Hun werk is nog steeds heel leesbaar, een bron van prachtige informatie.

In de periode daarna is het de *Italiaanse school*, ruwweg de periode van 1885–1935, die nieuwe wegen inslaat; prachtige wiskunde, vol fantasie; *Vorlesungen über algebraische Geometrie*, 1921, van Francesco Severi stamt uit die tijd, prachtig. Maar de bewijzen en resultaten waren lang niet altijd correct, hoe virtuoos dan ook.

Van der Waerden, Zariski en Weil kwamen met een indrukwekkende algebraïsering van deze meetkunde; we zien dat in *Einführung in die algebraische Geometrie*, 1939–1973, van Van der Waerden, en het monumentale werk *Foundations of Algebraic Geometry*, 1946, van Weil. Dit gaf een prachtige toegang tot toepassingen in de meetkunde en in de getaltheorie; wel leek het of de slinger iets te ver was doorgeschoten, de algebra was gezond, maar de meetkunde vaak moeilijk te ontdekken.

Toepassingen van *algebraïsche topologie* en *analyse* beschreven eigenschappen van algebraïsche variëteiten over de complexe getallen, Hodge vanaf 1930, zie *Principles of Algebraic Geometry*, 1978, van Griffiths and Harris. Uit de Russische school zien we *Basic Algebraic Geometry*, 1977, van Shafarevich.

We zien een grote verzameling leerboeken verschijnen, nog meer gespecialiseerde werken, elk met een eigen doel, die aspecten van de algebraïsche meetkunde beschrijven.

De toepassing van *schoventheorie* gaf toegang tot het modern toepassen van het klassieke idee van Riemann om meetkunde te beschrijven met locale en globale kaarten. Serre en Grothendieck gaven, onder andere gestimuleerd door de *Weil-vermoedens*, 1949, een manier om de algebraïsche meetkunde opnieuw op te zetten

in de nieuwe taal van de *schema's*. Prachtig om te lezen en toe te passen; maar de duizenden pagina's die Grothendieck schreef, met verschillende andere auteurs, is niet iets wat je als basistekst, als leerboek, wilt gebruiken. *Algebraic Geometry*, 1977, van Hartshorne daarentegen voorzag wel in die behoefte; bovendien werd daar de brug geslagen tussen de theorie van variëteiten en die van *schema's*. Ook is er een dynamisch, maar minder systematisch boek van Mumford: *The Red Book of Varieties and Schemes*, 1967.

Een schema wordt gegeven over een willekeurige basising als verzameling nulpunten van een stelsel polynomen. Bijvoorbeeld een kegelsnede en een raaklijn snijden elkaar; het resultaat is een schema, dat rekening houdt met multipliciteiten en nog meer informatie geeft; het grote voordeel is dat basisoperaties (snijden, producten, en nog veel meer) binnen de categorie van *schema's* blijven. Een ander voorbeeld: een schema X over $\mathbb{Z}$ geeft een collectie van *schema's* $\{X_s\}$, elk boven $s: \mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{Z}/p$, een familie van meetkundige structuren, maar dan in alle mogelijke karakteristieken; hier zien we hoe we getaltheorie kunnen bestuderen met de theorie van de *schema's*. Het leek of we de ultieme samenvatting hadden bereikt van mogelijke benaderingen.

We bespreken hier twee recent verschenen boeken die proberen mogelijke lacunes in de huidige literatuur op te vullen, elk op een eigen manier.

Rational Points on Varieties van Bjorn Poonen veronderstelt de lezer vertrouwd te zijn met het boek van Hartshorne, op zijn minst met de eerste twee hoofdstukken daarvan: *Varieties* en *Schemes*, verder met enige voorkennis van algebraïsche getaltheorie en van groepencohomologie. De auteur legt de focus op aspecten van *aritmatische meetkunde*: neem een variëteit V over een lichaam K , bij voorbeeld een eindige uitbreiding van $\mathbb{Q}$, of een eindig lichaam, en beschrijf $V(K)$, de verzameling van punten op V met coördinaten in K . De volgende meningen verwoorden precies het enthousiasme dat een specialist of een beginnende over dit boek van Poonen kan hebben.

“The book by Bjorn Poonen, a leading expert in the field, opens doors to this vast field for many readers with different experiences and backgrounds. It leads through various algebraic geometric constructions towards its central subject: obstructions to existence of rational points.”

Yuri Manin, Max-Planck-Institute, Bonn

“It is clear that my mathematical life would have been very different if a book like this had been around at the time I was a student.”

Hendrik Lenstra, Universiteit Leiden

Dit boek geeft een mooie balans tussen heel specialistische onderwerpen en het bespreken van basismethoden. Door het bestuderen van specifieke niet-triviale vragen leer je het vak. De auteur helpt daarbij door de tekst steeds te verrijken met waarschuwingen, voorbeelden en vraagstukken. Uitgebreide verwijzingen geven de lezer de mogelijkheid tot verdere verdieping. De uitleg is helder en precies en geeft de lezer voldoende informatie om verder te gaan.

We noemen een paar onderwerpen die besproken worden. Hoofdstuk 3, ‘Properties of morphisms’: hier zien we veel basisbegrippen. Hoofdstuk 6, ‘Étale and fppf cohomology’: een prachtig overzicht. Hoofdstuk 7, ‘The Weil conjectures’: we zien een uitleg van de Lefschetz-dekpuntenstelling voor differentieerbare variëteiten, en het étale equivalent; lees de heldere uiteenzetting

waarom dit aspect de Riemann-hypothese wordt genoemd. Verder: cohomologische obstructies, algebraïsche oppervlakken, en een prachtig overzicht van eigenschappen van rationale en gevezelde variëteiten. Hier zien we het uitgangspunt van de auteur: gebruik dit speciale onderwerp (rationale punten) om een rijk scala van eigenschappen van variëteiten en schema's gedetailleerd te beschrijven.

De auteur heeft kennelijk een aantal duidelijke keuzen gemaakt. Onderwerpen worden besproken, afdoende verwijzingen worden gegeven; de oorspronkelijke bronnen moet de lezer zelf zien te vinden; bijvoorbeeld zien we voor de stelling van Chevalley, over de structuur van algebraïsche groepen, niet een verwijzing naar het oorspronkelijke artikel uit 1960. Echter, een meer complete lijst van verwijzingen voor elke onderwerp had het boek zeker topzwaar en onleesbaar gemaakt. Zo maak je als schrijver duidelijke keuzen wat je wel en wat je niet laat zien van het complexe stramien van dit wijdvertakte vakgebied. De lezer met interesse in de historische achtergronden moet nog werk verzetten om in dat opzicht een compleet overzicht te krijgen.

Naast uitleg en theorie, voorbeelden en waarschuwingen, vinden we veel open problemen. In onderwerpen die besproken worden leidt de auteur ons naar het fascinerende gebied van modern onderzoek in allerlei vormen. Op basis van dit boek kun je heel wat onderwerpen voor scripties en promoties vinden.

Conclusie. Uit de inleiding: "Our ultimate motive is to introduce readers to techniques that they are likely to need while researching arithmetic geometry more broadly. Along the way, we mention open problems and applications that are interesting in their own right." Hierin is de auteur zeker geslaagd. *Rational Points on Varieties* van Bjorn Poonen is een prachtig boek. Hier leer je door de beschrijving van één aspect diepe theorie, vind je veel voorbeelden en krijgen we een uitstekende presentatie van algemene principes en technieken. Het boek kent niet alleen een rijke schakering aan onderwerpen, maar ook een grote precisie; hier leer je het vak uit. Zowel voor de expert, als voor een student met enige achtergrond is het een rijke en mooie bron. Voor mij stond er heel wat informatie in die ik nog niet had. Bovendien is het een heel persoonlijk boek; steeds weer denk ik, al lezend, de auteur zelf tegen te komen, te voelen hoe hij inzicht en enthousiasme op de lezer weet over te brengen. Zijn wiskundige eruditie proeven we bij het lezen van elke bladzijde.

Introduction to Algebraic Geometry van Cutkosky is een heel ander boek. De opzet is een inleiding te geven vanaf de beginselen van de algebra. Hier ligt de focus op variëteiten over een algebraïsch gesloten lichaam.

Het eerste hoofdstuk geeft verwijzingen naar wat we nodig hebben uit de commutatieve algebra. Voor het begrijpen van bewijzen is er een grote stapel leerboeken over (commutatieve) algebra nodig. Het gebruikelijke dilemma is: hoeveel heb je daarvan nodig voor je aan de meetkunde kunt beginnen?

Met voldoende voorkennis geeft dit boek een rijke beschrijving van klassieke resultaten. Maar er kleven wel een paar bezwaren aan. Notatie en definities zijn soms verwarrend. Een paar van de vele voorbeelden. Ik weet niet wat onder een 'domein' en een 'priemideaal' verstaan wordt; heeft de ring $R = \{0\}$ met $1 = 0$ een priemideaal? Zie: "every ring R ... has at least one prime ideal" (pagina 1); maar dit is in tegenspraak met de definitie van een schema.

In de eerste paragraaf is K zowel een ideaal als een lichaam; f in Theorem 2.57 heeft andere eigenschappen dan f in het volgende Corollary 2.58. Het taalgebruik is onzorgvuldig: 'homogeneous set of generators' waar 'set of homogeneous generators' wordt bedoeld, is een van de vele voorbeelden. Tekst en notatie zijn onzorgvuldig; in Proposition 2.211 komt een n voor, waarvan niet duidelijk is of die al vast ligt, of nog gekozen moet worden, en in het bewijs komt er helemaal geen n voor. In (18.8) wordt verwezen naar Proposition 11.14, maar notaties zijn onderling verschillend. Waar ik ook lees in dit boek denk ik: dit zou ik zo niet zeggen, of bevat de tekst zelfs een fout.

Een van de vele voorbeelden: "Suppose that $V \subset X$ is an affine open subset" (pagina 244); de rest van het argument is fout voor $V = \emptyset$; op pagina 245 wordt beweerd dat voor de singuliere locus $Z \subset X$ er geen 'prime divisor' bevat is in $X \setminus Z$; tegenvoorbeelden zijn eenvoudig te geven.

Hier is een ontsporing op elementair niveau. Een element $x \in R$ heet een *nuldeler* als $x \neq 0$ en er een $y \neq 0$ is met $xy = 0$ (pagina 3); op pagina 291 wordt *de multiplicatieve verzameling* S van *niet-nuldelers* genomen (dus $0 \in S$) om de totale ring van quotiënten $S^{-1}R$ te vormen; de definitie impliceert $S^{-1}R = \{0\}$. Je ziet wat de auteur bedoelt te zeggen, maar het staat er niet.

Onzorgvuldige definities zorgen voor onduidelijkheid. Wat is 'the general fiber' (pagina 454); een definitie ontbreekt; de specialist weet dat 'general fibers' is bedoeld; een discussie over het verschil met 'the generic fiber' ontbreekt; de zoveelste gemiste kans om de lezer echt iets te leren. Een *Cartier divisor* wordt gedefinieerd (pagina 245) als een overdekking met open deelverzamelingen en locale functies daarop; geeft een andere overdekking een andere Cartier divisor? De auteur vertelt niet welk isomorfiebegrip gehanteerd wordt.

De index geeft soms verkeerde informatie (de definitie van een affine variëteit komt al veel eerder aan de orde dan waar de index je naartoe leidt).

Mijn ervaring is dat studenten (terecht) in de war raken door een onzorgvuldige tekst. Wil je dat iemand die het vak leert uit dit boek deze slechte gewoontes overneemt?

Een fundamenteel bezwaar tegen dit boek is dat begrippen behandeld worden maar dat dat ophoudt zodra het interessant kan worden. Hier is een (van de vele) voorbeelden: Hoofdstuk 19 geeft een inleiding tot snijtheorie; in (19.20), de klassieke stelling van Bézout, 1779 (reeds vermeld door Newton in 1687), geeft dat het aantal snijpunten (multipliciteiten geteld) van twee verschillende irreducibele vlakke krommen van graad d , respectievelijk e , gelijk is aan de . Maar hoe ging dat verder? Van der Waerden, 1938, en Gröbner, 1951, laten zien dat een voor de hand liggende generalisatie niet een gelijkheid oplevert; werk van Weil, 1949, en van Serre, 1958, en vele anderen, legt uit wat wel de goede benadering is. De auteur vermeldt het boek van Fulton, 1984, waar "more general theories are presented". Waarom geeft de auteur niet op zijn minst aan wat de goede vraag is, of er een open probleem is, en wat er na Bézout aan deze theorie gedaan is?

Naast de theorie die algebraïsche variëteiten over een algebraïsch gesloten lichaam behandelt, beschrijft dit boek ook in Hoofdstuk 15 'Schemes', generalisaties in schema-taal, en een generalisatie in (15.4) naar 'varieties over nonclosed fields'. Definities zijn slordig en niet compleet. Met deze begrippen ontspoot de tekst op verschillende plaatsen. Een ander bezwaar. Definities worden

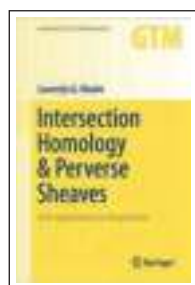
ad hoc gegeven. In (5.2) wordt het product van twee variëteiten gegeven. Wel de verzamelingstheoretische definitie, niet de definitie als oplossing van een universeel probleem; in het bewijs van Propositie 5.7 komt dit wel terloops om de hoek kijken; wat leert een beginnend student hiervan? We kennen nu de kracht van *representeerbare functoren*; ze worden niet gebruikt in deze tekst. Bovendien is déze definitie van een product, gegeven voor variëteiten over een algebraïsch gesloten lichaam, niet toepasbaar in algemenere situaties, maar de auteur gebruikt wel $X \times Y$ voor

schema's zonder verder commentaar. Ik heb een student na het lezen van deze tekst op dit onderdeel serieus verkeerde conclusies zien trekken; hier merk je hoe slecht deze tekst werkt.

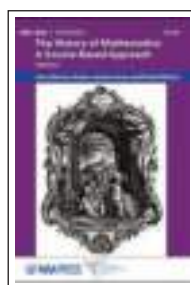
Conclusie. Een student die kritisch deze tekst leest kan feiten leren over algebraïsche variëteiten over een algebraïsch gesloten lichaam. Dit boek *Introduction to Algebraic Geometry* van Cutkosky kun je als voorbeeld nemen van hoe je wiskunde niet hoort op te schrijven. Ik begrijp niet hoe de AMS dit manuscript heeft kunnen accepteren.

Frans Oort

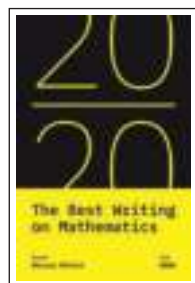
Recent verschenen publicaties. Als u een van deze boeken wilt bespreken of als u suggesties heeft voor andere boeken voor deze rubriek, laat dit dan per e-mail weten aan reviews@nieuwarchief.nl.



Laurențiu G. Maxim
Intersection Homology & Perverse Sheaves
Springer, 2019
ISBN 9783030276430
springer.com/9783030276430



June Barrow-Green, Jeremy Gray, Robin Wilson
The History of Mathematics: A Source-Based Approach Volume 2
MAA Press, 2021
ISBN 9781470443825
bookstore.ams.org/text-61



Mircea Pitici (ed.)
The Best Writing on Mathematics 2020
Princeton University Press, 2020
ISBN 9780691207568
press.princeton.edu/books/paperback/9780691207568/the-best-writing-on-mathematics-2020



Glen Van Brummelen
The Doctrine of Triangles: A History of Modern Trigonometry
Princeton University Press, 2021
ISBN 9780691179414
press.princeton.edu/books/hardcover/9780691179414/the-doctrine-of-triangles



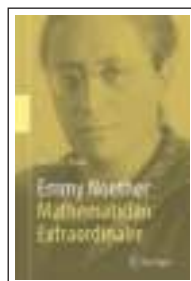
Arno van den Essen, Shigeru Kuroda, Anthony J. Crachiola
Polynomial Automorphisms and the Jacobian Conjecture
New Results from the Beginning of the 21st Century
Birkhäuser, 2021
ISBN 9783030605339
springer.com/9783030605339



Chris Bleakley
Poems that Solve Puzzles: The History and Science of Algorithms
Oxford University Press, 2020
ISBN 9780198853732
global.oup.com/academic/product/poems-that-solve-puzzles-9780198853732



Rob Bisseling
Parallel Scientific Computation: A Structured Approach Using BSP
Oxford University Press, 2020
ISBN 9780198788355
global.oup.com/academic/product/parallel-scientific-computation-9780198788355



David E. Rowe
Emmy Noether: Mathematician Extraordinaire
Springer, 2021
ISBN 9783030638092
springer.com/9783030638092

Problemen

| Problem Section

This Problem Section is open to everyone; everybody is encouraged to send in solutions and propose problems. Group contributions are welcome. We will select the most elegant solutions for publication. For this, solutions should be received before **15 April 2021**. The solutions of the problems in this issue will appear in the next issue.

Problem A (proposed by Daan van Gent and Hendrik Lenstra)

Let G and A be groups, where G is denoted multiplicatively and where A is abelian and denoted additively. Assume that A is 2-torsion-free, i.e. it contains no element of order 2.

Suppose that $q: G \rightarrow A$ is a map satisfying the parallelogram identity: for all $x, y \in G$ we have

$$q(xy) + q(xy^{-1}) = 2q(x) + 2q(y).$$

Prove that for all $x, y \in G$ we have $q(xy x^{-1} y^{-1}) = 0$.

Problem B (folklore)

Prove that every Jordan curve (i.e. every non-self-intersecting continuous loop in the plane) contains four points A, B, C, D such that $ABCD$ forms a rhombus.

Problem C (proposed by Daan van Gent)

A *directed binary graph* is a finite vertex set V together with maps $e_1, e_2: V \rightarrow V$. (The edges are formed by the ordered pairs $(v, e_i(v))$ with $i \in \{1, 2\}$.)

For $a, b, c, d \in \mathbb{Z}_{>0}$, an $(a:b)$ -to- $(c:d)$ *distributive graph* is a directed binary graph G together with distinct vertices $s, t_1, t_2 \in V$ such that G interpreted as a Markov chain has the following properties:

1. For all $v \in V$ the edges $(v, e_1(v))$ have transition probability $\frac{a}{a+b}$ and edges $(v, e_2(v))$ have probability $\frac{b}{a+b}$.
2. It has the initial state s with probability 1.
3. Both t_1 and t_2 connect to themselves, meaning $e_i(t_j) = t_j$ for all $i, j \in \{1, 2\}$.
4. It has a unique stationary distribution of t_1 with probability $\frac{c}{c+d}$ and t_2 with probability $\frac{d}{c+d}$.

Show that for all $a, b, c, d \in \mathbb{Z}_{>0}$ there exists an $(a:b)$ -to- $(c:d)$ distributive graph.

Edition 2020-3 We received solutions from Brian Gilding, Pieter de Groen, Marco Pouw and Ludo Pulles.

Problem 2020-3/A (proposed by Onno Berrevoets)

Let $f: (-1, 1) \rightarrow \mathbb{R}$ be a function of class C^∞ , i.e., all higher derivatives of f exist on $(-1, 1)$. Let $c \geq 0$ be a real number. Suppose that for all $x \in (-1, 1)$ and all $n \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$ we have $f^{(n)}(x) \geq -c$. Also assume that for all $x \in (-1, 0]$ we have $f(x) = 0$. Prove that f is the zero function.

Solution We received solutions from Brian Gilding, Pieter de Groen and Marco Pouw. This solution is based on the one by Brian Gilding, who not only gives a very concise solution, but also shows that some of the assumptions can be weakened.

Since $f \in C^\infty(-1, 1)$ and $f \equiv 0$ in $(-1, 0]$, $f^{(n)}(0) = 0$ for every $n \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$. Consequently, for arbitrary $x \in (0, 1)$ and $n \in \mathbb{Z}_{\geq 2}$, Taylor's Theorem (or repeated integration by parts, following the proof by Pieter de Groen) gives

$$f(x) = \int_0^x \frac{(x-t)^{n-1}}{(n-1)!} f^{(n)}(t) dt \geq -c \int_0^x \frac{(x-t)^{n-1}}{(n-1)!} dt = -c \frac{x^n}{n!}.$$

Likewise,

$$f'(x) = \int_0^x \frac{(x-t)^{n-2}}{(n-2)!} f^{(n)}(t) dt,$$

and this gives us

$$f(x) - \frac{x}{n-1} f'(x) = - \int_0^x \frac{t(x-t)^{n-2}}{(n-1)!} f^{(n)}(t) dt \geq c \int_0^x \frac{t(x-t)^{n-2}}{(n-1)!} dt = \frac{c}{n-1} \frac{x^n}{n!}.$$

Passage to the limit $n \rightarrow \infty$ yields $f(x) = 0$ for all such x .

The assumption $f^{(n)} \geq -c$ in $(-1, 1)$ for every $n \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$ for some nonnegative real number c can be relaxed to $\pm f^{(n)} \leq n! g_n$ for every $n \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$ for a sequence of nonnegative functions $\{g_n: n \in \mathbb{Z}_{\geq 0}\} \subset L_{\text{loc}}^\infty(-1, 1)$ with the property $x^n \|g_n\|_{L^\infty(-x, x)} \rightarrow 0$ as $n \rightarrow \infty$ for all $x \in (0, 1)$. Furthermore, given that $f^{(n)}(0) = 0$ for every $n \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$, it is not necessary to suppose that $f \equiv 0$ in $(-1, 0)$. This can be shown analogously to $f \equiv 0$ in $(0, 1)$.

Problem 2020-3B (proposed by Onno Berrevoets)

Consider the map $f: \mathbb{Z}_{\geq 0}^2 \rightarrow \mathbb{Z}_{\geq 0}^2$, $(a, b) \mapsto (2 \min\{a, b\}, \max\{a, b\} - \min\{a, b\})$.

We call $(a, b) \in \mathbb{Z}_{\geq 0}^2$ *equipotent* if there exists $n \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$ such that $f^n(a, b) = (x, x)$ for some $x \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$ (where $f^n = f \circ \dots \circ f$). Show that $(a, b) \in \mathbb{Z}_{\geq 1}^2$ is equipotent if and only if $\frac{a+b}{\gcd(a, b)}$ is a power of 2.

Solution We received solutions by Pieter de Groen and Ludo Pulles. This solution is based on the one by Pieter.

It is clear that $f(ca, cb) = cf(a, b)$ for all non-negative integers a, b, k , and it follows that (ca, cb) is equipotent if and only if (a, b) is. So it suffices to show that for $a, b \geq 1$ relatively prime, we have (a, b) is equipotent if and only if $a + b = 2^k$ for some $k \geq 1$.

$\Leftarrow$: Suppose that $a, b \in \mathbb{Z}_{\geq 1}$ are relatively prime and satisfy $a + b = 2^k$. If $k = 1$, we have $(a, b) = (1, 1) = f^0(1, 1)$ is equipotent. If $k > 1$ and $(c, d) := f(a, b)$, then $c = 2 \min(a, b)$ is even, and hence so is d because $c + d = a + b$ is even. Hence (a, b) is equipotent with sum 2^k if and only if $(\frac{c}{2}, \frac{d}{2})$ is equipotent with sum 2^{k-1} . Note that $\frac{c}{2}$ and $\frac{d}{2}$ are relatively prime because $\gcd(2 \min\{a, b\}, \max\{a, b\} - \min\{a, b\})$ can only take on the values $\gcd(a, b)$ or $2 \gcd(a, b)$. We can conclude (a, b) is equipotent by induction.

$\Rightarrow$: Conversely, suppose that $a, b \in \mathbb{Z}_{\geq 1}$ are relatively prime with $a + b$ not a power of 2. Note that the sum of (a, b) is invariant under f , because if $f(a, b) = (p, q)$, we have $p + q = \max(a, b) + \min(a, b) = a + b$. If $a + b$ is odd, then the same is true for $f^n(a, b)$, so (a, b) is not equipotent. Suppose $a + b$ is even. Because a, b are relatively prime, both a and b are odd. Now similar to the above, if $f(a, b) = (c, d)$, then both c and d are even, and (a, b) is equipotent if and only if $(\frac{c}{2}, \frac{d}{2})$ is. Since $\frac{c}{2} + \frac{d}{2} = \frac{a+b}{2}$ and $\frac{c}{2}, \frac{d}{2}$ are relatively prime, repeating this procedure eventually results in a pair with odd element-sum, which is not equipotent. Hence (a, b) was not equipotent either.

Problem 2020-3/C* (folklore)

Uncle Donald cuts a 3 kg piece of cheese in an arbitrary, finite number of pieces of arbitrary weights. He distributes them uniformly randomly among his nephews Huey, Dewey and Louie. Prove or disprove: the probability that two of the nephews each get strictly more than 1 kg is at most two thirds.

Solution This problem remains open. This is a Star Problem for which the proposer does not know any solution. For the first correct solution sent in within one year there is a prize of €100.