

Inhoud | Contents

Artikelen | Features

Wiskunde en Nieuwe Media

- 152 **Onderwijs | Education**
Gereedschap om wiskunde in de vingers te krijgen
Paul Drijvers

- 156 **Onderwijs | Education**
Bettermarks versus Moderne Wiskunde: Het verschil tussen twee lesmethoden op het gebied van algebra
Lotte Weedage, Mark Timmer

- 163 **Onderwijs | Education**
Enkele toepassingen van GeoGebra in meetkunde-onderwijs
Jeroen Spandaw

- 167 **Geschiedenis | History**
Het Stacks project
Pieter Belmans, Aise Johan de Jong

- 174 **Biografie | Biography**
Frank van Kollem: Pionier op het gebied van origami-tessellations
Paula Versnick

- 179 **Interview | Interview**
José van Dijck: Inspiratie door de samenhang tussen technologie, gebruiker en ideeën
Nicolaos Starreveld

- 181 **Column | Column**
Nederland in tijden van corona
Piet Groeneboom

- 185 **Onderzoek | Research**
Klimaatwiskunde
Robbin Bastiaansen, Kaj-Ivar van der Wijst

- 196 **Onderwijs | Education**
Zelf doctor worden
Jaap de Jonge

- 203 **Onderzoek | Research**
Wel of geen schaalvrije netwerken? – Een verhaal van extremen
Pim van der Hoorn

- 211 **Boekbespreking | Book review**
Schoonheid sterker dan de dood
Marjolein Kool

Rubrieken | Departments

- 147 **Redactioneel** *Teun Koetsier*

- 148 **Agenda** *Margriet Oomen*

- 149 **Nieuws** *Margriet Oomen*

- 190 **Stoffelijke resten: Nederland**
Wieb Bosma

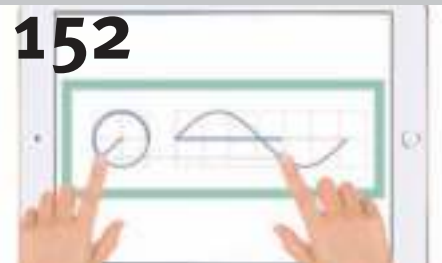
- 201 **Proof by example: Birgit Sollie**
Clara Stegehuis, Francesca Arici

- 207 **Het keerpunt van Ellen van Oost**
Daan Mulder

- 209 **In de verdediging** *Nicolaos Starreveld*

- 214 **Problemen**
Onno Berrevoets, Rob Eggermont, Daan van Gent

Uitgelicht



Paul Drijvers belicht het gebruik van ICT-gereedschap in de wiskundeles.



Paula Versnick schetst een beeld van origami-kunstenaar Frank van Kollem.

Colofon

Het Nieuw Archief voor Wiskunde is een uitgave van het Koninklijk Wiskundig Genootschap en verschijnt vier maal per jaar. Het tijdschrift richt zich op eenieder die zich beroepsmatig met wiskunde bezighoudt, als academisch of industrieel onderzoeker, student, leraar, journalist of beleidsmaker. Het stelt zich ten doel te berichten over ontwikkelingen in de wiskunde in het algemeen en in de Nederlandse wiskunde in het bijzonder.

ISSN 0028-9825

Adres

Nieuw Archief voor Wiskunde
Centrum Wiskunde & Informatica
Postbus 94079, 1090 GB Amsterdam
tel. 020-5924288
redactie@nieuwarchief.nl
www.nieuwarchief.nl

Hoofredactie

Raf Bocklandt (r.r.j.bocklandt@uva.nl)
Robbert Fokkink (r.j.fokkink@tudelft.nl)

Eindredactie/Bladmanager

Fred Drissen (fred@nieuwarchief.nl)

Redactie

Francesca Arici (UL), Viktor Blåsjö (UU), Hans Cuypers (TU/e), Teun Koetsier (VU), Daan Mulder, Margriet Oomen (UL), Nicolaos Starreveld (UvA), Clara Stegehuis (UT), Hans Sterk (TU/e), Mark Timmer (UT)

Problemenrubriek (problems@nieuwarchief.nl)

Onno Berrevoets, Rob Eggermont en Daan van Gent

Bureau redactie

Claartje Ottens

Illustraties

Ryu Tajiri

Vormgeving

Susanne Laws (omslag, begeleiding binnenwerk)
Kitty Molenaar (ontwerp)

Druk

Veldhuis Media

Advertenties

advertenties@nieuwarchief.nl

Koninklijk Wiskundig Genootschap

www.wiskgenoot.nl

Platform Wiskunde Nederland

www.platformwiskunde.nl

European Mathematical Society

www.euro-math-soc.eu

International Mathematical Union

www.mathunion.org

Koninklijk Wiskundig Genootschap

Het Koninklijk Wiskundig Genootschap (KWG) is een landelijke vereniging van beoefenaars van de wiskunde. In 1778 opgericht onder de zinspreuk: 'Een onvermoeide arbeid komt alles te boven' is het 's werelds oudste nationale wiskundegenootschap. Leden ontvangen het Nieuw Archief voor Wiskunde als onderdeel van hun lidmaatschap.

Bestuur

Barry Koren (TU/e, voorzitter), Wioletta Ruszel (TUD, penningmeester), Marie-Colette van Lieshout (CWI, secretaris), Danny Beckers (VU), Theo van den Bogaart (HU), Sonja Cox (UvA), Marije Elkenbracht (ABN AMRO), Michael Müger (RU), Willem Jan Palenstijn (CWI), Jan Wiegerinck (UvA).

Secretariaat

Koninklijk Wiskundig Genootschap, CWI
Postbus 94079, 1090 GB Amsterdam
wiskgenoot@wiskgenoot.nl

Ledenadministratie KWG / Abonnementen

admin@wiskgenoot.nl, tel. 020-5924008
Wijzigingen of opzegging kunt u ook doorgeven door in te loggen op www.wiskgenoot.nl.

Contributie

Tarieven per jaar (bij betaling per automatische incasso krijgt u € 2,50 korting):

- gewoon lid: € 92,50
 - reciprociteitslid: € 72,50
 - gepensioneerden en werklozen: € 47,50
 - aio's, oio's, studenten: € 37,50 (max. 4 jaar)
 - lid zonder Nieuw Archief: € 52,50
- Studenten en pas afgestudeerden kunnen een jaar lang gratis lid worden.

Voor verzending van het Nieuw Archief naar het buitenland wordt een portotoeslag van € 10 in rekening gebracht.

Instituten in Nederland en buitenland kunnen zich abonneren op het Nieuw Archief voor Wiskunde voor € 100 (Nederland), € 110 (Europa) of € 112,50 (buiten Europa).

Members of foreign societies

Members of *SIAM*, the *Société Mathématique de France*, the *Gesellschaft für Angewandte Mathematik und Mechanik*, the *Deutsche Mathematiker-Vereinigung*, and of the *American, Australian, Belgian, Indian, London, Spanish, and South-African Mathematical Societies* living outside of the Netherlands pay € 72,50 instead of the full membership fee of € 92,50 a year. Conversely, these foreign societies, as well as the *VvS+OR* and the *NVORWO*, have reduced membership fees for KWG members. A postage charge of € 10 is added for members living abroad but in Europe, and a charge of € 12,50 for members living outside of Europe.

Exchange subscriptions

Koninklijk Wiskundig Genootschap Library
Centrum Wiskunde & Informatica
P.O. Box 94079, NL-1090 GB Amsterdam
KWG-exchange@cwi.nl

Informatie voor auteurs

Kopij

Het Nieuw Archief voor Wiskunde is een geredigeerd tijdschrift. Kopij dient per e-mail te worden aangeboden aan kopij@nieuwarchief.nl. Uitgebreide informatie en auteursinstructies kunt u vinden op www.nieuwarchief.nl.

Volgende nummers

nummer	maand	verschijnen	deadline kopij
21(4)	december	2020	verstreken
22(1)	maart	2021	01-11-2020
22(2)	juni	2021	01-02-2021
22(3)	september	2021	01-05-2021

Instituutsleden

De publicaties van het Koninklijk Wiskundig Genootschap worden mede mogelijk gemaakt door de bijdragen van de volgende instituten.

	Centrum Wiskunde & Informatica
	Rijksuniversiteit Groningen
	Universiteit van Amsterdam
	Universiteit Leiden
	Vrije Universiteit
	Universiteit Utrecht
	Technische Universiteit Eindhoven
	Eurandom
	Technische Universiteit Delft
	Universiteit Twente
	Radboud Universiteit Nijmegen
	Freudenthal Instituut

Op het omslag

Digitalisering in het wiskundeonderwijs is niet meer weg te denken. En in de huidige coronatijd waarin er veel afstandsonderwijs geweest is, is het belang ervan alleen maar duidelijker geworden. Lees in dit nummer een aantal bijdragen over het thema 'Wiskunde en Nieuwe Media'.

De Global Intelligent Machine

Voor het *Nieuw Archief voor Wiskunde* is 2020 een jubileumjaar. Het is dit jaar twintig jaar geleden dat in maart 2000 het eerste nummer van de vijfde serie van het NAW verscheen. Het blad kreeg een volstrekt ander en aantrekkelijk uiterlijk. Inhoudelijk veranderde het van een internationaal tijdschrift van marginale betekenis tot een gevarieerd en informatief vakblad. Enkele jaren eerder had het KWG-bestuur met Jan Willems als voorzitter besloten dat het tijd was voor verandering. Onder voorzitterschap van Jan Karel Lenstra ging men met groot succes tot actie over. Het NAW kreeg ook een eigen website — www.nieuwarchief.nl — waar u een indrukwekkend overzicht vindt van de hele vijfde serie.

De website van het NAW maakt deel uit van het World Wide Web en dat gegeven brengt me bij het thema van het voor u liggende nummer: Wiskunde en Nieuwe Media. Het WWW is immers een informatiemedium dat functioneert op de computers van het Internet.

Het Internet nu is een wel heel bijzondere uitvinding. Het is een samenhangend materieel artefact dat zich over de hele globe uitstrekt. Het heeft bovendien heel specifieke functies, kortom, het is een machine, een globale informatiemachine, die ook nog in belangrijke mate autonoom functioneert. En we ontwikkelen die machine steeds verder. Aanvankelijk verwerkten computers en ook het Internet alleen informatie die er eerst door mensen werd ingevoerd. In de afgelopen twintig jaar is het Internet echter meer en meer zelf informatie gaan verzamelen. Het is uitgerust met biljoenen sensoren die automatisch informatie registreren. Er is ook een naam voor deze opvolger van het Internet, het Internet der Dingen (*Internet of Things*). En we zijn alweer een volgende fase ingegaan, het Internet der Dingen wordt meer en meer uitgebreid met robots. Denk maar aan de zelfrijdende auto. Het resultaat is een almaar groeiende, de hele wereld omvattende robotische machine, met zintuigen in de vorm van sensoren, met hersenen in de vorm van

computers en met handen en voeten in de vorm van in de wereld ingrijpende apparatuur.

Ik noem deze de wereldomvattende robotische machine de *Global Intelligent Machine* (GIM). Over GIM valt veel te zeggen. Het is de machine die op den duur alle andere niet-antiquarische machines zal omvatten. Het is overigens geen robot, want er is geen centrale controle, al is dat wel denkbaar.

Het zal u niet verbazen dat het thema ‘Wiskunde en Nieuwe Media’ voor mij equivalent is met het thema ‘Wiskunde en GIM’. Wiskundigen zijn op vele manieren betrokken bij de verdere ontwikkeling van GIM. Voor iedereen is GIM daarnaast een onmisbaar hulpmiddel geworden. In de afgelopen twintig jaar stonden er in het NAW talloze artikelen die dit illustreren. Ook in het voor u liggende nummer is dat het geval.

De ontwikkeling in de afgelopen twintig jaar was spectaculair en als er niets tussenkomt gaat dat nog wel even door. Mij intrigeert de ontwikkeling van de intelligentie van GIM. Gaan we echt toe naar een moment van Singulariteit, waarop computers in elk opzicht slimmer zijn dan wij?

Ooit vroeg een Servisch jongetje van een jaar of zes mij: “Er zitten vijf vogels op een telefoonlijn. Een jager schiet er één dood. Hoeveel zitten er dan nog?” Met mijn antwoord, “vier”, had ik hem geen groter genoegen kunnen doen. Ik zakte voor zijn IQ-test. Vijf min één is in dit geval nul, namelijk. Nu was ik altijd al slecht in de toegepaste wiskundevakken, maar ik had even moeten nadenken.

Mijn punt is dit. Als een computerprogramma in dit geval meteen het goede antwoord geeft, dan is de Singulariteit nakende. Ik kijk niet naar dat moment uit. ☼

Teun Koetsier, redacteur

Afdeling Wiskunde, Vrije Universiteit Amsterdam

Agenda

| Upcoming Events

11 september 2020

Finale Nederlandse Wiskunde Olympiade

Nationale finale van de wiskundeolympiade voor middelbare scholieren.

plaats Technische Universiteit Eindhoven

info wiskundeolympiade.nl

18 september 2020

Wiskundetoernooi

Internationaal wiskundetoernooi waaraan zowel Duitse, Belgische en Nederlandse leerlingen uit 4/5 vwo in teams kunnen deelnemen.

plaats online

info ru.nl

18–28 september 2020 (verplaatst van juli)

International Mathematical Olympiad (IMO)

Internationale wiskundecompetitie voor middelbare scholieren. Dit jaar wordt de competitie volgens een virtueel format gehouden.

plaats online

info imo-official.org

21–25 september 2020

Workshop Integrative Developmental Biology

Workshop over celdynamica en multiscale modeling waarbij biofysische en gen-regulerende mechanismen gecombineerd worden.

plaats Lorentz Center@Oort, Leiden

info lorentzcenter.nl

26 september 2020

Junior Wiskunde Olympiade

Wiskundewedstrijd voor de beste 200 leerlingen die deelnamen aan de W4 Kangoeroe-wedstrijd.

plaats Vrije Universiteit Amsterdam

info wiskundeolympiade.nl

27–30 september 2020

International Conference on Computational Logistics (ICCL2020)

Conferentie voor wetenschappers in operations research, business analytics en artificial intelligence.

plaats online

info iccl2020.nl

1 oktober 2020

Symposium Retirement Jos Baeten

Symposium ter ere van het met pensioen gaan van Jos Baeten als algemeen directeur van het CWI en hoogleraar theory of computing aan het ILLC.

plaats CWI, Amsterdam, en online

info cwi.nl

5–9 oktober 2020

Post-Quantum Cryptography for Embedded Systems

Workshop mede georganiseerd door Andreas Hülsing (TU/e), Tanja Lange (TU/e) en Simona Samardjiska (RU).

plaats Lorentz Center@Oort, Leiden

info lorentzcenter.nl

10 oktober 2020

Symposium 'In de geest van Stevin'

26e symposium van de werkgroep geschiedenis van de NVvW, ter gelegenheid van het 400ste sterfjaar van Simon Stevin.

plaats online

info nvww.nl

20 oktober 2020

NETWORKS Match Makers Seminar

Doel van de workshop is het bij elkaar brengen van sociologen, economen, wiskundigen en informatici die onderzoek doen naar netwerken.

plaats IAS, Amsterdam

info thenetworkcenter.nl

2–5 november 2020

Non-commutative Geometry Along the North Sea

Workshop georganiseerd door Walter van Suijlekom (RU).

plaats Lorentz Center@Snellius, Leiden

info lorentzcenter.nl

6 november 2020

Prijsuitreiking Nederlandse Wiskunde Olympiade 2020

Feestelijke bijeenkomst waarbij in elke categorie de beste vijf deelnemers aan de Wiskunde Olympiade hun prijs in ontvangst mogen nemen.

plaats Technische Universiteit Eindhoven

info wiskundeolympiade.nl

7 november 2020

Jaarvergadering NVvW

Jaarlijkse vergadering en studiedag van de Nederlandse Vereniging van Wiskundeleraren.

plaats online

info nvww.nl/jaarvergadering

29–30 januari 2021

Nationale Wiskunde Dagen

Landelijke tweedaagse bijeenkomst voor wiskundeleraren.

plaats Noordwijkerhout

info uu.nl/nationale-wiskunde-dagen

Suggesties voor deze agenda zijn welkom.

Redacteur: Margriet Oomen

agenda@nieuwarchief.nl

Nieuws

| News

Johann Hurink nieuwe wetenschappelijk directeur 4TU.AMI

Het 4TU Applied Mathematics Institute (4TU.AMI) heeft een nieuwe directeur: Johann Hurink, hoogleraar in de discrete wiskunde aan de Universiteit Twente. Hij volgt Kees Vuik (TU Delft) op. Door de samenwerking tussen de 4 TU's in Eindhoven, Twente, Delft en Wageningen heeft het 4TU.AMI-consortium een sterke positie onder de internationale universiteiten. Hurink benadrukt ook het belang van 4TU.AMI voor de huidige maatschappij. Bijvoorbeeld voor de energietransitie, de coronacrisis en voor verkeersregulatie zijn wiskundige modellen onmisbaar. Ook wil Hurink de samenwerking tussen het 4TU.AMI-consortium en het bedrijfsleven verder stimuleren.

utwente.nl

Wiskundig model voor coronaproof muziekgebouw

Drie TU/e-onderzoekers, Danny Blom, Rudi Pendavingh en Frits Spijksma, hebben met een wiskundig model berekend hoeveel bezoekers het muziekgebouw in Eindhoven veilig kan ontvangen. Volgens het model kunnen 410 van de 1250 plaatsen in het muziekgebouw benut worden met inachtneming van de 1,5 meter. Samen met het muziekgebouw namen de onderzoekers het hele proces van entree, garderobe, foyergebruik, de toegang en het uitstromen van de zalen door. Daarnaast houdt het model ook rekening met de ventilatie van de zaal en of de bezoekers alleen, als duo of met het gezin komen. Het muziekgebouw is blij met de uitkomst. Door op één avond twee kortere voorstellingen te plannen kan 70 procent van de zaal bezet worden, zonder dat een stoel twee keer gebruikt wordt.

tue.nl

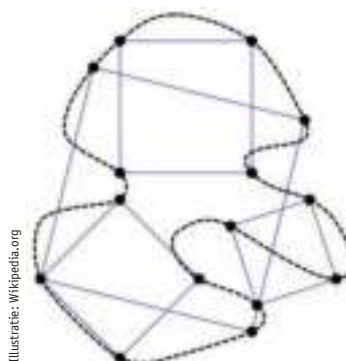
Vermoeden van Toeplitz bewezen

De wiskundigen Joshua Greene (Boston College) en Andrew Lobb (Durham University) hebben het vermoeden van Toeplitz bewezen. Het vermoeden van Toeplitz zegt dat op elke continue gesloten kromme die tweemaal differentieerbaar is, vier punten liggen die samen een perfect ingeschreven vierkant vormen. Green en Lobb bewezen zelfs een algemener resultaat, namelijk, dat voor elke rechthoek met willekeurig aspectratio, op een gladde kromme vier punten liggen die de rechthoek inschrijven. Voor hun bewijs gebruikten Greene en Lobb een inbedding van de kromme in een vierdimensionale simplectische ruimte. Vervolgens vergeleken Green en Lobb de inbedding met die van een Klein-fles in een vierdimensionale simplectische ruimte. Bestaande resultaten over de Klein-fles leidden vervolgens tot het bewijs van het vermoeden van Toeplitz.

quantamagazine.org

Deze rubriek is een kroniek van wiskundige activiteiten in Nederland. Toekomstige activiteiten worden aangekondigd en van voorbije activiteiten wordt verslag gedaan. Wilt u uw aankondiging of verslag in deze rubriek geplaatst zien? Stuur ons dan uw bijdrage, zo mogelijk met illustratie. De redactie behoudt zich het recht voor berichten te weigeren of in te korten.

Redacteur: Margriet Oomen
 nieuws@nieuwarchief.nl



Illustratie: Wikipedia.org

Willem van Zwet overleden

Op 2 juli is Willem van Zwet op 86-jarige leeftijd overleden. Van Zwet was van 1968 tot zijn pensioen in 1999 hoogleraar statistiek aan het Mathematisch Instituut in Leiden. Van Zwet werkte onder andere aan asymptotische ontwikkelingen en hogere-orde efficiëntie van niet-parametrische statistieken. Behalve een sterke wiskundige was Van Zwet ook een zeer goede bestuurder. Zo was hij onder andere adviseur bij het CWI, mede-oprichter van het Thomas Stieltjes Instituut en Eurandom en initieerde hij de jaarlijkse bijeenkomst van Nederlandse Stochastici in Lunten. Daarnaast was Van Zwet president van het IMS, de Bernoulli Society, en het ISI, de drie grote internationale statistische beroepsorganisaties. Ook onderhield Van Zwet tijdens zijn carrière contacten met wiskundigen aan de andere kant van het ijzeren gordijn. Tijdens zijn leven werd van Zwet overladen met onderscheidingen, waaronder een eredoctoraat van de Charles University in Praag.

universiteitleiden.nl



Foto: CWI

Willem van Zwet

Succesvolle veiling door Wereldwiskunde Fonds

Ondanks de coronacrisis heeft de mei-veiling van het Wereldwiskunde Fonds maar liefst 2491,50 euro opgehaald. Het geld gaat naar projecten voor wiskundeonderwijs in derdewereldlanden. Er zijn echter nog veel mooie boeken en tijdschriften over. Deze kunnen tot 25 september 2020 gekocht worden via de website veiling.wereldwiskundefonds.nl.

wiskundepersdienst.nl

Quantum.Amsterdam

Het CWI, de UvA en QuSoft hebben een innovatie-hub opgericht voor het ontwikkelen van quantumsoftware en toepassingen. In deze hub zullen het CWI, de UvA en QuSoft ook nauw samenwerken met de VU, de Hogeschool van Amsterdam en SURF-sara. Daarnaast zijn onder andere ABN AMRO, Amazon, Atos, Bosch, Capgemini, Deloitte, IBM, ING, ORTEC en Rabobank betrokken bij het onderzoek naar mogelijke quantumapplicaties voor het bedrijfsleven. Quantum.Amsterdam valt binnen het Quantum Delta NL programma, dat als doel heeft de Nederlandse internationaal leidende positie op het gebied van quantumtechnologie verder te versterken.

cwi.nl

Quantum algoritmes TU/e naar finale in NIST-competitie

Twee nieuwe Quantum crypto-algoritmes genaamd Classic McEliece en NTRU, beide ontwikkeld aan de TU/e, behaalden de finale van de NIST-competitie. Deze competitie is opgezet door het Amerikaanse National Institute of Standards and Technology (NIST). Doel van de competitie is het ontwikkelen van veilige versleutelingsalgoritmes voor quantumcomputers. Quantumcomputers zouden de huidige 'klassieke' versleutelingsalgoritmes makkelijk kunnen kraken. Het NIST wil daarom voorbereid zijn op het moment dat quantumcomputers in gebruik genomen gaan worden. De wedstrijd werd al in 2017 uitgeschreven en verwacht wordt dat over twee tot vier jaar de definitieve uitslag komt. Het winnende algoritme zal dan gaan gelden als standaard versleutelingsalgoritme. Naast de finaleplaatsen voor de Classic McEliece en NTRU-algoritmes, riep het NIST de algoritmes NTRU Prime en SPHINCS+, ook beide ontwikkeld door onderzoekers van de TU/e, uit tot veelbelovende alternatieven.

tue.nl

Prijsuitreiking OnderbouwWiskundeDag

De teams van het Lorentz Casimir Lyceum uit Eindhoven, het Emmauscollege uit Rotterdam en het St. Michaëlcollege uit Zaandam hebben in een online/offline bijeenkomst hun prijs voor de OnderbouwWiskundeDag in ontvangst mogen nemen. De teams hebben een dag lang gewerkt aan het opstellen van een plan voor een gemeente die woningen wil bouwen in een nieuwe wijk waarbij met name rekening gehouden moest worden met het zogenaamde 'hitte-eilandeffect'. De wijk moest worden gekoeld met groen, water en schaduw. Het plan moest uiteindelijk in de vorm van een promotiefilmpje worden gepresenteerd. Tijdens de prijsuitreiking waren de leerlingenteams elk samen met hun wiskunde docent op hun eigen middelbare school aanwezig. De juryrapporten, medailles en bekertjes waren vooraf naar de scholen opgestuurd. Zo kon er toch een feestelijke prijsuitreiking plaatsvinden.

uu.nl

Medailles Nederland op de Cyberspace Mathematical Competition

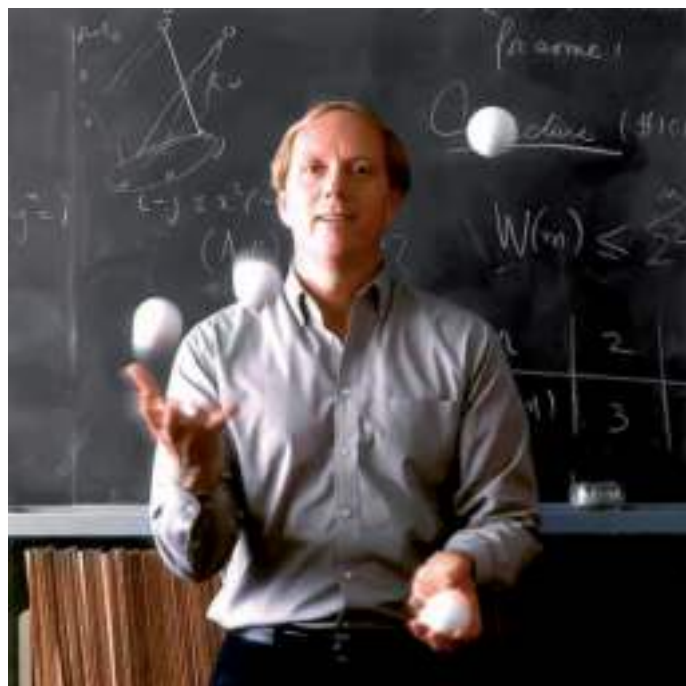
Omdat de Internationale wiskundeolympiade dit jaar door het coronavirus niet door kon gaan, vond op 13-14 juli een online variant plaats, de Cyberspace Mathematical Competition. Iedereen van het Nederlandse team haalde dit jaar een medaille. Jippe Hoogeveen behaalde 48 van de 56 punten; daarmee werd hij gedeeld 14e van de 553 deelnemers, wat goed was voor een gouden medaille. Jesse Fitié en Jovan Gerbscheid behaalden beiden een zilveren medaille en Hanne Snijders, Rafaël Houkes en Tjeerd Morsch behaalden een bronzen medaille.

wiskundeolympiade.nl



Ronald Graham overleden

Op 6 juli is Ronald L. Graham op 86-jarige leeftijd overleden. Graham was emeritus hoogleraar aan de University of California. Graham werkte in het vakgebied van de discrete wiskunde. Hij werkte nauw samen met Paul Erdős. Met zijn Graham-nummer dat nodig was voor een bewijs in de Ramsey-theorie behaalde Ronald Graham voor lange tijd de plaats van grootste getal in een wiskundig bewijs in het Guinness Book of World Records. Graham behaalde zijn doctoraat aan Berkeley en werkte vervolgens voor lange tijd bij Bell Labs. Na een breuk met AT&T werd Graham hoogleraar aan de University of California in San Diego. Tijdens zijn loopbaan was Graham president van de American Mathematical Society (AMS) en de Mathematical Association of America. Behalve wiskundige was Ronald Graham ook een succesvol jongleerder en werd hij in 1972 verkozen tot president van de International Jugglers' Association. Onder veel collega's stond Ronald Graham ook bekend om zijn inspirerende voordrachten vol grappen. *nytimes.com*



Ronald Graham

Best Paper Award voor Daniel Dadush en Samarth Tiwari

Daniel Dadush (CWI) en Samarth Tiwari (CWI) hebben de Best Paper Award op CCC'20, the Computational Complexity Conference gewonnen met hun artikel 'On the Complexity of Branching Proofs.' In het artikel laten ze zien dat certificaties voor de correctheid van zogeheten Tseitin-formules veel korter kunnen dan tot nu toe werd aangenomen. De CCC'20 conferentie vindt dit jaar online plaats, waardoor de presentatie van Samarth Tiwari ook online is terug te kijken. *cwi.nl*

Kleding ontworpen met wiskundige algoritmes

De Amerikaanse wiskundedocente Diarra Bousso Gueye ontwerpt kleding met behulp van wiskundige formules. Gueye maakte als kind altijd kleding voor haar poppen en behield haar hele leven

een voorliefde voor mode. Op een dag na het nakijken van een stapel wiskundetoetsen bedacht ze dat je met algebra mooie geometrische vormen kon maken. Dit resulteerde in haar merk Diarablu, waarvoor ze met behulp van algoritmes kledingmotieven ontwerpt. Zo ontwierp ze met behulp van exponentiële functies een schelpmotief voor haar kleding, het zogeheten Joal-motief. Gueye werd geboren in Senegal en ook dat komt terug in haar kleding. Het schelpenmotief Joal staat bijvoorbeeld ook symbool voor het ecosysteem van Joal Fadiouth een iconische kuststad in Senegal. *edition.cnn.com*

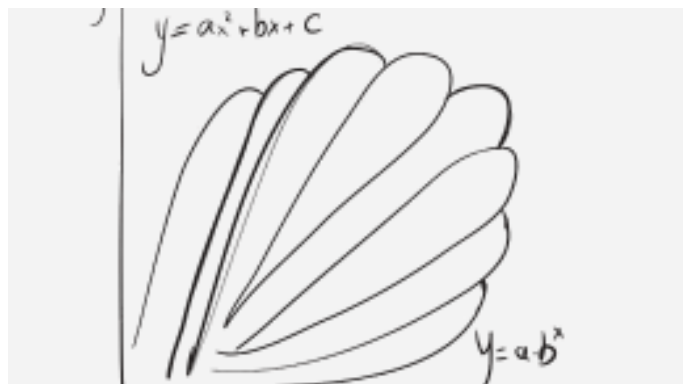


Foto en tekening: cnn.com

Koninklijk Wiskundig Genootschap

❑ Virtuele prijsuitreikingen

De uitreiking van de KWG PhD-prijs en van de Stieltjesprijs konden geen doorgang vinden op het NMC. Het KWG organiseert nu een virtuele bijeenkomst op 6 oktober waarin de prijzen alsnog uitgereikt zullen worden.

❑ Online symposium 'In de geest van Stevin'

Op zaterdag 10 oktober organiseert de werkgroep Geschiedenis van de NVvW ter gelegenheid van het 400ste sterfjaar van Simon Stevin het online symposium 'In de geest van Stevin'.

❑ Ton de Kok nieuwe directeur van CWI

Per 1 oktober wordt Ton de Kok de nieuwe directeur van het CWI. Hij volgt Jos Baeten op die met pensioen gaat. De Kok is momenteel hoogleraar aan de TU Eindhoven.

Paul Drijvers

Freudenthal Instituut
Universiteit Utrecht
p.drijvers@uu.nl

Onderwijs

Gereedschap om wiskunde in de vingers te krijgen

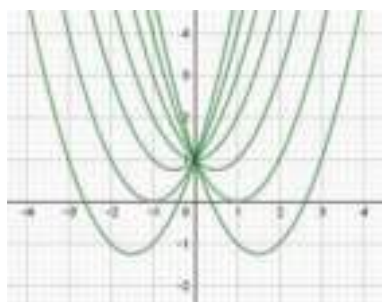
Over het gebruik van ICT-gereedschap in de wiskundeles zijn de meningen verdeeld. In dit themanummer over wiskunde en nieuwe media schetst Paul Drijvers twee theoretische invalshoeken om tegen deze inzet aan te kijken. Instrumentatietheorie beschrijft hoe ICT een instrument wordt voor wiskunde, en de theorie van belichaamde cognitie benadrukt de rol van het lichaam in het leren, ook van wiskunde. Na enkele voorbeelden pleit Paul voor een integratie van de twee, onder de noemer van *belichaamde instrumentatie*, om te bevorderen dat leerlingen wiskunde door de inzet van ICT in de vingers krijgen.

Gereedschap voor wiskunde

Over het gebruik van ICT-gereedschap bij wiskunde en in het wiskundeonderwijs zijn de meningen verdeeld. Aan de ene kant zijn er mensen die zweren bij het krijtbord en bij vaardigheden met pen en papier, want “zo moet je het leren, zo moet je wiskunde in de vingers krijgen”. Bovendien blijken de leereffecten van de inzet van ICT niet zo spectaculair als eerder was gehoopt, waar de meer traditionele methoden al eeuwen beproefd zijn. Aan de andere kant wordt geconstateerd dat de praktijk is veranderd. Ingenieurs gebruiken bijvoorbeeld in hun beroep nauwelijks pen en papier, maar doen de wiskunde die ze nodig hebben met ICT [12]. In lijn hiermee is het gebruik van ICT-gereedschap een belangrijk onderdeel van toekomstig wiskundeonderwijs in de voorstellen van Curriculum.nu [9].

Onmiskenbaar hebben mensen altijd al gereedschap ontwikkeld om fysieke beperkingen te overwinnen en lastige taken handiger uit te voeren. Met een hamer kun je nu eenmaal harder slaan dan met de hand, en bij de beklimming van een rotsachtige

helling beschermen stevige bergschoenen kwetsbare voeten. Ook in de geschiedenis van de wiskunde is een rijkdom aan gereedschap ontstaan, variërend van kleitablet en abacus tot online computeralgebrasysteem, waarin wiskundige algoritmen ‘onder de motorkap’ zitten van eenvoudige commando’s. De vragen die hedendaagse geavanceerde tools oproepen, zijn ten eerste welke wiskunde een leerling nog moet leren als de wiskunde dan zo ‘gealgoritmiseerd’ is, en ten tweede hoe ICT-gereedschap zelf in dit leerproces een nuttige rol kan spelen.



Op deze ‘wat&hoe’-vragen geeft dit artikel geen finale antwoorden. Wel schets ik hieronder twee theoretische invalshoeken om tegen ICT-gebruik in het wiskundeonderwijs aan te kijken, die hierbij vruchtbaar kunnen zijn en elkaar bovendien kunnen versterken. De eerste is instrumentatietheorie, de tweede betreft het idee van belichaamde cognitie, en de combinatie van beide noem ik belichaamde instrumentatie.

Instrumentatietheorie

Laat ik beginnen met een voorbeeld uit [5]. Het betreft leerlingen uit klas vwo-3 die functies van de vorm $f(x) = x^2 + bx + 1$ onderzoeken met de TI-89, een grafische rekenmachine met computeralgebrasysteem (CAS). Het tekenen van een aantal grafieken is goed te doen (zie Figuur 1 links, nu gemaakt met GeoGebra), maar de vervolgvraag om de nulpunten van f met



Figuur 1 Grafieken met GeoGebra (links) en nulpunten met Wolfram Alpha (rechts) van $f(x) = x^2 + bx + 1$.

behulp van het CAS uit te drukken in de parameter b is weerbarstig. Dit lijkt in principe heel eenvoudig met computeralgebra (zie Figuur 1 rechts voor de aanpak met Wolfram Alpha), maar in praktijk liepen de leerlingen tegen heel wat obstakels aan, bijvoorbeeld:

- Ze moeten inzien dat Solve gebruikt kan worden om een variabele uit te drukken in andere variabelen en hier dus leidt naar de oplossing van het probleem. Ze moeten dus de betekenis van oplossen verruimen: het betekent niet alleen een getal vinden, maar ook een variabele isoleren.
- Ze moeten de syntax van het Solve-commando kennen. Sommige leerlingen vergeten bijvoorbeeld de ‘= 0’ aan het einde, omdat ze zich het verschil tussen een expressie en een vergelijking onvoldoende realiseren. Wolfram Alpha zou dit wel accepteren, maar de TI-89 die de leerlingen toen gebruikten niet.
- Ze moeten zich realiseren dat een vergelijking altijd naar een onbekende wordt opgelost en dat je, als er meer kandidaat-onbekenden zijn, moet aangeven welke je kiest.
- Ten slotte moeten ze een algebraïsche uitdrukking als oplossing beschouwen en daar verstandig naar kunnen kijken. Veel leerlingen bleken bijvoorbeeld niet in staat om de oplossing correct, met de goede reikwijdte van het wortelteken, over te schrijven in hun schrift.

Wat leren we van dit voorbeeld? Het toont aan dat geavanceerd gereedschap in handen van een nieuwe gebruiker niet vanzelfsprekend tot succes leidt: die gebruiker moet daarvoor immers over de kennis en vaardigheid beschikken om te herkennen waarvoor je het gereedschap kunt gebruiken bij het gegeven probleem en hoe je dat dan aanpakt. Dit is waar instrumentatietheorie in beeld komt.

Instrumentatietheorie onderscheidt artefact (het ‘ding’, het gereedschap, in dit geval een computeralgebraomgeving zoals de TI-89 of Wolfram Alpha) en instrument [5]. We spreken pas van een instrument als er een betekenisvolle relatie ontstaan is tussen het artefact en de gebruiker voor het uitvoeren van een bepaald type taken. Eenvoudiger gezegd: als de leerling in dit voorbeeld voldoende wiskundige kennis en technische vaardigheid verwerft om te weten dat én hoe het gereedschap

gebruikt kan worden om het wiskundige probleem op te lossen, is sprake van een instrument. Dit leerproces, dat instrumentele genese heet, vindt niet vanzelf plaats. Het omvat het opbouwen van een repertoire aan technieken en zogeheten instrumentatieschema's om het gereedschap voor een bepaald doel te gebruiken. Bij dit type symbolische rekenmachines behelst zo'n repertoire bijvoorbeeld technieken om grafieken goed in beeld te brengen, om snijpunten en nulpunten te benaderen, om vergelijkingen op te lossen, om afgeleide functies te bepalen, et cetera. Wat van cruciaal belang is in instrumentatietheorie, is dat die instrumentatieschema's niet alleen maar technisch van aard zijn, maar ook wiskundige kennis omvatten. Het lijstje van problemen van leerlingen hierboven bevat duidelijk inzichtelijke elementen, zoals het opvatten van oplossen als isoleren en het uitbreiden van het begrip ‘oplossing’ met algebraïsche uitdrukkingen. De technische en de inhoudelijke ontwikkeling gaan dus hand-in-hand en hebben elkaar nodig.

Als het dan zo lastig is, die computeralgebra, waarom zou je deze jonge leerlingen dan daarmee lastigvallen? Behalve dat dergelijke tools nu eenmaal voor iedereen beschikbaar zijn en elke leerling Wolfram Alpha of GeoGebra CAS kan gebruiken, is de belangrijkste reden gelegen in de kansen die het biedt tot leren: natuurlijk lopen de leerlingen in het bovenstaande voorbeeld tegen problemen aan, maar die zijn ook aanleiding om werkelijk over wiskunde na te denken: wat is het verschil tussen een vergelijking en een expressie, wat is oplossen eigenlijk, wat is een oplossing? Door de wisselwerking tussen wiskundige kennis en technische vaardigheid didactisch uit te buiten, kan het gebruik van ICT-tools niet alleen werk uit handen nemen, maar ook het leren bevorderen.

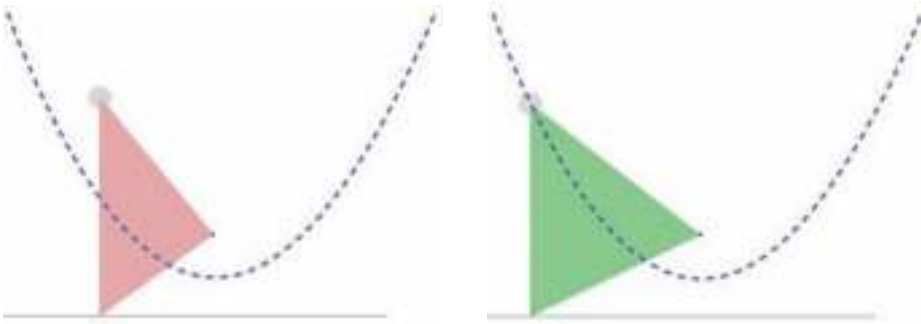
De clou van instrumentatietheorie is dat dit leerproces, deze instrumentele genese, complex is. De waarde van de theorie—die overigens meer omvat dan wat ik hier kort beschrijf—is naar mijn idee dat die het subtiel samenspel tussen wiskundig denken en technische vaardigheid bij het gebruik van wiskundig gereedschap boven tafel haalt. Problemen van leerlingen bij het werken met ICT kunnen vaak in termen van instrumentatietheorie worden begrepen: een mismatch tussen technische aanpak en wiskundig inzicht.

Tegelijkertijd kent instrumentatietheorie ook beperkingen: ze is vooral toegepast in situaties met leerlingen van hoog niveau en met geavanceerde tools, en wiskunde wordt daarbij veelal gezien als een cerebrale activiteit, waarin lichamelijke ervaringen geen rol spelen. De tweede theoretische lens, die van belichaamde cognitie, komt aan deze beperkingen tegemoet.

Belichaamde cognitie

We beginnen weer met een voorbeeld, nogmaals over parabolen. De twee schermen in Figuur 2 tonen een opdracht in het ‘embodied design genre’ [1], ontworpen door Anna Shvarts in de Digitale Wiskunde-Omgeving (zie www.numworx.nl). In het linker scherm zien we een driehoek. Het meest rechtse punt daarvan ligt vast, terwijl het punt linksboven kan bewegen. Het onderste punt van de driehoek is de projectie van het bovenste op een vaste horizontale lijn. Met de vinger kan de leerling het punt linksboven op het touchscreen bewegen. De projectie beneden en de driehoek veranderen dan mee. Daarbij verspringt de kleur: als de driehoek gelijkbenig is vanuit het punt linksboven, is die groen (zie rechter scherm) en anders rood. In wiskundige termen: de driehoek is precies dan groen als het bewegende punt ligt op de gestippelde parabool, bepaald door de horizontale rechte als richtlijn en het vaste punt als brandpunt. Deze parabool is echter niet zichtbaar voor de leerling, maar is hier voor de lezer toegevoegd. De opdracht voor de leerling, die dus niet weet van de onderliggende parabool of de gelijkbenigheid, is om het punt zo te bewegen dat de driehoek groen blijft. Dit is motorisch nog best lastig: om de driehoek gelijkbenig te houden, moet de beweging van je vinger doorlopend gericht zijn op het midden van de overstaande zijde van de driehoek, die zelf meebeweegt. Dit vraagt een goede oog-handcoördinatie. (Probeer het zelf uit op <https://embodieddesign.sites.uu.nl/activity>. Kies onder Functies voor Activity 2.) De analyse van oogbewegingen van leerlingen laat inderdaad sprongen zien tussen het beweegbare punt en het overstaande midden [11]. De vervolgvraag aan de leerling is om de driehoek niet alleen met een vloeiende beweging groen te houden, maar tevens te beschrijven welke onderliggende regel de kleur van de driehoek bepaalt [10].

Wat leert ons dit voorbeeld? Het laat zien dat het met de huidige technologie



Figuur 2 De parabool 'in de vingers' (zie [11] en youtu.be/JHiHfUGtw voor een animatie).

— in dit geval een touchscreen als hardware en de Digitale WiskundeOmgeving als software — mogelijk is om leerlingen op een fysieke manier kennis te laten maken met wiskundige fenomenen. De opgave geeft leerlingen een sensomotorische ervaring met de baan van het punt dat de driehoek 'gelijkbenig moet houden'. Een ervaring die de basis kan vormen voor het paraboolbegrip, dat leerlingen nu al enigszins 'in de vingers krijgen', in de zin van de dynamische coördinatie tussen waarneming met het oog en beweging van de vinger. Dit is waar de theorie van belichaamde cognitie in beeld komt.

Het uitgangspunt in de theorie van belichaamde cognitie is dat cognitie niet wordt beschouwd als iets wat uitsluitend huist in je hoofd en van daaruit de regie voert over het lichaam. Hoofd en lichaam worden niet gezien als dualiteit, maar als een geïntegreerd functioneel systeem. Cognitie staat daarmee niet los van waarnemen en handelen, maar is ingebed in sensomotorische vaardigheden en omvat de cyclische interactie tussen waarneming en handeling [2]. Kennis zit dus ook in de vingers, zogezegd. Zelfs in een abstract vak als wiskunde vinden begrippen en ideeën hun wortels in fysieke waarnemings- en handelingservaringen, in sensomotorische acties die het fundament vormen voor conceptuele me-

taforen [8]. In het voorbeeld hierboven gaat het coördineren van waarneming en beweging dus samen met het leren over gelijkbenige driehoeken als aanloop naar parabolen.

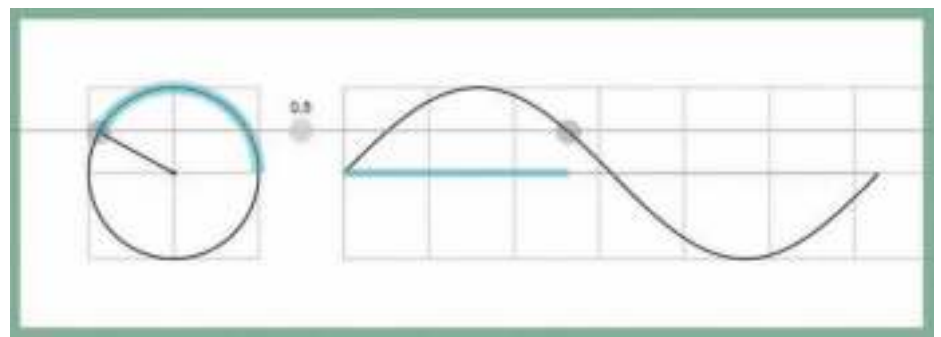
De clou van de theorie van belichaamde cognitie — waar nog veel meer over te zeggen valt dan deze rudimentaire schets — is dat die er ons op wijst dat we in het wiskundeonderwijs de rol van waarneming en motorische activiteit vaak vergeten en verwaarlozen. De vraag die deze theorie ons opdringt, is of we het leren van wiskunde kunnen bevorderen door deze aspecten meer plaats te geven in het onderwijs. En misschien kan ICT-gereedschap daarbij zelfs een helpende hand bieden?

Belichaamde instrumentatie

Als de kracht van instrumentatietheorie is om de wisselwerking te benadrukken tussen de techniek om gereedschap te gebruiken en de daarbij behorende wiskundige inzichten, en als belichaamde cognitie er terecht op wijst dat het sensomotorische activiteiten zijn die tot cognitie leiden, hoe kunnen deze twee elkaar dan aanvullen waar het gaat om ICT-gebruik in de wiskundeles?

Eerst weer een voorbeeld, nu over goniometrie. Figuur 3 toont een opdracht, ontworpen in de Digitale WiskundeOmge-

ving door Rosa Alberto [3,4]. In het linker plaatje ziet u de eenheidscirkel en de grafiek van de sinusfunctie, met op elk een beweegbaar punt. De leerling, die de sinusfunctie nog niet kent, beweegt de twee punten met twee handen op het multi-touchscreen. Net als bij het voorbeeld in Figuur 2 geeft het scherm feedback: als de twee punten met elkaar corresponderen, dus als de sinus van de hoek in de eenheidscirkel gelijk is aan de waarde van de sinus voor het bijbehorende punt op de horizontale as, dan wordt het kader groen en anders is het rood. De vraag aan de leerling is om de twee handen gelijktijdig vloeiend te bewegen over de cirkel en de grafiek zodat het kader groen blijft. Deze activiteit vraagt om een sensomotorische coördinatie om de twee punten op dezelfde hoogte te houden, en geeft de leerling naar verwachting gevoel voor dit samenspel van bewegingen. Net als bij de parabool in Figuur 2 geeft dit aanleiding tot vervolgoefdrachten. Als mogelijk eindpunt, dat aansluit bij de geobserveerde horizontale oogbewegingen van leerlingen, ziet u in het rechter plaatje in Figuur 3 een toegevoegde horizontale lijn, die de leerling omhoog en omlaag kan schuiven om op die manier goniometrische vergelijkingen zoals $\sin(x) = 0,5$ op te lossen in zowel eenheidscirkel als sinusgrafiek. Deze aanpak lijkt veel op de grafische manier om vergelijkingen op te lossen die leerlingen veel toepassen met de grafische rekenmachine. Zo kunnen we dus verband leggen tussen de eerste sensomotorische ervaringen met de sinusgrafiek en de standaard instrumentatieschema's die leerlingen ontwikkelen met de grafische rekenmachine in de tweede fase van havo en vwo. Een schema dat algemeen van toepassing is bij het grafisch oplossen van vergelijkingen van de vorm $f(x) = c$, of zelfs $f(x) = g(x)$, en waarbij het beeld is dat je de snijpun-



Figuur 3 De sinusgrafiek 'in de vingers' (zie [4] en youtu.be/1e0U4XyyHmg voor een animatie).

ten zoekt van de grafieken van het linker- en het rechterlid.

Wat leren we van dit voorbeeld? Het geeft aan dat ICT-gereedschap gebruikt kan worden voor het opdoen van fysieke ervaringen die de basis vormen voor cognitie, in lijn met de theorie van belichaamde cognitie. Vervolgens kunnen die ervaringen ook leiden tot de vorming van schema's en standaardtechnieken die gebruikt kunnen worden voor het oplossen van wiskundige problemen, in lijn met instrumentatietheorie. De samenspraak tussen deze twee perspectieven in leertrajecten, die ik belichaamde instrumentatie noem, lijkt me een vruchtbare benadering van de inzet van ICT in wiskundeonderwijs: enerzijds dragen ICT-tools bij aan embodied ervaringen als basis voor cognitie, en anderzijds ontstaan standaardtechnieken en schema's voor het oplossen van wiskundige problemen [6]. Belichaamde instrumentatie benadrukt het instrumentele karakter van sensomotorische ervaringen en de lichamelijke basis van instrumentatieschema's. Deze schema's zitten dan niet zozeer in het hoofd, maar omvatten ook sensomotorische interacties, en zitten dus ook 'in de vingers'. Daarmee richt belichaamde instrumentatie zich dus op de simultane ontwikkeling van sensomotorische ervaringen, technieken om tools te gebruiken en wiskundige cognitie. De kunst is dan om lijnen van leeractiviteiten te ontwerpen waarin zowel de fysieke

wortels van cognitie en de noodzaak van instrumentele genese op een natuurlijke manier aan bod komen, bijvoorbeeld door dat de ontwikkeling van sensomotorische schema's hand in hand gaat met instrumentele genese.

Het zijn niet alleen nieuwe inzichten in cognitie die tot deze benadering hebben geleid, het gaat ook om technologische ontwikkelingen. Dankzij de beschikbaarheid van multi-touchschermen, bewegings-sensoren, en devices voor augmented en virtual reality is het ook technisch veel beter mogelijk om aandacht te besteden aan de fysieke wortels van cognitie. Zo hebben Duijzer en collega's leerlingen van basisschoolleeftijd ervaring laten opdoen met het 'lopen van grafieken': leerlingen werd gevraagd met behulp van een bewegingssensor een gegeven tijd-afstandgrafiek na te maken, waarbij de eigen loopbewegingen direct op het scherm gevisualiseerd werden als de gerealiseerde tijd-afstandgrafiek. Gedurende dergelijke activiteiten wordt het functiebegrip — afstand als functie van tijd — aan den lijve ondervonden [7].

Tot slot

Ik vroeg me aan het begin van dit artikel af welke wiskunde een leerling nog moet leren als de wiskunde zo 'gealgoritmiseerd' is, en hoe ICT-gereedschap zelf in dat leerproces een nuttige rol kan spelen. Ik denk

dat de benadering van *belichaamde instrumentatie* met name bij de tweede vraag van pas kan komen.

Het idee van belichaamde cognitie benadrukt dat cognitie geworteld is in sensomotorische ervaringen. Dat dreigen we nog wel eens te vergeten in het wiskundeonderwijs, en nieuwe ontwikkelingen in ICT-gereedschap maken dat deze benadering meer binnen handbereik komt. Hoe deze ervaringen leiden tot bruikbare conventionele kennis van wiskunde, is nog onvoldoende duidelijk. Daarbij zou instrumentatietheorie kunnen helpen. Instrumentatietheorie benadrukt de verwevenheid van het gebruik van gereedschap en de wiskundige kennis die daarbij komt kijken, maar besteedt geen aandacht aan de lichamelijke basis. De twee kunnen elkaar dus aanvullen.

Hoewel het een uitdaging is om leerlingactiviteiten te ontwikkelen waarin belichaamde instrumentatie op een natuurlijke manier plaatsvindt, is dit naar mijn idee een veelbelovende benadering die richting kan geven aan het ontwerp van ICT-rijk wiskundeonderwijs. ICT neemt dan niet alleen wiskundewerk uit handen, maar kan, net zoals pen-en-papier en krijtbord, helpen om wiskunde werkelijk 'in de vingers' te krijgen. ☛

Noot

Dit artikel is een vrije bewerking van [6].

Referenties

- 1 D. Abrahamson, Building educational activities for understanding: An elaboration on the embodied-design framework and its epistemic grounds, *International Journal of Child-Computer Interaction* 2(1) (2014), 1–16.
- 2 D. Abrahamson en R. Sánchez-García, Learning is moving in new ways: the ecological dynamics of mathematics education, *The Journal of the Learning Sciences* 25 (2016), 203–239.
- 3 R. Alberto en R. Bos, Het Flzier gericht op ... embodied cognition in het wiskundeonderwijs, *Euclides* 95(5) (2020), 4–6.
- 4 R. Alberto, A. Bakker, O. Walker-van Aalst, P. Boon en P. Drijvers, Networking theories with design research: An Embodied Instrumentation case study in trigonometry, in U. T. Jankvist, M. van den Heuvel-Panhuizen en M. Veldhuis (eds.), *Proceedings of the Eleventh Congress of the European Society for Research in Mathematics Education*, Freudenthal Group & Freudenthal Institute, Utrecht University and ERME (2019), pp. 3088–3095.
- 5 P. Drijvers, Instrument, orkest en dirigent: een theoretisch kader voor ICT-gebruik in het wiskundeonderwijs, *Pedagogische Studiën* 84(5) (2007), 358–374.
- 6 P. Drijvers, Embodied instrumentation: combining different views on using digital technology in mathematics education. In U. T. Jankvist, M. van den Heuvel-Panhuizen en M. Veldhuis (eds.), *Proceedings of the Eleventh Congress of the European Society for Research in Mathematics Education*, Freudenthal Group & Freudenthal Institute, Utrecht University and ERME (2019), pp. 8–28.
- 7 A.C.G. Duijzer, M. Van den Heuvel-Panhuizen, M. Veldhuis en L.M. Doorman, Greep op grafieken, in Marc Van Zanten (red.), *Rekenen-wiskunde in de 21e eeuw — Ideeën en achtergronden voor primair onderwijs — Jubileumbundel ter gelegenheid van het 35-jarig bestaan van Panama*, Panama – NVORWO – Universiteit Utrecht – SLO (2017) pp. 53–58.
- 8 G. Lakoff en R. Núñez, *Where Mathematics Comes From.*, Basic Books, 2000.
- 9 M. Müller, Op weg naar een nieuw curriculum, *Nieuw Archief voor Wiskunde* 5/21(2) (2020), 129–133.
- 10 A. Shvarts, A dual eye-tracking study of objectification as student-tutor joint activity appropriation, in E. Bergqvist, M. Österholm, C. Granberg en L. Sumpter (eds.), *Proceedings of the 42nd Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education*, Vol. 4, PME (2018), pp. 171–178.
- 11 A. Shvarts en D. Abrahamson, Dual-eye-tracking Vygotsky: A microgenetic account of a teaching/learning collaboration in an embodied-interaction technological tutorial for mathematics, *Learning, Culture and Social Interaction* 22 (2019), 100316.
- 12 N.J. Van der Wal, A. Bakker en P. Drijvers, Which Techno-Mathematical Literacies are Essential for Future Engineers? *International Journal of Science and Mathematics Education* 15 (2017), 87–104.

Lotte Weedage

Student masteropleiding Educatie en Communicatie
in de Bètawetenschappen, Universiteit Twente
l.weedage@utwente.nl

Mark Timmer

Twents Carmel College, Oldenzaal, en
ELAN, Vakgroep Docentontwikkeling, Universiteit Twente
m.timmer@utwente.nl

Onderwijs Het verschil tussen twee lesmethoden op het gebied van algebra

Bettermarks versus Moderne Wiskunde

Lotte Weedage deed in het kader van haar masteropleiding Educatie en Communicatie in de Bètawetenschappen aan de Universiteit Twente onderzoek naar de verschillen tussen twee lesmethoden: *Bettermarks* (digitaal) en *Moderne Wiskunde* (boek/schrift). Aanleiding van dit onderzoek was een enkele jaren geleden opgestarte pilot met een laptopklas op de school waar ze stage liep als wiskundedocent. De wiskundesectie had deze kans gegrepen om digitaal te gaan lesgeven met *Bettermarks*, en was benieuwd naar de effecten hiervan op de ervaringen en prestaties van leerlingen. In dit artikel doet ze samen met haar afstudeerbegeleider Mark Timmer verslag van de bevindingen.

Digitalisering in het onderwijs is tegenwoordig niet meer weg te denken. Veel scholen hebben laptop- of iPadklassen, waarbij de leerlingen hun lesmateriaal voornamelijk digitaal aangeboden krijgen. Naast financiële voordelen en praktische voordelen zoals een lichte rugzak, geeft digitaal onderwijs ook didactische mogelijkheden zoals het gebruik van interactieve applicaties, visualisaties en automatische controle van berekeningen. Praktische moeilijkheden zoals het invoeren van wortels en breuken, de neiging om minder met genoteerde tussenstappen te werken en de noodzaak om meer te focussen op berekenen dan bewijzen, zorgen echter nog voor wat terughoudendheid. Uit onderzoek blijkt dan ook dat een totale digitalisering samenhangt met slechtere leerprestaties en dat de mate van computergebruik in de wiskundeles negatief correleert met de prestaties op zowel papieren als digitale toetsen [4]. Of daar ook sprake is van een causaal verband valt nog te bezien.

Uit onderzoek blijkt dat in 2017 nog slechts 10 procent van de docenten reke-

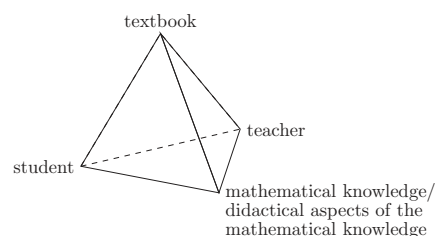
nen en wiskunde in het voortgezet onderwijs uitsluitend gebruikmaakt van papieren leermiddelen, en dat dus maar liefst 90 procent in enige mate gebruikmaakt van digitaal lesmateriaal [11]. Het aantal docenten waarbij digitaal lesmateriaal minstens de helft van de tijd gebruikt wordt is echter nog beperkt: iets minder dan 20 procent. Echter, de laatste jaren hebben verscheidene wiskundemethodes zich gestort op digitalisering van hun lesmateriaal. In de meeste gevallen, zoals bij de veelgebruikte methodes *Getal & Ruimte* en *Moderne Wiskunde*, betreft dat blended learning: digitaal materiaal als aanvulling op het traditionele papieren lesboek [1]. Ook volledig digitale lesmethoden komen voor.

Interessante aspecten van digitaal lesmateriaal zijn directe feedback (waarbij antwoorden automatisch worden nagekeken en er indien nodig wordt verwezen naar relevante theorie) en adaptiviteit (waarbij leerlingen meer of minder opgaven krijgen op basis van hun prestaties). Een relevante vraag is in hoeverre dergelijke eigenschappen door leerlingen en

docenten als positief of negatief worden ervaren, en in welke mate ze effect hebben op de leerprestaties.

De situatie zoals die zich voordeed op de stageschool van Lotte was ideaal om dit te onderzoeken. Ten tijde van het onderzoek zaten de leerlingen van de pilotklas in vwo 4. Zij hadden in de tweede en derde klas onderwijs gekregen met behulp van de lesmethode *Bettermarks*, een volledig digitale methode voor het vmbo en de onderbouw van havo/vwo die momenteel op zo'n negentig scholen gebruikt wordt. Leerlingen lezen bij deze methode de theorie en maken de opgaven op hun laptop of iPad, en hun werk wordt automatisch gecontroleerd. Met goede resultaten zijn muntjes te verdienen, wat leerlingen wellicht motiveert om hard te werken. Door middel van individuele ontwikkelpunten op basis van een hiënanalyse krijgen ze hun eigen individuele leerproces voorgeschied, waar docenten bovendien ook nog eens makkelijk zicht op kunnen houden.

In diezelfde jaarlaag vwo 4 zaten ook leerlingen die in de onderbouw niet in de pilotklas zaten en wiskundeonderwijs hebben gekregen met behulp van de papieren editie van *Moderne Wiskunde*. Dit gaf de mogelijkheid om te onderzoeken in welke mate er verschil in capaciteiten is tussen deze twee groepen. In de vierde klas kregen alle leerlingen les uit *Moderne Wiskunde*. Dat maakte het bovendien mogelijk om



Figuur 1 Model van Resat [6] voor gebruik lesmethode.

de pilotklasleerlingen te ondervragen over hun bevindingen betreffende het werken met beide methodes. We hebben ons hierbij grotendeels beperkt tot het onderwerp algebra, om de omvang van het onderzoek binnen de perken te houden. Er is voor algebra gekozen vanwege de veronderstelling dat de potentiële voordelen van een digitale methode bij dit onderwerp het meest uit de verf komen.

Het verschil tussen beide lesmethodes is bekeken vanuit drie verschillende pijlers: de lesmethodes zelf, de ervaringen van de gebruikers en de resulterende algebraïsche vaardigheden. Deze drie pijlers zijn gebaseerd op het utilization scheme van Resat [6], waarmee hij uitlegt hoe een lesmethode gebruikt wordt en welke aspecten daarbij belangrijk zijn. Hiervoor heeft hij Vygotsky's model voor actief leren [10] uitgebreid naar een piramide waarin te zien is welke aspecten allemaal met elkaar verband houden. Zie Figuur 1.

Voor een volledig overzicht van het verschil tussen twee lesmethodes is het dus belangrijk te kijken naar alle aspecten rondom deze lesmethodes: hoe zit het met de didactiek in de lesmethode, hoe ervaren gebruikers (leerlingen en docenten) de lesmethode, hoe wordt de lesmethode ingezet door de gebruikers en wat leren de leerlingen van de lesmethode?

We bespreken achtereenvolgens de resultaten van de drie pijlers en trekken daarna een overkoepelende conclusie. De school waarin het onderzoek is uitgevoerd heeft geen gebruik gemaakt van de digitale componenten van Moderne Wiskunde, dus de vergelijking gaat tussen het gebruik van Bettermarks en het gebruik van de papieren editie exclusief digitale componenten van Moderne Wiskunde. Als de digitale omgeving van Moderne Wiskunde ook gebruikt zou zijn, dan hadden de resultaten vanzelfsprekend anders kunnen hebben uitgepakt. Ook is het belangrijk om te realiseren dat de leerprestaties alleen op het gebied van algebra zijn onderzocht; het is

natuurlijk nog de vraag of dat te generaliseren is naar het hele curriculum.

Pijler 1: Algebra didactiek

De didactiek van de algebrahoofdstukken in de onderbouw van Bettermarks en Moderne Wiskunde is geanalyseerd op basis van verscheidene theoretische richtlijnen [5,9]. De meest interessante verschillen bleken te liggen in de typen opgaven en de wijze waarop de theorie wordt uitgelegd.

Opgaven

Er is een kwantitatieve analyse uitgevoerd, waarbij alle 2661 algebraopgaven in Bettermarks en 2107 algebraopgaven in Moderne Wiskunde zijn gecategoriseerd (zie Tabel 1). Er is gekeken naar de mate waarin toepassingen aan bod komen (niet, fictief of authentiek), naar de vorm van de opgaven en naar hun niveau. Mocht de vorm van een opgave in meerdere categorieën vallen (zoals een meerkeuzeopgave waarbij afgelezen moet worden), dan is deze gescoord in de categorie die in de tabel het hoogst staat weergegeven. Voor de inschaling van het niveau zijn de drie niveaus van de toetspiramide van De Lange [3] gehanteerd. Doordat de analyse slechts door één persoon is gedaan zit er enige subjectiviteit in deze resultaten; vooral het niveau was soms lastig in te schalen.

Opvallend is dat Moderne Wiskunde aanzienlijk meer relaties met de praktijk legt; zowel het aantal verhaaltjessommen

als het aantal (meestal niet volledig realistische) toepassingen is beduidend hoger. Bettermarks bevat daarentegen vooral opgaven waar leerlingen puur wiskundig aan de slag moeten.

Het feit dat alles wat leerlingen in Bettermarks doen automatisch wordt nagekeken, heeft vanzelfsprekend gevolgen voor het type opgaven dat gebruikt kan worden. Zo wordt er regelmatig gebruikgemaakt van meerkeuzeopgaven en schuifopgaven (waarbij de leerling bijvoorbeeld verschillende wiskundige expressies naar de juiste plek in een berekening moet schuiven). Daarentegen hoeft de leerling bij Bettermarks geen enkele keer iets te bewijzen of uit te leggen, iets wat in Moderne Wiskunde wel regelmatig aan bod komt.

Het niveau generaliseren komt dus logischerwijs minder aan bod bij Bettermarks dan bij Moderne Wiskunde. Opvallend is wel dat Bettermarks relatief meer opgaven van het niveau wiskundig gereedschap kiezen bevat. Dit is te verklaren doordat de stof bij Bettermarks vaak al redelijk snel in moeilijkheid toeneemt, terwijl Moderne Wiskunde over het algemeen meer eenvoudige opgaven bevat alvorens een paragraaf wordt afgesloten met slechts één (deel)vraag waarbij leerlingen hun kennis moeten toepassen op niveau 2 of 3 van de toetspiramide.

Theorie-uitleg

Een kwalitatieve analyse van de theorieblokken van beide lesmethoden heeft

		Bettermarks	Moderne Wiskunde
Toep.	Authentiek	0,0%	0,6%
	Fictief	4,8%	22,0%
	Geen	95,2%	77,4%
Vorm	Bewijs/leg uit	0,0%	8,9%
	Fouten verbeteren	0,8%	0,8%
	Schuifopgave	12,6%	0,0%
	Meerkeuze	9,5%	0,4%
	Aflezen	0,8%	1,9%
	Tekenen	0,9%	4,2%
	Verhaaltjessom	2,1%	5,9%
	Bereken	73,3%	77,7%
Niveau	Reproducen	80,0%	86,0%
	Wiskundig gereedschap kiezen	18,9%	10,1%
	Generaliseren	1,1%	3,8%

Tabel 1 Verdeling van de geanalyseerde opgaven in beide lesmethodes.

inzicht gegeven in de wijze waarop de uitleg van elkaar verschilt. We hebben geconcludeerd dat Moderne Wiskunde meer aanstuurt op relationeel begrip [7], waarbij leerlingen ook daadwerkelijk snappen wat ze aan het doen zijn en waarom. In Bettermarks wordt meer voorgekauwd en wordt aan leerlingen vaak vooraf getoond hoe ze bepaalde opgaven precies moeten oplossen, wat naar verwachting meer tot instrumenteel begrip zal leiden.

Bij het oplossen van vergelijkingen wordt in Bettermarks daarentegen wel soms geopperd om eerst maar eens gewoon wat te proberen om leerlingen zo meer gevoel te geven voor het feit dat we toewerken naar een waarde die voldoet aan de gegeven vergelijking; dat kan heel nuttig zijn om leerlingen meer inzicht te geven. In Moderne Wiskunde komt dit in mindere mate aan bod.

Een ander opvallend verschil is dat de uitleg in Bettermarks veel kleur en illustraties bevat, en vaak behoorlijk uitgebreid is. Bij Moderne Wiskunde is de uitleg veel meer rechttoe rechtaan en krijgen leerlingen alleen het hoognodige te zien, en zal dus regelmatig nog aanvullende uitleg van de docent nodig zijn.

Pijler 2: Ervaringen

Voor het in kaart brengen hoe docenten en leerlingen de twee lesmethodes ervaren en gebruiken, zijn interviews met twee docenten en zes leerlingen gehouden en is een enquête afgenomen. Vijf van de geïnterviewde leerlingen zaten in de pilotgroep en hadden dus ervaring met zowel Bettermarks als Moderne Wiskunde, en één van hen had alleen les gehad via Moderne Wiskunde. De enquête is ingevuld door 20 leerlingen uit de pilotgroep en 39 andere leerlingen.

Uit de interviews bleek dat leerlingen over het algemeen beter en efficiënter denken te werken met Bettermarks dan met Moderne Wiskunde. Dit komt voornamelijk door de directe feedback in Bettermarks als ze opgaven niet snappen, het competitieaspect van de muntjes voor correcte antwoorden en het feit dat opdrachten één voor één te zien zijn (en leerlingen dus niet overweldigd worden door een pagina vol met sommen). Het eerste aspect is ook terug te zien in de enquête: 95 procent van de leerlingen die Bettermarks hebben gebruikt vond het fijn om meteen te zien of ze een opgave goed hebben gemaakt. Docenten

gaven wel aan de voorbereiding van hun lessen lastiger te vinden bij Bettermarks, aangezien ze niet even een boek kunnen openslaan om te zien wat er aan bod gaat komen. Daarentegen waren ze wel erg te spreken over de mogelijkheid om eenvoudig opgaven van leerlingen te controleren.

De geïnterviewde leerlingen vonden de opgaven in Bettermarks prettiger en duidelijker. Bovendien hadden ze het gevoel in grotere mate ook het idee achter wiskundige concepten aangeleerd te krijgen (relationeel begrip), terwijl hen in Moderne Wiskunde meer 'trucjes' worden aangeleerd. Dit was een verrassende uitkomst, aangezien onze kwalitatieve analyse juist aangaf dat Moderne Wiskunde meer op relationeel begrip focust. Een mogelijke verklaring is dat de formulering in Bettermarks wat wiskundiger van aard is, waardoor de inhoud wellicht door leerlingen ook wat wiskundiger wordt ervaren. In de enquête is dit verschil minder te zien; leerlingen hadden bij beide lesmethodes gemengde gevoelens over de theorieblokken en waren niet opvallend positiever over de een of de ander. De enquête laat verder nog zien dat leerlingen het aantal opgaven en het niveau van de opgaven in Bettermarks fijner vonden dan in Moderne Wiskunde. Uit de interviews bleek bovendien dat leerlingen over het algemeen minder tijd kwijt zijn aan de

opgaven van Bettermarks dan van Moderne Wiskunde. Zowel docenten als leerlingen merkten wel op dat Bettermarks soms om wat onlogische tussenstappen vraagt.

Alhoewel in de interviews bij de leerlingen een duidelijke voorkeur voor Bettermarks naar voren kwam, was dit in de enquête minder nadrukkelijk zichtbaar. Van de twintig leerlingen vonden twee leerlingen de methodes vergelijkbaar, gaven dertien leerlingen Bettermarks een hoger cijfer en gaven vijf leerlingen Moderne Wiskunde een hoger cijfer. Het verschil in de gemiddelde cijfers was echter niet significant genoeg om te kunnen concluderen dat leerlingen Bettermarks hoger beoordelen dan Moderne Wiskunde.

Pijler 3: Algebratoets

Er is een algebratoets opgesteld en afgenomen in 4 vwo om te kijken of leerlingen die in de onderbouw Bettermarks en leerlingen die in de onderbouw Moderne Wiskunde hebben gehad van elkaar verschillen op het gebied van algebravaardigheden. De vragen in deze toets zijn een selectie van vragen die eerder zijn gesteld aan middelbare scholieren in een onderzoek van Van Stiphout e.a. [8], aangevuld met enkele zelfbedachte vragen op hetzelfde niveau om zo alle aspecten van algebra te testen. De laatste vraag in de toets is een

Opgave 1

Los exact op: $(3a^2 + 4a - 5)(a + 7) = 0$.

Opgave 2

Schrijf zo kort mogelijk: $\frac{x^2+2x+1}{x^2-1}$.

Opgave 3

Los op: $(x - 5)(x - 7) = 3$

Opgave 4

Geef de coördinaten van het snijpunt van de lijnen l en m :

$$l : 3x - y = 6$$

$$m : 8x + 4y = 12$$

Opgave 5

Los op: $3x + 6 < -2x + 16$.

Opgave 6

Schrijf als n breuk: $\frac{a}{b+1} + \frac{3}{a}$.

Opgave 7

Los op: $\frac{2x+1}{4x+3} = 2$.

Opgave 8

Je kent de wiskundige operaties optellen, aftrekken, vermenigvuldigen en delen. We introduceren nu een nieuwe wiskundige operatie: $\oplus$, en $a \oplus b$ is gelijk aan $a^2 - a \cdot b$. Is $a \oplus b = b \oplus a$ waar voor alle getallen a en b ? Laat zien met een berekening of tegenvoorbeeld.

Figuur 2 Algebratoets die is afgenomen in 4 vwo.

		Aantal leerlingen	1	2	3	4	5	6	7	8	Gemiddelde score
MW	Wiskunde A	30	0,23	0	0,53	0,62	0,33	0,10	0,20	0,67	2,68
	Wiskunde B	20	1,25	0	1,95	1,20	0,70	0,15	1,10	0,75	7,10
	Totaal	50	0,64	0	1,10	0,85	0,48	0,12	0,56	0,70	4,45
BM	Wiskunde A	12	0,33	0	0,92	0,96	0,63	0,58	0,67	0,83	4,92
	Wiskunde B	12	1,17	0,08	1,83	1,58	1	0,88	1,67	1,08	9,29
	Totaal	24	0,75	0,04	1,38	1,27	0,81	0,73	1,17	0,96	7,10

Tabel 2 Resultaten van de algebratoets, uitgesplitst voor wiskunde A en B.

wiskundige denkactiviteit (WDA, [2]) om zo te bekijken hoe leerlingen een dergelijke opgave aanpakken en of dit verschilt tussen Bettermarks en Moderne Wiskunde. De toets is weergegeven in Figuur 2.

De toets bevatte acht vragen en er waren in totaal veertien punten te behalen. In Tabel 2 zijn de resultaten te zien, voor het gemak bovendien gevisualiseerd in Figuur 3. De resultaten zijn uitgesplitst op basis van de methode die leerlingen in de onderbouw hebben gehad en de vorm van wiskunde die ze op dit moment volgen (A of B).

Opvallend is dat de leerlingen die Bettermarks hebben gehad over de hele linie beter scoren, inclusief op de WDA. De resultaten zijn verwerkt in SPSS en na uitvoering van een *t*-toets bleken de twee groepen inderdaad significant van elkaar te verschillen ($p = 0,005$). Omdat de verhouding tussen wiskunde A en B in de twee groepen afwijkt, is ook gekeken naar de verschillen tussen Bettermarks en Moderne Wiskunde van respectievelijk wiskunde A- en wiskunde B-leerlingen. Dit verschil bleek bij wiskunde A niet significant ($p = 0,060$) en bij wiskunde B wel ($p = 0,005$).

Of de verschillen daadwerkelijk (volledig) aan het verschil in lesmethode toe te schrijven zijn, is natuurlijk maar de vraag — wellicht dat verschillen in docent (ook) een rol hebben gespeeld. Het is daarom wellicht te voorbarig om op basis van deze resultaten generieke conclusies te trekken, hoewel ze wel aanleiding geven tot vervolgonderzoek.

Conclusie

Het verschil tussen de twee lesmethodes lijkt vooral te liggen in de manier waarop ze leerlingen benaderen. Moderne Wiskunde bevat minder uitleg en is wat minder wiskundig in formuleringen, maar laat leerlingen meer bewijzen en generaliseren en lijkt daardoor meer op relationeel begrip aan te sturen. Bettermarks daarentegen bevat uitgebreide theorieblokken en is formeler in notatie, maar laat leerlingen juist vrijwel nooit bewijzen of generaliseren.

Een belangrijk aspect van Bettermarks is het spelelement: leerlingen kunnen muntjes behalen door opdrachten te maken. Dit bevalt leerlingen en hierdoor vinden ze het misschien leuker om wiskun-

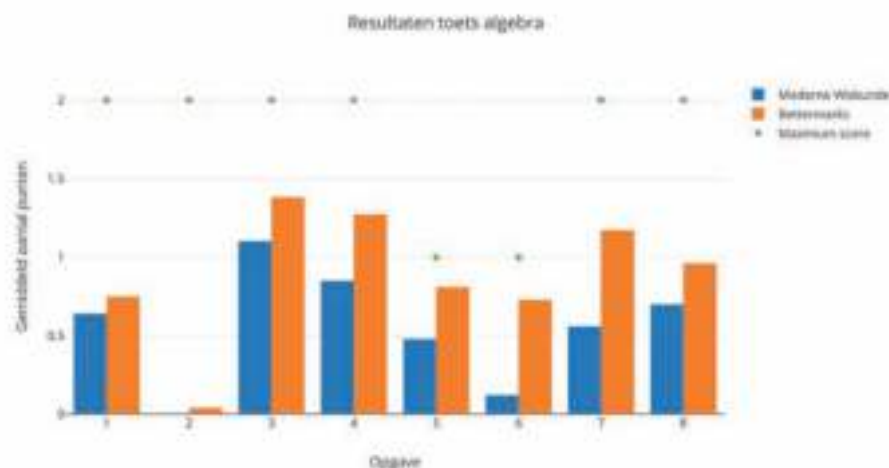
desommen te maken. De mate waarin de ‘hidden cost of reward’ een rol speelt — een bekend feit dat extrinsieke motivatie een negatief effect kan hebben op intrinsieke motivatie in de toekomst — is een interessante vraag voor vervolgonderzoek. Omdat leerlingen het prettiger lijken te vinden om in Bettermarks te werken en veel leerlingen hier ook minder tijd aan kwijt zeggen te zijn dan aan andere vakken (terwijl Bettermarks wel veel opgaven bevat), is het goed mogelijk dat leerlingen digitaal efficiënter en meer oefenen.

Een belangrijk aspect van Moderne Wiskunde is dat de sommen vaak worden ingepakt in verhaaltjes, met makkelijke taal en veel plaatjes, en meer gekoppeld aan toepassingen, om zo tot de leefwereld van de leerlingen door te dringen. Leerlingen begrijpen dit misschien wat makkelijker, maar of ze het er leuker van gaan vinden blijft de vraag. Wat daarnaast is opgevallen bij de interviews is dat leerlingen het juist ook wel fijn vinden als er op een wiskundigere manier wordt uitgelegd, zoals meer in Bettermarks wordt gedaan.

Kortom, de twee onderzochte lesmethoden verschillen aanzienlijk in aanpak, en de kwantitatieve resultaten lijken voorzichtig te impliceren dat leerlingen met Bettermarks meer algebraïsche vaardigheden hebben opgedaan. Dit is een interessante uitkomst, gezien de eerdergenoemde tegenvallende resultaten op dit vlak [4]. De potentiële invloed van variabelen die niet in dit onderzoek zijn meegenomen (zoals de digitale aanvullingen van Moderne Wiskunde, de effecten op andere onderwerpen binnen de wiskunde en de invloed van de docent) vragen vanzelfsprekend om aanvullend onderzoek om harde conclusies te kunnen trekken.

Noot

Zie <https://essay.utwente.nl/80631> voor het complete onderzoeksverslag.



Figuur 3 Gemiddelde en maximum score per opgave.

Referenties

- 1 P. Eshuis, R. Houtenbos en J. Boertjens, Digitalisering van wiskunde in het voortgezet onderwijs, *Nieuw Archief voor Wiskunde* 5/17(1) (2016), 10–14.
- 2 R.H. Kaenders, R. van Asselt, F. Beukers, J. Blankespoor, H. Broer, P. Drijvers, S. Garst, C. van de Giessen, W. Kleijne, M. Kollenveld, M.A. Peletier, D. Siersma, A. van Streun en C. Zaal, *Rijk aan betekenis—Visie op vernieuwd Wiskundeonderwijs*, 2007.
- 3 J. de Lange, *Framework for classroom assessment in mathematics*, Freudenthal Institute and National Center for Improving Student Learning and Achievement in Mathematics and Science, Utrecht, 1999.
- 4 OECD *Students, Computers and Learning: Making the Connection*, PISA, OECD Publishing, Parijs, 2015.
- 5 F. Pingel, *UNESCO Guidebook on Textbook Research and Textbook Revision*, 2010, 2nd revision. Verkregen van www.gei.de.
- 6 S. Rezat, A model of textbook use, in *Proceedings of the 30th Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education*, Vol. 4, 2006, pp. 409–416.
- 7 R.R. Skemp, Relational understanding and instrumental understanding, *Mathematics Teaching* 77(1) (1976), 20–26.
- 8 I. van Stiphout, P.H.M. Drijvers en K.P.E. Gravemeijer, The development of students' algebraic proficiency, *Mathematics Education* 8(2–3) (2013), 62–80.
- 9 G.A. Valverde, L.J. Bianchi, R.G. Wolfe, W.H. Schmidt en R.T. Houang, *According to the Book: Using TIMSS to Investigate the Translation of Policy into Practice Through the World of Textbooks*, Springer Science & Business Media, 2002.
- 10 L.S. Vygotsky, *Mind in Society: The Development of Higher Psychological Processes*, Harvard university Press, 1980.
- 11 E. Woldhuis, M. Rodenboog en M. Heijnen, *Leermiddelenmonitor—Leermiddelen in het po en vo: gebruik, digitalisering, beschikbaarheid en beleid* (Rapport), SLO, Enschede 2018.

Bettermarks — Van je fouten leer je het meest!

Ik weet nog goed dat ik begin maart gevraagd werd om een artikel te schrijven over onze methode als bijdrage aan het thema 'ICT in het wiskundeonderwijs'. Op dat moment hadden we niet verwacht dat een aantal weken later ICT in het (wiskunde)onderwijs zo belangrijk werd. Om docenten een helpende hand te bieden bij het lesgeven op afstand, besloten wij gratis licenties te verstrekken tot en met de zomervakantie.

Inmiddels zijn er een aantal maanden verstreken. Maanden waarin het aantal gebruikers van Bettermarks meer dan verdubbeld is mede door corona en het daaropvolgende onderwijs op afstand. Waar docenten eerst nog tamelijk sceptisch leken over een digitale methode, lijken ze nu steeds vaker de voordelen te zien. Bettermarks biedt een doorlopende leerlijn aan voor de onderbouw vmbo/havo/vwo en de bovenbouw vmbo. De methode vervangt de huidige methode en is inzetbaar voor iedere school en iedere leerling die beschikt over een eigen device.

Bettermarks kent haar oorsprong in Berlijn, waar het bedrijf in 2008 is opgericht. De oprichters hebben uitgebreid nagedacht via welke wijze zij digitale mogelijkheden konden combineren om een adaptief platform te ontwikkelen. Jaren zijn ze bezig geweest om het vak wiskunde in tussendoelen op te splitsen en een database op te bouwen met honderdduizenden opgaven gekoppeld aan deze leerdoelen (zie Figuur 4). Het moederbedrijf werkt samen met lokale partners in verscheidene landen, die de methode aanpassen voor het curriculum van hun land om deze vervolgens uit te zetten bij lokale scholen. We zijn in Nederland actief sinds 2014 en hebben het materiaal dat aanwezig was aangevuld en aangepast op de Nederlandse kerndoelen en eindtermen.

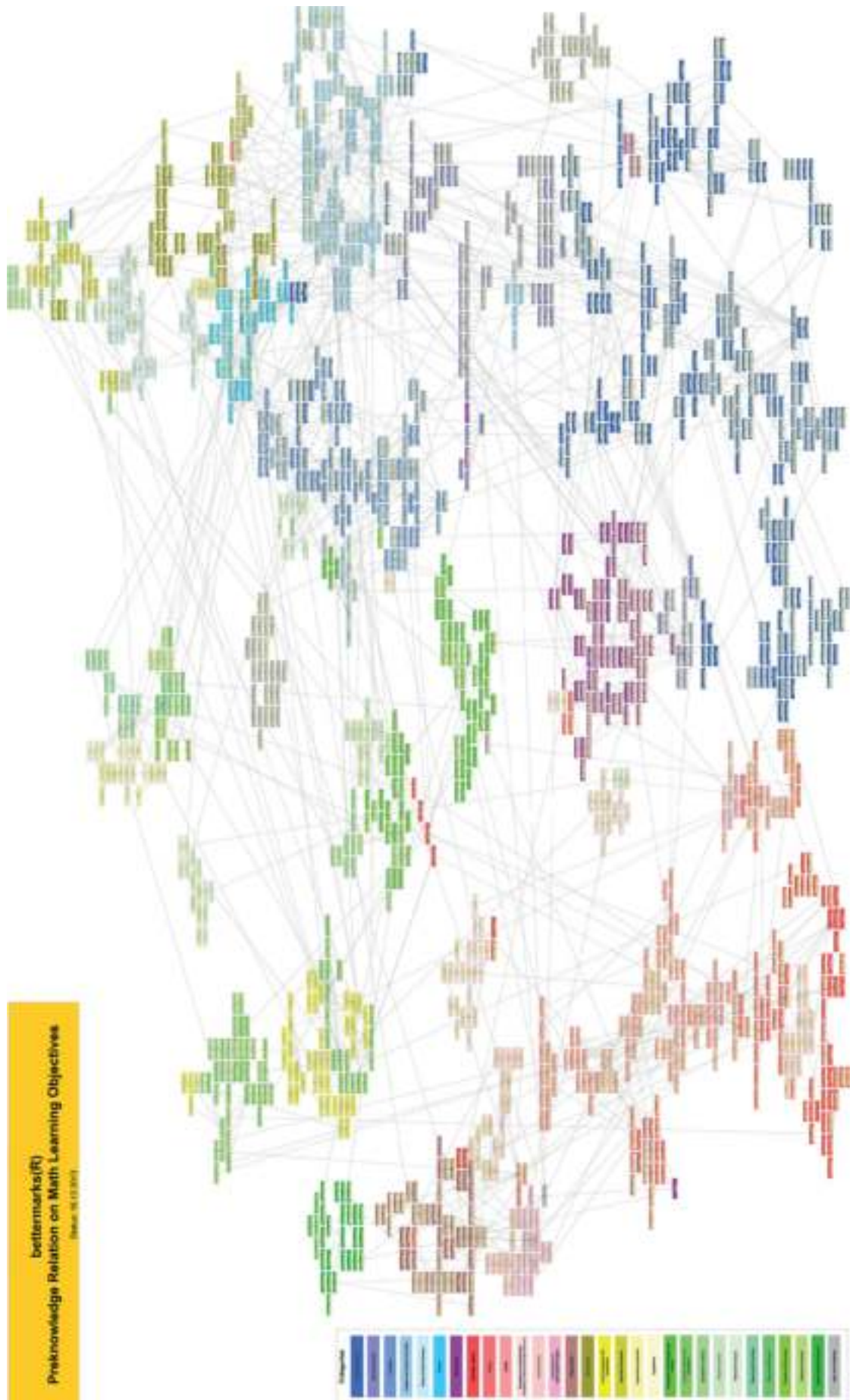
'Van je fouten leer je het meest!' is wat Bettermarks wil benadrukken in haar methode. Bettermarks biedt leerlingen én docenten via onze automatische hiatenanalyse inzicht in welke vaardigheden zij nog niet of onvoldoende beheersen. Omdat alle opgaven in Bettermarks met elkaar zijn verbonden en wij bij elke opgave precies in kaart hebben gebracht welke (voor)kennis en vaardigheden nodig zijn om die vraag te beantwoorden, is

Bettermarks in staat per leerling te bepalen waar de persoonlijke hiaten liggen. Zodra een leerling een systematische fout maakt, wordt automatisch een extra opgavenserie klaargezet om op die specifieke vaardigheid extra te kunnen oefenen. Door het verdienen van sterren en munten worden leerlingen direct beloond. Als een leerling iets niet goed snapt, kan hij direct naar een tip of de bijbehorende theorie. Als een leerling een fout antwoord geeft, wordt er zoveel mogelijk gerichte feedback gegeven. Leerlingen zijn op deze manier bewust bezig met hun eigen leerproces en dit draagt weer bij aan optimaal begrip van de lesstof. Iedere licentie van Bettermarks geeft toegang tot al het lesmateriaal (van alle leerjaren), wat leerlingen bij uitstek de mogelijkheid geeft om op eigen niveau in Bettermarks te werken.

Naast inzicht in hiaten geeft Bettermarks ook inzicht in de leerresultaten. Via het dashboard kan een docent bijvoorbeeld in één oogopslag zien óf en hoe het huiswerk gemaakt is. Daarnaast wordt er een overzicht gegeven van de vijf vragen waar de klas het laagst op scoorde. Op deze manier weet een docent direct waar leerlingen moeite mee hadden om hier vervolgens op terug te kunnen komen in de volgende les.

Eerder noemde ik de sceptische houding van docenten tegenover een digitale methode. Veel docenten hechten waarde aan werken in het schrift en zijn bang dat deze vaardigheden verloren gaan zodra leerlingen met Bettermarks gaan werken. Wij willen echter benadrukken dat een digitale methode geen doel is, maar een middel om leerlingen beter van wiskundige vaardigheden te voorzien. Een school die Bettermarks nu een aantal jaren inzet ziet dat de resultaten van leerlingen met soms wel twee punten gestegen zijn ten opzichte van voorheen. Leerlingen hebben óók bij onze methode een schrift nodig om hierin verschillende opgaven uit te werken waar Bettermarks dat aangeeft. Door middel van actief gebruik van de hiatenanalyse en het inzicht in leerresultaten combineert Bettermarks de voordelen van digitaal met het beste op papier!

Grisella Haaze
Training & Support Coördinator
Bettermarks Nederland



Figuur 4

Gebruikerservaring met de methode Bettermarks

In de afgelopen jaren heb ik als wiskundeleraar veel ervaring opgedaan met de digitale methode Bettermarks, zowel in het vmbo als de onderbouw van het havo/vwo.

Ik vind Bettermarks erg gebruikersvriendelijk. Zo is de opmaak simpel en bovendien altijd hetzelfde, wat voor leerlingen prettig werkt. Doordat ik taken met deadline klaarzet kunnen leerlingen bovendien makkelijk zien wat er in een bepaalde periode van hen wordt verwacht. Daarnaast heb je als docent per klas in één oogopslag een beeld van hoe ver iedere leerling is gevorderd en zie je de mate waarin ze de opgaven goed hebben opgelost. Ik hanteer in principe de regel dat leerlingen per serie opdrachten minimaal één muntje moeten halen, wat neerkomt op 60 procent van de opgaven correct maken. Bij sommige onderwerpen geef ik aan dat ze bijvoorbeeld twee muntjes moeten halen om dat onderdeel nog beter onder de knie te krijgen. Op alle niveaus is een grote variatie zichtbaar in de wijze waarop leerlingen hiermee omgaan: sommige klikken alle vragen gewoon door vanaf het moment dat een munt binnen is, terwijl andere een serie wel vier of vijf keer maken om tot een foutloos resultaat te komen.

Het grootste voordeel van een digitale methode als Bettermarks ten opzichte van een methode op papier is dat leerlingen direct feedback krijgen. Bij een fout antwoord krijgen ze een tip en moeten ze het nog een keer proberen. Als het antwoord dan weer fout is krijgen ze gelijk een scherm met uitleg over de theorie behorende bij die opgave. Leerlingen kunnen heel makkelijk een serie die ze niet voldoende hebben afgerond opnieuw maken om zo het geleerde nogmaals toe te passen. Als de serie opnieuw gemaakt wordt zijn de getallen en onderwerpen per vraag anders, dus moet de leerling er wel echt opnieuw over nadenken. De leerlingen beschikken tijdens het maken van opgaven altijd over alle relevante theorie via één druk op de knop, maar dit sluit nog niet altijd aan en lang niet alle leerlingen gebruiken deze mogelijkheid. Toch merk ik dat dit vaker gebeurt dan vroeger, want zelf theorie terugzoeken in een papieren hoofdstuk komt zelden voor.

Regelmatig komt het voor dat leerlingen gelijk hun vinger opsteken als ze na een fout gemaakte opgave de theorie en uitleg doorlezen en dan alsnog niet begrijpen wat ze fout hebben gedaan. Door de directe feedback komt het vrijwel niet meer voor dat leerlingen opgave na opgave op de verkeerde manier maken terwijl ze denken het te begrijpen.

Bettermarks vraagt geregeld tussenstappen in te vullen, net zoals we dat op papier zouden willen zien. Helaas moet dit soms wel iets te strak volgens een bepaald format. Het komt dan vaker voor dat leerlingen in de war raken van dat voorgeschreven format dan dat ze niet begrijpen hoe ze tot een antwoord moeten komen, met name op de lagere niveaus.

De leerlingen hebben in Bettermarks toegang tot alle hoofdstukken van elk niveau en leerjaar. Hierdoor kun je goed differentiëren en een programma op maat maken voor elke leerling.

Soms laat ik leerlingen stof van vorig jaar herhalen, of geef ik hen extra uitdaging door de stof op een hoger niveau aan te bieden. Bij de algebrahoofdstukken kunnen havo/vwo-leerlingen een analysetoets maken over het hele hoofdstuk of per onderwerp. Op basis van de fout gemaakte opdrachten worden onderdelen in het hoofdstuk gemarkeerd met een uitroepteken, zodat de leerling weet wat hij/zij nog niet beheerst en kan gaan oefenen. Zo kunnen ze vervolgens goed bezig met die leerstof waar ze nog moeite mee hebben.

Het is in Bettermarks mogelijk om digitale toetsen te geven, die dan ook automatisch worden nagekeken. Voor met name algebra en rekenvaardigheden is dit een mooie en efficiënte methode, maar er wordt weinig inzicht getoetst waardoor het niveau soms aan de lage kant is. De opgaven die je als docent kan selecteren komen bovendien allemaal uit de series die leerlingen zelf al een keer gemaakt kunnen hebben. De getallen zijn wel anders, en in sommige gevallen verschilt ook de context, maar toch zullen leerlingen veel herkennen.

Wat mij vooral opvalt aan het werken met Bettermarks is dat leerlingen in kortere tijd veel meer werk verzetten en veel meer opdrachten maken dan in onze boekentijd, met name over algebra. Ook valt het op dat leerlingen enthousiast zijn over de variatie in type vragen (sleepopdrachten, aflezen, aanklikken, tekenen,...). Zo herhaalt Bettermarks dezelfde stof vaak op een andere manier. Ik merk dat leerlingen echt blij kunnen worden als ze het dan herkennen en het gevoel hebben: "Ja, deze kan ik!"

Wat ik persoonlijk nog mis aan deze methode is meer interactieve applicaties. Het zou mooi zijn als het materiaal wordt aangevuld met bijvoorbeeld het draaien van 3D-figuren, bouwen van blokjes bij aanzichten, open- en dichtvouwen van uitslagen, verschuiven van grafieken, enzovoort. Daarnaast zou het mooi zijn als de methode zou beschikken over aanvullende filmpjes met uitleg. Het taalgebruik van Bettermarks is voor veel leerlingen best pittig, en voorbeelden zijn regelmatig behoorlijk abstract, waardoor ze niet altijd helemaal aansluiten bij het niveau van de kinderen.

De afgelopen periode van thuisonderwijs vanwege corona ging het onderwijs voor onze leerlingen, mede door Bettermarks, probleemloos door. Onze leerlingen hadden alles al digitaal, ze kenden Bettermarks al goed, en ze wisten al hoe het werkt met opgaven en huiswerk. Wij hebben dan ook vrijwel geen enkele aanpassing hoeven doen en konden zo door met onze planning. Tijdens onze online lessen deelden leerlingen vaak hun scherm en schreef ik de uitleg erbij. We hebben de werkwijze als erg prettig ervaren en met name binnen het speciaal onderwijs is er zelfs een groep leerlingen die op deze manier beter gefunctioneerd heeft. Ze namen sneller het initiatief om een persoonlijke afspraak te maken en vonden het bovendien fijn om thuis rustig en met minder prikkels te kunnen werken.

Annelie Weedage
docent wiskunde

Nuborgh College, Elburg/Nunspeet

Jeroen Spandaw

Delft Institute of Applied Mathematics

TU Delft

j.g.spandaw@tudelft.nl

Onderwijs

Enkele toepassingen van GeoGebra in meetkundeonderwijs

Het softwareprogramma GeoGebra is een zeer gebruikersvriendelijk hulpmiddel voor het wiskundeonderwijs. De software is gratis toegankelijk via de website www.geogebra.org. Jeroen Spandaw beschrijft in dit artikel enkele voorbeelden van de toepassing van GeoGebra in meetkundeonderwijs. De voorbeelden variëren van onderbouw voortgezet onderwijs tot universitair niveau.

In de volgende paragrafen beschrijf ik voor welke didactische functies ik GeoGebra inzet. In de conclusie wordt dit nog eens samengevat.

De ab -formule

De ab -formule is de formule $x_{\text{top}} = -\frac{b}{2a}$ voor de x -coördinaat van de top van de parabool $y = ax^2 + bx + c$. Een equivalente uitspraak is dat de lijn $x = -\frac{b}{2a}$ de symmetrieas is van de parabool. (Uiteraard nemen we $a \neq 0$.) De ab -formule is een logische voorbereiding op de abc -formule. De meeste studenten in de lerarenopleiding menen ten onrechte dat voor de afleiding van de

ab -formule differentiëren nodig zou zijn. Dat is jammer, want er is een mooie aanpak die toegankelijk is voor onderbouwleerlingen.

Het idee is dat de positie van de symmetrieas niet verandert wanneer de parameter c gevarieerd wordt. Dit kan ondersteund worden door een GeoGebra-plaatje waarin c via een schuifje als parameter wordt gebruikt (zie Figuur 1). Voor de resterende parameters a en b kunnen vaste waarden worden genomen of eveneens beweegbare schuifjes. De eerste optie is de meest toegankelijke. De docent kan het GeoGebra-bestand aan zijn leerlingen geven of hen dit zelf laten maken. Het doel is om leerlingen te laten herontdekken dat de positie van de symmetrieas en de x -coördinaat van de top niet van c afhangen. Gevraagd naar een verklaring zullen de meeste leerlingen noemen dat verandering van c een verticale verschuiving van de parabool geeft.

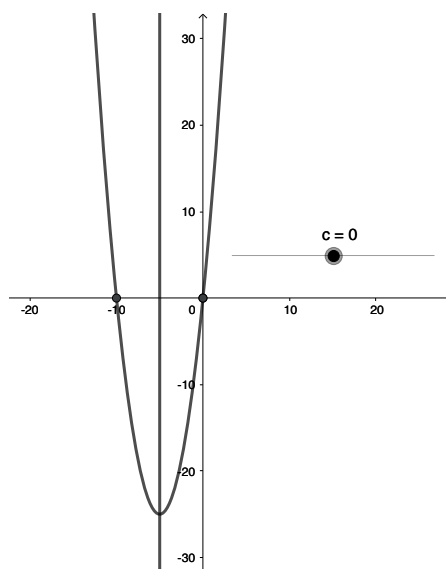
Maar waar ligt die symmetrieas nou? Omdat c er niet toe doet, kunnen we c zo eenvoudig mogelijk kiezen. Er is niet veel sturing nodig van de docent om leerlingen het geval $c = 0$ te laten onderzoeken. Ik zou in eerste instantie kiezen voor prettige vaste waarden van a en b , zeg $a = 1$ en $b = 10$. Leerlingen zien de nulpunten van $y = x^2 + 10x$ bij $x = 0$ en $x = -10$ en concluderen dat $x_{\text{top}} = -5$. Daarna kan b gevarieerd worden en tot slot a . De toegankelijkheid kan verhoogd worden door je te beperken tot $a = 1$ en tot enkele waarden van b , zeg $b = 10$, $b = 6$, $b = -20$,

$b = 3, \dots$. Leerlingen kunnen dan het vermoeden $x_{\text{top}} = -\frac{1}{2}b$ ontwikkelen, eventueel in hun eigen informele taal en dit vermoeden op hun eigen niveau meer of minder formeel onderbouwen. Leerlingen met iets meer algebraïsche bagage kunnen uiteraard grotere stappen maken, bijvoorbeeld van $ax^2 + bx = 0$ via $x = 0 \vee x = -b/a$ naar $x_{\text{top}} = -b/(2a)$.

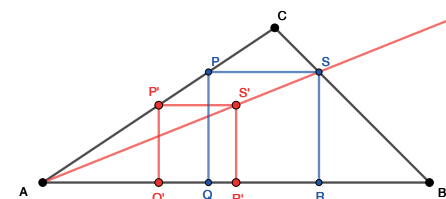
Polya's heuristiek van meetkundige plaats

In zijn beroemde boek *How to solve it?* beschrijft Polya het volgende probleem (zie Figuur 2): *Gegeven een driehoek ABC, construeer een 'ingeschreven' vierkant PQRS*. Met 'ingeschreven' wordt bedoeld: P ligt op de zijde AC , Q en R liggen op de zijde AB en S ligt op de zijde BC . Polya gebruikt dit probleem om de heuristiek 'laat één voorwaarde weg' te illustreren.

Als we de voorwaarde ' $S \in BC$ ' weglaten, krijgen we een 1-parameter-familie van vierkanten. Het is buitengewoon instructief voor leerlingen om deze situatie in GeoGebra te tekenen. Eerst teken je een 'willekeurige' driehoek ABC . Vervolgens kies je een willekeurig punt P op AC . Een GeoGebra-macro geeft de loodlijn op AB door P . Je klikt het snijpunt van die loodlijn met AB aan en noemt dat punt Q . Vervolgens maak je het vierkant $PQRS$ met behulp van de vierkant-macro van GeoGebra.



Figuur 1 Top van parabool.



Figuur 2 Probleem van Polya.

Als je punt P nu beweegt langs AC , dan bewegen de punten Q , R en S mee. Omdat in de GeoGebra-constructie eerst de driehoek ABC is getekend en vervolgens het punt P op de zijde AC , blijven A , B en C op hun plaats, terwijl P keurig langs de vaste lijn AC beweegt. Je kunt eenvoudig GeoGebra het spoor (de meetkundige plaats) van S laten aangeven als P varieert. Dit leidt dan onmiddellijk tot het vermoeden dat dit spoor een rechte lijn is en dat deze lijn door A gaat. Desgewenst kunnen al deze vermoedens bewezen worden met geschikte gelijkvormige driehoeken. Maar ook zonder zo'n bewijs is het ontdekken en formuleren van de vermoedens al een waardevolle bezigheid voor de leerlingen. Tot slot kunnen we de meetkundige plaats van S eenvoudig construeren door één 'half-ingeschreven' vierkant $P'Q'R'S'$ te construeren en de lijn AS' te tekenen. Snijden van deze lijn met BC levert vervolgens een vierkant $PQRS$ dat aan alle eisen van Polya's probleem voldoet.

Een gelijkzijdige driehoek in een rechthoek

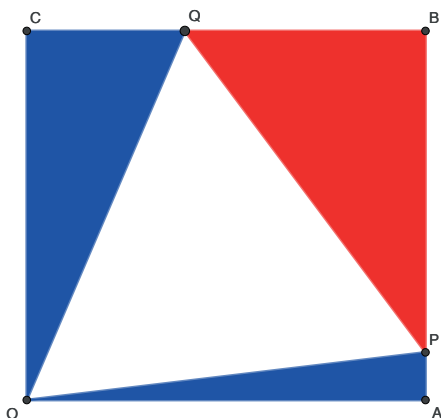
In Figuur 3 hebben we gelijkzijdige driehoek OPQ ingeschreven in een rechthoek $OABC$, dus P ligt op AB en Q ligt op BC .

Te bewijzen is dat de oppervlakte van de driehoek PBQ gelijk is aan de som van de oppervlakten van de driehoeken OAP en OCQ .

Sommige studenten in de Delftse lerarenopleiding kozen voor de volgende aanpak. Definieer $a_1 := |CQ|$, $a_2 := |QB|$, $b_1 := |AP|$ en $b_2 := |PB|$. De gelijkzijdigheid van OPQ betekent

$$(a_1 + a_2)^2 + b_1^2 = a_2^2 + b_2^2 = a_1^2 + (b_1 + b_2)^2.$$

Hieruit willen we concluderen dat



Figuur 3 Driehoek in rechthoek.

$$\frac{1}{2}(a_1 + a_2)b_1 + \frac{1}{2}a_1(b_1 + b_2) = \frac{1}{2}a_2b_2.$$

Een prima aanpak, maar de studenten lukte het niet om deze conclusie uit de voorwaarde af te leiden. Mij is het slechts gelukt door een berekening met Gröbner-bases in Maple. Het is eenvoudig om dit bewijs met de hand te verifiëren, maar zonder kennis van eliminatietheorie en zonder Maple had ik het niet gevonden. Ik weet ook niet hoe mijn studenten het zonder die techniek hadden kunnen doen.

Een alternatieve aanpak gaat als volgt. Schrijf $\varphi := \angle AOP$. Het is nu eenvoudig om de oppervlakten van de drie driehoeken uit te drukken in sinussen, cosinussen en $c := |OP| = |PQ| = |QO|$. Gebruikmakend van $\cos(\alpha)\sin(\alpha) = \frac{1}{2}\sin(2\alpha)$ voor $\alpha = \angle AOP = \varphi$, $\alpha = \angle CQO = \varphi + 60^\circ$ en $\alpha = \angle PQB = 60^\circ - \varphi$ komt de stelling nu neer op

$$\sin(2\varphi) + \sin(2\varphi + 120^\circ) = \sin(120^\circ - 2\varphi).$$

Deze identiteit kun je bewijzen met behulp van de additieformules, maar het is mooier om te generaliseren naar

$$\mathbf{v} + R\mathbf{v} + R^2\mathbf{v} = \mathbf{0},$$

waarbij $\mathbf{v} = \begin{pmatrix} \cos(\varphi) \\ \sin(\varphi) \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2$ en waarbij R de rotatie is om O over 120° . De somvector is immers invariant onder R en dus gelijk aan $\mathbf{0}$.

De tweede aanpak is eenvoudiger, omdat er naast de irrelevante schaalparameter c slechts één parameter is, namelijk de hoek φ . De eerste aanpak heeft daarentegen maar liefst vier parameters a_1 , a_2 , b_1 en b_2 .

GeoGebra kan minstens vier verschillende rollen spelen in dit probleem. Ten eerste kan experimenteren met GeoGebra leiden tot het ontdekken van deze stelling.

Ten tweede heeft dit experiment een belangrijk psychologisch effect: zien dat alle testgevallen in vijf decimalen nauwkeurig kloppen geeft veel vertrouwen in de waarheid van de stelling. Dit kan helaas ook een negatieve bijwerking hebben: het kan de behoefte aan een bewijs ondermijnen.

Ten derde kan de constructie van het plaatje in GeoGebra leiden tot het inzicht dat de hoek $\varphi = \angle AOP$ de enige wezenlijke parameter is. Wanneer je immers het plaatje tekent, moet je kiezen of je begint met de rechthoek of met de driehoek. Je komt er heel snel achter dat het laatste gemakkelijker is. Je tekent dus met een GeoGebra-macro een (scheve) gelijkzijdige driehoek OPQ en een horizontale lijn door O .

Door drie keer de loodlijn-macro van GeoGebra te gebruiken construeer je de omgeschreven rechthoek $OABC$. Gevorderden hoeven dit niet eens echt uit te voeren. Alleen al door te bedenken hoe je het plaatje in GeoGebra zou tekenen, kom je uit op de essentiële parameter φ , waarna het probleem is teruggebracht tot routine.

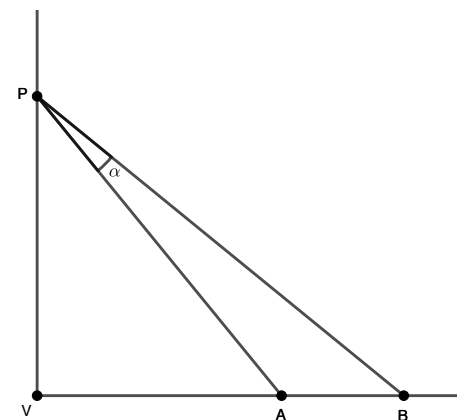
Ten vierde heeft GeoGebra mij geholpen een generalisatie te ontdekken voor niet-gelijkzijdige driehoeken OPQ ingeschreven in een rechthoek $OABC$.

Het rugby-probleem

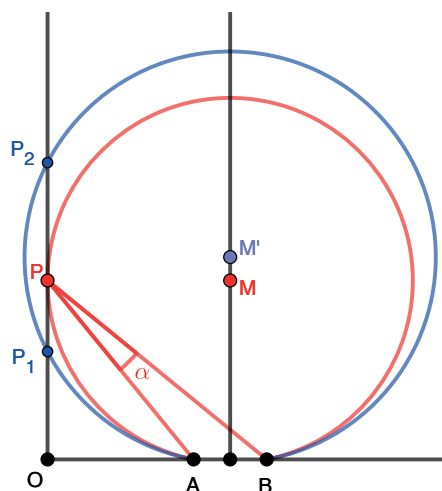
Bij rugby probeert men een try te scoren door de bal achter de achterlijn van de tegenstander op de grond te drukken. Na zo'n try kunnen via een *conversion* extra punten worden gescoord. Hier begint de meetkunde (zie Figuur 4).

Vanaf het punt V op de achterlijn, dat door de positie van de try vastligt, wordt een loodlijn getrokken. De conversator mag nu een punt P uitkiezen op die loodlijn om op het doel AB op de achterlijn te schieten. Dit heet *conversion*. Vraag: vanaf welk punt P is de kijkhoek $\alpha = \angle APB$ maximaal? Wij beperken ons tot die kijkhoek, hoewel voor de rugbyspeler ook de afstand van belang is.

We modelleren het probleem door $V = (0,0)$ te nemen op de achterlijn $y = 0$. De doelpalen zetten we in $A = (a,0)$ en $B = (b,0)$, waarbij $b > a > 0$. Het punt P is dus van de vorm $(0,p)$ voor een nader te bepalen p . We tekenen dit in GeoGebra, ofwel met een vaste keuze voor de parameters a en b , ofwel via schuifjes, zodat we later a en b kunnen variëren. Nadat we de assen hebben getekend en de punten A en B op de x -as, tekenen we een willekeurig punt P op de positieve y -as. We vragen aan



Figuur 4 Rugby-probleem.



Figuur 5 Cirkelsegment en constante hoek.

GeoGebra hoe groot de hoek α is. Terwijl we het punt P bewegen, zien we hoe de hoek α meeverandert. Als P heel dicht bij de achterlijn of juist heel ver weg ligt, dan is de hoek α heel klein. Conclusie: daartussen ligt ergens een maximum. Maar waar?

Dit is een mooi moment om aan de stelling van de constante hoek te denken: de meetkundige plaats van punten Q in het halfvlak $y > 0$ die een gegeven kijkhoek $\angle AQB$ hebben is een cirkelsegment door A en B . Het middelpunt M van de bijbehorende cirkel ligt op de middelloodlijn $x = \frac{1}{2}(a+b)$ van AB (zie Figuur 5).

We zien dat dit cirkelsegment voor kleine kijkhoeken $\angle AQB$ de y -as in twee punten P_1 en P_2 snijdt. Dit zijn dus punten op de conversielijn $x=0$ met dezelfde kijkhoek op het doel AB . De punten op de y -as tussen P_1 en P_2 hebben een grotere kijkhoek. Als we de kijkhoek vergroten, dan neemt de straal van het cirkelsegment af en kruipen de punten P_1 en P_2 naar elkaar toe. Het punt P op de y -as met de grootste kijkhoek op het doel AB krijgen we wanneer P_1 en P_2 samenvallen, dus wanneer het cirkelsegment raakt aan de conversielijn $x=0$.

In dit geval staat de straal MP loodrecht op $x=0$, dus hebben de punten P en M dezelfde y -coördinaat p . De straal r van de cirkel is de afstand van M tot de y -as, dus $r = \frac{1}{2}(a+b)$. Dit is ook de afstand van $M = (\frac{1}{2}(a+b), p)$ tot $B = (b, 0)$, dus

$$\frac{1}{4}(a-b)^2 + p^2 = \frac{1}{4}(a+b)^2.$$

Dit geeft $p^2 = ab$, dus $p = \sqrt{ab}$, het *meetkundig gemiddelde* van a en b .

Misschien heb ik in de bovenstaande beschrijving van mijn oplossing van het

rugby-probleem de rol van GeoGebra wat onderbelicht. De oplossing was echter het resultaat van spelen met GeoGebra. Je observeert iets en vindt er vervolgens een bewijs voor op basis van theoretische kennis. Hoe varieert de kijkhoek met de afstand p van het punt P tot de achterlijn? Hé, punten op de positieve y -as vormen duo's P_1 en P_2 met gelijke kijkhoek op het doel AB en die punten liggen op een cirkel door A en B . Oh ja, dat is de stelling van de constante hoek! Enzovoorts.

Je moet eigenlijk zelf aan de slag met GeoGebra om te ervaren hoe zeer bewegende beelden helpen bij het doorgronden van het probleem en het vinden van oplossingsmethoden. Ik zag bijvoorbeeld de punten P_1 en P_2 naar elkaar lopen als ik de kijkhoek groter maakte. Daarna begreep ik dat ik die punten moest laten samenvallen. Vervolgens observeerde ik dat het middelpunt M dezelfde y -coördinaat leek te hebben als het punt P en na die observatie was het bewijs daarvan kinderspel. Zodra een bewijs is gevonden is de software niet meer nodig, maar voor het vinden van een bewijs en het begrijpen van de situatie kunnen de bewegende beelden in een GeoGebra-constructie van het probleem buitengewoon behulpzaam zijn.

Een leuk experiment (met GeoGebra of in gedachten) is het volgende. Laat M het middelpunt zijn van de unieke cirkel door de drie punten A, B en P . Bij vaste $A = (a, 0)$ en $B = (b, 0)$ variëren we nu $P = (0, p)$. Het punt $M = (\frac{1}{2}(a+b), q)$ beweegt langs de middelloodlijn $x = \frac{1}{2}(a+b)$ van AB . Hoe verandert q met p ? Als p bijna 0 is of juist heel groot, dan heeft de cirkel een heel grote straal. Preciezer: $q \rightarrow \infty$ wanneer $p \downarrow 0$ of $p \rightarrow \infty$. Het rugby-probleem is nu equivalent met dit probleem: voor welke p is q minimaal? De kijkhoek $\angle APB$ is immers gelijk aan $\frac{1}{2}\angle AMB$, dus het maximaliseren van $\angle APB$ is equivalent met het maximaliseren van $\angle AMB$, wat weer equivalent is met het minimaliseren van de y -coördinaat q van M . Gelijkstellen van $|MB|$ aan $|MP|$ geeft $\frac{1}{4}(a-b)^2 + q^2 = \frac{1}{4}(a+b)^2 + (q-p)^2$, dus

$$q = \frac{p^2 + ab}{2p}.$$

Dit geeft $0 = dq/dp = \frac{1}{2}(p^2 - ab)/p^2$, dus $p = \sqrt{ab}$.

We hebben nu twee aanpakken gegeven voor het rugby-probleem: één zonder en één met differentiëren. Allerlei andere mengsels van synthetische meetkunde,

coördinatenmeetkunde, algebra, gonio en analyse kunnen ook tot succes leiden. Bijvoorbeeld leidt $q = (p^2 + ab)/(2p) = p$ ook snel tot $p = \sqrt{ab}$.

Leraren in opleiding en leerlingen denken bij een maximalisatieprobleem al snel aan een afgeleide. Zij zijn echter geneigd voor een directe aanpak te gaan. Zij zoeken naar een uitdrukking voor de kijkhoek $\alpha = \angle APB$ als functie van de variabele p en de parameters a en b . Het plan is om vervolgens $d\alpha/dp$ te berekenen en gelijk te stellen aan nul. Dit leidt zelden tot succes, zelfs niet als de student bedenkt dat het voldoende is om $\cos^2(\alpha)$ te minimaliseren en dat die cosinus via het inproduct van de vectoren $(a, -p)^T$ en $(b, -p)^T$ berekend kan worden.

De vierde harmonische

Ik heb lange tijd de landelijke Mastermath-cursus over meetkunde verzorgd voor schakelstudenten. Dit zijn studenten die vaak al een carrière als ingenieur of manager achter de rug hebben en wiskundedocent willen worden. Het thema was projectieve meetkunde. Voor mij was een belangrijk doel van de cursus om te laten zien hoe wiskundigen onderzoeken, denken, redeneren, zoeken, verfijnen, formuleren, bewijzen en weerleggen. Meetkunde was hierbij eerder een middel dan een doel op zich.

In de cursus speelde de constructie uit Figuur 6 een belangrijke rol. Gegeven de punten A en B met $A \neq B$ en het punt V op de lijn AB buiten het lijnstuk AB , construeren we het punt M in de volgende stappen:

1. kies een lijn ℓ door V die niet door A gaat;
2. kies een punt W op ℓ ongelijk aan V ;
3. kies een punt C op BW ongelijk aan B en W ;
4. definieer D als het snijpunt van VC met AW ;
5. definieer S als het snijpunt van AC en BD ;
6. definieer M als het snijpunt van AB met WS .

Dit punt M wordt de vierde harmonische van V ten opzichte van A en B genoemd.

De eerste vraag is of het punt M afhangt van punt C , gegeven de daarvoor gemaakte keuzes van A, B, V, ℓ en W . Zo nee, dan luidt de volgende vraag of M afhangt van de keuze van W , gegeven de daarvoor gemaakte keuzes van A, B, V en ℓ . Zo nee, hangt M af van de keuze van ℓ gegeven A, B en V ? Zo nee, hangt M af van de keuze

van V gegeven A en B ? Zo nee, hangt M af van B of van A ?

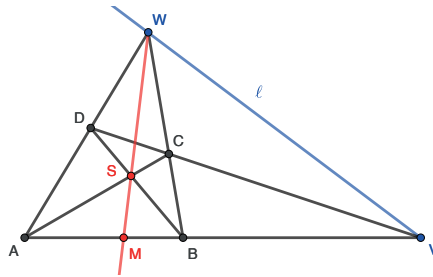
Vlak hiervoor hadden we perspectief-tekenen bestudeerd. Het plaatje toont de *Union Jack*, de vlag van het Verenigd Koninkrijk, in perspectief. De lijn ℓ is de horizon en de punten V en W zijn de verdwijnpunten van de in werkelijkheid parallelle zijden van de vlag. Het punt M is het perspectiefbeeld van het midden van de zijde AB .

Met deze kennis is het niet lastig te bedenken dat het antwoord op de eerste vraag ontkennend is: het punt M hangt niet af van de keuze van C op BW gegeven A , B , V , ℓ en W . Verschuiven van C langs de vaste lijn BW correspondeert immers met het veranderen van de lengte-breedte-verhouding van de Britse vlag.

Ik voerde het bovenstaande recept in GeoGebra uit (in de goede volgorde zodat de correcte afhankelijkheden ontstaan) en toonde dit op het scherm. Ik stelde de eerste vraag en liet mijn studenten stemmen. Een mooie werkvorm hierbij is om studenten eerst zelf te laten nadenken en vervolgens met burens of andersdenkenden te laten overleggen. Vervolgens wisselden we de argumenten uit voor en tegen verandering van het punt M . (Deze werkvorm heet *denken, delen, uitwisselen*.) Daarna kwam dan het spannende moment: onder tromgeroef verschoof ik in GeoGebra het punt C langs de lijn BW ... Een zucht van verlichting gaat door de zaal als het punt M zich gedraagt zoals we theoretisch voorspeld hadden: het blijft op zijn plaats liggen.

Deze aanpak is geïnspireerd op de didactiek van *predict, observe, explain*, die gehanteerd wordt bij demo's in natuurkundeonderwijs. Onze aanpak was meer *voorspel, leg uit, neem waar, leg opnieuw uit*. Het is belangrijk dat de studenten voordat je het demonstratie-experiment uitvoert (bij ons: het verschuiven van C langs BW) weten waarop ze gaan letten. Het geven van een antwoord en het discussiëren vooraf verhoogt de betrokkenheid enorm. (In het filmpje *Math Class Needs a Makeover* op YouTube vertelt Dan Meyer hoe je leerlingen door een dergelijke aanpak zelfs geïnteresseerd kunt krijgen in iets saais als het vullen van een vat met water!)

Dit proces van *voorspel, leg uit, neem waar en denken, delen, uitwisselen* herhaalden we bij de vervolgvragen. Wat gebeurt met M als we A , B , V en ℓ vasthouden, maar W bewegen langs ℓ ? Dit correspondeert



Figuur 6 Vierde harmonische.

met het vervormen van de Britse vlag van een rechthoek naar een parallellogram. Als je in een parallellogram $ABCD$ de lijn door het snijpunt S van de diagonalen AC en BD neemt parallel aan de zijden AD en BC , dan snijdt deze de zijde AB in het midden. Het punt M in de tekening zou dus op zijn plaats moeten blijven wanneer we W langs de lijn ℓ bewegen. En inderdaad, GeoGebra bevestigt deze voorspelling.

Het bewegen van ℓ door V kun je opvatten als het vervormen van de Britse vlag van een parallellogram in een trapezium $ABCD$ met parallelle zijden AB en CD . We verbinden het snijpunt S van de diagonalen AC en BD nu met het snijpunt W van de niet-parallelle zijden AD en BC . Snijdt die lijn SW de zijde AB in het midden? Zo ja, dan kan M niet bewegen wanneer we ℓ variëren (bij vaste A , B en V). Om uw plezier niet te bederven, zal ik hier niet vertellen wat er gebeurt...

Uiteraard bleef de inzet van GeoGebra in deze cursus niet beperkt tot deze constructie. We hebben veel meetkundige beweringen afgeleid met voor studenten nieuwe redeneertechnieken en daarna getest in GeoGebra. Het blijven bloedstollende ervaringen, ook voor de docent.

In GeoGebra zitten macro's voorgelanceerd voor bijvoorbeeld de middelloodlijn van een lijnstuk, zodat je niet steeds eindeloos met cirkels en dergelijke in de weer moet. Dit bevordert het denken in grotere stappen en verbetert de overzichtelijkheid van de plaatjes. Nadat ik mijn studenten als huiswerk had gegeven om een macro te maken voor de middelloodlijn in het halfvlak-model van het hyperbolische vlak, zat ik de volgende ochtend mijn eigen huiswerk te maken. Het lukte wel, maar mijn eerste poging was onhandig. En toen schoot me ineens te binnen: de oplossing van dit huiswerk staat in wezen al in de eerste proposities van boek I van Euclides' *Elementen*! (Hoewel de hyperbolische meetkunde pas in de negentiende eeuw

is ontwikkeld, bewees Euclides meer dan 2000 jaar eerder er al ruim twintig stellingen over, dankzij de magie van de axiomatiche aanpak.) Het was een fantastische gewaarwording: met software uit de 21ste eeuw werkte ik aan negentiende-eeuwse wiskunde en de beste oplossing haalde ik uit een boek dat ruim twintig eeuwen eerder is geschreven! Een betere illustratie van de eeuwigheidswaarde van wiskunde is nauwelijks denkbaar.

Conclusies

De bovenstaande voorbeelden laten zien hoe GeoGebra kan worden ingezet om leerlingen en studenten wiskunde te laten leren door op hun niveau wiskundig onderzoek te doen. We zagen voorbeelden van begeleid herontdekken en van de spanning of een experiment een vermoeden wel of niet bevestigt. De voorbeelden lieten zien hoe leerlingen en studenten met behulp van gebruikersvriendelijke software kunnen worden ondersteund bij probleemoplossen, bij het onderzoeken en begrijpen van afhankelijkheden binnen een constructie, bij het onderscheiden van relevante en overbodige voorwaarden, bij het vinden van de cruciale parameters, bij het ontdekken van equivalente beweringen die wellicht gemakkelijker te bewijzen zijn en bij het vinden van een probleemaanpak. Experimenten helpen enerzijds om onjuiste vermoedens te ontkrachten en anderzijds om juist overtuigd raken van de waarheid van een bewering. Zo spendeer je hopelijk minder tijd aan het zoeken naar niet-bestaande bewijzen.

De mogelijkheid om de meetkundige plaats van een punt te tekenen ondersteunt Polya's heuristiek van het weglaten van één voorwaarde. Voor gevorderden is soms een gedachtenexperiment met GeoGebra al voldoende om dergelijke opbrengsten te bereiken. Verder helpt GeoGebra bij het ontwikkelen van eigen vermoedens, eigen generalisaties en andere stellingen. (Zo hebben leerlingen van een student van onze lerarenopleiding de stelling van Morley herontdekt op basis van de suggestie om in GeoGebra te experimenteren met trisectrices in driehoeken!) Dit kan worden ingezet om leerlingen en studenten te leren wiskundige beweringen correct te formuleren. Tot slot het belangrijkste: GeoGebra kan worden gebruikt om het plezier van leerlingen en studenten bij hun wiskundige ontdekkingstochten te vergroten. ☞

Pieter Belmans

Mathematical Institute
Universität Bonn
pbelmans@math.uni-bonn.de

Aise Johan de Jong

Department of Mathematics
Columbia University, New York
dejong@math.columbia.edu

Geschiedenis

Het Stacks project

Het Stacks project is een langlopend online naslagwerk over algebraïsche meetkunde, opgericht door Aise Johan de Jong, hoogleraar aan de Columbia University in New York. Samen met Pieter Belmans, postdoc aan de Universiteit Antwerpen en de Universität Bonn, geeft hij in dit artikel een introductie tot dit bijzondere project.

In dit artikel lichten we toe hoe het Stacks project uitgegroeid is tot een van de belangrijkste referenties voor algebraïsche meetkunde, en welke rol nieuwe media kunnen spelen bij het toegankelijk maken van technische wiskundekennis. Ook proberen we een inkijk te geven in onze ervaringen bij het beheren van een wiskundig naslagwerk van deze schaal, en wat daar allemaal bij komt kijken.

Introductie

Het online naslagwerk waar we het over willen hebben is het Stacks project. Binnen de algebraïsche meetkunde is dit welbekend, maar daarbuiten is er natuurlijk weinig reden om er al van gehoord te hebben. De korte omschrijving die we zelf gebruiken voor het Stacks project is:

an open source textbook and reference work on algebraic geometry

Als boek is het een naslagwerk van meer dan 7000 pagina's, dat regelmatig wordt uitgebreid, door iedereen die een bijdrage wil leveren. Het onderwerp is algebraïsche meetkunde, en meer bijzonder *algebraïsche stacks*. Voor dit artikel is het niet zo belangrijk wat algebraïsche meetkunde, en een *stack* in het bijzonder, juist is. Ben je toch nieuwsgierig? Voor een korte introductie verwijzen we je naar het kader

op de volgende pagina, en voor een uitgebreide introductie naar [4]. Maar de reden waarom het in dit themanummer een rol heeft is dat het ook helemaal (en bij voorkeur) online te lezen is via de website

<https://stacks.math.columbia.edu>

en we willen kort toelichten hoe dit tot stand gekomen is, en hoe er samengewerkt kan worden rond wiskunde op het internet.

Geschiedenis

Kiem van een idee

Geïnspireerd op opensource-programmeerprojecten, en in het bijzonder de Linux-kernel, stelde de Nederlandse wiskundige Aise Johan de Jong op 20 juni 2005 een wiskundige samenwerking voor. Met een groep wiskundigen zou hij een boek schrijven dat kon dienen als introductie tot de

theorie van algebraïsche stacks. De samenwerking zou wel anders verlopen dan gebruikelijk bij het schrijven van een wiskundeboek:

1. samen met gevestigde waarden in het onderzoek zou er een basistekst geschreven worden;
2. die basistekst zou op een website gepubliceerd worden;
3. waarna geïnteresseerde collega's en studenten bijdragen door correcties en nieuwe bijdragen in te sturen, waarbij alles besproken wordt via een mailinglist.

Belangrijk hierbij zou ook zijn dat alles met een 'opensource-licentie' gepubliceerd wordt. Voor programmeerprojecten is zoiets niet ongebruikelijk, waarbij de broncode van een programma publiek beschikbaar is, en iedereen wijzigingen mag aanbrengen en verspreiden. Maar voor wiskundeboeken was zoiets ongehoord.

In zekere zin kan je hierbij de parallel trekken met Wikipedia, dat bestaat sinds 2001, en in 2005 het populairste online naslagwerk werd, en ook opensource is. Hier is er niet echt sprake van broncode, maar van tekst, die iedereen kan verbeteren. Maar in tegenstelling tot Wikipedia, dat een brede encyclopedie over alle onderwerpen is en vooral informatie uit andere bronnen herwerkt en aanbiedt, zou dit een wiskundeboek over één specifiek onderwerp zijn, waar bovendien op dat moment nog niet veel andere boeken over geschreven waren.



Het logo van het Stacks project

Algebraïsche stacks

In algebraïsche meetkunde is het idee van een *moduliruimte* heel erg belangrijk (zie ook de beschrijving van de stelling van Deligne–Mumford op de volgende pagina). De idee is dat we bepaalde objecten proberen te classificeren aan de hand van een meetkundig object (de moduliruimte). Het probleem is dat de objecten die we proberen te classificeren symmetrieën kunnen hebben, en in de gebruikelijke theorie van algebraïsche meetkunde (waar de centrale objecten zogeheten *schema's* zijn) betekent dit dat onze moduliruimte nooit beschreven kan worden aan de hand van een schema.

De theorie van *algebraïsche stacks* is het technische framework waarin we wel kunnen werken met symmetrieën. In zekere zin *definiëren* we stacks op zo'n manier dat ze tautologisch een oplossing vormen voor het probleem van de symmetrieën. Erg belangrijk voor zo'n tautologische oplossing is natuurlijk dat we er ook daadwerkelijk iets zinvols mee kunnen doen. Het werk van Deligne–Mumford, en later Artin, toont aan dat deze definitie inderdaad een werkbare theorie oplevert: we kunnen belangrijke conclusies trekken over de eigenschappen van deze veralgemeende moduliruimten, en de objecten die ze parametriseren.

Een belangrijke parallel kan getrokken worden met de theorie van distributies in de maattheorie. Om bepaalde constructies goed te laten werken is het nodig om de definitie van een functie uit te breiden. Het belangrijkste voorbeeld hiervan is *Diracs deltafunctie*. Deze *veralgemeende* functie, gedefinieerd op de reële getallen, heeft waarde 0 voor alle elementen $\mathbb{R} \setminus \{0\}$, en voor $0 \in \mathbb{R}$ is de waarde 'oneindig', maar wel op zo'n manier dat $\int_{-\infty}^{+\infty} \delta(x) dx = 1$. Dit is natuurlijk geen goed gedefinieerde functie! Maar door de notie van functie uit te breiden tot deze klasse van veralgemeende functies, is het mogelijk om nieuwe stellingen in de maattheorie te bewijzen. Zo zijn ook stacks een veralgemening van de gebruikelijke notie van schema's in algebraïsche meetkunde, waarmee we nog steeds interessante conclusies kunnen trekken, al wordt de theorie wel zeer technisch.

Naast vele enthousiaste reacties werd er op dit plan ook met enige (gefundeerde) scepsis gereageerd [1]:

“Hi Johan et al. Here's why I think this project won't work *yet*, and feel free to prove me wrong!” — Kevin Buzzard, 2005

Samengevat waren zijn argumenten dat:

- De Linux-kernel is niet van dag 1 geschreven door een team van programmeurs: Torvalds heeft eerst eigenhandig de kernel geschreven, en pas toen deze levensvatbaar bleek zijn er anderen bij betrokken.
- Door met vele wiskundigen samen te werken zijn er net zoveel meningen over de best mogelijke aanpak (over inhoud, over de technische aanpak, over notatie,...), en krijg je zowel conflicterende meningen als heel veel communicatie-overhead.

Buzzard reikte ook een mogelijke oplossing aan:

“I also conjecture that essentially the *only* way that my pessimistic prediction above will fail is that Johan himself stops doing his research and spends 6 months writing version 0 of

the *entire book*. I don't know whether he is prepared to do this. But I feel that this is absolutely key because it is the unique way to give concrete direction to the project. [...] but if he just sits down and writes several hundred pages by himself then whenever anyone asks a question like this, he can just point to the book and say 'that's what I think it should be like, you go ahead and add some more stuff if you think differently'.” — Kevin Buzzard, 2005

Interessant om op te merken is ook de parallel tussen Kevins opmerking over hoe Johan voor een half jaar zijn onderzoek zou moeten stopzetten, en de rol die Kevin nu speelt in de formalisatie van wiskunde. Dit is ook een grootschalig open-source-project, waarbij hij sinds 2017 een leidende rol heeft opgenomen. Hiervoor heeft hij ook in zekere mate onderzoek in de algebraïsche getaltheorie *on hold* moeten zetten [2]:

“So I have decided to stop attempting to generate new mathematics, and concentrate instead on carefully checking 'known' mathematics on a computer.” — Kevin Buzzard, 2020

Een valse, en de echte start

Na een uitgebreide discussie over het idee in juli 2005, was er van een tekst schrijven nog niks terecht gekomen. Op het einde van de maand was er alleen maar een heel rudimentaire website waar het idee werd toegelicht, en een paar technische zaken rond de mogelijke samenwerking en het weergeven van pdf's waren uitgewerkt.

In september en oktober 2005 werd een voorlopige structuur opgezet door Johan, waarbij sommige secties al enige invulling kregen, maar de meeste secties waren slechts een placeholder om de structuur duidelijk te maken. De daaropvolgende weken waren er zogeheten 'patches', waarbij deelnemers van de mailinglist (voornamelijk promovendi van Johan zelf) kleine bijdragen leverden. Uiteindelijk was er een document van zo'n 70 pagina's, en begin 2006 viel het project stil.

Als we een echte startdatum op het Stacks project willen plakken is dat *21 mei 2008*. Op die dag zag het Stacks project zoals we dat nu kennen de 'Initial commit' in Git (een versiebeheersysteem), waarbij er werd vertrokken van de tekst die in 2006 geproduceerd was. Hier werden twee belangrijke keuzes gemaakt:

- Johan zou nu eerst grotendeels zelf aan de slag gaan met het materiaal.
- Het versiebeheer zou met Git gebeuren.

Oorspronkelijk was het de bedoeling om zo laagdrempelig mogelijk te blijven met technologie, en was er geen versiebeheersysteem in gebruik.

Een andere belangrijke keuze was een (geleidelijke) transformatie, weg van een handboek bedoeld voor wiskundigen die de theorie van stacks willen kennen, naar een volledig *naslagwerk* over die theorie. Hiervoor is een korte geschiedenisles op zijn plaats. Een van de belangrijkste wiskundigen van de twintigste eeuw was Alexander Grothendieck. In de late jaren vijftig en jaren zestig heeft hij de fundamenten van de algebraïsche meetkunde grondig hervormd, samen met zijn Parijse collega's.

In het bijzonder heeft hij samen met Jean Dieudonné de boekencyclus *Éléments de Géométrie Algébrique* (kortweg EGA) geschreven, waar hij de theorie van schema's van de grond af heeft opgebouwd. Oorspronkelijk gepland als een reeks van dertien boeken, zijn er vier daadwerkelijk afgevoerd en verschenen in acht volumes. En in tegenstelling tot de gebruikelijke handboe-

ken, is EGA van een heel systematische en encyclopedische aard, waarbij geen details worden geschuwd. De meeste studenten worden danig afgeschrikt door zo'n stijl!

Parallel daarmee organiseerde hij een invloedrijke reeks seminars in het prestigieuze Institut des Hautes Études Scientifiques in Parijs, die zijn verschenen in de boekencyclus *Séminaire de Géométrie Algébrique du Bois Marie* (kortweg SGA), verdeeld over zeven boeken, voor elke jaargang één, in twaalf volumes). Hier werden meer geavanceerde onderwerpen uitgewerkt, waaronder ook belangrijke elementen voor de theorie van stacks.

In de discussiefase in 2005 werd al de mogelijkheid geopperd om van het Stacks project een 'EGA/SGA for algebraic stacks' te maken. Een werk van nog langere adem dan een 'gewoon' handboek! Maar sinds de échte start van het Stacks project in 2008 is het Stacks project stilaan geëvolueerd naar zo'n encyclopedisch naslagwerk, waarbij de focus minder lag op een expositie voor studenten (waarbij er vaak simplificaties van de theorie worden uitgevoerd) en meer op stellingen in de juiste algemeenheid formuleren.

Een andere belangrijke ontwikkeling in het Stacks project is de introductie van tags, om op een stabiele manier naar resultaten te kunnen verwijzen. Daar hebben we het verderop in meer detail over.

Het Stacks project gaat online

Het eerste jaar was het Stacks project enkel te bekijken als een verzameling pdf's. Na de invoering van tags was het ook mogelijk om de rauwe $\text{\LaTeX}$ -code van een tag te lezen, maar van navigatie was nog geen sprake. Daarom stelde Johan op 6 mei 2012 via zijn blog een project voor, waarvoor hij een geïnteresseerde student zocht, om een commentsysteem voor het bestaande rudimentaire tag-lookup-systeem te maken. De enige concrete respons kwam van de co-auteur van dit artikel, op dat moment een masterstudent wiskunde met een achtergrond in webdevelopment. Voortbouwend op de bestaande infrastructuur, waarbij de $\text{\LaTeX}$ -code nog steeds centraal stond, werd op 19 juli 2012 een eerste echte website voor het Stacks project online gezet. Hierbij was het mogelijk om te navigeren in het Stacks project, te zoeken in secties en lemma's, en commentaar achter te laten.

Op 15 december 2012 kwam dan versie 1.1 online: gebruikmakend van MathJax, en

een zelfgeschreven $\text{\LaTeX}$ -parser, was het nu mogelijk om het Stacks project volledig vanuit je browser te lezen. Op dat moment was het dus niet meer nodig om te werken met onhandig grote en lange pdf's: op dat moment was het Stacks project immers al 3000 pagina's lang. En op 30 juli 2013 was het tijd voor versie 1.2, wat in zekere zin de eerste volledig afgewerkte versie was. Naast verbeteringen aan de layout en navigatie, waren er nu ook statistieken, en dependency graphs voor elke tag.

De manier waarop de website voor het Stacks project werkte was op dat moment heel erg ad hoc. Ondanks de interesse die mensen toonden om dezelfde infrastructuur te gebruiken, bleek dat te lastig om uit te werken. Daarom werd in 2017 beslist om aan een nieuwe versie te beginnen, die gebruik moest maken van een veel flexibeler infrastructuur. Bovendien waren smartphones nu zo ingeburgerd dat het belangrijk was dat de website ook op die apparaten goed zou werken. Na het nodige werk kwam op 21 mei 2018 versie 2 van de website online, de dag dat het Stacks project tien jaar oud werd.

Over de technische kant van de website hebben we het verderop in dit artikel.

De belofte van Deligne–Mumford

Op 14 augustus 2017, bijna tien jaar na het daadwerkelijke begin van het Stacks project, werd in zekere zin het oorspronkelijke doel bereikt. Op die dag werd tag 0E9C toegevoegd. Het statement van deze stelling is als volgt.

Stelling (Deligne–Mumford). *Stel $g \geq 2$. De algebraïsche stack $\overline{\mathcal{M}}_g$ is een deligne–mumfordstack, die proper en glad is over $\text{Spec } \mathbb{Z}$. De locus $\mathcal{M}_g$ die gladde krommen parametrizeert is een dichte open deelstack.*

Deze stelling is het hoofdresultaat uit het 'oerartikel' [3] van Deligne en Mumford dat stacks introduceert, en wordt daar als Theorem 5.2 gegeven. Het bewijs hiervan gebruikt 6610 tags in het Stacks project, bijna een derde dus van alle resultaten in het Stacks project. Deze tags zijn verspreid over 1521 secties, bijna de helft van alle secties in het Stacks project zijn dus belangrijk voor deze stelling. Op die manier is het dus ook de meest complexe stelling uit het Stacks project!

Het is belangrijk om hierbij op te merken dat toen deze stelling werd geformuleerd in 1969, een heel groot deel van de

Stelling van Deligne–Mumford

De stelling van Deligne–Mumford geeft meetkundige eigenschappen van een heel belangrijke *moduliruimte*. In veel takken van de wiskunde proberen we objecten te classificeren, en een van de manieren om zo'n classificatie te beschrijven is aan de hand van een moduliruimte. In algebraïsche meetkunde is een van de eerste klassen van objecten die we proberen te classificeren die van de gladde projectieve krommen. De eerste ruwe classificatie groepeerde die krommen op het *genus* g , een natuurlijk getal, en in deze context beschouwen we $g \geq 2$. Vervolgens willen we voor elk genus de classificatie van krommen begrijpen.

Een moduliruimte is een manier om zo'n classificatie te omschrijven: we construeren een meetkundig object, waarvan de punten overeenkomen met de objecten die we willen classificeren. Voor de classificatie van gladde projectieve krommen is het object $\mathcal{M}_g$ een algebraïsche stack, waarvan de stelling van Deligne–Mumford aantoonde dat deze 'beheersbaar' is in zekere zin. Zo'n beheersbare stack noemen we *deligne–mumford*, naar aanleiding van hun stelling. Dit betekent ruwweg dat de objecten die we proberen te classificeren slechts eindig veel symmetrieën hebben. Voor een kromme C (over de complexe getallen) zegt de stelling van Hurwitz (uit 1893) dat de symmetrieën van C een groep met hoogstens $84(g-1)$ elementen vormt. De eigenschappen van de stack $\mathcal{M}_g$ impliceren dat deze groep altijd *eindig* is, ook wanneer we krommen over andere velden bestuderen.

Het belangrijke inzicht van Deligne en Mumford is dat we de classificatie van gladde projectieve krommen kunnen uitbreiden tot krommen met specifieke singulariteiten. Zo bekomen ze een *compactificatie* van $\mathcal{M}_g$. Deze noteren we als $\overline{\mathcal{M}}_g$. Zo'n compactificatie is heel zinvol, omdat we op die manier begrijpen hoe de classificatie van krommen zich gedraagt als we onze krommen variëren, en hoe de krommen geclassificeerd door 'punten op oneindig' eruitzien.



fundamenten van de theorie van algebraïsche stacks nog niet waren uitgewerkt. Deligne en Mumford schrijven hierover in hun artikel het volgende:

“Full details on the basic properties and theorems for algebraic stacks will be given elsewhere.” — *Pierre Deligne en David Mumford, in [3], 1969*

Tussen 1969 en 2017 zijn vele (zo niet alle) details reeds besproken in verschillende artikelen en boeken [6,10], maar nergens werden ze systematisch uitgelegd zoals in het Stacks project.

Workshops

In Salt Lake City in 2015, tijdens de grote conferentie over algebraïsche meetkunde die eens per decennium wordt georganiseerd, zaten Johan de Jong, Pieter Belmans en Wei Ho samen om te brainstormen over een workshop. Deze zou een combinatie van een conferentie en summerschool zijn, met als onderwerp de algebraïsche meetkunde die het onderwerp vormt van het Stacks project.

In de week van 31 juli tot en met 4 augustus 2017 was het zover. De eerste *Stacks project workshop* vond plaats aan de University of Michigan, in Ann Arbor. In kleine groepjes leerden promovendi en postdocs rechtstreeks van experts in het vakgebied over algebraïsche stacks. Met het Stacks project als fundament schreven sommige groepjes zelfs expositie-artikelen over hun onderwerp. En er werd ook uitgebreid gebrainstormd over hoe de toekomst van het Stacks project eruit moest zien: de kiemen voor de tweede versie van de website zijn die week gelegd.

Een tweede editie werd georganiseerd in de week van 3 tot en met 7 augustus 2020, dit keer als de online conferentie SPONGE (Stacks Project Online Geometry Event).

Hoe kan ik bijdragen?

In tegenstelling tot bijvoorbeeld Wikipedia, kan niet iedereen zomaar de tekst van het Stacks project wijzigen. Het grootste deel van het materiaal wordt geschreven door Johan de Jong, die ook optreedt als beheerder van het Stacks project. De wiskundige correctheid en consistentie moet immers bewaard blijven.

Als je wil bijdragen aan het Stacks project kan dat op vele manieren. De meest laagdrempelige is:

- Een berichtje achterlaten in de commentaarsectie van een tag.

Wanneer je ergens een kleine tikfout ziet of een vraag hebt over een bepaalde stap in een bewijs, is dit de gemakkelijkste manier om dit te melden. Regelmatig worden zulke comments verwerkt.

Je kan ook meer substantiële zaken bijdragen aan het Stacks project, zoals het bewijs van een lemma waarbij nu nog ‘Proof omitted’ staat. Of een interessant (tegen)voorbeeld bij een bepaalde stelling. Wanneer je dat gedaan hebt kan je:

- Een mail sturen naar `stacks.project@gmail.com`.
- Als je heel tech-savvy bent kan je de *repository* op GitHub *forken*, de tekst wijzigen, en vervolgens een *pull request* plaatsen.

In beide gevallen wordt er gekeken welke wijzigingen er nodig zijn om de interne consistentie van het Stacks project te bewaren, en wordt het op de juiste manier in het Stacks project ingepast.

Als je echt ambitieus bent kan je ook hele secties bijdragen. Zo heeft Alex Perry bijvoorbeeld sectie 058B geschreven, in 2010, toen hij nog een bachelorstudent van Johan was. Wat ook een mogelijkheid is, is dat bestaande cursusnota's of overzichtsartikelen worden herwerkt tot een hoofdstuk in het Stacks project. Een mooi voorbeeld hiervan is het artikel [5], dat in-

tegraal is opgenomen in het Stacks project in de tags ODR4 en ODRE.

Een wiskundig naslagwerk

Tags

In een wiskundetekst worden de definities, lemma's en stellingen doorgaans genummerd. Maar in tegenstelling tot de meeste wiskundeteksten is het Stacks project nooit ‘aP’, en groeit het bovendien niet lineair. Als blijkt dat er een nieuwe sectie nodig is, wordt het op de plek toegevoegd waar die sectie het beste past. Maar dat betekent dat ‘Stelling 13.9.2’ plots ‘Stelling 13.10.2’ kan worden, omdat er nieuwe Sectie 13.9 is toegevoegd. Ook kan na verloop van tijd blijken dat de organisatie van een bepaald hoofdstuk niet optimaal is. In plaats van vast te houden aan een organisch gegroeide janboel is het dan wenselijk om de tekst te herorganiseren. Maar dan wijzigt de nummering van de resultaten natuurlijk ook.

Dus om het verwijzen naar en het citeren van het Stacks project zo stabiel mogelijk te maken, bestaat er een alternatieve manier om naar resultaten te verwijzen. Dit gebeurt in de vorm van *tags*. Dat is een reeks van vier letters en cijfers, die uniek overeenkomt met een bepaald resultaat. Zo heeft het yonedalemma (een

Tags

Een tag is een *unieke* en *stabiele* identificatie van een resultaat in het Stacks project. Het bestaat uit vier cijfers en letters. In theorie zijn er dus $36^4 = 1679616$ tags mogelijk. Maar omdat er verwarring kan optreden tussen het bijvoorbeeld cijfer 0 en de letter O, wordt de letter O nu niet meer gebruikt. Er zijn wel 302 tags die al toegewezen waren vooraleer we hadden ingezien dat het een goed idee is om bepaalde letters te vermijden... Tags worden *chronologisch* toegewezen: ze komen dus niet overeen met de volgorde in het Stacks project (omdat die nu eenmaal kan wijzigen). Telkens als er een nieuw resultaat (of een paar resultaten tegelijk) afgewerkt is, worden er nieuwe tags toegewezen.

$\text{\TeX}$ nisch houden we tags bij in een (ondertussen niet meer zo klein) tekstbestandje. Aan elk label in de $\text{\LaTeX}$ -code wordt een tag geassocieerd. Het resultaat dat hoort bij dat label mag dus verplaatst worden, de tag blijft hetzelfde. Het label zelf mag ook van naam veranderen, als dat nodig blijkt. Een klein deeltje van het tags-bestand in de buurt van de tag voor het yonedalemma ziet er uit als:

```
001N, categories-definition-contravariant
001O, categories-example-hom-functor
001P, categories-lemma-yoneda
001Q, categories-definition-representable-functor
001R, categories-section-products-pairs
```

Nu je weet wat een tag is, kan je naar tag 0260 gaan om de definitie van een algebraïsche stack te lezen. Eerlijkheid gebiedt ons wel te zeggen dat die (op dit moment) pas na meer dan 6000 pagina's ander materiaal komt...

aantal pagina's	7019
aantal tags	19917
aantal secties	3101
aantal hoofdstukken	114
aantal regels $\text{\LaTeX}$ -code	703138
aantal personen die een bijdrage hebben geleverd	406
gemiddeld aantal bezoekers per dag op de website	2000
gemiddeld aantal unieke bezoekers per maand op de website	25000

Tabel 1 Het Stacks project in enkele getallen (status op 11 augustus 2020).

heel belangrijk basisresultaat in categorie-theorie) tag 001P, terwijl het lemma van Nakayama (een heel belangrijk basisresultaat in commutatieve algebra) tag 00DV. Door de tag te citeren heb je altijd het juiste resultaat.

Wat ook belangrijk is voor de goede werking van een naslagwerk is dat wanneer je vandaag iets citeert, die citatie volgende week ook nog van toepassing is. Daarom hanteert het Stacks project de richtlijn dat een resultaat *enkel algemener mag worden*: wanneer je het dan citeert, weet je dat het resultaat volgende week ook nog bruikbaar is zonder dat je je eigen artikel dient aan te passen. Het is ook mogelijk dat een resultaat op een bepaald moment overbodig wordt, omdat er een algemenere stelling wordt toegevoegd aan het Stacks project. Om citaties niet ongeldig te maken wordt het resultaat daarom niet verwijderd, maar verplaatst naar een hoofdstuk met tags die op pensioen mogen.

In het prille begin gebruikte het Stacks project geen tags. Maar redelijk vroeg werd duidelijk dat voor een organisch groeiende wiskundetekst er een stabiel referentiesysteem nodig is. Na een suggestie van Cathy O'Neil (bekend van mathbabe.org en *Weapons of Math Destruction*) is op 16 mei 2009 dit systeem met tags ingevoerd. Het Stacks project bevatte toen opeens 3026 tags! Wanneer je dus naar het Stacks project wil verwijzen, doe je dat best met de tag, en niet met de nummer van de stelling.

Statistieken

Omdat het Stacks project zo groot is, kunnen we een paar interessante statistieken meegeven.

- *Meest gerefereerde resultaat*: voor Nakayama's lemma, zie tag 00DV, zijn er 121 tags die er direct naar verwijzen in hun bewijs.

- *Meest gebruikte resultaat*: een basisstelling over ringen, zie tag 00E0, heeft 6750 indirecte verwijzingen.
- *Meest complexe bewijs*: de stelling van Deligne–Mumford, zie tag 0E9C, steunt op 6610 andere tags, en is daarmee het bewijs dat op de meeste andere resultaten steunt.

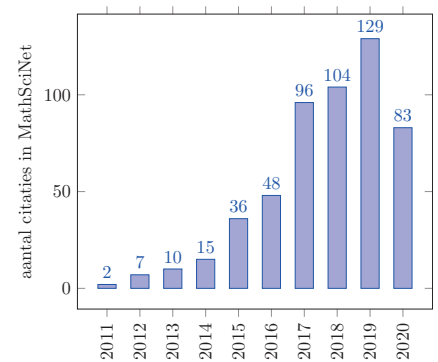
In Tabel 1 hebben we enkele andere getallen verzameld, en in Figuur 1 wordt het aantal citaties van het Stacks project, zoals bepaald door MathSciNet, weergegeven.

Het is ook mogelijk om de structuur van een bewijs in het Stacks project te visualiseren. Zo kan je een idee krijgen van de complexiteit van een resultaat. In Figuur 2 zie je zo de *dependency graph* van tag 01WC.

Het resultaat zelf is de rode bol met kartelrand een beetje linksboven het midden. Het bewijs daarvan steunt op negen andere resultaten in het Stacks project. Elk van die resultaten steunt dan weer op andere resultaten. (Het is belangrijk dat het Stacks project *acyclisch* is, zodat er geen cirkelredeneringen plaatsvinden!) Des te verder je weggaat van het resultaat dat je aan het bewijzen bent, des te meer we van rood naar blauw gaan.



Figuur 2 Een dependency graph.



Figuur 1 Citaties in MathSciNet (11 augustus 2020).

Voor de stelling van Deligne–Mumford waar we het eerder over hadden zou die dependency graph bijna 7000 knopen tellen!

De techniek achter het Stacks project

Wiskundigen zijn het gewend om in $\text{\LaTeX}$ te schrijven. Voor het Stacks project is dat niet anders: op deze manier kan (in theorie) elke meetkundige eenvoudig een bijdrage leveren.

Normaal gezien wordt $\text{\LaTeX}$ *gebouwd* naar pdf, en is dat het eindresultaat. Maar een gigantische pdf zoals voor het Stacks project is niet goed navigeerbaar of doorzoekbaar.

Er zijn ook manieren om $\text{\LaTeX}$ naar HTML om te zetten. HyperText Markup Language (kortweg HTML) is de taal waarin websites gemaakt worden. Maar het Stacks project wil heel expliciet dat resultaten refereerbaar zijn als tags, en dat het mogelijk is om commentaar te leveren, en dat het op verschillende niveaus te navigeren is. Zulke flexibiliteit en functionaliteit is voor een statische website, gemaakt door een van de bestaande converters, niet of nauwelijks mogelijk.

Daarom is in 2017 en 2018 door Pieter Belmans, met de hulp van Raymond Cheng en Patrick Massot, de software *Gerby* geschreven. (De naam Gerby is een verwijzing naar een object in de theorie van algebraïsche stacks. Een *gerbe* is een stack met speciale eigenschappen, en bij het kiezen van de naam wilden we een subtiele link met het Stacks project houden.) Hier worden een paar bestaande open-source-programmeerprojecten gecombineerd (met als belangrijkste componenten *pl_aTeX* en *Flask*), om de hele workflow van het Stacks project te ondersteunen. En om wiskundige formules op een goede manier op een website te laten zien, wordt *MathJax* gebruikt.

Met Gerby is het mogelijk om als auteur (of groep van auteurs) gewoon een manuscript te schrijven, om vervolgens:

- tags toe te wijzen;
- $\text{L}^{\text{A}}\text{T}_{\text{E}}\text{X}$ naar HTML te converteren;
- een database te creëren met alle tekst en metadata;

zodat je op een flexibele manier een website kan maken, zoals die van het Stacks project en Kerodon (zie hiernaast). Voor meer informatie verwijzen we je door naar <https://gerby-project.github.io>.

Kerodon

Een vraag die vaak gesteld wordt over Jacob Lurie's Kerodon is: "Wat is een kerodon?" Een kerodon is een Zuid-Amerikaanse knaagdier, verwant aan de capibara en de cavia. In Figuur 3 zie je een foto. In het wild leven ze in de rotsachtige steppe in het noordoosten van Brazilië. De idee achter deze op het eerste zicht bizarre naam is dat de daadwerkelijke inhoud van de website niet beperkt wordt door de naam. Het is immers onduidelijk waar het hele project naartoe zal evolueren. De tagline van Kerodon is dan ook voldoende breed gekozen

an online resource for homotopy-coherent mathematics

zodat het hele bereik van het werk van Lurie kan bestrijken, zonder zich vast te pinnen op één aspect.



Foto: Brian Gratwicke

Figuur 3 Kerodon rupestris.

Kerodon en andere projecten

De aanpak van het Stacks project inspireert ook andere projecten met een gelijksoortige insteek. Het belangrijkste voorbeeld is Kerodon (<https://kerodon.net>) dat geschreven wordt door Jacob Lurie, een Amerikaanse wiskundige die hoogleraar is aan het Institute for Advanced Study in Princeton.

Het werk van Lurie is zeer fundamenteel, en begon met de uitbouw van een nieuw soort meetkunde: *afgeleide algebraïsche meetkunde*. Om deze theorie grondig op te bouwen is heel veel werk in categorietheorie en homotopietheorie nodig. In 2004 is hij hiermee gestart, en doorheen de jaren is het een grote verzameling van lange teksten geworden, die verschillende aspecten van de theorie bespreken.

Slechts één tekst is op de gebruikelijke manier als een lijvig boek gepubliceerd: *Higher Topos Theory* [7]. Andere teksten zijn beschikbaar als een pdf in boekvorm, de belangrijkste zijn *Higher Algebra* [8] en het work-in-progress *Spectral Algebraic Geometry* [9].

Omdat veel wiskundigen gebruikmaken van zijn resultaten citeren ze vaak zijn werk in hun eigen artikelen. Maar omdat wiskunde eigenlijk een permanent work-in-progress is, en zeker wanneer het een nieuwe theorie betreft, verandert de structuur van de tekst regelmatig, zoals bij *Higher Algebra* en *Spectral Algebraic Geometry*. Of is het eigenlijk onmogelijk om de tekst te wijzigen, zoals bij *Higher Topos Theory*, omdat er een gepubliceerde versie van bestaat.

Tijdens de Stacks project-workshop in 2017, bijgewoond door Jacob Lurie, werd de eerste kiem gelegd voor een samenwerking. De nieuwe versie van de software achter het Stacks project zou ook gebruikt worden voor zijn werk. Nadat de tweede versie van de website voor het Stacks project live kwam begon het werk aan Kero-



Het logo van Kerodon

don, en op 17 oktober 2018 werd Kerodon live gezet.

Een belangrijk verschil met het Stacks project is dat de tekst van Kerodon niet opensource is, maar iedereen is wel welkom om commentaar achter te laten op de website, die vervolgens verwerkt kan worden door Lurie zelf.

Op dit moment bestaat Kerodon uit 1921 tags, wat op papier neerkomt op bijna 700 pagina's.

Andere projecten

Het Stacks project en Kerodon, zijn gezins de enige online wiskundige naslagwerken of online wiskundige samenwerkingen, al is de combinatie van tags en *volledige bewijzen* niet zo gangbaar.

We willen zeker volgende andere initiatieven vermelden:

- *nLab*: Een publieke wiskundewiki, waar iedereen nota's kan maken. De focus ligt vooral op (hogere) categorietheorie. <https://ncatlab.org/nlab/show/HomePage>
- *HoTT*: Een opensource-handboek over homotopietypetheorie. <https://homotopytypetheory.org>
- *Polymath*: Een online samenwerking rond specifieke problemen, gelanceerd door Tim Gowers. <https://polymathprojects.org>

Referenties

- 1 K. Buzzard, email van Kevin Buzzard naar de algebraic_geometry-mailinglist, 22 juli 2005, <https://math.columbia.edu/~dejong/wordpress/wp-content/uploads/2010/10/Kevin-Buzzard>.
- 2 K. Buzzard, The future of mathematics?, presentatie jan. 2020, Formal Methods in Mathematics, Pittsburgh, https://www.andrew.cmu.edu/user/avigad/meetings/fomm2020/slides/fomm_buzzard.pdf.
- 3 P. Deligne en D. Mumford, The irreducibility of the space of curves of given genus, *Inst. Hautes Études Sci. Publ. Math.* 36 (1969), 75–109.
- 4 D. Edidin, What is... a stack? *Notices of the AMS* 50(4) (2003), 458–459.
- 5 M. Emerton en T. Gee, Dimension theory and components of algebraic stacks, arXiv: 1704.07654.
- 6 G. Laumon en L. Moret-Bailly, *Champs algébriques*, Ergebnisse der Mathematik und ihrer Grenzgebiete, Vol. 39, Springer, 2000.
- 7 J. Lurie, *Higher Topos Theory*, Annals of Mathematics Studies, Vol. 170, Princeton University Press, 2009.
- 8 J. Lurie, *Higher Algebra*, <https://www.math.ias.edu/~lurie/papers/HA.pdf>.
- 9 J. Lurie, *Spectral Algebraic Geometry*, <https://www.math.ias.edu/~lurie/papers/SAG-rootfile.pdf>.
- 10 M. Olsson, Algebraic spaces and stacks, *American Mathematical Society, Colloquium Publications*, Vol. 62, AMS, 2016

Paula Versnick

Origamikunstenaar
info@orihouse.com

Biografie Frank van Kollem (1949–1997)

Pionier op het gebied van origami-tessellations

Frank van Kollem liet zijn interesse in wiskunde op creatieve wijze blijken, met papier-vouwen en met andere technieken wist hij dit uit te beelden. Paula Versnick schetst in dit artikel een beeld van deze talentvolle man.

De eerste keer dat ik met het werk van Frank in aanraking kwam, was gedurende de Holland Papier Biënnale 2004 in het museum in Rijswijk. Ik was meteen geraakt door de hoeveelheid verschillende patronen en de zeer kleine schaal waarop Frank vouwde. Henk Porck, toenmalig conservator van de

Koninklijke Bibliotheek (KB) in Den Haag had een collectie van ruim honderd vouw-werkjes en een aantal andere objecten aangeboden gekregen van de moeder van Frank in 2003. Hij zocht meer informatie naar de techniek achter deze kunstwerkjes en kwam langs die weg onder andere

ook bij mij terecht. Ik heb de collectie in de Koninklijke Bibliotheek meerdere malen bezocht [7]. Elke keer waren de vouwsels in het echt weer kleiner dan ik in mijn gedachten had van de vorige keer.

Jeugd

Frank is geboren in 1949. Hij is in 1997 op 47-jarige leeftijd overleden aan een hartstilstand. Hij was een bijzonder en opvallend persoon, van kinds af aan was hij anders dan de mensen om hem heen. Op de lagere school werd zijn gedrag als afwijkend bestempeld. Frank speelde niet met zijn klasgenoten, hij gedroeg zich anders. Hij was een 'outsider'. Dit veranderde niet toen hij ouder werd. Hij bleef een buitenstaander, iemand die in een eigen wereld leefde [14]. Al op jonge leeftijd bleek hij zeer getalenteerd te zijn op het gebied van taal en wiskunde. Hij heeft zijn middelbare school niet afgemaakt, hij stelde in de klas vaak 'lastige' vragen. Toch kon hij op hoog niveau in discussie met een hoogleraar fysica over allerlei onderwerpen.

Fascinatie voor vouwen

Midden jaren zestig was er een origami-kunstenaar in het Stedelijk Museum in Amsterdam. Daar is hij heen geweest en is geïnteresseerd geraakt in origami [11]. In eerste instantie vouwde hij dieren, meest uit twee delen of met drie poten, zoals in de boeken van Kunihiko Kasahara [6] en Isao Honda [4] uit die tijd. Dit vond hij



Figuur 1 Sigarenkistje op de Holland Papier Biënnale 2004. Hierin bewaarde Frank een gedeelte van zijn vouwsels.



Figuur 2 Flexagon van kralen.



Figuur 3 Mapje met getallenreeksen. Welke logica er achter zit, is tot nog toe onduidelijk.

onbevredigend en al gauw ging hij zelf experimenteren. Frank was een hoog begaafd persoon met een voorliefde voor exacte wetenschappen. Vouden vond hij interessant, figuratieve modellen minder. Hij begon papier op een andere manier te vouwen, meer op een wiskundige manier. Tegenwoordig noemen we dit *tessellations*.

Origami-tessellations

Origami is de kunst van het papiervouwen. *Tessellations* (het Engelse woord voor vlakverdeling) is een onderdeel van deze kunst, waarbij van het principe uitgegaan wordt dat er uit één blad papier een vlakverdeling gevouwen kan worden. Dit gebeurt in het algemeen door een zogenaamde 'cel' te herhalen. Als men vier gelijke vierkante cellen vouwt en deze als het ware aan elkaar kan plakken tot een groter vierkant en weer uit kan vouwen tot één blad papier, dan is het een tessellation. Dit patroon van cellen kan dan ook van één groter vel papier gevouwen worden. Ditzelfde principe kan eveneens uitgevoerd worden met een raster van gelijkzijdige driehoeken. Een ander soort tessellation is het type waarbij de 'cel' zich herhaalt, maar dan verkleind. Vaak wordt de kleinere cel 45 graden gedraaid ten opzichte van de vorige (bij een vierkant raster). Deze *recursieve* tessellations lijken op een fractal. Ook worden de *corrugations* (corrugated

= golvend) beschouwd als een onderdeel van de tessellations. Hiervan is de eigenschap dat in het eindresultaat al het papier zichtbaar is, net als bij golfplaat.

Corrugations zijn al heel oud, deze werden in tijden van Cleopatra al gebruikt om stoffen te ploaien. Ook is er een theorie dat de mouwen van de Mona Lisa op deze manier gevouwen zijn. In de Gouden Eeuw werd een ware strijd geleverd tussen landheren wie de mooiste tafeldecoraties kon maken met damast, waarbij veelvuldig gebruik gemaakt werd van deze techniek [12].

Creativiteit

Voordat Frank met zijn speciale vouwwerk begon, was hij altijd al bezig met vormen van handenarbeid waarin zijn fascinatie voor wiskunde tot uitdrukking kwam. Hij maakte bijvoorbeeld van aan elkaar geregen glazen kraaltjes ingewikkelde driedimensionale constructies. Hierbij zorgde hij dat de draad nooit recht overstak, maar altijd naar een buurkraal ging [8].

Andere voorbeelden van zijn creatieve vermogen zijn de gehaakte portefeuilles, gemaakt van twee kleuren knoopsgatgaren, waarin hij als patroon reeksen van getallen of lettercombinaties verwerkte.

Wit papier

Hij kocht zijn papier bij het Japanse winkeltje in Amsterdam. Na verloop van tijd deed zijn moeder de suggestie dat hij alleen met wit papier zou gaan vouwen, zodat zijn geometrische werk beter uit zou komen. Om

deze reden is de collectie van meer dan honderd vouwwerkjes die aan de KB geschonken is, vrijwel helemaal wit.

Pionier

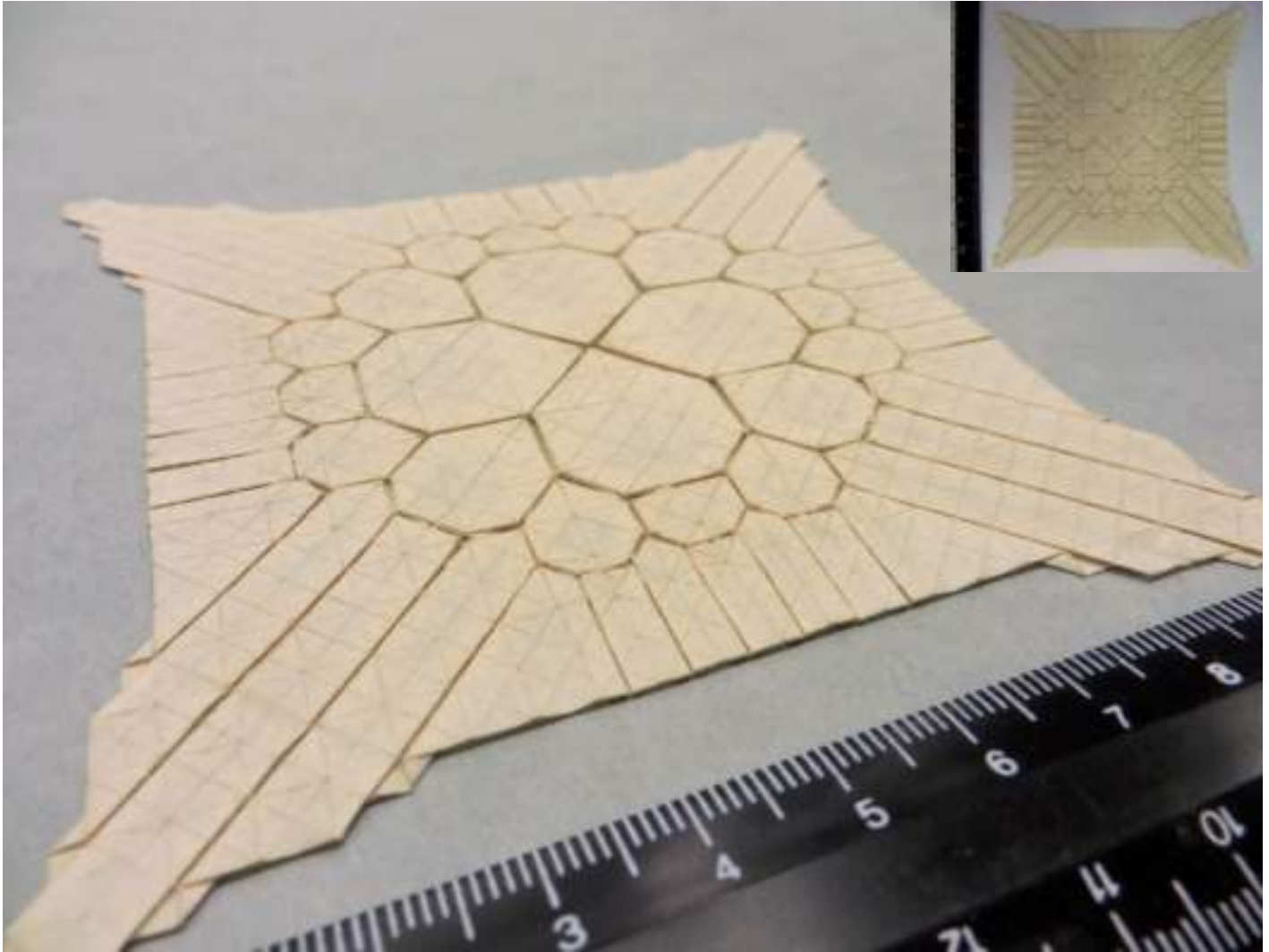
De belangrijkste origamikunstenaars die vergelijkbare kunst maakten in het verleden waren Shuzo Fujimoto [1] en Yoshihide Momotani [10] in Japan. De allereerste publicatie op dit gebied was een handgeschreven notitieboek in het Japans van Fujimoto gedateerd in 1978. Marieke de Hoop bracht in de tachtiger jaren deze grootmeesters ter sprake, maar Frank bleek daar geen belangstelling voor te hebben. Hij zou nog beïnvloed kunnen zijn door een Amerikaanse kunstenaar, Ron Resch [17]. Ron is in de jaren zestig bezig geweest met tessellations, maar op zeer grote schaal met manshoge objecten. Ook David A. Huffman (VS) was tussen 1960 en 1990 op dit terrein actief. Hij heeft één artikel gepubliceerd, in 1976 [5]. Beiden werkten veel met driehoekige rasters, terwijl Frank zich alleen met vierkante rasters bezighield. Connecties acht ik daarom onwaarschijnlijk. Mijn conclusie is dat Frank zijn manier van vouwen zelf heeft uitgevonden, en dat hij dus een van de pioniers is op het gebied van tessellations binnen de origami.

Marieke de Hoop

In de jaren tachtig hield Marieke de Hoop een origamidag in het Centraal Station te Amsterdam. Daar kwam ook Frank op af. De origami tijdens de workshop vond hij niet



Figuur 4 Contactafdrukken met het werk van Frank en Frank zelf.



Figuur 5 Pythagoras Tree Tessellation, achterzijde (inzet voorzijde, van het type recursief). De liniaal heeft een centimeterverdeling.

zo interessant, maar met Marieke kon hij goed over zijn eigen werk praten. Ze hebben elkaar daarna een aantal malen ontmoet om over zijn werk te praten. Beiden vonden ze dit inspirerende gesprekken [16].

Vrienden

Hij was vaak te vinden in het café De Klepel om de hoek van zijn huisadres. Daar was hij meestal in gezelschap van zijn vrienden. In 2012 ben ik naar dit café gegaan en heb gesproken met iemand die Frank nog kende van vroeger. Dit is wat ik over dit bezoek opgeschreven heb: “Frank was niet wereldvreemd, je kon goed met hem praten. Hij was klein en mager, kwam vaak alleen, maar was niet eenzaam. Hij woonde alleen op de Prinsengracht, zijn moeder op de Herengracht. Je moest wel op hem letten, soms moest je hem zeggen dat hij schone kleren aan moest doen. Hij kan ook stapels oude kranten bewaard hebben. Hij

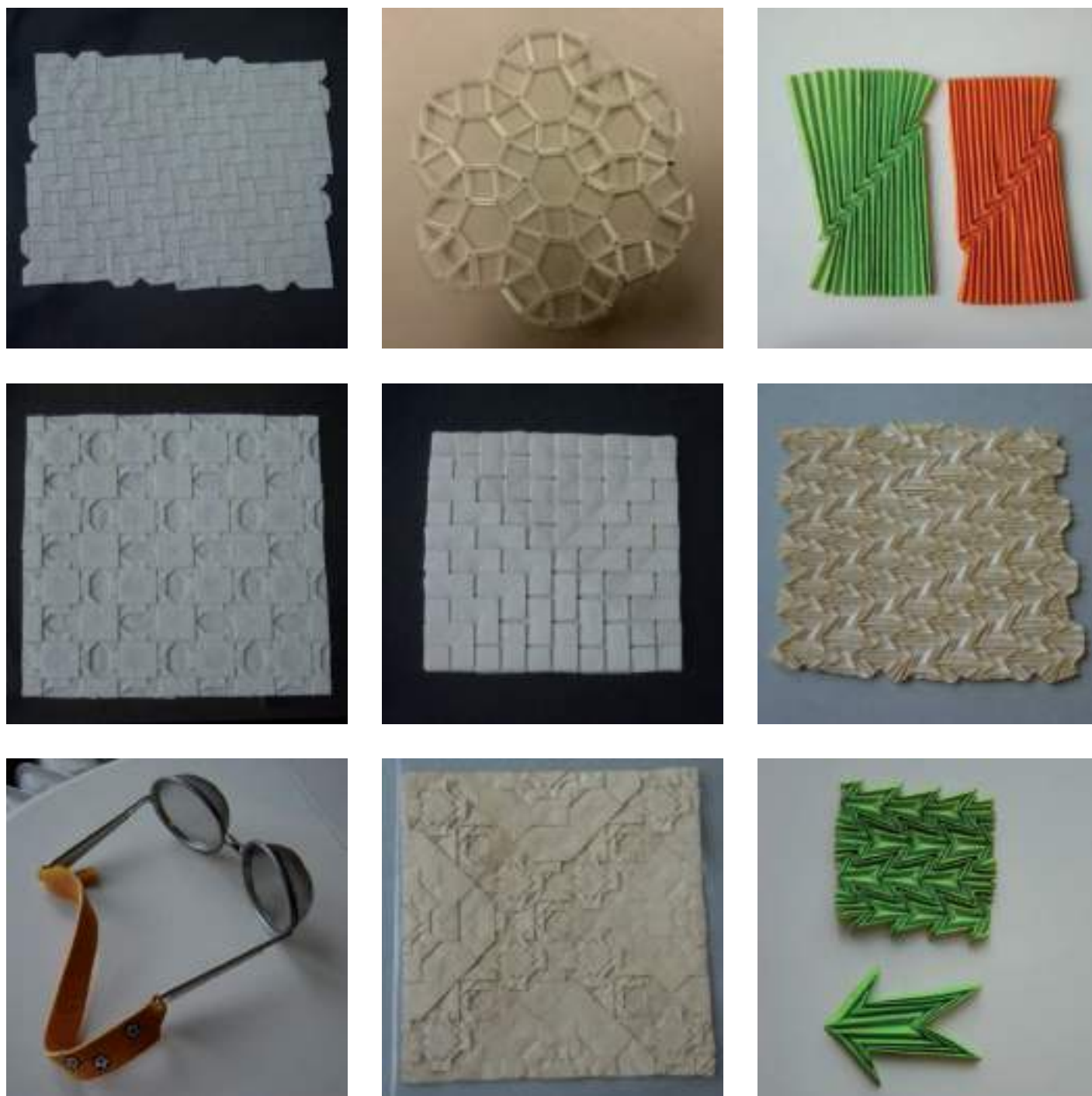
nodigde niemand thuis uit. Hij vouwde in De Klepel met servetten, een zwaan en zo. Hij liet zijn werkjes wel zien maar vouwde er meestal niet aan in het café. Hij overleed aan een hartaanval en is thuis gevonden. Hij had dagelijks contact met mensen via internet, die argwanend werden toen hij niet meer reageerde. Hij noemde zichzelf Ori en zijn moeder Ma-Ori.”

Perfectie

In alles wat Frank deed streefde hij perfectie na. Dit streven is ook duidelijk herkenbaar in zijn vouwwerk. ‘Het zoeken naar grenzen en naar het maximale’ sluit aan bij dit streven naar perfectie. Zowel in het dagelijks leven als in zijn werk, was Frank op zoek naar een grens. Hoeveel koppen koffie kon hij op een dag op en hoeveel tabasco kon hij in tomatensap gooien totdat het niet meer drinkbaar was? Frank moet zich continu uitgedaagd hebben gevoeld.



Figuur 6 “Wil je een snoepje?”



Figuur 7 Vouwwerkjes volgens de indeling van Daniël Kraaijkamp van het type: Square twist, 2D-langekralen, Corrugation, Van Kollem, Clover, Corrugation, Bril, Recursief en Corrugation.

Ook het papiervouwen daagde Frank uit om op zoek te gaan naar een grens. Hoe ver kon hij gaan, tot hoe ver kon hij doorvouwen? Frank vouwde alsmaar kleinere vouwpatronen en wist steeds complexere composities te ontwerpen [14].

Humor

In een snoepblikje bewaarde hij een stel gekleurde, vruchtvormige vouwwerkjes, die hij voor de grap presenteerde aan men-

sen met de vraag: ‘Wil je een snoepje?’ (zie Figuur 6).

Ook had hij een bril gemaakt van twee theezeeffjes, zodat het leek alsof hij insectenogen had (zie Figuur 7, linksonder).

Alleen vierkant

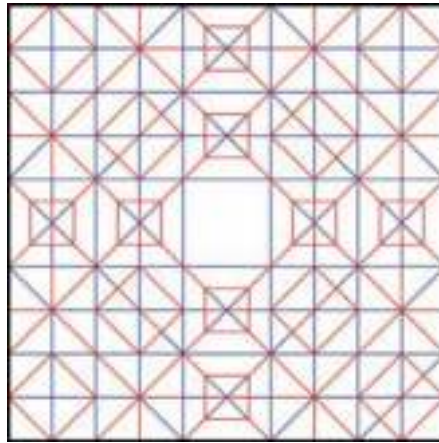
Het is bijzonder dat Frank alleen tessellations gebaseerd op een vierkant raster maakte. Er zijn ook veel tessellations gebaseerd op een raster van gelijkzijdige driehoeken,

maar daar hield hij zich niet mee bezig. Ook is het opvallend dat hij heel klein vouwde. Frank verdeelde een blaadje van — meestal — 15×15 cm horizontaal en verticaal in 64 delen, en voegde in ieder hokje de beide diagonalen toe. De tussenruimte tussen de vouwlijnen is dus maar ongeveer 2 mm. Vervolgens dacht hij een poosje na en begon dan het blaadje zorgvuldig te bewerken tot het eindresultaat. Hij bereedeneerde deze patronen uit zijn hoofd.

Onderzoek

Samen met andere origamikunstenaars heb ik geprobeerd om diverse werkstukken van Frank te ontcijferen, alleen door te kijken. De kunstwerkjes mochten natuurlijk niet ontvouwd worden om ze te bestuderen. Zo zijn we achter de methodiek gekomen van een aantal van zijn vouwsels. Een van deze heb ik 'Pythagoras Tree' genoemd (zie Figuur 5) en heb ik uitgewerkt in diagrammen waarmee men zelf deze tessellation na kan vouwen [15].

Samen met Eric Gjerde, tessellation-specialist [3], heb ik het dikste en meest complexe vouwwerkje van Frank geanalyseerd. Zie Figuur 8 en 9. Dit werkje bestaat uit 9 cellen, ieder ruim 1 cm in het vierkant, maar wel 41 lagen dik. We zijn erachter gekomen hoe één cel gevouwen kan worden, maar dat betekent nog niet dat we 9 cellen kunnen reconstrueren, en zeker niet zo klein!



Figuur 8 Vouwpatroon voor één cel van vouwwerk Figuur 9.

Daniël Kraaijkamp

Daniël heeft tijdens een stage de materialen van Frank bij de KB intensief bestudeerd en deze in categorieën ingedeeld op basis van de inwendige structuur. Hierbij onderscheidt hij methoden die ook door Fujimoto (Clover)

(44 stuks) en Momotani (Square twist) (22 stuks) ontdekt zijn, maar ook een categorie die hij de 'Van Kollem Basis' noemt (16 stuks). Verder nog de recursieve tessellations zoals de Pythagoras Tree Tessellation (17 stuks), de Sterren (6 stuks), Complexe tessellations (4 stuks), Corrugations (16 stuks), Geen tessellations (19 stuks), Voorvouwen (2 stuks) en Snoepjes (2 stuks). Daarnaast zijn er nog twintig platte werkjes gemaakt van kralen. Met deze even lange kralen maakte hij tien van de elf bekende regelmatige vlakverdelingen met gelijke hoeken. Hij maakte ook tien 3D-vormen, het geborduurde mapje en de bril van theezeefjes. Al met al een bijzondere verzameling, die voor de liefhebber op afspraak met de afdeling Bijzondere Collecties van de KB te bezichtigen is. ☛

Alle foto's zijn gemaakt door Paula Versnick, tenzij anders vermeld.



Figuur 9 Dit vouwwerk is 4×4 cm en 41 lagen. Het oorspronkelijke papier was 20×20 cm en is verdeeld in een raster van 60×60 vierkantjes en de helft van de diagonalen. Voor- en achterzijde.

Referenties

- Shuzo Fujimoto, *Invitation to Creative Playing with Origami*, 1982, <http://www.ori-house.com/fujimoto.html>.
- Ilan Garibi, *Origami tessellations for everyone*, 2018.
- Eric Gjerde, *Origami Tessellations: Awe-inspiring Geometric Designs*, A.K. Peters, 2009.
- Isao Honda, *The world of Origami*, Japan Publications, 1976.
- D.A. Huffman, Curvature and creases: A primer on paper, *IEEE Transactions on Computers* C-25(10) (1976), pp. 1010–1019.
- Kunihiko Kasahara, *Creative Origami*, Japan Publications, 1977.
- Koninklijke Bibliotheek, Collectie vouwsels, Den Haag, <https://www.kb.nl>.
- Daniël Kraaijkamp, Daniël en de vouwsels van Frank, <https://www.kb.nl>.
- Robert J. Lang, *Twists, Tilings, and Tessellations*, Taylor & Francis, 2018.
- Yoshihide Momotani, Brick Wall, in *BOS Convention Book*, 1984, p. 23.
- Henk Porck, Het koffertje van Frank, *De geest van Papier*, Catalogus Holland Papier Biënnale, 2004.
- Joan Sallas, *Gefaltete Schönheit. Die Kunst des Serviettenbrechens*, 2010. Engelse vertaling: <https://colortreelimited.co.uk/product/folded-beauty>.
- Paula Versnick, *Origami Made in Holland*, Orihouse, 2008, pp. 34–37.
- Caroline Verweij, *Verborgen vouwsels*, masterscriptie Universiteit van Amsterdam, 2006.
- <http://www.orihouse.com/FvK-Pyt>.
- <https://www.papiermakerijdehoop.nl>.
- <http://www.ronresch.org>.

Nicolaos Starreveld

FNWI

Universiteit van Amsterdam

n.j.starreveld@uva.nl

Interview José van Dijck

Inspiratie door de samenhang tussen technologie, gebruiker en ideeën

José van Dijck is hoogleraar media en digitale samenleving aan de Universiteit Utrecht. Haar onderzoek gaat over media, sociale media en mediatechnologieën. Op vrijdag 3 juli 2020 interviewde onze redacteur Nicos Starreveld professor Van Dijck, naar aanleiding van haar voordracht in de webinar van de KNAW, 'Verbonden tegen COVID-19, hoe netwerken pandemieën verspreiden en bestrijden'.

Op vrijdag 3 juli zat ik op mijn bureau en wachtte tot dat de klok 13.00 zou duiden. We hadden met professor José van Dijck afgesproken om te bellen voor een interview. Sinds maart gebeurt bijna alles vanuit mijn woonkamer, dus ook dit interview. De dinsdag daarvoor had ik een webinar van de KNAW bijgewoond, met als onderwerp 'Verbonden tegen COVID-19, hoe netwerken pandemieën verspreiden en bestrijden', waarbij José van Dijck een van de vier sprekers was.

Wat was het doel van het webinar?

"Frank den Hollander had me erbij gevraagd omdat het hele seminar ging over netwerken, en hij zei: 'Daar horen sociale netwerken ook bij.' In de afgelopen maanden heb ik onderzoek gedaan naar het effect van sociale media in het publieke debat net na de uitbraak van corona. Ik denk wel dat mijn invulling van het onderwerp heel anders was dan de anderen, die waren meer gericht op het verspreiden van infecties door menselijk gedrag, ik meer op het verspreiden van informatie over het virus via mensen en technologie. Maar dat is het leuke van zo'n webinar. Alhoewel we weinig van elkaars onderzoek wisten, realiseerde ik me tijdens het webinar dat er ruimte is voor ideeënbesmetting, om het in de metafoor te houden. Ideeën over hoe complexe netwerken werken. Voor ons in de sociale wetenschappen en humaniora is het ongelooflijk moeilijk om te doorgronden hoe complexe systemen werken waarbij zowel technologie, als gebruikers, als ideeën een belangrijke rol spelen. Deze

samenhang tussen technologie, gebruiker en ideeën in het verspreiden van informatie over het virus vind ik heel interessant."

Is een webinar anders dan een voordracht op locatie?

"Ja wel enigszins, je kunt vooral minder improviseren; normaal kan ik heel snel reageren op de andere sprekers en op het publiek, maar hier moet je op teveel dingen tegelijk letten. Dus dan moet je heel strak voorbereiden."

Uw onderzoek gaat over media, sociale media en mediatechnologieën. Wat zijn centrale vragen in uw onderzoek?

"Afgelopen dinsdag behandelde ik welke



José van Dijck

rol sociale media speelden in het publieke debat direct na de COVID-19 uitbraak in Nederland. Sociale media worden zowel gebruikt bij het verspreiden van urgente medische informatie, maar zijn tegelijkertijd ook instrumenteel in het verspreiden van misinformatie. Ik beschouw sociale media als een tweesnijdend zwaard.

Neem als voorbeeld hoe, tijdens de pandemie, de WHO en het RIVM heel bewust sociale media hebben ingeschakeld om bepaalde gezondheidsinformatie over te brengen aan een zo groot mogelijk publiek, door middel bijvoorbeeld van influencers op YouTube. Tegelijkertijd zijn met name Facebook, Twitter en YouTube, in de afgelopen maanden instrumenteel geweest in het verspreiden van foute informatie over het virus. De WHO heeft dat de infodemie genoemd.

Mijn verdere onderzoek laat zien hoe bestuurders, politici en journalisten van nieuwsorganisaties tegenwicht bieden als ze constateren dat sociale media zo'n centrale positie innemen in de verspreiding van misinformatie. Bijvoorbeeld, in het programma *Het Coronavirus: Feiten en Fabels* van de NOS lieten de presentatoren vragen uit sociale mediakanalen komen en legden deze voor aan experts. Experts bieden tegenwicht door er rationeel iets zinnigs over te zeggen. En dat werkt dan goed als bijstelling van de ongefilterde infodemie."

Denkt u dat op een gegeven moment te veel informatie ongewenste effecten kan hebben?

"Ja dat is precies de reden waarom de WHO de term infodemie heeft gekozen. We noemen het ook infobesitas. Het betekent dat te veel aan informatie juist verwarrend is, vooral als de informatie niet specifiek genoeg is en als de bronnen elkaar tegen spreken."

Als gebruiker van Twitter en Facebook ervaar ik vooral twee aspecten van sociale media, ten eerste informeren en ten tweede discussiëren. Mijn indruk is dat het grootste deel van de gebruikers 'lokaal informatie uitwisselt', maar er is ook een kleine fractie van superspreaders die een groot bereik hebben. Klopt dit beeld van mij?

“Inderdaad, er zijn twee modellen van verspreiding, de eerste is het *superspreading-model*. In dit model is er een klein aantal gebruikers met grote aantallen volgers, de superspreaders, die de macht hebben gekregen van dit sociale medium om heel veel mensen te bereiken. Maar voor het grootste deel zijn het gewoon groepen mensen die verspreidingsmacht hebben over een eigen overzichtelijke omgeving. Nu is het niet zo dat die laatste verspreidingsmethode minder schadelijk zou zijn, want die kan ook heel grote invloed hebben. Bijvoorbeeld, een WhatsApp-groep kan maximaal 256 leden hebben, en één boodschap kan door dezelfde persoon maximaal vijf keer worden doorgestuurd. Maar door een kettingreactie kun je dan nog heel veel mensen bereiken.

Het is interessant om naar deze twee modellen van verspreiding te kijken, de superspreaders versus de kleine omgevingen. Platforms zoals Facebook, YouTube en Twitter bepalen zelf wat wel mag en wat niet mag binnen zo'n context, ze kunnen zowel op het superspreading-model als op het WhatsApp-model inzetten. Instagram en WhatsApp zijn immers ook eigendom van Facebook. Deze platforms hebben dus de macht om het aantal verspreiders en hun bereik bij te stellen. Precies om dit effect van snelle verspreiding tegen te gaan. Bovendien kunnen ze misinformatie als zodanig labelen en direct doorverwijzen naar correcte informatie van de WHO of RIVM — dit hebben Facebook, YouTube en Twitter ook gedaan tijdens de pandemie. Ze hebben dus middelen om verspreiding van misinformatie te vertragen en om in te grijpen als het nodig is.

Het is belangrijk te noemen dat, naast de macht om in te grijpen, deze bedrijven ook hun eigen prikkel hebben om misinformatie te verspreiden, en dat is natuurlijk economisch. Ze verdienen geld met massale verspreiding van informatie en advertenties. Het gaat dus tegen hun eigen belang in om allerlei 'virale' verspreidingen van boodschappen tegen te houden. En dat maakt de werkelijkheid complexer.”

Het tweede aspect van sociale media is het voeren van discussies, maar in tegenstelling tot het verspreiden van informatie lijken platforms hiervoor minder geschikt.

“Ik zeg altijd, sociale media zijn vooral heel nuttig voor eenrichtingsverkeer van informatie maar totaal onhandig voor dialoog. Dit ligt ook een beetje aan de technologische *affordances*, dus de manier waarop deze media vorm hebben gekregen, bijvoorbeeld in hun interfaces. Ten eerste kun je met heel weinig tekens communiceren op sociale media; berichten zijn kort, bondig en werken vooral met beelden.

Emoties doen het veel beter op sociale media dan argumenten. Emoties zijn het primaat van de sociale media, terwijl rationele discussies, argumenten, nuances, veel beter tot hun recht komen in andere mediavormen, in kranten bijvoorbeeld. Uitingen waar je over na moet denken, die reflectie vereisen en die tot dialoog uitnodigen komen nauwelijks aan bod op sociale media. Daarom zeggen we dat sociale media bijna inherent aanzetten tot polarisatie en vlammende, felle discussies. Sociale media kunnen mensen tegen elkaar opzetten, maar ook mensen aanzetten tot gezamenlijke actie, beweging.

Sociale media kunnen ook een heel positieve functie hebben; zie bijvoorbeeld hoe tijdens de pandemie verpleegsters, zieken, artsen, zelfgemaakte filmpjes gebruikten om een emotionele boodschap via YouTube te delen. Een boodschap van hoe ze die situatie beleefden bijvoorbeeld, of om te laten zien wat een enorme inspanning de zorg voor patiënten kostte. Deze positieve kant van sociale media moeten we ook niet onderschatten, het kan heel veel troost bieden en mensen met elkaar in contact brengen.”

Had de wetenschap tijdens de coronacrisis ook te maken met sociale media als een tweesnijdend zwaard?

“Absoluut, de wetenschap is gewend om binnen de eigen kring om te gaan met onzekerheid, vooral als je nog bezig bent met onderzoek naar iets onbekends, zoals een virus. Een mooi voorbeeld vind ik het platform ArXiv waar artikelen te vinden zijn die nog niet af zijn. ArXiv richt zich alleen op het faciliteren, je kunt sneller commentaar krijgen op je onderzoek omdat meer mensen daar toegang hebben. Een uitstekend idee, want je kunt sneller meer wetenschappers bereiken die mee kunnen discussiëren. Wat je nu ziet gebeuren, is dat niet-wetenschap-

pers ArXiv gebruiken om artikelen weg te plukken die nog niet af zijn en om een of andere rare complottheorie te onderbouwen. Dit is weer een voorbeeld van hoe sociale media kunnen bijdragen aan polarisatie.”

En wat kunnen we aan hate-speech en complottheorieën doen?

“Ten eerste kunnen techbedrijven iets doen aan de distributiekkanalen, namelijk deze zodanig inrichten en bijstellen dat *hate-speech* veel minder kans krijgt zich te massaal en met enorme snelheid te verspreiden. Maar ook de gebruikers moeten zelf verantwoordelijkheid nemen. De enige mogelijkheid die ik hier zie is om kinderen vanaf jonge leeftijd een kritische houding bij te brengen, altijd informatie leren wegen en op een wetenschappelijke manier leren bekijken naar de bronnen en de belangen achter informatie.

Ik denk ook dat iedereen een beetje moet weten hoe sociale media werken, hoe ze in elkaar zitten, hoe ze gebruikers tot op zeker hoogte manipuleren. Je moet beseffen dat gratis nooit gratis is, maar dat je altijd met je eigen data betaalt en dat heeft consequenties voor je privacy. Dit is wat ik noem 'media-geletterdheid'. Eigenlijk zie ik educatie en onderwijs in media-geletterdheid als een vaccin tegen vele vormen van hate-speech en polarisatie.”

Werkt u eigenlijk samen met mensen uit bèta-disciplines?

“Ik werk soms samen met informatici, bijvoorbeeld bij het uitzoeken van hoe informatie zich beweegt, hoe algoritmes werken en hoe hun gebruik zo goed mogelijk ingepast kan worden in geïnstitutionaliseerde omgevingen. Algoritmes zijn heel belangrijk voor sociale media om de circulatie van informatie te beheersen en foutieve informatie uit te filteren. En dat is waanzinnig ingewikkeld want er gaan miljarden boodschappen per dag via het internet de wereld over.”

Om af te sluiten, gebruikt u ook zelf sociale media?

“Ik ben ongeveer twaalf jaar bezig met sociale media maar ik heb zelf nog nooit op Facebook gezeten. Ik ben iemand die alles bijhoudt over sociale media, en dan met name de politieke en de economische aspecten daarvan, maar ik wil niet dat al mijn tijd verdwijnt door het constante checken en bekijken van de nieuwste feeds. Ik ben liever bezig met argumenten en reflectie dan met tweets en likes.”

Piet Groeneboom

*Delft Institute of Applied Mathematics
TU Delft
p.groeneboom@tudelft.nl*



Column Piet grijpt zijn kans

Nederland in tijden van corona

Piet Groeneboom, emeritus hoogleraar statistiek aan de TU Delft, schrijft dit keer in plaats van Casper Albers een column over een actueel statistisch onderwerp.

Op mijn avondwandeling werd ik aangeroepen door een buurvrouw, die in de tuin aan het werk was. Zij riep: “Het reproductiegetal staat op 1,4, had je dat al gezien?” Nee, dat had ik niet gezien; ik was nog blijven steken op 1,29. Op de televisie had ik iemand zien uitleggen dat dit betekende dat op dat moment 100 mensen gemiddeld 129 andere mensen infecteerden. De buurvrouw en ik hadden al eerder over het reproductiegetal gepraat. Mijn collega Richard Gill heeft het in dit verband over “A lie for children”. Niet zo maar een leugen dus, een leugen voor kinderen.

Aan de andere kant had een oude vriend die nu in Duitsland woont, waar de natuurkundige Angela Merkel zelf aan het Duitse volk de betekenis van het reproductiegetal had uitgelegd, mij geschreven dat het voor hem niet duidelijk was waarom het reproductiegetal geen goede basis voor politieke beslissingen zou zijn, zolang het onmogelijk is de individuele besmettingsketens te reconstrueren.

Ik zelf dacht, toen ik Jaap van Dissel voor de eerste keer over het reproductiegetal zag praten op de televisie, ineens: “Hé, wetenskundigen zouden hier iets nuttigs kunnen doen.” Het was op een moment dat ik al verwickeld was in een discussie met een groep

kansrekenaars en statistici, waarvan één ons een stukje dat hij aan de krant wilde sturen had voorgelegd. Via deze discussie was ik beland op het COVID-19-mod-forum, waar ik onmiddellijk een ‘channel’ gestart ben, getiteld R_0 (R_0 om verwarring met de momenteel veel gebruikte taal R voor statistische software te vermijden, R_0 zou eigenlijk het reproductiegetal aan het begin van de pandemie zijn, het zogenaamde basis-reproductiegetal).

Merkwaardig is dat we steeds op de televisie mensen zien die de mededelingen over de hoogte van het reproductiegetal van het RIVM voor zoete koek lijken te slikken, terwijl we eigenlijk geen idee hebben hoe het RIVM dit heeft uitgerekend. Op de site van het RIVM [8] zien we onder het kopje ‘reproductiegetal R ’ drie dingen:

1. ‘Berekening waarde reproductiegetal R ’. Dit is een link naar een artikel uit 2007 [7].
2. ‘Code beschikbaar’. Dit is een link naar het R-package `EpiEstim` van Anne Cori en anderen.
3. ‘R-package R beschikbaar’. Dit is een link naar een ander R-package, het R-package `R0`.

Weten we nu hoe het RIVM R heeft berekend? Absoluut niet! We weten zelfs niet welke van de twee genoemde R-packages (en welke methoden hieruit) ze hebben gebruikt! We zullen daarom nu een ander onderwerp bekijken dat op dezelfde site gegeven wordt, maar waar meer informatie lijkt te worden verstrekt.



Figuur 1 Screenshot van de RIVM-webpagina 'Rekenmodellen openbaar en toegankelijk'.

De verdeling van de incubatietijd

Op de pagina 'Rekenmodellen openbaar en toegankelijk' op de RIVM-site [8] staat bovenaan 'Onderzoek naar incubatietijd van COVID-19' (zie Figuur 1 voor een screenshot). Dit bevat een link naar [1] en de twee andere verwijzingen ('Code beschikbaar' en 'Data beschikbaar') zijn allebei naar hetzelfde 'supplementary material' bij dit artikel, dat een databestand van 88 'travelers from Wuhan' en een R-script bevat.

Blij dat ik eindelijk een concrete databehandeling van het RIVM in handen kreeg! Helaas waren er wat moeilijkheden bij het runnen van het R-script, iets dat overigens in het algemeen vaak voorkomt. Waar gaat het om? De gegevens zijn van 88 personen die aan het eind van vorig jaar en/of het begin van dit jaar in Wuhan zijn geweest en daar waarschijnlijk het COVID-19-virus hebben opgelopen. Ook is het tijdstip bekend waarop zij symptomatisch zijn geworden. Het laatste is enigszins ongewoon, omdat dit tijdstip vaak ook op een of andere manier gecensureerd is, net als het tijdstip van de infectie dat hier *interval gecensureerd* is, zoals dat heet. Maar ik neem deze data nu maar even 'at face value'.

Door wat verder te studeren in het R-script ontdekte ik dat het eigenlijke databestand dat voor de analyse gebruikt was een selectie uit en bewerking van het op de site verstrekte databestand 'BAKER_Supplementary material S1_data.tsv' was en 'data.input' heette in het R-script; beide databestanden zijn te vinden op mijn GitHub-repository [4].

Er zijn wat eigenaardigheden. De eerste persoon heeft als vertrekdatum uit Wuhan 4-1-2020, maar 3-1-2020 als datum voor het krijgen van symptomen. In data.input is hier in beide gevallen 3-1-2020 van gemaakt. Algemeen is het eind van de blootstellingsperiode gelijkgesteld aan het tijdstip van het krijgen van symptomen als dit nog in Wuhan gebeurde. 'Blootstellingsperiode' is de vertaling van het Engelse 'exposure time', een uitdrukking die ik eigenlijk liever zou gebruiken, maar ik ben nu eenmaal in het Nederlands begonnen te schrijven. Verder: Wuhan-reiziger nummer 67 is 0 dagen in Wuhan geweest ('connecting flight'). Daar heb ik maar één dag van gemaakt. Dat is overigens de enige verandering die ik in het 'data.input'-bestand heb aangebracht.

Ten slotte zijn er een groot aantal NA's ('not available') voor de aanvang van de blootstellingsperiode in Wuhan. De NA's zijn allemaal op -18 gezet in het getransformeerde databestand, wat (kenmerklijk) betekent: 18 dagen voor oudjaar, het oudjaar zelf is op 0 gezet (heb ik gededuceerd).

Om te kijken of ik er hetzelfde uitkreeg als het RIVM als ik hun type analyse hierop los zou laten, evenwel zonder hun (mijns inziens niet relevante) Bayesiaanse terminologie erbij te halen, heb ik een C++-programma geschreven dat ook te vinden is op [4]. Tussen haakjes: C++ is een zich nog steeds ontwikkelende taal die om verschillende redenen veruit superieur is aan R. Het is veel sneller, er zijn veel meer 'debug'-faciliteiten, C++11 heeft heel goede random number-generatoren (Mersenne-twister, enzovoort), de geheugen-behandeling is beter en ten slotte is de taal veel meer 'solide' dan R (C++ heeft zich natuurlijk ook al heel lang ontwikkeld vanuit C).

Als je eenmaal een C++-programma hebt geschreven kun je dit meestal gemakkelijk doorsluizen naar een R-script via het R-package Rcpp (zie [2]) en dat is ook wat ik in [4] heb gedaan. De conclusie van mijn exercitie is: ja, ik krijg er ongeveer hetzelfde uit als zij als ik het in hun R-code gegenereerde bestand data.input gebruik en *parametrische* maximum likelihood gebruik. Maar daarmee is de kous nog niet af, zie hieronder.

Niet-parametrische maximum likelihood

Het heeft er een beetje de schijn van dat veel epidemiologen hoogstens bekend zijn met het begrip 'parametrische maximum likelihood' en dat bij hen het begrip 'niet-parametrische maximum likelihood' niet bekend is. Al meer dan zestig jaar is echter bekend dat je ook iets heel anders kunt doen, namelijk *niet-parametrische maximum likelihood*. Een voorbeeld van zo'n niet-parametrische maximum likelihood-schatter is de schatter van een monotoon dalende dichtheid in een artikel uit 1956 [3].

We bespreken hier nu kort de parametrische en niet-parametrische maximum likelihood-methode in het onderhavige geval. Hierbij centreren we voor de eenvoud van notatie, en zonder verlies van algemeenheid, de blootstellingsperiode zo dat het linkereindpunt 0 is, dat wil zeggen, we verminderen deze met het begin van de blootstellingsperiode. De log-likelihood (ik gebruik maar de heel erg ingeburgerde Engels-Amerikaanse terminologie en probeer niet Nederlands-puristisch te zijn) voor de i -de waarneming die ons ter beschikking staat zou zijn:

$$\log \int_{t \in [0, E_i]} g(S_i - t) dF_i(t),$$

dat wil zeggen de logaritme van de dichtheid van één waarneming. Hier is g de onbekende dichtheid van de incubatietijd waarin we geïnteresseerd zijn, S_i het tijdstip waarop persoon i symptomatisch is geworden, verminderd met het beginpunt van zijn/haar blootstellingsperiode, E_i is het eind van de blootstellingsperiode, verminderd met het begin van de blootstellingsperiode en F_i is de verdelingsfunctie van het (vershoven) infectietijdstip op het interval $[0, E_i]$. We hebben hier in feite te maken met een *deconvolutie* probleem. Om de dichtheid g van de incubatietijd-verdeling (waar het ons dus eigenlijk om gaat) identificeerbaar te maken, moeten we een aanname doen met betrekking tot de verdelingsfunctie F_i van de blootstellingsperiode. We maken hiervoor de meest voor de hand liggende aanname, die inderdaad meestal gemaakt wordt, namelijk dat deze verdeling uniform is op het interval, zie bijvoorbeeld [6]. Ook in [1] wordt deze aanname gemaakt, waarin dit echter, mijns inziens ten onrechte, in Bayesiaans terminologie, een 'prior distribution' wordt genoemd.

Als we deze aanname maken, wordt de log-likelihood van alle (88) waarnemingen, onder de aanname dat deze onafhankelijk

zijn, de logaritme van de dichtheid van alle waarnemingen:

$$\sum_{i=1}^n \log \left\{ \int_{t \in [0, E_i]} g(S_i - t) dt / E_i \right\} \quad (1)$$

waarbij $n = 88$.

De scheiding der geesten treedt nu echter op in de manier waarop g wordt geschat. Het RIVM, samen met de bijna volledige epidemiologische gemeenschap, doet alsof er alleen maar een aantal keuzes hiervoor mogelijk zijn: de Weibull-verdeling, de gamma-verdeling en de log-normale verdeling. Het doet er nu even niet toe wat hiervoor de formules zijn, die men trouwens op internet kan opzoeken. Het gaat om het principe dat men een verdeling (die overigens duidelijk begrensde support heeft) wil schatten met een aantal bekende verdelingen met oneindige support die door een klein aantal parameters gekarakteriseerd worden. Omdat er geen dwingende inhoudelijke reden is om voor één van deze verdelingen te kiezen, zien we steeds artikelen waar ze maar allemaal worden geprobeerd, terwijl ze er eigenlijk waarschijnlijk allemaal naast zitten als we wat nauwkeuriger naar de data kijken.

Het maximum likelihood-principe vertelt ons om g te schatten door (1) te maximaliseren naar g . Dat wil zeggen, we maximaliseren de logaritme van de dichtheid van de waarnemingen als functie van de onbekende verdeling.

Omdat de noemer E_i bij de integraal in (1) geen rol speelt in de maximalisatie van (1), komt dit neer op het maximaliseren van

$$\sum_{i=1}^n \log \{G(S_i) - G(S_i - E_i)\}, \quad (2)$$

waarbij G de (cumulatieve) verdelingsfunctie is horend bij de dichtheid g (de geïntegreerde dichtheid dus). Van de Weibull-enzovoort-gemeenschap mogen we hier dus alleen een Weibull-enzovoort-verdelingsfunctie kiezen. Maar waarom eigenlijk? Wat gebeurt er als we (2) gewoon maximaliseren over *alle* verdelingsfuncties? We krijgen dan een zogenaamde discrete verdelingsfunctie als oplossing, corresponderend met discrete kansen op een eindig aantal (niet vooraf gegeven) punten: de *niet-parametrische maximum likelihood-schatter van de verdeling!* Deze verdelingsfunctie is

stuksgewijs constant en wordt getoond in Figuur 2 links, samen met de verdelingsfunctie die uit de maximum likelihood-procedure voor de Weibull-verdeling komt.

Het probleem (2) te maximaliseren over alle verdelingsfuncties is niet geheel triviaal. Er bestaan verschillende (iteratieve) methoden die besproken worden in [5]. We kunnen bijvoorbeeld het zogenaamde Expectation Maximization-algoritme (EM-algoritme) gebruiken en ook het veel snellere iteratieve convexe minorant-algoritme (zie [5] en [4]).

We kunnen deze schatting van de verdelingsfunctie van de incubatietijd ook als basis nemen voor een gladdere schatting van de verdelingsfunctie, de zogenaamde 'Smoothed Maximum Likelihood Estimate' (SMLE) en zelfs van de (absoluut continue) dichtheid (als we aannemen dat deze bestaat). Als in [5] (zie bijvoorbeeld sectie 1.2), kunnen we de SMLE berekenen, evenals een schatting van de dichtheid, in beide gevallen gebruikmakend van de niet-parametrische MLE. De SMLE wordt gedefinieerd door

$$\tilde{F}_{nh}(t) = \int \text{IK}((t-y)/h) d\hat{F}_n(y), \quad t \in \mathbb{R}, \quad (3)$$

waarbij $h > 0$, $\hat{F}_n$ de MLE van de verdelingsfunctie, en IK een geïntegreerde kern

$$\text{IK}(x) = \int_{-\infty}^x K(u) du, \quad x \in \mathbb{R},$$

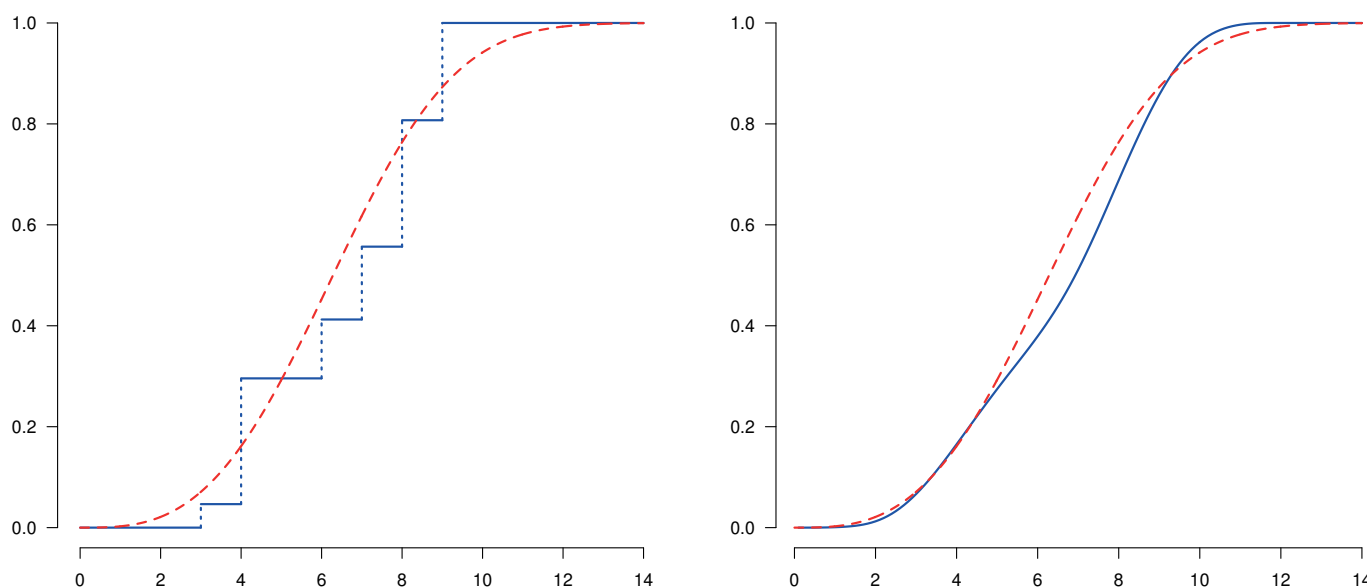
is. K is hier een symmetrische kern met support $[-1, 1]$, bijvoorbeeld de zogenaamde triweight kern

$$K(u) = \frac{35}{32} (1 - u^2)^3 1_{[-1, 1]}(u), \quad u \in \mathbb{R}.$$

We schatten de dichtheid door:

$$\tilde{f}_{nh}(t) = h^{-1} \int K((t-y)/h) d\hat{F}_n(y), \quad t \in \mathbb{R}. \quad (4)$$

Voor de analyse hier namen we $h = 3$ in (3) en $h = 4$ in (4). Er is veel theorie ontwikkeld voor hoe groot we h moeten kiezen, maar we kunnen daarop hier niet ingaan. Het resultaat is te zien in de figuren, waar de schatters vergeleken worden met wat de Weibull maximum likelihood-schatters opleveren.



Figuur 2 Links: niet-parametrische Maximum Likelihood-schatter (MLE) van de verdelingsfunctie van de incubatietijd (blauw, sprongen zijn gestippeld) en Weibull MLE van de verdelingsfunctie (rood, gestreept). Rechts: Smoothed Maximum Likelihood Estimator (SMLE) van de verdelingsfunctie van de incubatietijd (blauw) en Weibull MLE (rood, gestreept).

Conclusie

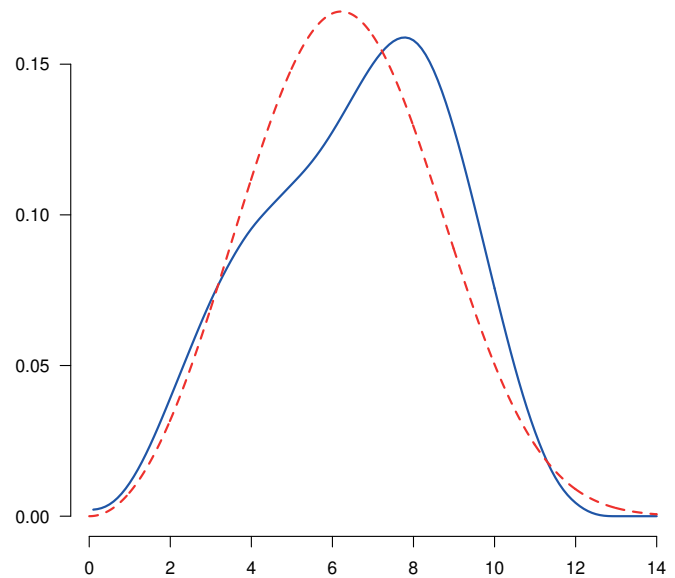
We hebben de site [8] ‘Rekenmodellen openbaar en toegankelijk’ van het RIVM bekeken. Helaas zijn we hier niets wijzer geworden over de manier waarop het reproductiegetal door het RIVM wordt berekend. Het ging wat beter met een schatting van de verdeling van de incubatietijd, waarvoor een R-script geleverd werd dat na herbenoemen van een bestand dat er niet was en installeren van extra packages gerund kon worden. Hierdoor kon ook achterhaald worden wat het getransformeerde databestand was dat men eigenlijk bewerkt had.

Voor het schatten van de verdeling van de incubatietijd gaf ik een andere methode, gebaseerd op niet-parametrische maximum likelihood, daarmee vermijding dat we ons in een strijd tussen log-normale, gamma- of Weibull-verdeling hoeven te begeven. De methodes die ik gebruikt heb kunnen allemaal gecheckt worden op [4] (‘de berekening is openbaar en toegankelijk’).

Als we de verdelingsfuncties, verkregen via de Weibull maximum likelihood-methode, vergelijken met die verkregen via de niet-parametrische maximum likelihood-methode, zien we dat deze schattingen op elkaar lijken, vooral de SMLE (‘Smoothed Maximum Likelihood Estimate’) en de Weibull MLE (‘Weibull Maximum Likelihood Estimate’), zie Figuur 2 rechts. De niet-parametrische aanpak leent zich er dus ook voor om eventuele keuze voor een parametrisch model te rechtvaardigen.

Bekijken we echter één niveau dieper de dichtheid, dan zien we in Figuur 3 een opmerkelijk verschil: de modus van de dichtheid (locatie van het maximum) is verschoven van 6,2 naar 7,8 dagen. Dat is dus 1,6 dagen verschil! De betekenis van dit verschil en de waarde die we hieraan moeten hechten, zouden we graag verder willen onderzoeken. Berekeningen van dit type zijn van belang voor de quarantainetijd.

Deze studie is natuurlijk maar gebaseerd op 88 mensen, van wie de gegevens ook nogal onvolledig zijn vanwege de vele NA's (‘not available’) aan het begin van de blootstellingsperiode. Maar in ieder geval treft de niet-parametrische methode niet het verwijt



Figuur 3 Schatter van de dichtheid van de incubatietijd, gebaseerd op de niet-parametrische MLE van de verdelingsfunctie (blauw) en Weibull MLE van de dichtheid (rood, gestreept).

dat we een verdeling gepakt hebben (Weibull, gamma, enzovoort) waarvoor we geen echt argument hebben en die alleen al door zijn rigide beperkingen een vertekend beeld kan geven van de data.

Voor de niet-parametrische schatters hebben mathematisch statistici de laatste zestig jaar heel veel theorie ontwikkeld en we kunnen er hetzelfde soort dingen mee doen als met de parametrische schatters, zoals (niet noodzakelijk symmetrische!) betrouwbaarheidsintervallen uitrekenen voor de schattingen van de momenten en de verdeling zelf. Er lijkt dus voor onderzoekers die zich met dit soort data bezighouden voldoende aanleiding om zich eens in deze niet-parametrische methoden te verdiepen. En voor mathematisch statistici om deze belangrijke epidemiologische onderwerpen te bestuderen. ¶

Referenties

- 1 Jantien A. Backer, Don Klinkenberg en Jacco Wallinga, Incubation period of 2019 novel coronavirus (2019-nCoV) infections among travellers from Wuhan, China, 20–28 January 2020, *Euro Surveill.* 25 (2020).
- 2 Dirk Eddebuettel, *Seamless R and C++ Integration with Rcpp*, Springer, New York, 2013.
- 3 Ulf Grenander. On the theory of mortality measurement. II, *Skand. Aktuarietidskr.* 39 (1956), 125–153.
- 4 Piet Groeneboom, Incubationtime, <https://github.com/pietg/incubationtime>, 2020.
- 5 Piet Groeneboom en Geurt Jongbloed, *Non-parametric Estimation under Shape Constraints*, Cambridge Univ. Press, 2014.
- 6 Nicholas G. Reich, Justin Lessler, Derek A. T. Cummings en Ron Brookmeyer, Estimating incubation period distributions with coarse data, *Stat. Med.* 28(22) (2009), 2769–2784.
- 7 J. Wallinga and M. Lipsitch. How generation intervals shape the relationship between growth rates and reproductive numbers, *Proc. R. Soc. B* 274 (2007), 599–604.
- 8 RIVM, De zorg voor morgen begint vandaag. Rekenmodellen openbaar en toegankelijk, 2020, <https://www.rivm.nl/coronavirus-covid-19/hoe-berekeningen-bijdragen-aan-bestrijding-van-virus/rekenmodellen>.

Robbin Bastiaansen

*Institute for Marine and Atmospheric research
Utrecht (IMAU), Universiteit Utrecht
r.bastiaansen@uu.nl*

Kaj-Ivar van der Wijst

*Planbureau voor de Leefomgeving (PBL)
Den Haag
kajivar.vanderwijst@pbl.nl*

Onderzoek

Klimaatwiskunde

Harder en harder klinkt de roep om klimaatopwarming te tempereren. Maar waarom zorgt deze opwarming voor drastische problemen en hoe kan dit klimaatprobleem opgelost worden? In onderzoek naar beide vraagstukken komt veel wiskunde kijken. Dit wordt in dit artikel geïllustreerd aan de hand van een aantal simpele voorbeeldmodellen. Robbin Bastiaansen en Kaj-Ivar van der Wijst gaven beiden een lezing over dit thema op het KWG Wintersymposium van 11 januari.

Sinds de industrialisatie is het klimaat op aarde in rap tempo aan het veranderen. Zo is de gemiddelde temperatuur in Nederland in de laatste 130 jaar met 1,7°C toegenomen [1]. Dit soort verandering is op klimatologische schaal erg groot, en deze vindt bovendien ook nog eens erg snel plaats. De gevolgen kunnen daarom ook enorm zijn voor zowel mens als natuur. De voorspelde gevolgen variëren van lokale effecten (bijvoorbeeld het afsterven van een ecosysteem) tot globale effecten (bijvoorbeeld een zeespiegelstijging). Vaker en vaker wordt ook bericht over weersextremen die in lijn liggen met de voorspellingen. Denk hierbij bijvoorbeeld aan de extreme droogte in Europa in 2018, de hoeveelheid en intensiteit van bosbranden in 2019 en de toenemende grootte van hagelstenen tijdens vaker voorkomende hagelstormen.

Het moge duidelijk zijn: klimaatwetenschap is op het moment een *hot issue*. Wetenschappers van over de hele wereld en vanuit alle mogelijke disciplines werken hard aan het verbeteren van ons begrip vanuit ongeveer alle mogelijke invalshoeken. In dit artikel leggen we de

focus bij een wiskundige invalshoek. In het bijzonder leggen we uit hoe wiskundige theorieën en technieken een centrale rol spelen bij het beantwoorden van de volgende twee centrale vraagstukken in klimaatonderzoek:

1. Hoe kunnen we het klimaat voorspellen en begrijpen?
2. Hoe lossen we het klimaatprobleem economisch verantwoord op?

Klimaatmodellen

Naast natuurlijk empirisch onderzoek, wordt het grootste deel van klimaatonderzoek gedaan aan de hand van voorspellende modellen. Bij dit modelleren wordt de toestand van het te bestuderen klimaatstelsel weergegeven door x , en het model stipuleert dan hoe x verandert gedurende de tijd. Er is een aantal mogelijkheden om dit te doen, maar veruit het meest gebruikelijk is om een differentiaalvergelijking te maken van de vorm

$$\frac{dx(t)}{dt} = f(x(t), t), \quad (1)$$

waarbij f een functie of operator is.

De precieze vorm van (1) verschilt enorm tussen modellen. Zo zijn er aan de ene kant grootschalige modellen waar x per locatie op aarde informatie bevat over temperatuur, luchtdruk, windstroming, luchtvochtigheid, kleur grond, et cetera, en f een ingewikkelde (partiële) differentiaaloperator is die alle bekende natuurkundige processen voorschrijft. Daar tegenover staan simpelere, vaak conceptuele modellen waarin x slechts laagdimensionaal is — en bijvoorbeeld alleen de gemiddelde globale temperatuur bevat — en f een simpele functie is. Het voordeel van eerstgenoemde, grootschalige modellen is dat ze (potentieel) beter de werkelijkheid weergeven; daarentegen is het vaak makkelijker om intuïtie en begrip op te doen aan de hand van de simpelere modellen. In het vakgebied zie je daarom ook vaak een wisselwerking tussen beide soorten modellen, waarin de simpele modellen eerst kwalitatieve inzichten geven en de grotere modellen daarna kwantitatieve voorspellingen.

De moeilijkheid in klimaatonderzoek

Op basis hiervan lijkt het vrij eenduidig hoe klimaatverandering bestudeerd moet worden. Er is echter één belangrijke moeilijkheid: als door klimaatverandering iets verandert, geeft die verandering zelf weer aanleiding tot een additionele verandering. Een concreet voorbeeld: stel dat de aarde helemaal bedekt is met sneeuw. In

parameter	waarde	beschrijving
C_T	$5 \cdot 10^8 \text{ J m}^{-2} \text{ K}^{-1}$	warmtecapaciteit van de aarde
Q_0	$341,3 \text{ W m}^{-2}$	vermogen van inkomende zonnestraling
σ	$5,67 \cdot 10^{-8} \text{ W m}^{-2} \text{ K}^{-4}$	Stefan-Boltzman-constante
ε	0,61	emissiviteit van de aarde
α_1	0,7	albedo van ijs
α_2	0,289	albedo van water
T_1	260 K	temperatuur waaronder aarde alleen ijs heeft
T_2	293 K	temperatuur waarboven aarde geen ijs meer heeft
K	0,1	temperatuurgevoeligheid ijs-albedo terugkoppeling

Tabel 1 Waardes en beschrijving van parameters uit vergelijking (2).

dat geval wordt veel van het inkomende zonlicht weerkaatst door het witte sneeuwoppervlak. Als de temperatuur op aarde dan iets toeneemt door klimaatverandering, smelt een deel van de sneeuw. Als gevolg daarvan wordt ook minder zonlicht weerkaatst, waardoor de temperatuur op aarde nog iets extra toeneemt. Dit soort effecten worden niet-lineaire terugkoppelingen genoemd en het klimaatstelsel is ermee doorspekt.

De moeilijkheid van dergelijke niet-lineaire iteiten illustreren we aan de hand van een simpel klimaatmodel, waarin het aardse klimaat weergegeven wordt door enkel de globale temperatuur T . De verandering $\frac{dT}{dt}$ wordt beschreven aan de hand van de differentiaalvergelijking (geïnspireerd door [4])

$$\frac{dT}{dt} = f(T) \\ := \frac{1}{C_T} [Q_0(1 - \alpha(T)) + \mu - \varepsilon\sigma T^4]. \quad (2)$$

Hierin beschrijft de term $Q_0(1 - \alpha(T))$ de opwarming door inkomend zonlicht, de term $-\varepsilon\sigma T^4$ de warmte die uitgestraald wordt door de aarde (de 'black body radiation') en de term $+\mu$ de extra opwarming als gevolg van broeikasgassen in de lucht. Een korte beschrijving van de parameters (C_T , Q_0 en ε) inclusief typisch gevonden waardes staan voor de geïnteresseerden in Tabel 1.

De functie α beschrijft welk deel van de zonnestraling weerkaatst wordt (de zogenoemde albedo). Zoals hiervoor beschreven verandert de albedo afhankelijk van de werkelijke temperatuur vanwege smelten van ijs. Voor erg lage temperaturen zal de hele aarde bedekt zijn met ijs, zodat de albedo hoog is (en veel zonlicht weerkaatst wordt). Bij hoge temperaturen is juist alle sneeuw gesmolten, waardoor

de albedo laag is (en weinig zonlicht weerkaatst wordt). Een mogelijke manier om dit te vangen in een formule voor de albedo α is als volgt:

$$\alpha(T) = \alpha_1 + (\alpha_2 - \alpha_1) \frac{1 + \tanh(K[T - \frac{T_1 + T_2}{2}])}{2}, \quad (3)$$

waarbij α_1 de albedo van ijs is en α_2 die van water. Een plot van deze functie is weergegeven in Figuur 1(a). De waardes van de parameters zijn opgenomen in Tabel 1.

Het model (2) stipuleert nu hoe de temperatuur verandert als functie van de huidige temperatuur; elke huidige temperatuur T geeft aanleiding tot een verandering $\frac{dT}{dt}$, enzovoorts. Bijna altijd kunnen de uiteindelijke *banen* $T(t)$ slechts numeriek door een computer bepaald worden – zoals ook het geval bij het model (2). Echter, vooral in laagdimensionale systemen, is het mogelijk om ook op een andere manier inzicht te krijgen in het gedrag van oplossingen van (2). Hiertoe merken we op dat het mogelijk is om een temperatuur T te hebben

waarvoor $\frac{dT}{dt} = f(T) = 0$; oftewel, de temperatuur verandert niet. Dit soort temperaturen noteren we als T_* en worden de vaste punten of evenwichtspunten van het model genoemd. Voor model (2) voldoen de evenwichtspunten aan

$$\mu = \varepsilon\sigma T_*^4 - Q_0(1 - \alpha(T_*)). \quad (4)$$

Hiermee hebben we meteen een beschrijving van de vaste punten afhankelijk van de waarde van μ (die de extra opwarming door broeikasgassen beschrijft). In Figuur 1(b) is (4) geplot, waarin dus per μ -waarde de mogelijke evenwichtspunten T_* af te lezen zijn (wat er soms meerdere zijn).

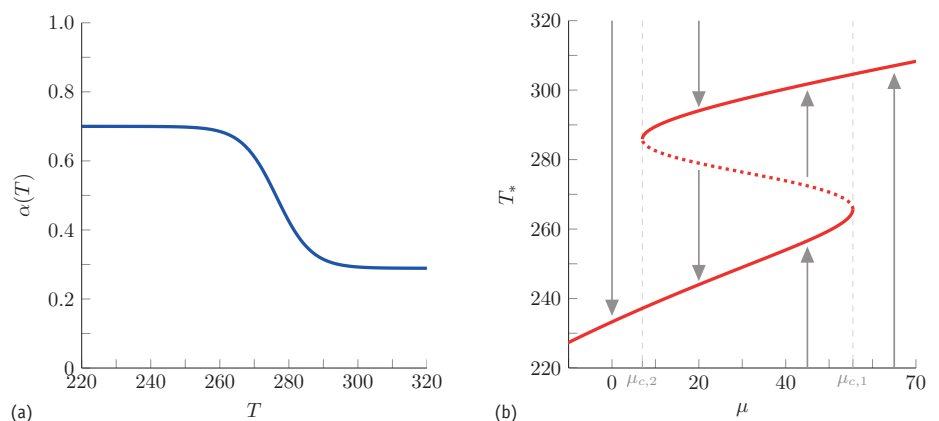
Het gedrag van oplossingen $T(t)$ van (2) blijkt erg gerelateerd te zijn aan deze vaste punten. In model (2) bijvoorbeeld gaat of komt elke baan $T(t)$ naar of van een evenwichtspunt. Door gewoon wat waardes T in te vullen valt af te leiden welke evenwichtspunten banen aantrekken en welke banen afstoten. Dit valt echter ook op een gestructureerdere manier te bepalen: voor T dicht in de buurt van een evenwichtspunt T_* geldt $T = T_* + \Delta T$ (met $|\Delta T| \ll 1$). Substitutie in (2) en een Taylor-ontwikkeling van f rondom T_* geeft dan

$$\frac{dT}{dt} = \frac{dT_*}{dt} + \frac{d\Delta T}{dt} \\ = f(T_* + \Delta T) \\ = f(T_*) + f'(T_*)\Delta T + O(\Delta T^2). \quad (5)$$

Omdat T_* een evenwichtspunt is, geldt $\frac{dT_*}{dt} = f(T_*) = 0$. Verder is ΔT^2 erg klein, zodat het in leidende orde te verwaarlozen is. Dus er geldt

$$\frac{d\Delta T}{dt} \approx f'(T_*)\Delta T. \quad (6)$$

Deze differentiaalvergelijking voor ΔT heeft



Figuur 1 (a) Plot van $\alpha(T)$ in (3). (b) De vaste punten van het model (2). De doorgetrokken lijn geeft de stabiele evenwichtspunten weer en de gestippelde lijn de instabiele. De grijze pijlen geven de richting van de banen $T(t)$ weer voor verschillende waardes van de parameter μ .

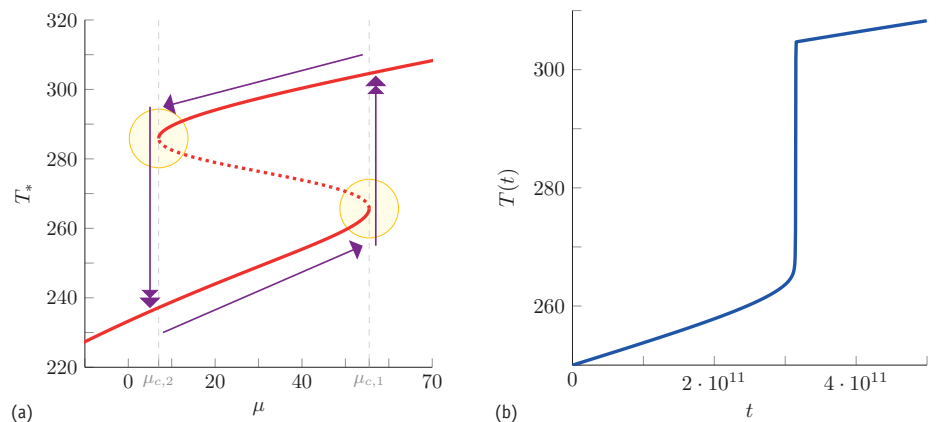
de expliciete oplossing

$$\Delta T(t) = \Delta T(0)e^{f'(T_*)t}. \quad (7)$$

Hieruit volgt meteen dat $\Delta T(t) \rightarrow 0$ voor $t \rightarrow \infty$ als $f'(T_*) < 0$ en $\Delta T(t) \rightarrow 0$ voor $t \rightarrow -\infty$ als $f'(T_*) > 0$. Met andere woorden: het vaste punt T_* is aantrekkend (ook wel stabiel genoemd) als $f'(T_*) < 0$ en afstotend (instabiel) als $f'(T_*) > 0$. Met deze informatie is het nu mogelijk om Figuur 1(b) te voorzien van pijlen die de banen $T(t)$ weergeven.

Op dit moment is al het gedrag van (2) bekend voor een vaste μ -waarde: de temperatuur volgt de beschreven banen richting ofwel de onderste curve (sneeuwbal aarde) ofwel de bovenste curve (ijsvrije aarde). Deze informatie geeft echter óók inzicht in het gedrag van het systeem bij veranderende μ -waardes (dus voor veranderende CO_2 -concentraties). Stel, de huidige toestand bevindt zich op de onderste curve. Als μ dan ietsje toeneemt volgt de temperatuur simpelweg de onderste curve (en wordt het dus ietsje warmer). Als echter μ blijft toenemen overschrijdt het op een gegeven moment een kritische waarde $\mu_{c,1}$ waarboven de onderste curve niet meer bestaat. Als gevolg hiervan schiet het systeem ineens naar de bovenste curve, met een grote verandering in T tot gevolg — zie Figuur 2. Dit wordt een kantelpunt (*tipping point*) genoemd, omdat het systeem ineens omslaat van de ene toestand (sneeuwbal aarde) naar een radicaal andere toestand (ijsvrije aarde). Deze kantelpunten zijn bijna altijd ook moeilijk omkeerbaar: om weer terug te komen in de eerste toestand moet μ eerst flink afnemen en onder $\mu_{c,2}$ zakken; kantelpunten zorgen dus voor een sterke hysteresis.

Het voorbeeldsysteem (2) is niet uniek in het hebben van kantelpunten. Deze ontstaan eigenlijk automatisch in systemen met niet-lineaire terugkoppelingsmechanismen. Er zijn dan ook voorbeelden te over; zo zijn ze bijvoorbeeld gevonden in koraalriffen, tropische regenwouden, de verspreiding van infectieziekten, verwoestijning en vele klimatologische subsystemen (zoals de warme golfstroom). Bij studies van dergelijke systemen wordt stevast het hierboven beschreven geïdealiseerde idee van kantelpunten als basis gebruikt, hoewel het uiteraard wat verfijnd wordt voor systemen die ingewikkelder zijn dan het voorbeeldsysteem (2). Bijvoorbeeld de aanwezigheid van ruis, temporele effecten,



Figuur 2 (a) Het gedrag van het systeem bij veranderende μ , inclusief de kantelpunten in het systeem (omcirkeld in geel) (b) Een mogelijk verloop van temperatuur $T(t)$ bij het overschrijden van een kantelpunt.

ruimtelijke effecten of meerdere alternatieve stabiele toestanden zorgen ervoor dat het geïdealiseerde idee niet helemaal past. Op dit moment worden stappen gemaakt om deze effecten beter te begrijpen én te voorspellen, zowel vanuit een toegepast als een fundamenteel wiskundig perspectief. Niettemin is er de vrees (en meer en meer ook de verwachting) dat veel subsystemen over een kantelpunt geduwd kunnen worden door de huidige klimaatveranderingen, de aarde achterlatend in een onbekende, andere toestand [2].

Klimaatbeleid

Uit klimatologisch onderzoek blijkt dus dat de gevolgen van klimaatverandering potentieel erg ingrijpend zijn. Daarom zijn er wereldwijd afspraken gemaakt om de effecten van klimaatverandering te beperken. Zo hebben in 2015 wereldleiders in Parijs afgesproken om de mondiale temperatuurstijging te beperken tot ruim onder de 2°C . Hier bleef wel een aantal grote vragen over, zoals: hoe kan dit doel bereikt worden? Wat komt er allemaal bij kijken? En: hoeveel gaat dit kosten? Naar (antwoorden op) deze vragen wordt veel onderzoek gedaan, waarin de wiskunde wederom een grote rol speelt.

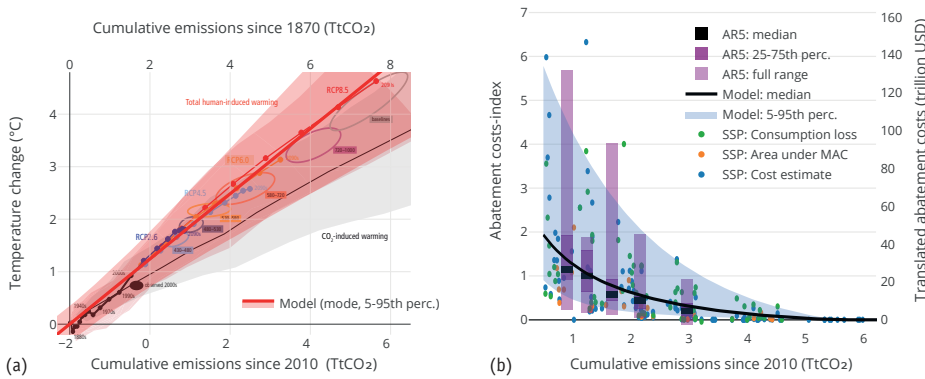
Dit soort vragen zijn erg lastig te beantwoorden door de complexe interacties tussen aspecten als de economie, bevolkingsgroei, technologie, landbouw en energie (de socio-economische aspecten), en de geofysische processen in onze atmosfeer, oceanen en koolstofcyclus. Om hier toch licht op te kunnen laten schijnen hebben wetenschappers zogenoemde Integrated Assessment Models (IAMs) gemaakt: modellen die proberen al deze aspecten zo veel mogelijk met elkaar te verbinden.

Deze modellen zijn niet gemaakt om de toekomst te *voorspellen*, maar om mogelijke paden uit te zetten naar verschillende toekomstbeelden. Dit wordt *model-based scenarios* genoemd: hiermee kunnen de onzekerheden in de verschillende klimaataspecten worden verkend en de grenzen van de beleidsmogelijkheden worden berekend. Met deze modellen worden dus verschillende routes uitgestippeld naar een gegeven doel, zonder een voorkeur voor bepaalde keuzes te geven — dat is het werk van beleidsmakers en politici.

Deze IAMs bestaan er in alle maten en kleuren: het IPCC (Intergovernmental Panel on Climate Change; de samenwerking van klimaatwetenschappers voor de Verenigde Naties) maakt veelvuldig gebruik van zeer gedetailleerde en complexe IAMs. Deze beschrijven de economische interacties, beschikbare technologieën en verschillende soorten landgebruik in detail op regionaal niveau. Sommige modellen zijn gespecialiseerd in de economische aspecten, andere juist in het geofysische gedeelte. Daarnaast zijn er ook nog simpelere modellen. Deze zijn wel minder gedetailleerd, maar hebben als voordeel makkelijker te begrijpen te zijn. In dit artikel beschrijven we het simpelste IAM dat we kunnen maken en laten we zien hoe met wiskundige technieken bepaald kan worden welk aspect uit het model (geofysisch of socio-economisch) de grootste onzekerheid veroorzaakt. (Een uitgebreidere omschrijving van dit model is te vinden in Van Vuuren e.a. [6].)

Een simpel model voor mitigatiekosten

Met behulp van dit simpele model willen we de volgende vraag beantwoorden: hoe wordt de maximaal 2°C opwarming in 2100 zo goedkoop mogelijk gehaald? Daarbij is



Figuur 3 Onzekerheid voor de input-parameters van het mini-Integrated Assessment Model. (a) Relatie tussen globale temperatuurstijging en cumulatieve CO₂-emissies. (b) Kosten als functie van carbon budget. De punten geven kostenpunten uit de literatuur gemaakt met gedetailleerde IAMs. De paarse balkjes komen uit het laatste IPCC-rapport (AR5). De blauwe pluim is het resultaat van de benaderingsformule beschreven in dit artikel.

het belangrijk om te weten dat de temperatuur van de aarde niet zomaar te veranderen is; de mensheid kan alleen iets doen aan de uitstoot van broeikasgassen, zoals CO₂. Terug naar de vraag: om deze te beantwoorden, is er aan de ene kant de relatie tussen globale temperatuurstijging en CO₂-emissies nodig en aan de andere kant de kosten om de CO₂-uitstoot te reduceren tot een gegeven hoeveelheid CO₂.

Geofysische aspecten: temperatuurstijging. Klimaatwetenschappers hebben met behulp van grote, gedetailleerde klimaatmodellen de relatie temperatuur-cumulatieve CO₂ uitgerekend zoals deze te zien is in Figuur 3(a). Hieruit blijkt dat de relatie sterk lineair is; bij benadering geldt

$$T(\text{CO}_2) = T_{2010} + \text{TCRE} \cdot \text{CO}_2, \quad (8)$$

waarbij CO₂ de cumulatieve hoeveelheid CO₂ is die uitgestoot is vanaf het jaar 2010, T_{2010} de temperatuurstijging in 2010 (alle temperaturen worden voor het gemak ten opzichte van het pre-industriële tijdperk aangeduid), en de richtingscoëfficiënt is de TCRE: Transient Climate Response to Emissions. Zoals te zien is in Figuur 3(a), zit er een flinke onzekerheid in deze parameter. In het model wordt dit gerepresenteerd als normaalverdeling:

$$\text{TCRE} \sim \mathcal{N}(0,62; 0,12).$$

Uit uitgebreide en langdurige metingen is ook de gemiddelde wereldwijde temperatuurstijging in 2010 te schatten [5]:

$$T_{2010} \sim \mathcal{N}(0,91; 0,08).$$

Hiermee is nog niet de gehele onzekerheid gevangen in de temperatuur-CO₂-relatie. De temperatuurstijging hangt namelijk ook af van andere broeikasgassen dan CO₂,

zoals methaan en ozon. De invloed hiervan is al meegenomen in de TCRE van Figuur 3(a). Echter zijn er verschillende toekomstscenario's over hoe de hoeveelheid niet-CO₂-gassen correleert met de hoeveelheid CO₂. Deze modelspreiding blijkt goed te kunnen worden gemodelleerd als een extra onzekerheidsterm in de temperatuurvergelijking:

$$T(\text{CO}_2) = T_{2010} + \text{TCRE} \cdot \text{CO}_2 + \sigma_{\text{nonCO}_2},$$

waarbij $\sigma_{\text{nonCO}_2} \sim \mathcal{N}(0; 0,14)$.

Socio-economisch aspecten: de kosten. Het tweede deel van het model beschrijft de extra kosten die nodig zijn om de CO₂-emissies te reduceren ten opzichte van een *business-as-usual*-scenario, een situatie waarin we helemaal geen klimaatbeleid doen. Deze kosten zijn uitgerekend met behulp van de zeer gedetailleerde IAMs zoals die eerder zijn omschreven. Dit zijn de punten in Figuur 3(b). Deze kosten stijgen exponentieel naarmate de toegelaten hoeveelheid CO₂ lager wordt; bij benadering geldt

$$\text{costs}(\text{CO}_2) = a + b e^{-c \cdot \text{CO}_2}.$$

Om de grote onzekerheidsrange uit Figuur 3(b) te vangen, kunnen we bovenstaande uitdrukking herschrijven naar een convexe combinatie van de ondergrens en bovengrens van de kosten:

$$\text{costs}(\text{CO}_2; p) = p \cdot \text{costs}_{\min}(\text{CO}_2) + (1-p) \cdot \text{costs}_{\max}(\text{CO}_2), \quad (9)$$

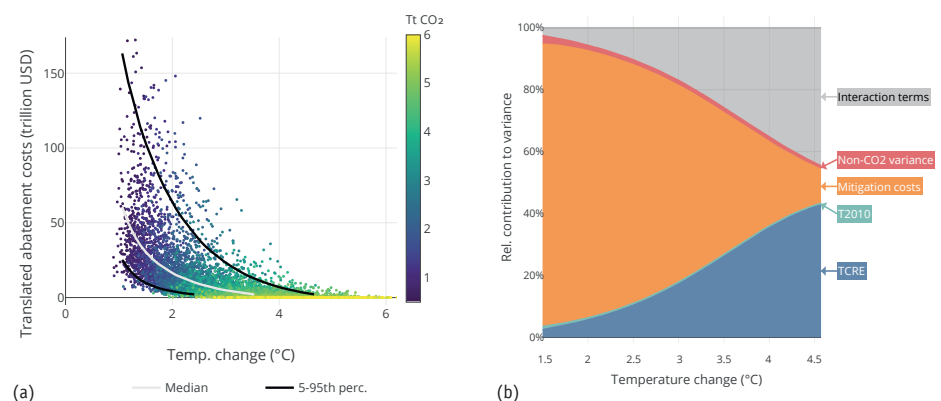
waarbij p log-normaal verdeeld is om rekening te houden met het feit dat er een hogere onzekerheid naar hoge kosten is dan naar lage kosten.

Samenvoegen. We hebben nu alle onderdelen om de temperatuurstijging $T(\text{CO}_2)$ en de kosten $\text{costs}(\text{CO}_2)$ als functie van cumulatieve CO₂-emissies uit te rekenen. Doordat beide functies van dezelfde grootte, de emissies, afhangen, kan hiermee de mitigatiekosten uitgedrukt worden als functie van een temperatuurdoel, in plaats van een CO₂-doel. En dat komt goed uit, omdat bijvoorbeeld het doel van het Parijsakkoord ook is uitgedrukt als een temperatuurdoel, namelijk maximaal 2°C stijging. Het combineren van (8) en (9) geeft:

$$\text{costs}(T) = \text{costs}\left(\frac{T - T_{2010} - \sigma_{\text{nonCO}_2}}{\text{TCRE}}; p\right), \quad (10)$$

waarbij de kosten dus afhangen van de variabelen T_{2010} , TCRE, σ_{nonCO_2} en p , allemaal met hun eigen verdeling.

Door een Monte Carlo-simulatie — een simulatie waarbij duizenden keren waarden uit de verdeling van elke variabele getrokken wordt — uit te voeren, wordt ingeschat wat de kosten en de bijbehorende onzekerheden zijn (zie Figuur 4(a)). Voor een doel van $T = 2^\circ\text{C}$ hebben de kosten een mediaan van 12 biljoen dollar (zo'n 2%



Figuur 4 (a) Monte Carlo-simulatie van de kosten als functie van temperatuurdoel. De lijnen zijn de mediaanlijnen en 5-95ste percentielen. (b) Decompositie van de variantie van de kosten voor verschillende temperatuurdoelen.

van het gezamenlijke wereldwijde inkomen van 2015 tot 2100), maar met een onzekerheidsmarge van 4 tot 63 biljoen dollar (5de en 95ste percentiel). Voor een doel van $T = 1,5^\circ\text{C}$ worden de mediaankosten verdubbeld, evenals de onzekerheidsmarge: 10 tot 100 biljoen dollar.

Onzekerheid. De onzekerheid in deze kosten is zeer hoog. Dat is niet verrassend: het hangt van allerlei onzekere factoren af, zoals de klimaat-onzekerheid en economische onzekerheid. De vraag is nu in hoeverre de onzekerheid in de parameters (T_{2010} , TCRE, σ_{nonCO_2} en p) aanleiding geeft tot de grote spreiding in de kosten.

Sobol-decompositie. Om deze vraag te beantwoorden, kan de variantie ontleed worden in partiële varianties veroorzaakt door elk van de parameters, met behulp van een Sobol-decompositie. Stel dat Y een toevalsvariabele is afhankelijk van parameters $X_1, \dots, X_n$. Dan is de variantie van Y te schrijven als:

$$\text{Var}(Y) = \sum_{i=1}^n V_i + \text{hogere-ordeterminen},$$

waarbij de partiële variantie V_i gelijk is aan de variantie van de verwachtingswaarde van Y , conditioneel op de waarde van X_i :

$$V_i := \text{Var}_{X_i}(\mathbb{E}[Y | X_i]).$$

De partiële onzekerheden zijn dan gedefinieerd als V_i gedeeld door de totale variantie $\text{Var}(Y)$. Dankzij Monte Carlo-simulaties kunnen deze partiële varianties efficiënt worden ingeschat [3].

Onzekerheidsanalyse van kosten. In het geval van het mini-model (10) zijn de va-

riabelen X_i de parameters van het model en is de grootte Y de kosten voor een gegeven temperatuurdoel T . De relatieve partiële varianties zijn getoond in Figuur 4(b). Bij ambitieuze doelen als het 2°C temperatuursdoel van het Parijs-akkoord wordt verreweg het grootste deel van de variantie verklaard door de onzekerheid in p , de mitigatiekosten. Dit komt dus door de spreiding in de *socio-economische* aspecten. Bij minder ambitieuze doelen, zoals 4°C stijging, zijn juist de geofysische onzekerheden dominant bij het bepalen van de spreiding van de totale kosten. Het simpele klimaatmodel kan dus worden gebruikt voor het inschatten van de kosten bij het identificeren van klimaatmaatregelen en het prioriteren van onderzoek.

Samenvatting

In dit artikel hebben we gekeken naar twee aspecten van klimaatonderzoek. Allereerst is het geofysische perspectief bekeken, waar wiskundige theorie gebruikt wordt bij het begrijpen en voorspellen van (toekomstig) klimaat, en waar wiskunde duidelijk maakt dat het klimaatsysteem gevaarlijke kantelpunten heeft. Als tweede is ook het meer beleidsmatige perspectief belicht. Ook hierin helpt de wiskunde, onder andere door geofysische en socio-economische inzichten te combineren in assessment-modellen die inzicht geven in kosten en baten van voorgesteld klimaatbeleid, en bovendien onzekerheid in kennis kunnen inschatten.

Deze facetten zijn hier bewust geïllustreerd aan de hand van simpele, deels gestileerde wiskundige modellen om zo goed mogelijk inzicht te kunnen geven in de essentie en de kwalitatieve eigenschappen

van modellen. In de verschillende vakgebieden worden dit soort simpele modellen ook stevast gebruikt om een eerste intuïtie te kweken, die vervolgens gebruikt kan worden bij het opstellen en begrijpen van de meer complexe, meer kwantitatieve modellen en uiteindelijk ook bij het bevatten van het werkelijke systeem. Op hun beurt geven deze dan weer nieuwe effecten prijs die niet passen in de gestilleerde modellen en zo aanleiding geven tot de ontwikkeling van nieuwe simpele modellen. En dat leidt opnieuw weer tot nieuwe, spannende wiskunde. $\diamond$

Robbin Bastiaansen is in 2019 gepromoveerd aan het Mathematisch Instituut van de Universiteit Leiden op zijn proefschrift *Lines in the Sand: Behaviour of Self-organised Vegetation Patterns in Dryland Ecosystems*. Sinds 2020 is hij werkzaam als postdoc-onderzoeker aan het Institute for Marine and Atmospheric research Utrecht (IMAU) aan de Universiteit Utrecht, waar hij onderzoek doet naar klimaatgevoeligheid.

Kaj-Ivar van der Wijst is na zijn studie Mathematical Sciences in Utrecht gaan werken bij het Planbureau voor de Leefomgeving in Den Haag, waar hij onderzoek doet naar het modelleren van de gevolgen en schade van klimaatverandering. Daarnaast geeft hij het vak Wiskunde en Systeemanalyse aan het Copernicus Instituut voor Duurzame Ontwikkeling aan de Universiteit Utrecht.

Referenties

- 1 KNMI, Uitleg over klimaatverandering, <https://www.knmi.nl/kennis-en-datacentrum/uitleg/klimaatverandering>.
- 2 T.M. Lenton, H. Held, E. Kriegler, J.W. Hall, W. Lucht, S. Rahmstorf en H.J. Schellnhuber, Tipping elements in the Earth's climate system, *Proceedings of the National Academy of Sciences* 105(6) (2008), 1786–1793.
- 3 A. Saltelli, Making best use of model evaluations to compute sensitivity indices, *Computer Physics Communications* 145 (2002), 280–297.
- 4 W.D. Sellers, A global climatic model based on the energy balance of the earth-atmosphere system, *Journal of Applied Meteorology* 8(3) (1969), 392–400.
- 5 H. Visser, S. Dangendorf, D.P. Van Vuuren, B. Bregman en A.C. Petersen, Signal detection in global mean temperatures after 'Paris': an uncertainty and sensitivity analysis, *Climate of the Past* 14 (2018), 139–155.
- 6 D.P. Van Vuuren, K.-I. Van der Wijst, S. Marsman, M. Van den Berg, A. F. Hof en C. D. Jones, The cost of achieving climate targets and the sources of uncertainty, *Nature Climate Change* 10(4) (2020), 329–334.

Wieb Bosma

IMAPP
Radboud Universiteit Nijmegen
bosma@math.ru.nl

Stoffelijke resten tastbare herinneringen aan wiskundigen

Hollandse helden

Conform de pandemie-richtlijnen bleef deze rubriek in de zomer van 2020 dicht bij huis: beelden van enkele binnenlandse hoogtepunten.



Geen universiteitsstad in Nederland kan zonder Huygens-gebouw of -instituut, of tenminste -straat, vaak vernoemd naar onze grote held Christiaan Huygens (1629–1695), en soms naar zijn dichtende vader Constantijn. We beginnen onze rondrit in Voorburg, bij landgoed (thans prachtig museum) Hofwijck, waar vader de drukte van de Hofstad ontweek. Later woonde Christiaan er ook. Het beeld bij de ingang toont vader en zoon.



We tonen hier verder een buste uit Delft, een spreuk uit de fietsenkelder in Nijmegen, een medaillon uit een voormalig NS-hoofdkantoor te Utrecht, ...



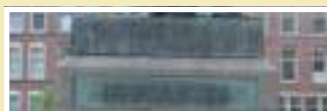
... en een beeld uit Rotterdam. Aan het voormalige pand van een verzekeringsmaatschappij aldaar staan namelijk mooie beelden van Huygens en Johan de Witt (1625–1672), gebroederlijk als grondleggers van de verzekeringswiskunde. In Dordrecht staat een groot beeld van Johan met zijn echte broer Cornelis. En ook Den Haag heeft een groot monument van Johan; natuurlijk vooral vanwege zijn politieke rol, maar ook het 'wiskundige' wordt genoemd.



De naam van Simon Stevin (1548–1620) wordt vaak in een adem genoemd met die van Huygens; daarvan vinden we in Den Haag een mooi embleem op zijn voormalige woonhuis. Een enorm standbeeld staat in Brugge, en komt daarom terecht in een latere aflevering.

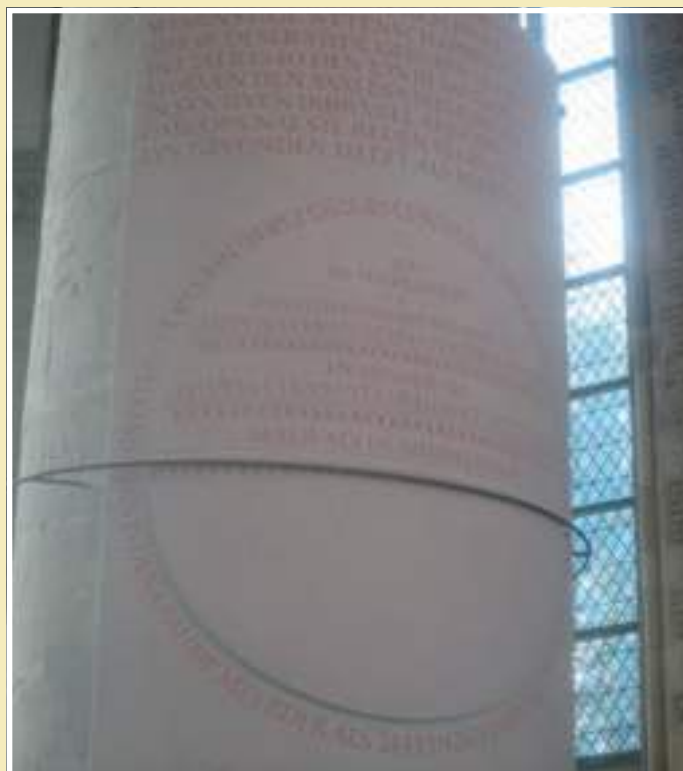


Ook in Den Haag staat René Descartes (die we toch wel halve Hollander durven te noemen) en vlakbij diens beeld een fallisch monument gewijd aan Keppler, dat wil zeggen, aan zijn perkenwet.





Terug naar Rotterdam, waar we het Stieltjes-monument aantreffen. Helaas niet gewijd aan onze Thomas (1856–1894) maar aan diens vader en naamgenoot Thomas Joannes Stieltjes sr., die waterbouwkundige, ingenieur, maar ook militair en politicus was. Weinig let ons te pretenderen dat tenminste het Drentse Stieltjeskanaal naar de wiskundige is genoemd.



Van de rijke historie van Leiden tonen we (rechtsboven) een plaquette gewijd aan Pieter van Campen (1750–1820): wiskundige, landmeter en wijnroeier die het Genootschap 'Wiskunde is de moeder der wetenschappen' oprichtte. In de Pieterskerk hangt het grote monument ter ere van Ludolph van Ceulen (1540–1610) en diens benadering van π , vlak naast het graf van Snellius (Willebrord Snel van Royen, 1580–1626). Elders in de stad vinden we ook een mooie gedenkplaat voor zijn bijdrage aan de landmeetkunde, via triangulatie.





Dat biedt ons gelegenheid een logische sprong naar het oosten te maken: de nog maar nauwelijks leesbare grafsteen van Cornelis Kraijenhoff (1758–1840) ligt in een eigen parkje in Nijmegen. Deze interessante figuur, wiens portret door Adriaan de Lelie we hier zien, (op een tentoonstelling in Panorama Mesdag) speelde een belangrijke rol in de totstandkoming van de eerste volledige triangulatie van Nederland.



We blijven in het oosten voor een minder bekende figuur: Coenraad ter Kuile. Van hem is de prachtige zonnwijzer (met datumlus!) aan de Grote Kerk te Enschede. In de steen onder de zonnwijzer is het jaartal van plaatsing (1918) uit de vet gebeitelde hoofdletters te ontcijferen. Ter Kuile (1781–1852), uit een textielgeslacht, was ook uitvinder en bouwde een 'telurium' (planetarium dat niet hangt maar op een tafel staat) dat naar verluid nauwkeuriger was dan dat van Eisinga (met wie hij waarschijnlijk ook contact had). Het ging in een grote stadsbrand van 1862 verloren.



Van Nijmegen naar Arnhem is een kleine stap: in het Sonsbeekpark staat het meest grootse beeld voor een exacte wetenschapper in Nederland, voor Nobelprijswinnaar Hendrik Antoon Lorentz (1853–1928), in 1931 gemaakt door Wenkebach. Natuurlijk was Lorentz vooral fysicus, maar wiskunde speelde een grote rol in zijn werk. Bovendien was hij verantwoordelijk voor belangrijk rekenwerk benodigd voor de afsluiting van de Zuiderzee. Een van de twee zeesluizen in de Afsluitdijk is daarom naar hem vernoemd; de andere naar Stevin. Niet naar Simon, maar naar diens zoon Hendrik (1614–1668) die het eerste plan had gemaakt.

Franeer heeft rond het fantastische planetarium van Eise Eisinga (1744–1828) diverse monumenten opgericht. Op de stenen balk onder de boog staat “Door de ronde lijn komen we tot de kennis van de paden der hemellichamen”.



Om de hoek staat een monument van Othoniel gewijd aan Jan Hendrik Oort (1900–1992), geboren te Franeer, dat de ‘Oort-wolk’ verbeeldt. Interessant is het om ook Dronryp eens te bezoeken, waar Eisinga met zijn vader begraven ligt op het kerkhof vlak naast het geboortehuis van Eise. De grafsteen is speciaal vanwege de rekenom die leeftijd en sterfdatum (van de vader) als uitkomst moeten geven.



In het nabije Leeuwarden staat het pand waar Maurits Cornelis Escher (1898–1972) werd geboren. Zijn graf, met fraaie steen, ligt in Baarn.



Nu we toch in het hoge noorden zijn, bekijken we de allegorische beelden aan het Academiegebouw in de stad Groningen, onder andere 'Scientia' en 'Mathematica'.

Aan gene zijde van de Afsluitdijk, terug in Holland, treffen we in Alkmaar beelden van Metius en Drebbel. Adriaan Anthonisz Metius (1571–1635) was geboren in Alkmaar, studeerde en doceerde in Franeker (waar hij begraven moet liggen in de kerk achter het Oort-monument). Hij leerde van Snellius (en Tycho Brahe) en was veelzijdig: wiskundige, astronoom, vestingbouwer en landmeter, in welke hoedanigheid hij is afgebeeld (ter glorie van een winkelcentrum, dat op de sokkel wel de naam van de onthullende wethouder maar niet die van de afgebeelde wetenschapper vermeldt). Cornelis Drebbel (1572–1633) is de andere, wereld-vermaarde uitvinder en natuurwetenschapper uit Alkmaar. Hij was verbonden aan het hof in Engeland, Praag en opnieuw Londen, waar hij berooid stierf. Hij ontwierp fonteinen, springstoffen en apparaten (waarvan de 'duikboot' tot de verbeelding is blijven spreken). Van een graf in Londen bleken geen resten bewaard. In Alkmaar staat nog wel het huis waar hij rond 1600 woonde.



We besluiten onze rondrit in het Gooi, bij het graf van L.E.J. Brouwer (1881–1966) in Blaricum, met een monument waaraan in dit blad eerder aandacht is geschonken.

Jaap de Jonge

Cygnus Gymnasium, Amsterdam, en
Korteweg-de Vries Instituut, Universiteit van Amsterdam
c.j.dejonge@uva.nl

Onderwijs

Zelf doctor worden

Op 24 januari 2020 promoveerde Jaap de Jonge in Delft op zijn proefschrift *Gaps, Frequencies and Spacial Limits of Continued Fraction Expansions*. Hij deed zijn onderzoek met een promotiebeurs voor leraren van NWO. In dit artikel schets hij hoe de weg naar zijn promotie verlopen is.

Op de middelbare school was wiskunde een van mijn favoriete vakken, maar meer ook niet. En na matige resultaten bij wiskunde II in de vierde klas, liet ik dat vak al na een jaar vallen. De motivatie van mijn keuze voor de wiskundestudie aan de Universiteit van Amsterdam, in 1984, was banaal: alle alternatieven, zoals een andere studie of het zoeken van een baan, vond ik domweg minder aantrekkelijk. Bovendien dacht ik dat ik, omdat ik wel goed was in wiskunde, tijd over zou houden om muziek te maken, veel te sporten en met vrienden af te spreken.

Op de universiteit bleek dat ik helemaal niet zo goed was in wiskunde. Ik was diep onder de indruk van sommige jaargenoten, van wie de meesten wél eindexamen in wiskunde II hadden gedaan. Wat wisten een paar medestudenten al veel, en wat begrepen ze nieuwe stof snel! Ik bewonderde de docenten om hun kennis en de geringe moeite die ze deden om wiskunde op oneigenlijke wijze te populariseren. Ik had sympathie voor de kracht van precieze definities, stellingen en bewijzen, maar had moeite me alles eigen te maken. Desondanks veranderde ik mijn afwachende studiehouding niet of nauwelijks. Nogal wat vakken haalde ik pas met een hertentamen.

Pas in mijn derde jaar ging ik wat serieuzer studeren, nadat ik in de zomer naar Amsterdam was verhuisd. Langzaam maar zeker werden mijn resultaten beter, maar een ding zou ik nooit meer kwijtraken: een grote onzekerheid over mijn eigen kunnen, door de slechte basis die ik in de eerste twee jaar had gelegd. Ik voelde me een stagiair-student, nog niet in staat op een volwassen, zelfstandige manier te studeren. Wiskunde bleef een studie van syllabi; nooit kwam het in me op een keer een bibliotheek in te gaan en meer te bestuderen dan het minimale dat me werd aangereikt.

Ik studeerde niet goed (want niet grondig), maar ook niet weinig. Ik deed een bijvak milieukunde en aan het begin van mijn vierde jaar besloot ik om ook filosofie te gaan studeren. Ik had eens wat gelezen over de mens als eiland, niet werkelijk in staat zichzelf aan een ander kenbaar te maken, en dacht dat filosofie de studie bij uitstek zou zijn voor kwesties waarin de eis van welgedefinieerdheid problematisch was. Bij het volgen van de eerste colleges sociale filosofie beseftte ik pas hoezeer de wiskundestudie me al had gevormd. Ik was stomverbaasd over het gemak waarmee over van alles beweringen werden gedaan zonder dat vooraf duidelijk was gemaakt wat de gehanteerde begrippen precies betekenden. Omdat er niets viel te bewijzen waren de tentamens een stuk makkelijker dan bij wiskunde, maar het slagen ervoor gaf ook veel minder voldoening. Toch zette ik door: de studie bood me een kader om veel te lezen en na te denken over sociale en ethische kwesties.



Gymnasium Felisenum in Velsen-Zuid

Ik was ontevreden over de zouteloze manier waarop ik wiskunde studeerde, maar had voldoende discipline om gevolgde vakken met een tentamen af te ronden. Het was niet verplicht een afsluitende scriptie te schrijven en na zeven semesters kwam het moment in zicht dat ik 168 studiepunten had gehaald, voldoende om doctorandus mee te worden. Met een mix van schaamte en zelfspot besepte ik dat me van het laatste college groepentheorie dat ik had bijgewoond weer veel was ontgaan — al zou ik het mondelinge tentamen ongetwijfeld wel weer halen, om daarna een doctorandus van helemaal niks te worden.

Maar ik had geluk: in het tweede semester van het vierde jaar volgde ik het vak analytische getaltheorie bij professor Jager. Ik had zijn naam al vaak gehoord, maar had geen idee wie hij was. Tot mijn verrassing bleek hij de wat oudere man (twee jaar ouder dan ik nu ben) te zijn die regelmatig bij het college kwadratische vormen van Wieb Bosma en Cor Kraaikamp zat, twee aardige, enthousiaste promovendi die het vak samen gaven. Professor Jager was serieus en vriendelijk. Ik hield van zijn boeiende colleges over p -adische getallen, de priemfactorstelling en allerlei andere dingen die ik ben vergeten. Zo rustig en toegewijd als hij doceerde — zo hoorde het! Hij had een verzorgd, elegant handschrift, waarmee hij prachtige wiskunde op het bord schreef. Misschien kon ik mijn studie toch nog redden wanneer ik bij hem een scriptie zou schrijven.

Ik ben heel blij dat ik dat gedaan heb. Niet alleen bleek Henk (zoals ik hem een jaar later ging noemen) Jager een bijzonder goede begeleider, hij bleek een zeer veelzijdige man van wie ik ook buiten de wiskunde enorm veel kon leren. Wanneer we afspraken, werkten we uren intensief aan mijn scriptie, om daarna nog eens zo lang over de meest uiteenlopende dingen te spreken die niets met wiskunde te maken hadden. Voor het eerst raakte ik bevlogen over mijn studie, voor het eerst las ik wiskunde buiten de hapklare kaders van een syllabus. Gedurende een half jaar deed ik niets liever dan aan mijn scriptie werken; het is ongetwijfeld een katalysator geweest voor de schipbreuk van mijn toenmalige relatie.

Het schrijven van mijn wiskundescriptie (over ondergrenzen voor het aantal oplossingen in gehelen p en q van ongelijkheden van de vorm $|q\alpha - p| < \delta/q$, met $\alpha \in \mathbb{R}$, $\delta \in \mathbb{R}_{>0}$ en $n \in \mathbb{N}$) en de samenwerking met Henk waren me bijzonder goed bevallen. Een deel van de scriptie gebruikten we voor het artikel 'The circular dispersion spectrum' dat in 1994 in het Amerikaanse *Journal of Number Theory* verscheen. Henk, die bijna met emeritaat ging,

stelde me voor bij hem te gaan promoveren. Ik voelde me gevlaid, maar durfde het niet aan. Ja, het schrijven van de scriptie had veel goedgeemaakt van de onvoldaanheid over de rest van mijn wiskundestudie, maar ik vond niet dat ik het kaliber noch de wiskundige bagage had die verwacht mochten worden van iemand die zou gaan promoveren, de vriendelijke en bemoedigende woorden van Henk ten spijt.

Ik was inmiddels als gewetensbezwaarde erkend en kon mijn vervangende dienstplicht als toegevoegd docent aan de UvA vervullen. Zo dacht ik tijd te winnen om over een eventuele promotieplaats na te denken. Gedurende anderhalf jaar gaf ik werkcolleges analyse en lineaire algebra. Het ging goed en ik vond het leuk, en na afloop bleef ik nog een half jaar hetzelfde werk doen, maar nu in dienst van de UvA. Helaas, het beleid voor onderwijzend personeel werd aangescherpt: een afgeronde promotie werd een eis voor iedereen die college gaf en daarmee was het voor mij afgelopen. Ik had alle waardering voor het besluit, al vond ik het jammer dat ik niet kon blijven — maar niet voldoende om toch te willen promoveren.

Ik ging het middelbaar onderwijs in en miste de universiteit niet. Sterker, ik zag als een berg op tegen mijn eerste zomervakantie als leraar. Gelukkig ging de grote verliefdheid op mijn school, het Gymnasium Felisenum in Velsen-Zuid, gestaag over in

Jaap de Jonge als Peter der Besenbinder in de opera *Hänsel und Gretel*

een stabiele relatie, waarin de vakanties ook hun plaats kregen. Na drie jaar werd ik decaan (in het middelbaar onderwijs is dat een studie- en beroepenvoorlichter) en een paar jaar later coördinator van de klassen 5 en 6. Ik organiseerde klassieke concerten, zette een filmhuis op en een jaarlijkse studie- en beroepenavond waarop oud-leerlingen vertelden over hun studies en beroepen. In tussenuren gaf ik extra wiskunde voor leerlingen die aan wiskundewedstrijden meededen. Ik vertelde mijn familie dat ik, als ik vroegtijdig zou komen te overlijden, op Driehuis-Westerveld begraven wilde worden, dat vlak bij het Felisenum ligt. Ik zag het lang als een romantisch ideaal er tot mijn pensionering te blijven, zelfs toen de liefde stukje bij beetje begon te bekoelen en de relatie minder stabiel werd.

Na twintig jaar Felisenum besepte ik dat mijn liefde voor de school steeds meer was gebaseerd op herinneringen aan vroeger tijden. Gelukkig was ik een paar jaar eerder weer wat eerstejaars colleges gaan geven aan de UvA, wat een prettige afwisseling was van mijn werk op het Felisenum. De rector van de school wees me op de promotiebeurs voor leraren, een nieuw initiatief van OCW om meer gepromoveerden in het voortgezet onderwijs te krijgen. Ik was er niet enthousiast over. Ik betwijfelde of ik een betere leraar zou worden van het doen van onderzoek. Bovendien leek het me dat OCW met het geld voor de beurzen veel beter jonge, net afgestudeerde of gepromoveerde wetenschappers kon proberen te winnen voor het voortgezet onderwijs. Daarbij speelde dat initiatieven van het ministerie niet zelden even geldverslindend als contraproductief zijn. Het was kort na de invoering van de rekentoets, een treurige mislukking die voornamelijk goed was voor studiecentra, uitgevers en mensen die het woord 'wiskunde' omdoopten tot 'rekenen en wiskunde'.

Mijn keus voor de lerarenbeurs was minstens zo banaal als mijn keus voor de wiskundestudie, dertig jaar eerder: ik wilde minder te maken hebben met de school waar ik ooit zo gelukkig was geweest, minder met onderwijskundige onzin — maar ik moest toch mijn geld verdienen. Eigenlijk was ik ervan overtuigd dat promotieonderzoek me geen betere leraar zou maken en vond ik het dubieus dat er zoveel geld aan werd besteed, maar naar één ding zag ik reikhalzend uit: vrijheid van werken, slechts gestuurd door de problemen die de wiskunde me zouden bieden.

Opnieuw had ik geluk. Cor Kraaikamp, inmiddels universitair hoofddocent aan de TU Delft, wilde mijn promotor wel zijn. Met

Henk schreef ik een tweede artikel, als onderdeel van de beursaanvraag: 'On the approximation by three consecutive continued fraction convergents', dat in 2014 in *Indagationes Mathematicae* werd gepubliceerd. Cor hielp me met de beursaanvraag en het schrijven van het projectvoorstel — 'helpen' is hier volstrekt eufemistisch gebruikt. Alleen de laatste ronde van de aanvraag, de presentatie voor een zogeheten wetenschapsbrede commissie, moest ik helemaal zelf doen. Dat was gelukkig veruit het makkelijkste onderdeel, omdat het niet om de inhoud ging, waarover ik vrijwel geen vragen kreeg, maar om mijn enthousiaste — nou ja, presentatie.

En enthousiast was ik. Ik heb vijf jaar lang onderzoek mogen doen en kreeg daarvoor twee dagen per week betaald. Ik heb genoten, van alles. Het was een sprong in het diepe geweest en ik was bang dat mijn verschrompelde kennis van wiskunde een te groot obstakel zou blijken, maar Cor liet me gewoon lekker spartelen en gokte erop dat ik vanzelf wel zou blijven drijven. Wanneer hij even onbereikbaar was voor een lastige kwestie en ik het gevoel had dat ik nu écht kopje onder zou gaan, merkte ik dat ik net op tijd de slag had gevonden die nodig was om boven te blijven.

Het onderzoek met Henk had betrekking op approximatiecoëfficiënten $\vartheta_n(x)$, gedefinieerd als $\vartheta_n(x) := q_n^2 |x - p_n/q_n|$, waarbij p_n/q_n de n -de benadering is van een irrationale x met behulp van de reguliere kettingbreukontwikkeling van x . Die n -de benadering krijg je door de kettingbreukontwikkeling

$$a_0 + \frac{1}{a_1 + \frac{1}{a_2 + \frac{1}{a_3 + \dots}}} =: [a_0; a_1, a_2, a_3, \dots]$$

van x voor het n -de plusteken af te breken. Ons onderzoek richtte zich op asymptotische frequenties van de zes mogelijke rangschikkingen op grootte die je kunt maken met drie opeenvolgende approximatiecoëfficiënten. De asymptotische frequentie van, zeg, de volgorde $\theta_{n-1} < \theta_n < \theta_{n+1}$ is dan gedefinieerd als

$$\begin{aligned} \text{AF}(\theta_{n-1} < \theta_n < \theta_{n+1}) \\ = \lim_{N \rightarrow \infty} \frac{1}{N} \# \{n \in \mathbb{N} \mid 2 \leq n \leq N, \theta_{n-1} < \theta_n < \theta_{n+1}\}. \end{aligned}$$

Het eerste artikel dat ik onder begeleiding van Cor schreef, was een uitbreiding van het onderzoek met Henk naar andere soorten kettingbreuken, hetgeen resulteerde in het artikel 'Three consecutive approximation coefficients: asymptotic frequencies in semi-regular cases', dat in 2018 in *Tohoku Mathematical Journal* werd gepubliceerd. Bij dat onderzoek kreeg ik te maken met een berg uitdrukkingen zoals

$$\begin{aligned} & \frac{-a + \sqrt{a^2 - 2a + 2}}{a-1} \int \frac{(2a^2 - 2a + 1)t + 2a - 1}{(2a-1)t + 2} \frac{dt dv}{(1+tv)^2} \\ & \frac{\sqrt{4a^4 - 8a^3 + 4a + 5} - (2a^2 - 2a + 3)}{4a-2} \int_{-t}^1 \frac{dt dv}{(1+tv)^2} \\ & + \frac{-a + \sqrt{a^2 - 4}}{2} \int_{-t}^{\frac{1}{t} + a} \frac{dt dv}{(1+tv)^2}, \end{aligned}$$

waarin ik orde moest brengen. Het was een ideaal eerste onderwerp. De uitdrukkingen waarmee ik te maken had mochten dan ingewikkeld zijn, diep ging het allemaal niet.



Foto: Ruud Janssen

Als solist bij vrouwenkoor Sorores Meae in een concert met werk van Martinů



Als Papageno samen met Papagena na een uitvoering van *Die Zauberflöte* van Mozart

Het tweede onderwerp dat ik onderzocht was de *natuurlijke uitbreiding* van bepaalde α -expansies, kettingbreuken die zijn genoemd naar de Japanse wiskundige Hitoshi Nakada. Een natuurlijke uitbreiding van een kettingbreuk is een gebied Ω in $\mathbb{R}^2$ waarin punten paren (t_n, v_n) zijn, met (in het reguliere geval)

$$t_n = [0; a_n + 1, a_n + 2, a_n + 3, \dots] \text{ en } v_n = [0; a_n, a_n - 1, \dots, a_1], \text{ met } v_0 := 0.$$

Die t en v staan voor ‘toekomst’ respectievelijk ‘verleden’ van een kettingbreukontwikkeling, waarbij de *wijzergetallen* a_i horen bij de ontwikkeling van een irrationaal getal $x = [a_0; a_1, a_2, a_3, \dots]$. Op die manier draagt elk punt alle informatie over het oorspronkelijke irrationale getal (mod 1) in zich, en is de kettingbreuk de basis van een dynamisch systeem.

De vraag voor dit onderzoek was of we zo’n natuurlijke uitbreiding konden vinden van α -expansies voor α kleiner dan $\sqrt{2} - 1$. Nu kwam er meer diverse wiskunde bij kijken, al werd de basis gelegd door twee eenvoudige relaties:

$$A + \frac{1}{1 + \frac{\varepsilon}{B + \xi}} = A + 1 - \frac{\varepsilon}{B + \varepsilon + \xi}$$

en

$$A + \frac{\varepsilon}{B + \xi} = A + \varepsilon - \frac{\varepsilon}{1 + \frac{1}{B - 1 + \xi}},$$

waarbij $A, B \in \mathbb{N}$, $B \geq 2$, $\xi \in \mathbb{R}$ en $\varepsilon \in \{-1, 1\}$.

Het lukte me om ook voor $\alpha \in ((\sqrt{10} - 2)/3, \sqrt{2} - 1]$ nog natuurlijke uitbreidingen Ω_α te vinden en bovendien te laten zien dat een verlaging tot onder de $(\sqrt{10} - 2)/3$ onhaalbaar was – de bijbehorende stelling mag illustreren waarom:

Stelling. Zij $\alpha \in ((\sqrt{10} - 2)/3, \sqrt{2} - 1]$ en definieer de rij E_n , $n \geq -1$, door $E_{n+1} := 2E_n + E_{n-1}$, $n \geq 0$, met $E_{-1} := 1$ en $E_0 := 0$. Definieer

$$\begin{aligned} V_{1,k} &:= \left[\frac{E_{2k+2}}{E_{2k+3}}, \frac{E_{2k+2} + g^2 E_{2k+1}}{E_{2k+3} + g^2 E_{2k+2}} \right) \cup \left[\frac{E_{2k+3}}{E_{2k+4}}, \frac{E_{2k+2} + g E_{2k+1}}{E_{2k+3} + g E_{2k+2}} \right); \\ V_{2,k} &:= \left[\frac{E_{2k+1} + E_{2k}}{E_{2k+2}}, \frac{E_{2k+1} + E_{2k} + g^2 (E_{2k} + E_{2k-1})}{E_{2k+2} + g^2 E_{2k+1}} \right) \\ &\quad \cup \left[\frac{E_{2k+2} + E_{2k+1}}{E_{2k+3}}, \frac{E_{2k+1} + E_{2k} + g (E_{2k} + E_{2k-1})}{E_{2k+2} + g E_{2k+1}} \right); \\ V_{3,k} &:= \left[\frac{E_{2k}}{E_{2k+1} + E_{2k}}, \frac{E_{2k} + g^2 E_{2k-1}}{E_{2k+1} + E_{2k} + g^2 (E_{2k} + E_{2k-1})} \right) \\ &\quad \cup \left[\frac{E_{2k+1}}{E_{2k+2} + E_{2k+1}}, \frac{E_{2k} + g E_{2k-1}}{E_{2k+1} + E_{2k} + g (E_{2k} + E_{2k-1})} \right). \end{aligned}$$

Dan

$$\begin{aligned} \Omega_\alpha &= \left[\frac{1-3\alpha}{\alpha}, \alpha \right) \times [0, g^2) \cup \left[\frac{2-5\alpha}{3\alpha-1}, \alpha \right) \times \left[\frac{1}{2}, g \right) \\ &\quad \bigcup_{k=0}^{\infty} \left(\left[\frac{2-5\alpha}{2\alpha-1}, \alpha \right) \times V_{1,k} \cup \left[\frac{1-2\alpha}{\alpha-1}, \frac{2-5\alpha}{3\alpha-1} \right) \times V_{2,k} \cup \left[\alpha-1, \frac{1-3\alpha}{\alpha} \right) \times V_{3,k} \right). \end{aligned}$$

Het onderzoek leidde tot het artikel ‘Natural Extensions for Nakada’s alpha-expansions: descending from 1 to g^2 ’, op, dat in 2018 in het *Journal of Number Theory* werd gepubliceerd.

Hoewel ik de eerste twee onderwerpen al zeer de moeite waard vond, heeft het laatste onderzoek, dat nog niet als artikel is gepubliceerd, me verreweg de grootste voldoening gegeven. Ik heb er hard en met erg veel plezier aan gewerkt. Het gaat over *N-expansies*, kettingbreuken met een zekere $N \in \mathbb{N}_{\geq 2}$ in plaats van $(\pm)1$ in de tellers. Die kettingbreuken krijgen we door voor $\alpha \in \mathbb{R}$ met $0 < \alpha \leq \sqrt{N} - 1$ de afbeelding $T_\alpha : [\alpha, \alpha + 1] \rightarrow [\alpha, \alpha + 1]$ als volgt te definiëren:

$$T_\alpha(x) := \frac{N}{x} - d(x),$$

waar $d : [\alpha, \alpha + 1] \rightarrow \mathbb{N}$ wordt gedefinieerd als

$$d(x) := \left\lfloor \frac{N}{\alpha} - \alpha \right\rfloor, \text{ als } x \in (\alpha, \alpha + 1] \\ \text{of als zowel } x = \alpha \text{ en } N/\alpha - \alpha \notin \mathbb{Z}$$

en

$$d(\alpha) = \left\lfloor \frac{N}{\alpha} - \alpha \right\rfloor - 1, \text{ als } N/\alpha - \alpha \in \mathbb{Z}.$$

(Merk op dat als $N/\alpha - \alpha \in \mathbb{Z}$, er geldt dat $T_\alpha(\alpha) = \alpha + 1$.) Voor vaste $\alpha \in (0, \sqrt{N} - 1]$ en $x \in [\alpha, \alpha + 1]$ definiëren we voor $n \in \mathbb{N}$ dan nog

$$d_n = d_n(x) := d(T_\alpha^{n-1}(x)).$$

We krijgen nu

$$x = T_\alpha^0(x) = \frac{N}{d_1 + T_\alpha(x)} = \frac{N}{d_1 + \frac{N}{d_2 + T_\alpha^2(x)}} = \dots = \frac{N}{d_1 + \frac{N}{d_2 + \frac{N}{d_3 + \dots}}}.$$

Het aardige van *N-expansies* is dat er voor vaste $\alpha \in (0, \sqrt{N} - 1]$ slechts *eindig* veel mogelijkheden voor d_n zijn.

Clara Stegehuis*Faculteit EWI
Universiteit Twente
c.stegehuis@utwente.nl***Francesca Arici***Mathematisch Instituut
Universiteit Leiden
f.arici@math.leidenuniv.nl***Proof by example Portretten van vrouwen in de Nederlandse wiskunde**

Birgit Sollie

In de nieuwe rubriek 'Proof by example' portretteren Clara Stegehuis en Francesca Arici beurtelings vrouwen in de Nederlandse wiskunde. Als eerste een portret van Birgit Sollie, promovenda aan de VU Amsterdam. Zij doet onderzoek naar stochastische processen en wiskundige biologie. In dit interview vertelt ze over haar onderzoek, en haar motivatie voor wiskunde.

Wanneer was je voor het eerst geïnteresseerd in wiskunde?

"Op de middelbare school vond ik wiskunde altijd al leuk en ik was er ook goed in. Maar ik koos eerst om bouwkunde te studeren. Dat bleek toch niets voor mij te zijn. Omdat ik de wiskundevakken daar ook heel leuk vond, ben ik naar wiskunde overgestapt."

Een goede keuze?

"Jazeker. Na het eerste jaar had ik daar meteen wel door dat ik op mijn plek zat. Ik vond het heel leuk om de abstractie van de wiskunde te zien, en de toepasbaarheid van de wiskunde op zo veel verschillende gebieden."

En wist je ook al snel dat je na je studie verder wilde gaan met onderzoek?

"In het tweede jaar van mijn master begon ik na te denken over wat ik na mijn studie wilde. Ik had toen het gevoel dat ik nog niet klaar was met leren, en dat ik

ook graag verder wilde gaan met wiskunde op een hoog niveau. In een PhD kan dit allebei, dus besloot ik om hiervoor te gaan."



Birgit Sollie

Waar gaat je onderzoek eigenlijk over?

"Mijn onderzoek gaat over stochastische populatieprocessen. Je kunt bijvoorbeeld denken aan de groei of krimp van een dierenpopulatie, maar ook aan de fluctuaties van het aantal moleculen in een cel. Mijn onderzoek richt zich specifiek op populatieprocessen waar ook een achtergrondproces aanwezig is dat de populatiegroei beïnvloedt. Zo kan bijvoorbeeld het klimaat of de natuur een achtergrondproces zijn dat de groei van een dierenpopulatie beïnvloedt. De groei van moleculen kan bijvoorbeeld beïnvloed worden door de temperatuur."

Mijn onderzoek bekijkt deze populatieprocessen op een abstract niveau als een tweedimensionaal proces: het groeiproces, gecombineerd met het achtergrondproces."

En wat wil je te weten komen over deze populatieprocessen?

"In mijn onderzoek schatten we de parameters van de populatieprocessen, terwijl we het achtergrondproces niet kunnen observeren. Dit laatste maakt het wiskundig gezien erg lastig. Ook al kunnen we het achtergrondproces niet observeren, het heeft wel invloed op je observaties."

Je kunt daardoor bijvoorbeeld niet zo maar een likelihood opstellen en zo maximum likelihood-schatters bepalen. Maar dit maakt het ook juist interessant: we kunnen door alleen het populatieaantal te observeren toch alle parameters van zowel het populatieproces als het achtergrondproces schatten!”

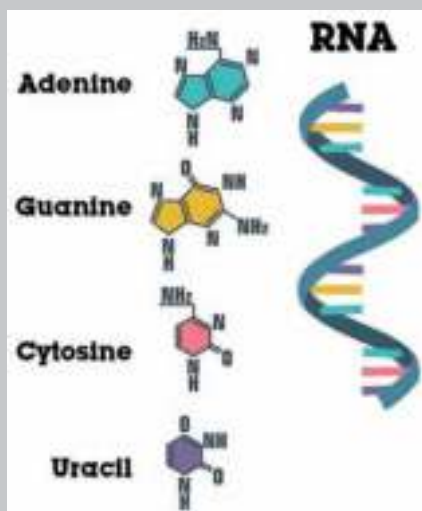
Kun je deze schatters ook testen op echte data?

“In simulaties kunnen we sowieso testen of onze schatters werken op data die we zelf gemaakt hebben, en daaruit blijkt dat onze methodes inderdaad werken. Nu ben ik bezig met de volgende stap: kijken hoe onze schatters het doen op echte data over het aantal RNA-moleculen in cellen. Het achtergrondproces is dan een combinatie van heel veel verschillende factoren, zoals de temperatuur van de cel. Al deze factoren worden geregeld door je cellen, en die bepalen of de productie van RNA omhoog of juist omlaag gaan. Het zou mooi zijn als we dit achtergrondproces met mijn schatters uit de data kunnen halen. De eerste resultaten zien er al veelbelovend uit.”

Wat vind je het meest interessante probleem waar je in de afgelopen tijd aan hebt gewerkt?

“Een tijdje geleden hebben we onderzocht wat er gebeurt als individuen van een populatie zich over een netwerk kunnen bewegen, maar je niet kunt zien hoe ze zich bewegen. Dit voegt nog een extra moeilijkheidsgraad toe in combinatie met het niet-observeerbare achtergrondproces. Ook dan kunnen we alle parameters van het populatieproces en het achtergrondproces schatten. Dit vond ik zelf een hele leuke uitdaging.”

Op welk resultaat ben je het meest trots?
“Ik ben niet per se meer of minder trots op mijn verschillende resultaten. Toch denk ik dat de publicatie van je eerste artikel altijd het meest bijzonder blijft.”



De groei van het aantal RNA-moleculen kun je beschrijven met een populatieproces.

Is er nog een grote uitdaging die je later zou willen onderzoeken?

“Tot nu toe heb ik vooral parameters van modellen geschat. Maar ik denk dat het ook heel interessant zou zijn om non-parametrische schattingsmethoden toe te passen. Dan schat je niet parameters van een model, maar schat je bijvoorbeeld een hele kansverdeling. We nemen nu namelijk vaak aan dat processen exponentieel zijn, en dan hoeven we alleen de parameter van het exponentiële proces te schatten. Deze aanname is wiskundig gezien erg handig, maar natuurlijk niet altijd realistisch. Het kan namelijk ook best zijn dat bijvoorbeeld de sterfte in je populatie niet volgens een exponentiële verdeling gaat. De vraag is dan: kunnen we de hele verdeling van het sterfteproces schatten?”

En op toepassingsgebied?

“Het zou me ook heel leuk lijken om me meer op de toepassing te focussen. Nu hou ik me vooral bezig met het abstracte proces dat heel veel verschillende toepassingen kan beschrijven. Het lijkt me ook interessant om me meer met de specifieke biologische toepassingen bezig te houden. Ik denk bijvoorbeeld dat mijn

onderzoek ook heel goed op infectieziekten toegepast kan worden.”

Naast je onderzoek geef je ook soms presentaties voor middelbare scholieren over wiskunde. Wat vind je hier leuk of belangrijk aan?

“Wiskunde is toepasbaar op zo veel verschillende gebieden, en je kunt het overal terugzien. Op de middelbare school had ik dit helemaal niet door, terwijl ik dat nu juist het mooie aan wiskunde vind. Ik vind het dus heel leuk om dit te laten zien aan middelbare scholieren of studenten, om ze hopelijk geïnteresseerd te maken voor wiskunde.”

In 1986 werd European Woman in Mathematics (EWM) opgericht. Een organisatie die zich inzet om de rol van vrouwen in de wiskunde te promoten. In 2013 ontstond er ook een Nederlandse afdeling, de EWM-NL.

Je hebt ook in het bestuur van EWM-NL gezeten.

“Bij EWM ben ik bijvoorbeeld betrokken geweest bij het mentornetwerk. Hier kunnen vrouwen in de wiskunde een mentor aanvragen: een meer ervaren wiskundige onderzoeker. Deze mentor is iemand van buiten je universiteit of vakgroep, waar je af en toe mee kunt afspreken om vragen of problemen waar je tegenaan loopt mee te bespreken.”

Tot slot: wat vind je leuk, of juist niet leuk aan het doen van onderzoek?

“Ik vind het heel leuk dat je altijd blijft leren, en wiskunde op een hoog niveau kan blijven doen. Wat ik wel jammer vind, is dat je onderzoek vaak alleen doet. Je hebt wel samenwerkingen, maar het grootste deel van je onderzoek doe je toch achter je eigen bureau. Daarom vind ik het ook wel fijn dat je je onderzoek kunt afwisselen met onderwijs, om ook die interactie met studenten te hebben.”

Pim van der Hoorn

Faculteit Wiskunde en Informatica
Technische Universiteit Eindhoven
w.l.f.v.d.hoorn@tue.nl

Onderzoek

Wel of geen schaalvrije netwerken? – Een verhaal van extremen

Onze wereld wordt gedomineerd door een grote hoeveelheid complexe systemen. Veel van deze systemen kunnen beschreven worden als een netwerk (een graaf in puur wiskundige termen). Netwerken bestaan uit elementen (knopen) en verbindingen tussen deze elementen. Voorbeelden zijn overal te vinden. Zo zijn er sociale netwerken, waar de knopen vaak personen zijn en de verbindingen sociale relaties vertegenwoordigen. Maar denk ook aan het Internet dat ons in staat stelt om met computers aan de andere kant van de aarde te communiceren, of aan onze hersenen. Pim van der Hoorn gaat verder in op zogenaamde schaalvrije netwerken. Dat zijn netwerken waarvoor er geen typische schaal is voor het aantal verbindingen die de knopen van een netwerk hebben. Het aantal volgers op Twitter is hier een goed voorbeeld van.

Een belangrijke eerste-orde-eigenschap van een netwerk is het aantal verbindingen die de knopen hebben (de graden van de knopen). In de beginjaren van de netwerk-wetenschap was dit dan ook de eerste eigenschap van een netwerk die bestudeerd werd. Dit leidde al snel tot een bijzondere ontdekking. Tot grote verbazing van verschillende onderzoekers bleek dat de verdeling van de graden in verschillende netwerken een wonderbaarlijk universeel gedrag vertoonde. Als men een plot maakte van de empirische verdeling van de graden op een log-log-schaal, dan leek deze erg op een rechte lijn met een negatieve coëfficiënt. Dit gedrag was nog duidelijker

aanwezig als men naar de inverse kansverdelingsfunctie keek.

Laten we de fractie van het aantal knopen met graad k in een netwerk aanduiden met $P(k)$. Als deze functie een neerwaartse rechte lijn is op een log-log-schaal dan moet $P(k)$ een machtswet hebben;

$$\log(P(k)) = -\gamma \log(k) + C' \iff P(k) = Ck^{-\gamma}.$$

In de artikelen in de netwerkwetenschap werd dit aangeduid met de volgende formule:

$$P(k) \sim k^{-\gamma}. \quad (1)$$

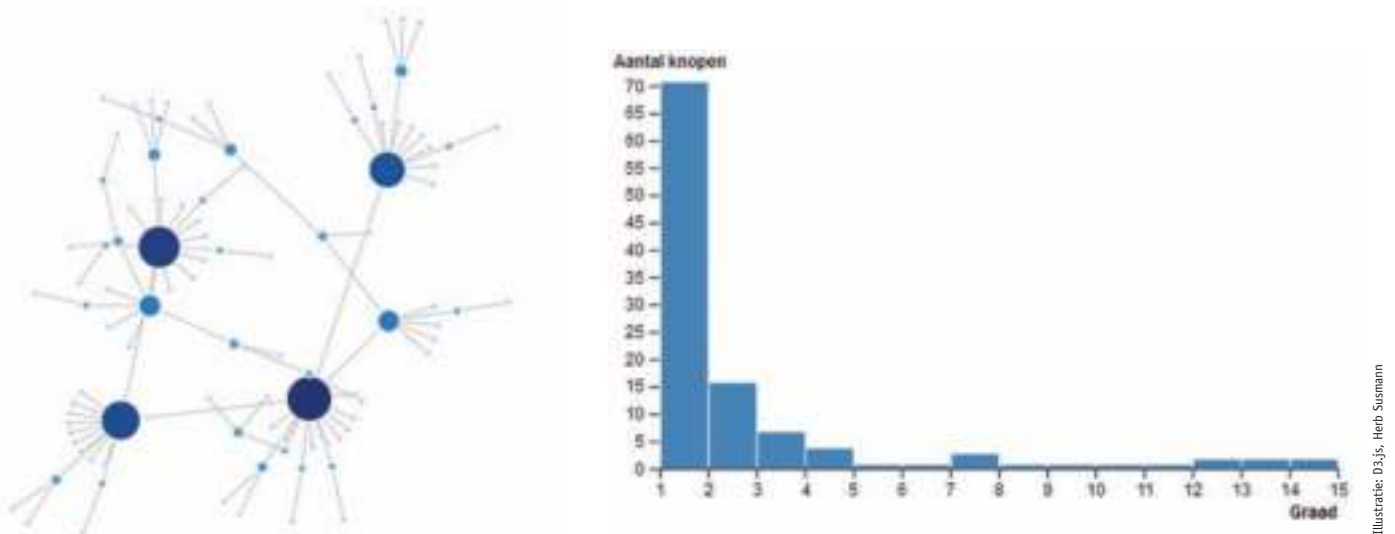
In dit geval zeggen wetenschappers dat het netwerk een machtswet heeft.

Het feit dat er zoveel netwerken met machtswetten werden gevonden kan inderdaad verrassend genoemd worden. Immers, deze netwerken beschrijven een ongekend breed spectrum aan complexe systemen, die niets met elkaar te maken hebben. Maar er was nog meer wonderlijks aan de hand.

Geen typische schaal voor de graden

Toen wetenschappers de exponent van de machtswet gingen schatten, bleek dat deze in het merendeel van de netwerken tussen de twee en drie lag. Dergelijke machtswetten werden als *schaalvrij* aangeduid en vaak werd dan ook het netwerk schaalvrij genoemd.

Een manier om de term schaalvrij te begrijpen is als volgt. Als je een kansverdeling hebt van de vorm $Ck^{-\gamma}$ met $2 < \gamma < 3$, dan heeft deze verdeling een eindig gemiddelde maar een oneindige variantie. Dit betekent dat er geen *typische* schaal is voor de graden. Er is een gemiddelde graad, maar vanwege de oneindige variantie komen we ook knopen tegen met graden die vele orden groter zijn.



Figuur 1 Voorbeeld van een netwerk met 100 knopen uit het Barabási-Albert model.

Een mooi voorbeeld van dit schaalvrij gedrag is het netwerk van volgers op Twitter. Hier zijn de knopen gebruikers en er is een gerichte link van gebruiker a naar gebruiker b ($a \rightarrow b$) als b gevolgd wordt door a . Het aantal volgers dat je hebt is dus gelijk aan de inkomende graad en dit wordt vaak gezien als een maat voor je invloed of populariteit. Een meting uit 2016 liet zien dat het gemiddeld aantal volgers in Twitter 717 is. Dit getal verbleekt echter bij het aantal volgers van de top 100 populairste gebruikers, die allemaal miljoenen volgers hebben. Voormalig president van de Verenigde Staten, Barack Obama en zangeres Katie Pery hebben zelfs een duizelingwekkend aantal van meer dan honderd miljoen volgers.

Schaalvrije netwerken zijn overal

In de beginjaren van de netwerkwetenschap werd artikel op artikel gepubliceerd waarin de auteurs nieuwe netwerken vonden waarin de gradenverdeling een machtswet vertoonde. In veel van deze gevallen wisten de wetenschappers de exponent van de machtswet tussen de twee en drie te schatten. Het leek er dus op dat we omringt zijn door schaalvrije netwerken. Maar niemand begreep echter waar deze vandaan kwamen. Hoe kon het toch dat zoveel verschillende netwerken een schaalvrije gradenverdeling hadden?

In 1999 gaven de nu zeer bekende netwerkwetenschappers Réka Albert en László Barabási een antwoord op dit vraagstuk [1]. Zij introduceerde een dynamisch model voor netwerken, waar elke keer een nieuwe

knoop aan het netwerk wordt toegevoegd die een vast aantal verbindingen met bestaande knopen maakt. De crux was dat de nieuwe knoop zijn burens koos met een kans die proportioneel was met de huidige graad van de knopen. Dit betekent dat als een knoop een hoge graad heeft, deze ook veel vaker nieuwe burens zal krijgen en dus een als maar hogere graad.

Albert en Barabási lieten zien dat dit model op een natuurlijke manier leidt tot een gradenverdeling die schaalvrij is. Een realisatie van een netwerk uit het Albert-Barabási-model is te zien in Figuur 1, met ernaast het histogram van de graden.

Vanaf dit moment ontstond er een groei in studies naar schaalvrije netwerken. In het bijzonder naar het gedrag van verschillende processen op deze netwerken, zoals de verspreiding van epidemieën. De algemene tendens onder wetenschappers was dat onze wereld wordt gedomineerd door schaalvrije netwerken en dus moesten we zoveel mogelijk over hun structuur en gedrag te weten komen. Een mooie conclusie van de eerste tien jaar onderzoek naar netwerken. Niets meer aan doen.

Wat is eigenlijk de definitie?

Er schuilt echter een klein addertje onder het groene gras van schaalvrije netwerken: er is niet echt een consensus onder wetenschappers over wat formule (1) nu precies betekent.

Op het eerste oog lijkt er niets aan de hand met (1). Immers, het teken $\sim$ wordt over het algemeen geassocieerd met asymptotisch equivalent en dus moet het

wel zo zijn dat netwerkwetenschappers bedoelen dat

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \frac{P(k)}{k^{-\gamma}} = 1.$$

Maar er is bijna geen enkel artikel in netwerkwetenschap te vinden waarin (1) ook daadwerkelijk zo geïnterpreteerd wordt. Vaker nog lijkt men te bedoelen dat $\frac{P(k)}{k^{-\gamma}} \rightarrow c > 0$ als $k \rightarrow \infty$. Maar in veel gevallen schrijft men slechts (1) zonder enige uitleg wat hiermee bedoeld wordt.

Waar men het wel over eens lijkt te zijn is de achterliggende intuïtie. Namelijk dat de staart van $P(k)$ op log-log-schaal lijkt op een neerwaartse rechte lijn. Oftewel, dat de staart van de verdeling op een machtswet lijkt.

Dit gebrek aan consensus over de interpretatie van een van de meest gebruikte formules in netwerkwetenschap is problematisch.

Als we willen vaststellen of een netwerk schaalvrij is, dan moeten we eerst controleren of de gradenverdeling aan (1) voldoet. Vervolgens moeten we de exponent γ schatten. Maar als we niet weten wat (1) betekent, hoe kunnen we dan vaststellen of de gradenverdeling hieraan voldoet, of de exponent schatten?

Schaalvrije netwerken zijn zeldzaam

Eind januari 2018 verschijnt een preprint online getiteld ‘Scale-free networks are rare’ (schaalvrije netwerken zijn zeldzaam). De auteurs van dit artikel hadden ook opgemerkt dat de term schaalvrij door de jaren heen van allerlei vormen had aangenomen

en dat er niet echt een eenduidige definitie meer was. Daarnaast constateerde zij, terecht, dat de methodes die in het verleden gebruikt waren om de gradenverdeling van netwerken te analyseren statistisch gezien niet heel stevig in hun schoenen stonden. Ze vonden het dus tijd om de lang bestaande claim dat schaalvrije netwerken overal waren eens goed tegen het licht te houden.

Hun interpretatie van (1) was dat de empirische gradenverdeling van een netwerk, vanaf een gegeven graad $k_{\min}$, een exacte machtswet moest hebben:

$$P(k) = Ck^{-\gamma} \quad \text{voor alle } k \geq k_{\min}. \quad (2)$$

Dit is zeker een verdeling die voldoet aan de eis dat de staart op een machtswet lijkt. Het is er namelijk een.

De echte mooie eigenschap van deze verdeling is dat hij door twee parameters, γ en $k_{\min}$, wordt gedefinieerd. Als je vervolgens schatters hebt voor deze parameters kan je een hypothesetest voor deze aanname ontwikkelen. Dit is precies wat de auteurs hebben gedaan, plus nog wat andere toevoegingen die voor dit verhaal niet relevant zijn. Vervolgens pasten ze deze test toe op een groot aantal verschillende netwerken. Wat bleek, slechts een schamele vier procent van de bestudeerde netwerken slaagde voor hun schaalvrijtest. Hun conclusie was dan ook dat schaalvrije netwerken helemaal niet zo alomtegenwoordig zijn als werd aangenomen. Sterker nog, ze blijken erg zeldzaam te zijn. Hun werk werd begin 2019 in *Nature Communication* gepubliceerd [2].

Deze resultaten ontketenden een flinke discussie onder netwerkwetenschappers. Wetenschappers die heilig overtuigd waren van het bestaan van schaalvrije netwerken, waaronder Albert en Barabási, wezen erop dat definitie (2) te restrictief was en trokken de conclusie dus in twijfel. Een belangrijke onderbouwing van hun bezwaar is dat bijna geen enkel bekend model voor schaalvrije netwerken een gradenverdeling heeft die aan (2) voldoet.

Er waren echter ook veel wetenschappers die blij waren dat er eindelijk een duidelijke rigoureuze definitie en test waren, ook al was (2) wellicht iets te streng. Daarnaast hadden veel van hen al langer het vermoeden dat zeker niet het merendeel van netwerken schaalvrij was, wat nu ondersteund werd door de claim van de auteurs.

Maar wie heeft er gelijk? Hoe zit het echt met de gradenverdeling van netwerken? Is er misschien iets dat wiskunde kan doen om dit geschil te beslechten?

Machtswetten en reguliere variatie

Het probleem met machtswetten in netwerken schreeuwt gewoon om een wiskundige aanpak. Zeker omdat een grote kracht van de wiskunde het vermogen is om intuïties te abstraheren, om te zetten in rigoureuze concepten en deze vervolgens te gebruiken om diepgaande vraagstukken op te lossen. En de situatie van schaalvrije netwerken is gelukkig geen uitzondering.

Laten we beginnen met het idee van *een rechte lijn op een log-log-schaal*. Dit brengt ons bij de theorie van regulier variërende (*regularly-varying*) functies. Een functie $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ is regulier variërend met exponent α , $f \in \mathcal{R}_{-\alpha}$, als het van de volgende vorm is:

$$f(x) = \ell(x)x^{-\alpha} \quad \text{met } \alpha > 0,$$

en waarbij $\ell(x)$ een langzaam variërende functie is,

$$\forall t > 0 \quad \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\ell(tx)}{\ell(x)} = 1.$$

Een kansverdeling heet regulier variërend als $\bar{F} \in \mathcal{R}_{-\alpha}$, met $\bar{F}(x) = 1 - F(x)$ de inverse kansverdelingsfunctie. Als we aannemen dat de kansfunctie voor graden van de vorm $P(k) = Ck^{-\gamma}$ is, dan geldt dat $\bar{F}(k) = C'k^{-(\gamma-1)}$. Dus de exponent α en γ zijn aan elkaar gerelateerd door de formule $\gamma = \alpha + 1$.

De klasse $\mathcal{R}_{-\alpha}$ is ongelooflijk divers. Zij bevat de pure machtswetten en die van de vorm (2). Maar ook functies zoals $\log(x)x^{-\alpha}$ zijn toegestaan. Het belangrijkste is dat een langzaam variërende functie altijd langzamer groeit dan elke macht van x . Dit betekent dat als we een functie $f \in \mathcal{R}_{-\alpha}$ op een log-log-schaal bekijken, dan zal de staart inderdaad bijna op een neerwaartse rechte lijn met coëfficiënt $-\alpha$ lijken. De regulier variërende kansverdelingen bieden dus de perfecte abstractie van de intuïtie achter het concept van machtswetten in netwerken, en in het bijzonder van schaalvrije netwerken.

Er is echter een probleem met deze mooie abstractie. De klasse $\mathcal{R}_{-\alpha}$ heeft geen parametrische beschrijving. Sterker nog, het heeft een niet-aftelbare oneindige dimensie, in de vorm van de langzaam variërende functies. Een mooie hypothese-

test voor lidmaatschap van $\mathcal{R}_{-\alpha}$ lijkt dus uitgesloten, laat staan voor het schatten van de zo belangrijke exponent α .

De theorie van extreme waarden

Maar ook hier biedt de wiskunde een uitkomst. Deze keer komt die vanuit extreme-waardentheorie. Een vakgebied van de wiskunde waar de extreme waarden van kansverdelingen worden bestudeerd. Een klassiek vraagstuk is het volgende: laat $(X_n)_{n \geq 1}$ een rijtje onafhankelijke stochastische variabelen zijn met dezelfde kansverdeling F en definieer de lokale maxima $M_n = \max\{X_1, \dots, X_n\}$. Wat is dan de asymptotische verdeling van M_n ?

Het antwoord op deze vraag komt in de vorm van de fundamentele Fisher-Tippett-stelling, die de mogelijke distributielimieten van gecentreerde en genormaliseerde maxima beschrijft.

Fisher-Tippett-stelling. *Stel dat er rijen d_n en $c_n > 0$ bestaan zodat*

$$\frac{M_n - d_n}{c_n} \xrightarrow{d} H \quad \text{als } n \rightarrow \infty,$$

waar de stochastische variabele H niet met kans 1 een constante is. Dan behoort de kansverdeling van H tot een van de drie extreme-waardenkansverdelingen: 1. Frechët, 2. Gumbel, of 3. Weibull.

De stelling draagt de naam van de auteurs die als eerste vaststelde wat de mogelijk verschillende limietverdelingen konden zijn. Bewijzen van de stelling zijn tot stand gekomen door werk van Gnedenko [4], de Haan [5] en Weissman [12]. Een volledig bewijs kan tegenwoordig gevonden worden in elk standaardwerk zoals bijvoorbeeld [10].

Maar het verhaal wordt nog mooier. Deze drie klassen van kansverdelingen kunnen namelijk samengevoegd worden in de zogeheten *algemene extreme-waardenkansverdeling*

$$H_{\xi}(x) = \begin{cases} \exp(-(1 + \xi x)^{-1/\xi}) & \text{als } \xi \neq 0, \\ \exp(-\exp(-x)) & \text{als } \xi = 0. \end{cases}$$

De Frechët-distributies corresponderen met $\xi > 0$, Weibul met $\xi < 0$ en de Gumbel-verdeling is wanneer $\xi = 0$.

Het cruciale van deze algemene beschrijving van de distributielimieten van de maxima is de parameter ξ , die de *extreme-waarden-index* wordt genoemd. Het is

deze parameter waarmee we de exponent α kunnen schatten, zonder ons druk te maken over de exacte vorm van de langzaam variërende functie.

Dit wordt mogelijk gemaakt door een ander fundamenteel resultaat uit de extreme-waardentheorie. De klasse van kansverdelingen waarvan de verdeling van de maxima $\frac{M_n - d_n}{c_n}$ naar de Frechét-kansverdeling met $\xi > 0$ convergeert, zijn precies de regulier variërende kansverdelingen met $\alpha = \frac{1}{\xi}$ (voor een bewijs zie bijvoorbeeld [3]). De moraal is dat als we in staat zijn om de extreme-waarden-index ξ te schatten, we ook kunnen concluderen of de verdeling tot de klasse $\mathbb{R}_{-1/\xi}$ behoort en dus of zij een machtswet beschrijft, zoals netwerkwetenschappers daarover denken. In het bijzonder correspondeert een waarde van $\frac{1}{2} < \xi < 1$ met een exponent $1 \leq \alpha < 2$ ($2 < \gamma < 3$) en dus met een verdeling met eindig gemiddelde en oneindige variantie. Een schaalvrije kansverdeling dus.

Nu krijgen parameters in wiskunde zelden een eigen naam als ze niet van fundamenteel belang zijn. Het zal dan ook niet als een verrassing komen dat een groot deel van het onderzoek in extreme-waardentheorie zich bezighoudt met het efficiënt en correct schatten van ξ , op basis van een eindig aantal observaties. Jaarlijks worden meerdere artikelen gepubliceerd waarin een nieuwe of verbeterde versie van een bestaande schatter voor ξ wordt geïntroduceerd. Er is dus zeker geen gebrek aan robuuste hamers om

op de spijker “Wanneer heeft mijn netwerk een machtswet?” te slaan.

Waar we nu staan

We hebben zojuist een mooie rondrit gemaakt. Vanuit het probleem van het analyseren van machtswetten in netwerken en het bestaan van schaalvrije netwerken, via regulier-variërende functies door naar de extreme-waardentheorie en weer terug naar machtswetten in netwerken. De conclusie is dat de meest brede en rigoureuze definitie voor machtswetten in netwerken regulier-variërende functies zijn en dat we hun exponent $\alpha = \gamma - 1$ kunnen schatten via de extreme-waarden-index ξ .

Het zal niet onverwacht zijn dat deze link met de extreme-waardentheorie geheel onbekend was bij netwerkwetenschappers. Voor veel hen lijkt dit dan ook waarschijnlijk meer op een ondoorgroondelijke goocheltruc. Maar dit is precies de kracht van het abstracte denken in de wiskunde. Alleen door een probleem tot zijn kern te reduceren en in een algemene vorm te beschrijven, is het mogelijk om bruggen naar andere gebieden te slaan en zo de kennis uit die gebieden te gebruiken om het originele probleem op te lossen.

In een recent artikel van mijzelf en drie co-auteurs hebben wij de extreme-waarden-index ingezet om gradenverdelingen in netwerken te bestuderen [11]. Onze resultaten laten zien dat het aannemelijk is dat een redelijk aantal netwerken een machtswet heeft en dat een flink deel hiervan schaal-

vrij kan zijn. Maar het is zeker niet zo dat dit voor bijna alle netwerken opgaat. De conclusie is dus dat de waarheid omtrent het bestaan van schaalvrije netwerken, hoe kon het ook anders, ergens in het midden ligt.

Aan de ene kant verschaft de link met de extreme-waardentheorie netwerkwetenschappers een grote gereedschapskist om de gradenverdelingen van netwerken te analyseren. Maar er is ook goed nieuws voor de wiskundigen. Want, hoewel veel theorie beschikbaar is, is niet alles direct toepasbaar op netwerken. Allereerst zijn de hier genoemde resultaten voor continue kansverdelingen terwijl graden in netwerken discreet zijn. Daarnaast wordt voor consistentie van de schatters voor ξ aangenomen dat de data onafhankelijk is, wat niet waar is als deze data uit de graden in een netwerk bestaat. Desondanks lijken verschillende simulaties en experimenten aan te geven dat de methodes ook werken in deze, minder schone, situatie. Er is dus een echte noodzaak om de huidige theorie uit te breiden en zijn toepasbaarheid op gradenverdelingen van netwerken met solide bewijzen te ondersteunen. Dit biedt kansen voor het optuigen van nieuwe en mooie wiskunde. Iets wat wiskundigen maar al te graag doen. $\square$

Om verder te lezen over dit onderwerp in een bredere context verwijzen we de geïnteresseerde lezer naar een reeks artikelen op de Network Pages (www.networkpages.nl, [6–9]), het online outreach platform van het onderzoeksprogramma NETWORKS.

Referenties

- 1 Albert-László Barabási en Réka Albert, Emergence of scaling in random networks, *Science* 286(5439) (1999), 509–512.
- 2 Anna D. Broido en Aaron Clauset, Scale-free networks are rare, *Nature Communications* 10(1) (2019), 1017.
- 3 Paul Embrechts, Claudia Klüppelberg en Thomas Mikosch, *Modelling Extremal Events: for Insurance and Finance*, Vol 33, Springer, 2013.
- 4 Boris Gnedenko, Sur la distribution limite du terme maximum d'une série aleatoire, *Ann. Math.* 44(3) (1943), 423–453.
- 5 L. de Haan, *On Regular Variation and its Application to the Weak Convergence of Sample Extremes*, Mathematisch Centrum, 1970.
- 6 Remco van der Hofstad, How the popular become even more popular, www.networkpages.nl
- 7 Remco van der Hofstad en Julia Komjathy, Degrees in graphs IV: degrees in large real-world networks, www.networkpages.nl.
- 8 Pim van der Hoorn, Scale-free networks, a controversial topic solved by extreme mathematics, www.networkpages.nl.
- 9 Julia Komjathy, Why the whole world has seen Gangnam style, www.networkpages.nl.
- 10 Sidney I. Resnick, *Extreme Values, Regular Variation and Point Processes*, Springer, 2013.
- 11 Ivan Voitalov, Pim van der Hoorn, Remco van der Hofstad en Dmitri Krioukov, Scale-free networks well done, *Physical Review Research* 1(3) (2019), 033034.
- 12 Ishay Weissman, On location and scale functions of a class of limiting processes with application to extreme value theory, *The Annals of Probability* 3(1) (1975), 178–181.

Daan Mulder
mulderdaan@live.nl



Het keerpunt van Ellen van Oost

Met goed nadenken en vormgeven kun je het gedrag van mensen verduurzamen

Voor sommigen is een scheerapparaat “gewoon een scheerapparaat”, maar niet voor dr.ir. Ellen van Oost, hoofddocent technieksociologie aan de Universiteit Twente. Haar meest geciteerde artikel (“toch een beetje mijn academische nalatenschap”) gaat over Philips’ Philishave en Ladyshave. Hoe beïnvloedden heersende man- en vrouwbeelden het design daarvan, en hoe beïnvloedt het design vervolgens wat we mannelijk of vrouwelijk vinden? Voordat Van Oost zich met dat soort vragen ging bezighouden, studeerde ze in de jaren zeventig toegepaste wiskunde aan de Universiteit Twente.

Waarom ben je destijds wiskunde gaan studeren?

“Wiskunde was echt mijn lievelingsvak op de middelbare school. Je werd geconfronteerd met problemen waarop je een antwoord moest zoeken. En als je het gevonden had, had je dus echt een kick. Ik was ook niet bijzonder talig, met een onvoldoende voor Nederlands op mijn eindlijst. Misschien had het ermee te maken dat ik linkshandig ben, en het schrijven op de basisschool met inkt bij mij een puinhoop was.

Iedereen vond wiskundeleraren dodelijk saaie mensen, maar ik was als puber altijd verliefd op ze. Het serieuze vond ik juist aantrekkelijk. Ik was nooit verliefd op popsterren. Toen ik op de middelbare school zat, paste ik op de kinderen van de burens, de buurman was wiskundeleer. Om te oefenen voor examens hielp hij mij met wiskunde problemen. Dan was ik ook smoorverliefd op die man.

Ik ben in de Achterhoek opgegroeid, in Aalten. De laatste twee jaar heb ik op de hbs in Hengelo gezeten. Ik wilde wel graag het huis uit, maar ik was nog maar zeventien. Delft vond ik wel erg ver weg. Zo kwam ik op de UT in Enschede terecht. Ik heb altijd een beetje vakken gekozen

aan de ‘zachte’ kant van de wiskunde, zoals operations research: het toepassen van wiskunde op menselijke activiteit.

Ik heb stage gelopen bij het Sociaal Cultureel Planbureau, bij de econoom Jo Ritzen, die later minister van Onderwijs is geworden. Het was wel heel leuk onderzoek, waar ik ook op ben afgestudeerd. Wat ik me van het afstuderen herinner,

is dat we een optimaliseringsfunctie hadden voor — ik meen — de werkgelegenheid. Daarin had je de afwentelingsfactor, de mate waarin de stijging van de loonkosten worden afgewenteld op ofwel de werkgevers, ofwel de overheid. Door die ene variabele te veranderen kreeg je compleet andere ‘optimale samenlevingen’. Ik merkte dat modelleren ook inhoudt dat je allerlei keuzes moet maken. Dat een model een beperkte weergave is van de werkelijkheid. Wat ik leuk vond aan wiskunde, dat er één veilige, duidelijke oplossing was, dat was daarmee helemaal weg.

Op de Universiteit Twente had je ook niet-technische vakken, zoals taalkun-



Ellen van Oost

de, filosofie, wetenschapsfilosofie. Ik vond het ook interessant om me breder te ontwikkelen. Tijdens mijn doctoraal, daar heb ik vier jaar over gedaan, heb ik voor mijn inkomen gezorgd door als student-assistent te werken, bij taalkunde, bij filosofie, bij geschiedenis. Dat deed ik dus naast wiskunde.

Bij een geschiedenisproject zochten ze nieuwe mensen, net toen ik afstudeerde. Omdat ik daar al als student-assistent had gewerkt, werd mij gevraagd of ik twee jaar aan dat project wilde komen werken. Het was iets compleet anders dan wat ik daarvoor deed. Mijn proefschrift schreef ik binnen een wetenschap-en-samenleving-club. De meeste mensen die daar werkten hadden ook een bèta-achtergrond, maar het was meer sociologisch, filosofisch onderzoek. Ik was daar natuurlijk helemaal niet in geschoold. Soms vond ik het zo onbegrijpelijk lastig; waarom kijk je er nou zo naar? En aan de andere kant had ik soms ook het gevoel: het is zo vanzelfsprekend. Wat is hier nu het probleem? Daartussen werd ik heen en weer geslingerd. De kennis om genuanceerd te kunnen kijken naar die relaties, die had ik nog niet, maar die heb ik al werkend opgebouwd.

Met een groep vrij jonge mensen hebben we vervolgens de wetenschap-en-samenleving-groep op de UT vormgegeven. Het was een groeiperiode, wij noemen dat de 'Boerderijtijd', omdat we in een pand zaten op de campus dat voorheen een boerderij was. Daar heb ik ook mijn man, Dirk, leren kennen.

Het was ook academisch gezien een ongelooflijk spannende tijd omdat in het vakgebied het hele idee van het sociaal constructivisme opkwam. Eerder was wetenschapsgeschiedenis het domein van wetenschappers zelf, die idee-ontwikkelingen met elkaar lijmden volgens de logische stappen. Binnen het sociaal-constructivisme onderzoek je veel meer verschillende betekenissen en hoe kennis wordt gemaakt. Dan kijk je bijvoorbeeld naar verschillende groepen en machtsrelaties en probeer je daarvanuit te verklaren hoe een gebied zich ontwikkelt.

Een van de vragen voor ons was waarom er zo weinig meisjes techniek gingen studeren. Het wordt vaak niet bij de techniek zelf gezocht, maar bij de

samenleving, interesses of cultuur. Vanuit die sociaal-constructivistische ideeën hadden we het idee dat het antwoord niet alleen te vinden was in beelden van mannelijkheid en vrouwelijkheid, maar ook in de technologie zelf. Die technologie zelf is niet neutraal, daar zit ook een stukje gender in. De Britse feminist Cynthia Cockburn zei: "If technology is social, then it is gendered." Dat was voor ons een erg belangrijke inspiratie: hoe wordt in de materiële wereld naar mensen uitgezonden dat technologie niet bij vrouwelijkheid hoort? Wij onderzochten scheerapparaten omdat dat design het heel mooi laat zien. Die producten worden specifiek voor mannen en vrouwen ontwikkeld. Daar zitten keuzes achter die je niet alleen op basis van optimalisering van functionaliteit kunt begrijpen: dat je bij de Philips de schroefjes nog ziet zitten, terwijl de Ladyshave helemaal glad afgewerkt is."

Dat draagt bij aan het stereotype dat vrouwen niet technisch zijn?

"Ja. Kijk, je noemt het stereotypering, maar dat is een hele beeldvorming. Het lijkt heel makkelijk om daarvan te zeggen: dat is niet waar, maar die beelden doen zeker wel wat, op een onbewust niveau. Ook bij mijzelf. Ik kwam op de universiteit in een tijd dat er daar heel weinig meisjes waren. Zelf had ik ook een ongelooflijk stereotype beeld van vrouwen op de universiteit. Ik was de uitzondering, de leuke meid, dacht ik. De anderen waren allemaal dom en saai. Voor mij was het echt een wake-up call dat er in mijn eerste jaar bij een bijeenkomst een vrouwelijke student naar voren liep om de rector een petitie aan te bieden. Dat vond ik heel moedig. Zij was dus actief; dat was zo'n omkering van mijn beeld. Vanaf dat moment ben ik actief geweest bij voorlichting voor meisjes, bij vrouwelijke studentenvereniging, bij praatclubjes en dergelijke.

Geleidelijk aan zijn we met de vakgroep wat breder naar de rol van gebruikers in innovaties gaan kijken. Het basisidee van techniek die uit een fabriek komt gerold, of uit een laboratorium, dat klopt niet. Eindgebruikers hebben vaak een actieve vorm in zowel betekenisgeving, hoe het gebruikt gaat worden, als bij innova-

ties. Iets als email is niet begonnen als een communicatiemiddel voor mensen, maar is uiteindelijk door gebruikers zo vormgegeven, vanuit de communicatie tussen een gedistribueerd rekensysteem van computers.

Het onderzoek waar ik nu mee bezig ben, gaat ook over innovaties op het terrein van energie-opslag. Dat is nu een belangrijke uitdaging voor duurzame energiesystemen. Hoe kun je dat zodanig vormgeven dat het lokale initiatieven versterkt, en niet alleen maar ontwikkel-cowboys of grote maatschappijen? Er zijn meer dan 600 collectieven in Nederland, die heel actief vormgeven aan lokale energie-opwekking. Het is eigenlijk gewoon een economisch alternatief, een voorland voorbij de neoliberale economie."

Als je zoveel met design bezig bent, zie je dan de hele tijd die wereld die daarachter zit?

"Nou, ik zit er echt niet de hele tijd naar te kijken, ik kan gewoon mooie dingen zien. Je blijft wel met die blik kijken. Ik ben bezig met hoe producten zijn vormgegeven, of hoe bijvoorbeeld een winkel is ingedeeld om mensen te verleiden om zoveel mogelijk te kopen. Dat soort structuren, die zie ik altijd wel, ook in het landschap. Hoe de wegen zijn aangelegd voor voetgangers, fietsers en automobilisten. Hoe al die structuren invloed hebben op het gedrag. Soms zijn het mooie dingen, zoals een enorm breed fietspad: oh wow, hier is aan de fietser gedacht, hier word je op een rode loper binnengehaald. Het viel me ook op tijdens een vakantie in Duitsland langs de Eems. Daar heb je treinen rijden waar in elke wagon wel tien fietsen kunnen staan. Dan moet je een Nederlandse trein hebben. Het design van de trein beperkt dan dat mensen gaan fietsen. Terwijl je met goed nadenken en vormgeving het gedrag van mensen kan verduurzamen. Je kunt mensen de goede kant op verleiden, of wat ik dan de goede kant vind: duurzamer, gelijkwaardiger, gezonder." 

Goede suggesties voor een Nederlandse wiskundige met een keerpunt in zijn of haar carrière zijn welkom via keerpunt@nieuwarchief.nl.

In de verdediging

| In defence

Pas gepromoveerden brengen hun werk onder de aandacht. Heeft u tips voor deze rubriek of bent u zelf pas gepromoveerd? Laat het weten aan onze redacteur.

Redacteur: Nicolaos Starreveld
 FNWI, Universiteit van Amsterdam
 Postbus 94214
 1090 GE Amsterdam
verdediging@nieuwarchief.nl



ETH-Tight Algorithms for Geometric Network Problems

Sándor Kisfaludi-Bak

In June 2019 Sándor Kisfaludi-Bak from the Eindhoven University of Technology successfully defended his PhD thesis with the title *ETH-Tight Algorithms for Geometric Network Problems*. Sándor carried out his research under the supervision of prof.dr. Mark de Berg and prof.dr. Hans Bodlaender (Utrecht University). He received his degree cum laude, a very rare distinction that is only given for outstanding results that have been obtained with a very high level of independence. Moreover, his thesis also received the distinguished dissertation award from the European Association for Theoretical Computer Science (EATCS).

During his PhD Sándor worked on algorithms for geometric network problems. In his thesis he presented a general framework to develop sub-exponential algorithms for certain types of geometric intersection graphs. This framework applies to many different problems and leads to algorithms that are both faster and more general than what was known. At the moment Sándor is a postdoc at the Algorithms and Complexity Group of the Max Planck Institute for Informatics, in Saarbrücken, Germany.

Geometric networks, algorithms and complexity

In geometric networks vertices correspond to points in some geometric space and edges indicate whether there is some kind of connection between these points.

A lot of problems from graph theory have geometric variants when considering geometric networks. Think of the Traveling Salesman Problem for example, or TSP for short. In the TSP a complete undirected graph G with positive weights on the edges is given. The goal is to compute a cycle visiting every vertex exactly once and having minimum weight. In the geometric variant, called the Euclidean TSP, the input is a set of n points in $\mathbb{R}^d$ and the goal is to find a cycle of minimum Euclidean length visiting all the points.

In order to solve combinatorial problems, algorithms are used. When looking for the most efficient algorithm for a given problem, it is useful to have some method to give lower bounds: to prove that improving the algorithm's running time beyond some point is not possible. Unfortunately, such strong claims can rarely be made: for most combinatorial problems, there is no good methodology to prove unconditional lower bounds. For this reason, most lower bounds are conditional, i.e., only hold on the basis that some complexity theoretic assumption holds.

Conditional lower bounds are usually done via *reductions*: proving that a problem is at least as hard as some older problem that researchers have failed to improve upon for decades. Under the condition that the older problem is indeed not solvable within a certain amount of time, this then proves that the problem at hand

is not solvable in that time either. In other words, in order to prove a lower bound for problem B, you try to find a polynomial algorithm that maps yes- and no-instances of some hard problem A to yes- and no-instances of problem B respectively.

The classic complexity theoretic assumption is that NP-hard problems are not solvable in polynomial time or, in other words, that $P \neq NP$. If a proper reduction is found, people say that the problem has no polynomial algorithm under the $P \neq NP$ assumption, i.e., there is no algorithm that solves the problem in n^c time for any constant $c > 0$ (where n is the size of our input).

ETH-tight complexity

While $P \neq NP$ is still the most popular hypothesis, it does not allow one to distinguish algorithms with single exponential running times, e.g. $2^{\Theta(n)}$, from those with $2^{o(n)}$ running times; the latter is usually called *sub-exponential time*. There is a huge difference between $2^{\Theta(n)}$ running time and, say, $2^{o(\sqrt{n})}$ running time. It is therefore interesting to be able to distinguish between problems that admit the latter type of running time, and problems that (most likely) do not. For this reason, stronger hypotheses than $P \neq NP$ were developed. One of the most well-known ones is the Exponential Time Hypothesis which is formulated in terms of the 3-Satisfiability problem, see the box below for more details. We say that an algorithm is ETH-tight if the algorithm runs in $2^{f(n)}$ time, and having an algorithm with running time $2^{o(f(n))}$ would contradict ETH.

A question that arises is the following, how does one prove that a problem cannot be solved in $2^{o(f(n))}$ time, assuming ETH? This is done, as said above, via reductions. The difference between classic reductions for proving NP-hardness and those needed for ETH-tight lower bounds is that the created instance of problem B should be sufficiently small. This is why traditional techniques developed for proving NP-hardness cannot be used in this context, new techniques for proving ETH-tight lower bounds are needed.

In his thesis Sándor developed a general framework to develop sub-exponential algorithms for certain types of geometric intersection graphs. The algorithmic framework uses the paradigm of divide and conquer. In this paradigm, one tries to find a so-called separator in a graph. The separator is a relatively small subset of

vertices, which when taken away, divides the graph into two smaller components that have no edges going between them, essentially creating two smaller independent instances of the original problem. One can then consider all options of how the solution interacts with the separator (since the separator is small, this can be done efficiently), and for each such choice solve the problems on the two sides of the separator recursively. While the divide and conquer paradigm has been around for a long time, the thesis proves stronger separator theorems, which is the key ingredient required for the faster algorithms. In addition, the framework can be applied to more graph problems when compared to the existing techniques.

Euclidean Travelling Salesman Problem

In 1972 it was shown that the TSP problem is NP-hard. A brute-force algorithm for TSP runs in $O(n!)$, but the celebrated Held-Karp dynamic-programming algorithm, discovered independently by Held and Karp and Bellman, runs in $O(2^n n^2)$ time. Despite extensive efforts and progress on special cases, it is still open if an exact algorithm for TSP exists with running time $O((2 - \epsilon)^n \text{poly}(n))$.

The geometric counterpart of this problem has been studied extensively and it can be considered one of the most important geometric optimization problems. In the early nineties, algorithms with $n^{\sqrt{n}}$ running time were presented for Euclidean TSP in the planar case, and some years later an algorithm with $n^{O(n^{1-1/d})}$ running time was presented for any $d \geq 2$. Despite significant interest in sub-exponential exact algorithms over the past decade, there has been no progress on Euclidean TSP, except for a lower bound stating that the problem admits no $2^{O(n^{1-1/d-\epsilon})}$ algorithm unless ETH fails.

Sándor succeeded in settling the complexity of Euclidean TSP, up to constant factors in the exponent. He constructed an algorithm for Euclidean TSP in $\mathbb{R}^d$, where $d > 2$ is a fixed constant, with running time $2^{O(1-1/d)}$, and he showed that no $2^{o(1-1/d)}$ algorithm exists unless ETH fails.

The more personal aspect

Behind all dissertations there is always a person, with flesh and bones, who has endured the long path of a PhD trajectory and has produced the work at hand.

Were you also involved in some other activities and events during your PhD?

“My PhD was done in the Networks program, which organized several events throughout the years. The training weeks were an especially good experience for me and I imagine for many others as well. It was a loose community where hard work was encouraged, but at the same time the atmosphere was not too competitive, and it was easy to socialize with like-minded peers. Those weeks were also a good opportunity to break out of my research bubble a little bit.”

What are your plans for the future?

“I plan to stay in academia. I really enjoy research, and pushing the limits of our understanding. Teaching is also rewarding; I would know next to nothing without having had the great teachers and colleagues I had the pleasure to learn from. So the short-term goal is to get a position more permanent than that of a postdoc, preferably in Europe. And to perform the job hunt while maintaining the current momentum in several solo and collaborative research projects.”

3-Satisfiability problem

The goal is to decide if there is a satisfying assignment to a 3-CNF formula on n variables. Such a formula is in conjunctive normal form and has clauses of size three. In other words, its basic building blocks are n variables and their negations, and it is a disjunction of size three conjunctions. The following expression is an example of a 3-CNF-formula:

$$(x_1 \vee \neg x_2 \vee x_3) \wedge (x_2 \vee \neg x_4 \vee x_5) \wedge (\neg x_1 \vee \neg x_3 \vee x_4).$$

Currently, the best worst-case algorithm that solves 3-Satisfiability runs in $1.3071^n = 2^{\Theta(n)}$ time. Note that simply trying all the 2^n ways in which variables can be set to true and false already yields an algorithm with running time $2^{O(n)}$. Not succeeding in finding a faster algorithm for this problem, i.e., no $2^{o(n)}$ algorithm, for so many years led R. Impagliazzo and R. Paturi in 2001 to state the Exponential Time Hypothesis (ETH). It states that there is a constant $c > 0$ such that there is no 2^{cn} algorithm for 3-SAT.

Marjolein Kool

*Didactiek van Wiskunde en Rekenen
Pabo Hogeschool Utrecht
marjolein.kool@hu.nl*

Boekbespreking Arjen Sevenster: De wind van morgen

Schoonheid sterker dan de dood

De begin vorig jaar overleden wiskundige Arjen Sevenster hield tijdens zijn ziekteproces vrienden en bekenden op de hoogte middels wat hij noemde zijn kroniek: per e-mail verstuurd updates van zijn ziekte, vergezeld gaand met zijn overpeinzingen en gedichten over leven, werk en de naderende dood. Deze kroniek is nu verschenen in boekvorm. Wiskundige en dichteres Marjolein Kool las het met veel bewondering.

Kun je heimwee hebben naar iemand die je nooit persoonlijk ontmoet hebt? Sinds een paar dagen weet ik dat het kan. Ik las de verhalen en gedichten van de wiskundige en dichter Arjen Sevenster. Hij is in 2019 overleden. Ik heb hem nooit gezien, nooit gesproken, nooit in zijn ogen gekeken, maar door zijn teksten kon ik wel in zijn ziel kijken en zo ontdekken dat ik een zielsverwant moet missen die ik nooit gesproken heb, maar die wel indrukwekkende woorden heeft nagelaten. Het zijn woorden die het verdienen om telkens weer opnieuw gelezen te worden.

Arjen Sevenster was een dapper mens. Dapper zoals hij het lot van zijn ongeneeslijke ziekte droeg, en dapper omdat hij ons zo eerlijk en openhartig deelgenoot wilde maken van het ziekteproces dat naar zijn onvermijdelijke einde heeft geleid. Op deze manier troost hij met zijn woorden

lotgenoten en geeft hij hun dierbaren inzicht in wat onzegbaar is.

Biografie

Eerst maar even de feiten: Arjen Sevenster, geboren in 1946, trad in de voetsporen van zijn vader en studeerde wiskunde. Tevens studeerde hij Japans, waarna hij voor vijf jaar naar Japan vertrok waar hij samen met zijn vrouw Lydia woonde en werkte. Hij vergrootte daar zijn kennis van het zen-boeddhisme en leerde mediteren.

Wiskunde en spiritualiteit bleken niet tegenstrijdig te zijn. Na terugkeer in Nederland werd hij acquisiteur wiskunde bij uitgeverij Elsevier. Hij kreeg drie kinderen en vier kleinkinderen. Toen hij gedichten ging schrijven, werden deze positief opgemerkt door de beroemde dichteres Vasalis. Door haar aangemoedigd, publiceerde hij twee dichtbundels, *Ogenblik* in 2016 en *Bloemen in de regen* in 2019.

In januari 2017 krijgt Arjen te horen dat hij aan een agressieve vorm van prostaatkanker lijdt. Het zet zijn leven op zijn kop: "Mijn leven is verschoven van doen naar zijn, van aan dingen voorbijlopen naar een



Arjen Sevenster, *De wind van morgen*, In de Knipscheer, 2020, ISBN 9789062657643, 234 p., € 19,50.



Arjen Sevenster met twee van zijn kleinkinderen in Chicago, 2017

in het hier en nu beleven van de dingen, van een vanzelfsprekende autonomie naar een grote dankbaarheid voor alle hulp die ons geboden wordt.” Vanaf dat moment houdt hij via de e-mail ruim honderd vrienden en familieleden uitvoerig op de hoogte van zijn gezondheid, ziekenhuis- en doktersbezoeken, medicijnen en therapieën, en het leven dat daarnaast nog mogelijk is. Uit de kronieken die hij hen stuurt, blijkt hoe bewonderenswaardig goed hij erin slaagt met zijn nieuwe werkelijkheid om te gaan. Twee jaar lang maakt hij iedereen deelgenoot van zijn proces naar het onverbiddelijke einde op 2 februari 2019. Na zijn dood zijn de kronieken gebundeld in *De wind van morgen*.

Wiskundige, schrijver, dichter

De wind van morgen heeft geen inhoudsopgave, maar die zou erg overzichtelijk zijn geweest: eerst zes hoofdstukken getiteld Chemo-1, Chemo-2,..., Chemo-6, daarna twaalf hoofdstukken met de titels Controle-1, Controle-2,..., Controle-12. Hierin herkennen we misschien iets van de zakelijke systematiek van een wiskundige, net als in de rapportage van de aantallen witte en rode bloedlichaampjes, bloedplaatjes en de PSA-waarde van zijn bloed. Gelukkig blijft het daar niet bij. Achter de getallen gaat een moedige en gevoelige man schuil, die laat zien hoe hij probeert te leven met hoop en vrees, angst en pijn, maar ook geluk en dankbaarheid. Als hij de deur naar zijn ziel op een kier zet, laat

hij de wiskunde al snel achter zich. Als het slechter met hem gaat schrijft hij na het vermelden van de getallen: “Tot zover de feiten. Hoe bouw ik uit deze feiten een huis om in te wonen?” Het lukt hem. Arjen Sevenster bouwt een ontroerend huis met herinneringen en gedachten, kleine kamers en grote vergezichten. Een huis waarin de lezer meer dan welkom is. Was Arjen Sevenster een wiskundige die kon schrijven of een schrijver die kon dichten of was hij het gewoon alle drie? In zijn boek gaat het naadloos in elkaar over. Er zijn verhalen, gebeurtenissen, herinneringen en wijsheden, en ook zo’n veertig gedichten. Het zijn gedichten over zijn ziekte en andere thema’s, nieuwe en bestaande gedichten. Ze worden ingebed in het proces dat Arjen doormaakt. Ze staan op betekenisvolle plekken en krijgen zo een extra lading. Elk gedicht is sterk genoeg om op zichzelf te kunnen staan. Dat blijkt ook als we ze opnieuw — naast vele andere gedichten — tegenkomen in de dichtbundel *Bloemen in de regen*. Maar het worden juweeltjes als ze zijn ingebed in hun context, als ze zijn verbonden met het denken en leven van de dichter. Dan is het geheel veel meer dan de som der delen. Tegelijkertijd winnen de verhalen aan schoonheid door de poëzie waar ze naast staan, nee, herstel, waar ze van doordrongen zijn. Nog nooit ben ik zo’n natuurlijke symbiose van proza en poëzie tegengekomen. *De wind van morgen* is een Gesamtkunstwerk. Er is ook ruimte voor poëzie van anderen, onder an-

dere van de dichteres Vasalis die hem gestimuleerd heeft. Wat een geluk dat ze dat gedaan heeft, want zijn gedichten zijn de moeite waard, prachtig, gevoelig, spiritueel, ze toveren een glimlach op je gezicht. Hetzelfde gebeurt als je zijn proza leest. Arjen is meesterlijk in beeldspraak, zowel in zijn poëzie als in zijn proza. “Ik zie mijzelf als de kapitein van een schip dat goed op koers ligt. Echter, hoe gunstig de wind ook is die de zeilen doet bollen, hoe blauw ook de zee die het schip doorklieft, de angst voor de muiterij reist mee, want wat er in het vooronder gist en broeit, daar heeft de kapitein geen weet van.” Is dit poëtisch proza, of prozaïsche poëzie? Het is hoe dan ook beeldrijk, ritmisch en klankvol. Als zijn einde nadert en hij niet meer van zijn bed afkomt, schrijft hij: “De dag ligt log en lui op mij te wachten als een aangespoelde walvis.” Het staat gewoon in de lopende tekst, maar het is pure poëzie. Omgekeerd vinden we in zijn poëzie beschrijvingen van alledaagse gebeurtenissen die glanzen als pareltjes:

De week is als een buurmeisje
dat wij een winter lang niet zagen
en dat ons nu opeens begroet
met iets uitdagends in haar blik.’

Gaandeweg krijgt hij steeds meer oog voor de gewone, kleine dingen dicht bij huis, waar hij kostbare miniatuurtjes van weet te maken. Maar ook de grote thema’s gaat hij niet uit de weg.

Het onafwendbare einde

De dood van mijn moeder

Mijn moeder is gestorven in mijn slaap
Een vrouw van weinig woorden heeft zij
de laatste klus alleen geklaard:
voor haar geen afscheid en geen tranen.

Zonder om te kijken of te groeten
ging zij ’s nachts van ons vandaan,
heeft zij nog een laatste woord gesproken,
hebben wij het niet verstaan.

Was alles wat gezegd kon worden
al gezegd, schoot taal tekort
voor wat wij wisten en ook voor

dat waarnaar wij gisten? Het raadsel
dat wij niet doorgronden konden:
dat van haar leven en haar dood.

De moeder is niet gestorven in háár slaap, maar in ‘mijn slaap’. Een goede dichter kan

met één woord alles omkeren. De ogenschijnlijk feitelijke beschrijving van wat gebeurd is, gaat over in vragen over de ondoorgrondelijkheid, het raadsel van het bestaan. De vorm doet denken aan een sonnet, veertien regels en een volta of chute na acht regels. Het metrum is vloeiend, maar het rijmschema voldoet niet aan de strakke eisen van een sonnet. Er is wel wat eindrijm: vandaan–verstaan; wat middenrijm: wisten–gisten, doorgronden–konden; en wat assonantie: slaap–geklaard; maar de dichter wilde zich kennelijk niet ophangen aan een veel-eisend rijmschema. Dat lijkt een goede keuze. De vorm is geen keurslijf geworden, versterkt de inhoud waar dat kan, maar is op tijd weer losgelaten. Op andere momenten, in andere gedichten probeert hij soms wél de regels wat strikter te hanteren, maar nergens is er dwang. De gedichten



lezen licht, zijn toegankelijk, alsof hij ze snel en losjes heeft genoteerd, maar schijn bedriegt. Uit de raak gekozen woorden en de feilloos opgebouwde ritmische zinnen blijkt dat er veel tijd en moeite geïnvesteerd is om deze losse toets te bereiken. “Zijn stijl is verzorgd”, schrijven andere recensenten. Dat klopt, maar dat klinkt zo afgemeten. Zijn werk is in de eerste plaats hartverwarmend en ontroerend, maar nooit sentimenteel.

Het boek bevat meer gedichten over de dood. Dat is uiteraard geen onverwachts thema voor iemand die zijn eigen dood onder ogen moet komen, die moet accepteren dat zijn einde nadert, die beseft dat iedereen, familie, vrienden en ook zijn lieve Lydia straks de draad weer op zullen pakken en door zullen gaan met hun leven zonder hem. Dat is een bittere pil, maar het boek is niet somber. Schoonheid en liefde blijven het telkens weer winnen van angst en pijn. Arjen richt zijn blik en gedachten steeds weer op wat er werkelijk toe doet in het leven en de lezer volgt hem met bewondering. Hij strooit met haiku's, wijsheden uit het boeddhisme, spreuken en parabelen. En alles staat op de juiste plek. Mijn favoriet is de parabel van de aap met de noot in de fles:

“In India, zo wil de parabel, worden apen gevangen door op de bodem van een fles met een lange, nauwe hals een noot te leggen. De aap reikt met gestrekte vingers naar de lekkernij en omklemt de noot. Maar omdat zijn vuist te dik is om door de hals terug te kunnen, heeft hij zichzelf gevangengezet en zo treft de jager hem aan. Is mijn angst de noot, die ik maar hoeft los te laten om vrij te zijn, maar durf ik dat niet, omdat ik met mijn angst een deel van mijzelf zou loslaten?”

Zo word je als lezer meegenomen in de gedachten, gevoelens, twijfels en herinneringen van Arjen. Geleidelijk aan, maar niet chronologisch, krijg je een beeld van zijn levensloop. Er komen veel familieleden in voor, zijn ouders, zus, kinderen, kleinkinderen, zijn echtgenote Lydia, en veel dierbare, soms zonderlinge vrienden. Jarenlang was de hele wereld zijn spelen- en werkterrein. Hij maakte veel reizen voor werk en studie. Tot zijn grote vreugde kan hij in 2017 zijn zoon in Chicago nog bezoeken en in 2018 terugkeren naar Japan, waar hij samen met Lydia de beken-

de tempels in Tokio bezoekt, hij kan nog één keer mediteren op de plekken waar hij destijds het mediteren geleerd heeft. Maar gaandeweg wordt zijn wereld steeds kleiner. Eerst schrijft hij nog op treinstations en in cafés totdat hij steeds meer aan huis gebonden raakt. Daar wordt hij omringd en verzorgd door dierbaren. Ze vieren sinterklaas, zijn kleindochter tekent bloemen in de regen, en hij herkent het geluk in de kleine dingen, in sneeuwklodjes, een in vieren gedeelde gevulde koek, wolken, bloemen, zonlicht, uitzicht op het Spaarne. Totdat het hem niet meer lukt om daarmee de pijn in zijn benen, bekken, zijn hele lijf, te bezweren. Hij kijkt uit naar een paar bijzondere gebeurtenissen die nog in het verschiet liggen. Het is hem gegeven om ze allemaal nog mee te maken: De geboorte van zijn kleinzoon, de promotie van zijn zoon Bart die het wiskundige proefschrift schrijft dat zijn vader nooit voltooid heeft, het verschijnen van zijn dichtbundel *Bloemen in de regen*, hij laat zich via de e-mail interviewen voor het *Nieuw Archief voor Wiskunde* en dan valt het doek. De laatste zin wordt geschreven. De laatste zinnen zijn het moeilijkst, heeft hij al eerder geleerd van Vasalis. Toen zij hem vlak voor haar dood opbelde, schreef hij:

Nog even en je zou er niet meer zijn
Het laatste afscheid en de laatste pijn,
de laatste regel kwam in zicht:
de moeilijkste, zoals je zei,
van elk gedicht.

Zijn laatste zinnen in het boek zijn een gedicht voor zijn dochter Dieuwke. Ze zijn van een ontroerende schoonheid.

Dan droogt ze een voor een haar tranen
en lacht mij toe met ogen,
waaruit de droefheid niet verdwenen is
maar sluimert als een oud verhaal.

Ik heb Arjen postuum leren kennen in zijn woorden, zijn verhalen en gedichten. Het was een voorrecht en een genoegen. Dichter, denker, dierbare wiskundige, ik heb in jou geen vriend verloren, ik heb er een gevonden. ❦

Bibliografie van Arjen Sevenster

- 1 *Ogenblik*, Inner Peace Publications, 2016.
- 2 *Bloemen in de regen*, In de Knipscheer, 2019.
- 3 *De wind van morgen*, In de Knipscheer, 2020.

Problemen

| Problem Section

This Problem Section is open to everyone; everybody is encouraged to send in solutions and propose problems. Group contributions are welcome. We will select the most elegant solutions for publication. For this, solutions should be received before **15 October 2020**. The solutions of the problems in this issue will appear in the next issue.

Problem A (proposed by Onno Berrevoets)

Let $f: (-1, 1) \rightarrow \mathbb{R}$ be a function of class C^∞ , i.e., all higher derivatives of f exist on $(-1, 1)$. Let $c \geq 0$ be a real number. Suppose that for all $x \in (-1, 1)$ and all $n \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$ we have $f^{(n)}(x) \geq -c$. Also assume that for all $x \in (-1, 0]$ we have $f(x) = 0$. Prove that f is the zero function.

Problem B (proposed by Onno Berrevoets)

Consider the map $f: \mathbb{Z}_{\geq 0}^2 \rightarrow \mathbb{Z}_{\geq 0}^2$, $(a, b) \mapsto (2 \min\{a, b\}, \max\{a, b\} - \min\{a, b\})$. We call $(a, b) \in \mathbb{Z}_{\geq 0}^2$ *equipotent* if there exists $n \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$ such that $f^n(a, b) = (x, x)$ for some $x \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$ (where $f^n = f \circ \dots \circ f$). Show that $(a, b) \in \mathbb{Z}_{\geq 1}^2$ is equipotent if and only if $\frac{a+b}{\gcd(a,b)}$ is a power of 2.

Problem C* (folklore)

Uncle Donald cuts a 3 kg piece of cheese in an arbitrary, finite number of pieces of arbitrary weights. He distributes them uniformly randomly among his nephews Hewey, Dewey, and Louie. Prove or disprove: the probability that two of the nephews each get strictly more than 1 kg is at most two thirds.

Edition 2020-2 We received solutions from Rik Biel and Thijmen Krebs.

Problem 2020-2/A (proposed by Hendrik Lenstra)

Let R be a ring, and write $R[[X, X^{-1}]]$ for the set of formal expressions $\sum_{i \in \mathbb{Z}} a_i X^i$ with all $a_i \in R$.

- Suppose that $R[[X, X^{-1}]]$ has a ring structure with the following three properties.
 - The sum is given by $(\sum_{i \in \mathbb{Z}} a_i X^i) + (\sum_{i \in \mathbb{Z}} b_i X^i) = \sum_{i \in \mathbb{Z}} (a_i + b_i) X^i$,
 - For two formal power series in X , the product is the regular product of power series, and likewise for two formal power series in X^{-1} .
 - For $1 := X^0$, we have $X \cdot X^{-1} = 1$.
 Prove that R is the zero ring.
- Prove that for every ring R , there exists a ring structure on $R[[X, X^{-1}]]$ satisfying properties I and II.

Solution We received a solution from Thijmen Krebs.

For part a, we calculate

$$\begin{aligned}
 \left(\sum_{i > 0} X^i \right) \cdot \left(\sum_{i < 0} X^i \right) &= \left(\sum_{i \geq 0} X^i \right) \cdot X \cdot X^{-1} \cdot \left(\sum_{i \leq 0} X^i \right) \\
 &= \left(\sum_{i \geq 0} X^i \right) \left(\sum_{i \leq 0} X^i \right) \\
 &= 1 + \left(\sum_{i < 0} X^i \right) + \left(\sum_{i > 0} X^i \right) + \left(\sum_{i > 0} X^i \right) \cdot \left(\sum_{i < 0} X^i \right) \\
 &= \sum_{i \in \mathbb{Z}} X^i + \left(\sum_{i > 0} X^i \right) \cdot \left(\sum_{i < 0} X^i \right).
 \end{aligned}$$

It follows that the formal power series $\sum_{i \in \mathbb{Z}} X^i$ equals 0, and in particular, $1 = 0$. Hence R is the zero ring.

For part b, we define

$$\left(\sum_{i \in \mathbb{Z}} a_i X^i \right) \cdot \left(\sum_{i \in \mathbb{Z}} b_i X^i \right) = \left(\sum_{i \geq 0} a_i X^i \right) \left(\sum_{i \geq 0} b_i X^i \right) + \left(\sum_{i \leq 0} a_i X^i \right) \left(\sum_{i \leq 0} b_i X^i \right) - a_0 b_0.$$

This satisfies property (ii), has multiplicative identity 1, and is associative and distributive because multiplication in $R[[X]]$ and $R[[X^{-1}]]$ is associative and distributive.

Note that this ring is isomorphic to $R[[X, Y]] / (XY)$.

Problem 2020-2/B (proposed by Onno Berrevoets)

Let $n \geq 1$ be an integer, and let $p_1, \dots, p_{n-1}$ be pairwise distinct prime numbers. Suppose that $(v_1, \dots, v_n)^\top \in \mathbb{Z}^n$ is a non-trivial element of the kernel of

$$\begin{pmatrix} 1^{p_1} & 2^{p_1} & \dots & n^{p_1} \\ 1^{p_2} & 2^{p_2} & \dots & n^{p_2} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1^{p_{n-1}} & 2^{p_{n-1}} & \dots & n^{p_{n-1}} \end{pmatrix}.$$

Prove that

$$\max_k |v_k| \geq \frac{2}{n^2 + n} \prod_{i=1}^{n-1} p_i.$$

Solution We received no solutions. The proof provided is by Daan and Onno.

Suppose by contradiction that $\max_k |v_k| < \frac{2}{n^2 + n} * \prod_{i=1}^{n-1} p_i$. For every i the i -th row vector equals $(1, 2, \dots, n)$ modulo p_i , hence $\sum_k k v_k \equiv 0 \pmod{p_i}$ for every i . It follows that $\sum_k k v_k = 0 \pmod{\prod_i p_i}$, and thus $\sum_k k v_k = 0$ by the assumed inequality on $\max_k |v_k|$. We conclude that $(1, 2, \dots, n)$ is perpendicular to $(v_1, \dots, v_n)$. Now $(v_1, \dots, v_n)^\top$ is in the kernel of the matrix.

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & \dots & n \\ 1^{p_1} & 2^{p_1} & \dots & n^{p_1} \\ 1^{p_2} & 2^{p_2} & \dots & n^{p_2} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1^{p_{n-1}} & 2^{p_{n-1}} & \dots & n^{p_{n-1}} \end{pmatrix}.$$

Hence, this matrix is singular, and the rows are thus linearly dependent over $\mathbb{Q}$. Let $S = \{1, p_1, p_2, \dots, p_{n-1}\}$ and let $(\lambda_s)_{s \in S} \in \mathbb{Q}^n$ be such that

$$\sum_{s \in S} \lambda_s (1^s, 2^s, \dots, n^s) = (0, 0, \dots, 0).$$

Then the non-zero polynomial $\sum_s \lambda_s X^s$ has roots $1, 2, \dots, n$ and at most n non-zero coefficients.

We claim that such a polynomial does not exist. More precisely, we claim that any non-zero polynomial in $\mathbb{R}[X]$ with at least n distinct positive roots has at least $n + 1$ non-zero coefficients. We do this by induction.

The case $n = 0$ is trivial. For $N > 0$, assume by induction that any non-zero polynomial with at least $N - 1$ distinct positive roots has at least N non-zero coefficients. Suppose that f is a non-zero polynomial with at least N positive roots. Without loss of generality, assume the constant term of f is non-zero (dividing by X does not change the number of terms or the number of positive roots of f), and moreover, f is non-constant. Suppose f has positive roots $a_1 < a_2 < \dots < a_N$. Then the derivative of f has a positive root between a_i and a_{i+1} for all $i \in \{1, 2, \dots, N - 1\}$, so it has at least $N - 1$ distinct positive roots. By the induction hypothesis, it has at least N non-zero coefficients. Since f had a non-zero constant term by assumption, it follows that f must have had at least $N + 1$ non-zero coefficients to begin with.

This proves the claim, and shows in particular that there is no non-zero polynomial with at most n non-zero terms with roots $1, 2, \dots, n$. This contradiction shows that we cannot have $\max_k |v_k| < \frac{2}{n^2 + n} * \prod_{i=1}^{n-1} p_i$, as was to be shown.

Problem 2020-2/C (proposed by Onno Berrevoets)

Let $n, m, k \geq 2$ be positive integers. n students will attend a multiple-choice exam containing mk questions and each question has k possible answers. A student passes the exam precisely when he/she answers at least $m + 1$ questions correctly.

- Suppose that $n = 2k$. Show that the students can coordinate their answers such that it is guaranteed that at least one student passes the exam.
- Suppose that $n = 2k - 1$. Does there exist a k for which the students can coordinate their answers such that it is guaranteed that at least one student passes the exam?

Solution We received solutions from Rik Biel and Thijmen Krebs. This solution is based on the one by Thijmen.

We describe a strategy for the students by giving mk ordered partitions of $\{1, \dots, n\}$ into k parts, indicating that student s picks answer a on question q if and only if s is in the a -th part of the q -th partition.

For part a, we take

$$\begin{aligned} \{1, 2\}, \{3, 4\}, \dots, \{n-1, n\} & \text{ (first } mk-1 \text{ questions),} \\ \{2, 3\}, \{4, 5\}, \dots, \{n, 1\} & \text{ (final question).} \end{aligned}$$

Note that student $2i$ is in the i -th part of each partition, and that student $2i-1$ is in the i -th part of each partition except the last, in which case she is in the $i-1$ -th part (taken cyclically). In other words, student $2i$ answers i on each question, while student $2i-1$ answers i on all but the last question, on which she answers $i-1$.

The only way in which none of the students passes on the first $mk-1$ questions is if all but one of the student pairs $\{2i-1, 2i\}$ get exactly m correct answers and the final pair gets exactly $m-1$ correct answers on these questions. Assuming this is the case, then if the correct answer to the final question is i , we find that both students $2i$ and $2i+1$ get another correct answer, and at least one of these two already had m correct answers on the first $mk-1$ questions. Thus, at least one student passes.

For part b, there exists such k if $k > m+2$. Take

$$\begin{aligned} \{1, 2\}, \{3, 4\}, \dots, \{n-2, n-1\}, \{n\} & \quad m(k-1)-1 \text{ times,} \\ \{2, 3\}, \{4, 5\}, \dots, \{n-1, 1\}, \{n\} & \quad m+1 \text{ times.} \end{aligned}$$

Without loss of generality, we assume student n is correct on the first i questions and the last $m-i$ questions with $0 \leq i \leq m$; if she is correct more often, we are done, and otherwise, the situation can only improve for the remaining students. Then there are $m(k-1)-(i+1)$ questions of the first kind and $1 \leq i+1 < k-1$ questions of the second kind for the other students to score points on. On each of these questions, precisely two students score points, for a total of $2m(k-1)$ points distributed over $2(k-1)$ students. This means that no student passes if and only if each student scores exactly m points.

The only way to avoid passing a student on the remaining $m(k-1)-(i+1)$ questions of the first kind is for no fewer than $k-1-(i+1)$ of the $k-1$ pairs $\{1, 2\}, \dots, \{n-2, n-1\}$ to have exactly m correct answers; otherwise, the total number of questions of this kind can at most be $(k-1-(i+2))m + (i+2)(m-1) = m(k-1)-(i+2)$. The remaining $i+1$ pairs have in total $2((i+1)m - (i+1))$ correct answers. In particular, since $1 \leq i+1 < k-1$, there is at least one pair of students with exactly m points and at least one pair with strictly less than m points scored on the questions of the first kind. Working cyclically, we can therefore assume that the pair $\{2j-1, 2j\}$ has exactly m correct answers and $\{2j+1, 2j+2\}$ has strictly less than m correct answers in questions of the first kind. We find that student $2j$ cannot have any correct answer in the final questions, and since she answers in the same way as student $2j+1$, neither can student $2j+1$. But then student $2j+1$ will in total score strictly less than m points, meaning that at least one other student will score strictly more than $m+1$ points. In other words, this strategy guarantees that at least one student passes.

