

# Inhoud | Contents

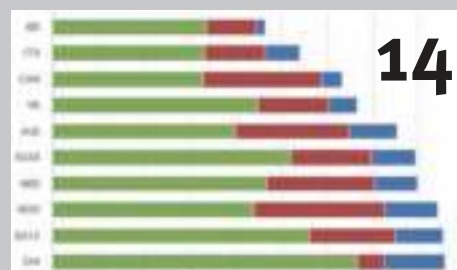
## Artikelen | Features

- Evenement | Event**  
 9 Wintersymposium KWG: Aardse wiskunde  
*Robbert Fokkink*
- Interview | Interview**  
 12 Karen Uhlenbeck: Supporting the minorities in mathematics  
*Ionica Smeets*
- Oratie | Inaugural Lecture**  
 14 Mathematics: hard or soft  
*Mark Veraar*
- Onderzoek | Research**  
 27 A formula for the permanent  
*Jaap Spies*
- Interview | Interview**  
 28 Onno Boxma: Van wachtrij tot Wiskunderaad  
*Nicolaos Starreveld*
- Afscheidsrede | Valedictory Lecture**  
 38 Mathematics, the science of my life  
*Jaap Molenaar*
- Herinnering | Remembrance**  
 47 Dick Askey's sabbatical jaar in Amsterdam, 1969–1970  
*Nico Temme*
- Onderzoek | Research**  
 49 Hoe imaginair zijn de complexe getallen?  
*Rudi Penne, Stijn Dierckx, Paul Levrie*
- Evenement | Event**  
 53 PTM Jubilee Congress: 100th anniversary Polish Mathematical Society  
*Krzysztof R. Apt, Einar Fredriksson*
- De oplossing | The Solution**  
 55 Getallen vermenigvuldigen in  $O(n \log n)$  stappen  
*Joris van der Hoeven*
- In Memoriam | In Memoriam**  
 61 Vladas Sidoravicius: Celebrating science as an adventure  
*Roberto Fernandez*

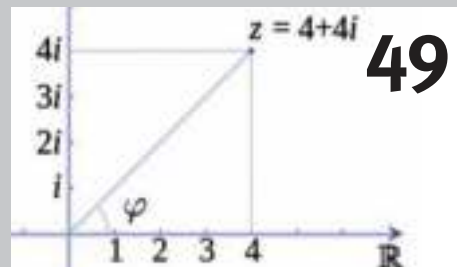
## Rubrieken | Departments

- 3 Redactioneel  
*Robbert Fokkink*
- 4 Agenda  
*Margriet Oomen*
- 6 Nieuws  
*Margriet Oomen*
- 25 Het keerpunt van Samuel Vriezen  
*Daan Mulder*
- 34 Stoffelijke resten: Wenen  
*Robbert Fokkink*
- 64 In de verdediging  
*Nicolaos Starreveld*
- 66 Boekbesprekingen  
*Hans Cuypers, Hans Sterk*
- 71 Problemen  
*Onno Berrevoets, Rob Eggermont, Daan van Gent*

### Uitgelicht



Op vrijdag 13 september 2019 hield Mark Veraar zijn intreerede over harde en zachte wiskunde.



Rudi Penne, Stijn Dierckx en Paul Levrie doen een poging de complexe getallen van hun slechte imago te bevrijden.

## Colofon

Het Nieuw Archief voor Wiskunde is een uitgave van het Koninklijk Wiskundig Genootschap en verschijnt vier maal per jaar. Het tijdschrift richt zich op eenieder die zich beroepsmatig met wiskunde bezighoudt, als academisch of industrieel onderzoeker, student, leraar, journalist of beleidsmaker. Het stelt zich ten doel te berichten over ontwikkelingen in de wiskunde in het algemeen en in de Nederlandse wiskunde in het bijzonder.

ISSN 0028-9825

### Adres

Nieuw Archief voor Wiskunde  
Centrum Wiskunde & Informatica  
Postbus 94079, 1090 GB Amsterdam  
tel. 020-5924288  
redactie@nieuwarchief.nl  
www.nieuwarchief.nl

### Hoofredactie

Raf Bocklandt (r.r.j.bocklandt@uva.nl)  
Robbert Fokkink (r.j.fokkink@tudelft.nl)

### Eindredactie/Bladmanager

Fred Drissen (fred@nieuwarchief.nl)

### Redactie

Viktor Blåsjö (UU), Hans Cuypers (TU/e), Teun Koetsier (VU), Daan Mulder, Margriet Oomen (UL), Nicolaos Starreveld (UvA), Hans Sterk (TU/e), Mark Timmer (UT)

### Problemenrubriek (problems@nieuwarchief.nl)

Onno Berrevoets, Rob Eggermont en Daan van Gent

### Bureau redactie

Claartje Ottens

### Illustraties

Ryu Tajiri

### Vormgeving

Susanne Laws (omslag, begeleiding binnenwerk)  
Kitty Molenaar (ontwerp)

### Druk

Veldhuis Media

### Advertenties

advertenties@nieuwarchief.nl

### Koninklijk Wiskundig Genootschap

www.wiskgenoot.nl

### Platform Wiskunde Nederland

www.platformwiskunde.nl

### European Mathematical Society

www.euro-math-soc.eu

### International Mathematical Union

www.mathunion.org

### Koninklijk Wiskundig Genootschap

Het Koninklijk Wiskundig Genootschap (KWG) is een landelijke vereniging van beoefenaars van de wiskunde. In 1778 opgericht onder de zinspreuk: 'Een onvermoeide arbeid komt alles te boven' is het 's werelds oudste nationale wiskundegenootschap. Leden ontvangen het Nieuw Archief voor Wiskunde als onderdeel van hun lidmaatschap.

#### Bestuur

Jan Wiegerinck (UvA, voorzitter), Marije Elkenbracht (ABN AMRO, penningmeester), Marie-Colette van Lieshout (CWI, secretaris), Danny Beckers (VU), Theo van den Bogaart (HU), Sonja Cox (UvA), Barry Koren (TU/e), Michael Mürger (RU), Wioletta Ruszel (TUD).

#### Secretariaat

Koninklijk Wiskundig Genootschap, CWI  
Postbus 94079, 1090 GB Amsterdam  
wiskgenoot@wiskgenoot.nl  
www.wiskgenoot.nl

#### Ledenadministratie KWG / Abonnementen

admin@wiskgenoot.nl, tel. 020-5924008  
Wijzigingen of opzegging kunt u ook doorgeven door in te loggen op www.wiskgenoot.nl.

#### Contributie

Tarieven per jaar (bij betaling per automatische incasso krijgt u € 2,50 korting):

- gewoon lid: € 92,50
- reciprociteitslid: € 72,50
- gepensioneerden en werklozen: € 47,50
- aio's, oio's, studenten: € 37,50 (max. 4 jaar)
- lid zonder Nieuw Archief: € 52,50

Studenten en pas afgestudeerden kunnen een jaar lang gratis lid worden.

Voor verzending van het Nieuw Archief naar het buitenland wordt een portotoeslag van € 10 in rekening gebracht.

Instituten in Nederland en buitenland kunnen zich abonneren op het Nieuw Archief voor Wiskunde voor € 100 (Nederland), € 110 (Europa) of € 112,50 (buiten Europa).

#### Members of foreign societies

Members of *SIAM*, the *Société Mathématique de France*, the *Gesellschaft für Angewandte Mathematik und Mechanik*, the *Deutsche Mathematiker-Vereinigung*, and of the *American, Australian, Belgian, Indian, London, Spanish, and South-African Mathematical Societies* living outside of the Netherlands pay € 72,50 instead of the full membership fee of € 92,50 a year. Conversely, these foreign societies, as well as the *VvS+OR* and the *NVORWO*, have reduced membership fees for KWG members. A postage charge of € 10 is added for members living abroad but in Europe, and a charge of € 12,50 for members living outside of Europe.

#### Exchange subscriptions

Koninklijk Wiskundig Genootschap Library  
Centrum Wiskunde & Informatica  
P.O. Box 94079, NL-1090 GB Amsterdam  
KWG-exchange@cw.nl

## Informatie voor auteurs

### Kopij

Het Nieuw Archief voor Wiskunde is een geredigeerd tijdschrift. Kopij dient per e-mail te worden aangeboden aan kopij@nieuwarchief.nl. Uitgebreide informatie en auteursinstructies kunt u vinden op www.nieuwarchief.nl.

### Volgende nummers

| nummer | maand     | verschijnen | deadline kopij |
|--------|-----------|-------------|----------------|
| 21(2)  | juni      | 2020        | verstreken     |
| 21(3)  | september | 2020        | 01-05-2020     |
| 21(4)  | december  | 2020        | 01-08-2020     |
| 22(1)  | maart     | 2021        | 01-11-2020     |

## Instituutsleden

De publicaties van het Koninklijk Wiskundig Genootschap worden mede mogelijk gemaakt door de bijdragen van de volgende instituten.



Centrum Wiskunde & Informatica



Rijksuniversiteit Groningen



Universiteit van Amsterdam



Universiteit Leiden



Vrije Universiteit



Universiteit Utrecht



Technische Universiteit Eindhoven



Eurandom



Technische Universiteit Delft



Universiteit Twente



Radboud Universiteit Nijmegen



Freudenthal Instituut

## Op het omslag

Aardbevingen en klimaatverandering zijn actuele maatschappelijke thema's waar veel discussie over is. Het Wintersymposium van het KWG op zaterdag 11 januari sloot hierbij aan met het thema 'Aardse wiskunde'. Lees het verslag van Robbert Fokkink op pagina 9.

# Twee oraties

In dit nummer van het Nieuw Archief staan twee oraties. Een intree en een uitteerede. Een intree heet ook wel inaugureel, wat zoiets betekent als inwijding, een geolied ritueel. Voor de uitteerede ontbreekt zo'n mooi klassiek woord. Exaugureel staat niet in Van Dale. De uitteerede kent weliswaar net zo'n lange traditie als de intree, maar krijgt op de een of andere manier net wat minder aandacht. De inaugurele rede van Mark Veraar in dit nummer is terug te vinden als video op het internet. De afscheidsrede van Jaap Molenaar niet, want de universiteit Wageningen geeft alleen video's van inaugurele redes. Merkwaardig, want terugblikken gaat veel scherper dan vooruitblikken.

De oratie is een van de oudste en meest ornate universitaire gebruiken. Voor veel Nederlandse universiteiten markeert het zelfs het begin. Utrecht heeft Voetius. Groningen heeft Ravensperger. De Universiteit van Amsterdam kent maar liefst twee oraties. De oprichting van het Athenaeum Illustre werd opgeluisterd door intreedes van Vossius en Barlaeus. De oratie van de laatstgenoemde is nu nog steeds verkrijgbaar in de Nederlandse vertaling bij Amsterdam University Press: *Mercator Sapiens*, oftewel de wijze koopman. Het is een lofzang op de Amsterdamse regenten, die in hun wijsheid hadden besloten om Vossius en Barlaeus weg te kopen door hun Leidse salaris te verdubbelen.

De allereerste Nederlandse oratie werd op 8 februari 1575 uitgesproken in de Pieterskerk in Leiden door Caspar Coolhaes, een predikant ter stede die had toegezegd om enkele colleges theologie te verzorgen. 'Zonderlinge sprekende tot lof van de theologie' was de titel, maar meer heb ik niet kunnen vinden. Het waren roerige tijden in Leiden, dat minder dan een half jaar na het ontzet werd opgescheept met een universiteit en haastig de staf had moeten ronselen. Van een keurig net boekwerkje dat naderhand door de toehoorders kon worden meegenomen was nog geen sprake.

Het niet opschrijven van oraties lijkt lang een Leids gebruik te zijn gebleven. Ik had graag gelezen wat vader en zoon Snel allemaal te vertellen hadden, maar van de oraties ontbreekt elk spoor. Ook van meer recente redes is het niet zo makkelijk om de tekst te achterhalen. Je zou bijvoorbeeld verwachten dat de website van

de Universiteit Leiden een link zou geven naar de oratie van Albert Einstein, maar dat is niet zo. Een google op 'oraties Leiden universiteit' levert enkel kledingvoorschriften op. Mocht de Universiteit Leiden mij ooit een hoogleraarspositie aanbieden, dan weet ik tenminste welke pet ik op moet zetten.

Nu ik toch bezig ben met vermaningen, schakel ik even door naar de Universiteit van Amsterdam, die de afdeling wiskunde heeft vernoemd naar de grondlegger van de Nederlandse moderne wiskunde. Waar staat de oratie van Diederik Korteweg? 'Wiskunde als hulpwetenschap' was de titel. Zoiets klinkt een Delftenaar als ondergetekende als muziek in de oren. Gerard Alberts refereert ernaar in zijn NAW-artikel over de opkomst van het wiskundig modelleren en Dirk van Dalen citeert eruit op zijn Korteweg-pagina op de KNAW-site. Een kopie van deze inaugurele rede op de openingspagina van het KdV Instituut zou welkom zijn.

Het leuke aan oraties is dat ze ook een persoonlijk beeld van de spreker geven. De twee oraties in dit nummer gaan niet alleen over wiskunde. Mark bespreekt het nut van het krijtbord en Jaap heeft het over schaken. Deze twee op het oog onverwante zaken zijn voor mij onlosmakelijk verbonden. Lang geleden, nog in de vorige eeuw, werd ik tijdens de clubavond van mijn schaakvereniging op de schouder getikt door Wil de Gids. "Ik zag jou vandaag voor een krijtbord staan", zei Wil. Ik had die dag calculus gegeven aan de Julianalaan, destijds een drukke verkeersweg waar automobilisten zo de collegezaal in konden kijken. "Je weet toch wel dat dit buitengewoon schadelijk is voor je gezondheid?" Ik moet zeggen dat ik die opmerking niet gelijk serieus nam. Ik wist wel dat Wil iets deed bij TNO, maar kende hem voornamelijk als een speler met een voorkeur voor gefianchetteerde lopers. Een paar maanden later keek ik met mijn dochter naar *Sesamstraat* en daar zat Wil uit te leggen aan Pino en Tommie waarom het belangrijk was om je huis goed te ventileren. Onderin beeld verscheen: 'ir. De Gids, specialist binnenmilieu'. Sindsdien weet ik dat ik les moet geven met gevaar voor eigen leven. ♦♦♦♦

**Robbert Fokkink**, hoofdredacteur  
Delft Institute of Applied Mathematics, TU Delft

# Agenda

| Upcoming Events

## Maart 2020

13 maart 2020

### ☐ Tweede ronde Nederlandse Wiskunde Olympiade

Wiskundewedstrijd voor middelbare scholieren.

**plaats** twaalf universiteiten in Nederland

**info** [wiskundeolympiade.nl](http://wiskundeolympiade.nl)

13 maart 2020

### ☐ Nationale Rekencoördinator Dag

Een dag voor rekencoördinatoren en leerkrachten, waarop het rekenonderwijs van de basisschool centraal staat.

**plaats** Domstad, Utrecht

**info** [nrcd.sites.uu.nl](http://nrcd.sites.uu.nl)

14 maart 2020

### ☐ Internationale wiskundedag

Door UNESCO uitgeroepen dag van de wiskunde, ook wel bekend als Pi-dag.

**plaats** overal

**info** [idm314.org](http://idm314.org)

19 maart 2020

### ☐ W4 Kangaroo-wedstrijd

Wereldwijde Wiskundewedstrijd voor kinderen van groep 3 van de basisschool tot en met 6 vwo.

**plaats** basisscholen en middelbare scholen

**info** [w4kangoeroe.nl](http://w4kangoeroe.nl)

23–27 maart 2020

### ☐ Multidimensional Continued Fractions and Euclidean Dynamics

Workshop mede georganiseerd door Evgeny Verbitskiy (UL).

**plaats** Lorentz Center@Snellius, Leiden

**info** [lorentzcenter.nl](http://lorentzcenter.nl)

25 maart 2020

### ☐ Grote Rekendag

Dag voor basisschoolleerlingen die geheel in het teken van rekenen staat.

**plaats** basisscholen in Nederland en België

**info** [groterekendag.nl](http://groterekendag.nl)

## April 2020

1 april 2020

### ☐ Vmbo-conferentie 2020

Conferentie met workshops over wiskunde onderwijs voor het vmbo.

**plaats** Domstad, Utrecht

**info** [nvww.nl](http://nvww.nl)

3 april 2020

### ☐ Mark Kaç Seminar

Maandelijks seminar voor onderzoekers in kansrekening en statistische mechanica, met sprekers Alexander Drewitz (Keulen) en Alberto Chiarini (TU/e).

**plaats** Utrecht

**info** [www.win.tue.nl/markkac](http://www.win.tue.nl/markkac)

6–9 april 2020

### ☐ Graph Limits

Workshop mede georganiseerd door Remco van der Hofstad, Frank den Hollander en Viresh Patel.

**plaats** Technische Universiteit Eindhoven

**info** [eurandom.nl](http://eurandom.nl)

7 april 2020

### ☐ U-Talent Conferentie 2020

Jaarlijkse conferentie voor docenten, toa's en schoolleiders, dit keer met thema 'Artificial Intelligence en de toekomst van het onderwijs'.

**plaats** Science Park de Uithof, Utrecht

**info** [u-talent.nl](http://u-talent.nl)

14–15 april 2020

### ☐ Nederlands Mathematisch Congres

Jaarlijkse bijeenkomst van wiskundig Nederland georganiseerd door het KWG, met dit jaar onder andere de uitreiking van de Brouwerprijs.

**plaats** Van der Valk Hotel Utrecht

**info** [mathematischcongres.nl](http://mathematischcongres.nl)

15–21 april 2020

### ☐ European Girls' Mathematical Olympiad

Internationale wiskundewedstrijd voor meisjes van de middelbare school.

**plaats** Hotel Zuiderduin, Egmond aan Zee

**info** [egmo2020.nl](http://egmo2020.nl)

Suggesties voor deze agenda zijn welkom.

Redacteur: Margriet Oomen

[agenda@nieuwarchief.nl](mailto:agenda@nieuwarchief.nl)

---

17–18 april 2020

**Workshop Representation Theory and Integrability**

Workshop ter gelegenheid van de proefschriftverdediging van Kayed Al Qasimi.

**plaats** Universiteit van Amsterdam

**info** [gqt.nl](http://gqt.nl)

---

20–24 april 2020

**Graph Decompositions: Small Width, Big Challenges**

Workshop over *width measures* in grafen.

**plaats** Lorentz Center@Oort, Leiden

**info** [lorentzcenter.nl](http://lorentzcenter.nl)

---

## Mei 2020

---

1 mei 2020

**Mark Kaç Seminar**

Maandelijks seminar voor onderzoekers in kansrekening en statistische mechanica, met sprekers Federico Camia (Abu Dhabi) en Mauro Mariani (Moskou).

**plaats** Utrecht

**info** [www.win.tue.nl/markkac](http://www.win.tue.nl/markkac)

---

1–3 mei 2020

**Benelux Mathematical Olympiad**

Jaarlijkse olympiade voor middelbare scholieren uit België, Nederland en Luxemburg.

**plaats** België

**info** [bxmo.org](http://bxmo.org)

---

11–15 mei 2020

**Workshop YEP XVII: Interacting Particle Systems**

Jaarlijkse Young European Probabilists workshop.

**plaats** Technische Universiteit Eindhoven

**info** [eurandom.nl](http://eurandom.nl)

---

15 mei 2020

**ECENT-ELWiE-conferentie**

Jaarlijkse conferentie voor lerarenopleiders van lerarenopleidingen STEM (wiskunde/rekenen en natuurwetenschappen/techniek).

**plaats** Vergadercentrum Domstad, Utrecht

**info** [elbd.sites.uu.nl](http://elbd.sites.uu.nl)

---

25–29 mei 2020

**Safe, Anytime-Valid Inference (SAVI)**

Workshop met als doel het bijeenbrengen van statistici, kansrekenaars en wetenschappers die gebruik maken van statistische testen.

**plaats** Technische Universiteit Eindhoven

**info** [eurandom.nl](http://eurandom.nl)

---

25–29 mei 2020

**Fixed-Parameter Computational Geometry III**

Workshop voor onderzoekers uit de computationele meetkunde en *fixed-parameter tractability/fine grained complexity*.

**plaats** Lorentz Center@Oort, Leiden

**info** [lorentzcenter.nl](http://lorentzcenter.nl)

---

## Juni 2020

---

5 juni 2020

**Mark Kaç Seminar**

Maandelijks seminar voor onderzoekers in kansrekening en statistische mechanica, met spreker Federico Camia (Abu Dhabi).

**plaats** Utrecht

**info** [www.win.tue.nl/markkac](http://www.win.tue.nl/markkac)

---

11–13 juni 2020

**NETWORKS Conference 2020**

Conferentie georganiseerd vanuit de NETWORKS gravitation grant.

**plaats** Amsterdam

**info** [thenetworkcenter.nl](http://thenetworkcenter.nl)

---

22–26 juni 2020

**Working Groups for Women in Operator Theory**

Workshop georganiseerd over *operator theory*, met als speciaal doel het bijeenbrengen van vrouwelijke wiskundigen in dit vakgebied.

**plaats** Lorentz Center@Oort, Leiden

**info** [lorentzcenter.nl](http://lorentzcenter.nl)

---

## Juli–September 2020

---

11–18 juli 2020

**International Mathematical Olympiad (IMO)**

Internationale wiskundecompetitie voor middelbare scholieren.

**plaats** Sint-Petersburg, Rusland

**info** [imo-official.org](http://imo-official.org)

---

10–14 augustus 2020

**OPSFA Summer School 2020**

Summerschool over de theorie van orthogonale polynomen, speciale functies en hun toepassingen.

**plaats** Radboud Universiteit Nijmegen

**info** [ru.nl/radboudsummerschool](http://ru.nl/radboudsummerschool)

---

17–27 augustus 2020

**Summerschool Mathematics Education**

Internationale summerschool over de recente ontwikkelingen op het gebied van wiskundeonderwijs en het onderzoeken van wiskundeonderwijs.

**plaats** Universiteit Utrecht

**info** [utrechtsummerschool.nl](http://utrechtsummerschool.nl)

---

21–22 augustus 2020 en 28–29 augustus 2020

**Vakantiecursus 2020**

Vakantiecursus van PWN voor leraren, studenten van lerarenopleidingen en voor andere belangstellenden. Dit jaar is het thema ‘Speltheorie: van strategisch beslissen tot ‘eerlijke’ oplossingen’.

**plaats** CWI Amsterdam en TU Eindhoven

**info** [platformwiskunde.nl/vakantiecursus](http://platformwiskunde.nl/vakantiecursus)

---

11 september 2020

**Finale Nederlandse Wiskunde Olympiade**

Nationale finale van de wiskundeolympiade voor middelbare scholieren.

**plaats** Technische Universiteit Eindhoven

**info** [wiskundeolympiade.nl](http://wiskundeolympiade.nl)

---

26 september 2020

**Junior Wiskunde Olympiade**

Wiskundewedstrijd voor de beste 200 leerlingen die deelnamen aan de W4 Kangoeroe-wedstrijd.

**plaats** Vrije Universiteit Amsterdam

**info** [wiskundeolympiade.nl](http://wiskundeolympiade.nl)

---

27–30 september 2020

**International Conference on Computational Logistics (ICCL2020)**

Conferentie voor wetenschappers in operations research, business analytics en artificial intelligence.

**plaats** U Parkhotel, Enschede

**info** [iccl2020.nl](http://iccl2020.nl)

---

# Nieuws

| News

Deze rubriek is een kroniek van wiskundige activiteiten in Nederland. Toekomstige activiteiten worden aangekondigd en van voorbije activiteiten wordt verslag gedaan. Wilt u uw aankondiging of verslag in deze rubriek geplaatst zien? Stuur ons dan uw bijdrage, zo mogelijk met illustratie. De redactie behoudt zich het recht voor berichten te weigeren of in te korten.

Redacteur: Margriet Oomen  
 nieuws@nieuwarchief.nl

## Wiskunde tegen koffieverspilling

Wetenschappers van de universiteit van Portsmouth hebben de optimale grofheid van de koffiebonenmaling voor een espresso berekend met behulp van een wiskundig model. In tegenstelling tot de zo fijn mogelijke maling die veel barista's aanhouden, adviseren de Britse wetenschappers een wat grovere maling. Doordat bij een grovere maling de koffiehopper minder snel verstopt raakt, geeft juist de iets grotere maling meer smaak af. Een klein koffiebarretje in Oregon in de Verenigde Staten volgde het advies van de wetenschappers op en stapte over op de grovere maling. Zo bespaarde de bar maar liefst 12 cent per espresso, wat neerkomt op zo'n 3260 euro per jaar. Volgens onderzoeksleider Jamie Foster zou de horeca wereldwijd miljarden kunnen besparen met een grovere koffiemaling. Ook de Britse koffiebond is enthousiast over de grovere maling.

newscientist.nl



Foto: wikipedia.org, Mark Prince

## 2020 Applied Probability Trust Prize voor Fiona Sloothaak

Fiona Sloothaak heeft de 2020 Applied Probability Trust Prize gekregen voor haar proefschrift getiteld *Criticality in Power Networks: A Probabilistic Approach*. Fiona kreeg de prijs vanwege de hoge kwaliteit van haar proefschrift. De Trust Prize werd eerder toegekend aan onder anderen Bert Zwart (2001), Rene Bekker (2005) en Alessandro Zocca (2015).

eurandom.nl

## Stieltjesprijs 2019 voor Ivan Yaroslavl'tsev

Ivan Yaroslavl'tsev, (TU-Delft), heeft de Stieltjesprijs 2019 gewonnen voor zijn proefschrift getiteld *Martingales and Stochastic Calculus in Banach Spaces*. In zijn proefschrift behandelt Yaroslavl'tsev de veralgemenisering van een martingaal naar een oneindig dimensionale Banachruimte. Een martingaal is een belangrijk begrip in de kansrekening en financiële wiskunde. Yaroslavl'tsevs onderzoek ligt op het grensgebied van kansrekening, functionaalanalyse en har-

monische analyse. In zijn thesis, die hij schreef onder begeleiding van Jan van Neerven en Mark Veraar, loste Yaroslavtsev verschillende problemen over martingalen in oneindig dimensionale Banachruimtes op, die al jaren open stonden. Tijdens zijn promotieonderzoek schreef Yaroslavtsev maar liefst zestien artikelen, te veel om allemaal in zijn proefschrift op te nemen. Hij promoveerde cum laude. De jury van de Stieltjesprijs bestond dit jaar uit Erik van der Ban (UU), Odo Diekmann (UU), Aernout van Enter (RUG, voorzitter), Richard Gill (UL), Frans Oort (UU), Marc Uetz (UT) en Kees Vuik (TUD) en werd geholpen door Marieke Kranenburg (UvA, secretaris).

*mathematischcongres.nl*

### Carrièreprijs van de Psychometric Society voor Jacqueline Meulman

Prof. dr. Jacqueline Meulman (Universiteit Leiden) heeft de Psychometric Society Career Award for Lifetime Achievement gewonnen. Deze prijs wordt jaarlijks uitgereikt aan een wetenschapper die een grote bijdrage heeft geleverd aan de psychometrie, een vakgebied dat zich bezighoudt met statistische testen voor de psychologie en met multivariate data-analyse. De ontwikkeling van statistische data-analyse-methoden is een van de onderzoeksgebieden waar professor Meulman veelvuldig aan werkte tijdens haar carrière. Eind jaren tachtig verkocht Meulman samen met collega's een licentie voor een data-analyse-softwarepakket aan SPSS Statistics, dat inmiddels is overgenomen door IBM. Deze licentie leverde de universiteit sinds 1990 maar liefst 14 miljoen dollar op. De royalty's stelde Meulman in staat vele promovendi aan te stellen. Naast dat Jacqueline Meulman de carrièreprijs won, won Maarten Kampert, oud-promovendus onder Meulman, de Psychometric Society Dissertation Prize. Tijdens de 2020 International Meeting of the Psychometric Society zullen zowel Meulman als Kampert hun prijs in ontvangst mogen nemen.

*universiteitleiden.nl*

### Diamantprijs 2019

Wouter Cames van Batenburg (Université Libre, Brussel) heeft de Diamantprijs gewonnen met zijn voordracht 'Large independent sets in triangle-free graphs: beyond planarity'. De prijs wordt jaarlijks toegekend aan de beste jonge spreker tijdens het Diamantsymposium.

*Robbert Fokink*



Wouter Cames (links) ontvangt de prijs uit handen van de vorige winnaar, Harry Smit (UU)

### Wolfprijs voor Simon Donaldson en Yakov Eliashberg

Sir Simon Donaldson, professor aan Imperial College London en Stony Brook University New York, en Yakov Eliashberg, professor aan Stanford University, zijn de winnaars van de Wolfprijs voor de wiskunde 2020. De Wolf Foundation reikt de Wolfprijs jaarlijks uit in Israël. Na de Fieldsmedaille en de Abelprijs is de Wolfprijs een van de belangrijkste onderscheidingen in de wiskunde.

Sir Simon Donaldson krijgt de prijs voor zijn bijdrage aan de differentiële geometrie en topologie. Professor Donaldson is onder andere bekend om zijn werk op het gebied van 4-dimensionale manifolds en de Donaldson–Thomas-theorie. In zijn onderzoek gebruikt Donaldson een unieke combinatie van nieuwe ideeën in de globale niet-lineaire analyse, topologie, algebraïsche geometrie en theoretische natuurkunde. Donaldsons resultaten zijn ook bijzonder omdat hij vaak natuurkundige technieken gebruikt om wiskundige problemen op te lossen, terwijl meestal wiskundige technieken worden gebruikt om problemen in de fysica op te lossen. Donaldson ontving in 1986 ook al de Fieldsmedaille.

Professor Eliashberg ontvangt de Wolfprijs omdat hij een van de grondleggers is van het vakgebied *symplectic and contact topology*. Symplectic and contact topology is een wetenschapsgebied dat zich ontwikkelde uit verschillende klassiek natuurkundige vraagstukken zoals de ontwikkeling van mechanische systemen en planetaire stelsels.

De Wolfprijzen zullen dit jaar op 11 juni in Jeruzalem worden uitgereikt.

*news.stanford.edu, imperial.ac.uk*



Simon Donaldson



Yakov Eliashberg

### Professor Louis Nirenberg overleden

Op 26 januari 2020 is wiskundige Louis Nirenberg op 94-jarige leeftijd overleden in New York. Louis Nirenberg leverde een grote bijdrage aan de theorie van partiële differentiaalvergelijkingen. In het begin van zijn carrière wist Nirenberg een aantal lang openstaande problemen in de geometrie op te lossen met behulp van niet lineaire elliptische vergelijkingen. In zijn latere wiskundige carrière hield hij zich onder andere bezig met *complex differential geometry*, *nonlinear elliptic equations with critical exponents*, en *regularity of solutions of linear elliptic equations*. Nirenberg ontdekte vele nieuwe wiskundige technieken. Daarnaast werd zijn onderzoek gekenmerkt door veel nieuwe schattingen, onder- en bovengrenzen voor wiskundige problemen.

Nirenberg studeerde wiskunde en natuurkunde aan McGill University in Montreal. Hij behaalde zijn PhD in 1945 aan New York University. De rest van zijn leven zou Nirenberg in New York blijven werken en in 1957 werd hij tot hoogleraar benoemd aan New York University waar hij in 1999 met pensioen ging. Nirenberg ontving gedurende zijn carrière vele belangrijke wiskundige onderscheidingen, waaronder de Abelprijs in 2015. *cims.nyu.edu*



Louis Nirenberg

Foto: MFO, Konrad Jacobs

#### 14 maart officieel internationale dag van de wiskunde

Op 26 november 2019 tijdens de veertigste Algemene Vergadering van Unesco is 14 maart officieel uitgeroepen tot internationale dag van de wiskunde. Doel is om op deze dag de schoonheid en het belang van de wiskunde in ons dagelijks leven te vieren. De Internationale dag van de wiskunde heeft ook een eigen website: [idm314.org](http://idm314.org). Hier zijn onder andere suggesties te vinden voor hoe je de internationale wiskundedag kunt vieren. Onder veel wiskundigen was 14 maart al bekend als Pi-dag. *mfo.de*

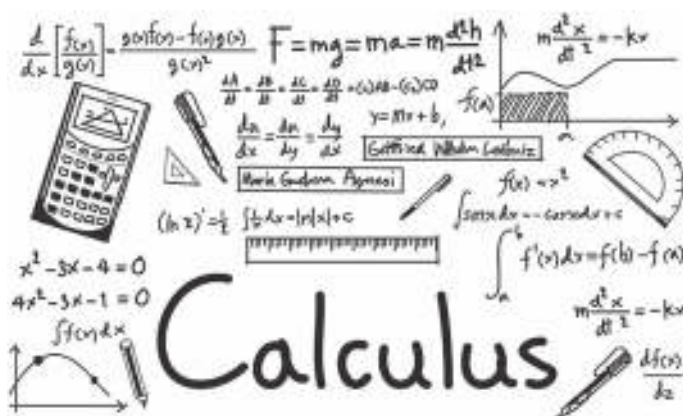
#### Feestelijke viering van de 80ste verjaardag van Mike Keane

Ter ere van de 80ste verjaardag van Mike Keane is een congres georganiseerd. Deze speciale dag vond plaats op 23 januari in Amsterdam. Mike Keane is een prominent wiskundige die niet alleen voor de wiskunde veel betekend heeft, maar ook voor de wiskundegemeenschap. Hij is zelf nog wiskundig actief en gaf ook een presentatie op zijn eigen verjaardagscongres. Andere sprekers waren Klaus Schmidt, Benjy Weiss, Hitoshi Nakada, Rob van den Berg en Michel Dekking.

Dat deze wiskundigen niet alleen collega's van professor Keane zijn, maar ook vrienden kwam duidelijk naar voren op deze bijzondere dag. Ook de locatie droeg bij aan de feestelijkheid, de dag vond plaats in het Trippenhuys, een gebouw dat van 1816–1885 het Rijksmuseum huisvestte. In de zaal waar nu de presentaties werden gegeven, hing destijds de Nachtwacht. *Niels Langeveld*

#### Calculus bijna struikelvak

De Eindhovense informaticastudent Daan Vijselaar heeft op 20 januari voor de tiende keer een tentamen calculus gemaakt. Ter gelegenheid van dit jubileum ging Vijselaar in rokkostuum naar het tentamen. Onder zijn vrienden leidden Vijselaars vele pogingen om het verplichte vak calculus te halen tot veel hilariteit. Ze bouwden zelfs een website met statistieken over Daans resultaten, heeftdaancalculusalgehaald.nl. Websitebouwer en vriend Bram Broekgaarden voorspelde voor Vijselaars tiende tentamen een twee. Zelf had Daan er meer vertrouwen in. En dat bleek terecht, want een paar weken later kreeg hij goed nieuws: bij de tiende poging heeft hij eindelijk een voldoende gehaald, een 5,3. “De statistieken gaven me inderdaad weinig kans maar die hielden natuurlijk geen rekening met de bijlessen die ik gevolgd heb”, aldus de student. “Gezien alle media-aandacht voelde ik natuurlijk wel de druk om het eindelijk te halen.” *ed.nl*



#### Koninklijk Wiskundig Genootschap

##### ❑ KWG Wintersymposium

Op zaterdag 11 januari vond het KWG Wintersymposium plaats. Dit maal was het thema ‘Aardse wiskunde’, over toepassingen van wiskunde in weer, klimaat en milieu. Elders in dit nummer vindt u een verslag.

##### ❑ NMC 2020

Het Nederlands Mathematisch Congres 2020 zal plaatsvinden op 14 en 15 april in het Van der Valk Hotel Utrecht (Winthoutlaan 4, Utrecht). Plenaire sprekers zijn: Helmut Hofer (Institute for Advanced Study, Princeton), Assaf Naor (Department of Mathematics, Princeton), Laure Saint-Raymond (Ecole Normale Supérieure de Lyon), Bernd Sturmfels (Max-Planck Institute, Leipzig). Op het congres zal ook de Brouwermedaille worden uitgereikt aan professor David John Aldous (Berkeley), die vervolgens de Brouwerlezing zal geven. Verder is er de Beegerlezing door David Harvey (UNSW Sydney). Zie voor meer informatie de website van het congres: [mathematischcongres.nl](http://mathematischcongres.nl).

Recent verschenen:

##### ❑ Epsilon Uitgaven ([www.epsilon-uitgaven.nl](http://www.epsilon-uitgaven.nl))

*Zebra 58. Besmettelijke Ziekten, met GeoGebra-reenblad*, Don Klinenberg en Swier Garst, € 10, 2020.

*Zebra 59. Optimaliseren in Netwerken*, Rob van Oord, Jan Schrik en Steven Wepster, € 10, 2020.

Robbert Fokkink

*Delft Institute of Applied Mathematics  
TU Delft  
r.j.fokkink@tudelft.nl*

Evenement Wintersymposium KWG 2020

# Aardse wiskunde

Na een historisch hete zomer krijgen we wellicht de warmste winter ooit. Al in de eerste week van het nieuwe jaar sneuvelen diverse Europese records, met als uitsmijter een temperatuur van bijna 20 graden in Oslo op 2 januari 2020. Het weer is de laatste tijd behoorlijk in de war. Daarom koos het KWG voor het Wintersymposium als thema: Aardse wiskunde – de toepassingen van wiskunde in weer, klimaat en milieu. Ruim honderd deelnemers hadden zich verzameld in het Utrechtse Academiegebouw voor een, zoals altijd, strak georganiseerde dag. Korte koffiepauzes, een snelle lunch, nog even een kijkje bij de boekenstands, maar vooral luisteren naar vier wiskundelezingen voor een algemeen publiek. Deelnemer Robbert Fokkink doet verslag.

## Lezing 1. De wiskunde van aardbevingen, door Marie-Colette van Lieshout

Sinds een jaar of twintig wordt Groningen getroffen door aardbevingen, vanwege de gaswinning. Heel veel kleine bevingen, die nauwelijks te onderscheiden zijn van het getril van een zware vrachtwagen, maar ook grote aardbevingen tot zelfs een

kracht van 3 op de schaal van Richter. De grotere bevingen, met een kracht van 1,5 of meer, blijken plaats te vinden langs breuklijnen in de bodem. Wiskundig zijn ze te beschrijven via een Poissonproces met een parameter  $\lambda$ , die afhangt van plaats en tijd. Studenten van Marie-Colette van Lieshout hebben  $\lambda$  gecorreleerd met bodemdaling,

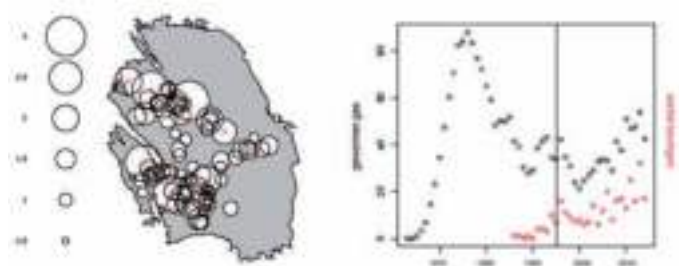
breuklijnen, gaswinning en intensiteit van bevingen in het verleden. Zo hebben ze een model gemaakt om het effect van beleidsmaatregelen op het aantal aardbevingen te voorspellen. In 2015 voorspelden ze dat het aantal aardbevingen in 2018 zou afnemen van 24 naar 18 als de overheid de gaswinning met 80 procent zou reduceren [2]. Die voorspelling bleek goed uit te komen, want het werkelijke aantal was 15, nadat de gaswinning volledig was gestopt.

Op advies van de Onderzoeksraad voor de Veiligheid loopt sinds kort een NWO-onderzoeksprogramma naar de gevolgen van menselijk ingrijpen in de diepe ondergrond: DeepNL. In dit kader werkt Marie-Colette samen met seismologen uit Utrecht en wiskundigen uit Twente aan een



De deelnemers zijn net binnen en drinken nog even koffie of thee voor de eerste lezing

Foto: Mark Timmer

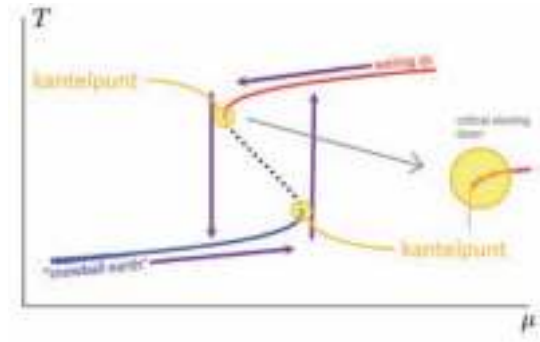


**Figuur 1** Links: Aardbevingen in 2014 weergegeven met het gasveld als ondergrond. De bevingen met een kracht van  $\geq 1,5$  hebben een rode stip in het midden. Rechts: aantal bevingen versus gaswinning door de jaren heen. Voor 1995 is de data van de aardbevingen niet betrouwbaar.



Robbin Bastiaansen tijdens zijn lezing over het effect van het Parijse klimaatakkoord

Foto: Mark Timmer



**Figuur 2** Schets van de grafiek van  $1 + T - T^5 + \mu = 0$ . Tussen  $-\sqrt[4]{1/5}$  en  $\sqrt[4]{1/5}$  daalt  $\mu$  als functie van  $T$ . Hier liggen de kantelpunten. Er is sprake van hysteresis: als het onderste kantelpunt wordt overschreden springt het evenwicht van de blauwe naar de rode lijn. Om weer terug te komen op die blauwe lijn moet eerst het bovenste kantelpunt worden gehaald.

geavanceerd model om aardbevingsrisico's in kaart te brengen. Hierin is het Poisson-proces vervangen door meer geavanceerde clusterprocessen. Een analyse van de zware aardbeving in 2005 in Kasjmir – met een kracht van 7,6 en bijna honderdduizend slachtoffers – toonde aan dat hier het *triggerproces* de beste fit oplevert [3]. In het triggerproces wordt een eerste schok gevolgd door een Poisson-verdeeld aantal andere grote schokken, relatief ver van de bron af. Om elk van die naschokken vormt zich dan ten slotte een cluster van kleinere schokken, relatief dichtbij. Het doel van het DeepNL-project is om via Coxprocessen te komen tot een model dat naschokken en latente (niet meegenomen) informatie over de ondergrond mee kan nemen. Het model kan dus niet alleen worden ingezet om Groningse aardbevingen in kaart te brengen, maar is van toepassing op alle aardbevingen. Aardse wiskunde dus.

## Lezing 2. Kantelpunten in het klimaat: is twee graden te veel? door Robbin Bastiaansen

Op de klimaatconferentie van Parijs (2015) is afgesproken dat de opwarming van de aarde niet hoger uit mag komen dan twee graden. Wat is het effect van die twee graden? Is er een kantelpunt, een drempelwaarde voor de opwarming waarboven de gevolgen desastreus worden? Robbin Bastiaansen illustreerde dit aan de hand van de gestileerde differentiaalvergelijking

$$T' = 1 + T - T^5 + \mu$$

waarin  $T$  de gemiddelde temperatuur is en  $\mu$  varieert met de  $\text{CO}_2$ -uitstoot. Voor de evenwichtspunten van deze vergelijking geldt  $1 + T - T^5 + \mu = 0$ . Als  $\mu$  een klein beetje varieert, dan varieert de evenwichts-

temperatuur een klein beetje mee. Behalve als  $\mu$  een kantelpunt passeert. Dan gaat het systeem opeens over in een ander evenwicht en komt het niet zo maar terug in de oude toestand.

Dichtbij een kantelpunt doven verstoringen minder snel uit en worden de schommelingen grilliger. *Critical slowing down*, heet dat in vakjargon. Robbin heeft hier onderzoek naar gedaan in het kader van verwoestijning en gaat zich nu als postdoc in Utrecht verdiepen in klimaatmodellen. Het is, en dat verbaast natuurlijk niemand, moeilijke materie. Verschillende processen op verschillende schalen spelen een rol en de huidige snelle verandering is uniek. Tot slot van de lezing stelde Robbin de vraag: “Is twee graden te veel?” En gaf als antwoord: “Misschien.”

## Lezing 3. Internationaal klimaatbeleid: kosten, koolstof en keuzes, door Kaj-Ivar van der Wijst

Klimaatverandering is mensenwerk. Hoe kunnen we de uitstoot van broeikasgasen verminderen? Dat is een beleidsvraag die op het bord ligt van het Planbureau voor de Leefomgeving (PBL), de werkgever van Kaj-Ivar van der Wijst. Hij legde eerst uit dat beleidsvragen geen eenduidig antwoorden hebben. Het is de taak van het PBL om alle mogelijkheden te onderzoeken, waarna beleidsmakers een keuze moeten maken. Wiskunde is zo mooi omdat het onafhankelijk is, aldus Kaj-Ivar, maar de praktijk werkt anders. Hij is zelf betrokken geweest bij het laatste rapport van het IPCC, over de mitigatie van klimaatverandering.

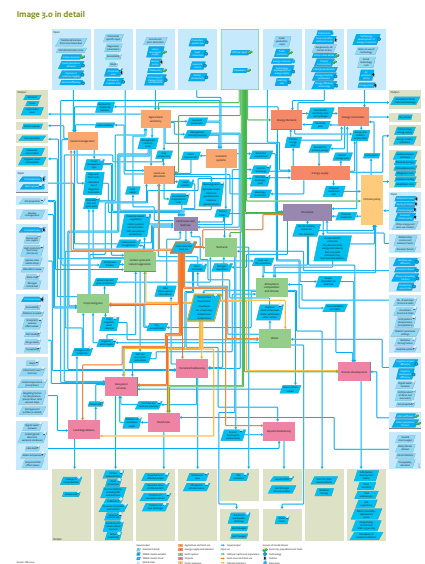
Het PBL werkt met IMAGE, Integrated Model to Assess the Global Environment, waarin niet alleen fysische maar ook eco-

nomische processen worden meegenomen. Het is een grootschalig model. In de berekeningen gaat het niet specifiek om het voorspellen, maar ook om het vergelijken van verschillende scenario's. Op welke manieren kunnen de klimaatdoelen worden gehaald en welke gevolgen heeft dat? Waar zitten de grootste onzekerheden?

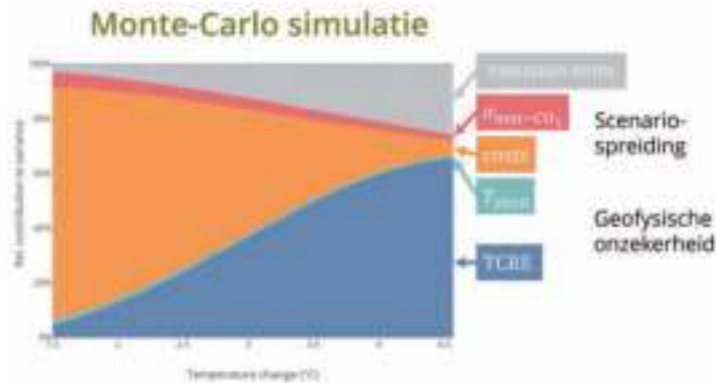
Om dit te illustreren greep Kaj-Ivar net als Robbin terug op simpele modellen. Het verband tussen temperatuurverandering en  $\text{CO}_2$ -uitstoot kan bijvoorbeeld worden beschreven via

$$T(\text{CO}_2) = T_{2010} + \text{TCRE} \cdot \text{CO}_2$$

waarin de TCRE (transient climate response to cumulative carbon emissions) normaal verdeeld is. Voor de kosten is er een soortgelijk simpel model. Zo kan worden uitgerekend hoeveel het kost om



**Figuur 3** Het organogram van IMAGE lijkt op het ontwerp van een chip, waarin sociale, economische, biologische en fysische processen aan elkaar worden geknoopt.



**Figuur 4** Bij een stijging van 1,5 graad zit de grootste onzekerheid in de voorspelde kosten. Bij een stijging van 4,5 graad zit de grootste onzekerheid in het effect van CO<sub>2</sub> op opwarming.

beneden een opwarming van 2 graden te blijven, of onder 1,5 graden. Om te illustreren wat voor soort resultaten het PBL levert, liet Kaj-Ivar een plaatje zien waarin de onzekerheden tegen elkaar worden uitgezet. Tot slot van de lezing stelde hij de vraag: “Gaan we de twee graden halen ja of nee?” En gaf als antwoord: “De grootste onzekerheid zit in de menselijke factor.”

#### Lezing 4. A non-parametric estimator of the extremal index, door Juan-Juan Cai

Draaide het in de eerste drie lezingen om wiskundige modellen, in de slotlezing gingen die van tafel. Juan-Juan Cai sprak over niet-parametrische statistiek, waarin de data centraal staat, los van wiskundige modellen. Ze startte haar lezing door te zeggen dat het nu ging over de wiskunde van wereldrecords. Als oude man dacht ik

gelijk aan Bob Beamon, en vast meer mensen met mij, want ik zat ruim onder de mediane leeftijd. Nieuwe wereldrecords zitten per definitie niet in de data, dus heb je bij extreme waarden altijd te maken met een tekort aan gegevens. “Wordt het dit jaar warmer dan 40 graden in De Bilt?”, vroeg Juan ter illustratie aan de zaal en liet een histogram zien van de temperaturen in De Bilt, waar de 40 nog niet gehaald is.

Juan sprak over haar recente werk, net geplaatst op arXiv [1], over de clustering van extreme gebeurtenissen. Vaak hebben zulke clusters een negatief effect, denk aan een hittegolf of een periode van extreme regenval of droogte. Het is dus belangrijk om clustering te voorspellen. In de extreme waarden statistiek gebruikt men een index  $\theta$ , die omgekeerd evenredig is met de gemiddelde clusterlengte: hoe kleiner  $\theta$ , hoe

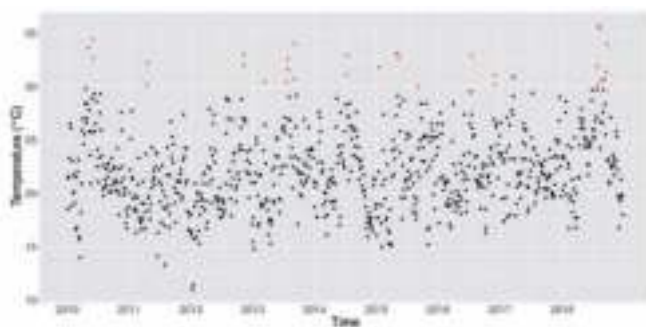
langer de hittegolf. Juan heeft een nieuwe methode bedacht om  $\theta$  te schatten, gebaseerd op de uitdrukking

$$\theta = \mathbb{P}\left(\max_{1 \leq i \leq d} (X_i < u) \mid X_1 > u\right).$$

Met andere woorden,  $\theta$  is de kans dat een extreme gebeurtenis op zichzelf staat in een periode van  $d$  dagen. Hierbij is het zaak om de parameters  $d$  en  $u$  op een verantwoorde manier te kiezen. Juan liet via numerieke resultaten zien dat haar nieuwe methode vaak nauwkeuriger is dan de tot nu toe gebruikelijke methoden. Tot slot van de voordracht voorspelde ze dat de gemiddelde lengte van een hittegolf in De Bilt uitkomt op amper twee dagen (zie Figuur 6). Dat valt dan weer mee.

#### Tot slot

Aan het eind sloot Theo van den Boogaart het symposium af en maakte de deelnemers attent op de enquête waarin men opmerkingen voor verbetering kon maken. “We misten de kroketten!”, werd er geroepen vanuit de zaal. Doorgewinterde symposiumbezoekers weten dat dit culinair hoogstandje elk jaar gereserveerd wordt bij de lunch, maar dit jaar dus niet. Theo reageerde door te zeggen dat producten uit de bio-industrie niet passen bij een duurzaam thema als ‘Aardse wiskunde’. Begrijpelijk natuurlijk, maar hopelijk zijn ze volgend jaar weer terug. Na ons de zondvloed.



**Figuur 5** Dagelijkse maximum temperatuur in De Bilt over de afgelopen negen jaar, met temperaturen boven de dertig graden (extremen) in rood. De grens van dertig graden correspondeert 200 temperaturen van de afgelopen vijftig jaar (zie ook de tabel hiernaast). Het KNMI zelf hanteert dezelfde grens in de definitie van een hittegolf: een periode van 5 dagen waaronder minimaal 3 met een temperatuur van tenminste 30.

- Daily maximum temperature measured at two weather stations: de Bilt (the Netherlands) and Larissa (in Greece)
- $d^* = 2$  (de Bilt) and  $d^* = 5$  (Larissa)

| $k$ | De Bilt     |                   |             | Larissa     |                   |             |
|-----|-------------|-------------------|-------------|-------------|-------------------|-------------|
|     | $X_{n-k,n}$ | $\hat{\theta}(2)$ | E. duration | $X_{n-k,n}$ | $\hat{\theta}(5)$ | E. duration |
| 50  | 32.2°C      | 0.76              | 1.3 days    | 41.4°C      | 0.14              | 7.1 days    |
| 100 | 31.3°C      | 0.65              | 1.5 days    | 40.0°C      | 0.12              | 8.3 days    |
| 200 | 30.0°C      | 0.60              | 1.7 days    | 38.6°C      | 0.13              | 7.7 days    |

**Figuur 6** Berekening van de verwachte duur van hittegolven in De Bilt en Larissa. Hierin staat  $k$  voor de hoogste waarden van de dataset, die worden aangemerkt als extreem. Interessant detail: de geschatte lengte van een cluster neemt niet af als  $k$  toeneemt. Dan worden er weliswaar meer gebeurtenissen aangemerkt als extremen, maar de kans dat een extreem op zichzelf staat neemt niet noodzakelijk af.

#### Referenties

1. J.-J. Cai, A non-parametric estimator of the extremal index, arXiv:1911.06674.
2. E. van Hove, R. van Lingen en S. Riems. Geïnduceerde aardbevingen in gasveld Gron-  
ingen. Een statistische analyse, B.Sc.-scriptie, Universiteit Twente, 2015.
3. K. Türkyilmaz, M.N.M. van Lieshout en A. Stein, Comparing the Hawkes and trigger

process models for aftershock sequences following the 2005 Kashmir earthquake, *Mathematical Geosciences* 45 (2013), 149–164.

## Ionica Smeets

Wetenschapscommunicatie  
Universiteit Leiden  
i.smeets@biology.leidenuniv.nl

### Interview Abel Prize laureate 2019 Karen Uhlenbeck

# Supporting the minorities in mathematics

On 21 May 2019 Karen Uhlenbeck received the Abel Prize in Oslo. At the public reception directly after the award ceremony she was interviewed by Ionica Smeets.

*In your acceptance speech you gave a very nice overview of your career but you did not say anything about your plans. The Abel Prize is not only an enormous honour, it is also a six million kroner prize.*

"It is a lot of money and I have not really thought about it yet, but it did not take me long to decide what to do with half of it. I am giving that to two organizations for under-represented minorities in mathematics. I am giving one million kroner to the Institute for Advanced Study and two million to the EDGE foundation. Many people know what the Institute for Advanced Study is. The EDGE foundation has been educating women going to graduate school. It is run from Bryn Mawr and Spelman College. Many of their graduates now have PhD's in mathematics."

*In your acceptance speech you also said that you did not want to change the world when you were young, but now it seems that you do want to change the world a bit.*

"I am doing this on behalf of everybody who stood outside and looked into the world of mathematics, wanting to be there but thinking that there was no way they could ever make it. An awful lot of people have been in that position and this is in memory of them."

*You grew up after World War II in what you describe as a rather optimistic time. Was it self-evident that you could go to university?*

"Yes. My parents both were first generation in their families to go to university and it was expected that we all went to college, and we did. They certainly had more ambitions for my brother than they had for me,

but a part of that story is that I got to play with all his toys: Lincoln logs and building materials."

*You were gripped by mathematics rather late. You did not grow up dreaming about abstract things.*

"No, not at all. Actually, most young children do not know what mathematics is. You know what arithmetic is and what plane geometry is. You may know some calculus, but you do not have any comprehension of what the thought behind it is. I was actually enamoured by astronomy and always liked to talk about the books on astrophysics by Fred Hoyle. My father took them out of the library and we both read them. So I wanted to do astronomy or physics, marvelling at the universe."

*I understood that you never really liked lab work and all these practical things that you have to do in physics.*

"Thinking back in all honesty, the problem with lab work was always your partners. Somehow I never really had a good lab partner."

*That is interesting, because I think you wrote in an essay that you picked mathematics because you could work alone.*

"Yes, that's correct."

*But if you look at your career, you have been involved in some very successful collaborations, where you found someone from a slightly different field and did something new. Are mathematicians better partners?*

"I picked them wisely, or something like that. When I started out I was very much

someone that worked alone. I also taught myself a fair amount of mathematics, rather than from courses or lectures, but slowly throughout the years I have come to rely on doing mathematics with other people. The problem with doing mathematics is that you not only have to think about it, you also have to write it up. After you have gotten a great insight, then what do you do? Well, I have a tendency to wander off, but if you have somebody to work with, then you actually stick to it."

*You have been a pioneer in many fields and this probably is due to that tendency, right?*

"It is certainly true that I did not pursue many of the ideas that I had in mathematics, but I wandered off and looked for something else to do. I do not particularly recommend that to a young mathematician."

*Part of being an Abel laureate is being a role model. Your role model when you were younger was Julia Child. She was a cook and a TV presenter. How did she become your role model?*

"A lot of people watched her show. She was six foot two, enthusiastic, articulate. She had a big fan club and a lot of people my age watched her. She was successful despite being a lot of things that you were not supposed to be."

*You describe that at some point you were looking to see where all the other women behind you were.*

"That's right. A lot of people really thought that once the legal barriers were down and the programs were open to everybody, women and minorities would walk in through the open doors. At some point we noticed that this simply was not happening. It is now generally known that this



Photo: abelprize.no

Karen Uhlenbeck

phenomenon is not magical. People do not necessarily get ahead because there are no laws preventing them from getting ahead. When I was secure in my own career, it was partly my friend and collaborator Chuu-Lian Terng who made me realize. She said 'I am the last woman hired by my department and I have been there almost twenty years.' It was something that we noticed in the beginning of the nineties. By then I had money, power, prestige and all I really needed. The Institute of Advanced Studies offered us secretarial help, space, their name. It was something you just don't turn down even if you know nothing about what you are doing."

*So that is when you started to co-host in their mentoring program.*  
"That's right."

*In your speech you mention that it is not only for women, but also for minorities.*  
"The program is for women. I have to say that in the seventies and eighties women were really on the outside. The number of

women has increased in the United States to the point that in many places there are a comfortable number of women, but this is certainly not true for the African American community."

*How do you work in mathematics? Does this differ from the way that other mathematicians work?*

"I know a lot of people who sit down, do calculations, and keep notes. Keep a notebook of all their ideas and so forth. My habit is to write down from the beginning everything I know about the problem. After many days or weeks or months of not getting anywhere, I would stop. I used to use all the papers that I worked on. I would come back saying to myself to really give that problem another try. Then I start from the beginning again and try to see it from a different point of view."

*How much time did you spend on these ideas?*

"I do not really like to think about that (laughs)."

*Well, there have been enough that succeeded!*

"In fact, one does feel badly about it, because lots of times you actually tried very hard for a long time and you don't think an idea works. When you see other people trying the same idea again and not having it work, you feel that maybe you should have told someone that this does not work."

*And how would you feel if someone else did make it work, would you be happy?*

"I would go (hits her head). In fact, that happened to me recently and I thought: Oh my god. Why didn't I do that?"

*Well, maybe you were already working on something else. This Thursday you are going to be playing mathematical games with school kids. Do you like this, playing games with younger students?*

"Actually, I don't do it much. It will be a good experience for me."

*Will you beat them?*

"That's a good question. I will try not to. I am not much of a game player. I was a very ambitious child and I have the kind of mind that really grabs on to a problem and does it. I was very good at games and people did not like it when I won all the time. I found that with games you feel bad if you lose and other people hate it when you win. I tend to back off from doing games. I like solitaire."

*A final question. You have said in the past that you felt rather uncomfortable with the prestige and the prizes you got. How are you processing winning the Abel Prize?*

"I am just walking through it doing what people tell me to do. It is like a whole lot of different jobs. What are you going to do with the money? How are you going to get to Europe? What are you going to wear? All these things. I really have to say that one thing that I am much better at than ever before, at this age and with this experience, is asking for help. It makes life so much easier. If you are lost, don't keep looking for where it is, ask somebody."

*So that is your advice: don't jump from problem to problem and ask for help?*

"Ask for help as often as you can." ☞

A video of this interview can be watched at: [youtu.be/mmWdPPwSi64](https://youtu.be/mmWdPPwSi64).

## Mark Veraar

Delft Institute of Applied Mathematics  
TU Delft  
m.c.veraar@tudelft.nl

### Oratie

# Mathematics:

In de wiskundige analyse kan men een onderscheid maken tussen ‘harde’ en ‘zachte’ technieken. Zachte technieken zijn van meer structurele aard en verschaffen vaak dieper inzicht in een probleem. Vervolgens worden deze gecombineerd met harde technieken, zoals ingewikkelde afschattingen, om tot nieuwe resultaten te komen. In zijn intrede op vrijdag 13 september 2019 legt Mark Veraar aan de hand van eenvoudige voorbeelden uit de analyse het verschil uit tussen harde en zachte analyse. Hij laat zien hoe bruggen tussen verschillende deelgebieden binnen de wiskunde kunnen helpen om harde argumenten te vervangen door zachte. Ook het omgekeerde komt voor: soms worden nieuwe resultaten aanvankelijk bewezen met zachte technieken en worden vervolgens met behulp van harde argumenten nog scherpere resultaten verkregen.

Mijn rede gaat over harde en zachte wiskunde. Ik zal op verschillende manieren toelichten wat ik hiermee bedoel. Onder andere geef ik voorbeelden uit de wiskunde, maar ik zal ook connecties met andere wetenschappen aangeven. Vervolgens zal ik in meer detail bespreken wat harde en zachte wiskunde betekent binnen mijn vakgebied partiële differentiaalvergelijkingen en harmonische analyse.

Ik wil graag beginnen met de subkop van een *Volkskrant*-artikel van 3 september 2019:

“De beoefenaren van de ‘zachte’ wetenschappen voelen zich door het kabinet achtergesteld bij de ‘harde’ bèta-disciplines. Vooral financieel en dat moet afgelopen zijn.”

Opvallend hier zijn de woorden *zacht* en *hard*. Hier kom ik later op terug. Ik begrijp volkomen dat er met ongenoegen wordt gereageerd op de beslissingen die de laatste tijd in de politiek worden genomen over de verdeling van geld. Zodra je besluit om met geld te gaan schuiven van het ene vakgebied naar een ander vakgebied, dan zet je groepen mensen tegenover elkaar die normaal gesproken met elkaar overleggen en samen besluiten maken. Dit is erg onhandig management en dient te worden voorkomen waar mogelijk. Transparantie en overleg over financiën zijn van groot belang binnen grote organisaties.

Een groot deel van het probleem in Nederland is dat er te weinig geld naar wetenschappelijk onderzoek gaat. Niet alleen de overheid maar ook het bedrijfsleven

investeert te weinig. Er is dan ook een cultuuromslag nodig binnen Nederland. Uit een onderzoek van het Rathenau Instituut blijkt dat Nederland in 2017 ongeveer 2 procent van het BBP uitgeeft aan onderzoek en innovatie, zie Figuur 1. Het Europese advies is 3 procent. Een doel van het kabinet is om in 2020 op 2,5 procent uit te komen, maar dat lijkt voorlopig nog niet haalbaar. De landen Canada, Verenigd Koninkrijk, Australië en Ierland komen lager uit dan Nederland, maar zij hebben een systeem dat onvergelijkbaar is met dat van Nederland; zij vragen namelijk enorm veel collegegeld aan studenten. Het enige land uit de tabel met vergelijkbaar systeem dat lager uitkomt is Italië. Ik denk dat de meeste wetenschappers het er mee eens zijn dat het al jaren bergafwaarts gaat met de onderzoekssituatie in Italië. Veel Italianen vertrekken naar andere landen om daar hun onderzoek voort te zetten.

Indien de overheid het geld op een nieuwe manier wil gaan verdelen, dan is de enige juiste manier om dit te doen door gezamenlijk met de gewone en technische universiteiten tot een overeenkomst te komen. De TU Delft is in een situatie waarin de studentenaantallen snel groeien. De overheid moedigt dit aan omdat er veel



Mark Veraar

Roy Borghouts

# hard or soft

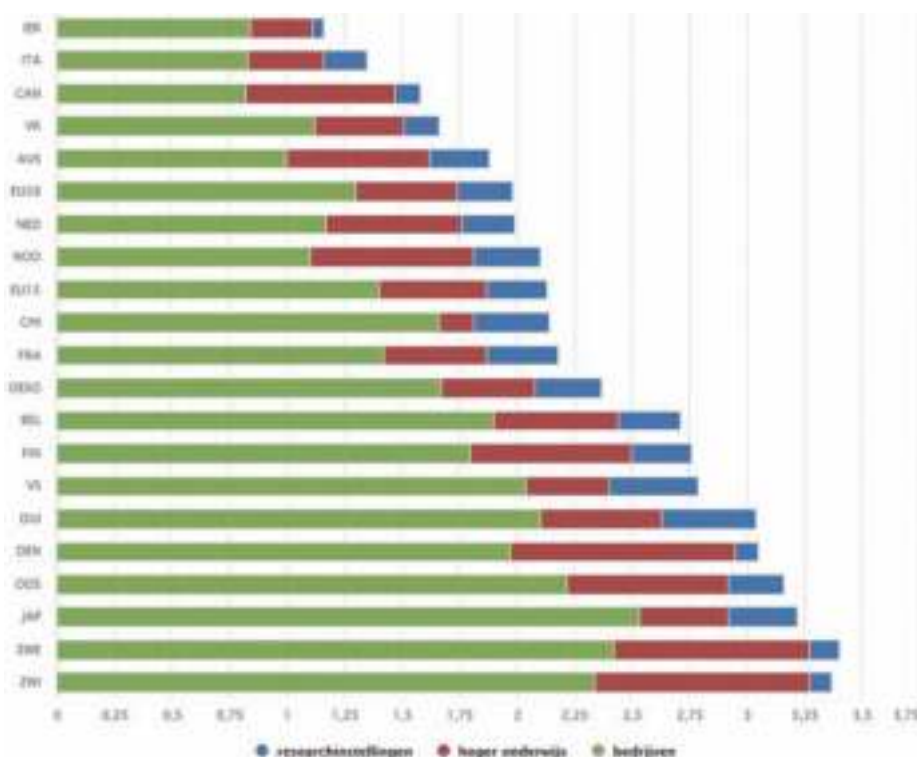
behoefte is aan afgestudeerde ingenieurs; eigenlijk zouden er nog veel meer studenten een bèta-opleiding moeten doen. Tegelijkertijd zitten onderwijszalen overvol, de

stad Delft loopt vol, de huurprijzen stijgen en docenten draaien onbetaalde overuren vanwege het extra werk dat ontstaat bij een hoger aantal studenten.

## De tsunami van studenten

Bij het instituut waar ik werk, het Delft Institute of Applied Mathematics (DIAM), wordt dit effect nog eens extra versterkt. Onze afdeling verzorgt namelijk al het wiskundeonderwijs binnen de universiteit. Dit doen we met veel plezier en inzet en ook erg succesvol met veel 'docent van het jaar'-schappen. Het is erg belangrijk voor een universiteit om het wiskundeonderwijs door een wiskundeafdeling te laten verrichten waar een breed palet aan kennis op het gebied van onderwijs en onderzoek aanwezig is. Wiskunde is de taal van de wetenschap. Het is een aparte discipline die je weliswaar kunt integreren in je eigen discipline, maar een 'taal' zoals wiskunde leer je veel beter van een 'native speaker'. Veel bachelorstudies in Delft bestaan voor 10 à 25 procent uit wiskundevakken. Aangezien er zo'n 25.000 TU Delft-studenten zijn, hebben wij een flinke verantwoordelijkheid.

Tegelijkertijd hebben we bij wiskunde ook onze eigen studenten. In het academisch jaar 2008/2009 waren er ongeveer 30 eerstejaars bachelorstudenten. In de jaren hierna groeide dit tot ongeveer 60, 100, 160 en vervolgens 200. De laatste jaren schommelt het aantal rond de 200



Figuur 1 R&D-uitgaven naar uitvoerende sector, als percentage van bbp, 2017.

Illustratie: Rathenau Instituut

studenten. We zijn dus in de loop der jaren maar liefst zeven maal groter geworden.

Een veelgestelde vraag is waar de landelijke groei bij wiskunde vandaan komt. Het minimum aantal wiskundestudenten was ongeveer 100 en nu zijn er meer dan 1000 universitaire eerstejaars wiskundestudenten. In de landen om ons heen is deze fluctuatie niet geweest. De 1000 eerstejaars zijn procentueel vergelijkbaar met bijvoorbeeld Duitsland. In de jaren zeventig en tachtig waren er vergelijkbare aantallen wiskundestudenten in Nederland. Indien we bij wiskunde ook internationaal studenten gaan werven zullen we zeker verdubbelen (zoals gebeurd is bij informatica aan de TU Delft). Er is vorig jaar voor gekozen om dat (nog) niet te doen.

De onderzoekstijd bij DIAM staat onder druk. Sommige collega's houden veel te weinig tijd over voor onderzoek. Waar sommigen een onderzoekstaak van 50 procent hebben, blijft daar soms maar 25 procent van over door de onderwijstaken. We hopen dat de sectorplangelden en andere middelen ons zullen helpen om wat druk weg te nemen.

Redenen voor de groei van het aantal wiskundestudenten kunnen zijn:

- met wiskunde krijg je snel een goede baan
- met wiskunde kun je heel veel kanten uit
- bij wiskunde D krijgen leerlingen een beter beeld wat wiskunde is
- de voorlichting is geprofessionaliseerd
- wiskunde in Nederland presenteert zichzelf goed
- wiskunde is meer in het nieuws
- wiskunde is steeds relevanter voor de maatschappij

Vroeger had wiskunde een nogal stoffig imago. Aan de TU Delft is dit zeker niet het geval. Het onderwijs en het onderzoek bij DIAM zijn breed en een uitstekende mix tussen theorie en toepassing. Wiskunde is overall: het is nodig bij logistiek, voorspellingen, internet, verzekeringen, banken, onze apparaten, data, machine learning, et cetera. Er wordt weleens gedacht over meer 'soft skills' in onze opleiding. Dat is een verzamelnaam voor skills zoals ownership, strategisch denken, oplossingsgerichtheid, communicatieve vaardigheden, teamwork, et cetera. Soft skills zijn belangrijk, maar ik was toch blij verrast toen tijdens de laatste onderwijsvisitatie een commissielid uit het bedrijfsleven er op ha-



Godfrey Hardy in 1927

merde dat we beter geen opzichzelfstaande 'soft skill'-vakken kunnen aanbieden in ons master programma, want dat is zonde van de tijd. Je kunt beter focussen op de 'hard skills' en de 'soft skills' verwerken in bestaande wiskundevakken. Dingen die eventueel niet aan bod komen kun je ook prima in het bedrijfsleven leren. Of dit ook van toepassing is op andere opleidingen aan de TU Delft kan ik niet beoordelen.

### Harde en zachte wetenschap en wiskunde

De woorden 'hard' en 'zacht' zijn nu op twee plekken aan bod gekomen: de harde en zachte studies en de harde en zachte skills. De socioloog Norman William Storer (1930) maakt in een artikel uit 1967 onderscheid tussen de harde wetenschappen en zachte wetenschappen. Storer zegt onder andere:

"The degree of rigor seems directly related to the extent to which *mathematics* is used in a science, and it is this that makes a science hard."

Onder de zachte wetenschappen horen volgens Storer bijvoorbeeld antropologie, politicologie, psychologie en sociologie. Onder harde wetenschappen worden onder meer verstaan: natuurkunde, scheikunde en biochemie. In onze tijd kunnen we dit lijstje aanvullen met informatica, electrical engineering en nog veel meer vakgebieden, waaronder een groot deel van de opleidingen aan de TU Delft. De onderverdeling tussen hard en zacht is niet noodzakelijk zwart-wit; een wetenschap zoals economie zit tussen hard en zacht in. Gek genoeg heeft Storer wiskunde zelf niet

bij een van de twee groepen ingedeeld, maar ik vermoed dat hij het evident vond dat wiskunde bij de harde wetenschappen hoort.

Ik wil het met u vandaag eigenlijk niet hebben over harde en zachte wetenschap, maar over harde en zachte wiskunde. Met 'hard' en 'zacht' worden niet 'moeilijk' en 'makkelijk' bedoeld. In sommige gevallen is het zelfs eerder het tegenovergestelde. Om dit verder toe te lichten wil ik een stuk van de beroemde wiskundige Hardy<sup>1</sup> uit 1929 [24] citeren:

"A thorough mastery of elementary inequalities is today one of the first necessary qualifications for research in the theory of functions; at any rate, in function theory of the 'hard, sharp, narrow' kind as opposed to the 'soft, large, vague' kind (I do not use any of these adjectives as words either of praise or blame), the function-theory of Bohr, Landau, or Littlewood, as opposed to the function-theory of Birkhoff or Koebe."

Hardy heeft het hier over ongelijkheden in de theorie van functies. Dit valt onder het gebied van de wiskunde dat analyse heet. Ongelijkheden en afschattingen spelen een belangrijke rol in dat vakgebied en in mijn eigen onderzoek. Ik noteer enkele voorbeelden van bekende ongelijkheden op het krijtbord:

- $\frac{223}{71} < \pi < \frac{22}{7}$  (een rationale approximatie van het getal  $\pi$  van Archimedes),
- $xy \leq \frac{x^2}{2\epsilon} + \frac{\epsilon y^2}{2}$  (de Peter-Paul ongelijkheid<sup>2</sup>),
- $\sqrt{2\pi} n^{n+1/2} e^{-n} \leq n!$  (de ongelijkheid van de Moivre–Stirling<sup>3</sup>),
- $|\langle x, y \rangle| \leq \|x\| \|y\|$  (de ongelijkheid van Cauchy–Bunyakovsky–Schwarz<sup>4</sup>).

### Een ode aan de krijtborden

Krijtborden zijn waarschijnlijk voor het eerst gebruikt op universiteiten in de negentiende eeuw en zijn volgens de historicus Andrew Warwick een van de belang-



College reële analyse door Mark Veraar



Goede whiteboards in het Andrew Wiles-gebouw in Oxford

rijke redenen dat natuurwetenschappelijke denkwijzen en methoden zich zo snel kon verspreiden [42]. Veel beoefenaars van exacte wetenschappen gebruiken graag een krijtje (zie [1] en [2]). Dit klinkt ouderwets, maar niets is minder waar. Op bijna alle bèta-universiteiten en onderzoeksinstituten van hoog niveau wordt geïnvesteerd in de beste krijtborden. Deze worden consequent gebruikt voor voordrachten, discussies en colleges door wetenschappers van naam en faam. Belangrijke wiskundige conferentiecentra zoals Oberwolfach, Banff, Luminy, Bedlewo en het Isaac Newton Institute hebben fantastische krijtborden. Het Isaac Newton Institute gaat zelfs zo ver dat ze krijtborden hebben in de liften en toiletten.

Waarom geven veel van ons de voorkeur aan een krijtbord, vraagt u zichzelf misschien af. Ten eerste zijn er geen elektronische hulpmiddelen nodig behalve eventueel licht. Verder is het erg belangrijk dat een bètacollege of voordracht een natuurlijke snelheid heeft. Formules en ingewikkelde logische beweringen worden langzaam opgebouwd. Dit gaat nogal eens mis bij beamervoorndrachten, waar sprekers soms zestig technische slides in een half uurtje doorlopen. Een whiteboard is ook een optie. Echter na het inademen van de lucht van sommige stiften ben ik na twee uur college in elk geval helemaal duizelig. Het is ook onduidelijk of een stift

bijna leeg is. Verdere nadelen zijn de hogere kosten van stiften en het slechte zicht bij spiegeling van licht op het whiteboard. Vaak is er ook te weinig ruimte op een whiteboard. Een uitzondering is het moderne Andrew Wiles<sup>5</sup>-gebouw in Oxford uit 2013. Daar lopen de whiteboards over de gehele hoogte en breedte van de muren en is het mogelijk om het whiteboard-papier omhoog en omlaag te draaien op een rol. Hierdoor is er zelfs zoveel schrijfruimte dat het niet nodig is om het bord leeg te vegen tijdens een twee uur durend college.

Ik heb ook een flink aantal uren colleges gegeven met zogenaamde smartboards. Het is even wennen, maar ook goed te doen. Er zijn wel nadelen. De kosten zijn hoog en je bent afhankelijk van de elektronica. Als alles dan goed werkt zijn er nog steeds problemen. Bij grote groepen is het smartboard vaak te klein en hierdoor kunnen de studenten achterin de zaal het smartboard niet goed zien. Dit wordt dan vaak opgelost door het smartboard te projecteren op een groot scherm. Helaas creëert dit weer een nieuw probleem, de toehoorders kijken naar het scherm in plaats van naar de spreker en hierdoor ben je een deel van je communicatie kwijt. Een tweede probleem van smartboards is dat het wat tijd kost om er aan te wennen en dus ook niet zo handig voor discussies in kleinere groepen (ook is er vaak maar één elektronische pen).

Op een krijtbord kan iedereen zijn ideeën eenvoudig toevoegen en schetsen. Daar komen vaak mooie dingen uit. Vroeger werd weleens gezegd dat zo'n groot voordeel van een smartboard is dat je alles in een bestand kunt bewaren en aan de studenten kunt geven. Tegenwoordig is dat probleem ook verholpen: colleges worden vaak opgenomen en zo niet dan maken toehoorders van een bord vol met interessante dingen gewoon een foto met hun smartphone. Foto's van krijtborden van wiskundigen zijn de basis van een toekomstig boek van kunstenares Jessica Wynne [45] dat binnenkort zal verschijnen.

### Voorbeelden van harde en zachte analyse

Om uit te leggen wat harde en zachte analyse is wil ik verschillende voorbeelden geven. Aangezien u allen zeer verschillende voorkennis heeft, beginnen we eenvoudig. Een bekend verhaal is dat de wiskundige Carl Friedrich Gauss (1777–1855) op de basisschool door zijn leraar gevraagd werd om de getallen  $1, 2, 3, \dots, 100$  bij elkaar op te tellen. Dit was om de leergierige Gauss even bezig te houden. De jonge Gauss gaf echter binnen een paar seconden het antwoord: 5050. Hoe deed Gauss dit zo snel? Hij herschreef de som als volgt:

$$\begin{aligned} 1 + 2 + 3 + \dots + 98 + 99 + 100 \\ &= (1+100) + (2+99) + (3+98) + \dots + (50+51) \\ &= 101 + 101 + 101 + \dots + 101 \\ &= 50 \cdot 101 \\ &= 5050. \end{aligned}$$

Bovenstaande zachte manier van optellen is veel efficiënter en mooier dan de harde manier waarbij je de getallen stuk voor stuk in de originele volgorde bij elkaar telt.

Een ander voorbeeld dat bijna iedereen weleens gezien heeft is de berekening van oppervlakten onder de grafiek van functies, vaak genoteerd<sup>6</sup> als

$$I = \int_a^b f(x) dx.$$

Dit zou je kunnen berekenen met behulp van de definitie via Riemann-sommen. Deze harde methode (en slimme varianten hierop) wordt veel gebruikt in de numerieke wiskunde. Soms is het echter efficiënter om de hoofdstelling van de integraalrekening ( $\pm 1674$ , Barrow, Gregory, Leibniz, Newton) te gebruiken:  $\int_a^b f(x) dx = F(b) - F(a)$ , waarbij  $F$  een primitieve van  $f$  is:  $F' = f$ . Ik heb iemand weleens horen zeggen dat de ontdekking van de differentiaalcalculus een belangrijke rol heeft



Terrence Tao, 2006

gespeeld in de industriële revolutie. De  $n$ -dimensionale versie van bovenstaande hoofdstelling, de Cartan–Kelvin–Stokes-stelling<sup>7</sup> is een van de belangrijkste stellingen in de differentiaalmeetkunde.

Andere voorbeelden zijn het verschil tussen een kwalitatief resultaat (zacht) en kwantitatief resultaat (hard). Denk hierbij aan het verschil tussen uitspraken zoals  $x_n \rightarrow 0$  (zacht) en bijvoorbeeld  $|x_n| \leq Kn^{-7}$  (hard), of de continuïteit van een functie (zacht) en een afschatting van de modulus van continuïteit (hard), of het bestaan van een optimum (zacht) en een efficiënt algoritme om het optimum te vinden (hard).

Een interessante beschouwing over harde en zachte analyse is te vinden op de blog van Terrence Tao<sup>8</sup> [41]. Tao noemt hier een aantal voorbeelden om de verschillen duidelijk te maken. Het hoofddoel van zijn beschouwing is om het eindige convergentie-principe (hard) uit te leggen en toe te passen op ergodentheorie en getaltheorie. Het *Oneindige convergentie-principe* (zacht) is iets dat iedere wiskundige kent: Begrensde monotone rijen zijn convergent. Minder bekend is het *eindige convergentie-principe* (hard):

$$\begin{aligned} &\forall \varepsilon > 0 \quad \forall F: \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N} \quad \exists M \in \mathbb{N} \\ &\forall \text{monotone } (x_n)_{n=1}^M \subseteq [0, 1] \\ &\exists N < M \quad \forall m, n \in [N, \min\{N + F(N), M\}] \\ &\text{geldt dat } |x_m - x_n| < \varepsilon. \end{aligned}$$

In woorden zegt de stelling dat voor gegeven fout  $\varepsilon$  en functie  $F$ , voor alle eindige rijen die lang genoeg zijn (lengte  $M$ )  $\varepsilon$ -stabiliteit geldt in de staart van de rij (lengte  $F(N)$ ). De lengte  $M$  hangt expliciet af van  $\varepsilon$  en  $F$  (en dus niet van  $(x_n)_{n=1}^M$ ). De voor-

beelden  $F(n) = 1$  of  $F(n) = n$  zijn al interessant, maar ook exponentieel groeiende functies  $F$  zijn soms van belang.

De bovenstaande harde stelling speelt een rol in het beroemde artikel [20]. Hier hebben Green en Tao de volgende stelling over aritmetische priemprogressies bewezen.

**Stelling 1.** (Green–Tao, 2008) *Zij  $k \in \mathbb{N}$ . Er bestaan oneindig veel priemprogressies van lengte  $k$ .*

Om uit te leggen wat priemprogressies zijn, geef ik twee voorbeelden. De getallen 7, 37, 67, 97, 127, 157 zijn maar liefst zes priemgetallen en de afstand tussen twee opvolgende getallen is telkens 30. Je kunt je hierover het volgende afvragen: kunnen we het aantal van zes priemgetallen groter maken indien we de tussenafstand 30 vervangen door een ander getal? Dat blijkt inderdaad het geval. Een voorbeeld van tien priemgetallen met afstand 210 is 199, 409, 619, 829, 1039, 1249, 1459, 1669, 1879, 2089. Stelling 1 zegt dat hoe hoog je het gevraagde aantal priemgetallen ook maakt, je zo'n rijtje priemgetallen altijd kunt vinden. Het bewijs van deze stelling is lang (67 bladzijden) en technisch en maakt gebruik van getaltheorie, harmonische analyse, kansrekening en ergodentheorie.

### De rol van de functionaalanalyse

Zoals al gezegd is wiskunde de taal van de wetenschap. Functionaalanalyse wordt de moderne taal van de mathematische fysica

genoemd. Dit wordt bijvoorbeeld duidelijk uit de monografiereeks van Reed en Simon startend bij hun boek over functionaalanalyse [37]. De grondleggers van de functionaalanalyse zijn onder anderen Stefan Banach (1892–1945), David Hilbert (1862–1943) en Frigyes Riesz (1880–1956). De motivatie voor de ontwikkeling van de functionaalanalyse waren de spectraaltheorie en de toepassing hiervan op differentiaal- en integraalvergelijkingen.

Binnen het vakgebied functionaalanalyse worden veel zachte argumenten gebruikt. Het is dan ook geen grote verrassing dat Hardy's uitspraak over harde en zachte argumenten gemaakt werd in de tijd dat dit vakgebied belangrijke ontwikkelingen doormaakte. Existentie van vreemde objecten kan soms worden bewezen via de stelling van Baire<sup>9</sup> en dit geeft vaak zachte argumenten. Bijvoorbeeld is het mogelijk om dit te gebruiken om aan te tonen dat er continue functies bestaan die nergens differentieerbaar zijn (zie bijvoorbeeld [44, sectie IV.1]). Sterker, er blijken veel meer continue functies te zijn dan differentieerbare functies. Een harde constructie was al eerder met de hand gedaan door de grondlegger van de moderne analyse Karl Weierstrass (1815–1897) in 1872 en was toender tijd een grote schok voor de wiskundige gemeenschap. De functie van Weierstrass was een zogeheten lacunaire reeks van cosinussen. Het was overigens Hardy zelf die gevallen die Weierstrass open had gelaten nog verder heeft uitgezocht (zie [23]). Inmiddels staan eenvoudige variaties van de



Mark Veraar tijdens zijn oratie

functie van Weierstrass in standaard tekstboeken zoals [6, pp. 157–168] dat ik deels bij mijn tweedejaars college reële analyse gebruik.

Afschattingen bewijzen is vaak een hele kunst. En de hulp van zachte functionaal-analytische argumenten kan handig zijn. Volgens Hardy [24] zei Harald Bohr (1887–1951) ooit:

“All analysts spend half their time hunting through the literature for inequalities which they want to use and cannot prove.”

Dat is inderdaad waar. Gelukkig maken het internet en boeken zoals [25] en [16] het iets eenvoudiger om een ongelijkheid op te zoeken of zelf te bewijzen. De open afbeeldingsstelling<sup>10</sup> en gesloten grafiekstelling (zacht) van Banach–Schauder [8, Sectie III.12] laten ons zien dat afschattingen voor lineaire situaties ook lineaire afhankelijkheden zullen hebben. Alhoewel ik zelf altijd probeer om de afschatting expliciet te bewijzen (hard), is het feit dat de afhankelijkheid lineair moet zijn erg nuttige informatie. Dit maakt bijvoorbeeld het zoeken naar een bewijs makkelijker. Verderop zullen we bekijken wat dit betekent voor partiële differentiaalvergelijkingen.

Met behulp van de uniforme begrensdeheidsstelling van Banach–Steinhaus [8, Sectie III.14] is het mogelijk om eenvoudig afschattingen te versterken tot uniforme afschattingen. Een standaard zachte toepassing is aantonen dat er continue periodieke functies  $f: [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$  bestaan waarvoor de Fourierreeks divergeert in het punt  $x = 0$  (zie bijvoorbeeld [39, Sectie 5.11]). De enige harde afschatting die hiervoor nodig is, is

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int_0^{2\pi} \left| \sum_{|k| \leq n} e^{ikx} \right| dx = \infty.$$

De harde constructie van een functie met divergente Fourierreeks was al bekend en gedaan door Paul du Bois-Reymond (1831–1889) in 1873.

Er zijn nog veel andere zachte en harde voorbeelden in de analyse te noemen. Vooral als je denkt aan scheidingsstellingen (Hahn–Banach), dekpuntstellingen en begrippen zoals compactheid en metrische entropie. Het is erg bijzonder dat in de wetenschap sommige stellingen en technieken niet verouderen. Ze zijn universeel. Vooral de standaardstellingen in de functionaal-

analyse worden nog steeds dagelijks gebruikt door heel veel wetenschappers in theoretische maar ook in meer toegepaste gebieden. Ook kan het gebeuren dat wiskundige stellingen pas na tientallen jaren nuttig blijken. Dit is ondenkbaar in sommige andere wetenschappen, waar iets dat ouder is dan een paar maanden vaak al achterhaald is. Het huidige onderzoek in de functionaalanalyse gaat nog altijd door, al zijn de fundamentele stellingen al lang geleden bewezen en sommige van de open problemen erg lastig. Recent onderzoek is dan ook vaak gebiedsoverschrijdend. Hierbij ontstaan nieuwe interessante vragen. Een van de gebieden is de theorie van partiële differentiaalvergelijkingen (PDVs), waar bijvoorbeeld spectraletheorie wordt gecombineerd met harde afschattingen uit de harmonische analyse. Verschillende concrete voorbeelden hiervan komen nog aan de orde. Ook in andere gebieden wordt over grenzen heen gekeken: eindige dimensionale genormeerde vectorruimten spelen een belangrijke rol in delen van de informatica (bijvoorbeeld machine learning en (kwantum-) informatietheorie).

Laten we iets dieper ingaan op een voorbeeld van een zachte bewijstechniek gerelateerd aan PDVs. De klassieke Poincaré-ongelijkheid geeft een afschatting van een functie  $u: \Omega \rightarrow \mathbb{R}$  in termen van zijn gradiënt  $\nabla u$  indien  $u = 0$  (Dirichlet) op de rand van  $\Omega$ . Deze ongelijkheid is eenvoudig te bewijzen met een expliciete afschatting die alleen afhangt van de diameter van  $\Omega$  en de dimensie. De volgende variatie van deze stelling wordt vaak gebruikt in het geval van Neumann<sup>11</sup>-randcondities.

**Stelling 2** (Poincaré–Wirtinger). *Zij  $\Omega \subset \mathbb{R}^n$  een samenhangend  $C^1$ -gebied. Dan bestaat er een constante  $C_\Omega$  zó dat voor alle  $u \in C^1(\bar{\Omega})$  met gemiddelde nul geldt:*

$$\int_\Omega |u| dx \leq C_\Omega \int_\Omega |\nabla u| dx.$$

Het standaardbewijs van deze stelling is een niet-constructief bewijs met behulp van compactheidstechnieken en is een typisch geval van een zacht bewijs. Ik geef de details hieronder.

**Bewijs.** Stel niet. Dan bestaan er functies  $u_1, u_2, \dots$  met

$$\int_\Omega |\nabla u_n| dx \leq \frac{1}{n} \text{ en } \int_\Omega |u_n| dx = 1,$$



Alessio Figalli tijdens de Equadiff-conferentie in Leiden 2019.

en gemiddelde 0 voor alle  $n \geq 1$ . Uit compactheid van de Sobolev-embedding vinden we een deelrij  $(u_{n_k})_{k \geq 1}$  en een functie  $u: \Omega \rightarrow \mathbb{R}$  zodat  $\int_\Omega |u_{n_k} - u| dx \rightarrow 0$ . Het is nu eenvoudig na te gaan dat

1.  $\int_\Omega |u(x)| dx = 1$ .
2.  $\text{gemiddelde}(u) = 0$ .
3.  $\nabla u = 0$  (zwakke afgeleide).

Uit (3) volgt dat  $u$  constant is. Uit (2) volgt dan dat  $u = 0$ . Dit is in tegenspraak met (1).  $\square$

Gek genoeg weten we in het algemeen bijna niets over  $C_\Omega$ . Indien  $\Omega$  convex is, dan is het mogelijk om expliciete afschattingen te geven (zie [32, Theorem 10.2.5]). Het bovenstaande type argument wordt overal in de analyse gebruikt. Het is een interessante mix van harde en zachte technieken. Een voorbeeld waar een variatie op dit argument gecombineerd wordt met verschillende andere ingewikkelde harde en zachte technieken is te vinden in de recente preprint van Cabré–Figalli<sup>12</sup>–Ros–Oton–Serra uit 2019 [5]. Zij bewijzen onder andere de volgende verrassende stelling.

**Stelling 3** (Cabré–Figalli–Ros–Oton–Serra). *Zij  $n \leq 9$ . Zij  $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$  een begrensd open, convex  $C^1$ -gebied. Zij  $f$  een lokale Lipschitz-functie zijn met  $f \geq 0$ . Zij  $u \in C(\bar{\Omega}) \cap C^2(\Omega)$  een stabiele oplossing van*

$$\begin{cases} -\Delta u = f(u), & x \in \Omega, \\ u = 0, & x \in \partial\Omega. \end{cases}$$

*Dan bestaat er een constante  $C$  die alleen afhangt van  $\Omega$  (en niet van  $f$  en  $u$ ) zó dat*

$$\sup_{x \in \bar{\Omega}} |u| \leq C \int_\Omega |u| dx.$$

De expressie  $\int_\Omega |u| dx$  laat zich in veel gevallen eenvoudig afschatten. In zulke



Lars Hörmander in 1969

gevallen geeft de bovenstaande uniforme afschatting, gecombineerd met Calderón–Zygmund-theorie, dat  $u \in W^{1,p}(\Omega)$  voor alle  $p \in [1, \infty)$  (zie [17] en [32]). Als  $\Omega$  en  $f$  beide  $C^\infty$  zijn, dan is dit te combineren met Sobolev embedding resultaten en Schauder-theorie (zie [17] en [31]) om te vinden dat  $u \in C^\infty(\bar{\Omega})$  met bijbehorende afschattingen. De conditie dat  $n \leq 9$  is noodzakelijk in Stelling 3. Er zijn eenvoudige voorbeelden die laten zien dat het resultaat niet waar is voor  $n \geq 10$ .

### Partiële differentiaalvergelijkingen

In Stelling 3 hebben we een voorbeeld gezien van een partiële differentiaalvergelijking (PDV). Dit zijn vergelijkingen die we gebruiken om oplossingen van problemen in de natuurwetenschappen en economie te beschrijven. Denk hierbij aan: stroming, diffusie, transport, prijzen, et cetera. De PDVs waaraan ik werk zijn vaak van evolutietype: er is een tijdsparemeter aanwezig. Zulke vergelijkingen spelen onder andere een rol in de natuurwetenschappen; ze komen voor in de akoestiek, warmteleer, stromingsleer, golven, patronenformatie, elektriciteit, mechanica, populatiemodellen, et cetera. Concrete voorbeelden zijn Navier–Stokes, Euler, Helmholtz, Klein–Gordon, Maxwell, Monge–Ampère, Cahn–Hilliard, Burgers, Schrödinger, Volterra, Fitzhugh–Nagumo, et cetera.

Onderzoek naar partiële differentiaalvergelijkingen (PDVs) is erg breed en overdekt verschillende gebieden zoals modelleren, numerieke simulatie, laboratoriumonder-

zoek (verificatie van modellen, berekening fysische/economische constanten), tot aan theoretische uitspraken over het gedrag van de oplossing. Meer dan de helft van de onderzoekers aan de TU Delft heeft wel eens met PDVs te maken en meer dan de helft van alle TU Delft-studenten leert iets over PDVs.

Binnen de PDVs worden harde en zachte wiskundige technieken gebruikt. Terence Tao zegt op zijn blog uit 2007:

“PDE is an interesting intermediate case in which hard and soft analysis are popular and useful, though many practitioners of PDE still prefer to primarily use just one of the two types.”

Typische vragen die men zich stelt zijn: is er lokale/globale existentie, uniciteit, wat is de regulariteit van de oplossing? Wat is het asymptotisch gedrag en hoe kunnen we de oplossing benaderen? Juist de combinatie van harde en zachte methoden hierbij hebben te maken met energieafschattingen/identiteiten, fixpunten, singuliere integralen, bifurcatie, variatierekening, spectraaltheorie, geometrie, verstoring, linearisatie, minimalisatie, numerieke benadering. Welke hier hard of zacht is hangt van de situatie af.

Laten we iets verder in detail treden in het geval van een lineaire differentiaalvergelijking. Voor het gemak nemen we aan dat de lineaire differentiaaloperator  $L$  begrens is van een Banachruimte  $X_1$  naar  $X_0$  en hierbij ligt  $X_1$  continu ingebed in  $X_0$ . In toepassing zou  $X_1$  een ruimte van gladde functies zijn en  $X_0$  een ruimte van ‘gewone’ functies.<sup>13</sup> Het aantonen van goedgesteldheid van problemen van de vorm

$$Lu = f$$

is wegens de open afbeeldingsstelling equivalent aan het oplossen van  $Lu = f$  voor  $f$  in een dichte lineaire deelruimte  $Y \subseteq X_0$  en de a priori afschatting  $\|u\|_{X_1} \leq C\|Lu\|_{X_0}$  voor alle  $u \in X_1$ , waarbij  $C$  onafhankelijk is van  $u$ . Het feit dat deze uitspraken equivalent zijn, maakt het zoeken naar een bewijs van de goedgesteldheid eenvoudiger. Verder kan de a priori afschatting ook nog nuttig zijn voor niet-lineaire varianten van bovenstaande probleem via onder andere linearisatietechnieken en de impliciete functiestelling. Het aantonen van de a priori afschatting is vaak een lastig probleem waarvoor meestal harde analyse nodig



Kiyosi Itô in 1970

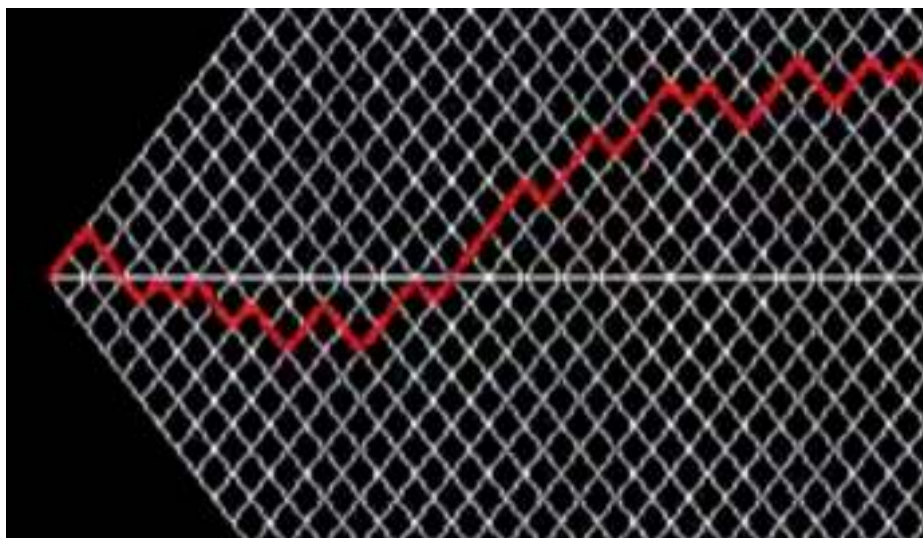
Foto: WFO, Konrad Jacobs

is. Denk hierbij aan Calderón–Zygmund-, Schauder-theorie en de Giorgi–Moser–Nash-technieken (zie bijvoorbeeld [14, 17, 31, 32, 33]). Aan de andere kant kunnen abstracte stellingen weer zo krachtig zijn dat de verificatie van de voorwaarden enigszins zacht is. Een deel hiervan is uiteengezet in Hörmanders<sup>14</sup> monografie [26], welke hij later heeft uitgebreid naar zijn vier beroemde boeken met een prachtige mix van harde en zachte analyse.

### De Brownse beweging en ruis

In de moderne analyse spelen verschillende technieken uit de kansrekening een belangrijke rol. Denk hierbij aan constructies en bewijzen waar random keuzes worden gebruikt. Een van de belangrijkste objecten hierbij is de Brownse beweging. De Brownse beweging kan gebruikt worden om oplossingsformules voor sommige veelvoorkomende PDVs te geven. Denk hierbij aan de warmtevergelijking, Laplace/Poisson-vergelijking, Feynman–Kac-formule, Schrödinger-vergelijking, et cetera (zie bijvoorbeeld [12]). De oplossingsformules blijken vooral nuttig wanneer deze worden gecombineerd met Itô-calculus.<sup>15</sup>

De Brownse beweging is ontdekt in laboratoria bij het bestuderen van de beweging van grotere moleculen (zoals pollen) in water. Door de random botsing van het grotere molecuul met de watermoleculen ziet de beweging van het grotere molecuul er enigszins willekeurig uit. De drie coördinaten van het grotere molecuul komen nauw overeen met die drie onafhankelijke



**Figuur 2** Approximatie Brownse beweging met random walk [4].

Brownse bewegingen. Op deze manier is dit proces onafhankelijk ontdekt door Jan Ingenhousz in 1786 en Robert Brown in 1827. De eerste bekende wiskundige beschrijving is van Thorvald Thiele (1838–1910) uit 1880 en de eerste precieze wiskundige constructie van Norbert Wiener (1864–1964) uit 1923. De Brownse beweging wordt ook gebruikt in financiële modellen. Dit is voor het eerst gedaan door Louis Bachelier (1870–1946) in 1900. De fysici Albert Einstein in 1905 and Marian Smoluchowski in 1906 gebruikten ‘Brownse deeltjes’ zoals dat gedaan wordt in de statistische mechanica.

De Brownse beweging is de moeder van alle continue lokale martingalen (zie [29, Chapter 18] and [38, Chapter V]). Het is bijzonder dat van een stochastisch proces dat al zo lang geleden is ontdekt nog steeds belangrijke nieuwe eigenschappen worden gevonden. In mijn onderzoek speelt de Brownse beweging, eindig- en oneindig-dimensionaal, een centrale rol als de zogenaamde ‘ruis’ binnen een model. Denk hierbij aan random fluctuaties die eigenlijk onvoorspelbaar en overal gelijke intensiteit hebben. Dit leidt tot wat vaak een ‘witte ruis’ genoemd wordt. Dit is een ruis in ruimte en tijd tegelijk. Ruis kan additief of multiplicatief zijn; dit hangt af van het fysische of economische model dat gebruikt wordt.

Differentiaalvergelijkingen met ruistermen zoals hierboven beschreven worden stochastische differentiaalvergelijkingen (SDVs) en stochastische partiële differentiaalvergelijkingen (SPDV's) genoemd. Op dit moment is dit gebied een populair

onderzoeksgebied dat verschillende lagen van de wetenschap raakt: modellering, numerieke benadering, regulariteit, et cetera. Voor een introductie tot het onderwerp verwijs ik naar [9] en [21]. Het recente werk Martin Hairer<sup>16</sup> (zie bijvoorbeeld [22]) heeft het gebied van SPDVs een enorme stimulans gegeven. Bijvoorbeeld zijn sommige onbegrepen problemen met witte ruis in hogere dimensies nu toegankelijk geworden door de juiste ‘correcties’ toe te passen.

### Singuliere integralen, harmonische analyse

In de harmonische analyse, nu al een paar keer genoemd, worden onder andere singuliere integralen bestudeerd. Deze zijn vaak nodig bij het bewijzen van regulariteit van oplossingen van PDVs. Een voorbeeld van een singuliere integraal operator is de Hilbert-transformatie:

$$Hf(x) = \int_{\mathbb{R}} \frac{f(x-y)}{y} dy, \quad f \in C_c(\mathbb{R}),$$

wiens oorsprong ligt in de complexe functietheorie. Deze transformatie heeft singulariteiten bij  $y = 0, \pm\infty$  en de integraal dient geïnterpreteerd te worden als hoofdwaaarde-integraal. In 1927 bewees Marcel Riesz<sup>17</sup> dat  $H$  een begrensde lineaire operator is op  $L^p(\mathbb{R})$  als  $p \in (1, \infty)$ .<sup>18</sup>

Het werk van Marcel Riesz heeft uiteindelijk geleid tot een heel vakgebied waar singuliere integralen worden bestudeerd (zie bijvoorbeeld [18] en [19]) met als belangrijkste motivatie de toepassing op PDVs. Een van de eenvoudigste toepassingen is de  $L^p$ -regulariteit van de oplossing van  $\Delta u = f$ , waarbij  $f \in L^p(\mathbb{R}^d)$ . De

afbeeldingen  $f \mapsto \partial_i \partial_j u$  worden de tweede orde Riesz-transformaties genoemd en zijn continu in  $L^p$  voor  $p \in (1, \infty)$ . Belangrijke stappen in deze theorie werden gemaakt door Littlewood–Paley<sup>19</sup> in hun tweezijdige ongelijkheid voor  $g$ -functies en door Marcinkiewicz<sup>20</sup> in zijn  $L^p$ -multiplierstelling voor trigonometrische reeksen.

Alberto Calderón (1920–1998) en Antoni Zygmund (1900–1992) hebben het werk van Marcel Riesz uitgebreid naar een grote klasse van singuliere integraaloperators. Zij zijn de grondleggers van deze theorie en daarom worden deze operatoren nu vaak Calderón–Zygmund-operatoren genoemd. Zij hebben een grote invloed op de harmonische analyse gehad. Dit blijkt onder andere uit de lijst promovendi die zij begeleid hebben. Hiertoe behoren tal van bekende wiskundigen: onder anderen Michael Christ, Paul Cohen, Eugene Fabes, Carlos Kenig, Józef Marcinkiewicz en Elias Stein. Een grote klasse van Calderón–Zygmund-operatoren wordt verkregen via de Hörmander–Mihlin-multiplierstelling.<sup>21</sup>

In hetzelfde jaar dat Marcel Riesz zijn resultaat over de Hilbert-transformatie bewees, werd de Peter–Weyl<sup>22</sup>-stelling bewezen. Hun stelling speelt een belangrijke rol binnen de representatietheorie en de abstracte harmonische analyse. Sinds 1927 is de Fourier/harmonische analyse eigenlijk twee verschillende richtingen op gegaan: de reële harmonische analyse (hard), met Calderón–Zygmund-theorie, et cetera, zoals hierboven verder toegelicht en de abstrac-



Józef Marcinkiewicz



Jean Bourgain

te harmonische analyse (zacht), met hierin representatietheorie, niet-abelse Fourier-analyse, operatoralgebra's (zie [15]).

Mijn onderzoek aan (S)PDVs gebruikt singuliere integralen voor vector-waardige functies en ook stochastische varianten van zulke integralen. Onder andere het werk van Bourgain<sup>23</sup>, Burkholder<sup>24</sup> en McConnell<sup>25</sup> in de jaren tachtig is van grote invloed geweest op dit gebied. Zij hebben laten zien dat een groot deel van de reële harmonische analyse generaliseert naar de Banachwaardige situatie onder geometrische condities op de Banachruimte. Het interessante aan deze theorie is dat drie lastige wiskundige gebieden bij elkaar komen: harmonische analyse, de geometrie van Banachruimten en stochastische analyse.

Voor PDVs van evolutietype bleek deze theorie al snel van groot belang zoals werd aangetoond in het werk van Dore–Venni [11]. Deze theorie heeft vervolgens een metamorfose ondergaan nadat Weis zijn operatorwaardige Fourier-multiplierstelling had bewezen [43] onder  $R$ -begrensdheid condities van Mihlin-type. Dit werk maakt het mogelijk om een deel van de parabolische regulariteitstheorie via zachte methoden te verkrijgen. De fundamenteën van  $R$ -begrensdheid spelen al een rol in verschillende artikelen uit de twintigste eeuw. De terminologie en kracht van dit concept kwamen pas echt tot stand door het artikel [7] van Clément–de Pagter–Sukochev–Witvliet. Het succes van de toepassing op evolutievergelijkingen is vooral te danken aan het werk van Prüss en zijn coauteurs (zie bijvoorbeeld [10] en [36]).

Om een goed beeld te geven van bovenstaande ontwikkelingen is er nog één onderwerp dat geheel mist: de  $H^\infty$ -functionaalcalculus. De spectraaltheorie voor zelfgeadjungeerde operatoren is zeer krachtig maar ook enigszins beperkt in toepassingen: de onderliggende ruimte moet een Hilbertruimte zijn en de operatoren moeten zelfgeadjungeerd zijn. Het was Alan McIntosh (1942–2016) in 1980 [35] die de  $H^\infty$ -functionaalcalculus ontwikkelde. Zijn motivatie kwam voort uit de mogelijke toepassing op het ‘Kato square root-probleem’<sup>26</sup> dat van groot belang is voor PDVs. Uiteindelijk is Kato's probleem opgelost via  $H^\infty$ -calculus en een mix van harde en zachte harmonische analyse.

De theorie van de  $H^\infty$ -calculus won snel aan populariteit en al snel bleek dit ook erg interessant en nuttig in de theorie van PDVs. Onder andere door het baanbrekende artikel van Kalton<sup>27</sup>–Weis [30] uit 2001. Onder andere blijkt uit dit artikel hoe je  $H^\infty$ -calculus en  $R$ -begrensdheid kunt samenbrengen om de begrensdheid van een grote klasse van singuliere integralen te bewijzen. Dit resultaat heeft een belangrijke rol gespeeld in veel artikelen over parabolische PDVs en ook in verschillende van mijn regulariteitsresultaten over SPDVs. Een deel van de abstracte theorie is uiteengezet in mijn gezamenlijke boekenserie [27] en [28] met mijn coauteurs Tuomas



Jan Prüss in zijn werkkamer

Hytonen, Jan van Neerven en Lutz Weis. Er komen twee nieuwe volumes waarin we ons onder andere zullen richten op de toepassing op evolutievergelijkingen.

Het gebruik van  $R$ -begrensdheid en de  $H^\infty$ -calculus om nieuwe stellingen te bewijzen is vaak onderdeel van de zachte analyse. Anderzijds is het aantonen dat een differentiaaloperator aan de benodigde  $R$ -begrensdheidscondities voldoet, of zelfs een  $H^\infty$ -calculus heeft, vaak harde harmonische analyse. Gelukkig worden er steeds meer zachte methoden ontdekt om het harde werk enigszins te vereenvoudigen.



Oberwolfach 2004: Spectral Theory in Banach Spaces and Harmonic Analysis. Lutz Weis, Nigel Kalton en Alan McIntosh

Ik wil eindigen met een citaat van Freeman Dyson<sup>28</sup> [13]:

“Some mathematicians are birds, others are frogs. Birds fly high in the air and survey broad vistas of mathematics out to the far horizon. They delight in concepts that unify our thinking and bring together diverse problems from different parts of the landscape. Frogs live in the mud below and see only the flowers that

grow nearby. They delight in the details of particular objects, and they solve problems one at a time. I happen to be a frog, but many of my best friends are birds. The main theme of my talk tonight is this. Mathematics needs both birds and frogs. Mathematics is rich and beautiful because birds give it broad visions and frogs give it intricate details. Mathematics is both great art and important science, because it combines generality

of concepts with depth of structures. It is stupid to claim that birds are better than frogs because they see farther, or that frogs are better than birds because they see deeper. The world of mathematics is both broad and deep, and we need birds and frogs working together to explore it.”

Deze kikker heeft gesproken, dus ik heb gezegd. ☺

## Noten

- Godfrey Hardy (1877–1947) was een Britse wiskundige die veel belangrijke resultaten in de analyse en getaltheorie heeft bewezen. Verschillende ongelijkheden en methoden zijn naar hem vernoemd. Denk hierbij aan de Hardy-ongelijkheid, de Hardy–Littlewood-ongelijkheid, de Hardy–Littlewood-maximaal-operator, de Hardy–Littlewood-cirkelmethode. Hardy werkte bijna zijn hele carrière samen met de even bekende John Littlewood 1885–1977.
- Je steelt van Peter om Paul te betalen.
- Het resultaat van de Moivre–Stirling zegt zelfs dat voor  $n \rightarrow \infty$  beide zijden vergelijkbaar zijn.
- Zie [40] voor een interessant boek op basis van deze ene ongelijkheid.
- Andrew Wiles (1953) is beroemd om zijn werk binnen de getaltheorie. Vooral is hij bekend vanwege zijn bewijs van de laatste stelling van Fermat en mede hiervoor heeft hij de Abelprijs (analogon van de Nobelprijs voor de wiskunde) gekregen. Kort nadat de plannen voor het Andrew Wiles-gebouw klaar waren, bleek dat Andrew Wiles weer van Princeton naar Oxford zou verhuizen. Een interessant gevolg is dat hij dus nu werkt in het gebouw dat naar hem vernoemd is.
- Veel wiskundestudenten beseffen niet dat het integraalteken een uitgerekte letter *s* is. Deze letter komt van het woord som/sum/summe en niet van surface zoals sommige mensen denken.
- De geschiedenis van deze stelling is wat ingewikkeld. De moderne  $n$ -dimensionale versie van de stelling is bewezen door Élie Cartan (1869–1951), in 1945.
- Terrence Tao (1975) is geboren in Australië, maar heeft Chinese voorouders. Hij is een van de grootste analytici/wiskundigen van deze tijd. Hij heeft veel prijzen gewonnen, waaronder ook de Fieldsmedaille in 2006.
- In zijn proefschrift bewees René-Louis Baire (1874–1932) in 1899 het volgende: “In een volledige metrische ruimte  $M$  is de doorsnede van een rij dichte open verzamelingen weer dicht in  $M$ .”
- Als  $X$  en  $Y$  Banachruimten zijn en  $T: X \rightarrow Y$  is een surjectieve continue lineaire operator, dan beeldt  $T$  open verzamelingen af op open verzamelingen.
- Carl Neumann (1832–1925) is bekend van de Neumann-reeks  $1 + x + x^2 + \dots$  en de theorie van integraalvergelijkingen. De randconditie is naar hem vernoemd.
- Alessio Figalli (1984) heeft het resultaat van het artikel in juli 2019 op de Equadiff-conferentie gepresenteerd. Figalli is een van de meest recente Fieldsmedaillewinnaars.
- Bijvoorbeeld  $X_0 = L^p$  en  $X_1 = W^{2,p}$ , of  $X_0 = C_{ub}$  en  $X_1 = C_{ub}^2$  in het geval van een tweede orde differentiaal operator  $L$ .
- Lars Hörmander (1931–2012) wordt de belangrijkste bijdrager genoemd van de moderne theorie van lineaire PDVs. Hij won de Fieldsmedaille in 1962.
- Kiyosi Itô (1915–2008) was een pionier op het gebied van stochastische integratie en stochastische differentiaalvergelijkingen. De Itô-calculus is een variant van de differentiaalcalculus die onder andere geschikt is voor stochastische processen zoals de Brownse beweging.
- Martin Hairer (1975) is Fieldsmedaillewinnaar uit 2014 voor zijn werk in de stochastische analyse.
- Marcel Riesz (1886–1969) is de jongere broer van de eerder genoemde Frigyes Riesz. Marcel Riesz was ook een analyticus en heeft veel belangrijke resultaten gevonden; de Riesz–Thorin-interpolatiestelling, resultaten over Dirichlet-reeksen (waaronder een boek met Hardy), begrensdheid van Riesz-potentiaal, et cetera.
- Eigenlijk beschouwde Marcel Riesz het periodieke geval. Zijn resultaat had als gevolg dat Fourier reeksen van  $L^p$ -functies in  $L^p$ -convergeren naar de functie zolang  $p \in (1, \infty)$ .
- Raymond Paley 1907–1933 heeft een aantal belangrijke dingen gedaan in zijn korte carrière. Hij overleed tijdens het skiën door een lawine.
- Józef Marcinkiewicz (1910–1940) heeft 55 artikelen geschreven tussen 1933 en 1939. Bijvoorbeeld zijn interpolatiestelling, multipliiestelling en veel resultaten samen met Antoni Zygmund, zoals bijvoorbeeld hun sterke wet van de grote aantallen. Het is bizar hoe veel resultaten Marcinkiewicz gevonden heeft en dat veel van zijn resultaten nog steeds veel gebruikt worden. Marcinkiewicz is overleden als oorlogsgevangene in de Tweede Wereldoorlog op dertigjarige leeftijd. Een prachtig overzichtsartikel over de wiskundige en persoon Józef Marcinkiewicz is [34].
- Solomon Mikhlin (1908–1990) zag hoe hij de uit Marcinkiewicz-multipliiestelling een continue versie kon afleiden. Deze stellingen zijn later weer verder uitgebreid door Hörmander door handig gebruik te maken van Calderón–Zygmund-theorie.
- Fritz Peter (1899–1949) was promovendus van de beroemde mathematische fysicus Hermann Weyl (1885–1955).
- Jean Bourgain (1954–2018) was een van de krachtigste analytici aller tijden en won dan ook de Fieldsmedaille voor zijn zeer diverse werk in de analyse. Hij is ooit begonnen aan de Vrije Universiteit Brussel, maar werkte hierna op veel beroemde instituten waarvan de laatste 24 jaar in Princeton.
- Donald Burkholder (1927–2013) is een zeer bekende naam in de kansrekening en is vooral bekend om zijn werk aan martingaaltheorie.
- Terry McConnell heeft als eerste een Banachwaardige Mihlin-multipliiestelling bewezen via Itô-calculus.
- In het ‘Kato’s square root-probleem’ uit 1953 vraagt hij zich af of de volgende normequivalentie geldt:  $\|\sqrt{L}f\|_2 \simeq \|\nabla f\|_2$ . Hierbij is  $L = \operatorname{div}(A\nabla)$ , met  $A$  een complexe matrix met begrensde meetbare coëfficiënten, zodat  $L$  uniform elliptisch is. Na 48 jaar is het probleem opgelost in [3]. Er is nog altijd veel onderzoek aan uitbreidingen van dit resultaat.
- Nigel Kalton (1946–2010) werkte vooral aan functionaalanalyse, harmonische analyse en speltheorie. Aan het einde van de jaren negentig raakte hij geïnteresseerd in evolutievergelijkingen en heeft hij veel betekend voor dit gebied.
- Freeman Dyson (1923) is een Amerikaanse theoretisch fysicus en wiskundige bekend door zijn werk aan quantumelektrodynamica, vastestoffysica, astronomie en nuclear engineering.

## Referenties

- 1 De kracht van kruit, 2008, <https://www.nrc.nl/nieuws/2008/02/16/dekrachtvankruit-11488356>.
- 2 The power of the blackboard, 2017, <https://physicsworld.com/the-power-of-the-blackboard>.
- 3 P. Auscher, S. Hofmann, M. Lacey, A. McIntosh en Ph. Tchamitchian, The solution of the Kato square root problem for second order elliptic operators on  $\mathbb{R}^n$ , *Ann. of Math. (2)* 156(2) (2002), 633–654.
- 4 N. Berglund, Simulation of scaling random walk with convergence to Brownian motion, 2012, [youtube.com/watch?v=BOmURxCgubM](https://www.youtube.com/watch?v=BOmURxCgubM).
- 5 X. Cabre, A. Figalli, X. Ros-Oton en J. Serra, Stable solutions to semilinear elliptic equations are smooth up to dimension 9, 2019, [arXiv:1907.09403](https://arxiv.org/abs/1907.09403).
- 6 N.L. Carothers, *Real Analysis*, Cambridge University Press, 2000.
- 7 Ph. Clement, B. de Pagter, F.A. Sukochev en H. Witvliet, Schauder decompositions and multiplier theorems, *Studia Math.* 138(2), (2000), 135–163.
- 8 J.B. Conway, *A Course in Functional Analysis*, Graduate Texts in Mathematics, Vol. 96, Springer, 1990, 2nd ed.
- 9 G. Da Prato and J. Zabczyk, *Stochastic equations in infinite dimensions*, volume 152 of *Encyclopedia of Mathematics and its Applications*. Cambridge University Press, Cambridge, 2014, 2nd ed.
- 10 R. Denk, M. Hieber en J. Prüss,  $R$ -boundedness, Fourier multipliers and problems of elliptic and parabolic type, *Mem. Amer. Math. Soc.* 166(788) (2003).
- 11 G. Dore en A. Venni, On the closedness of the sum of two closed operators, *Math. Z.* 196(2) (1987), 189–201.
- 12 R. Durrett, *Brownian Motion and Martingales in Analysis*, Wadsworth Mathematics Series, Wadsworth International Group, 1984.
- 13 F. Dyson, Birds and frogs, *Notices Amer. Math. Soc.* 56(2) (2009), 212–223.
- 14 L.C. Evans, *Partial Differential Equations*, Graduate Studies in Mathematics, Vol. 19 American Mathematical Society, 1998.
- 15 G.B. Folland, *A Course in Abstract Harmonic Analysis*, Studies in Advanced Mathematics, CRC Press, 1995.
- 16 D.J.H. Garling, *Inequalities: A Journey into Linear Analysis*, Cambridge University Press, 2007.
- 17 D. Gilbarg en N.S. Trudinger, *Elliptic Partial Differential Equations of Second Order*, Classics in Mathematics, Springer, 2001, reprint of the 1998 edition.
- 18 L. Grafakos, *Classical Fourier Analysis*, Graduate Texts in Mathematics, Vol. 249, Springer, 2014, 3rd ed.
- 19 L. Grafakos, *Modern Fourier Analysis*, Graduate Texts in Mathematics, Vol. 250, Springer, 2014, 3rd ed.
- 20 B. Green en T. Tao, The primes contain arbitrarily long arithmetic progressions, *Ann. of Math. (2)* 167(2) (2008), 481–547.
- 21 M. Hairer, An introduction to stochastic PDEs, 2009, [arXiv:0907.4178](https://arxiv.org/abs/0907.4178).
- 22 M. Hairer, Solving the KPZ equation, *Ann. of Math. (2)* 178(2) (2013), 559–664.
- 23 G.H. Hardy, Weierstrass's non-differentiable function, *Trans. Amer. Math. Soc.* 17(3) (1916), 301–325.
- 24 G.H. Hardy, Prolegomena to a Chapter on Inequalities, *J. London Math. Soc.* 4(1) (1929), 61–78.
- 25 G.H. Hardy, J.E. Littlewood en G. Polya, *Inequalities*, Cambridge University Press, 1952, 2nd ed.
- 26 L. Hörmander, Linear partial differential operators, Die Grundlehren der mathematischen Wissenschaften, Bd. 116, Academic Press/Springer, 1963.
- 27 T. Hytönen, J. van Neerven, M. Veraar en L. Weis, *Analysis in Banach Spaces, Vol. I: Martingales and Littlewood-Paley Theory*, Ergebnisse der Mathematik und ihrer Grenzgebiete. 3. Folge / A Series of Modern Surveys in Mathematics, Vol. 63, Springer, 2016.
- 28 T. Hytönen, J. van Neerven, M. Veraar en L. Weis, *Analysis in Banach Spaces, Vol. II: Probabilistic Methods and Operator Theory*, Ergebnisse der Mathematik und ihrer Grenzgebiete. 3. Folge / A Series of Modern Surveys in Mathematics, Vol. 67, Springer, 2017.
- 29 O. Kallenberg, *Foundations of Modern Probability*, Probability and its Applications, Springer, 2002, 2nd ed.
- 30 N. Kalton en L. Weis, The  $H^\infty$ -calculus and sums of closed operators, *Math. Ann.* 321(2) (2001), 319–345.
- 31 N.V. Krylov, *Lectures on Elliptic and Parabolic Equations in Hölder Spaces*, Graduate Studies in Mathematics, Vol. 12, American Mathematical Society, 1996.
- 32 N.V. Krylov, *Lectures on Elliptic and Parabolic Equations in Sobolev Spaces*, Graduate Studies in Mathematics, Vol. 96, American Mathematical Society, 2008.
- 33 O.A. Ladyzenskaja, V.A. Solonnikov en N.N. Ural'ceva, *Linear and Quasilinear Equations of Parabolic Type*, Translations of Mathematical Monographs, Vol. 23, American Mathematical Society, 1968.
- 34 L. Maligranda, Jozef Marcinkiewicz (1910–1940) – On the centenary of his birth, in *Marcinkiewicz Centenary Volume*, Banach Center Publ., Vol. 95, Polish Acad. Sci. Inst. Math., 2011, pp. 133–234.
- 35 A. McIntosh, Operators which have an  $H_\infty$  functional calculus, in *Miniconference on Operator Theory and Partial Differential Equations (North Ryde, 1986)*, Proc. Centre Math. Anal. Austral. Nat. Univ., Vol. 14, Austral. Nat. Univ., 1986, pp. 210–231.
- 36 J. Prüss en G. Simonett, *Moving Interfaces and Quasilinear Parabolic Evolution Equations*, Monographs in Mathematics, Vol. 105, Birkhäuser/Springer, 2016.
- 37 M. Reed en B. Simon, *Methods of Modern Mathematical Physics, I: Functional Analysis*, Academic Press, 1972.
- 38 D. Revuz en M. Yor, *Continuous Martingales and Brownian Motion*, Grundlehren der Mathematischen Wissenschaften [Fundamental Principles of Mathematical Sciences], Vol. 293, Springer, 1991.
- 39 W. Rudin, *Real and Complex Analysis*, McGraw-Hill, New York, 1987, 3rd ed.
- 40 J.M. Steele, *The Cauchy–Schwarz Master Class – An Introduction to the Art of Mathematical Inequalities*, MAA Problem Books Series, Mathematical Association of America / Cambridge University Press, 2004.
- 41 T. Tao, Soft analysis, hard analysis, and the finite convergence principle, 2008, <https://terrytao.wordpress.com/2007/05/23/>.
- 42 A. Warwick, *Masters of Theory: Cambridge and the Rise of Mathematical Physics*, University of Chicago Press, 2003.
- 43 L.W. Weis, Operator-valued Fourier multiplier theorems and maximal  $L_p$ -regularity, *Math. Ann.* 319(4) (2001), 735–758.
- 44 D. Werner, *Funktionalanalysis*, Springer, 2000, extended edition.
- 45 J. Wynne, *Do Not Erase*, Princeton University Press, 2020. Zie ook <https://www.nytimes.com/2019/09/23/science/mathematicians-blackboard-photographs-jessica-wynne.html>.

Daan Mulder

mulderdaan@live.nl



Het keerpunt van Samuel Vriezen

# Getallen zijn de krukken waarop ik loop

Samuel Vriezen (1973) heeft al een pot thee klaar staan als ik binnenloop in zijn appartement in Amsterdam. Langs de muren staan volle boekenkasten en een elektrische piano: Vriezen is essayist en dichter, pianist en componist. Wie zijn werk van dichterbij bekijkt, zal het niet verbazen dat Vriezen aanvankelijk begon met een studie wiskunde. Die maakte hij niet af, maar de fascinatie is gebleven. Een gesprek over patronen, onzinteksten en mogelijke mathematische universa.

*Wat trok je aanvankelijk om wiskunde te gaan studeren?*

“Ik weet het niet precies meer; ik begon met studeren toen ik net zeventien was. Niet wat er op school aan wiskunde werd onderwezen in elk geval. Dat was eigenlijk een soort van goed of slecht weer waar je mee te maken hebt. Niet het meest interessant. Maar er waren een paar boeken die ik las toen ik zo’n vijftien, zestien was. Toen dacht ik: dit is een vak waar wat meer mee aan de hand is. Dat waren Gödel, Escher, Bach en *Metamagical Themas*, beide van Douglas Hofstadter, en *Chaos* van James Gleick. *Metamagical Themas* is misschien nog wel leuker zelfs dan *GEB*. En Gleick was de eerste die een populairwetenschappelijk, historisch overzicht maakte van de chaostheorie, wat dus eigenlijk geen chaostheorie heet, maar de theorie van de dynamische systemen. De ontdekking van de Mandelbrot-verzameling, de eerste artikelen over het Butterfly-effect.

Dus wat me eigenlijk het meeste interesseerde, al toen ik vijftien, zestien was, was helemaal niet het idee dat wiskunde een vak is waarmee je alles kunt uitrekenen en onder controle hebt, maar juist de randgebieden waar de dingen niet zeker zijn. Ik was tegelijk meer met het maken van computerspelletjes bezig, of met het spelen van fantasy-role-playing games. Dat vond ik eigenlijk echt interessant. Dat gaat over andere werelden. En ook bij

wiskunde kreeg ik het idee dat dat een vakgebied is op de rand van andere werelden, en dacht: o, daar moet ik zijn.

Na anderhalf of twee jaar studeren kwam ik erachter dat ik toch iets miste en ben ik overgegaan op het conservatorium. Wiskunde is een statisch vak op een bepaalde manier. Wiskundige waarheden zijn onveranderlijk. Tegelijkertijd is het ook weer niet echt statisch, maar daar ben ik pas veel later achtergekomen, dat wiskunde ook performance is. De geestdrift waarmee iemand een bewijs aflevert, is het kloppend hart van het vak, uiteindelijk. Iedereen wordt enthousiast van



Samuel Vriezen

het bewijs van Euclides dat er oneindig veel priemgetallen zijn. Iedereen snapt dat het niet alleen maar waar is, maar dat het ook heel erg leuk is, en prettig is om te vertellen. Dat kwartje is bij mij pas veel later gevallen, toen ik ging nadenken wat die wiskunde nou te maken had met bijvoorbeeld muziek, of poëzie.”

*Liep het conservatorium vloeiend in wiskunde over?*

“Ja, eigenlijk wel. Ik heb lang in Haarlem gewoond, pas zo vanaf mijn twintigste woonde ik in Amsterdam. Toen was ik ook al aan het Conservatorium van Den Haag begonnen. In die tijd was het zo dat een heel groot deel van de compositiestudenten in Amsterdam woonde. We kwamen niet echt in Den Haag. Veel hadden hier les van Louis Andriessen. Ik had ook wel les van hem, maar hij was niet mijn belangrijkste docent. Ik had wel voornamelijk met zijn studenten contact, dat waren mijn vrienden. Dus ik bleef gewoon hier in Amsterdam plakken.

Bij Douglas Hofstadter had ik ook voor het eerst over de componist John Cage gelezen. Nou snapt Hofstadter Cage niet helemaal, vind ik, maar ik vond het wel heel interessant, wat ik las. Hij snapt Cage op een puur conceptueel niveau, maar hij kan moeilijk omgaan met de serieuze artistieke claim die er ook in het gebrek aan patroon zit, dat er ook nog muzikale expressie onder zit. Ik las bij Hofstadter ook voor het eerst over de schrijfster Gertrude Stein. In *Metamagical Themas* heeft hij een enorm stuk gewijd aan betekenisloosheid, aan onzin, en dan stelt hij zich de vraag: waarom is er toch nog verschil aan te wijzen, tussen de ene soort onzin en de andere soort onzin?

Waarom zijn er bepaalde ‘onzinteksten’ — in zijn visie — die op een of andere manier meeslepend zijn, en andere die alleen maar afstotelijk zijn? Hier behandelt hij onder andere een stukje Stein, uit ‘Arthur A Grammar’, en hij merkt op dat het wel een eigen, verfrissend karakter heeft. Zelf vond ik het geweldig. Er begint veel bij Hofstadter: ik las bij hem over Gödel, over Cage, over Stein. Dat ik me in Bach begon te verdiepen, komt daar ook vandaan. Alleen Escher, die heeft me nooit echt gegrepen.”

*Speelt wiskunde ook een rol in je werk als componist?*

“Ik heb heel lang wiskunde echt een beetje vermeden, en dat kwam terug in contact met de componist Tom Johnson. Hij is, vind ik, de man die het meest duidelijk werk maakt waarin de connectie tussen wiskunde en muziek zichtbaar is. Hij zegt altijd, en dat komt een beetje van Cage: ik wil muziek niet bedenken maar vinden. Met zijn werk ging ik echt in dialoog.

Zo heeft hij een stuk dat *The Chord Catalogue* heet: alle twee of meerstemmige akkoorden die je met de noten in een octaaf kan maken. Eerst alle 2-stemmige, dan alle 3-stemmige, dan alle 4-stemmige, enzovoort. Die stukken worden eerst langer, en dan weer korter: het eindigt met alle dertien noten. Ik ben een tijd lang de enige geweest die het serieus nam om als virtuoos concertstuk te spelen. Het is de hele tijd interessant, je blijft dingen horen. Als je de 12-stemmige akkoorden speelt, kun je bijvoorbeeld een dalende lijn horen, terwijl alle stemmen stijgen. Die dalende lijn is een spookmelodie: je hoort steeds die ene noot die niet gespeeld wordt.”

*Ik las een gedicht van jou dat 1512 heet. Daar gebeurt veel met herhaling en willekeur. Hoe is dat experiment begonnen?*

“Dat is ook wel een lange nasleep van Gertrude Stein. Zij heeft een heel mooi essay geschreven, *Poetry and Grammar*. Ze schrijft over de affectieve waarde van bepaalde grammaticale categorieën, van woordsoorten. Als je dat ziet, kun je zien dat ze alle woordsoorten heel bewust gebruikt om een grammaticaal ritme op te bouwen. Het zijn kleine, bewegende machientjes eigenlijk. Ik begon daar zelf

F<sub>6</sub>

(the forcing language)

*Wat zal jullie noemen hebben bewerkt, jullie virtueuze keus  
Uit mijn afgetelde wereld, die jullie schuin en mogelijk doortrekken,  
Barbaarse bende afvalschifters, schijnbaar zonder norm of naam,  
Performance van het ongekenste om een kronkelige leus  
Die onaantoonbaar in alle namen, aller mensen dichte levens ligt te wekken  
En om een nacht van onnoembare getallen vrij te zetten, bijeen  
Te brengen wat zich door geen staat, in niet één stad verzamelen liet, en wat  
Zal jullie naam zijn voor het schandaal dat “alle mensen” niet mocht bestaan?*

Samuel Vriezen

mee door zinnen uit een bepaald vocabulaire in een willekeurige volgorde te zetten.

Best vaak ga ik voor mijn werk op zoek naar getalstructuur. Wat altijd nog wel zo is, is dat getallen voor mij leven. Ik ben heel gevoelig voor of iets een priemgetal is, of een perfect getal is, of iets een piramidaal getal is, of een driehoeksgetal of weet ik veel wat. Een getal is nooit alleen maar een getal, maar ook een enorme potentialiteit aan manieren van onderverdelen.

Hoe ik precies op die 1512 ben gekomen weet ik niet meer, het was iets met 6 en 7. Het gedicht bestaat uit 21 alinea’s van 72 woorden. Elke alinea is gebaseerd op 1, 2, of 4 zinnen van 6 woorden, waarvan de woorden dan herhaald door elkaar staan. Er is een enorm verschil tussen een alinea die gebaseerd is op één sleutelzin of een alinea die op vier verschillende zinnen gebaseerd is. Sommige alinea’s zijn veel monomaner dan andere. Die afwisseling vind ik interessant. Je wordt bij elke nieuwe alinea in een nieuw veld gegooit.”

*Hoe beïnvloedt de wiskunde wat je schrijft?*

“Ik ben dus veel met die getallen bezig, het zijn de krukken waarop ik loop. Dat zijn nog allemaal vrij eenvoudige middelen, natuurlijk. Ik ben bijvoorbeeld aan het schrijven, en op een gegeven moment heb ik dan een aantal gedichten en zie ik: wacht eventjes, deze is acht strofen, deze heeft vijf strofen, dat zijn Fibonacci-getallen! Dat kan een reeks worden van korter wordende gedichten. En die exponentieel korter wordende werking, als je al die gedichten achter elkaar leest, dat werkt heel sterk. Dat weet ik natuurlijk ook, componisten doen dit soort dingen altijd.

Ik ben nu ook weer over verzamelingenleer aan het lezen: *Set Theory* van Thomas Jech, en *The Higher Infinite* van Akihiro Kanamori. Waar het voor mij om gaat, is dat het onderzoekt wat je eigenlijk kunt zeggen. Het is een theorie van de openheid en van de meervoudigheid, van mogelijke mathematische universa.

Dat wil ik dan via een soort achterdeur importeren in gedichten. Ik kan geen wiskunde in een gedicht toepassen. Wat wel bestaat is dat je kijkt naar al die gedachten en constructies en dat je die als richtingwijzer gebruikt. Of die wiskunde ook echt betrekking heeft op onze wereld, dat is de gok. Het is ook de vraag bij de filosoof Badiou, waar ik veel mee bezig ben geweest, die bijvoorbeeld zegt dat politiek militant zijn hetzelfde is als verzamelingtheoretische forcing. Ik vind dat een geweldig stimulerend idee, maar toch ga ik nu niet naar een of ander club communisten of Extinction Rebellion om te zeggen: jongens, we moeten allemaal het onderzoek van Paul Cohen lezen!

Waar je in heel veel filosofie of andere vormen van theorie alleen pleidooien aantreft voor het ‘openen’ of ‘openhouden’, zijn de wiskundigen die zich de vragen stellen over bijvoorbeeld de consistentie van de hogere oneindigheden, daar volgens mij op een concrete manier mee bezig zijn. Dat vind ik er heel aantrekkelijk aan.”

Verder lezen? Vriezens essaybundel *Netwerk in Eclips* verscheen in 2016 bij de Wereldbibliotheek. Verder luisteren? Vriezens pianostuk *Within Fourths/Within Fifths* is te vinden op YouTube. Het stuk *What Happened*, met tekst van Gertrude Stein, staat op SoundCloud.

Goede suggesties voor een Nederlandse wiskundige met een keerpunt in zijn of haar carrière zijn welkom via [keerpunt@nieuwarchief.nl](mailto:keerpunt@nieuwarchief.nl).

Jaap Spies

Emmen

jaapspies@home.nl

## Research

# A formula for the permanent

In January 2003, Jaap Spies found a solution to ‘Problem 29’ of the old NAW Problem Section. The solution was the permanent of a square matrix. Moments later, he discovered an algorithm for the calculation of the permanent with basic algebraic means.

Permanent? Yes, permanents are a long time with us. And as the name suggests they will stay. In 1812 permanents were introduced independently by Binet and Cauchy writing about ‘certain functions permanentes’. See Minc [5] for a complete history up to 1978. Most people know the permanent from a conjecture (now theorem) of Van der Waerden (1926) about double stochastic matrices, but permanents have a broad range of applications: counting problems in combinatorics, in graph theory the number of perfect matches can be calculated by means of the permanent of an incidence matrix, applications in statistics, even in chemistry and many many more. See [3, 5].

The permanent of an  $m \times n$  matrix  $A$  with  $m \leq n$  is defined by

$$\text{per}(A) = \sum_{\pi} a_{1\pi(1)} a_{2\pi(2)} \cdots a_{m\pi(m)}, \quad (1)$$

where the summation extends over all one-to-one functions  $\pi$  from  $\{1, \dots, m\}$  to  $\{1, \dots, n\}$ . In case  $A$  is a square matrix, we get the well-known formula for a permanent, which is like the determinant but without the signs as the sum of all  $n!$  diagonal products.

### A hard problem

Binet gave algorithms for  $m = 2, 3$  and 4. There are general algorithms by Binet/Minc and Ryser. See [3, 5]. For square matrices there are a few published algorithms other

than Ryser’s, based on the finding of a certain coefficient of a certain term in a certain polynomial. K. Balasubramanian [1] uses Muir-algebra in his 1980-thesis. Bax and Franklin [2] use ‘finite differences’ to come to a formula. David Glynn [4] finds the formula [4, Theorem 2.1]:

$$\text{per}(A) = \frac{\left[ \sum_{\delta} \left( \prod_{k=1}^n \delta_k \right) \prod_{j=1}^n \sum_{i=1}^n \delta_i a_{ij} \right]}{2^{n-1}},$$

where the outer sum is over all  $2^{n-1}$  vectors  $\delta = (\delta_1 = 1, \delta_2, \dots, \delta_n) \in \{\pm 1\}^n$ .

### An elementary approach

We define a vector  $\bar{x} = (x_1, x_2, \dots, x_n)^T$  and a vector  $\bar{y}$  with  $\bar{y} = A\bar{x}$ . Let  $P$  be a multivariate polynomial defined by

$$P(x_1, x_2, \dots, x_n) = \prod_{i=1}^n y_i = \prod_{i=1}^n \sum_{j=1}^n a_{ij} x_j. \quad (2)$$

All terms of  $P$  have degree  $n$ . Expanding this polynomial and summing the terms with  $x_1 x_2 \dots x_n$  we get a well known result

$$\begin{aligned} & \sum_{\pi} a_{1\pi(1)} x_{\pi(1)} \cdot a_{2\pi(2)} x_{\pi(2)} \cdots a_{n\pi(n)} x_{\pi(n)} \\ &= \left( \sum_{\pi} a_{1\pi(1)} a_{2\pi(2)} \cdots a_{n\pi(n)} \right) \cdot x_1 x_2 \cdots x_n \\ &= \text{per}(A) \cdot x_1 x_2 \cdots x_n. \end{aligned}$$

### A theorem

First we define a polynomial  $Q$  of degree  $2n$ :

$$Q(x_1, x_2, \dots, x_n) = \left( \prod_{i=1}^n x_i \right) \cdot P(x_1, x_2, \dots, x_n). \quad (3)$$

**Theorem.** The permanent of  $A$  is

$$\text{per}(A) = \frac{\sum_{x_i = \pm 1, x_j = \pm 1, j > 1} \prod_{i=1}^n x_i \prod_{j=1}^n \sum_{i=1}^n a_{ij} x_j}{2^{n-1}}. \quad (4)$$

*Proof.* We sum  $Q(x_1, x_2, \dots, x_n)$  over all possible  $x_i = \pm 1$ .

$$\begin{aligned} & \sum_{x_i = \pm 1} Q(x_1, x_2, \dots, x_n) \\ &= \sum_{x_i = \pm 1} (x_1 x_2 \dots x_n) P(x_1, x_2, \dots, x_n). \end{aligned}$$

As we can easily see only the term  $\text{per}(A) \cdot x_1 x_2 \dots x_n$  is always contributing to this sum because  $x_i^2 = 1$  for  $i = 1, 2, \dots, n$ . Terms of  $Q(x_1, x_2, \dots, x_n)$  with factor  $x_k$  missing in  $P(x_1, x_2, \dots, x_n)$ , are counted once  $t$  and once  $-t$  so the overall result is 0. There are  $2^n$  possible vectors  $\bar{x}$  with  $x_i = \pm 1$ , so we have proved:

$$\text{per}(A) = 2^{-n} \cdot \sum_{x_i = \pm 1} Q(x_1, x_2, \dots, x_n).$$

By symmetry we can simplify this result by fixing  $x_1 = 1$

$$\text{per}(A) = 2^{-n+1} \cdot \sum_{x_1=1, x_j=\pm 1, j>1} Q(x_1, x_2, \dots, x_n). \quad \square$$

It is easy to see that formula (4) is essentially the same as Glynn’s. A preliminary form of formula (4) was first published in 2006 as a sidenote in [7]. The formula fits in the series from Balasubramanian [1], Bax-Franklin [2] to Glynn [4] as described in the Wikipedia page ‘Computing the permanent’ [8].

## References

- 1 K. Balasubramanian, *Combinatorics and Diagonals of Matrices*, PhD dissertation, Indian Statistical Institute, Calcutta, 1980.
- 2 E. Bax, J. Franklin, *A Finite-Difference sieve to Compute the Permanent*, Tech. Rept. Caltech-CS-TR96-04, California Institute of Technology, 1996.
- 3 R.A. Brualdi, H.J. Ryser, *Combinatorial Matrix Theory*, Cambridge University Press, 1991.
- 4 D. Glynn, The permanent of a square matrix, *European Journal of Combinatorics* 31(7) (2010), 1887–1891.
- 5 H. Minc, *Permanents*, Addison-Wesley, 1978.
- 6 J. Spies, Private communication with professor Richard Brualdi. See [www.jaapspies.nl/mathfiles/permanents](http://www.jaapspies.nl/mathfiles/permanents).
- 7 J. Spies, The Dancing School Problems. A permanent solution of Problem 29, *NAW* 5/7(4) (2006), 283–285.
- 8 Computing the permanent, [en.wikipedia.org/wiki/Computing\\_the\\_permanent](http://en.wikipedia.org/wiki/Computing_the_permanent), 2019.

Nicolaos Starreveld

FNWI

Universiteit van Amsterdam

n.j.starreveld@uva.nl

Interview Onno Boxma

# Van wachtrij tot Wiskunderaad

Prof.dr.ir. Onno Boxma, emeritus hoogleraar stochastische besliskunde aan de Technische Universiteit Eindhoven, heeft naast zijn wetenschappelijke carrière ook veel bestuurlijke functies vervuld. Op vrijdag 11 oktober 2019 interviewde onze redacteur Nicos Starreveld professor Boxma over zowel zijn wetenschappelijk werk als zijn bestuurswerk.

Op vrijdag 11 oktober was ik naar Eindhoven gegaan voor een interview met Onno Boxma. Ik was rond 10.00 uur in Eurandom aangekomen. We hadden om 11.00 uur afgesproken, dus ik had nog een beetje tijd om mijn aantekeningen door te nemen. Ik zat aan de lange lunchtafel in de open ruimte en toen het bijna tijd was zag ik Onno, we begroetten elkaar en we liepen samen naar zijn kamer. Onno is bekend onder zijn collega's voor zijn toegankelijkheid en openheid, dus voor dit interview hebben we afgesproken elkaar te tutoyeren. Als je zijn kamer binnenloopt zie je meteen op de muur een bijzonder kunstwerk hangen, een Galton-bord. Een cadeau dat hij van zijn vader kreeg, die het ook ooit als cadeau van zijn leermeester professor Johan van Soest had gekregen. Hun handtekeningen staan op de achterkant van het bord, als herinnering aan de generaties die het in bezit hadden.

## Korte biografie

Onno Boxma, geboren in Den Haag in 1952, heeft wiskunde gestudeerd in Delft.

Hij promoveerde in 1974 cum laude op zijn proefschrift getiteld *Analysis of Models for Tandem Queues* onder de begeleiding van prof.dr.ir. Wim Cohen. Vervolgens ging hij



Onno Boxma

naar IBM voor een postdoc-positie. Na zijn postdoc kwam hij terug in Nederland en sindsdien heeft hij bij verschillende instituten en universiteiten gezeten; bij de universiteit Utrecht als medewerker van Cohen, bij het CWI en de universiteit Tilburg als hoogleraar stochastische besliskunde. In 1998 is hij naar de Technische Universiteit Eindhoven verhuisd waar hij tot vandaag de dag hoogleraar stochastische besliskunde is, sinds 2017 als emeritus. Zijn expertisegebied ligt bij de kansrekening en de stochastische besliskunde, vooral de wachtrijtheorie.

Gedurende de afgelopen dertig jaar is Onno Boxma lid geweest van tal van strategische adviescommissies, voor de Koninklijke Nederlandse Akademie van Wetenschappen (KNAW), de Nederlandse Organisatie voor Wetenschappelijk Onderzoek (NWO) en de Nederlandse universiteiten. Recentelijk is hij ook voorzitter geweest van de Onderwijsvisitatiecommissie. Hij heeft hiermee de Nederlandse wiskunde enorm vooruit geholpen, zo weten zijn collega's. Voor zijn bijdragen aan de Nederlandse wiskunde is Onno Boxma op 26 april 2019 benoemd tot Ridder in de Orde van de Nederlandse Leeuw. Hij ontving ook twee eredoctoraten en twee lifetime achievement awards.

## Op zoek naar een balans

*Onno, ik vind het altijd interessant om te horen hoe iemand de wiskunde heeft ontdekt. Wist je al op jonge leeftijd dat je iets met wiskunde wilde doen?*

“Ik denk dat ik als kind op de lagere en middelbare school al het gevoel had dat ik ooit iets met wiskunde zou willen doen. Ik wilde ook graag iets nuttigs doen met wiskunde, daarom heb ik uiteindelijk besloten om in Delft te gaan studeren. Er was in die tijd, in 1969, nog geen eerste jaar wiskunde, dus ik heb het eerste jaar elektrotechniek gedaan maar wel met de overtuiging dat het daarna wiskunde zou worden. In Delft heb ik eerst bij de afstudeerrichting getwijfeld tussen analyse en stochastiek. Ik had een college van Timman bijgewoond wat heel indrukwekkend was, en die groep verzorgde ook een vak dat heette ‘Technische toepassing van analyse’, dat is eigenlijk wat we nu een modelleervak zouden noemen, waar je met een groep studenten modelleerprojecten deed. Uiteindelijk vond ik stochastiek nog mooier omdat je daar alle analyse op los kon laten maar dan nog met een sausje eroverheen van de kansrekening: technieken, redeneringen en intuïtie. Ik vond deze combinatie heel mooi.

Na mijn kandidaats, wat nu bachelors zou heten, heb ik ook getwijfeld tussen drie richtingen; statistiek, kansrekening en stochastische besliskunde. Ik wist het echt niet; de statistiekhoogleraar had heel mooie colleges gegeven maar werd al snel ziek. Hij was een heel aardige, toegankelijke man. Ik ben dus naar hem gegaan en gezegd dat ik nog niet wist wat ik wilde. In het vierde jaar moest je een kleine scriptie doen, dus hij stelde voor om er drie te doen in plaats van één, in elk van die gebieden één. En hij regelde het met de andere twee hoogleraren.”

## Een invloedrijke ontmoeting

Van 1957 tot 1973 was Wim Cohen hoogleraar Toegepaste Wiskunde aan de universiteit van Delft. Onno had hem tijdens zijn studie leren kennen, een ontmoeting die een grote invloed heeft gehad op Onno's carrière.

*Was het in deze tijd dat je Wim Cohen had ontmoet?*

“Ja, in het vierde jaar heb ik toen drie kleine scripties gedaan, de statistiek en de kansrekening hoogleraren gaven me een



Het Galton-bord op de werkamer van Onno Boxma

literatuurstudie, en de derde, van stochastische besliskunde, was Cohen. Ik kende hem van een paar colleges als een nogal vormelijke man. Altijd college in pak met vest en hij sprak de studenten erg van afstand toe, maar hij ging mij voor het bord na een college op een middag even uitleggen waar hij aan dacht voor de kleine scriptie. Het was een probleem waar hij zelf in geïnteresseerd was en hij begon na te denken waar ik bij stond, en hij vergistte zich, heel druk aan zijn pijp trekkend, dat kon toen nog! En hij kwam helemaal tot leven! Het was voor mij een bepalend moment, voor het eerst dat ik met onderzoek in aanraking kwam, het was zo fascinerend. Ik heb toen de kleine scripties afgemaakt en op een gegeven moment zei ik dat ik graag bij hem zou willen afstuderen. Er was wel een klein probleem, want Cohen zou in september naar Utrecht gaan. Hij stelde voor dat ik twee dagen in de week als student-assistent zou werken in Utrecht en op die dagen konden we dan praten over mijn afstudeerwerk.”

*Was ook je afstudeerwerk in de stochastische besliskunde?*

“Mijn afstudeerwerk ging over wat nu Lévy-processen zou heten in de wachtrijtheorie, maar die term werd toen nog niet gebruikt. Dat is ook mijn eerste artikel geworden. Dat onderzoek vond ik ontzettend leuk; toen zei Cohen dat ik promovendus kon worden in Utrecht en dat heb ik ook gedaan. Wat voor mij heel erg waardevol was, was dat hij af en toe een klankbord

prettig vond, maar dat kwam er op neer dat hij bijna elke week ook vertelde aan mij waar hij mee bezig was. Hij ging voor het bord staan op zijn kamer, hij legde uit waar hij die week over na had gedacht en ik zag hoe hij steeds een beetje verder kwam met artikelen. Hij was een bulldozer die nooit op gaf en steeds verder peuterde aan een probleem. Ik zag toen een paar verhalen ontstaan die later klassiekers zijn geworden.”

## Van Utrecht naar IBM

*En hoe ging het met je eigen onderzoek?*

“In die tijd was er minder de neiging om gezamenlijk te schrijven, dus hij was geen coauteur van mijn artikelen uit mijn proefschrift en ik was geen coauteur van zijn artikelen. Wat een beetje apart was, is dat hij me zei dat ik wat ik aan het doen was tijdens mijn promotie niet moest publiceren totdat mijn proefschrift naar de drukker was, wat achteraf gezien een beetje riskant was. Na het eerste anderhalf jaar stuitte ik bij toeval op een probleem van twee wachtrijen in serie, ik wilde daar een diffusiebenadering op loslaten, maar ik ging eerst proberen om iets exact te doen. Het model was van twee wachtrijen in serie met de bijzondere eigenschap dat elke klant precies dezelfde hoeveelheid werk had in de eerste en de tweede wachtrij. En dit was heel relevant in bepaalde communicatiesystemen waar een bericht dezelfde hoeveelheid bits heeft in het eerste kanaal en het volgende kanaal. Ik wist helemaal niet dat dat een onopgelost probleem was van Kleinrock. In oktober van 1975 werd mij duidelijk hoe de analyse zou moeten. Ik had toevallig net de goede invalshoek te pakken. Daarna heb ik allerlei uitbreidingen gedaan en ik schreef mijn proefschrift hierover. Het was een mengeling van kansrekening en complexe functietheorie.”

*Je was dus bijna klaar met je proefschrift en ik neem aan ook bezig met wat de vervolgstap zou zijn. Dat is altijd een moeilijke beslissing. Wat waren je plannen voor na je promotie?*

“Tegen de tijd dat ik zou promoveren, ontmoetten Kleinrock en Kobayashi, die toen hoofd van de Computer Science Research afdeling van IBM in Yorktown Heights (VS) was, toevallig Cohen. En Cohen vertelde van mijn proefschrift dat bijna klaar was. Toen vertelde Kobayashi dat bij IBM



postdoc-plaatsen waren. En Kleinrock zei dat hij een aanbevelingsbrief wilde schrijven, dat heeft ongetwijfeld erg geholpen om die postdoc-plaats te krijgen. Dus toen ging ik een jaar naar IBM, dat paste ook eigenlijk nog steeds bij dat idee van mij dat ik iets nuttigs wilde doen met wat ik geleerd had. Ik had het idee dat ik misschien wel naar een onderzoekslaboratorium wilde gaan na mijn promotie, dus ik had in ieder geval een jaar om zeker te weten of ik de academische wereld leuker zou vinden.”

*Je hebt na je postdoc bij IBM besloten om terug te komen naar de academische wereld, je begon als medewerker van Cohen in Utrecht. Gingen jullie toen vooral samenwerken of koos je voor een ander onderzoekspad?*

“Ik had bij IBM een heel goede tijd gehad maar inderdaad besloot ik om terug te komen, ik had een positie in Utrecht aangeboden gekregen. Toen ik terugkwam, als enige medewerker van Cohen, was hij inmiddels gegrepen door een techniek van Fayolle en Iasnogorodski. Hij moest in een dubbele-promotiecommissie zitten van Fayolle en Iasnogorodski. Iasnogorodski had uit Rusland kennis meegebracht van een techniek uit de analyse; Fayolle was een kansrekenaar, die combinatie bleek ook heel erg sterk. Wat ze eigenlijk deden was kijken naar bepaalde tweedimensionale problemen in de kansrekening, namelijk random walks in het eerste kwadrant. Deze zie je heel vaak in de wachtrijtheorie, bijvoorbeeld een model met twee rijen en de klanten kiezen de kortste rij, of zoals in mijn proefschrift twee rijen in serie. Deze stap van één naar twee dimensies is steeds heel moeilijk. Zij hadden een techniek die ze begonnen te ontwikkelen waarbij ze eigenlijk het probleem uit de kansrekening vertaalden, door middel van complexe functietheorie, naar een probleem uit de analyse, een zogenoemd Riemann–Hilbert-randwaardeprobleem. Het komt er eigenlijk op neer dat je op een contour een bepaalde functie kent en weet dat de functie binnen de contour analytisch is, en op grond van die kennis probeer je de functie te bepalen. Cohen was daar helemaal door gegrepen en had er al twee jaar lang bijna dag en nacht aan gewerkt, en hij wilde mij daar graag bij betrekken. We hebben hierover ook samen een boek geschreven waarin hij duidelijk de leiding had. Dat boek kwam

in 1983 uit met als titel *Boundary Value Problems in Queueing System Analysis*.”

*Je zei dat professor Cohen gefascineerd was door deze nieuwe techniek, hoe keek jij ernaar?*

“Cohen wilde dus doorgaan met deze techniek, het is een heel weerbarstige theorie, het was duidelijk dat er heel veel te doen was. Maar ik liep daar minder warm voor, om een paar redenen. Eén was dat ik het heel moeilijk vond, je moest zo diep in de complexe functietheorie, dat was een zo enorme tijdsinvestering terwijl ik allerlei andere problemen zag die ik ook leuk vond en waar ik ook aan wilde werken. Een andere reden was dat uiteindelijk, als je succesvol was, je bijvoorbeeld de gemiddelde wachttijd kreeg in termen van een singuliere integraal. En er zat nog een conforme afbeelding, van bijvoorbeeld een ellips op een cirkel bij het kortste-rij-probleem, tussen. Ik vond altijd juist intuïtie leuk, dat je achteraf kan zien dat je een formule helemaal begrijpt. En dat miste ik bij deze randwaardeproblemen, zo’n formule had niet een directe interpretatie. Toen heeft Cohen uiteindelijk in zijn een-tje nog een tweede boek geschreven wat relatief weinig mensen kennen, omdat hij er een onbekende uitgeverij bij had betrokken. Dat was van zijn kant vooral loyaliteit denk ik jegens een vriend die zijn magnum opus, *The Single Server Queue*, bij North-Holland (Elsevier) al had begeleid. Die man was begonnen met een kleine eigen uitgeverij en Cohen heeft dat boek toen daar ook uitgegeven in 1992. Hij heeft het boek aan mij opgedragen wat ik beschouw als misschien wel de hoogste eer die mij is toegevalen.”

*Er waren veel andere problemen die bij jou op de radar stonden, welke problemen waren dat?*

“Na mijn onderzoek in randwaardeproblemen werd ik gegrepen door gesloten netwerken van wachtrijen en door polling modellen. In een polling model is er één server, die gaat allerlei rijen langs en bedient die rijen één voor één. In 1984 was ik voor een korte tijd bij het IBM-laboratorium in Zürich, daar heb ik Bernd Meister ontmoet en hij vertelde mij over het *Token Ring*-protocol waar hij aan moest werken bij IBM, dat belangrijk was voor *local area networks*. De prestatieanalyse van die local area networks was in feite de analyse van



Wim Cohen

polling. Dus toen begon ik aan polling modellen te werken.

Een ander onderwerp dat plotseling opkwam in het midden van de jaren negentig ging over zwaarstaartige verdelingen in de wachtrijtheorie. Het was Walter Willinger, hij werkte toen bij Bellcore, die metingen ging doen aan hun eigen intranet en constateerde dat allerlei verkeer helemaal niet exponentieel verdeelde bestandsgroottes had, maar dat het eigenlijk zwaarstaartig was. Ik werd toen door dat onderwerp gegrepen omdat ik als student-assistent van Cohen een verhaal van hem had gezien dat hij had gepubliceerd in 1973 over reguliere variatie in de wachtrijtheorie. Ik had dat verhaal onthouden en toen dit gebied opkwam dacht ik dat die theorie van Cohen hier op toepasbaar is.

Door de jaren heen heb ik veel ups en downs van de wachtrijtheorie gezien, er waren momenten dat men verklaarde dat de wachtrijtheorie een beetje dood was, maar er kwam elke keer weer een nieuwe interessante vraag, meestal uit de praktijk. Zo krijgt wachtrijtheorie elke keer een nieuwe impuls. Een voorbeeld is de theorie van productvormen, waar ik overigens nagenoeg niets aan heb bijgedragen. Ik zat bij IBM als postdoc toen daar bij de afdeling van Kobayashi mensen begonnen te werken aan productvormen, getriggerd door vragen van IBM dat computernetwerken ging bouwen.

Je zou de opkomst van kunstmatige intelligentie als bedreiging kunnen zien voor

de wachtrijtheorie, maar ik denk dat het ook een belangrijke nieuwe richting in de wachtrijtheorie zal worden. Ik verwacht een sterkere vermenging van het gebruik van data, statistische analyse, het schatten van parameters en vervolgens het koppelen aan analyse en optimalisering. Eigenlijk is het een zwak punt van de wachtrijtheorie dat ze te weinig aandacht heeft geschonken aan statistische aspecten. Ik denk ook dat het beter behandelen van grote netwerken van wachtrijen veel aandacht zal krijgen in de komende jaren.”

### Het CWI, Eurandom en de Wiskunderaad

Onno Boxma heeft ook tamelijk veel bestuurlijke functies vervuld. Van 1985 tot 1998 werkte Onno bij het Centrum Wiskunde & Informatica (CWI) in Amsterdam. Hij was uitgenodigd door Jan Karel Lenstra om een groep ‘Prestatie Analyse’ op te richten en later werd hij hoofd van de afdeling Besliskunde en Systeemtheorie. In 1998 is Onno verhuisd naar de Technische Universiteit Eindhoven als hoogleraar stochastische besliskunde. Van 2005 tot 2011 was hij wetenschappelijk directeur van Eurandom en van 2009 tot 2013 ook vice-decaan in Eindhoven.

### Een nieuw begin bij het CWI

“Laat ik eerst zeggen dat ik naar het CWI werd gehaald door Jan Karel Lenstra met de vraag om een groepje prestatieanalyse van computer en communicatiesystemen op te zetten. En daar was helemaal niemand, dus ik zou in een lege groep komen. Ik vond die uitdaging heel mooi maar aarzelde; ik heb toen advies gevraagd aan Jaap Wessels, die ik nauwelijks kende maar ik had het gevoel dat hij een objectief advies zou geven. Het was ook een heel wijze man en een strategisch denker. Wessels zei tegen mij: je moet geen seconde nadenken, je moet voor jezelf beginnen op het CWI. Het was eerst een heel klein groepje, ik alleen, twee afstudeerders uit Utrecht kwamen mee, dat waren Hans van den Berg en Wim Groenendijk. Een paar jaar later gingen Jan Karel en ook het hoofd van de statistiek afdeling, Richard Gill, allebei weg. Het CWI wilde de statistiek-, kansrekening-, besliskunde- en systeemtheorie-groepen samenvoegen tot één afdeling. Toen adviseerde Jan Karel mij te solliciteren naar de functie van hoofd van de nieuwe afdeling. Ik heb dit dus tot 1998 gedaan, ik had toen overigens al wel het plan om daarmee te stop-

pen. Voordat ik weg ging van het CWI had ik al intern gezegd dat ik eigenlijk wilde stoppen met het leiden van de afdeling, omdat ik het voor iedereen, mijzelf maar ook het instituut, gezond vond als iemand het niet te lang achter elkaar doet. Toen kwam Eindhoven langs en heb ik de stap naar Eindhoven gemaakt.”

### De stap naar Eurandom

“Mijn directeurschap bij Eurandom begon in 2005 en dat is eigenlijk het moeilijkste en leukste dat ik ooit gedaan heb. Het leukste in de zin dat Eurandom een fantastisch instituut was, en dat kwam omdat het iets nieuws was, het was echt sprankelend en Willem van Zwet had als de oprichtingsdirecteur ervoor gezorgd dat er een fantastische ondersteunende staf zat. Die mensen hadden zoveel hart voor het instituut, voor de postdocs en de promovendi, ze maakten overal een speciale gelegenheid van, bij verjaardagen, bij succesjes en ze zorgden op een heel warme manier voor de buitenlanders. Dus er heerste een fantastische sfeer en er waren heel veel getalenteerde mensen. Daarnaast kopieerde Eurandom in zekere zin iets wat ik bij het CWI heel goed vond. Namelijk, senior CWI-onderzoekers zijn vaak een dag in de week aangesteld in een ander instituut in Nederland, en vaak was daar dan als ruil iemand van die universiteit een dag in de week op het CWI. Dat heb ik ook toen ik bij het CWI weg ging nog heel lang gedaan, dat ik een dag in de week naar het CWI ging, en dat Sem Borst van het CWI hier kwam. Eurandom had ook veel wetenschappelijke adviseurs die één dag in de week kwamen. Dat heeft een enorm sterke basis gegeven en veel goeds gedaan voor de Nederlandse stochastiek.

Wat moeilijk was, was de financiering. Al voordat ik begon als opvolger van Frank den Hollander, gingen Frank en ik samen op bezoek bij NWO, en NWO zei dat de subsidie van OCW een startsubsidie was en dat dit eenmalig was. Eurandom zou zelf financiering uit Brussel moeten regelen. Dus tijdens mijn directeurschap heb ik veel moeite gedaan om uit allerlei hoeken en gaten geld te krijgen. De TU Eindhoven heeft heel erg geholpen. Maar toen ben ik op een gegeven moment gaan werken aan het opzetten van een stochastiekcluster, we hebben toen met Frank den Hollander, Chris Klaassen, Rob van der Mei en Aad van der Vaart heel constructief samenge-

werkt en zijn op een moment gewoon begonnen zonder dat er geld was. Gelukkig kwam dat geld vervolgens vrij snel.

Aan het eind van mijn vice-decanaat heb ik ook geprobeerd om een aanvraag voor Zwaartekracht te bevorderen, met eigenlijk ook in mijn achterhoofd: ik wil dat wat toen gecreëerd is bij Eurandom in stand houden. Den Hollander en van der Hofstad zaten er ook zo in. Onze decaan Arjeh Cohen steunde krachtig dat wij daar een aanvraag gingen indienen. In 2013 werd die aanvraag ingediend en beoordeeld en dat speelde eigenlijk in de laatste maand van mijn vice-decanaat en de periode daarna. Op 11/12/13 vierden we het vijftienjarig bestaan van Eurandom met een lezingenmiddag. Om 14.15 uur kwam een e-mail binnen van de hoofdaanvrager van het Zwaartekrachtvoorstel NETWORKS, Michel Mandjes, vanuit New York, dat het Zwaartekracht-project was goedgekeurd. Dat was een bijzondere middag, ook al omdat het nieuws onder embargo was.”

### NWO Gebiedsbestuur en de Wiskunderaad

“NWO Gebiedsbestuur en de Wiskunderaad zijn twee dingen waar ik ook met heel veel plezier op terugkijk. Bij NWO heb ik een aantal jaar in het gebiedsbestuur gezeten als vertegenwoordiger van de wiskunde. Toen ik daar kwam was de voorzitter Hans van Eekelen, die maakte ook direct duidelijk, met de manier waarop hij zich opstelde, dat we daar zaten voor het hele vakgebied; we moesten daar niet zitten voor Eindhoven of voor de wiskunde alleen. Hij hamerde altijd ook op de ethiek en integriteit in de wetenschap en dat sprak me heel erg aan. Dat heb ik eigenlijk op bestuurlijk gebied een van de mooiste taken gevonden.

Ook de Wiskunderaad had een voorzitter die ik heel hoog heb zitten: Frank van der Duijn Schouten. De Wiskunderaad werd een paar jaar geleden opgericht met als taak het Deltaplan voor de wiskunde te helpen realiseren. Het was een heel mooi plan, maar er kwam geen geld. Binnen de Wiskunderaad kwamen we tot de conclusie dat het goed zou zijn de mogelijkheid te onderzoeken, om samen te werken met de Raad voor Natuur- en Scheikunde. Karin Aardal, Petra de Bont van NWO en ik zijn gaan praten met hun vicevoorzitter Bert Meijer (een Eindhovense collega) en Jos Benschop van ASML. Het was een enorm constructief gesprek waarin bleek

dat zij soortgelijke zorgen en belangen hadden als wij. Zij waren onder de indruk van de organisatiegraad van de wiskunde, met Mastermath en de wiskundecusters, en vonden het een goed idee samen op te trekken. Frank van der Duijn Schouten heeft vervolgens samen met Bert Meijer en Robbert Dijkgraaf (voorzitter van de Raad voor Natuur- en Scheikunde) diverse bezoeken gebracht aan OCW, en daar zijn de sectorplannen uit voortgekomen. Mijn eigen rol daarin was klein, maar ik kijk met plezier naar het werk in de Wiskunderaad en ben blij dat er substantieel extra geld voor de wiskunde is gekomen.

Ik noemde net Mastermath. Ik prijs me gelukkig dat ik mijn loopbaan heb gehad in een tijd waarin we zulke instellingen in Nederland hebben als CWI, Eurandom, LNMB, Mastermath en de wiskundecusters. Zeker de stochastiek en de besiskunde hebben echt een bloeiperiode meegemaakt, met heel veel talentvolle jonge onderzoekers, en die instellingen hebben daar een grote rol in gespeeld."

### Ook een warme onderwijzer

*Naast je onderzoek hebt je ongetwijfeld veel tijd besteed aan het onderwijs, het geven van colleges en het begeleiden van studenten en van promovendi. Wat vind je het leukste in het onderwijs?*

"Twee dingen: college geven, voor wiskundestudenten maar ook voor anderen, en het een-op-een begeleiden van studenten en promovendi. Waarschijnlijk vind ik dat laatste nog leuker dan klassikaal college geven. Maar college heb ik altijd met veel plezier gegeven, de eerste keer was in 1975 in Utrecht. Cohen ging elk jaar voor een paar weken naar Israël om te werken, en omdat er geen andere persoon in de groep was mocht ik zijn college geven. Ik vond het fantastisch om te doen, ik probeerde het heel gedegen voor te bereiden. Ik mis het lesgeven maar niet de tentamens. Dan

zat ik zelf in de zaal als studenten tentamen deden en zag ik mensen al snel weg gaan, en dacht dat ik er niet in geslaagd was om hen voldoende te motiveren en te activeren. Een belangrijk aspect van het onderwijs is toch de studenten activeren, dat ze het leuk gaan vinden en uiteindelijk ook hard gaan werken."

### *Hoe kan een docent studenten motiveren?*

"Met een-op-eenbegeleiding heb je dat in de hand omdat je de directe reacties van de persoon ziet, je kunt ter plekke bijstellen. In een collegezaal vond ik dat moeilijker, de vragen komen vaak van de beste studenten, maar ik probeerde me toch vaak te richten op de gemiddelde studenten en het college toegankelijker te maken. Ik wilde proberen dat de groep het goede overzicht had en de beste studenten motiveren met wat moeilijker vragen tussendoor. Maar zelfs na bijna 45 jaar klassikaal lesgeven weet ik nog steeds niet goed wat het beste is. Bijvoorbeeld achteraf terugdenkend heb ik het meest geleerd van het vak met de slechtste docent. Er was een vak in Delft met een docent die het niet altijd snapte en soms niet goed voorbereid was, dus ik moest het helemaal zelf uitzoeken. Maar er waren ook docenten die buitengewoon helder waren zodat veel studenten dachten dat het vak makkelijk was en uiteindelijk bij het tentamen voor het vak zakten. Zo'n geweldige docent die het zo mooi en helder uit kon leggen, slaagde er toch niet altijd in om iedereen te laten beseffen dat ze moesten werken."

### *Begeleiding van studenten*

"Ik vind het een-op-een begeleiden van studenten en promovendi het allerleukste deel van het vak. Ik heb vaak geprobeerd te imiteren wat Cohen met mij deed, om gewoon hardop te gaan nadenken en ik hoefde niet eens moeite te doen om vast te lopen, zoals Cohen ook vastliep. Dan is het eigenlijk het mooiste als de promovendus

of de student op een gegeven moment met een cruciale opmerking komt. Een verkeerde opmerking van de student of van mij kan daarbij ook goed helpen omdat de voor de hand liggende redeneringen meestal al door iemand geprobeerd zijn. Ik had denk ik als nadeel dat ik betrekkelijk rechtlijnig redeneer, en het is af en toe handig om om een hoekje te denken. Ik probeer ook af en toe mijzelf daartoe te dwingen. Ik vond het altijd leuk om te zien bij de mensen met wie ik samenwerkte, hoeveel verschillen er zijn die allemaal leiden tot uiteindelijk succesvolle onderzoekers. Bij mijn beste promovendi (en ik heb erg geboft met een fors aantal heel getalenteerde promovendi) zijn er mensen met een fenomenaal geheugen, zijn er mensen die fantastisch strak kunnen redeneren, en ook mensen die heel goed gekke paardensprongen kunnen maken en plotseling met een rare associatie kwamen. Er zijn dus veel wegen die naar Rome leiden in het onderzoek."

*Om af te sluiten, met een wat meer persoonlijke vraag, je bent ook redacteur in een wijkblad, 'Panakkers nieuws'. Hoe is dat gekomen?*

"Op een gegeven moment moedigde de gemeente Nuenen wijken aan om meer cohesie te vertonen. Toen was er een bijeenkomst en ik ging ernaartoe, en toen werd er gevraagd: wie wil wat doen? En ik wilde best iets doen, bijvoorbeeld boodschappen halen voor iemand die dat niet zelf kon doen. Maar toen werd ook gezegd dat ze een wijkblaadje wilden beginnen, en ik was wel eens redacteur van het tennisblad van onze tennisvereniging geweest. Toen dacht ik dat ik in dit wijkblaadje kon schrijven. Voor dit wijkblad heb ik bijvoorbeeld mijn hond geïnterviewd, ik schrijf ook serieuze verhalen, van alles wat. Het schrijven is een hobby en juist omdat we binnen ons vak heel veel beperkende kaders hebben vind ik het leuk om af en toe andere dingen te schrijven."

Robbert Fokkink

*Delft Institute of Applied Mathematics*  
 TU Delft  
 r.j.fokkink@tudelft.nl

**Stoffelijke resten** tastbare herinneringen aan wiskundigen

# Weense wandeling

We beginnen onze wandeling bij de Strudlhofstiege, het centrale decor in een roman van de Weense schrijver Heimito von Doderer, een hoogtepunt van de Oostenrijkse literatuur.



Helemaal bovenaan de trap begint de Strudlhofgasse, waar ooit de wiskundefaculteit was gevestigd. Die zit er al lang niet meer, maar een inscriptie boven de deur herinnert nog altijd aan het Mathematisches Seminar. Honderd jaar geleden kwam hier de Weense kring wekelijks bij elkaar om zich te buigen over de grondslagen van de wiskunde. We gaan er even naar binnen. De collegezaal van de Weense kring heet tegenwoordig de Kurt Gödel Hörsaal. De grote zaal eraanast, de Boltzmannzaal, werd gebruikt voor seminaria. Hier gaf L.E.J. Brouwer in 1928 twee voordrachten, die werden bijgewoond door Ludwig Wittgenstein, het Oostenrijkse enigma wiens magnum opus — de *Tractatus* — de Weense kring trachtte te doorgronden. Geen sinecure, want erg toegankelijk was het niet en Wittgenstein was bovendien nogal zwijgzaam aangelegd. Brouwers voordracht bracht hem tot leven. Moritz Schlick, de leider van de Weense kring, schreef in een brief aan Rudolf Carnap: “Vor kurzem hat Brouwer zwei Vorträge in Wien gehalten. Sie waren aber weniger interessant als das was Wittgenstein, die beide zuhörte, uns nachher in Kaffeehaus darüber sagte.” De opgeleefde Wittgenstein reisde af naar Cambridge om er zijn *Tractatus* voor te leggen als dissertatie. Voor Brouwer waren de twee Weense lezingen juist een afsluiting. Enkele maanden later werd hij uit de redactie van de *Mathematische Annalen* gezet en trok hij zich terug uit de wiskunde.



We verlaten de Strudlhofgasse en gaan op weg naar de wiskundefaculteit. Onderweg passeren we de Servitengasse waar een ingetogen monument met huissleutels van Joodse wijkbewoners ons herinnert aan de Holocaust.



De faculteit vinden we op de Oskar Morgensternplatz, net achter de Hahngasse, vernoemd naar Hans Hahn, pionier van de functionaalanalyse en lid van de Weense kring. Pal voor de ingang staat een groot rood kunstobject. Het lijkt een stervormig polyeder, maar het is een goedendag, het middeleeuwse slagwapen. In het Duits heet zo'n ding een Morgenstern.



In het trappenhuis van de faculteit hangt een gedenkplaat, een Ehrentafel, met grote namen uit het vooroorlogse verleden. Kleurrijke figuren die elk afzonderlijk een fotorubriek waardig zijn. Verscholen onderin de kelder staat een beeld van Edmund Hlawka, bekend van de Koksma-Hlawka-ongelijkheid. Bovenin het gebouw vinden we een levende wiskundige: Herr Professor Doktor Henk Bruin. Toevallig ook de gids op onze wandeling. Waar ter wereld je ook komt, overal struikel je over de Nederlanders.



We gaan door naar het hoofdgebouw, gebouwd op de ring rond Wenen waar vroeger de stadsmuur stond. In dit neoclassicistische bakbeest gaf Ludwig Boltzmann in 1903 een serie openbare lezingen over natuurfilosofie die zo populair waren dat het publiek tot buiten op straat stond. De krantenberichten spraken van een levensgevaarlijke situatie, waarbij mensen elkaar dreigden te vertrappen. Boltzmann sprak voornamelijk over verzamelingenleer en niet-euclidische meetkunde. "Was dem Menschen das Gehirn, ist der Wissenschaft die Mathematik", verklaarde hij. Met de populariteit van de lezingen was het dan ook snel gedaan.



In het gebouw gaan we rechts de trap op en vinden daar de gedenksteen voor Moritz Schlick, die in 1936 werd vermoord door een van zijn studenten, Johann Nelböck. Het motief voor de moord bleef onduidelijk, maar het was iets persoonlijks. De relatie tussen promotor en promovendus is niet altijd even eenvoudig. Na de Anschluss in 1938 werd Nelböck door de Nazi's uitgeroepen tot een arische held, die had afgerekend met een dégénéré uit de elite. Hij werd op vrije voeten gesteld en kreeg een positie bij de faculteit aardwetenschappen. We gaan de trap weer af en lopen rond de mooie groene binnentuin, waar mensen genieten van de zon. Rondom de tuin staan beelden van beroemde Weense geleerden.



Voornamelijk medici, waaronder Gerard van Swieten, student van Boerhaave en lijfarts van Maria Theresia. Maar ook wiskundigen: Johann Radon en Olga Tausky. We kiezen voor een plaquette van Carl Menger. Hij was weliswaar econoom, grondlegger van de Weense school, maar ook de vader van de geniale Karl Menger, een student van Hans Hahn. Menger was ooit assistent van Brouwer, maar de twee kregen ruzie (hoe kon het ook anders) over de prioriteit van de dimensietheorie. Dat weerhield Menger er niet van om erop aan te dringen dat Brouwer die twee lezingen in Wenen kwam geven. Hij zorgde er ook voor dat Wittgenstein daarbij aanwezig was.

Vanuit het hoofdgebouw lopen we door de Reichsratsstrasse tot aan de Stadionsgasse. Hier was ooit Café Reichsrat gevestigd, waar Kurt Gödel, een andere toehoorder van de lezingen van Brouwer, aan enkele leden van de Weense kring liet zien dat er iets merkwaardigs aan de hand was met de grondslagen van de wiskunde. "Di. 26. August 1930, 6-8.30. Café Reichsrat. Gödel's Entdeckung: Unvollständigkeit des Systems der Principia Mathematica. Schwierigkeiten mit dem Beweis der Widerspruchsfreiheit", noteerde Carnap in zijn dagboek. Café Reichsrat is verdwenen. Tegenwoordig is het een bankgebouw. We lopen weer terug door het Sigmund Freud-park met daarin de Votivkirche, gebouwd om de Heer te danken voor het redden van keizer Franz Jozef, op wie in 1853 een aanslag was gepleegd. Gewerkt heeft het, want de keizer leefde nog 63 jaar, maar daarna was het afgelopen met de poppenkast. Even verderop staat het Pasqualatihuis waar Ludwig van Beethoven bij tijd en wijle verbleef. Het is nu het Beethovenmuseum. In een volgende straat staat weer een ander Beethovenhuis, het musiceren legde hem geen windeieren.



Niet veel later zijn we terug in de Strudlhofgasse en beëindigen onze wandeling in het Schrödingerinstituut, een conferentieplaats vergelijkbaar met ons eigen Lorentz Center. In een vitrine staat de huisvlijt van deelnemers van eerdere bijeenkomsten, waaronder een papier-maché-impresie van Erwin door een Australische bewonderaar. Onwillekeurig moet ik denken aan Schrödingers kat.

**Dankwoord:** Henk Bruin wees de weg in Wenen en maakte veel foto's. Ook Karma Dajani maakte enkele foto's en Klaus Schmidt toonde het Mathematisches Seminarium. De historische informatie komt grotendeels uit het fenomenale boek *Sie nannten sich der Wiener Kreis*, van Karl Sigmund, uitgegeven door Springer.



## Jaap Molenaar

*Biometris, Centre for Quantitative Methods for the Life Sciences, Wageningen Universiteit*  
jaap.molenaar@wur.nl

### Afscheidsrede

# Mathematics, the

Op 7 november 2019 nam Jaap Molenaar afscheid als hoogleraar Toegepaste Wiskunde bij Wageningen University & Research Centre, waaraan hij overigens als gastmedewerker verbonden blijft. In zijn afscheidsrede schetst hij hoe hij ertoe kwam wiskundig modelleren tot de kern van zijn onderzoek te maken. Hij beschrijft hoe je wiskundige modellen 1-dimensionaal kunt ordenen van ‘bottom-up’ tot ‘top-down’, maar pleit ook voor een integratie van beide benaderingen. Om de kracht van dimensieanalyse en wiskundig modelleren te demonstreren, besluit hij met een afleiding van de Law of Benford.

Delivering a farewell address is not only a nostalgic event, it is also a moment of relaxation and joy. To hear the organ of this Auditorium playing a cheerful melody; to see so many esteemed colleagues hoping to hear some wise last words; to realize that nobody in the audience expects you to impress him or her by an exposition of all your expertise — as is usually the case with inaugural lectures: it all contributes to the nice atmosphere evoked by again a member of the crew becoming old aged.

By the way, I like to play the organ myself, and my very first wise lesson is: don't forget to move the organ to the new Dialogue Centre on the Campus when this Auditorium will be abandoned...

A farewell address may have a high ‘grandpa tells stories’ character. That's why I feel free to start telling you how and why my career culminated in a position at Wageningen University.

#### Some personal history

Although mathematics eventually became the dominating science in my life, also physics and biology played an important role. The combination biology and mathematics seems a bit less natural than the marriage of physics and mathematics. For example, the physicist Einstein was able to develop the special relativity theory on his own, but the general relativity theory exceeded his powers and he was forced to invoke the skills of mathematician Grossmann. To his friend Sommerfeld he wrote:

“I have never worried so much, and received the greatest respect for the mathematics that I, simple soul, had hitherto regarded in its more subtle detail as pure luxury.”

For the combination of biology and mathematics it may be more convenient to quote

a similar heart cry of good old Darwin in his diary around 1830:

“I have deeply regretted that I did not proceed far enough at least to understand something of the great leading principles of mathematics; for men thus endowed seem to have an extra sense.”

I think this attitude of Darwin should be exemplary in the life sciences world, but practice is unruly. This is eloquently expressed by Gian-Carlo Rota, a famous mathematician at MIT, who wrote:

“The lack of real contact between mathematics and biology is either a tragedy, a scandal, or a challenge, it is hard to decide which.”

In my opinion, this lack of contact between biology and mathematics is not a tragedy nor a scandal, but a serious challenge. As a consequence of this opinion, I took two determining steps in my life. First, I married a biologist, and second I accepted a position in Wageningen. And, in spite of the worries expressed by Rota, I had a splendid time here. For a modeling minded mathematician as I am, Wageningen is the place to be. Here I was swimming in a pool with mainly biologists around me.



Jaap Molenaar

# science of my life

Wageningen has always respected its one and only chair in math, initially occupied by Van Uven in the period 1918–1950, who was famous for both his mathematical and musical activities and after whom a street in Wageningen has been named.

But still, it is always good to keep an eye on the perspective: the other technical universities — Delft, Eindhoven, Twente — have 8 to 12 math chairs each. Wageningen only one...

That mathematics would take such a prominent place in my life was by far not self-evident. My secondary school was Christelijk Gymnasium Sorghvliet in The Hague. At that moment a very small school, of high quality, but unknown. Nowadays it's nationwide famous because the three royal princesses are visiting it.

When leaving Sorghvliet, I did not experience the slightest urge to choose mathematics as my study. To be honest I found it rather boring. The same applied to biology. It was in the sixties of the last century, and although the fascinating discovery of DNA had taken place already in the fifties, my biology teacher restricted the lessons to enumeration of the bones in the human skeleton and classification of the species in the plant domain. So, I started to study

physics, since that field seemed to provide one with a general understanding of the universe. It was only in the slip stream of physics that I also obtained a master degree in mathematics. I got so many exemptions for math courses, that I couldn't resist the temptation.

After graduating and having gained deep insight into the universe, I had to join the army. My official rank was 'vaandrig', i.e. 'vaandeldrager', so I had to bear the colors. It wasn't a bad time at all. In view of time limitations I skip this period today.

An enjoyable period of applying to positions of all kinds followed. I carefully avoided the ones with a mathematical flavour, and finally I started at a PhD project at the Free University in Amsterdam. In solid state physics, supervised by Adriaan Lodder. He infected me with the passion for research, and for deriving pleasure from endless manipulations with formulae to arrive in the end at a result of such an intrinsic beauty, that all nuisance is forgotten at the moment of triumph. Research requires a great deal of endurance. It is like giving birth to a baby: as soon as the sibling is there, most or even all misery is over.

I would like to give this address the flavor of a last public lecture. This lecture has

a simple structure: first, I'll tell you about the philosophy underlying mathematical modelling, then I'll show you the power of mathematics using an example, after which I'll close with some acknowledgements. To keep this address sufferable, I won't bother you with deep mathematics, nor will I make use of typical life science cases that presume a lot of expert knowledge.

## Modelling: what's inside the box?

As I already told you, physics had evoked with me a fascination for modelling. As I worked out in my two inaugural lectures, a model is a representation of some system, that helps us to analyze and predict its behaviour. It should at least mimic our observations of the system, but a model

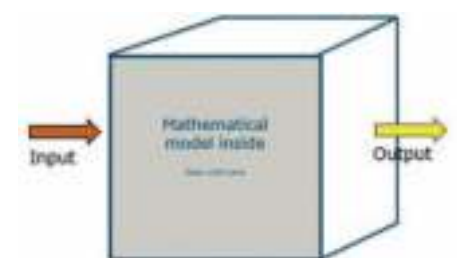


Figure 1 The mathematical modeling box.



Figure 2 Chess playing robot, metaphor of mathematical modeling.

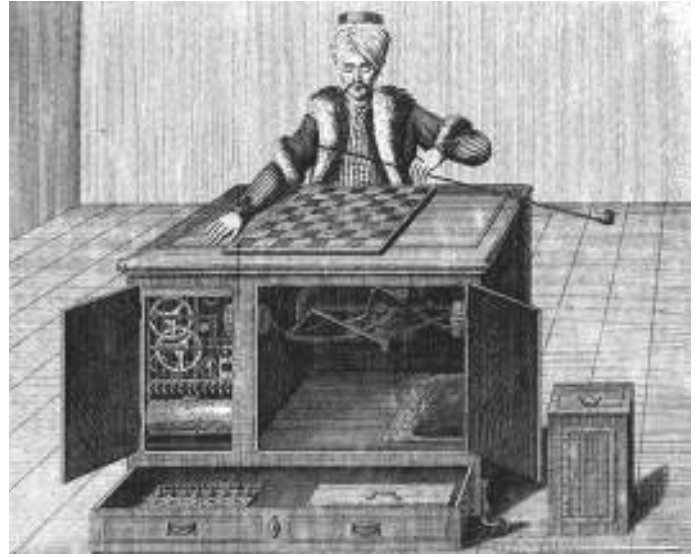


Figure 3 The modeling box of the chess Turk, containing clockwork like machinery.

without predictive power is like a lion without teeth. As an example you could think of the app 'Buienradar': given the present weather conditions the app predicts the rain fall for the coming hours. Bringing it back to its very essence, a model can be looked upon as a box with an input and an output, and some magic happening inside (Figure 1). The key question of mathematical modelling is: what's inside the box?

I like to play chess, so let us take an example from chess (Figure 2). This chess playing robot, the so-called 'chess Turk', was built in 1770 by Wolfgang von Kempelen for entertaining purposes. The robot was an enormous show success and the inventor traveled with it through Europe visiting many royal courts. The chess Turk was able to play chess like a human, moving the pieces, which on its own was already fascinating to see. But what's more, it defeated nearly all its opponents. We recognize the modeling scheme here: input is a move by a human opponent, upon which the robot comes up with a move as output. Here the question is literally: What's inside the box

below the desk of the chess Turk? During his shows, Von Kempelen opened the box to the audience, showing that there was only some clockwork like machinery in it (Figure 3).

For decades the secret of the machine, that nowadays would be referred to as being 'artificial intelligent', remained unraveled. A cliffhanger moment.

In science, mathematics turns out to be a very appropriate language to formulate models. And so, via the bypass of modeling, I became more and more entangled in the world called mathematics.

For Wageningen UR, world leading expertise center for the life sciences, modelling is a key expertise. That was for me — in addition to Wageningen being at cyclist distance from my home town Veenendaal — one of the main reasons to switch from TU Eindhoven to Wageningen University. Nearly all life sciences need mathematical modeling. It's a topic belonging to the heart of Wageningen research and education. That's why I would like to pay quite some attention to this activity.

Models can be ordered from so-called bottom-up models to top-down models. It seems reasonable to draw that ordering axis vertically, from bottom to top. Since this picture would suggest a sort of hierarchy, I shall use a horizontal presentation (Figure 4).

#### Bottom-up modeling

First we focus on the left hand part of the modelling spectrum: the bottom-up models. This is the domain of my specialty:

systems biology. These models are suitable for systems that we know a lot: their components and the physical, chemical, and biological mechanisms governing their dynamics are more or less understood.

As an example I take this mechanical duck, constructed by Jacques de Vaucanson in 1739 (Figure 5). In this duck, the digestive tract was modelled in a mechanical way and the duck model really worked: one could feed the duck at the beak end and after some time the duck produced feces at the rear end.

Bottom-up modelling has a strong reductionistic character. With as consequence that one runs the risk of leaving out components, that later turn out to be essential. Or worse: that one ignores the holistic view that the whole may be more than the sum of its parts. For example, the appeal a racing motor has to some people will never be captured by

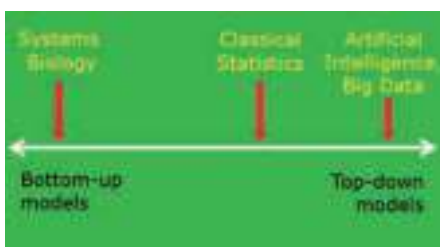


Figure 4 The modeling axis, arranging models from bottom-up (left) to top-down (right).

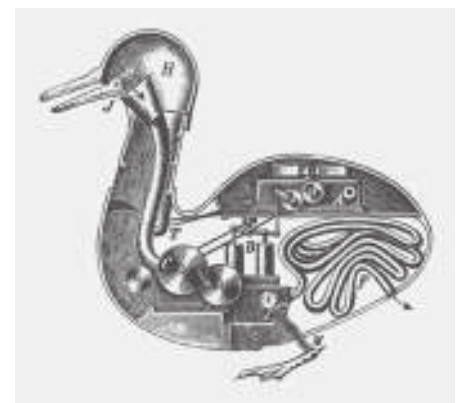
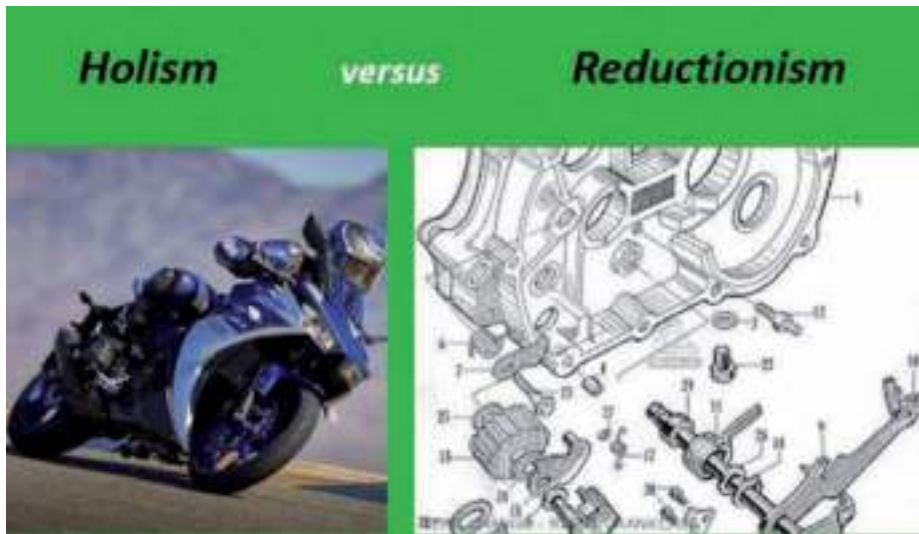


Figure 5 Mechanical model of the digestive tract of a duck.



**Figure 6** The appeal of a holistic object like a racing motor stays in sharp contrast with the mechanical components that make it up.

only modelling its mechanical components (Figure 6).

We meet here with a very important modeling dilemma: which level of detail should be included. The answer is, of course, closely connected to the purpose you have in mind. This does not imply that bottom-up models consisting of relatively simple components can't give rise to complex behaviour. In the seventies of the last century the mathematical revolution leading to 'chaos theory' took place. I still remember how excited I was when following

these developments. Chaos theory shows that very small bottom-up models can already exhibit very complex, unpredictable behaviour. In the life sciences I came across the very similar notion of 'emergent behaviour', which, by the way, should not be associated with 'emergency exit' or so, but rather with 'Luctor et Emergo' where it means 'to pop up'. So, simple elements, provided that they interact effectively, may represent very intricate phenomena. As an example, look at ants (Figure 7). Each ant on its own has, as far as we know, no high level of intelligence. But together they are able to build a bridge. Isn't God's creation wonderful?

Until now I showed you mechanical models from centuries ago for illustrational purposes. At present, we have enormous computer power at hand and mathematical models live in the form of computer implementations. For example, how would we model the digestive tract of the duck in modern times?

### Networks

Before going into detail, I need to give you a short general introduction in mathematical modelling. It always starts with identifying the essential components of the system at hand and representing them in the form of a network. The nodes represent the components, the arrows the interactions. Next step is the translation of the network into a set of mathematical formulae. In Figure 8 I show ordinary differential equations. There are other mathematical languages, but that's not relevant for this lecture.

This translation step is far from being trivial. Be aware that a network as such may still contain many ambiguities. Only if the formulae are specified, the model becomes unique and useful. The general lesson here is:

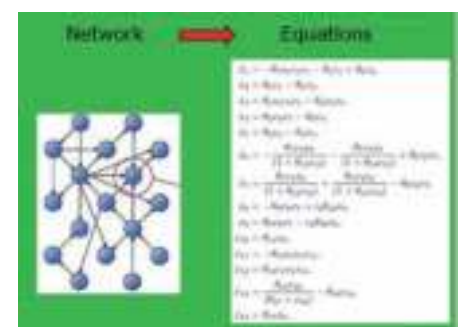
*One picture tells us more than 100 words*  
and

*One formula tells us more than 10 pictures*  
with the implication:

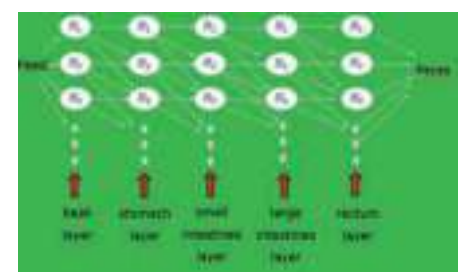
*One formula tells us more than 1000 words.*

The network framework is extremely useful thanks to its generality. For example, modeling the dynamics of a complex system of genes, the nodes stand for the levels of gene expressions and the arrows for the way genes may promote and/or inhibit each other's expression. And if we model a simple system such as a predator-prey system, the two nodes stand for the numbers of predators and preys, and the arrows for self-promotion via birth, decay via death, and, of course, mutual inhibition and promotion.

What would the network of a digestive tract look like? Well, we want to model the transformation from feed in the beak to feces at the back (Figure 9). In the beak the feed has a certain composition. Let's indicate the nutrients by  $N_1, N_2$ , et cetera.



**Figure 8** Network representation of a mathematical model and its translation into mathematical formulae.



**Figure 9** Network of a digestive tract. The feed contains nutrients  $N_1, N_2, \dots$ , with fractions changing at the different stages of the tract.



**Figure 7** Emergent behavior: simple agents like ants manage to build a bridge by cooperating.

The amounts of these nutrients are stored in the nodes in the first layer. For each stage of the tract — stomach, small intestines, large intestines, rectum — we have such a layer of nutrient nodes. From layer to layer the contents of these nodes change under influence of digesting enzymes and microbiome processes. Here, we will pay no attention to the translation step; for now it is only important to keep in mind the typical network topology, with layers and a unidirectional flow from beak to feces.

### Top-down modelling

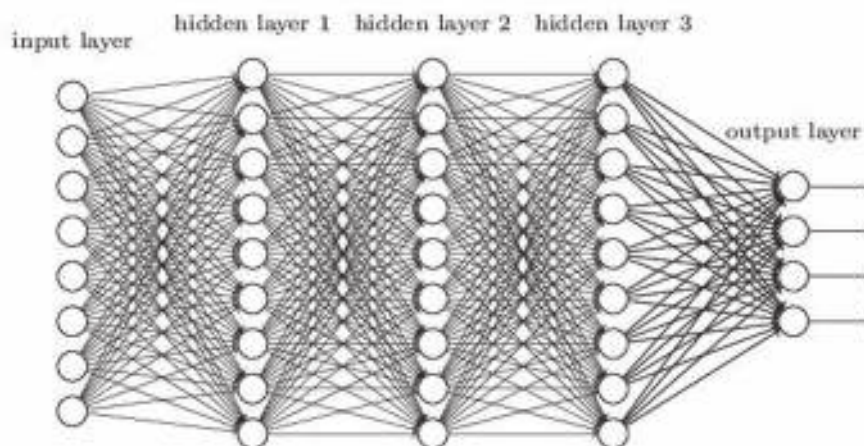
Let's switch to the right hand side of the modeling axis (Figure 4). There, we meet with, amongst others, classical statistical models, but I will pass them to leave room for the farewell address of my colleague Fred van Eeuwijk. On the utmost right hand side we enter the domain of artificial intelligence and big data science where neural networks and other machine learning approaches are used. They are designed to cope with systems that are way too complex for us to understand. Think of the human brain, our economy, or the climate. Can we achieve modelling progress in such cases? Yes, we can, but only if we accept a paradigm shift.

If we have no idea of the inner structure of a system, the only thing we can do is to observe its behaviour as response to as many different inputs as possible. That's to say, to gather data. The more, the better. And from these data, we may try to mimic the system. This approach seems a bit poor, but may be very powerful, as I will show you.

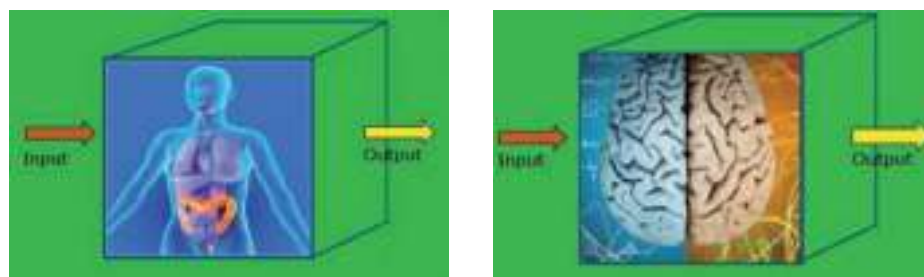
A system far beyond our bottom-up modeling abilities is typically the human brain. Our brain is nearly unbeatable as it comes to pattern recognition. Expose a human, e.g., one of my grandsons, to dozens of pictures of cats and dogs in all kinds of poses, and he may flawlessly classify the dogs and the cats, putting the dog pictures on one pile and the cats on another.

### Networks, deep learning

Given enough data, top-down models are amazingly good in imitating this kind of abilities. But, if we have no idea what's happening in the brain when recognizing patterns, what kind of network should we put in the modelling box (Figure 1) to imitate the brain? What about its topology?



**Figure 10** General structure of a neural network, characterized by a layered structure and a unidirectional flow of information.



**Figure 11** The structure of a neuronal network rather reflects the structure of our digestive tract than that of our brains.

What about the interactions? Since we have no clue here, we are free to take a fantasy network with fantasy interactions. One would expect a neural network to mimic the neuronal network in our brains. So, with neurons interconnected in a complicated fashion. But terminology is misleading here. In practice, neural networks have a layered topology and a unidirectional flow (Figure 10).

Does this ring a bell? Of course, we recognize the structure of a digestive tract (Figure 9). So, we conclude that neural networks rather reflect the structure of our digestive tract than that of our brains.

Recently, so-called deep learning networks have become popular. Roughly speaking they are very similar to neural networks, but then with many more layers. So, one could say that a standard neural network reminds us of the digestive tract of a carnivore, whereas a deep learning network is more like the digestive tract of a herbivore. These similarities should, of course, not evoke the suggestion that these networks deliver only feces. Not at all.

How does a neural network function? You remember that the second step in mathematical modeling is the translation

of a network into formulae (Figure 8). In these formulae parameters are present. These are numbers that are typical for the specific system under study. In bottom-up models the parameter values are either dictated by physical laws or deduced from experiments. In top-down models we do not have that information; the values of these parameters have to be estimated from fitting the model to the data. Therefore, as said before, the more data, the better. People are used to say that they “train a network” — like a dog —, simply meaning that its parameter values are estimated from data.

### Artificial intelligence

For certain applications top-down models are indeed the way to go. To come back to the chess example, in the artificial intelligence world it has been a long-standing discussion whether computers could ever play inherently complicated games like *Chess* and *Go* at world-champion level. The Dutchman Max Euwe (1901–1981) and the Russian Michael Botvinnik (1911–1995) — chess world champions in the thirties and fifties of the last century, respectively — were heavily involved in developing computer chess algorithms. They



**Figure 12** In 1997, for the first time in history, a world champion, Kasparov, was beaten by a computer programme: a turning point in artificial intelligence.

followed the bottom-up approach and implemented strategies they thought humans apply when playing chess. In their days, computers were still simple, so the level of playing remained relatively low. In later years the computers got such an enormous computational power, that in 1997 world champion Kasparov was beaten by the computer program Deep Blue (Figure 12).

As seen in Figure 12, this was quite a dramatic event, since Kasparov had claimed that this was impossible. Deep Blue was based on a combination of strategic rules and brute force, since at that time the computer could already calculate the consequences of many, many moves in a split second. However, this bottom-up approach turned out to have limitations, even with supercomputers, since it failed when applied to a much more complex game like Go.

Euwe, Botwinnik, Kasparov, they all couldn't foresee the paradigm shift caused by deep learning. In December 2018 the so-called 'AlphaZero' team reported (DOI: 10.1126/science.aar6404) that they had trained a deep learning network that could beat the world champion Go. A network with the same topology could also play Shogi and Chess at that very high level. Only the

parameter values were different for each of these games. Taking notice of these developments, Kasparov made a comparison that will resonate with biologists:

"Much as the *Drosophila Melanogaster* fruit fly became a model organism for geneticists, chess became a *Drosophila* of reasoning".

What kind of data did the AlphaZero team use? Data from the immense literature on Chess or Go? No. They simply got their data from letting a computer playing Chess or Go against itself. In this way they could practically obtain infinitely many data. The deep learning network was not explicitly fed with strategies but, on the contrary, deduced these strategies from the data and stored them in an implicit way, namely in the values of parameters.

It is clear that these techniques will deeply influence our society, for example via robotics. It also evokes philosophical questions. Are we creating real intelligence, consciousness, monsters? I don't think so. Although the achievements with deep learning are very impressive, from a modelling point of view this approach leaves us with an unsatisfactory feeling. After the training stage, the deep learn-

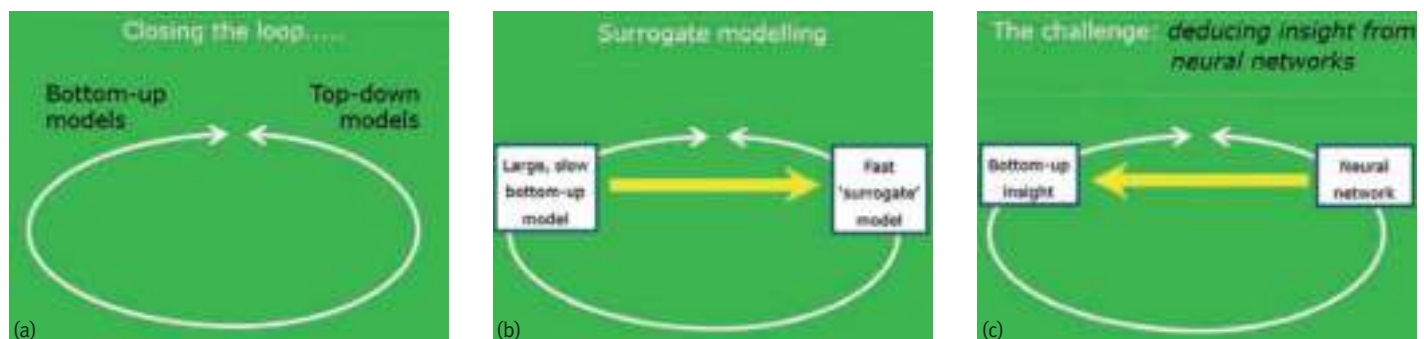
ing network may mimic the system under consideration perfectly well, but we haven't gained any insight in the system. The full training information has been stored in the values of parameters, but these parameters don't bear any interpretable relationship with the functioning of the system itself.

### Closing the loop

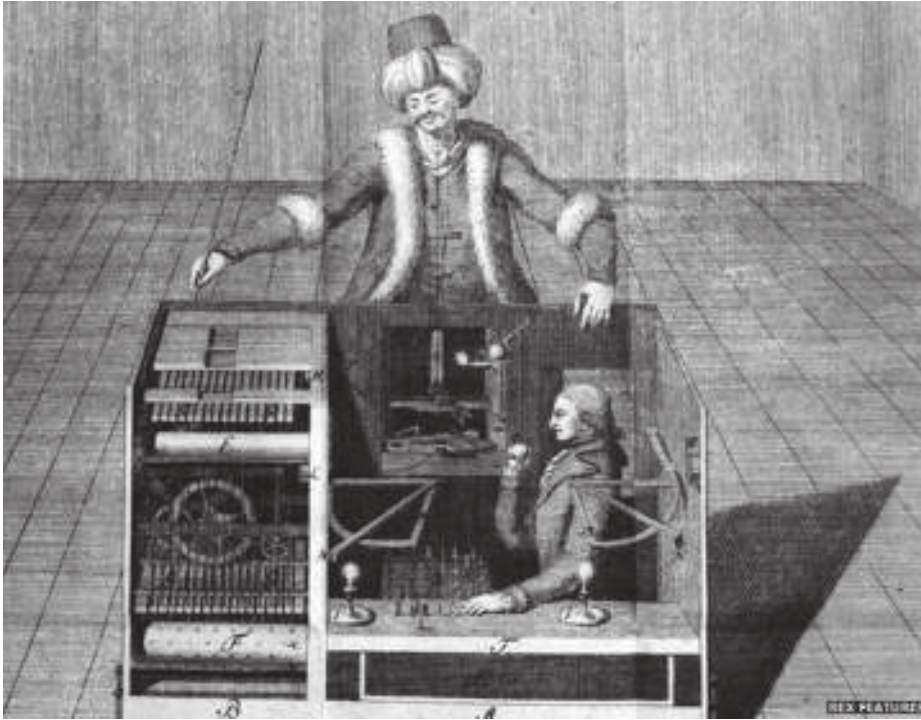
I think that the challenge of the coming years is to close the loop. The modelling axis should be bent and closed in itself, so that the extremes meet each other (Figure 13a). A first, partial attempt is a research topic within my group. The idea is to start with a complex bottom-up model. Because of its complexity, analysis in the form of, for example, sensitivity analysis is obstructed by extremely long computation times. A top-down model is then trained, a so-called surrogate model, that mimics the original model but is ways faster to handle and analyze (Figure 13b).

From a more fundamental point of view, I expect that in some way it must still be possible to interpret neural networks (Figure 13c). The learning process during training must contain information to deduce how the system internally works, at least globally. This seems me one of the most intriguing problems artificial intelligence presents us nowadays.

By the way, do you remember our cliff hanger: the thrilling secret of the chess Turk. As you may have guessed, inside the box a human was hidden, undetectable for the audience, thanks to an ingenious system of mirrors and a moveable seat (Figure 14). So the mechanical Turk, representing a human, was modeled by a human. It's like a digital twin, but then not digital. More bottom-up is simply not possible!



**Figure 13** The modelling axis should be bent, such that bottom-up and top-down modeling fertilize each other (a). A large and computationally hard to handle bottom-up model can be replaced by a surrogate model, trained on data from the bottom-up model (b). Deducing insight in the functioning of a system by studying the neural network by which it is modeled is the challenge we are facing nowadays(c).



**Figure 14** The secret of the chess playing robot was a human hidden inside the box: the utmost form of bottom-up modeling!

### Law of Benford

I promised to explicitly show you the beauty and power of mathematics via an example. The example I have chosen is an appetizer for a course we developed about the extremely important role played by ‘scaling’ in nature and thus in modelling.

It is generally believed that with each formula in a book or presentation one loses half of the audience. This goes back to Stephen Hawking who wrote:

“Someone told me that each equation I included in the book would halve the sales”.

I challenge you to belie this claim. This story starts with a guy called Newcomb who consulted a book with logarithm tables in the library of his institute (Figure 15).

To his surprise, he observed that the pages in the first half of the book were much more worn and dog-eared than the later pages. Why were these initial pages used so frequently? As you remember, these pages are related to numbers that start with the lower digits. So, numbers starting with 1, 2 or 3, occur much more often than numbers starting with 7, 8 or 9. He started to think about this strange phenomenon, reported it in 1881, but couldn’t find an explanation. Later, in 1938, Benford rediscovered the phenomenon and understood the essence.

I will explain this remarkable phenomenon to you in a my own, very condensed way, showing how powerful math can be.

Assume you generate a data set by measuring the size of randomly picked objects. From the size of a bacterium, to the length of your nose, to the height of your house, to the height of the Eiffel tower, et cetera. This results in a set of numbers spanning many orders of magnitude.

There must be a probability distribution,  $p(x)$  say, that tells you what the probability

is for a number to be chosen. For the time being we have not the slightest idea how  $p(x)$  looks like, but this ignorance will not last long. I think most of you still remember that the probability  $P(a,b)$  of picking a number in the interval  $[a,b]$  is given by the integral of  $p(x)$ , from  $a$  to  $b$  (Figure 16).

Now the scaling argument comes in. All of a sudden, we realize that all the numbers in our dataset have been measured in meters. But there was no reason to select meters as unit of length. We could have used decimeters, centimeters, micrometers, kilometers, or whatever unit as well. This implies that the horizontal  $x$ -axis could have been arbitrarily squeezed or stretched. So, if I replace the interval  $[a,b]$  by the interval  $[\gamma a, \gamma b]$ , with  $\gamma$  an arbitrary positive constant, the chance to find a number in that new interval must be the same as in the original interval. This implies that the form of  $p(x)$  must be such that the two shaded areas in Figure 17 are equal.

A picture is informative, but as I already said above, a formula is better. Scaling leads to the condition

$$P(\gamma a, \gamma b) = P(a, b),$$

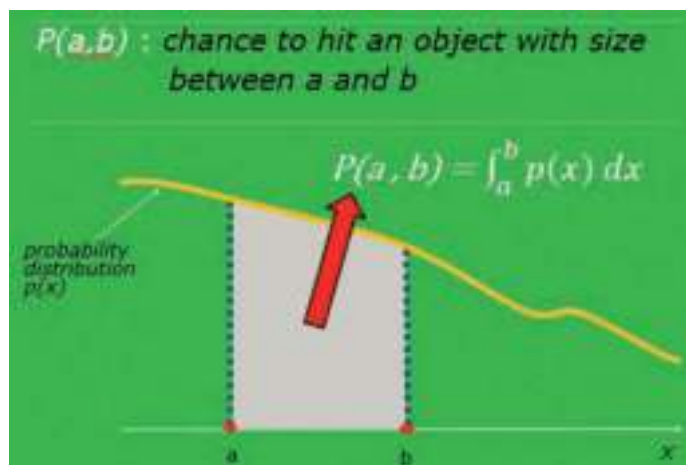
or

$$\int_{\gamma a}^{\gamma b} p(x) dx = \int_a^b p(x) dx.$$

It is hard to believe, but this condition is enough to derive the distribution  $p(x)$  and thus the probability  $P(a,b)$ . The mathematicians among us will immediately see that if we differentiate the integrals on both sides with respect to  $b$ , apply the chain rule, and set then  $b$  equal to one, we find



**Figure 15** The first pages of the book with log tables were much more worn than the last pages, as Newcomb observed.



**Figure 16** The probability  $P(a,b)$  to randomly pick a number in the interval  $[a,b]$  is given by the integral of  $p(x)$  from  $a$  to  $b$ .

that  $p(x)$  behaves as:

$$p(x) \sim 1/x,$$

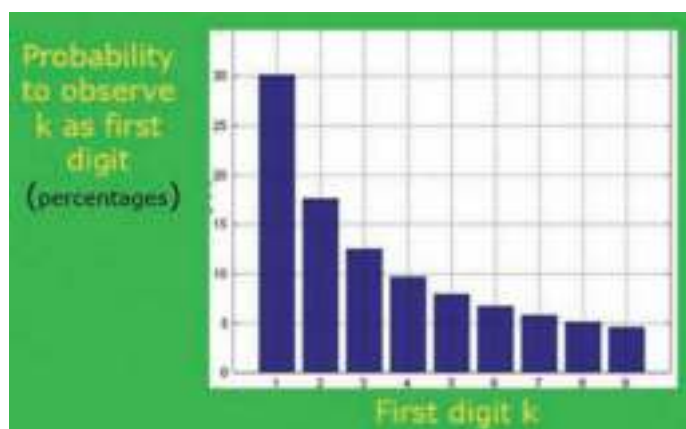
which implies that

$$P(a,b) \sim \log(b/a).$$

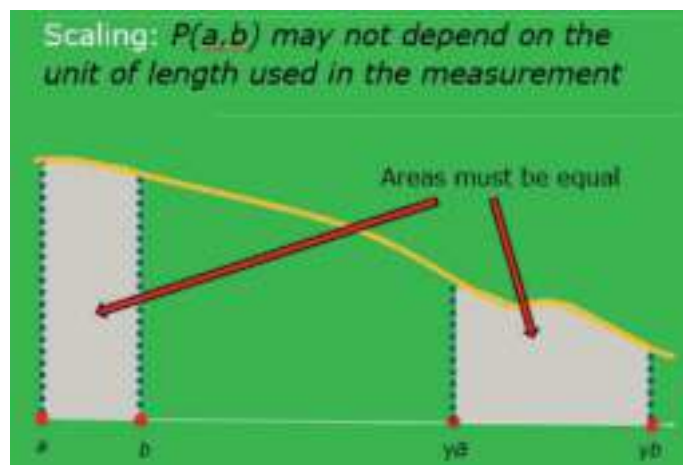
Since  $P(a,b)$  only depends on the quotient of  $b$  and  $a$ , we find that the chance to pick a number between 1 and 2, say, is equal to pick a number between 10 and 20, or between 100 and 200, et cetera. So, this distribution of chances is for each decade the same. In words:

- chance of picking a number starting with 1 is proportional to  $\log(2/1)$ ,
- chance of picking a number starting with 2 is proportional to  $\log(3/2)$ ,
- et cetera.

If we plot these chances (Figure 18), we find a distribution that completely explains the observations by Newcomb and Benford. The chance to find 1 as first digit is about 6 times higher than the chance to hit 9 as first digit.



**Figure 18** Probability distribution to find  $k$  as first digit according to the Law of Benford.



**Figure 17** If we stretch or squeeze the horizontal axis, the shaded area, representing  $P(a,b)$ , must be conserved.

This phenomenon does, of course, not only hold for data with the dimension of length. The only essential issue is that the data span several orders of magnitude. All kinds of data turn out to follow the Law of Benford. For example, the numbers of inhabitants of USA towns obey, unexpectedly, this law nearly perfectly.

In practice, the Law of Benford is used to detect fraud: if someone is manipulating data or even generating artificial data, he/she usually forgets to take into account this law. From that omission the malversation can easily be detected. You may ask: has this relevance for Wageningen? As for fraud, I don't hope so. But Wageningen UR is a huge data generator. In applying statistical regression models, one often applies the log transform. It is good to know that this is not a calculation trick, but is based on sound scaling arguments.

I wonder whether I lost half of my audience. Time for another shock: we switch to Dutch.

### Tot slot

De uitslagen van de MedewerkerMonitor — een regelmatig afgenomen werktevredenheidsonderzoek — spreken boekdelen: Biometris eindigde de laatste twee keren van alle wetenschappelijke WUR-groepen bovenaan. We begonnen 13 jaar geleden vrij klein. Experimenteel ook: een fusiegroep bestaande uit één leerstoel Wiskunde en Statistiek en een DLO-groep, oftewel de commerciële afdeling Biometrie. Fred van Eeuwijk en ik bezetten samen die éne leerstoel. Dat was een beetje naïef bedacht door het toenmalige management. Met twee kapiteins op één schip had dat wel eens geweldig fout kunnen gaan. Maar in de praktijk bleek het een geweldig geluk dat we qua persoonlijkheden gigantisch verschillen. Na een periode van zoeken vonden we de perfecte rolverdeling. Fred werd minister van Handel en ik minister van Binnenlandse Zaken. Dit uiteraard naast ons dagelijks onderzoek en onderwijs. Fred heeft zijn handelsmissies



**Figure 19** De naam Radix van onze huisvesting heeft een dubbele betekenis: het gebouw huisvest zowel plantenwetenschappers als wiskundigen.

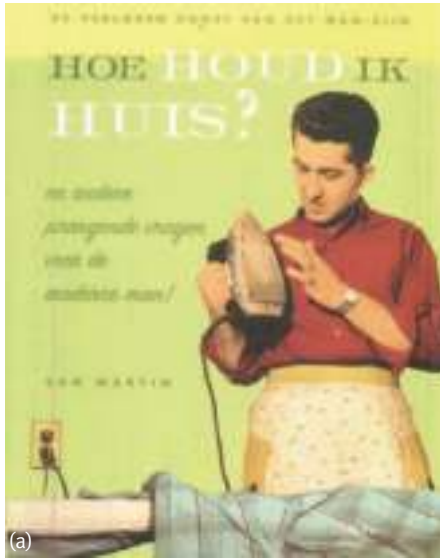


Figure 20 Handleiding “Hoe houd ik huis” voor de moderne man, al of niet met pensioen.

op fantastische wijze tot een succes maakt. Biometris groeide gestaag dankzij drie factoren: de vele externe projecten, de stijgende studentenaantallen, en de overname van collega's van andere groepen — soms zeven medewerkers tegelijk — die kwantitatief bezig waren, zich niet op hun plaats voelden, en zich daarom graag bij ons aan wilden sluiten. Daardoor werd binnenlandse zaken steeds belangrijker. Echter, doordat we financieel nogal goed boerden, heb ik mijn taak altijd als relatief licht ervaren. Medewerkers vragen wel eens: wat gebeurt er met al die miljoenen in onze reserves? Wel, daarmee worden armlastige groepen, die toch wel waardevol zijn voor de wetenschap, maar niet zo gemakkelijk geld binnenhalen, gesteund. Dat doen we graag, want zoals de Bijbel al zegt: “Het is zaliger te geven dan te ontvangen.”

Dankzij Biometris heb ik me hier in Wageningen altijd als een vis in het water gevoeld, of met een toepasselijker beeld-

spraak: als *Arabidopsis Thaliana* in *Radix*: een onooglijk plantje, maar waardevol en gewaardeerd in de wetenschap. Toen onze huisvesting, het gebouw met de fraaie naam *Radix*, dat wij delen met de plantenwetenschappers, bijna klaar was won ik de naamgeefwedstrijd. Wat ik nou zo jammer vind is dat zo veel mensen de diepere laag in die naam niet meer beseffen. Want *Radix* betekent niet alleen wortel in de plantenzin, maar ook wortel in wiskundige zin (Figure 19). Bedenk dus, als u langs gebouw *Radix* fietst, dat het zowel planten- als wiskundegeleerden herbergt.

Aan het begin van mijn wetenschappelijke loopbaan schafte ik mijzelf een poster aan om mijn werkkamer op te fleuren. Die poster is alle verhuizingen meegegaan. Vooral vanwege de tekst: ‘Wie in Mij blijft, en Ik in hem, die draagt veel vrucht’. Jezus zegt dat in het kader van de bekende gelijkenis van de wijnstok en de ranken in Johannes 15. De poster geeft precies aan hoe

ik mijn werk altijd heb willen doen: in afhankelijkheid van God, onze Schepper. En u begrijpt hopelijk wel dat met die vrucht niet bedoeld is het produceren van zo veel mogelijk wetenschappelijke artikelen. Maar het impliceert wel de vraag: heb ik werkelijk iets betekend voor God en mijn collega's? Zo'n simpele poster heeft al die tijd een prachtige belofte gevormd, maar roept me bij zo'n afscheid als vandaag ook ter verantwoording.

Hoewel mijn vrouw Gerda en ik erg gelukkig zijn met elkaar en elkaar doorgaans goed aanvoelen, vraag ik me de laatste maanden serieus af of ze wel de juiste verwachtingen heeft van mijn tijdsbesteding in de pensioenjaren. Ze schonk me ter voorbereiding het boek *Hoe houd ik huis* (Figure 20a), waaruit ik zou moeten leren hoe een moderne man, al of niet met pensioen, gras maait (Figure 20b) of knijpers aanreikt (Figure 20c). Dat grasmaaien zal nog wel gaan, maar die knijpers...

## Nico Temme

*Emeritus onderzoeker  
voorheen verbonden aan het CWI  
nico.temme@cwi.nl*

### Herinnering Dick Askey (1933–2019)

# Dick Askey's sabbatical jaar in Amsterdam, 1969–1970

Richard Allen 'Dick' Askey overleed op 9 oktober 2019 in de leeftijd van 86 jaar. Hij was een autoriteit op het gebied van speciale functies, met name wat betreft orthogonale polynomen. In een interview kort voor zijn overlijden noemde hij het Jacobipolynoom als zijn favoriete veelterm. Zijn invloed op deze gebieden is wereldwijd van grote betekenis en altijd richtinggevend geweest, zeker ook in Nederland. Naast de meer klassieke functies bestudeerde hij gaandeweg een generalisatie in de vorm van  $q$ -hypergeometrische functies. Ook dit veroorzaakte bij veel andere onderzoekers nieuw elan. Naar hem werden het Askey-Tableau en het  $q$ -Askey-Tableau vernoemd waarin de ordening van de zeer algemene Askey–Wilson-polynomen en vele daar uit volgende veeltermen tot aan de algemene bekende Hermitepolynomen aanschouwelijk wordt getoond. Dick Askey bezocht het Mathematisch Centrum (MC) in Amsterdam, het huidige Centrum Wiskunde & Informatica (CWI), van juli 1969 tot en met augustus 1970. Hij was er gastonderzoeker van de afdeling Toegepaste Wiskunde (TW). Nico Temme, die destijds ook werkzaam was op deze afdeling, haalt herinneringen op aan Askey's verblijf op het MC.

Dick Askey kende niemand van ons, hoewel hij bekend was met het werk van afdelingschef Hans Lauwerier, die gepubliceerd had over asymptotiek en speciale functies. In feite werden deze onderwerpen in Nederland uitgebreid bestudeerd door Prof.dr. J.G. van der Corput, die in zijn Groninger jaren expert werd in asymptotische problemen in de getaltheorie. Een voor ons vakgebied bekende promovendus van hem uit die tijd was C.S. Meijer, die een functie introduceerde, die nu bekend staat onder de naam van Meijer  $G$ -functie. Van der Corput was een van de vier oprichters van het MC in 1946. Hij gaf lezingen over asymptotiek en hij organiseerde colloquia. Vanwege deze activiteiten raakten veel wiskundigen in Amsterdam en in het land geïnteresseerd in dit onderwerp. Onder hen was N.G. de Bruijn, die het bekende boek *Asymptotic Methods in Analysis* (1957) schreef.

Rond de tijd dat Dick in Amsterdam arriveerde, was er enige scepsis in het land

over speciale functies, omdat je met computers dit onderwerp zou kunnen gaan aanpakken. De speciale benadering van

Dick, in het bijzonder door elementen van groepentheorie te koppelen aan klassieke analyse, heeft ertoe geleid dat zijn werk meer geaccepteerd en bekeken werd vanuit een ander perspectief.

Dicks enthousiasme was aanstekelijk, hij was zeer actief in het schrijven van publicaties tijdens zijn sabbatical, zie de lijst aan het einde van deze bijdrage. De TW-rapporten werden artikelen in tijdschriften. Hij gaf veel inleidende lezingen over orthogonale polynomen; acht lezingen zijn gebundeld in het MC-rapport TC 51/70. Aan het einde van dat rapport schreef Dick:

"I would much rather want the reader to learn the above moral: do not study special functions for their own sakes. Without motivation and problems from some other field this area becomes sterile very fast. Of course this warning is not unique for special functions, but holds for any other specialized field of mathematics. And with this remark I close my series of lectures."

De lezingen trokken altijd een groot publiek, omdat Dick erin slaagde om met eenvoudige voorbeelden te beginnen en zijn wiskundige benadering was altijd heel duidelijk. Wij bewonderden zijn handigheid om met één hand nieuwe formules te schrijven en met zijn andere hand in een zelfde beweging een gebruikt deel van het bord schoon te vegen. Hij gebruikte geen aantekeningen, alles deed hij uit zijn hoofd.

Dicks sabbatical was van grote invloed op een groep jonge MC-onderzoekers: Tom Koornwinder, Herman Bavinck en schrijver



Dick Askey

Foto: Department of Mathematics, University of Wisconsin-Madison

dezes. Voor Herman leidde dit in 1972 tot zijn promotie op het proefschrift *Jacobi Series and Approximation*. Tom promoveerde in 1975 op het proefschrift *Jacobi Polynomials and Their Two-Variable Analogues*. Om te beginnen adviseerde Dick hem de additieformule voor Jacobipolynomen te vinden, hetgeen lukte in 1971, aanvankelijk met groepentheoretische methoden. Later kwam er ook een elementair bewijs.

We leerden veel van Dick door zijn lezingen te bezoeken, van de problemen en onderzoeksthema's die hij voorstelde, van referee-klusjes die hem werden voorgelegd en die hij ons gaf om onze indruk van de artikelen te krijgen. Ook natuurlijk van de dagelijkse contacten en discussies. Van de vele adviezen die hij gaf, herinner ik me de volgende algemene twee:

1. Wanneer je een formule uit een boek neemt, wees voorzichtig, deze is mogelijk niet correct.
2. Als je een formule niet uit je hoofd kent, begrijp je deze niet.

Dick gaf lezingen in verschillende colloquia buiten de afdeling:

1. Stafcolloquium van het Mathematisch Instituut van de Universiteit van Amsterdam: 'Applications of orthogonal polynomials, from projective spaces to numerical analysis'.
2. MC-Colloquium *Orthogonale Polynomen*: drie lezingen.
3. MC-Colloquium *Elementaire onderwerpen vanuit hoger standpunt belicht*: 'Certain rational functions whose power series have positive coefficients'.

Over het onderzoek van Dick lezen wij in het MC Jaarverslag 1970 in het verslag van de afdeling Toegepaste Wiskunde, Sectie 3 *Approximatietheorie en Speciale Functies*, S3.1, Orthogonale polynomen (R.A. Askey):

"Aan de voorbereiding van een formuleboek op dit gebied werd veel tijd besteed. Het bleek noodzakelijk te zijn daarvoor vooral de discrete orthogonale polynomen (Charlier-, Meixner- en Hahn-polynomen) uitvoerig te bestuderen. Vele nieuwe formules werden afgeleid. Een door Szegő gevonden resultaat over de positiviteit van de integraal van het product van drie Laguerre polynomen kon uitgebreid worden. Hierover en over een aantal soortgelijke resulta-



Dick Askey in 2013 tijdens een symposium in Madison, WI, ter ere van zijn 80ste verjaardag

ten zal in samenwerking met G. Gasper (Northwestern University, Illinois, USA) een artikel gepubliceerd worden."

Een dergelijk formuleboek heeft overigens niet de status van een publicatie bereikt. Vele jaren later is er echter een zeer nuttig overzicht gepubliceerd over de details van alle polynomen die voorkomen in het Askey-Tableau. Zie het TU Delft-rapport uit 1998, no. 98-17, *The Askey-scheme of hypergeometric orthogonal polynomials and its q-analogue*, geschreven door Roelof Koekoek en René Swarttouw, <http://aw.twi.tudelft.nl/~koekoek/askey/>.

De volgende door Dick geschreven MC-publicaties zijn te vinden in CWI's repository <https://ir.cwi.nl/#filter=author:Askey>.

1. MC Report TW 112, Orthogonal polynomials and positivity, 34 p.
2. MC Report TW 113, Mean convergence of orthogonal series and Lagrange interpolation, 23 p.
3. MC Report TW 114, Three notes on orthogonal polynomials, 17 p.
4. MC-report TC 51/70, Eight lectures on orthogonal polynomials, 68 p.
5. MC-Report ZW 1970-006, Certain rational functions whose power series have positive coefficients, 11 p.

Een paar weken voor zijn overlijden werd aan Dick een *Liber Amicorum* aangeboden, waarin 63 bijdragen zijn opgenomen met veel foto's en persoonlijke en wetenschappelijke herinneringen aan Dick.

## Rudi Penne

Faculteit toegepaste Ingenieurswetenschappen/  
Departement Wiskunde, Universiteit Antwerpen  
rudi.penne@uantwerpen.be

## Stijn Dierckx

Faculteit toegepaste Ingenieurswetenschappen  
Universiteit Antwerpen  
stijn.dierckx@uantwerpen.be

## Paul Levrie

Faculteit toegepaste Ingenieurswetenschappen  
Universiteit Antwerpen  
paul.levrie@uantwerpen.be

### Geschiedenis De complexe kunst van creatie door visualisatie

# Hoe imaginair zijn de complexe getallen?

Complexe getallen hebben een wat wereldvreemd imago met hun *imaginaire* deel. Uitgedaagd door het publiek tijdens een lezing nemen Rudi Penne, Stijn Dierckx en Paul Levrie de handschoen op en proberen zij de complexe getallen van dit slechte imago te bevrijden.

Toen we onlangs een lezing gaven voor een breed publiek in de Warande te Turnhout, werd uit het publiek achteraf een uitdagende vraag afgevuurd. Een toehoorder wilde namelijk weten hoe we ons complexe getallen kunnen voorstellen. “Hebben ze een fysische betekenis?” Hij herinnerde zich dit concept van uit zijn schooltijd, waar de complexe getallen hem overkwamen als een wereldvreemde uitvinding, enkel leidend tot pret voor de wiskundige en het breken van het brein van de gewone mens.

Zelfs Gerolamo Cardano (1501–1576), die in de zestiende eeuw de complexe getallen ontdekt had, beschouwde ze als een misleidende drogreden en als een mentale foltering, helaas onvermijdelijk in zijn berekeningen van de oplossingen van derdegraadsvergelijkingen. Het complexe getal werd dus geboren onder een slecht gesternte, van meet af aan verworpen als het monster van Victor Frankenstein. Deze getallen werden beschouwd als een lelijke constructie die buiten de realiteit stond, en aldus al snel zonder eerlijk proces veroordeeld en bestempeld als imaginair. Toch nemen we de uitdaging aan om bovenstaande vraag te beantwoorden en de complexe getallen van hun wereldvreemd imago te bevrijden. Als wiskundigen zijn we nu eenmaal gewend om als advocaat van de duivel op te treden.

### Creatie

De bovengenoemde foltering voor Cardano vond plaats bij het oplossen van volgend vraagstuk<sup>1</sup>: vind twee getallen die samen opgeteld 10 geven en als product 40 hebben. De oplossingen van dit probleem bleken  $5 + \sqrt{-15}$  en  $5 - \sqrt{-15}$  te zijn. Cardano noemde dit ‘gesofisticeerd’, aangezien hij hier geen enkele fysische betekenis aan kon geven, maar kon formeel wel uitrekenen dat het product wel degelijk  $25 - (-15) = 40$  was. Hij zei dat het antwoord ‘even subtiel als nutteloos’ was.

Cardano bleek dus het getal  $\sqrt{-15}$  nodig te hebben, met andere woorden een oplossing van de vergelijking  $x^2 + 15 = 0$ . Tot dan stelden de wiskundigen dat dergelijke vergelijkingen simpelweg onmogelijk waren en geen oplossingen hadden. In een tijd dat een negatief getal al moeilijk te verteren was<sup>2</sup>, was het trekken van de vierkantswortel hieruit al helemaal uit den boze. Een goede instelling, zou je kunnen opperen: laat de onmogelijke vergelijkingen voor wat ze zijn en zoek de problemen niet op. Het lastige was echter dat deze probleemkinderen ook de kop op staken in de oplossingsmethode voor derdegraadsvergelijkingen. Voor vergelijkingen van de vorm  $x^3 = px + q$  was reeds langer geweten, onder andere door zijn collega's Scipione del Ferro (1465–1526) en Niccolò Tartaglia (1499–1557), hoe men oplossingen kon vinden voor negatieve waarden van  $p$  en in sommige gevallen van positieve waarden van  $p$  zolang  $q$  maar groot genoeg was in absolute waarde. Cardano ging echter verder graven, en vond ook oplossingen voor de zogenoemde *casus irreducibilis* waarbij

$$\Delta = \left(\frac{q}{2}\right)^2 - \left(\frac{p}{3}\right)^3 < 0.$$

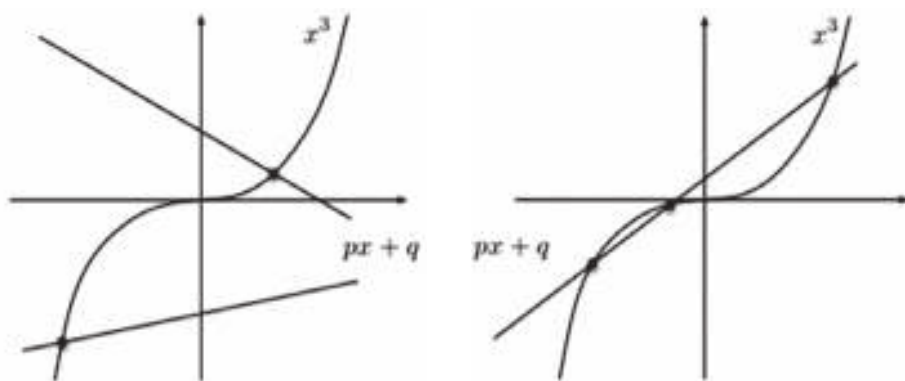
In dit geval heeft de vergelijking zelfs drie reële oplossingen, zoals in Figuur 1 geïllustreerd. De algemene oplossing

$$x = \sqrt[3]{\frac{q}{2} + \sqrt{\Delta}} + \sqrt[3]{\frac{q}{2} - \sqrt{\Delta}}$$

maakt echter gebruik van de vierkantswortel van het negatieve getal  $\Delta$ , wat voor problemen zorgde in het hoofd van Cardano en menig ander wiskundig brein van die tijd.



Een getormenteerde Cardano



Figuur 1 Oplossingen van een derdegraadsvergelijking volgens del Ferro en Tartaglia (links) en volgens Cardano (rechts).

Bekijk bijvoorbeeld de vergelijking  $x^3 = 15x + 4$ , waarvan  $x = 4$  en  $x = -2 \pm \sqrt{3}$  de oplossingen zijn, reële getallen zonder meer. De algebraïsche oplossing van Cardano kon echter enkel worden genoteerd als

$$x = \sqrt[3]{2 + \sqrt{-121}} + \sqrt[3]{2 - \sqrt{-121}}.$$

Toen Cardano deze formule ontdekte, besefte hij dus dat hij soms een heel nieuw gebied van de wiskunde moest betreden, namelijk de wereld van de *imaginaire getallen*, om reële oplossingen te vinden vertrekkende van reële coëfficiënten in een derdegraadsvergelijking.

Waarschijnlijk beschouwde Cardano dit als een schoonheidsfoutje van de methode zelf en vermoedde hij dat later iemand een zuiverdere methode zou ontdekken om de reële oplossingen van een derdegraadsvergelijking te berekenen zonder onderweg een imaginaire wortel van een negatief getal te gebruiken. Maar in 1843 heeft Pierre Wantzel (1814–1848), dezelfde man die ook bewees dat het verdubbelen van de kubus en de trisectie van een hoek onmogelijk zijn met passer en liniaal, bewezen dat er voor vele derdegraadsvergelijkingen geen formule kan bestaan die de reële oplossingen berekent zonder daarbij vierkantwortels van negatieve getallen te ontmoeten.

Dus de complexe getallen bleken niet zomaar een tussenoplossing, en bij wiskundigen evolueerde het aanvaarden van het noodzakelijk kwaad traag maar gestaag tot het omarmen van het beste wat hen ooit overkomen is. Illustratief is de volgende uitspraak, die in de mond van de Franse wiskundige Jacques Hadamard (1865–1963) gelegd wordt:

“Le plus court chemin entre deux vérités dans le domaine réel passe par le domaine complexe.”

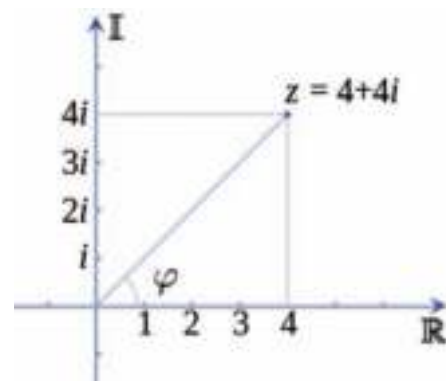
### Visualisatie

De complexe getallen waren aldus geboren, en al snel werden rekenregels voor optellen, aftrekken, vermenigvuldigen en worteltrekken ontwikkeld door Rafael Bombelli (1526–1572), die iets minder moeite had met deze vreemde getallen dan Cardano. Men worstelde echter nog met een notatieneel probleem, aangezien de notatie  $\sqrt{-1}$  nogal snel tot fouten<sup>3</sup> kon leiden zoals  $-1 = (\sqrt{-1})^2 = \sqrt{(-1)(-1)} = \sqrt{1} = 1$ . Het was de Zwitser Leonard Euler (1707–1783) die de notatie invoerde voor deze imaginaire eenheid, namelijk  $i$  (een vierkantswortel van  $-1$ , de andere is immers  $-i$ ).

Een complex getal  $z = a + bi$  mag dan virtueel overkomen, het bestaat wel uit twee reële componenten:  $a$  (het reële deel van  $z$ ) en  $b$  (het imaginaire deel van  $z$ ). De reële getallen zijn dus speciale complexe getallen met een imaginair gedeelte gelijk aan 0, en de hierboven reeds genoemde wortels van negatieve getallen zijn complexe getallen met reëel gedeelte gelijk aan 0.



Rafael Bombelli



Figuur 2

Complexe getallen voegen dus een imaginaire component toe aan de bestaande getallen, en deze kunnen we ons voorstellen als een extra dimensie bij de reële getallen. Dit brengt ons tot de visualisering van complexe getallen in het complexe vlak, zie Figuur 2. Deze meetkundige voorstelling werd vooral populair sinds de grote wiskundige Carl Friedrich Gauss (1777–1855) het gebruik ervan verspreidde toen hij in 1831 eindelijk zijn eigen twijfels over de complexe getallen had overwonnen. Meteen kwamen complexe getallen uit de taboesfeer. Inderdaad, zodra mensen zich iets kunnen voorstellen, dan bestaat het ook echt voor hen. Het verschil tussen de werkelijke wereld en de wereld zoals wij ze aantreffen, is te subtiel voor ons. De werkelijkheid is voor ons wat we waarnemen, of toch tenminste wat we met onze fantasie in verband brengen met een waarneming, bijvoorbeeld door visualisatie. We geloven in het getal 5 omdat we dit kunnen voorstellen door vijf vingers.



Leonard Euler



Carl Friedrich Gauss



Sir William Rowan Hamilton



Abraham de Moivre

Ook al spreken we tot op de dag van vandaag nog van het vlak van Gauss, deze meetkundige voorstelling werd eerder reeds gepresenteerd in 1799 in een artikel van de Noor Caspar Wessel (1745–1818). Het artikel was in het Deens geschreven en werd gepubliceerd in een tijdschrift dat buiten Denemarken slechts sporadisch gelezen werd, dus zijn ideeën bleven lange tijd onopgemerkt. Ook in 1806 werd, onafhankelijk van Wessel, hetzelfde concept beschreven door de Franse amateur-wiskundige Jean-Robert Argand (1768–1822).

Vanaf toen werden complexe getallen beschouwd als wezens die in het vlak leefden, en het imaginaire gedeelte van deze getallen gewoon als een extra dimensie die het mogelijk maakt om te ontsnappen aan de reële getallen met de observeerbare lengtes. Voor de formele wiskundige was er niets mysterieus meer aan complexe getallen zoals  $5 - 3i$  of  $1 + i$ , aangezien hij

ze als gewone getallenkoppels  $(5, -3)$  of  $(1, 1)$  zag, met de gebruikelijke optelling en met een mooie, nieuwe vermenigvuldiging op punten:

$$(5, -3) \times (1, 1) = (8, 2),$$

want

$$(5 - 3i) \times (1 + i) = 5 + 5i - 3i + 3 = 8 + 2i.$$

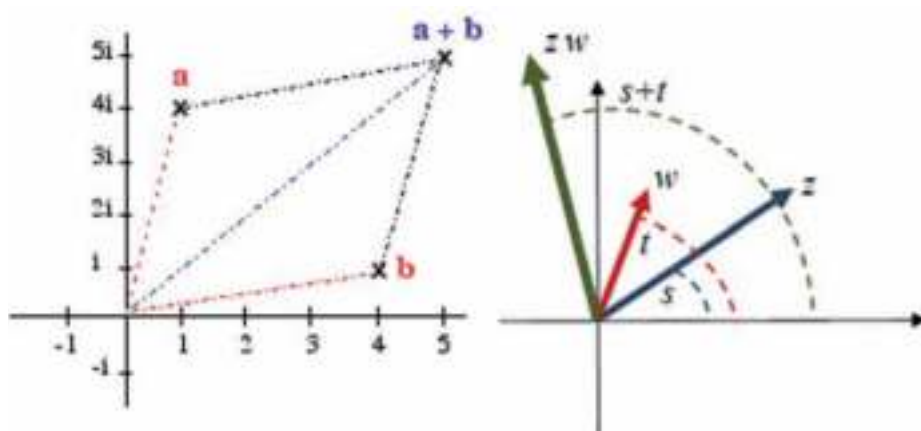
Een complex getal  $z = a + bi$  wordt dus gedemystificeerd als een entiteit bestaande uit twee reële getallen. Alternatief kunnen we met  $z$  ook de volgende reële getallen associëren: de modulus  $r = |z|$  (afstand tot oorsprong) en het argument  $t = \arg(z)$  (de hoek naar  $z$  vanuit de positieve reële as), zodat  $z = r(\cos t + i \sin t)$ . Zie Figuur 3. Dankzij deze voorstelling bleek een product van complexe getallen simpelweg een optelling van hoeken, waarbij de moduli zich vermenigvuldigen als een gewoon getallenproduct. De vermenigvuldiging met  $i$

is dus in het complexe vlak gewoonweg een rotatie over  $90^\circ$  tegen de wijzers van de klok in. Niets imaginairs aan de hand dus. Zoals eerder gebeurd was in de wiskunde, bleek ook nu de visualisering meer had te bieden dan het oorspronkelijke concept (wortels van negatieve getallen). Het hek was van de dam. Meetkundige constructies en goniometrische formules bleken plots veel eenvoudiger dankzij het complexe product. Ook fysici en ingenieurs maakten dankbaar gebruik van complexe getallen in hun berekeningen voor golven of elektrische netwerken.

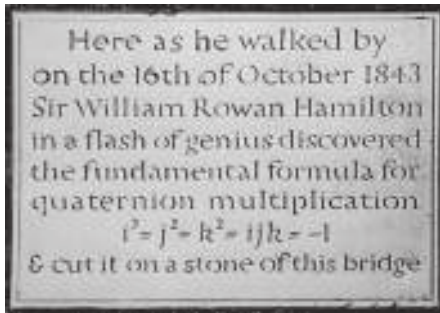
### Demystificatie

Het visualiseren van complexe getallen leidde dus tot een algemene acceptatie van deze oorspronkelijk verworpen morsels door wiskundigen en wetenschappers in heel Europa. Feit bleef echter dat de wiskundige definitie nog steeds opgebouwd was rond de mystieke constructie van de eenheid  $i$  als een wortel van  $-1$ . In 1833 was het de ler sir William Rowan Hamilton (1805–1865) die hier een einde aan maakte door de verzameling van complexe getallen  $\mathbb{C}$  algebraïsch te definiëren als de verzameling van geordende paren  $(a, b) \in \mathbb{R}^2$  waarvoor geldt dat de optelling  $(a, b) + (c, d) = (a + c, b + d)$  en de vermenigvuldiging  $(a, b) \times (c, d) = (ac - bd, bc + ad)$  goed gedefinieerd zijn. Het is dan uiteraard slechts een kwestie van notatie om  $(a, b)$  uit te drukken als  $a + bi$  of omgekeerd.

Enkele jaren later, in 1843, ontdekte<sup>4</sup> Hamilton een gelijksoortige vermenigvuldiging op quadrupels (voor tripels lukte dit



Figuur 3



niet, tot zijn grote frustratie) met dezelfde mooie algebraïsche eigenschappen als bij de reële en complexe getallen, met dit verschil dat de vermenigvuldiging nu niet meer commutatief is (de uitkomst hangt hier nu wel af van de volgorde van de factoren). Deze nieuwe getallen worden *quaternionen* genoemd, en de verzameling wordt aangeduid met de letter  $\mathbb{H}$  ter ere van Hamilton. De quaternionen bestaan net als complexe getallen uit een reëel deel, maar deze keer bevatten ze drie soorten imaginaire delen:

$$q = a + bi + cj + dk.$$

De imaginaire eenheden  $i$ ,  $j$  en  $k$  voldoen hierbij aan de relaties

$$i^2 = j^2 = k^2 = ijk = -1.$$

Verder geldt nog dat

$$ij = k = -ji, \quad jk = i = -kj \quad \text{en} \quad ki = j = -ik.$$

Zoals de vermenigvuldiging van complexe getallen een handig rekenmiddel bleek te zijn voor rotaties in het vlak, is de vermenigvuldiging van quaternionen erg bruikbaar in vele toepassingen om rotaties in 3D voor te stellen. Bijgevolg hebben ze vandaag de dag nog een onmisbare status in computergraphics, controletheorie, signaalverwerking, fysica, moleculaire dynamica, en ga zo maar door.

### Het gebruik

Omdat de complexe getallen het bedrijven van vele wetenschappen sterk vereenvou-

digen en bovendien een verklaring geven voor sommige fenomenen, hebben ze een bestaansrecht verdiend dat verder gaat dan enkel het dienen als een handige reken-tool. Dit zien we duidelijk in de kwantummechanica, waar de elementaire deeltjes zich propageren als een superpositie van complex-waardige waarschijnlijkheden (golffuncties), waarbij de reële modulus overeenkomt met de reële mogelijkheden bij een meting of observatie. Omdat bij mensen de werkelijkheid samenvalt met de voorstelling van de werkelijkheid, zouden we kunnen zeggen dat de complexe getallen 'echt bestaan'.

Maar al bij al worden de complexe getallen toch het meest bemind in het gebied waar ze het eerst opdoken, namelijk de algebra. Ze geven immers een volmaakt en volledig kader voor alle algebraïsche bewerkingen: som, verschil, product, deling, machten en wortels. Enkel door  $i$  te introduceren (als een vierkantswortel van  $-1$ ), kunnen we nu alle vierkantswortels uit negatieve getallen berekenen en ook alle hogere wortels. Ieder getal heeft in het complexe vlak bijvoorbeeld exact vijf vijfdemachtswortels die de hoekpunten vormen van een gelijkzijdige vijfhoek.

Bovendien krijgen we cadeau dat *iedere* veeltermvergelijking oplossingen heeft zodra we complexe getallen toelaten, zelfs als we de complexe getallen zelf als coëfficiënten mogen kiezen, terwijl we enkel de oplossing van  $x^2 + 1 = 0$  toegevoegd hebben. Dit is de Hoofdstelling van de Algebra die meestal toegewezen wordt aan Jean le Rond d'Alembert (1717–1783), ook al was zijn bewijs in 1746 onvolledig (het eerste rigoureuze bewijs werd geformuleerd door Argand). Bijvoorbeeld de vergelijking  $x^2 - 2x + 2 = 0$  heeft geen reële oplossingen wegens een negatieve discriminant. Maar je kan uitrekenen dat  $(1 + i)^2 - 2(1 + i) + 2 = 0$ . Met andere woorden: als we onze reële getallen laten en onze getallen verrijken met een

imaginair gedeelte, vinden we wel een oplossing, namelijk  $1 + i$ . De andere oplossing van deze vergelijking wordt gegeven door  $1 - i$ .

Terugkijkend op de meetkundige voorstelling van de vermenigvuldiging van complexe getallen, liet ook Euler zich nog verleiden tot enige vorm van wiskundig geëxperimenteer met een verbluffend mooi resultaat als gevolg. De basis van deze vermenigvuldiging, waarbij de argumenten simpelweg dienen opgeteld te worden, ligt namelijk in de formule van de Moivre, genoemd naar de Franse wiskundige en statisticus Abraham de Moivre (1667–1754):

$$\cos n\theta + i \sin n\theta = (\cos \theta + i \sin \theta)^n.$$

Euler liet zich hierdoor inspireren om de exponentiële functie  $e^x$  ook op complexe getallen toe te passen. Hij vond voor een veelvoud  $ti$  van  $i$  dat

$$e^{it} = \cos t + i \sin t.$$

Het gevolg is bekend: de door vele wiskundigen met superlatieven overgoten formule

$$e^{i\pi} + 1 = 0,$$

waarin vijf belangrijke getallen ( $e$ ,  $i$ ,  $\pi$ ,  $0$  en  $1$ ) op elegante wijze met elkaar in verband worden gebracht.

In het complexe vlak blijkt een exponentiële functie dus een golvend karakter te vertonen, aangezien ze gelijk is aan een combinatie van sinussen en cosinussen. Omdat deze exponentiële functies standaardoplossingen blijken te zijn voor vele vergelijkingen die systemen beschrijven (mechanische, biologische, ...), verklaart de aanwezigheid van niet-reële nulpunten dat onze (wiskundige voorstelling van de) wereld zich niet enkel exponentieel gedraagt, maar dat ze ook het decor is van talrijke golven en trillingen. In gebieden zoals signaaltheorie of regeltechnieken blijkt het complexe vlak dan ook de geschikte plaats om frequenties te beschrijven en de stabiliteit van processen te begrijpen. ☞

### Noten

- 1 Ars Magna (1545), hoofdstuk XXXVII.
- 2 Stel je even de kortsluiting voor in het brein van bijvoorbeeld een Middeleeuwse wiskundige, wanneer die oog in oog stond met een negatief getal, terwijl hij getallen altijd beschouwde als een fysische lengte. In Europa werd het rekenen met negatieve getallen pas vanaf de zeventiende eeuw gemeengoed, maar in India werden ze al in de zevende eeuw gebruikt (positieve getallen werden *fortuinen* en negatieve getallen

werden *schulden* genoemd), en in China al in de derde eeuw. Maar in onze contreien kwam je tot de zestiende eeuw nooit een vergelijking van de vorm  $3x^2 - 2x - 7 = 0$  tegen, maar eerder  $3x^2 = 2x + 7$  omdat de coëfficiënten enkel betekenis hadden als lengtes, en dus als positieve getallen.

- 3 De eigenschap  $\sqrt{a}\sqrt{b} = \sqrt{ab}$  geldt namelijk enkel voor niet-negatieve getallen  $a$  en  $b$ .
- 4 Nota bene tijdens een wandeling met zijn

vrouw langs het *Royal Canal* in Dublin. Hij kerfde zijn ontdekking neer in een steen langs de *Broom Bridge*, waar elk jaar op 16 oktober, de verjaardag van deze heuglijke gebeurtenis, wiskundigen samenkomen tijdens de *Hamilton Walk* om de geboorte van de moderne algebra te gedenken. In feite ontdekte Gauss de quaternionen reeds in 1819, maar dat werk werd pas in 1900 postuum gepubliceerd waardoor het in eerste instantie onopgemerkt bleef.

## Krzysztof R. Apt

Centrum Wiskunde & Informatica, Amsterdam  
en MIMUW, University of Warsaw  
apt@cwi.nl

## Einar Fredriksson

IOS Press  
Amsterdam  
e.fredriksson@iospress.nl

**Event** PTM Jubilee Congress, 3–7 September 2019, Kraków

# 100th anniversary Polish Mathematical Society

From 3 to 7 September 2019 the Polish Mathematical Society celebrated its 100th anniversary with a Jubilee Congress in Kraków (Cracow), Poland. This is a short account of this congress by Krzysztof R. Apt and Einar Fredriksson.

The Polish Mathematical Society (Polskie Towarzystwo Matematyczne, in short PTM) was founded in Kraków (Cracow), 2 April 1919, less than half a year after Poland regained independence at the end of the First World War. (Between 1795 and 1918 the country was divided between Germany, Austria and Russia.) The founding group consisted of 16 mathematicians, among them Stefan Banach and Otto Nikodym. The society was first a local organization, but soon became a countrywide one. In particular, in November 1919 some Warsaw mathematicians, including Samuel Dickstein and Wacław Sierpiński, became its members.

In 1920 the PTM founded the *Fundamenta Mathematicae* journal that exists up to the present day. The journal and its name were conceived by Zygmunt Janiszewski. Unfortunately, he did not live to see the first issue since he succumbed soon after to the influenza pandemic at the age of 31. Wacław Sierpiński and Stefan Mazurkiewicz took over as Editors-in-Chief. The first is-

sue consisted of articles exclusively written by Polish mathematicians, but as a gesture towards the international community they were all written in French (except one written in Italian).

Kazimierz Kuratowski mentions in his historical book [1] that from the beginning the PTM maintained close contacts with mathematicians in other countries and cites as examples P. S. Aleksandrow, Elie Cartan, E. Čech, S. Lefschetz, T. Levi-Civita, N. N. Łuzin, P. Montel, R. L. Moore, G. Vitali, J. Winogradow, and E. Zermelo.

The decade preceding the WWII was a period of glory of Polish mathematics, especially flourishing in Lwów (now Lviv, Ukraine). A group of prominent mathematicians, including Stefan Banach, Mark Kac, Stanisław Mazur, Hugo Steinhaus, and Stanisław Ulam, worked at the Lwów School of Mathematics, notably in functional analysis, set theory, topology and probability theory.

So, not surprisingly, the first congress of the PTM took place in Lwów in 1927 and

gathered about 200 participants. Ten arrived from abroad, among them John von Neumann from Budapest and Witold Hurewicz from Amsterdam.

Throughout its existence several famous mathematicians were presidents of the PTM. Perhaps the best known are (chronologically): Samuel Dickstein, Stefan Banach, Kazimierz Kuratowski, and Wacław Sierpiński.

To commemorate the 100th anniversary of the PTM a Jubilee Congress took place in Kraków from 3 to 7 September 2019. It was an impressive event that attracted 852 participants and led to no less than 508 lectures. The list of participants read as a ‘Who is Who in Polish mathematics’, with only few exceptions, such as Jan Mycielski and Andrzej Ehrenfeucht from the University of Boulder, Colorado, USA, and Janusz Onyszkiewicz (a former Minister of Defence in the first post-communist government and Solidarity pioneer), a former mathematician at the Mathematics Department of the Warsaw University. All three of them were active in mathematical logic, and connected in the sixties and seventies with the Warsaw seminar of the great logician Andrzej Mostowski; we both were his students.



Plenary meeting of the congress

In total there were 34 plenary lectures, about one third of them delivered by Polish mathematicians living abroad, which testifies to the size of the Polish mathematical diaspora. Several (almost exclusively Polish) participants arrived from Canada, USA, France, UK, Australia, and other countries. (To our knowledge there were three participants from the Netherlands.)

All talks were supposed to be given in Polish, though some of the invited speakers living abroad after a general introduction switched to English. (The website of the congress stated: “English will only be acceptable in case of plenary lectures given by those invited guests, who have been living abroad for many years and thus feel more comfortable talking about mathematics in a foreign language.”)

During the opening ceremony Jean-Pierre Bourguignon, the President of the European Research Council, obtained an honorary membership of the society. Also a number of the society awards were conferred.

The extensive scientific programme was divided into several parallel sessions that were named after famous Polish mathematicians. The organizers of the sessions tried to adjust the subjects of the talks to the sessions’ names.

In particular, one of us was a co-organizer of a session on Logic and Theoretical Information Science, called ‘Tarski’, which included a historical lecture about Alfred Tarski, lectures on Mathematical Logic, and on Theoretical Computer Science related to decidability.

The programme of the congress reflected a broad understanding of mathematics in Poland. In particular, there were sessions on the Didactics of Mathematics, Philosophy of Mathematics, and on Mathematical Physics (“Kac and Ulam”). Also, there were special sessions devoted to Theoretical Computer Science (with invited lectures on Algorithmic Game Theory), on Mathematics in Economics and Finance, and on Mathematical Olympiad Problems of ‘remarkable beauty’.

The scientific programme also included a number of panels, in particular about the state of Polish mathematics, popularization of mathematics, and on the education of mathematics teachers.

*Wiadomości Matematyczne* (Mathematical News), a magazine of the Polish Mathematical Society, devoted a special, 269 pages long, issue to the anniversary. It contains among others accounts of the first three congresses of the society, that took place in 1927, 1931, and 1937, and interviews with the last four presidents of the European Mathematical Society.

The event was widely covered in the Polish press. There was also an extensive social programme and several interesting ‘side’ events. One of them was indirectly related to the aforementioned Lwów School of Mathematics. The meeting place of their members was the Scottish Café and the ‘Scottish Book’ written there contained open problems posed by mathematicians. 24 of these were given by Banach’s collaborator Stanisław Mazur, and for many of the problems a prize was offered to the person giving the solution. For one of the problems (from 1936), Mazur had offered a live goose.

A young Swede, Per Enflo, showed in 1972 that the problem had a negative solution, and was later, in Warsaw, duly presented with a live goose by Mazur. In a film preceding the conference on the theme of the Lwów School, Per Enflo played a part. At the evening of the closing day he also gave a piano concert.

On the first evening of the conference there was a live performance of Opera Matematyczna, produced by the recently deceased Roman Kołakowski. The opera also focussed on the Lwów School of Mathematics, Banach, and the turbulent times around the city in the period before and including the WWII. Between the wars Lwów was a legendary Polish city, with outstanding contributions not only to science, but also the arts and media.

Another film shown during the conference dealt with the other profound Polish contribution to mathematics and computer science, playing at the same time as the Lwów School, but this time having its centre in Poznań. Cryptologists there had been working on deciphering a German encryption machine ‘Enigma’ since 1930. The machine went through improvements during a decade and was adapted for use by the German army/Luftwaffe, as well as the navy. With the help of the French security

service, the three leading Polish cryptologists, Marian Rejewski, Jerzy Różycki and Henryk Zygalski, were moved to France just after the outbreak of the WWII, including their research and samples of Enigma.

This research proved critical for the Allied War effort as it became a basic building block for the UK intelligence work at Bletchley Park from the outset of the war. A large number of British cryptology experts worked towards the cracking of the German codes, most notably the logician and computer science pioneer Alan Turing. The accomplishments there became part of early computer history, but the significant contribution by the Polish cryptologists has been underexposed. Subsequent publications, and not the least a publication three years ago by the French authorities, threw new light on the Polish contribution.

Alan Turing’s nephew Dermot Turing was present at the conference, promoting a Polish translation of his recent book — partly based on the new French publication. At a large ceremony in the Peter and Paulus Church in Kraków, the National Pantheon, the three cryptologists, Rejewski, Różycki and Zygalski, were re-buried during the last day of the conference.

A significant participation of mathematics teachers from high schools and a variety of educational institutions, as well as a new organization ‘Women in Polish Mathematics’, showed the broad anchorage of mathematics awareness and activity of the PTM — with active chapters in several regions of the country.

Given that in Poland a lunch is traditionally the main meal, the catering during the conference presented a — successfully met — challenge. During the day the conference took place at the new campus of the university, the lunch was ingeniously served in the emptied and thoroughly cleaned underground garage, the only space that could include so many guests. Finally, a large banquet was held at the Royal Castle of Niepołomice some 40 km outside of Kraków.

#### Acknowledgement

Stefan Jackowski, the president of the PTM from 2005 until 2013, provided us with useful historical information about the PTM and *Fundamenta Mathematicae*.

#### Reference

- 1 Kazimierz Kuratowski, *Pół Wieku Matematyki Polskiej 1920–1970*, Wiedza Powszechna, 1973, in Polish. English version appeared as:

*A Half Century of Polish Mathematics: Remembrances and Reflections*, International Series in Pure and Applied Mathematics, Vol.

108, Wydawnictwo Naukowe PWN/Pergamon Press, 1980.

Joris van der Hoeven

CNRS, Department of Mathematics  
Simon Fraser University, Burnaby, B.C.  
vdhoeven@lix.polytechnique.fr

## De oplossing

# Getallen vermenigvuldigen in $O(n \log n)$ stappen

Onlangs werd door David Harvey en Joris van der Hoeven bewezen dat twee getallen van  $n$  cijfers kunnen worden vermenigvuldigd in  $O(n \log n)$  stappen [12]. In 1971 werd het bestaan van zo'n methode door Schönhage en Strassen geuit als vermoeden [21]. Ook verwachtten zij dat het sneller niet gaat, iets dat we nog steeds niet weten. Joris van der Hoeven vat in dit artikel eerst een lange geschiedenis kort samen en geeft dan inzicht in het nieuwe bewijs.

Wat is de beste manier om twee gehele getallen met elkaar te vermenigvuldigen? Deze ogenschijnlijk eenvoudige vraag is misschien wel het oudste onopgeloste wiskunde-probleem. Zo is het zeker tien maal ouder dan het vermoeden van Fermat, dat inmiddels de stelling van Wiles heet.

Wél moet hier natuurlijk duidelijk worden gemaakt wat we met 'beste' bedoelen. Dit werd eigenlijk pas mogelijk na de uitvinding van de Turingmachine: uitgerust met een precies rekenmodel kunnen we spreken over het aantal stappen  $M(n)$  dat nodig is om twee getallen van  $n$  cijfers met elkaar te vermenigvuldigen. De beste methode is dan diegene waarvoor  $M(n)$  zo langzaam mogelijk stijgt als  $n$  groter wordt.

Neem bijvoorbeeld de methode van de lagere school. Dan vermenigvuldigen we elk cijfer van het eerste getal met elk cijfer van het tweede getal terwijl we de resultaten op de juiste posities bij elkaar optellen. Dat geeft  $M(n) = O(n^2)$ : er bestaat een constante  $C > 0$  met  $M(n) \leq Cn^2$  voor iedere  $n$ .

Om onze hoofdvraag onafhankelijk te maken van de daadwerkelijke Turingma-

chine waarop we onze berekening doen, zijn we enkel geïnteresseerd in rekentijd op een constante factor na. Een honderd maal snellere methode is dus geen wezenlijke verbetering, maar een  $\log \log \log n$

maal sneller algoritme is een enorme stap voorwaarts.

Waarschijnlijk formuleerde Kolmogorov de vraag voor het eerst op deze manier, tijdens een beroemd seminarium in Moskou. In zijn enthousiasme lanceerde hij ook meteen het vermoeden dat  $n^2 = O(M(n))$ . Want, zo redeneerde hij, als er een betere methode bestond dan die van school, dan zou die sinds zesduizend jaar toch wel zijn uitgevonden.

De nauwkeurige formulering van een probleem maakt het zoeken naar oplossingen makkelijker. Maar het ontbreken daarvan sluit het zoeken naar oplossingen nou ook weer niet uit. De Babyloniërs berekenden  $\sqrt{2}$  al tot op zestien decimalen achter de komma. Wellicht vinden we ooit een kleitablet waarop hogesnelheidsvermenigvuldigingsmethodes staan uitgelegd. Liefhebbers van het getal  $\pi$ , zoals de bij ons bekende Ludolph van Ceulen, zouden daar vast wel wat aan kunnen hebben gehad (zie Figuur 1).

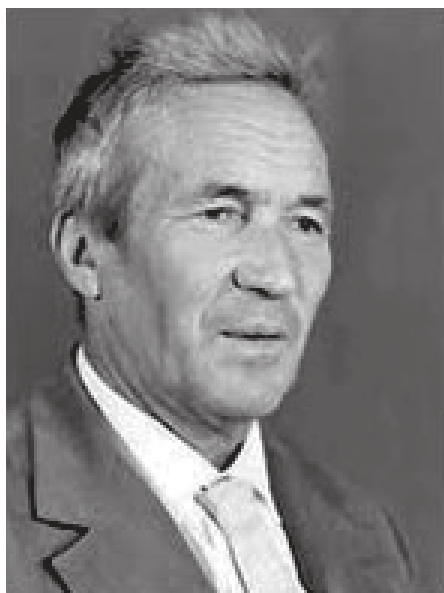


Foto: Nina Ramaswamy

**Figuur 1** Gedenksteen in de Pieterskerk in Leiden, met een reconstructie van de oorspronkelijke tekst van de grafsteen van Ludolph van Ceulen (1540–1610), die vijftwintig jaar van zijn leven besteedde aan het uitrekenen van 35 decimalen van  $\pi$ .

## Karatsuba

Kolmogorovs vermoeden hield niet lang stand. Na drie weken werd hij verrast door een jonge student met een vermenigvuldigingsmethode in  $O(n^{\log 3 / \log 2})$  stappen. Meteen schreef hij het nieuwe algoritme op en publiceerde het onder de naam van de bedenker, Karatsuba, samen met een ander artikel dat er niets mee te maken had [15, 16].



Andrej Kolmogorov

Laten we Karatsuba's idee uitleggen met een voorbeeld:

$$u = 220629012020,$$

$$v = 314159265358.$$

Eerst splitsen we beide getallen in tweeën:

$$\begin{aligned} u &= \overbrace{220629}^a \times \overbrace{1000000}^x + \overbrace{012020}^b, \\ v &= \overbrace{314159}^c \times \overbrace{1000000}^x + \overbrace{265358}^d. \end{aligned}$$

Daarna doen we twee optellingen en drie vermenigvuldigingen:

$$\begin{aligned} a + b &= 232649, \\ c + d &= 579517, \\ ac &= 069312586011, \\ bd &= 003189603160, \\ (a + b)(c + d) &= 134824050533. \end{aligned}$$

Nu merken we op dat het slechts twee keer aftrekken vergt om

$$\begin{aligned} ad + bc &= (a + b)(c + d) - ac - bd \\ &= 62321861362 \end{aligned}$$

te bepalen. Tot slot geldt

$$\begin{aligned} uv &= (ax + b)(cx + d) \\ &= acx^2 + (ad + bc)x + bd, \end{aligned}$$

zodat we klaar zijn na een laatste optelsom

$$\begin{array}{r} 069312586011000000000000 \quad acx^2 \\ 623218613620000000 \quad (ad + bc)x \\ 003189603160 \quad bd \\ \hline 069312648332864551603160 \quad uv \end{array}$$

Al met al hebben we een vermenigvuldiging van twaalf cijfers teruggevoerd tot drie vermenigvuldigingen van zes cijfers en een stel optel- en aftreksommen.



Anatoly Karatsuba

In het algemeen kost het vermenigvuldigen van twee maal zo lange getallen ongeveer drie maal zoveel tijd. Dit kan goed worden samengevat in een recurrente ongelijkheid:

$$M(2n) \leq 3M(n) + O(n).$$

Voor een zekere constante  $C$  en  $n = 2^r$  hebben we dus

$$\begin{aligned} M(n) &\leq 3M(n/2) + Cn \\ &\leq 9M(n/4) + (1 + \tfrac{3}{2})Cn \\ &\leq 27M(n/8) + (1 + \tfrac{3}{2} + \tfrac{9}{4})Cn \\ &\vdots \\ &\leq 3^r M(1) + O((\tfrac{3}{2})^r n) \\ &= O(3^r). \end{aligned}$$

Nu kunnen we links altijd extra nullen aan een getal toevoegen zodat het aantal cijfers een tweemacht wordt. Uiteindelijk bewijzen we zo dat

$$M(n) = O(n^{\log 3 / \log 2}).$$

### Van getallen naar veeltermen

Een van de ingrediënten van Karatsuba's methode is het opsplitsen van getallen in twee delen. Dit maakte het mogelijk om  $u$  en  $v$  te zien als veeltermen  $ax + b$  en  $cx + d$  van graad  $< 2$ . In feite kwam dat simpelweg neer op het werken in een talstelsel met grondtal  $x = 1000000$  in plaats van 10.

Dit idee om het rekenen met gehele getallen te vervangen door het rekenen met veeltermen werd in de negentiende eeuw reeds geopperd door Kronecker. Zo kunnen we een getal van  $n$  cijfers opsplitsen in  $l$  brokken van  $p := \lceil n/l \rceil$  cijfers en daar weer een veelterm van maken.

Door het aantal brokken  $l$  groter dan twee te kiezen, werden er in de zestiger jaren een reeks snellere varianten van Karatsuba's methode ontwikkeld [17, 20, 22]; zie Tabel 1 voor een historisch overzicht.

Zonder al te ver op details in te gaan, is elk van deze varianten gebaseerd op een veralgemening van Karatsuba's rekentruc. In dit geval wordt de vermenigvuldiging van twee veeltermen van graad  $< l$  gereduceerd tot  $2l - 1$  vermenigvuldigingen van coëfficiënten, waarna

$$M(n) = O(n^{\log(2l-1)/\log(l-1)}).$$

|       |                    |                                                                  |
|-------|--------------------|------------------------------------------------------------------|
| -4000 | Onbekend           | $O(n^2)$                                                         |
| 1962  | Karatsuba          | $O(n^{\log 3 / \log 2})$                                         |
| 1963  | Toom               | $O(n^{2.5 \sqrt{\frac{\log n}{\log 2}}})$                        |
| 1966  | Schönhage          | $O(n^{2 \sqrt{\frac{2 \log n}{\log 2}} (\log n)^{\frac{3}{2}}})$ |
| 1969  | Knuth              | $O(n^{2 \sqrt{\frac{2 \log n}{\log 2}} \log n})$                 |
| 1971  | Pollard            | $O(n \log n \log \log n \dots)$                                  |
| 1971  | Schönhage-Strassen | $O(n \log n \log \log n)$                                        |
| 2007  | Fürer              | $O(n \log n 2^{O(\log^* n)})$                                    |
| 2014  | Harvey-vdH-Lecerf  | $O(n \log n 8^{\log^* n})$                                       |
| 2017  | Harvey             | $O(n \log n 6^{\log^* n})$                                       |
| 2017  | Harvey-vdH         | $O(n \log n (4\sqrt{2})^{\log^* n})$                             |
| 2018  | Harvey-vdH         | $O(n \log n 4^{\log^* n})$                                       |
| 2019  | Harvey-vdH         | $O(n \log n)$                                                    |

**Tabel 1** Betere en betere bovengrenzen voor  $M(n)$  in de loop van de jaren... In de tabel is de functie  $\log^x$  gedefinieerd door  $\log^* x = \min\{n \in \mathbb{N} : (\log \circ \dots \circ \log)(x) \leq 1\}$ .

### Van veeltermen naar kringtermen

Vanaf nu gaan we het vooral hebben over het vermenigvuldigen van veeltermen en is het handig om te werken met coëfficiënten in een algemene ring  $R$ . De precieze keus van  $R$  laten we voorlopig in het midden.

Voor wat komen gaat, is het ook handig om met zogenaamde ‘kringtermen’ in plaats van veeltermen te werken. Een *kringterm* van lengte  $l$  is een element van  $R[x]/(x^l - 1)$ .

De relatie  $x^l = 1$  treedt pas in actie zodra de graad van een veelterm over de  $l$  gaat. Het uitrekenen van een product van twee veeltermen in  $R[x]$  van graad  $< l/2$  kunnen we dus net zo goed in  $R[x]/(x^l - 1)$  doen.

Het voordeel van kringtermen is dat we een aantal nieuwe rekentruucs rijker worden. Veronderstel bijvoorbeeld dat  $l = 2$  en dat 2 omkeerbaar is in  $R$ . Dan is het mogelijk om Karatsuba’s methode verder te verbeteren: modulo  $x^2 - 1$  geldt

$$(a_1x + a_0)(b_1x + b_0) = \frac{\hat{a}_0\hat{b}_0 - \hat{a}_1\hat{b}_1}{2}x + \frac{\hat{a}_0\hat{b}_0 + \hat{a}_1\hat{b}_1}{2},$$

waar

$$\begin{aligned}\hat{a}_0 &= a_0 + a_1, & \hat{b}_0 &= b_0 + b_1, \\ \hat{a}_1 &= a_0 - a_1, & \hat{b}_1 &= b_0 - b_1.\end{aligned}$$

In  $R[x]/(x^2 - 1)$  vergt het uitrekenen van een product dus slechts twee vermenigvuldigingen in  $R$ . Ook zijn er een aantal optellingen, aftrekkingen en delingen door twee nodig.

Bovenstaande relaties zijn het gevolg van

$$(x^2 - 1) = (x - 1)(x + 1) \quad (1)$$

en toepassing van de Chinese reststelling op deze ontbinding:

$$R[x]/(x^2 - 1) \cong R[x]/(x - 1) \times R[x]/(x + 1), \\ \frac{a_1x + a_0}{a_1x + a_0} \mapsto \left( \frac{a_0 + a_1}{a_0 - a_1} \right).$$

Dit maakt het mogelijk willekeurige berekeningen in  $R[x]/(x^2 - 1)$  te vervangen door berekeningen in  $R[x]/(x - 1) \times R[x]/(x + 1) \cong R^2$ .

### FFT-vermenigvuldigen

De ontbinding (1) geldt voor elke ring  $R$ . In sommige ringen kan ook  $x^l - 1$  op soortgelijke wijze ontbonden worden voor  $l > 2$ . Dat is het geval zodra  $R$  een element  $\omega$  bezit met  $\sum_{k=0}^{l-1} (\omega^j)^k = 0$ . Zo’n element  $\omega$  heet een *principiële eenheidswortel* van

orde  $l$  en leidt tot de ontbinding

$$x^l - 1 = \prod_{0 \leq k < l} (x - \omega^k).$$

Is  $l$  ook nog eens omkeerbaar in  $R$ , dan kan bovendien de Chinese reststelling worden toegepast op deze ontbinding:

$$R[x]/(x^l - 1) \cong \prod_{0 \leq k < l} R[x]/(x - \omega^k).$$

Van links naar rechts heet dit isomorfisme de *discrete fouriertransformatie* of DFT. Voor alle  $A \in R[x]$  en  $0 \leq k < l$  hebben we  $x = \omega^k$  en  $P(x) = P(\omega^k)$  modulo  $x - \omega^k$ , zodat

$$\text{DFT}(\bar{A}) = (\overline{A(1)}, \overline{A(\omega)}, \dots, \overline{A(\omega^{l-1})}).$$

De algebra  $R[x]/(x - \omega^k)$  is op zijn beurt weer isomorf met  $R$  voor elke  $k$ , zodat

$$R[x]/(x^l - 1) \cong R^l.$$

Nu is rekenen aan de rechterkant goedkoop: één vermenigvuldiging in  $R^l$  komt bijvoorbeeld neer op  $l$  vermenigvuldigingen in  $R$ . Als we zowel de DFT en de inverse DFT<sup>-1</sup> snel uit kunnen rekenen, dan hebben we dus een goede methode om kringtermen  $A, B \in R[x]/(x^l - 1)$  te vermenigvuldigen:

$$AB = \text{DFT}^{-1}(\text{DFT}(A)\text{DFT}(B)).$$

Dit heet *FFT-vermenigvuldigen*.

### De snelle fouriertransformatie

Maar hoe rekenen we zo’n DFT snel uit? Het geval  $l = 2$  bestudeerden we al eerder. Meer in het algemeen leidt de ontbinding

$$x^{2l} - 1 = (x^l - 1)(x^l + 1)$$

voor even lengtes  $2l$  tot een isomorfisme

$$R[x]/(x^{2l} - 1) \cong R[x]/(x^l - 1) \times R[x]/(x^l + 1).$$

Als  $A, B \in R[x]$  veeltermen van graad  $< l$  zijn, dan zendt dit isomorfisme  $A + Bx^l$  naar  $(A + B, A - B)$ , waar we voor het gemak de modulostrepen hebben weggelaten. Het uitrekenen van  $A \pm B$  komt neer op  $l$  maal optellen en aftrekken in  $R$ . Voor het isomorfisme in de andere richting komen daar  $2l$  delingen door twee bij.

Als  $\omega$  een principiële eenheidswortel van orde  $2l$  is, dan hebben we bovendien het volgende isomorfisme:

$$R[x]/(x^l + 1) \cong R[x]/(y^l - 1), \\ \sum_{0 \leq k < l} a_k x^k \mapsto \sum_{0 \leq k < l} (a_k \omega^k) y^k.$$

Het uitrekenen van dit isomorfisme komt neer op  $l$  vermenigvuldigingen met mach-

ten van  $\omega$ . Hier is het belangrijk om op te merken dat een vermenigvuldiging met een macht van  $\omega$  soms goedkoper is dan een willekeurige vermenigvuldiging in  $R$ .

Al met al laat dit zien hoe een DFT van lengte  $2l$  kan worden gereduceerd tot twee DFTs van lengte  $l$ . Schrijven we  $F(l)$  voor de tijd die het kost om een DFT van lengte  $l$  uit te rekenen,  $T_{\pm}$  voor de tijd van een optelling of aftrekking in  $R$ , en  $T_{\omega}$  voor de tijd van een vermenigvuldiging met een macht van  $\omega$ , dan hebben we

$$F(2l) \leq 2F(l) + 2lT_{\pm} + lT_{\omega}.$$

Passen we deze formule recursief toe in het geval dat  $l = 2^{\lg l}$  een tweemacht is, dan vinden we

$$\begin{aligned}F(l) &\leq 2F(l/2) + l(T_{\pm} + \tfrac{1}{2}T_{\omega}) \\ &\leq 4F(l/4) + 2l(T_{\pm} + \tfrac{1}{2}T_{\omega}) \\ &\vdots \\ &\leq (l/2)F(2) + (lg l - 1)l(T_{\pm} + \tfrac{1}{2}T_{\omega}) \\ &\leq l lg l (T_{\pm} + \tfrac{1}{2}T_{\omega}).\end{aligned} \quad (2)$$

Voor de inverse transformatie komen daar ook nog  $l$  delingen door  $l$  bij.

### Intermezzo

Voordat we verder gaan, is het een mooi moment voor wat opmerkingen. De FFT brak door in 1965, na de publicatie van Cooley en Tukey’s artikel [3]. Maar een soortgelijke methode werd eerder beschreven in ongepubliceerd werk van Gauss [6, 14].

Daarnaast hebben we gezien dat een vermenigvuldiging van kringtermen kan worden gereduceerd tot twee directe plus één inverse DFT. In 1970 merkte Bluestein op dat een DFT van lengte  $l$  ook kan worden gereduceerd tot een kringproduct van dezelfde lengte  $l$  [2].

Laten we, om dit uit te leggen, voor het gemak veronderstellen dat  $l$  even is en  $\eta$  een principiële eenheidswortel van orde  $2l$  met  $\eta^2 = \omega$ . Voor gehele  $j, k$  geldt dan

$$\eta^{(j+l)^2} = \eta^{j^2} \eta^{2l(j+l/2)} = \eta^{j^2}$$

en

$$\omega^{jk} = \eta^{j^2} \eta^{k^2} \eta^{-(j-k)^2}.$$

De  $j$ -de coëfficiënt van de DFT van een kringterm  $u_0 + \dots + u_{l-1}x^{l-1}$  is dus gelijk aan

$$\sum_{0 \leq k < l} u_k \omega^{jk} = \eta^{j^2} \sum_{0 \leq k < l} (u_k \eta^{k^2}) \eta^{-(j-k)^2}.$$

De rechtersom herkennen we nu als de



Volker Strassen (links) en Arnold Schönhage (rechts)

Foto: MFO, Konrad Jakobs

$j$ -de coëfficiënt van het product van de volgende twee kringtermen:

$$V = \sum_{0 \leq k < l} (u_k \eta^{k^2}) x^k,$$

$$W = \sum_{0 \leq k < l} \eta^{-k^2} x^k.$$

### Terug naar de gehele getallen

In mijn geboortjaar 1971 verschenen er maar liefst drie methodes om de FFT toe te passen op het vermenigvuldigen van gehele getallen [19, 21]. Elk van deze methodes was gebaseerd op een aparte keuze van  $R$ .

Het meest voor de hand ligt het om  $R = \mathbb{C}$  en  $\omega = e^{2\pi i/l}$  te nemen. In ons geval kunnen we natuurlijk alleen maar met benaderingen van complexe getallen werken. Voor het vermenigvuldigen van getallen van  $n$  cijfers kan worden bewezen dat benaderingen tot op  $C \log n$  cijfers achter de komma voldoende zijn voor een zekere constante  $C > 0$ . Dat betekent dat we kunnen werken met  $l = O(n/\log n)$  brokken van  $O(\log n)$  cijfers. In combinatie met (2) vinden we dan

$$M(n) = O(l \log l M(\log n)) = O(n M(\log n)).$$

Laten we deze formule recursief op zichzelf los, dan vinden we

$$M(n) = O(n \log n \log \log n \log \log \log n \dots).$$

Dit was het ‘eerste algoritme’ in het artikel van Schönhage–Strassen [21].

Het nulde algoritme werd echter al iets eerder door Pollard ontdekt [19]. Hij stelde voor om  $R = \mathbb{F}_p$  te nemen, waar  $p$  een priemgetal is van de vorm  $p = s2^r + 1$ ; hoe kleiner  $s$ , hoe beter. Voor zulke priemgetallen  $p$  weten we dat er primitieve eenheidswortels van orde  $2^r$  bestaan. Opnieuw is het dan mogelijk om  $\log p = O(\log n)$  en  $l = O(n/\log n)$  te kiezen, en we vinden een soortgelijke bovengrens voor  $M(n)$  als net. Eerlijkheidshalve moet er wel worden bijgezegd dat dit laatste níet in Pollards artikel stond. Hij was meer uit op een praktisch algoritme en beschreef verschillende optimalisaties. Voor zeer grote getallen is zijn algoritme op hedendaagse computers het beste [8].

Voor het ‘tweede algoritme’ van Schönhage–Strassen schakelen we over naar het binaire stelsel en nemen we  $R = \mathbb{Z}/(2^m + 1)\mathbb{Z}$ , waar  $m$  een tweemacht is. In deze ring hebben we per definitie  $2^m = -1$ , zodat  $\omega := 2$  een principiële eenheidswortel van orde  $2m$  is. Een ander voordeel is dat  $\omega$  een *snelle eenheidswortel* is. Daarmee bedoelen we dat we snel kunnen vermenigvuldigen met machten

van  $\omega$ : we schuiven gewoon de bits van het getal op terwijl we de relatie  $2^m = -1$  gebruiken zodra we de  $2^m$  passeren. Voor  $l \in \{m, 2m\}$  laten Schönhage en Strassen vervolgens zien hoe een vermenigvuldiging in  $\mathbb{Z}/(2^{lm/2} + 1)\mathbb{Z}$  kan worden gereduceerd tot  $l$  vermenigvuldigingen in  $R$ . Schrijven we  $M'(m)$  voor de kosten van één vermenigvuldiging in  $R$ , dan geeft dit

$$M'(lm/2) \leq lM'(m) + O(ml \log l). \quad (3)$$

De term  $O(ml \log l)$  komt van de DFTs, waar we gebruik maken van het feit dat  $T_\omega = O(l)$  in  $R$ . De term  $lM'(m)$  komt van de ‘interne’ vermenigvuldiging in  $\prod_{k=0}^{l-1} R[x]/(x - \omega^k) \cong R^l$ .

Omgerekend ten opzichte van  $n$  leidt (3) grofweg tot de ongelijkheid

$$M'(n) \leq 2n^{1/2} M'(n^{1/2}) + Cn \log n, \quad (4)$$

voor een zekere constante  $C$ . Deze formule kunnen we vervolgens ‘uitrollen’:

$$\begin{aligned} M'(n) &\leq 2n^{1/2} M'(n^{1/2}) + Cn \log n \\ &\leq 4n^{3/4} M'(n^{1/4}) + 2Cn \log n \\ &\leq 8n^{7/8} M'(n^{1/8}) + 3Cn \log n \\ &\vdots \\ &\leq n \log n M'(O(1)) + Cn \log n \log \log n. \end{aligned}$$

Dit bewijst dat  $M(n) = O(n \log n \log \log n)$ , een bovengrens die vijfenveertig jaar stand hield.

### Hoe verder?

Van de drie op de FFT gebaseerde methodes uit 1971 heeft de laatste methode één groot nadeel: omdat  $l \leq 2m$  wordt een vermenigvuldiging van lengte  $n$  ‘slechts’ gereduceerd tot vermenigvuldigingen van lengte  $O(\sqrt{n})$  in plaats van  $O(\log n)$ . In tegenstelling tot de twee andere methodes kosten de DFTs daarentegen bijna niets.



John Pollard

Dit levert twee sporen op voor verdere verbeteringen.

Een eerste mogelijkheid is om de kosten van DFTs over  $\mathbb{C}$  en/of  $\mathbb{F}_p$  te drukken. In 2007 lukte Fürer dit voor het eerst [5]. Zijn methode leidt tot een ongelijkheid van de vorm

$$\frac{M(n)}{n \log n} \leq K \frac{M(n')}{n' \log n'} + O(1),$$

$$n' = O((\log n)^2),$$

en de verbeterde bovengrens

$$M(n) = O(n \log n K^{\log^* n}),$$

$$\log^* x = \min\{k \in \mathbb{N} : (\log \circ \dots \circ \log)(x) \leq 1\}.$$

Fürer besteedde geen aandacht aan de precieze ‘uitdijingsfactor’  $K > 1$ . Vanaf 2014 lukte het David Harvey, Grégoire Lecerf en mijzelf om deze factor steeds verder naar beneden te jagen [9, 10, 11, 13]; zie Tabel 1.

Onze tweede optie is een verscherping van de ongelijkheid (4). Hier merken we op dat de factor 2 in  $2n^{1/2} M'(n^{1/2})$  precies wordt gecompenseerd door het feit dat  $\log \sqrt{n} = \frac{1}{2} \log n$ : bij het uitrollen kost elke iteratie precies  $Cn \log n$  stappen extra. Kunnen we deze factor 2 maar een fractie verbeteren, dan verloopt het uitrollen zich als volgt:

$$\begin{aligned} M(n) &\leq 1,98n^{1/2} M(n^{1/2}) + Cn \log n \\ &\leq 1,98^2 n^{3/4} M(n^{1/4}) \\ &\quad + (1 + 0,99) Cn \log n \\ &\leq 1,98^3 n^{7/8} M(n^{1/8}) \\ &\quad + (1 + 0,99 + 0,99^2) Cn \log n \\ &\vdots \\ &\leq o(n \log n) + 100 Cn \log n. \end{aligned}$$

Ho! Lezen we dat goed?

$$M(n) = O(n \log n).$$

Op deze wens kunnen we voortborduren. Zo is het ook genoeg om te bewijzen dat

$$M(n) \leq \alpha n^{(d-1)/d} M(n^{1/d}) + O(n \log n), \quad (5)$$

waar  $d \geq 2$  en  $\alpha < 1/d$ .

### Op naar hogere dimensies

Nu heeft de methode van Schönhage en Strassen inderdaad een frustrerend aspect: de kunstmatig aangemaakte eenheidswortel  $\omega = 2$  in  $R$  wordt eigenlijk reuze ‘ondergebruikt’. Om die reden is onze lengtereductie  $n \rightsquigarrow \sqrt{n}$  zeer bescheiden.

Nu zijn er ook DFTs die in meer dan één richting werken. Stel opnieuw dat  $R$  een willekeurige ring is met een principiële eenheidswortel  $\omega$  van orde  $l$ . Een  $d$ -di-

mensionale DFT bewerkstelligt dan het isomorfisme

$$R[x_1, \dots, x_d] / (x_1^l - 1, \dots, x_d^l - 1) \\ \cong \prod_{0 \leq k_1, \dots, k_d < l} R[x_1, \dots, x_d] / (x_1 - \omega_1^{k_1}, \dots, x_d - \omega_d^{k_d}).$$

Als we de DFTs in  $x_2, \dots, x_d$  nu vervangen door DFTs over de ring  $R[x_1] / (x_1^l - 1)$ , dan kosten ze veel minder, want  $x_1$  is een snelle eenheidswortel in deze ring. Het systematische gebruik van dit soort DFTs werd voor het eerst voorgesteld door Nussbaumer en Quandalle [18].

Met dat idee maken we meteen al een grote stap in de richting van (5). Als  $n = l^d$ , dan vergt een vermenigvuldiging in  $R[x_1, \dots, x_d] / (x_1^l - 1, \dots, x_d^l - 1)$  namelijk  $O(n \log n)$  optellingen en aftrekkingen in  $R$  plus  $n^{(d-1)/d}$  vermenigvuldigingen in  $R[x_1] / (x_1^l - 1)$ .

Er is echter één probleem: snel vermenigvuldigen in  $R[x_1, \dots, x_d] / (x_1^l - 1, \dots, x_d^l - 1)$  is niet hetzelfde als snel vermenigvuldigen in  $R[x] / (x^d - 1)$ . We hebben dus een manier nodig om kringtermen in één variabele  $x$  om te smeden tot kringtermen in  $d$  variabelen  $x_1, \dots, x_d$ .

### Met hulp van de oude Chinezen

Nu is het in bepaalde gevallen inderdaad mogelijk om van dimensie te veranderen. Stel dat  $l_1, \dots, l_d$  onderling ondeelbaar zijn. Volgens de Chinese reststelling hebben we dan

$$\mathbb{Z} / (l_1 \cdots l_d) \mathbb{Z} \cong \mathbb{Z} / l_1 \mathbb{Z} + \cdots + \mathbb{Z} / l_d \mathbb{Z}.$$

Formeel gesproken hebben we dus ook

$$x^{\mathbb{Z} / (l_1 \cdots l_d) \mathbb{Z}} \cong x_1^{\mathbb{Z} / l_1 \mathbb{Z}} \times \cdots \times x_d^{\mathbb{Z} / l_d \mathbb{Z}}.$$

Nemen we vervolgens lineaire combinaties, dan zien we uiteindelijk dat

$$R[x] / (x^{l_1 \cdots l_d} - 1) \\ \cong R[x_1, \dots, x_d] / (x_1^{l_1} - 1, \dots, x_d^{l_d} - 1).$$

In verband met DFTs werd dit voor het eerst opgemerkt door Good [7]. Agarwal en Cooley gebruikten dit isomorfisme daarna voor het uitrekenen van convoluties [1].

Wel zitten we nu weer met een nieuw probleem: in de vorige paragraaf vroegen we om een isomorfisme waarvoor alle  $l_i$  gelijk zijn. Maar ons isomorfisme werkt juist alleen in het geval wanneer  $l_1, \dots, l_d$  onderling ondeelbaar zijn.

Wat er tot slot nog ontbreekt is een manier om de lengte van een DFT iets te veranderen. Dit zou het mogelijk maken

om een  $d$ -dimensionale DFT van lengte  $(l_1, \dots, l_d)$  om te smeden tot eentje van lengte  $(l, \dots, l)$ . Met behulp van een  $d$ -dimensionale versie van Bluesteins algoritme kan zo’n DFT vervolgens worden gereduceerd tot een vermenigvuldiging in  $R[x_1, \dots, x_d] / (x_1^l - 1, \dots, x_d^l - 1)$ . En dat kan uiteindelijk weer efficiënt worden gedaan met behulp van snelle eenheidswortels.

### Gaussiaans overmonsteren

Hoe kunnen we een DFT van lengte  $s$  vervangen door een DFT van een iets grotere lengte  $t$ ? Om dit te bereiken veronderstellen we vanaf hier dat  $R = \mathbb{C}$ .

Neem een DFT van lengte  $s$ . In de signaaltheorie wordt de invoer gezien als een reeks monsters van een signaal. De frequentie van de monsternamen is hierbij evenredig aan  $s$ . Is het mogelijk het oorspronkelijke signaal uit onze reeks monsters te reconstrueren? Dan zouden we daarna een nieuwe reeks monsters kunnen nemen, met een andere frequentie.

De meest voor de hand liggende manier om een digitaal signaal analoog te maken is via convolutie met een Gaussiaan  $G_\alpha(x) = e^{-\alpha x^2}$ . Hoe kleiner  $\alpha$ , hoe gladder (en minder scherp) het analoge signaal. Een andere prettige eigenschap is dat de fouriertransformatie van  $G_\alpha$  opnieuw een Gaussiaan is.

Laten we deze ideeën in formules vertalen. In plaats van kringtermen van lengte  $s$  beschouwen we nu de bijbehorende vectoren van coëfficiënten  $u \in \mathbb{C}^s$ . Wel spreken we af dat  $u_{k+j} \equiv u_k$  voor alle  $j \in \mathbb{Z}$ . Gegeven  $u \in \mathbb{C}^s$  definiëren we  $\mathcal{F}_s(u) \in \mathbb{C}^s$  door

$$(\mathcal{F}_s u)_k := \sum_{0 \leq j < s} u_j e^{-2\pi i \frac{jk}{s}}.$$

Dit is een variant op onze eerdere definitie van een DFT (nu nemen we  $\omega = e^{-2\pi i/s}$ ). Vervolgens definiëren we twee lineaire afbeeldingen  $\mathcal{S}, \mathcal{T} : \mathbb{C}^s \rightarrow \mathbb{C}^t$  door

$$(\mathcal{S}u)_k := \alpha^{-1} \sum_{j \in \mathbb{Z}} e^{-\pi \alpha^{-2} s^2 (\frac{k}{t} - \frac{j}{s})^2} u_j,$$

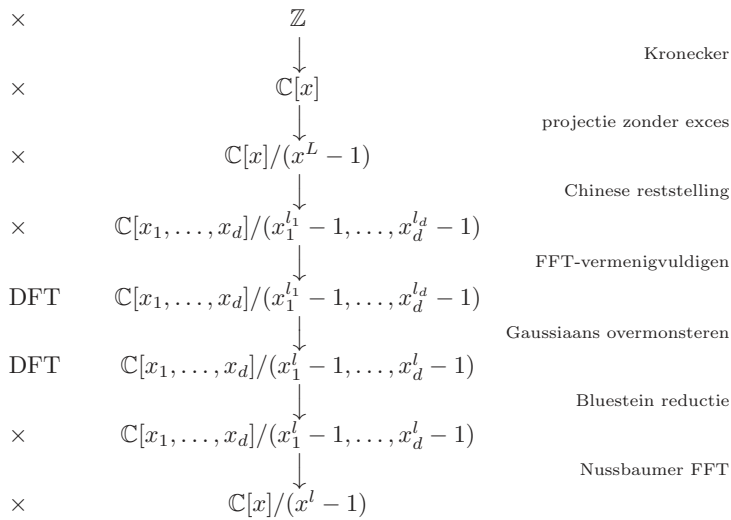
$$(\mathcal{T}u)_k := \sum_{j \in \mathbb{Z}} e^{-\pi \alpha^{-2} t^2 (\frac{k}{t} - \frac{j}{s})^2} u_j.$$

Tot slot definiëren we twee permutaties  $\mathcal{P}_s : \mathbb{C}^s \rightarrow \mathbb{C}^s$  en  $\mathcal{P}_t : \mathbb{C}^t \rightarrow \mathbb{C}^t$  door

$$(\mathcal{P}_s u)_j := u_{tj},$$

$$(\mathcal{P}_t u)_k := u_{-sk}.$$

In [12, Theorem 4.2] bewijzen we dan dat het volgende diagram commuteert:



**Figuur 2** Schematische weergave van de verschillende reducties in het nieuwe algoritme. Hier en daar hebben we iets wat gesmokkeld om alles simpel te houden.

$$\begin{array}{ccccc} \mathbb{C}^s & \xrightarrow{\mathcal{F}_s} & \mathbb{C}^s & \xrightarrow{\mathcal{P}_s} & \mathbb{C}^s \\ \mathcal{S} \downarrow & & & & \downarrow \mathcal{T} \\ \mathbb{C}^t & \xrightarrow{\mathcal{F}_t} & \mathbb{C}^t & \xrightarrow{\mathcal{P}_t} & \mathbb{C}^t \end{array}$$

Dit is wat we gebruiken om het berekenen van  $\mathcal{F}_s$  terug te voeren op het berekenen van  $\mathcal{F}_t$ . Omdat  $t > s$ , zijn de matrices voor  $\mathcal{S}$  en  $\mathcal{T}$  niet vierkant. Wél is het zo dat de elementen die niet op de diagonaal liggen razendsnel afnemen. Dat komt doordat Gaussianen uit het centrum ook razendsnel afnemen. Door  $t - s$  goed gekozen rijen uit  $\mathcal{T}$  weg te nemen blijft er om die reden

een bijna diagonale matrix over. Dit kan worden benut om  $\mathcal{T}^{-1} \mathcal{P}_t \mathcal{F}_t \mathcal{S}$  snel uit te rekenen.

Kiezen we  $\alpha$  en de precisie met beleid, dan kunnen we bewijzen dat  $\mathcal{F}_s$  op deze manier met bijna evenveel precisie als  $\mathcal{F}_t$  kan worden berekend en dat de rekentijd van  $\mathcal{S}$  en  $\mathcal{T}^{-1}$  verwaarloosbaar is ten opzichte van die van  $\mathcal{F}_t$ .

Daarmee is de kous af en hebben we bewezen dat  $M(n) = O(n \log n)$ . In Figuur 2 worden alle benodigde reducties nog eens samengevat.

Een variant van onze overmonsteringsmethode werd voor het eerst gepubliceerd door Dutt en Rokhlin [4]. Deze variant is algemener en maakt het mogelijk DFTs te berekenen van onregelmatig gemonsterde signalen. Daarentegen werkt hun methode alleen voor  $\log s = O(\alpha)$  en is daarom net iets te traag voor ons uiteindelijke doel.

### Wat hebben we eraan?

Praktisch gezien moeten we dat afwachten. Voor theoretische doeleinden is de functie  $M(n)$  van belang om de kosten van allerlei rekenkundige operaties nauwkeurig te beschrijven. Zo kost het delen van getallen van  $n$  cijfers  $O(M(n)) = O(n \log n)$  en het uitrekenen van een grootste gemene deler  $O(M(n) \log n) = O(n \log^2 n)$ . Ook  $n$  decimalen van  $\pi$  kunnen nu in  $O(M(n) \log n) = O(n \log^2 n)$  stappen worden berekend. Een DFT van lengte  $l$  over de complexe getallen kost  $O(M(lp))$  als we rekenen met een precisie van  $p \geq \log l$  cijfers [13]. Dat bepaalt ook de minimale CO<sub>2</sub>-uitstoot die men kan verwachten bij grote berekeningen aan het weer. Al met al speelt  $M(n)$  als elementaire ‘reken snelheid’ dus een zelfde soort rol als de licht-snelheid  $c$  in de natuurkunde.

### Kan het nog sneller?

Dat weten we niet!  $\ddots$

### Referenties

- 1 R. Agarwal en J. Cooley, New algorithms for digital convolution, *IEEE Transactions on Acoustics, Speech, and Signal Processing* 25(5) (1977), 392–410.
- 2 Leo I. Bluestein, A linear filtering approach to the computation of discrete Fourier transform, *IEEE Transactions on Audio and Electroacoustics* 18(4) (1970), 451–455.
- 3 J.W. Cooley en J.W. Tukey, An algorithm for the machine calculation of complex Fourier series, *Math. Computat.* 19 (1965), 297–301.
- 4 A. Dutt en V. Rokhlin, Fast Fourier transforms for nonequispaced data, *SIAM J. Sci. Comput.* 14(6) (1993), 1368–1393.
- 5 M. Fürer, Faster integer multiplication, in *Proceedings of the Thirty-Ninth ACM Symposium on Theory of Computing (STOC 2007)*, San Diego, CA, 2007, pp. 57–66.
- 6 C.F. Gauss, Nachlass: theoria interpolationis methodo nova tractata, in *Werke*, Vol. 3, Königliche Gesellschaft der Wissenschaften, Göttingen, 1866, pp. 265–330.
- 7 I.J. Good, The interaction algorithm and practical Fourier analysis, *Journal of the Royal Statistical Society, Series B.* 20(2) (1958), 361–372.
- 8 D. Harvey, Faster arithmetic for numbertheoretic transforms, *J. Symbolic Comput.* 60 (2014), 113–119.
- 9 D. Harvey, Faster truncated integer multiplication, 2017, arXiv:1703.00640.
- 10 D. Harvey en J. van der Hoeven, Faster integer and polynomial multiplication using cyclotomic coefficient rings, Technical Report, 2017, arXiv:1712.03693.
- 11 D. Harvey en J. van der Hoeven, Faster integer multiplication using short lattice vectors, in R. Scheidler en J. Sorenson, eds., *Proc. of the 13-th Algorithmic Number Theory Symposium*, Open Book Series 2, Mathematical Sciences Publishers, 2019, pp. 293–310.
- 12 D. Harvey en J. van der Hoeven, Integer multiplication in time  $O(n \log n)$ , Technical Report, HAL, 2019, <http://hal.archives-ouvertes.fr/hal-02070778>.
- 13 D. Harvey, J. van der Hoeven en G. Lecerf, Even faster integer multiplication, *J. Complexity* 36 (2016), 1–30.
- 14 M.T. Heideman, D.H. Johnson en C.S. Burrus, Gauss and the history of the FFT, *IEEE Acoustics, Speech and Signal Processing Magazine* 1 (1984), 14–21.
- 15 A.A. Karatsuba, The complexity of computations, *Proc. of the Steklov Inst. of Math.* 211 (1995), 169–183. English translation; Russian original at pp. 186–202.
- 16 A. Karatsuba en J. Ofman, Multiplication of multidigit numbers on automata, *Soviet Physics Doklady* 7 (1963), 595–596.
- 17 D.E. Knuth, *The Art of Computer Programming, Volume 2: Seminumerical Algorithms*, Addison-Wesley, 1969.
- 18 H.J. Nussbaumer en P. Quandalle, Computation of convolutions and discrete Fourier transforms by polynomial transforms, *IBM J. Res. Develop.* 22(2) (1978), 134–144.
- 19 J.M. Pollard, The fast Fourier transform in a finite field, *Mathematics of Computation*, 25(114) (1971), 365–374.
- 20 A. Schönhage, Multiplikation großer Zahlen, *Computing* 1(3) (1966), 182–196.
- 21 A. Schönhage en V. Strassen, Schnelle Multiplikation großer Zahlen, *Computing* 7 (1971), 281–292.
- 22 A.L. Toom, The complexity of a scheme of functional elements realizing the multiplication of integers, *Soviet Mathematics* 4(2) (1963), 714–716.

Roberto Fernandez

*NYU-ECNU Institute of Mathematical Sciences at NYU Shanghai  
Shanghai New York University  
rf87@nyu.edu*

**In Memoriam Vladas Sidoravicius (1963–2019)**

# Celebrating science as an adventure

On 23 May 2019 Vladas Sidoravicius passed away unexpectedly in Shanghai. He was 55 years old. Sidoravicius was Professor of Mathematics and Deputy Director of the Mathematical Institute of the Shanghai New York University. From 2007 to 2011 Sidoravicius held a research position at Centrum Wiskunde & Informatica and a visiting professorship at Leiden University. His friend and colleague Roberto Fernandez looks back on his life and career.



Vladas Sidoravicius

Professor Vladas Sidoravicius's untimely death deprived us of a singular scientist and friend whose intense and restless life fertilized contemporary probability theory and left a mark on institutions in three continents.

After completing a Master in Mathematics at Vilnius University, Vladas obtained his PhD in Mathematics from Moscow University under the direction of Vadim Malyshev (1990), who is an important contributor to modern mathematical statistical mechanics. Immediately after graduation Vladas started his itinerant life with post-doc positions at Heidelberg (1991) and Paris Dauphine (1992–1993). In 1993 he came to the Instituto de Matemática Pura e Aplicada (IMPA) in Rio de Janeiro, Brazil, which became his base of operations for most of his scientific life. But his more frequent location was the road. Vladas was a tireless traveler. His many collaborative projects were built on his personal visits to his collaborators for intensive sessions of friendly and decontracted brainstorming.

## **The Dutch period**

Vladas' career became associated to Dutch mathematics in a number of ways. He had a long-lasting scientific collaboration with Harry Kesten, stretching from 1997 un-

til Kesten's death in 2019, that resulted in twelve joint papers, including the celebrated 'A shape theorem for the spread of an infection', published in the *Annals of Mathematics* in 2008. Other important Dutch collaborators were Rob van der Berg (CWI) with whom he worked on random spatial growth, and Frank den Hollander with whom he wrote two papers on random walks in random environments. His gravitation towards Dutch mathematics consolidated into a research position at CWI, together with a visiting professorship at Leiden University, which he held from 2007 to 2011. During this period, Vladas was active on several fronts. Besides his scientific production, he gave courses and seminars at CWI and Leiden, attracted a large number of high-level visitors and acted as consultant for appointments and recruitment of PhD students. He also co-organized a number of conferences and workshops, mostly at Eurandom where he was a member of the Scientific Council and Senior Fellow. These included 'Dynamic Random Environment' (2009) and 'Combinatorics and Analysis in Spatial Probability' (2010), with support from the European Science Foundation.

Vladas' Dutch period was a boost for our probability community. Remco van Hofstad recalls that "he was there with his usual enthusiasm, energy, and chaos as well. I

really appreciated that." Rob van den Berg, points out that "he usually brought visitors and a lot of activity and enthusiasm with him. This was very stimulating and useful!" Frank den Hollander, remembering the joint papers with Vladas involving visitors and a Leiden PhD student, speaks of "wonderful discussions, wonderful times". For me, as one of the organizers of Marc Kac seminars — a monthly seminar bringing together researchers and students in probability and physics throughout The Netherlands — it was always a joy to have Vladas either as speaker or in the audience. His departure from CWI was very much regretted, but it certainly did not conspire against his engagement with local activities, or his respect for the 'Dutch model'. When I visited him in Shanghai — where in 2015 he was appointed NYU Global Network Professor — he told me that his cherished projects were to reproduce in China the tradition of the Marc Kac seminars, and to build the 'Eurandom of Asia'.

#### Lithuanian roots

Throughout his international career, Vladas always remained in contact with his Lithuanian roots, both personal and professional. He visited often his mother, Galina Sidoraviciene, who survives him, and these visits were combined with talks and conferences. He also helped to organize sessions of different editions of the Vilnius Conference on Probability and Mathematical Statistics. In particular, the session on percolation organized by Vladas in the 2006 edition was well appreciated by specialists of the area, in particular by the several young Brazilian researchers that attended. More recently, he was a member of the Program Committee of the 2018 edition, which was held jointly with the 2018 IMS Annual Meeting on Probability and Statistics.

His main Lithuanian coauthor was Donatas Surgailis who was also his mentor. In his words: "Vladas' mathematical mind and thinking was very unusual. He seemed not very interested in classical probability and calculus but showed great imagination and 'geometric visualization' of random evolution. I told him about the 'new probability' related to statistical physics which I learned from my Moscow contacts (Dobrushin, Bleher) and proposed Vladas to go to Moscow for his PhD studies. I also contacted Vadim Malyshev who agreed to supervise Vladas' thesis. All this happened

when we were part of the Soviet Union and at that time Moscow certainly was the best place to start a mathematical career. Here, Vladas wrote his dissertation on stochastic equations in Grassmann algebras which he defended in 1990." Surgailis was, in fact, one of Vladas last visitors to NYU Shanghai. He left Shanghai on May 13, with Vladas' promise to visit him in a few weeks. Vladas passed away ten days later.

#### Legacy

Vladas' scientific legacy has a number of layers. A first, perhaps more visible layer is formed by his impressive list of publications involving close to 100 papers and more than 70 coauthors, among whom one finds the most conspicuous names of contemporary probability theory, including Fields medalist Wendelin Werner. He was one of the driving forces of a generation of researchers that brought to maturity the mathematical theory of random walks and percolative phenomena, and with it brought depth, precision and scope to stochastic modeling. A second layer is his inspirational role to his students and young colleagues. Through courses, talks and a generous use of his time and ideas, he helped attract many young minds to the theory of stochastic processes and probabilistic modeling. This role of Vladas was instrumental, for instance, for the establishment of a probability group at the University of Minas Gerais, which now counts four of his former students. He belonged to a surprisingly small group of scientists that transformed Brazilian mathematics into a major actor in the probability scene and a seedbed of bright PhD students and young researchers that were welcome in major institutions throughout the world.

A third layer is his action as catalyzer of ideas and scientific projects. He organized several remarkable scientific meetings, which in turn gave rise to many successful collaborations. A chief example is the heading of the steering committee of the XV International Congress on Mathematical Physics which took place in Rio de Janeiro in 2006 and brought most of the top theoretical and mathematical physicists to an amazed audience of South American young scientists and students. Vladas was also among the initiators, and a frequent organizer, of the Brazilian School of Probability, an annual meeting which has transformed a few secluded hotels into contenders for



Vlasdas Sidoravicius and Harry Kesten



Vlasdas Sidoravicius lecturing at NYU-Shanghai



the beach resort with the highest production of theorems.

Another example is recalled by Frank den Hollander: “The 2010 Clay Mathematics Institute summer school in Buzios, Brazil, remains for me one of the most memorable scientific events I took part in, because of its sheer scope and depth, and the incredible organization Vlasdas put into it. The blackboard Vlasdas had specially made by a carpenter was ten meters long. A mathematician’s dream.”

Vlasdas courses and talks were also a source of ideas and projects, as Rob van den Berg remembers: “In the fall of 2009 Vlasdas gave a very nice and inspiring series of lectures on first-passage percolation at CWI. This triggered work (which led to a paper) by Demeter Kiss and myself.”

But above all, it was Vlasdas human attributes that made him a singular presence within the competitive and sometimes merciless academic world. The words of Frank den Hollander are particularly expressive: “Vlasdas had a great sense of humour. We laughed a lot, about funny incidents and joyful events, all over the world. Vlasdas had a great heart and a small ego. He loved conversation. He could be critical about mathematical work, but never put down anyone. For him mathematics was a quintessential human enterprise. He had a sharp nose for talent. He commanded respect both scientifically and personally. Vlasdas gave his heart and soul to mathematics. He was generous and uplifting. He did not take enough care of himself in later years. Instead, he took care of others. He made you feel welcome, comfortable and safe.”

### Shanghai New York University

In 2015 Vlasdas came to the recently formed Shanghai New York University, as Deputy Director of the Mathematical Institute. There he showed yet another layer of his legacy: vision and leadership. In just a couple of years he helped to build a top-level institute with an impressive lineup of visitors and a frantic scientific activity. A particular highlight was his semester on mathematical physics supported by the Chinese Science Foundation, which week after week brought very distinguished scholars to NYU-SH.

Vlasdas was a singularity in our scientific community. He was a man of two centuries who embodied the transition across the change of millennium in a sense deeper than just chronology. As a twentieth century scientist, he was a product of the founding fathers of mathematical statistical mechanics. As such, he contributed to the coming of age of this branch of mathematical physics and, furthermore, to its merging with probability theory. This was a remarkable accomplishment that put the former on a rigorous basis and enriched the latter with a wealth of new topics and mathematical techniques. At the same time he was quick to embrace the new scientific spirit of the twenty-first century, in which low travel costs and the globalization of efforts and problems made geographical location subordinated to scientific undertakings. In this sense, NYU Shanghai, as a truly twenty-first century institution, offered him the ideal setting to turn over all the experience gathered in his restless scientific pursuits. He helped build an institute as singular as himself.

### A dear friend

On a personal note, Vlasdas was a dear friend and a travel companion on the roads of science and academic life. We got very close during my three years as visiting scholar at the University of São Paulo in the middle of the nineties. At that time, Vlasdas was already an established presence at the prestigious IMPA in Rio de Janeiro. In our long talks facing the forest and watching monkeys and parrots, we consolidated a lasting personal and scientific friendship that we kept throughout the years, despite our respective itinerant scientific lives. After I left Brazil, we kept in close contact. He visited me for one semester at the University of Rouen, during my tenure as a professor there. He took his CWI position the same year I was appointed professor at Utrecht University. Finally, when mandatory retirement ended my Utrecht period, it was his enthusiasm and conviction that brought me to NYU Shanghai. There I saw Vlasdas developing his full potential as a top researcher and academician with a wide web of scientific connections and collaborations.

After so many scientific peregrinations, Vlasdas suddenly embarked on his ultimate migration. Besides the sadness, his untimely departure leaves us with the immense challenge of living up to his legacy. There are projects to complete, events to organize, a vision to preserve and enrich. But above all we must keep alive his celebration of science as an adventure, and of scientific collaboration as a festive occasion in which ideas flow while we enjoy the simple happiness of sharing curiosity and thirst for understanding. Farewell, dear Vlasdas. ☾

# In de verdediging

| In defence

*Pas gepromoveerden brengen hun werk onder de aandacht. Heeft u tips voor deze rubriek of bent u zelf pas gepromoveerd? Laat het weten aan onze redacteur.*

Redacteur: Nicolaos Starreveld  
 FNWI, Universiteit van Amsterdam  
 Postbus 94214  
 1090 GE Amsterdam  
[verdediging@nieuwarchief.nl](mailto:verdediging@nieuwarchief.nl)



## Explicit Serre Weights for Two-Dimensional Galois Representations Misja Steinmetz

In August 2019 Misja Steinmetz from King's College London successfully defended his PhD thesis with the title *Explicit Serre Weights for Two-Dimensional Galois Representations*. Misja carried out his research under the supervision of prof. dr. F.I. Diamond. Fred Diamond did his PhD with Andrew Wiles in Princeton in 1988, which makes Misja Andrew Wiles' mathematical grandson! Since the first of September Misja is working at the Mathematical Institute in Leiden in a postdoc position.

During his PhD Misja worked on generalisations of Serre's modularity conjecture to totally real number fields, for example  $\mathbb{Q}(\sqrt{2})$ . This research can be thought of as a part of the (mod  $p$ ) Langlands programme, a famous international research programme, which has recently gotten a lot of attention due to the fact that two Fields Medals and the Abel Prize in 2018 were awarded to researchers in this area.

### The conjecture

In 1987 Fields medalist and Abel Prize winner Jean-Pierre Serre posed an important conjecture (now a theorem) relating mod  $p$  Galois representations and modular forms. This line of research in number theory dates to 1973 and it all started with a conjecture made by Serre in a letter to John Tate. The conjecture that Serre made in his letter to Tate is quite remarkable, so remarkable that Tate replied one month later enthusiastically to Serre's letter. We read in his reply to Serre's letter:

"Please give me a little more time [...] on the elliptic curve report. I have started it, but have been distracted by various things, in particular, your conjectures on  $\rho: \text{Gal}(\bar{\mathbb{Q}}/\mathbb{Q}) \rightarrow \text{GL}_2(\mathbb{F}_{p^a})$ ."

John Tate, 2 July 1973

Essentially, Serre's conjecture says that any mod  $p$  Galois representation satisfying some straightforward properties (it is irreducible and the determinant of complex conjugation is equal to  $-1$ ) must be the 'shadow' of a modular form. A modular form is a (complex) analytic function on the upper half-plane satisfying a certain kind of functional equation with respect to the group action of the modular group, and also satisfying a growth condition. Mod  $p$  Galois representations played a crucial role in Andrew Wiles' proof of Fermat's last theorem.

Wiles' proof of Fermat's last theorem consists of establishing a formal link between modular forms and elliptic curves, however only readers who have studied the proof more closely will know that mod  $p$  Galois representations play an important role. These are continuous group actions of the absolute Galois group of  $\mathbb{Q}$  on a vector space over  $\mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$ ; you can think of them as algebraic

shadows containing enough information to compare the two objects (in this case modular forms and elliptic curves) by comparing their shadows. In fact, a proof of Serre's conjecture would also have sufficed for Wiles to prove Fermat, but possibly this seemed even more out of reach to him than the proof that he eventually gave.

In Serre's letter to Tate we also read that Serre was already day-dreaming about generalisations to more general global fields and, even, to higher dimensional representations.

### The generalisation

In his research Misja looked into generalisations of Serre's conjecture to totally real number fields, for example  $\mathbb{Q}(\sqrt{2})$ . Instead of considering actions of the absolute Galois group of  $\mathbb{Q}$  on a vector space over  $\mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$ , he considers actions of the absolute Galois group of  $\mathbb{Q}(\sqrt{2})$ , and instead of modular forms, he considers Hilbert modular forms. A Hilbert modular form is a generalisation of a modular form to functions of two or more variables. It is a (complex) analytic function on the  $m$ -fold product of upper half-planes satisfying a certain kind of functional equation.

Suppose you consider a mod  $p$  Galois representation satisfying Serre's properties. It may be claimed this representation appears as the 'shadow' of any modular form whatsoever. This would lead to a correct, but very imprecise conjecture because there are infinitely many modular forms that would have to be checked before potentially falsifying this conjecture. Already in 1987 Serre put a lot of work into using the characteristics of the Galois representation to obtain a finite list of possible modular forms giving this representation, which gave rise to the so-called strong version of Serre's conjecture. In 1992 our very own Bas Edixhoven showed that the strong version implies the weak version of the conjecture.

Analogously, in generalisations of the conjecture to totally real fields like  $\mathbb{Q}(\sqrt{2})$  the real challenge is to come up with a good way to reduce to a finite list of modular forms. Until 2016 the only way in which such a finite list could be produced was by making use of the abstract and non-explicit theory of  $p$ -adic Hodge theory. In his

thesis, building on previous work of Dembele–Diamond–Roberts and Calegari–Emerton–Gee–Mavrides, Misja gives an alternative way of producing this finite list making use of explicit local class field theory only. One way to state the main theorem of his thesis, therefore, would be to say: "There exists an explicit reformulation of the strong version of Serre's conjecture for totally real fields, which is equivalent to the conjecture formulated in terms of  $p$ -adic Hodge theory." Misja's results, for example, make it much easier to do computer calculations on these objects.

### Applications of generalisations of Serre's conjecture

Analogously to applications of Serre's conjecture to Diophantine equations like the Fermat equation, it is natural to wonder whether generalisations of the conjecture have similar applications. Indeed, the so called *modular approach* to Diophantine problems turns out to be rather powerful, and generalisations of Serre's conjecture can help with establishing a link to modular forms. However, since for totally real fields other unconditional methods are readily available such as the modularity of many elliptic curves and level lowering theorems, it is usually not necessary to make results conditional on an unproved generalisation of Serre. For general number fields, when much less is known, conditioning on generalisations of Serre is often the best available option. A recent theorem for example states (conditional on a version of Serre's conjecture) that the Fermat equation with prime exponent does not have solutions in certain imaginary quadratic fields. This gives a beautiful illustration of applications of these conjectures to other areas of number theory.

### The more personal aspect

Behind all dissertations there is always a person, with flesh and bones, who has endured the long path of a PhD trajectory and has produced the work at hand.

*Misja, are there any stories you would like to share from your time as a PhD student?*

"People often exaggerate by saying a book has changed their life, but in my case I think I am justified in saying this. When I was 16 I was unsure whether to study mathematics or physics. I asked my mathematics teacher who said there were very exciting times ahead in physics with the Large Hadron Collider, and he didn't know about similarly interesting things being done in mathematics. Exactly around this time I read Simon Singh's book called *Fermat's Last Theorem*. The story of Wiles' discovery blew me away! I realised how exciting mathematical research could be, and chose to study mathematics. A combination of pure coincidence and a fascination that never faded resulted in my submitting a PhD thesis a few months ago, roughly 13 years after reading the book, on a topic that is not so far removed from Wiles' original breakthrough.

Another funny incident occurred just before the ICM in Rio, an unknown mathematician sat down next to me. After a while it turned out he had been to the previous ICM in Seoul already, so I asked him what I should expect. What I understood from his story was that they give you a medal, which I imagined to be an award for participating, just like in a marathon. Later someone told me that I had been talking all night to Artur Avila who won a Fields Medal in 2014 in Seoul."



Jean-Pierre Serre



John Tate

# Boekbesprekingen

| Book Reviews

Redactie: Hans Cuypers en Hans Sterk

Review Editors NAW - MF 7.092  
Faculteit Wiskunde & Informatica  
Technische Universiteit Eindhoven  
Postbus 513  
5600 MB Eindhoven

reviews@nieuwarchief.nl  
www.win.tue.nl/wgreview



Benjamin Hutz

## **An Experimental Introduction to Number Theory**

American Mathematical Society, 2018

XII + 313 p., prijs \$79.00

ISBN 9781470430979

Er zijn al veel boeken verschenen over getaltheorie (of getallen-theorie, zoals sommigen liever zeggen). Het is een van de oudste onderwerpen in de wiskunde, diens koningin zelfs, volgens Gauss: “Die Mathematik ist die Königin der Wissenschaften und die Zahlentheorie ist die Königin der Mathematik.” (Gauss vervolgt dit met zoiets als “Zij verlaagt zich vaak tot dienstverlening aan de astronomie en andere natuurwetenschappen, maar in al haar relaties verdient ze de eerste plaats.”)

Valt er nog iets nieuws te bieden op dit gebied, na een standaardwerk als Hardy & Wright (*An Introduction to the Theory of Numbers*, Oxford University Press, 1938, 1e druk; 2008, 6e druk). Voor mij was dat destijds een hele kluit (die ik nooit heb opgekregen). Natuurlijk zijn er nieuwe resultaten (rond the laatste stelling van Fermat, priemtwelingen, priemwoestijnen, de vermoedens van Goldbach en van Catalan; zie ook Alex van den Brandhof, *Priemwoestijnen: Hoogtepunten uit de wiskunde van de 21e eeuw*, Prometheus, 2018, waarvan zes hoofdstukken over getaltheorie gaan), maar dat vergt allemaal behoorlijk geavanceerde wiskunde. Het hier gerecenseerde boek probeert er op een andere manier uit te springen, namelijk door de lezer aan te moedigen tot experimenteren met de computer.

Na lezing blijkt Benjamin Hutz een tamelijk traditioneel wiskundeboek over getaltheorie geschreven te hebben, in de trant van definitie, stelling, bewijs (veelal uit de hoge hoed). De lezer wordt weinig motivatie en historische achtergrond geboden. Wel beginnen nieuwe onderwerpen met een wat open ‘vraag’ (Question) in een kader. (Waarop de lezer op dat moment vaak geen antwoord zal kunnen geven, bijvoorbeeld: Question 1.51. Determine the function  $\pi(N)$ . Hier is  $\pi(N)$  het aantal priemten hoogste  $N$ .) Dan zijn er kaders met ‘onderzoekingen’ (Investigation) waarbij met de hand of met de computer data verzameld moeten worden voor concrete gevallen om patronen te ontdekken en vermoedens te kunnen formuleren. Elk hoofdstuk wordt afgesloten met een ruime selectie aan oefenopgaven, ingedeeld in Computational Exercises, Theoretical Exercises en Exploration Exercises. Het boek blijkt een theoretische inleiding te zijn, maar wel doorspekt met experimenten.

Even een greep uit de inhoudsopgave: gehele getallen (met unieke priemontbinding), modulair rekenen (met kleine Fermat en de Chinese reststelling), kwadratische wederkerigheid (met primitieve wortels), verrassend genoeg wat cryptografie (symmetrisch, asymmetrisch met Diffie–Hellman en RSA, maar ook secret sharing), rekenkundige functies (Euler en Möbius, alsmede partities), algebraïsche getallen (met onder andere sommen van kwadraten), rationale en irrationale getallen (met kettingbreuken), diofantische vergelijkingen (met pythagoreïsche drietallen, de laatste stelling van Fermat, de vergelijking van Pell en het probleem van Waring), elliptische krommen, discrete dynamische systemen (met de Mandelbrot verzameling in een onderzoek), en tot slot een beetje over

polynomen. Al met al de klassieke onderwerpen met een paar uitstapjes (cryptografie en dynamische systemen).

U vraagt zich misschien af hoe dat experimenteren met de computer wordt ondersteund. De auteur was zich er terdege van bewust dat elke keuze van een specifieke programmeertaal twee problemen zou geven. Ten eerste gaat het daarmee op een informaticaboek lijken en ten tweede is die keuze altijd fout en veroudert het boek veel sneller. Daarom staan er alleen wat algoritmes in pseudocode in, en wordt de rest aan (de fantasie van) de lezer overgelaten. En juist voor getaltheorie zouden wat aanwijzingen nuttig zijn, want rekenen met grotere getallen geeft vaak problemen (denk aan afronden en overloop). Dit maakt dat het boek voor zelfstudie door bijvoorbeeld een middelbare scholier niet geschikt is, want de drempel tot echt zelf experimenteren is hoog. Die scholier (of geïnteresseerde leek) is veel beter af met het boek van Frits Beukers, *Getaltheorie voor beginners* (Epsilon Uitgaven, 6e druk, 2018), dat nagenoeg dezelfde stof afdekt, zij het iets minder formeel.

Ik wil het boek van Hutz nog even vergelijken met twee andere boeken over getaltheorie die ik de laatste jaren onder ogen heb gekregen en die ook iets hebben dat ze ‘anders’ maakt.

Michael Rassias schreef in 2011 zijn afstudeerverslag over ‘computational number theory’, dat vervolgens uitgegeven werd als *Problem-Solving and Selected Topics in Number Theory: In the Spirit of the Mathematical Olympiads* (Springer, 2011). Rassias won als 15-jarige een zilveren medaille bij de Internationale Wiskunde Olympiade in 2003, wat de ondertitel van zijn boek verklaart. Het boek van Rassias biedt veel problemen van olympiadeniveau, (wat voor mij de reden was om het aan te schaffen). Dit zijn veelal geen gewone oefenopgaven maar uitdagingen die enige creativiteit vergen. Daarbij wordt een stuk getaltheorie systematisch opgebouwd. Bovendien bevat het wat originele wiskunde, zoals het vermoeden van Rassias: voor elk priemgetal  $p > 2$ , bestaan er twee priemgetallen  $p_1, p_2$  met  $p = \frac{p_1 + p_2 + 1}{p_1}$ . Helaas moest ik al snel constateren dat de uitgever deze jonge auteur beter in bescherming had moeten nemen, want ondanks lovende woorden schiet het boek tekort. De presentatie is vaak didactisch onbeholpen en onvolledig. Zo worden belangrijke begrippen gebruikt zonder ze eerst netjes te definiëren, zoals  $n!$ ,  $a \mid b$  en  $(a, b)$  in de betekenis van ggd. Het lijkt erop dat de lezer al een olympiadetraining achter de rug moet hebben.

Het laatste boek over getaltheorie dat ik hier wil noemen is *An Illustrated Theory of Numbers* van Martin Weissman (AMS, 2017). Het is anders omdat het visualisatie centraal stelt. Waar Hutz maar één esthetische afbeelding bevat (Fig. 7.1. Rational points on the unit sphere), staat het boek van Weissman vol met aantrekkelijke afbeeldingen, veelal in kleur. Het is in een fraai groot formaat uitgegeven, met ruime marges die benut worden voor illustraties en extra uitleg (helaas niet als e-book). In ‘Illustrating the Theory of Numbers’, *Proceedings of Bridges 2018: Mathematics, Art, Music, Architecture, Education, Culture* (Tessellations Publishing, pp. 211–218, 2018, <http://archive.bridgesmathart.org/2018/bridges2018-211.pdf>) beschrijft Weissman hoe hij zijn uitdaging om getaltheorie over te brengen aan zijn studenten door middel van visualisaties heeft aangepakt en welke principes hij daarbij heeft gehanteerd. Hij werd daardoor in zekere zin ook (wis)kunstenaar. Wiskundig reikt zijn boek minder ver dan dat van Hutz, maar dit wordt ruimschoots gecompenseerd door het diepere inzicht dat geboden wordt.

Tom Verhoeff



Yann Bugeaud

## Linear Forms in Logarithms and Applications

European Mathematical Society, 2018

xvi + 224 p., prijs €38,00

ISBN 9783037191835

The linear form  $L(a, b) := a \log 2 + b \log 3$  in the variables  $a$  and  $b$  is a basic example of a linear form in logarithms. Certainly  $L(a, b) \neq 0$  for any integers  $(a, b) \neq (0, 0)$ , as equality would lead to the impossible identity  $2^a = 3^{-b}$ . Starting in the late 1960s Alan Baker (1939–2018) obtained some ground breaking estimates for how small linear forms in logarithms such as  $L(a, b)$  as a function of  $N$  can be as we range over the integers  $-N \leq a \leq N$  and  $-N \leq b \leq N$ . In 1970 he won the Fields Medal for this work. In this very basic set-up Baker's work gives  $\log |L(a, b)| > -C \log N$ , with some explicit  $C$ . It allows one to prove (Theorem 3.1 in the book) that for all positive integers  $m$  and  $n$ , we have  $|2^m - 3^n| > 2^m (em)^{-8.4 \cdot 10^8}$ , showing that the distance between a power of 2 and the power of 3 closest to it, tends to infinity when the power of 2 tends to infinity. More generally one would consider the linear form

$$\Lambda_n := \beta_0 + \beta_1 \log \alpha_1 + \dots + \beta_n \log \alpha_n,$$

with the  $\alpha_i$  non-zero algebraic numbers such that  $\log \alpha_1, \dots, \log \alpha_n$  are linearly independent over the rationals and the  $\beta_i$  are also algebraic numbers, not all zero.

To the uninitiated the above set-up might appear to be of very limited interest. However, the reality is very different! With the help of Baker's theorems lots of Diophantine problems can be attacked. Baker for example used his method to solve the Gauss's celebrated class number one and later the class number two problem (this problem can be reduced to solving a Diophantine equation). Tijdeman used Baker's method to show that the Catalan equation  $x^p - y^q = 1$  has only finitely many solutions with  $x, p, y, q > 1$ . The method also allows one to make some (modest) progress on the very important *abc*-conjecture (see below).

In practice many problems can be reduced to lower bounds for linear forms in two or three logarithms. Whereas for linear forms in two logarithms rather sharp lower bounds are available, this is not the case for three logarithms. As a rule of thumb, when a Diophantine problem can be reduced to linear forms in only two logarithms, then it often can be completely solved. If more logarithms are needed one typically ends up with huge bounds on the size of the solutions. However, sometimes using the so-called LLL-algorithm (not discussed in this book, but, e.g., in the book of Evertse and Györy discussed below), a complete solution is possible here.

This book is an introduction to Baker's theory of linear forms in the logarithms of algebraic numbers, with a special emphasis on a large variety of its applications, mainly to Diophantine problems. Its aim is to train the reader how to apply results from the theory of linear forms in complex and  $p$ -adic logarithms. In order not to complicate this process too much, often neither the results used, nor the applications that are established, are stated in the greatest possible generality.

After a brief introduction to linear forms in logarithms, the author lists in Chapter 2 several estimates for linear forms in complex and  $p$ -adic logarithms, which are used throughout the book. This is the toolbox, so to say, and in the rest of the book the author demonstrates how to use it. He starts doing so in Chapter 3, which is devoted to Diophantine problems from which one can very simply derive a linear form in complex algorithms and then apply an appropriate result from Chapter 2.

In Chapter 4 the author considers applications to classical families of Diophantine equations. For many of these there were early fundamental results by Thue and Siegel showing that these equations have at most finitely many solutions. Unfortunately, the early works did not yield upper bounds for the solutions and so were of little help for the complete resolution of the equation. Baker's method allows one, at least in principle, to completely solve some of these equations. A more extensive discussion can be found in a book from 1986 by Shorey and Tijdeman (see below).

Chapter 5 is concerned with the situation where the  $\alpha_1, \dots, \alpha_n$  in the linear form  $\Lambda_n$  are all rational numbers very close to 1. In this situation sharper bounds are available leading to, e.g., effective irrationality measures for quotients of logarithms of rational numbers.

For a non-rational number  $x$ , let  $\nu_p(x)$  denote the exponent of  $p$  in the decomposition of  $x$  as a product of prime powers. In the theory of  $p$ -adic linear forms in logarithms, one seeks to find a non-trivial upper bound for quantities like  $\nu_p(2^a \cdot 3^b - 1)$  as we range over the integers  $-N \leq a \leq N$  and  $-N \leq b \leq N$  and  $N$  is large. Here we have  $Cp \log N$  as upper bound, with  $C$  a constant. The linear dependency on  $p$  is quite unsatisfactory and it is a major open problem to improve on this dependency. In Chapter 6, among other results these estimates are used to extend the effective estimates for the size of the solutions of classical families of Diophantine equations obtained in Chapter 4 to  $S$ -integers. A rational number whose numerator and denominator are composed of only prime numbers from a given finite set  $S$ , is said to be an  $S$ -unit.

The  $abc$ -conjecture claims that, for every  $\epsilon > 0$ , for all positive coprime integers  $a$ ,  $b$  and  $c$  with  $a + b = c$ , there exists a number  $C(\epsilon)$  depending only on  $\epsilon$ , such that  $c < C(\epsilon)m^{1+\epsilon}$ , with  $m$  the squarefree kernel of  $abc$ , that is  $m = \prod_{p|abc} p$  is the product of all distinct prime divisors  $p$  of  $abc$ . It implies for example that if we add two powers of smallish numbers, the resulting sum cannot also be a high power of a smallish integer. In particular, Fermat's Last Theorem is a relatively straightforward consequence of the  $abc$ -conjecture. Arguably the  $abc$ -conjecture is the mother of all Diophantine problems and states in essence that the operation of adding does not respect the multiplicative structure of integers. Apart from implying Fermat's Last Theorem, it has lots of other consequences. In Chapter 8 the author, following Stewart and Yu, proves, combining complex and  $p$ -adic linear forms in logarithms, a much weaker version of the  $abc$ -conjecture.

In Chapters 7, 9 and 10 the author considers, respectively, primitive divisors of certain linear recurrences, simultaneous linear forms in logarithms and applications, and multiplicative dependence between algebraic numbers.

In Chapters 11 and 12 the author presents complete proofs of versions of some of the basic results in Chapter 2, with the same dependence in the parameters, but with larger numerical constants (as that leads to some simplification of the proofs).

Finally, in Chapter 13 the author lists some open questions and conjectures related to the theory of linear forms in logarithms.

I will end this review by comparing Bugeaud's book to two other ones covering partly the same ground. As to applications of Baker's method in the theory of Diophantine equations, these are treated in a book by Shorey and Tijdeman (*Exponential Diophantine Equations*, Cambridge Tracts in Mathematics 87, Cambridge University Press, 1986) in much greater generality. There is also some overlap with the monograph of Evertse and Györy (*Unit Equations in Diophantine Number Theory*, Cambridge Studies in Advanced Mathematics 146, Cambridge University Press, 2015) that I also recently discussed here (NAW 5/19(1), 2018, pp. 62–63). The latter book focuses more on presenting the state of the art and filling some gaps in the literature. The present book, in contrast, is focused on training the reader in Baker's method. In my opinion it does a good job in that, and an impressive range of different applications is covered. Thus this book has its own place and is a helpful stepping stone to actively understanding more theoretical books.

Pieter Moree



Boris Rubin

**Introduction to Radon Transforms  
With Elements of Fractional Calculus and  
Harmonic Analysis**

Cambridge University Press, 2015

xvii + 576 p., prijs £135.00

ISBN 9780521854597

Dit veelomvattende boek behandelt, met een weelde aan details, de harde (functionaal)analyse van diverse typen *Radon-transformaties*. Heel algemeen: Een R-transformatie is een integraaltransformatie, die een functie op een 'meetkundige' ruimte  $\mathbb{X}$  overvoert in een functie op een ruimte  $\mathbb{Y}$ , met als kenmerkende bijzonderheid dat  $\mathbb{Y}$  bestaat uit een klasse meetkundige objecten, die zich in  $\mathbb{X}$  bevindt. Denk aan rechte lijnen in  $\mathbb{R}^3$  of aan grote cirkels in  $\mathbb{S}^2$ .

R-transformaties hebben belangrijke toepassingen in de medische wereld, waar vooral het praktisch realiseren van de *inverse R-transformatie* cruciaal is.

Dit boek is elegant opgebouwd. Alleen al de hoofdstukken 'Preliminaries', 'Fractional Integration' en 'Riesz Potentials' samen met de appendix 'Harmonic Analysis on the Unit Sphere' zouden een schitterend inleidend boek over 'Analyse op  $\mathbb{R}^n$ ' kunnen vormen. Een stiefkindje in veel opleidingen!

Het grootste hoofdstuk behandelt de traditionele R-transformatie, waarbij  $\mathbb{X} = \mathbb{R}^n$  en  $\mathbb{Y}$  een collectie hypervlakken in  $\mathbb{R}^n$  is. Vooral de relatie tot fractionele integralen en sferische harmonischen wordt uitgediept, evenals de functionaalanalyse van dualen en in-vertsen in relatie tot een grote schaar van functieruimten.

Dan de standaard R-transformatie op de eenheidssfeer. Daarbij wordt uitgegaan van  $\mathbb{X} = \mathbb{S}^{n-1}$ . De  $\mathbb{Y}$ -ruimte kan dan bestaan uit 'grote cirkels' van dimensie  $n-2$ , de Funk-transformatie. Bij andere, in extenso behandelde, gevallen bestaat  $\mathbb{Y}$  uit 'hemisferen', of ook wel kleinere 'kapjes', rondom een bepaald punt op  $\mathbb{S}^{n-1}$ . Ook een stel andere convolutie-achtige transformaties komt aan bod.

Een derde groot onderwerp is R-transformaties op hyperbolische ruimten  $\mathbb{H}^n$  en de sferen daarin. Deze bevinden zich allemaal in een  $\mathbb{R}^n$ , voorzien van een Lorentz-inwendig product. De, aan Lobachevsky-bollen gerelateerde, *horosferische transformatie* is aldaar een zeer uitgebreid behandeld bijzonder geval.

Voor mij ligt een prachtig dik boek dat ook lokaal goed leesbaar is.

Jan de Graaf



Ionica Smeets

### Superlogisch

**Hoe getallen je helpen om de wereld beter te begrijpen**

Nieuwezijds, 2019

208 p., prijs €18,95

ISBN 9789057125201

Het nieuwste boek van Ionica Smeets heet *Superlogisch*. Het is een bundeling van haar beste columns voor *de Volkskrant* en omdat elke lezer van Nieuw Archief deze columns kent, is deze recensie volkomen overbodig. Het is meer een soort reminder. Is er iemand jarig of zoek je iets voor de buurman die in de vakantie voor de bloemen heeft gezorgd? Doe *Superlogisch* cadeau. Haal alvast een stapel in huis. Tien jaar geleden stopte Theo Jansen met zijn column in de *Volkskrant* en de wiskundemeisjes namen het van hem over. Ionica was daar aanvankelijk een beetje twijfelend

over. “Nu krijgen we straks natuurlijk allemaal post van fans van Theo Jansen, die klagen over wat wij schrijven.” Dat bleek dus wel mee te vallen. Ze is een bekende Nederlander geworden, iedereen kent haar, en de kans is groot dat de buurman reageert met de woorden: “Ionica’s nieuwste boek, jippie!”

De meeste mensen hebben helemaal niets met wiskunde. Ze kijken ertegenop of ze kijken erop neer. Week in week uit een wiskundige column voor een algemeen publiek, dat lijkt op voorhand verloren werk. Toch houdt Ionica dat nu al tien jaar vol, met speels gemak, naast al haar andere activiteiten als hoogleraar en TV-persoonlijkheid. Ze schakelt even snel van alledaags rekenwerk naar wiskundepuzzels als van geschiedenis naar de actualiteit. Ik geloof dat er maar weinig mensen in de wereld zijn die haar dit nadoen. Elders in dit blad heeft Ionica een interview met Abelprijswinnaar Karen Uhlenbeck, die jonge wiskundigen op het hart bindt om vooral door te blijven werken aan hetzelfde probleem. Dat is ongetwijfeld goed advies voor succes in de wiskunde, maar is het ook het beste recept voor karakterontwikkeling? Kenmerkend aan Ionica is juist haar brede interesse en daarom wordt zij zoveel gelezen.

De bundel heet *Superlogisch*, maar het onderschrift vind ik tekenender dan de titel: *Hoe getallen je helpen om de wereld beter te begrijpen*. Ionica laat zich vaak leiden door wat haar in de afgelopen week is opgevallen en hoe je daar door de bril van een wiskundige naar kunt kijken. Hieronder staat als voorbeeld een volstrekt willekeurig gekozen column uit het boek, die toevallig begint op het paginanummer dat het favoriete getal was van Ionica’s mentor in de breedste zin.

Robbert Fokkink

### Schijndata meten

Een manager maakt zich zorgen omdat op zijn afdeling 40 procent van de ziekmeldingen op maandag binnenkomt. Nemen zijn werknemers soms massaal een lang weekend op kosten van de baas? Het klinkt als een logische vraag. Het Engels kent zelfs het woord *mondayitis* voor mensen die na het weekend geen zin hebben om weer aan het werk te gaan.

Als deze denkbeeldige manager echter per dag van de week kijkt hoeveel mensen er ziek thuis zijn, dan zou blijken dat dat er juist op maandag de minste zijn. Hoe kan dat? Het antwoord is simpel: in een traditionele vijfdaagse werkweek kun je je op vijf dagen ziek melden, terwijl je op zeven dagen per week ziek kunt worden. Het merendeel van het verzuim duurt meer dan een dag, en op maandag krijg je dus een flink deel ziekmeldingen van mensen die in het weekend ziek zijn geworden en nog niet beter zijn. Als je het uitrekent, kom je zo rond de 40 procent uit.

Een echte manager wees me op dit voorbeeld en vertelde dat hij laatst een collega op deze denkfout had gewezen. Waarop de collega had tegengesputterd dat het veel makkelijker was om in de administratie terug te vinden op welke dag iemand zich had ziek gemeld dan om uit te zoeken hoeveel mensen op een bepaalde dag ziek thuis waren.

Dat is een veelvoorkomend probleem. In plaats van te meten wat we echt willen weten, gebruiken we gegevens die makkelijk te verkrijgen zijn. Een paar jaar terug verscheen in *Harvard Business Review* een goed stuk over het verschil tussen data en zinvolle cijfers. Als voorbeeld noemen de auteurs hun eigen YouTube-video waarin beroemdheden kijkers opriepen om sport-

artikelen te doneren voor arme jongeren. De video trok 1,5 miljoen kijkers en was daarmee volgens de data-analisten een groot succes. Helaas leverde de video welgeteld nul donaties op. In dit geval zijn kijkcijfers een zinloze manier om succes te meten. Een filmpje met maar tien kijkers die wel stuk voor stuk doneerden, was in dit geval beter geweest.

We kijken vaak naar zinloze cijfers en zijn apetrots als we bepaalde mijlpalen halen: 100.000 unieke bezoekers (die niets kopen) of 95 procent tevreden klanten (die nooit meer terugkomen). De auteurs van het stuk in *Harvard Business Review* omschrijven het zo: “Schijndata zijn als paardenbloemen: ze zien er op het eerste gezicht mooi uit, maar voor de meesten van ons is het onkruid dat bronnen verspilt en geen enkele waarde toevoegt.”

Legendarisch in deze categorie is het verhaal over de gele walkman. Volgens de overlevering zette Sony eens een reeks proefpersonen bij elkaar om te vragen wat ze vonden van hun nieuwe gele walkman. (Mijn studenten kijken me overigens altijd wat meewarig aan als ik op dit punt uitleg wat een walkman is.) De grote meerderheid was laaiend enthousiast: die gele was lekker sportief en veel minder saai dan de gewone zwarte walkman. Tevreden konden de marktonderzoekers iets noteren als: “In ons testpanel heeft 95 procent van de deelnemers het liefst een gele walkman.” Maar het venijn zat ’m in de staart. De proefpersonen mochten na afloop een gratis walkman mee naar huis nemen. Op een tafel bij de uitgang lagen de traditionele zwarte en de flitsende gele naast elkaar. En wat nam iedereen mee naar huis? Gewoon een zwarte.

Die tafel met walkmans, dát was pas een slimme manier van meten.



Cees Andriessse

**Zo is het: De bewijzen van Laplace***Epsilon Uitgaven, deel 94, 2019*

148 p., prijs €17,00

ISBN 9789050411790

This biography gives an accessible overview of Laplace's life and times and especially his mathematical and scientific work. Formally, it is a fictional autobiography: Andriessse writes as if it is Laplace himself who is recounting his own life in the first person. This stylistic choice is perhaps not very natural for the actual emphasis of the text, however. One might have expected this narrative mode to have been adopted for the sake of dramatising a life set in a tumultuous historical period, or for exploring the protagonist from a psychological point of view. But instead we get a rather factual account of the life of Laplace that takes few liberties of fictionalisation. The story is here and there embellished with occasional lines of dialogue or descriptive detail, but by and large the book seems to follow the historical record closely, although it gives no references of any kind by which this can be verified.

A quite typical chapter from the middle of the book proceeds as follows. It opens by mentioning high-altitude air pressure measurements that were being made at the time using hot air balloons. This sets the scene for Laplace going on a late summer trip to the countryside with his future wife. There is a very brief dialogue, in which she references her upcoming birthday. They kiss. This is half a page into the chapter. In the next line Laplace transitions from this to "my 50-page paper on the secondary inequalities had a triumphant conclusion as well", whereupon he launches into a rather detailed discussion of this work, including for instance his regret that he had prematurely announced the value of a certain constant

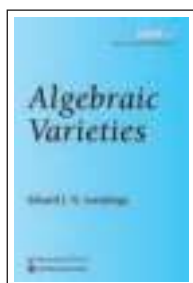
as "15 or perhaps a bit less" only to soon thereafter obtain 15.32 from the final calculations.

Much of the book has a similar structure: quite extensive discussions of Laplace's work, in largely non-technical terms, interspersed with brief interludes on personal events, historical-contextual tidbits tangentially related to the story, and a few lines of dialogue that often center around factual information that can be historically verified. That a kiss from the love of his life makes him think of his latest calculations in celestial mechanics is also very much in character for the Laplace we get to know in this book. It is a Laplace who lives for his work and has little interest in anything else. In particular, Andriessse opts for the non-believer side of the much-debated issue of Laplace's religion or absence thereof, although the quasi-autobiographical format means that there is no mention of the secondary literature or conflicting evidence on this or any other issue.

Laplace lived through the most dramatic period in French history. Close colleagues of his were guillotined during the Revolution, and his own son almost died as a soldier during Napoleon's disastrous Russia campaign. But worldly affairs seem to have been little but a distraction to Laplace, as far as we can tell from this book. When Napoleon declares himself emperor, Laplace mostly notes with some annoyance that he is obligated to take time off work to attend the ostentatious crowning ceremony in the Notre Dame. And when Napoleon falls a decade later, Laplace is a bit embarrassed to have to change the dedication of his book, where he had praised Napoleon when that was appropriate a few years earlier. Similarly, when Laplace discovers inconsistencies in reported voter statistics for the constitutional referendum of 1800, he seems more upset about the mathematical incompetence of the fraudsters than anything else.

Altogether this book may not have as compelling a *raison d'être* as Andriessse's successful Huygens biography, but it will lead the reader through the career of a leading mathematician whose life was made all the more interesting by being, perhaps despite his best efforts, entangled with a very eventful era of history. *Viktor Blåsjö*

*Recent verschenen publicaties. Als u een van deze boeken wilt bespreken of als u suggesties heeft voor andere boeken voor deze rubriek, laat dit dan per e-mail weten aan [reviews@nieuwarchief.nl](mailto:reviews@nieuwarchief.nl).*



Eduard J. N. Looijenga

**Algebraic Varieties***Surveys of Modern Mathematics, Vol. 15**International Press of Boston, 2020*

ISBN 9781571463883

[intlpress.com/site/pub/pages/books/items/00000543](http://intlpress.com/site/pub/pages/books/items/00000543)

Øyvind Ryan

**Linear Algebra, Signal Processing, and Wavelets - A Unified Approach***Springer, 2019*

ISBN 9783030018115

[springer.com/9783030018115](http://springer.com/9783030018115)

Andrew J. Simoson

**Exploring Continued Fractions From the Integers to Solar Eclipses***American Mathematical Society, 2019*

ISBN 9781470447953

[bookstore.ams.org/dol-53](http://bookstore.ams.org/dol-53)

Andrew Granville

**Number Theory Revealed: A Masterclass***American Mathematical Society, 2019*

ISBN 9781470441586

[bookstore.ams.org/mbk-127](http://bookstore.ams.org/mbk-127)

# Problemen

## | Problem Section

This Problem Section is open to everyone; everybody is encouraged to send in solutions and propose problems. Group contributions are welcome. We will select the most elegant solutions for publication. For this, solutions should be received before **15 April 2020**. The solutions of the problems in this issue will appear in the next issue.

### Problem A (proposed by Hendrik Lenstra)

For every positive integer  $n$ , we write  $[n] := \{0, 1, \dots, n-1\}$ . For every integer  $m$ , we let  $T(m) := m(m+1)/2$  be the  $m$ -th triangular number. Let  $\tau: [n] \rightarrow [n]$  be the map given by  $m \mapsto T(m) \bmod n$ .

- For which  $n$  is  $\tau$  a permutation?
- For these  $n$ , determine the sign of  $T$  as a function of  $n$ .

### Problem B (proposed by Onno Berrevoets)

Let  $G$  be a finite group of order  $n$ . A map  $f: G \rightarrow \mathbb{R}$  is called a near-homomorphism if for all  $x, y \in G$ , we have  $|f(xy) - f(x) - f(y)| \leq 1$ .

- Show that for every near-homomorphism  $f$  from  $G \rightarrow \mathbb{R}$ , we have  $\text{diam}(f[G]) := \sup_{x, y \in G} |f(x) - f(y)| \leq 2 - 2/n$ .
- Show that if  $G$  is cyclic, then there exists a near-homomorphism  $f: G \rightarrow \mathbb{R}$  with  $\text{diam}(f[G]) = 2 - 2/n$ .

### Problem C (proposed by Hendrik Lenstra)

Let  $n \geq 4$  be an integer and let  $A$  be an abelian group of order  $2^n$ . Let  $\sigma$  be an automorphism of  $A$  such that the order of  $\sigma$  is a power of 2. Then the order of  $\sigma$  is at most  $2^{n-2}$ .

**Edition 2019-4** Last time, we forgot to credit Thijmen Krebs for his solution to problem B. We apologize for the oversight. This time, we received solutions from Alex Heinis, Alexander van Hoorn, Thijmen Krebs and Hendrik Reuvers.

### Problem 2019-4/A (proposed by Onno Berrevoets)

Let  $F \in \mathbb{Z}[X]$  be a monic polynomial of degree 4. Let  $A \subset \mathbb{Z}$  with  $\#A \geq 5$  be such that for all  $a \in A$  we have  $2^{2019} \mid F(a)$ . Prove that there exist distinct  $a, a' \in A$  such that  $a \equiv a' \pmod{2^{202}}$ .

**Solution** We received solutions from Alexander van Hoorn, Thijmen Krebs and Hendrik Reuvers. Both Thijmen and Hendrik realized that the statement is still true when we replace 202 by 505; this solution is based on their arguments.

For all  $a, a' \in A$  with  $a \neq a'$ , we find  $F(a') - F(a)$  is divisible by  $a' - a$ . Fix  $a_1 \in A$  and let  $F_1(x) = \frac{F(x) - F(a_1)}{x - a_1}$ . If  $a - a_1$  is divisible by  $2^{505}$  for some  $a \in A_1 := A \setminus \{a_1\}$ , we are done. Otherwise,  $F_1(a)$  must be divisible by  $2^{2019-504} = 2^{1515}$  for all  $a \in A_1$ . This means that  $F_1(x)$  is a monic polynomial of degree 3 for which there exists a set  $A_1$  of cardinality at least 4 such that for all  $a \in A_1$  we have  $2^{1515} \mid F_1(a)$ .

We can repeat this construction, each time reducing the size of  $A$  by one and reducing the exponent of 2 by 504. In the end, we either find that there exist  $a, a' \in A$  such that  $a - a'$  is divisible by  $2^{505}$ , or there exists a monic constant polynomial  $F_4$  together with a set  $A_4$  of cardinality at least 1 such that for all  $a \in A_4$ , we have  $F_4(a)$  is divisible by  $2^{2019-4 \cdot 504} = 2^3$ . Since  $F_4 = 1$  is not divisible by 8, clearly the latter cannot be the case. So there exist  $a, a' \in A$  such that  $a - a'$  is divisible by  $2^{505}$ .

For the sake of completeness, our original solution was based on taking the determinant of the matrix  $(a^i)_{a \in A, i \in \{0, 1, \dots, 4\}}$  and noting that first of all, this is divisible by the product

of all the  $a - a'$  with  $a, a' \in A$ , and secondly, we can change the fourth row into  $(F(a))_{a \in A}$  by row operations that do not change the determinant. Since this row is divisible by  $2^{2019}$ , so is the product of the  $a - a'$ . A similar method works if the polynomial  $F$  has at least one odd coefficient, even if  $F$  is not monic.

---

**Problem 2019-4/B** (proposed by Jan Draisma)

Let  $n \in \mathbb{Z}_{\geq 2}$  and let  $S$  be a non-empty subset of  $\{1, 2, \dots, n-1\}$ .

1. Prove that there exists an  $n$ -th root of unity  $z \in \mathbb{C}$  such that the real part of  $\sum_{i \in S} z^i$  is smaller than or equal to  $-\frac{1}{2}$ .
2. Suppose that  $n$  is not a power of 2. Prove that the  $-\frac{1}{2}$  in the previous part is optimal in the following sense: there exists a non-empty subset  $S$  of  $\{1, 2, \dots, n-1\}$  such that for all  $n$ -th roots of unity  $z$ , the real part of  $\sum_{i \in S} z^i$  is at least  $-\frac{1}{2}$ .

**Solution** The first part is proved as follows. Let  $A$  be the circulant  $n \times n$  matrix with  $A_{i,j} = 1$  if  $i - j \in S$  (taken mod  $n$ ) and  $A_{i,j} = 0$  otherwise. Observe that  $A$  has an orthonormal basis of eigenvectors  $\mathbf{v}_z = \frac{1}{\sqrt{n}}(1, z, z^2, \dots, z^{n-1})$  (with respect to the standard inner product on  $\mathbb{C}^n$ ), where the  $z$  run over the  $n$ -th roots of unity. This uses the fact that  $\sum_{i=1}^n z^i = 0$  whenever  $z$  is an  $n$ -th root of unity not equal to 1 and  $n$  otherwise. The eigenvalue of  $\mathbf{v}_z$  is precisely the expression  $\lambda_z = \sum_{i \in S} z^i$ .

Note that if  $\mathbf{x} = \sum_z c_z \mathbf{v}_z$ , then

$$\operatorname{Re}(\mathbf{x}^* A \mathbf{x}) = \operatorname{Re}\left(\sum_z \lambda_z c_z^* c_z\right) \geq \min_z \operatorname{Re}(\lambda_z) \mathbf{x}^* \mathbf{x}.$$

Let  $i \in S$  and consider  $\mathbf{x} = \mathbf{e}_i - \mathbf{e}_{i+1}$ . We easily verify that

$$-1 \geq \mathbf{x}^* A \mathbf{x} \geq \min_z \operatorname{Re}(\lambda_z) \cdot 2.$$

So there exists an  $n$ -th root of unity  $z \in \mathbb{C}$  such that the real part of  $\sum_{i \in S} z^i$  is smaller than or equal to  $-\frac{1}{2}$ .

The solution to the second part is based on the solution by Hendrik Reuvers. If  $n = pm$  with  $p$  an odd prime, we take  $S = \{m, 2m, \dots, \frac{p-1}{2}m\}$ . Let  $z$  be an  $n$ -th root of unity. If  $z^m = 1$ , clearly we are done. Otherwise, note that  $z^{km} = z^{\frac{p-k}{p}m}$ . We find the real part of  $2 \sum_{s \in S} z^s$  equals  $\sum_{i=1}^{p-1} (z^m)^i = -1$ , since we are taking the sum of all primitive  $p$ -th roots of unity. This gives the desired inequality (or equality in this case).

---

**Problem 2019-4/C** (proposed by Onno Berrevoets)

Let  $n \geq 1$  be an integer. Denote by  $S_n$  the permutation group on  $\{1, \dots, n\}$ . An element  $\sigma \in S_n$  is called *representable* if there exists a polynomial  $f \in \mathbb{Z}[X]$  such that for all  $x \in \{1, \dots, n\}$  we have  $\sigma(x) = f(x)$ . What is the number of representable elements of  $S_n$ ?

**Solution** We received solutions from Alex Heinis, Thijmen Krebs and Hendrik Reuvers. This solution is based on the solution by Alex.

Suppose  $\sigma \in S_n$  is representable, say by the polynomial  $f \in \mathbb{Z}[X]$ . Observe that  $f(n) - f(1)$  is divisible by  $n-1$ . It follows  $\{f(1), f(n)\} = \{1, n\}$ . Suppose  $f(1) = 1$ . Observe that  $f(n-1) - f(1)$  is divisible by  $n-2$ , and hence we can conclude  $f(n-1) = n-1$ . Repeating this, we find  $f(x) = x$  for all  $x \in \{1, 2, \dots, n\}$ . If  $f(1) = n$ , we replace it by  $n+1-f$  and apply the same procedure to find  $f(x) = n+1-x$  for all  $x \in \{1, 2, \dots, n\}$ . So we find that when  $n \geq 2$ , there are exactly two representable permutations, namely the identity and the permutation that sends  $x$  to  $n+1-x$ . When  $n = 1$ , these two coincide, so there is only one representable permutation in this case.

