

Inhoud | Contents

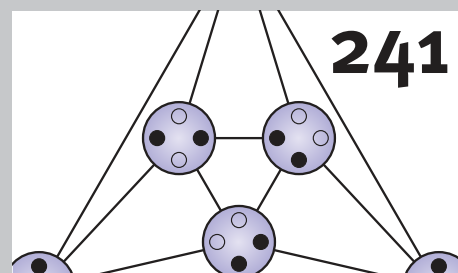
Artikelen | Features

- Onderzoek | Research**
 241 **Stieltjesprijs 2017: Typische eigenschappen van matroïden**
Jorn van der Pol
- De oplossing | The Solution**
 245 **Een discrete vraag, een complexe oplossing**
Han Peters, Guus Regts
- Onderwijs | Education**
 248 **Profielwerkstuk: Interpolatiepolynomen en coëfficiënten**
Max van Horssen
- Onderwijs | Education**
 252 **Wiskundig denken in de centrale examens wiskunde B van havo en vwo**
Paul Drijvers, Hanneke Kodde-Buitenhuis
- Geschiedenis | History**
 261 **Willem Jacob 's Gravesande and mathematics in the early eighteenth century**
Jip van Besouw
- Onderwijs | Education**
 272 **A glimpse into the Pre-University College**
Marta Maggioni, Matteo Sfragara
- Column | Column**
 275 **π schatten met behulp van kansrekening**
Casper Albers
- Geschiedenis | History**
 277 **Wiskundigen in Groningen**
Henk W. Broer, Henk S. V. de Snoo
- Geschiedenis | History**
 280 **J. Ch. Boland: een Groningse wiskundige uit Amsterdam**
Henk W. Broer
- In Memoriam | Obituary**
 283 **Harry Kesten: Fenomenaal kansrekenaar en inspirerende persoonlijkheid**
Rob van den Berg
- In Memoriam | Obituary**
 287 **Pieter Cornelis Baayen: Erudiet wiskundige**
Gerard Alberts, Teun Koetsier, Jan van Mill, Lex Schrijver

Rubrieken | Departments

- 235 **Redactioneel** *Raf Bocklandt*
- 236 **Agenda** *Margriet Oomen*
- 238 **Nieuws** *Margriet Oomen*
- 259 **Het keerpunt van Willem van der Poel** *Daan Mulder*
- 268 **Stoffelijke resten: Italië** *Wieb Bosma*
- 290 **In de verdediging** *Nicolaas Starreveld*
- 292 **Boekbesprekingen** *Hans Cuypers, Hans Sterk*
- 303 **Problemen** *Onno Berrevoets, Rob Eggermont, Daan van Gent*

Uitgelicht



Stieltjesprijswinnaar Jorn van der Pol bespreekt typische eigenschappen van matroïden.



Paul Drijvers en Hanneke Kodde-Buitenhuis onderzochten hoe zichtbaar wiskundig denken is in de centrale eindexamens.

Colofon

Het Nieuw Archief voor Wiskunde is een uitgave van het Koninklijk Wiskundig Genootschap en verschijnt vier maal per jaar. Het tijdschrift richt zich op eenieder die zich beroepsmatig met wiskunde bezighoudt, als academisch of industrieel onderzoeker, student, leraar, journalist of beleidsmaker. Het stelt zich ten doel te berichten over ontwikkelingen in de wiskunde in het algemeen en in de Nederlandse wiskunde in het bijzonder.

ISSN 0028-9825

Adres

Nieuw Archief voor Wiskunde
Centrum Wiskunde & Informatica
Postbus 94079, 1090 GB Amsterdam
tel. 020-5924288
redactie@nieuwarchief.nl
www.nieuwarchief.nl

Hoofredactie

Raf Bocklandt (r.r.j.bocklandt@uva.nl)
Robbert Fokkink (r.j.fokkink@tudelft.nl)

Eindredactie/Bladmanager

Fred Drissen (fred@nieuwarchief.nl)

Redactie

Viktor Blåsjö (UU), Hans Cuypers (TU/e), Teun Koetsier (VU), Daan Mulder, Margriet Oomen (UL), Nicolaos Starreveld (UvA), Hans Sterk (TU/e), Mark Timmer (UT)

Problemenrubriek (problems@nieuwarchief.nl)

Onno Berrevoets, Rob Eggermont en Daan van Gent

Bureau redactie

Claartje Ottens

Illustraties

Ryu Tajiri

Vormgeving

Susanne Laws (omslag, begeleiding binnenwerk)
Kitty Molenaar (ontwerp)

Druk

Veldhuis Media

Advertenties

advertenties@nieuwarchief.nl

Koninklijk Wiskundig Genootschap

www.wiskgenoot.nl

Platform Wiskunde Nederland

www.platformwiskunde.nl

European Mathematical Society

www.euro-math-soc.eu

International Mathematical Union

www.mathunion.org

Koninklijk Wiskundig Genootschap

Het Koninklijk Wiskundig Genootschap (KWG) is een landelijke vereniging van beoefenaars van de wiskunde. In 1778 opgericht onder de zinspreuk: 'Een onvermoeide arbeid komt alles te boven' is het 's werelds oudste nationale wiskundegenootschap. Leden ontvangen het Nieuw Archief voor Wiskunde als onderdeel van hun lidmaatschap.

Bestuur

Jan Wiegerinck (UvA, voorzitter), Marije Elkenbracht (ABN AMRO, penningmeester), Marie-Colette van Lieshout (CWI, secretaris), Danny Beckers (VU), Theo van den Bogaart (HU), Sonja Cox (UvA), Barry Koren (TU/e), Michael Mürger (RU), Wioletta Ruszel (TUD).

Secretariaat

Koninklijk Wiskundig Genootschap, CWI
Postbus 94079, 1090 GB Amsterdam
wiskgenoot@wiskgenoot.nl
www.wiskgenoot.nl

Ledenadministratie KWG / Abonnementen

admin@wiskgenoot.nl, tel. 020-5924008
Wijzigingen of opzegging kunt u ook doorgeven door in te loggen op www.wiskgenoot.nl.

Contributie

Tarieven per jaar (bij betaling per automatische incasso krijgt u € 2,50 korting):

- gewoon lid: € 92,50
- reciprociteitslid: € 72,50
- gepensioneerden en werklozen: € 47,50
- aio's, oio's, studenten: € 37,50 (max. 4 jaar)
- lid zonder Nieuw Archief: € 52,50

Studenten en pas afgestudeerden kunnen een jaar lang gratis lid worden.

Voor verzending van het Nieuw Archief naar het buitenland wordt een portotoeslag van € 10 in rekening gebracht.

Instituten in Nederland en buitenland kunnen zich abonneren op het Nieuw Archief voor Wiskunde voor € 100 (Nederland), € 110 (Europa) of € 112,50 (buiten Europa).

Members of foreign societies

Members of *SIAM*, the *Société Mathématique de France*, the *Gesellschaft für Angewandte Mathematik und Mechanik*, the *Deutsche Mathematiker-Vereinigung*, and of the *American, Australian, Belgian, Indian, London, Spanish, and South-African Mathematical Societies* living outside of the Netherlands pay € 72,50 instead of the full membership fee of € 92,50 a year. Conversely, these foreign societies, as well as the VvS+OR and the NVORWO, have reduced membership fees for KWG members. A postage charge of € 10 is added for members living abroad but in Europe, and a charge of € 12,50 for members living outside of Europe.

Exchange subscriptions

Koninklijk Wiskundig Genootschap Library
Centrum Wiskunde & Informatica
P.O. Box 94079, NL-1090 GB Amsterdam
KWG-exchange@cwi.nl

Informatie voor auteurs

Kopij

Het Nieuw Archief voor Wiskunde is een geredigeerd tijdschrift. Kopij dient per e-mail te worden aangeboden aan kopij@nieuwarchief.nl. Uitgebreide informatie en auteursinstructies kunt u vinden op www.nieuwarchief.nl.

Volgende nummers

nummer	maand	verschijnen	deadline kopij
21(1)	maart 2020		verstreken
21(2)	juni 2020		01-02-2020
21(3)	september 2020		01-05-2020
21(4)	december 2020		01-08-2020

Instituutsleden

De publicaties van het Koninklijk Wiskundig Genootschap worden mede mogelijk gemaakt door de bijdragen van de volgende instituten.



Centrum Wiskunde & Informatica



Rijksuniversiteit Groningen



Universiteit van Amsterdam



Universiteit Leiden



Vrije Universiteit



Universiteit Utrecht



Technische Universiteit Eindhoven



Eurandom



Technische Universiteit Delft



Universiteit Twente



Radboud Universiteit Nijmegen



Freudenthal Instituut

Op het omslag

De twee scholieren Aryan Rezaei Ghavamabadi en Tobias Lewerissa namen deel aan het Pre-University-programma en wonnen met hun onderzoek naar 'The knight errant problem' de Jan Kijne-onderzoeksprijs. Lees het artikel van Marta Maggioni en Matteo Sfragara op pagina 272.

Koudwatervrees

Dit academiejaar begon het al vroeg. Eind september voelde ik een lichte onrust opkomen want half oktober waren ze er: de tentamens. Normaal blijf ik er meestal van gespaard tot december, maar dit semester vielen mijn vakken allebei in het eerste blok en dus moest ik op zoek naar goede vragen. De moeilijkste opdracht hierbij is de jacht op een kegelsnede.

Sinds een paar jaar geef ik namelijk Inleiding Meetkunde. In dit vak van drie studiepunten serveer ik de studenten een voorproefje van wat meetkunde aan de universiteit zoal inhoudt. We starten met wat klassieke euclidische meetkunde, maken de sprong naar het affiene en projectieve vlak en bestuderen symmetrie in elk van deze meetkundes, om dan te eindigen met het Erlangenprogramma van Felix Klein, dat stelt dat meetkunde bestaat uit de studie van groepswerkingen op ruimtes. Een steeds wederkerend voorbeeld is de classificatie van kegelsneden en dus komt er op het tentamen telkens een vraag van de volgende vorm: de studenten krijgen een situatie uit het 'echte leven' en moeten daaruit de vergelijking van een kegelsnede halen, de eccentriciteit en brandpunten bepalen en een euclidische transformatie opstellen die de vergelijking in standaardvorm brengt.

Bijgevolg ben ik de maand voor het tentamen elke keer op zoek naar een situatie met een mooie kegelsnede: een trap op doel, een katje op een naar beneden zakkende ladder, rechthoekige tafeltjes in een hoek van de kamer, de poot van een flamingo... Je kan het zo gek niet verzinnen of er zit wel een kegelsnede in verborgen. Althans dat dacht ik, maar dit jaar ging het net wat moeizamer. Alles wat ik probeerde mislukte; elk goed idee leverde iets anders op, een conchoïde of een cissoïde, een folium of ovaal, maar geen simpele ellips of parabool.

Tentamenvragen verzinnen is geen makkie, niet alleen voor mij. Sinds de hervorming van de centrale examens wiskunde voor havo en vwo wordt er extra nadruk gelegd op het modelleren en wiskundig denken, en dus moeten daar ook meer examenvragen over worden opgesteld. In dit nummer van het Nieuw Archief, gaan Paul Drijvers en Hanneke Kodde-Buitenhuis na of dit inderdaad het geval is. Bij het doorlezen van hun bijdrage, viel mijn oog op een van de voorbeeldvragen die ze gebruikten ter illustratie van hun werkmethode.

Daar was mijn kegelsnede, dobberend in de oceaan: een hyperbolisch verband tussen de temperatuur van het water en de overlevingstijd van een drenkeling. Kon ik haar uit het water opvissen en recycleren voor mijn tentamen? Om dat te doen moesten studenten de vergelijking van de hyperbool zelf kunnen afleiden, maar waar komt dat hyperbolisch verband vandaan? Is daar een wiskundige reden voor? Voor ik het wist was ik een hele middag ondergedompeld in de thermodynamica. Interessant dat wel, maar na een tijdje werd het hopeloos ingewikkeld en moest ik terugdenken aan een opmerking van de studenten van vorig jaar. Op de vakevaluatie klaagden ze dat de tentamenvragen te leuk waren en daarom ook te moeilijk.

Studentenevaluaties moet je serieus nemen, dus schoof ik terstond mijn warmtevergelijkingen aan de kant en verzond dan maar een klassiek euclidisch probleem over parallellogrammen met een vaste omtrek. Wiskundig modelleren is leuk maar gevaarlijk. Je doet het dus best met mate, zowel voor het zieleheil van de student als dat van de docent. ❖

Raf Bocklandt, hoofdredacteur

Korteweg-de Vries Instituut, Universiteit van Amsterdam

Agenda

| Upcoming Events

1 januari – 31 december 2019

Spelen met wiskunde

Doe-tentoonstelling. Maak zelf een draaikolk en bouw je eigen brug. Ontdek hoe geluid eruitziet en speel als een kunstenaar met perspectief. Wiskunde is écht overal.

plaats Rijksmuseum Boerhaave, Leiden

info rijksmuseumboerhaave.nl

December 2019

9–13 december 2019

Workshop Heavy Tails

Workshop voor statistici en stochastici alsmede natuurkundige, besiskundigen, financiële wiskundigen en informatici, om nieuwste technieken en theorie over 'heavy tails' uit te wisselen.

plaats Technische Universiteit Eindhoven

info eurandom.nl

Januari 2020

9–10 januari 2020

Panama-conferentie 2020

Conferentie met thema 'Rekenen-wiskunde van ... tot ...' biedt expliciet de ruimte om verschillende visies, doelen en didactiek van het reken-wiskundeonderwijs te delen.

plaats Woudschoten, Zeist

info panamaconferentie.sites.uu.nl/

11 januari 2020

Wintersymposium KWG

Het jaarlijkse wintersymposium van het Koninklijk Wiskundig Genootschap. Dit jaar is het thema 'Aardse wiskunde', over toepassingen van wiskunde in weer, klimaat en milieu.

plaats Academiegebouw Utrecht

info wintersymposium.weebly.com

13–15 januari 2020

LNMB-conferentie

45ste conferentie over de wiskunde van besliskunde, georganiseerd door het Landelijk Netwerk Mathematische Besliskunde (LNMB).

plaats Congrescentrum De Werelt, Lunteren

info lnmb.nl/conferences

20–30 januari 2020

Eerste ronde Nederlandse Wiskunde Olympiade

Wiskundewedstrijd voor middelbare scholieren in Nederland.

plaats middelbare scholen in Nederland

info wiskundeolympiade.nl

20–22 januari 2020

19th Winter school on Mathematical Finance

Speciale onderwerpen dit jaar zijn: 'Dealing with Market Frictions' en 'Hedging in Markets with Price Impact'.

plaats Congrescentrum De Werelt, Lunteren

info staff.fnwi.uva.nl/p.j.c.spreij/winterschool/winterschool.html

20–22 januari 2020

The NETWORKS Match Making Event 2020: Social Sciences Meets Mathematics

Doel van de workshop is het bij elkaar brengen van sociologen, economen, wiskundigen en informatici die onderzoek doen naar netwerken.

plaats Doorn

info thenetworkcenter.nl

27–31 januari 2020

Study Group Mathematics with Industry 2020

Wiskundigen werken samen een week lang aan problemen voorgelegd door bedrijven.

plaats Fontys, Tilburg

info swi-wiskunde.nl

31 januari – 1 februari 2020

Nationale Wiskunde Dagen

Landelijke tweedaagse bijeenkomst voor wiskundeleraren.

plaats De Leeuwenhorst, Noordwijkerhout

info uu.nl/nationale-wiskunde-dagen

Februari 2020

7 februari 2020

Mark Kaç Seminar

Maandelijks seminar voor onderzoekers in kansrekening en statistische mechanica, met sprekers Roman Kotecký (Warwick) en Alexandre Gaudillière (Marseille).

plaats Utrecht

info www.win.tue.nl/markkac

Suggesties voor deze agenda zijn welkom.

Redacteur: Margriet Oomen

agenda@nieuwarchief.nl

12 februari 2020

□ OnderbouwWiskundeDag

Een competitie waarbij leerlingen uit 3 havo/vwo in teams van 3 of 4 de hele dag werken aan een 'grote' wiskundige (denk)opdracht waarin probleemoplossen centraal staat.

plaats middelbare scholen in Nederland

info wiskundeintams.sites.uu.nl

Maart 2020

6 maart 2020

□ Mark Kaç Seminar

Maandelijks seminar voor onderzoekers in kansrekening en statistische mechanica, met sprekers Roman Kotecký (Warwick) en Margherita Disertori (Bonn).

plaats Utrecht

info www.win.tue.nl/markkac

13 maart 2020

□ Tweede ronde Nederlandse Wiskunde Olympiade

Wiskundewedstrijd voor middelbare scholieren.

plaats twaalf universiteiten in Nederland

info wiskundeolympiade.nl

13 maart 2020

□ Nationale Rekencoördinator Dag

Een dag voor rekencoördinatoren en leerkrachten, waarop het rekenonderwijs van de basisschool centraal staat.

plaats Domstad, Utrecht

info nrcd.sites.uu.nl

19 maart 2019

□ W4 Kangaroo-wedstrijd

Wereldwijde Wiskundewedstrijd voor kinderen van groep 3 van de basisschool tot en met 6 vwo.

plaats basisscholen en middelbare scholen

info w4kangoeroe.nl

23–27 maart 2020

□ Multidimensional Continued Fractions and Euclidean Dynamics

Workshop mede georganiseerd door Evgeny Verbitskiy (UL).

plaats Lorentz Center@Snellius, Leiden

info lorentzcenter.nl

25 maart 2020

□ Grote Rekendag

Dag voor basisschoolleerlingen die geheel in het teken van rekenen staat.

plaats basisscholen in Nederland en België

info groterekendag.nl

April 2020

3 april 2020

□ Mark Kaç Seminar

Maandelijks seminar voor onderzoekers in kansrekening en statistische mechanica, met sprekers Alexander Drewitz (Keulen) en Alberto Chiarini (TU/e).

plaats Utrecht

info www.win.tue.nl/markkac

6–9 april 2020

□ Graph Limits

Workshop mede georganiseerd door Remco van der Hofstad, Frank den Hollander en Viresh Patel.

plaats Technische Universiteit Eindhoven

info eurandom.nl

7 april 2020

□ U-Talent Conferentie 2020

Jaarlijkse conferentie voor docenten, toa's en schoolleiders, dit keer met thema 'Artificial Intelligence en de toekomst van het onderwijs'.

plaats Science Park de Uithof, Utrecht

info u-talent.nl

14–15 april 2020

□ Nederlands Mathematisch Congres

Jaarlijkse bijeenkomst van wiskundig Nederland georganiseerd door het KWG, met dit jaar onder andere de uitreiking van de Brouwerprijs.

plaats Van der Valk Hotel Utrecht

info wiskgenoot.nl

15–21 april 2020

□ European Girls' Mathematical Olympiad

Internationale wiskundewedstrijd voor meisjes van de middelbare school.

plaats Hotel Zuiderduin, Egmond aan Zee

info egmo2020.nl

17–18 april 2020

□ Workshop Representation Theory and Integrability

Workshop ter gelegenheid van de proefschriftverdediging van Kayed Al Qasimi.

plaats Universiteit van Amsterdam

info gqt.nl

Mei 2020

1 mei 2020

□ Mark Kaç Seminar

Maandelijks seminar voor onderzoekers in kansrekening en statistische mechanica, met sprekers Federico Camia (Abu Dhabi) en Mauro Mariani (Moskou).

plaats Utrecht

info www.win.tue.nl/markkac

1–3 mei 2020

□ Benelux Mathematical Olympiad

Jaarlijkse olympiade voor middelbare scholieren uit België, Nederland en Luxemburg.

plaats België

info bxmo.org

15 mei 2020

□ ECENT-ELWier-conferentie

Jaarlijkse conferentie voor lerarenopleiders van lerarenopleidingen STEM (wiskunde/rekenen en natuurwetenschappen/techniek).

plaats Vergadercentrum Domstad, Utrecht

info elbd.sites.uu.nl

Juni 2020

5 juni 2020

□ Mark Kaç Seminar

Maandelijks seminar voor onderzoekers in kansrekening en statistische mechanica, met spreker Federico Camia (Abu Dhabi).

plaats Utrecht

info www.win.tue.nl/markkac

Nieuws

| News

Deze rubriek is een kroniek van wiskundige activiteiten in Nederland. Toekomstige activiteiten worden aangekondigd en van voorbije activiteiten wordt verslag gedaan. Wilt u uw aankondiging of verslag in deze rubriek geplaatst zien? Stuur ons dan uw bijdrage, zo mogelijk met illustratie. De redactie behoudt zich het recht voor berichten te weigeren of in te korten.

Redacteur: Margriet Oomen
 nieuws@nieuwarchief.nl

Dick Askey overleden

Professor Richard Askey (Dick Askey), University of Wisconsin-Madison, is op 9 oktober 2019 na een kort ziekbed overleden. Hij bereikte de leeftijd van 86 jaar en was emeritus professor sinds 2003. Askey had een enorme invloed op het gebied van orthogonale polynomen en speciale functies. Het is grotendeels aan hem te danken dat dit deelgebied van de wiskunde, dat in de jaren zestig van de vorige eeuw enigszins verkalkt was, volledig gerevitaliseerd is. Zijn andere grote interesse betrof de didactiek van de wiskunde, vanaf de elementary school tot aan de calculus courses op de Amerikaanse colleges. Dick Askey bracht een sabbatical year door op het Mathematisch Centrum (nu CWI) in Amsterdam gedurende het academisch jaar 1969–1970. Door zijn lezingen en persoonlijke contacten in dat jaar had hij grote invloed op een aantal jonge promovendi daar, onder wie Herman Bavinck, Nico Temme en Tom H. Koornwinder.

wiskundepersdienst.nl



Foto: Paul R. Halmos Photograph Collection, maa.org

John Tate overleden

Op 16 oktober is dr. John T. Tate op 94-jarige leeftijd overleden. Tate introduceerde vele fundamentele begrippen in de getaltheorie, waaronder de *Tate module*, de *Tate curve*, *Tate cycles*, *Hodge–Tate decompositions*, *Tate cohomology*, de *Serre–Tate parameter*, *Lubin–Tate formal groups*, de *Tate trace*, de *Shafarevich–Tate group* en de *Néron–Tate height*. Voor zijn wiskundig werk ontving Tate zowel de Abelprijs, het wiskundig equivalent van de Nobelprijs, als de prestigieuze Wolfprijs. Tate promoveerde aan Princeton en werd later hoogleraar aan Harvard en de University of Texas.

nytimes.com

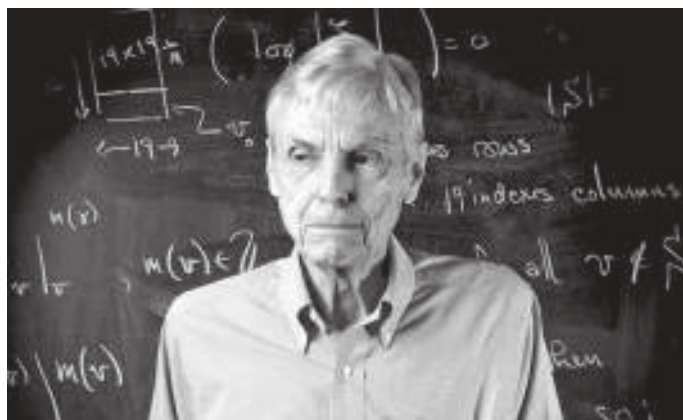


Foto: Marsha Miller, news.utexas.edu

Peter Stevenhagen nieuwe wetenschappelijk directeur Leiden

Professor Peter Stevenhagen is de nieuwe wetenschappelijk directeur van het Mathematisch Instituut van de Universiteit Leiden. Stevenhagen is hoogleraar in de algebra en getaltheorie. Hij was al eerder wetenschappelijk directeur van het Mathematisch Instituut tussen 2007 en 2015.

universiteitleiden.nl

Bijzonder fotoproject over de schoonheid van het krijtbord

De Amerikaanse fotografe Jessica Wynne heeft een uniek fotoproject over krijtborden van wiskundigen gemaakt. Over de hele wereld van Amerika tot Frankrijk en Brazilië bezocht Wynne wiskundigen om hun krijtborden te fotograferen. Wynne kwam op het idee voor een krijtbord-fotoproject nadat ze met twee wiskundehoogleraren bevriend raakte. Gefascineerd door de onverwachte creativiteit van wiskundigen, begon ze haar fotoproject. Door het fotograferen van de krijtborden hoopte Wynne een glimp op te vangen van de wereld waarin wiskundigen werken. De foto's van Wynne bevatten zowel krijtborden met korte aantekeningen, als uitgebreide onderzoekssessies van samenwerkende wiskundigen en zeldzame eureka-momenten. Zelf vindt Wynne de tijdloosheid van krijtborden bijzonder mooi. Daarnaast intrigeerde het haar hoe een krijtbord verschillende lagen van een werkproces kan weergeven. Het project van Wynne is vastgelegd in het boek *Do Not Erase*, dat in 2020 gepubliceerd zal worden door Princeton Books. *theguardian.com*



Foto: Jessica Wynne

Studiedag wiskunde opnieuw een succes

Op 2 november 2019 vond de zeer geslaagde jaarvergadering/studiedag van de Nederlandse Vereniging van Wiskundeleraren (NVvW) plaats. Dit jaar door bijna 500 enthousiaste wiskundeleraren bezocht. Het thema was 'Technieken in de wiskundeles' (wiskundige technieken, didactische technieken en het gebruik van techniek). Er zijn twee prachtige lezingen gegeven, een over het belang van wiskundetijdschriften in de achttiende en negentiende eeuw en een over de perfecte grafiek. Daarnaast waren er maar liefst 37 workshops die aansloten bij het thema en was er een wiskundemarkt met veel mooie stands. De onderwerpen van de workshops varieerden van onderzoek naar computationeel denken in het wiskundeonderwijs tot wiskundige vouwtechnieken als aanvulling op het curriculum. De sfeer was zoals altijd blij, inspirerend en luchtig. Overal waren verheugde gezichten van collega's te zien, die met elkaar in gesprek waren. Er liep zelfs een heuse giraf rond om de Giraf-reeks, een nieuwe reeks publicaties van de NVvW en

Epsilon Uitgaven, speciaal bedoeld voor leerlingen en docenten vmbo en onderbouw havo/vwo, te promoten. Elke bezoeker kreeg ook een wiskundige variant van het kaartspel *30 seconds* cadeau ter ere van de 75ste uitgave van *Euclides*, het vaktijdschrift van de vereniging. Kortom, een geslaagde studiedag! *Nicolaas Starreveld*



Ana Ros Camacho wint Westerdijk Award 2019

Ana Ros Camacho, assistent professor aan het Mathematisch Instituut van de Universiteit Utrecht (UU), heeft de Westerdijk Award 2019 gewonnen. De Westerdijkprijs wordt jaarlijks door de UU uitgereikt aan een werknemer die heeft bijgedragen aan een meer diverse organisatie. Camacho zette zich op verschillende manieren in voor diversiteit. Zo richtte zij onder andere een organisatie ter ondersteuning van Spaanstalige studenten aan de UU op, stelde ze haar college open voor vluchtelingen, coachte ze vrouwelijke wiskundigen en organiseerde ze de eerste Women in Mathematical Physics Meeting in Mexico.

uu.nl

ERCIM Cor Baayen Young Researcher Award voor András Gilyén

András Gilyén heeft de ERCIM (European Research Consortium for Informatics and Mathematics) Cor Baayen Young Researcher Award 2019 gewonnen. Deze prijs wordt jaarlijks uitgereikt aan de meest belovende jonge onderzoeker in de informatica of toegepaste wiskunde. András Gilyén kreeg de prijs voor zijn promotieonderzoek naar quantumalgoritmes en theoretische informatica, dat hij aan het CWI en de UvA deed onder begeleiding van prof.dr. R.M. de Wolf. Tijdens zijn promotieonderzoek ontwikkelde Gilyén de methode 'quantum singular value transformation', een extreem krachtig gereedschap voor quantumalgoritmes. András Gilyén deelde de prijs met Ninon Burgos, promovenda aan het ARAMIS Lab aan het Brain and Spine Institute (ICM) in Parijs. Inmiddels is Gilyén postdoc aan het California Institute of Technology (CALTECH). *ercim.eu*

The Best Writing on Mathematics 2019

In het boek *The Best Writing on Mathematics 2019* zijn de mooiste populairwetenschappelijke wiskundeartikelen van het afgelopen jaar gebundeld. De artikelen gaan over de geschiedenis en filosofie van wiskunde en over hoe wiskunde terugkomt in het dagelijks

leven. Speciale thema's dit jaar zijn gerrymandering met behulp van geometrisch statistische methodes, big data, een database voor reeksen van gehele getallen en constructies van geometrische objecten met een ongewoon 'uiterlijk'. Ook het artikel 'Mathematics for Big Data' van Alessandro di Bucchianico e.a. dat in december 2018 in het NAW verscheen, is opgenomen in *The Best Writing on Mathematics 2019*. press.princeton.edu

Sterke prestaties Nederlandse studenten tijdens IMC

De International Mathematics Competition (IMC) is een wiskunde-wedstrijd voor studenten onder de 23 jaar. Ook dit jaar vertegenwoordigden verschillende teams Nederland tijdens de wedstrijd. Het UvA-team bestaande uit Mike Daas, Ivo Kroon and Wouter Rienks (gouden medailles), Lies Beers and Mick Gielen (zilveren medailles), Floris Cnossen, Constantijn Dekker, Reinier Sorgdrager, Siebe Verheijen and Jim Wittebol (bronzen medailles) en Bart Zondervan (eervolle vermelding) was het beste Nederlandse team en eindigde op de 19e plaats. Pim Spelier, student aan de Universiteit Leiden, was met een 38e plaats de hoogst genoteerde Nederlander in het individuele klassement. Het IMC vond dit jaar van 28 juli tot 3 augustus plaats in Blagoevgrad, Bulgarije. imc-math.org.uk



Foto: uva.nl

Tweelingpriemvermoeden bewezen voor eindige velden

De wiskundigen Will Sawin van Columbia University en Mark Shusterman van de University of Wisconsin-Madison hebben het tweelingpriemvermoeden bewezen voor eindige velden. Het tweelingpriemvermoeden stelt dat er oneindig veel paren van priemgetallen zijn, waarbij het verschil tussen de priemgetallen gelijk is aan twee. Al in 1849 vermoedde Alphonse de Polignac dat voor elk geheel getal k er oneindig veel paren van priemgetallen zijn, waarbij het verschil tussen de twee priemgetallen gelijk is aan k . Nu, 170 jaar later, is het vermoeden van Polignac, en ook het tweelingpriemvermoeden, nog steeds niet bewezen. Wel bewees Yitang Zhang in 2013 dat er oneindig veel paren van priemgetallen zijn, waarvan het verschil tussen de twee getallen niet groter is dan 70 miljoen. Vervolgens wisten vele wiskundigen het 'priemverschil' van 70 miljoen te verkleinen tot, uiteindelijk, 246, maar daar stopte het. Niemand kon bewijzen dat er oneindig veel paren van priemgetallen zijn met een verschil kleiner dan 246. Veel wiskun-

digen gingen ervan uit dat er voor het bewijs van het vermoeden van Polignac radicaal nieuwe ideeën nodig zijn.

Het nieuwe artikel van Sawin en Shusterman bewijst dat het vermoeden van Polignac waar is voor eindige velden. In een eindig veld is het equivalent van een priemgetal een polynoom dat niet kan worden gefactoriseerd. Zo is bijvoorbeeld $x^2 + x + 2$ priem, maar $x^2 - 1 = (x - 1)(x + 1)$ niet. Het tweelingpriemvermoeden voor eindige velden stelt dat er oneindig veel paren priempolynomen zijn die een vaste factor, bijvoorbeeld x , schelen. Met behulp van meetkunde konden Sawin en Shusterman het vermoeden van Polignac bewijzen voor eindige velden.

Nu hopen wiskundigen dat het artikel van Sawin en Shusterman een nieuwe bewijstrategie bevat om het tweelingpriemvermoeden te bewijzen. Bewijzen voor stellingen over eindige velden waren eerder in de geschiedenis van de getaltheorie de sleutel tot een vergelijkbare stelling over de natuurlijke getallen. Maar ook op het gebied van eindige velden is het artikel van Sawin en Shusterman bijzonder. Want behalve dat Sawin en Shusterman konden aantonen dat er oneindig veel priempolynomenparen zijn, konden ze ook aangeven hoeveel priempolynomenparen er zijn van een bepaalde graad. En juist dit kwantitatieve aspect van het artikel geldt als een wiskundig buitengewoon interessant resultaat. quantamagazine.org

Koninklijk Wiskundig Genootschap

❑ KWG Wintersymposium

Het jaarlijkse Wintersymposium voor docenten en andere geïnteresseerden valt in 2020 op zaterdag 11 januari. Het thema is dit jaar 'Aardse wiskunde', over toepassingen van wiskunde in weer, klimaat en milieu. Zie: wintersymposium.weebly.com.

❑ NMC 2020

Het Nederlands Mathematisch Congres 2020 zal plaatsvinden op 14 en 15 april in het Van der Valk Hotel Utrecht (Winthontlaan 4, Utrecht). Het hotel is makkelijk bereikbaar met auto of openbaar vervoer. Plenaire sprekers zijn: Helmut Hofer (Institute for Advanced Study, Princeton University), Assaf Naor (Department of Mathematics, Princeton University), Laure Saint-Raymond (Ecole normale supérieure de Lyon), Bernd Sturmfels (Max-Planck Institute for Mathematics in the Sciences, Leipzig). Op het congres zal ook de Brouwermedaille worden uitgereikt aan professor David John Aldous (Berkeley), die vervolgens de Brouwerlezing zal geven. Verder is er de Beegerlezing door David Harvey (UNSW Sydney). Voor meer informatie zie: mathematischcongres.nl.

❑ Lidmaatschap EMS

Leden van het KWG kunnen tegen het gereduceerde tarief van 25 euro per jaar lid worden van de *European Mathematical Society* (EMS). Dit kan tegenwoordig rechtstreeks via de EMS, middels hun online formulier. Kies bij 'Membership of a national society' for 'Royal Dutch Mathematical Society'.

Recent verschenen:

❑ Epsilon Uitgaven (www.epsilon-uitgaven.nl)

Giraf 1. Weet wat je meet, Een statistiekspel op verschillende niveaus, kaartspel ontworpen door Marijke Hasselfras-Zuidbroek, € 5, 2019.

Jorn van der Pol

Department of Combinatorics and Optimization
University of Waterloo
jvanderpol@uwaterloo.ca

Onderzoek Stieltjesprijs 2017

Typische eigenschappen van matroïden

Matroïden abstraheren verschillende noties van ‘onafhankelijkheid’ in uiteenlopende situaties. Er bestaan veel vragen en weinig antwoorden over het typische gedrag van grote matroïden. Voor zijn proefschrift *Large Matroids: Enumeration and Typical Properties*, geschreven onder supervisie van Remco van der Hofstad en Rudi Pendavingh, won Jorn van der Pol de Stieltjesprijs 2017.

Iedere verzameling vectoren in een vectorruimte is *afhankelijk* of *onafhankelijk*. Als je de onderliggende vectorruimte vergeet en alleen kijkt naar de abstracte combinatorische eigenschappen van afhankelijke en onafhankelijke verzamelingen, dan kom je uit bij matroïdentheorie. De term matroïde werd geïntroduceerd door Whitney [7], die de volgende definitie gaf.

Definitie. Een *matroïde* is een paar $M = (E, \mathcal{I})$ waar E een eindige verzameling is en $\mathcal{I}$ een verzameling deelverzamelingen van E zodat

1. $\emptyset \in \mathcal{I}$;
2. als $I \subseteq J$ en $J \in \mathcal{I}$, dan is ook $I \in \mathcal{I}$;
3. als $I, J \in \mathcal{I}$ en $|I| < |J|$, dan is er een $e \in J$ zodat $I \cup \{e\} \in \mathcal{I}$.

We noemen E de grondverzameling van M ; deelverzamelingen van E noemen we afhankelijk als ze in $\mathcal{I}$ zitten, en anders

onafhankelijk. Het verband met lineaire onafhankelijkheid wordt doorgaans op de volgende manier gelegd. Laat A een matrix zijn, en veronderstel dat haar kolommen zijn gelabeld met de elementen van E . De verzameling $\mathcal{I}$ van lineair onafhankelijke verzamelingen kolommen voldoet aan de eigenschappen 1–3 en is dus de verzameling onafhankelijke verzamelingen van een matroïde met grondverzameling E . Matroïden die op deze manier gerealiseerd kunnen worden noemen we lineair of representeerbaar.

Matroïden zijn geen perfecte omschrijving van lineaire onafhankelijkheid: hoewel iedere matrix een matroïde definieert, is niet iedere matroïde representeerbaar. Maar in zekere zin zijn matroïden precies de juiste veralgemenisering van lineaire onafhankelijkheid, die ze bruikbaar maakt in uiteenlopende situaties, van lineaire algebra tot grafentheorie en van projectieve meetkunde tot combinatorische optimalisering.

Laat bijvoorbeeld $G = (V, E)$ een graaf zijn met punten V en kanten E . Een bos in G is een deelverzameling $E' \subseteq E$ zodat de deelgraaf (V, E') geen cycli be-



Jorn van der Pol

Foto: Eliza van Hout

vat. Als we $\mathcal{I}$ de verzameling van alle bossen laten zijn, dan voldoet $\mathcal{I}$ aan de eigenschappen 1–3 en dus is $(E, \mathcal{I})$ een matroïde. Zulke matroïden noemen we grafisch.

Een van de redenen dat we geïnteresseerd zijn in matroïden is hun diepgaande verband met combinatorische optimalisering, in het bijzonder met het *gretige* algoritme. We noemen een algoritme gretig als het een globaal optimum vindt door steeds een lokaal optimale keuze te maken.

Een voorbeeld van zo'n gretig algoritme is het algoritme van Kruskal voor het vinden van een opspannende boom van minimaal gewicht (minimum spanning tree, MST) in een samenhangende graaf waarin alle kanten een gewicht hebben.

Het algoritme van Kruskal vindt een MST door te beginnen met $T = \emptyset$ en steeds een kant van zo klein mogelijk gewicht toe te voegen aan T , waarbij de nieuwe kant wordt gekozen uit de verzameling kanten die kunnen worden toegevoegd aan T zonder een cykel te vormen. Het algoritme stopt als er geen nieuwe kant kan worden toegevoegd aan T .

In matroïdentermen vindt het gretige algoritme een onafhankelijke verzameling van minimaal gewicht in de grafische matroïde behorend bij G . De relatie met matroïden gaat veel verder dan dit: een familie van deelverzamelingen $(E, \mathcal{I})$ die aan eigenschap 1 en 2 voldoet is een matroïde dan en slechts dan als het gretige algoritme een onafhankelijke verzameling van minimaal gewicht geeft voor iedere gewichtsfunctie $w: E \rightarrow \mathbb{R}_+$. Matroïden karakteriseren dus die families waarvoor het gretige algoritme werkt.

Typische eigenschappen

Whitney vroeg in zijn artikel al hoe goed matroïden lineaire onafhankelijkheid omschrijven. Er zijn verschillende manieren waarop je deze vraag kunt proberen te beantwoorden, bijvoorbeeld door te kijken of het toevoegen van een extra axioma aan het drietal in de definitie een precieze omschrijving van representeerbare matroïden geeft.

Ik ben geïnteresseerd in een kwantitatieve aanpak van dit soort vragen: hoe groot is het aantal representeerbare matroïden vergeleken met het totaal aantal matroïden op een bepaalde grondverzameling E , in het bijzonder in de limiet als $|E|$ naar oneindig gaat? (Omdat het niet uitmaakt

welke elementen in E zitten, mogen we aannemen dat $E = [n] = \{1, 2, \dots, n\}$.)

Ter illustratie bekijken we eerst de matroïden die representeerbaar zijn als een matrix over het lichaam met twee elementen $\text{GF}(2)$, de zogenaamde binaire matroïden. Schrijf $b(n)$ voor het aantal binaire matroïden met grondverzameling $[n]$. Iedere binaire matroïde met grondverzameling $[n]$ kan worden gerepresenteerd door een $n \times n$ -matrix met elementen uit $\text{GF}(2)$; er zijn 2^{n^2} van dit soort matrices, dus we vinden onmiddellijk de volgende bovengrens op $b(n)$.

Stelling 1. $b(n) \leq 2^{n^2}$.

In Stelling 4 zullen we zien dat $b(n)$ waarloosbaar klein is vergeleken met $m(n)$, het aantal matroïden op grondverzameling $[n]$; dat wil zeggen

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{b(n)}{m(n)} = 0. \quad (1)$$

We zeggen dat een 'typische' matroïde niet-binair is, of dat 'bijna alle' matroïden niet-binair zijn.

Net zo kunnen we laten zien dat een typische matroïde niet representeerbaar is over het eindige lichaam $\text{GF}(q)$. Het wordt een ander verhaal als we willen laten zien dat een typische matroïde niet-representeerbaar is over een oneindig lichaam (zoals $\mathbb{R}$) of zelfs over een willekeurig lichaam. Peter Nelson [3] bewees onlangs de volgende verrassende stelling, die laat zien dat een typische matroïde niet-representeerbaar is over enig lichaam.

Stelling 2. Voor alle $n \geq 12$ geldt: het aantal representeerbare matroïden met grondverzameling $[n]$ is hooguit $2^{n^{3/4}}$.

Random matroïden

Welke eigenschappen heeft een typische matroïde nog meer? Deze vraag kennen we goed uit het gebied van random-grafentheorie. Laat G een random graaf op n punten zijn, dat wil zeggen dat G met gelijke kans elk van de $2^{n(n-1)/2}$ mogelijke grafen op n punten is. We zeggen dat een typische graaf een bepaalde eigenschap heeft, als de kans dat G de eigenschap heeft naar 1 gaat als we n naar oneindig laten gaan (in de random-grafenliteratuur wordt vaak de term 'met grote kans' gebruikt). Zo weten we bijvoorbeeld dat een typische graaf samenhangend is.

Je kunt de random graaf G construeren door voor elk van de $\frac{n(n-1)}{2}$ mogelijke kanten een munt te werpen om te beslissen of je die kant toevoegt aan G of niet (dit wordt het Erdős-Rényi-model genoemd). De random graaf G is dus het resultaat van $\frac{n(n-1)}{2}$ onafhankelijke keuzes. De probabilistische onafhankelijkheid van de verschillende muntworpen speelt een cruciale rol in de analyse van random grafen.

Het slechte nieuws is dat we niet zo'n mooi model hebben voor random matroïden. Als we bijvoorbeeld een random deelverzameling van de machtsverzameling van $[n]$ kiezen, dan voldoet deze met grote kans niet aan de eigenschappen 1–3 en vormt dus niet de onafhankelijke verzamelingen van een matroïde.

We beperken ons daarom tot het vergelijken van telfuncties, zoals in (1). Hiervoor is het belangrijk een goed beeld te hebben van het asymptotische gedrag van $m(n)$, het aantal matroïden met grondverzameling $[n]$.

Veel matroïden

Een verzameling van k elementen heeft 2^k deelverzamelingen. Aangezien de onafhankelijke verzamelingen een deelverzameling van de machtsverzameling van $[n]$ is, volgt direct dat $m(n) \leq 2^{2^n}$.

Met een beetje moeite kunnen we deze triviale bovengrens verbeteren. Op grond van eigenschap 2 kunnen we de onafhankelijke verzamelingen omschrijven door alleen de inclusiegewijs maximale onafhankelijke verzamelingen te geven. Net als in een vectorruimte noemen we zo'n maximale onafhankelijke verzameling een basis, en net als in een vectorruimte hebben alle bases dezelfde kardinaliteit (dit volgt uit eigenschap 3). De gemeenschappelijke kardinaliteit van de bases noemen we de rang van de matroïde. In de rest van dit artikel spelen de bases van een matroïde een belangrijke rol.

De bases van een matroïde van rang r vormen een deelverzameling van de $\binom{n}{r}$ mogelijke deelverzamelingen ter grootte r van $[n]$, en dus volgt onmiddellijk

$$m(n, r) \leq 2^{\binom{n}{r}}$$

waar $m(n, r)$ staat voor het aantal matroïden van rang r met grondverzameling $[n]$. Voor vaste n is $\binom{n}{r}$ maximaal als $r = \lfloor n/2 \rfloor$, dus vinden we

$$m(n) = \sum_{r=0}^n 2^{\binom{n}{r}} \leq (n+1) 2^{\binom{n}{\lfloor n/2 \rfloor}}. \quad (2)$$

Een standaardafschatting van binomiaalcoëfficiënten vertelt ons dat $\binom{n}{\lfloor n/2 \rfloor} \approx \frac{2^n}{\sqrt{n}}$. Door te kijken naar matroïden van vast gekozen rang kunnen we de exponent in de triviale bovengrens dus verbeteren met ongeveer een factor $\sqrt{n}$.

Sparse-paving matroïden

De bovengrens (2) zit niet al te ver van de waarheid. Dit kunnen we laten zien door een grote verzameling van speciale matroïden te construeren.

Het is een aardige opgave te laten zien dat een verzameling $\mathcal{B}$ van deelverzamelingen van $[n]$ de verzameling bases van een matroïde van rang r is dan en slechts dan als $\mathcal{B}$ niet-leeg is en voldoet aan de volgende uitwisselingseigenschap:

$$\begin{aligned} &\text{voor alle } B, B' \in \mathcal{B} \text{ en alle } e \in B \setminus B' \\ &\text{bestaat er een } f \in B' \setminus B \\ &\text{zodat } (B \setminus \{e\}) \cup \{f\}. \end{aligned} \quad (3)$$

(De definities van matroïden in termen van onafhankelijke verzamelingen en ba-

ses zijn equivalent. Er bestaan nog veel meer van zulke ‘cryptomorfe’ definities, een weerspiegeling van de veelzijdige oorsprong van het vakgebied.)

De bases van een matroïde van rang r met grondverzameling $[n]$ vormen een deelverzameling van de punten van de zogenaamde Johnson-graaf $J(n, r)$. Dit is de graaf met puntenverzameling $\{X \subseteq [n] : |X| = r\}$ waarin twee punten X en Y verbonden zijn dan en slechts dan als ze in precies $r-1$ elementen gemeen hebben, zie Figuur 1.

We noemen een verzameling X van punten in een graaf stabiel als geen twee punten van X buren. Als X een stabiele verzameling van $J(n, r)$ is, dan is $V(J(n, r)) \setminus X$, het complement van X in de punten van $J(n, r)$, niet-leeg en voldoet aan de uitwisselingseigenschap (3); ze vormt dus de verzameling bases van een matroïde. Matroïden die we op deze manier verkrijgen uit een stabiele verzameling van de Johnson-graaf noemen we ‘sparse-paving’. Iedere stabiele verzameling van $J(n, r)$ definieert dus zo’n sparse-paving matroïde. Een charmante constructie van Graham en Sloane [2] laat zien dat $J(n, r)$ een grote stabiele verzameling bevat.

Stelling 3. $J(n, r)$ heeft een stabiele verzameling met ten minste $\frac{1}{n} \binom{n}{r}$ punten.

Bewijs. Kleur de punten van $J(n, r)$ met de getallen $\{0, 1, \dots, n-1\}$, waarbij punt X als kleur de som van zijn elementen modulo n krijgt. Het is niet lastig te zien dat twee buurpunten verschillend worden gekleurd, dus elk van de n kleurklassen vormt een stabiele verzameling. De stelling volgt omdat ten minste een van de kleurklassen minstens $\frac{1}{n} \binom{n}{r}$ punten bevat. $\square$

Een deelverzameling van een stabiele verzameling is opnieuw stabiel, en iedere stabiele verzameling van $J(n, r)$ correspondeert met een sparse-paving matroïde. Uit Stelling 3 volgt onmiddellijk dat

$$m(n, r) \geq 2^{\frac{1}{n} \binom{n}{r}}$$

en dus dat

$$m(n) \geq m(n, \lfloor n/2 \rfloor) \geq 2^{\frac{1}{n} \binom{n}{\lfloor n/2 \rfloor}}.$$

Met Nikhil Bansal en Rudi Pendavingh [1] heb ik bewezen dat deze ondergrens de juiste waarde van $m(n)$ geeft, op misschien een factor 2 in de exponent na.

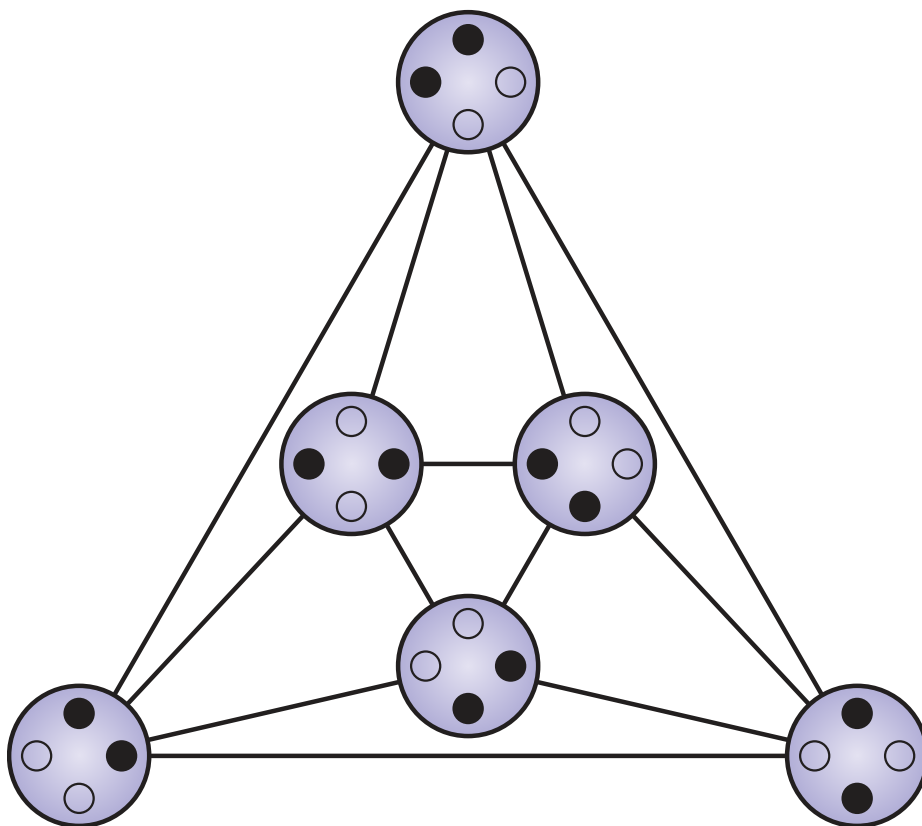
Stelling 4. Voor alle $\varepsilon > 0$ geldt voor voldoende grote n :

$$2^{\frac{1}{n} \binom{n}{\lfloor n/2 \rfloor}} \leq m(n) \leq 2^{\frac{2+\varepsilon}{n} \binom{n}{\lfloor n/2 \rfloor}}.$$

Het bewijs van Stelling 4 is vrij technisch, maar is gebaseerd op de volgende twee ideeën. (Voor het gemak nemen we aan dat we het hier hebben over matroïden van rang $r = \lfloor n/2 \rfloor$.) Eerst begrenzen we het aantal mogelijke stabiele verzamelingen van $J(n, r)$ (en dus het aantal sparse-paving matroïden) door te laten zien dat iedere stabiele verzameling X van $J(n, r)$ een kleine deelverzameling S bevat met de eigenschap dat $X \setminus S \subseteq V(J(n, r)) \setminus (S \cup N(S))$ en $|V(J(n, r)) \setminus (S \cup N(S))| \leq \frac{2}{n} \binom{n}{r}$. Met ‘klein’ bedoelen we hier: zo klein dat het aantal mogelijke verzamelingen S hooguit $2^{\frac{\varepsilon}{n} \binom{n}{r}}$ is. Dit impliceert onmiddellijk dat $J(n, r)$ hooguit

$$2^{\frac{\varepsilon}{n} \binom{n}{r}} \times 2^{\frac{2}{n} \binom{n}{r}}$$

stabiele verzamelingen heeft. (Deze telmethode is een speciaal geval van een algemene methode die bekend staat als de containermethode, de geïnteresseerde lezer verwijzen we naar het overzichtsartikel [6].)



Figuur 1 De Johnson-graaf $J(4, 2)$. De zes punten zijn de mogelijke deelverzamelingen van een verzameling ter grootte 4, en twee punten zijn verbonden met een kant als ze precies een element gemeenschappelijk hebben.

In de tweede stap breiden we dit argument uit naar algemene matroïden. Omdat in een algemene matroïde de verzameling niet-bases niet noodzakelijk een stabiele verzameling van $J(n, r)$ vormt, hebben we iets meer informatie nodig. Nog steeds geldt dat we voor iedere mogelijke verzameling niet-bases X een kleine verzameling S kunnen vinden als voorheen, maar nu moeten we naast de niet-bases in $V(J(n, r)) \setminus (S \cup N(S))$ ook de niet-bases in $N(S)$ omschrijven. Vanwege de matroïde-structuur volstaat een kleine hoeveelheid extra informatie hiervoor, waarbij ‘klein’ betekent: gegeven S neemt $X \cap N(S)$ hooguit $2^{\frac{\epsilon}{n} \binom{n}{r}}$ verschillende waarden aan. Omdat ϵ willekeurig gekozen was, volstaat dit om de bovengrens in Stelling 4 te bewijzen.

Terug naar typische eigenschappen

Het goede nieuws is nu dat we een verzameling technieken hebben ontwikkeld om vragen over typische eigenschappen te beantwoorden. Een van de krachtigste, die ik heb ontwikkeld samen met Rudi Pendavingh [4], is een verfijning van de telmethode die we hebben gebruikt om Stelling 4 te bewijzen. Het gaat te ver om het precieze resultaat hier te vermelden, maar een gevolg ervan is dat het aantal niet-bases van een typische matroïde dicht bij $\frac{1}{n} \binom{n}{r}$ ligt.

Stelling 5. *Er bestaan constanten $C_1, C_2 > 0$ zodat een typische matroïde ten minste $\frac{C_1}{n} \binom{n}{\lfloor n/2 \rfloor}$ en hooguit $\frac{C_2 \log^3(n)}{n} \binom{n}{\lfloor n/2 \rfloor}$ niet-bases heeft.*

Veel matroïde-eigenschappen laten zich vertalen naar statistieken over niet-bases, wat Stelling 5 nuttig maakt voor de analyse

van typische eigenschappen: als matroïden zonder een bepaalde eigenschap te veel of te weinig niet-bases hebben, dan volgt uit Stelling 5 dat de eigenschap typisch is. Ik geef twee voorbeelden van resultaten die Rudi Pendavingh en ik op deze manier hebben bewezen [4, 5].

Samenhang en symmetrie

Net als in grafentheorie speelt het begrip samenhang een belangrijke rol in matroïdentheorie. We noemen een matroïde $(E, \mathcal{B})$, hier gegeven door zijn verzameling bases, *samenhangend* als we E niet kunnen opsplitsen in twee niet-lege verzamelingen X en Y waarvoor $(X, \{B \cap X : B \in \mathcal{B}\})$ en $(Y, \{B \cap Y : B \in \mathcal{B}\})$ beide matroïden zijn. Het bestaan van zo’n partitie impliceert het bestaan van veel niet-bases, omdat iedere deelverzameling van E die X en Y niet doorsnijdt in het juiste aantal elementen geen basis is.

Stelling 6. *Een typische matroïde is samenhangend.*

(Eigenlijk hebben we bewezen dat een typische matroïde k -samenhangend is voor alle k , waar k -samenhang een sterkere notie van samenhang is.)

Een automorfisme van een matroïde M op grondverzameling E is een permutatie van E zodat bases op bases en niet-bases op niet-bases worden afgebeeld. We zeggen dat een matroïde *asymmetrisch* is als het enige automorfisme de identiteitsfunctie is. Als een matroïde een niet-triviaal automorfisme σ heeft, dan is de verzameling niet-bases gesloten onder toepassing van σ ; als σ complex genoeg is, dan beperkt dit de verzamelingen mogelijke niet-bases. Op deze manier kunnen we laten zien dat

bijna alle matroïden ‘bijna asymmetrisch’ zijn.

Stelling 7. *De automorfismegroep van een typische matroïde is triviaal of wordt voortgebracht door een enkele transpositie.*

(Een transpositie is een permutatie die precies twee elementen verwisselt.)

We geloven dat de waarheid is dat een typische matroïde asymmetrisch is. Verrassend genoeg brengt dit vermoeden ons terug bij het afschatten van $m(n)$; het blijkt namelijk dat het enige obstakel voor het bewijs de factor twee verschil tussen de exponent van de onder- en bovengrens is!

Open vragen

Met behulp van de gereedschappen die we hebben ontwikkeld, waaronder Stelling 5, kunnen we een groot aantal vragen over het gedrag van typische matroïden beantwoorden. Maar veel meer vragen staan nog wijd open. Ik sluit af met twee vragen die van centraal belang zijn.

Probleem. Is een typische matroïde sparse-paving?

Veel vragen over typische matroïden zijn makkelijker te beantwoorden voor sparse-paving matroïden. Een positief antwoord op deze vraag zou daarom direct grote gevolgen hebben.

De tweede vraag gaat over het asymptotische gedrag van de functie $m(n)$. De onder- en bovengrens in Stelling 4 verschillen slechts in een factor 2. Het is niet bekend of deze grenzen scherp zijn, en zo niet, hoe ze kunnen worden verbeterd.

Probleem. Wat is het asymptotische gedrag van $m(n)$? $\ddots$

Referenties

1. N. Bansal, R. Pendavingh en J. van der Pol, On the number of matroids, *Combinatorica* 35(1) (2015), 253–277.
2. R. Graham en N. Sloane, Lower bounds for constant weight codes, *IEEE Trans. Inf. Th.* 26(1) (1980), 37–43.
3. P. Nelson, Almost all matroids are non-representable, *Bull. London Math. Soc.* 50 (2018), 245–248.
4. R. Pendavingh en J. van der Pol, On the number of bases of almost all matroids, *Combinatorica* 38(4) (2018), 955–985.
5. R. Pendavingh en J. van der Pol, Asymptotics of symmetry in matroids, *J. Comb. Th. B* 135 (2019), 349–365.
6. W. Samotij, Counting independent sets in graphs, *Eur. J. Comb.* 48 (2015), 15–18.
7. H. Whitney, On the abstract properties of linear dependence, *American J. Math.* 57(3) (1935), 509–533.

Han Peters

Korteweg-de Vries Instituut
Universiteit van Amsterdam
h.peters@uva.nl

Guus Regts

Korteweg-de Vries Instituut
Universiteit van Amsterdam
g.regts@uva.nl

De oplossing

Een discrete vraag, een complexe oplossing

Han Peters is werkzaam in de complexe dynamica en Guus Regts in de discrete wiskunde en combinatoriek. In dit artikel beschrijven ze hoe hun samenwerking vanuit verschillende vakgebieden leidde tot de oplossing van een oud vermoeden van Sokal.

Klop klop klop, mijn collega Guus doet de deur open. “Mag ik je een vraag stellen, Han?”

Guus werkt in de discrete wiskunde en combinatoriek, een totaal andere richting dan mijn vakgebied, de complexe dynamica. Combinatorici zijn onder andere geïnteresseerd in structuren in grafen. Daar heb ik totaal geen verstand van, dus zijn vraag zal wel niet met wiskunde te maken hebben. Waarschijnlijk zal ik weer gevraagd worden voor een of andere saaie commissie.

Wat te doen? De deuropening is duidelijk geblokkeerd. Het raam staat open, maar springen uit de derde verdieping van het Korteweg-de Vries Instituut is geen aantrekkelijke optie. Misschien dat een plots opkomende buikpijn de zaak nog kan redden? Voordat ik een excuus klaar heb stelt Guus zijn vraag.

Discrete vraag. Definieer

$$f_\lambda(x) = \lambda \cdot \frac{1}{(1+x)^d}, \quad (1)$$

waar $d \geq 2$ een natuurlijk getal is. Voor welke complexe getallen λ geldt dat de baan

$$0, f_\lambda(0), f_\lambda(f_\lambda(0)), \dots$$

het punt -1 vermijdt?

Dat is een verrassing! Niet alleen blijkt het wel degelijk om wiskunde te gaan, maar het is precies het soort wiskunde waarin ik geïnteresseerd ben: iteratie van holomorfe functies. Het is wel een hele vreemde vraag, want waar komt die functie f_λ vandaan, en wat is er zo bijzonder aan de punten 0 en -1 ? Maar goed, een gegeven paard kun je maar beter niet in de bek kijken, laten we proberen dit probleem op te lossen.

Het blijkt dat Guus niet zozeer geïnteresseerd is in alle geschikte parameters λ , maar in de *maximale samenhangende open deelverzameling van $\mathbb{C}$ die het punt $\lambda = 0$ bevat*. Deze vraag blijkt redelijk eenvoudig op te lossen met een stukje klassieke wiskunde dat zo'n honderd jaar geleden ontwikkeld werd door de Franse wiskundigen Julia en Fatou, in combinatie met recentere methoden uit de jaren tachtig.

Merk ten eerste op dat $f_\lambda(-1) = \infty$ en $f_\lambda(\infty) = 0$. Dus de baan van 0 gaat door het punt -1 dan en slechts dan als de baan

$$-1 \mapsto \infty \mapsto 0 \mapsto \lambda \mapsto \dots$$

periodiek is.

De punten -1 en ∞ zijn twee bijzondere punten: het zijn de *kritieke punten* van de functie f_λ ; de punten waar f_λ niet lokaal inverteerbaar is. Een topoloog zou zeggen: de rationale functie f_λ is een vertakte overdekking van de Riemannsfeer naar zichzelf, en de kritieke punten zijn precies de vertakkingspunten.

In de meeste gevallen kun je eenvoudig bepalen wat de kritieke punten zijn: het zijn de punten waar de afgeleide nul is. Dat gaat hier echter niet goed omdat je met het punt ∞ te maken hebt. Om te zien dat -1 en ∞ de punten zijn waar f_λ niet lokaal inverteerbaar is kun je f_λ samenstellen met de functie $x \mapsto \frac{1}{x}$, om daarna de afgeleide te nemen. Zo kun je het rekenen met ∞ omzeilen.

Kritieke punten spelen een belangrijke rol in ons begrip van complexe dynamische systemen:

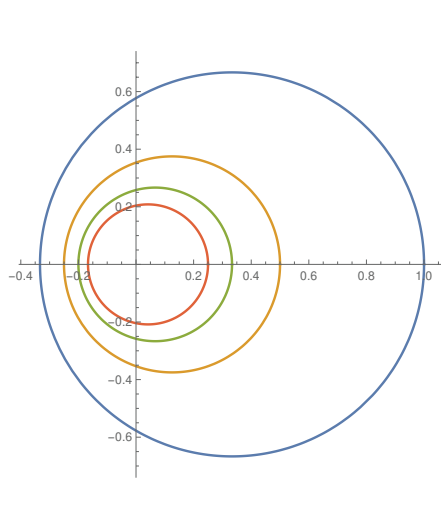
Stelling. Zij f een rationale functie van graad minstens 2, en neem aan dat f een aantrekkend vast punt p heeft. Dan is er een kritiek punt wiens baan naar p convergeert.

Dus als onze functie f_λ een aantrekkend vast punt heeft, dan convergeert de unieke kritieke baan naar dat vaste punt. Het volgt dat deze kritieke baan niet door -1 kan gaan, want als $f_\lambda^n(-1) = -1$ dan is de baan periodiek en dus niet convergent.

Conclusie. Als f_λ een aantrekkend vast punt heeft dan ligt -1 niet in de baan van 0.

Een vast punt $p = f(p)$ is aantrekkend als er een omgeving $U(p)$ is waar alle banen naar p convergeren. Voor rationale functies is dit eenvoudig te karakteriseren: p is aantrekkend dan en slechts dan als $|f'(p)| < 1$. Merk nu op dat

$$f'_\lambda(p) = \frac{-d\lambda}{(1+p)^{d+1}} = \frac{-df(p)}{1+p} = \frac{-dp}{1+p}.$$



Een vast punt p is dus aantrekkend dan en slechts dan als

$$\left| \frac{dp}{1+p} \right| < 1,$$

en dit is de vergelijking van een cirkelschijf, die we aanduiden met U_d . Voor elke $p \in U_d$ is er een unieke $\lambda \in \mathbb{C}$ waarvoor p een vast punt is, namelijk de oplossing van

$$\lambda \cdot \frac{1}{(1+p)^d} = p,$$

gegeven door

$$\lambda = p(1+p)^d.$$

Gevolg. Definieer de verzameling $V_d \subset \mathbb{C}$ door

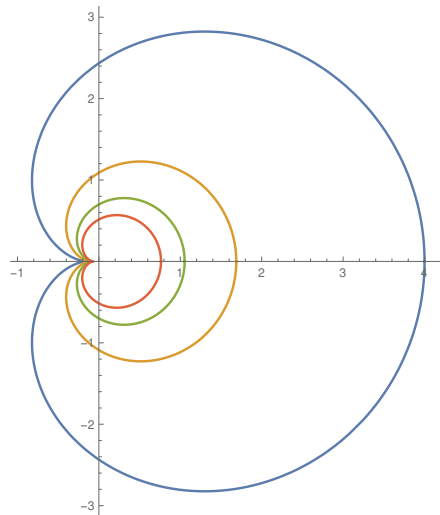
$$V_d := \{p(1+p)^d : p \in U_d\}.$$

Als $\lambda \in V_d$ dan geldt dat $-1 \notin \{f_\lambda^n(0)\}_{n \in \mathbb{N}}$.

Gebruikmakend van moderne technieken, ontwikkeld door Mañé, Sad en Sullivan [3] begin jaren tachtig, kunnen we zelfs het volgende concluderen:

Stelling. De verzameling V_d is de maximale open samenhangende verzameling met de eigenschap dat $\lambda \in V_d$ impliceert $-1 \notin \{f_\lambda^n(0)\}_{n \in \mathbb{N}}$.

Het gaat te ver om de resultaten van Mañé, Sad en Sullivan hier precies te formuleren. Grof gezegd bewezen ze dat voor een parameter λ_0 waarvoor f_{λ_0} een vast punt heeft met afgeleide norm 1 de situatie uiterst onstabiel is. Zo instabiel zelfs dat voor elke willekeurige $x \in \mathbb{C}$ er een λ arbitrair dicht bij λ_0 ligt waarvoor $x \in \{f_\lambda^n(0)\}_{n \in \mathbb{N}}$. Dit geldt dus ook voor het punt $x = -1$,



Figuur 1 De randen van de verzamelingen U_d (links) en V_d (rechts) voor graden 2 (buitenste) tot en met 5 (binnenste).

en het volgt dat de samenhangende open verzameling V_d maximaal is.

Hiermee was de vraag van Guus opgelost. Maar wat bleek, dit was slechts het eenvoudigste geval van het probleem waarin hij eigenlijk geïnteresseerd was. Ik geef het woord aan Guus.

Een complex probleem

Zoals Han al schreef ben ik geïnteresseerd in structuren in grafen en in het bijzonder in *onafhankelijke verzamelingen*. Een onafhankelijke verzameling is een deelverzameling punten in een graaf waarvan elk tweetal punten *niet* verbonden is door een lijn. De genererende functie van het aantal onafhankelijke verzamelingen in een graaf $G = (V, E)$, is gedefinieerd als

$$Z_G(\lambda) := \sum_{I \subseteq V} \lambda^{|I|}. \quad (2)$$

I onafhankelijk

In de statistische mechanica staat dit polynoom bekend als de partitiefunctie van het ‘hardcore’-model.

Partitiefuncties spelen een centrale rol in de statistische mechanica, en kunnen bijvoorbeeld gebruikt worden om faseovergangen te beschrijven in veel verschillende contexten. Denk daarbij aan de overgang van gas naar vloeistof, of aan kritieke temperaturen in magnetische objecten. In elk van deze toepassingen bevatten de grafen onvoorstelbaar veel punten, die bijvoorbeeld de atomen in een stuk ijzer representeren. Het feit dat deze grafen zo onvoorstelbaar groot zijn heeft als gevolg dat het bijna onmogelijk is om de partitiefunctie precies te berekenen. Sterker nog, het uitrekenen van partitiefuncties van het hardcore-model is ‘NP-hard’ [5]: er bestaan waarschijnlijk geen algoritmen die de partitiefunctie kunnen berekenen in een tijd die hoogstens polynomiaal groeit in het aantal punten.

In de afgelopen dertig jaar is er daarom veel interesse in het *benaderen* van partitiefuncties, tot op een kleine multiplicatieve foutmarge. Of benaderen wel doenbaar is hangt af van de locatie van de nulpunten van de partitiefunctie:

Stelling [1, 6]. Zij $\mathcal{G}_\Delta$ de collectie eindige grafen van maximum graad hoogstens Δ . Als $V \subset \mathbb{C}$ een open samenhangende deelverzameling is met $0 \in V$ waarvoor geldt dat $Z_G(\lambda) \neq 0$ voor alle $\lambda \in V$ en alle $G \in \mathcal{G}_\Delta$, dan bestaat er een algoritme dat $Z_G(\lambda)$ in polynomiale tijd benadert.

Gemotiveerd door deze stelling, die trouwens in veel grotere algemeenheid geldt, was ik op zoek naar de grootste open samenhangende nulpuntsvrije locus V_Δ voor grafen van graad hoogstens Δ .

Eerder had Allan Sokal [9], een gerenommeerd mathematisch fysicus, maar ook bekend vanwege de ‘Sokal hoax’, het vermoeden geopperd dat voor elke $\Delta \in \mathbb{N}_{\geq 3}$ de verzameling V_Δ het reële half-open interval

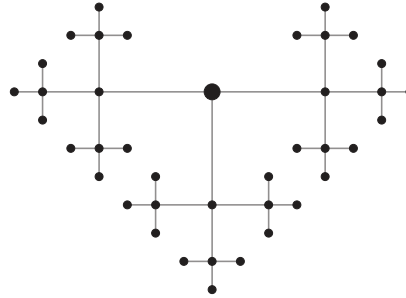
$$\left[0, \frac{(\Delta-1)^{\Delta-1}}{(\Delta-2)^\Delta}\right)$$

bevat. Dit vermoeden was een belangrijke drijfveer voor mijn zoektocht.

Maar wat heeft dit nu te maken met complexe dynamica? Het blijkt dat de nulpunten van Z_G op een bijzondere klasse van recursief gedefinieerde grafen beschreven kunnen worden aan de hand van een eenvoudige rationale functie.

Een boom heet een *Cayley-boom* als alle bladeren dezelfde afstand hebben tot een gemarkeerd punt v (de wortel), en als alle andere punten dezelfde graad ‘naar beneden’ hebben. Zie Figuur 2 voor een illustratie met graad naar beneden $d = 3$.

Een Cayley-boom heeft de bijzondere eigenschap dat als de wortel v wordt weggehaald, inclusief alle lijnen naar v , dan blijven er precies d Cayley-bomen over, waarbij de afstand van de bladeren tot de wortel 1 kleiner is. Het blijkt dat de partitiefuncties Z_G voor Cayley-bomen van verschillende hoogte aan elkaar gerelateerd zijn aan de hand van de functie f_λ . Deze



Figuur 2 Een Cayley-boom met $d = 3$.

relatie is echter niet direct, maar via een zogenaamde ratio.

Splits de som (2) als volgt in twee stukken: één som over de onafhankelijke verzamelingen die v bevatten, en één som over de onafhankelijke verzamelingen die v niet bevatten. Opgemerkt dat als een onafhankelijke verzameling de wortel v bevat, deze geen van de burens van v kan bevatten, komen we tot de volgende gelijkheid:

$$Z_G(\lambda) = Z_{G-v}(\lambda) + \lambda Z_{G \setminus N[v]}(\lambda).$$

Hier zijn $G-v$ en $G \setminus N[v]$ de grafen waaruit v respectievelijk v en zijn burens zijn weggehaald. Neem nu aan dat $Z_{G-v}(\lambda) \neq 0$, definieer de *ratio*,

$$R_{G,v} := \frac{\lambda Z_{G \setminus N[v]}(\lambda)}{Z_{G-v}(\lambda)},$$

en merk op dat

$$R_{G,v} \neq -1 \Leftrightarrow Z_G(\lambda) \neq 0.$$

Het probleem om een gebied te vinden zonder nulpunten vertaalt zich nu naar het probleem om een gebied te vinden waar de ratio nooit gelijk is aan -1 . Het volgende lemma laat het nut van de ratio's zien.

Lemma. Zij d vast, en schrijf T_n voor de Cayley-boom van hoogte n met wortel v_n . Dan geldt:

$$\begin{aligned} R_{T_n, v_n} &= \lambda \left(\frac{1}{1 + R_{T_{n-1}, v_{n-1}}} \right)^d \\ &= f_\lambda^{\circ n}(\lambda) \\ &= f_\lambda^{\circ n+1}(0). \end{aligned}$$

Met andere woorden: we zijn geïnteresseerd in wanneer de baan van 0 onder iteratie van de functie f_λ het punt -1 vermijdt.

Ik had het gevoel dat een oplossing voor deze Cayley-bomen, die in zekere zin als extremale grafen gezien kunnen worden, tot een oplossing voor het algemene vermoeden van Sokal zou kunnen leiden. Echter, ik had niet de benodigde achtergrond in de complexe dynamica. Het was tijd om eens bij mijn collega Han op de deur te kloppen. ☼

Naschrift

De oplossing van het complexe dynamica-vraagstuk leidde inderdaad tot een complete oplossing van het vermoeden van Sokal; ons gezamenlijk bewijs is te vinden in [7]. Onze samenwerking is niet gestopt bij het oplossen van het vermoeden van Sokal: het afgelopen jaar hebben we bovenstaande ideeën toegepast op de partitiefunctie van het Ising-model [8]. Onze gezamenlijke promovendus Pjotr Buys heeft recent laten zien dat het maximale gebied V_Δ , gevonden bij het bestuderen van Cayley-bomen, niet nulpuntsvrij is voor algemene grafen van begrensd graad [2]. Een precieze beschrijving van de maximale nulpuntsvrije locus is nog steeds een open probleem.

Referenties

- 1 A. Barvinok, *Combinatorics and Complexity of Partition Functions*, Algorithms and Combinatorics, Vol. 30, Springer, 2016.
- 2 P. Buys, On the location of roots of the independence polynomial of bounded degree graphs (2019), arXiv:1903.05462.
- 3 R. Mañé, P. Sad en D. Sullivan, On the dynamics of rational maps, *Ann. Sci. École Norm. Sup. (4)*, 16(2) (1983), 193–217.
- 4 C.N. Yang en T.D. Lee, Statistical theory of equations of state and phase transitions. I.

- Theory of condensation, *Physical Rev.* 87(3) (1952), 404–409.
- 5 M. Luby en E. Vigoda, Approximately counting up to four, *Proc. 29th ACM Symp. on Theory of Computing*, 1997, pp. 682–687.
- 6 V. Patel en G. Regts, Deterministic polynomial-time approximation algorithms for partition functions and graph polynomials, *SIAM J. on Computing* 46(6) (2017), 1893–1919.
- 7 H. Peters en G. Regts, On a conjecture of Sokal concerning roots of the independence

- polynomial, *Michigan Math. J.* 68(1) (2019), 33–55.
- 8 H. Peters en G. Regts, Location of zeros for the partition function of the Ising model on bounded degree graphs (2018), arXiv: 1810.01699. To appear in *J. of Lond. Math. Soc.*
- 9 A.D. Sokal, A personal list of unsolved problems concerning lattice gases and antiferromagnetic Potts models, *Markov Process. Related Fields* 7 (2001), 21–38.

Max van Horssen

eerstejaars student, Radboud Universiteit Nijmegen
max.vanhorssen@student.ru.nl

Onderwijs Profielwerkstuk

Interpolatiepolynomen en coëfficiënten

Polynomiale interpolatie is het vinden van het polynoom met de laagst mogelijke graad die door een gegeven aantal punten gaat. Over dit vraagstuk schreef Max van Horssen, destijds 6 vwo-leerling van de Stichtse Vrije School in Zeist, zijn profielwerkstuk. Hij stelde zich ten doel een formule te vinden voor de coëfficiënten van het polynoom in standaardvorm (dat wil zeggen als machtreeks). Met elementaire algebra leidde hij drie verschillende uitdrukkingen af, waarvan hij de algemene geldigheid bewees. Deze uitdrukkingen kon hij echter niet direct terugvinden in de literatuur. Wel zijn de polynomen van Newton en Lagrange bekend maar deze geven niet rechtstreeks de coëfficiënten. Max heeft de verschillende polynoomvormen geïmplementeerd in een Javaprogramma en hun algoritmische complexiteit en numerieke stabiliteit vergeleken. Na afronding van het werkstuk kwam hij in contact met wiskundigen die hem op het spoor van de lineaire algebra zetten. Door zo naar het vraagstuk te kijken werd het verband tussen de verschillende polynoomvormen duidelijk.

In het voorjaar van 2017 (in 4 vwo) was ik bezig om te leren programmeren in Java. Een programma stuurde raketten aan die de maan moesten bereiken. Het vluchtplan werd opgesteld door een genetisch algoritme dat in de loop van generaties steeds beter moest presteren. Om het prestatieverloop te kunnen volgen tekende ik de resultaten in een grafiek, waarbij opeenvolgende punten werden verbonden met rechte lijnen. Ik vroeg me opeens af of alle punten in de grafiek ook met één vloeiende lijn konden worden verbonden. Zo werd mijn interesse in het interpolatieprobleem gewekt.

In de wiskundeles hadden we geleerd de functie $\alpha x + \beta$ te bepalen als de waarden y_0, y_1 in respectievelijk x_0, x_1 gegeven zijn. We hebben dan een stelsel van twee vergelijkingen met twee on-

bekenden, de coëfficiënten van de functie. De eerste coëfficiënt α vinden we door oplossen van het stelsel:

$$\alpha = \frac{y_0 - y_1}{x_0 - x_1}.$$

De tweede coëfficiënt β verkregen we door de eerste coëfficiënt te substitueren in een van de vergelijkingen.

Ik begon met het geval van twee punten uit te breiden naar drie punten x_0, x_1, x_2 met respectievelijk waarden y_0, y_1, y_2 . Dit geeft een kwadratische functie met drie coëfficiënten: $\alpha x^2 + \beta x + \gamma$. Oplossen van dit stelsel geeft voor α :

$$\alpha = \frac{y_0}{(x_0 - x_1)(x_0 - x_2)} + \frac{y_1}{(x_1 - x_0)(x_1 - x_2)} + \frac{y_2}{(x_2 - x_0)(x_2 - x_1)}.$$

Het viel me op dat α voor twee punten in verwante vorm geschreven kan worden:

$$\alpha = \frac{y_0}{x_0 - x_1} + \frac{y_1}{x_1 - x_0}$$

en dat in het algemene geval van $n + 1$ punten de hoogste coëfficiënt er zo uit zou kunnen zien:

$$\alpha = \sum_{j=0}^n \frac{y_j}{\prod_{k=0, k \neq j}^n (x_j - x_k)}.$$

Vanaf dit moment nummerde ik de coëfficiënten als volgt: C_n voor α , C_{n-1} voor β , et cetera. Ik heb alle coëfficiënten van het interpolatiepolynoom $\sum_{i=0}^n C_i x^i$ voor drie en vier punten uitgerekend. Het bleek dat ze alle van de volgende vorm zijn:

$$C_i = \pm \sum_{j=0}^n y_j \frac{Q_{i,j}}{\prod_{k=0, k \neq j}^n (x_j - x_k)}$$

met een gegeven teken (plus of min) en een nog te bepalen uitdrukking $Q_{i,j}$. Voor $n = 3$ en $0 \leq j \leq n$ vond ik voor de vier gevallen $Q_{0,j}, \dots, Q_{3,j}$ de volgende uitdrukkingen:

$$Q_{0,j} = 1, \quad Q_{1,j} = \sum_{\substack{0 \leq k \leq n \\ k \neq j}} x_k, \quad Q_{2,j} = \sum_{\substack{0 \leq k_1 < k_2 \leq n \\ k_1, k_2 \neq j}} x_{k_1} x_{k_2}, \quad Q_{3,j} = \prod_{\substack{0 \leq k \leq n \\ k \neq j}} x_k.$$

De vraag die ik moest beantwoorden was: welke uitdrukking $Q_{i,j}$ beschrijft de bovenstaande reeks en is deze van toepassing voor elk aantal punten? Met deze vraag in mijn achterhoofd vertrok ik met mijn klas voor een taalreis naar Dresden. Tijdens de lange busreis viel het kwartje, namelijk: $Q_{i,j}$ is de som van het product van alle combinaties x -en, exclusief die met een gegeven index j , met een gegeven lengte $n-i$ en zonder herhaling,

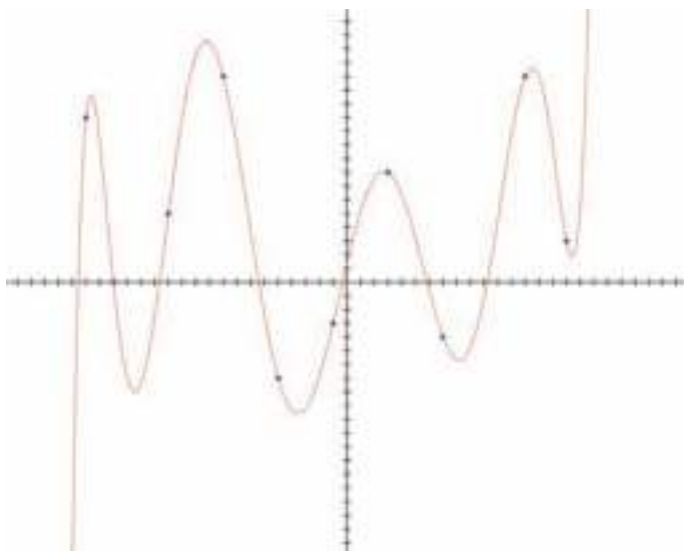
$$Q_{i,j} := \sum_{\substack{V \in \mathcal{P}(X \setminus \{x_j\}) \\ |V| = n-i}} \prod_{x' \in V} x'.$$

Hier is X de verzameling van alle x -en en $\mathcal{P}(X)$ de machtsverzameling van X . Zo vond ik als algemene uitdrukking voor het interpolatiepolynoom:

$$f(x) = \sum_{i=0}^n (-1)^{n-i} \sum_{j=0}^n y_j \frac{Q_{i,j}}{\prod_{k=0, k \neq j}^n (x_j - x_k)} x^i.$$

Het is natuurlijk nog de vraag of deze formule inderdaad geldig is voor elk aantal punten. Ik implementeerde de formule in mijn Java-programma zodat ik dit kon testen. Een spannend moment was toen ik de formule voor het eerst uitprobeerde met tien punten. Samen met mijn vader zat ik op het puntje van mijn stoel om te kijken of het zou werken. En inderdaad, de functie ging precies door alle punten! Zie Figuur 1.

Maar dit is slechts een empirisch bewijs. “Nu nog het echte bewijs,” zei mijn vader (informaticus), half serieus, “dat zou met volledige inductie kunnen.” Dat vond ik een mooie uitdaging waarmee ik in de zomervakantie aan de slag ging. Tijdens een bergwandeling in Oostenrijk kreeg ik het centrale idee voor het bewijs. Namelijk: door het polynoom uit te drukken in een polynoom van een lagere graad plus een restterm kon ik de inductiehypothese gebruiken. Met een paar zelfgeformuleerde hulpstellingen lukte het



Figuur 1 Output van het programma voor interpolatie door tien punten.

Definities en notaties

Bij het interpoleren komen we de volgende wiskundige begrippen tegen:

1. Gedeelde differenties:

$$f[x_0] := y_0, \\ f[x_0, \dots, x_n] := \frac{f[x_0, \dots, x_{n-1}] - f[x_1, \dots, x_n]}{x_0 - x_n}.$$

2. Elementaire symmetrische polynomen: de som van het product van alle combinaties elementen van een verzameling met een gegeven lengte k en zonder herhaling:

$$e_k(x_0, \dots, x_n) := \sum_{0 \leq i_0 < \dots < i_k \leq n} x_{i_0} \cdots x_{i_k}.$$

3. Compleet homogene symmetrische polynomen: de som van het product van alle combinaties elementen van een verzameling met een gegeven lengte k en met herhaling:

$$h_k(x_0, \dots, x_n) := \sum_{0 \leq i_0 \leq \dots \leq i_k \leq n} x_{i_0} \cdots x_{i_k}.$$

4. Vandermonde-matrix:

$$V := \begin{bmatrix} 1 & x_0 & \cdots & x_0^n \\ 1 & x_1 & \cdots & x_1^n \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & x_n & \cdots & x_n^n \end{bmatrix}.$$

5. Vandermonde-determinant (stelling):

$$|V| = \prod_{0 \leq i < j \leq n} (x_j - x_i).$$

om het bewijs rond te krijgen. Terug van vakantie heb ik samen met mijn vader het bewijs doorgenomen en gestructureerd opgeschreven. Door te zoeken op internet kwam ik erachter dat mijn uitdrukking voor $Q_{i,j}$ bekend is als het elementaire symmetrische polynoom. Na het maken van het bewijs was ik overtuigd van mijn studiekeuze wiskunde en inmiddels was ik zo enthousiast dat ik besloot mijn profielwerkstuk over dit onderwerp te schrijven.

Verschillende vormen

Voor het werkstuk wilde ik weten waar de formule in de literatuur terug te vinden is. Ik vond de interpolatiepolynomen van Newton en Lagrange:

$$N(x) = \sum_{i=0}^n f[x_0, \dots, x_i] \prod_{j=0}^{i-1} (x - x_j), \\ L(x) = \sum_{i=0}^n y_i \prod_{j=0, j \neq i}^n \frac{x - x_j}{x_i - x_j},$$

en een verwijzing naar de Vandermonde-matrix V . De lineaire algebra methode die gebruik maakt van de inverse van V en de Vandermonde-determinant leidt tot

$$V(x) = \sum_{i=0}^n (-1)^{n-i} \sum_{j=0}^n y_j \frac{e_{n-i}(x_0, \dots, x_{j-1}, x_{j+1}, \dots, x_n)}{\prod_{k=0, k \neq j}^n (x_j - x_k)} x^i.$$

Deze vorm van het interpolatiepolynoom komt overeen met de



Foto: Ed van Rijswijk

Max van Horssen

eerder gevonden vorm $f(x)$ als we daarin de uitdrukking $Q_{i,j}$ vervangen door het elementaire symmetrische polynoom e_{n-i} .

Het Newton-polynoom $N(x)$ maakt gebruik van de gedeelde differenties (GD) en $V(x)$ maakt gebruik van het elementaire symmetrische polynoom (ESP). Ik plaatste de gevonden polynomen in een taxonomie, gebaseerd op de vorm van de uitdrukkingen. Zie Tabel 1.

Wat opviel was de open plaats in de taxonomie. Zou er een vierde vorm bestaan die zowel GD als ESP gebruikt? Inderdaad bleek dat $V(x)$ omgeschreven kan worden naar een vorm die aan de gewenste eigenschappen voldoet. Zo vond ik de volgende vorm:

$$H(x) = \sum_{i=0}^n \sum_{j=i}^n f[x_0, \dots, x_j] (-1)^{j-i} e_{j-i}(x_0, \dots, x_{j-1}) x^i.$$

Omdat ik deze vorm niet kon vinden in de (online) literatuur en er toch een naam voor nodig had heb ik deze vorm voor het moment $H(x)$ genoemd, naar de eerste letter van mijn achternaam. (Later bleek de letter H goed te passen bij deze vorm, omdat in de lineaire algebra deze vorm tot stand komt met behulp van de matrix H die de compleet homogene symmetrische polynomen bevat, zie kader 'Lineaire algebra' op de volgende pagina.)

Taxonomie	Geen ESP	Wel ESP
Geen GD	$L(x)$	$V(x)$
Wel GD	$N(x)$	...

Ten slotte kunnen we de coëfficiënten van het polynoom ook op een recursieve manier vinden. We bepalen eerst de hoogste coëfficiënt en na substitutie ontstaat een nieuw stelsel waarvan we weer de hoogste coëfficiënt bepalen, et cetera. Dit geeft de vorm $R(x)$ met coëfficiënten F_i , zie kader 'Lineaire algebra'.

Complexiteit en stabiliteit

We kennen nu vijf vormen van het interpolatiepolynoom: N , L , V , H en R , waarvan de laatste drie de coëfficiënten geven van het polynoom in standaardvorm. Al deze vormen heb ik geïmplementeerd in mijn Javaprogramma. Hoewel alle vormen in principe hetzelfde resultaat geven is de manier van uitrekenen steeds anders. Dit heeft gevolgen voor de *orde* (algoritmische complexiteit) en de nauwkeurigheid (numerieke stabiliteit) van de berekeningen.

In mijn implementatie hebben alle vormen orde $O(n^2)$ behalve V , deze heeft orde $O(n^3)$. De nauwkeurigheid bepaalde ik met een experiment. (Schets van het experiment: het interpoleren door punten van een functie die slechts te benaderen is door een polynoom. Dit werd voor elke vorm gedaan met 2 tot en met 30 punten. De gevonden afwijkingen ten opzichte van de functie geven in een grafiek op logaritmische basis vrijwel een rechte lijn. De score van een vorm is de richtingscoëfficiënt van de lijn omgerekend naar een getal tussen 0 (extreem onnauwkeurig) en 100 (perfect).) Uit dit experiment blijkt dat R snel numeriek instabiel wordt en daarom is deze vorm verder uitgesloten. Het blijkt dat L het meest nauwkeurig is (score 96 uit 100), gevolgd door N (88), H (72) en V (58). L is dus de beste vorm als nauwkeurigheid belangrijk is en er veel interpolatiepunten zijn. N scoort redelijk op deze punten en heeft een ander voordeel: er kunnen gemakkelijk punten worden toegevoegd zonder dat de hele berekening opnieuw gedaan hoeft te worden. H , ten slotte, is de beste vorm die de coëfficiënten van het polynoom in standaardvorm geeft. H is nauwkeuriger en efficiënter dan V , en R is te onnauwkeurig.

Tot slot

Na afronding van mijn profielwerkstuk kwam ik in contact met wiskundigen die mij op het spoor van de lineaire algebra zetten. Door zo naar het vraagstuk te kijken werd het verband tussen de gevonden formules duidelijk. De uitwerking daarvan wordt gegeven in het kader 'Lineaire algebra' op de volgende pagina. De betere nauwkeurigheid van de interpolatiepolynomen L en N is waarschijnlijk de reden dat deze vormen wel algemeen bekend zijn en de coëfficiëntgerichte vormen V , H en R niet. V en H kunnen worden beschouwd als respectievelijk L en N in standaardvorm gebracht, met behulp van een bekende eigenschap van de elementaire symmetrische polynomen. Maar ze kunnen dus ook direct worden afgeleid met elementaire algebra of lineaire algebra. $\diamond$

Dankwoord

Ik wil de volgende mensen bedanken die mij verder hebben geholpen in mijn proces: Gerrit de Bruijn ('t Atrium Amersfoort) voor het aangeven hoe de eerste paar coëfficiënten van V uit L kunnen worden afgeleid; Hennie ter Morsche en Wil Schilders (TU Eindhoven) voor de verwijzing naar het boek van Norlund [1] en de aanwijzing dat L en V uit de daar gegeven representatie kunnen worden afgeleid door ontwikkeling naar de laatste kolom of rij; Rob Tijdeman (Universiteit Leiden) voor zijn bemiddeling en het proeflezen van dit artikel; en ten slotte mijn vader Jan-Jaap van Horssen voor zijn rol als sparringpartner.

Lineaire algebra

We gebruiken lineaire algebra om de relaties tussen de verschillende vormen van het interpolatiepolynoom te beschrijven. We schrijven $P(x) = \sum_{i=0}^n \lambda_i x^i$, $\Lambda = (\lambda_0, \dots, \lambda_n)^T$ en $Y = (y_0, \dots, y_n)^T$ en krijgen zo de vergelijking

$$V\Lambda = Y.$$

We definiëren de matrix A :

$$A := \begin{bmatrix} V & Y \\ X & P(x) \end{bmatrix}$$

met $X = (1, x, \dots, x^n)$. Vanwege de lineaire afhankelijkheid van de kolommen volgt dat $|A| = 0$. Hieruit volgt [1]:

$$P(x) = -\frac{|A_0|}{|V|} \quad (1)$$

met

$$A_0 := \begin{bmatrix} V & Y \\ X & 0 \end{bmatrix}.$$

Als we de teller in (1) naar de laatste kolom ontwikkelen, vinden we het bekende Lagrange-polynoom

$$L(x) = \sum_{i=0}^n y_i \prod_{j=0, j \neq i}^n \frac{x - x_j}{x_i - x_j}.$$

Ontwikkelen we in plaats daarvan naar de laatste rij dan verschijnen de elementaire symmetrische polynomen en vinden we

$$V(x) = \sum_{i=0}^n (-1)^{n-i} \sum_{j=0}^n y_j \frac{e_{n-i}(x_0, \dots, x_{j-1}, x_{j+1}, \dots, x_n)}{\prod_{k=0, k \neq j}^n (x_j - x_k)} x^i.$$

We kunnen het stelsel VY in A ook met Gauss-eliminatie oplossen, dit geeft het stelsel HD . Hierin is H de bovendriehoeksvorm van V . Dit geeft een matrix

$$\hat{A} := \begin{bmatrix} H & D \\ X & P(x) \end{bmatrix}$$

waar $D = (f[x_0], \dots, f[x_0, \dots, x_n])^T$ en de matrix H bestaat uit de compleet homogene symmetrische polynomen:

$$H_{i,j} := h_{j-i}(x_0, \dots, x_i).$$

Analoog aan het voorgaande volgt:

$$P(x) = -\frac{|\hat{A}_0|}{|H|} \quad (2)$$

met

$$\hat{A}_0 := \begin{bmatrix} H & D \\ X & 0 \end{bmatrix}.$$

Ontwikkelen we de teller in (2) naar de laatste kolom (er geldt $|H| = 1$) dan vinden we het bekende Newton-polynoom

$$N(x) = \sum_{i=0}^n f[x_0, \dots, x_i] \prod_{j=0}^{i-1} (x - x_j).$$

Ontwikkelen we in plaats daarvan naar de laatste rij dan vinden we

$$H(x) = \sum_{i=0}^n \sum_{j=i}^n f[x_0, \dots, x_j] (-1)^{j-i} e_{j-i}(x_0, \dots, x_{j-1}) x^i.$$

Ten slotte geven we de representatie die ontstaat door in de matrix A het stelsel VY met Gauss-Jordan-eliminatie op te lossen, dit geeft het stelsel IF . Zo krijgen we de matrix

$$\tilde{A} := \begin{bmatrix} I & F \\ X & P(x) \end{bmatrix},$$

waarbij de vector F recursief (van n naar 0) gedefinieerd wordt door:

$$\begin{aligned} F_n &:= f[x_0, \dots, x_n], \\ F_i &:= f[x_0, \dots, x_i] - \sum_{k=1}^{n-i} h_k(x_0, \dots, x_i) F_{i+k}. \end{aligned}$$

Analoog aan het voorgaande vinden we:

$$P(x) = -\frac{|\tilde{A}_0|}{|I|} \quad (3)$$

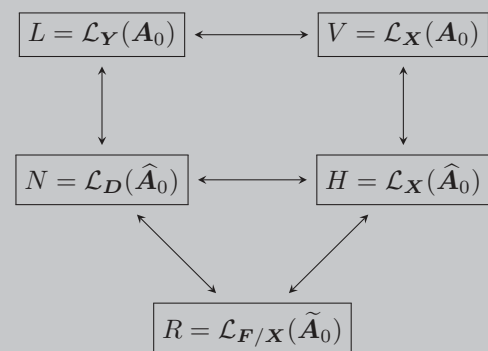
met

$$\tilde{A}_0 := \begin{bmatrix} I & F \\ X & 0 \end{bmatrix}.$$

Ontwikkelen we de teller in (3) naar de laatste kolom óf naar de laatste rij (dat maakt in dit geval geen verschil) dan vinden we:

$$R(x) = \sum_{i=0}^n F_i x^i.$$

We hebben nu vijf representaties van het interpolatiepolynoom afgeleid. Hiervan zijn zoals gezegd het Lagrange-polynoom en het Newton-polynoom algemeen bekend. Deze geven niet direct de coëfficiënten Λ van het polynoom in standaardvorm. De andere drie representaties (V , H en R) geven elk op een andere wijze de coëfficiënten van de standaardvorm van het interpolatiepolynoom weer.



Figuur 2 Taxonomie. $\mathcal{L}_W(M)$ betekent de Laplace-uitbreiding van de matrix M naar de kolom of de rij W . De pijlen geven relatief eenvoudige algebraïsche transformaties aan.

Referentie

- 1 N.E. Nörlund, Vorlesungen über Differenzenrechnung, *Grundlehren der mathematischen Wissenschaften* 13 (1924).

Paul Drijvers

Freudenthal Instituut
Universiteit Utrecht
p.drijvers@uu.nl

Hanneke Kodde-Buitenhuis

Nuborgh College Lambert Franckens
Elburg
hannekebuitenhuis@gmail.com

Onderwijs

Wiskundig denken in de centrale examens wiskunde B van havo en vwo

Bij de programmaherziening wiskunde in de tweede fase van havo en vwo, die in 2015 werd ingevoerd, stond wiskundig denken hoog in het vaandel. Om dit daadwerkelijk een plaats te geven in de onderwijspraktijk, zou het ook in de centrale eindexamens zichtbaar moeten zijn. Om deze zichtbaarheid te onderzoeken analyseerden Paul Drijvers en Hanneke Kodde-Buitenhuis de eindexamens wiskunde B van havo en vwo in de periode 2011–2019. De conclusie is dat deze nieuwe examens wel meer, maar ook in afnemende mate beroep doen op wiskundig denken. Kennelijk is onze examenpraktijk niet zo veranderlijk. Wel lijken leerlingen van pilotscholen op wiskundige denkvragen iets beter te presteren dan de overige leerlingen.

Wiskunde is meer dan een verzameling van routineprocedures en standaardmethodes. Zeker, de kracht van wiskunde ligt mede in het feit dat je sommige problemen met een vaste procedure kunt aanpakken — denk aan het oplossen van kwadratische vergelijkingen — en dat je zo'n recept kunt uitbesteden aan een machine. Dergelijke algoritmes zijn het resultaat van bijzondere menselijke prestaties. Maar juist omdat je het procedurele werk in praktijk vaak niet zelf zult doen, liggen de belangrijkste doelen van wiskundeonderwijs op een hoger niveau. Het gaat er dan eerder om dat leerlingen leren problemen op te lossen, creatief kunnen zijn en 'durven denken' en dat ze zich daarmee ontwikkelen tot intelligente gebruikers van wiskunde en zelfs tot toekomstige ontwerpers van nieuwe algoritmes.

Om het idee te benadrukken dat wiskunde meer omvat dan procedurele vaardigheid, introduceerde de vernieuwingscommissie wiskunde (cTWO) het begrip 'wiskundige denkactiviteiten' [2,3]. Deze commissie, die tussen 2005 en 2015 de nieuwe examenprogramma's wiskunde voor

havo en vwo ontwikkelde, omschreef wiskundige denkactiviteiten (WDA) met een aantal werkwoorden (zie Figuur 1). Later beperkte Drijvers [7] deze wat omvangrijke lijst tot drie activiteiten die als de kern van wiskundig denken kunnen worden beschouwd: probleemoplossen, modelleren en abstraheren. Ook het recente voorstel van het Ontwikkelteam Rekenen-Wiskunde van het Curriculum.nu-traject onderscheidt twee typen leerdoelen en definieert behalve de gangbare specifieke vakinhoudelijke

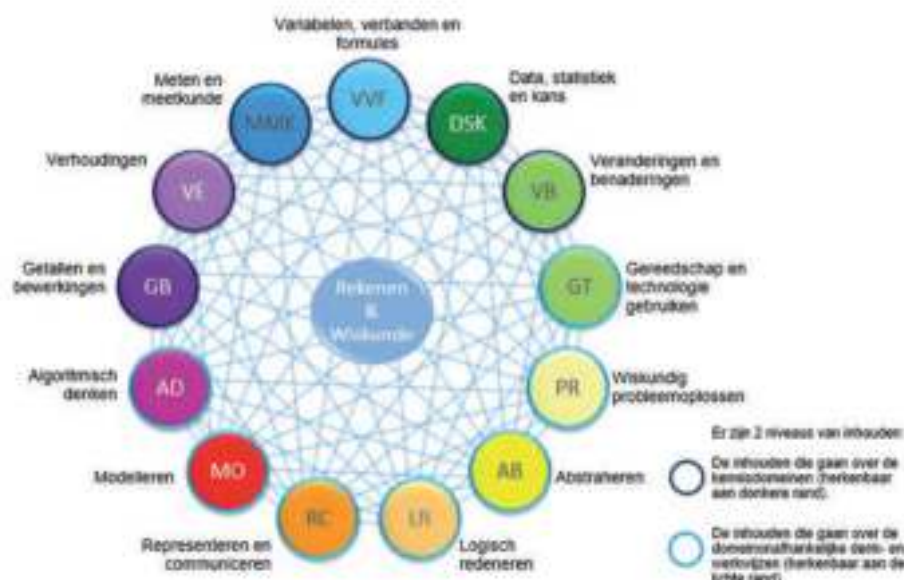
leerdoelen ook globale wiskundige denk- en werkwijzen (zie Figuur 2). Deze overstijgende doelen vertonen veel overeenkomst met de wiskundige denkactiviteiten van cTWO.

In het benadrukken van hogere-orde wiskundige leerdoelen staan we in Nederland niet alleen. In de Verenigde Staten stelde de National Research Council al in 1989 dat "[...] mathematics offers distinctive modes of thought which are both versatile and powerful, including modeling, abstraction, optimization, logical analysis, inference from data, and use of symbols" [11, p. 31]. De huidige Common Core State Standards (zie [http://www.corestandards.org/Math/Practice](http://www.corestandards.org/Math/Practice;); [10]) bevatten leerdoelen als "Make sense of problems and persevere in solving them", "Reason abstractly and quantitatively", "Model with mathematics" en "Use appropriate tools strategically". In andere landen zien we vergelijkbare ontwikkelingen, die gedeeltelijk zijn gebaseerd op on-

Standpunt 4
Kernconcepten in het wiskundeonderwijs van havo en vwo zijn getal, formule, functie, verandering, ruimte en toeval. Centrale denkactiviteiten zijn modelleren en algebraïseren, ordenen en structureren, analytisch denken en probleemoplossen, formules manipuleren, abstraheren, en logisch redeneren en bewijzen. Deze kernconcepten, denkactiviteiten en de bijbehorende vaardigheden moeten als lange leerlijnen door het gehele programma van havo-vwo lopen.

Figuur 1 Wiskundige denkactiviteiten volgens cTWO [2, p.21].





Figuur 2 Twee typen leerdoelen volgens het Ontwikkelteam Rekenen-Wiskunde van Curriculum.nu [4, p. 5].

derzoeksliteratuur over bijvoorbeeld wiskundig denken [5], probleemoplossen [12], of abstraheren [15]. Kortom, hogere-orde leerdoelen rond wiskundig denken staan nationaal én internationaal in de belangstelling.

Het toetsen van wiskundig denken

Hoogdravende leerdoelen in eindtermen en curricula zijn natuurlijk eenvoudig opgeschreven. Maar hoe zorgen we er nu voor dat daarvan in de klas wat terecht komt? Een van de middelen daarvoor zijn schoolmethodes. De nieuwe edities van de schoolboeken hebben verschillende strategieën gevolgd wat betreft wiskundige denkactiviteiten: waar sommige specifieke

‘denkactiverende’ opgaven markeren, gaat men er bij andere methoden van uit dat je bij wiskunde altijd moet nadenken, dus dat extra indicaties niet nodig zijn. Een tweede middel bij implementatie is de professionalisering van docenten. Sinds 2015 is een aantal nascholingscursussen uitgevoerd en zijn online bronnen voor het bevorderen van wiskundig denken in de les ontwikkeld (zie bijvoorbeeld [1]).

Centraal in dit artikel staat de derde manier om de implementatie van wiskundig denken in de praktijk te bevorderen: de toetsing. Uit eerdere ervaringen is gebleken dat een mismatch tussen curriculumontwikkeling en toetsing eenvoudig kan optreden, vooral als het gaat om compe-

tenties zoals wiskundig denken en modelleren die niet zo eenvoudig te toetsen zijn [6, 14]. Als bovendien de wijze van toetsing niet mee verandert met de nieuwe leerdoelen, dan is het risico op zo’n mismatch des te groter. Daarom stelden we ons de volgende tweeledige vraag: hoe zien we de curriculumwijziging met betrekking tot wiskundig denken terug in de nieuwe centrale examens havo/vwo, en hoe presteren de leerlingen op examenvragen die zich daarop richten?

Hoe pakken we dit aan?

Voor we onze onderzoeks aanpak beschrijven, lichten we eerst de context toe. De vernieuwingscommissie wiskunde cTWO heeft zich na de installatie in 2005 eerst beziggehouden met het ontwikkelen van visie, leerdoelen en experimenteel lesmateriaal. Vervolgens ging in 2009 een aantal pilotscholen deze curricula en materialen beproeven. De leerlingen van deze scholen kregen ook een afwijkend centraal examen. Deze zogeheten pilotexamens zijn afgenomen tot de landelijke invoering van de nieuwe programma’s, dat wil zeggen van 2011 tot en met 2016 voor havo en van 2012 tot en met 2017 voor vwo. Deze pilotexamens, die voor een deel overeenkomen met de landelijke reguliere examens, en de resultaten van beide typen examens vormen de belangrijkste data in dit onderzoek.

De onderzoeks aanpak bestond uit drie stappen. Ten eerste hebben we de reguliere eindexamens en de pilotexamens wiskunde B van havo (eerste tijdvak) geanalyseerd voor de periode 2011–2019, en

Code	Code-omschrijving
Probleemoplossen	Een vraag is gecodeerd als Probleemoplossen als deze geen reproductievraag is voor de oplosser en er een oplossingsstrategie bepaald moet worden. Er kunnen meerdere oplossingswegen mogelijk zijn en een oplossingsweg bestaat mogelijk uit meerdere denkstappen.
Modelleren	
– Modelleren als proces	Een vraag is gecodeerd als Modelleren als proces als een probleem vertaald moet worden naar wiskundige termen of de wiskundige resultaten terugvertaald moeten worden naar de probleemsituatie.
– Model als object	Een vraag is gecodeerd als Model als object als een model moet worden aangepast, wordt geanalyseerd op eigenschappen of wordt vergeleken met een ander model.
Abstraheren	
– Abstraheren als proces	Een vraag is gecodeerd als Abstraheren als proces als er uit een concrete situatie overeenkomsten en verschillen gedestilleerd moeten worden, die vervolgens leiden tot de vorming van betekenisvolle wiskundige objecten of omgekeerd, als opgedane kennis toegepast moet worden in nieuwe concrete situaties.
– Abstract object	Een vraag is gecodeerd als Abstract object als er gedacht moet worden over wiskundige objecten, eigenschappen daarvan en relaties daartussen.

Tabel 1 Codeboek voor de examenanalyse met beknopte code-omschrijvingen.

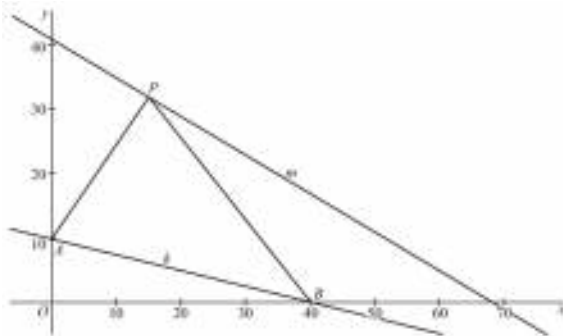
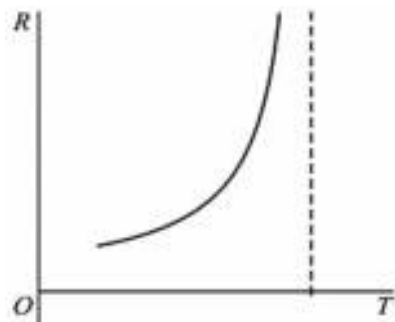
voor vwo voor de periode 2012–2019. Dit betrof in totaal 29 eindexamens en zou het eerste deel van de onderzoeksvraag kunnen beantwoorden. Ten tweede hebben we de kwantitatieve resultaten van leerlingen onderzocht op overlappende onderdelen van reguliere en pilotexamens. Ten derde is een beperkte kwalitatieve analyse uitgevoerd van het leerlingenwerk van het examen vwo wiskunde B van 2014.

Voor de eerste stap, het analyseren van de examens, is een codeboek gemaakt,

gebaseerd op de driedeling probleemoplossen–modelleren–abstraheren [7]. Als verfijning is zowel bij modelleren als abstraheren onderscheid gemaakt tussen de activiteit en het resultaat ervan. Figuur 3 geeft het analysemodel weer, en Tabel 1 bevat het codeboek. Voor elk van de vragen van de centrale examens is met ja/nee gecodeerd of beroep wordt gedaan op het betreffende aspect van wiskundig denken. Tabel 2 bevat een drietal voorbeelden van dergelijke coderingen. Bij een beperkt aan-



Figuur 3 Het model voor de analyse van de examens [9].

Code	Vraag	Motivering																										
Probleemoplossen	Vwo 2019 vraag 14 betreft de beweging van een punt P over de lijn m, volgens een gegeven parametervoorstelling. 	De vraag is: Onderzoek op algebraïsche wijze of er een positie van P is, zó dat driehoek ABP een rechte hoek heeft bij P én driehoek ABP een gelijkbenige driehoek is. Omdat dit voor deze leerlingen een non-routinetaak is, waarin verschillende stappen gecombineerd moeten worden en die op verschillende manieren is aan te pakken, is deze vraag gecodeerd als probleemoplossen.																										
Modelleren als proces	Havo 2011 pilot vraag 3 betreft de overlevingstijd van iemand die in koud water valt. Gegeven zijn formule en grafiek: $R = 15 + \frac{7,2}{0,0785 - 0,0034T}$ met $R > 0$ en $T \geq 5,0$. 	De vraag is: Bereken de waarde van T die bij de verticale asymptoot hoort en leg uit wat de betekenis van de verticale asymptoot is voor de situatie van de te water geraakte persoon. Omdat het hier gaat om de interpretatie van een wiskundige eigenschap in termen van de probleemsituatie, is deze vraag gecodeerd als modelleren als proces.																										
Abstract object	Havo 2011 pilot vraag 17 bevat een logaritmetabel en beschrijft hoe je hiermee $\log 1\frac{1}{2}$ kunt benaderen als verschil van $\log 3$ en $\log 2$. <table><thead><tr><th>n</th><th>$\log n$</th></tr></thead><tbody><tr><td>1</td><td>0</td></tr><tr><td>2</td><td>0,3010</td></tr><tr><td>3</td><td>0,4771</td></tr><tr><td>4</td><td>0,6021</td></tr><tr><td>5</td><td>0,6990</td></tr><tr><td>6</td><td>0,7782</td></tr><tr><td>7</td><td>0,8451</td></tr><tr><td>8</td><td>0,9031</td></tr><tr><td>9</td><td>0,9542</td></tr><tr><td>10</td><td>1</td></tr><tr><td>100</td><td>2</td></tr><tr><td>1000</td><td>3</td></tr></tbody></table>	n	$\log n$	1	0	2	0,3010	3	0,4771	4	0,6021	5	0,6990	6	0,7782	7	0,8451	8	0,9031	9	0,9542	10	1	100	2	1000	3	De vraag is: Bereken $\log 24$ op algebraïsche wijze met behulp van de tabel, dus zonder gebruik te maken van de log-toets op je rekenmachine. Omdat de gegeven logaritmetabel als abstract object wordt beschouwd dat de leerling gebruikt op basis van de wiskundige betekenis en relaties, los van contexten waarin logaritmen voorkomen en zijn aangeleerd, is deze vraag gecodeerd als abstract object.
n	$\log n$																											
1	0																											
2	0,3010																											
3	0,4771																											
4	0,6021																											
5	0,6990																											
6	0,7782																											
7	0,8451																											
8	0,9031																											
9	0,9542																											
10	1																											
100	2																											
1000	3																											

Tabel 2 Voorbeelden van coderingen.

tal vragen is een dubbele code toegekend. Om dit coderingsproces te controleren, hebben drie collega's een aantal vragen ook gecodeerd en de overeenkomst tussen de beoordelaars was goed (Fleiss' Kappa = 0,70). Op deze manier zijn de zogenoemde 'wiskundige denkvragen' geïnventariseerd.

Om na te gaan hoe de leerlingen van de reguliere en de pilotprogramma's presteren op de denkactiverende vragen van de examens zijn de examenvragen onderzocht die gecodeerd zijn als denkactiverend en die identiek voorkwamen in zowel reguliere als pilotexamens. Dat bleken veertien vragen te zijn, zeven voor havo en zeven voor vwo. Per vraag zijn de zogeheten *p*-waardes berekend voor pilot- en reguliere leerlingen: de gemiddelde proportie van de behaalde score gedeeld door de maximaal haalbare score. Vervolgens is per vraag met een *t*-toets getoetst of er significant verschil was tussen de beide groepen leerlingen en zijn de effectgroottes berekend. De groepsgroottes waren natuurlijk wel zeer verschillend: aan de reguliere examens wiskunde B namen zo'n 10000 havo-leerlingen en 15000 vwo-leerlingen deel, terwijl het aantal pilotleerlingen over de jaren en schooltypen varieerde van 95 tot 243. Niettemin hoopten we hiermee het tweede deel van de onderzoeksvraag te beantwoorden.

Om meer inzicht te krijgen in het leerlingewerk achter de kwantitatieve data, is voor het examen wiskunde B vwo 2014 (eerste tijdvak) het schriftelijk werk van 128 leerlingen van reguliere scholen en dat van 110 pilotleerlingen met de hand geanalyseerd om na te gaan of de kwantitatieve bevindingen terug te zien zijn en om greep te krijgen op onderliggende verschillen.

Wat waren de resultaten?

Zoals hierboven beschreven hebben we eerst de reguliere eindexamens en de pilotexamens wiskunde B van havo-vwo van de periode 2011–2019 (eerste tijdvak) geanalyseerd op de mate waarin de opgaves beroep doen op wiskundig denken in de zin van probleemoplossen, modelleren en abstraheren. Tabel 3 vat de resultaten samen in termen van percentages van 'wiskundige denkvragen' op de verschillende examens. Omdat vwo nog geen pilotexamens had in 2011, zijn de betreffende cellen leeg. Vanaf de landelijke invoer van de nieuwe programma's in 2017 (havo) respec-

Afnamejaar	havo regulier	havo pilot	vwo regulier	vwo pilot
2011	16%	42%	–	–
2012	5%	26%	41%	60%
2013	5%	24%	33%	53%
2014	11%	32%	22%	50%
2015	21%	38%	35%	38%
2016	10%	22%	35%	38%
2017	22%		29%	27%
2018	33%		24%	
2019	17%		27%	
Gemiddeld	11%	31%	33%	44%

Tabel 3 Percentage van vragen die beroep doen op wiskundig denken in reguliere en pilotexamens havo en vwo.

tievelijk 2018 (vwo) zijn er alleen nog reguliere examens over de pilotprogramma's; daarom staan de betreffende percentages tussen de twee kolommen in. Ze zijn niet meegenomen in de berekening van de gemiddeldes in de laatste rij.

Uit Tabel 3 springt een aantal zaken in het oog. Ten eerste zien we dat 'wiskundige denkvragen' in de havo-examens minder voorkomen dan bij vwo. Ten tweede blijkt dat het aandeel wiskundige denkvragen voor zowel havo als vwo in de pilotexamens hoger ligt dan in de reguliere examens (31% versus 11%, en 44% versus 33%, respectievelijk). Ten derde zien we voor zowel havo als vwo een dalende trend in het aandeel wiskundige denkvragen, die zich in de reguliere examens van de nieuwe programma's lijkt te stabiliseren.

In Tabel 4 wordt weergegeven welke typen denkactiviteiten bij de verschillende examens aan de orde kwamen. De landelijke examens van de nieuwe programma's vanaf 2017 (havo) respectievelijk 2018 (vwo) zijn hierin bij de reguliere examens meegenomen. Wat opvalt in Tabel 4 is de nadruk op probleemoplossen, terwijl de andere categorieën, modelleren en abstraheren, weinig of niet aan bod komen,

zo zeer zelfs dat de onderverdeling in subcodes achteraf gezien wellicht overbodig was. Deze nadruk op probleemoplossen is in lijn met de eerdere analyse van [13].

Behalve een inventarisatie van de mate waarin wiskundige denkvragen voorkomen in de examens zijn we natuurlijk ook bijzonder geïnteresseerd in de prestaties van leerlingen op dergelijke vragen. Daarvoor hebben we de resultaten onderzocht van vragen die een beroep doen op wiskundig denken en die in zowel reguliere als pilotexamens voorkwamen. In Tabel 5 en 6 worden voor deze vragen de *p*-waarden gegeven en de verschillen tussen reguliere en pilotleerlingen. De *t*-waarden van de verschillen worden gegeven, met het aantal vrijheidsgraden en de effectgrootte.

Uit Tabel 5 blijkt dat op het havo de pilotleerlingen het gemiddeld 5.4%-punten beter deden dan de reguliere leerlingen op deze denkactieve vragen. Voor drie van de zeven opgaven waren de verschillen statistisch significant. De effectgroottes zijn niet erg indrukwekkend en met de interpretatie daarvan moeten we voorzichtig zijn. Voor het vwo zien we in Tabel 6 vergelijkbare resultaten, met een 4.1%-punt verbetering van pilotleerlingen ten opzichte van de re-

Type denkactiviteit	havo regulier	havo pilot	vwo regulier	vwo pilot	totaal
Probleemoplossen	21	28	37	37	123
Modelleren als proces	4	2	4	6	16
Model als object	0	0	0	0	0
Abstraheren als proces	0	1	0	0	1
Abstract object	2	2	4	9	17

Tabel 4 Frequenties van elk type denkactiviteit in de examens havo (2011–2019) en vwo (2012–2019).

Afnamejaar	Vraag # pilot	Vraag # regulier	<i>p</i> -waarde pilot	<i>p</i> -waarde regulier	<i>p</i> -waarde verschil	<i>t</i> -waarde	<i>df</i>	Cohens <i>d</i>
2011	3	3	40,0	41,9	−1,8	−0,57	10523	−0,05
2011	17	18	70,0	59,9	10,1	2,51*	10523	0,22
2011	18	19	61,4	47,1	14,3	3,99***	10523	0,34
2012	14	7	87,2	79,4	7,8	2,73**	11444	0,24
2014	11	13	37,7	35,0	2,7	0,72	11449	0,07
2015	3	3	79,1	76,0	3,0	0,83	10700	0,08
2016	8	9	43,3	41,3	2,0	0,72	13380	0,06
<i>Gemiddeld</i>			59,8	54,4	5,4			

* significantie $p < 0,05$ (tweezijdig), ** significantie $p < 0,01$ (tweezijdig), *** significantie $p < 0,001$ (tweezijdig)

Tabel 5 Overzicht van *p*-waardes van identieke vragen op havo-examens.

Afnamejaar	Vraag # pilot	Vraag # regulier	<i>p</i> -waarde pilot	<i>p</i> -waarde regulier	<i>p</i> -waarde verschil	<i>t</i> -waarde	<i>df</i>	Cohens <i>d</i>
2013	2	2	60,3	56,7	3,7	1,18	15111	0,09
2013	16	14	50,5	50,4	0,1	0,04	15111	0,00
2014	15	6	65,6	70,4	−4,8	−1,94	14390	−0,15
2015	4	3	57,2	56,2	1,0	0,33	15018	0,03
2015	13	14	61,1	34,6	26,4	6,23***	15018	0,64
2016	2	3	52,0	39,3	12,7	3,79***	15274	0,37
2017	14	13	45,7	56,3	−10,6	−3,48***	17180	−0,31
<i>Gemiddeld</i>			56,0	52,0	4,1			

* significantie $p < 0,05$ (tweezijdig), ** significantie $p < 0,01$ (tweezijdig), *** significantie $p < 0,001$ (tweezijdig)

Tabel 6 Overzicht van *p*-waardes van identieke vragen op vwo-examens.

guliëre groep. Opvallend is verder de negatieve effectgrootte in 2017. Die betreft een vraag over integraalrekening, een onderwerp dat in meer detail aan de orde komt in het oude programma dan in het nieuwe programma. Voor havo en vwo samen suggereren de tabellen dat de pilotleerlingen het wat beter doen dan de reguliere leerlingen op de overlappende denkvragen.

Om deze kwantitatieve analyse meer diepgang te geven, is voor het examen wiskunde B vwo 2014 (eerste tijdvak) het schriftelijk werk van 128 leerlingen van reguliere scholen en dat van 110 pilotleerlingen met de hand geanalyseerd. Daaruit komen drie typen verschillen naar voren:

- Leerlingen van de pilotprogramma's lijken wat meer verschillende probleemaanpakken te gebruiken dan de leerlingen in de reguliere programma's.
- Ook lijken de pilotleerlingen vaker dan de reguliere leerlingen grafieken te schetsen en heen-en-weer te springen tussen verschillende representaties.

- Verder gebruiken leerlingen van pilot-scholen vaker exacte algebraïsche methoden, waar leerlingen van reguliere scholen meer gebruik maken van de grafische rekenmachine.

Conclusie

We vroegen ons af hoe we de curriculumwijziging met betrekking tot wiskundig denken terugzien in de nieuwe centrale examens havo/vwo, en hoe leerlingen presteren op examenvragen die zich daarop richten. Wat betreft de eindexamens is het antwoord dat die in de nieuwe programma's meer wiskundige denkvragen bevatten dan in de oude programma's, maar dat dat aandeel op havo kleiner is dan op vwo en bovendien in de loop van de pilotperiode afneemt. Verder ligt de nadruk sterk op probleemoplossen als wiskundige denkactiviteit en veel minder op modelleren en abstraheren. Wat betreft de prestaties van leerlingen zijn er aanwijzingen dat de leerlingen die de nieuwe programma's volgen wat beter presteren op wiskundige denk-

vragen en iets flexibeler oplossingsgedrag vertonen, al moeten we hierbij opmerken dat dit gebaseerd is op een beperkt aantal examenvragen en dat de verschillen niet spectaculair zijn.

Onze interpretatie van deze bevindingen is allereerst dat het hoopgevend is dat wiskundige denkvragen meer voorkomen in de nieuwe examens en dat de pilotleerlingen daarop wat beter lijken te presteren. Dat was immers een van de doelen van de programmaherziening. Toch hebben we ook punten van aarzeling. De belangrijkste kanttekening betreft de afnemende aantallen wiskundige denkvragen in de loop van de pilotjaren. Wat is daarvan de reden? Is men geschrokken van de soms matige resultaten van leerlingen op dit type vragen? Is het te lastig om wiskundige denkvragen te ontwerpen? Is het centraal examen niet geschikt om wiskundig denken te toetsen? Onze reactie is een tweeledige oproep. Om te beginnen is wiskundig denken natuurlijk geen helder, welomschreven vaardigheid die zich eenvoudig laat toet-

sen. Toch lijkt er internationale consensus te bestaan over het belang van dergelijke hogere-orde leerdoelen bij wiskunde en is het te vroeg om deze pogingen om ze in het centraal examen te toetsen al zo snel te laten verwateren. Als op wiskundig denken in de examens weinig beroep wordt gedaan, verwatert de beoogde leerplanvernieuwing al snel, omdat van het centraal examen immers een sterke sturende wer-

king naar de klassenpraktijk uitgaat. Kortom, examenmakers, stroop de mouwen op en durf wiskundig denken de plaats te geven die het verdient!

Tegelijkertijd stelt het format van het centraal examen inderdaad beperkingen aan wat mogelijk is. Daarom verdient het aanbeveling om in het schoolexamen ook andere toetsvormen te hanteren. Denk bijvoorbeeld aan grotere modelleeropdrach-

ten. We eindigen dan ook met een tweede oproep: docenten, wijk eens wat vaker af van het schoolexamen als generale repetitie voor het centraal examen en gebruik de ruimte die de wet daartoe geeft! ☺

Noot

Dit artikel is een bewerking van [8]. Het maakt gebruik van de resultaten van de master thesis van de tweede auteur.

Referenties

- 1 M. Bor-de Vries en P. Drijvers, *Handreiking Denkactiverende wiskundelessen*, Freudenthal Instituut, Universiteit Utrecht, 2015.
- 2 Commissie Toekomst Wiskundeonderwijs, *Rijk aan betekenis. Visie op vernieuwd wiskundeonderwijs*, cTWO, 2007.
- 3 Commissie Toekomst Wiskundeonderwijs, *Denken & doen, wiskunde op havo en vwo per 2015*, cTWO, 2013.
- 4 Curriculum.nu, *Conceptvoorstellen leergebied rekenen en wiskunde*, 2019.
- 5 K. Devlin, *Introduction to Mathematical Thinking*, Devlin, 2012.
- 6 C. Drüke-Noe en S.M. Kühn, Cognitive Demand of Mathematics Tasks set in European Statewide Exit Exams – Are some Competences more demanding than others? In T. Dooley en G. Gueudet, eds., *Proceedings of the Tenth Congress of the European Society for Research in Mathematics Education (CERME10, February 1-5, 2017)*, DCU Institute of Education and ERME, Dublin, 2017, pp. 3484–3491.
- 7 P. Drijvers, Denken over wiskunde, onderwijs en ICT, Inaugurele rede, Universiteit Utrecht, 2015.
- 8 P. Drijvers, H. Kodde-Buitenhuis, en M. Doorman, Assessing mathematical thinking as part of curriculum reform in the Netherlands, *Educational Studies in Mathematics*, 2019.
- 9 J.W. Kodde-Buitenhuis, *Wiskundig denken in de pilotexamens van de nieuwe wiskundecurricula havo/vwo*, Cito, 2015.
- 10 M.R. Larson en T.D. Kanold, The Common Core Mathematics Debate, in M.R. Larson en T.D. Kanold, eds., *Balancing the Equation*, NCTM, 2016, pp. 43–56.
- 11 National Research Council *Everybody Counts: A Report to the Nation on the Future of Mathematics Education*, National Academy Press, 1989.
- 12 A.H. Schoenfeld, Learning to think mathematically: Problem solving, metacognition, and sense making in mathematics, in D. Grouws, ed., *Handbook for Research on Mathematics Teaching and Learning: A Project of the National Council of Teachers of Mathematics*, Macmillan, 1992, pp. 334–370.
- 13 A. van Streun, *Onderwijzen en toetsen van wiskundige denkactiviteiten*, SLO, 2014.
- 14 P. Vos, Assessment of modelling in mathematics examination papers: Ready-made models and reproductive mathematising, in G.A. Stillman e.a., eds., *Teaching Mathematical Modelling: Connecting to Research and Practice, International Perspectives on the Teaching and Learning of Mathematical Modelling*, Springer, 2013, pp. 479–488.
- 15 P. White en M. Mitchelmore, Teaching for abstraction: a model, *Mathematical Thinking and Learning* 12(3), 2010, 205–226.

Daan Mulder

mulderdaan@live.nl



Het keerpunt van Willem van der Poel

Uit de leegte hebben we het allemaal op moeten bouwen

Wie het appartement van professor Willem van der Poel binnenstapt, komt letterlijk voor een raadsel te staan. De spiegel in de hal weerkaatst je spiegelbeeld zoals alle normale spiegels, maar op het tafeltje ervoor ligt iets vreemds: in een spiegelkje zien we zes donkerblauwe cilindertjes, twee aan twee naast elkaar, maar in het origineel ervoor zijn ze toch duidelijk vierkant, in plaats van rond. Je zou bijna je hoofd door de spiegel steken: dat kán toch niet? Het is bij lange na niet de enige puzzel in het appartement van deze 92-jarige computerpionier en puzzelverzamelaar: in de woonkamer staat zijn collectie in manshoge vitrinekasten tentoongesteld. “Eerst maar eens een rondleiding?”

De voorliefdes van Van der Poel lijken de inrichting van het appartement te hebben bepaald: in het verlengde van de kasten met puzzels bevindt zich de muziekhoeke, met een piano, fagot en blokfluiten. Op de muren hangen foto's van bergketens, al heeft Van der Poel het bergbeklimmen inmiddels op moeten geven. De studeerkamer is gewijd aan computers. Van der Poel wijst naar een kleine printplaat op zijn bureau — een Raspberry Pi-computer — en roept: “Hier, dat kleine dingetje, daar zit de hele ZEBRA in!” De ZEBRA, een afkorting voor Zeer Eenvoudige Binaire Reken Automaat, is een computer die Van der Poel meer dan zestig jaar geleden ontwierp, toen hij bij het Dr. Neherlab van PTT werkte. Het was een van de eerste computers in Nederland. “Toen compileerden we nog op papertape, dan lagen er zulke hopen papertape op de vloer! Je moest eerst al die papieren opwikkelen, dat mocht niet scheuren, en die trok je dan weer door het runtime-systeem, waar de sinus en de cosinus en

alle andere rekenkundige programma's in zaten. Dus was je een halve dag bezig om één programma te doen.”



Willem van der Poel met spiegel-illusie

“De voorloper, de PTERA, de PTT Elektronische Reken Automaat, heeft van 1953 tot 1958 gedraaid. Toen de ZEBRA binnenkwam dachten we: waarom bewaren we dat oude ding eigenlijk? Die hebben we met sadistisch genoegen in no-time afgebroken. Ik heb een schijfkop van de trommel en de carpenterrelais voor de selectie van de koppen bewaard. Voor de rest is alles verloren. Een grappig detail: wij hadden een magneetbandenapparaat, een grote spoel die heen en terug kan draaien. Dat is wel leuk, want dan kan je die programma's die je anders met papertape moest inlezen op magneetband zetten. Maar het leesprogramma daarvan... Je moet kijken: heb je ruimte op de disc? En dan een gat zoeken dat groot genoeg is om het programma te bevatten. Ik geef je te raden hoeveel regels dat stuurprogramma kostte in ZEBRA-code. 25!”

Zuinig zeg!

“Ja, de Zebra kon een heleboel ‘onderwater’ doen. Die programma's konden zichzelf repeteren en verdwenen als ze gebruikt waren. Het hele vermenigvuldigingsprogramma bestond maar uit drie instructies. Dat heette onderwaterprogrammeren. Het was een techniek die Dijkstra verafschuwde (lacht), ‘trucologie’ vond ie dat. De ZEBRA staat nog bij ons op de TU Delft in de kelder. Hij is ook te bezichtigen, maar helaas niet compleet.

We zijn er elke week met de mannetjes! We geven rondleidingen. Als je wil komen kijken: maandagochtend Mekelweg 4.”

“Een van de mensen die ik moet noemen is Gerrit van der Mey, die doof en blind was. Zevenentwintig jaar is hij medewerker bij me geweest, en een grote vriend. Hij was al jong blind geworden, door meningitis. Hij heeft wel kunnen afstuderen en zijn doctoraal gedaan in Leiden. Maar toen werd hij ook doof, weer door meningitis. Zo heeft hij zijn proefschrift in de meetkunde geschreven. Henk Mol, later hoogleraar fonetiek, werkte bij mij in het Dr. Neherlab en had voor hem een elektrische brailleermachine gemaakt. Wat er werd ingetoetst, werd in braille omgezet. Gerrit kon gewoon terug spreken, dat had hij nooit verloren. Henk Mol zei: zou programmeren geen vak voor Gerrit zijn? Je hoefde geen literatuur te raadplegen, want er was niks. Uit de leegte hebben we het allemaal op moeten bouwen. En Gerrit bleek een fantastische programmeur. Dan zei je: dat en dat gaat fout. Oh ja, zei hij dan, op regel 577 staat een verkeerde opdracht.” [Zie ook het artikel ‘Met drieënzestig symbolen’, NAW 5/6(4) (2005), 312–316.]

“Ik ben veel met hem op tour geweest, bijvoorbeeld naar een congres voor doofblinden in Amerika. Hij had zijn brailleermachine bij zich toen we op bezoek gingen bij president Eisenhower. Eisenhower liet dat ding op de grond vallen, sindsdien zit er nog steeds een deuk in. Onder het autorijden sprak ik met hem het LORM-alfabet, dat is een alfabet op je handen. Als hij naast me in de auto zat, kon ik gewoon met mijn rechterhand met hem praten. Tussen ons tweeën hadden wij helemaal geen machine nodig! Of we gingen naar Mainz of München, dan gaf hij ook voordrachten. Dan moest je hem wel bijstaan natuurlijk. Hij moest even geïnterrupteerd worden als er een vraag uit het publiek kwam. Die moest je even doorbraileren.

Ik was ook eens met hem naar het Museum van Onderwijs [nu Museon, DM]. Hij was gek genoeg een vogelkenner. Alleen op de geluiden, maar dat was toen ook weggefallen. In het onderwijsmuseum hadden ze een hele vogelverzameling. En voor hem mochten de kasten open, natuurlijk. En toen mocht hij die vogeltjes

met zijn handen ‘bekijken’. Hij zegt: is een vinkje zo klein? Daar had hij natuurlijk geen idee van, hoe klein zo’n vogeltje is. Een heel bijzonder mens. Zal ik je nu de puzzels laten zien?”

Graag!

De vitrinekasten in de woonkamer van Van der Poel puilen uit van de puzzeltjes, de meesten van hout. Als kind figuurzaagde Van der Poel al een kluisje, dat door na te denken en zorgvuldig te draaien opengemaakt kon worden. Met het ontwerpen van puzzels is hij sindsdien niet meer gestopt. Trots laat hij een ‘148-schuiver’ zien: balkjes die in een kubusvorm in elkaar grijpen. Door zorgvuldig balkje voor balkje te verschuiven, kunnen de balkjes uiteindelijk uit elkaar gehaald worden. Hier kost het maar liefst 148 schuifbewegingen voor je de eerste balk los uit de kubus kan schuiven. Niet alle puzzels zijn van hout: 7 spijkers, bijvoorbeeld, met de opdracht om één van de spijkers rechtop in een stuk hout te slaan, en de andere spijkers er bovenop te balanceren. Het schijnt met 16 spijkers ook te kunnen. Of een puzzel die hij alle lezers van Nieuw Archief aanraadt. Zie daarvoor het kader.

En vanwaar al die foto’s van bergen aan de muur?

“Ik heb mijn leven lang geklommen. Mijn vader heeft me voor de oorlog al meegenomen, toen ik 10, 11, 12 was. Een van

die tochten was in 1939, dat was een traverse van de Mer de Glace in Chamonix, dan kun je opklimmen naar de Refuge du Couvercle, vijf uur wandelen over de gletsjer. Die was toen helemaal met sneeuw bedekt. Heel makkelijk, geen probleem. Die heb ik achtendertig jaar later ook met mijn vrouw gedaan, ook weer naar de Couvercle, toen was hij helemaal verijsd, met spleten en zo. We hebben natuurlijk aangelijnd gelopen, en met stijgijsers. Ontzettend vermoeiend! Mijn vrouw Johanna had ook geen hoogtevrees, die kon op richeltjes lopen. Op de Grossglockner in Oostenrijk, dan moet je over een graat die aan beide kanten vierhonderd meter naar beneden gaat. We hebben het gedaan met een beetje mist en zijn er gewoon overheen gelopen, naar de top, met een gids. Ik heb niks gemerkt van de afgrond.

Mijn vrouw is 90 geworden, ze is drie jaar geleden overleden. Maar in de laatste periode kon ze niet meer lopen, dat was versleten. Ze moest echt aan het handje gehouden worden. Dan viel ze weer, wat een ellende. Ja, het was ineens uit. Ze kon niet meer. Bij de ene gebeurt het niet, de andere wel, waarom kan ik nog wel alles? Ik weet het ook niet.

Ik heb 32 jaar achter de fagot gezeten, ik speel alle blokfluiten. Ik speel ook de traverso. Heb ik ook gedaan in een gezelschap. Waren we met zijn zessen. Toen ging er eentje dood, waren we met zijn vijven, ging er weer eentje dood, waren we met zijn vieren. Ik bleef over met mijn vrouw en een muziklerares, toen ging mijn vrouw dood. Ik heb nog een poosje met die muziklerares samen kunnen spelen, maar die kan nu de gaten niet meer grijpen, heeft stijve vingers gekregen. Klaar. Ik heb van mijn vierde jaar af piano gespeeld. Het enige waar ik aan toe kom is *Das Wohltemperierte Klavier* van Bach, daar ken ik alle fuga’s van, en daar raak ik nou nooit op uitgekeken. Dat is heel bijzonder. Al denk ik dan wel: ik heb ze vroeger beter gespeeld.”

Meer lezen? Bekijk dan *Computerpioniers: het begin van het computertijdperk in Nederland* van Gerard Alberts en Bas van Vlijmen.

Goede suggesties voor een Nederlandse wiskundige met een keerpunt in zijn of haar carrière zijn welkom via keerpunt@nieuwarchief.nl.

Puzzel: kubuskalender

Een scheurkalender is een behoorlijk inefficiënte manier om alle mogelijke data weer te geven. In plaats daarvan heeft Van der Poel een kubuskalender om de maanden aan te geven: drie blokken met letters op elke zijde. Als het bijvoorbeeld maart is, kan hij die blokken zo tegen elkaar zetten dat drie zijdes naast elkaar ‘mrt’ spellen. Door de letters slim over de achttien zijvlakken van de kubussen te verdeelen, kun je elk van de twaalf afkortingen in oude spelling (jan, feb, mrt, apr, mei, jun, jul, aug, sep, oct (!), nov en dec) maken. Oplossingen en foto’s van knutselwerk ontvang ik graag in de mail!

Jip van Besouw

Centre for Logic and Philosophy of Science
Vrije Universiteit Brussel
jip.van.besouw@vub.be

History

Willem Jacob 's Gravesande and mathematics in the early eighteenth century

What did mathematics look like in the early eighteenth century and what did it mean to be a mathematician at the time? Questions such as these are central to understanding the historical development of mathematics more generally but are notoriously hard to answer. In this article Jip van Besouw attempts to take some small steps towards an interpretation. He will do so by looking at one particular mathematician, Willem Jacob 's Gravesande (1688–1742). Although 's Gravesande is not one of the household names in the history of mathematics, he was located at a central node of the mathematical community during his era. For most of his career he held a prestigious chair of mathematics and astronomy at Leiden University, one of Europe's leading institutes of learning.

Mathematics as a calling?

Among historians, 's Gravesande is known as a key figure in the physics and natural philosophy of the early eighteenth century. An outspoken supporter of the work of Isaac Newton (1642–1727) and an inspiring teacher, 's Gravesande is usually portrayed as a powerful proponent of the new experimental-mathematical physics. By comparison, little attention has been paid to his mathematical work. Much of this has to do with the fact that 's Gravesande made few original mathematical contributions. Moreover, the contributions he actually made were either in fields that are now deemed peripheral — such as perspective geometry — or were quickly superseded by more advanced works of giants such as Johann Bernoulli (1667–1748) and Leonard Euler (1707–1783). If, however, our aim is to understand what mathematics was like in practice, as a human endeavour, there are very good reasons for taking a second look at 's Gravesande.

In important ways 's Gravesande's career as a mathematician was typical for the era in which he was living. One of the typical features was his route to profes-

sional mathematics. Rather than via formal training or mentorship, 's Gravesande was largely self-trained and his mathematical activities were avocational. At the same time his interests in mathematics were fostered by close relatives: both his father and his maternal grandfather had a keen interest in practical mathematics. 's Gravesande was born into one of the leading families in the governance of the city of 's-Hertogenbosch. His father Dirk (1646–1716), while being a magistrate of that city, communicated with his luminary compatriot Christiaan Huygens (1629–1695) on the grinding of lenses and applied for at least one patent, on the construction of horizontal windmills. Our 's Gravesande's grandfather, Nicolaas Blom (d. 1693?), was an overseer of fortifications and a surveyor and as such almost certainly steeped in geometry [3, pp. 233–235].

Because of this we can expect that the youthful 's Gravesande found ample opportunity and resources to develop his mathematical talents. When he moved to Leiden to attend university there between 1704 and 1707 — graduating as a teenager — he however chose to study law. According

to legend he did so to please his father and would actually have spent his time in classes to work on what would become his first book, the *Essai de perspective*, published in 1711 [1, Vol. 1, p. xi, note F]. It is quite unclear whether 's Gravesande attended any courses in mathematics at Leiden. What would not have helped was that mathematics was at a low point at the university. The chair of mathematics was held by Burchard de Volder (1643–1709) but De Volder stopped his teaching activities in 1705 due to illnesses. Moreover, he preferred natural philosophy over mathematics. No substantial teaching of mathematics seemed to have taken place between 1705 and 1717, when 's Gravesande himself assumed the chair. There was a lecturer in military mathematics and surveying, Henri Coets (d. 1730), a known expert on Euclid's *Elements*. However, his lectures probably included the same kind of geometry 's Gravesande had seen at home [5, pp. 24–25].

Where then, if not at the university, could a person like 's Gravesande sharpen his mathematical skills? Part of the answer is through contacts and correspondence with others engaged with mathematics, often at leisure. After graduating 's Gravesande moved to The Hague, where he apparently practiced as a lawyer but also found his way into the world of intellectual sociability known as the Republic of Letters. An important contact was the Brit William Burnet (1687–1729), son of the Bishop of Salisbury. Burnet was a member of the Royal Society of London, a protégé

of Isaac Newton himself, and a resident of The Hague, too. It was this Burnet, who would later go on to become the governor of New York and various other British American colonies, who brought 's Gravesande to the attention of Johann Bernoulli and, very likely, to Newton's as well. Burnet wrote to Bernoulli in 1710 that if Bernoulli wanted to reach him he could send his letters to "Mr. De Sgravesande" who "has the most original genius for mathematics, but, as he is a lawyer, cannot give himself to it entirely".¹

Through such contacts and introductions 's Gravesande gradually came in touch with other mathematicians in the Republic of Letters. Quite soon after this we find him corresponding with Nicolaus Bernoulli (1687–1759), one of Johann's nephews. In this correspondence, to which I will get back below, they discussed among other things logarithms and a particular problem in statistics. It was for an important part through epistolary interactions such as these that the new mathematics of the age was developed, whether it was calculus or statistics. 's Gravesande was very active in these matters. In 1713 he became one of the founding editors of the *Journal littéraire*. The main business of this *Journal* was to produce book reviews of any kind of book, with subject matters ranging from theology and modern literature to mathematics and natural philosophy. 's Gravesande used this outlet to publish some of his own tracts but the journal also published several polemical pieces on the dispute over the priority over the calculus between Newton and Leibniz. These were written by close allies of the two antagonists such as John Keill (1671–1721) and Jacob Hermann (1678–1733) [14, p. 211], and very likely solicited by 's Gravesande.

's Gravesande applied his talents for networking also in other areas, namely to befriend people with political power. In his first direct contact with Johann Bernoulli, 's Gravesande wrote in the name of one particular governor of Leiden University, a former general of the Dutch army, who was attempting to hire Bernoulli for the chair of mathematics (Bernoulli deemed the offer financially inadequate). 's Gravesande generally seems to have been happy to employ his political connections for mathematical purposes and vice versa. For example, 's Gravesande knew several of the top diplomats of the Netherlands. He dedicated



Figure 1 Portrait of 's Gravesande by Jacob Houbraken.

his first book, the *Essais de perspective*, to one such diplomat and designed a sundial for another. This second diplomat, Arent Wassenauer van Duyvenvoorde (1669–1721), hired 's Gravesande a couple of years later as a secretary on a diplomatic trip to London (1715–1716). 's Gravesande used this trip to get into contact with Newton and various other members of the Royal

Society. He was promptly made a Fellow of that society, from which we can infer that he made a strong impression on the British mathematicians. When Leiden University decided to offer 's Gravesande a chair in mathematics and astronomy in 1717 it was in turn on the formal recommendation of both Duyvenvoorde and Isaac Newton [3, p. 240].

's Gravesande's route towards professional mathematics, to sum up, started with the opportunities and knowledge offered by his family but was paved by the reputation he built in the Republic of Letters. Of particular importance was the fact that he was well regarded in that Republic's tiny province of advanced mathematics. To get entrance to that province and be able to communicate on equal footing with the likes of the Bernoullis and confidants of Newton was exceptional in itself. The fact that he got the chair of mathematics and astronomy in Leiden, however, was in no small way a consequence of the backing he received from his contacts in the circles of diplomacy and higher politics. These were clearly of great help in securing a living as a mathematician.

Natural philosophy and mixed mathematics

When 's Gravesande managed to secure a mathematical vocation, we would expect him to start ramping up on a serious mathematical project. Both statistics and infinitesimal calculus were budding fields in 1717 and faced many opportunities and challenges. Quite unexpectedly, at least from a modern point of view, is that 's Gravesande chose to turn towards what we would now consider experimental physics. This move, too, can tell us something about the field of mathematics at the time. Although 's Gravesande's choice was certainly guided by his personal taste it is important to realise that the relation between mathematics and physics has evolved much over time. Both were very different disciplines and genres than they are nowadays.

To begin with we should look at what was expected from a mathematics professor. University professors were appointed to lecture, and, explicitly so in Leiden, to serve the interest of their country. Much of a professor's workload was shaped by educational demands. Although original contributions to their fields were appreciated these were not supposed to be their main affair. What is more, university mathematics had a mere propaedeutic function. The regular university curriculum of the time offered only elementary mathematics and one could not graduate in it. This programme was adjusted to the needs and capabilities of the incoming students. Few of them would have been able to follow anything at all of the newer mathematics. As was the

case for 's Gravesande himself, students were often in their mid teens when they joined Leiden University and had generally attended so-called Latin Schools before. Once they arrived at Leiden students graduated mostly in law — the degree of choice of the ruling elite — or medicine. They were supposed to go on to administrative and medical careers respectively [15, Chapter 1]. That 's Gravesande taught only elementary mathematics and physics was therefore both desirable for the university and suited to the background of his students.

None of this takes anything away from the fact that 's Gravesande could of course have spent his spare time on mathematical problems. Both of the Bernoullis with whom he corresponded, Johann and Nicolaus, combined their chairs of mathematics with strings of top notch mathematical papers. 's Gravesande worked on topics in mathematics proper only sporadically. Most of his advanced work went into designing instruments and machines and coming up with new experimental setups to test physical theories and establish physical phenomena. Can we therefore say that he turned his back on mathematics in favour of physics?

's Gravesande himself took a different perspective. In his bestselling *The mathematical basics of physics, confirmed by experiment; or, an introduction to Newton's philosophy*, first published in 1719, he distinguished between 'mixed' and 'pure' mathematics and claimed that "physics belongs to mixed mathematics" [10, Vol. 1, ii]. By his definition, doing physics was doing mathematics as well. It is important to realise here that mixed mathematics was not simply what we now call applied mathematics [13]. It referred instead to sciences we would now qualify as physical, such as mechanics, optics, and hydrostatics, as far as they were treated quantitatively. The refraction of light through lenses was a typical example of an optical subject which one would attack mathematically, in this case by advanced geometry. The natures of light and colour, on the other hand, were generally considered to be topics for qualitative natural philosophising and where therefore outside of the domain of mathematics in the seventeenth century.

What was it that classified sciences such as mechanics and optics as mathematics for 's Gravesande? Above all it was the fact that physical sciences were supposed to

deal with natural motions. According to a view that is often called 'corpuscularism', natural phenomena were to be explained in terms of the motions of material bodies or particles. In one way or another most of the major natural philosophers of the seventeenth and eighteenth centuries adhered to this view. As 's Gravesande explained himself: "All things in physics are accomplished by motion; because no change can be made to bodies [...] except that which is made by motion." He continued to argue that "Motion itself is a quantity; it can be increased and diminished; whatever therefore attends to [motion], that is, all in physics, ought to be treated mathematically." The centrality of this point of view cannot be overestimated. What 's Gravesande believed, like many of his contemporaries, was that motion is a quantity. Mathematical physics was not just mathematics applied to physics: physical motion was a mathematical topic by its very essence [7, p.15].

In the practice of his physics 's Gravesande used mathematical approaches in various ways. These included expressing physical concepts quantitatively and measuring these concepts through tightly controlled experiments. The mathematics involved generally did not exceed solving the equivalent of quadratic equations or approximating the numerical values of square roots. Of interest from a mathematical side is the use of advanced curves to describe particular motions. In his *The mathematical basics of physics*, 's Gravesande used for example sinusoids to find the dimensions of the rainbow, cycloids to describe centre of oscillation of pendulum motion, elliptical and near circular motions when discussing the more intricate parts of Newton's celestial mechanics, and logarithmic curves in his quest to describe the deceleration of bodies moving in a fluid. It is unclear to what extent 's Gravesande presented any significant new results in doing so, whether mathematical or physical. Potential innovations are obfuscated by his tendencies not to refer to other authors and to abridge the solutions to mathematical problems [4, pp.27–35]. These tendencies, consequences of pedagogical choices, necessitate the historian willing to find what is new to study the mathematical demonstrations in 's Gravesande's book in detail. For the moment, this remains an opportunity for future historians of mathe-

matics or perhaps students looking for an interesting topic for a bachelor or master thesis.

The kind of geometry used by 's Gravesande perfectly illustrates the overlaps and the divides between mathematics and physics around 1700. Although many of the physicists of the time were interested in mathematical curves, we should keep in mind that only a dozen or so of the best geometers were able to publish new results on a regular basis. For some of them, physical problems were predominantly a way to generate new curves and therefore new mathematical objects to work with. Johann Bernoulli, for example, often cared more about the manipulation of these mathematical objects than about the physical problems they presented. For Newton and 's Gravesande the opposite was true. In their hands, physics was redefined not just a branch of mixed mathematics, it was actually considered as the most important part of mathematics per se. As we will see in the next section 's Gravesande did not just state that physics was a game to be played by mathematicians: it was the game all mathematicians should play.

The pull of practical mathematics

One of 's Gravesande's first outings as a mathematician steers us directly towards his reasons for arguing so. In a letter addressed to "Monsieur B*** de la Société Royale de Londres", presumably Burnet, whom he gave permission to publish it, 's Gravesande reacted to a review of a book on the new analysis of integrals and differentials. This book had been written by Père Reynaud (1656–1728), one of the many French mathematicians involved in the early development of the calculus, and was reviewed in 1709 by Jean le Clerc (1657–1736), a Dutch theologian and man of letters. Le Clerc, not a mathematician himself, had argued in his review that the usefulness of the great abstractions of mathematics, such as could be found in Reynaud's book, lied only in their capacity to amuse the mind of man.

's Gravesande's exasperated letter consists for a large part of counterarguments to this claim, in particular via a summation of human activities made easier by mathematics. These included timekeeping; "the art of throwing bombs"; the calculation of the dimensions of large telescopic lenses, made easier particularly by the new anal-

ysis in question; and navigation. 's Gravesande furthermore added that "multiple other parts of mathematics" such as surveying, the study of sundials, and so on, were of great use to life. Thus we see him implying again that such practical concerns are an integral part of mathematics. What is striking about the letter is that 's Gravesande seems to argue that the usefulness of mathematics lies completely in its role in improving technology. This is implied in his statement that, if more people would be convinced of the usefulness of mathematics, "we would not see so many fruitless machines" made by "ignorant inventors".²

This same theme can be found in 's Gravesande's inaugural oration in Leiden, held in 1717. 's Gravesande there repeated that mathematics was of great help in navigation, in water management, and in time-keeping. He now singled out astronomy, as set out in Newton's *Principia*, as being of great utility to these practicalities. However, he also introduced a second way mathematics could be useful in this text. This was in studying 'the art of reasoning'. Mathematical reasoning, 's Gravesande explained, dealt with quantities, which were simple and abstract 'ideas', and was built upon a axiomatic-deductive method, the most reliable method available. Since any form of reasoning depended on the comparison of ideas, the basics of reasoning could best be learned from starting from the simplest ideas. Hence mathematics was a very suitable way to learn how to reason logically, a skill that could afterwards be applied to other fields [7], see also [4]. This was of course in perfect agreement with the propaedeutic function mathematics had in the university's curriculum at the time and 's Gravesande was at least partly preaching to the choir.

What is conspicuously absent in both of the two texts considered here is the idea that doing mathematics has value in itself. In later texts 's Gravesande indeed made it clear that he did not believe that there was such an intrinsic value. In 1727 he published a book on elementary mathematics for his courses in Leiden and argued on the very first pages that one should always keep one eye on possible applications. For if one would only study abstract mathematics, one "does not learn the proper mathematical method, but creates a disposition suitable only for reasonings about quantity", he claimed [8, Praefatio].

According to his biographer 's Gravesande "looked down upon those professional calculators spending their lives on the study of purely speculative truths of which the discovery is of no use, neither with regards to other sciences, nor with regards to the needs of life" [2, Vol. 1, xxiii].

Perhaps dismaying to modern mathematicians, 's Gravesande thus located the usefulness of practicing mathematics exclusively in applying the knowledge gained elsewhere. Ironically, when 's Gravesande was at some point asked to teach courses in practical mathematical topics such as surveying, he expressed his relief when the university later hired an additional lecturer to replace him for these somewhat less-than-academic subjects [9], see also [17, pp. 31–32]. Still, almost all of his contributions to mathematics proper were made in contexts of practical applications. It is to these contributions that we will turn in the final sections.³

Perspective problems

Although there exists scholarship on some of 's Gravesande's mathematical pieces, 's Gravesande has usually not been the primary focus of these studies. Historical work remains to be done if we are to see the merit of 's Gravesande as a mathematician. This work is made more complex by his own attitude towards the subject: exactly because he did not deem it important in its own right, he never drew attention to the innovations he made mathematically but only to the application of his work.

This is the case as well in his *Essai de perspective*, his first real scholarly work published in 1711. The book was praised in an anonymous review, perhaps by Johann Bernoulli, who at least wrote in a personal communication to 's Gravesande that he "wished that you take the trouble to write on the other parts of optics with the same clarity and the same skill as you have done on perspective". 's Gravesande's friend Burnet was similarly impressed. In the letter to Bernoulli quoted above, Burnet said of 's Gravesande that "he has made beautiful discoveries in Perspective, whereof he will soon publish something, which I will send you right away" [3, p. 238]. These discoveries, however, were not at all highlighted by the author himself. In the preface 's Gravesande asserted that his main goal was to be of use to painters who wished to use the theory of perspective, and that there-

fore he had tried to find a middle ground between the mathematical theory and its application.

The book itself consists for a large part out of problems one would face when trying to draw some scene in perspective. Particularly, 's Gravesande gave the solution for problems of the form: construct the image of a certain point or object, given a certain configuration of the image plane and the object. One of 's Gravesande's aims was surely to keep the mathematics at an elementary level. In the preface he spent some time to explain that he had published the easiest solutions to particular problems and in many cases multiple solutions so that the reader could choose according to particular preferences. In various cases 's Gravesande gave a solution that could be carried out without the use of even a compass [6, e.g. p.39 and p.43] As he explained in the preface, almost all of the solutions were carried out with what one could learn from Euclid's *Elements*: where this was not the case the text was set in italics so as to warn the reader.

's Gravesande's treatise on perspective is his only mathematical publication that has been analysed at some length by a modern historian. In her history on perspective geometry, Kirsti Andersen has dedicated one chapter to 's Gravesande, discussing in particular how his methods relate to those of his predecessors [2]. Andersen also has drawn attention to some of the more difficult problems solved by 's Gravesande. One of those is to determine what parts of a curved column base such as that shown in Figure 2 would be visible from a given eye point.

's Gravesande considered the base of the column as consisting of horizontal discs of different radii laying on top of each other, with parts of each disc being hidden from view by the overlaying disc. Consider for example the circle *DFEL* of 'Fig. 34' of Figure 2, which represents a horizontal cross-section of the column base. Draw in this plane the projection *CDHE* (from the eye point *O*) of the disc above it. The points *D* and *E* mark the boundary between the visible and the obstructed parts of the circumference of the circle. So determining these points is the first step to drawing a faithful perspective view of the column.

's Gravesande found that the distance *AG* from the centre of the smaller circle *A*

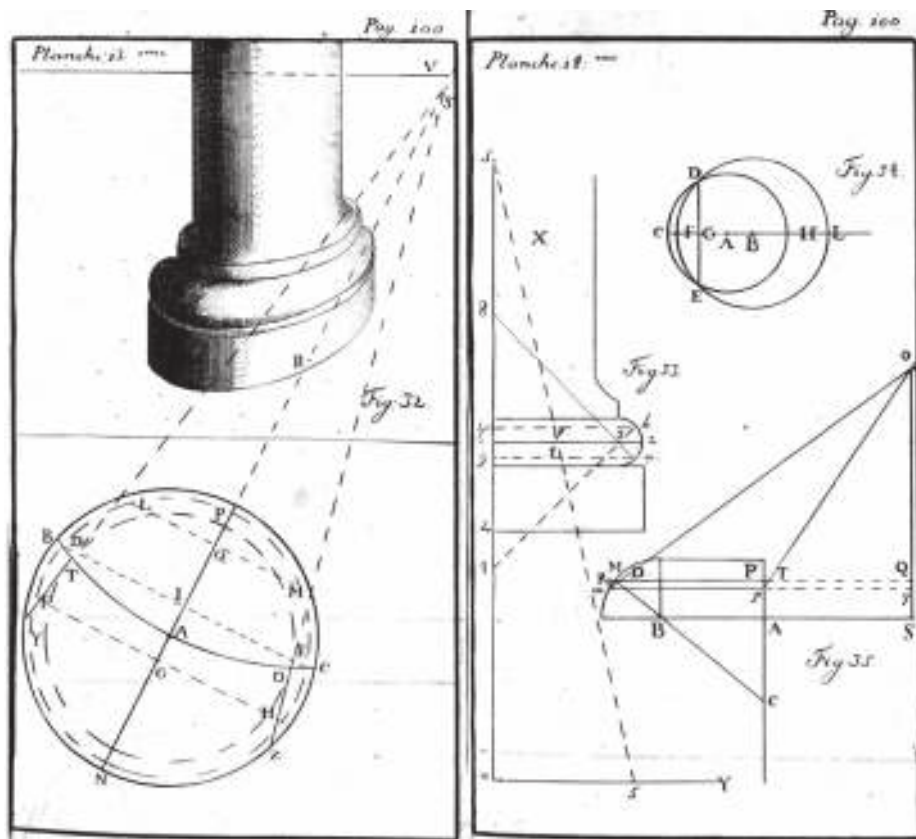


Figure 2 's Gravesande's analysis of the perspective view of the curved pedestal of a column.

to the chord *DE* was $\frac{b^2 - a^2}{2c} - \frac{c}{2}$, where *a* and *b* are the radii of the two circles, and *c* the distance between their centres, after the projection. In order to account for a continuously curved shape such as the column base shown in the figure, 's Gravesande introduced Leibnizian infinitesimals to deal with the limit case where the distance between the discs becomes vanishingly small. He found that, in this case, *AG* becomes $\frac{xydy}{edx} - \frac{y^2}{c}$, where *y*(*x*) is the shape of the column profile in the coordinate system defined by *OQ* = *x* and *MP* = *y*, and *e* = *AS* in 'Fig. 35'. This expression can be geometrically interpreted and constructed (in particular, $\frac{ydy}{dx}$ is the subnormal *PC*), and hence the visibility points *D* and *E* for a given cross-section of the column base can be obtained [2, pp.735–738; 6, pp.89–100].

What is interesting here is that 's Gravesande, who was still an unknown figure in the mathematical world when he wrote this, used the new infinitesimal calculus to attack a kind of problem to which it had not been applied before. As he makes clear in a note at the end of the solution he could have done it "without algebra", that is, strictly geometrically, but used the infin-

itesimals because it made the proof much shorter. Apparently, 's Gravesande was not averse of taking on particularly difficult problems and reducing them to simpler problems by whatever means he found to be working.

Binomial number crunching

A second mathematical topic 's Gravesande was involved in was statistics. One particular occasion to arouse his interest was a paper presented to the Royal Society in 1710 by John Arbuthnot (1667–1735), which is a very early example of statistical hypothesis testing in social science. The paper presents a table containing the number of baptised children in London for the previous 82 years. One seemingly spectacular feature of this data was that in each of these 82 years the number of boys was higher than that of the girls. Rather than figuring out what happened to those poor girl babies who were never baptised, the mathematicians dealing with it took the numbers as a proxy for the birth ratios and argued that the asymmetry was a sign of God's providence. Surely, God wanted every human being to have a life partner and had increased the number of baby boys

because men were more likely to be killed than women due to their hunting and warring?

Leaving aside questions of infanticide and discrimination, what is of interest from a mathematical point in this episode is the handling of the notion of 'chance'. Throughout most of the discussion it was taken for granted that, if sex were determined by 'chance' rather than by providence, the probability for a newborn to be a boy was the same as for it to be a girl. Implicitly assuming this, Arbuthnot had argued that, if 'chance' were at play, the probability of there being more boys than girls was $\frac{1}{2}$ for each year — ignoring the particular case of the numbers being exactly equal. Arbuthnot treated the problem as throwing 82 'two-sided dies' and argued the probability of the London numbers coming up to have been $(\frac{1}{2})^{82}$.

Perhaps exactly because Arbuthnot's probabilistic treatment was quite crude, it inspired a number of other mathematicians to expand on it. 's Gravesande seems to have been the first of those. In a treatise written originally in Dutch and circulating among his contacts, he set out to give Arbuthnot's proof for divine providence "a new degree of force" and approached the problem as follows. Rather than concentrating on the feature of 82 boy years in a row, he tried to take into account that the sex ratio always fell within certain margins, with the proportion of boys being roughly between 0.503 and 0.536. His ultimate aim was to "determine just how much one should have bet" against the London numbers being between those margins given the supposition that "the birth of children is the effect of chance [*hazard*]" and to show that the number was much smaller than Arbuthnot's. As far as the ultimate conclusion is concerned, there does not seem to be much here. On Arbuthnot's calculation the bet was $1:4.836 \cdot 10^{24}$, which would surely already have convinced anyone willing to buy into the premises of the argument.⁴

In any case, 's Gravesande felt it was worth expanding on. The mathematical part of his treatise starts out with an elementary exposition of binomial expansion including a long corollary on "examining the formation of the coefficients obtained in bringing up a binomial to any power whatsoever". It does not seem that there was anything new in his treatment as the binomial co-

efficients he derived were widely known due to Pascal's work from the 1660's. Since 's Gravesande treated a single birth as a coin toss, with equal probability of a boy and a girl, binomials provided the appropriate method to attack the problem. His problem can be summarised as follows: what is the probability that, throwing a coin for every individual birth, the number of heads will be within the margins given above, not for a single series of tosses, but for 82 series in a row?

's Gravesande's approach was two-stepped. He first calculated what the probability was for the sex ratio being between the margins found in the London data in a representative single year. Once he had found this probability, he would simply raise it to the power of 82. This second step was straightforward, although to calculate the resulting number in all its 44 digits, as 's Gravesande did, can perhaps only be the work of one with too much time on their hands. The first step required more creativity, however. 's Gravesande first found a representative year by taking the average number of births over the 82 years in question, which was 11429. For each year, he then scaled the numbers of births per sex to that average number. In this scaled data, 's Gravesande found that the number of boys had always been between 5745 and 6128, or between 30 and 423 more than half of the number of children born.

's Gravesande now faced the problem of calculating the probability of the number of boys out of 11429 births falling between these bounds. He did by considering the expansion of the binomial $(a + b)^{11429}$. The coefficient of the term $a^n b^{11429-n}$ in this expansion expresses the number of ways in which the sequence of births can contain exactly n boys. To find the probability of the number of boys being between 5745 and 6128, 's Gravesande needed to sum all the coefficients of the terms $a^{5745} b^{11429-5745}$ through $a^{6128} b^{11429-6128}$, and divide this by the sum of all the coefficients in the expansion (i.e., the total number of possible birth sequences). This may seem too excessive to do by hand, and indeed better ways of estimating this distribution were soon obtained, as we shall see below. Nevertheless 's Gravesande did essentially the hand calculation, though with some shortcuts. Since the final probability is obtained as a ratio

T A B L E

Des cas ou des chances pour le nombre des garçons, qui naissent par un 11429 Enfants. Le nombre des naissances pour la naissance de 5715 garçons, dans l'année 100000.

Nombre des garçons.	Nombre des filles.	Nombre des garçons.	Nombre des filles.
5715	5714	5715	5714
5716	5713	5716	5713
5717	5712	5717	5712
5718	5711	5718	5711
5719	5710	5719	5710
5720	5709	5720	5709
5721	5708	5721	5708
5722	5707	5722	5707
5723	5706	5723	5706
5724	5705	5724	5705
5725	5704	5725	5704
5726	5703	5726	5703
5727	5702	5727	5702
5728	5701	5728	5701
5729	5700	5729	5700
5730	5699	5730	5699
5731	5698	5731	5698
5732	5697	5732	5697
5733	5696	5733	5696
5734	5695	5734	5695
5735	5694	5735	5694
5736	5693	5736	5693
5737	5692	5737	5692
5738	5691	5738	5691
5739	5690	5739	5690
5740	5689	5740	5689
5741	5688	5741	5688
5742	5687	5742	5687
5743	5686	5743	5686
5744	5685	5744	5685
5745	5684	5745	5684
5746	5683	5746	5683
5747	5682	5747	5682
5748	5681	5748	5681
5749	5680	5749	5680
5750	5679	5750	5679
5751	5678	5751	5678
5752	5677	5752	5677
5753	5676	5753	5676
5754	5675	5754	5675

Figure 3 's Gravesande's table of probabilities of different gender distributions among newborn children.

of sums of coefficients, all that matters is the relative magnitude of the coefficients. Therefore, 's Gravesande did not need to compute the coefficients in absolute numbers, but only express them in terms of the middle coefficient, that of the numbers of 5714 girls and 5715 boys or contrariwise, which he assigned the arbitrary value of 100000. To find the other coefficients in terms of this middle term, 's Gravesande made use of a relation between adjacent coefficients, which in modern terms would be written

$$\binom{n}{x+1} = \binom{n}{x} \frac{n-x}{x+1}.$$

Using this relation, 's Gravesande calculated the individual coefficients in terms of the middle one, and collected them in a table of which the first part is shown in Figure 3. He continued the calculations down to the case of 5973 boys, 5456 girls, by which time the probability had dropped below 1 on 's Gravesande's arbitrary scale. 's Gravesande took the further values to be negligibly small, claiming for reasons he did not state that the sum of what we would call the tail could be no more than 50.

Now that he had the relative probabilities of all of the individual components that mattered, 's Gravesande could simply compare the sum over the relevant interval, which came to 3849150, with the sum over the entire table, multiplied by 2 to take into account the other side of the distribution, which gave him 13196800. Hence the probability of the number of male births falling within this range in a given year is about 0.2917, and the probability of this happening 82 years in a row

is 0.2917^{82} , or one in about $7.6 \cdot 10^{43}$: even less likely than according to Arbuthnot's calculation.

Final remarks

What can we learn from all this about 's Gravesande's mathematics? First of all, it becomes clear from these examples that 's Gravesande mastered various of the new techniques that had been developed in his day. He seems to have had a knack for finding problems that could not be solved with more conventional means, and to attack those with his heavy machinery. In both cases, however, neither the problems in themselves nor the solutions were of particular interest outside of their immediate context. 's Gravesande was not a systematic mathematician but rather a problem solver and a number cruncher. Given these examples, we are in a good position to understand one of his contemporaries, who, visiting him in Leiden in the 1720's, noted that "'s Gravesande was an industrious, skilful, but somewhat ineloquent mathematician" [12, p.37].

's Gravesande's predilection for head-on problem solving becomes more marked

when we compare him to Nicolaus Bernoulli, with whom he had a brief correspondence about the statistical problem. Initially, Bernoulli disagreed with 's Gravesande on the main conclusion. This disagreement was mostly based on Bernoulli misreading Arbuthnot's original paper, and probably of 's Gravesande's paper as well, possibly because Bernoulli had troubles with reading English and Dutch. Bernoulli believed that Arbuthnot had claimed that it was unlikely that the births would stay close to the middle term in 82 years in a row, whereas Arbuthnot had actually claimed it was unlikely that the middle term itself would pop up in any of the 82 years. In any case, this misunderstanding led Bernoulli to develop a much more general and systematic approach to the kind of statistical problem in question. Bernoulli first of all found a way to approximate the summation over the individual coefficients, thus circumventing the need for 's Gravesande's brute-force calculations. Secondly, he decoupled the notion of 'chance' from the value of $\frac{1}{2}$, and instead found that a probability of $\frac{18}{35}$ for a male birth would account for the data, including the observed variation,

quite well. While Bernoulli's approach was, as 's Gravesande pointed out, besides the question with respect to the theological argument at stake, Bernoulli was able to arrive at results that were mathematically more interesting exactly because he moved away from the initial problem.⁵

's Gravesande lived through some defining developments in the history of mathematics. He corresponded amicably with scholars of all ranks and sides, seemingly preferring Leibniz's method of infinitesimals over Newton's fluxions, notwithstanding his adoration for Newton. While being in the thick of it, 's Gravesande didn't quite fit the bill of the typical mathematician, perhaps due to the fact that he was largely self-trained. His quirkiness, however, makes him all the more interesting as an entry point in the world of early eighteenth-century mathematics. People like 's Gravesande, bringing up particular problems and dealing with them in idiosyncratic ways, created interesting opportunities for the better mathematicians to improve on their treatments. Thus, the former were catalysts to the development of mathematics itself. ☞

Notes

- 1 William Burnet to Johann Bernoulli, 8 July 1710. Available online via <http://www.ub.unibas.ch/bernoulli/index.php/Hauptseite>.
- 2 G.J. 's Gravesande, *Lettre sur l'Utilité des Mathématiques*, in [1, Vol. 1, pp. 313–317].
- 3 Both of the examples I will discuss come from the beginning of 's Gravesande's career. This is a consequence of the fact that

- he published very little on mathematics proper during his later life. Later mathematical works of some significance are the two appendices added to [8], and annotated editions of some works by Newton and Huygens prepared by him.
- 4 On both Arbuthnot's and 's Gravesande's calculations, see [16] and [11, pp. 275–280]. I follow the only published version of 's Gra-

vesande's paper, 'Démonstration mathématique du soin que Dieu prend de diriger ce qui se passe dans ce monde, tirée du nombre des garçons & des filles qui naissent journellement', in [1, Vol. 2, pp. 221–248].

- 5 For Bernoulli's approach see [11, pp. 280–282], for the correspondence see [2, Vol. 2, pp. 237–247].

References

- 1 J.N.S. Allamand, *Oeuvres Philosophiques et Mathématiques de Mr. G.J. 's Gravesande*, 2 vols., Rey, Amsterdam, 1774.
- 2 Kirsti Andersen, *The Geometry of an Art: The History of the Mathematical Theory of Perspective from Alberti to Monge*, Springer, 2007, pp. 328–360.
- 3 Jip van Besouw, The impeccable credentials of an untrained philosopher: Willem Jacob 's Gravesande's career before his Leiden professorship, 1688–1717, *Notes and Records: The Royal Society Journal of the History of Science* 70 (2016), 231–249.
- 4 Jip van Besouw, 's Gravesande on the application of mathematics in physics and philosophy, *Noctua: Rivista internazionale di storia della filosofia* 4 (2017), 17–55.
- 5 Gerrit van Dijk, *Leidse hoogleraren Wiskunde 1575–1975*, Universiteit Leiden, 2011.
- 6 G.J. 's Gravesande, *Essai de Perspective*, Troyel, La Haye, 1711.
- 7 G.J. 's Gravesande, *Oratio Inauguralis, de matheseos, in omnibus scientiis, praecipue in physicis, usu, nec non de astronomiae perfectione ex physica haurienda*, Luchtmans, Lugduni Batavorum, 1717.
- 8 G.J. 's Gravesande, *Matheseos universalis elementa*, Luchtmans, Lugduni Batavorum, 1727.
- 9 G.J. 's Gravesande, *Oratio de vera, & nunquam vituperata Philosophia*, Luchtmans, Leiden, 1734.
- 10 G.J. 's Gravesande, *Physices elementa mathematica, experimentis confirmata. Sive introductio ad philosophiam Newtonianam*, third edition, 3 vols. Leidae, Langerak & Verbeek, 1742.
- 11 A. Hald, *A History of Probability and Statistics and Their Applications before 1750*, Wiley, 1990.
- 12 Ludwig Hirzel, *Albrecht Hallers Tagebücher seiner Reisen nach Deutschland, Holland und England 1723–1727*, Hirzel, Leipzig, 1883.
- 13 Henry Martyn Mulder, Pure, mixed and applied mathematics: the changing perception of mathematics through history, *Nieuw Archief voor Wiskunde* 4/8 (1990), 27–41.
- 14 Guicciardini Niccolò, *Reading the Principia: The Debate on Newton's Mathematical Methods for Natural Philosophy from 1687 to 1736*, Cambridge University Press, 1999.
- 15 Willem Otterspeer, *Groepsportret met Dame II. De vestiging van de macht: De Leidse universiteit, 1673–1775*, Bert Bakker, 2002.
- 16 Eddie Shoemith, The continental controversy over Arbuthnot's argument for divine providence, *Historia Mathematica* 14 (1987), 133–146.
- 17 P.J. van Winter, *Hoger beroepsonderwijs avant-la-lettre: Bemoeiingen met de vorming van landmeters en ingenieurs bij de Nederlandse universiteiten in de 17e en 18e eeuw*, Noord-Hollandse Uitgevers Maatschappij, Amsterdam, 1988.

Wieb Bosma

IMAPP

Radboud Universiteit Nijmegen

bosma@math.ru.nl

Stoffelijke resten tastbare herinneringen aan wiskundigen

Italiaanse Iconen

Turijn eert Lagrange (1736–1813), misschien wel de grootste Italiaanse wiskundige ooit, met een groot beeld, een plein en een straat. Hij is hier geboren, als Giuseppe Lodovico (Luigi) Lagrangia maar vertrok in 1764 naar Parijs, werkte van 1766 tot 1787 in Berlijn en keerde terug naar Frankrijk. Zijn vader was Frans, zijn naam prijkt met die van 71 andere 'Franse' wetenschappers op de Eiffeltoren, en hij werd na zijn dood bijgezet in het Pantheon, als Joseph-Louis Lagrange.



Het mathematisch instituut van de universiteit van Turijn is vernoemd naar Giuseppe Peano (1858–1932), die er studeerde, doceerde en er later, tot zijn dood, hoogleraar was. Onder: kunst in het Museo Nazionale del Cinema.



In **Milaan** vinden we niet ver van de Dom een standbeeld van Federico Borromeo (1564–1631), Jezuïet en kardinaal, en zeker geen wiskundige. Het staat pal voor de door hem in 1609 opgerichte Bibliotheca Ambrosiana, een van de eerste openbare bibliotheken. Zijn familiewapen bevat een interessant topologisch object, de Borromeaanse ringen: drie met elkaar verknootte ringen, waarvan geen tweetal verknoot is. Optisch bedrog doet ten onrechte geloven dat dit met vlakke ringen te realiseren valt.



Elders in de stad staat een groot standbeeld van 'homo universalis' Leonardo da Vinci. In de universiteit vinden we een buste van Federigo Enriques (1871–1946), van de classificatie van algebraïsche oppervlakken, en een hele bibliotheek vernoemd naar Giovanni Ricci (1904–1973), student van Bianchi en promotor van Bombieri, die hier lang hoogleraar analyse (en analytische getaltheorie) was. Ricci-stromen en Ricci-calculus zijn niet naar hem vernoemd (maar naar Gregorio Ricci-Curbastro, 1853–1925).



In **Trento**, in het uiterste noorden, is een groot park aangelegd rondom een enorm standbeeld van Dante uit 1896, opgericht om de Italiaanse wortels van deze Tiroolse stad te benadrukken. Onder het grote aantal beelden in het park is dat van Eusebio Francesco Chini (Kino in het Spaans en Engels, Kühn was de familienaam) voor ons interessant. Chini (1645–1711) was hier in de buurt geboren, maar werd als missionaris uitgezonden naar de Spaanse wingewesten, in wat tegenwoordig het noorden van Mexico en het zuiden van de Verenigde Staten is. Zoals de sokkel van dit monument vermeldt, toonde een expeditie onder zijn leiding aan dat de landtong voor de westkust (Baja Californië) een schiereiland was, en geen eiland. Chini maakte goede kaarten en deed astronomische waarnemingen, aan de destijds uitvoerig bestudeerde Venusovergang en aan kometen. Daarin paste hij zijn wiskundige kennis uitgebreid toe, en zijn boek over dit onderwerp (in het Spaans) wordt tegenwoordig wel als een van de allereerste in Amerika gepubliceerde wiskundeboeken aangemerkt.



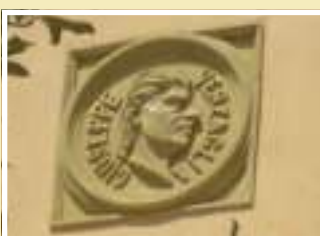
Twee hoogtepunten voor de wiskundeliefhebber in **Padua**: het eerste is Helena Lucrezia Cornelia Piscopia (1646–1686), ook wel Helena Cornaro. Wonderkind, veeltalig, en hoogopgeleid in onderwerpen als wiskunde, filosofie, natuurkunde, theologie en taalkunde, kon ze als vrouw geen graad in de theologie krijgen, maar wel als een van de eerste vrouwen ter wereld een universitaire graad: ze staat bekend als de eerste vrouw met een 'Ph.D.' (in 1678). Ze is begraven in Padua, en in het Bo-paleis vinden we een monument ter harer ere. De andere bezienswaardigheid is het Prato della Valle, een ovaal park omringd door water met op de oever 88 marmeren standbeelden (vijf beelden van Venetiaanse doges werden door Napoleon vernield en nooit hersteld). Onder de afgebeelden: Petro Aponensi ('PHILOSOPHO . MEDICO . MATHEMATICO'), Joan de Dondis ab Horologio ('PHILOSOPHO ET MATHEMATICO', klokkenmaker) en Galileo.



Faenza eert wis- en natuurkundige Evangelista Torricelli (1608–1647), die er geboren werd, met een majestueus monument dat zijn werk met kwikbuisen duidelijk toont. Hij experimenteerde ermee om vacuüm te maken, en ontwikkelde er zijn barometer mee. Hij studeerde onder, en werd later ook assistent van, Galileo, maar toen deze met de Inquisitie in aanraking kwam vanwege Copernicaanse neigingen, leek het Torricelli beter zich op wiskunde te concentreren. Hij werkte aan de calculus, en in de meetkunde. Het punt van Torricelli (ook wel naar Fermat genoemd) is een punt binnen een driehoek (met geen hoek groter dan 120 graden) waarvan de som van de afstanden tot de hoekpunten minimaal is.



In **Cesena** ontdekten we Giuseppe Verzaglia (1669–1730), als een van zes belangrijke lokale helden, vereeuwigd in een stenen embleem aan een (voormalig) schoolgebouw. Het is niet zo eenvoudig om meer over hem te vinden dan wat het straatnaambordje vermeldt. Het meest is te vinden in een artikel van Nagel over de briefwisseling van Verzaglia met Johann Bernoulli, het erop volgende bezoek aan hem in Zwitserland in 1709 en de ruzie die vervolgens ontstond. Deze had te maken met prioriteitsaanspraken van Bernoulli op werk van Verzaglia dat de superioriteit van Leibniz' calculus tegenover de infinitesimaalrekening van Newton moest aantonen. Sommigen straatnaambordjes onttrekken personen aan de anders onvermijdelijke vergetelheid: ik heb nergens iets over Cavina gevonden.



In **Sansepolcro** staan twee standbeelden van belangrijke figuren voor de geschiedenis van de wiskunde op nog geen steenworp van elkaar. Ik kende Piero della Francesca (ca. 1410–1492) eigenlijk alleen als kunstenaar en wist vaag dat hij perspectief vernieuwend gebruikte. Maar in feite was hij ook wiskundige (voor zover je daarvan kon spreken in de vijftiende eeuw) en hij schreef drie belangwekkende werken; over perspectief, over praktische wiskunde voor de handelaar, en over de regelmatige veelvlakken. Maar veel bekender is hij tegenwoordig door wat rest van zijn kwetsbare fresco's en meesterlijke schilderijen (van bijbelse taferelen). Luca Pacioli (ca. 1447–1517) is bekend omdat hij een van de eersten was van wie wiskundeboeken gedrukt werden, hij introduceerde het systeem van de dubbele boekhouding, schreef in de landstaal in plaats van Latijn, publiceerde ook over puzzels en kaarttrucs, en in zijn boek over de 'Goddelijke verhouding' verzorgde Leonardo da Vinci illustraties van regelmatige veelvlakken. De constructie van de gulden snede is ook te zien op de sokkel van het standbeeld net als de enkele van de fameuze letterontwerpen uit hetzelfde boek. Sommige moderne auteurs beschuldigen Pacioli ervan (in navolging van diens roddelende tijdgenoot Vasari) dat hij grote delen van zijn grootste werk 'Summa' en het werk over veelvlakken van Piero heeft overgeschreven.



De Grote Fontein in het centrum van **Perugia** dateert uit 1280, werd opgericht als feestelijk sluitstuk van een 5 kilometer lang aquaduct naar de stad, en staat symbool voor de vrije stad. Het onderste bassin vormt een 24-hoek met daarop afbeeldingen van de zeven vrije kunsten (waaronder Astronomia en Geometria), mythologische figuren en bijbelse taferelen. Het bovenste bassin is een regelmatige 12-hoek, omzoomd door heiligenbeelden. Aan gene zijde van de kerk naast de Grote Fontein ligt het Danti-plein. De Danti's vormden een invloedrijke familie, waarvan Ignazio Danti (1536–1586) een van de meest vooraanstaanden was; geboren in Perugia, als zoon van een architect/goudsmid/schilder, veranderde hij zijn voornamen Pellegrino Rainaldi toen hij intrad in de orde der Dominicanen. Hij legde zich daarna toe op wiskunde, astronomie en geografie. Hij vertaalde Euclides (waaraan zijn tante (!) Teodora ook al beschouwingen had gewijd), en schreef een standaardwerk over astrolaben. Zijn broer Vincenzo werd een beroemd beeldhouwer, maar zijn eigen faam (en de reden dat ik denk dat het plein naar hem genoemd zou kunnen zijn) berust toch op het feit dat hij, na hoogleraar wiskunde in Bologna en adviseur van de paus geweest te zijn, bisschop van Alatri werd.



Marta Maggioni

*Mathematisch Instituut
Universiteit Leiden
m.maggioni@math.leidenuniv.nl*

Matteo Sfragara

*Mathematisch Instituut
Universiteit Leiden
m.sfragara@math.leidenuniv.nl*

Education

A glimpse into the Pre-University College

In April 2019 the two high school students Aryan Rezaei Ghavamabadi and Tobias Lewerissa received the best research prize of the Pre-University Program. In this article their supervisors Marta Maggioni and Matteo Sfragara give a general overview on the Pre-University Program in the Netherlands and emphasize the collaboration between Leiden University and various high-schools. The last part of the article presents the research that led to the prize and it is written together with the two students.

The Pre-University Program started almost fifteen years ago as an initiative of Leiden University and Utrecht University, aiming to offer the opportunity to high school students to follow an academic program focused on science and technology. The program is intended for secondary education students from vwo 5 and 6 and nowadays more universities participate. Although the content and the structure of the curriculum vary between universities, they all stimulate participants to engage into a research project.

The main leading figures of the Pre-University Program are Ayla Murad (project leader mbo-hbo network in Utrecht), Annebeth Simonsz (education coordinator and study advisor at Leiden University), Sanne Tromp (Junior College Utrecht director) and Ton van der Valk (former curriculum coordinator Junior College Utrecht).

Leiden University is part of the Pre-University Program, and it has been offering the so-called Pre-University College (PRE-College) since 2004, see [1]. The aim of this two-year educational program is mainly to help students who are interested

in science to get acquainted with scientific reasoning and research. Every year ninety-five students are chosen from regional schools through a selection process where their grades averages, motivation and test results are taken into account.

The program consists of five different blocks (three in the first year and two in the second one), with lectures, tutorials, excursions and assignments. The first block consists of lectures on scientific knowledge, aiming to gain insight into the method(s) with which research is conducted and knowledge is built up in various scientific disciplines. In the second block students follow lectures from a wide range of areas and get acquainted with scientific research. During the third block students focus on the relationship between science and society. In this period the students also state their preference with regard to a research partner and a faculty field in which they would like to conduct a research project. In the fourth block students carry out their research in pairs under the guidance of university lecturers and they follow supporting meetings with all PRE-College

members. The last block concentrates on the value of research outside academia.

The students

In 2018, Aryan Rezaei Ghavamabadi (Alkwin College Uithoorn) and Tobias Lewerissa (Stanislas College Delft) were two out of the four students to have chosen mathematics as the subject for their final research. They have worked for six months, with regular meetings at the Mathematical Institute of Leiden, under the supervision of Marta Maggioni and Matteo Sfragara, both PhD candidates in Mathematics at Leiden University.

“Something that fascinates me about mathematics is that it is the foundation of so many sciences, such as physics. Mathematics has taught me a lot about the universe, from quantum physics to cosmology and everything in between. With mathematics we can answer questions that might come up in everyday life”, says Aryan.

“High school mathematics can be quite monotonous and tedious. Exercises usually require knowledge of a concept that has just been introduced. On the other hand, when you do research, there is no theory of any kind to fall back. You need to be creative and come up with a strategy on your own. The most groundbreaking ideas always seem to come when they are least expected: under the shower, at the train station or during dinner. These breakthroughs,



The students receiving the Jan Kijne-onderzoeksprijs. From left to right: Marta, Aryan, Tobias and Matteo.

these intense moments of satisfaction, make it all worthwhile”, admits Tobias.

Aryan and Tobias chose probability theory and Markov chains as their research topic, and wrote an original research paper on ‘The knight errant problem’, part of which is presented in the next sections. Every year, at the end of the PRE-College program, a ceremony is held in Leiden, where all the students and their families are invited. It begins with some introductory speeches by the PRE-College organizers, giving an overall view of the program, and it ends with all the students receiving their PRE-College diploma. In between, the best research paper is awarded by a jury with the so-called *Jan Kijne-onderzoeksprijs*, see [2]. In April 2019, Aryan and Tobias won this prize (see the picture above), together with another pair of students (Naïm Achahboun and Florian Velten with a project in astronomy).

The knight errant and Markov chains

A knight walks randomly on a canonical empty chessboard. How many steps does it need to return to its original position?

The ramble of the knight can be modeled by a random walk. In a nutshell, a random walk describes a path obtained from successive random steps on some space. If each step only depends on the current position, i.e. it does not depend on the entire walk, the random walk is a Markov chain. The problem asks for the average amount of time needed to the knight to

return to its initial position in the canonical chessboard. Recall that the move of a knight is given by one step in one direction followed by two steps in a direction that is perpendicular to the first, see Figure 1. When several steps are made, the random walk of the knight can be studied as a Markov chain $(X_n)_{n \in \mathbb{Z}_{\geq 0}}$, where X_n denotes the position of the knight after n steps on a graph of 64 nodes, which is the state space. Each of these nodes represents a square of the chessboard and there is an edge between two nodes if the corresponding squares are neighbors. See [3] for a general overview of the problem.

Below we show how the problem can be solved in two or even higher dimensions. We start by recalling some basic definitions and results about Markov chains.

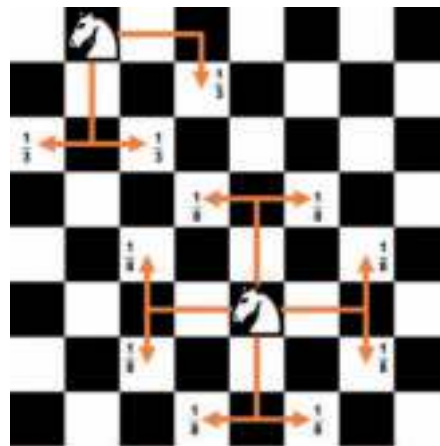


Figure 1 Some possible moves of the knight, depending on its position.

Definition 1 (Markov chain).

- A Markov chain on a set S is a stochastic process satisfying the Markov property, i.e., such that

$$\begin{aligned} \mathbb{P}(X_n = i_n \mid X_{n-1} = i_{n-1}, \dots, X_0 = i_0) \\ = \mathbb{P}(X_n = i_n \mid X_{n-1} = i_{n-1}), \end{aligned}$$

for any $i_n, \dots, i_0 \in S$ and $n \in \mathbb{Z}_{>0}$.

- A stationary distribution π of a Markov chain is a probability distribution that remains unchanged as time progresses, i.e., such that

$$\pi = \pi P,$$

where P denotes the transition matrix of the chain.

- The return time of state i given $X_0 = i$ is

$$T_i = \min\{n \geq 1: X_n = i \mid X_0 = i\}.$$

The stationary distribution gives us information about the stability of the Markov chain and it describes its limiting behavior. Hence, the average return time for the knight is easily obtained by computing the stationary distribution of its Markov chain (it is known that the stationary distribution is unique under certain conditions which are satisfied in our case), and we get that for each state i ,

$$E(T_i) = \frac{1}{\pi_i}.$$

Indeed, let the degree of a node be the number of possible moves of the knight from the square corresponding to that node. Then, the sum of the degrees of all the nodes divided by the degree of a node i gives the average return times of i . In a canonical chessboard, it is pretty easy to compute both these ingredients: the sum of all the degrees, and the degree of a node. Look at Figure 1: the knight in b8 has three possible moves, hence the degree of the node b8 is 3; similarly eight choices are possible for the knight in e3, whence the degree of e3 is 8; and so on for each of the 64 nodes (and, in a similar fashion, both quantities can also be analysed for other pieces: the rook, the bishop, the king or the queen).

However, if the canonical chessboard is replaced with a less common one, given by a cube in $\mathbb{R}^d$, the situation becomes quite complex. Not only you can not picture anymore the moves of the knight in $\mathbb{R}^d$, for $d > 3$, but also the degrees of the node increase, since the higher the dimension the more available moves the knight has.

The knight errant in d -dimension

Let $B_{d,r}$ be a cube of side r in $\mathbb{R}^d$.

Theorem 1 (Average return time). *The average return time of a knight in $B_{d,r}$ starting from a node i is given by*

$$\mathbb{E}(T_i) = \frac{4d(d-1)(r-1)(r-2)r^{d-2}}{4d^2 - (4p+2q+4)d + (p+q)(p+2) + p},$$

where p is the number of borders with distance 1 to i and q is the number of borders with distance 2 to i .

Proof. The proof consists of two results which combined together give the average return time.

1. An allowed move for a knight consists of one step in a direction (which we call primary) followed by two steps in another direction perpendicular to the first (which we call secondary). The product between the number of possible choices for the primary direction and the secondary direction determines the number of allowed moves. Note that while the secondary direction always needs to be different from the primary, both directions present further constraints due to the distance to the border. More precisely, at every step the knight has to be in the state space, i.e. he should not leave $B_{d,r}$. These constraints depend on the initial position, and are described by the parameters p and q . These considerations lead to:

$$\deg(i) = 4d^2 - (4p+2q+4)d + (p+q)(p+2) + p.$$

2. Consider, e.g., $B_{3,4}$ and suppose a knight starts in one of the corners of the cube, with coordinates $(4,1,4)$. It is as if the knight is present in three distinct 2-dimensional boards of side 4 at the same time, all of which are facing a different direction. The knight has two possible moves in every board and these transitions that lie within the 2-dimensional boards are the only possible transitions in $B_{3,4}$ (see Figure 3). The knight can never leave all three boards in a single L-shaped step, since it only travels along two axes when it makes its jump. The moves of a knight in $B_{3,4}$ can be seen as the sum of its moves in three distinct

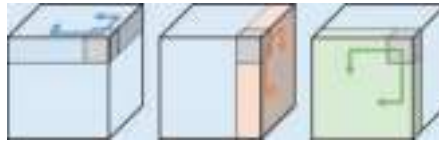


Figure 3 Moves of a knight in $B_{3,4}$.

2-dimensional boards, all of which are facing a different direction. Hence, the degree of a particular node in $B_{3,4}$ can be seen as the sum of the degrees of the same node in all 2-dimensional boards. The total degree $N_{3,4}$ of $B_{3,4}$ is obtained by summing over the total degrees of twelve 2-dimensional boards.

The total degree $N_{d,r}$ can thus be calculated by multiplying the total degree $N_{2,r}$ by the number of directions a 2-dimensional board can face in, say k , and by the number of times each board is counted, say l . A 2-dimensional board has two axes and by simply drawing two out of d axes, one of the directions of a 2-dimensional board can be obtained. Hence, k is equal to the number of ways of drawing an unordered pair out of a set of d axes, which gives

$$k = \binom{d}{2} = \frac{1}{2}d(d-1).$$

To find l , one can divide the number of nodes in $B_{d,r}$ by the number of nodes in $B_{2,r}$, which gives

$$l = \frac{r^d}{r^2} = r^{d-2}.$$

We then obtain

$$N_{d,r} = \frac{1}{2}d(d-1)r^{d-2}N_{2,r}.$$

To find $N_{2,r}$ we distinguish nodes based on their distance to both borders and we compute the degree and count the number of each type of node in $B_{2,r}$. By multiplying the degrees by the respective counts and by summing over these values, we get

$$N_{2,r} = 8(r-1)(r-2).$$

The sum of the degrees of all nodes in $B_{d,r}$ is then given by

$$N_{d,r} = 4d(d-1)(r-1)(r-2)r^{d-2}. \quad \square$$

In Table 1 we present the results of a computer simulation obtained by a program in Python. The program evaluates the return times by having a knight perform a trial run. A knight starts on one of the corners of $B_{d,r}$ and the program keeps count of its jumps until it returns to the initial position. The program runs several times and the average of all the outcomes evaluates the average return time. For different values of d and r the outcomes have also been compared with the theoretical result of Theorem 1.

Conclusions

The scientific journey and the research project the authors went through has been very stimulating and satisfying. Moreover, Aryan and Tobias enjoyed so much the PRE-College and their first real jump into the mathematics ocean, that they will continue studying mathematics at Leiden University.

d	r	1	2	3	4	5	Av. value	Th. value
2	5	51.74	38.96	43.78	52.30	54.56	48	48
2	6	72.14	80.26	81.86	83.12	78.70	79	80
2	7	119.92	102.06	112.80	127.20	103.38	113	120
2	8	171.34	174.68	170.88	161.58	146.12	165	168
3	5	240.10	261.10	249.76	235.44	206.18	238	240
3	6	525.72	476.12	423.96	440.60	508.28	474	480
3	7	865.00	795.32	722.44	1051.80	818.36	850	840
3	8	1172.42	1319.64	1419.88	1430.32	1725.06	1413	1344

Table 1 Outcomes of the program performing 5 sessions of 100 trial runs, with average compared with theoretical result.

References

- 1 Pre-University College website: <https://www.universiteitleiden.nl/pre-college>.
- 2 Jan Kijne-onderzoeksprjs article: <https://www.universiteitleiden.nl/pre-college/nieuws/twee-duos-winnen-jan-kijne-onderzoeksprjs>.
- 3 Can a Chess Piece Explain Markov Chains?, Youtube, <https://youtu.be/63HHmj1h794>.

Casper Albers

Psychometrie & Statistiek
Rijksuniversiteit Groningen
c.j.albers@rug.nl

Column Casper grijpt een kans

π schatten met behulp van kansrekening

Er zijn weinig getallen zo veel bestudeerd als π . Er zijn veel manieren om π te benaderen, gebaseerd op algebraïsche argumenten. Casper laat zien dat er ook methoden zijn om π door middel van kansrekening te bepalen. Het bestuderen van een getal dat compleet vast ligt door middel van een proces dat uitgaat van onzekerheden, leidt tot interessante analyses.

Er bestaan vele manieren om het getal π te benaderen. In hun boek *π unleashed* geven de Duitse wiskundigen Jörg Arndt en Christoph Hänel [1] ruim tweehonderd pagina's van verschillende afleidingen voor dit getal.

Een bekend voorbeeld is de methode van Gregory en Leibniz:

$$\pi = 4 \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^{k+1}}{2k-1},$$

oftewel $\frac{\pi}{4} = \frac{1}{1} - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \frac{1}{7} + \frac{1}{9} - \dots$. Deze reeks alterneert om de waarde $\frac{\pi}{4}$ heen waarbij de afstand tussen de reeks en $\frac{\pi}{4}$ per stap kleiner wordt. Een andere reeks bestaande uit de breuken van opeenvolgende natuurlijke getallen, is die van Leonhard Euler:

$$\pi^2 = 6 \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^2}.$$

Deze reeksen worden door wiskundigen gewaardeerd omdat ze zo eenvoudig zijn: door eenvoudige breuken gebaseerd op opeenvolgende (oneven) natuurlijke getallen op te tellen, wordt π verkregen.

De Indiase wiskundige Srinivasa Ramanujan heeft tientallen verschillende formules voor π gegeven, waaronder

$$\pi^{-1} = \frac{2\sqrt{2}}{9801} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(4k)!(1103 + 26390k)}{(k!)^4 396^{4k}}.$$

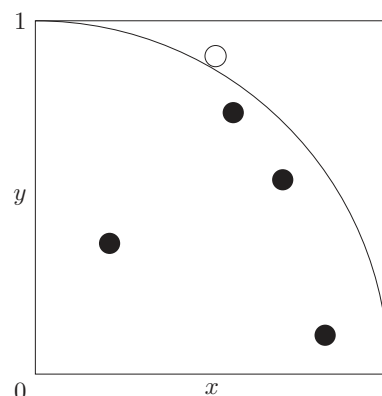
Deze formule wordt juist mooi gevonden niet vanwege haar eenvoud maar vanwege haar complexiteit. Er zit behoorlijk ingewikkelde wiskunde achter deze afleiding. Bij al dit soort reeksen krijg je een benadering van π door een bepaalde, eindige, keuze voor k te maken en de som uit te rekenen. Het is deterministisch vastgelegd wat eruit komt en hoe de convergentie verloopt als $k \rightarrow \infty$.

Er zijn echter ook methoden om π te benaderen die van het toeval afhangen. Een elementaire aanpak is als volgt. Trek getallen

$x_i, y_i, i = 1, \dots, n$ uit de uniforme verdeling op $[0, 1]$ (de uniforme verdeling houdt in dat elk getal tussen 0 en 1 even waarschijnlijk is om gekozen te worden). Coördinaat (x_i, y_i) is dus op een willekeurige locatie in het eenheidsvierkant. Bereken vervolgens welke proportie van deze coördinaten binnen de eenheidscirkel valt, oftewel $x_i^2 + y_i^2 \leq 1$. Deze cirkel heeft straal $r = 1$ en dus oppervlakte $\pi r^2 = \pi$ en een kwart hiervan valt binnen het vierkant (zie Figuur 1). Je kan dus n van zulke coördinaten trekken, en de proportie $\hat{p}$ binnen de cirkel berekenen. Het aantal successen heeft een binomiale verdeling met parameters n en $p = \frac{\pi}{4}$. Dit impliceert voor $4\hat{p}$ een verwachtingswaarde π en standaardfout $\pi(4 - \pi)/n$. Stel, je doet dit duizend keer en vindt 785 punten binnen de cirkel. De puntschatting voor π is dan $\hat{\pi} = 4 \times \frac{785}{1000} = 3,140$, en het 95% betrouwbaarheidsinterval wordt gegeven door

$$\hat{\pi} \pm 1,96 \sqrt{\frac{\hat{\pi}(1 - \hat{\pi})}{1000}} \rightarrow (3,04; 3,24).$$

De methode werkt, in de zin dat π inderdaad 95% van de keren omvat wordt door het interval, maar het schiet natuurlijk niet erg op. Om het interval een factor 10 smaller te krijgen, zou je een factor 100 meer metingen moeten doen. Dan is het uitwerken van de Gregory–Leibniz-formule voor bijvoorbeeld de eerste 100 termen een stuk minder werk. Toch is het mooi om te zien hoe iets als π ,



Figuur 1 Eenvoudige manier om via toeval π te schatten. Vijf willekeurige coördinaten zijn getrokken, waarvan vier binnen de cirkel. Dit leidt tot een schatting $\hat{\pi} = 4 \times \frac{4}{5} = 3,2$.

wat tot oneindig veel decimalen vast staat, benaderd kan worden met een proces dat door het toeval gedreven wordt.

Een interessantere manier om met behulp van kansrekening π te benaderen, is te ontleen aan de achttiende-eeuwse Franse graaf van Buffon, die het volgende gedachte-experiment opstelde [2]. (NB: de vraag kwam niet voort uit de wens om π probabilistisch te benaderen, maar dit is er dus wel mee mogelijk.) Zijn experiment kwam op het volgende neer:

Stel we hebben een houten vloer gemaakt van een aantal planken. Elke plank heeft breedte t en alle planken zijn keurig parallel aan elkaar gelegd. Op willekeurige plek op deze vloer, en in willekeurige richting, laten we een naald, stokje of luciferhoutje, van lengte l vallen. Wat is de kans dat deze op twee planken tegelijk ligt?

Als we aannemen dat $l < t$, dan is de oplossing als volgt. Noem de afstand van het midden van de naald tot de dichtstbijzijnde lijn tussen twee planken x , en noem de hoek die de naald maakt met de lijn naar die plank θ , zoals te zien in Figuur 2. Omdat alles compleet willekeurig is, is de waarde van x uniform verdeeld op $(0, \frac{t}{2})$ en de waarde van θ uniform op $(0, \frac{\pi}{2})$ (we kunnen er voor kiezen om de kleinste hoek tussen de stippellijn en doorgetrokken lijn in Figuur 2 θ te noemen). Omdat x en θ niet van elkaar afhangen, is de gezamenlijke dichtheid daarmee

$$f(x, \theta) = \begin{cases} \frac{4}{\pi t}, & 0 \leq x \leq \frac{t}{2}, 0 \leq \theta \leq \frac{\pi}{2}, \\ 0, & \text{anders.} \end{cases}$$

De naald gaat de lijn over als $\cos \theta \times \frac{l}{2} > x$. De kans hierop wordt gevonden door het uitwerken van de dubbele integraal

$$P(\text{naald gaat over lijn}) = \int_{\theta=0}^{\pi/2} \int_{x=0}^{(l/2)\cos\theta} \frac{4}{\pi t} dx d\theta.$$

De integrand $\frac{4}{\pi t}$ hangt niet van x en ook niet van θ af en zodoende is de integraal in twee stappen uit te werken:

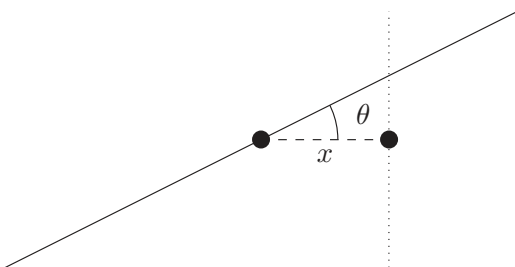
$$\int_{x=0}^{(l/2)\cos\theta} \frac{4}{\pi t} dx = \frac{4x}{\pi t} \Big|_0^{(l/2)\cos\theta} = \frac{2l}{\pi t} \cos\theta.$$

Vervolgens is de integraal uit te werken:

$$P = \int_{\theta=0}^{\pi/2} \frac{2l}{\pi t} \cos\theta d\theta = \frac{2l}{\pi t} \sin\theta \Big|_0^{\pi/2} = \frac{2l}{\pi t}.$$

Stel we gooien n naalden, waarvan er m over een lijn gaan, dan kunnen we dus π schatten via

$$\hat{\pi} = \frac{2ln}{tm}.$$



Figuur 2 Visualisatie van Buffons idee. Het gestippelde verticale lijnstuk is de scheiding tussen twee planken, het doorgetrokken diagonale lijnstuk is de naald.



Figuur 3 Uitvoering van het experiment.

Analoog aan de methode van Figuur 1 kan een betrouwbaarheidsinterval worden opgesteld om de nauwkeurigheid van de schatting aan te geven.

In Figuur 3 zien we een poging van mij om π te schatten. Op een stuk papier heb ik lijnen op afstand $t = 66$ mm geprint, vervolgens heb ik een aantal cocktailprikkers van lengte $l = 62$ mm op het papier laten vallen. Een paar prikkers vielen buiten het A4'tje, maar $n = 14$ vielen er binnen, hiervan kruisten $m = 7$ een lijn. Mijn schatting van π is daarmee

$$\hat{\pi} = \frac{2 \cdot 6,2 \cdot 14}{6,6 \cdot 7} = 3,76.$$

Dit klinkt behoorlijk te hoog, maar het zit met 7 kruisingen maar 1 kruising boven de 'beste' schatter: bij $m = 6$ zouden we $\hat{\pi} = 3,29$ hebben, bij $m < 6$ zou $\hat{\pi} < 3$ zijn. Met slechts 14 worpen, en deze waarden van l en t , is het simpelweg onmogelijk om een schatting $3,1 < \hat{\pi} < 3,2$ te krijgen. Het is een wat omslachtige manier om aan een schatting voor π te komen, je moet aardig wat naalden of tandenstokers gooien voordat je nauwkeuriger bent dan $\frac{22}{7}$, maar het is wel een keer wat anders.

Er zitten echter nog wel wat haken en ogen aan het uitvoeren van dit gedachte-experiment. Het is nagenoeg onmogelijk om de prikkers zó te gooien dat ze inderdaad uniform verdeeld zijn, zowel qua de valrichting (een hoek tussen 0 en 2π) als de locatie van het middenpunt van de prikkers (een willekeurig punt op het papier). Ik heb het meermalen geprobeerd. Maar de stokjes vallen over elkaar heen of zijn in groepjes geclusterd, als ze niet al gewoon met z'n allen van het papier afrollen. Daarnaast is het natuurlijk onmogelijk om zo π op veel decimalen nauwkeurig te schatten, aangezien het niet te doen is om de lengtes t en l met oneindige precisie te meten.

De graaf van Buffon had het over een gedachte-experiment. Wellicht had het dat moeten blijven, want ten uitvoer brengen in de praktijk levert onoverkomelijke problemen op. Ik onthoud gewoon dat $\pi \approx 3,1415$, en dat is voor nagenoeg alle keren dat ik π nodig heb nauwkeurig genoeg. $\diamond$

Referenties

- 1 J. Arndt en C. Hänel, *π unleashed*, Springer, 2000
- 2 G. Buffon, *Essai d'arithmétique morale. Histoire naturelle, générale et particulière*, Supplément 4 (1777), 46–123.

Henk W. Broer

*Bernoulli Instituut
Rijksuniversiteit Groningen
h.w.broer@rug.nl*

Henk S. V. de Snoo

*Bernoulli Instituut
Rijksuniversiteit Groningen
hsvdesnoo@gmail.com*

Geschiedenis

Wiskundigen in Groningen

Sinds enige jaren zijn Henk Broer en Henk de Snoo, in samenwerking met Jan van Maanen en enkele andere Groningers, bezig een website op te zetten die de geschiedenis van de wiskundigen in Groningen behandelt vanaf 1614, het stichtingsjaar van de Groninger universiteit. De website www.math.rug.nl/bernoulli/Geschiedenis is een project in wording en dit artikel beschrijft hiervan context en achtergrond. De lezer wordt van harte uitgenodigd commentaar te geven of extra informatie aan te leveren.

Sinds de stichting in 1614 van de universiteit van Groningen (hogeschool van Stad en Lande) zijn er hier wiskundigen geweest. De eerste docent in het vak wiskunde was Nicolaus Mulerius (hoogleraar tussen 1614 en 1630). Bijna een eeuw later

was Johann Bernoulli (1667–1748), hoogleraar tussen 1695 en 1705, degene die uiteindelijk het bekendst zou worden onder een breed publiek. In de zeventiende eeuw hebben Nederlanders veel bijgedragen aan de wiskunde; te denken valt aan namen als

Frans van Schooten (1615–1660), Johannes Hudde (1628–1704) en Christiaan Huygens (1629–1695). Echter, vanaf het begin van de achttiende eeuw heeft de wiskundige cultuur in Nederland lange tijd stilgestaan. De Groningse hoogleraar Floris de Boer zei het in 1896 zo: “Nadat Nederland geruime tijd aan de spits der wiskundige beschaving had gemarcheerd, verliet het plotseling de gelederen geheel, en nam gedurende langer dan een eeuw zelfs geen plaats in de achterhoede meer in.” Het zou tot het eind van de negentiende eeuw duren voor



Nicolaus Mulerius (1564–1630)



Johann Bernoulli (1667–1748)



Pieter Hendrik Schoute (1846–1913)



Academiegebouw 1614–1846

dat Groningen weer een bekende wiskundige in huis zou hebben in de persoon van Pieter Hendrik Schoute (hoogleraar tussen 1881 en 1913).

Het project

De website behandelt de geschiedenis van de wiskundigen in Groningen vanaf 1614. Daarbij moet men zich realiseren dat lange tijd wiskundigen ook andere vakken beoefenden zoals medicijnen of welsprekendheid en dat er tot rond 1850 geen onderscheid was tussen wis-, natuur- en sterrenkunde. Bovendien was een wiskundige in de achttiende en een groot gedeelte van de negentiende eeuw vaak in eerste instantie een geleerde en geen onderzoeker. Onze beschrijving laat zien dat de ups en downs van de wiskundebeoefening alhier, net als elders in Nederland, mede te maken hadden met de opvattingen van de overheid over het universitaire onderwijs. Overigens, die overheid was tot het begin van de negentiende eeuw nog een provinciale aangelegenheid en kreeg pas daarna een

nationaal karakter, na een aarzelend begin in de Bataafse Republiek (1795–1805).

Thorbecke

In de eerste helft van de negentiende eeuw zijn halfhartige pogingen gedaan om het universitaire onderwijs aan te passen aan de behoeften van de maatschappij. Pas na het midden van de negentiende eeuw met de onderwijswetten van Thorbecke kwam, met name met de invoering van de Hogere Burger School (hbs), een wezenlijke vernieuwing tot stand die immense gevolgen zou hebben. Dit betreft zowel de inrichting als de kwaliteit van het middelbaar onderwijs, en diens gevolge ook van het universitair onderwijs. Deze vernieuwing weerspiegelde zich ongetwijfeld in de toenemende kwaliteit van de universitaire wiskundigen, die vrijwel allen hun carrière begonnen als hbs-leraar. Dit begon al in 1877 met de benoeming van Jan Hendrik Rink en hetzelfde was het geval bij de latere benoemingen van Pieter Hendrik Schoute, Floris de Boer, Frederik

Schuh, Johan Antony Barrau en Julius Wolff. Zo ontstond er een vruchtbare wisselwerking tussen de universitaire wiskunde en het middelbaar wiskundeonderwijs, vooral ook omdat deze mensen leerboeken schreven, zowel voor leerlingen als leraren. De in Groningen gevestigde uitgeverij P. Noordhoff speelde hierbij een grote rol. Tot ver in de twintigste eeuw zouden hoogleeraren betrokken zijn als gecommiteerden bij de examens van hbs en gymnasium. Ondanks de vernieuwingen van Thorbecke heeft het nog zeer lang geduurd voordat het hoger onderwijs, zowel voor docenten als studenten, toegankelijk werd voor brede lagen van de bevolking. Pas aan het eind van de negentiende eeuw ziet men ook docenten en studenten aan de universiteit arriveren die niet meer tot de ‘gegoede burgerij’ behoorden. Bovendien werd het, ondanks Thorbeckes grootscheepse veranderingen, eerst in 1917 mogelijk om direct van de hbs naar de universiteit te gaan, dus zonder een aanvullend examen te hoeven afleggen.



Academiegebouw 1850–1906



Academiegebouw 1909–

Natuurwetenschappelijke cultuur

Zoals gezegd was er tot 1850 nog geen onderscheid tussen wis-, natuur- en sterrenkunde en er was nog maar weinig onderscheid tot het einde der negentiende eeuw. In feite bleef de nauwe band tussen deze drie disciplines tot in de jaren 1970 voortbestaan in het universitair onderwijs. Hierbij moet opgemerkt worden dat de mathematische fysica, die al in de negentiende eeuw als apart vak werd gedoceerd, reeds vroeg een plaats kreeg binnen de natuurkunde, denk aan Leonard Salomon Ornstein en Frits Zernike. Bovendien moet vermeld worden dat na de Tweede Wereldoorlog de toegepaste wiskunde erkenning heeft gekregen binnen de universiteit. Bijvoorbeeld, binnen de (technische) natuurwetenschappen ontstond een toenemende belangstelling voor stromingsleer en numerieke wiskunde. Maar ook vond er een transitie plaats van wiskundeonderzoek en -onderwijs naar de sociale en economische wetenschappen. Dit betrof in het bijzonder de statistiek, actuariële wiskunde en economisch georiënteerde vakken zoals operations research.

Een glimp achter de sluier

Naast de individuele levensbeschrijvingen wordt op de website aandacht besteed aan de neergang van de Universiteit van Franeker in de eerste helft van de negentiende eeuw en effecten hiervan op de wiskunde in Groningen. Ook besproken wordt de rol die het (Koninklijk) Natuurkundig Genootschap in de negentiende eeuw speelde met betrekking tot de wiskundigen. Dit genootschap is in 1801, onder invloed van het stimulerend onderwijs van de Groningse hoogleraar wis- en natuurkunde Jacob Baart de la Faille, opgericht door onder meer Theodorus van Swinderen. De wiskundigen Jan Willem Ermerins, Willem Adriaan Enschedé en Rudolf Adriaan Mees speelden hierin een rol. In het bijzonder wordt op de website aandacht besteed aan latere, bekende wiskundigen, zoals Johannes Gualtherus van der Corput, die tussen 1923 en 1946 in Groningen zou blijven, en die op nationaal niveau een bijzonder belangrijke rol heeft gespeeld. Een andere benoeming uit die tijd betreft Bartel Leendert van der Waerden, iemand van

grote internationale statuur, die slechts drie jaar in Groningen is geweest. Verder zullen de privaattoelichten Oene Bottema en Jan Popken de revue passeren.

Verantwoording

Onze geschiedenis van de Groninger wiskundigen levert doorkijkjes naar de toenmalige wereld, in het bijzonder naar de toenmalige opvattingen over wetenschap. Wij beogen hierbij niet een compleet overzicht te geven van leven en werken van iedere individuele wiskundige, zo dat al mogelijk zou zijn. Mede op grond van de aanwezige informatie kan ook geen uniforme behandeling worden nagestreefd. Bovendien past in onze ogen bij de één een wat zakelijker behandeling, daar waar bij de ander een petite histoire meer op zijn plaats lijkt. Wat het recentere verleden betreft kunnen we bogen op eigen contacten of op informatie van wat oudere zeggelingen. Ook blijken contacten met familieleden van toenmalige wiskundigen, soms tot achterkleinkinderen toe, bijzonder vruchtbaar en behulpzaam te zijn. ☼

Referenties

- 1 K. van Berkel, *Universiteit van het Noorden. Vier eeuwen academisch leven in Groningen. Deel 1: De oude universiteit 1614–1876; Deel 2: De klassieke universiteit 1876–1945*, Verloren, 2014; 2017.
- 2 W.B.S. Boeles, Levenschetsen der Groninger Hoogleraren, in: W.J.A. Jonckbloet, *Gedenkboek der Hoogeschool te Groningen ter gelegenheid van haar vijfde halve eeuwfeest*, Groningen, 1864.
- 3 W.B.S. Boeles, *Frieslands Hoogeschool 1; 2-1; 2-2*, Tresoor, Leeuwarden, 1878; 1879; 1889.
- 4 J.G. van der Corput, Overzicht Nederlandse wiskunde in eerste helft van de 20ste eeuw, in: dr. K.E. Proost en prof. dr. Jan Romein, *Geestelijk Nederland 1920–1940 Deel II, De Wetenschappen van Natuur, Mens en Maatschappij*, Kosmos, Amsterdam-Antwerpen, 1948.
- 5 D. van Dalen, L.E.J. Brouwer, 1881–1966, *een biografie: het heldere licht van de wiskunde*, Bert Bakker, 2001.
- 6 H.J.A. Duparc en J. Korevaar, Johannes Gualtherus van der Corput, *Nieuw Archief voor Wiskunde* 3/30 (1982), 1–39.
- 7 *Effigies et vitae professorum Academiae Groninganae & Omlandiae*, Groningen, 1654; herdruk 1968.
- 8 J. Guichelaar, G.B. Huitema, Verbinden en verspreiden. De kracht van het Koninklijk Natuurkundig Genootschap te Groningen, in: J. Guichelaar, G.B. Huitema, H. de Jong (red.), *Zekerheden in waarnemingen – Natuurwetenschappelijke ontwikkelingen in Nederland rond 1900*, Verloren, 2012.
- 9 J. Huizinga, Geschiedenis der Universiteit gedurende de derde eeuw van haar bestaan, in: *Academia Groningana MDCXIV–MCMXIV*, P. Noordhoff, 1914.
- 10 J. Israel, *The Dutch Republic. Its Rise, Greatness, and Fall 1477–1806*, Clarendon Press, 1998.
- 11 H. Kubbinga, *The Astronomical Instruments (1618) and Catalogus Librorum (1646) of Nicolaus Mulerius, with an Essay on his Place in the History of Science*, Groningen University Press, 2014.
- 12 J.A. van Maanen, *Een complexe grootheid: leven en werk van Johann Bernoulli 1667–1748*, Epsilon Uitgaven 34, 1995.
- 13 D. van Netten, *Nicolaus Mulerius (1564–1630): Een geleerde uit Groningen in de discussies van zijn tijd*, Barkhaus, 2010.
- 14 J.J. O'Connor en E.F. Robertson, *MacTutor History of Mathematics Archive*, University of St Andrews, UK.
- 15 D. Struik, *Het land van Stevin en Huygens*, Sunschift 134 (derde en verbeterde druk), Nijmegen, 1979.
- 16 E. Visser (ed.), *Universitas Groningana 1914–1964*, Wolters, 1964.

Henk W. Broer

Bernoulli Instituut
Rijksuniversiteit Groningen
h.w.broer@rug.nl

Geschiedenis

J. Ch. Boland: een Groningse wiskundige uit Amsterdam

Elders in dit nummer wordt het initiatief besproken voor een website met persoonsbeschrijvingen van Groningse wiskundigen vanaf 1614. Naast Henk Broer zijn hierbij ook Henk de Snoo, Jan van Maanen en enkele anderen betrokken. Voor details zie www.math.rug.nl/bernoulli/Geschiedenis. In dit artikel geeft Henk Broer enige achtergrond voor de levensbeschrijving van Johan Christoph Boland (Amsterdam 15 maart 1914 – Gorssel 9 januari 1984), lector propaedeutische wiskunde aan de Rijksuniversiteit Groningen tussen 1969 en 1979. Hij was een markante figuur, onder meer een adept van L. E. J. Brouwer en lid van de *Signifiëse Beweging*.

De vader van Johan Christoph (Jan) Boland was Cornelis Pieter Boland, koopman, geboren op 26-03-1872 te Dinxperlo, overleden op 26-10-1922 te Amsterdam. Deze huwde op 07-09-1906 te Amsterdam met Jacoba Paulina Sweers, geboren op 24-08-1874 te Amsterdam, overleden op 17-10-1954 te Haarlem. Uit dit huwelijk werden drie kinderen geboren:

Willem Arnold (geboren 02-04-1907 te Amsterdam en overleden 27-11-1971 te Champaign, VS). Deze zoon is ongehuwd gebleven.

Antje, onderwijzeres, geboren 30-09-1909 te Amsterdam en overleden 27-01-1984 in Nieuw-Zeeland. Zij gaat op ongeveer 21-jarige leeftijd naar Medan op Sumatra, huwt daar met Robert August Driessen, planter, geboren 02-03-1906, overleden 30-08-1982 in Nieuw-Zeeland. Dit huwelijk telt twee zoons en drie dochters: Engeline Maria (Enke), geboren 11-08-1932, Hans Robert, geboren 23-10-1933, Paul Robert, geboren 29-04-1936, Carla Maria, geboren 06-09-1941 en Regina Maria (Regien), geboren 13-10-1946. Al deze kinderen kwamen ter wereld op Sumatra. Het gezin Driessen

verblijft vanaf april 1958 in Nieuw Zeeland; de oudste dochter Enke Smits-Driessen had zich inmiddels in Nederland gevestigd.

Johan Christoph (Jan), geboren 15-03-1914 te Amsterdam en overleden 09-01-



Jan Boland

1984 te Gorssel, gecremeerd op 13-01-1984 te Groningen. Jan Boland is op 23-03-1970 getrouwd met Elise (Lieske) Bendien, geboren op 06-04-1915 te 's Gravenhage, overleden op 16-08-2001 te Lochem en begraven te Amsterdam. Lieske Bendien was eerder de vrouw van zijn vriend Willem Marius Kruseman (1902–1969); met wie zij twee dochters had: Johanna Maria (Ankie), geboren 10-10-1952 en Alida Heleen (Lily) Kruseman, geboren 09-01-1951.

Enke Boland

Van grote invloed op het leven van Jan Boland is geweest Engelina Maria (Enke) Boland (01-10-1881 tot 07-05-1960), de jongere zuster van zijn jong-overleden vader. Zij was lerares Duits in Amsterdam, eerst aan een hbs en later aan het Vossius Gymnasium. Na het overlijden van vader Cornelis Pieter in 1922 trok ze in bij het gezin Boland-Sweers, Van Breestraat 134. In 1923 behaalt ze het doctoraalexamen Germaanse taal- en letterkunde aan de Universiteit van Amsterdam, waar ze in 1930 ook promoveert. In 1939 neemt ze om gezondheidsredenen ontslag als docent Duits aan het Vossius. Willem Arnold verlaat het ouderlijk huis in 1925 en Antje in 1928, zij gaat bij familie in Dinxperlo wonen, alvorens te vertrekken naar Medan. Het overblijvende gezin, bestaande uit Jan en zijn moeder, betreft daarna een woning in de Ruysdaelstraat. Tante Enke komt vlakbij in dezelfde straat te wonen. Februari 1935 gaat Jan bij zijn tante wo-

nen, waar hij blijft tot hij in 1938 naar Delft vertrekt. Hij verblijft hier enige tijd, tot hij zich maart 1940 weer bij tante Enke voegt, die inmiddels in 1939 Huize Hamaland te Gorssel betrokken had. Na haar dood werd dit zijn eigen huis. In feite is Hamaland vanaf 1939 Jans hoofdverblijf geweest.

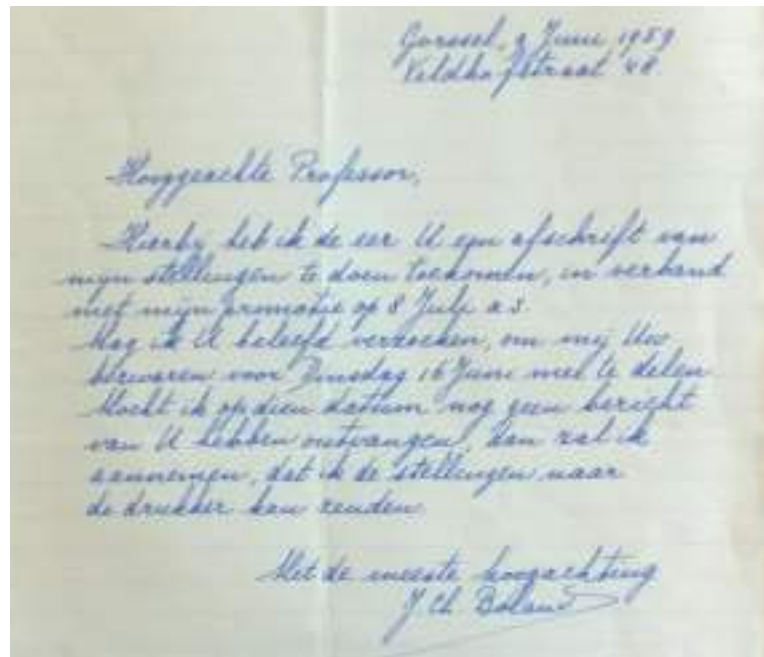
Werkzame leven

Jan Boland studeerde aan de Universiteit van Amsterdam, waar hij in 1935 zijn kandidaatsexamen deed en in 1938 een doctoraalexamen wis- en natuurkunde (beide cum laude). Hij was student van onder meer E.W. (Evert) Beth en L.E.J. (Bertus) Brouwer; van de laatste volgde hij diens achtjarige collegecyclus. Na zijn doctoraal heeft Jan zich in Delft gevestigd, waar hij één jaar heeft gewerkt als assistent aan de Technische Hogeschool (inmiddels Technische Universiteit). Zoals hierboven gezegd is hij daarna naar Gorssel verhuisd waar hij bijlessen gaf. In juni 1941 werd hij leraar natuurkunde en werktuigkunde, zoals mechanica toen genoemd werd, aan de ambachtsschool te Deventer. Per november 1940 was hij tijdelijk leraar natuurkunde aan de Nijverheidsavondschoon, een baan die in februari 1942 werd uitgebreid tot leraar natuur- en werktuigkunde. De laatste betrekking werd in het schooljaar 1942/43 vast. Vanaf 1 september 1948 had Jan Boland een volledige betrekking als leraar met de bevoegdheden wiskunde en kosmografie aan de Rijks-HBS te Deventer; een jaar eerder was hij hier al als leraar in vaste dienst benoemd. Deze betrekking duurde tot 1959, toen hij vertrok naar de Universiteit van Amsterdam.

Ondertussen bleef hij wel voortdurend in contact met de Universiteit van Amsterdam. Tijdens zijn leraarschap werkte hij aan een proefschrift. Hij promoveerde in 1959 aan de Universiteit van Amsterdam

J. CH. BOLAND
Doct. Wis- en Natuurkunde
Privé- en Cursuslessen
Hulp bij huiswerk.
Gorssel. • Telefoon 180.
Huis HAMALAND, Veldhofstr. G 563

Figuur 1 Advertentie voor bijlessen wis- en natuurkunde, *Deventer Dagblad*, 14 september 1940.



Figuur 2 Brief uit 1959 van Boland aan zijn promotor.

bij de hoogleraar Johannes (Han) de Groot op het proefschrift *Bijdrage tot de topologie der vlakke, continue afbeeldingen*, zie [2]. Het proefschrift is opgedragen aan Enke Boland. Door zijn promotie was hij het wetenschappelijk broertje van, onder meer, Jan Aarts, Pieter Baayen, Maarten Maurice en Aida (Ietje) Paalman-de Miranda. Zijn wetenschappelijke grootvader was de Groningse hoogleraar Gerrit Schaake. Boland had zelf een promovendus in Gerard Sierksma die in 1977 aan de Rijksuniversiteit Groningen promoveerde op het proefschrift *Axiomatic Convexity Theory and the Convex Product Space*; deze samenwerking leidde uiteindelijk tot [13]. Tot zijn wiskundige vrienden behoorden Gerrit Lekkerkerker, Frans Oort en Herman van Rossum.

In 1965 werd Jan Boland medewerker bij het Mathematisch Instituut van de Universiteit van Amsterdam, waar hij de leiding had over het wiskundepracticum. Uit die tijd stamt ook de vraagstukkencollectie [3] die hij met Oort en Van Rossum heeft samengesteld, onder het collectieve pseudoniem J.F.H. BOR. Naar verluid werd de imaginaire persoon BOR daarna vaak aangehaald in gesprekken. Boland sprak dan van de waarheid volgens BOR en men vroeg zich bij allerlei zaken af wat BOR hiervan zou vinden.

Hij nam deel aan werkbesprekingen onder leiding van zijn promotor De Groot. In zijn onderzoek speelde grafentheorie

een belangrijke rol [4, 5, 6]; een gezamenlijk artikel [7] met Lekkerkerker heeft veel belangstelling getrokken. Het onderzoek betrof in het bijzonder de inbedding van grafen in het projectieve vlak en in oriënteerbare oppervlakken, geïnspireerd door Kuratowski's karakterisering van vlakke grafen. Ook een vakantiecursus [8] en zijn intreedere [9] betroffen de grafentheorie.

In 1969 werd Boland benoemd aan de Rijksuniversiteit Groningen tot gewoon lector in de propaedeutische wiskunde, een benoeming die hij op 1 december 1970 aanvaardde met een intreedere [9]. Hij was de opvolger van Antonie van Heemert (1912–1968). Boland gaf onderwijs in de lineaire algebra [3], verzamelingenleer, topologie, algebraïsche topologie en werd door velen een zeer inspirerende docent gevonden.

Jan Boland bracht indertijd een zekere culturele vernieuwing naar Groningen, hetgeen zich onder meer uitte in de invoering van drie colleges topologie vóór het kandidaatsexamen. Behalve algemene topologie kwamen daarin ook onderwerpen als de fundamenteelgroep en de overdekkingsruimte aan de orde. Op een bepaald moment besliste de subfaculteitsraad dat voor de toegepast wiskundige studenten alleen het eerste college topologie verplicht was. Dit leidde tot zijn vertwijfelde uitroep dat we zo in Groningen een instituut "voor analyse en vliegtuigvleugels" zouden krijgen, "een veredelde hts".

Na zijn benoeming in Groningen bleef hij in Gorssel wonen, maar had een pied à terre aan de Hora Siccamasingel te Groningen, waar hij enkele keren per week overnachtte.

Verdieping

Jan Bolands leven en dagbesteding stonden geheel in het teken van wiskunde. Hij was verder zeer geïnteresseerd in de logica en de grondslagen van de wiskunde. Hiermee hangt samen dat hij rond 1975 een studentenwerkgroep over categorieëentheorie organiseerde. Verder gaf hij graag voordrachten over grondslagen. Boland was sterk beïnvloed door L.E.J. Brouwer, wiens portret op zijn Groningse werkkamer stond. In zijn voordrachten sprak hij veel over het intuïtionisme en presenteerde dan de klassieke, provocerende voorbeelden, die ons als studenten aan het denken moesten zetten, en dat ook deden. Een bekend voorbeeld:

Een getal a wordt in termen van een decimale reeksontwikkeling als volgt gedefinieerd. In de ontwikkeling van a staat op de j -de plaats een 1 als in de decimale ontwikkeling van π van de j -de tot en met de $(j+100)$ -ste decimaal steeds gelijk is aan 7. In alle andere gevallen is de j -de decimaal van a gelijk aan 0. Een vraag is dan of dit getal a zo welgedefinieerd is en of het dan positief is of niet.

Dit brengt mij ook bij het onderwerp signfica [10] en Bolands relatie met de *Signifiëse Beweging*, waarin hij een aantal geestverwanten zoals Bertus Brouwer en Gerrit Mannoury kon treffen. Het was waarschijnlijk ook in deze kringen, met name in Deventer, dat hij Willem Kruseman en Lieske Bendien heeft leren kennen. Kruse-



L. E. J. Brouwer (1881–1966)

man was daar leraar aan de Rijks-HBS en aan de Koloniale Landbouwschool, de latere Tropische Landbouwschool. In heel kort bestek geformuleerd, richt de signfica zich op de zuiverheid van de menselijke taal met als doel misverstanden, wantrouwen en conflicten uit de wereld te helpen. Bij een heruitgave van Mannoury's *Mathesis en Mystiek, een signifiëse studie van kommunisties standpunt* schreef Jan Boland de inleiding [11]. Deze heruitgave werd besproken in het artikel 'Boroboedoer en logaritmentafel' door Arend Heyting, in *NRC Handelsblad* van 22 december 1978. Deze beweging leidde tot taalgradatie en -purisme op een manier die van belang is geweest voor de ontwikkeling van het logisch positivisme en de Wiener Kreis.

Ik herinner me dat Boland vlak voor zijn pensionering in 1979, in het kader van het vak Wetenschap en Samenleving, een

voordracht gaf over de rol die wiskunde in zijn leven had gespeeld. In deze *apologia de vita sua* vertelde hij over zijn zoektocht naar de waarheid en de oorsprong, en dat hij lange tijd vergeefs heeft gehoopt dat deze in de grondslagen van de wiskunde en de logica te vinden was.

Ten slotte

Persoonlijk herinner ik mij Boland als een erudiete en betrokken man, gemakkelijk in de omgang, die met weinig moeite op de praatstoel te krijgen was. Dit laatste soms tot ergernis van sommige hoogleraren in de koffiekamer, die immers gewend waren het gesprek te leiden. Zijn favoriete onderwerpen betroffen de omstandigheden voor en tijdens de Tweede Wereldoorlog, vooral rondom de Amsterdamse wiskunde. Hij had daarbij vrij strikte opinies over goed en fout.

Jan Boland is opgegroeid in een tijd waarin wiskunde een aanzienlijk diepere culturele en filosofische betekenis had dan heden ten dage het geval lijkt te zijn. Zijn interesse ging hierbij uit naar zeer fundamentele zaken betreffende de wiskunde, de logica en de taal. Hij stond bovendien in nauw contact met een centrale figuur als Brouwer, die hem zeer heeft beïnvloed. Als docent is hij in staat geweest tegenover generaties studenten van dit alles op een zeer bevlogen wijze te getuigen. ☛

Dankwoord

Ik ben Jan van Maanen en Henk de Snoo dankbaar voor hun hulp bij het vinden van historische en biografische gegevens. Ook dank ik Jan Aarts, Hendrik Lenstra, Jan van Mill, Frans Oort en Gerard Sierksma voor het grondig lezen van de tekst en hun waardevolle opmerkingen. Verder ben ik dank verschuldigd aan Ankie Kruseman en Enke Smits-Driessen voor het delen van hun ervaringen met Oom Jan; en dezelfde dank geldt (oom) Jans vriend Herbert Visscher.

Referenties

- 1 J.Ch. Boland, An effective definition of a connected, locally connected and punctiform plane set, *Indag. Math.* 57 (1954), 522–524.
- 2 J.Ch. Boland, *Bijdrage tot de topologie der vlakke, continue afbeeldingen*, Proefschrift Universiteit van Amsterdam (promotor J. de Groot), 1959.
- 3 J.F.H. BOR (J.Ch. Boland, F. Oort en H. van Rossum), *Vraagstukken over Lineaire Algebra*, P. Noordhoff, Groningen, 1965.
- 4 J.Ch. Boland, Embedding of graphs in the projective plane, *Fund. Math.* 57 (1965), 195–203.
- 5 J.Ch. Boland, Embedding of graphs into orientable surfaces, *Indag. Math.* 70 (1967), 33–44.
- 6 J.Ch. Boland, Embedding of graphs in orientable surfaces, *Theory of Graphs*, Proc. Colloq. Tihany, Hungary, 1966, Academic Press, New York, 1968, p. 27.
- 7 C.G. Lekkerkerker en J.Ch. Boland, Representation of a finite graph by a set of intervals on the real line, *Fund. Math.* 51 (1962/63), 45–64.
- 8 J.Ch. Boland, Theorie der graphen (t.g.v. een zomercursus), *Euclides* 69 (1963/64), 150–155.
- 9 J.Ch. Boland, Zuivere en toegepaste wiskunde in de grafentheorie, Rijksuniversiteit Groningen, 1970. Rede aanvaarding lectoraat propaedeutische wiskunde.
- 10 J.Ch. Boland, Significa, *Wijsgerig Perspectief* 20 (1979), 33–39.
- 11 J.Ch. Boland, Inleiding bij de heruitgave van G. Mannoury, *Mathesis en Mystiek, een signifiëse studie van kommunistisch standpunt*, Maatschappij voor Goede en Goedkope Lectuur, Amsterdam, 1924; heruitgave 1978.
- 12 H.W. Broer en H.S.V. de Snoo, Wiskundigen in Groningen, *Nieuw Archief voor Wiskunde* 5/20(4) (2019), 277–279, dit nummer.
- 13 G. Sierksma en J.Ch. Boland, On Eckhoff's conjecture for Radon numbers; or how far the proof is still away, *J. Geom.* 20(1) (1983), 116–121.

Rob van den Berg

Stochastics Group
Centrum Wiskunde & Informatica
j.van.den.berg@cwi.nl

In Memoriam Harry Kesten (1931–2019)

Fenomenaal kansrekenaar en inspirerende persoonlijkheid

Op 29 maart 2019 overleed Harry Kesten, emeritus hoogleraar wiskunde aan de Cornell University, in zijn woonplaats Ithaca in de Verenigde Staten. Hij is 87 jaar geworden. Rob van den Berg, die meerdere malen met hem samenwerkte, beschrijft zijn loopbaan en haalt enkele persoonlijke herinneringen op.

Harry Kesten heeft gewerkt aan vele onderwerpen in de kansrekening en was een van de allerbesten op dit gebied. In 1981 ontving hij de Brouwermedaille, en in 2001 de Steele Prize for Lifetime Achievement. Hij groeide op in Nederland en hield ook na zijn vertrek naar de Verenigde Staten banden met Nederland. Naast lid van de Amerikaanse National Academy of Sciences was Harry ook lid (correspondent) van de KNAW.

Sinds ongeveer 2008 leed Harry aan de ziekte van Parkinson, de laatste jaren in ernstige mate. Zijn vrouw, Doraline, overleed in 2016. Zij laten een zoon, Michael, na.

Nu volgt eerst een korte beschrijving van zijn loopbaan, daarna een bespreking van enkele van zijn belangrijkste resultaten, en aan het eind haal ik enkele persoonlijke herinneringen op.

Loopbaan

Harry Kesten werd op 19 november 1931 geboren in Duitsland. Ongeveer twee jaar later verhuisde het Joodse gezin vanwege de nazi-dreiging naar Nederland. Tijdens de oorlog moest Harry onderduiken en werd hij opgenomen in een Nederlands gezin.

Na de oorlog deed hij de hbs en ging daarna, op advies van zijn oom, scheikunde studeren. Na enkele jaren stapte hij echter over op wiskunde, aan de Universiteit van Amsterdam. Een studiegenoot met wie hij veel optrok was Theo Runnenburg

(die later hoogleraar kansrekening aan de UvA zou worden). Beiden waren tijdens hun studie tevens assistent aan de door David van Dantzig geleide afdeling mathematische statistiek van het Mathematisch Centrum (de voorloper van het CWI). Op het Mathematisch Centrum, dat kort na de oorlog was opgericht, werd naast fundamenteel werk ook veel consultatie voor bedrijven en overheidsinstellingen gedaan. Ook Kesten en Runnenburg werden daarbij



Harry Kesten rond 1980



Foto: Geoffrey Grimmett

Op bezoek in Oxford met R. Peierls (midden) en R. Dobrushin (rechts), 1993

betrokken. In het jaarverslag van het MC van 1955 wordt melding gemaakt van een kort rapport ('Memorandum') van hen over "Het aanpassen van een experimentele regressielijn", en in het jaarverslag van 1956 van een verslag van hen over "Nauwkeurigheid van Geiger-Müllertellers". Ze deden ook meer fundamenteel onderzoek, aan bepaalde wachtrijmodellen, dat leidde tot een publicatie in *Indagationes Mathematicae* [1].

In het jaarverslag van 1956 is ook het volgende te lezen: "Na het met goed gevolg (cum laude) afleggen van het doctoralexamen werden H. Kesten en J.Th. Runnenburg bevorderd tot medewerker. H. Kesten verliet korte tijd later de afdeling om zijn studie in de Verenigde Staten voort te zetten." Merkwaardig is dat het verslag de betreffende universiteit in de Verenigde Staten, Cornell University, niet noemt. Harry ging daar promotieonderzoek doen bij de vooraanstaande kanstheoreticus Mark Kac.

Een voor de hand liggende vraag is hoe dat besluit naar Cornell te vertrekken tot stand is gekomen. In het MC-jaarverslag van 1955 is wel een aanwijzing te vinden: In het lijstje buitenlandse bezoekers van dat jaar wordt Mark Kac genoemd, die een voordracht gaf over 'Some probabilistic aspects of potential theory'.

Harry promoveerde in 1958 op een proefschrift over 'Symmetric random walks on groups'. Daarna werkte hij enkele jaren in Princeton en aan de Hebrew University

in Jerusalem. In 1961 keerde hij terug naar Cornell, waar hij enkele jaren later full professor werd en waar hij tot zijn pensioen in dienst zou blijven. Tijdens zijn aanstelling werd Cornell steeds meer een internationaal centrum van de kansrekening. Behalve Kesten werkten daar ook andere vooraanstaande wiskundigen op dit gebied, bijvoorbeeld Spitzer, Dynkin, Durrett en Saloff-Coste.

Het eerste deel van zijn loopbaan werkte Harry vooral aan problemen gerelateerd aan random walks, maar ook aan producten van random matrices en aan vertakkingsprocessen. Eind jaren zeventig raakte hij geïnteresseerd in een relatief nieuw gebied, de percolatietheorie, en bracht daar in vrij korte tijd diverse belangrijke doorbraken tot stand. Hij bleef de rest van zijn loopbaan werkzaam op dit gebied, maar was ook zeer actief op een breed scala van andere onderwerpen zoals diffusion limited aggregation, interacting particle systems en random walks in random environment.

Enkele (van zijn vele) belangrijke resultaten

Producten van random matrices

Met Furstenberg bewees hij in 1960 een belangrijk convergentie criterium voor producten van random matrices [2].

Vertakkingsprocessen

Met Stigum bestudeerde hij vertakkingsprocessen. Je begint met één deeltje. Dat

splijst zich in een eindig, random aantal, deeltjes. Die vormen de eerste generatie. Deze deeltjes splitsen zich opnieuw, met hetzelfde kansmechanisme als hiervoor, en onafhankelijk van elkaar. Dat geeft de tweede generatie, et cetera. Laat X_n het aantal deeltjes in de n -de generatie zijn, en neem aan dat de verwachting van X_1 , die we μ noemen, eindig is. Uit standaardargumenten volgt dat X_n/μ^n convergeert naar een stochast, die we met W aanduiden. Maar, heeft W de eigenschappen die je zou 'wensen', namelijk dat W verwachting 1 heeft en de kans dat het vertakkingsproces uitsterft gelijk is aan $P(W=0)$?

Dit is inderdaad zo onder bepaalde condities: Kesten en Stigum [4] lieten zien dat de 'juiste' conditie is dat de verwachting van $X_1 \log^+ X_1$ eindig is (met de notatie $\log^+ t$ voor $\max(\log t, 0)$). Ook bewezen zij een generalisatie van dit resultaat voor vertakkingsprocessen met meerdere typen deeltjes (waarbij elk deeltje zich, met een kansmechanisme dat afhangt van het type van dat deeltje, splitst in een aantal deeltjes van, mogelijk, verschillende typen).

Percolatie

Dit onderwerp was relatief nieuw: het begon eind jaren vijftig met onderzoek van Broadbent en Hammersley aan wiskundige modellen van poreuze materialen. Later kwam er ook veel aandacht vanuit de natuurkunde in verband met interessante kritieke verschijnselen die bij deze modellen optraden: die toonden overeenkomst met verschijnselen zoals, bijvoorbeeld, spontane magnetisatie.

Beschouw een rooster van vierkantjes, elk roosterpunt heeft dus vier burens. De roosterpunten zouden we kunnen beschouwen als deeltjes, en de lijnsegmenten tussen burens kunnen we beschouwen als verbindingen ('touwtjes') daartussen. Stel nu dat elk 'touwtje', onafhankelijk van de andere, behouden blijft met een bepaalde kans p , en verwijderd wordt met kans $1-p$. Het rooster valt dan uiteen in samenhangscomponenten. Wat kun je zeggen over de kans dat de component van een gegeven punt diameter $\geq n$ heeft? En van de kans $\theta(p)$ dat de component oneindig groot is?

In 1980 toonde Kesten [4] aan dat $\theta(p) > 0$ als $p > \frac{1}{2}$. Omdat al bekend was (door werk van Ted Harris rond 1960) dat $\theta(p) = 0$ voor $p \leq \frac{1}{2}$, voltooide dit het bewijs van het vermoeden dat de *kritieke*

waarde p_c voor dit model gelijk is aan $\frac{1}{2}$. Dit was een belangrijke doorbraak. Later zijn er kortere bewijzen gevonden, maar de ‘geometrische’ constructies die Kesten gebruikte bleken een enorm nuttige aanloop te zijn voor zijn werk in de tweede helft van de jaren tachtig aan het zogenoemde incipient infinite cluster [6], en aan schalingsrelaties [7]. In dat laatstgenoemde werk legt hij een belangrijk verband tussen het gedrag *in* het kritieke punt en dat *dichtbij* het kritieke punt. Zowel wat betreft nieuwe ideeën als technische oplossingen is dit een ware krachttoer geweest.

Zo’n vijftien jaar later, in het begin van deze eeuw, kwam dit werk echt volledig tot zijn recht. Toen werd door Lawler, Schramm, Werner en Smirnov het gedrag *in* het kritieke punt ontrafeld, althans voor het zogenaamde punt-percolatiemodel op het driehoeksrooster (conforme invariantie, Schramm–Loewner-processen). Gecombineerd met Kestens resultaten, volgde nu ook het gedrag dichtbij het kritiek punt, in het bijzonder dat de dichtheid θ van de oneindige component voldoet aan $\theta(p) \approx (p - p_c)^{5/36}$, $p \downarrow p_c$.

Persoonlijke herinneringen

In het voorjaarssemester van 1983 bracht Harry Kesten een deel van een sabbatical door aan de TU Delft, op uitnodiging van Mike Keane. In die tijd was ik promovendus bij Mike, en werkte aan een percolatieprobleem waarbij ik een bepaalde ongelijkheid nodig had voor de kans dat twee gebeurtenissen allebei, maar ‘om disjuncte redenen’ optreden. Harry raakte geïnteresseerd en we gingen samenwerken om die ongelijkheid te bewijzen, hetgeen inderdaad lukte [5], althans voor de klasse van gebeurtenissen die toen voor ons voldoende was (ons vermoeden dat het voor alle gebeurtenissen geldt, werd ongeveer tien jaar later bewezen door David Reimer). Deze samenwerking was enorm plezierig en stimulerend voor mij. Het leidde ook later tot verdere samenwerking aan andere onderwerpen, en in totaal vier publicaties. Zo bracht ik het academisch jaar 1990/91 op Cornell door (in een postdoc-achtige functie) en werkten we aan first-passage percolation. En, later in de jaren negentig, en in de periode 2000–2010, is Harry verschillende keren op het CWI op bezoek geweest, waar hij met mij (aan coalescing random walks), en later ook met Vlas Sidoravicius, werkte.

Op die manier leerde ik Harry, en ook Doraline, in de loop der jaren wat beter kennen. Het viel me op dat Harry, ondanks zijn emigratie naar de Verenigde Staten, in zekere zin altijd heel Nederlands gebleven was. Dat had ongetwijfeld ook te maken met Doraline, die ook in Nederland was opgegroeid en haar familie en kennissen daar graag bezocht.

Zijn Joodse achtergrond was ook heel belangrijk voor hem. Hij hield zich nauwkeurig aan de voedselvoorschriften en aan de sabbat. Voor mensen die daar onvoldoende van op de hoogte waren kon dat voor onverwachte verrassingen zorgen wanneer zij Harry voor het eten uitnodigden. Overigens waren de Kestens zelf heel gastvrij en hulpvaardig voor bezoekers. Zij woonden iets buiten Ithaca, in het begin van het landelijk gebied. Ze hadden een vrijstaand huis met een enorm stuk grond eromheen dat ze gedeeltelijk als tuin inrichtten en voor een groot deel in min of meer natuurlijke toestand lieten. Dat, en ook de grote schuur met veel gereedschap en soms zelfs een tractor, versterkte de landelijke sfeer. Een deel van het perceel bestond uit vrij dicht begroeid bos, waarin Harry met gekleurde linten een wandelcircuit van ongeveer tien minuten had gemarkeerd.

Tijdens eerdergenoemde sabbatical in 1983 woonden de Kestens in een huis in het centrum van Delft dat ze via Michel Dekking hadden gevonden en waar ze het

erg naar hun zin hadden. Dat blijkt wel uit het feit dat Doraline een model (een soort poppenhuis) van die woning maakte dat nog jaren later op een prominente plaats in hun eigen huis in Ithaca stond.

Harry hield natuurlijk van wiskunde, maar hij hield ook van sportieve activiteiten, liefst in de buitenlucht. In Ithaca ging hij meestal met de fiets naar de campus, een heuvelachtig traject van een klein half uur. Vaak werkte hij ’s morgens thuis, ging daarna naar het zwembad en vandaaruit naar de campus. Soms, als ik aan het begin van de middag met hem afsprak in White Hall (waar tot in de jaren negentig de wiskundeafdeling gevestigd was), kwamen we tegelijkertijd bij het gebouw aan. In mijn herinnering zie ik nog goed hoe Harry dan zijn fiets bij een hekje zette en zijn fietshelm afnam. Hij zag er dan, waarschijnlijk door het zwemmen, zeer energiek en opgefrist uit. Na binnenkomst in zijn werkkamer begon hij meteen aan een lange en ingewikkelde berekening op het krijtbord.

Ik ben een keer met hem meegegaan naar dat zwembad, maar bij die ene keer is het gebleven want het was voor mij een frustrerende ervaring: Harry zwom als een speer door het water en was al spoedig een hele ronde op mij voor; en met diezelfde snelheid bleef hij een half uur achter elkaar doorzwemmen.

Hij heeft ook jaren regelmatig aan hardlopen gedaan bij de campus, vaak met zijn



Crosscountryskiën in de omgeving van Ithaca, januari 1991



Harry Kesten in 2011, het jaar waarin hij tachtig werd

Foto: Vladas Sidoravicius

collega Frank Spitzer. Geoffrey Grimmett (Cambridge, UK) vertelde onlangs dat Kesten en Spitzer dan tijdens het hardlopen allerlei werkgerelateerde zaken bespraken. Dat hardlopen gaf Harry (als ik me goed herinner) ergens in de jaren tachtig op omdat het blessures veroorzaakte.

In het jaar dat ik op Cornell werkte, gingen mijn vrouw en ik een keer crosscountry-skiën (langlaufen) met Harry, in de omgeving van Ithaca. Eerst een lange helling omhooglopen door de sneeuw. Toen we eindelijk moe en bezweet boven kwamen, moesten we aan de andere kant weer naar beneden, maar dat zag er steil en eng uit, met in de diepte een smal houten bruggetje over een beek met ijsschotsen. Ook niet bemoedigend was dat Harry zoiets zei als: “Hé, dat is geloof ik het bruggetje waar ik een paar jaar geleden mijn ski’s heb gebroken.” Gelukkig ging alles goed en werd dit een van onze leukste ski-ervaringen.

Ook op latere leeftijd bleef Harry nog lange tijd een actief buitensporter en was daarbij een enorme doorzetter. In augustus 1999, op een vrije dag tijdens een lange workshop in Boedapest, gingen Harry, Balint Tóth en ik een voettocht maken in het vrij ruige bos- en heuvelgebied niet ver van Boedapest. Harry, die toen ongeveer achtenzestig was, had ons verteld dat hij een paar weken later een operatie zou krijgen. Daarom wilden Balint en ik de tocht eenvoudig houden. Echter, toen het pad zich op een gegeven moment splitste, met de ene kant op ‘makkelijk’ en de andere ‘moeilijk’ (met zeer steile onderdelen), zei Harry zonder aarzeling dat hij de moeilijke route wilde. En dat gebeurde.

Nog een aantal jaren later, hij zal toen ongeveer vijfenzeventig geweest zijn, gingen we een keer wadlopen. Ik maakte me wat zorgen, vooral toen hij viel en van top tot teen onder het slik kwam. Maar het

deerde hem niets en hij genoot enorm van de spannende tocht.

De ziekte van Parkinson betekende wel langzamerhand het einde van dat soort sportieve activiteiten. Harry bleef nog wel lang wiskunde bedrijven. Ook sprak hij nog, in 2010, op het ICM in Hyderabad (India), de laudatio uit voor Fieldsmedaillewinnaar Stanislav Smirnov. Een van zijn laatste projecten was een samenwerking met Frank den Hollander en Vladas Sidoravicius rond 2012 [8]. Harry en Doraline woonden toen inmiddels in een appartement in een wooncomplex in Ithaca waar zo nodig veel (medische en andere) zorg kon worden geboden. Vladas zocht Harry daar wel eens op om wiskunde te bespreken. (Voor Vladas, die in mei van dit jaar overleden is, zal in 2020 een In Memoriam in dit blad verschijnen.)

De afgelopen jaren kwam Geoffrey Grimmett nog af en toe bij Harry op bezoek, maar de communicatie was zeer moeilijk. Het was ook Geoffrey die kort na Harry's overlijden diens co-auteurs en andere wiskundige kennissen per e-mail op de hoogte stelde. Ik sluit af met een citaat uit die e-mail waarmee ik het volledig eens ben:

“We will each remember him for his extraordinary mathematics, coupled with his warmth, approachability, and uncompromising personal and scientific honesty. Knowing Harry was a key part of what for many years has made working in probability theory a very special experience.”

Dankwoord

Verschillende mensen hebben mij geholpen met informatie die ik vergeten was of die nieuw voor mij was. Ik noem hier Michel Dekking, Geoffrey Grimmett, Frank den Hollander, Chris Klaassen en Balint Tóth. Geoffrey Grimmett ben ik ook erkentelijk voor een deel van het fotomateriaal.

Referenties

- 1 H. Kesten en J.Th. Runnenburg, Priority in waiting line problems, *Proceedings KNAW series A*, 60(3) (1957); *Indagationes Mathematicae* 19 (1957), 312–336.
- 2 H. Furstenberg en H. Kesten, Products of random matrices, *Ann. Math. Statist.* 31 (1960), 457–469.
- 3 H. Kesten en B. P. Stigum, A limit theorem for multidimensional Galton–Watson processes, *Ann. Math. Statist.* 37 (1966), 1211–1223.
- 4 H. Kesten, The critical probability of bond percolation on the square lattice equals $1/2$, *Comm. Math. Phys.* 74 (1980), 41–59.
- 5 J. van den Berg and H. Kesten, Inequalities with applications to percolation and reliability, *J. Appl. Probab.* 22 (1985), 556–569.
- 6 H. Kesten, The incipient infinite cluster in two-dimensional percolation, *Probability Theory and Related Fields* 73 (1986), 369–394.
- 7 H. Kesten, Scaling relations for 2D-percolation, *Comm. Math. Phys.* 109 (1987), 109–156.
- 8 W.Th.F. den Hollander, H. Kesten en V. Sidoravicius, Random walk in a high density dynamic random environment, *Indagationes Mathematicae* 25 (2014), 785–799.

Gerard Alberts

Korteweg-de Vries Instituut
Universiteit van Amsterdam
g.alberts@uva.nl

Teun Koetsier

Afdeling Wiskunde
Vrije Universiteit
t.koetsier@vu.nl

Jan van Mill

Korteweg-de Vries Instituut
Universiteit van Amsterdam
j.vanmill@uva.nl

Lex Schrijver

Korteweg-de Vries Instituut, Universiteit van Amsterdam
en Centrum Wiskunde & Informatica, Amsterdam
lex.schrijver@cwi.nl

In Memoriam Pieter Cornelis Baayen (1934–2019)

Erudiet wiskundige

Op 22 mei 2019 overleed in Almelo op 85-jarige leeftijd Pieter Cornelis Baayen, emeritus hoogleraar wiskunde aan de Vrije Universiteit en voormalig wetenschappelijk directeur van het Centrum Wiskunde & Informatica. Hij was in de jaren zeventig en tachtig een van de koersbepalende Nederlandse wiskundigen. Cor Baayen was erelid van het Koninklijk Wiskundig Genootschap. Zijn oud-collega's/promovendi Gerard Alberts, Teun Koetsier, Jan van Mill en Lex Schrijver herdenken hem.

Cor Baayen, geboren op Java, studeerde wiskunde aan de Vrije Universiteit en promoveerde in 1964 bij Han de Groot aan de Universiteit van Amsterdam. In 1965 werd hij hoogleraar aan de VU. Ook was hij vanaf 1959 verbonden aan het Mathematisch Centrum, van 1980 tot 1994 als wetenschappelijk directeur. Baayen was een erudiet wiskundige. Met zijn brede belangstelling onderkende hij belangrijke nieuwe ontwikkelingen, niet alleen in de wiskunde maar ook in de informatica. Hij was een gedreven bestuurder. Onder zijn leiding werd het Mathematisch Centrum omgevormd tot het Centrum voor Wiskunde en Informatica waar het wiskunde- en informatica-onderzoek zich heroriënteerde in het licht van de veranderende tijden.

Cor Baayen werd geboren op 10 maart 1934 in Klaten op Midden-Java. Zijn vader was onderwijzer en later leraar geschiedenis in Batavia, nu Jakarta. Zijn moeder was tot haar huwelijk onderwijzeres. Zijn lagere-schooltijd werd ruw onderbroken door de Japanse bezetting van Nederlands Oost-Indië. Gescheiden van zijn vader bracht hij twee jaar met zijn moeder, broer en zusjes

in twee concentratiekampen door. Daarna zat hij als tienjarige nog een klein jaar in een mannenkamp.

Achteraf was Baayen van mening dat de familie de kampervaringen, ondanks de

verschrikkingen, redelijk constructief had verwerkt. Toch wilde hij lange tijd niets over de oorlog lezen. Veel herinneringen waren bij hem verdwenen tot hij eind 1969 ziek werd en de herinneringen weer terugkwamen. Herstel kostte hem een jaar.

Ook al had hij, afgezien van de lessen die zijn moeder in het kamp clandestien aan kinderen gaf, drie jaar lager onderwijs gemist, werd hij na de oorlog meteen in de eerste klas van de hbs in Bandung geplaatst. Zijn moeder gaf hem alle mogelijke bijles zodat hij gewoon kon overgaan naar de tweede klas. Toen in Bandung het Christelijk Lyceum weer was opgericht werd de jonge Baayen overgeplaatst naar het gymnasium daar. Dat duurde niet lang doordat zijn vader, die in het kamp vrijwel blind was geworden, werd afgekeurd en het gezin in 1947 terugkeerde naar Nederland.

In 1951 deed Baayen eindexamen gymnasium aan het Christelijk Lyceum in Goes. Hij ging natuurkunde studeren aan de Vrije Universiteit. Het bijbehorende practicum lag hem minder en na zijn kandidaatsexamen ging hij daarom verder als student wiskunde. Hier werd hij geënthousiasmeerd door de levendige colleges van Jurjen F. Koksma, die vanaf 1930, als eerste VU-hoogleraar in het vak, de wiskundeopleiding had opgebouwd.

In 1957 legde Baayen het doctoraal-examen af, de kost verdienen als leraar wiskunde in Heemstede. Koksma had andere



Cor Baayen tijdens de 'Joint Meeting of the Belgian (BMS), Dutch (KWG), Luxembourg and French (SMF) Mathematical Societies', Ghent, 2005.



Foto: Peter van Ende Boas

Cor Baayen tijdens de 'The Second Advanced Course on the Foundations of Computer Science', UvA, 1976.

plannen met zijn student. Hij regelde voor Baayen een beurs om twee jaar in Berkeley in de Verenigde Staten verder te studeren. Baayen liep daar colleges bij Van der Corput, en vooral ook bij Tarski, Henkin en Mostowski, waardoor hij de moderne, verzamelingstheoretische benadering van de wiskunde ontdekte die hij op de VU niet had leren kennen.

Bij terugkeer uit de Verenigde Staten in 1959 werd hij door Koksma aangenomen als medewerker bij de Afdeling Zuivere Wiskunde van het Mathematisch Centrum. Koksma was in 1946 een van de oprichters van het Centrum geweest en op dat moment chef van de Afdeling Zuivere Wiskunde en directeur. Het plan was dat Baayen bij Koksma zou promoveren. Koksma was echter vanaf 1960 wegens ziekte voor langere tijd uitgeschakeld. De topoloog Han de Groot, hoogleraar aan de UvA, nam op het MC de leiding van de Afdeling Zuivere Wiskunde van Koksma over. Aan de VU werden Koksma's colleges grotendeels door anderen overgenomen. Zo nam Baayen in 1962 de colleges functionaalanalyse en variatierekening over, waarvoor hij van de VU een leeropdracht kreeg.

In 1964 promoveerde Baayen cum laude bij De Groot op een proefschrift getiteld *Universal Morphisms*, dat zich richtte op verzamelings- en categorie-theoretische aspecten van de topologie. Volgens Baayen wist De Groot als geen ander jonge mensen te inspireren.

Hoogleraar VU en afdelingschef MC

Aan de VU was bij Koksma en zijn collega Piet Mullender het besef gegroeid dat de opleiding moest worden vernieuwd, ook gezien ontwikkelingen aan andere univer-

siteiten. Juist in 1965 zouden hiertoe de mogelijkheden ontstaan, maar Koksma overleed plotseling eind 1964. Baayen, voor wie Koksma in veel opzichten een groot voorbeeld was, trad nu daadwerkelijk in diens voetsporen. In 1965 werd hij benoemd tot hoogleraar wiskunde aan de VU en, in deeltijd, tot chef van de Afdeling Zuivere Wiskunde van het Mathematisch Centrum.

Voor Mullender was Baayen de ideale persoon om de contouren van een nieuw curriculum uit te zetten. Samen vormden zij een uitstekend team. Baayen maakte een plan, Mullender zorgde voor de bestuurlijke en budgettaire inbedding. Het leidde tot benoemingen van onder meer Maarten Maurice, Rien Kaashoek, Gerke Nieuwland, Rien van Veldhuizen, Reind van der Riet (waarmee de informatica aan de VU vaste voet aan de grond kreeg), Piet Holewijn, Kobus Oosterhoff en Bert Ditters.

Als docent heeft Baayen veel jonge mensen plezier in de wiskunde meegegeven, door enthousiast onderwijs te geven in een breed scala aan vakken waarvan hij vond dat die gegeven moesten worden. Naast centrale vakken als topologische groepen, categorietheorie, distributietheorie en logica, gaf hij colleges in vakken die binnen de wiskunde als relatief modern werden gezien, ook vanwege de toepassingen in de informatica, zoals recursietheorie, automaten-theorie, discrete wiskunde, Boolese algebra, formele talen en complexiteit.

Interessant waren vooral de vele verrassende 'doorkijkjes' — verbindingen tussen verschillende gebieden — die hij liet zien. Een sabbatical in 1966–1967 in Seattle gaf hem wederom, als 'eeuwige student', de mogelijkheid zijn kennis te verbreden, met vakken als harmonische analyse, convexiteit, Lie-algebra en K -theorie.

Baayen besteedde veel aandacht aan de persoonlijke begeleiding van de studenten, nodigde hen ook wel thuis uit. Mondelinge tentamens mondden vaak uit in een nazit van enkele uren. Het eerste college van de dag werd door Baayen niet met het aan de VU toen gebruikelijke gebed begonnen, maar met de voorlezing van een gedicht.

Karakteristiek voor Baayen was het brede scala van interessegebieden waarop hij promovendi begeleidde, van categorietheorie, analyse, topologie, topologische dynamische systemen, en discrete wiskunde tot geschiedenis en filosofie van de wiskunde. Stimulerend en inspirerend als hij was, liet Baayen zijn promovendi veel vrijheid zich te ontwikkelen in richtingen die hen het best pasten en aarzelde hij niet nieuwe richtingen open te leggen. Baayen was elf keer (co)promotor.

Het onderzoek aan de Afdeling Zuivere Wiskunde van het MC moest in Baayens visie niet zozeer overlappen met dat aan de universiteiten. Hij schiep ruimte voor thema's als discrete wiskunde, algoritmië, en mathematische linguïstiek. Ter ondersteuning vroeg hij Jack van Lint uit Eindhoven adviseur van de afdeling te worden en een



Foto: Peter van Ende Boas

Cor Baayen (eerste rij links) tijdens het 200-jarige jubileumcongres van het Wiskundig Genootschap, VU 1978.



Foto: Peter van Ende Boas

Cor Baayen tijdens de receptie ter gelegenheid van de wisseling van het directoraat op het Mathematisch Centrum, 1980.

veertiendaags seminar te leiden op het gebied van de discrete wiskunde. Dit seminar werd een groot succes. Het trok naast MC-medewerkers uit verschillende afdelingen ook wiskundigen uit Eindhoven, de VU, de UvA, Leiden, Delft en Twente. Met de stimulerende leiding van Van Lint vonden vele jonge wiskundigen hun weg in de discrete wiskunde en gerelateerde gebieden.

Directeur Mathematisch Centrum

In 1980 trad Aad van Wijngaarden af als directeur van het Mathematisch Centrum. Cor Baayen werd gevraagd als opvolger. Ondanks zijn voorkeur voor onderwijs en onderzoek, aanvaardde hij de benoeming tot directeur.

Baayen bracht in zijn bestuursperiode belangrijke vernieuwingen tot stand. Het Mathematisch Centrum werd in 1983 herstructureerd in Centrum voor Wiskunde en Informatica, het CWI. De Stichting Mathematisch Centrum kreeg de verantwoordelijkheid voor de toekenning van de door ZWO gefinancierde landelijke wiskunde-projecten, waarvan de nationaal samengestelde Wetenschapscommissie de aanvragen beoordeelde.

Meer dan tevoren ging ZWO zich ook op toegepast onderzoek richten en in 1988 veranderde ZWO in NWO. Met deze ontwikkeling kreeg de wiskunde op het CWI nog meer nadruk op maatschappij- en informatica-gerelateerde onderwerpen zoals computer-algebra, cryptografie, prestatie-analyse van netwerken, systeemtheorie,

combinatorische optimalisering, toegepaste logica en grootschalig vectorrekenen.

Baayen heeft zich jarenlang beijverd om ook voor de informatica een serieuze onderzoeksfinanciering op gang te krijgen vanuit ZWO/NWO en het Ministerie van Economische Zaken. In 1984 kreeg het CWI de hoofdrol in het onderzoeksdeel van het INSP, het Informatica Stimuleringsplan. Zo kwam er meer ruimte voor nieuwe richtingen in de informatica, zoals beeldanalyse, procesalgebra, interface-technologie, software engineering en computationele linguïstiek.

Ook verstevigde Baayen de internationale positie van het CWI met de oprichting, tezamen met GMD in Duitsland en INRIA in Frankrijk, van ERCIM, het European Research Consortium for Informatics and Mathematics. Thans zijn bij ERCIM organisaties uit de meeste Europese landen aangesloten.

Door zich met veel energie de wereld van de informatica eigen te maken — zo was hij vice-voorzitter van het Nederlands Genootschap voor Informatica — heeft Baayen als CWI-directeur niet alleen de informatica weten te stimuleren, maar ook de band en synergie tussen wiskunde en informatica kunnen versterken. Daarnaast heeft hij zich steeds ingezet om de kwaliteit van het onderzoek op het CWI te behouden en te versterken. De beperkte middelen en de keuzes die Baayen als directeur hierdoor moest maken, maakten zijn taak soms lastig en uiteraard niet altijd even dankbaar.

Hij bleef daarbij een goed oog houden voor het welzijn van het CWI-personeel.

Dat Baayen met zijn brede intellectuele belangstelling, ook in disciplines als biologie, geschiedenis en literatuur, en met zijn intensieve bestuurlijke inzet minder in staat was tot diep wetenschappelijk onderzoek nam hij, hoewel met spijt, voor lief.

Waardering

Na veertien 'tropenjaren' trad Baayen in 1994 af als wetenschappelijk directeur van het CWI en trok hij zich grotendeels terug uit het actieve bestuurlijke leven. Hij bleef tot 1997 parttime werkzaam als hoogleraar wiskunde aan de VU, en zat enkele visitatiecommissies voor.

Als erkenning voor zijn grote verdiensten voor de wetenschap werd hem in 1995 de Akademiespenning van de Koninklijke Nederlandse Akademie van Wetenschappen overhandigd. In 1994 werd hij benoemd tot *Président d'honneur* van ERCIM en in 2004 tot erelid van het Koninklijk Wiskundig Genootschap, waarvan hij van 1965 tot 1981 bestuurslid was, lange tijd in de rol van inspecteur der Boekerij, later als voorzitter. Baayens naam leeft voort in de Cor Baayen Young Researcher Award, jaarlijks toegekend door ERCIM.

Cor Baayen is twee keer getrouwd geweest en had drie kinderen uit zijn eerste huwelijk, een dochter en twee zoons. Zijn belangstelling in linguïstiek en biologie zien we terug bij zijn zoons, die in deze vakken promoveerden. De laatste jaren was Diny Roffel zijn levensgezel.

Met oud-collega's en oud-studenten hield Baayen tot het eind van zijn leven contact. Jaarlijks ontvingen zij, vaak de dag na Sinterklaas, een kerstkaart met een toepasselijk gedicht. Wij zullen ons Cor Baayen herinneren als een breed geïnteresseerd wetenschapper en een invloedrijk vernieuwend bestuurder, en vooral als beminlijk mens.

Noot

Dit levensbericht is noodzakelijkerwijs beperkt. Ter gelegenheid van zijn afscheid als Wetenschappelijk Directeur van de Stichting Mathematisch Centrum, werd Baayen een bundel aangeboden getiteld *From Universal Morphisms to Megabytes: A Baayen Space Odyssey* (CWI 1994, <https://ir.cwi.nl/pub/10198>). Voor meer informatie over zijn levensloop, visies en uitgangspunten, zie de interviews met hem door Lex Schrijver in de Space Odyssey en door Gerard Alberts en Willem van Zwet in NAW 5/5(3) (2004), 212–217.

In de verdediging

| In defence

Pas gepromoveerden brengen hun werk onder de aandacht. Heeft u tips voor deze rubriek of bent u zelf pas gepromoveerd? Laat het weten aan onze redacteur.

Redacteur: Nicolaos Starreveld
 FNWI, Universiteit van Amsterdam
 Postbus 94214
 1090 GE Amsterdam
verdediging@nieuwarchief.nl



Stochastic Resetting and Hierarchical Synchronization

Janusz Meylahn

In September 2019 Janusz Meylahn from Leiden University successfully defended his PhD thesis with the title *Stochastic Resetting and Hierarchical Synchronization*. Janusz carried out his research under the supervision of prof. dr. F. den Hollander and dr. D. Garlaschelli from Leiden University.

During his PhD Janusz worked on two independent research projects. The one project concerned rare event probabilities of certain observables of stochastic processes when the process is reset at a certain rate. In the second project he studied interacting oscillators and their ability to synchronize.

Stochastic resetting

The object of interest in this research project on stochastic resetting was a homogeneous continuous-time Markov process denoted by $\{X_t; t \in [0, \infty)\}$. This is a continuous-time process whose evolution can be predicted only by knowing solely its present state. Stochastic resetting modifies the process to a new process $\{X^r(t); t \in [0, \infty)\}$ that restarts from some point in the state space which is chosen from a probability distribution. The time between two consecutive resets is considered to follow an exponential distribution with rate $r > 0$. For this process with resetting Janusz studied rare event probabilities of certain observables. To be more precise, the observables he considered are integrals of functions of the process, which constitutes the entire trajectory relevant for these probabilities. This was in contrast to previous studies on the addition of reset (the restarting mechanism) that have focused on observables like the position, which is not dependent on the entire trajectory, but only on the part after the last reset. Janusz showed that the process with resetting and the process without resetting are related in two ways. The first is through a functional equation relating the Laplace transforms of the generating functions of the observables of the two processes. Such a functional equation naturally leads to the question whether the large deviation behavior of the process with resetting can be determined based on the behavior of the process without resetting. Janusz showed, for the case of Brownian motion, how the large deviation probabilities for the two processes relate to each other. In order to determine the large deviation behavior of the process with resetting it suffices to know the large deviation behavior of three quantities, those are:

- (a) The process without resetting.
- (b) The number of resets per unit of time.
- (c) The duration of the reset periods.

Such stochastic processes with resetting arise in various settings, one example is the PageRank algorithm. In this algorithm a ran-

dom walker moves on a graph representing the World Wide Web. An initial probability distribution is placed on the set of nodes and, as the walker makes its way through the graph, the distribution is updated. The walker restarts from a node drawn uniformly at random at a constant rate.

Synchronization in the two-community noisy Kuramoto model

The second project Janusz worked on concerned oscillators interacting with each other, the interaction is represented by a graph where the oscillators are placed on the nodes and an edge between two nodes indicates that the corresponding oscillators interact. The challenge is to understand the effect the underlying network structure has on their ability to synchronize. Synchronization is a phenomenon that has fascinated scientists since Christiaan Huygens observed “an odd kind of sympathy” between the pendulums of his clocks designed for time-keeping on ships in the seventeenth century. Examples of synchronization in nature are copious. To mention but a few, synchronization is often observed among populations of insects, for example crickets chirping and fireflies flashing. It also controls circadian rhythms, power-grids and the suprachiasmatic nucleus (the body-clock), which is a cluster of neurons in the brain of most mammals.

In order to understand the emergence of synchrony and its importance for the body-clock Janusz introduced the two-community noisy Kuramoto model as a model for the suprachiasmatic nucleus. The Kuramoto model was introduced by Yoshiki Kuramoto in 1975 to model the phenomenon of synchronization. In the two-community noisy Kuramoto model the oscillators are grouped in two communities, and the interaction between the two communities can either be positive or negative. The negative interaction between the communities enriches the model significantly. A heuristic argument led to the conjecture that the only steady states of the system occur when the phase difference between the average phases of communities is equal to 0 in the case the interaction is positive, and equal to π in the case the interaction is negative. The intuition for this conjecture is that the system will try to maximize the inter-

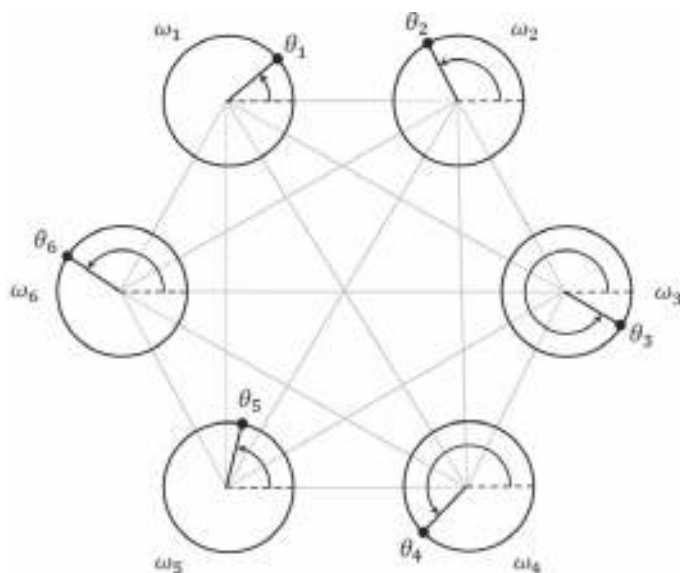


Figure 1 Six oscillators with natural frequencies ω_i and phases θ_i , $i = 1, \dots, 6$. All the oscillators interact with each other (mean-field interaction).

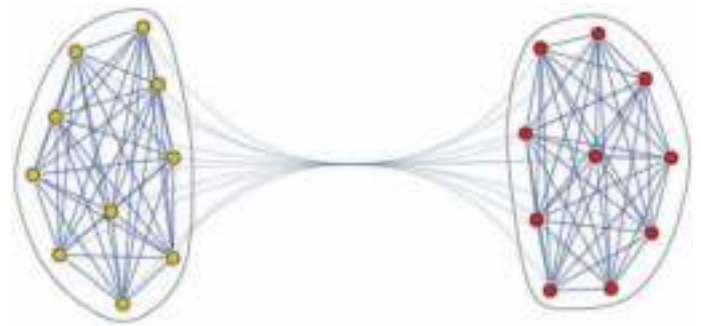


Figure 2 Schematic picture of the two-community network, with community 1 consisting of N yellow nodes and community 2 of N red nodes. The interaction between yellow nodes has strength K , between red nodes strength K and the interaction between the two communities has strength L .

action strength between oscillators in order to achieve the highest synchronization in each community. And now the magic comes, the steady-state solutions can have three different tastes, unsynchronized, symmetrically synchronized and non-symmetrically synchronized. Unsynchronized solutions correspond to no synchronization while symmetrically synchronized solutions correspond to the case where the synchronization level is the same in both communities. Non-symmetrically solutions are solutions where the synchronization level is non-zero but not the same in both communities! Janusz managed to find numerically the bifurcation line at which the symmetric solutions split off from the symmetric solutions. But what does such a result actually reveal about the body-clock? In experiments it has been observed that some animals can transition to a state in which the suprachiasmatic nucleus is anti-aligned, which might be explained by this result.

The more personal aspect

Behind all dissertations there is always a person, with flesh and bones, who has endured the long path of a PhD trajectory and has produced the work at hand.

Janusz, alongside your research did you participate in other activities or events during your PhD?

“My research project was part of the NETWORKS program. Every year two training weeks were organized for all members of the program, these included mini-courses, lectures, research talks and open problem sessions. I thoroughly enjoyed the training weeks, which allowed me to learn a lot from a variety of disciplines, and to interact with many people.

Moreover, in 2017 I was allowed to go to the ICTS Large Deviation Theory Conference in Bangalore, India, together with my supervisor and some other PhD students. There I presented my research and got to interact with an international group of researchers.”

What are the challenges and the things you like in your new position?

“Currently I am doing a postdoc at the University of Amsterdam on colluding pricing algorithms. It is a completely new field, which requires me to learn many new things. The most challenging difference from what I was doing before is that the oscillators I considered in my PhD where reacting to one another in a predefined way, while the competing algorithms can come up with a huge number of strategies in their interaction.”

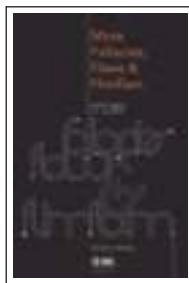
Boekbesprekingen

| Book Reviews

Redactie: Hans Cuypers en Hans Sterk

Review Editors NAW - MF 7.092
Faculteit Wiskunde & Informatica
Technische Universiteit Eindhoven
Postbus 513
5600 MB Eindhoven

reviews@nieuwarchief.nl
www.win.tue.nl/wgreview



Edward J. Barbeau

More Fallacies, Flaws & Flimflam

Mathematical Association of America, 2013
xv + 171 p., prijs \$35.00
ISBN 9780883855805

Als leraar kom je bij het nakijken van zo'n beetje elke wiskunde-toets antwoorden tegen die overduidelijk fout zijn (soms vanwege een opeenstapeling van ondanks al jouw goede bedoelingen ergerniswekkende misvattingen, soms vanwege een enkele bizarre stap), maar soms zelfs verrassenderwijs wel degelijk tot het correcte antwoord leiden. Of de gebruikte redeneringen c.q. gedane berekeningen zijn fout, maar het is soms hels moeilijk er ten eerste zelf achter te komen waar precies de fout zit en ten tweede dat later de leerling (vaak niet eens de domste) te kunnen uitleggen. Na inmiddels bijna veertig jaar wiskundeleraarschap in de frontlinie (still counting) heb ik een kostelijke — gestaag groeiende — verzameling wiskundige en logische, maar ook taalkundige bloopers (bijvoorbeeld een van mijn favorieten, namelijk $xy = 22$ geeft $x = 2 \vee y = 2$, let op het sublieme of-teken) verzameld die het waard zouden zijn opgenomen en geanalyseerd te worden in boekvorm, maar daarvoor ontbreekt het mij, de gemiddelde leraar, de tijd. Gelukkig had ik net genoeg tijd om *More Fallacies, Flaws & Flimflam* (uit 2013 en inderdaad het vervolg van *Mathematical Fallacies, Flaws & Flimflam* uit 2000) te lezen, een minstens zo grandioze collectie onversneden gekte, in de loop van de jaren verzameld door Edward J. Barbeau (in 1967 begonnen als math professor aan de University of Toronto), deels aan hem opgestuurd door lezers van en — in de jaren 2000 tot 2008 — genoemd en besproken in zijn column in de *College Mathematical Journal*. De hoop die Barbeau in zijn voorwoord uitspreekt is dat ook deze collectie “may be useful to teachers at all levels” en ik denk dat dat klopt, want de bijna 150 behandelde fouten zijn handig ondergebracht in een elftal onderwerpen van ‘Arithmetic’ via ‘School Algebra’ via ‘Geometry’ via ‘Differential Calculus’ via ‘Combinatorics’ via ‘Limits’, ‘Sequences and Series’ tot ‘Linear and Modern Algebra’ (afgesloten met een toefje ‘Miscellaneous’) en bovendien loopt het niveau van die fouten van basisschoolrekenwerk tot universitaire wiskunde. De opzet van het boek is telkens een (soms tijds hilarische) foute redenering te citeren en die dan óf uitvoerig toe te lichten (soms zelfs op meerdere manieren) óf voor zichzelf te laten spreken en dus helemaal niet toe te lichten. Dat eerste leidt soms tot het zoeken naar en het gelukkig ook formuleren van voorwaarden waaraan voldaan moet worden opdat de door de leerling gekozen (foute) methode inderdaad tot het correcte antwoord zal leiden, een mijns inziens uiterst nuttige en soms zeer verhelderende exercitie. Dat laatste (het soms niet toelichten) daarentegen beschouw ik als minder geslaagd, want soms was het (mij) niet direct duidelijk wat er precies fout was en zelfs al zou het mij wel duidelijk zijn geweest, dan nog zou ik graag het commentaar of de uitleg van Barbeau willen lezen, al was het maar om te kunnen zien of je zelf goed zat (altijd prettig) of op welke manier er nog meer naar zo'n probleem/oplossing kan worden gekeken (altijd interessant). In een enkel geval bleef ik zelfs na drie keer herlezen achter met een onbe-

stemd *Louis van Gaal*-gevoel... Ook zou het mij in een enkel geval hebben geholpen als er een handige tekening was toegevoegd aan de uitleg. Maar deze minpuntjes worden meer dan gecompenseerd door de vele momenten van verbazing en de (gelukkig bijna even zo vele) daaropvolgende opgedane inzichten.

Een voorbeeld van een fraaie redenering die niet op triviale wijze te weerleggen valt komt uit het hoofdstuk 'Combinatorics'. De vraag was om te berekenen op hoeveel manieren iemand in een $4 \times 4 \times 4$ -kubus vier op een rij kan hebben (vrij vertaald). Een van de gegeven oplossingen was: Breid de $4 \times 4 \times 4$ -kubus uit tot een $6 \times 6 \times 6$ -kubus door er als het ware een laag blokjes omheen te plakken. Elk buitenblokje is de verlenging van precies één lijn van vier binnenblokjes en elke lijn van vier binnenblokjes correspondeert met precies twee buitenblokjes. Het gezochte aantal is dus $(6^3 - 4^3) : 2 = 76$. De lezer kan hier wellicht even over nadenken...

Een voorbeeld zoals ik ze zelf ook vaker dan me lief is tegenkom, is er een waarbij een leerling de vergelijking $\log(x) - \log(3) = \log(5) - \log(x-2)$ als volgt oplost:

$$\begin{aligned}\log(x) - \log(3) &= \log(5) - \log(x) - \log(-2) \\ \Rightarrow 2\log(x) - \log(3) &= \log(5) - \log(-2) \\ \Rightarrow 2\log(x) - \log(3) &= \log(7) \\ \Rightarrow 2\log(x) &= \log(10) \\ \Rightarrow x &= 5.\end{aligned}$$

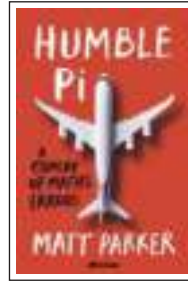
Nadere analyse toont aan dat deze oplossingsmethode *altijd* (voor positieve a en b) leidt tot de goede oplossing van de vergelijking $\log(x) - \log(a) = \log(a+b) - \log(x-b)$.

Ten slotte een voorbeeld van een wel heel diep verstopte fout, namelijk wat klopt er niet in het volgende probleem? Bereken de omtrek van $\triangle ABC$ als gegeven is dat $\angle A : \angle B : \angle C = 2 : 3 : 4$, $AC = 5$ en $AB : BC = 3 : 2$. De gegeven oplossing begint met het berekenen van de hoeken A , B en C die respectievelijk 40, 60 en 80 graden moeten zijn. Stel verder dat $AB = 3x$ en $BC = 2x$, dan geldt via de cosinusregel dat $5^2 = (3x)^2 + (2x)^2 - 2 \cdot 3x \cdot 2x \cdot \cos(60^\circ)$ oftewel $25 = 7x^2$. Dat geeft de waarde van x en met $5 + 3x + 2x$ oftewel $5 + 5x$ het gevraagde antwoord.

Ik wil u niet al teveel onder druk zetten, maar als u hier niet uitkwam *kan* een logische gevolgtrekking zijn het boek onverwijd aan te schaffen. Maar ook als u hier wel uitkwam, is mijn advies datzelfde te doen (en ook de voorganger maar meteen te bestellen), want er staat nog zoveel meer moois in (bijvoorbeeld dat er niet-triviale oneindige rijen a_k en b_k zijn zodat inderdaad $\sum a_k \cdot \sum b_k = \sum (a_k \cdot b_k)$ zoals een leerling abusievelijk en dus onterecht had toegepast, en ook hoe vreemd het eigenlijk is te constateren dat als de temperatuur toeneemt van 5,2 naar 7,9 graden Celsius het dan 52% warmer is geworden).

De schrijfstijl is verder nuchter, soepel, enigszins ironisch, maar altijd helder. Je hoeft gelukkig niet constant te bladeren want de bespreking van een vaak uiterst originele redenering staat er dan direct achter en de lay-out is prettig, zoals altijd bij de boeken van de MAA. Kortom, zeker voor een wiskundeleraar (maar ook voor de niet-leraar) is dit boek (net als zijn voorganger) een — voor MAA-begrippen redelijk geprijsde — aanrader. Een essentieel citaat mag hier niet ontbreken als afsluiting: "It may be that the task of sorting out erroneous solutions may endow students with empathy for the hapless teacher who is faced with such solutions all the time and has to come up with a constructive response."

Joop van der Vaart



Matt Parker

Humble Pi
A Comedy of Maths Errors

Allen Lane, Penguin Random House, 2019
314 p., prijs £20.00
ISBN 9780241360231

Er ligt een heel bijzonder boek voor me. Wiskunde? Ja. Maar niet zoals we gewend zijn in deze rubriek. Geen wiskundige theorieën, geen uitleg/presentatie van wiskundige zaken, noch elementair, noch (meer) geavanceerd. De schrijver zelf vat de inhoud samen in de ondertitel: 'A Comedy of Maths Errors' en dat kan je dan meteen op het verkeerde been zetten. De inhoud is allerminst komisch, noch als zodanig bedoeld. Wel gaat het over 'Errors', al of niet ten gevolge van onwetendheid of pure domheid, die, toegegeven, een glimlach teweeg kunnen brengen.

Als in de zeventiende eeuw door Zweden de hulp ingeroepen wordt van Amsterdamse timmerlui bij de bouw van een nieuw groot koopvaardijschip, de *Vasa*, dan worden zij op de bouwtekeningen geconfronteerd met maten in 'voeten'. Wanneer die Amsterdammers gewoontegetrouw de Amsterdamse voet gebruiken en hun Zweedse collega's hun Zweedse voet, dan lijkt ons het te voorspellen gevolg duidelijk: het schip zal direct na de tewaterlating kapseizen en in de golven verdwijnen, wat ook gebeurde. Inderdaad, domheid, onoplettendheid, name it. Zo schetst het boek een grote variëteit van elementaire tot geavanceerde wiskundige missers. Niet alleen historische, van eeuwen geleden, waardoor je snel geneigd bent je schouders op te halen, zo van "ze wisten nog niet beter". Nee, vooral de talrijke hedendaagse voorbeelden zijn sprekend. Wat te denken van de waargebeurde situatie in 2004 toen bij een aantal lange afstandsvluchten met eenzelfde type vliegtuig, alle elektronische systemen van het ene op het andere moment tijdens de vlucht de geest gaven? Hetzelfde gebeurde in 2015 met een Boeing 787 Dreamliner. De oorzaak lag in de te geringe capaciteit van de computertelsystemen in verband met het aantal noodzakelijk te gebruiken binaire bits, zodat het systeem op zeker moment weer vanaf 0 ging tellen. Gelukkig heeft dit toen niet geleid tot ongelukken. Hetzelfde soort probleem lag ten grondslag aan de vrees voor computeruitval ten gevolge van de millenniumwisseling.

Soortgelijke problemen spelen bij kalenderoverwegingen, zowel in het verleden (Juliaans versus Gregoriaans) als in de huidige tijd, waarbij in de media nogal eens eeuwen vooruit gekeken wordt en allerlei ongefundeerde voorspellingen gedaan worden. Onvoorziene ingenieursproblemen kunnen tot grote consequenties leiden die niet zelden tot gevaarlijke situaties aanleiding geven. Denk aan constructieproblemen bij de bouw van bijvoorbeeld bruggen. Je denkt alles ingecalculeerd te hebben en toch stort de geconstrueerde brug in. Het gebeurde in het verleden, het gebeurt nu nog steeds. Bij de London Millennium Bridge van 2000 greep men precies op tijd in: door enorme trillingen was het noodzakelijk de brug al twee dagen na de opening te sluiten. De officiële berichten over de oorzaak van dergelijke 'rampen' hebben meestal ten doel het publiek gerust te stellen, terwijl de werkelijke oorzaak niet naar buiten komt. Verticale trillingen lagen voor de hand, maar met zijwaartse schommelingen was geen rekening gehouden.

Het is verbazingwekkend dat overheden in veel gevallen wegkomen met onjuiste redeneringen. Een bekend voorbeeld is dat waarin de regering van Donald Trump heeft geprobeerd om de premies van Obamacare voor oudere personen drastisch te verhogen; bij de berekeningen moest men uitkomen op het getal 3, maar men kreeg 3,49. De redenering was toen dat 3,49 na afronding een 3 wordt, waarmee de hogere premies toegepast zouden kunnen worden. Er was voorbijgegaan aan het feit dat 3,49 een ander getal is dan 3. Pas na een intensieve rechtsgang (!) en een langdurig proces werd aan deze praktijk een halt toegeroepen. Verkeerd gebruik van afrondingen ten gunste van de 'afronder' komt veel vaker voor. We zijn er nauwelijks attent op. De schrijver van het boek noemt dit sindsdien "doing a Donald".

Ernstig zijn de monteursproblemen op allerlei gebied, waar een 'vergissing' van enkele micrometers catastrofale gevolgen kan hebben. Of lees de achtergronden van de crash in 1998 van de Mars Climate Orbiter. Gevolg van een minieme vergissing in de baanberekening. Of lees over de wiskundige problemen in de gezondheidszorg, bijvoorbeeld bij het richten van bestralingen: kwesties van leven en dood, die afhangen van wiskundige precisie. En wat te denken van omvallende kranen, zoals in Alphen aan den Rijn en onlangs nog in de Verenigde Staten? Óf de wind heeft het gedaan, óf een andere niet te voorspellen extreme omstandigheid. Nooit wordt een constructiefout openbaar gemaakt (als een soort disclaimer doorgaans vooraf contractueel vastgelegd: horen, zien en zwijgen!). Op deze wijze verheldert het boek een overvloed aan situaties, waarbij duidelijke verklaringen van de wiskundige 'fouten' aangegeven worden.

Vermakelijk (dus toch de 'Comedy?') is het hoofdstuk 'Out of Shape', waarin eenvoudige voorbeelden gegeven worden van misleidende reclametekeningen: een voetbal, getekend met 6-hoeken (in plaats van 5-hoeken) met een uitstapje naar Euler en naar een toepassing op een torus, of getekende maansikkel met sterren getekend in het donkere deel, afbeeldingen van niet effectief aangebrachte hangsloten op deuren, systemen van raderen (zoals vaak gebruikt in psychologische testen en getekend op dozen met speelgoed, of op munten) die niet werken. Legio zijn de voorbeelden in 'Probably Wrong', waarin de waarschijnlijkheidsrekening verkeerd gebruikt wordt. Aan de welbekende lijst in deze sfeer worden weer nieuwe toegevoegd.

Kortom, een buitengewoon rijk boek, waaruit ik in het voorgaande slechts een tamelijk willekeurige greep heb gedaan. Zoals ik in het begin al schreef moet de lezer geen nieuwe wiskunde verwachten. Voor wie is het boek dan bestemd? Volgens mij zal het boek een nuttige functie kunnen vervullen voor allen die beroepsmatig wiskunde toepassen, maar vooral voor hen die dergelijke beroepsbeoefenaren opleiden, zowel in wo als hbo. Denk bijvoorbeeld aan de blunders die gemaakt zijn in het proces van Lucia de B. Pas na wiskundige analyse kwam het uiteindelijk goed, maar er moesten wel grote weerstanden overwonnen worden. Ook in de chaotische pensioendiscussies werden (worden) stellingen betrokken, vermoedens en voorspellingen gepresenteerd, die meer het karakter van een 'geloof' hebben dan dat zij feitelijk waar zijn. Wiskundige interventie is in dergelijke zaken meer dan gewenst. Daarom dient de service wiskunde in een grote diversiteit van faculteiten en opleidingen een stevige plaats te hebben, respectievelijk te krijgen. Dit boek kan daarvoor veel profijt opleveren. Van technici tot economen, van pe-

dagogen (ja ook zij, want in die sfeer worden enorme blunders begaan bij het opzetten van onderzoeken en het interpreteren van resultaten) tot politicologen, van bestuurskundigen tot andragogen, van medici tot landbouwkundigen, van belastingdeskundigen tot psychologen, ja, overal waar wiskunde gebruikt en toegepast wordt.

En voor ons als wiskundigen zelf? Met het boek geniet je een aantal uren van een buitengewone 'Comedy of Maths Errors'. Het spoort aan tot precisie en oplettendheid. Want de talloze besproken voorbeelden tonen het enorme maatschappelijke belang van wiskundige precisie en oplettendheid. In die zin is dit boek tevens een schoolvoorbeeld van de maatschappelijke betrokkenheid van ons vak. Slechts door alertheid van ieder van ons en door vasthoudende durf om missers aan de kaak te stellen, kunnen we erger voorkomen. De schrijver toont dat daarvoor doorzettingsvermogen vereist is, want tegenkrachten willen dikwijls hun ongelijk niet erkennen, ondanks het feit dat menselijke en maatschappelijke belangen voorop dienen te staan. Fouten maken we allemaal, daarom is de titel ook zo mooi gekozen. Niet vanuit onze ivoren toren van alwetendheid, maar vanuit een nederige maar tevens vastberaden houding wijzen op wat beter kan. De schrijver zelf geeft hierin het voorbeeld in de opdracht van zijn boek: "Dedicated to my relentlessly supportive wife, Lucie. Yes, I appreciate that dedicating a book about mistakes to your wife is itself a bit of a mistake." Een leuke bijzonderheid: het boek telt de pagina's van 314 aan het begin tot 1 aan het eind. Het boek voorziet in een lijst van illustraties, en een gedetailleerde index. We mogen Matt Parker dankbaar zijn dat hij dit boek heeft geschreven.

Wim Kleijne



I. Martin Isaacs

Characters of Solvable Groups

Graduate Studies in Mathematics, Vol. 189
 American Mathematical Society, 2018
 xi + 368 p., prijs \$94.00
 ISBN 9781470434854

De auteur publiceerde onder meer de volgende drie boeken, waaruit feitelijkheden worden gebruikt in zijn nieuwe boek. Die boeken zijn van een hoogwaardig onderwijskundig en wiskundig niveau; zonder meer van harte aanbevolen. Het gaat om: *Character Theory of Finite Groups* (AMS, Chelsea Publications, 2006); *Finite Group Theory* (AMS, 2008); *Algebra: A Graduate Course* (AMS, 2009). Hij zegt in het voorwoord van zijn huidige boek, vrij vertaald, dat hij verwacht dat "lezers vertrouwd zijn met groepentheorie op beginnersniveau, en met karaktertheorie. Het gaat hierbij om groepentheorie in een stevige eerstejaars algebracursus voor masterstudenten; daarbij zou de eerste helft van het onder 1) vermelde boek voldoende moeten zijn". Ik ben het daar roerend mee eens. De inhoud van het boek beslaat, ruwweg gezegd, uit werk van Isaacs vanaf 1973, werk van Gajendragadkar (*Journal of Algebra* 59 (1973), 237–259), werk aangaande Brauer-karakters en dat rond het McKay-vermoeden, pi-theorie, telpartijen van karakters en ka-

raktercorrespondenties (zoals bijvoorbeeld die van Glauberger). Ook neemt werk van Gabriel Navarro (vanaf 1995 tot heden) een prominente plaats in het boek in. We moeten helaas in dit korte bestek afzien van nadere uitleg en details.

Het derde gedeelte van het boek behandelt de zogeheten monomiale karakters. Hier volgt de definitie, noodzakelijk om het vervolg van deze recensie te kunnen begrijpen: “Een karakter χ van een eindige groep G is een monomiaal karakter, als er een ondergroep H van G bestaat met daarbij een lineair karakter λ van H , zodanig, dat χ geïnduceerd wordt door λ .” De auteur geeft een overzicht van resultaten betreffende M -groepen (dat wil zeggen eindige groepen waarvoor alle irreducibele karakters monomiaal zijn). In dat overzicht zijn gedetailleerde bewijzen geleverd van stellingen van Dade (1973, 1981), Navarro (1995), Lewis (1996), Huppert (1953, 1957, 1967), en Isaacs. In dit gedeelte wordt de theorie van symplectische modulen besproken en behandeld vanwege het belang voor de theorie van M -groepen; met name dan ten behoeve van de bewijzen van de aldaar genoemde stellingen 10.1 en 10.2 van Dade uit 1981. Maar er is meer bekend over toepassingen ervan op de theorie van M -groepen, onvermeld in het boek. Ik geef er twee: (a) Zij G een p -oplosbare groep, p een priemgetal ongelijk aan 2, N een normaaldeler van G , G/N superoplosbaar van oneven orde. Neem aan dat elke priemdelers van de orde van G/N het getal $p(p-1)$ deelt. Stel dat λ een irreducibel monomiaal karakter van N is wiens graad een macht van p is. Dan is elke irreducibele constituent van het geïnduceerde karakter van λ naar G toe, monomiaal. [Dit is een omgekeerde van Dades stelling 10.1; zie het artikel van N.S. Hekster en R.W. van der Waall in *Journal of Algebra* 105 (1987), 255–267.] (b) Mijn artikelen in de *Proceedings of the Edinburgh Mathematical Society* 30 (1987), 153–167 en 31 (1988), 464–474.

Toepassingen van M -groepen-structuren op vermoedens van Artin en Dedekind betreffende L -functies en zeta-functies zal de lezer vergeefs zoeken in het boek; jammer! De classificatie van de minimale niet- M -groepen (dat wil zeggen eindige groepen waarbij de homomorfe beelden van alle echte ondergroepen van G en die van de echte factorgroepen van G allemaal M -groepen zijn, doch G zelf geen M -groep) wordt nergens aangeroerd in het boek. De bepaling ervan vergde mij een hoeveelheid onderzoek, gepubliceerd in zo'n tien artikelen gedurende de jaren 1974–1983. Voorts wordt nergens het werk van Hekster over M -groepen genoemd. Dade en ik bewezen onafhankelijk van elkaar in 1973 dat er M -groepen bestaan met daarin minimale niet- M -groepen als normaaldeler; het kleinste voorbeeld van zo'n typische M -groep is van orde 3584; dit alles staat als feit genoemd in Isaacs' boek op pagina 256.

Hoe nu dit boek te beoordelen op de zaken die er wél in staan? Welnu, de inhoud is zeker bestemd voor de aficionados en connaisseurs, alsmede gevorderde studenten en hen niet alleen. Helder geschreven, het boek behoort zeker in bibliotheken aanwezig te zijn! Het boek bestaat uit drie gedeeltes. De eerste twee geven een vrijwel volledig beeld van de in het begin van deze recensie genoemde ontwikkelingen gedurende de laatste, pakweg, vijftig jaar. Het derde gedeelte bevat, laten we zeggen, hooguit de helft van wat er op het gebied van de theorie der M -groepen bekend is tot op de huidige dag. Dat gedeelte kan mij ertoe nopen, deo volente, om een aanvulling te schrijven; wie weet!

Robert van der Waall



Barry Mazur, Jean-Pierre Serre (eds.)

Collected Works of John Tate
Parts I and II

American Mathematical Society, 2016
716 p., prijs \$150 (Part I)
751 p., prijs \$150 (Part II)
ISBN 9780821890929, 9780821890936

“Tate helped shape the great reformulation of arithmetic and geometry which has taken place since the 1950’s.”

Andrew Wiles, inleiding bij de voordracht van Tate, ‘Conference on the Millennium Prizes, 2000’.

John Tate (1925–2019) schreef een indrukwekkend oeuvre in een periode die begon met zijn baanbrekend proefschrift in 1950. Zijn werk omvat belangrijke ontwikkelingen in de getaltheorie en de algebraïsche meetkunde. Deze 1400 pagina’s brengen zijn werk van zestig jaar samen.

In 1956 ontving Tate de American Mathematical Society’s Cole Prize “for outstanding contributions to number theory”, in 1995 de Leroy P. Steele Prize “for lifetime achievement”, in 2002/2003 de Wolfprijs in de wiskunde en in 2010 kreeg Tate de Abelprijs voor zijn werk in de getaltheorie.

Een omschrijving van zijn invloed vinden we in de laudatio bij de Abelprijs: “Many of the major lines of research in algebraic number theory and arithmetic geometry are only possible because of the incisive contributions and illuminating insights of John Tate. He has truly left a conspicuous imprint on modern mathematics.”

In de inleiding schrijft Tate. “I did not write easily, and am thankful that my colleagues generously included unpublished results of mine in their papers and books, crediting me fully.” Dat lijkt in tegenspraak met de omvang van zijn eigen werk. Toch was dit zo. Vooral werk uit zijn vroege periode bleef lang ongepubliceerd. Een van de vele voorbeelden: de *Tate-kromme*, waarvan de publicatie 36 jaar op zich liet wachten; verderop een beschrijving.

Tate heeft zijn hele leven lang moeite gehad om, met zijn kritische instelling, tevreden te zijn met wat hij schreef. Bovendien kwam helderheid in zijn gedachten soms langzaam op gang. In zijn correspondentie met Serre zien we daar steeds voorbeelden van, zoals in zijn brief 23-X-1966 aan Serre: “My course is ‘dragging’ along. ... I am so confused that I am going rather slowly.” Het duurde 8 jaar voor dat prachtige resultaat, in dat college ontwikkeld, gepubliceerd werd: ‘Group schemes of prime order’, I.34 (hiermee verwijzen we naar Part I, publicatie 34). Steeds weer zien we hoe diepe gedachten bij Tate zich op vaak onnavolgbare manier ontwikkelen, tot er een indrukwekkend nieuw idee ontstaat. We hebben veel voorbeelden van structuren die Tate ontdekte, resultaten die vaak circuleerden lang voor de uiteindelijke publicatie. In *Kennislink*, in de bijdrage ‘Abelprijs 2010’ van Alex van den Brandhof, beschrijf ik hoe fascinerend het was om aanwezig te zijn bij dat denk- en scheppingswerk van John Tate.

In 1958 ging Emil Artin met pensioen in Princeton, de leermeester en schoonvader van Tate. Er kwam een aanlokkelijk aanbod aan Tate om Artin op te volgen. Een van zijn toenmalige promovendi vertelde me het volgende verhaal. Oscar Zariski (1899–1986)

was de drijvende kracht achter de ontwikkelingen in de algebraïsche meetkunde in Harvard. Toen hij over een mogelijk vertrek van Tate naar Princeton hoorde kwam Zariski in actie. Aan de leiding van Harvard University stelde hij voor om Tate nu onmiddellijk ‘tenure’ te geven en tot ‘full professor’ te benoemen. Ze wilden graag de publicatielijst van Tate zien. Het proefschrift van Tate zou pas in 1967 gepubliceerd worden, en de resterende tien artikelen, alles bij elkaar tachtig bladzijden, waren niet voldoende om een hoogleraarsbenoeming aan de prestigieuze Harvard Universiteit te rechtvaardigen. “Maar er is heel veel ongepubliceerd werk van Tate”, probeerde Zariski als argument in te brengen. Dat hielp niet. Maar Zariski, eenmaal overtuigd van zijn gelijk, was vasthoudend. Alle assistenten en promovendi werden opgetrommeld; zij werkten een hele nacht door in de bibliotheek, en de volgende dag lag er een lange lijst van artikelen die naar ongepubliceerd werk van Tate verwezen. Tate werd benoemd en bleef als hoogleraar in Harvard tot 1990.

In dit verzameld werk vinden we nog vijf nog niet eerder gepubliceerde artikelen: 13, 22, 38, 51, 53. Verder zien we dat een deel van de publicaties gezamenlijk werk is (33 van de 78); uit brieven, maar ook uit eigen ervaring weet ik hoe dat geleid heeft tot publicaties.

Eerder werden correspondentie tussen Serre en Tate gepubliceerd [ST]; voor een bespreking zie NAW 5/20 (2019), pp. 147–149. We geven die brieven aan met S-datum of T-datum. In de twee delen die hier besproken worden, vinden we daar nog een aanvulling op: brieven aan Serre, Dwork en Atkin.

“...your problem, Tate, is that you are trying to think.”

Max Sporer, de eerste wiskundeleraar van John Tate autobiografie, *The Abel Prize 2008–2012*, pp. 249–257.

We zullen een (korte, oppervlakkige) beschrijving van het werk van Tate geven aan de hand van gangbare terminologie in de wiskunde waar zijn naam aan verbonden is. Een uitgebreide beschrijving van het werk van Tate vinden we in J. Milne, *The work of John Tate, The Abel Prize 2008–2012*, Springer, 2013, pp. 259–340.

Het proefschrift van Tate, Princeton 1950, vinden we in Part I; het werd veel geciteerd tot het in 1967 gepubliceerd werd in de proceedings van de Brighton-conferentie in 1965, zie I.1. Hierin geeft Tate een bewijs van de functionaalvergelijking en analytische voortzetting van Hecke L-reeksen. We zien een voorloper van Godement–Jaquet (1972) en van het Langlands-programma (1967).

De Tate-cohomologiegroepen (1952). Een belangrijk instrument in de algebraïsche getaltheorie. Tate was de eerste die expliciet groepencohomologie in de klassenlichamentheorie formuleerde en gebruikte (waar begrippen als ‘crossed homomorphisms’ en factor systemen al bekend waren).

De Tate-kromme (1959) vinden we in een ongepubliceerd manuscript ‘Rational points on elliptic curves over complete fields’. Voor een elliptische kromme E over een niet-archimedisches lokaal lichaam K met slechte, multiplicatieve reductie (semi-stabiele reductie) laat Tate zien dat er een parametrisatie $K^*/t^{\mathbb{Z}} \cong E(K)$ bestaat (op een kwadratische twist na). Er is dan weliswaar geen analytische parametrisatie, maar wel een p -adische, waar het voldoende is om de ‘periode’ t te vinden.

Tate sprak over dit onderwerp tien jaar later bij een bezoek aan Hamburg, waar zijn leermeester Emil Artin van zijn emeritaat genoot. Naar aanleiding daarvan publiceerde Roquette in 1970

‘Analytic theory of elliptic functions over local fields’; daar vinden we de naamgeving ‘Tate curves’. Mumford generaliseerde dit idee van Tate naar *algebraïsche krommen* van hoger geslacht in 1972, *Compositio Mathematica* 24 (1972).

In de Arbeitstagung, Bonn 1984, werkte Faltings het idee van Tate verder uit naar *abelse variëteiten* van hogere dimensie, en gebruikte dit om irreducibiliteit van een moduli-ruimte te bewijzen, verder beschreven en uitgewerkt in Faltings en Chai, *Degenerations of Abelian Varieties* (1990). (Zie ook McCabe, Harvard PhD Thesis 1968, en Raynaud, ICM 1970.)

Ten slotte vinden we de oorspronkelijke beschrijving verder uitgewerkt door Tate, gepubliceerd in 1993/1995, ‘A review of non-Archimedean elliptic functions’, II.69.

We zien dat een idee van Tate in 1959 aanleiding is tot spectaculaire ontwikkelingen, tot we na 36 jaar de oorspronkelijke, uitgewerkte versie in druk te zien krijgen.

Het idee van Tate dat deze p -adische parametrisatie een bijzonder geval is van p -adische analytische ruimten werd in het begin door tijdgenoten met enige scepsis bekeken; Grothendieck: “Tate m’a écrit de son côté sur ses histoires de courbes elliptiques, et pour me demander si j’avais des idées sur une définition globale des variétés analytiques sur des corps complets. Je dois avouer que je n’ai pas du tout compris pourquoi ses résultats suggéreraient l’existence d’une telle définition, et suis encore sceptique” (brief aan Serre, 18-X-1959). Maar in 1961 was Grothendieck positief over dit idee. Een manuscript ‘Rigid analytic spaces’ circuleerde in verschillende versies, ‘Private notes, reproduced (with) out his permission’ (IHES 1962, Russische vertaling 1969). In de briefwisseling tussen Serre en Tate in 1961/1962, in het bijzonder in S-X-IV-1962 zien we dat de naam van het artikel van Serre afkomstig is, en zien we een discussie in hoeverre dit manuscript kan worden verspreid. Ten slotte verscheen de gedrukte versie in 1971, I.36: “The editors of *Inventiones Mathematicae* believe that it is in the general interests of the mathematical community to make these notes available to everyone.” Het was een begin van geweldige ontwikkelingen (Raynaud 1974, Bosch–Güntzer–Remmert 1984, Bosch–Lütkebohmert 1993, Berkovich 1990; zie Fujiwara–Kato 2018). Voor een overzicht door Brian Conrad zie ‘Several approaches to non-archimedean geometry’ (2007). En dit lijkt nog maar een begin, zie het werk van Peter Scholze over perfectoid-ruimtes.

De Serre–Tate-lifting, Serre–Tate-coördinaten. In een brief van Tate aan Serre 10-I-1964, pp. 667–672 in Part I vinden we een eerste aanzet hiervoor, na hun briefwisseling in december 1963, zie T-16-XII-1963 in [ST]. Een abelse variëteit A van dimensie g over een (perfect) lichaam K van karakteristiek p zodanig dat $(\mathbb{Z}/p)^g \hookrightarrow A(k)$ heet een *gewone* (ordinary) abelse variëteit. Die laat een ‘kanonieke’ lift naar karakteristiek nul toe (endomorfismen, Frobenius, polarisatie liften mee). Dit resultaat wordt beschreven door Serre, Tate en Lubin in de Woods Hole AMS Summer School 1964; dat manuscript wordt nu voor het eerst gepubliceerd, I.22. Een online versie was al wel beschikbaar, en bewijzen waren al te vinden in de literatuur, zie bijvoorbeeld Katz (1981), Messing (1982). Serre–Tate-coördinaten geven een prachtige beschrijving van een situatie waar analytische methoden niet aanwezig zijn; deze, en een generalisatie naar niet-gewone abelse variëteiten is nu volledig begrepen. Het werk van Deuring voor elliptische krommen (1941) was het eerste geval waar het bestaan van een CM-lifting werd aange-

toond, waar Hasse in zijn poging vermoedens van Emil Artin te bewijzen vergeefs naar zocht. Na werk van Honda (1968) en Tate, zie 1.27 en 1.32, vinden we het geval van CM-liften voor alle abelse variëteiten, gedefinieerd over een eindig lichaam, beschreven in Chai, Conrad en Oort (2014). Deze structuur beschreven door Serre en Tate is in de periode 1964–2014 begrepen en gegeneraliseerd.

Graag laat ik zien hoe de vriendelijke humor van John Tate werkte. In de zomer van 1967 gaf David Mumford een serie voordrachten op een AMS Summer School. In de eerste voordracht vertelde Mumford wat de voorkennis was die hij bekend veronderstelde, een lange en indrukwekkende lijst. We werden er stil van. Tot er plotseling iemand opstond, zijn stoeltje luidruchtig omhoog klappend, en met ferme tred naar de deur liep. Het was Tate, die aangaf dat niet allemaal te weten. Anderen dachten er waarschijnlijk net zo over, maar durfden het niet te zeggen. Mumford zei dat hij die dingen dan maar ging uitleggen, en Tate ging weer zitten.

Tate- ℓ -modulen. Klassiek beschrijven we een abelse variëteit A over $\mathbb{C}$ door middel van een analytische parametrisatie $A(\mathbb{C}) \cong \mathbb{C}^g/\Lambda$. Hoe gaan we hiermee om als we over een ander lichaam werken, bijvoorbeeld een eindige uitbreiding van $\mathbb{Q}$, of een eindig lichaam? Wat is de rol van het rooster $\mathbb{Z}^g \cong \Lambda \subset \mathbb{C}^g$? Merk op dat $\Lambda \cong \pi_1^{\text{top}}(A(\mathbb{C}))$. Hoe kunnen we hiervoor een arithmetische pendant vinden, die ons in staat stelt op een algebraïsche manier hiermee te werken? Een groot deel van het werk van Tate hierover bestaat uit het ontwikkelen van een dergelijke methode. We zullen twee aspecten daarvan bespreken.

De essentie van het eerste idee van Tate: neem een grondlichaam K , een priemgetal ℓ , niet gelijk aan de karakteristiek van K , en beschouw het analogon van ' $\Lambda \otimes \mathbb{Z}_\ell$ '. We doen dit in een algebraïsche context door voor elke i de torsiegroep $A[\ell^i] = \text{Ker}(\times \ell^i: A \rightarrow A)$ te nemen en deze aaneen te voegen, door de inverse limiet $T_\ell(A)$ te nemen over alle $\times \ell: A[\ell^{i+1}] \rightarrow A[\ell^i]$. We zien dat voor een algebraïsche afsluiting $k \supset K$ de groep $T_\ell(A)(k) \cong \mathbb{Z}_\ell^{2g}$ een natuurlijke werking van de Galois-groep $G_K = \text{Aut}(k/K)$ heeft: dit geeft de constructie van het 'Tate- ℓ -moduul' van A .

Inderdaad is $\times \ell^i: A \rightarrow A$ een onvertakte overdekking en voor $K \supset \mathbb{Q}$ en $T_\ell(A)(\mathbb{C}) \cong \pi_1^{\text{top}}(A(\mathbb{C})) \otimes \mathbb{Z}_\ell$. Magisch idee: *vergeet de inbedding $\Lambda \subset \mathbb{C}^g$ (zeker als we in karakteristiek p werken), maar neem daarvoor in de plaats de Galois-werking*

$$\rho: G_K \rightarrow \text{Aut}(T_\ell(A)(k)) \cong \text{GL}((\mathbb{Z}_\ell)^{2g}).$$

In 1.27, 'Endomorphism algebras over finite fields', zien we wat een baanbrekend idee dit is: *voor een abelse variëteit A over een eindig lichaam K geldt:*

$$\text{End}(A) \otimes \mathbb{Z}_\ell \xrightarrow{\sim} \text{End}_{G_K}(T_\ell(A));$$

een wonderlijk resultaat: *het algebraïsche object, de representatie ρ , bepaalt een collectie meetkundige homomorfismen.*

Dit was een grote doorbraak. Al eerder werden zulke Galois-werkingen bestudeerd. Het werk van Grothendieck over de etale fundamentealgroep ontstond ook in die periode, en we kunnen deze definitie van Tate van $T_\ell(A)$ daar als een speciaal geval van zien. We zien dat de definitie van $T_\ell(A) = (T_\ell(A)(k), \rho)$ aansluit bij werk van anderen. Maar het idee dat het voldoende zou zijn om A , gedefinieerd over een lichaam van eindig type over het priemlichaam, te karakteriseren (op isogenie na) was verbluffend nieuw, een generalisatie van een resultaat van Deuring uit 1941 voor elliptische krommen.

Tate vroeg zich af of het analogon van deze stellingen ook bewezen konden worden over een getallenlichaam. Zarhin (1973) liet zien dat een analoge stelling waar is over elk functielichaam in karakteristiek p .

In een revolutionair artikel 'Endlichkeitssätze für abelsche Varietäten über Zahlkörpern' liet Faltings in 1983 zien dat dit vermoeden van Tate juist is, en in hetzelfde artikel zien we met die methode bewijzen van vermoedens van Mordell uit 1922 en van Shafarevich, ICM 1962. In die periode 1964 (Tate)–1983 (Faltings) heeft de arithmetische meetkunde een spectaculaire ontwikkeling doorgemaakt.

Voor meer uitleg zie 'Abelprijs 2010 voor John Tate', NAW 5/12 (2011), pp. 44–48.

Het Tate-vermoeden. In 1963 generaliseerde Tate zijn werk tot een vermoeden over de Galois-werking op etale cohomologiegroepen, 1.21: "The ℓ -adic étale cohomology of algebraic varieties is much richer than the classical cohomology, in that the Galois groups operate on it ... the soil is fertile for conjectures. The main idea is, roughly speaking, that a cohomology class which is fixed under the Galois group should be algebraic when the ground field is finitely generated over the prime field." Dit vermoeden, nog steeds een bron voor inspiratie, is juist in speciale gevallen, maar in het algemeen nog open; zie bijvoorbeeld Totaro, *Bulletin of the AMS*, 2017. Zie ook 11.65 uit de conferentie over Motives (1991).

Dit vermoeden van Tate kan gezien worden als een arithmetisch analogon van het Hodge-vermoeden. Het Tate-vermoeden zou een bewijs geven van een groot deel van de 'Standard Conjectures' over algebraïsche cycli van Grothendieck (1969). Het zou impliceren dat het Swinnerton-Dyer-vermoeden waar is voor een kromme over een functielichaam in positieve karakteristiek, Ulmer (2014).

Barsotti–Tate-groepen. Het idee hierboven werkt voor elk priemgetal ℓ ongelijk aan de karakteristiek van het grondlichaam, en we 'weten' dat het (vaak) 'niet zoveel uitmaakt' welke keuze we maken voor ℓ . *Kunnen we ook een p -adisch object maken in karakteristiek p ?* Voor de hand liggend is om weer de kernen van $\times p^i: A \rightarrow A$ voor alle $i \geq 0$ te nemen. Echter, alleen de groep van meetkundige punten is onvoldoende; bijvoorbeeld voor een supersinguliere elliptische kromme E is $E[p^i](k) = 0$ voor alle i . Het schema $A[p^i]$ heeft meer structuur: het is een eindig groepschema. De limiet $A[p^\infty] = \bigcup_i A[p^i]$ is de logische stap, die Tate dan ook zet in 1.30: ' p -divisible groups', Driebergen, 1966.

Een detail: voor $T_\ell(A)$ nemen we de inverse limiet, voor $A[p^\infty]$ de directe limiet, dat blijkt handiger, maar we zouden het net zo goed andersom kunnen doen.

Merk op dat $A[p^\infty]$ voor elk priemgetal p genomen kan worden. Voor p ongelijk aan de karakteristiek van K krijgen we $T_\ell(A)$ met $\ell = p$, op dualiteit na. Deze objecten $A[p^\infty]$ hebben de mooie eigenschap dat ze over elk basisschema werken; bijvoorbeeld in gemengde karakteristiek heeft $A[p^\infty]$ de goede eigenschappen, terwijl $T_\ell(A)$ de restrictie met zich meebrengt dat ℓ inverteerbaar is op de basis, en dus ongelijk aan de residue karakteristieken.

Voor een abelse variëteit A wordt $X = A[p^\infty]$ ook wel de Barsotti–Tate-groep genoemd. Tate zelf spreekt van een p -deelbare groep; dat is een mooie korte naam, maar het is in het algemeen niet een groep; het zou juist zijn om het omslachtige ' p -deelbare ind-groepschema' te gebruiken, maar met een kleine waarschuwing doen we dat niet. Merk op dat $\times p: X \rightarrow X$ 'surjectief' is, vandaar de naam p -deelbare groep. Tate bewees ook over een eindig lichaam het analogon van de karakterisering van $\text{End}(A)$, maar nu met

$-\otimes \mathbb{Z}_p$, met behulp van $A[p^\infty]$, gepubliceerd door Milne en Waterhouse (1971).

Als hulpmiddelen zijn Tate- ℓ -groepen en p -deelbare groepen niet meer weg te denken uit onze meetkundige en arithmetische gereedschapskist.

De Mumford–Tate-groep. Mumford beschreef in 1966 een groep $G = \text{MT}(F)$ gegeven door een Hodge-structuur F . Het Mumford–Tate-vermoeden zegt dat G de Lie-algebra van de Galois-actie bepaalt. Dit generaliseert het geval van de Galois-representatie op het Tate- ℓ -moduul van een abelse variëteit. Het hangt samen met de ‘motivische Galois-groep’ en met het Sato–Tate-vermoeden, onafhankelijk door Sato en door Tate geformuleerd rond 1960; zie 1.21. We vinden in Moonen, ‘An introduction to Mumford–Tate groups’ (2004) een mooie inleiding.

Hodge–Tate-theorie. Naar aanleiding van p -deelbare groepen zoals Tate die in Driebergen introduceerde, en resultaten daarover, formuleerde Serre ‘Sur les groupes de Galois attachés aux groupes p -divisibles’ (ook in de conferentie van Driebergen, 1966, pp. 118–131) het begrip Hodge–Tate-structuren; Serre introduceerde de naam (p -adische) Mumford–Tate-groep. Voor verder ontwikkelingen zie bijvoorbeeld Faltings (1987), en voor samenhang met perfectioëde ruimtes, zie bijvoorbeeld Bhargav Bhatt (2017).

In mijn kast met hangmappen vind ik onder Tate heel wat vergeelde manuscripten, zoals ‘Courbes elliptiques: formulaire’, d’après J. Tate, mis aut goût du jour par P. Deligne (ongedateerd). Dat materiaal vinden we nu ook allemaal in deze twee indrukwekkende delen.

In zijn inleiding schrijft Tate: “I feel fortunate to have been inclined towards mathematics, a field in which cooperation is so much more common than competition, and in which I could earn a living by doing what I liked most.” Hier beschrijft Tate het gevoel dat velen van ons met hem kunnen delen.

Tate heeft fundamenteel nieuwe ideeën gelanceerd. Daarmee prachtige resultaten bewezen. Maar ook genereus anderen daarmee laten werken. Zijn intuïtie en creativiteit lijken niet rechtlijnig, maar misschien juist wel daarom zo rijk en divers. Eerste aanzetten maken de indruk ongericht te zijn, maar de uiteindelijke publicaties zijn precies en correct. De samenwerking met Serre blijkt van grote waarde voor Tates publicaties, in allerlei opzicht. We hebben veel geleerd van deze vriendelijke man.

Terugkijkend op dit werk, als we al die brieven lezen, als we zien hoe verschillend Serre en Tate tot een resultaat lijken te komen (en dat van elkaar maar al te goed begrijpen en bewonderen), maar ook weer zo verschillend van de manier van werken van Grothendieck, kunnen we ons afvragen hoe het denkproces van een wiskundige kan verlopen. Dit materiaal laat ons dat, in het geval van Tate, op een verrassende manier zien.

Wat een rijkdom. We vinden nu bij elkaar het scheppingsproces (te volgen in brieven in [ST] en aanvullend hier in Part I) en de uiteindelijke versies (in dit verzameld werk). We zien hoe een prachtig idee ontstaat uit voorbeelden, berekeningen, en dan die sprong die verklaart, of probeert te verklaren hoe deze wiskunde in elkaar zit. Met de laudatio bij de Abelprijs, hierboven aangehaald, kunnen we het helemaal eens zijn, zeker na het lezen van dit indrukwekkende oeuvre. Wat een voorrecht om deze ontwikkeling mee te mogen maken.

Frans Oort

Naschrift: John Tate overleed op 16 oktober 2019.



Klaas Landsman

Naar alle onwaarschijnlijkheid
Toeval in de wetenschap en filosofie

Uitgeverij Prometheus, 2018

288 p., prijs € 25,99

ISBN 9789044636321

Klaas Landsman is hoogleraar mathematische fysica aan de Radboud Universiteit. Zijn laatste boek, *Naar alle onwaarschijnlijkheid*, is een losjes geschreven verzameling verhalen over de rol van toeval in (hoofdzakelijk) de wetenschap. Het boek is qua opzet erg informeel: het leest als een spontane monoloog, waarin hij zijn kennis van een boel verschillende onderwerpen met grapjes, illustraties, en korte anekdotes tentoonspreidt. Wie daarin meegaat, heeft het boek snel uit. (De zinnen zijn wel lang, en het taalgebruik is wat oubollig, maar dat went.)

De onderwerpen zijn toeval in de wetenschap (de eerste 189 pagina's) en toeval in filosofie en religie (de laatste 37 pagina's). De belangrijkste onderwerpen die aan bod komen zijn: *Coincidentie*: hoe moeten we toeval in het dagelijks leven begrijpen (drie keer de loterij winnen). *Finetuning*: de vraag of het toeval is dat natuurkundige formules zijn wat ze zijn, omdat als de parameters zelfs een klein beetje anders waren, ze geen beschrijving van een 'mogelijke' werkelijkheid meer kunnen geven. *Quantummechanica*: het gegeven dat deze uiterst effectieve natuurkundige theorie (ogenschijnlijk) inherent van toevalligheden afhangt. *Evolutiebologie*: toevalligheid bij genetische mutaties. *Vrije wil en determinisme*: kunnen vrije wil en de mogelijkheid dat toeval bestaat samengaan? *Toeval in religie*: in het bijzonder over de discussie of Jezus van Nazareth per toeval een van de meest invloedrijke figuren in de westerse geschiedenis is geworden, of dat het voorbestemd was.

Het boek bevat veel informatie en geeft veel stof tot nadenken. Wie goed oplet kan een aardig overzicht krijgen van een aantal belangrijke wetenschappelijke theorieën waarin toeval een rol speelt. Het zijn allemaal onderwerpen waar al veel over geschreven is, maar Landsman geeft genoeg eigen inzichten om het interessant te houden. Soms gaat hij (naar mijn smaak) wel te ver daarin, en gaat hij te veel in de breedte. Het begin van hoofdstuk 2 bijvoorbeeld, waar de geschiedenis van de Big Bang-theorie uitgebreid verteld wordt. Die is zeker wel interessant, maar aan het finetuning-vraagstuk niet bepaald sterk gerelateerd.

Over de wiskundige kanten van toeval — kansentheorie en statistiek in het bijzonder — wordt helaas vrij weinig gezegd. Als kansrekenaar heb ik zelf het idee dat veel van de discussies en mogelijke paradoxen in het boek ook vaak uit te leggen zijn door te kijken naar de gekozen kansruimte (op pagina 95 komt dit wel kort aan bod). Ik denk dat het verhelderend had gewerkt als dit perspectief meer belicht werd. Over de filosofische interpretaties van de wiskundige kansentheorie wordt ook weinig gezegd.

Als laatste nog een milde waarschuwing: dit boek is niet ideaal voor mensen die van precisie houden. Vrij veel van de beweringen zijn feitelijk niet helemaal juist of wel erg kort door de bocht. Twee willekeurige voorbeelden:

(A) Op pagina 18 schrijft Landsman over de bekende zaak van Lucia de B., dat volgens een statisticus de kans op onschuld

1 op 243 miljoen was. Ik kon daar niets van terugvinden (de referenties in de voetnoten waren onvoldoende precies). Wel kon ik vinden dat een rechtspsycholoog die kans op 1 in 342 miljoen geschat had.

(B) Op pagina 69 schrijft hij over het standaardmodel van de deeltjesfysica dat het, op zwaartekracht na, alle natuurkundige verschijnselen verklaart. Het standaardmodel verklaart verbazingwekkend veel, maar, zoals elke natuurkundige kan beamen, nog veel meer niet. Zelfs binnen de deeltjesfysica niet, denk aan donkere materie of neutrino-oscillaties.

Mijn vermoeden is dat Landsman verwacht dat de lezer wat hij schrijft allemaal wel met een korreltje zout zal nemen, maar ik kan me goed voorstellen dat hij met dit gebrek aan precisie sommige lezers (en collega's) niet gelukkig maakt.

Samenvattend: dit boek is leuk voor wie graag losjes over wetenschap en filosofie nadenkt, en heeft dan veel te bieden. Ik vond het leuk om te lezen. Maar misschien is het niet voor iedereen.

Tim Hulshof



Gilbert Strang

Linear Algebra and Learning from Data

Cambridge University Press, 2019

446 p., prijs £58.99

ISBN 9780692196380

Gil Strang heeft een uitstekende reputatie als docent en als schrijver van verschillende boeken, met name op het gebied van de lineaire algebra. Zijn nieuwste boek *Linear Algebra and Learning from Data* gaat over verschillende aspecten van *data science*. Anders dan de titel mogelijk suggereert behandelt dit boek de volgende onderwerpen in ongeveer gelijke mate: lineaire algebra, (continue) optimalisering, kansrekening en statistiek. De schrijver is duidelijk gecharmeerd van neurale netwerken, en belicht deze van verschillende kanten.

Allerlei technieken worden overzichtelijk (en soms beknopt) gepresenteerd: matrixdecomposities, compressed sensing, matrix completion, stochastic gradient descent en variaties, Markovketens, clustering, random methoden, neurale netwerken en machine learning. Na elke sectie volgt een behoorlijk uitgebreide verzameling opgaven.

Het boek is met 430 pagina's al redelijk omvangrijk, en mijns inziens maakt Strang duidelijke en in het algemeen goede keuzes qua onderwerpen. Toch is de afwezigheid van sommige zaken opvallend, zoals lineaire (en eventueel niet-lineaire) dimensiereductiemethoden. Daarnaast komen andere thema's wel zeer beperkt aan bod, zoals Linear Discriminant Analysis en de bijbehorende wiskunde.

Niettemin kan ik *Linear Algebra and Learning from Data* beslist aanbevelen. Het boek brengt diverse zeer actuele wiskundegebieden op inzichtelijke manier samen. De schrijfstijl is aantrekkelijk, informeel en toegankelijk voor lezers van verschillende niveaus. Referenties naar recente literatuur nodigen uit tot nadere studie.

Het boek is mogelijk bruikbaar voor een vak in de bachelor. Bij mijn weten is er momenteel geen soortgelijk boek op de markt.

Strang verwoordt ten slotte ook nog een uitgesproken didactische mening: "I have certainly learned that projects are far better than exams. Students ask their own questions and write their own programs. From now on, **projects!**"

Michiel Hochstenbach



Jean-Pierre Tignol

Galois' Theory of Algebraic Equations (2nd ed.)

World Scientific, 2016

324 p., prijs £65.00

ISBN 9789814704694

Zoals bekend gaat de Galoistheorie over de voorwaarden waaronder er radicale oplossingen bestaan voor de nulpunten van polynomen in één onbekende. Voor de polynomen van lagere graad zijn er ook expliciete formules voor radicale oplossingen gevonden. Het boek van Tignol gaat over deze thematiek; hij kiest een historische route en grijpt daarbij terug op primaire bronnen; dat is mede wat dit boek bijzonder maakt.

Het boek bestaat uit veertien hoofdstukken en twee appendices. Per hoofdstuk zijn er opgaven en oplossingen. Het valt op dat hoofdstuk 9 in het midden van het boek gaat over de hoofdstelling van de algebra met een bewijs van Girard. Het valt ook op dat de hoofdstelling van de Galoistheorie in een appendix is opgenomen. Hoofdstuk 14 over Galois maakt dan ook geen gebruik van deze stelling. In dit belangrijkste hoofdstuk volgt Tignol zorgvuldig de *Mémoire sur les conditions de résolubilité des équations par radicaux* van Galois. In de meeste boeken over Galoistheorie wordt de hoofdstelling van de algebra bewezen met de hoofdstelling van de Galoistheorie. Waarom staan die stellingen dan bij Tignol omgedraaid? Hij wil zich bezighouden met algebraïsche vergelijkingen van polynomen; dit komt ook naar voren in de titel van het boek. In drie hoofdstukken wordt ingegaan op polynomen en de hoofdstelling van de symmetrische polynomen wordt bewezen volgens de methode van Waring. Het is mogelijk om met deze laatstgenoemde stelling ook de hoofdstelling van de Galoistheorie te bewijzen, waarover later. Een drietal hoofdstukken is gewijd aan cyclotomische polynomen; de theorieën van de Moivre, Vandermonde en Gauss komen aan bod. In hoofdstuk 13 vindt men de stelling over de *natuurlijke irrationaliteiten* bewezen door Abel; Tignol verklaart ook waarom die stelling zo genoemd wordt. Het bewijs van Abel over de onoplosbaarheid in radicalen van de algemene vergelijking van graad hoger dan 4, vindt men in dit hoofdstuk. Uiteraard is er in het boek aandacht voor de oplossingen in radicalen van de nulpunten van polynomen van de tweede, derde en vierde graad: Cardano, Ferrari, Viète, Descartes en Tschirnhaus. Het werk *Réflexions sur la résolution algébrique des équations* van Lagrange wordt in hoofdstuk 10 uitgebreid toegelicht; bronverwijzingen vind je overal terug bij Tignol.

In het hoofdstuk over Galois legt Tignol de Galoistheorie uit aan de hand van de *Mémoire sur les conditions de résolubilité des*

équations par radicaux van Galois; Tignol voegt eigen bewijzen toe. De *Mémoire* is zoals bekend moeilijk toegankelijk. Ze is lastig te lezen omdat het begrippenkader vaak meerduidig is; u kunt daarover lezen in de introductie van het boek *The Mathematical Writings of Évariste Galois* van Peter M. Neumann. Het perspectief van waaruit Galois naar het probleem kijkt verschilt van het tegenwoordige perspectief via automorfismen, bij hem staan centraal de zogeheten *arrangementgroepen* en *substitutiegroepen*. Tignol besteedt aan deze begrippen veel aandacht en vergezelt ze van stellingen en opgaven; de lezer moet even wennen aan deze begrippen maar het helpt enorm bij het beter begrijpen van de *Mémoire* van Galois. Dit hoofdstuk over Galois is in de hier besproken tweede editie volledig nieuw en hierin verschilt het boek dan ook van de eerste druk.

Nu eerst het begrip *arrangementgroep* zoals behandeld door Tignol. Als R de verzameling is van de verschillende wortels van het polynoom van graad n dat onderzocht wordt op het bestaan van radicale wortels en $R = \{r_1, r_2, \dots, r_n\}$, dan is een *arrangement* een n -tupel waarbij de elementen van R in een of andere volgorde gerangschikt zijn. $A(R)$ is de verzameling van alle arrangementen van R en $\text{Sym}(R)$ is de groep van alle bijecties van R . Aan elk tweetal arrangementen α en β uit $A(R)$ is een unieke bijectie (Galois: substitutie) uit $\text{Sym}(R)$ toegevoegd die α in β overvoert, deze bijectie wordt genoteerd als $\left(\frac{\alpha}{\beta}\right)$. Galois noemt volgens Tignol een verzameling arrangementen G een *arrangementgroep* als er voor alle arrangementen $\alpha, \beta, \gamma \in G$ een arrangement $\delta \in G$ is zodanig dat $\left(\frac{\alpha}{\beta}\right) = \left(\frac{\gamma}{\delta}\right)$. Men kan het ook als volgt zien: als de substitutie $\left(\frac{\alpha}{\beta}\right)$ arrangement α overvoert in β dan behoort $\left(\frac{\alpha}{\beta}\right)(\gamma)$ ook tot G voor elke γ . Als we een arrangementgroep G hebben dan kunnen we daar een *substitutiegroep* $\Pi(G) \subset \text{Sym}(R)$ aan toevoegen, waarbij het woord groep hier in de huidige betekenis gebruikt wordt: $\Pi(G) = \{\left(\frac{\alpha}{\beta}\right) \mid \alpha, \beta \in G\}$. Belangrijk in het verhaal van Tignol en Galois zijn de zogeheten *normale partities* van een arrangementgroep G : als $G = G_1 \cup G_2 \cup \dots \cup G_m$ een partitie is van G bestaande uit arrangementgroepen van G dan heet die partitie normaal als $\Pi(G_i) = \Pi(G_j)$ voor alle i en j , en als er voor $i = 2, 3, \dots, n$ een $\sigma_i \in \Pi(G)$ bestaat zodanig dat $G_i = \sigma_i(G_1)$.

We illustreren aan de hand van het tekstfragment uit de *Mémoire* dat over het bestaan van radicale oplossingen van de algemene vierdegraadsvergelijking gaat, hoe deze begrippen bij Galois functioneren. Het hierna gekozen fragment staat in de *Mémoire* van Galois vlak voor proposition VI. De Engelse vertaling staat op pagina 125 en 127 in het bovenvermelde boek van Peter M. Neumann. Lees hierna voor *substitution* het woord *arrangement* dan is het duidelijker wat Galois bedoelt. Het komt er op neer dat Galois laat zien dat de bijbehorende arrangementgroep van 24 arrangementen 'oplosbaar' is in een keten van vijf normale arrangementgroepen.

Scholium. It is easy to observe this process in the known solution of general equations of the 4th degree. Indeed, these equations are solved by means of an equation of the 3th degree, which itself requires the extraction of a square root. In the natural sequence of ideas, it is therefore with this square root that one must begin. Adjoining this square root to the equation of the 4th degree, the group of the equation, which contains 24 substitutions in all, is decomposed into two which contain only 12 of them. Denoting the roots by a, b, c, d , here is one of these groups:

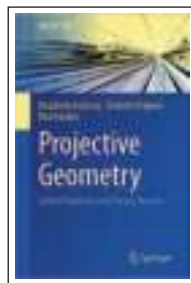
$abcd,$	$acdb,$	$adbc,$
$badc,$	$cabd,$	$dacb,$
$cdab,$	$dbac,$	$bcad,$
$dcba,$	$bdca,$	$cbda.$

Now this group is itself partitioned into three groups, as indicated by Theorems II and III. Thus, by the extraction of a single radical of the 3rd degree, there remains simply the group $abcd, badc, cdab, dcba$. This group in turn is partitioned into two groups: $abcd, badc$, and $cdab, dcba$. Thus after a simple extraction of a square root, there will remain $abcd, badc$, which finally is solved by a simple extraction of a square root. In this way one obtains either the solution of Descartes or that of Euler. For, although after the solution of the auxiliary equation of the 3rd degree, the latter would extract three square roots, it is known that two suffice, because the third may be obtained from them rationally.

We zien hierboven dat de arrangementgroep van 24 arrangementen waarmee Galois start, opgesplitst wordt in een partitie van twee arrangementgroepen van omvang 12. Die worden elk opgesplitst in drie arrangementgroepen van omvang 4, enzovoort. Alle partities zijn normaal met bijbehorende substitutiegroepen S_4, A_4, V_4, Z_2 en $\{\text{id}\}$.

In het voorwoord schrijft Tignol dat hij ervan overtuigd is dat het bestuderen van primaire teksten zijn vruchten afwerpt. Welnu, ik kan u verzekeren dat dit juist is; het bestuderen van de primaire teksten waar Tignol naar verwijst heeft mij in staat gesteld de hoofdstelling van de Galoistheorie te bewijzen zonder het lemma van Artin–Dedekind maar gebruikmakend van de hoofdstelling van de symmetrische polynomen. Het idee ontstond bij het bestuderen van bovenstaand voorbeeld uit de *Mémoire*. Als u meer wilt weten zie <https://arxiv.org/abs/1905.00894>.

Tot slot: het boek van Tignol draagt veel bij om de *Mémoire* toegankelijk te maken; dat komt vooral door de aandacht voor *arrangementgroepen* en *substitutiegroepen*. Het hoofdstuk over Galois is elementair maar zeker geen makkelijk gedeelte. Vanwege zijn uitgebreide toelichtingen op de primaire teksten van wiskundigen die zich over de problematiek van radicale oplossingen hebben gebogen, is het een zeer waardevol boek waaraan u veel plezier kunt beleven. *Read the Masters.* Math Dicker



Elisabetta Fortuna, Roberto Frigerio, Rita Pardini

**Projective Geometry
Solved Problems and Theory Review**

Unitext 104
Springer, 2016
xii + 266 p., prijs €24,25
ISBN 9783319428239

De titel van het boek zet je misschien een beetje op het verkeerde been, want het boek gaat niet over klassieke projectieve meetkunde met de stellingen van Pascal, Brianchon, enzovoort, zoals bijvoorbeeld in het boek *Projectieve meetkunde* van Heyting of in Coxeters *Projective geometry*, maar eerder over elementaire berekeningen van algebraïsch meetkundige aard in projectieve

ruimten. De eerste zestig pagina's beschrijven in kort bestek onder andere projectieve ruimten, projectieve transformaties, coördinatensystemen, dualiteit, de dubbelverhouding, hyper(opper)vlakken, doorsnijdingen, kwadrieken en krommen. Dat gebeurt op een zorgvuldige, goed opgebouwde en prettig leesbare manier, maar zonder bewijzen. Voor bewijzen van resultaten wordt doorgaans naar de literatuur verwezen of naar de opgaven. Het boek is redelijk elementair en de algebraïsch-meetkundige machinerie blijft dan ook achterwege, zelfs de term variëteit valt niet. Werken met polynomen en coördinaten staat centraal. Na deze samenvatting van de theorie volgen hoofdstukken met in detail uitgewerkte opgaven (soms zijn zelfs meerdere uitwerkingen toegevoegd). Daarin komen dan trouwens wel weer klassieke resultaten zoals de stelling van Pascal aan bod. Die ruim tweehonderd opgaven vormen de kern van het boek en stellen de lezer in staat zich goed in te werken in de bij de diverse onderwerpen behorende technieken. Het niveau van de opgaven varieert van redelijk rechtoe-rechtaan tot duidelijk meer geavanceerd in de zin dat voornamelijk handige keuzes (bijvoorbeeld coördinaten) gemaakt dienen te worden om een berekening of bewijs tot een goed einde te kunnen brengen. Van de eerste soort is de vraag een vergelijking van een kwadriek te bepalen door vier punten in het (projectieve) vlak en bovendien rakend aan een gegeven lijn door een van de gegeven punten. Van

de tweede soort is een opgave over de snijmultipliciteit te P van twee krommen die elkaar snijden te P en daar dezelfde raaklijn hebben (de snijmultipliciteit is in het boek ingevoerd via resultaten). De opgaven laten goed zien hoe ver je met de beperkte theorie kunt komen.

Het boek is vertaald uit het Italiaans, maar de Italiaanse sfeer is daarmee niet geheel verloren gegaan. Die proef je niet alleen in de focus op klassieke algebraïsch-meetkundige technieken, maar ook in het symbool van een geurend koffiekopje dat bij de, in de ogen van de auteurs, lastiger opgaven is geplaatst: "Take it easy, get yourself a cup of coffee or tea, arm yourself with patience and determination, and you will succeed in the end." De auteurs hebben bliksemschichten geplaatst bij opgaven die volgens hen zorgen voor een dieper begrip of die een verband verhelderen.

Het boek is nuttig als (inspiratie)bron van opgaven bij diverse soorten cursussen meetkunde met een algebraïsch tintje. Soms zou bij de opgaven nog een regel toegevoegd kunnen worden die de intuïtie of de strategie toelicht. Hetzelfde geldt voor de theoriebeschrijving: soms mis je een korte toelichting op gemaakte keuzes. Maar dat is detailkritiek. Zo'n boek dat je gedegen laat oefenen met de voornaamste technieken zou wat mij betreft ook welkom zijn bij meer geavanceerde onderwerpen uit de algebraïsche meetkunde.

Hans Sterk

Recent verschenen publicaties. Als u een van deze boeken wilt bespreken of als u suggesties heeft voor andere boeken voor deze rubriek, laat dit dan per e-mail weten aan reviews@nieuwarchief.nl.



Frans Oort (ed.)
Open Problems in Arithmetic Algebraic Geometry

International Press of Boston, 2019
ISBN 9781571463739
intlpress.com/site/pub/pages/books/items/00000528/



A.A. Ivanov
The Mathieu Groups

Cambridge University Press, 2018
ISBN 9781108429788
cambridge.org/9781108429788



Andrew Granville and Jennifer Granville
Prime Suspects
The Anatomy of Integers and Permutations

Princeton University Press, 2019
ISBN 9780691149158
press.princeton.edu/books/paperback/9780691149158/prime-suspects

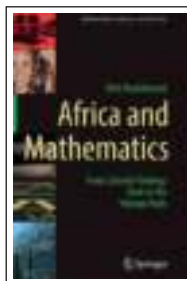


Mircea Pitici (ed.)
The Best Writing on Mathematics 2019

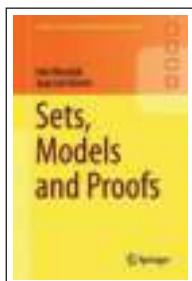
Princeton University Press, 2019
ISBN 9780691198354
press.princeton.edu/books/paperback/9780691198354/the-best-writing-on-mathematics-2019



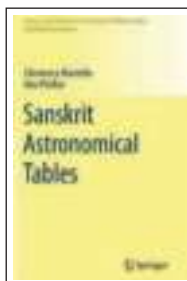
M. Ram Murty, Brandon Fodden
Hilbert's 10th Problem
An Introduction to Logic, Number Theory, and Computability
American Mathematical Society, 2019
 ISBN 9781470443993
bookstore.ams.org/stml-88



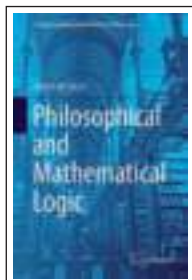
Dirk Huylebrouck
Africa and Mathematics
From Colonial Findings Back to the Ishango Rods
Springer, 2019
 ISBN 9783030040369
springer.com/9783030040369



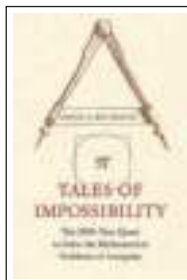
Ieke Moerdijk, Jaap van Oosten
Sets, Models and Proofs
Springer, 2019
 ISBN 9783319924137
springer.com/9783319924137



Clemency Montelle, Kim Plofker
Sanskrit Astronomical Tables
Springer, 2019
 ISBN 9783319970363
springer.com/9783319970363



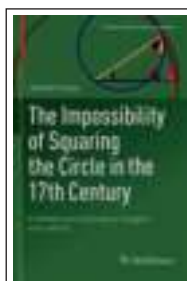
Harrie de Swart
Philosophical and Mathematical Logic
Springer, 2019
 ISBN 9783030032531
springer.com/9783030032531



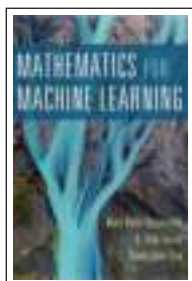
David S. Richeson
Tales of Impossibility
The 2000-Year Quest to Solve the Mathematical Problems of Antiquity
Princeton University Press, 2019
 ISBN 9780691192963
press.princeton.edu/books/hardcover/9780691192963/tales-of-impossibility



Michael Tsfasman, Serge Vladut, Dmitry Nogin
Algebraic Geometric Codes: Advanced Chapters
American Mathematical Society, 2019
 ISBN 9781470448653
bookstore.ams.org/surv-238



Davide Crippa
The Impossibility of Squaring the Circle in the 17th Century
A Debate Among Gregory, Huygens and Leibniz
Birkhäuser, 2019
 ISBN 9783030016371
springer.com/9783030016371



Marc Peter Deisenroth, A. Aldo Faisal, Cheong Soon Ong
Mathematics for Machine Learning
Cambridge University Press, 2020
 ISBN 9781108455145
cambridge.org/9781108455145



Jennifer Beineke, Jason Rosenhouse (eds.)
The Mathematics of Various Entertaining Subjects: Volume 3: The Magic of Mathematics
Princeton University Press, 2019
 ISBN 9780691182575
press.princeton.edu/books/hardcover/9780691182575/the-mathematics-of-various-entertaining-subjects

Problemen

| Problem Section

This Problem Section is open to everyone; everybody is encouraged to send in solutions and propose problems. Group contributions are welcome. We will select the most elegant solutions for publication. For this, solutions should be received before **15 January 2020**. The solutions of the problems in this issue will appear in the next issue.

Problem A (proposed by Onno Berrevoets)

Let $F \in \mathbb{Z}[X]$ be a monic polynomial of degree 4. Let $A \subset \mathbb{Z}$ with $\#A \geq 5$ be such that for all $a \in A$ we have $2^{2019} \mid F(a)$. Prove that there exist distinct $a, a' \in A$ such that $a \equiv a' \pmod{2^{202}}$.

Problem B (proposed by Jan Draisma)

Let $n \in \mathbb{Z}_{\geq 2}$ and let S be a non-empty subset of $\{1, 2, \dots, n-1\}$.

1. Prove that there exists an n -th root of unity $z \in \mathbb{C}$ such that the real part of $\sum_{i \in S} z^i$ is smaller than or equal to $-\frac{1}{2}$.
2. Suppose that n is not a power of 2. Prove that the $-\frac{1}{2}$ in the previous part is optimal in the following sense: there exists a non-empty subset S of $\{1, 2, \dots, n-1\}$ such that for all n -th roots of unity z , the real part of $\sum_{i \in S} z^i$ is at least $-\frac{1}{2}$.

Problem C (proposed by Onno Berrevoets)

Let $n \geq 1$ be an integer. Denote by S_n the permutation group on $\{1, \dots, n\}$. An element $\sigma \in S_n$ is called *representable* if there exists a polynomial $f \in \mathbb{Z}[X]$ such that for all $x \in \{1, \dots, n\}$ we have $\sigma(x) = f(x)$. What is the number of representable elements of S_n ?

Edition 2019-3 We received solutions from Hans Samuels Brusse, Hans van Luipen and Thijmen Krebs.

Problem 2019-3/A (proposed by Hendrik Lenstra)

Let $\tau: \mathbb{Z}_{>0} \rightarrow \mathbb{Z}_{>0}$ be the map such that $\tau(n)$ is the number of positive divisors of n for any $n \in \mathbb{Z}_{>0}$. Show that there are uncountably many maps $f: \mathbb{Z}_{>0} \rightarrow \mathbb{Z}_{>0}$ such that $f \circ f = \tau$. Note: This is a follow-up to Problem A of the March 2018 edition.

Solution This solution is based on the solution by Thijmen Krebs.

We can construct uncountably many such maps f as follows. Let $S_1 \cup S_0$ be a partition of the odd primes with S_1 infinite, and let $g_1: S_1 \rightarrow S_0$ be any surjection. Inductively on $i \geq 2$, let $S_i := \tau^{-1}(S_{i-2})$ and pick any surjection $g_i: S_i \rightarrow S_{i-1}$ such that for all $n \in S_{i-2}$, we have $g_i(\tau^{-1}(n)) = g_{i-1}^{-1}(n)$ (and in particular, $g_{i-1} \circ g_i = \tau|_{S_i}$). Note that such a surjection exists because $\tau^{-1}(n)$ is (countably) infinite for any $n \in \mathbb{Z}_{>1}$. For example, $\tau^{-1}(n)$ contains p^{n-1} for all primes p .

It is easy to verify that the S_i are disjoint. Moreover, $(S_i)_{i \geq 0}$ forms a partition of $\mathbb{Z}_{>2}$, since for all $n > 2$ we have $2 \leq \tau(n) < n$, meaning there is an $i > 0$ such that $\tau^i(n) = 2$ (which means either $n \in S_{2i-1}$ or $n \in S_{2i-2}$). We now define f by $f(1) = 1$, $f(n) = 2$ for $n \in \{2\} \cup S_0$, and $f(n) = g_i(n)$ for $n \in S_i$ with $i \geq 1$. This gives a well-defined map from $\mathbb{Z}_{>0} \rightarrow \mathbb{Z}_{>0}$. We readily verify that $f^2(1) = 1 = \tau(1)$, $f^2(n) = 2 = \tau(n)$ for n prime, and $f^2(n) = g_{i-1}(g_i(n)) = \tau(n)$ for $n \in S_i$ with $i \geq 2$. Since there are uncountably many infinite subsets of the primes, the choice of S_1 is already sufficient to show there are uncountably many possible f satisfying $f \circ f = \tau$.

Problem 2019-3/B (proposed by Daan van Gent)

Let X be a set and $*$: $X^2 \rightarrow X$ a binary operator satisfying the following properties:

1. $(\forall x \in X) x * x = x$;
2. $(\forall x, y, z \in X) (x * y) * z = (y * z) * x$.

Show that there exists an injective map $f: X \rightarrow 2^X$ that for all $x, y \in X$ satisfies $f(x * y) = f(x) \cap f(y)$.

Solution This solution is based on the solutions by Hans van Luijpen and Hans Samuels Brusse.

We first prove that $*$ is commutative. We have

$$(x * y) * x = (y * x) * x = (x * x) * y = x * y.$$

Using this and the given properties of $*$, we find

$$x * y = (x * y) * (x * y) = (y * (x * y)) * x = ((x * y) * x) * y = (x * y) * y = (y * y) * x = y * x,$$

so indeed $*$ is commutative. We can now also prove that $*$ is associative, since

$$(x * y) * z = (y * z) * x = x * (y * z).$$

For $a \in X$, we define $f(a) = \bigcup_{x \in X} \{a * x\}$. If $c \in f(a) \cap f(b)$, there exist $x, y \in X$ such that $c = a * x = b * y$. This means

$$c = a * x = (a * a) * x = a * (a * x) = a * (b * y) = (a * b) * y = y * (a * b) \in f(a * b).$$

Conversely, if $c \in f(a * b)$, there is $x \in X$ such that $c = (a * b) * x$, so $c = a * (b * x) \in f(a)$, and likewise, $c = (b * a) * x = b * (a * x) \in f(b)$, so we find $c \in f(a) \cap f(b)$. We conclude

$$f(a * b) = f(a) \cap f(b).$$

It remains to show that f is injective. Suppose that $f(a) = f(b)$. Then there are $x, y \in X$ such that $b = a * x$ and $a = b * y$. Observe that

$$a * b = (b * y) * b = (b * b) * y = b * y = a,$$

and by a symmetrical argument, we conclude

$$a = a * b = b * a = b.$$

So f is injective, as was to be shown.

Problem 2019-3/C (proposed by Onno Berrevoets)

- a. Does there exist an infinite set $X \subset \mathbb{Z}_{>0}$ such that for all pairwise distinct $a, b, c \in X$ and all $n \in \mathbb{Z}_{>0}$ we have $\gcd(a^n + b^n, c) = 1$?
- b*. Does there exist an infinite set $X \subset \mathbb{Z}_{>0}$ such that for all pairwise distinct $a, b, c, d \in X$ and all $n \in \mathbb{Z}_{>0}$ we have $\gcd(a^n + b^n + c^n, d) = 1$?

Solution We received a solution to part a by Thijmen Krebs. Part b remains open.

Let X be the set of squares p^2 for each prime $p \equiv 3 \pmod{4}$. We verify that $p^{2n} + q^{2n}$ is relatively prime to r^2 for any $n \in \mathbb{Z}_{>0}$. Indeed, if it were not, then we would have $p^{2n} + q^{2n} \equiv 0 \pmod{r}$. Since q is invertible modulo r , we can rewrite this as $(pq^{-1})^{2n} \equiv -1 \pmod{r}$. This would give a contradiction, since the left hand side is a square, but -1 is not a square modulo r if $r \equiv 3 \pmod{4}$.

