

Inhoud | Contents

Artikelen | Features

- 9 **Nieuws | News**
Indagationes Mathematicae 2009–2018
Henk W. Broer
- 11 **Evenement | Event**
Eén programma, zoveel prijzen
Raf Bocklandt
- 12 **Evenement | Event**
Abelprijs toegekend aan Robert Langlands
Bas Edixhoven
- 19 **Evenement | Event**
Wolfprijs 2018: Een kleine suggestie met grote gevolgen
Raf Bocklandt
- 22 **Evenement | Event**
Fieldsmedaille voor Peter Scholze
Ben Moonen
- 26 **In Memoriam | Obituary**
Jan Aarts: Erudiete wetenschapper en bestuurder die oog had voor collega's, medewerkers en studenten
Jan van Mill e.a.
- 32 **Onderwijs | Education**
Van A naar B
Swier Garst
- 34 **Evenement | Event**
Cuntz–Pimsner cross-pollination
Francesca Arici, Evgenios T.A. Kakariadis, Nadia S. Larsen
- 42 **Onderwijs | Education**
Computational thinking—een vooruitblik op het wiskundeonderwijs van de toekomst
Mark Timmer, Jos Tolboom
- 46 **Interview | Interview**
Een gesprek met Arjen Sevenster
Teun Koetsier
- 55 **Biografie | Biography**
Julius Wolff, deel 2: Geen humoristisch optimisme meer
Jan van Maanen

Rubrieken | Departments

- 3 **Redactioneel**
Robbert Fokink
- 4 **Agenda**
Margriet Oomen
- 6 **Nieuws**
Margriet Oomen
- 40 **Stoffelijke resten: Pisa**
Wieb Bosma
- 51 **Het keerpunt van Sible Schöne**
Daan Mulder
- 53 **In de verdediging**
Nicolaos Starreveld
- 68 **Boekbesprekingen**
Hans Cuypers, Hans Sterk
- 76 **Problemen**
Rob Eggermont

Uitgelicht



In dit nummer aandacht voor enkele prijswinnaars, waaronder een artikel over Fieldsmedaillewinnaar Peter Scholze, geschreven door Ben Moonen.



Swier Garst legt uit wat zijn LIO-onderzoek inhoudt.

Colofon

Het Nieuw Archief voor Wiskunde is een uitgave van het Koninklijk Wiskundig Genootschap en verschijnt vier maal per jaar. Het tijdschrift richt zich op eenieder die zich beroepsmatig met wiskunde bezighoudt, als academisch of industrieel onderzoeker, student, leraar, journalist of beleidsmaker. Het stelt zich ten doel te berichten over ontwikkelingen in de wiskunde in het algemeen en in de Nederlandse wiskunde in het bijzonder.

ISSN 0028-9825

Adres

Nieuw Archief voor Wiskunde
Centrum Wiskunde & Informatica
Postbus 94079, 1090 GB Amsterdam
tel. 020-5924288
redactie@nieuwarchief.nl
www.nieuwarchief.nl

Hoofredactie

Raf Bocklandt (r.r.j.bocklandt@uva.nl)
Robbert Fokkink (r.j.fokkink@tudelft.nl)

Eindredactie/Bladmanager

Fred Drissen (fred@nieuwarchief.nl)

Redactie

Viktor Blåsjö (UU), Hans Cuypers (TU/e), Teun Koetsier (VU), Daan Mulder, Margriet Oomen (UL), Nicolaos Starreveld (UvA), Hans Sterk (TU/e), Mark Timmer (UT)

Problemenrubriek

Rob Eggermont (problems@nieuwarchief.nl)

Bureauredactie

Claartje Ottens

Illustraties

Ryu Tajiri

Vormgeving

Susanne Laws (omslag, begeleiding binnenwerk)
Kitty Molenaar (ontwerp)

Druk

Veldhuis Media

Advertenties

advertenties@nieuwarchief.nl

Koninklijk Wiskundig Genootschap

www.wiskgenoot.nl

Platform Wiskunde Nederland

www.platformwiskunde.nl

European Mathematical Society

www.euro-math-soc.eu

International Mathematical Union

www.mathunion.org

Koninklijk Wiskundig Genootschap

Het Koninklijk Wiskundig Genootschap (KWG) is een landelijke vereniging van beoefenaars van de wiskunde. In 1778 opgericht onder de zinspreuk: 'Een onvermoeide arbeid komt alles te boven' is het 's werelds oudste nationale wiskundegenootschap. Leden ontvangen het Nieuw Archief voor Wiskunde als onderdeel van hun lidmaatschap.

Bestuur

Jan Wiegerinck (UvA, voorzitter), Marije Elkenbracht (ABN AMRO, penningmeester), Sonja Cox (UvA, secretaris), Erik van den Ban (UU), Danny Beckers (VU), Theo van den Bogaart (HU), Marie-Collette van Lieshout (CWI), André Ran (VU), Mark Veraar (TUD)

Secretariaat

Koninklijk Wiskundig Genootschap, CWI
Postbus 94079, 1090 GB Amsterdam
wiskgenoot@wiskgenoot.nl
www.wiskgenoot.nl

Ledenadministratie KWG / Abonnementen

admin@wiskgenoot.nl, tel. 020-5924008
Wijzigingen of opzegging kunt u ook doorgeven door in te loggen op www.wiskgenoot.nl.

Contributie

Tarieven per jaar (bij betaling per automatische incasso krijgt u € 2,50 korting):

- gewoon lid: € 92,50
 - reciprociteitslid: € 72,50
 - gepensioneerden en werklozen: € 47,50
 - aio's, oio's, studenten: € 37,50 (max. 4 jaar)
 - lid zonder Nieuw Archief: € 52,50
- Studenten en pas afgestudeerden kunnen een jaar lang gratis lid worden.

Voor verzending van het Nieuw Archief naar het buitenland wordt een portotoeslag van € 10 in rekening gebracht.

Instituten in Nederland en buitenland kunnen zich abonneren op het Nieuw Archief voor Wiskunde voor € 100 (Nederland), € 110 (Europa) of € 112,50 (buiten Europa).

Members of foreign societies

Members of *SIAM*, the *Société Mathématique de France*, the *Gesellschaft für Angewandte Mathematik und Mechanik*, the *Deutsche Mathematiker-Vereinigung*, and of the *American, Australian, Belgian, Indian, London, Spanish, and South-African Mathematical Societies* living outside of the Netherlands pay € 72,50 instead of the full membership fee of € 92,50 a year. Conversely, these foreign societies, as well as the *VvS+OR* and the *NVORWO*, have reduced membership fees for KWG members. A postage charge of € 10 is added for members living abroad but in Europe, and a charge of € 12,50 for members living outside of Europe.

Exchange subscriptions

Koninklijk Wiskundig Genootschap Library
Centrum Wiskunde & Informatica
P.O. Box 94079, NL-1090 GB Amsterdam
KWG-exchange@cw.nl

Informatie voor auteurs

Kopij

Het Nieuw Archief voor Wiskunde is een geredigeerd tijdschrift. Kopij dient per e-mail te worden aangeboden aan kopij@nieuwarchief.nl. Uitgebreide informatie en auteursinstructies kunt u vinden op www.nieuwarchief.nl.

Volgende nummers

nummer	maand	verschijnen	deadline kopij
20(2)	juni	2019	verstreken
20(3)	september	2019	01-05-2019
20(4)	december	2019	01-08-2019
21(1)	maart	2020	01-11-2019

Instituutsleden

De publicaties van het Koninklijk Wiskundig Genootschap worden mede mogelijk gemaakt door de bijdragen van de volgende instituten.



Centrum Wiskunde & Informatica



Rijksuniversiteit Groningen



Universiteit van Amsterdam



Universiteit Leiden



Vrije Universiteit



Universiteit Utrecht



Technische Universiteit Eindhoven



Eurandom



Technische Universiteit Delft



Universiteit Twente



Radboud Universiteit Nijmegen



Freudenthal Instituut

Op het omslag

Fibonacci, wiens *Liber Abaci* de basis legde voor de moderne wiskunde, kreeg in 1863 een standbeeld in Pisa. In de nieuwe fotorubriek 'Stoffelijke resten' gaat Wieb Bosma op zoek naar tastbare herinneringen aan wiskundigen, zie pagina 40 en 41. Foto standbeeld: Wieb Bosma.

Geheugen

Maart 2019. Het is de maand van de Brexit. Na een halve eeuw zuchten onder het juk van Brussel nemen de Britten het heft weer in eigen handen. *Taking back control!* Het is niet de eerste keer dat de eilanders zich afzetten tegen het vaste land. In de vijftiende eeuw gingen ze massaal de *a* als een *e* uitspreken. En de *e* als een *i*, enzovoort. Enkel en alleen om anders te klinken dan de overkant van Het Kanaal. Als zeshonderd jaar later die overkant jouw taal overneemt en het klankverschil verloren gaat, dan is dat natuurlijk wel een beetje beangstigend. Brexit, dat is gewoon een identiteitscrisis. De scheiding tussen eiland en vasteland houdt het midden tussen een thriller en een soap. Zit er nog een twist in de tail?

Maart 2019. Het is de maand van de onderwijsstaking. De vakbond protesteert tegen de hoge werkdruk — één op de vijf leraren krijgt een burnout — en eist hogere salarissen. Als we rondkijken in Europa zien we andere landen worstelen met uitgebrande leraren. In Frankrijk krijgt één op de zes leraren een burnout. In Duitsland één op de drie. Werkdruk en salaris lijken ongecorreleerd te zijn. Duitse leraren verdienen meer geld dan Nederlandse leraren, Franse leraren minder. Is meer salaris dan wel de oplossing? Moet het niet elders worden gezocht? Ook aan de overkant van Het Kanaal staat het water tot aan de lippen. *Audit culture causes staff burnout in schools*, kopte The Guardian in november. Minder papierwerk in plaats van meer geld. Is dat misschien de weg tot (nog) beter onderwijs?

Maart 2019. Het is de maand van het eerste nummer van het twintigste deel van de vijfde serie van het *Nieuw Archief voor Wiskunde*. Hoe kan dit nummer helpen om ons wiskundeonderwijs (nog) beter te maken? Een moeilijke vraag waar voortdurend verschillende antwoorden op worden gegeven. In het artikel van Ben Moonen over Peter Scholze komt zijdelings het Heinrich-Hertz-Gym-

nasium in Berlijn ter sprake, een middelbare school die de nadruk legt op de natuurwetenschappen en veel topwiskundigen heeft afgeleverd. Hoe wordt een leerling met talent voor wiskunde een topwiskundige? In 1946 schreef de Amsterdamse psycholoog en wiskundige Adriaan de Groot een proefschrift over het verschil tussen een topschaker en een sterke schaker. Hij kwam tot de conclusie dat de topschaker niet sneller of dieper kan rekenen, maar wel meer partijen kan onthouden. Om een topschaker te kweken, moet je dus vooral het geheugen trainen. Zou dat ook zo zijn voor een topwiskundige?

Geheugen en herinneringen. De meeste artikelen in dit nummer vallen onder die noemer. Swier Garst kijkt terug op zijn jaren als leraar in onderzoek. Wieb Bosma verbeeldt de geschiedenis van de wiskunde in Pisa. Jan van Maanen beschrijft de lotgevallen van Julius Wolff tijdens de bezetting in de jaren veertig aan de hand van briefwisselingen. Arjen Sevenster vertelt over zijn leven in wiskunde, uitgeverij en poëzie. Er is een In Memoriam voor Jan Aarts. Hij was mijn promotor, wij kenden elkaar heel goed. Dan zijn er nog een paar heugelijke gebeurtenissen. De Abelprijs, de Wolfprijs en twee Fieldsmedailles gingen naar wiskundigen die werken aan het verband tussen getaltheorie, meetkunde en analyse. In verschillende artikelen worden de ontwikkelingen van de laatste decennia op dit gebied uit de doeken gedaan. Kortom, meer dan genoeg voer voor ons geheugen — afgeleid van het Proto-Germaanse *hugjaną* — in het Engels verbasterd tot *hug*. Zo brengt het einde van dit verhaal ons weer aan de andere kant van Het Kanaal. *Come on Britain, darling, let's give Europe a hug.* ☼

Robbert Fokkink, hoofdredacteur
Delft Institute of Applied Mathematics, TU Delft

Agenda

| Upcoming Events

1 januari – 31 december 2019

Spelen met wiskunde

Doe-tentoonstelling. Maak zelf een draaikolk en bouw je eigen brug. Ontdek hoe geluid eruitziet en speel als een kunstenaar met perspectief. Wiskunde is écht overal.

plaats Rijksmuseum Boerhaave, Leiden

info rijksmuseumboerhaave.nl

maart 2019

8 maart 2019

Nationale Rekencoördinator Dag

Dag voor rekencoördinatoren en leerkrachten, waar het rekenonderwijs van de basisschool centraal staat.

plaats Vergadercentrum Domstad, Utrecht

info nr.cd.sites.uu.nl

14 maart 2019

Tweede ronde Nederlandse Wiskunde Olympiade

De tweede ronde van de Nederlandse Wiskunde Olympiade speelt zich af op de universiteiten.

plaats universiteiten van Nederland

info wiskundeolympiade.nl

15 maart 2019

Mini-Workshop on Symplectic Geometry

Workshop georganiseerd door Oliver Fabert (VU) en Fabian Ziltener (UU) voor onderzoekers, promovendi en gevorderde masterstudenten die werken op het gebied van symplectic geometry.

plaats Universiteit Utrecht

info gqt.nl

15–16 maart 2019

Finale Wiskunde A-lympiade

De Wiskunde A-lympiade is een competitie voor leerlingen uit de bovenbouw havo/vwo, die wiskunde A in hun pakket hebben.

plaats Garderen

info www.fi.uu.nl/olympiade

19 maart 2019

W4 Kangaroo-wedstrijd

Wereldwijde Wiskundewedstrijd voor kinderen van groep 3 van de basisschool tot en met 6 vwo.

plaats basisscholen en middelbare scholen

info w4kangoeroe.nl

19–22 maart 2019

YES X: Understanding Deep Learning: Generalization, Approximation and Optimization

Young European Statisticians-workshop voor promovendi en postdocs in statistiek, optimalisatie en machine learning.

plaats Eindhoven

info eurandom.nl

25–29 maart 2019

Cyber Insurance and its Contribution to Cyber Risk Mitigation

Workshop vanuit het CYBECO-project. Over hoe cyberverzekeringen risico's op het web kunnen beperken.

plaats Lorentz Center@Oort, Leiden

info lorentzcenter.nl

25–29 maart 2019

YEP XV: Information Diffusion on Random Networks

15de Young European Probabilist-workshop over verspreiding van informatie in netwerken.

plaats Eindhoven

info eurandom.nl

28 maart 2019

Leve de Logica! Masterclass Logica 2019

Masterclass georganiseerd door het ILLC (UvA) voor wiskundedocenten die meer willen weten over logica als vak, en geïnteresseerd zijn in de band tussen logica en wiskunde.

plaats Amsterdam

info events.illc.uva.nl/MasterClass/Logica2019

april 2019

3 april 2019

Grote Rekendag 'Uit verhouding'

Een dag voor alle basisscholen in Nederland en Vlaanderen (groep 1 t/m 8) die helemaal in het teken staat van rekenen.

plaats basisscholen in Nederland en België

info grotrekendag.nl

7–13 april 2019

European Girls' Mathematical Olympiad

Europese wiskundewedstrijd speciaal voor meisjes.

plaats Kiev, Oekraïne

info egmo.org

Suggesties voor deze agenda zijn welkom.

Redacteur: Margriet Oomen

agenda@nieuwarchief.nl

8–12 april 2019

□ Symplectic Dynamics

Workshop mede georganiseerd door Holger Waalkens (RUG).

plaats Lorentz Center@Oort, Leiden

info lorentzcenter.nl

10–12 april 2019

□ 5th STAR Workshop on Random Graphs

Workshop over random graphs georganiseerd door het STAR-cluster.

plaats Rijksuniversiteit Groningen

info math.rug.nl

12 april 2019

□ Seminarium Computer Algebra Nederland (CAN)

Op het programma staan onder andere de oratie van Tim Dokchitser en de uitreiking van de Schoonschipprijs.

plaats Universiteit van Amsterdam

info bosma@math.ru.nl

23–24 april 2019

□ Nederlands Mathematisch Congres

55ste Nederlands Mathematisch Congres, jaarlijkse bijeenkomst van wiskundig Nederland. Met plenaire sprekers Barbara Gentz, Jan Hesthaven, Gábor Lugosi en Anke van Zuylen.

plaats Congrescentrum Koningshof, Veldhoven

info nmc2019.nl

25 april 2019

□ DIAMANT Symposium

Uitgenodigde sprekers zijn Nicole Megow (Universiteit Bremen) en Oriol Serra (UPC Barcelona).

plaats Congrescentrum Koningshof, Veldhoven

info websites.math.leidenuniv.nl/diamant

26–28 april 2019

□ Benelux Mathematical Olympiad

Jaarlijkse olympiade voor middelbare scholieren uit België, Nederland en Luxemburg.

plaats Nederland

info bxmo.org

mei 2019

6–10 mei 2019

□ Mathematics of Quantum Information Theory

Workshop georganiseerd door Jop Briët (CWI), Martijn Caspers (TUD), Bas Janssens (TUD), Mari Ozols (CWI) en Barbara Terhal (TUD).

plaats Lorentz Center@Snellius, Leiden

info lorentzcenter.nl

17 mei 2019

□ ECENT-ELWleR-conferentie

Jaarlijkse conferentie voor lerarenopleiders van lerarenopleidingen STEM (wiskunde/rekenen en natuurwetenschappen/techniek).

plaats Vergadercentrum Domstad, Utrecht

info elbd.sites.uu.nl

juni 2019

2–7 juni 2019

□ MAPSP 2019

Tweejaarlijkse workshop over scheduling.

plaats Hotel De Zeeuwse Stroom, Renesse

info sbe.maastrichtuniversity.nl/mapsp2019

11–14 juni 2019

□ 50 Years of Random Cluster Model

Workshop georganiseerd door Aernout van Enter (RUG) en Frank den Hollander (UL) ter ere van het vijftigjarig bestaan van het random cluster model.

plaats Lorentz Center@Oort, Leiden

info lorentzcenter.nl

17–21 juni 2019

□ Statistics Conference

Statistiekconferentie ter ere van de 60ste verjaardag van Aad van der Vaart.

plaats Marekerk, Leiden

info pub.math.leidenuniv.nl/~schmidthieberaj/aadbirthday

30 juni–5 juli 2019

□ ACM SIGMOD/PODS 2019

Jaarlijkse internationale conferentie voor database-onderzoekers, ontwikkelaars en datascience-beoefenaars met als doel het uitwisselen van resultaten, nieuwe technieken en ervaringen.

plaats Beurs van Berlage, Amsterdam

info sigmod2019.org

juli 2019

1–5 juli 2019

□ Data Science for Dynamical Systems

Workshop mede georganiseerd door Hermen Jan Hupkes (UL) en Martina Chirilus-Bruckner (UL).

plaats Lorentz Center@Oort, Leiden

info lorentzcenter.nl

14–22 juli 2019

□ International Mathematical Olympiad (IMO)

Internationale wiskundecompetitie voor middelbare scholieren.

plaats Bath, Verenigd Koninkrijk

info imo2019.uk

28 juli–3 augustus 2019

□ International Mathematics Competition for University Students 2019

Internationale wiskundewedstrijd voor studenten.

plaats Blagoevgrad, Bulgarije

info imc-math.org.uk

augustus 2019

23–24 augustus 2019

□ Vakantiecursus 2019

Vakantiecursus van PWN voor leraren, studenten van lerarenopleidingen en voor andere belangstellenden. Dit jaar is het thema ‘Deep Learning’.

plaats Technische Universiteit Eindhoven

info platformwiskunde.nl/vakantiecursus

30–31 augustus 2019

□ Vakantiecursus 2019

Vakantiecursus van PWN voor leraren, studenten van lerarenopleidingen en voor andere belangstellenden. Dit jaar is het thema ‘Deep Learning’.

plaats CWI, Amsterdam

info platformwiskunde.nl/vakantiecursus

Nieuws

| News

Deze rubriek is een kroniek van wiskundige activiteiten in Nederland. Toekomstige activiteiten worden aangekondigd en van voorbije activiteiten wordt verslag gedaan. Wilt u uw aankondiging of verslag in deze rubriek geplaatst zien? Stuur ons dan uw bijdrage, zo mogelijk met illustratie. De redactie behoudt zich het recht voor berichten te weigeren of in te korten.

Redacteur: Margriet Oomen
 nieuws@nieuwarchief.nl

Rekentoets vanaf volgend schooljaar afgeschaft

In november werd nog besloten dat rekenen weer nadrukkelijk mee gaat tellen in het voortgezet onderwijs en het mbo, door het als apart vak te toetsen in het schoolexamen en ook op de cijferlijst weer te geven. Ondertussen is dit besluit begin februari alweer teruggedraaid door het aannemen van twee moties in de Tweede Kamer: vanaf schooljaar 2019–2020 zal er géén centrale rekentoets meer zijn en zal er ook geen cijfer voor rekenen meer op de cijferlijst komen te staan.

De nieuwe plannen stellen voor om al sneller het alternatief voor de rekentoets, aangedragen door de Nederlandse Vereniging van Wiskundeleraren (NVvW), in te voeren. Dit alternatief omvat het integreren van rekenen en wiskunde, waarbij het aanleren van rekenvaardigheden op havo/vwo voornamelijk in de onderbouw bij het vak wiskunde plaatsvindt. In de bovenbouw worden rekenvaardigheden vervolgens onderhouden bij wiskunde én de meeste andere vakken. Het slagen voor het examen van wiskunde A, B of C wordt daarna als voldoende bewijs beschouwd voor dat de rekenvaardigheden van een leerling op orde zijn.

Voor de kleine groep havo-leerlingen zonder wiskunde in hun pakket wordt aangedragen om een rekenmodule met een bijbehorende toets of schoolexamen in te voeren. Het advies van de NVvW biedt nog geen kant-en-klare plannen voor een dergelijke module, maar draagt aan dat dit kan worden meegenomen binnen de in ontwikkeling zijnde curriculumherziening van Curriculum.nu. Het valt nog te bezien wat er in de tussentijd met deze groep leerlingen zal gebeuren wat betreft de toetsing van rekenvaardigheden.

Voor het vmbo stelt de NVvW voor om twee wiskundevakken in te voeren, een voor alle leerlingen verplicht vak met de basisstof (gelijk voor vmbo-B, vmbo-K en vmbo-TL) en een verdiepend vak voor wie meer wil (dat ook verschillend van inhoud zal zijn voor de drie leerwegen).

De toekomst zal moeten uitwijzen wat de precieze invulling van al deze plannen zal zijn, evenals of ze niet ook alweer voortijdig door nieuwe moties zullen worden gewijzigd. *Mark Timmer*

Frank den Hollander wint Humboldt-onderzoeksprijs

Professor Frank den Hollander, Universiteit Leiden, heeft de Humboldt-onderzoeksprijs gewonnen. Deze prijs wordt uitgereikt aan onderzoekers die baanbrekende resultaten hebben behaald in hun vakgebied. De prijs ter waarde van 60.000 euro, stelt voorstaande wetenschappers in staat om samen te werken met Duitse collega's in langlopende onderzoeksprojecten aan Duitse universiteiten. Samen met Andreas Greven (Universiteit Erlangen Nurnberg) onderzoekt Frank den Hollander stochastische modellen voor genetische evolutie. Met Anton Bouvier (Universiteit Bonn) bestudeert hij metastabiliteit en faseovergangen in interacting particle systems. Professor den Hollander werd genomineerd door Greven en Bouvier en zal de beurs gebruiken om intensief met beide onderzoekers samen te werken. *eurandom.tue.nl*

Katerina Smetana wint Prof. De Winterprijs

Assistant professor Katerina Smetana (Universiteit Twente) heeft de Prof. De Winterprijs gewonnen. Deze internationale prijs wordt jaarlijks uitgereikt aan een buitengewoon vrouwelijk talent in de

wetenschap. De prijs van 2500 euro is een erkenning voor doorslaggevende wetenschappelijke resultaten en een aanmoediging om een wetenschappelijke carrière verder uit te bouwen. Professor Katerina Smetana doet onderzoek naar wiskunde achter multiscale modellen. Dit zijn modellen die zowel in ruimte als tijd verschillende schalen kennen. Bijvoorbeeld modellen voor seismische golven, complexe rotsstructuren en weersvoorspellingen kennen verschillende ruimte-tijdschalen. Numerieke resultaten voor dit soort modellen kosten veel rekenkracht. Met nieuwe randomized algoritmes behaalde Katerina Smetana nauwkeurige resultaten voor multiscale modellen, terwijl er aanzienlijk minder rekenkracht nodig was dan in de oude algoritmes.

utwente.nl

Jean Bourgain overleden

Op 22 december is de Belgische wiskundige Jean Bourgain op 64-jarige leeftijd overleden. Jean Bourgain werd gezien als een van de belangrijkste wiskundigen van onze tijd. Hij bracht een nieuw perspectief op veel langdurig openstaande vraagstukken en vermoedens in verschillende wiskundige vakgebieden, waaronder de getaltheorie, de kansrekening en de statische fysica. Zijn inzichten op het gebied van *Banach spaces*, *ergodic theory*, *partial differential equations* en *spectral theory* zijn niet meer weg te denken uit de hedendaagse wiskunde. Jean Bourgain ontving vele prijzen en onderscheidingen gedurende zijn wiskundige carrière, waaronder in 1994 de Fieldsmedaille.

ias.edu



Nieuw priemgetal ontdekt

The Great Internet Mersenne Prime Search (GIMPS) heeft een nieuw priemgetal ontdekt. De computer van vrijwilliger Patrik Laroche uit Ocala Florida ontdekte op 7 december 2018 het priemgetal $2^{82589933} - 1$. Het nieuwe priemgetal is meer dan een half miljoen decimalen groter dan het vorige priemgetal dat ontdekt werd. Het GIMPS-project is in 1996 gestart door George Woltman. Momenteel staat het project onder leiding van professor Chris Cadwell. Iedereen kan via de website van GIMPS, software downloaden en zelf met behulp van een computer nieuwe priemgetallen gaan zoeken.

mersenne.org

Sir Micheal Atiyah overleden

Op 14 januari is de Britse wiskundige Sir Michael Atiyah overleden. Atiyah behoorde tot de invloedrijkste wiskundigen van de afgelopen eeuw en is vooral bekend om zijn indextheorie die de kloof tussen de theoretische natuurkunde en de wiskunde overbrugt. De indextheorie, die Atiyah samen met wiskundige Isadore Singer ontwikkelde, bepaalt met behulp van topologie hoeveel mogelijke oplossingen een differentiaalvergelijking heeft. Zelf omschreef Atiyah zijn indextheorie als “a bit of black magic”. Behalve het verenigen van wiskunde en natuurkunde verbond Atiyah met zijn theorie ook veel verschillende gebieden binnen de wiskunde. Sir Michael Atiyah ontving voor zijn werk in 1966 de Fieldsmedaille en in 2004 de Abelprijs.

newton.ac.uk



Nieuwe podcastserie ‘De Fascinatievolger’

Als nieuwsgierigheid de motor is en fascinatie de richtingaanwijzer, waar kom je dan terecht? In de Meromorf Press-podcast interviewt Judith Lengkeek (Verte Vertelling) een serie wetenschappers over de rol die nieuwsgierigheid en fascinatie in hun werk speelt. Verschillende afleveringen gaan over wiskunde, Lengkeek interviewt onder anderen professor Peter Stevenhagen (UL) en dr. Janne Kool. Daarnaast is er een speciale aflevering over het congres Mathematics of Planet Earth. Alle afleveringen zijn online te beluisteren via de website van Meromorf Press.

meromorphpress.co.uk

Arjan Cornelissen wint ASML Afstudeerprijs

Arjan Cornelissen, student aan de TU Delft, heeft de ASML Afstudeerprijs voor beste masterscriptie gewonnen. In 2014 won Arjan Cornelissen al een Jong Talent Aanmoedigingsprijs. In zijn scriptie beschrijft Cornelissen nieuwe kwantum-algoritmes om afgeleiden van functies te berekenen met behulp van kwantumcomputers. Omdat het berekenen van afgeleiden essentieel is voor het optimaliseren van functies, heeft de scriptie veel toepassingen. De jury preeste de scriptie vanwege zijn diversiteit en wiskundige diepgang gecombineerd met directe relevantie in toepassingen. Daarnaast bevat de 170 pagina's tellende scriptie een begrijpelijke introductie in de kwantumtheorie.

khmw.nl

Jong Talent Aanmoedigingsprijzen uitgereikt

De KHMW (Koninklijke Hollandse Maatschappij der Wetenschappen) heeft op 26 november de Jong Talent Aanmoedigingsprijzen uitgereikt voor de beste eerstejaarswiskundestudenten. Tijdens de feestelijke ceremonie ontvingen Justin Baars (UvA), Ludo Dekker (UU), Wietze Koops (RUG), Bas Korbee (VU), Tein van der Lugt (RU), Matthew Maat (UT), Maarten Markering (UL), Julian Sanders (TUD) en Jorn van Voorthuizen (TUE) de prijs. De Jong Talent Aanmoedigingsprijzen zijn in het leven geroepen om belangstelling voor bètastudies aan universiteiten te bevorderen. Het bedrijf ORTEC sponsorde de prijzen voor de wiskundestudenten. *khmw.nl*

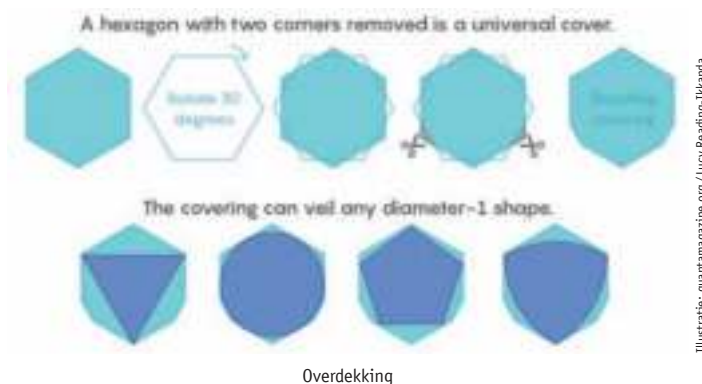
Oratie Tim Dokchitser en Schoonschippijs voor Maarten Derickx

Op 12 april 2019 zal Tim Dokchitser zijn oratie houden als bijzonder hoogleraar computeralgebra aan de Universiteit van Amsterdam. Dokchitser heeft bekendheid verworven met zijn werk aan het Birch & Swinnerton-Dyer-vermoeden (over de rang van elliptische krommen) en door zijn algoritmen voor het rekenen met L -functies en Galois-representaties. Recenter is hij het project GroupNames gestart, waarin beoogd wordt op een consistente manier namen en constructies van kleine groepen vast te leggen. De oratie is onderdeel van het Seminarium Computer Algebra Nederland (CAN), waar ook de Schoonschippijs uitgereikt wordt aan Maarten Derickx. De Schoonschippijs is de prijs voor het beste proefschrift waarin computeralgebra een prominente plaats inneemt. Derickx promoveerde in 2016 aan de Universiteit Leiden met het proefschrift *Torsion Points on Elliptic Curves over Number Fields of Small Degree*. *Wieb Bosma*

Amateurwiskundige vindt nieuwe kleinste universele overdekking

In 1914 legde Lebesgue het volgende probleem voor aan zijn vriend Julius Pál: Stel je hebt een verzameling van alle figuren waarvan de onderlinge afstand tussen twee punten in de figuur maximaal 1 is. Denk bijvoorbeeld aan een cirkel met straal 1 of een gelijkzijdige driehoek met zijde 1. Er zijn oneindig veel figuren die de bovenstaande eigenschap hebben. Wat is de kleinste overdekking zodat alle figuren van de verzameling in deze overdekking passen? Al snel antwoordde Julius Pál aan Lebesgue dat een regelmatige vijfhoek een overdekking vormde. Terwijl de brief nog onderweg was naar Lebesgue realiseerde Pál zich dat hij van twee niet opeenvolgende hoeken een stukje kon wegsnijden en nog steeds een universele overdekking overhield. De regelmatige vijfhoek bleek dus niet de kleinste overdekking te zijn. In de tachtig jaar die hierop volgden bleken wiskundigen slechts in staat heel kleine stukjes te verwijderen. In 1936 vond Roland Sprague een nog net wat kleinere overdekking en in 1992 werd Spragues overdekking verbeterd door H.C. Hansen. Echter Hansens nieuwe overdekking was slechts 0,00000000004 units kleiner dan die van Sprague. De amateurwiskundige Philip Gibbs vond dit jaar een overdekking die 0,0000224 units kleiner is dan de overdekking van Hansen, een relatief gigantische verbetering.

Philip Gibbs studeerde wiskunde en heeft een PhD in de theoretische natuurkunde. Na zijn promotie verloor hij zijn interesse in de pure wetenschap en werkte als software engineer bij verschillende bedrijven. Ondanks zijn carrière in het bedrijfsleven,



Illustratie: quantamagazine.org / Lucy Reading-Ikkanda

behield Gibbs een passie voor wiskundige problemen. Sinds Gibbs gepensioneerd is, heeft hij extra tijd voor wiskundige problemen. Het Lebesgue-probleem voor de kleinste overdekking vond hij op de blog van John Baez. Omdat maar weinig wiskundigen het overdekkingsprobleem onderzocht hebben, dacht Gibbs een goede kans te maken om een nieuwe kleinste overdekking te vinden. Als software engineer startte hij zijn project met simulaties, waaruit hij veel informatie kreeg. Uiteindelijk wist Gibbs met enkel middelbareschoolgeometrie een nieuwe kleinste overdekking te vinden. Samen met John Baez en een bachelorstudent bewees hij de nieuwe overdekking in het artikel 'The Lebesgue Universal Covering Problem'. Gibbs en Baez vermoeden dat er nog kleinere overdekkingen bestaan. Met het artikel hopen Gibbs en Baez dat het overdekkingsprobleem aandacht van wiskundigen trekt. Waarschijnlijk kunnen moderne wiskundige technieken de overdekking nog een stuk verkleinen. *quantamagazine.org*

Koninklijk Wiskundig Genootschap

55ste Nederlands Mathematisch Congres

Het 55ste NMC vindt plaats op dinsdag 23 en woensdag 24 april 2019 in Veldhoven. Plenaire sprekers zijn Barbara Gentz (random dynamic and stochastic processes), Jan Hesthaven (scientific computing), Gábor Lugosi (statistics, information theory) en Anke van Zuylen (combinatorial optimisation). Voor meer informatie zie: nmc2019.nl.

Ledenadministratie en website

Het KWG is overgestapt naar een nieuwe beheerder voor de ledenadministratie en de website: AllUnited. De website is nog altijd te vinden onder www.wiskgenoot.nl.

Nieuwe hoofdredacteur Indagationes Mathematicae

Jan van Neerven heeft per 1 januari 2019 Henk Broer opgevolgd als hoofdredacteur van *Indagationes Mathematicae*.

Abonnementskosten Indagationes Mathematicae

De prijs voor *Indagationes Mathematicae* voor KWG-leden is flink verlaagd: een abonnement kost nu €40 in plaats van €150 per jaar (voor niet-leden is de prijs verlaagd naar €68 per jaar).

Overlijdensbericht

Op 2 februari 2019 is Arjen Sevenster overleden, oud-bestuurslid van het KWG. Elders in dit blad staat een interview met hem.

Recent verschenen:

□ **Epsilon Uitgaven** (www.epsilon-uitgaven.nl)

Zebra 57. Wortel 2, Rob Bosch en Pieter Miedema, €10, 2019.

Henk W. Broer

Bernoulli Instituut
Rijksuniversiteit Groningen
h.w.broer@rug.nl

Nieuws Koninklijk Wiskundig Genootschap

Indagationes Mathematicae 2009–2018

Kort na mijn toetreding tot de KNAW in 2008 werd Henk Broer door Rob Tijdeman benaderd met de vraag of hij belangstelling had deel te nemen in de redactie van het Nederlandse wiskunde-tijdschrift *Indagationes Mathematicae*. Na een korte, maar enigszins turbulente begintijd werd hij hoofdredacteur, was het Koninklijk Wiskundig Genootschap (KWG) eigenaar van het tijdschrift en werd zowel de administratie van het redactionele proces als de publicatie geheel verzorgd door Elsevier. Op 1 januari 2019 legt Broer, na 10 jaar, zijn functie als hoofdredacteur neer. Tijd voor een terugblik.

Editorial board

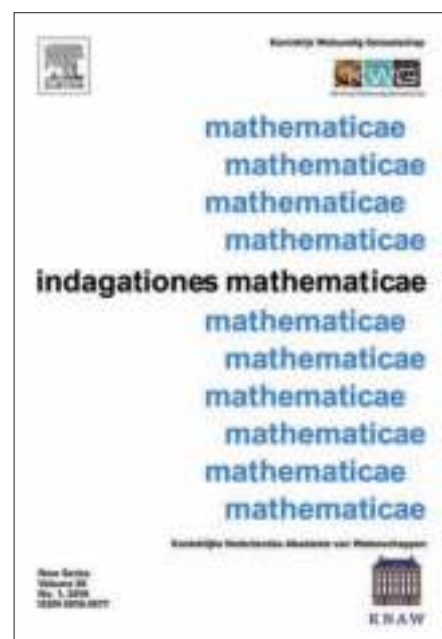
In de oorspronkelijke opzet van *Indagationes Mathematicae* was de sectie Wiskunde van de Koninklijke Nederlandse Academie voor Wetenschappen (KNAW) verantwoordelijk voor het redactionele proces, iets wat nog stamde uit de begintijd van het tijdschrift. Voor een uitvoerig en zeer leesbaar historisch overzicht verwijs ik graag naar Jaap Korevaar en Rob Tijdeman [10]. Het eerste jaar vervulden Mike Keane en ik samen het hoofdredacteurschap. In 2010 is het tijdschrift in eigendom gekomen van het Koninklijk Wiskundig Genootschap (KWG), waarbij zowel de administratie van het redactionele proces (reviewing, revisie) als de productie geheel bij Elsevier kwam te liggen. Het management van dit proces is in handen van de editorial board. In eerste instantie delegeerde het KWG het redactionele beleid aan de KNAW, en de meeste redacteurs kwamen ook nog uit de sectie Wiskunde van de KNAW. Dat laatste veranderde langzaam: einde 2018

zijn nog slechts 9 van de 23 redacteurs KNAW-lid. Verder bleek dat het aanbod van artikelen langzamerhand verschoof, onder meer, in de richting van de functionaal-analyse in brede zin, hetgeen navenante versterking van de redactie met zich mee bracht. Sinds kort houdt het KWG ook het redactionele beleid in eigen hand.

Financieel boert *Indagationes Mathematicae* niet slecht. Zo keert Elsevier het KWG jaarlijks ruim €30.000 uit aan rekenen. Ook heeft Elsevier de tweejaarlijkse N.G. de Bruijnprijs beschikbaar gesteld, voor het beste wetenschappelijk werk dat in de voorafgaande jaren is verschenen. In aanmerking voor de prijs komen kandidaten die de Nederlandse nationaliteit hebben, in Nederland wonen of verbonden zijn aan een Nederlandse instelling. De prijs bestaat uit een erepenning, een oorkonde en een geldbedrag van €4000. De eerste winnaar in 2016 was Marius Crainic, de volgende uitreiking vindt plaats tijdens het NMC van 2019.

Regular versus special issues

Van begin af aan is er een grote nadruk gelegd op special issues. Vaak was dat ter nagedachtenis aan een belangrijke wiskundige zoals L.E.J. Brouwer [5] — een ongoing project van maar liefst vier issues met totaal meer dan 900 bladzijden —, J.G. van der Corput [11] — met twee issues —, N.G. de Bruijn [9], A.C. Zaenen [8], I.T. Gohberg [7] of F. Takens [12]. Ook waren verschil-



lende workshops, zoals die op het Leidse Lorentz Center, aanleiding tot een special issue: voorbeelden hiervan zijn *Aperiodic Patterns in Crystals, Numbers, and Tiles* [2], *Automatic Sequences, Number Theory, and Aperiodic Order* [3], *Dynamics and Geometry* [6], *Poisson Geometry in Mathematics and Physics* [4] en *Probability and Numbers* [1]. In al deze gevallen varieerde de wetenschappelijke kwaliteit van de artikelen van zeer goed tot excellent en de verschillende redacties van deze issues is hiervoor grote dank verschuldigd. Deze traditie verdient zeker voortzetting in het komende decennium! Het was natuurlijk ook de bedoeling dat dit niveau toonaangevend zou zijn voor het aanbod van de artikelen in de regular issues.

Helaas blijkt dit niet altijd het geval. Zoals veel ‘westerse’ tijdschriften wordt ook *Indagationes Mathematicae* overspoeld door Aziatische en Afrikaanse artikelen, vaak van bedenkelijke kwaliteit, onder meer gestimuleerd door het locale personeelsbeleid, waarbij de carrière van wetenschappers afhankelijk wordt gemaakt van het aantal artikelen in ‘westerse’ tijdschriften. Toch heb ik inmiddels de indruk dat ook in de regular issues de kwaliteit van het



Henk Broer

Foto: Henk van der Vorst

gebodene langzaam omhoog gaat. Dit laatste vertaalt in de indicatoren ten aanzien van impact, zie www.journals.elsevier.com/indagationes-mathematicae.

Huidige ontwikkelingen

Toch blijft er nog wel een en ander te wensen over. Zo zou het aandeel van Nederlandse wiskundigen en hun internationale netwerken in *Indagationes Mathematicae* gemakkelijk nog vele malen groter kunnen zijn dan nu het geval is. Dit zou de kwali-

teit van het tijdschrift zeer ten goede komen en daarmee de waarde die het heeft voor de Nederlandse wiskunde.

Als gezegd berust het redactioneel beleid sinds kort geheel bij het KWG. Mijn opvolger Jan van Neerven en het KWG-bestuur onder leiding van Jan Wiegerinck zullen dit in de komende tijd verder actualiseren, waarbij ook de NWO-wiskundecusters ingeschakeld zullen worden.

Ten slotte

Het redacteurswerk heb ik altijd met plezier gedaan. Hierbij had ik veel steun van de Elsevier-staf, allereerst van de journal manager Yvonne Philippo, maar ook van de achtereenvolgende publishers, waarvan ik graag Elena Griniari, Valerie Teng en Hannah Foreman met name wil noemen. Ik spreek hier mijn grote dank uit. Deze dank geldt ook Rob Tijdeman, die van 1988 tot 1993 zelf hoofdredacteur was van *Indagationes Mathematicae*, en die mij steeds met raad en daad terzijde heeft gestaan.

Rest mij Jan van Neerven en zijn vernieuwde editorial board van harte succes te wensen met het verder opstoten van *Indagationes Mathematicae* in de vaart der volkeren. ☺

Referenties

- 1 F. Beukers, F. den Hollander, R. Fokkink en C. Kraaikamp, eds., *Probability and Numbers*, *Indag Math* 25(4) (2014).
- 2 C. Carminati, A. Clark, R. Fokkink, C. Kraaikamp, T. Schmidt en R. Tijdeman, eds., *Aperiodic Patterns in Crystals, Number, and Tiles*, *Indag Math* 29(4) (2018).
- 3 A. Clark, R. Fokkink, V. Berthé, F. Beukers en C. Kraaikamp, eds., *Special issue on Automatic Sequences, Number Theory, and Aperiodic Order*, *Indag Math* 28(1) (2017).
- 4 M. Crainic en O. Yudilevich, eds., *Poisson 2012: Poisson Geometry in Mathematics and Physics*, *Indag Math* 25(5) (2014).
- 5 D. van Dalen, G. Jongbloed, J.W. Klop en J. van Mill, eds., L.E.J. Brouwer, 50 years later, *Indag Math* 29(1) (2018); 29(6) (2018); 30 (2019) to appear; 30 (2019) in preparation.
- 6 H. Hanßmann, I. Hoveijn, S.J. van Strien en H. Waalkens, eds., *Dynamics and Geometry*, *Indag Math* 27(5) (2016).
- 7 M.A. Kaashoek en H.W. Broer, eds., *Special issue: Indagationes Mathematicae honoring Israel Gohberg*, *Indag Math* 23(4) (2012).
- 8 R. Kaashoek en B. de Pagter, eds., *Zaenen Centennial Special Issue*, *Indag Math* 25(2) (2014).
- 9 J.W. Klop, R. Tijdeman en J.J.O.O. Wiegerinck, eds., *In memory of N.G. (Dick) de Bruijn (1918–2012)*, *Indag Math* 24(4) (2013).
- 10 J. Korevaar en R. Tijdeman, *De geschiedenis van Indagationes Mathematicae NAW 5/14(1) (2013) 66–72*.
- 11 J. Korevaar, R. Tijdeman en J.J.O.O. Wiegerinck, eds., *In Memoriam J.G. van der Corput (1890–1995)*, *Indag Math* 26(5) (2015); 27(2) (2016).
- 12 S.J. van Strien en H.W. Broer, eds., *Devoted to: Floris Takens (1940–2010)*, *Indag Math* 22(3–4) (2011).

Raf Bocklandt

Korteweg-de Vries Instituut
Universiteit van Amsterdam
raf.bocklandt@gmail.com

Evenement Abelprijs, Wolfprijs en Fieldsmedaille

Eén programma, zoveel prijzen

Zoals elk jaar van de vorm $4k + 2$, was 2018 een topjaar voor wiskundige prijzen. Naast de Abelprijs en de Wolfprijs die jaarlijks door de Noorse koning en de Israëlische president worden overhandigd in Oslo en Jeruzalem, werden op het internationaal congres voor wiskundigen in Rio de Janeiro deze zomer ook vier Fieldsmedailles uitgereikt.

Hoewel de opzet van de prijzen heel verschillend is — de Abel- en Wolfprijs bekronen meestal oudere wiskundigen die kunnen terugblikken op een rijk gevulde carrière, terwijl de Fieldsmedailles gereserveerd zijn voor opkomende talenten onder de 40 jaar — is er toch een verrassende eenheid van onderwerpen. Zowel de Abelprijs (voor Robert Langlands) en de Wolfprijs (Vladimir Drinfeld en Alexander Beilinson), als twee van de vier Fieldsmedailles (Peter Scholze en Akshay Venkatesh) passen in een onderzoeksprogramma dat een groot deel van het wiskundeonderzoek in de afgelopen halve eeuw heeft kleur gegeven: het Langlands-programma.

Wanneer je kijkt naar de functie

$$f(x) = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \dots$$

is het niet zo eenvoudig om in te zien dat deze functie een verborgen symmetrie heeft: $f(x + 2\pi i) = f(x)$. De exponentiële functie is echter geen uitzondering: heel vaak hebben functies die op een natuurlijke wijze als reeks gedefinieerd kunnen worden wonderbaarlijke eigenschappen als we ze beschouwen als functies in een complexe variabele.

Taylorreeksen zijn trouwens niet de enige reeksen waarmee je dit spelletje kan doen, er zijn ook Fourierreeksen

$$F(z) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} a_k e^{2\pi i k z}$$

en (misschien iets minder bekend) Dirichletreeksen

$$L(s) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{a_k}{k^s}.$$

De vermaardste van deze laatste soort is de Riemann ζ -functie (neem alle $a_k = 1$) maar ook andere L -functies zijn van groot belang in de getaltheorie. Dirichlet zelf introduceerde deze functies om aan te tonen dat er oneindig veel priemgetallen zijn van de vorm $a + b\mathbb{Z}$ voor elk paar onderling ondeelbare gehele getallen (a, b) .

Bij al deze reeksen leveren speciale keuzes van coëfficiënten mooie wiskundige eigenschappen op, maar wat wiskundigen mooi vinden hangt vaak af van hun interesse. Een meetkundige houdt van invariantie onder symmetriegroepen, terwijl een analist misschien de voorkeur geeft aan analytische continueerbaarheid of bijzondere functionaalvergelijkingen. Het wonderlijke is echter dat dezelfde coëfficiënten vaak voor elk wat wils kunnen opleveren mits je ze op verschillende manieren gebruikt. Erich Hecke toonde namelijk aan dat als je de Fouriercoëfficiënten van een functie met een mooie symmetrie (bijvoorbeeld een θ -functie) invoert in de machinerie van Dirichlet, je een functie krijgt met mooie analytische eigenschappen (bijvoorbeeld een ζ -functie) en bovendien gebruikte hij Dirichlets ideeën uit de getaltheorie om een hele rist van zulke coëfficiëntenreeksen te genereren.

Zoals vaak in de wiskunde was dit prachtige resultaat geen eindpunt maar een beginpunt. Na Hecke werkten Emil Artin en André Weil aan veralgemeningen in verscheidene richtingen en rond de jaren zestig ontstond er een gevoel dat dit alles slechts het topje was van een enorme ijsberg van verbanden tussen getaltheorie, meetkunde en analyse. In zijn artikel over Robert Langlands neemt Bas Edixhoven ons mee langs de hoofdingrediënten in dit verhaal en schetst hij de context die Robert Langlands ertoe bracht hierover een heel onderzoeksprogramma met verregaande vermoedens en diepe verbanden te formuleren.

In de vijftig jaar die volgden stond de wiskunde niet stil en nieuwe generaties

gebruikten het Langlands-programma als leidraad voor hun wetenschappelijk onderzoek. Zijn ideeën werden uitgebreid en overgezet naar andere vakgebieden. De bekendste spin-off is de meetkundige Langlands-correspondentie, die de setting verplaatst van getaltheorie naar algebraïsche meetkunde, representatietheorie en theoretische natuurkunde. In het artikel 'Een kleine suggestie met grote gevolgen' kan je lezen welke rol Beilinson en Drinfeld speelden in het ontstaan van deze nieuwe invalshoek.

Een overzicht van alle resultaten die uit het Langlands-programma volgden, leest als een bloemlezing van topwiskundigen van de voorbije halve eeuw. Zo is Andrew Wiles' bewijs van de laatste stelling van Fermat te zien als een voorbeeld van Langlands reciprociteitsvermoeden. Laurent Lafforgue won de Fieldsmedaille in 2002 voor zijn beroemde stelling die Langlands vermoedens bevestigde voor GL_n voor functielichamen in karakteristiek p . In 2010 won Ngô Bao Châu dezelfde prijs voor zijn bewijs van het fundamenteallemma, dat een hoeksteen is het Langlands-programma. Het locale Langlands-vermoeden voor GL_n in karakteristiek 0 werd maar liefst drie keer bewezen. In 2000 door Henriart, in 2001 door Harris en Taylor, en ten slotte door Peter Scholze, die in 2013 een belangrijke klip uit de voorgaande bewijzen op een totaal andere manier wist te omzeilen.

Op het moment van publicatie was Scholze pas 25 jaar, maar na dit belangrijke werk bleef hij niet bij de pakken zitten en transformeerde eigenhandig zijn vakgebied in de getaltheorie door de introductie van een totaal nieuw soort ruimtes: *perfectoid spaces*. In het derde artikel van onze Langlands-special vertelt Ben Moonen over de wiskunde achter deze bijzondere objecten en de nu al impressionante carrière van dit jonge genie, waarvan we nog veel zullen horen. ζ

Bas Edixhoven

Mathematisch Instituut
Universiteit Leiden
bas@edixhoven.net

Evenement Abelprijs 2018

Abelprijs toegekend aan Robert Langlands

In maart 2018 werd de Abelprijs toegekend aan Robert Langlands voor zijn ‘visionaire programma dat representatietheorie verbindt met getaltheorie’, zie [1]. In dit artikel legt Bas Edixhoven in lektentaal uit waarom het gaat: verbanden tussen symmetrieën in de analyse en meetkunde enerzijds, en symmetrieën in de getaltheorie anderzijds.

Sinds maart 2018 zijn al een aantal publicaties over dit onderwerp verschenen: [4] (technisch en lang, veel recent werk), [2] (biografisch, geen wiskunde), [11] (wel wiskunde maar niet voor leken), [10] (zowel tekst als video, geen wiskunde), [5] (wel voor leken, 2 pagina’s, aanbevolen), [20] (2 pagina’s, aanbevolen!) en [21] (4 pagina’s, meer inhoudelijk, aanbevolen!), [16] (zowel historisch als wiskundig, maar lang en (wiskundig) niet zo toegankelijk). Voor het werk van Langlands zelf, inclusief de beroemde brief naar Weil, zie [14]. Ook [8] (gedeeltelijk over Langlands, maar zonder representatietheorie) is aanbevolen.

Als er dan al zoveel over geschreven is, waarom dan *nog* een artikel? Wel, ik had al in een vroeg stadium de redactie van het NAW beloofd er een te schrijven, en de bovengenoemde artikelen bekeken hebbend, vind ik dat er ruimte is voor een artikel dat iedereen die een studie wiskunde heeft afgerond een laagdrempelig inkijkje biedt in het Langlands-programma (de volgende twee paragrafen, de appetizers van dit artikel), en degene die er meer tijd in wil steken en wat wil leren een weg wijst *naar* het Langlands-programma (de overige paragrafen, de hoofdgerichten en het dessert). Ook beoog ik lezers met wat meer achtergrond te overtuigen dat het Langlands-programma wel ontdekt *moest* worden, gezien wat er al bekend was rond 1966. Ik hoop

dat hiermee het aura van mystiek rond het Langlands-programma wat vervaagt en dat er wat begrip en terechte verwondering voor in de plaats komt. Het is allemaal erg mooi, indrukwekkend en wonderlijk (dat het werkt), maar eigenlijk geen wonder dat het ontdekt is.

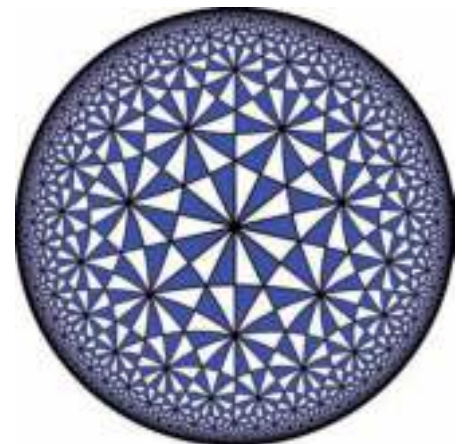
Symmetrieën in getaltheorie en analyse

Zo ongeveer het eenvoudigste voorbeeld van symmetrieën van getaltheoretische oorsprong in de analyse en meetkunde is dat van translaties op de reële getallenlijn $\mathbb{R}$ over gehele getallen $\mathbb{Z}$. Precies dat voorbeeld leidt tot de analytische voortzetting en de functionaalvergelijking van Riemanns zèta-functie, en dat is het onderwerp van de volgende paragraaf. Fourier-analyse, Poissons sommatieformule en de normale kansverdeling van Gauss spelen daar cruciale rollen.

In de paragraaf ‘*L*-functies’ zien we dat Riemanns zèta-functie correspondeert met de triviale symmetriegroep in de getaltheorie. Om algemene symmetrieën uit de getaltheorie te krijgen moeten we in de analyse en meetkunde onze blik wat verruimen, en kijken naar: *harmonische analyse op lokaal compacte groepen, met randcondities van getaltheoretische oorsprong*. Zie bijvoorbeeld Figuur 1. We zien hier het schijfmodel van het hyperbolische vlak, betegeld door driehoeken met hoe-

ken $\pi/2$, $\pi/3$ en $\pi/7$, bekend (met iets andere hoeken) van Eschers cirkellimiet-tekeningen. De geodeten zijn cirkels die de rand van de schijf loodrecht snijden. De lokaal compacte groep die hierbij hoort is die van complexe 2×2 -matrices $\begin{pmatrix} a & \bar{c} \\ c & \bar{a} \end{pmatrix}$ met $|a|^2 - |c|^2 = 1$, die op de complexe eenheidsschijf werkt door de oriëntatiebehoudende isometrieën $z \mapsto (az + \bar{c}) / (\bar{c}z + \bar{a})$. Er zijn ook de oriëntatieomkerende isometrieën $z \mapsto (a\bar{z} + \bar{c}) / (\bar{c}\bar{z} + \bar{a})$. De betegeling geeft een voorbeeld van randcondities van getaltheoretische oorsprong (technisch gesproken: de spiegelingen in de doorgetrokken zijden van de driehoeken brengen een aritmetische ondergroep voort).

De transformatie $z \mapsto i(1-z)/(1+z)$ brengt de eenheidsschijf naar het complexe bovenhalfvlak en identificeert de matrixgroep hierboven met $SL_2(\mathbb{R})$, de groep van reële 2×2 -matrices $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ met determinant 1, die werkt door $z \mapsto (az + b)/(cz + d)$. On-



Figuur 1

dergroepen van eindige index van $SL_2(\mathbb{Z})$ geven veel voorbeelden van aritmetische ondergroepen, en dit generaliseert direct naar $SL_n(\mathbb{R})$ en $SL_n(\mathbb{Z})$ voor willekeurige n .

Het is niet verbazend dat de theorie van continue representaties van $SL_n(\mathbb{R})$ op complexe Hilbertruimten *het* gereedschap is om Fourieranalyse naar deze situatie te generaliseren. Voor compacte groepen zoals bijvoorbeeld die van $n \times n$ -orthogonale reële of unitaire complexe matrices is er de stelling van Peter-Weyl, die zegt dat de matrixcoëfficiënten ten opzichte van orthogonale bases van de irreducibele continue representaties (die in dit geval eindigdimensionaal zijn en een invariant inproduct hebben) een Hilbertbasis van de Hilbertruimte van kwadraatintegreerbare functies op de groep geven. Voor niet-compacte groepen, zoals $SL_n(\mathbb{R})$, zijn bijna alle irreducibele continue representaties op complexe Hilbertruimten oneindig dimensionaal, en veel moeilijker te classificeren.

Onder de aritmetische ondergroepen zijn er de zogenaamde *congruentie-ondergroepen*, gegeven door congruentievoorwaarden op de coëfficiënten, zoals bijvoorbeeld de ondergroep van elementen g van $SL_n(\mathbb{Z})$ waarvan de $g_{i,j}$ met $i \neq j$ deelbaar zijn door een gegeven geheel getal $m \neq 0$, en waarvan de $g_{i,i}$ rest 1 geven na deling door m . Dit zijn de ondergroepen die in het Langlands-programma horen. Als men de harmonische analyse voor deze allemaal tegelijk bestudeert, dan komen er ook vanzelf matrixgroepen met *p-adische* lichamen $\mathbb{Q}_p$ naar voren, voor alle priemgetallen p , of men nu wil of niet (dit wordt duidelijk in de paragraaf 'Automorfe representaties van GL_n over $\mathbb{Q}$ '). In de paragraaf 'Cyclotomische lichamen' laten we zien dat de *p-adische* getallen zichzelf net zo opdringen in de getaltheorie. Dit leidt ertoe dat men ook de theorie van representaties op complexe Hilbertruimten van groepen als $SL_n(\mathbb{Q}_p)$ nodig heeft. Deze groepen zijn ook lokaal compact, en, net als $\mathbb{Q}_p$ zelf, 'totaal onsamenhangend'.

Nu is het tijd om eens te kijken naar symmetrieën in de getaltheorie. Getaltheoretici zien $\mathbb{R}$ niet altijd als een lijn, en $\mathbb{C}$ niet als een vlak, maar als het ze uitkomt ook als een $\mathbb{Q}$ -vectorruimte, van oneindige (zelfs overaftelbare) dimensie. Een complex getal z is algebraïsch als de elementen $1, z, z^2, \dots$ lineair afhankelijk zijn in de $\mathbb{Q}$ -vectorruimte $\mathbb{C}$. Als z niet algebraïsch is, dan heet z transcendent. Bijvoorbeeld: $\sqrt{2}$ is

algebraïsch maar niet rationaal, π en e zijn transcendent. In dit artikel zijn we alleen geïnteresseerd in algebraïsche getallen, en dat wil zeggen: complexe nulpunten van polynomen $x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \dots + a_1x + a_0$ met $n > 0$ en alle a_i in $\mathbb{Q}$. De symmetrieën in de getaltheorie zijn de permutaties van de nulpunten van zulke polynomen die gegeven worden door *lichaamsautomorfismen van $\mathbb{C}$* .

Een lichaamsautomorfisme van $\mathbb{C}$ is een afbeelding $\sigma: \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$ die bijtief is, en compatibel is met optelling en vermenigvuldiging in de zin dat voor alle x en y in $\mathbb{C}$ geldt dat $\sigma(x+y) = \sigma(x) + \sigma(y)$ en $\sigma(xy) = \sigma(x)\sigma(y)$. We kennen precies twee zulke σ : de identiteit en de complexe conjugatie. Het is niet moeilijk te bewijzen dat dit precies de continue zijn. Met Zorns lemma is makkelijk te bewijzen dat er vreselijk veel σ zijn, evenveel als de machtsverzameling van $\mathbb{R}$. Bijvoorbeeld kan men beginnen met de afbeelding $a + b\sqrt{2} \mapsto a - b\sqrt{2}$ (met a en b die $\mathbb{Q}$ doorlopen), en die uitbreiden naar $\mathbb{C}$. Een wat interessanter voorbeeld, in de stijl van Galois, is gegeven door de werking van de lichaamsautomorfismen van $\mathbb{C}$ op de nulpunten van $x^5 - 2$:

$$\begin{aligned}\zeta &= e^{2\pi i/5}, \\ z &= 2^{1/5}, \\ a &\in (\mathbb{Z}/5\mathbb{Z})^\times, \\ b &\in \mathbb{Z}/5\mathbb{Z}, \\ x &\in \mathbb{Z}/5\mathbb{Z}, \\ \sigma_{a,b}: \zeta^x z &\mapsto \zeta^{ax+b} z.\end{aligned}$$

Voor $f = x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \dots + a_1x + a_0$ met $n > 0$ en de a_i in $\mathbb{Q}$ laten we $Z(f)$ de verzameling van complexe nulpunten van f zijn. Dan is het eenvoudig in te zien dat elk lichaamsautomorfisme σ van $\mathbb{C}$ de elementen van $Z(f)$ permuteert. De *Galois-groep* $\text{Gal}(f)$ van f is dan de groep van permutaties van $Z(f)$ die gegeven zijn door lichaamsautomorfismen van $\mathbb{C}$. Voor de meeste f is $\text{Gal}(f)$ de groep van alle permutaties van $Z(f)$, en dus isomorf met S_n , maar het vermoeden (onopgelost) is dat alle eindige groepen voorkomen als Galoisgroep. Voor commutatieve eindige groepen (en algemener voor oplosbare eindige groepen) is dit bekend. De stelling van Kronecker-Weber zegt dat $\text{Gal}(f)$ commutatief is precies dan als $Z(f)$ bestaat uit $\mathbb{Q}$ -lineaire combinaties van eenheidswortels. In de paragraaf 'Cyclotomische lichamen' bestuderen we de lichaamsautomorfismen van het lichaam voortgebracht door



Évariste Galois

eenheidswortels, en dienen de *p-adische* getallen zich aan.

Groepen worden vaak bestudeerd door middel van hun representaties, want matrices zijn makkelijker dan permutaties, en zo ook voor Galoisgroepen $\text{Gal}(f)$. Een complexe representatie $\rho: \text{Gal}(f) \rightarrow GL_d(\mathbb{C})$ (of anders gezegd een werking van de eindige groep $\text{Gal}(f)$ op de complexe vectorruimte $\mathbb{C}^d$) heet een (*complexe*) *Galoisrepresentatie*. Voor zo'n representatie ρ definieerde Artin een generalisatie van de Riemann-zeta-functie, de zogenaamde *Artin-L-functie van ρ* (zie de paragraaf 'L-functies'). Voor deze functies, gedefinieerd als een Dirichletreeks die convergent is voor complexe s met $\Re(s) > 1$, wordt vermoed dat ze analytisch uitbreiden over $\mathbb{C} \setminus \{1\}$, en dat er een functionaalvergelijking is tussen de *L-functie van ρ* in s en van de *L-functie van de duale van ρ* in $1-s$.

Langlands stelde zich in 1966, optimistisch extrapolierend wat er toen al bekend was, twee vragen (zie de slotparagraaf) over dit soort *L-functies* en zogenaamde automorfe representaties. Dit leidde tot de zogenaamde Langlands-vermoedens, zowel in het globale geval (congruentie-ondergroepen enerzijds, en automorfismen van eindige lichaamsuitbreidingen van $\mathbb{Q}$ anderzijds) als het lokale geval: representatietheorie van *p-adische* matrixgroepen enerzijds en automorfismen van eindige uitbreidingen van $\mathbb{Q}_p$ anderzijds.

Sinds 1966 is er al veel bereikt, vooral wat betreft de lokale vermoedens. De globale theorie is nog niet zo ver, al is het zo dat fragmenten ervan veel hebben bij-

gedragen aan de lokale theorie. Het werk van Wiles over modulariteit van elliptische krommen over $\mathbb{Q}$ in het begin van de jaren 1990 (Abelprijs in 2016) met als gevolg daarvan de laatste stelling van Fermat, was de grootste doorbraak tot nu toe. De lokale theorie, en ook speciale waarden van L -functies, zijn hierin onmisbaar. Maar het belangrijkste nieuwe ingrediënt bij Wiles was de studie van Galoisrepresentaties met waarden in $\mathrm{GL}_2(\mathbb{Z}/p^m\mathbb{Z})$ met p vast en m variërend, dat wil zeggen ‘deformatietheorie’ van Galoisrepresentaties.

We weten nu dat de continue irreducibele representaties van $\mathrm{GL}_n(\mathbb{Q}_p)$ op complexe Hilbertruimten nauw samenhangen met n -dimensionale representaties van groepen van lichaamsautomorfismen van eindige uitbreidingen van $\mathbb{Q}_p$. Zowel getaltheoretici als representatietheoretici moeten hiermee hun voordeel kunnen doen, door de problemen waarmee ze worstelen te vertalen naar ‘de andere kant’. Voor representatietheoretici geeft dit het inzicht dat het beschrijven van *alle* continue irreducibele representaties van $\mathrm{GL}_n(\mathbb{Q}_p)$ op complexe Hilbertruimten minstens even moeilijk is als het beschrijven van de Galoisrepresentaties aan de andere kant, en dat wat correspondeert met tam vertakte Galoisrepresentaties wel een eenvoudige systematische beschrijving toe moet laten. Voor de getaltheoretici ligt de winst meer in de globale theorie: analytische eigenschappen van de L -functies bij Galoisrepresentaties en van andere generalisaties van Riemanns zèta-functie, en generalisaties van de laatste stelling van Fermat (zie [8]).

Riemanns zèta-functie

We beschrijven nu, in navolging van Riemann, hoe de translaties op de reële getallenlijn $\mathbb{R}$ over gehele getallen $\mathbb{Z}$ leiden tot de voortzetbaarheid en de functionaalvergelijking van de belangrijkste functie in de getaltheorie: Riemanns zèta-functie.

We moeten dan beginnen met Jacobi’s theta-functie op het complexe bovenhalfvlak $\mathbb{H} = \{z \in \mathbb{C} : \Im(z) > 0\}$:

$$\theta: \mathbb{H} \rightarrow \mathbb{C}, \quad z \mapsto \sum_{n \in \mathbb{Z}} e^{\pi i z n^2}. \quad (1)$$

(Wie deze functie opzoekt op Wikipedia ziet daar een functie van twee variabelen z en τ ; neem daar $z = 0$ en vervang dan τ door z .) Jacobi bewees al dat voor alle $z \in \mathbb{H}$ geldt dat

$$\theta(-1/z) = (-iz)^{1/2} \theta(z), \quad (2)$$

waarbij $(-iz)^{1/2}$ de wortel is met positief reëel deel (merk op dat $\Re(-iz) > 0$). We schetsen het bewijs van (2), omdat het zo mooi verschillende gebieden van de wiskunde verbindt; voor een gedetailleerde behandeling, zie [19, VII, §6, Proposition 16]. Het gaat hier om een gelijkheid van complex analytische functies op $\mathbb{H}$, dus het volstaat om (2) te bewijzen voor de $z = iy$ met $y \in \mathbb{R}_{>0}$. Er geldt, voor alle $y \in \mathbb{R}_{>0}$:

$$\theta(iy) = \sum_{n \in \mathbb{Z}} f_y(n), \quad \text{met } f_y: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, \quad x \mapsto e^{-\pi x^2/y}. \quad (3)$$

We herkennen hier f_y , op een constante factor na, als Gauss’ normale verdeling met gemiddelde 0 en, op een constante factor na, standaardafwijking $y^{-1/2}$. De Fourier-getransformeerde hiervan is

$$\widehat{f}_y: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, \quad x \mapsto y^{-1/2} e^{-\pi x^2/y}. \quad (4)$$

Poissons sommatieformule geeft, voor alle $y \in \mathbb{R}_{>0}$:

$$\theta(iy) = \sum_{n \in \mathbb{Z}} f_y(n) = \sum_{n \in \mathbb{Z}} \widehat{f}_y(n) = y^{-1/2} \theta(-1/iy), \quad (5)$$

waarmee het bewijs van (2) af is!

Het verband tussen θ en Riemanns zèta-functie

$$\zeta: \{s \in \mathbb{C} : \Re(s) > 1\} \rightarrow \mathbb{C}, \quad s \mapsto \sum_{n \geq 1} n^{-s}, \quad (6)$$

is de Mellintransformatie: dit is een variant van de Fouriertransformatie die grofweg gezegd $t \mapsto e^{-\pi n t}$ omzet in $s \mapsto n^{-s}$. Voor $g: \mathbb{R}_{>0} \rightarrow \mathbb{C}$ is deze gegeven, voor de $s \in \mathbb{C}$ waarvoor het nodige convergeert, door:

$$M(g): s \mapsto \int_{t=0}^{\infty} g(t) t^s (dt) / t. \quad (7)$$

We nemen nu $g: \mathbb{R}_{>0} \rightarrow \mathbb{C}$ gegeven door

$$g(t) = \frac{\theta(it) - 1}{2} = \sum_{n > 0} e^{-\pi n^2 t}. \quad (8)$$

Dan volgt uit (2) (voor details zie [9, §4.9]) dat voor $s \in \mathbb{C}$ met $\Re(s) > 1$ geldt dat

$$\xi(s) := \pi^{-s/2} \Gamma\left(\frac{s}{2}\right) \zeta(s) = (M(g))\left(\frac{s}{2}\right), \quad (9)$$

dat $s \mapsto \xi(s) - s^{-1} - (1-s)^{-1}$ holomorfe is op $\mathbb{C}$ en dat voor alle $s \in \mathbb{C}$:

$$\xi(1-s) = \xi(s). \quad (10)$$

Hiermee zijn de voortzetbaarheid en de functionaalvergelijking van ζ bewezen, zoals Riemann het al deed in 1859.

Cyclotomische lichamen

Het is weer tijd om naar symmetrieën in de getaltheorie te kijken. Het eenvoudigste voorbeeld hiervan is wellicht het lichaam $\mathbb{Q}(\sqrt{2})$: de deelverzameling van $\mathbb{C}$ van alle getallen die je kunt krijgen uit rationale getallen en $\sqrt{2}$ door optellen, aftrekken, vermenigvuldigen en delen. Omdat $\sqrt{2}$ niet rationaal is, is $\mathbb{Q}(\sqrt{2})$ een $\mathbb{Q}$ -vectorruimte met basis 1 en $\sqrt{2}$. Men gaat dan eenvoudig na dat de afbeelding $a + b\sqrt{2} \mapsto a - b\sqrt{2}$ (a en b in $\mathbb{Q}$) van $\mathbb{Q}(\sqrt{2})$ naar zichzelf optelling en vermenigvuldiging behoudt, en dus een lichaamsautomorfisme is. Dit drukt uit dat, voor zover optelling en vermenigvuldiging betreft, $\sqrt{2}$ en $-\sqrt{2}$ exact dezelfde eigenschappen hebben, net als i en $-i$ in $\mathbb{C}$. We herhalen nog maar eens ons motto:

De symmetrieën in de getaltheorie zijn lichaamsautomorfismen.

We definiëren $\bar{\mathbb{Q}}$ als de verzameling van alle complexe getallen z die nulpunt zijn van een polynoom $x^n + \dots + a_1 x + a_0$, met $n \geq 1$ en alle $a_i \in \mathbb{Q}$. Deze deelverzameling van $\mathbb{C}$ is gesloten onder $+$ en $\cdot$, is dus een lichaam, en heet de *algebraïsche afsluiting* van $\mathbb{Q}$ in $\mathbb{C}$. Het is de aftelbare vereniging van alle deellichamen van $\mathbb{C}$ die eindigdimensionaal zijn als $\mathbb{Q}$ -vectorruimte.

De groep van lichaamsautomorfismen $\mathrm{Aut}(\bar{\mathbb{Q}})$ heet de *absolute Galois groep* van $\mathbb{Q}$. Deze groep werkt op $\bar{\mathbb{Q}}$, en heeft een topologische structuur die we iets nader moeten toelichten. Voor elk polynoom $f \in \mathbb{Q}[x]$ ongelijk aan 0 permuteert $\mathrm{Aut}(\bar{\mathbb{Q}})$ de eindig vele nulpunten van f in $\bar{\mathbb{Q}}$. De banen zijn de nulpuntsverzamelingen van de irreducibele factoren van f . In het bijzonder zijn de elementen van $\bar{\mathbb{Q}}$ de enige vaste punten. Het beeld van $\mathrm{Aut}(\bar{\mathbb{Q}})$ in de permutatiegroep van de nulpunten, zeg $z_1, \dots, z_n$, van f heet de Galoisgroep van f ; het is de automorfismengroep van het lichaam $\mathbb{Q}(z_1, \dots, z_n)$ voortgebracht door de z_i . Het geven van een $\sigma \in \mathrm{Aut}(\bar{\mathbb{Q}})$ is equivalent met het geven van automorfismen van al dit soort lichamen $\mathbb{Q}(z_1, \dots, z_n)$, compatibel op doorsneden: de beperkingen van de automorfismen tot de doorsneden moeten gelijk zijn. Dit betekent dat $\mathrm{Aut}(\bar{\mathbb{Q}})$ de *limiet* is van het diagram van de $\mathrm{Aut}(\mathbb{Q}(z_1, \dots, z_n))$, omgekeerd geordend naar inclusies. Dit lijkt nu ingewikkeld, maar zo meteen zien we een eenvoudiger voorbeeld. Topologisch betekent dit dat als we $\mathrm{Aut}(\bar{\mathbb{Q}})$ voorzien van de grofste to-

pologie waarvoor alle stabilisatoren van elementen in $\bar{\mathbb{Q}}$ open zijn, $\text{Aut}(\bar{\mathbb{Q}})$ Hausdorff, compact en totaal ontsamenhangend is. Ook dit wordt straks in het voorbeeld duidelijker.

Laat $\mathbb{C}^\times := \{z \in \mathbb{C} : z \neq 0\}$ de complexe multiplicatieve groep zijn. Voor iedere $n \in \mathbb{N}_{\geq 1}$ definiëren we het polynoom

$$\Phi_n(x) = \prod_z (x - z), \quad z \in \mathbb{C}^\times \text{ van orde } n, \quad (11)$$

waarvan de coëfficiënten in $\mathbb{Q}$ zitten omdat ze invariant zijn onder $\text{Aut}(\bar{\mathbb{Q}})$. Een beetje algebra of getaltheorie leert dat $\Phi_n(x) \in \mathbb{Z}[x]$. Dit zijn de *cyclotomische polynomen*. Dedekind heeft bewezen dat alle $\Phi_n(x)$ irreducibel zijn. De nulpunten van $\Phi_n(x)$ zijn de $\exp(2\pi i/n)^a$, met a geheel, $0 \leq a < n$ en $\text{ggd}(a, n) = 1$. Vanwege Dedekind worden deze transitief gepermuteerd door $\text{Aut}(\bar{\mathbb{Q}})$. Al deze eenheidswortels samen vormen de ondergroep $\bar{\mathbb{Q}}_{\text{tors}}^\times$ van elementen van eindige orde van $\bar{\mathbb{Q}}^\times$, waarop $\text{Aut}(\bar{\mathbb{Q}})$ werkt door groepsautomorfismen.

De afbeelding $\mathbb{Q} \rightarrow \bar{\mathbb{Q}}_{\text{tors}}^\times, x \mapsto \exp(2\pi i x)$ induceert een isomorfisme van groepen van $\mathbb{Q}/\mathbb{Z}$ naar $\bar{\mathbb{Q}}_{\text{tors}}^\times$. Nu is $\mathbb{Q}/\mathbb{Z}$ de vereniging van de ondergroepen $(n^{-1}\mathbb{Z})/\mathbb{Z}$ over alle $n \geq 1$. Iedere $(n^{-1}\mathbb{Z})/\mathbb{Z}$ is cyclisch, van orde n , en heeft daarom automorfismengroep $(\mathbb{Z}/n\mathbb{Z})^\times$: $a \in (\mathbb{Z}/n\mathbb{Z})^\times$ werkt als $x \mapsto ax$. Voor m een veelvoud van n hebben we de inclusie $(n^{-1}\mathbb{Z})/\mathbb{Z} \subset (m^{-1}\mathbb{Z})/\mathbb{Z}$. De conclusie is dan dat de automorfismengroep $\text{Aut}(\mathbb{Q}/\mathbb{Z})$ gelijk is aan de verzameling van collecties $(a_n)_n$ waar $n \geq 1$ en $a_n \in (\mathbb{Z}/n\mathbb{Z})^\times$, zodat als m een veelvoud is van n , het beeld van a_m onder het morfisme van ringen $\mathbb{Z}/m\mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$ gelijk is aan a_n . Al deze morfismen van groepen $(\mathbb{Z}/m\mathbb{Z})^\times \rightarrow (\mathbb{Z}/n\mathbb{Z})^\times$ zijn surjectief.

Om te zien wat de verzameling van deze collecties $(a_n)_n$ met $a_n \in (\mathbb{Z}/n\mathbb{Z})^\times$ nu is, bekijken we wat eruit komt als we hetzelfde doen maar dan met $a_n \in \mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$. De uitkomst heet dan $\hat{\mathbb{Z}}$, de *pro-eindige completering* van de ring $\mathbb{Z}$, maar dat zegt nog niet wat het is. De Chinese reststelling schiet ons te hulp. Laat, voor $n \geq 1$,

$$n = \prod_p p^{n_p} \quad (12)$$

de ontbinding van n in priemfactoren zijn (bijna alle n_p zijn 0, het product is eindig). Dan is *het* morfisme van ringen

$$\mathbb{Z}/n\mathbb{Z} \rightarrow \prod_p \mathbb{Z}/p^{n_p}\mathbb{Z} \quad (13)$$

een isomorfisme. Dat betekent dat we in plaats van de collecties $(a_n)_n$ met $a_n \in \mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$ collecties $(a_{p,k})_{p,k}$ met p priem en $k \geq 0$ kunnen nemen, met de eis dat voor alle p en alle $k_1 \leq k_2$ geldt dat het beeld van a_{p,k_2} onder $\mathbb{Z}/p^{k_2}\mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{Z}/p^{k_1}\mathbb{Z}$ gelijk is aan a_{p,k_1} .

Per priemgetal p is de verzameling van zulke collecties in bijectie met de verzameling $\mathbb{Z}_p$ van *p-adische gehele getallen* gedefinieerd als formele sommen $\sum_{i \geq 0} c_i p^i$, met de c_i in $\{0, 1, \dots, p-1\}$: hieraan koppelen we $a_{p,k} := \sum_{i=0}^{k-1} c_i p^i$. Een mooie interpretatie hiervan is om eerst natuurlijke getallen in basis p te schrijven, dus als eindige rijtjes $c_k \dots c_2 c_1 c_0$, en vervolgens $\mathbb{Z}_p$ te zien als de verzameling van oneindige rijtjes $\dots c_2 c_1 c_0$. Optelling en vermenigvuldiging op $\mathbb{Z}_p$ werkt zoals men in het basisonderwijs leert: van rechts naar links, met 'onthouden'. Dat geeft een ring; tel bijvoorbeeld eens 1 op bij het rijtje met alle c_i gelijk aan $p-1$. De volgende sectie geeft een beschrijving van $\mathbb{Z}_p$ die meer geschikt is voor analytici.

We gaan terug naar $\text{Aut}(\mathbb{Q}/\mathbb{Z})$. We zien nu dat die groep gelijk is aan $\hat{\mathbb{Z}}^\times = \prod_p \mathbb{Z}_p^\times$ (we hebben de actie beschreven). Maar dan is ook $\text{Aut}(\bar{\mathbb{Q}}_{\text{tors}}^\times)$ gelijk aan $\prod_p \mathbb{Z}_p^\times$, waarbij $(a_n)_n$ met $a_n \in (\mathbb{Z}/n\mathbb{Z})^\times$ een element $z \in \bar{\mathbb{Q}}_{\text{tors}}^\times$ met $z^m = 1$ naar z^a stuurt. De actie van $\text{Aut}(\bar{\mathbb{Q}})$ op $\bar{\mathbb{Q}}_{\text{tors}}^\times$ geeft, en is gegeven door, een morfisme van groepen

$$\chi_{\text{cycl}} : \text{Aut}(\bar{\mathbb{Q}}) \rightarrow \prod_p \mathbb{Z}_p^\times \quad (14)$$

dat vanwege Dedekind surjectief is, en een open afbeelding is voor wat de topologieën betreft. Deze afbeelding is niet injectief (Galoisgroepen van polynomen zijn meestal niet abels). De stelling van Kronecker en Weber zegt dat de kern de afsluiting van de commutator-ondergroep is. Met andere woorden, voor elke f in $\mathbb{Q}[x]$ waarvan de Galoisgroep abels is, is er een $n \geq 1$ zodat f zijn nulpunten in $\mathbb{Q}(\exp(2\pi i/n))$ heeft.

In navolging van Galois, die eindige lichamen vond in zijn onderzoek naar groepen van automorfismen van lichamen, hebben we hier *p*-adische getallen gevonden omdat we automorfismen van cyclotomische lichamen bekeken. We hadden ook *p*-adische getallen vanuit de analyse kunnen introduceren in dit verhaal. Onze keus laat zien dat *p*-adische getallen natuurlijk en onvermijdbaar zijn in deze context.

De lichamen $\mathbb{Q}_p$ en de adèle-ring

We gaan weer wat analyse doen. Laat p een priemgetal zijn. Dan hebben we de *p*-adische absolute waarde

$$|\cdot|_p : \mathbb{Q} \rightarrow \mathbb{R}, \quad n/m \mapsto p^{-(n_p - m_p)}, \quad (15)$$

met n_p en m_p zoals in (12). Kortom: $|p|_p = p^{-1}$, dus p is klein en $1/p$ is groot. Net zoals men $\mathbb{R}$ krijgt door $\mathbb{Q}$ te completeren voor de gewone absolute waarde $|\cdot|$, krijgt men het breukenlichaam $\mathbb{Q}_p$ van $\mathbb{Z}_p$ door $\mathbb{Q}$ te completeren voor $|\cdot|_p$. In onze rijtjesnotatie voor $\mathbb{Z}_p$ betekent dit dat $\mathbb{Q}_p$ bestaat uit rijtjes $\dots c_2 c_1 c_0.c_{-1} \dots c_{-n}$: oneindig naar links, eindig naar rechts.

De stelling van Ostrowski zegt dat iedere niet-triviale absolute waarde op $\mathbb{Q}$ equivalent is met (dat wil zeggen, dezelfde topologie geeft als) $|\cdot|$ of een $|\cdot|_p$. We hoeven dus niet te zoeken naar nog meer completering.

Met alle completering in handen definieerden Artin en Whaples in 1945 de *adèle-ring* van $\mathbb{Q}$:

$$\begin{aligned} \mathbb{A}_{\mathbb{Q}} &:= \mathbb{R} \times \prod_p' \mathbb{Q}_p \\ &= \{(x, (y_p)_p) : \forall' p, y_p \in \mathbb{Z}_p\}, \end{aligned} \quad (16)$$

waar $\forall' p$ betekent: voor bijna alle p . Dit heet een 'beperkt product'. We nemen de volgende topologie erop: deze is translatie-invariant, en het product $\mathbb{R} \times \prod_p \mathbb{Z}_p$ is open, en de daarop geïnduceerde topologie is de producttopologie. Deze Hausdorff, lokaal compacte topologische ring $\mathbb{A}_{\mathbb{Q}}$ heeft de fantastische eigenschap dat $\mathbb{Q}$ erin zit als deelring, discreet, en co-compact ($\mathbb{Q} \backslash \mathbb{A}_{\mathbb{Q}}$ is compact)! Wat kan een analyticus nog meer wensen?

Inderdaad heeft Tate (Abelprijs in 2010) dit in 1950 in zijn proefschrift gebruikt om een generalisatie door Hecke van Riemanns resultaten over ζ opnieuw te bewijzen met Fourieranalyse op $\mathbb{A}_{\mathbb{Q}}$ en op $\mathbb{A}_{\mathbb{Q}}^\times$, de multiplicatieve groep van $\mathbb{A}_{\mathbb{Q}}$, met de topologie geïnduceerd als gesloten deelverzameling van $\mathbb{A}_{\mathbb{Q}} \times \mathbb{A}_{\mathbb{Q}}$ bestaande uit de (x, y) met $xy = 1$.

Over de naam 'adèle': dit staat voor 'additieve idèle'. De idèle-groep van $\mathbb{Q}$ is onze $\mathbb{A}_{\mathbb{Q}}^\times$. Deze topologische groep was al vóór Artin en Whaples ingevoerd door Chevalley.

Klassenlichamentheorie voor $\mathbb{Q}$

We weten al dat $\chi_{\text{cycl}} : \text{Aut}(\bar{\mathbb{Q}}) \rightarrow \prod_p \mathbb{Z}_p^\times$ uit (14) het quotiënt is naar de afsluiting van de commutator-ondergroep. Dit betekent

dat het grootste Hausdorff abelse quotient $\text{Aut}(\bar{\mathbb{Q}})^{\text{ab}}$ van $\text{Aut}(\bar{\mathbb{Q}})$ sterke gelijkenis vertoont met $\mathbb{A}_{\bar{\mathbb{Q}}}^{\times}$. Inderdaad induceert χ_{cycl} door samenstelling met inclusie en quotient

$$\prod_p \mathbb{Z}_p^{\times} \hookrightarrow \mathbb{A}_{\bar{\mathbb{Q}}}^{\times} \rightarrow \mathbb{Q}^{\times} \backslash \mathbb{A}_{\bar{\mathbb{Q}}}^{\times} / \mathbb{R}_{>0}^{\times} \quad (17)$$

$\searrow \quad \nearrow$
 $\simeq$

een isomorfisme van topologische groepen

$$\chi_{\text{cycl}} : \text{Aut}(\bar{\mathbb{Q}})^{\text{ab}} \xrightarrow{\simeq} \mathbb{Q}^{\times} \backslash \mathbb{A}_{\bar{\mathbb{Q}}}^{\times} / \mathbb{R}_{>0}^{\times}. \quad (18)$$

De inverse afbeelding, gezien als morfisme van $\mathbb{Q}^{\times} \backslash \mathbb{A}_{\bar{\mathbb{Q}}}^{\times}$ naar $\text{Aut}(\bar{\mathbb{Q}})^{\text{ab}}$, en op een geschikt teken na, heet de *Artin-reciprociteitsafbeelding*.

Algemene klassenlichamentheorie

Een hoofdresultaat in de algebraïsche getaltheorie in de eerste helft van de twintigste eeuw, bereikt door de inspanningen van velen (laten we slechts Hilbert, Artin, Takagi en Chebotarev noemen), is de generalisatie van bovenstaande naar getallenlichamen, dat wil zeggen, naar lichaamsuitbreidingen $\mathbb{Q} \rightarrow K$ van eindige dimensie.

Eerlijkheid gebiedt me te zeggen dat ik hier niet het nodige over weet, met name waar het bewijzen betreft en wie wat heeft gedaan. Daarom verwijs ik naar [7, Chapter XI] en [15]. Vooral belangrijk is dat Artins reciprociteitsafbeelding gegeneraliseerd is naar een surjectie van topologische groepen

$$\text{rec}_K : K^{\times} \backslash \mathbb{A}_K^{\times} \rightarrow \text{Aut}_K(\bar{\mathbb{Q}})^{\text{ab}} \quad (19)$$

waarin $\mathbb{A}_K$ de adèle-ring van K is (hier zonder toelichting), en $\text{Aut}_K(\bar{\mathbb{Q}})$ de (open) ondergroep van $\text{Aut}(\bar{\mathbb{Q}})$ is bestaande uit die σ die K puntsgewijs vast laten. (De kern van rec_K is de afsluiting van het beeld van de samenhangscomponent van $1 \in (\mathbb{R} \otimes K)^{\times}$.) Een expliciete beschrijving van de bijbehorende lichaamsuitbreidingen van K , zoals de cyclotomische uitbreidingen van $\mathbb{Q}$, is alleen in heel speciale gevallen bekend.

Er is hier nog veel meer over te zeggen (lokale theorie, vertakking, L -functies en hun eigenschappen), maar ons doel is om zo snel mogelijk naar het 'niet-abelse' te gaan. De conclusie is dat klassenlichamentheorie een prachtige beschrijving geeft van het grootse Hausdorff abelse quotient van $\text{Aut}_K(\bar{\mathbb{Q}})$. De groep $\text{Aut}_K(\bar{\mathbb{Q}})$ zelf is veel lastiger: het wordt behelpen met representaties en L -functies. We beperken ons tot het geval $K = \mathbb{Q}$.



Robert Langlands met de Abelprijs

Foto: abelprijs.no

Decompositie en inertie

Het is nu tijd om wat meer te zeggen over de relatie tussen $\text{Aut}(\bar{\mathbb{Q}})$ en de 'lokale theorie': de automorfismengroepen van algebraïsche afsluitingen van de $\mathbb{Q}_p$. Voor iedere p heeft $\mathbb{Q}_p$ een op isomorfisme na unieke algebraïsche afsluiting, die we als $\bar{\mathbb{Q}}_p$ noteren. We laten $\text{Aut}_{\mathbb{Q}_p}(\bar{\mathbb{Q}}_p)$ de groep van automorfismen van $\bar{\mathbb{Q}}_p$ zijn, die $\mathbb{Q}_p$ puntsgewijs vastlaten. Omdat $\bar{\mathbb{Q}}_p$ een algebraïsch afgesloten uitbreiding van $\mathbb{Q}$ is, kan $\bar{\mathbb{Q}}$ erin ingebed worden, op vele manieren. Al deze inbeddingen

$$\iota_p : \bar{\mathbb{Q}} \hookrightarrow \bar{\mathbb{Q}}_p \quad (20)$$

vormen één baan onder precompositie met elementen van $\text{Aut}(\bar{\mathbb{Q}})$. We kiezen voor elke p zo'n ι_p . Elke σ in $\text{Aut}_{\mathbb{Q}_p}(\bar{\mathbb{Q}}_p)$ geeft door beperking een element van $\text{Aut}(\bar{\mathbb{Q}})$. Het is een makkelijk resultaat dat de hierdoor gegeven afbeelding van $\text{Aut}_{\mathbb{Q}_p}(\bar{\mathbb{Q}}_p)$ naar $\text{Aut}(\bar{\mathbb{Q}})$ injectief is. Het beeld D_p hiervan heet de *decompositiegroep* bij p :

$$\text{Aut}_{\mathbb{Q}_p}(\bar{\mathbb{Q}}_p) \xrightarrow{\simeq} D_p \subset \text{Aut}(\bar{\mathbb{Q}}). \quad (21)$$

We laten nu $\bar{\mathbb{Z}}_p$ de *gehele afsluiting* van $\mathbb{Z}_p$ in $\bar{\mathbb{Q}}_p$ zijn: de x in $\bar{\mathbb{Q}}_p$ die nulpunt zijn van een polynoom $x^n + \dots + a_1 x + a_0$ met alle a_i in $\mathbb{Z}_p$. Dan is $\bar{\mathbb{Z}}_p$ een deelring van $\bar{\mathbb{Q}}_p$, invariant onder $\text{Aut}_{\mathbb{Q}_p}(\bar{\mathbb{Q}}_p)$ en het is een eenvoudig resultaat dat er een surjectief ringmorfisme is van $\bar{\mathbb{Z}}_p$ naar een algebraïsche afsluiting $\bar{\mathbb{F}}_p$ van $\mathbb{F}_p = \mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$, waarvan

de kern invariant is onder $\text{Aut}_{\mathbb{Q}_p}(\bar{\mathbb{Q}}_p)$. Dit geeft een surjectief groepsmorfisme van $D_p = \text{Aut}_{\mathbb{Q}_p}(\bar{\mathbb{Q}}_p)$ naar $\text{Aut}(\bar{\mathbb{F}}_p)$, waarvan de kern I_p de *inertiegroep* heet:

$$I_p \hookrightarrow D_p \rightarrow \text{Aut}(\bar{\mathbb{F}}_p) \quad (22)$$

Het leuke van ringen van karakteristiek p is dat die een natuurlijk endomorfisme Frob_p hebben, geheten de p -Frobenius, gegeven door $x \mapsto x^p$. In het geval van $\bar{\mathbb{F}}_p$ is dit een automorfisme: het is injectief want $\bar{\mathbb{F}}_p$ is een lichaam, en het is surjectief omdat $\bar{\mathbb{F}}_p$ algebraïsch afgesloten is, dus elk element is een p -de macht. Deze Frob_p in $\text{Aut}(\bar{\mathbb{F}}_p)$ is een 'topologische voortbrenger' en het groepsmorfisme $\mathbb{Z} \rightarrow \text{Aut}(\bar{\mathbb{F}}_p)$ dat 1 naar Frob_p stuurt, breidt uit tot een isomorfisme van topologische groepen $\hat{\mathbb{Z}} \rightarrow \text{Aut}(\bar{\mathbb{F}}_p)$. Voor elke p kiezen we een element in D_p waarvan het beeld in $\text{Aut}(\bar{\mathbb{F}}_p)$ gelijk is aan Frob_p , en voor de eenvoud noemen we dat element weer Frob_p .

L -functies

Laat nu V een eindig dimensionale complexe vectorruimte zijn, en

$$\rho : \text{Aut}(\bar{\mathbb{Q}}) \rightarrow \text{GL}(V) \quad (23)$$

een continu morfisme van groepen. Al dit soort representaties zijn van de volgende vorm: men neme een f in $\mathbb{Q}[x]$, met nulpunten $z_1, \dots, z_d$ in $\bar{\mathbb{Q}}$, een (injectieve) representatie $\bar{\rho} : \text{Aut}(\mathbb{Q}(z_1, \dots, z_d)) \rightarrow \text{GL}(V)$ en men stelt dit samen met de beperkingsafbeelding $\text{Aut}(\bar{\mathbb{Q}}) \rightarrow \text{Aut}(\mathbb{Q}(z_1, \dots, z_d))$. Complexe Galoisrepresentaties zijn dus heel concrete objecten: het volstaat om f en $\bar{\rho}$ te geven.

Als generalisatie van Riemanns zèta-functie definieert men nu de *Artin- L -functie* $s \mapsto L(\rho, s)$ (voor $\Re(s) > 1$) van ρ als volgt. Het is een Euler-product, over alle priemgetallen p :

$$L(\rho, s) := \prod_p L_p(\rho, s), \quad \text{voor } s \in \mathbb{C} \text{ met } \Re(s) > 1. \quad (24)$$

De factor $L_p(\rho, s)$ bij p is de inverse van het inverse karakteristieke polynoom van $\rho(\text{Frob}_p)$, werkend op de deelruimte V^{I_p} van elementen van V die invariant zijn onder I_p , met als variabele p^{-s} . In formule:

$$L_p(\rho, s) := \det(1 - p^{-s} \rho(\text{Frob}_p), V^{I_p})^{-1}. \quad (25)$$

Dit hangt niet af van de hierboven gemaakte keuzes (de Frob_p , de inbeddingen ι_p).

Voor bijna alle p geldt $V^{\mathbb{F}_p} = V$. Men ziet dat de L -functie van de triviale representatie op $\mathbb{C}$ gelijk is aan Riemanns ζ .

Uit de al bovengenoemde resultaten van Hecke en Tate, en wat representatietheorie van eindige groepen (Brauer), volgt dat alle $L(\rho)$ een meromorfe voortzetting hebben tot $\mathbb{C}$, en dat er een expliciete functionaalvergelijking is tussen $L(\rho, s)$ en $L(\rho^\vee, 1-s)$, waarbij $\rho^\vee$ de duale representatie van ρ is: $\rho^\vee(\sigma) = \rho(\sigma^{-1})^\vee$ in $\text{Aut}(V^\vee)$. Als $\rho = \rho_1 \oplus \rho_2$, dan geldt $L(\rho) = L(\rho_1)L(\rho_2)$.

Artins vermoeden is dat voor irreducibele niet triviale ρ de functie $L(\rho)$ analytisch is op heel $\mathbb{C}$. Het is precies hier dat het Langlands-programma een rol speelt: het idee is dat als $L(\rho)$ de L -functie is van een ‘cuspidale automorfe representatie’, dan is $L(\rho)$ analytisch en heeft de goede functionaalvergelijking, ongeveer net zo als we hebben gezien voor Riemanns ζ . Het is hier misschien een geschikt moment om te vermelden dat de door Riemann gebruikte functie θ een automorf object is (het is een ‘modulaire vorm’).

Automorfe representaties van GL_n over $\mathbb{Q}$

Nu betreden we (opnieuw) het domein van de harmonische analyse. We hebben al een toepassing gezien van Fouriertransformatie op $\mathbb{R}$, en dat heeft te maken met representatietheorie van $\mathbb{R}$. Wie de sferisch harmonische functies op de bol S^2 wil begrijpen of gebruiken (denk aan de quantummechanica van het waterstofatoom) doet er goed aan de groep $\text{SO}_3(\mathbb{R})$ daarop te laten werken, en de representatietheorie daarvan te gebruiken. Omdat deze groep compact is, zijn de irreducibele representaties eindigdimensionaal. De Peter–Weyl-stelling geeft een Hilbertbasis van de L^2 -ruimte van kwadraat-integreerbare functies op $\text{SO}_3(\mathbb{R})$, en ook voor S^2 . Moeilijker wordt het als we groepen als $\text{GL}_n(\mathbb{R})$ bekijken, want hier zijn de relevante representaties op Hilbertruimten niet noodzakelijk eindigdimensionaal. Toch is representatietheorie ook hier de manier om getaltheoretisch relevante ruimten van functies op $\text{GL}_n(\mathbb{Z}) \backslash \text{GL}_n(\mathbb{R})$ aan te pakken. Bijvoorbeeld is $\text{GL}_n(\mathbb{Z}) \backslash \text{GL}_n(\mathbb{R}) / \text{O}_n(\mathbb{R})$ de verzameling van isomorfieklassen van roosters in n -dimensionale euclidische ruimten.

Nu kan men te werk gaan met discrete ondergroepen van Liegroepen zoals $\text{GL}_n(\mathbb{Z})$ in $\text{GL}_n(\mathbb{R})$, maar dat leidt tot Hecke-operatoren bij alle priemgetallen (zoals in

[8]), terwijl het voor *dit* verhaal essentieel is dat we alles uitdrukken in representatietheorie, ook van groepen als $\text{GL}_n(\mathbb{Q}_p)$. Daarom bekijken we ruimten van functies op $\text{GL}_n(\mathbb{Q}) \backslash \text{GL}_n(\mathbb{A}_{\mathbb{Q}})$. Het verband tussen $\text{GL}_n(\mathbb{Z}) \backslash \text{GL}_n(\mathbb{R})$ en $\text{GL}_n(\mathbb{Q}) \backslash \text{GL}_n(\mathbb{A}_{\mathbb{Q}})$ is als volgt:

$$\begin{aligned} \text{GL}_n(\mathbb{Q}) \backslash \text{GL}_n(\mathbb{A}_{\mathbb{Q}}) / \text{GL}_n(\hat{\mathbb{Z}}) \\ = \text{GL}_n(\mathbb{Z}) \backslash \text{GL}_n(\mathbb{R}), \end{aligned} \quad (26)$$

hetgeen men kan bewijzen door te gebruiken dat de actie van $\text{GL}_n(\mathbb{Q})$ op $\text{GL}_n(\mathbb{A}_{\mathbb{Q}}) / \text{GL}_n(\hat{\mathbb{Z}})$ transitief is, waarbij $\mathbb{A}_{\mathbb{Q}}^\infty$ de *eindige adèle-ring* is:

$$\mathbb{A}_{\mathbb{Q}}^\infty = \prod_p' \mathbb{Q}_p \text{ en } \mathbb{A}_{\mathbb{Q}} = \mathbb{A}_{\mathbb{Q}}^\infty \times \mathbb{R}. \quad (27)$$

Daarom zijn functies op de ruimte $\text{GL}_n(\mathbb{Z}) \backslash \text{GL}_n(\mathbb{R})$ rechts $\text{GL}_n(\hat{\mathbb{Z}})$ invariante functies op $\text{GL}_n(\mathbb{Q}) \backslash \text{GL}_n(\mathbb{A}_{\mathbb{Q}})$.

De laatste stap naar automorfe vormen komt voort uit de wens een ‘algebraïsche’ theorie te hebben: alleen eindige sommen, geen limieten. Bijvoorbeeld, in plaats van de ruimte van L^2 -functies op de cirkel $S^1 = \mathbb{Z} \backslash \mathbb{R}$ willen we de *eindige* $\mathbb{C}$ -lineaire combinaties van de elementen van de Hilbertbasis. Dit zijn precies de functies waarvan de getransleerden in een eindigdimensionale vectorruimte liggen. Het probleem dat hier optreedt komt alleen van de factor $\text{GL}_n(\mathbb{R})$, want de factor $\text{GL}_n(\mathbb{A}_{\mathbb{Q}}^\infty)$ heeft een cofinaal systeem van open compacte ondergroepen, bijvoorbeeld de kernen van de groepsomorfismen $\text{GL}_n(\hat{\mathbb{Z}}) \rightarrow \text{GL}_n(\mathbb{Z}/m\mathbb{Z})$, met $m \geq 1$.

We bekijken dus functies

$$\begin{aligned} f: \text{GL}_n(\mathbb{A}_{\mathbb{Q}}) \\ = \text{GL}_n(\mathbb{R}) \times \text{GL}_n(\mathbb{A}_{\mathbb{Q}}^\infty) \rightarrow \mathbb{C} \end{aligned} \quad (28)$$

die voldoen aan:

1. f is invariant onder linkstranslaties met elementen van $\text{GL}_n(\mathbb{Q})$;
2. f is invariant onder rechtstranslaties met elementen van een open ondergroep (die van f af mag hangen) van $\text{GL}_n(\mathbb{A}_{\mathbb{Q}}^\infty)$;
3. voor alle g in $\text{GL}_n(\mathbb{A}_{\mathbb{Q}}^\infty)$ is de beperking van f tot $\{g\} \times \text{GL}_n(\mathbb{R})$ glad;
4. de rechtsgetransleerden van f onder $\text{O}_n(\mathbb{R})$ liggen in een eindig dimensionale vectorruimte;
5. f is *cuspidaal*;
6. f is een eigenvector van het centrum van de algebra van links-invariante differentiaaloperatoren op $\text{GL}_n(\mathbb{R})$;
7. $\exists a \in \mathbb{R}$ zodat $g \mapsto |f(g)| \cdot \|\det(g)\|^a$ begrensd is.

Een aantal van deze voorwaarden verdienen nog toelichting. Voor complete details zie [22] (sterk aanbevolen, juist omdat daar complete definities en precieze vermoedens staan). Voorwaarde (7): voor $x \in \mathbb{A}_{\mathbb{Q}}$ is $\|x\|$ gedefinieerd als $|x_\infty| \cdot \prod_p |x_p|_p$. Voorwaarde (7) betekent intuïtief dat f niets te maken heeft met GL_m voor $m < n$, en technisch dat voor elke partitie $n = n_1 + n_2$ met $n_1, n_2 > 0$, en voor elke g in $\text{GL}_n(\mathbb{A}_{\mathbb{Q}})$,

$$\int_{u \in U_{n_1, n_2}(\mathbb{Q}) \backslash U_{n_1, n_2}(\mathbb{A}_{\mathbb{Q}})} f(ug) du = 0,$$

waarin U_{n_1, n_2} de ondergroep van GL_n is bestaande uit matrices van de vorm

$$\begin{pmatrix} 1_{n_1} & * \\ 0 & 1_{n_2} \end{pmatrix}.$$

Voorwaarden (1)–(5) zijn lineair: de verzameling van f die eraan voldoen is een complexe deelruimte. De keuze van de maximaal compacte ondergroep $\text{O}_n(\mathbb{R})$ in voorwaarde (4), die slechts uniek is op conjugatie na, heeft als gevolg dat de groep $\text{GL}_n(\mathbb{R})$ *niet* werkt, door rechtstranslaties, op de ruimte van functies die aan de eerste vier voorwaarden voldoen. Maar de algebra van differentiaaloperatoren uit voorwaarde (6), voortgebracht door de *infinitesimale* rechtstranslaties, werkt er nog wel op. Het is geen moeilijk resultaat dat het centrum $\mathfrak{z}_n$ van deze algebra een polynoomalgebra in n variabelen is (coëfficiënten van het minimumpolynoom). Een eigenvector $f \neq 0$ als in (6) geeft dan een $\mathbb{R}$ -algebra-morfisme $H: \mathfrak{z}_n \rightarrow \mathbb{C}$ dat voor elke $D \in \mathfrak{z}_n$ de eigenwaarde van D op f geeft, en de verzameling van zulke morfismen is in een natuurlijke bijectie met $\mathbb{C}^n$. Laat nu $H: \mathfrak{z}_n \rightarrow \mathbb{C}$ een morfisme zijn. Dan heet

$$\begin{aligned} \mathcal{A}_{n, H}^\circ := \{f: f \text{ voldoet aan (1)–(7)} \\ \text{en (6) met } H\} \end{aligned}$$

de ruimte van *cuspidale automorfe vormen* op $\text{GL}_n(\mathbb{A}_{\mathbb{Q}})$ met *infinitesimaal karakter* H .

Hiermee hebben we nu het belangrijkste object aan de analysekant van dit verhaal. Op deze $\mathbb{C}$ -vectorruimte werken $\text{GL}_n(\mathbb{A}_{\mathbb{Q}}^\infty)$, $\text{O}_n(\mathbb{R})$, en de Lie-algebra $\mathfrak{M}_n(\mathbb{R})$. De eerste hiervan commuteert met de andere twee, die samen een eenvoudige commutatieregels hebben. De belangrijkste vraag is nu hoe $\mathcal{A}_{n, H}^\circ$ eruit ziet als representatie voor $\text{GL}_n(\mathbb{A}_{\mathbb{Q}}^\infty) \times (\text{O}_n(\mathbb{R}), \mathfrak{M}_n(\mathbb{R}))$. Het is bekend (en vast niet zo makkelijk) dat $\mathcal{A}_{n, H}^\circ$ een directe som is van simpele representa-

ties π (op een vectorruimte V_π), elk met multipliciteit 1. Verder is elk zo'n simpele representatie op unieke manier van de vorm $\pi = \pi_\infty \otimes'_p \pi_p$, met π_∞ een irreducibele representatie van het paar $(O_n(\mathbb{R}), M_n(\mathbb{R}))$, elke π_p een irreducibele representatie van $GL_n(\mathbb{Q}_p)$, en $\otimes'_p \pi_p$ het beperkt tensorproduct van de π_p (zie [22]), een notie die weerspiegelt dat $\mathbb{A}_\mathbb{Q}$ een beperkt product is. Weer verder is voor bijna alle p de representatie π_p gegeven door een ongeordend n -tal complexe getallen $\lambda_i \neq 0$ zodat voor alle i en j geldt dat $\lambda_j \neq p\lambda_i$. Dit heeft van alles te maken met de groep $\mathbb{Q}_p^{\times, n}$ van diagonale matrices. Gezien de paragraaf 'L-functies' ligt het voor de hand om voor zulke p te definiëren:

$$L_p(\pi, s) := \prod_i (1 - \lambda_i p^{-s})^{-1}.$$

De π die voorkomen in $\mathcal{A}_{n,H}^\circ$ heten *cuspidale automorfe representaties*. De eis dat automorfe vormen linksinvariant zijn onder $GL_n(\mathbb{Q})$ legt sterke beperkingen van getaltheoretische aard op aan de collectie van lokale factoren $(\pi_p)_p$ van een automorfe π . Zonder deze eis is het chaos.

De cruciale twee vragen

We hebben nu aan beide kanten wat structuur gezien. Laat nu $\rho: \text{Aut}(\bar{\mathbb{Q}}) \rightarrow GL_n(\mathbb{C})$ een irreducibele continue representatie zijn. Dan hebben we voor iedere p waarvoor ρ_p onvertakt is, het n -tal eigenwaarden van $\rho(\text{Frob}_p)$, en dus de daarbij horende representatie $\pi(\rho)_p$ van $GL_n(\mathbb{Q}_p)$. De vraag rijst dan of er een cuspidale automorfe $\pi(\rho)$ bestaat waarvan, voor onvertakte p , de lokale factoren de $\pi(\rho)_p$ zijn, en welke cuspidale automorfe representaties van Galoisrepresentaties komen. En ook rijst de vraag of er voor een cuspidale automorfe π een L -functie $L(\pi)$ te definiëren is, product van lokale $L(\pi_\infty)$ en $L(\pi_p)$ met lokale functionaalvergelijkingen, die analytisch voortzetbaar is en de product-functionaalvergelijking heeft. Een positief antwoord op de eerste en op de laatste vraag bewijst Artins vermoeden.

Langlands stelde zich waarschijnlijk deze vragen in 1966. Mijn punt is dat dit toen wel in de lucht hing (volgens [16, §3.1] zegt Langlands dit zelf ook). Er was al werk over modulariteit van elliptische krommen over $\mathbb{Q}$ (Shimura–Taniyama, Weil in [23]), de theorie van automorfe representaties

was al in ontwikkeling, zie [12] en werk van Harish–Chandra, en denk eens aan het geval $n = 1$, en ook aan functielichamen. De eerste vraag is nog steeds open, maar de tweede is met ja beantwoord in [13].

In ieder geval heeft Langlands een enorm onderzoeksterrein geopend: kijk naar ℓ -adische representaties, vervang $\mathbb{Q}$ door een getallenlichaam, GL_n door een andere groep. U staat nu voor de poort naar een gebied met mooie tuinen, maar ook enorme bouwterreinen. Een optimistische onderzoekende houding is nu voldoende, en het hele Langlands-programma, inclusief 'duale groepen' en 'functorialiteit', zal vanzelf voor u opdoemen.

Wie wil aansluiten bij huidig onderzoek, wordt Scholze's voordracht op ICM 2018 [17] aanbevolen (zie ook Moonens stuk in dit NAW-nummer), en ook [6] en [3]. In [18] kondigt Scholze een artikel aan, van hem en Fargues, waarin 'de natuur' (cohomologie van 'locale Shimura-variëteiten') de locale Langlands-correspondentie voor willekeurige reductieve p -adische groepen realiseert. Ruim vijftig jaar na de start van het Langlands-programma is dit een zeer belangrijke mijlpaal. Nu nog de globale theorie! ☺

Referenties

- 1 <http://www.abelprize.no/seksjon/vis.html?tid=73018>.
- 2 AMS communication, Robert Langlands Awarded Abel Prize, *Notices Amer. Math. Soc.* 65(6) (2018), 670–672.
- 3 J. Arthur, A note on the automorphic Langlands group – Dedicated to Robert V. Moody, *Canad. Math. Bull.* 45(4) (2002), 466–482.
- 4 A.-M. Aubert, Around the Langlands program, *Jahresber. Dtsch. Math.-Ver.* 120(1) (2018), 3–40.
- 5 A. Bellos, A glimpse of the Laureate's work, <http://www.abelprize.no/c73016/binfil/download.php?tid=73020>.
- 6 K. Buzzard en T. Gee, The conjectural connections between automorphic representations and Galois representations, *Automorphic Forms and Galois Representations. Vol. 1*, London Math. Soc. Lecture Note Ser. 414, Cambridge University Press, 2014, pp. 135–187.
- 7 J.W.S. Cassels en A. Fröhlich., eds., *Algebraic Number Theory*, Second edition, Proceedings of an instructional conference organized by the London Mathematical Society (a NATO Advanced Study Institute) with the support of the International Mathematical Union, papers from the conference held at the University of Sussex, Brighton, 1–17 September 1965, London Mathematical Society, 2010. Including a list of errata.
- 8 S. Dahmen en A. Kret, Andrew Wiles and the Abel Prize, *NAW* 5/18(2) (2017), 88–98.
- 9 F. Diamond en J. Shurman, *A First Course in Modular Forms*, Graduate Texts in Mathematics 228, Springer, 2005.
- 10 B. Dundas en C. Skau, Interview with Abel laureate Robert Langlands, *Eur. Math. Soc. Newsl.* 109 (2018), 19–27. Video at <http://www.abelprize.no/artikkel/vis.html?tid=73440>.
- 11 S. Friedberg, What is... the Langlands program? *Notices Amer. Math. Soc.* 65(6) (2018), 663–665.
- 12 I.M. Gel'fand, M.I. Graev en I.I. Piatetski-Shapiro, Representations of adèle groups, *Dokl. Akad. Nauk SSSR* 156 (1964) 487–490. In Russian.
- 13 R. Godement en H. Jacquet, *Zeta Functions of Simple Algebras*, Lecture Notes in Mathematics, Vol. 260, Springer, 1972.
- 14 R.P. Langlands, The work of Robert Langlands, <http://publications.ias.edu/rpl>.
- 15 P. Stevenhagen en H.W. Lenstra, Chebotarëv and his density theorem, *Math. Intelligencer* 18(2) (1996), 26–37.
- 16 J. Mueller, On the genesis of Robert P. Langlands' conjectures and his letter to André Weil, *Bull. Amer. Math. Soc. (N.S.)* 55(4) (2018), 493–528.
- 17 P. Scholze, p -adic geometry, arXiv:1712.03708.
- 18 P. Scholze, Etale cohomology of diamonds, <http://www.math.uni-bonn.de/people/scholze/EtCohDiamonds.pdf>.
- 19 J.-P. Serre, *A Course in Arithmetic*, Graduate Texts in Mathematics, No. 7. Springer, 1973.
- 20 A. Sletsjøe, 17 handwritten pages that shaped a whole area of mathematical research, <http://www.abelprize.no/c73016/binfil/download.php?tid=73037>.
- 21 A. Sletsjøe, *From quadratic reciprocity to Langlands' program*, <http://www.abelprize.no/c73016/binfil/download.php?tid=73038>.
- 22 R. Taylor, Galois representations, *Ann. Fac. Sci. Toulouse Math. (6)* 13(1) (2004), 73–119.
- 23 A. Weil, Über die Bestimmung Dirichletscher Reihen durch Funktionalgleichungen, *Math. Ann.* 168 (1967) 149–156.

Raf Bocklandt

Korteweg-de Vries Instituut
Universiteit van Amsterdam
raf.bocklandt@gmail.com

Evenement **Wolfprijs 2018**

Een kleine suggestie met grote gevolgen

Sinds 1978 reikt de Wolf Foundation, een non-profitorganisatie opgericht door de Duits-Joods-Cubaanse uitvinder Ricardo Wolf, jaarlijks een aantal prijzen uit voor wetenschappelijke en artistieke verdiensten. Een ervan is de Wolf Prize for Mathematics en die bekroont meestal twee belangrijke wiskundigen. In 2018 werd de prijs uitgereikt aan Vladimir Drinfeld en Alexander Beilinson van de Universiteit van Chicago. In dit artikel beschrijft Raf Bocklandt de ideeën die achter hun werk liggen.

Qua prestige in de wiskundewereld moet de Wolfprijs enkel de Fieldsmedailles en de Abelprijs laten voorgaan. In het algemeen staat het werk van de twee prijswinnaars los van elkaar en het is niet ongewoon om twee wiskundigen uit totaal verschillende vakgebieden te huldigen, maar bij de afgelopen editie was dit anders. In 2018 bekroonde de organisatie Vladimir Drinfeld en Alexander Beilinson [1], een paar onderzoekers die niet alleen allebei werken aan soortgelijke problemen, maar ook reeds lang vrienden zijn en sinds 1999 zelfs collega's aan de Universiteit van Chicago, een topuniversiteit met een heel sterk wiskundedepartement dat maar liefst zes Fieldsmedaillewinnars in zijn rangen telt.

Twee wiskundige broers

Drinfeld en Beilinson startten hun wiskundige carrière in de jaren zeventig onder Yuri Manin in Moskou. Drinfeld maakte op reeds jonge leeftijd (amper 20 jaar) furore met zijn bewijs van het klassieke Langlands-vermoeden voor GL_2 over $\mathbb{F}_q(X)$, maar kon wegens zijn Joods-Oekraïense achtergrond geen vaste baan krijgen in Moskou en werd uiteindelijk professor aan de Universiteit van Charkov. In de jaren tachtig revolutionariseerde hij de theorie van Kwantumgroepen, een tour-de-force waarvoor hij samen

met zijn werk aan het Langlands-vermoeden in 1990 de Fieldsmedaille kreeg.

Beilinson is Drinfelds drie jaar jongere wiskundige broer en bestudeerde in zijn beginjaren afgeleide categorieën van algebraïsche variëteiten. Hij toonde aan hoe deze soms beschreven konden worden aan de hand van lineaire algebra. In de jaren tachtig werd hij bekend voor zijn bewijs van de Kazhdan–Lusztig-vermoedens en de methoden die hij samen met Joseph Bernstein daarvoor ontwikkelde, bleken heel belangrijk in de representatietheorie. Daarnaast werkte hij ook aan algebraïsche K -theorie, L -functies, en nog veel meer.

Omdat ze allebei een breed spectrum van de wiskunde beheersen met heel wat onderlinge overlappingsen, is het niet verwonderlijk dat hun gemeenschappelijke interesses resulteerden in een vruchtbare samenwerking van meer dan dertig jaar. De rode draad die door deze samenwerking loopt, staat bekend als de geometrische Langlands-correspondentie en is een versie van het Langlands-programma die de getaltheorie omruilt voor algebraïsche meetkunde. In de jaren negentig ontwikkelden Beilinson en Drinfeld samen een nieuwe formulering voor deze spin-off, die een grote invloed heeft

op het hedendaagse wis- en natuurkundelandschap.

Niettegenstaande de onmiskenbare wiskundige genialiteit van dit duo, verliep de aanvangsfase van dit project moeizamer dan gedacht en uiteindelijk was er een kleine inbreng van buitenaf nodig om alles tot een goed einde te brengen. Hieronder schetsen we kort de ideeën die achter het werk van Beilinson en Drinfeld liggen en hoe een kleine opmerking van een natuurkundige uiteindelijk leidde tot de grote doorbraak.

Een vertalingsoefening

Het basisidee van het klassieke Langlands-programma is dat er een correspondentie bestaat tussen twee verschillende soorten objecten: aan de ene kant representaties van Galoisgroepen van getallenlichamen¹ en aan de andere kant automorfe functies. Deze laatste zijn te zien als functies op ringen van adèles² met mooie transformatie-eigenschappen.

De connectie tussen de aanpak van Drinfeld en Beilinson en het klassieke Langlands-programma [4] start met een opmerkelijke analogie tussen getallenlichamen en functielichamen van krommen, die ons in staat stelt de belangrijkste begrippen uit de het Langlands-programma te vertalen naar de meetkunde [5]. Deze pittige vertalingsoefening is samen te vatten in twee slogans en één vermoeden.

Galoisrepresentaties zijn lokale systemen

Net zoals je de priemgetallen uit $\mathbb{Q}$ kan extraheren door te gaan kijken naar valuaties, zijn de valuaties³ over een functie-

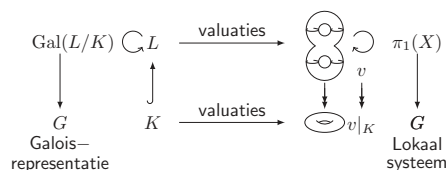


Alexander Beilinson en Vladimir Drinfeld

Foto: Jean Lachat/University of Chicago

lichaam van een complexe projectieve gladde krommen te identificeren met de punten van die kromme.

Elke valuatie over een lichaamsuitbreiding kan je beperken tot het grondlichaam en op die manier geeft een lichaamsuitbreiding een overdekkingsafbeelding tussen twee krommen. De Galoisgroep van de lichaamsuitbreiding wordt dan de groep van automorfismen van deze overdekking.⁴ Vanuit meetkundig opzicht doet de fundamentealgroep net hetzelfde: het is de automorfismegroep van de universele overdekking en levert dus overdekkingsautomorfismen voor alle overdekkingen. Dit geeft een morfisme $\pi_1(X) \rightarrow \text{Gal}(L/K)$ en door samenstelling kan je dus een G -representatie $\rho: \text{Gal}(L/K) \rightarrow G$ van een Galoisgroep meetkundig interpreteren als een G -representatie van de fundamentealgroep van de kromme. Dit laatste concept wordt ook wel per definitie een lokaal G -systeem genoemd. Zie Figuur 1.



Figuur 1

Automorfe functies zijn schoven op moduli-ruimten van bundels

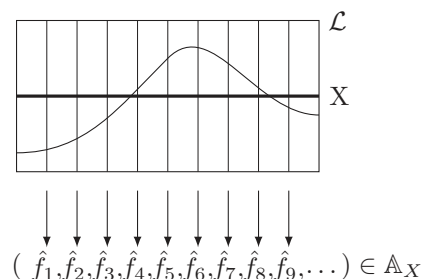
Het tweede ingrediënt in het Langlands-programma is de adèle-ring. Hier kunnen we ook wat meetkundige intuïtie inbrengen. Als p een punt is op een gladde projectieve kromme X en $f: X \rightarrow \mathbb{C}$ een meromorfe functie, dan kunnen we f ontwikkelen als een Laurentreeks in p . Dit geeft een inbedding van $\mathbb{C}(X)$ in de ring van Laurentreeksen $\mathbb{C}((t))$, analoog aan de inbedding van $\mathbb{Q}$ in de ring van p -adische getallen. Net zoals de adèle-ring over $\mathbb{Q}$ de p -adische getallen voor alle p verzamelt⁵, kunnen we de ring $\mathbb{A}_X$ definiëren als een productring van machtreeksen voor elk punt in X . Elke meromorfe functie op X kan gezien worden als een adèle door in alle punten zijn Laurentreeks te bepalen. Die adèle is inverteerbaar omdat elke meromorfe functie een meromorf invers heeft, maar niet elk inverteerbaar element uit de adèle-ring komt van een functie op X . Om die andere adèles te construeren moeten we kijken naar complexlijnenbundels.

Een reële functie op een cirkel kan je zien als een grafiek op een cylinder, maar je kan ook een grafiek tekenen op een Möbiusband. Wiskundig noemt men zo een grafiek een sectie van een lijnenbundel.

In de algebraïsche meetkunde kan je iets soortgelijks doen: net zoals je op een cirkel kopieën van $\mathbb{R}$ kan bundelen tot een cylinder of een Möbiusband, kan je op een complexe kromme kopieën van $\mathbb{C}$ bundelen tot verschillende lijnbundels en daarop grafieken beschouwen: meromorfe secties.

Voor elke meromorfe sectie kan je in elk punt een Laurentreeks construeren en dus een element in $\mathbb{A}_X^\times$. Natuurlijk hangt de adèle af van de lijnenbundel en de specifieke sectie, maar het is mogelijk om een equivalentierelatie te definiëren op $\mathbb{A}_X^\times$ zodanig dat adèles equivalent zijn als ze komen van dezelfde lijnenbundel. Zie Figuur 2.

Op die manier is $\mathbb{A}_K^\times / \sim$ te zien als de verzameling van alle lijnenbundels op de kromme. Bovendien zorgen de mooie transformatie-eigenschappen van automor-



Figuur 2

fe functies er precies voor dat ze equivalente adèles op hetzelfde afbeelden. Een automorfe functie moet dus gezien worden als een functie op de ruimte van lijnenbundels op een kromme. Dit is echter het eendimensionale geval; meer algemeen kan je ook kijken naar vectorbundels of G -bundels op een kromme, waarbij G een Liegroep is. In elk van deze gevallen wil je een ruimte $\text{Bun}_G(X)$ maken die al deze bundels beschrijft.

Helaas is dit nog net iets te eenvoudig. Niet alle dingen die functies lijken, zijn ook echt functies. Neem bijvoorbeeld de argumentsfunctie. Die wijst aan elk punt op de eenheidscirkel een hoek toe, maar die hoek is niet eenduidig bepaald want je kan er 2π bij optellen. De argumentsfunctie is dus een ‘meerwaardige functie’ en wiskundigen beschrijven deze objecten door middel van een nieuw abstract begrip: schoven.⁶ Automorfe functies moeten daarom gezien worden als een bepaald soort schoven op een ruimte van bundels.

Het meetkundig Langlands-vermoeden

Naast deze twee slogans is er ook nog een derde ingrediënt en dat is het concept Langlands-dualiteit. Dit is een dualiteit op de verzameling van reductieve algebraïsche groepen die de rol van karakters en cokarakters omwisselt. Dit wil zeggen dat als G en $G^\vee$ duale groepen zijn dan is er een bijectie tussen de groepsmorphisme $\rho: G \rightarrow \mathbb{C}^*$ (de karakters van G) en de groepsmorphisme $\rho^\vee: \mathbb{C}^* \rightarrow G^\vee$ (de cokarakters van $G^\vee$).

Nu hebben we alle elementen voor handen om het meetkundig Langlands-vermoeden te schetsen. Dit stelt dat je met elk $G^\vee$ -lokaal systeem op X een schoof kan associëren op $\text{Bun}_G(X)$ met mooie eigenschappen. Deze schoof wordt ook wel een Hecke-eigenschoof genoemd, maar het vermoeden specificeert helaas niet hoe je deze schoof moet construeren.

Een beetje hulp van buitenaf

In het begin van de jaren negentig waren Beilinson en Drinfeld naarstig op zoek naar een goede manier om Hecke-eigenschappen te maken door gebruik te maken van technieken uit de theoretische natuurkunde. Ze hadden al heel wat voortgang geboekt maar niet alles paste in elkaar zoals het zou moeten.

Toen ze hun ideeën uitlegden aan Edward Witten, de goeroe van de supersnaartheorie en de enige natuurkundige die ooit de Fieldsmedaille won, was die danig in de war. Beilinson en Drinfeld leken de methoden uit zijn vakgebied te gebruiken op een rare manier. Dat voelde zeer onnatuurlijk aan, maar het deed hem wel denken aan iets waar hij al eerder van had gehoord. In de jaren tachtig had de Engelse wiskundige Nigel Hitchin ontdekt dat je de ruimte $\text{Bun}_G(X)$ kon bestuderen met technieken uit de mechanica, alsof het een dynamisch systeem betreft. Witten opperde dat dit wel eens het ontbrekende puzzelstukje kon zijn.

Omdat ze er zelf niet vertrouwd mee waren besloten Beilinson en Drinfeld Hit-

chins werk eens onder de loep te nemen en wonder boven wonder bleek Witten suggestie te werken. Via Hitchins integreerbare systeem konden ze een compleet nieuwe formulering geven van de Langlands-correspondentie. Hun basisidee was om Hitchins integreerbare systeem te kwantiseren. Op die manier kregen ze een ring van functies op een ruimte van $G^\vee$ -lokale systemen op X . Met elk zulk lokaal systeem komt dus een maximaal ideaal in die ring overeen en dat kan je gebruiken om een schoof te definiëren op $\text{Bun}_G(X)$. Die schoof is precies de Hecke-eigenschoof uit het Langlands-programma. Beilinson en Drinfeld schreven de details neer in een preprint [2] die ze echter nooit publiceerden maar steeds verder bijwerkten. Momenteel telt het zo’n 385 pagina’s en de geniale ideeën erin legden de basis voor vele vruchtbare samenwerkingsverbanden tussen getaltheoretici, meetkundigen en theoretische fysici.

Merkwaardig genoeg staat er aan het begin van deze preprint ook een kleine paragraaf waarin wordt opgemerkt dat Witten de basisideeën uit hun artikel ook al onafhankelijk van hen gevonden had, maar er niks over heeft gepubliceerd. In een recent interview [3] vertelde de immer bescheiden Witten dat dit veel te veel eer was. In feite begreep hij er zelf niet veel van en had hij enkel Hitchins werk aan hen gesuggereerd omdat hij een vaag vermoeden had dat dit wel eens relevant zou kunnen zijn. Maar zelfs in de vaagste vermoedens zitten vaak heel diepe verbanden verborgen. ☞

Noten

- 1 Als L/K een lichaamsuitbreiding is, dan is de Galoisgroep $\text{Gal}(L/K)$ de groep van alle automorfismen van L die K elementsgewijs vasthouden. Een Galoisrepresentatie is een groepsmorphisme $\rho: \text{Gal}(L/K) \rightarrow G$ van de Galoisgroep naar een andere groep, bijvoorbeeld $G = \text{GL}_n(\mathbb{C})$.
- 2 Als K een lichaam is dan is de adèle-ring een soort product van alle mogelijke completies van K .
- 3 Een valuatie over een lichaam K is een groepsmorphisme $v: K^\times \rightarrow \mathbb{Z}$ waarvoor $v(a+b) \geq$

$\min(v(a), v(b))$. voor elk priemgetal $p \in \mathbb{Z}$ is er een valuatie $v_p: \mathbb{Q} \rightarrow \mathbb{Z}$ die de macht van p in een breuk weergeeft, bijvoorbeeld $v_2(100) = 2$. Als K een functielichaam is van een kromme dan heb je voor elk punt een valuatie die aan elke functie de laagste orde van de Laurent-expansie in dat punt toewijst.

- 4 Een automorfisme van een overdekking $\pi: Y \rightarrow X$ is een afbeelding $\phi: Y \rightarrow Y$ zodanig dat $\pi\phi = \pi$.
- 5 $\mathbb{Q}$ heeft nog een extra completie die niet

van een valuatie komt, namelijk $\mathbb{R}$. Die zit ook in de adèles, voor een functielichaam bestaat deze extra completie niet.

- 6 Een schoof S op een topologische ruimte X wijst aan iedere open verzameling U een verzameling lokale secties $S(U)$ toe. De argumentsfunctie op een cirkel bestaat lokaal uit meerdere ‘takken’ die elk 2π verschillen. De corresponderende schoof wijst aan elk open deel U de verzameling van al die takken toe.

Referenties

- 1 Elaine Kehoe, Beilinson en Drinfeld Awarded 2018 Wolf Prize in Mathematics, *Notices AMS* 65(6) (2018), 697–698
- 2 Alexander Beilinson en Vladimir Drinfeld, Quantization of Hitchin’s integrable system and Hecke eigensheaves (ca. 1995), zie <http://math.uchicago.edu/~mitya/langlands.html>.

math.uchicago.edu/~mitya/langlands.html.

- 3 Hiroshi Ooguri, Interview with Edward Witten, *Notices of the AMS* 62(5) (2015).
- 4 Stephen Gelbart, An elementary introduction to the Langlands program, *Bulletin of*

the American Mathematical Society 10(2) (1984), 177–219.

- 5 Edward Frenkel, Lectures on the Langlands program and conformal field theory, *Frontiers in Number Theory, Physics, and Geometry II*, Springer, 2007. 387–533.

Ben Moonen

IMAPP

Radboud Universiteit Nijmegen

b.moonen@science.ru.nl

Evenement Fieldsmedaille 2018

Fieldsmedaille voor Peter Scholze

Op 1 augustus 2018 werden in Rio de Janeiro de Fieldsmedailles uitgereikt tijdens het vierjaarlijkse International Congress of Mathematicians. Een van de winnaars was de toen nog dertigjarige Duitser Peter Scholze van de universiteit van Bonn. In dit artikel legt Ben Moonen uit wat er zo bijzonder is aan het werk van deze jonge wiskundige ster.

Eenendertig is hij nu, en zijn prijzenkast puilt uit. Een keer zilver, drie keer goud op de IMO. Op zijn vierentwintigste benoemd tot hoogleraar in Bonn, Cours Peccot in 2012, SASTRA Ramanujan Prize in 2013, Clay Research Award in 2014, de Frank Nelson Cole Prize in Algebra en de Ostrowski Prize in 2015. In 2016 de Prix Fermat, de EMS Prize en, als jongste ooit, de Leibniz-Preis. In datzelfde jaar bedankte hij voor Mark Zuckerbergs 'New Horizons in Mathematics Prize'. Afgelopen zomer dan — weinig verrassend — de Fieldsmedaille. Peter Scholze (Dresden, 11 december 1987) is een fenomeen, zoveel is wel duidelijk. Maar wat is er dan zo bijzonder aan zijn werk? En hoe ziet de toekomst eruit, als je op zo'n jonge leeftijd al zoveel onderscheidingen hebt ontvangen?

Heinrich-Hertz-Gymnasium

De middelbare school die Scholze bezocht, het Heinrich-Hertz-Gymnasium in Berlijn, heeft een uitzonderlijke staat van dienst als het gaat om het afleveren van algebraïsch meetkundigen. Behalve Scholze bezochten ook de wiskundigen Altmann, Huybrechts, Rapoport, Schmidt en Tschinkel allemaal deze school.

Al op jonge leeftijd volgde Scholze wiskunde-colleges aan de Humboldt-universiteit. Toen zijn leraren het gevoel kregen hem daarin niet verder te kunnen begeleiden, werd Klaus Altmann gevraagd de rol

van mentor van Scholze op zich te nemen. Ten tijde van zijn eindexamen, in 2007, was Scholze al op hoog niveau ingewerkt in de algebraïsche meetkunde.

Altmann was zelf circa twintig jaar eerder begeleid door Michael Rapoport. Mede omdat Scholzes wiskundige interesses veel raakvlakken hadden met het werk van Rapoport, gaf Altmann hem het advies om in Bonn bij Rapoport te gaan studeren. Onder diens hoede is Scholze in korte tijd door het bachelor- en masterprogramma geloodst, om vervolgens binnen twee jaar te promoveren.

Op zijn tweeëntwintigste breekt Scholze door met een nieuw bewijs van het locale Langlands-vermoeden voor GL_n dat gebaseerd is op een precieze meetkundige bestudering van bepaalde Shimura-variëteiten. Hier kan je de invloed van Rapoport — een van de grote experts in de gebruikte technieken — in herkennen. Dat is minder het geval bij het artikel 'Perfectoid spaces', ingediend op zijn vierentwintigste verjaardag, waarmee Scholze zich definitief heeft waargemaakt als een wiskundige ster. Dit werk heeft juist veel raakvlakken met dat van de enige andere Duitse Fieldsmedaillist, Gerd Faltings, die ook in Bonn werkzaam is maar dan aan het Max-Planck-Institut. Alhoewel Faltings en Scholze relatief weinig persoonlijke interactie schijnen te hebben, zijn het juist een aantal thema's uit het werk van Faltings die

een hoofdrol spelen in Scholzes werk van de afgelopen jaren.

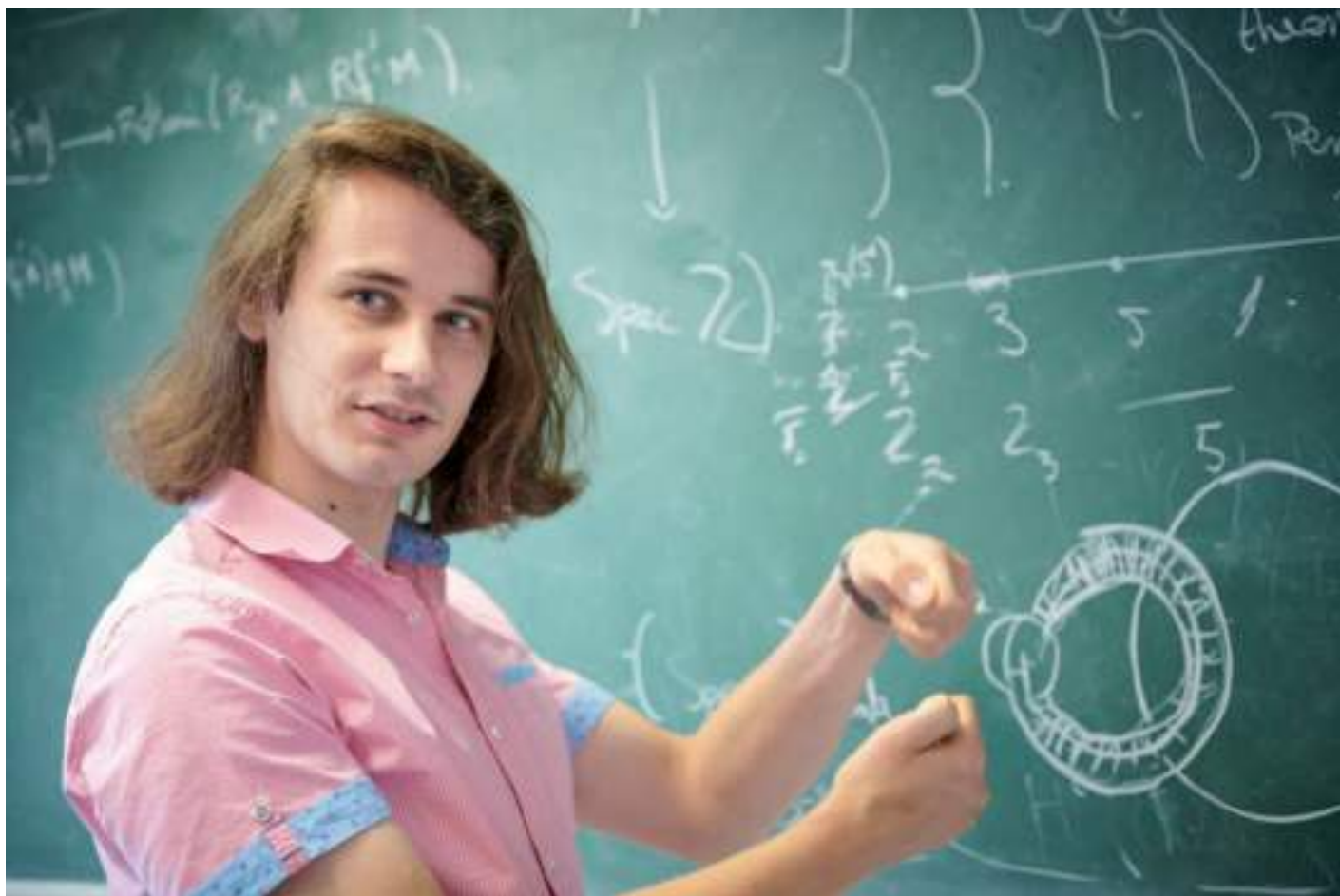
Frisse kijk

Een van de punten waarop Scholze zich onderscheidt, is zijn vermogen om van de gebaande paden af te wijken. Combineer dat met zijn fenomenale wiskundige talent en je krijgt verrassende resultaten.

Een illustratie hiervan is te vinden in de algebra die in Scholzes werk een rol speelt. In de ringentheorie wordt een commutatieve ring R *noethers* genoemd (naar Emmy Noether, 1882–1935) als elk ideaal $I \subset R$ voortgebracht kan worden door een eindig aantal elementen. Een intuïtie daarbij is dat niet-noetherse ringen 'groot' zijn, waardoor sommige argumenten niet meer werken. De standaardboeken over ringentheorie staan vol resultaten die alleen gelden voor noetherse ringen, en als gevolg daarvan groei je op met het idee dat je niet-noetherse ringen maar beter kan vermijden.

Zo niet Scholze. Hij trekt zich niet veel aan van de gangbare waarschuwingsbordjes, en weet, door op de juiste manier ook heel grote ringen toe te laten, controle te krijgen over dingen die eerder problematisch leken. Een voorbeeld daarvan is zijn werk met Bhargav Bhatt over de pro-étale topologie. Het is misschien niet eens een van zijn belangrijkste bijdragen, maar het illustreert hoe een paar jonge jongens de boel op stelten kunnen zetten.

Het probleem is gemakkelijk te schetsen. Grothendieck en zijn school ontwikkelden in de jaren zestig étale cohomologie, met als een van de drijfveren de Weil-vermoedens. De eerste delen van deze ver-



Peter Scholze

Foto: Volker Lamerz / University of Bonn

moedens zijn bewezen door Dwork en Grothendieck. De laatste en moeilijkste uitspraak, over de eigenwaarden van Frobenius, is een van de grote triomfen van Deligne. De bewijzen maken gebruik van ℓ -adische cohomologie, een theorie die aan een variëteit X over een lichaam k een rij cohomologiegroepen $H^i(X_{\bar{k}}, \mathbb{Q}_\ell)$ toevoegt. Deze cohomologiegroepen zijn vectorruimten over het lichaam $\mathbb{Q}_\ell$ der ℓ -adische getallen, waarbij ℓ een priemgetal is ongelijk aan de karakteristiek van k . (Het is gebruik om het coëfficiëntenlichaam $\mathbb{Q}_\ell$ te noemen en niet $\mathbb{Q}_p$; dit omdat de letter p meestal al gereserveerd is voor de karakteristiek van k .) Klein probleem: het lukt(e) niet om deze cohomologiegroepen *rechtstreeks* te definiëren. De Grothendieck-topologie die gebruikt wordt (de étale topologie) is eigenlijk alleen geschikt om overdekkingen te bestuderen die bepaalde eindigheids-eigenschappen hebben. Als gevolg daarvan heeft alleen cohomologie met coëfficiënten in een eindige ring alle gewenste eigenschappen. Zodoende wordt $H^i(X_{\bar{k}}, \mathbb{Z}_\ell)$

gedefinieerd als limiet van cohomologiegroepen $H^i(X_{\bar{k}}, \mathbb{Z}/\ell^n \mathbb{Z})$, om vervolgens de cohomologie met $\mathbb{Q}_\ell$ -coëfficiënten te definiëren als $H^i(X_{\bar{k}}, \mathbb{Q}_\ell) = H^i(X_{\bar{k}}, \mathbb{Z}_\ell) \otimes_{\mathbb{Z}_\ell} \mathbb{Q}_\ell$. Het werkt wel, maar het onderliggende mechanisme kende problemen die alleen met enige kunstgrepen (waarvoor varianten bestaan van Deligne, Ekedahl en Jannsen) te omzeilen waren.

Vijftig jaar nadat Grothendieck zijn SGA4-seminarium hield, doen Bhatt en Scholze iets waarmee ze het hele probleem in een klap van tafel vegen. Door op een beheerste manier de topologie wat fijner te maken — wat op het niveau van algebra betekent dat je bepaalde limieten toevoegt, die typisch grote, niet-noetherse ringen zijn — creëren ze precies genoeg flexibiliteit om $H^i(X_{\bar{k}}, \mathbb{Q}_\ell)$ gewoon te kunnen definiëren als cohomologie van een schoof $\mathbb{Q}_\ell$, en verkrijgen ze een goede afgeleide categorie die alle gewenste eigenschappen heeft (Grothendiecks ‘zes functoren’) zonder dat er pathologische verschijnselen optreden. Verbluffend.

Perfectoïde ruimten

Het werk van Scholze is nu al te omvangrijk (en te technisch) om er hier een samenvatting van te kunnen geven. Om toch een beeld te geven van zijn bijdragen, beperken we ons hier tot het door hem ingevoerde begrip *perfectoïde ruimte*, hoewel Scholze sedertdien alweer vele nieuwe resultaten heeft bewezen. (Zoals vermeld aan het eind van het artikel van Bas Edixhoven in dit nummer, is er de hoop dat nieuw werk van Scholze gezamenlijk met Laurent Fargues een grote doorbraak zal geven in het lokale Langlands-vermoeden; dat zou een enorme mijlpaal zijn.)

Perfectoïde ruimten vormen een speciale klasse van adische ruimten. (Zie het kader over p -adische meetkunde.) Het meest frappante aan Scholzes theorie is dat deze een volkomen nieuwe brug slaat — de zogeheten *tilting-equivalentie* — tussen meetkunde in karakteristiek 0 en in karakteristiek p . Scholze heeft hier zelf een prachtige toepassing van gegeven op het zogeheten *gewicht-monodromie-vermoeden*, een be-

langrijk probleem in de aritmetische meetkunde. (De betekenis van de term ‘tilting’ is hier een andere dan die in de representatietheorie van Artin-algebra’s.)

Het 0-dimensionale geval van deze tilting-equivalentie kan plausibel gemaakt worden door op te merken dat er een analogie is tussen $\mathbb{Q}_p$ en het lichaam $\mathbb{F}_p((t))$ van Laurentreeksen met coëfficiënten in

$\mathbb{F}_p = \mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$, waarbij $p \in \mathbb{Q}_p$ de evenknie is van $t \in \mathbb{F}_p((t))$. Immers, een p -adisch getal x kan geschreven worden als

$$x = \sum_{i=-m}^{\infty} x_i \cdot p^i$$

met $x_i \in \{0, 1, \dots, p-1\}$ voor alle i . Je zou aan het rijtje $(\dots, x_{-2}, x_{-1}, x_0, x_1, \dots)$ kunnen denken als een soort ‘decimale expansie’

van x , met dien verstande dat de decimaal nu van rechts naar links lopen. (Een p -adisch geheel getal x is een rijtje met $x_i = 0$ voor alle $i < 0$.) Maar feitelijk zijn $\mathbb{Q}_p$ en $\mathbb{F}_p((t))$ natuurlijk heel verschillende lichamen; de eerste heeft karakteristiek 0, de tweede karakteristiek p .

De analogie wordt echter een precies resultaat op het moment dat we aan beide lichamen alle p^e -machts wortels uit p (respectievelijk t) toevoegen: voor de lichamen

$$L = \bigcup_{n>0} \mathbb{Q}_p(p^n \sqrt[p]{p}), \quad L^\flat = \bigcup_{n>0} \mathbb{F}_p((p^n \sqrt[p]{t})),$$

geldt:

Stelling (Fontaine–Wintenberger). *De absolute Galoisgroepen van L en $L^\flat$ zijn isomorf:*

$$\text{Gal}(\bar{L}/L) \cong \text{Gal}(\bar{L}^\flat/L^\flat).$$

Hetzelfde resultaat geldt als we L vervangen door zijn p -adische completie K en $L^\flat$ door zijn completie $K^\flat$.

De theorie van perfectioide ruimten kan worden gezien als een (zeer) vergaande generalisatie hiervan. Scholze definieert perfectioide ruimten als een speciale klasse van adische ruimten. Lokaal worden deze gegeven door complete Banach-algebra’s die voldoen aan een aantal voorwaarden. De lichamen K en $K^\flat$ zijn voorbeelden hiervan. Via een constructie van Fontaine kan je, met K en $K^\flat$ als hiervoor, aan een perfectioide K -algebra R een perfectioide $K^\flat$ -algebra $R^\flat$ associëren. Scholze bewijst dat dit leidt tot een equivalentie van categorieën $X \mapsto X^\flat$ tussen perfectioide ruimten over K en perfectioide ruimten over $K^\flat$. Bovendien blijkt de topologie van X ‘dezelfde’ te zijn als die van $X^\flat$, op twee niveaus: letterlijk (X en $X^\flat$ hebben homeomorfe onderliggende ruimten) maar ook — veel belangrijker — is het waar dat de étale-site van X equivalent is met die van $X^\flat$, wat zo iets betekent als dat voor alle aspecten die te maken hebben met overdekkingen de twee kanten dezelfde structuur hebben.

Dat dit meer is dan een formeel spelletje wordt duidelijk als men bedenkt dat meetkunde in karakteristiek p veel profijt heeft van het feit dat in principe alle objecten een extra soort symmetrie hebben, gegeven door een Frobenius-morfisme. Via tilting kun je informatie uit karakteristiek p ineens ‘overhevelen’ naar p -adische lichamen, of ringen van gemengde

p -Adische meetkunde

Zoals gememoreerd in de bijdrage van Bas Edixhoven over Robert Langlands, is elke niet-triviale absolute waarde op $\mathbb{Q}$ equivalent met ofwel de ‘gewone’ absolute waarde $|\cdot|$, of met een p -adische absolute waarde $|\cdot|_p$ voor een priemgetal p . De completie van $\mathbb{Q}$ met betrekking tot $|\cdot|_p$ geeft de reële getallen $\mathbb{R}$; de completie met betrekking tot $|\cdot|_p$ geeft het lichaam $\mathbb{Q}_p$ der p -adische getallen. Over $\mathbb{R}$, of zijn uitbreiding $\mathbb{C}$, is er een zeer vruchtbaar samenspel tussen algebraïsche en analytische technieken in de meetkunde. Op soortgelijke manier zouden we over $\mathbb{Q}_p$, of lichaamsuitbreidingen daarvan, ook willen beschikken over een goede *analytische* theorie die een aanvulling geeft op de algebraïsche meetkunde.

Van meet af aan is duidelijk geweest dat zo’n theorie van enorm belang zou zijn, maar het ontwikkelen hiervan heeft veel voeten in de aarde gehad. In zijn simpelste vorm gesteld is het probleem dat de p -adische absolute waarde — anders dan de gewone absolute waarde — voldoet aan de sterke (niet-archimedische) driehoeksongelijkheid

$$|x + y|_p \leq \max\{|x|_p, |y|_p\},$$

hetgeen als gevolg heeft dat

$$\mathbb{Z}_p := \{x \in \mathbb{Q}_p \mid |x|_p \leq 1\}$$

een open en gesloten deelring is van $\mathbb{Q}_p$ (de deelring van p -adisch gehele getallen) en dat $\mathbb{Q}_p$ volledig onafhankelijk is in de p -adische topologie. Als we, met het oog op het ontwikkelen van analytische meetkunde, willen definiëren wat het analogon is van een holomorfe functie op $\mathbb{Q}_p^n$, dan zien we dat een naïeve imitatie van het klassieke begrip, namelijk: functies die overal *lokaal* gegeven kunnen worden door een convergente machtreeks, veel te veel ‘holomorfe’ functies zou opleveren om bruikbaar te kunnen zijn.

Een andere aanpak is dus nodig. De zoektocht naar een goed werkende p -adische analytische meetkunde heeft in feite meerdere theorieën voortgebracht; deze kunnen weliswaar met elkaar vergeleken worden maar er is nog niet één enkele theorie die als ‘beste’ gezien kan worden. De theorie van *rigide ruimten* is het oudst. Het werk van John Tate (Abelprijs 2010) uit de jaren zestig vormt het fundament hiervoor. Zoals de in 2018 overleden wiskundige Michel Raynaud heeft laten zien, hebben rigide ruimten een directe relatie met de theorie van formele schema’s. Een andere benadering is de rond 1990 door Vladimir Berkovich ingevoerde theorie van *Berkovich-ruimten* die in zekere zin makkelijkere topologische eigenschappen hebben. Kort daarna is de aanpak van Berkovich gegeneraliseerd door Roland Huber in zijn theorie van *adische ruimten*; in deze theorie is men aan minder sterke eindigheidscondities gebonden.

Afgelopen jaar is er een eerste boek verschenen van Kazuhiro Fujiwara en Fumiharu Kato, die een nieuwe kijk geven op de theorie van rigide ruimten door systematisch de rol van de geassocieerde Zariski–Riemann-ruimte te benadrukken. Het fijne hiervan is dat dit tot op zekere hoogte een unificatie geeft van de verschillende theorieën, maar men moet zich wel realiseren dat de stapel literatuur inmiddels tot indrukwekkende proporties is uitgegroeid. (In [3], dat ver over de 800 pagina’s beslaat en dat is bedoeld als eerste boek in een reeks, worden slechts de eerste twee hoofdstukken van de theorie behandeld.)

karacteristiek, zoals $\mathbb{Z}_p$. En Scholze is niet de enige die met deze technieken mooie stellingen heeft bewezen; zo heeft bijvoorbeeld Yves André [1] met perfectioïde technieken een bekend vermoeden van Hochster in de commutatieve algebra bewezen dat al sinds begin jaren zeventig open was.

Directeur MPIM

Afgelopen voorjaar is Scholze benoemd tot directeur van het Max-Planck-Institut für Mathematik (MPIM) in Bonn. Ik maakte deel uit van een panel dat advies moest uitbrengen over zijn geschiktheid voor deze taak. Heel plechtig werd door de voorzitter de vraag op tafel gelegd of de kandidaat wel de vereiste wetenschappelijke statuur heeft. Lang hebben de discussies daarover niet geduurd. Een dozijn aanbevelingsbrieven van topwiskundigen (waaruit ik hier graag had willen citeren) maakten ons het werk al helemaal gemakkelijk.

Voor het MPIM lijkt het aantreden van Scholze op precies het goede moment te komen, aangezien drie van de zittende directeuren (Ballmann, Faltings en Zagier) dicht bij hun pensionering zitten. Scholze, die een toegankelijke persoon is en die in staat is om veel mensen om zich heen te verzamelen, lijkt ook de juiste persoon om het MPIM een nieuwe impuls te geven. Samen met de recent bekrachtigde verlenging van het Hausdorff Center for Mathematics als *Exzellenzcluster* heeft Bonn de wind weer in de zeilen.

De vraag die links en rechts gesteld wordt is of Scholze er wel goed aan doet om zo'n functie op zich te nemen. Het komt er natuurlijk op aan hoe je dit directeurschap invult. Zowel het MPIM als Scholze zelf snappen wel dat het een verwisting van talent zou zijn om Scholze met administratief werk op te zadelen. Anderzijds zal Scholze nog meer dan hiervoor

een centrale figuur worden van een van de belangrijkste Europese fora van de wiskunde, wat ook voor zijn eigen onderzoek stimulerend zal zijn.

De toekomst

Scholze lijkt zich sterk bewust van de rol die hij in de wiskunde kan spelen, en van wat er nodig is om anderen te bereiken. Hij investeert er veel in om zijn ideeën op anderen over te dragen, door lezingenreeksen te geven of overzichtsartikelen te schrijven. Tegelijk heeft hij een sterke drang naar voren. Zijn rol is die van een vernieuwer. Hij zou nog vele jaren kunnen vullen met het verder oppoetsen van wat hij nu al heeft gedaan, maar daar ligt duidelijk niet zijn ambitie. Bij zijn interview met het adviespanel voor het MPIM maakte hij grote indruk met een ambitieus programma voor de komende jaren. Hij wil een theorie ontwikkelen van *shtuka's* over getallenlichamen, met toepassingen op het globale Langlands-vermoeden. Hoe zo'n theorie eruit moet zien weet hij ook

nog niet, maar de eerste puzzelstukjes beginnen al bij elkaar te komen. Zijn artikel [7] voor het ICM 2018 is indrukwekkend en laat zien dat hij groots durft te denken.

Maar stel je bent eenendertig en de prijzenkast puilt uit. Is het evident dat dat stimulerend is voor je loopbaan? Het lukt Scholze om niet naast zijn schoenen te gaan lopen, dat is al een goed begin. De media-aandacht probeert hij ook een beetje te ontlopen. Het valt te hopen dat hij genoeg tijd houdt om zich met zijn eigen ideeën af te zonderen. Ik vind dat Scholze en de mensen in Bonn om hem heen dat tot nu toe heel verstandig hebben aangepakt. Rapoport verwoordt het zo dat wat hij het belangrijkste vindt voor een wetenschapper, is om een lange en succesvolle loopbaan te hebben, waarmee hij de opwinding rondom de Fieldsmedaille wat lijkt te willen relativeren. En Scholze zelf: "Mit der mathematischen Forschung habe ich doch gerade erst angefangen." Ik wens het hem, en de wiskunde, toe dat hij er nog veel moois aan mag toevoegen. ☺

Verder lezen

Voor wie een algemeen beeld wil krijgen van de persoon Scholze en zijn werk, zonder veel technische details, zijn er op het internet allerlei populair-wetenschappelijke artikelen te vinden. Ook zijn er verschillende korte artikelen verschenen in de tijdschriften van wiskundige genootschappen; zie bijvoorbeeld het artikel van Bhatt [2] in de *Notices of the AMS*, van Le Stum [4] in de *Gazette des mathématiciens* en het korte artikel van Wedhorn [9] in de *Mitteilungen der DMV*.

Er zijn ook diverse teksten en andere bronnen waarin geprobeerd wordt om wat dieper in te gaan op de hoofdthema's van Scholzes werk. Zo is er een inleidend artikel over perfectioïde ruimten van Scholze zelf [5] en zijn er lecture notes over p -adische meetkunde van Scholze en Weinstein [8]. De Arizona Winter School 2017 ging over perfectioïde ruimten; de voordrachten en veel interessant materiaal zijn te vinden op <http://swc.math.arizona.edu/aws/2017/index.html>. Van Weinstein [10] is er een inleidend artikel over reciprociteitswetten en Galois-representaties waarin enkele van Scholzes resultaten aan bod komen, en dan zijn we alweer dicht in de buurt gekomen van de bijdrage van Bas Edixhoven in dit nummer. Last but not least zijn er twee prachtige ICM-bijdragen van Scholze zelf [6, 7].

Referenties

1. Y. André, La conjecture du facteur direct, *Publ. Math. Inst. Hautes Études Sci.* 127 (2018), 71–93.
2. B. Bhatt, What is... a perfectoid space? *Notices Amer. Math. Soc.* 61(9) (2014), 1082–1084.
3. K. Fujiwara en F. Kato, *Foundations of Rigid Geometry, I*, EMS Monographs in Mathematics, European Mathematical Society, 2018.
4. B. Le Stum, Raconte-moi... un perfectioïde, *Gaz. Math.* 154 (2017), 60–64.
5. P. Scholze, Perfectoid spaces: A survey, in *Current Developments in Mathematics 2012*, International Press, 2013, pp. 193–227.
6. P. Scholze, Perfectoid spaces and their applications, in *Proceedings of the International Congress of Mathematicians–Seoul 2014*, Vol. II, Kyung Moon Sa, 2014, pp. 461–486.
7. P. Scholze, p -adic geometry, to appear in *Proceedings of the International Congress of Mathematicians–Rio de Janeiro 2018*, World Scientific, 2019.
8. P. Scholze en J. Weinstein, Berkeley lectures on p -adic geometry, preprint, 2018.
9. T. Wedhorn, Über einige Aspekte der Arbeit von Peter Scholze, *Mitteilungen der DMV* 26(2-3) (Sept. 2018), 76–79.
10. J. Weinstein, Reciprocity laws and Galois representations: recent breakthroughs, *Bull. Amer. Math. Soc. (N.S.)* 53(1) (2016), 1–39.

Jan van Mill

Universiteit van Amsterdam, j.vanmill@uva.nl

Sebastian van Strien

Imperial College London, s.van-strien@imperial.ac.uk

Hans van Iperen

TU Delft, h.vaniperen@casema.nl

Freek van Schagen

Vrije Universiteit Amsterdam, f.van.schagen@vu.nl

K.P. Hart

TU Delft, k.p.hart@tudelft.nl

Robbert Fokkink

TU Delft, r.j.fokkink@tudelft.nl

Willemijn van Varik

TU Delft, voorzitter@ch.tudelft.nl

Teun Koetsier

Vrije Universiteit Amsterdam, t.koetsier@vu.nl

In Memoriam Jan Aarts (1938–2018)

Erudiete wetenschapper en bestuurder die oog had voor collega's, medewerkers en studenten

Op 14 juni 2018 overleed Jan Aarts, emeritus hoogleraar aan de TU Delft en erevoorzitter van studievereniging 'Christiaan Huygens'. Hij is bestuurslid geweest van het Thomas Stieltjes Instituut en directeur van Mastermath. Kort voor zijn overlijden is er in Delft nog een symposium georganiseerd ter ere van zijn tachtigste verjaardag. In dit artikel herdenken enkele sprekers van dat symposium en enkele oud-collega's hem.

Op 9 mei vond in Delft een symposium plaats ter gelegenheid van de tachtigste verjaardag van Jan Aarts die kort daarop overleed. Sprekers waren Sebastian van Strien (VK), Lex Oversteegen (VS), Freek van Schagen en Teun Koetsier. Ondergetekende was een van de initiatiefnemers.

Jan is zijn wetenschappelijke leven begonnen als klassiek dimensietheoreticus. Daarna verschoof zijn interesse in de richting van de topologische dynamische systemen. Toen hij het decanaat in Delft vaarwel had gezegd, kwam hij geregeld 's avonds naar Amsterdam om met mij over topologie te spreken. Hij wilde graag weer actief worden in het wetenschappelijk onderzoek. In die periode publiceerden Jeroen Bruijning, Jan en ik een gemeenschappelijk artikel over een beroemd probleem van Han de Groot, de promotor van Jan. Volgens Jan bracht die activiteit hem weer helemaal terug. Ik heb altijd respect gehad voor wetenschappers zoals Jan die hun bestuurlijke verantwoordelijkheden niet ontlopen maar die tevens niet definitief in bestuur blijven hangen. Jan bleek toch vooral een echte en erudiete wetenschapper te zijn, zie bijvoor-

beeld zijn vele boeken over verschillende onderwerpen voor verschillende doelgroepen. Veel later bleek bij Mastermath dat hij het succesvol besturen niet was verleerd. Mij is gevraagd te verwoorden waarom ik

vond dat een symposium ter ere van Jan op zijn plaats was. Zo'n symposium is in mijn beleving voor iemand met de verdiensten van Jan een teken van beschaving. Dat het symposium niet beter getimed had kunnen zijn is achteraf gezien uitermate bevredigend.

Jan van Mill

Mastermath

Jan Aarts was een uitmuntend wiskundige met een diepgaande belangstelling voor de meetkunde, een prima docent en een uitstekend bestuurder. Hij had een groot netwerk binnen de wiskunde in Nederland en een goed ontwikkeld gevoel voor het organiseren van onderwijs. Al deze eigenschappen leidden ertoe dat hij rond de jaarwisseling van 2003–2004 werd gevraagd Uitvoerend Directeur (UD) te worden van het nationale samenwerkingsproject voor de masteropleidingen in de wiskunde. Ruim zeven jaar was hij UD van Mastermath, zoals het samenwerkingsprogramma inmiddels werd genoemd.

De eerste taak van de UD was om ervoor te zorgen dat er per september 2004 onderwijs op centrale plaatsen in Nederland zou worden gegeven waarmee masterstudenten de helft van hun eerste masterjaar zouden kunnen vullen. Als voorzitter van het Regieorgaan voor de masteropleidingen wiskunde mocht ik met hem samenwerken. In acht maanden moest er heel



Jan Aarts tijdens het symposium op 9 mei 2018



Jan Aarts staat in gedachten voor het bord, als hij de zaal toespreekt aan het eind van het symposium ter ere van zijn tachtigste verjaardag. Hij is bezig om een probleem op het bord te zetten. Er staat al een gelijkzijdige driehoek D . Even later wordt deze omschreven door een rechthoek R , waarbij D en R een hoekpunt gemeen hebben. Het complement van de driehoek valt uiteen in driehoeken A, B, C , waarvan er twee, zeg A en B , ook dit hoekpunt gemeen hebben. Laat zien dat $\text{opp}(A) + \text{opp}(B) = \text{opp}(C)$. Dit was ooit probleem 1580 in het *Nieuw Tijdschrift voor Wiskunde* (1966). Als anekdote vertelde Jan erbij dat de moeder van Edsger Dijkstra een buitengewoon elegante oplossing vond toen zij al ruim tachtig was. Geen leeftijd dus om te stoppen met wiskunde.

veel besloten en geregeld worden. Ik noem een aantal onderwerpen: welke cursussen te geven en hoe de inhoud en omvang vast te stellen, de locaties voor het onderwijs, de jaarindeling, op welke weekdagen het onderwijs te geven, wat de kosten zouden zijn en wie dat ging betalen, de verantwoording aan het Regieorgaan en aan de Universiteiten, de organisatie van de examens en registratie van de resultaten, de bekendmaking en distributie van examenresultaten. Jan verstond de kunst ook anderen in te schakelen bij het ontwikkelen van ideeën. Hij heeft hard gewerkt en met succes. Per september 2004 was er onderwijs in Utrecht, Amsterdam en Enschede voor masterstudenten wiskunde uit het hele land. Het aantal deelnemende studenten overtrof de verwachting.

Om een onderwijsprogramma succesvol te maken is enthousiasme van de studenten onmisbaar. Jan was zich daar terdege van bewust. In dat licht gezien lag het voor de hand dat hij de omvangrijke taak van het vragen naar de mening van de studenten en het recht doen aan die mening op zich nam. Het resultaat was een halfjaarlijkse evaluatie van het onderwijs in Mastermath.

Samenwerken met Jan was een voorrecht. Jan had een groot gevoel voor humor en kon daarmee lastige voorvallen relative-

ren. In het voorjaar van 2004 bijvoorbeeld waren er allerlei obstructies. Sommige waren opgeworpen door bestuurders aan universiteiten en andere door wiskundigen. Jan wist die laatste categorie naar waarde te schatten en de goede aanpak van geopperde bezwaren te vinden. Ook goedbedoelde aangedragen alternatieve keuzes voor de vele beslissingen werden gewogen. Daarbij was het van groot belang dat de globale koers van het hele samenwerkingsproject stabiel bleef.

In die periode werkte Jan ook aan wiskunde. Een prachtig zichtbaar resultaat daarvan is het boek *Topologie door zien*, dat in 2010 verscheen. De tekeningen daarin zijn bijzonder. Ook het logo van Mastermath is gebaseerd op een door Jan getekend ontwerp.

Bij de keuzes die gemaakt werden, was de kennis van Jan van de verschillen in de opleidingen aan de Technische Universiteiten enerzijds en aan de Algemene Universiteiten anderzijds van grote waarde. Dit was dus nog een extra reden waarom Jan een uitstekende UD van Mastermath was. De wiskundegemeenschap in Nederland is hem daarvoor veel dank verschuldigd. Fijn dat we die dank ook tot uitdrukking konden brengen bij de viering van zijn tachtigste verjaardag op 9 mei 2018 in Delft.

Freek van Schagen

W.I.S.V. 'Christiaan Huygens'

In 1995 werd prof. dr. J.M. Aarts verkozen tot erelid van de Wiskunde en Informatica Studievereniging 'Christiaan Huygens'. Deze titel heeft hij te danken aan zijn toeloze inzet voor de studievereniging, de faculteit en al haar studenten.

Professor Aarts bekleedde de titel van voorzitter van de Onderwijscommissie Wiskunde, van opleidingsdirecteur, van decaan én hij nam plaats in meerdere commissies van de faculteit. Zijn inzet en enthousiasme voor de faculteit en haar studenten bleef dan ook niet onopgemerkt bij de studenten. Hij was geliefd om zijn heldere colleges, zijn gevoel voor humor en zijn aanstekende enthousiasme voor de wiskunde. Ook begeleidde hij meerdere afstudeerders bij de laatste fase van hun studie.

Bij de studievereniging is hij altijd — ook toen hij afscheid nam van zijn functies — nauw betrokken gebleven. Zo leverde hij uitdagende puzzels voor het kwartaalblad, opende hij jaarlijks met een lezing de Dies Natalis, dacht hij mee over de lopende zaken van de vereniging, en was hij een graag geziene gast op onze activiteiten.

Na afloop van een lunchlezing liep hij graag nog even langs onze verenigingsruimte, en dan dronk ik vaak nog een kopje koffie met hem. We spraken over literatuur, zijn favoriete kunst, het planetarium in Franeker — waar we echt nog eens met alle erleden heen moesten — en natuurlijk over de schoonheid van de getallen. Het waren warme gesprekken, waarin ik mij soms even verbaasde over hoe scherp hij van geest was.

Helaas hebben we het planetarium nooit meer samen kunnen bezoeken, maar wij zijn dankbaar dat we de tachtigste verjaardag van professor Aarts met hem mochten vieren. Voor dit symposium hebben wij een aantal personen verzocht om op een filmpje een leuke anekdote over professor Aarts te vertellen. Het enthousiasme waarmee op dit verzoek werd gereageerd, was hartverwarmend en bovenal erg tekenend voor zijn band met de studenten. Ook vele jaren na het studeren is men professor Aarts niet vergeten, en vertellen zij graag iets over hun band met hem. We zijn er daarom zeker van dat professor Aarts nog lange tijd in de herinneringen van vele (oud-)studenten blijft voortleven. Het verlies is groot, maar ook wij voelen ons gesteund door al deze mooie herinneringen.

Willemijn van Varik
namens W.I.S.V. 'Christiaan Huygens'

Het interval [Aarts, Bottema]

Toen de topoloog Jan Aarts (1938–2017) in 1967 aan de Technische Hogeschool te Delft werd benoemd tot lector, was de meetkundige Oene Bottema (1901–1992) daar al 37 jaar hoogleraar. Bottema was aan zijn laatste jaren bezig; hij ging in 1971 met emeritaat. Aarts stond aan het begin van zijn carrière. Bottema deed onderzoek op het gebied van de meetkunde en de theoretische mechanica, gebieden die in de negentiende eeuw een enorme ontwikkeling hadden doorgemaakt, maar waarvan de ontwikkeling in de twintigste eeuw enigszins leek te stagneren. Jan Aarts vertegenwoordigde met zijn onderzoeksgebied evident de twintigste eeuw.

Bottema leek misschien de laatste der Mohikanen, maar hij was heel erg goed in zijn vak. In 1956 loste hij de paradox van Ziegler op, al werd pas een halve eeuw later duidelijk hoe knap dat was. Zie [8]. In 1979 publiceerde de bijna tachtigjarige Bottema samen met Bernard Roth het volumineuze *Theoretical Kinematics*, dat snel in kringen van werktuigbouwkundigen een standaardwerk werd. Aarts deed onderzoek dat meer bij de tijdgeest paste. Hij maakte naam met zijn resultaten op het gebied van de Julia-verzameling, matchbox manifolds en topologische inductieve varianten.

Gaandeweg ben ik Jan Aarts meer en meer als een waardige opvolger van Bottema gaan zien. Niet alleen omdat topologie niet zo heel ver bij de meetkunde vandaan ligt, maar ook omdat Jan Aarts net als Bottema actief was als bestuurder. Bottema was jaren lang rector magnificus en Aarts was onder meer onderwijsdirecteur, decaan en vicerector. Verder hechten beiden veel waarde aan popularisering van de wiskunde en hadden ze grote historische belangstelling.

Bottema schreef in 1944 het briljante *Hoofdstukken uit de elementaire meetkunde*, dat nog steeds te krijgen is. Voor het

blad *Euclides* schreef hij voor wiskundeleraren onder de titel ‘Verscheidenheden’ vele artikelen.

We zien bij Jan Aarts vergelijkbare activiteiten. Hij schreef het heel toegankelijke *Meetkunde*, waarvan in 2007 een tweede druk verscheen. Het is een inleiding in de meetkunde maar het laat vooral zien hoe mooi het vak meetkunde is. In 2010 verscheen *Topologie door zien*, dat in de vorm van een strip een inleiding in de topologie geeft. Net als Bottema hield Aarts van zijn vak en legde hij het ook graag uit, bij voorkeur aan de hand van leuke, mooie of intrigerende voorbeelden. In 2017 verscheen van Aarts *Een verkenning van krommen*, dat hij samen met Swier Garst schreef. Het is een boekje voor vwo-leerlingen waarin allerlei eigenschappen van krommen worden afgeleid met behulp van vwo-wiskunde.

Jan Aarts werkte mee aan de Engelse uitgave in 2010 van het tweede deel van Jan de Witts *Elementa Curvarum Linearum* van 1659. Jan de Witt paste in dat boek de methoden van Descartes’ analytische meetkunde toe op theorie van de kegelsneden.

Jan Aarts deelde met Bottema een grote bewondering voor het werk van Christiaan Huygens. In 2015 verscheen van de hand van Jan Aarts de vertaling in het Nederlands van het *Horologium Oscillatorium* van Christiaan Huygens uit 1673 en hij heeft daarmee een beroemd werk van een van Nederlands grootste wiskundigen voor iedereen toegankelijk gemaakt. Bottema zou het prachtig hebben gevonden.

Het ‘Horologium Oscillatorium’ van Christiaan Huygens

In de eerste mechanische uurwerken zit een vorm van echappement die spillegang heet. Dat zorgt ervoor dat de beweging van een vallend gewicht niet versneld wordt, maar alsmaar wordt gestopt. Dat stoppen levert het tikken van de klok. Van die echappementen maakte een ‘foliot’ deel uit. Dat is een heen en weer gaande balans met gewichtjes op de uiteinden. Die foliot bepaalde het ritme van de klok. De eerste uurwerken waren niet erg nauwkeurig. Ze weken per 24 uur al gauw 10 minuten af. De onnauwkeurigheid werd in het bijzonder veroorzaakt door de balans.

In 1646 correspondeerde de dan 17-jarige Huygens met Mersenne en van hem hoorde hij vermoedelijk dat Galilei in 1641 het idee had geopperd om de balans te vervangen door een slinger. Het was de tijd waarin overheden grote bedragen uitloofden voor betere klokken die bij de positiebepaling op zee gebruikt zouden kunnen worden.

In 1657 ging Huygens samenwerken met klokkenmaker Salomon Coster om te komen tot een slingeruurwerk. Ze hadden succes. De slingerklokken weken per 24 uur slechts 10 tot 30 seconden af. Ze waren meer dan twintig keer nauwkeuriger dan hun voorgangers.

Huygens had al eerder ontdekt dat een slinger niet isochroon is door twee identieke slingers met geheel verschillende amplitudes te laten slingeren. In 1660 ontdekte hij dat een object isochroon beweegt als de baan een cycloïde is en hij trok de conclusie dat zijn slingeruurwerken nog beter zouden functioneren als de baan van het gewicht een cycloïde zou zijn. De baan van het gewicht kon worden beïnvloed door het koord waaraan het hing boven, links en rechts, tegen wangen aan te laten lopen.



Bij een cycloïdale baan is de slinger synchroon. Uit: Robert Stawell Ball, *Experimental Mechanics: A Course of Lectures Delivered at the Royal College of Science for Ireland*, MacMillan and Co., New York, 1871.

De baan van het gewicht is de afwikkeltromme (*involute*) van de wangen. De vraag was: Welke vorm moeten die wangen hebben om die afwikkeltromme een cycloïde te laten zijn? Het is op dit punt dat Huygens het begrip *kromtemiddelpunt* invoerde. Het was duidelijk: De wang moest de verzameling kromtemiddelpunten of de *evolute* van een cycloïde zijn.

Huygens ontdekte dat de evolute van een cycloïde weer een cycloïde is en hij bouwde vervolgens een slingeruurwerk met cycloïde wangen. In het *Horologium Oscillatorium* beschreef Huygens uitvoerig zijn nieuwe ontwerp en de theorie erachter. Dankzij Jan Aarts kunnen we dat allemaal in het Nederlands nalezen. Het slingeruurwerk was een groot succes en de begrippen involute, evolute en kromtemiddelpunt waren nieuw; dat was het goede nieuws. De cycloïde-wangen waren de eerste jaren na Huygens' uitvinding heel populair, ook bij vroege Franse slingerklokkemakers als Thuret en Hanet. Het praktische nut van de uitvinding bleek echter beperkt; dat was het slechte nieuws. De belangstelling voor de cycloïde-wangen nam dan ook snel af. In Zaanse

klokken worden ze dan ook niet aangetroffen. (Met dank aan Kees Grimbergen en Carel Hofland van het Museum Zaanse Tijd, het museum van het Nederlandse uurwerk.)

Teun Koetsier

Referenties

- 1 J.M. Aarts, *Meetkunde*, Epsilon Uitgaven deel 47, 2e druk 2007. Engelse vertaling: *Plane and Solid Geometry*, Springer, 2008.
- 2 J.M. Aarts, *Topologie door zien*, Epsilon Uitgaven deel 68, 2010.
- 3 J.M. Aarts, *Christiaan Huygens, het slingeruurwerk*, Epsilon Uitgaven deel 80, 2015.
- 4 J.M. Aarts en S. Garst, *Een verkenning van krommen*, Epsilon Uitgaven, Zebra-reeks 49, 2017.
- 5 O. Bottema, *Hoofdstukken uit de elementaire meetkunde*, Servire, 1944. Heruitgegeven door Epsilon Uitgaven, 6e druk 2016.
- 6 O. Bottema en B. Roth, *Theoretical Kinematics*, North Holland, 1979.
- 7 A.W. Grootendorst, J. Aarts, M. Bakker en R. Ern  (eds), *Jan de Witt's Elementa Curvarum Linearum*, Springer Sources and Studies in the History of Mathematics and Physical Sciences, 2010.
- 8 F. Verhulst en Oleg Kirillov, Bottema opende Whitney's paraplu, *NAW* 5/10(4), december 2009, pp. 250–254.

Topologie en dynamica

Het nieuws dat Jan Aarts was overleden zo kort na het symposium ter ere van zijn tachtigste verjaardag, was totaal onverwacht. Toen ik met Jan lunchte een paar weken daarvoor was hij bijna nog net zo vitaal als rond 1980 toen ik zijn medewerker werd aan de TU Delft. Ons contact was als voorheen, hartelijk en warm. Na het gesprek dacht ik net als al die jaren daarvoor: wat een indrukwekkende, inspirerende, fijne en ook oprechte man.

Ik begon in Delft te werken een paar maanden voor mijn promotie op het gebied van de dynamische systemen. Dat was natuurlijk een heel ander onderwerp dan topologie, zijn specialisatie. Hij liet mij helemaal vrij om door te gaan met mijn eigen onderzoek, maar door de regelmatige

gesprekken die we hadden over wiskunde, kreeg ik een veel betere achtergrond op het gebied van de topologie (wat later heel goed van pas kwam). Ook zijn onderzoek werd beïnvloed door onze wiskundige gesprekken, en hij begon een paar jaar later te publiceren over topologische aspecten van de dynamische systemen. Zijn eerste artikel op dit gebied ging over matchbox manifolds. Dat artikel was gebaseerd op een MSC-project, samen met Marco Martens, die later bij mij is gaan promoveren. Nog iets later is hij, net als ik, ook gaan werken aan de topologie van Julia-sets.

Jan was een harde werker met een diepe interesse in de wiskunde, en die daarnaast ook veel gaf om collega's, medewerkers en studenten. Hij moedigde me altijd aan, was erg blij toen ik mijn eerste belangrijkere resultaten behaalde, steunde me toen eerst Marco Martens bij mij begon te promoveren (ook al was ik toen nog geen UHD) en daarna Henk Bruin. Hij was ook heel enthousiast toen ik een leerstoel kreeg aan de UvA. Omgekeerd heb ik hem altijd erg gewaardeerd en hopelijk ook gesteund met name toen hij bestuurlijk actief werd.

Toen ik hem bij het symposium ontmoette, vertelde hij mij dat hij net een paar dagen in het ziekenhuis was geweest voor een longontsteking. Wist hij toen al dat hij longkanker had, en heeft hij dat verzwezen? Wellicht. Bij het jubileum sprak iedereen over Jan als iemand die midden in het leven stond, en zo zal ik hem altijd blijven herinneren.

Sebastian van Strien

Meester

“We zoeken nieuwe mensen”, zei Jan Aarts in het voorjaar van 1987. Ik solliciteerde en zit nu nog in Delft. Om redenen die ik mij niet meer kan herinneren noemde ik hem ‘Meester’ en hij mij ‘Doctor’ (of ‘Dokter’, want er moest wel eens iets gerepareerd worden). Met veel plezier gaven we het, in Delft legendarische, vak Voortgezette Analyse, later samen met Eva Coplakova die uiteindelijk het vak overnam. We hebben ook samen *Hoofdstukken uit de Elementaire Meetkunde* van Bottema opgefrist, waarbij Jan in een appendix nadere uitleg verzorgde want “De schrijver maakt gebruik van begrippen en resultaten die vroeger gemeengoed waren, maar die tegenwoordig alleen nog maar bekend zijn bij de oudere generatie.”

Taalgrappen maakten we ook graag en van de gymnasiast die Jan was heb ik nog wat flarden Latijn en Grieks geleerd die te pas en, liefst, te onpas goed bruikbaar bleken.

K.P. Hart

Vijftig jaar in Delft

Jan kwam, bijna tegelijk met Henk Meijer, in het studiejaar 1967/1968 de toenmalige onderafdeling der wiskunde binnen. Beiden uit Amsterdam, beiden als lector. Jan in de analyse en Henk in de getaltheorie. Gewone stafleden als ik — complotdenkers als wij waren — vermoedden daarin de hand van de zeer gewaardeerde Timman: eerdere tweetallen waren Van Spiegel en Sikkema, respectievelijk Van der Poel en



© Topology Proceedings, Auburn, AL, USA

Het logo van *Topology Proceedings* is een matchbox manifold in de vorm van een hartje. Dit voorbeeld, dat ooit werd bedacht door de Poolse wiskundige Knaster, is de aantrekker in het hoefijzer van Smale. Het was ook het embleem van de zomertopologie conferentie in 1994 in Amsterdam, die werd georganiseerd door Jan Aarts, Jan van Mill, en anderen.



De receptie na het symposium was erg gezellig. V.l.n.r Dick Mens, Ank Voets, Frans Ververs. Goede bekenden van Jan Aarts.

Wolbers; verdeel en heers zo dachten wij. Tot hun wederzijdse ongenoegen waren de beide jonge lectoren als ‘stel’ tot elkaar veroordeeld.

Zij doorbraken snel de subtiële omgangsvormen van het daarin behoudender Delft; ‘jij’ van medewerker naar lector of hoogleraar, waar voordien professor, achternaam of hoogst zelden voornaam werd gebruikt. Henk wat provocerende, Jan iets terughoudender. Ook daarin school een reden van het afstand houden tot elkaar, eveneens tot uitdrukking komend in hun onderafdelings- of maatschappijpolitieke keuzen. Henk VVD-politicus in Pijnacker, Jan karakteriseerde ooit zijn afkomst door “... de oude Drees was bij ons thuis heilig”.

In september 1974 werden zij hoogleraar, een paar jaar vóór de titel lector werd afgeschaft.

Een verdere overeenkomst was dat zij beiden, vanaf hun aantreden, het aspect onderwijs in hun leeropdracht waarmaakten door bijvoorbeeld zonder aarzeling jarenlang eerstejaars instructiegroepen voor technische studenten voor hun rekening te nemen; zodoende was ik hun collega als onderwijsmedewerker. Voorgaande waarnemingen deed ik later ook vanuit mijn rol van ‘voorzitter van de groep instructeurs’(1978–1983) binnen — en als secretaris van — de vakgroep Algemene Wiskunde.

In de ‘gedemocratiseerde’ organisatie onder de Wet Universitaire Bestuurshervorming van 1971 speelden zij hun rol; beiden waren daarin vijf jaar decaan, in het — binnen Wiskunde & Informatica — degelijk te noemen voorbereidingstraject daartoe. Henk was in de periode 1978–1981 bestuurslid onder de informaticus Wolbers, Jan volgde Henk als bestuurslid op in 1981–1982 — nog onder ‘Wolbers I’ — en

was aansluitend decaan in de periode 1982–1987. Henk volgde na ‘Wolbers II’ als decaan in de periode 1990–1995. Ondertussen hadden zij als voorzitter van de eerder genoemde vakgroep al stuivertje gewisseld. Henk was lid van de Hogeschool-/Universiteitsraad, waar Jan tegen het eind van zijn termijn conrector was, en niet alleen vele promoties leidde maar ook — vóór de digitalisering — de onvolprezen studiegids voor alle studenten van de TU trachtte een betere vorm te geven. We zwijgen maar over alle commissie-lidmaatschappen die hen ten deel vielen.

Jan bekommerde zich om mensen; en werkte enige jaren samen met Erik van Douwen, zoon van de bekende hoogleraar staalconstructies binnen Civiele Techniek. Erik was een grootheid in het bedenken van wezenlijke tegenvoorbeelden op weg naar een stelling binnen de topologie en verzamelingenleer. Hij promoveerde aan de VU en vertrok naar de Verenigde Staten; Jan — gevraagd of het niet jammer was dat die promotie niet in Delft had plaatsgevonden — antwoordde hij dat het in het belang van Eriks carrière was. Niet lang daarna overleed Erik; ontdaan als Jan daar over was, was hij een troost voor vader professor Van Douwen.

Jan en ik hadden wel eens een ernstig verschil van mening. Eens had hij een van zijn medewerkers — wij beiden lid van de



Tijdens de receptie

onderafdelingsraad, maar niet fractiege-noten — verzocht een bepaald standpunt in te nemen ten voordele van onze gemeenschappelijke vakgroep. Onafhankelijkheid van raad- en vakgroepslidmaatschap stond in onze fractie hoog in het vaandel. Bedoelde medewerker had Jans advies niet overgenomen, en Jan achtte de werkverhouding eigenlijk verstoord. Omdat hij in mijn fractieondersteuning zat heb ik hem verzocht daar uit te treden, zolang die verstoring gaande was. Na korte tijd zag Jan zijn dwalen in. Dat heeft overigens tussen Jan en mij weer niet de verhouding belast, getuige de volgende alinea's.

Begin van de jaren tachtig gaf ik mét zijn hiervoor bedoelde medewerker oefeningen aan tweedejaars wiskundigen voor Jans college 'grondslagen van de analyse'. In die periode was het tentamen in dat vak voor studenten het eerste dat mondeling werd afgenomen. Meestal slaagden Jan en 'dienstdoende' medewerker er in studenten zich voldoende op hun gemak te laten voelen, zodat zij zich van hun beste kant konden laten zien. Jan was daar in een voorbeeld. Niet altijd lukte dat, zoals die keer dat de kandidaat maar niet verscheen. Langs de meest waarschijnlijke route op zoek gegaan hoorden we van de verdiepingconciërge dat de kan-

didaat zich in zijn verwarring dwars door een glazen deur had begeven, en dat zijn verwondingen in het ziekenhuis werden behandeld. Een andere keer ontvingen we een student die zich langzaam, maar perfect, door de antwoorden van onze vragen wist te worstelen. Wetende dat hij zich hoogstens één maal op college respectievelijk oefeningen had laten zien, luidde ons judicium: "Je krijgt een 7; bereid je eens een keer vóór; dan zul je ongetwijfeld een 10 verdienen, omdat we dan wel door de stof heen komen!" Nooit meer gezien. Ten slotte: er klonk eens een alarmbel tijdens het tentamen — oefening bommelding. We begaven ons gedrieën naar buiten en namen plaats in het kof-fietentje aan de Schoemakerstraat, en zetten daar het tentamen voort. Dit tot ieders tevredenheid.

Jan is voor mij persoonlijk van grote betekenis geworden. Bij de overgang naar het nieuwe wetenschappelijke rangenstelsel ingevolge de 'Beleidsnota Universitair Wetenschappelijk Personeel' raakte ik, niet gepromoveerd zijnde, in de knel omdat honorerings- en functievervulling naar mijn gevoel niet meer in overeenstemming zouden zijn. Mijn vele organisatorische bezigheden en vertegenwoordigende ervaringen, en mijn kennis van andere faculteiten sinds 1971 waren kennelijk voor Jan aanleiding,



Het omslag van *Topologie door zien*

ongevraagd, het College van Bestuur het voorstel te doen mij tot secretaris-beheerder te benoemen in de per zomer 1986 ontstaande vacature. De 7-koppige sollicitatiecommissie uit de beide onderafdelingen (Wiskunde en Informatica enerzijds, en Wijsbegeerte en Maatschappijwetenschappen anderzijds) adviseerde positief.

In 1996 de (inmiddels) faculteit Wiskunde en Informatica verlaten hebbende, zag ik op overigens geringe afstand hoe Jan, ook in zijn emeritaat, de faculteit ten dienste stond en met name een grote verbondenheid toonde met de studenten van Christiaan Huygens. Zijn aanstekelijke publicaties, zoals *Topologie door zien* (Epsilon Uitgaven) zijn daar uitdrukking van.

Hans van Iperen

Matchbox manifolds

Februari 1986, Nederland is in de ban van de Elfstedentocht. Jan Aarts kijkt naar zijn dochter die haar eerste slagen maakt op de Delftse schaatsbaan en denkt na over wiskunde. Zijn tweede termijn als decaan loopt af, de gedroomde bestuurlijke carrière kan in de ijskast. Het is weer tijd voor onderzoek. Een goed probleem is nodig. Het liefst een toegepast probleem, het is tenslotte Delft. Verzin maar eens zoiets als je allerlei ernstige gezondheidsproblemen en een zwaar auto-ongeluk achter de rug hebt.

De sporen op de schaatsbaan vormen een familie krommen. Wat voor soort ruimte is dat eigenlijk, topologisch gezien? Jaren geleden, nog voordat hij ging besturen, had Jan Aarts samen met Jan de Vries op het CWI gewerkt aan de ruimten die doen denken aan deze sporen op de schaatsbaan. Wat kun je zeggen van topologische ruimten met dimensie 1 en een vrije $\mathbb{R}$ -actie? Dat is het probleem dat Jan bedenkt langs de schaatsbaan. Een goed probleem, waar hij zichzelf en anderen nog jarenlang mee bezighoudt. Matchbox manifolds, noemt hij deze ruimten, luciferdoosjes. Jan was ooit een verstokte roker. Ze duiken later op in studies van aperiodelieke betegelingen, waarvan translaties voortdurend terugkomen bij het oorspronkelijke patroon. Net als sporen op een schaatsbaan. De tegelruimten van dimensie 1 zijn precies de matchbox manifolds van Jan Aarts.

Nadat hij weer was teruggekomen in het onderzoek ging Jan veelvuldig op bezoek bij Lex Oversteegen in Alabama. Het liefst zag Jan zichzelf als cowboy, met laarzen en een hoed. Cowboys had je niet in Alabama, maar countrymuziek wel en dat was natuurlijk ook heel mooi. Jan en Lex karakteriseerden solenoiden [1] en de Julia-verzamelingen van de exponentiële familie [2]. Allemaal eendimensionale ruimten met een matchbox-structuur. De hogere dimensie liet Jan voor wat het was, "want dan wordt de terugkeerafbeelding zo vervelend." Hier heb je de holonomie pseudogroep bij nodig, zoals Alex Clark, Steve Hurder en Olga Lukina recentelijk hebben uitgewerkt. Vervelend inderdaad, maar nuttig, want Clark, Hurder en Lukina lossen er een hele rits oude en nieuwe topologische problemen mee op [3]. Allemaal nagelaten sporen van een schaatsbaan.

Robbert Fokkink

Referenties

- 1 J.M. Aarts, C.L. Hagopian en L.G. Oversteegen, The orientability of matchbox manifolds, *Pacific J. Math.* 150(1) (1991), 1–12.
- 2 J.M. Aarts en L.G. Oversteegen, The geometry of Julia sets, *Trans. Amer. Math. Soc.* 338 (1993), 897–918.
- 3 A. Clark, S. Hurder en O. Lukina, Classifying matchbox manifolds, *Geom. Topol.*, to appear.

Swier Garst

RG0, Middelharnis
garst@planet.nl

Onderwijs

Van A naar B

Op 19 oktober 2018 promoveerde Swier Garst. Hij was de eerste wiskundeleraar die promoveerde in het project Leraar in Onderzoek (LIO) van het NWO. Hij legt hier uit wat zijn onderzoek inhield.

Aan het begin van deze eeuw was het aantal wiskundestudenten tot een dramatisch dieptepunt gedaald. Hier en daar werd zelfs het opheffen van de studie wiskunde overwogen. De opleidingen knokten terug en namen hun verantwoordelijkheid met de organisatie van activiteiten zoals wiskundewedstrijden en masterclasses voor vwo-leerlingen. Gemeenschappelijke component in die activiteiten was leerlingen enthousiast maken voor een studie wiskunde. Dat gebeurde door leerlingen in contact te brengen met een uitgebreider scala aan wiskundige onderwerpen dan alleen de onderwerpen zoals die op scholen onderwezen werden. Behalve de opleidingen zelf wilde ook NWO een actieve rol spelen om het aantal wiskundestudenten te verhogen en startte het project Leraar in Onderzoek (LIO). Een leraar aan een middelbare school kon gedurende een periode van twee jaar een dag per week onderzoek doen aan een universiteit. De achterliggende gedachte was: enthousiaste wiskundeleraars zijn de beste motivatie voor de keuze van de studie wiskunde door zijn leerlingen.

De aankondiging van het LIO-project was een goede gelegenheid om contact te zoeken met de wiskundeafdeling van de TU Delft. Binnen een week zat ik achter een trommel koekjes aan Jan Aarts uit te leggen wat ik zoal bij elkaar gefantaseerd had op het gebied van dynamische systemen. De aanvraag van het project bij NWO was succesvol en ik kon beginnen aan een analyse van een prooi-roofdiermodel dat ik ooit eens op een KWG-congres in Delft had opgepikt. Behalve de gebruikelijke analyse was er nog een opmerkelijke eigenschap aan het model. Omdat hier sprake was van een 2-1-afbeelding in een beperkt gebied was het niet zo'n grote stap naar de definitie van een afbeelding gedefinieerd door een vouw en een draai.

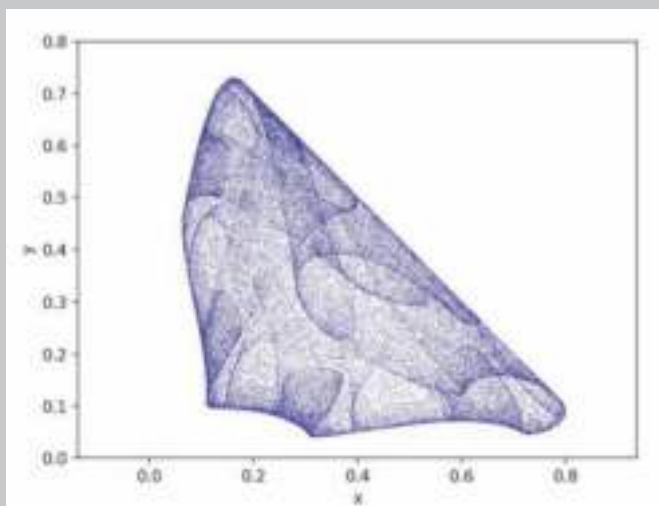
Na afloop van het LIO-project stelde Jan Aarts voor om aan een 'boekje' te gaan werken. De regeling voor oudere docenten en mijn leeftijd pasten naadloos en vele dinsdagen van gesprekken en gepuzzel volgden. De beide afbeeldingen bleken op dynamisch gebied veel overeenkomsten te vertonen. Intussen waren er de halfjaarlijk-

se reizen naar Groningen. Daar spraken we met Henk Broer over de twee afbeeldingen die Jan en mij bezighielden en in stukjes en beetjes kregen we een beter beeld van de (gemeenschappelijke) dynamica van beide afbeeldingen. Dat beeld werd echt glashelder dankzij het werk van Alef Sterk. De test of vergelijkbare overeenkomsten tussen de vouw-en-draaiafbeelding en het discrete Lorenz-63-model bestonden werd glansrijk doorstaan.

Niets leek een mooie promotie in de weg te staan: er waren artikelen en het bedoelde 'boekje' met de titel *Dynamics amidst Folding and Twisting in 2-Dimensional Systems* was gereed. Dan komt het gitzwarte bericht dat Jan overleden is. Hij heeft de promotie die hij zelf ooit had gesuggereerd niet mee kunnen maken. Het maakte de promotie van 19 oktober 2018 nog meer bijzonder dan die van een oude wiskundeleraar die alleen maar sterker gemotiveerd raakte voor onderwijs door onderzoek en de bijzondere meester met zijn eindeloze geduld. Dat eindeloze geduld was heel goed toepasbaar in het onderwijs op school. Maar al te vaak vergissen we ons in het tempo en dus in de omvang van de leerstof die leerlingen aankunnen.

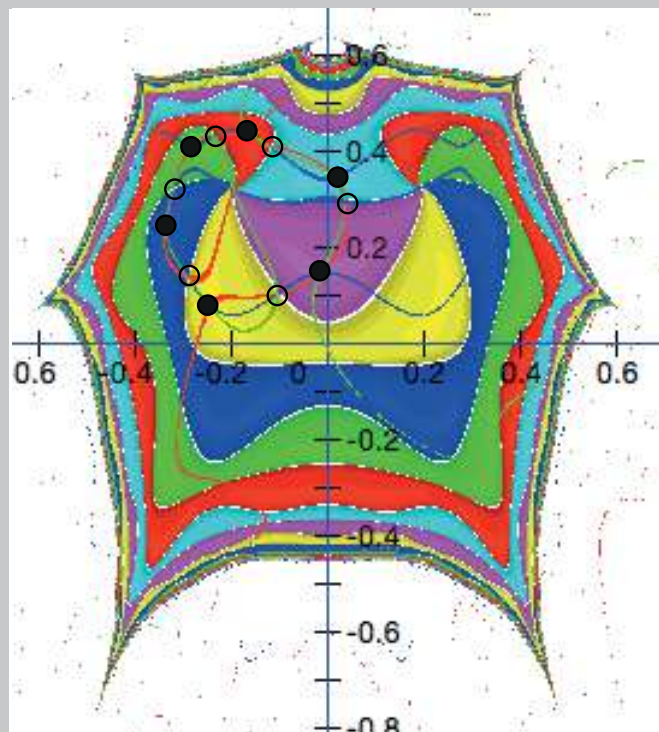
Vouwen en draaien

Afbeeldingen met een 2-1-eigenschap uit het domein van discrete dynamische systemen zijn de inspiratiebron voor de definitie van een toy-model. Dat toy-model bestaat uit twee bouwstenen: een vouw en een draai. Zijn eigenschappen zoals verschillende types bifurcaties en chaotisch gedrag van het toy-model terug te vinden in twee bekende afbeeldingen? Zie Figuur 1. Deze grafiek van de iteraties van $P(x,y) = (ax(1-x-y), bxy)$ voor $a = b = 3,6$ was de inspiratiebron voor de vouw-en-draaiafbeelding $F(x,y) = (f(x)\cos(\phi) - y\sin(\phi), f(x)\sin(\phi) + y\cos(\phi))$ met $f(x) = \frac{1}{4}(\mu - 2) - \mu x^2$.



Figuur 1

Hoewel de grafiek er spannend uit ziet—we spreken al snel van chaos—zijn de parameterwaarden van P en F waarvoor periodieke banen optreden zeker zo interessant. Zie Figuur 2. In deze figuur zien we voor F de basins: de gebieden van punten die door een bepaald periodiek punt worden aangetrokken. Hier voor periode-6. We introduceren twee krommen waarvan de ene uit punten bestaat die na zes iteraties in verticale richting worden afgebeeld en de andere waarbij de punten in horizontale richting worden afgebeeld. De snijpunten van beide krommen zijn punten van periode-6. Op de separatrices, de grenzen tussen de gekleurde gebieden, vinden we ook een baan van peri-

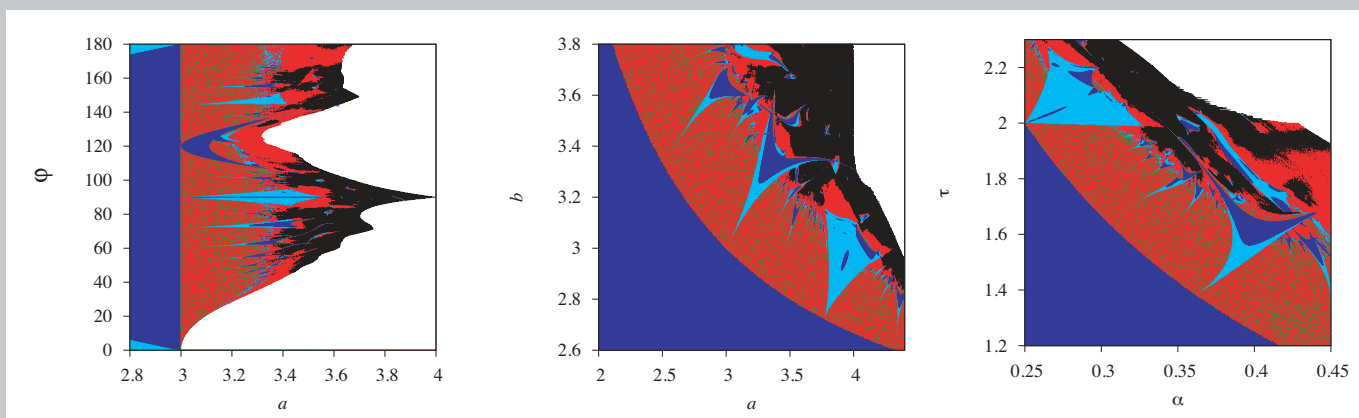


Figuur 2

ode-6. Dit fenomeen van een tweede baan op separatrices doet zich ook voor bij P en de discrete Lorenz-63-afbeelding. Overigens een techniek die ook voor iteraties in 3D toe te passen is.

Behalve de eigenschap van periodieke banen op de separatrices hebben de drie genoemde afbeeldingen meer eigenschappen gemeenschappelijk. Een ander voorbeeld van een gemeenschappelijke eigenschap van de drie afbeeldingen zien we in de drie grafieken in Figuur 3. Ze geven de Lyapunov-exponent weer voor de drie afbeeldingen. De verschillende voorbeelden van gemeenschappelijke eigenschappen leiden tot de claim dat de vouw-en-draaiafbeelding een goed toy-model is voor 2-1-afbeeldingen met een vouw en een draai.

Wat betreft de chaos (een mooie PR-naam): die kan voor de drie afbeeldingen worden aangetoond met de stelling van Marotto, de generalisatie van de stelling van Lie en Yorke: *Period three implies chaos*.



Figuur 3 De Lyapunov-exponenten voor v.l.n.r. F , P , en Lorenz-63. De kleuren refereren aan de aard van de dynamica voor de verschillende parameterwaarden.

Francesca Arici

Max Planck Institute for Mathematics in the Sciences
Leipzig
arici@mis.mpg.de

Evgenios T. A. Kakariadis

School of Mathematics, Statistics and Physics
Newcastle University
evgenios.kakariadis@ncl.ac.uk

Nadia S. Larsen

Department of Mathematics
University of Oslo
nadiasl@math.uio.no

Event Workshop Lorentz Center, 25–29 June 2018

Cuntz–Pimsner cross-pollination

In the last ten years, a class of algebras known as Cuntz–Pimsner algebras has been subject of increasing attention in the operator algebra and noncommutative geometry community, leading many mathematicians to investigate their properties from several perspectives. In search of a unified approach to this rich class of objects, the collaborative workshop *Cuntz–Pimsner Cross-Pollination* has taken place in late June at the Lorentz Center, Leiden, bringing together a diverse group of researchers interested in the many facets of this topic. Francesca Arici, Evgenios Kakariadis and Nadia Larsen report about this event.

Operator algebras provide an elegant setting for many problems in mathematics and physics. They may be configured as algebras of infinite (bounded) matrices and thus they are subject to algebraic and analytic manipulations. This rich structure allows the development of several notions of measurement for the phenomena they encode.

The study of operator algebras is a major undertaking worldwide, continuing to establish connections to physics and to almost every branch of pure mathematics, including dynamical systems, topology, algebra, geometric group theory and number theory. Within this field, two important research directions are currently particularly active: the classification program of C^* -algebras, and Connes' approach to noncommutative geometry (NCG). The workshop revolved around a class of algebras, *Cuntz–Pimsner algebras*, which have proven extremely relevant for both research lines.

Why Cuntz–Pimsner algebras?

Cuntz–Pimsner algebras are C^* -algebras of tractable structure with ample applicability. Their class is broad enough to encompass C^* -algebras of one-dimensional

transformations, witnessing many of the most interesting and impressive aspects of C^* -algebra theory. This includes $\mathbb{Z}$ -crossed products, such as those used in topological dynamics, algebras associated to Smale spaces [16], and algebras associated to graphs and to symbolic dynamical systems [15]. In physics, connections can be made to gauge theory [8] and quantum mechanics via Connes' noncommutative geometry, where Cuntz–Pimsner algebras serve as models for quantum spaces [3], as well as for topological insulators [7]. Other results indicate the relevance of Cuntz–Pimsner algebras for topics such as C^* -algebraic classification [17, 18, 45] and multiresolution analysis [21, 22].

This broad range of applications has led to the appearance in the literature of many interesting results for sub-classes of Cuntz–Pimsner algebras. As researchers pursued results encompassing their favourite examples, they have contributed different viewpoints to address similar questions. By drawing on this diversity of perspectives, this one week workshop constituted a first step towards building a unified understanding of this class of C^* -algebras as well as to extending their known applications. In order to achieve this aim,

the organisers brought together mathematicians from a variety of backgrounds who would contribute to a coordinated and multifaceted analysis of these C^* -algebras.

The workshop

This five day workshop gathered 28 participants from a variety of backgrounds, who also represented an almost 50–50 mix of senior and early career researchers and of male and female mathematicians. The goals of the *Cuntz–Pimsner Cross-Pollination* workshop, as described by the organisers, were to

- extend what is known for specific examples and subclasses into a unified body of knowledge about Cuntz–Pimsner algebras and their higher rank generalisations;
- find new applications of Cuntz–Pimsner algebras;
- strengthen the ties between the different communities of researchers working on Cuntz–Pimsner algebras; and
- highlight and promote the contributions of women researchers to the field of C^* -algebras.

In order to facilitate an exchange of ideas between participants from different backgrounds, the workshop started with four distinguished lectures given by as many experts in the field. These introductory lectures were designed so as to present an overview of the state of the art for topics central to the proposed research program, but which may not have been familiar to all participants.

Twenty years of Cuntz–Pimsner algebras: A model for one-dimensional transformations

Cuntz–Pimsner algebras were first defined two decades ago in Pimsner’s seminal paper [41]. The motivation was to unify the C^* -algebraic approach of two important classes of examples in dynamics: the C^* -algebras associated to Markov Chains studied by Cuntz and Krieger [15] in the eighties, and the C^* -algebras coming from a single automorphism. This objective was achieved by constructing universal C^* -algebras associated to an injective C^* -correspondence (that is, a right Hilbert C^* -module with an injective left action of the coefficient C^* -algebra). Almost a decade later Katsura [33] generalised the construction by dropping the injectivity condition, thereby realising even more classes of C^* -algebras: graph algebras, algebras associated to partial automorphisms, and crossed products by C^* -correspondences, to name a few.

Despite being relative newcomers to C^* -algebra theory, many structural properties of Cuntz–Pimsner algebras are well understood, such as exactness and nuclearity [33], simplicity and ideal structure [30, 34], and finiteness and infiniteness [45]. Cuntz–Pimsner algebras also come equipped with useful tools such as gauge-invariant uniqueness theorems and six-term exact sequences in KK -theory, resulting in computable K -theory and K -homology groups. This makes them particularly attractive C^* -algebras and has led to a sharp increase in their use in many branches of C^* -algebra theory. In addition to their crucial role in C^* -algebraic dynamics (cf. [1, 12, 16], see also [31]), Cuntz–Pimsner algebras have recently appeared in the study of quantum groups and quantum spaces [3, 27, 44]. The Cuntz–Pimsner perspective also facilitated both the construction of groupoid models for Kirchberg algebras in [10], and index-theoretic Kasparov products in KK -theory [25]. Furthermore, links with self-similar group actions have been discovered in [20, 38, 39].

Taking motivation from Arveson [6], Fowler [23] established the higher-rank analogue of Toeplitz–Pimsner algebras. This construction quantizes product systems (i.e., a compatible semigroup family of C^* -correspondences) over a C^* -algebra. Sims and Yeend [47] proposed a construction of a Cuntz–Nica–Pimsner C^* -algebra in the context of product systems over quasi-lattice ordered group-subgroup pairs, and Carlsen, Larsen, Sims

and Vittadello [13] provided a versatile co-universal counterpart of this C^* -algebra. The new class includes higher-rank graph C^* -algebras, the algebra $Q_{\mathbb{N}}$ introduced in [11], and crossed products by certain discrete groups and semigroups. Although the higher-rank analogue appeared around the same time with Katsura’s work, much less is known about their C^* -structure, as the one-variable tools do not have a direct multi-dimensional translation.



- Wojciech Szymanski from the University of Southern Denmark delivered a lecture on ‘Quantum balls, spheres and lens spaces’ and explained how a big class of quantum group deformations of classical topological spaces admit various Cuntz–Pimsner models, that reflect different dynamical aspects.
- In his talk ‘Classification for non-simple purely infinite C^* -algebras’, Ralf Meyer from Göttingen University described how KK -theory, an invariant for C^* -algebras, serves as a powerful tool in the classification program.
- Carla Farsi from University of Colorado Boulder introduced the participants to

higher rank analogues of graphs and decompositions of their representations using ‘Wavelets and spectral triples for graphs’.

- In her talk about ‘KMS states on semigroup C^* -algebras’ Nadia Larsen from University of Oslo presented broad classes of motivating examples and obtained general results about this specific class of states.

The first day ended with a *gong session* in which each participant was challenged to describe their current research in two minutes or less. The purpose of the activity was to help participants identify

other participants’ expertise or interests that might be relevant to their own research, and consequently to inspire discussions. This worked especially well since the gong session naturally continued to a friendly conversation during the wine and cheese party generously offered by the Lorentz Center.

In addition to the introductory lectures, 14 of the workshop participants delivered research talks in a standard conference format during the remainder of the week. The speakers ranged from master students to established researchers; the diversity in seniority created a very welcoming environment, where questions were encouraged.

The talks revolved around recent developments, unpublished work and presentations on:

1. one variable correspondences and the structure of their Cuntz–Pimsner algebras;
2. the structure of their higher rank analogues; and
3. their application in K -theory and Index theory.

1. Baukje Debets (Nijmegen, the Netherlands) described how the structural properties of path groupoids, graphs and C^* -correspondences relate to the C^* -properties of the induced Cuntz–Pimsner algebras. Martijn Caspers (Delft, the Netherlands) showed that arbitrary free quantum groups are strongly solid in the sense of Ozawa and Popa by using a W^* -correspondence introduced by Cipriani and Sauvageot. Motivated by the passage from the Toeplitz–Pimsner to the Cuntz–Pimsner algebras in the groupoid picture of Yeend, Gilles de Castro (Florianópolis, Brazil) showed how pointless topology can be used to recover the boundary path space of a topological graph. The groupoid theory has also been the source of motivation for constructing minimal homeomorphisms on CW -complexes with prescribed K -theory, presented by Robin Deeley (Boulder, United States). A wide subclass of Cuntz–Pimsner algebras can be constructed from labeled directed graphs and Ja A Jeong (Seoul, Korea) discussed their ideal structure and suffi-

cient conditions for being AF and purely infinite. Inspired by earlier work of Muhly–Tomforde on graph C^* -algebras, Bartosz Kwasniewski (Białystok, Poland) discussed topological freeness and induced criteria of simplicity for general Cuntz–Pimsner algebras.

2. Camila Fabre Sehnem (Göttingen, Germany) showed how the theory of one-variable (relative) Cuntz–Pimsner algebras can be used to show amenability of Fell bundles, a large class that engulfs product system constructions. James Fletcher (Wellington, New Zealand) showed how the Cuntz–Nica–Pimsner algebra of locally convex higher-rank graphs can be realized through iterations of the monochromatic Cuntz–Pimsner algebras. A description of the Cuntz–Nica–Pimsner representations for the class of strong compactly aligned $\mathbb{Z}_+^N$ -product systems as the higher-rank analogue of Katsura’s ideal was shown by Evgenios Kakariadis (Newcastle-upon-Tyne, United Kingdom). Sergey Neshveyev (Oslo, Norway) presented the full description of the finite type KMS-states for product systems of rather general quasi-lattices, encompassing a great number of previous results. More information on the KMS-simplex of right LCM semigroup C^* -algebras was given by Nicolai Stammeier (Oslo, Norway) as well as potential connections with other structural data.

3. Anna Duwenig (Victoria BC, Canada) discussed how to expand on Connes’s

proof of Poincaré self-duality of the irrational rotation algebra by giving a geometric description of the dual class. Marzieh Forough (Tehran, Iran) considered finite group actions and variants of the Rohklin property to address questions of quasidiagonality and Cuntz–Pimsner algebras. Bram Mesland (Bonn, Germany) described the groupoid model for the bulk-boundary correspondence in solid state physics, based on the notion of Delaunay sets. Quite remarkably, in the one dimensional case, this groupoid C^* -algebra can be described as a Cuntz–Pimsner algebra and the extension class agrees with the class of the bulk-boundary extension.

To further stimulate interaction between the participants, the third day of the workshop included a *plenary discussion session*. Topics of discussion were suggested by the participants, and consisted of problems which they viewed as central open questions about Cuntz–Pimsner algebras and their generalisations. On the final day, the workshop concluded with another discussion, stemming from problems presented earlier in the workshop, about a future research agenda for the continued study of Cuntz–Pimsner algebras and their applications.

Committees

The scientific organisers of the meeting were: Francesca Arici (Leipzig, Germany), Sara Arklint (Copenhagen, Denmark), Elizabeth Gillaspay (Missoula, USA), Karen Strung

Quantum spaces: From dynamical systems to algebraic deformations and back

Several results indicate the potential of the Cuntz–Pimsner perspective to improve our understanding of quantum principal bundles and quantum homogeneous spaces. In [27,28], Hong and Szymański show that some well-known examples of quantum spaces—such as quantum spheres, quantum lens spaces and quantum projective spaces—can be realised as graph C^* -algebras, and hence as Cuntz–Pimsner algebras. A complementary approach was taken in [3], where the authors constructed a Cuntz–Pimsner model for the Vaskman–Soibelman quantum sphere and lens spaces as principal circle bundle over quantum (possibly weighted) projective spaces. These two models encode different data: for example, the graph algebra perspective enables explicit computation of the K -theory and primitive ideal space, while the approach of [3] gives a non-commutative Gysin sequence. Quite surprisingly, some of these algebras, such as quantum weighted projective spaces, admit a quantum principal bundle structure when no classical analogue exists [9].

While spectral obstructions imply that, unlike those in [27,28], not all quantum homogeneous spaces will have graph algebra models, the question whether a given quantum space may admit a Cuntz–Pimsner model still stands open. There is some evidence that this problem may have a positive answer. First of all, any C^* -algebra endowed with a semi-saturated torus action admits a product system Cuntz–Pimsner model, which means that they can be obtained as iterated Cuntz–Pimsner algebras. Moreover, work in progress by various authors using generalisation of C^* -correspondences like product and subproduct systems [46,50], shows that the Cuntz–Pimsner framework has the potential of extending to quantum bundles with different structure, like quantum flag manifolds and sphere bundles. There is evidence that a combination of C^* -correspondences with subproduct systems can provide a rigid analysis of the ambient structures, e.g., for monomial ideals [32]. Results on the K -theoretic range of these algebras, such as those in [5], may help with the investigation.

KK-theory, wavelets and multi resolution analysis: Bridging geometry and analysis

Connes' approach to noncommutative geometry [14] finds one of its biggest sources of inspiration in the celebrated Atiyah–Singer index theorem (see [36] for a popular overview of the topic), whose greatest merit is that of establishing a bridge between topology on one side, and the analysis of differential operators on the other. Similarly, in NCG, a central notion is that of a *spectral triple* $(A, \mathcal{H}, D)$, which consists of an involutive algebra A of operators acting on a Hilbert space $\mathcal{H}$ and a self-adjoint operator D on the same Hilbert space, subject to certain conditions. Spectral triples are modelled on the classical geometric notion of Riemannian spin manifold, with the algebra A playing the role of the algebra of smooth functions $C^\infty(M)$ on a manifold. One can also view a spectral triple $(A, \mathcal{H}, D)$ as an unbounded Kasparov module representing a class in the bivariant K -theory group $KK^1(A, \mathbb{C})$. For a friendly introduction to index theory, Kasparov's bivariant K -theory, and their applications to mathematical physics, we refer the readers to the recent conference report [4].

Every Cuntz–Pimsner algebra O_E associated to a Hilbert bimodule E over A gives rise to an element of $KK^1(O_E, A)$ via the defining extension. Work by Goffeng, Mesland and Rennie [25] has established that many of the spectral triples constructed in recent years [24, 43] arise as the localisation of precisely such a Cuntz–Pimsner Kasparov module. In the setting of graph and k -graph algebras, Farsi, Gillaspay, Julien, Kang and Packer [21, 22] have studied spectral triples via their relationship to wavelets and multiresolution analysis. Wavelets use geometric information (in the form of dilation and translation operators) to generate an orthonormal basis for the Hilbert space on which the algebra is represented. The investigation of the relation between wavelets on fractals and Cuntz–Krieger algebras, a special class of Cuntz–Pimsner algebras, was initiated in [37]. Uniting the Kasparov module and the multiresolution analysis approach, by constructing wavelet decompositions in the context of general Cuntz–Pimsner algebras, has the potential of making index pairings easier to compute, while at the same time shedding new light into the field of time-frequency analysis.

Kubo–Martin–Schwinger states: Invariants for the dynamics on Pimsner algebras

The KMS_β states of a C^* -dynamical system are the equilibrium states of the system at ‘inverse temperature’ $\beta \in \mathbb{R}$. As the parameter β varies, changes of the KMS-simplex provide useful and occasionally unexpected information about the structure of the C^* -dynamical system. The preferred dynamics for Pimsner algebras come from the gauge action, and the classification of the β 's where phase transitions occur can be used for classification up to equivariant isomorphisms.

Beginning with the work of Laca and Neshveyev [35] and of Pinzari, Watatani and Yonetani [42], the KMS states of many subclasses of Pimsner algebras have been extensively studied. It appears that the Toeplitz–Pimsner algebra admits a rich structure coming from the KMS states induced by the generalized compacts (finite type) and the KMS states that factor through the Cuntz–Pimsner algebra (infinite type). Consequently there are two critical inverse temperatures: one above which there are no KMS states of infinite type and one below which there are no KMS states at all. Remarkably these values can be connected to the structural data of the C^* -correspondence. For example in the case of irreducible graphs they both coincide with the logarithm

of the Perron–Frobenius eigenvalue of the adjacency matrix [29]. This has been a recurrent theme in the past 15 years for specific examples of C^* -correspondences, in particular when they admit finite Parseval frames. Until recently the literature contained only partial results about the KMS states for the higher rank analogues (mainly focused on finite type) due to Hong, Larsen and Szymański [26], and Afsar, an Huef and Raeburn [2]. Nevertheless in recent months there have been massive developments on that front. The workshop has provided an excellent opportunity for the participants to discuss announced and on-going work of Christensen (higher-rank finite graphs), Kakariadis ($\mathbb{Z}_+^N$ -product systems with finite Parseval frames), and Afsar, Larsen and Neshveyev (general product systems). It has been evidenced that the parametrisation of the KMS-simplices and the computation of the critical values is tractable for a wide class of Pimsner algebras, both in the case of a single correspondence and in higher-rank cases. Work of Neshveyev [40] and Thomsen [48] also indicates that generalizing the gauge action on the Cuntz–Pimsner algebra may lead to intriguing KMS structures. In the k -graph setting, this question is the focus of current work by Farsi, Gillaspay, Larsen and Packer.

(Nijmegen, Netherlands). The organising committee, consisting of early career researchers, was accompanied by an advisory committee: Astrid an Huef (Wellington, New Zealand), Takeshi Katsura (Tokio, Japan), Sergey Neshveyev (Oslo, Norway), Wojciech Szymanski (Odense, Denmark). One of the most important tasks faced by the committees was to preserve a healthy gender ratio and ensure diversity in terms of geography and seniority. The workshop

was held in cooperation with the Association for Women in Mathematics (AWM) and supported their ‘Welcoming Environment Statement’ [51].

Demographics

The organizing committee comprised four women. Women made up 46% of the participants in the workshop, and more specifically 50% of the plenary speakers and 36% of the contributed talks. These are

comparatively high figures for a workshop in the field of operator algebras, where generally women have been severely under-represented. The organisers hope that these numbers will serve as an inspiration for similar events in the future.

Participants attended from a wide range of geographical locations, including Brazil, Canada, Iran, Japan, Korea, New Zealand, the United States, and of course a number of European countries including the Neth-

C^* -algebraic classification: Understanding C^* -algebras from their group theoretic imprint

The classification program for simple amenable C^* -algebras is a far reaching endeavor in the theory of operator algebras which has seen spectacular fulfillment in the past couple of years. Building on work of Glimm, Bratteli and Elliott in the 1960's and 1970's, Elliott conjectured that separable, simple, amenable C^* -algebras can be classified by their K -theoretic invariants. The first major successes were seen in the early 1990's, culminating with the Kirchberg–Phillips result on the classification of separable, simple, purely infinite, amenable C^* -algebras.

Outstanding work by many hands has lead to a resounding success of Elliott's classification program in the simple case, see [19, 49] and the references therein. Thus it is now known that all simple separable unital C^* -algebras with finite nuclear dimension satisfying the UCT can be distinguished by their Elliott invariant (consisting of K -theoretic and tracial data). The final piece of the puzzle is the remarkable result of Tikuisis, White

and Winter [49] that settles quasidiagonality of faithful traces on separable nuclear C^* -algebras which satisfy the UCT.

Meanwhile, the unital graph algebras — with no assumption of simplicity(!) — have also been classified, both by a K -theoretic invariant, and also by means of geometric data associated to the graphs [18].

Although at present it is unreasonable to suggest that there is an obtainable classification theorem for all Cuntz–Pimsner algebras, one particular subclass appears manageable: Cuntz–Pimsner algebras associated to quantum bundles always have finitely many primitive ideals, are in the UCT class, and, for those that have graph algebra models, already fit under the theorem of [18]. Furthermore, their K -theory is known in many cases, making this class particularly amenable to classification. During the workshop there was a focus on the study of this particular class.

erlands. There was an almost equal split between Senior Researchers, Early Career Researchers with tenured/tenure-track positions, postdoctoral fellows and postgraduate students. By inviting a diverse pool of participants, the organisers succeeded in creating a welcoming and inclusive atmosphere during the workshop, which facilitated discussion and scientific collaboration. That was of extreme value for stimulating discussions especially after the gong session and during the open problem

session. It should perhaps be stressed that the very diversity of the participants' expertise and interests was a crucial reason why so many women were present at the workshop.

Participant feedback

Several of the workshop participants reported to the organisers that the structure of the meeting facilitated conversations with other researchers, including researchers with whom they had not previously

interacted. It was also observed that the atmosphere of the workshop felt more inclusive and supportive than other conferences due to its collaborative atmosphere, relatively small size and diversity of participants.

Finally, participants expressed enthusiasm for the idea of holding a follow-up conference in approximately two years' time, to continue to strengthen the research community centered on Cuntz–Pimsner algebras.

One cannot underestimate the excellent facilities and professionalism of organisation provided by the hosts at the Lorentz Center towards the success of the meeting. Everything worked perfectly. The facilities at the center, with boards, various sitting areas and glass walls make for easy interaction between participants. The relatively small scale of the meeting means that all participants get to talk to essentially everybody else. As a result, several new collaborations and research projects are expected to blossom through this *cross-pollination*. ☼

Acknowledgements

We are gratefully indebted to Sara Arklint, Elizabeth Gillaspay and Karen Strung, without whom this workshop would have not been possible. The workshop received financial support from NWO (Netherlands Organisation for Scientific Research), the Geometry and Quantum Theory cluster, Springer, the Foundation Composition Mathematica, and the K -theory foundation.



Participants from left to right. Standing: Baukje Debets, Gilles de Castro, Ralf Meyer, Nadia Larsen, Walter van Suijlekom, Ja A Jeong, Gi Hyun Park, Bram Mesland, Astrid an Huef, Nicolai Stammeier, Elizabeth Gillaspay, Robin Deeley, Camila Fabre Sehnem, Bartosz Kwasniewski, Sophie Emma Mikkelsen, Takeshi Katsura, Carla Farsi, Marzieh Forough. Sitting: James Fletcher, Evgenios Kakariadis, Sergey Neshveyev, Marcelo Laca, Francesca Arici, Karen Strung, Wojciech Szymanski. Not in the picture: Martijn Caspers, Anna Duwenig and Chiara Pagani.

References

- 1 B. Abadie, S. Eilers and R. Exel, Morita equivalence for crossed products by Hilbert C^* -bimodules, *Trans. Amer. Math. Soc.* 350(8) (1998), 3043–3054.
- 2 Z. Afsar, A. an Huef and I. Raeburn, KMS states on C^* -algebras associated to a family of $*$ -commuting local homeomorphisms, *J. Math. Anal. Appl.* 464(2) (2018), 965–1009.
- 3 F. Arici, J. Kaad and G. Landi, Pimsner algebras and Gysin sequences from principal circle actions, *J. Noncomm. Geom.* 10(1) (2016), 29–64.
- 4 F. Arici and D. Monaco, Workshop Lorentz Center, 27 February – 10 March 2017: KK-theory, gauge theory and topological phases, *NAW* 5/18(4) (2017), 257–262.
- 5 S.E. Arklint, R. Bentmann and T. Katsura, The K -theoretical range of Cuntz–Krieger algebras, *J. Funct. Anal.* 266(8) (2014), 5448–5466.
- 6 W. Arveson, Continuous analogues of Fock space, *Memoirs Amer. Math. Soc.* 80 (1989), no. 409.
- 7 C. Bourne, B. Mesland, Index theory and topological phases of aperiodic lattices, preprint arXiv:1803.03972, to appear in *Ann. Henri Poincaré*.
- 8 S. Brain, B. Mesland and W.D. van Suijlekom, Gauge theory for spectral triples and the unbounded Kasparov product, *J. Noncommut. Geom.* 10(1) (2016), 135–206.
- 9 T. Brzezinski and S.A. Fairfax, Quantum tear drops, *Comm. Math. Phys.* 316(1) (2012), 151–170.
- 10 J. Brown, L.O. Clark and A. Sierakowski, Purely infinite C^* -algebras associated to étale groupoids, *Ergodic Theory Dynam. Systems* 35(8) (2015), 2397–2411.
- 11 J. Cuntz, C^* -algebras associated with the $ax+b$ -semigroup over $\mathbb{N}$, *K-Theory and Noncommutative Geometry (Valladolid, 2006)*, European Math. Soc. 2008, pp. 201–215.
- 12 T.M. Carlsen, Cuntz–Pimsner C^* -algebras associated with subshifts, *Internat. J. Math.* 19(1) (2008), 47–70.
- 13 T.M. Carlsen, N.S. Larsen, A. Sims and S.T. Vittadello, Co-universal algebras associated to product systems, and gauge-invariant uniqueness theorems, *Proc. London Math. Soc.* (3) 103(4) (2011), 563–600.
- 14 A. Connes, *Noncommutative Geometry*, Academic Press, 1994.
- 15 J. Cuntz and W. Krieger, A class of C^* -algebras and topological Markov chains, *Invent. Math.* 56(3) (1980), 251–268.
- 16 R. J. Deeley, M. Goffeng, B. Mesland and M. Whittaker, Wiener solenoids, Cuntz–Pimsner algebras and K -theory, *Ergodic Th. Dynam. Sys.* 38(8) (2018), 2942–2988.
- 17 R.J. Deeley, I. Putnam and K. Strung, Constructing minimal homeomorphisms on point-like spaces and a dynamical presentation of the Jiang–Su algebra, *J. Reine Angew. Math.* 742 (2018), 241–261.
- 18 S. Eilers, G. Restorff, E. Ruiz and A. Sørensen, Geometric classification of graph C^* -algebras over finite graphs, *Canad. J. Math.* 70(2) (2018), 294–353.
- 19 G. A. Elliott, G. Gong, H. Lin and Z. Niu, On the classification of simple amenable C^* -algebras with finite decomposition rank II, preprint arXiv:1507.03437.
- 20 R. Exel and E. Pardo, Self-similar graphs, a unified treatment of Katsura and Nekrashevych C^* -algebras, *Adv. Math.* 306 (2017), 1046–1129.
- 21 C. Farsi, E. Gillaspy, A. Julien, S. Kang and J. Packer, Wavelets and spectral triples for fractal representations of Cuntz algebras, *Problems and Recent Methods in Operator Theory*, Contemp. Math. 687, Amer. Math. Soc., 2017, pp. 103–133.
- 22 C. Farsi, E. Gillaspy, A. Julien, S. Kang and J. Packer, Spectral triples and wavelets for higher-rank graphs, preprint arXiv:1803.09304.
- 23 N.J. Fowler, Discrete product systems of Hilbert bimodules, *Pacific J. Math.* 204(2) (2002), 335–375.
- 24 M. Goffeng and B. Mesland, Spectral triples and finite summability on Cuntz–Krieger algebras, *Doc. Math.* 20 (2015), 89–170.
- 25 M. Goffeng, B. Mesland and A. Rennie, Shift-tail equivalence and an unbounded representative of the Cuntz–Pimsner extension, *Ergodic Theory Dynam. Systems* 38(4) (2018), 1389–1421.
- 26 J.H. Hong, N.S. Larsen and W. Szymanski, KMS states on Nica–Toeplitz algebras of product systems, *Internat. J. Math.* 23(12) (2012), 1250123, 38 pp.
- 27 J.H. Hong and W. Szymanski, Quantum spheres and projective spaces as graph algebras, *Comm. Math. Phys.* 232(1) (2002), 157–188.
- 28 J.H. Hong and W. Szymanski, Quantum lens spaces and graph algebras, *Pacific J. Math.* 211(2) (2003), 249–263.
- 29 A. an Huef, M. Laca, I. Raeburn and A. Sims, KMS states on the C^* -algebras of finite graphs, *J. Math. Anal. Appl.* 405(2) (2013), 388–399.
- 30 T. Kajiwara, C. Pinzari and Y. Watatani, Ideal structure and simplicity of the C^* -algebras generated by Hilbert bimodules, *J. Funct. Anal.* 159(2) (1998), 295–322.
- 31 E. Kakariadis and E.G. Katsoulis, Operator algebras and C^* -correspondences: a survey, *Algebraic methods in functional analysis, Oper. Theory Adv. Appl.* 233 (2013), 45–73.
- 32 E. Kakariadis and O.M. Shalit, Operator algebras of monomial ideals in noncommuting variables, *J. Math. Anal. Appl.* 472(1) (2019), 738–813.
- 33 T. Katsura, On C^* -algebras associated with C^* -correspondences, *J. Funct. Anal.* 217(2) (2004), 366–401.
- 34 T. Katsura, Ideal structure of C^* -algebras associated with C^* -correspondences, *Pacific J. Math.* 230(1) (2007), 107–145.
- 35 M. Laca and S. Neshveyev, KMS states of quasi-free dynamics on Pimsner algebras, *J. Funct. Anal.* 211(2) (2004), 457–482.
- 36 N.P. Landsman, De indexstelling van Atiyah en Singer, *NAW* 5/5 (2004), 207–211.
- 37 M. Marcolli and A.M. Paolucci, Cuntz–Krieger algebras and wavelets on fractals, *Complex Anal. Oper. Theory* 5(1) (2011), 41–81.
- 38 V. Nekrashevych, Cuntz–Pimsner algebras of group actions, *J. Operator Theory* 52(2) (2004), 223–249.
- 39 V. Nekrashevych, C^* -algebras and self-similar groups, *J. Reine Angew. Math.* 630 (2009), 59–123.
- 40 S. Neshveyev, KMS states on non-principal groupoid C^* -algebras, *J. Operator Theory* 70(2) (2013), 513–530.
- 41 M.V. Pimsner, A class of C^* -algebras generalizing both Cuntz–Krieger algebras and crossed products by $\mathbb{Z}$, *Free Probability Theory (Waterloo, ON, 1995)*, Fields Inst. Commun. 12, Amer. Math. Soc., 1997, pp. 189–212.
- 42 C. Pinzari, Y. Watatani and K. Yonetani, KMS states, entropy and the variational principle in full C^* -dynamical systems, *Comm. Math. Phys.* 213(2) (2000), 331–379.
- 43 A. Rennie, D. Robertson and A. Sims, The extension class and KMS states for Cuntz–Pimsner algebras of some bi-Hilbertian bimodules, *J. Topol. Anal.* 9(2) (2017), 297–327.
- 44 D. Robertson, W. Szymanski, C^* -algebras associated to C^* -correspondences and applications to mirror quantum spheres, *Illinois J. Math.* 55(3) (2011), 845–870.
- 45 C.P. Schafhauser, Cuntz–Pimsner algebras, crossed products, and K -theory, *J. Funct. Anal.* 269(9) (2015), 2927–2946.
- 46 O.M. Shalit and B. Solel, Subproduct systems, *Doc. Math.* 14 (2009), 801–868.
- 47 A. Sims and T. Yeend, C^* -algebras associated to product systems of Hilbert bimodules, *J. Operator Theory* 64(2) (2010), 349–376.
- 48 K. Thomsen, KMS weights on graph C^* -algebras, *Adv. Math.* 309 (2017), 334–391.
- 49 A. Tikuisis, S. White and W. Winter, Quasidiagonality of nuclear C^* -algebras, *Ann. of Math.* (2) 185(1) (2017), 229–284.
- 50 A. Viselter, Covariant representations of subproduct systems, *Proc. London Math. Soc.* 102(4) (2011), 767–800.
- 51 <https://sites.google.com/site/awmmath/awm-resources/policy-and-advocacy/harassment-statement>.

Wieb Bosma

IMAPP
Radboud Universiteit Nijmegen
bosma@math.ru.nl

Stoffelijke resten tastbare herinneringen aan wiskundigen

Groeten uit Pisa



Als we Pisa horen, denken we scheve toren. Met wat geschiedenis van de natuurwetenschappen in de bagage komt bij die toren wellicht Galileo in gedachten, omdat er ingeprent is dat hij er experimenten met vallende objecten deed. Waarschijnlijk ook slechts in gedachten trouwens. Pisa eert de bekendste burger met een plaquette en een kleine buitententoonstelling bij het huis van zijn moeder (nog maar relatief kort geleden aangewezen als zijn geboortehuis) en met een oudere plaquette in een winkelstraat die verwijst naar het huis van zijn vader. Sinds 2009 heeft Pisa ook, bij wat vroeger een Poortgebouw aan de rand van de stad was, een modern beeld van Galileo (door Stefania Guidi). Een eeuw eerder haalde aartsbisschop Pietro Maffi, die zelf aan sterrenkunde deed, zich met een voorstel voor een standbeeld voor de ketter Galileo nog de katholieke woede op de hals.



Leonardo Pisano, die wij beter kennen als Fibonacci, viel de eer van een (nog groter) standbeeld in de stad al in 1863 ten deel. Terecht, zoals Keith Devlin betoogt (in *The Man of Numbers*), omdat het *Liber Abaci* de basis legde voor moderne wiskunde en de weg plaveide voor de moderne economie. Wat niet betekent dat de moderne Italiaan zich bewust is van het belang, of het bestaan van Fibonacci, laat staan van het bestaan van het standbeeld. In *Finding Fibonacci* beschrijft Devlin herkenbaar en komisch hoe hij een VVV-dame in Pisa niet kan overtuigen van het bestaan van een andere beroemde Leonardo dan de Florentijnse schilder. Weinigen weten dan ook dat het metershoge beeld (van Giovanni Paganucci) tegenwoordig op nog geen steenworp afstand van de scheve toren in de half-overdekte begraafplaats Camposanto te vinden is. Niemand weet hoe Fibonacci eruitzag, maar het beeld is fraai. Devlin heeft ook een foto opgediept die laat zien hoe het beeld, destijds ter meerdere glorie van het fascisme midden in de stad bij een brug over de Arno opgesteld, miraculeus de Tweede Wereldoorlog heeft overleefd.





Verderop in de rondgang van de Camposanto vinden we de graven van de bekende wiskundigen Ulisse Dini (1845–1918), Enrico Betti (1823–1892), Luigi Bianchi (1856–1928), Leonida Tonelli (1885–1946), en een plaque voor Giovanni Maria Lavagna (1812–1870). De laatste was een verdienstelijk wiskundige, maar verdient ook vermelding omdat zijn naam ‘schoolbord’ betekent in het Italiaans.



Op de hoek van het plein waar de Scuola zetelt staat een levensgroot beeld van Dini (waarschijnlijk ook omdat hij politicus en kamerlid werd). Dini is veel beroemder in Italië dan bij ons; hij studeerde onder Betti en volgde hem later op als directeur van de (onder Napoleon opgerichte) Scuola Normale Superiore. De impliciete functiestelling wordt in Italië de Stelling van Dini genoemd, en de eerste druk van zijn *Analisi Infinitesimale* werd ons dan ook met gepaste trots getoond door de bibliotheek van de Scuola. De verrassendste vondst in de Camposanto, ten slotte, vormde voor mij het ‘praalgraf’ van Ottaviano Fabrizio Mossotti (1791–1863). Hij was wiskundige, astronoom en fysicus, die in 1823 Italië moest ontvluchten omdat hij verkeerde in kringen van revolutionaire, liberale, anti-Oostenrijkse, anti-monarchisten. Na jaren in Engeland en Argentinië keerde hij op uitnodiging van Plana terug naar Turijn. In 1841 werd hij hoogleraar mathematische fysica in Pisa, en vocht in 1848 (met een bataljon van de Universiteit van Pisa) mee in de ingewikkelde strijd om de onafhankelijkheid tegen Oostenrijk en voor de Italiaanse eenheid. In 1861 werd hij senator voor het Koninkrijk Italië. Giovanni Dupré ontwierp in 1867 het monument, dat niet alleen een embleem van Mossotti toont, maar waarop een schaars geklede vrouw nadrukkelijk de aandacht op zich vestigt. Dit verwijst niet naar de libertaire opvattingen van Mossotti, maar blijkt Urania, de muze van de sterrenkunde te zijn. Iedereen weet vanzelfsprekend hoe een muze eruitziet, en het beeld is fraai. Onze blikken richtten zich natuurlijk vooral op de stapel boeken waarop ze steunt. Volgens kunsthistorici geloofde Dupré dat, om schoonheid te bereiken in de kunst “One should deeply love one’s subject, thinking about it day and night; else any idea remains vague, imagination is cold, and art yields mummies instead of images of life.” Geldt dat (met kleine aanpassingen) niet ook voor ons, wiskundigen?

Mark Timmer*Twents Carmel College, Oldenzaal, en
ELAN, Vakgroep Docentontwikkeling, UT
m.timmer@utwente.nl***Jos Tolboom***SLO, nationaal expertisecentrum leerplanontwikkeling
Enschede
j.tolboom@slo.nl*

Onderwijs

Computational thinking – een vooruitblik op het wiskundeonderwijs van de toekomst

Wie te maken heeft met het voortgezet wiskundeonderwijs, zal in de komende jaren ongetwijfeld op enig moment de term ‘computational thinking’ langs horen komen. Deze verzamelaar voor een verscheidenheid aan competenties op het raakvlak van wiskunde en informatica zou wel eens een behoorlijke stempel kunnen gaan drukken op het onderwijs van de toekomst. Mark Timmer (gepromoveerd theoretisch informaticus, wiskundedocent en vakdidacticus wiskunde) en Jos Tolboom (gepromoveerd wiskundedidacticus en leerplanontwikkelaar wiskunde en informatica) geven u alvast een voorproefje van wat eraan zit te komen.

Hoewel het vakgebied wiskunde zich lastig laat definiëren, heerst er algemene consensus dat wiskunde gaat over patronen, verbanden en structuren – in de praktijk veelal met het doel om bepaalde (al dan niet kwantificeerbare) vraagstukken op te lossen. Steeds vaker worden praktische problemen die met wiskundige technieken kunnen worden aangepakt dusdanig complex, dat handmatig algebraïsch-analytisch oplossen niet meer tot de mogelijkheden behoort en de computer moet worden ingeschakeld. Om dat voor elkaar te krijgen moeten we uiteraard beschikken over de technische vaardigheden om die computer daadwerkelijk aan het werk te zetten (zoals programmeren), maar voorafgaand aan het concrete programmeerwerk zal eerst goed moeten worden nagedacht over of, en zo ja, hoe, het probleem überhaupt – eventueel ten dele – geautomatiseerd kan worden opgelost. Deze eerste stap wordt sinds enkele jaren aangeduid met de term *computational thinking* (ook wel computationeel denken genoemd) [1,6,8]. De

belangrijkste bron van het achterliggende gedachtegoed is het werk van Seymour Papert [3], dat de rol van computerondersteuning voor probleemoplossen in wiskundige situaties expliciet beschrijft.

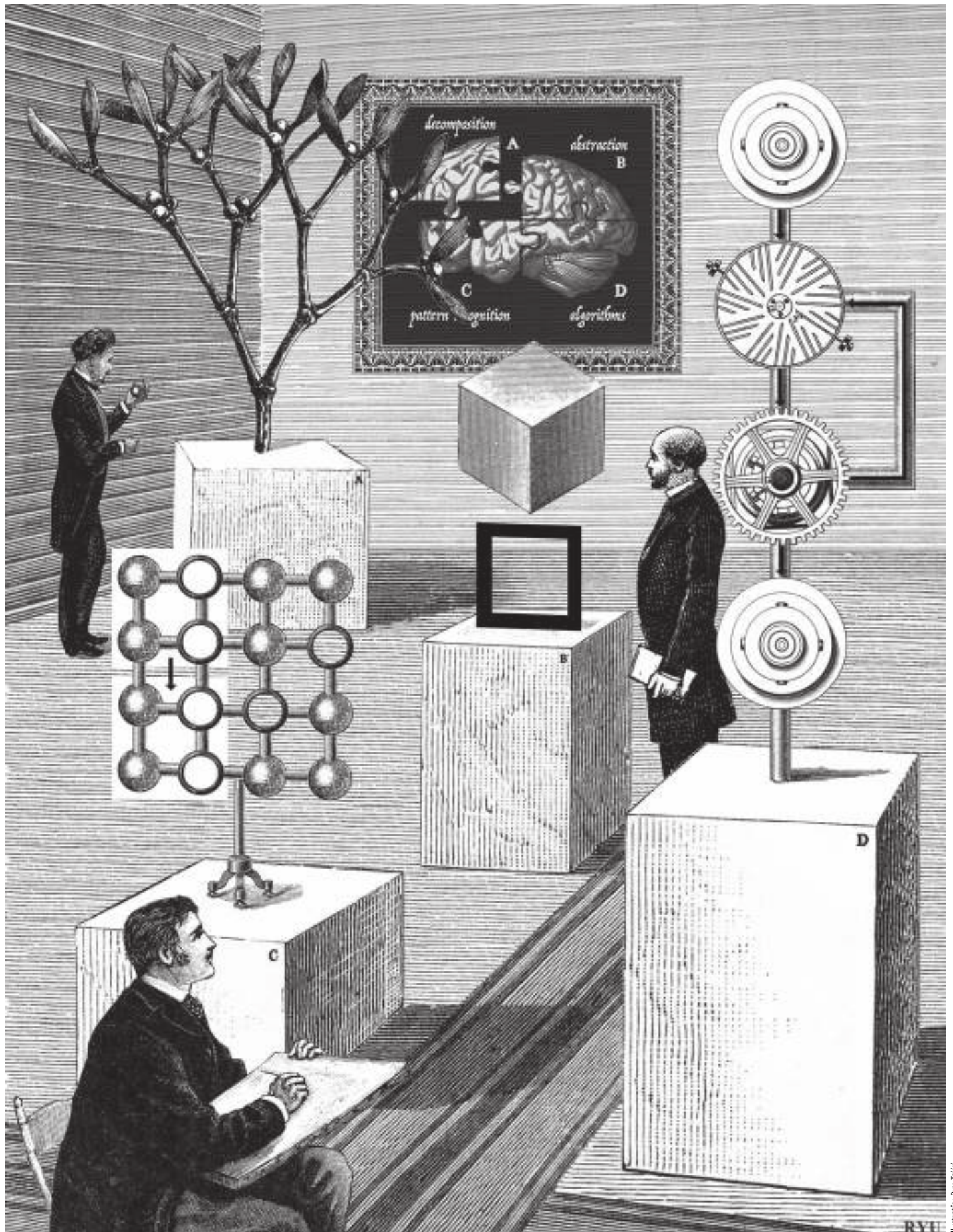
Computational thinking

Door een van grondleggers van het concept wordt computational thinking omschreven als [7]: “The thought processes involved in formulating a problem and expressing its solution(s) in such a way that a computer – human or machine – can effectively carry out.” Te denken is hierbij onder andere aan decompositie (een probleem slim in kleinere deelproblemen opsplitsen), abstractie (het weglaten van overbodige details) en algoritmiek (het formuleren van een oplossingsstrategie op een manier die door computers uit te voeren is). Ook het analyseren van en reflecteren op de efficiëntie van algoritmen (computationele complexiteit) wordt als een deelvaardigheid van computational thinking gezien [2].

Curriculum.nu, het landelijke vernieuwingsproject dat richting geeft aan de toekomst van het basis- en voortgezet onderwijs, noemt computational thinking in het ontwerpteam ‘Digitale geletterdheid’ als een van de vier pijlers van digitale geletterdheid – naast basis ICT-vaardigheid, informatievaardigheid en mediawijsheid. Hoewel de eerdergenoemde aspecten van computational thinking traditioneel vaak onder het vakgebied van de informatica worden geschaard, leent ook het vak wiskunde in het voortgezet onderwijs zich prima om leerlingen te onderwijzen in computational thinking. Het ligt voor de hand om daar gebruik van te maken, aangezien niet alle leerlingen het vak informatica volgen. Onderwijsactiviteiten gericht op computational thinking passen bovendien goed binnen het thema ‘wiskundige denkactiviteiten’, dat in het huidige wiskundecurriculum van havo en vwo al het uitgangspunt vormt voor het vormgeven van het examenprogramma in de concrete domeinen (en dat met aspecten als probleemoplossen, analytisch denken, abstraheren en modelleren ook zeker overlap vertoont met computational thinking).

Ruiken aan de grenzen van de wetenschap

Leerlingen in het voortgezet onderwijs lijken vaak weinig gevoel te hebben voor het feit dat wiskunde nog constant in ontwikkeling is. Veel van de technie-



ken die op school aan bod komen zijn al eeuwen oud, en het feit dat ze ooit door iemand zijn ‘uitgevonden’ komt niet vaak aan bod. Dit kan ervoor zorgen dat leerlingen wiskunde als een statisch gegeven gaan beschouwen, wat niet uitnodigend werkt voor een carrière in de wiskunde, in onderwijs, wetenschap of het bedrijfsleven.

Computational thinking biedt naar ons idee perspectieven om een bijdrage te leveren aan het dynamische imago van de wiskunde. Immers, als we kijken naar de grenzen van de wetenschap en het bedrijfsleven, dan ligt de uitdaging vaak minder in het daadwerkelijk programmeren van wiskundige hulpmiddelen om bepaalde problemen op te lossen, maar meer in het begrijpen en analyseren van die problemen en het herformuleren ervan op een

duddanige manier dat eraan gerekend kan worden – computational thinking dus.

Een mooie illustratie van de plaats van computational thinking aan de grens van de wetenschap vinden we in het promotie-onderzoek van de eerste auteur. Onder de noemer ‘probabilistic model checking’ deed hij onderzoek naar efficiëntieverbetering van technieken om automatisch bepaalde kwantitatieve eigenschappen van protocollen of systemen te berekenen [4]. Dergelijke onderwerpen uit de theoretische informatica vragen om een mix van wiskundige modelleerconcepten om de werkelijkheid om te zetten in een handzaam formaat (zoals procesalgebra), wiskundige bewijstechnieken om te kunnen redeneren over de correctheid van efficiëntieverhogende herschrijffregels, en technische vaardigheden om dit alles in de praktijk te brengen in

de vorm van een implementatie waarmee miljoenen toestanden van een systeem in korte tijd doorgerekend kunnen worden. Als we leerlingen alvast een kijkje kunnen geven in de keuren van dergelijke projecten, door hen kennis te laten maken met wiskundige denkwijzen en technieken die benodigd zijn om op zo’n manier wiskunde in de praktijk te kunnen brengen, dan hopen we ze te kunnen enthousiasmeren om zelf ook met wiskunde aan de slag te willen gaan aan de grenzen van de wetenschap. Er is immers nog genoeg te doen.

Ontwikkeling van onderwijsmateriaal

Aan concrete plannen voor een inbedding van computational thinking in het wiskunde-curriculum van de toekomst wordt momenteel nog gewerkt, maar het ligt voor de hand dat alle wiskundedocenten (in ieder

Een voorbeeld van lesmateriaal over computational thinking

In de opdracht van Van der Meulen gaan leerlingen onder andere aan de slag met het plannen van taken die sequentieel op één machine moeten worden uitgevoerd. Hierbij dienen ze rekening te houden met de lengte van iedere taak (*processing time p*), het tijdstip waarop de taak beschikbaar komt (*release date r*) en het uiterste moment waarop de taak klaar dient te zijn (*due date d*). Zie Tabel 1 voor een illustratie van dergelijke gegevens voor een drietal taken.

taak:	1	2	3
<i>p</i>	5	6	5
<i>r</i>	0	4	2
<i>d</i>	15	11	12

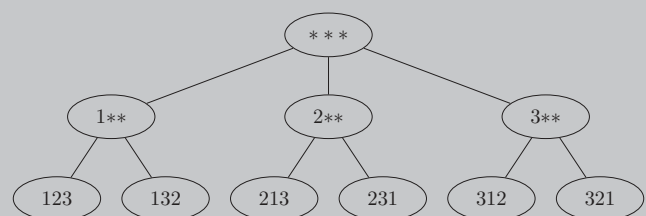
Tabel 1 Drie taken.

Op basis van dit soort informatie moet bedacht worden in welke volgorde de taken het best kunnen worden uitgevoerd, waarbij eerst ook nagedacht wordt over een optimalisatiecriterium. Het blijkt immers niet mogelijk om alle taken voor hun deadline af te krijgen. Te denken is aan het minimaliseren van het *aantal taken* dat te laat is, het minimaliseren van de *totale vertraging* van alle taken die te laat zijn of het minimaliseren van de *maximale vertraging* van de taken die te laat zijn. Via realistische bedrijfsscenario’s wordt aannemelijk gemaakt dat hier geen eenduidige beste keus in is.

Uiteindelijk gaan leerlingen aan de slag met de maximale vertraging, aangeduid met $L_{\max}$ (waarbij de *L* komt van ‘lateness’). In het bovenstaande voorbeeld geldt bijvoorbeeld voor volgorde 123 dat $L_{\max} = 4$, en voor de optimale volgorde 321 geldt $L_{\max} = 3$. Leerlingen worden aan het denken gezet over de hoeveelheid werk om alle mogelijke volgordes door te rekenen, wat bij drie taken vanzelfsprekend prima te doen is, maar bij twintig taken al astronomisch veel tijd zou kosten. Leerlingen

gaan daarom aan de slag met heuristieken, waarbij op een efficiënte wijze een oplossing wordt gevonden die hopelijk (bijna) optimaal is, maar waarvan dat niet gegarandeerd kan worden. Het nadenken over situaties waarin de heuristiek nu juist niet tot de beste oplossing leidt, is hierbij een mooie wiskundige denkactiviteit.

Nadat leerlingen hebben ontdekt dat complete enumeratie al snel ondoenlijk wordt en heuristieken niet altijd tot de perfecte oplossing leiden, komt ‘branch and bound’ om de hoek kijken. Voor een uitgebreide uitleg over deze wiskundige techniek en de inbedding daarvan in de opdracht over scheduling verwijzen we naar [5]. Kort gezegd komt het erop neer dat alle mogelijke oplossingen – dat wil zeggen, alle mogelijke volgordes van de drie taken – in een boomstructuur geplaatst worden, waarbij iedere vertakking meer vastlegt betreffende de volgorde van de taken (zie Figuur 1). Door gebruik te maken van handige ondergrenzen kunnen we de boomstructuur doelgericht doorlopen en (hopelijk) vele takken wegstrepen zonder dat alle oplossingen die erin bevat zijn hoeven te worden doorgerekend. Op die manier kan het aantal mogelijke volgordes waarvan de $L_{\max}$ berekend moet worden vaak drastisch worden beperkt, zonder dat optimale oplossingen over het hoofd worden gezien. Een mooi voorbeeld van een slimme aanpak, waarbij wiskundig denken leidt tot een algoritmische wijze om tot oplossingen te komen, die eenvoudig door de computer kan worden uitgevoerd en waarbij we met zekerheid tot de gewenste oplossing komen.



Figuur 1

geval in het havo/vwo) over een jaar of tien geacht worden hun leerlingen computationeel te prikkelen. Hoewel hiermee de vorm van het wiskundeonderwijs wellicht iets verandert, blijft het onderliggende doel gelijk: leerlingen leren denken. Op dit moment wordt er al op kleine schaal geëxperimenteerd met dergelijk lesmateriaal waarin computational thinking centraal staat.

In zijn afstudeerscriptie voor de opleiding tot eerstegraads docent wiskunde heeft Joris van der Meulen bijvoorbeeld een werkmiddag ontwikkeld voor 5 vwo wiskunde B, waarin het algoritme-ontwerp-paradigma 'branch and bound' uit de doeken wordt gedaan [5]. Op basis van opdrachten omtrent de optimalisatie van scheduling (taakplanning) gingen leerlingen aan de slag met algoritmen, heuristieken en computationele complexiteit – zie het kader op de vorige pagina voor een uitgebreidere toelichting. Zowel de docenten als de leerlingen waren enthousiast over eens een hele andere manier van werken bij wiskunde; niet alleen maar oefenen met het oplossen van concrete problemen, maar ook op een hoger abstractieniveau nadenken over hoe we dat eigenlijk aanpakken en waarom dat efficiënt en/of optimaal is. Activiteiten zoals het laten bear-

gumenteren waarom een reeds gevonden oplossing van een schedulingprobleem onder bepaalde voorwaarden gegarandeerd optimaal is, vragen behoorlijk wat van leerlingen en zijn uitermate geschikt voor het aanleren van een wiskundige houding. Leerlingen bleken dit soort taken, overeenkomstig met onze verwachtingen, lastig te vinden, maar velen zagen er ook het nut van in en werden er enthousiast van.

Het Nationaal Regieorgaan Onderwijsonderzoek (NRO) subsidieert de komende drie jaar praktijkgericht onderzoek naar computational thinking onder de titel 'Computationeel denken en wiskundig denken: digitale geletterdheid in wiskundecurricula' [9]. Vanuit een consortium van de Universiteit Utrecht, de Radboud Universiteit, SLO en een vijftal vo-scholen wordt er onderzocht welke aspecten van computational thinking goed passen bij wiskundig denken en in de bovenbouw van het vwo aan bod zouden kunnen komen. Ook wiskundeleraaropleidingen, zoals die van de Universiteit Twente, dragen bij. Het einddoel is een verzameling van empirisch gevalideerde leeractiviteiten voor zowel wiskunde A als wiskunde B, een aantal instrumenten voor het toetsen van de uitkomst van dergelijke leeractiviteiten en een handleiding voor

docenten om hen te ondersteunen bij het onderwijzen van computational thinking, gekoppeld aan wiskundige denkactiviteiten en alles op basis van functionele inzet van ICT in de leermiddelen.

Concluderend

Computational thinking overkoepelt een grote hoeveelheid aan vaardigheden en denkwijzen die nu al erg belangrijk zijn in de wetenschap en het bedrijfsleven, en die in de toekomst vermoedelijk alleen maar belangrijker worden. Het is wat ons betreft dan ook niet vreemd dat er vanuit verschillende hoeken geprobeerd wordt om hier meer van in het (voortgezet) onderwijs te krijgen. De wiskundeles lijkt, naast de informatica's uiteraard, een uitgelezen plek om leerlingen te prikkelen en verder te krijgen.

Mocht u vanuit uw werkveld interessante ideeën hebben omtrent het inpassen van computational thinking in het wiskundecurriculum, schroom dan niet om contact op te nemen met een van de auteurs. ✉

Dankwoord

De auteurs danken Paul Drijvers, Robbert Fokink en Joris van der Meulen voor het geven van feedback op een eerdere versie van dit artikel.

Referenties

- 1 S. Grover en R. Pea, Computational Thinking in K-12; A Review of the State of the Field, *Educational Researcher* 42(1) (2013), 38–43.
- 2 ISTE/CSTA, Operational definition of computational thinking for K-12 education (2018), <https://cymcdn.com/sites/www.csteachers.org/resource/resmgr/CompThinkingFlyer.pdf>.
- 3 S. Papert, *Mindstorms: Children, Computers, and Powerful Ideas*, Basic Books, 1980.
- 4 M. Timmer, *Efficient Modelling, Generation and Analysis of Markov Automata*, proefschrift, Centre for Telematics and Information Technology (CTIT), Universiteit Twente, 2013.
- 5 M. Timmer en J. Van der Meulen, Computational thinking in vwo 5: Een werkmiddag over 'branch and bound', *Euclides* 94(3) (2018), 14–17.
- 6 J.M. Wing, Computational thinking, *Communications of the ACM* 49(3) (2006), 33–35.
- 7 J.M. Wing, Computational thinking benefits society, *40th Anniversary Blog of Social Issues in Computing*, 2014. Geraadpleegd van <http://socialissues.cs.toronto.edu/2014/01/computational-thinking>.
- 8 J.M. Wing en D. Stanzione, Progress in computational thinking, and expanding the HPC community, *Communications of the ACM* 59(7) (2016), 10–11.
- 9 <https://www.nro.nl/nro-projecten-vinden/?projectid=40.5.18540.130>.

Teun Koetsier

Afdeling Wiskunde
Vrije Universiteit Amsterdam
t.koetsier@vu.nl

Een gesprek met Arjen Sevenster

Wiskundige Arjen Sevenster vertrok na zijn studie voor een aantal jaren naar Japan. Terug in Nederland werd hij acquisiteur wiskunde bij uitgeverij Elsevier. In die functie is hij voor veel wiskundigen en informatici van betekenis geweest. Na zijn pensioen vervulde hij bestuursfuncties bij het Koninklijk Wiskundig Genootschap en bij Stichting Epsilon. Ook op een heel ander vlak was hij actief: inmiddels zijn er van zijn hand twee dichtbundels verschenen. Twee jaar geleden werd Arjen getroffen door een ernstige ziekte die zijn leven en dat van zijn vrouw Lydia drastisch veranderde. Onze redacteur Teun Koetsier legde hem een aantal vragen voor. *Enkele weken na dit interview, op 2 februari, is Arjen Sevenster overleden.*

Kun je eerst iets zeggen over je achtergrond? Uit wat voor milieu kom je?

“Ik ben in 1946 geboren onder het teken van de Tweelingen. Naast aanleg voor wiskunde had ik belangstelling voor talen, resulterend in een doctoraal examen met Japans als bijvak.

Mijn grootvader was boer in Wier, een piepklein dorp op de Friese klei. Mijn vader heeft het grootste deel van zijn werkende leven als wiskundeleraar voor de klas gestaan. Hij was volledig bevoegd met twee aktes, MO-A en MO-B, op zak. Met die laatste akte had hij ook het wiskundig voor hem hoogst haalbare gerealiseerd. Ik moet een jaar of vier geweest zijn, het was vijf december en mijn vader, zoveel begreep ik er wel van, moest iets doen, waar veel van afhing. En hij slaagde! Een zes, en daar was hij meer dan tevreden mee: mooiere Sinterklaasavond hebben wij niet meer meegemaakt.

Onlangs vond ik de schriften terug waarin hij zijn sommen maakte, astrono-

mie, analyse (inclusief oneindige producten!) en algebra, en het viel me meteen op hoeveel meer er in die tijd gerekend werd, vaak met behulp van de logaritmetafel.

Waar mijn vader in Leeuwarden hbs gedaan had, deed ik gymnasium aan het Huygens Lyceum in Voorburg. Voor mijn eindexamen had ik, als eerste in de geschiedenis van de school, vier tienens: een voor natuurkunde en drie voor de wiskundevakken, en niets leek dan ook een studie wiskunde in de weg te staan.”

Waarom ben je wiskunde gaan studeren?

“Ik vond wiskunde leuk om te doen. Met drie tienens voor wiskunde op mijn eindexamen en met een vader die wiskundeleraar was, leek wiskunde de meest voor de hand liggende keuze. Maar er was wel een donderwolkje aan het firmament van mijn plannen. Ik had meegedaan aan de wiskundeolympiade van dat jaar en laag gescoord. Blijkbaar gaf excelleren binnen de perken van de schoolwiskunde geen

garantie voor succes daarbuiten. Die gedachte is zeker door mij heengegaan, maar even snel weer verdrongen.

De studie in Leiden was zo ingericht, dat je doctoraal kon doen zonder ooit met een echt probleem geconfronteerd te worden. Ik herinner mij het tweedejaars college algebra, waar nauwelijks voorbeelden behandeld werden, waar geen werkcollege aan verbonden was en er nooit een opgave over de toonbank kwam. Het tentamen was mondeling en bestond uit het reproduceren van bewijzen van behandelde stellingen, zoals in mijn geval dat van de reciprociteitsstelling van Gauss. Ik haalde prompt een tien en even kon ik mij een getalenteerd wiskundige wanen.

Dat neemt niet weg dat ik met veel plezier gestudeerd heb en genoten heb van de abstracte wiskunde (Kähler-variëteiten, Riemann-oppervlakken, functionaalanalyse), die ons na het kandidaatsexamen als een lopend buffet werd voorgezet. Ik had een aanstelling als studentassistent gekregen en begeleidde met veel plezier een aantal werkcolleges. Het was tijdens een van die werkcolleges dat ik mijn toekomstige vrouw ontmoette. Onze paringsdans werd bepaald door Lydia's begrip of onbegrip van de inhoud van een als Analyse 4 bekendstaand college. Ze deed tentamen en haalde een onvoldoende en dacht niet dat ze ooit meer zou kunnen halen, waarop ik



Arjen Sevenster in het postkantoor in Kyoto, mei 2018

haar bijlessen ging geven. Deze privatisma boekten succes: ze haalde een zes en voor ze uit mijn leven dreigde te verdwijnen waren wij elkaar dicht genoeg genaderd om van een verhouding te kunnen spreken. Uit die verhouding zouden drie kinderen geboren worden, een zoon, een dochter en weer een zoon. Alle drie zouden ze promoveren, maar het wiskundig proefschrift van Bart zou het meest het proefschrift benaderen waar ik in de bibliotheek van de universiteit van Tokyo met zoveel loze ijver aan gewerkt had.”

Hoe kwam je in Japan terecht?

“Na mijn kandidaats vatte ik het idee op om Japans als bijvak te doen. Ik beoefende in die dagen met groot enthousiasme de judosport en was in de ban geraakt van het land van de Rijzende Zon. En zo kon het gebeuren dat ik op een dag het Japano-

logisch Instituut belde om toestemming te vragen voor het volgen van het eerstejaars college Japanse grammatica. De telefoon werd beantwoord door de hoogleraar zelf, professor Frits Vos, die mij uitnodigde om ‘onverwijld’ de benodigde boeken bij Brill te kopen en mij komende vrijdagochtend op het instituut te vervoegen. Gedurende de volgende twee jaar heb ik mij de Japanse grammatica eigen gemaakt (wat niet zo moeilijk is, omdat het Japans een zeer regelmatige taal is met weinig vervoegingen en verbuigingen) plus een paar honderd karakters, wat een omvangrijke klus is.

Mijn laatste tentamen wiskunde deed ik bij professor Murre. Het onderwerp was Riemann-oppervlakken. Ik haalde een hoog cijfer en we bespraken de mogelijkheid om bij hem te promoveren. Omdat er bezuinigd werd, kon hij mij geen aanstelling bieden en zou ik het werk aan mijn proefschrift

moeten combineren met lesgeven aan een middelbare school: er moest brood op de plank komen en het was de enige manier om de dienstplicht te ontlopen.”

Ook voor mijn tentamen Japanse grammatica haalde ik een hoog cijfer en kort na mijn doctoraal sprak Professor Vos mij aan en vroeg of ik wellicht geïnteresseerd was in een Japanse studiebeurs. Is dat niet eerder iets voor studenten Japanologie wierp ik tegen, maar daar wou hij niets van weten. Het was juist een goede zaak als er eens een niet-Japanoloog in Japan ging studeren. Dat ik in Japan geen Japanologisch onderwerp zou bestuderen, maar aan een wiskundig proefschrift zou werken, was geen enkel bezwaar. Ik overlegde met professor Murre, die beloofde mij voor te stellen aan een Japanse collega, een algebraïsch meetkundige, onder wiens hoede ik — eindelijk! — serieus aan de slag zou kunnen.

Restte het probleem van de dienstplicht, dat ik zelf meende op te lossen door een briefje aan defensie te sturen, waarin ik om uitstel vroeg tot na mijn terugkomst uit Japan. Was het geen goede zaak, niet alleen voor mij, maar ook voor het land, als via deze beurs de banden met Japan werden aangehaald? Dat bleek in Den Haag geen indruk te maken en mijn verzoek werd afgewezen. Uiteindelijk is het met hulp van de decaan en zijn vriend kolonel Wessels goed gekomen, maar het was een dubbel-tje op zijn kant.

Ik zei mijn baan als leraar op en op een goede ochtend lag er een envelop met een kaartje enkele reis Tokyo op de deurmat. Nog steeds ben ik trots op dat kaartje en ik mag graag beweren dat reizen met een retourtje op zak geen reizen is, maar toerisme en dat Marco Polo, toen hij uit Italië vertrok, niet wist wanneer de karavaan vertrok die hem vele jaren later terug naar Europa zou brengen. Hoe dat zij, ik voelde mij bevrijd van iedere verplichting. De Japanse regering betaalde mij maandelijks een bedrag dat net genoeg was om te overleven en het bleek al snel dat het gemakkelijk was om in Japan allerlei baantjes te vinden om de beurs aan te vullen. Er was met name veel vraag naar Engelse les, maar ik heb ook, met minimaal succes, geprobeerd Japanners Nederlands te leren en zelfs, toen ik er al wat langer woonde, Latijn.

De eerste paar maanden waren gewijd aan een verplichte cursus Japans aan een

Bloemen in de regen

Zij tekent bloemen in de regen.
Waarom heeft zij geen huis getekend
met ramen, een rood dak en naar
de deur een pad en verder gras

met hier en daar een madelief?
Waarom heeft zij daarboven
geen gouden schijf gehangen
als een zon met gele stralen?

Waarom de ene helft gevuld
met bloemen, die op stelen staan,
de andere met blauwe strepen

van de regen? Wat is er
door haar heen gegaan, terwijl zij
bloemen in de regen schiep?

Bloemen in de regen. Geschreven naar aanleiding van een tekening van de hand van Livia, de oudste kleindochter van Arjen. Het omslagontwerp is weer geïnspireerd door de oorspronkelijke tekening.

universiteit in Osaka, vanwaar het bonte en zeer internationale gezelschap van bursalen uitwaaierte naar de universiteit van hun keuze, de Universiteit van Tokyo in mijn geval. Aldaar werd ik opgevangen door professor Itaka, een leerling van niemand minder dan Kodaira. Ik verdiepte mij in Japanse collegedictaten over de classificatie van complexe variëteiten, maar zonder ook maar enig gevoel van richting te hebben. De Japanse professoren hadden geen flauw idee waar ik mee bezig was en lieten mij aan mijn lot over, wat ik hen niet kwalijk kon nemen, omdat ik eigenlijk best tevreden was met hoe het ging. De waarheid was dat onderzoek in de algebraïsche meetkunde te hoog gegrepen was en dat ik dat niet behoefde toe te geven, zolang niemand vroeg naar mijn vorderingen. Ik hield dit twee jaar vol, tot de Japanse beurs afliep en ik met een zucht van opluchting de wiskunde vaarwel kon zeggen.

Ondertussen waren Lydia, mijn vrouw, en ik volkomen gesetteld in Japan. Zij had een baan gevonden als lerares biologie op een internationale school in Tokyo en wij leidden het aangenome bestaan van buitenlanders in Japan met veel interessante, internationale contacten, lucratieve bijbaantjes en de uitdaging om iedere dag

opnieuw Japan en de Japanners te doorgronden. Maar na vijf jaar besloten wij dat het tijd werd om terug te gaan naar Nederland, de mouwen op te stropen en een solide bestaan op te bouwen, te urgenter, omdat Lydia ondertussen zwanger was van onze oudste.”

Na teruggekeerd te zijn in Nederland werd je acquisiteur voor de wiskunde bij Elsevier. Hoe kwam dat tot stand?

“Terug in Nederland moest er geld verdiend worden. Lydia noch ik hadden werk en dus solliciteerde ik op alles wat los en vast was: studentendecaan in Delft, een functie binnen Philips, waar ik totaal ongeschikt voor was, ‘assistent manager’ bij Mitsubishi in Rotterdam, wat ik een paar maanden gedaan heb en waar ik zo mogelijk nog ongeschikter voor was. Tot Lydia in *Intermediair* een advertentie zag waarin Elsevier een acquisiteur zocht. Vereisten waren een achtergrond in de wiskunde en de bereidheid veel te reizen.

Ik schreef een nette sollicitatiebrief en werd uitgenodigd voor een gesprek. Na afloop liet Einar Fredriksson, mijn toekomstige baas, mij mijn kamer en de omvangrijke files zien. Tegenwerpingen van mijn kant dat ik er nog even over na wou denken, wuifde hij weg: betere baan voor iemand met mijn achtergrond was niet denkbaar. Eindresultaat was dat ik 18 februari 1980 aantrad als acquisiteur wiskunde bij Elsevier, Nederlands grootste wetenschappelijke uitgever. Voor het zover was moest Lydia een gesprek voeren met de baas van Einar, die haar rechtstreeks vroeg of ze zich realiseerde dat ik regelmatig weken op reis zou zijn en of ze dacht dat ze dat aankon.”

Kun je iets zeggen hoe je te werk ging? Elsevier was en is een belangrijke uitgeverij van wetenschappelijk werk. Kun je een idee geven van de omvang van je netwerk en van je totale output in boeken en tijdschriften?

“Moeilijke vragen. Ik ben begin 1980 bij Elsevier begonnen en in de loop van 2006 met pensioen gegaan. Laten we zeggen dat ik 25 jaren actief geweest ben en dat ik gemiddeld 15 boeken per jaar heb uitgegeven, dan komen we op een totaal van zo’n 400 boeken.

Van die 400 boeken zijn er zeker 350 die door de auteurs werden aangeboden aan een van de bestaande series en die door de redacteurs van die series wer-

den afgehandeld. De resterende 50 titels zijn boeken waar ik een gerichte inspanning voor gepleegd heb. Een goed voorbeeld van boeken in deze categorie zijn de boeken over matrix-logica van de hand van August Stern. Het was de vader van August, Mikhael Stern, die op een druilerige dag onaangekondigd mijn kamer op de zevende verdieping binnenstapte, een manuscript uit zijn tas haalde en ter publicatie aanbood met de woorden: ‘Ik ben de zieke zoon van een ziek systeem.’ Mikhael vertelde omstandig hoe hij, werkzaam als seksuoloog in de Sovjet Unie, met het systeem in botsing kwam en uiteindelijk dankzij hulp van onder andere Sartre en Simone de Beauvoir vrij kwam en naar het Westen kon komen. Het was mij van het begin af aan duidelijk dat dit geen boek was voor een bestaande serie en dat ik tegen de regels van het spel in zelf de knoop zou moeten doorhakken.

Daarnaast waren er boeken die hun ontstaan dankten aan actieve acquisitie, veelal handboeken. Het idee, bijvoorbeeld van een *Handbook of Combinatorics* leek mij aantrekkelijk en dus ging ik op zoek naar geschikte redacteurs, die ik vond in Graham, Grötschel en Lovász, die dit grote project tot een doorslaggevend succes maakten. Een van de problemen met handboeken is dat publicatie altijd moet wachten tot het laatste artikel ontvangen is. Dat leidt soms tot vertragingen van maanden en tot verzoeken van punctuele auteurs om



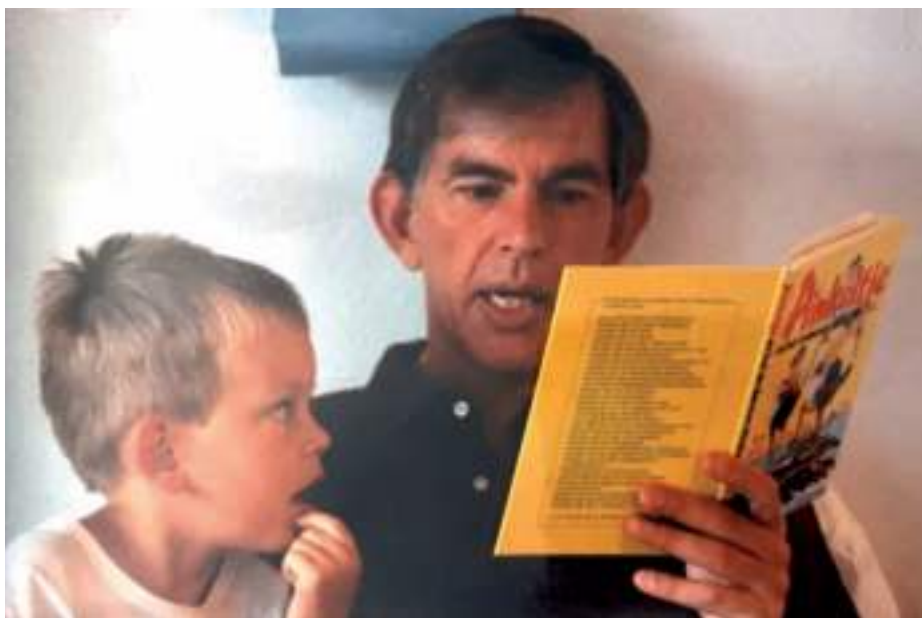
Omslag van *Bloemen in de regen*, ontworpen door Martine Meijer, de schoondochter van Arjen.

in de tussentijd hun artikelen te updaten, met een steeds verder naar de toekomst verschuivende deadline voor het hele boek als gevolg. Een tweede, gerelateerd, probleem is dat auteurs maar al te vaak meer bladzijden nodig blijken te hebben dan ze van de redacteurs gekregen hebben. Zoals een redacteur het uitdrukte: 'With that guy I had a fight over every lemma.'

De tijdschriften zijn een heel ander verhaal. Elsevier is altijd in de eerste plaats tijdschriftenuitgever geweest, al was het maar omdat daar meer geld te verdienen valt. Mijn invloed op mijn tijdschriftenprogramma is veel moeilijker te meten dan die op mijn boeken, maar ik durf wel te zeggen dat ik mijn tijdschriften altijd goed onderhouden heb, onder andere door te investeren in een goede band met de Editors van mijn tijdschriften. Minstens een keer per jaar ging ik bij al mijn redacteurs langs om te bespreken hoe hun tijdschrift er voor stond: of de Editorial Board nog up-to-date was, of er voldoende input was om dit jaar het aangekondigde aantal issues uit te brengen, of we voor het volgende jaar het aantal uit te brengen issues niet konden uitbreiden, enzovoort.

Mijn netwerk was aanzienlijk en bestond, zoals het bovenstaande duidelijk maakt, uit boekenauteurs en tijdschriftredacteurs, die ik op hun instituut ontmoette of op conferenties. Zo ging ik ieder jaar naar de Annual Meeting of the American Mathematical Society, die altijd in januari plaatsvond in steeds wisselende steden in de Verenigde Staten: Baltimore, Chicago, San Francisco, Denver, enzovoort.

Onder mijn redacteurs bevonden zich uitzonderlijke mensen. Ik denk aan Peter Hammer, hoofdredacteur van *Discrete Mathematics* en *Discrete Applied Mathematics*, die ik zeker twee keer per jaar zag: een keer in Princeton, waar hij woonde, en een keer in Nederland. Peter was zwaar gehandicapt. Gedurende de eerste jaren van onze samenwerking liep hij nog met een stok. Zijn actieradius moet toen niet groter dan twintig meter geweest zijn, maar op een dag verscheen hij in een uiterst wendbaar invalidenwagentje, waarmee hij de hele wereld bereisde, steeds vaker in gezelschap van zijn vrouw, tot in de binnenlanden van China toe. Ik heb altijd de grootst mogelijke bewondering gehad voor zijn doorzettingsvermogen en optimisme. Peter reisde toen regelmatig naar China. Ik ben daar slechts een keer geweest en



Arjen leest zijn zoon Bart voor uit *Pinkeltje*

wel om een conferentie bij te wonen. Als geëerde buitenlandse gast werd ik door de organisatie uitgenodigd voor een diner van Pekingeeën. Als afscheidsgeschenk kreeg ik van 'the grand old man' van de Chinese informatica in die dagen, zijn naam is mij ontschoten, een door een vriend geschilderde rolschildering, die nog steeds een deel van het jaar bij ons aan de muur hangt."

Elsevier is een bedrijf en er moet geld worden verdiend. Bij de meeste wiskundigen gaat het niet primair om het geld. Dat zou spanning op kunnen leveren. Hoe kijk jij daar tegenaan?

"Ook een moeilijke vraag, misschien wel een gewetensvraag. Na enige tijd bij Elsevier gewerkt te hebben, werd mij duidelijk dat mijn werkgever verre van universeel geliefd was en dat er veel weerstand tegen het prijsbeleid bestond, zowel waar het de boeken als de tijdschriften betrof. Net als veel van mijn collega's was ik niet blij met de nadruk die het bedrijf op 'shareholders value' legde en de exorbitante beloningen die de top van het bedrijf zichzelf toekende, waarbij ik meteen moet aantekenen dat ik nooit te klagen gehad heb over mijn salaris. Ik gaf mijn beste krachten dus aan een bedrijf dat een reputatie had van arrogantie en winstbejag, maar dat mij persoonlijk wel heel veel vrijheid, een goed salaris, ruimte voor het ontwikkelen van creativiteit en aardige collega's bood. Ik suste mijn geweten door in ge-

sprekken met auteurs of redacteurs nooit onder stoelen of banken te steken dat ik hun kritiek ten volle begreep en tot op zekere hoogte deelde, maar dat ik net zo min invloed had op het prijsbeleid als op het weer. Niet de dapperste beslissing misschien, maar wel een beslissing!

Gedurende de laatste jaren van mijn arbeidzame bestaan binnen Elsevier nam de kritiek steeds grimmiger vormen aan. Steeds vaker dook de benaming 'evil empire' voor Elsevier op en op een gegeven ogenblik trad de hele Editorial Board van *Topology* af, ondanks verwoede pogingen van mijn kant om het tijdschrift te behouden. De onderhandelingsruimte die Elsevier mij gaf was eenvoudigweg te klein om een verzoening tot stand te brengen. Dit heeft mij ontzettend dwars gezeten. *Topology* was veruit het beste tijdschrift in mijn fonds en om dat te verliezen ervoer ik als een amputatie. Kleine troost was dat de redacteurs mij nooit persoonlijk verantwoordelijk gehouden hebben, maar mij na een mislukte onderhandelingsronde altijd uitnodigden voor een lunch in hun 'college'. In die tijd verloren wij meer tijdschriften: *Logic Programming* ging als *Theory and Practice of Logic Programming* over naar Cambridge University Press en werd binnen Elsevier opgevolgd door *The Journal of Logic and Algebraic Programming*. Natuurlijk was het een kleine schare die de strijd met Elsevier aanbond en liet het 'business model' de overgrote meerderheid van de auteurs en de lezers onver-

schillig: zolang Elsevier ervoor zorgde dat hun artikelen eerlijk gereviewed en daarna op professionele wijze in gerenommeerde tijdschriften gepubliceerd werden, waren ze al lang tevreden en hadden wij, als uitgever, geen kind aan deze wetenschapper. Toch hebben deze ontwikkelingen een schaduw over mijn laatste jaren bij Elsevier gelegd, te meer omdat ik natuurlijk beter dan de buitenwacht zag hoeveel Elsevier investeerde in professionalisering en kwaliteitsbewaking van het productieproces en hoe Elsevier zich bijvoorbeeld inspande om in een land als India typesetters te trainen.”

Je hebt (het begin van) de digitale revolutie binnen Elsevier meegemaakt. Zijn er dingen wezenlijk veranderd?

“Ja zeker. Toen ik in de tijd dat het Internet nog in zijn kinderschoenen stond een rondreis langs verschillende Amerikaanse redacteuren maakte, kreeg ik, waar ik ook kwam, het advies om ander werk te gaan zoeken: het Internet zou wetenschappelijke uitgevers overbodig maken. Niets is verder van de waarheid gebleken. De wetenschappelijke uitgevers, Elsevier voorop, hebben kans gezien de slag van uitgeven op papier naar digitaal uitgeven te maken en dat ook nog eens met behoud van winstgevendheid. Ik ben daar nauw bij betrokken geweest en het door mij opgezette *Electronic Notes in Theoretical Computer Science* (ENTCS), hoofdzakelijk gewijd aan de snelle elektronische publicatie van proceedings, floreert nog steeds.”

Wat velen niet weten is dat je een totaal andere kant hebt, je schrijft gedichten, die ook worden gepubliceerd. Onlangs verscheen de bundel ‘Bloemen in de regen’. Wat betekent dat dichten voor je?

“Zoals ik aan het begin van dit gesprek aanduidde is het mij nooit gelukt om in de wiskunde creatief werk te doen. Des te verheugder was ik dan ook toen ik ontdekte dat ik op literair gebied wel creatieve prestaties kon leveren. Als ik probeerde een wiskundig probleem op te lossen dan was het alsof de grote wiskundigen over mijn schouder meekeken en zich vermaakt afvroegen of ik nou werkelijk dacht een bijdrage te kunnen leveren die niet volkomen triviaal was. Maar als ik bezig was met een gedicht dan stonden de grote dichters om mij heen en moedigden mij aan. In de loop van 2014 verscheen bij Inner Peace Publi-

cations in kleine oplage de bundel *Ogenblik* en onlangs heb ik bij de Haarlemse uitgever In de Knipscheer een bundel uitgegeven, getiteld *Bloemen in de Regen*.”

Op dit moment houden dingen als ziekte en de dood je zeer bezig. Wil je daar iets over zeggen?

“Het is niet vaak dat in de kolommen van het *Nieuw Archief voor Wiskunde* over leven en dood gesproken wordt, maar soms is het onvermijdelijk. Bij mij werd zo’n twee jaar geleden een agressieve vorm van prostaatkanker vastgesteld en dat betekent, dat ik nu onder ogen moet zien, dat zo niet mijn weken dan toch wel mijn maanden geteld zijn. Ooit had een Birmese waarzegster mij voorspeld dat ik in goede gezondheid 80 zou worden en omdat een aantal van haar andere voorspellingen redelijk leek uit te komen, was die 80 jaar

een eigen leven gaan leiden. Het loopt allemaal heel anders en ik mag al blij zijn als ik aanstaande juni mijn 73ste verjaardag in huiselijke kring kan vieren.

Mijn ziekte heeft mijn leven op zijn kop gezet. Wat belangrijk leek is opeens onbelangrijk en omgekeerd. We kregen hulp aangeboden door vrienden en kennissen in de vorm van kommen soep, hulp bij het vervoer van en naar het ziekenhuis, een stoel die afgestemd is op mijn pijnlijke benen en nog veel meer. Dit alles was en is voor Lydia en mij een bron van steun en ontroering. ’s Ochtends komt de thuiszorg mij wassen en ook voor deze mensen niets dan lof. Zij vervullen een nederige taak met veel liefde, geduld en inzet en wie gezond is realiseert zich niet eens hun bestaan. Er blijkt naast de wereld der wiskunde een wereld te zijn van zorg en dienstbaarheid.”

Vaarwel

Voor Kiekie

Je belde op
om me vaarwel te zeggen.

Ik heb maar half begrepen,
wat je zei: iets over ziekte,
die niet meer zou genezen.

Nog even en je zou er niet meer zijn.
Het laatste afscheid en de laatste pijn,
de laatste regel kwam in zicht:

de moeilijkste, zoals je zei,
van elk gedicht.

Vaarwel. “Geschreven naar aanleiding van een telefoontje van Kiekie, oftewel Vasalis, waarin ze vertelde dat er alvleesklierkanker was vastgesteld. Wij kenden elkaar een aantal jaren, gedurende welke Lydia en ik zo nu en dan de reis naar het oude huis aan de Woldzoom in Roden ondernamen. We begonnen met koffie, gevolgd door een lunch met een warme hap. Het was tijdens de afwas dat ze mij zei: ‘Je bent een dichter, Arjen.’ Tot dichter geslagen door Vasalis met een vochtige theedoek in de handen!”

Daan Mulder

mulderdaan@live.nl

Het keerpunt van Sible Schöne

Je moet het samen doen



Het is buiten eigenlijk te warm voor een winterjas, merk ik als ik op een donderdagmiddag begin december door Utrecht wandel. Elf graden is het om precies te zijn. Daarmee is het meer dan zes graden warmer dan het de afgelopen eeuw gemiddeld op deze decemberdag was. Dat dat niet alleen toeval is, hoef je geen twee keer uit te leggen aan Sible Schöne (1952), naar wie ik onderweg ben. Hij is net twee weken met pensioen, maar werkt nog steeds bij het klimaatbureau HIER. Hij heeft dat eigenhandig opgezet en is twaalf jaar lang directeur geweest. Op hun kantoor in een statig oud schoolgebouw in het centrum van Utrecht vertelt hij over zijn studietijd — Schöne studeerde wiskunde aan de Radboud Universiteit Nijmegen — en over de energie- en klimaatvraagstukken die hem zijn leven lang hebben beziggehouden.

“Waar ik nu mee bezig ben? Ik ben sinds twee weken met pensioen en nog wat dingen over aan het dragen. Ik heb hier een organisatie opgezet die zich bezighoudt met de vraag hoe we kunnen zorgen dat burgers en bedrijven meedoen met de aanpak van het klimaatprobleem. We kijken naar dingen samen doen, bijvoorbeeld met je burens in de wijk, zoals bewoners die zelf met duurzame energie aan de gang willen. Er werken hier veel jonge mensen, de een-na-oudste die echt inhoudelijk in het onderwerp zit is veertig. Dus ja, ik heb zoveel ervaring op het hele terrein dat iedereen het leuk vond als ik als adviseur blijf voor twee dagen in de week.”

Heb je een beetje vertrouwen in de nieuwe generatie?

“Ja, zonder meer eigenlijk. Tegelijkertijd vind ik de millennials superindividualistisch in vergelijking met mijn generatie. Dat zie ik in die generatie daaronder weer wat veranderen. Ik noem dat nu omdat ik klimaatverandering wel eens vergelijk met roken. Zo van: we weten allemaal dat we er wat aan moeten doen, maar feitelijk aanpassen is ontzettend moeilijk. En bij het roken zie je dan dat het over het algemeen pas werkt als je dat met elkaar doet. Dat zie ik ook met klimaatverandering. Zowel mondiaal, landen met elkaar, als Nederland, alle delen van de samen-

leving moeten een duidelijke inspanning leveren. Het is heel vervelend als iedereen wat doet en de luchtvaart niet.

Ook al richten wij ons meer op het praktische niveau, je hebt ook ander beleid nodig. Ik heb hiervoor twaalf jaar bij het Wereld Natuur Fonds gezeten, als hoofd van het klimaatprogramma. We waren toen ook al met heel praktische dingen bezig: groene stroom in de markt zetten, superzuinige woningbouw realiseren. Maar we waren ook veel aan

het onderhandelen, over het Kyoto-protocol bijvoorbeeld. We werkten met een internationaal team, dat was heel leuk. Twee weken geleden is dat hele team bij mij langs geweest, om mijn pensioen te vieren. Twintig jaar na Kyoto, twaalf jaar nadat ik bij het WNF ben gestopt, en nog steeds is het een super hecht gezelschap.”

Waarom ben je wiskunde gaan studeren?

“Omdat ik het gewoon goed kon, dat was heel simpel. Eenmaal op de universiteit zat ik vrij snel in een wat ander verhaal. Ik heb, schrik niet, de eerste twee jaar van mijn studie alles bij elkaar drie maanden op het wiskundeinstituut geslapen tijdens studentenbezettingen. Dat was in 1973/74.

De eerste keer was die bezetting begonnen omdat we vonden dat het vak wetenschapsfilosofie gewoon achterlijk werd gegeven. Dat was alleen maar van die ouderwetse natuurfilosofie. Op een gegeven moment werd een docent aangenomen die helemaal in de ouderwetse leer zat, van falsificeren en dat soort dingen. Toen hebben we gezegd: er moet aandacht komen voor de maatschappelijke aspecten van de natuurwetenschappen. Het werd natuurlijk in ontzettend links jargon gebracht, maar de basisgedachte was: wat voor factoren bepalen nu eigenlijk dat we bepaalde keuzes maken in de natuurwetenschappen? Je hebt bijvoorbeeld veel wetenschap die ontwikkeld is in het kader van allerlei militair onderzoek, en heeft dat dan invloed op de wetenschap?

De tweede keer was veel banaler. Als wiskundestudent kreeg je al meteen te horen in het eerste college: kijk naar je linker buurman, kijk naar je rechter buurman, twee van de drie zijn er niet meer volgend jaar. En dat gebeurde ook echt, met als dieptepunt dat ergens na een ten-



Sible Schöne

tamen het gemiddelde een 2,1 was, met de mededeling dat alle negatieve resultaten naar 0 waren afgerond. Toen hebben wij gezegd: weet je wat, het ligt niet aan ons, het ligt aan jullie. Toen hebben we besloten het onderwijs te boycotten. ‘Geef ons het dictaat maar, dan zoeken we het zelf wel uit.’ Dat ging prima. Ik was eigenlijk dat hele instituut uit het oog verloren, ik kwam er alleen om tentamens te maken. Ik ben er later nog wel eens terug geweest en heb met die ouwe proffen gepraat. Vriendelijke mensen natuurlijk. Dat heb je allemaal niet door als je gaat bezetten, dan denk je: dat is een idioot. Het was ook idioot dat van de 150 studenten er 100 een 0 krijgen op een tentamen, terwijl die hard geleerd hadden. In die tijd zei je dan gewoon: oprotten jullie!

In Utrecht ontstond er een vak Geschiedenis en Maatschappelijke Functie van de Wiskunde. Daar stond een half jaar voor, maar daar hebben we wel anderhalf jaar over gedaan omdat we allerlei dingen verder uitzochten. Ik heb nog onderzoek gedaan naar de geschiedenis van de statistiek, hoe zich dat heeft ontwikkeld. Hoe dan vanuit praktische vragen in eerste instantie allerlei praktische hulpmiddelen ontstaan om statistische vragen te beantwoorden, en hoe daar dan later een meer axiomatische opzet rond ontstond. In de wiskundestudie zag je die praktische kant überhaupt niet meer terug, alleen maar hoe je à la Euclides vanuit een stel axioma's een aantal stellingen kan afleiden. Dat is dan kansrekening en statistiek.

In de hele discussie over wetenschap, techniek en samenleving was er gewoon duidelijk maar één onderwerp het allerbelangrijkst: de kernenergiediscussie. Je had wetenschappers en technici, die zeiden: dit is de oplossing. En de samenleving zei: ‘Ho, willen we dit wel?’ ‘Hoezo willen we dat wel, hebben jullie daar dan verstand van als samenleving?’ Dus die discussie kwam op en daar heb ik me volledig op gestort. Nou ja, niet helemaal. Ik heb ook nog drie jaar college wiskunde gegeven voor antropologiestudenten die een briefje wiskunde moesten halen.

Tot de jaren zeventig kreeg je gewoon Euclides en basisalgebra op de middelbare school, en ineens veranderde dat allemaal in verzamelingenleer. Daar snapte

echt helemaal geen hond wat van. Nou ja, of je snapte dat allemaal, of je snapte er niks van. Dat was op die manier een perfect selectievak, maar wat had je er verder aan? Toen is het Freudenthal Instituut opgericht, en dat zei: we moeten eigenlijk terug naar praktische vraagstukken die je dan kan oplossen door te abstraheren. Bij die cursus voor antropologen had ik een stuk of zes op elkaar gestapelde blokjes gezaagd van verschillende grootte, en die op volgorde van grootte opgestapeld. Je hebt dan drie plekken, en de stapel ligt op de ene en moet blokje voor blokje naar de andere verplaatst worden, maar je mag nooit een grotere op een kleinere leggen. Als je daar twintig minuten mee bezig bent, dan ga je het patroon zien in hoeveel stapjes je nodig hebt. Als je geluk hebt heb je er dan iemand tussen zitten die daar iets mee kan. Ik was veel meer bezig met het proces van abstraheren, hoe ontwikkel je die taal. Dat vond ik erg leuk. Maar op een gegeven moment deden ze dan te weinig aan sommetjes en ging dat weer mis.

Ik gaf ook college over het cijfer 0. Ik las laatst weereen boek, ik interesseerde me daar nog steeds voor, dat heet *De Herscheping van de Wereld*, van Floris Cohen. Dat gaat over het ontstaan van de natuurwetenschap. Ik vind dat hij dat prachtig doet, maar hij onderschat één ding. De taal van de natuurwetenschap is de algebra, veel meer dan de meetkunde. Hij positioneert de moderne natuurwetenschap als iets uit de Griekse traditie. Dan denk ik van nou: die Grieken zijn juist vastgelopen omdat ze de 0 niet hadden, en juist dankzij de combinatie van de Arabische algebra met wat die Grieken bedacht hadden, kon de natuurwetenschap ontstaan. Ik ben altijd al geïnteresseerd geweest in hoe die maatschappelijke dingen lopen, maar het was ook duidelijk: ik had niks met de universiteit. Ook het lesgeven interesseerde me eigenlijk niet. Ik vind het wel leuk, maar ik dacht: zo'n antikernenergiebeweging, dat is de echte wereld.

Tijdens die kernenergiediscussie ben ik bij Milieudefensie gaan werken, als hoofd van de afdeling Energie. Maar in 1986 had je die ramp in Tsjernobyl, toen was het wel klaar met die kernenergiediscussie. Net een jaar daarvoor kwam Charles Keeling met zijn grafiek. De klimaatdiscussie

was begonnen in de jaren vijftig. De enige manier om te weten of de mens echt het klimaat beïnvloedt, is door te meten of de samenstelling van de atmosfeer ook echt verandert. Keeling is dat van 1958 tot 1985 gewoon gaan meten, en met de resultaten is hij naar buiten gekomen. Daar kwam overduidelijk uit dat de concentratie CO₂ in de atmosfeer toenam.

Charles Keeling heeft er in zijn een-tje voor gezorgd, door gewoon 27 jaar te gaan meten, dat de hele wereld het klimaatprobleem serieus is gaan nemen. Dat is toch een schitterend voorbeeld van hoe belangrijk meten is en hoe belangrijk pure natuurwetenschap is. Dat zie je nu ook weer bij Groenland en Antarctica. Doordat ze aan het meten zijn, is de hele discussie over zeespiegelstijging aan het veranderen. Een halve meter in deze eeuw kon wel eens drie meter worden en het kon wel eens zo zijn dat in de volgende eeuw West-Nederland in zee verdwijnt. Dat is nu een heel reëel scenario. Bij een huidige concentratie CO₂ hoort, als je het met miljoenen jaren terug vergelijkt, ook een veel hogere zeespiegel. Dat hele onderwerp wetenschap, techniek, maatschappij, dat vind ik leuk om me mee bezig te houden, op een heel praktische manier.”

Word je daar niet somber van?

“We zijn het niet aan het winnen, nee. Dat is overduidelijk. Maar goed, we zeggen hier altijd: je moet het een paar keer per jaar binnen laten komen, wat er echt aan de hand is. Maar als je een beetje leuk werk wil hebben, dan ben je vooral bezig met de oplossingen. Als je de hele dag denkt: jesus, het is te weinig en te laat, dan kun je net zo goed ophouden. Je moet een combinatie kiezen van het soms over de ernst hebben, en dan weer met de oplossingen aan de gang gaan. En dan kom ik terug bij het begin: je moet het samen doen. Je moet het gevoel hebben: ik ben hier aan het werk, en in de Verenigde Staten zijn ze daar aan het werk, en in China zijn ze daar aan het werk. Vandaar dat ik blijf denken: dit is zinnig. En je doet ook gewoon waar je goed in bent, en waar je plezier in hebt.”

Goede suggesties voor een Nederlandse wiskundige met een keerpunt in zijn of haar carrière zijn welkom via keerpunt@nieuwarchief.nl.

In de verdediging

| In defence

Pas gepromoveerden brengen hun werk onder de aandacht. Heeft u tips voor deze rubriek of bent u zelf pas gepromoveerd? Laat het weten aan onze redacteur.

Redacteur: Nicolaos Starreveld
FNWI, Universiteit van Amsterdam
Postbus 94214
1090 GE Amsterdam
verdediging@nieuwarchief.nl



Networks with communities and clustering Clara Stegehuis

Op 31 januari 2019 promoveerde Clara Stegehuis cum laude aan de Technische Universiteit Eindhoven bij prof.dr. Remco van der Hofstad en prof.dr. Johan van Leeuwen. De titel van haar proefschrift is *Networks with communities and clustering*. Naast haar onderzoek geeft Clara regelmatig lezingen over de wiskunde voor een algemene publiek en voor middelbare scholieren. Vorig jaar won Clara de KWG-prijs voor promovendi voor de beste onderzoekspresentatie!

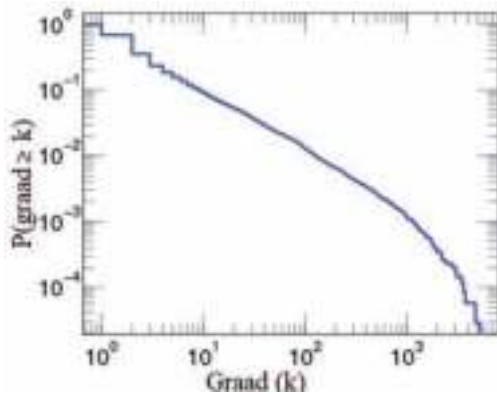
Netwerken zijn overal. Je kunt bijvoorbeeld denken aan sociale netwerken, het internet of je brein. Ondanks dat dit heel verschillende voorbeelden zijn, lijken de verbindingspatronen van deze netwerken vaak veel op elkaar. Veel netwerken hebben bijvoorbeeld een duidelijke groepsstructuur. Groepsleden zijn dan sterk met elkaar verbonden, maar verbindingen tussen verschillende groepen zijn schaars. Een andere eigenschap die vaak wordt waargenomen in netwerken is dat twee burens van een knoop waarschijnlijk ook aan elkaar verbonden zijn. Denk bijvoorbeeld aan sociale netwerken, er is een grote kans dat twee van je vrienden ook elkaar goed kennen!

Random grafen

Netwerken worden vaak gemodelleerd met zogenaamde random grafen. Random grafen zijn mathematische modellen die grote netwerken genereren, vervolgens worden die gebruikt als nulmodellen om echte netwerken te bestuderen. In zo'n model is de structuur van de graaf niet deterministisch, maar stochastisch. Het eenvoudigste voorbeeld is de zogenoemde Erdős–Rényi-graaf, waarin twee knopen zijn verbonden met kans p . Dit model werd geïntroduceerd in 1959 door wiskundigen Paul Erdős en Alfréd Rényi. Het ER-model wordt tegenwoordig niet zo vaak meer gebruikt in de praktijk, voornamelijk omdat de netwerken die het genereert te eenvoudig zijn ter vergelijking met echte complexe netwerken. Dit kunnen we aan de hand van het volgende voorbeeld zien: neem een graaf met een verzameling knopen V en stel dat twee knopen verbonden aan elkaar zijn met kans p . Stel dat $S, T \subset V$. Dan heb je in zo'n graaf tussen S en T gemiddeld $p|S||T|$ verbindingen, en dit is alleen afhankelijk van de grootte van S en T . Dus in een ER-random graaf verwachten we geen lokale structuren te zien, bijvoorbeeld groepen! In tegenstelling tot echte complexe netwerken waar we vaak ingewikkelde lokale structuren tegenkomen!

Schaalvrije netwerkmodellen

Veel complexe netwerken bevatten *hubs*, dit zijn knopen die significant meer burens hebben dan de andere knopen in het netwerk. Een typisch voorbeeld zijn sociale netwerken. In een sociaal netwerk zijn er vaak mensen die centraal staan, dat wil zeggen dat ze veel



Figuur 1 Log-loggrafiek van de graadverdeling.

meer mensen kennen dan gemiddeld. In een graaf definiëren we de graad van een knoop als het aantal buuren van die knoop. In Figuur 1 zetten we het aantal knopen met graad ten minste k uit tegen k , in een graaf die hubs bevat. De grafiek is getekend op een log-log-schaal. Er is een klein aantal knopen met duizenden buuren terwijl de meeste knopen maar weinig buuren hebben.

In de complexe netwerktheorie zegt men dat de graadverdeling een zware staart heeft! Dit wordt wiskundig bestudeerd met het gebruik van grafenmodellen met een machtsverband als verdeling. In dit geval, als p_k het aantal knopen met graad k voorstelt, dan geldt

$$p_k \approx Ck^{-\tau}$$

met $C > 0$ constant en τ de graad-exponent. De kans dat een knoop graad minstens k heeft schaalst dan als $k^{1-\tau}$. In een log-log-grafiek krijgen we dan ongeveer een rechte lijn, zoals in Figuur 1!

Netwerkstructuren

Een van de kerndoelen van Clara's onderzoek was de structuur van random grafen te bestuderen en te begrijpen. Bovendien wilde Clara ook bekijken of de verschillende netwerkeigenschappen en structuren die men in echte netwerken waarneemt terugkomen in die random grafenmodellen.

Een belangrijk deel van haar onderzoek gaat over netwerken met een groepsstructuur. Traditionele random grafenmodellen creëren echter netwerken die geen groepsstructuren bevatten. Clara heeft daarom een nieuw random grafenmodel geïntroduceerd, het Hiërarchische configuratie model (HCM), die deze groepsstructuren wel meeneemt. Door analyses van dit nieuwe model te vergelijken met traditionele random grafen zonder groepsstructuren onderzocht ze de invloed van groepsstructuren op hoe iets zich over een netwerk verspreidt. Denk aan virussen, nieuws of roddels bijvoorbeeld!

Clara's analyse en haar resultaten blazen nieuwe ideeën in de complexe netwerktheorie! Tot nu toe werd gedacht dat groepsstructuren weliswaar zorgen voor makkelijkere verspreiding binnen de groep, maar leiden tot bottlenecks voor de verspreiding over het gehele netwerk. Uit haar werk blijkt nu dat dit niet altijd het geval is. Het kan twee kanten op: sommige groepsstructuren maken het makkelijker voor een proces om zich over het netwerk te verspreiden, terwijl andere vormen van groepsstructuren het juist moeilijker maken!

Groepen zoeken in Parijs

De invloed van groepsstructuren op hoe iets zich over een netwerk verspreidt is niet het enige dat we willen weten. We zouden voor

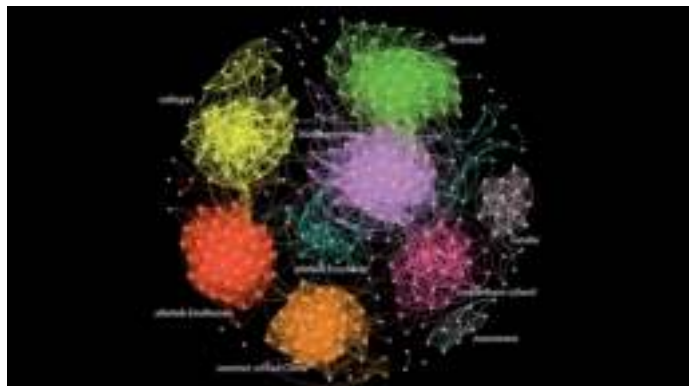
dit soort netwerken graag ook in één keer willen weten waar de groepen zich bevinden! Dit probleem wordt in de wiskunde *community detection* genoemd. Dit blijkt een erg moeilijk probleem te zijn. Er zijn namelijk ontzettend veel verschillende manieren om een netwerk op te delen in groepen. Een netwerk van twintig punten kun je bijvoorbeeld al op honderd miljard verschillende manieren in groepen opdelen! Tijdens haar promotietraject is Clara voor vier maanden naar Parijs gegaan om te werken aan dit probleem. Ze onderzocht hoe nauwkeurig een specifiek *community detection*-algoritme is in het stochastische blockmodel met twee groepen.

Kleine subgrafen

Naast groepsstructuren onderzocht ze ook kleine subgrafen van netwerken. De driehoek komt in echte netwerken vaak voor, bijvoorbeeld doordat op social media twee van je vrienden vaak ook met elkaar bevriend zijn. Ze onderzocht de aanwezigheid van driehoeken en andere subgrafen in verschillende random grafenmodellen. Bovendien was het van belang in haar onderzoek om te weten waar in het netwerk deze subgrafen het meest voorkomen. Clara vond ook dat subgrafen vaak een 'optimale structuur' hebben. Driehoeken zijn in veel random grafenmodellen van grootte n vaak te vinden op punten met graad ongeveer $\sqrt{n}$. Andere subgrafen komen juist voor op punten met andere graden. Voor iedere subgraaf kunnen we classificeren wat de meest voorkomende structuur van deze subgraaf in het grotere netwerk is.

Faces of Science

Faces of Science is een online-plek waar bezoekers aan de hand van filmpjes, blogs en artikelen over onderzoek een kijkje in de wereld van de onderzoeker krijgen. Doel is promovendi uit verschillende vakgebieden in de schijnwerpers te zetten en vooral aan jongeren die voor een studiekeuze staan, te laten zien wat het leven als wetenschapper inhoudt. Faces of Science is een project van de KNAW, De Jonge Akademie en NEMO Kennislink. Clara is ook een van de Faces of Science. Hierbij hoort ook dat ze regelmatig gastlessen geeft voor middelbare scholieren over leuke toepassingen van wiskunde, of lezingen of theatervoorstellingen voor een algemeen publiek hield. Met bloggen voor Faces of Science probeert Clara aan een algemeen publiek te laten zien dat er "superveel leuke toepassingen zijn van wiskunde". Verspreidingsprocessen over netwerken hebben bijvoorbeeld belangrijke toepassingen, zoals het viral gaan van memes of de verspreiding van een griepvirus. Maar op haar blog zijn nog veel meer leuke toepassingen van netwerken te vinden, van wapenhandel tot muesli tot Sinterklaas.



Figuur 2 Sociaal netwerk, we zien de verschillende groepen.

Jan van Maanen

Freudenthal Instituut
Universiteit Utrecht
j.a.vanmaanen@uu.nl

Biografie Julius Wolff (1882–1945), deel 2

Geen humoristisch optimisme meer

Een wiskundige die van groot belang was voor de Utrechtse universiteit in het interbellum maar binnen de universiteit en onder historici weinig aandacht heeft gekregen, is Julius Wolff. Jan van Maanen heeft nu een studie van het leven en werk van Wolff gemaakt, waarvan dit het tweede deel is. Het eerste deel verscheen in het juninummer van vorig jaar.

De inval van de Duitsers op 10 mei 1940 grijpt het gezin Wolff direct heftig aan.¹ Louis Wolff, de oudste zoon, is dan in Groningen, waar hij een assistentschap heeft bij de Joodse hoogleraar en specialist cardiologie L. Polak Daniëls. Louis, die zelf hartklachten heeft, staat op het punt om artsexamen te doen. Als hij van de Duitse inval hoort, vertrekt hij halsoverkop met de motor naar Amsterdam. Wanneer hij precies vertrekt en welke route hij volgt, blijft onduidelijk. De tocht wordt hem noodlottig, zijn hart verdraagt de spanning en inspanning niet. Louis overlijdt op 12 mei 1940 in Amsterdam. Jules Wolff, die lid is van de *Senatus Contractus*, het dagelijks bestuur van de Utrechtse universiteit, dat in de eerste oorlogsdagen elke dag vergadert, is pas op 17 mei weer aanwezig. De rector condoleert hem namens de Senaat met het verlies dat hem “in zijn familie dezer dagen heeft getroffen”.²

Wolff werkt door, onder meer aan de promotie van Jan van Kuik op 3 juni 1940. Op 30 september schrijft zijn zoon Ernst zich in Utrecht in als student wis- en natuurkunde, nadat hij vanaf 1938 in Delft had gestudeerd. Op 23 november 1940



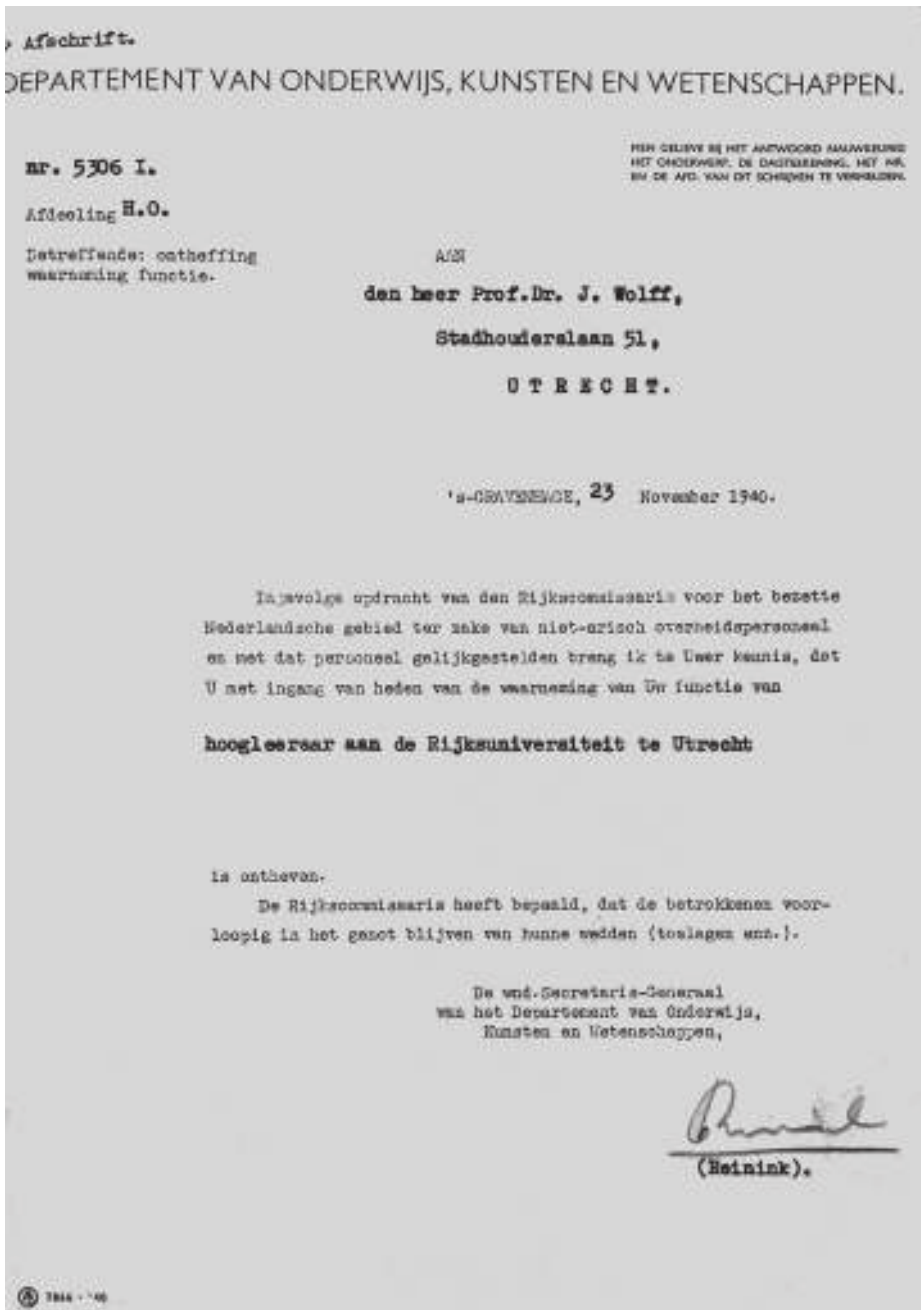
Ongedateerd portret van Wolff

ontheffen de universiteiten onder dwang de Joodse hoogleraren van hun functie, hetgeen het Departement van Onderwijs, Kunsten en Wetenschappen in een voorgedrukte brief aan Wolff laat weten. Op 21 februari 1941 wordt de ontheffing omgezet in ontslag. Het “voorloopig in het genot blijven van hunne wedden” komt daarna neer

op een korting in twee stappen tot 70%.³ Bij de Haagse verzekeraar OLVEH gebeurt hetzelfde. Wolff wordt 11 juni 1940 voor het laatst als wiskundig adviseur vermeld. Ook het *Nieuw Archief voor Wiskunde*, dat in 1938 nieuwe redactieleden had aangetrokken, onder wie Wolff en David van Dantzig, vermeldt hun namen in het volgende deel, van 1943, niet meer. Het tijdschrift *Mathematica B* en de KNAW blijven tot in 1942 bijdragen van Wolff opnemen. Want na zijn ontslag blijft Wolff intensief publiceren. Bij de KNAW is het Van der Corput die tot aan de zitting van 30 mei 1942 bijdragen van Wolff blijft inbrengen. Zelf werd Wolff in 1938 en 1939 voorgedragen voor het lidmaatschap van de Akademie, maar in 1939 werd de Delftse toegepast wiskundige C. B. Biezeno benoemd.

Vanaf 1939 heeft Wolff intensief contact met zijn Duitse collega Otto Blumenthal (1876–1944). Blumenthal, in 1898 in Göttingen de eerste promovendus van Hilbert, werd in 1905 hoogleraar aan de TH Aken en in 1906 redactielid van de *Mathematische Annalen*. In 1933 werd hij in Aken onder druk van nationaal-socialistische studenten ontslagen en in juli 1939 emigreerden zijn vrouw Mali en hij naar Nederland. In zijn dagboek vanaf nieuwjaar 1939 [5] doet Blumenthal in detail verslag van zijn leven.

Wolff was op het Utrechtse station toen de Blumenthals uit Aken aankwamen.⁴



Afschrift van de voorgedrukte ontslagbrief

Wolff introduceert Blumenthal vanaf september 1940 in de Utrechtse wiskundige kringen. Hij neemt hem mee naar de Wiskundige Leeskamer en Blumenthal woont colleges van Barrau en Wolff bij. Blumenthal noteert 11 november 1940: “’s Ochtends in het college bij Wolff, die zeer indringend en eenvoudig onderwijst en veel door de studenten (steeds dezelfde) laat uitwerken.” Na het ontslag van Wolff, twee weken later, besluiten Wolff en Blumenthal om samen elke week een colloquium te houden. Vanaf 16 december 1940 houden ze thuis voordrachten voor elkaar, waarbij

ze over eigen onderzoek en over recente publicaties spreken. Op 8 december 1941 vieren ze met sigaren dat het colloquium in het eerste jaar slechts vijf keer is uitgevallen.

Niets is meer vanzelfsprekend. De Wiskundige Leeszaal wordt eind oktober 1941 verboden terrein. Blumenthal noteert: “Dat treft mij zeer.” Wolff had zich in oktober zeer gestoord aan het feit dat zijn zoon Ernst uit de leeszaal verwijderd was en dat “de Wisk. Leeszaal misbruikt wordt voor alles behalve Wiskunde”. De universiteitsbibliothecaris wijst hem 31 oktober 1941

op de ‘bekendmaking’ dat de bibliotheek voor Joden verboden is. Dit is ook “op het gebouw der Studiezalen van toepassing”, schrijft hij. Alle afstanden binnen Utrecht moeten te voet worden afgelegd en woonruimte wordt soms op zeer korte termijn gevorderd. Dat treft de Blumenthals bij herhaling. Ook het gezin Wolff “muss aus seinem Haus”, zoals Blumenthal 16 mei 1942 schrijft. Van 10 juni tot 17 augustus 1942 kunnen ze inwonen in de Prof. Wentlaan 17, in de wijk Tuindorp, destijds gemeente Maartensdijk. Het colloquium is moeilijk gaande te houden, zeker als mevrouw Wolff in juli 1942 in het Ooglijdersgasthuis aan glaucoom geopereerd wordt. De operatie mislukt. Op 3 augustus 1942 schrijft Blumenthal: “’s Middags eindelijk weer colloquium, maar onbevredigend, bijna uitsluitend zitten praten.” Een week later valt het weer uit, omdat Wolff opnieuw op zoek moet naar woonruimte. Die vindt het gezin in een rusthuis, Maliesingel 36, maar niet voor lang. Maandag 19 oktober 1942 vindt ’s middags het laatste colloquium plaats. Twee dagen later vertrekt Wolff “met zijn hele rusthuis, dat in beslag genomen is, naar Amsterdam. Hij draagt nog een keer mooi voor. Het eind van het colloquium raakt me zeer, ook al kon ik er de laatste weken niets meer voor doen. Wolff naar huis begeleid, daar M[ali Blumenthal] getroffen, die bij Mevr. Wolff was.” Zo beschrijft Blumenthal het einde van zijn samenwerking met Wolff. De colloquiumvoordrachten hebben in 1942 een gemeenschappelijk overzichtsartikel over het isoperimetrisch probleem opgeleverd.

Uit Blumenthals dagboek blijkt dat Wolff in het colloquium sprak over de angulaire afgeleide, geometrische optica, het lemma van Fatou, convergentie van de rij $\sum \frac{A_k}{z - a_k}$, gamma-functies, conforme afbeeldingen, de stelling van Fatou-Riesz over randwaarden, meervoudige integratie, integratie van begrensde rijen van functies volgens Osgood, een verbetering van een stelling van Denjoy, het principe van Phragmén-Lindelöf, univalentie op de rand van een gebied, uitbreiding van een gegeven vlakkenbundel tot een drievoudig orthogonale bundel, werk van Jacqueline Ferrand, het bereik van Taylorpolynomen op de convergentiekring, benadering van de afgeleide op de rand van een gebied, inwendige grensverzamelingen, de rotaties van een kreeftenpoot, een meetkundige stelling van Ahlfors, het bewijs van

Ahlfors voor een stelling van Cartan en 12 oktober 1942 in het voorlaatste colloquium over een ‘idiote’ stelling van Ahlfors. De onderwerpen waarover Blumenthal sprak of waarvan niet duidelijk is wie de spreker was, zijn hier niet vermeld. Dat Wolff en Blumenthal met zulke schaarse middelen zo’n breedte en opbrengst wisten te bereiken is indrukwekkend.

In de zomer van 1942 heeft Wolff ook contact met de latere Utrechtse hoogleraar A.F. Monna, die hem eind maart 1942 per brief enkele vragen had voorgelegd.⁵ Monna’s vragen betroffen een door hem voorgestelde uitbreiding van een stelling over het probleem van Dirichlet en conforme afbeeldingen op het rechter halfvlak. In zijn antwoord, 30 maart 1942, verruimt Wolff de condities voor de uitbreiding en geeft hij een schets van het bewijs. In het tweede deel van de brief noteert Wolff recente stellingen van zijn hand, onder meer verschenen in de *Comptes Rendus* van 1940 en 1941. Nog te verschijnen stukken in de *Comptes Rendus* waren, zo had Wolff begrepen, “uitgesteld om redenen van niet-wetenschappelijke aard”. Enkele stellingen daaruit had hij daarom eind 1941 in de *Proceedings* van de Amsterdamse Akademie laten verschijnen (Wolff, 1941e). Hij schrijft de stellingen en bewijzen voor Monna uit omdat hij van de betreffende publicaties geen overdrukjes meer heeft. In zijn volgende brief corrigeert Wolff zichzelf. Ten onrechte zag hij Monna’s idee over een uitbreiding van het rechter halfvlak als bijzonder geval van een algemene stelling. Hij neemt dat terug, wenst Monna “succes met Uw verder onderzoek” en zet de samenvatting van zijn artikel in de *Comptes Rendus* van 1941 voort. Het slot van de brief gaat over iteratie van gebieden, een onderwerp waarmee Wolff in 1926 begonnen was en dat vanaf 1929 door Carathéodory verder was uitgewerkt. Op 19 mei⁶ volgt een briefkaart van Wolff. Hij vraagt om geduld in verband met de voorbereidingen voor een plotselinge verhuizing. Maar hij gaat wel in, zo goed en kwaad als hij kan, op Monna’s vragen over het artikel (Wolff, 1941e). Op een los papiertje, zo schrijft hij, heeft hij een van de stellingen uit het artikel gevonden. Ook is hij naar Barrau geweest om daar zijn eigen overdrukken in te zien. Stelling VI uit Wolff (1941e) is intussen door Jacqueline Ferrand in Parijs gegeneraliseerd, schrijft hij. De slotalinea is sprekend voor Wolff:

“Gezien Uw aardige uitbreidingen zou ik U aanraden, ze ergens te publiceeren. Zodra de haastige en onaangename verhuisdrukte voorbij is, zal ik U mijn bewijs van Mlle Ferrand’s uitbreiding sturen.

Met beleefde groeten, J Wolff”

Op 20 mei draagt Wolff het huis aan de Stadhouderslaan 51 over aan de Duitse Wehrmacht. Drie dagen daarna al stuurt hij zijn bewijs van de stelling van Ferrand, een precies stukje complexe analyse. Zoals steeds pakt hij het gewone leven zo snel mogelijk weer op. Ook na de volgende verhuizingen blijft hij dat doen.

Na Wolffs verhuizing naar Amsterdam wisselen Wolff en Blumenthal nog enkele kaarten en brieven. Op 9 december 1942 laat Wolff weten dat het hem in Amsterdam goed gaat. Otto en Mali Blumenthal gaan op 22 april 1943 “Ab nach Vught” (de laatste woorden in het dagboek) en in mei 1943 door naar Westerbork,⁷ waar Mali Blumenthal 21 mei overlijdt. Otto Blumenthal wordt in januari 1944 naar Theresiënstadt gedeporteerd en overlijdt daar 13 november 1944.

In Amsterdam wonen Jules, Betsie en Ernst Wolff op het adres Cliostraat 37ⁱⁱ, bij het gezin van Sally Gersons, een jongere broer van Wolffs echtgenote. Dochter Lenie was intussen ondergedoken. Vanaf de Cliostraat informeert Wolff op 27 januari 1943 bij Freudenthal of die de volgende stelling kent⁸:

“Er bestaat geen enkelvoudig gebied, waarvan de grens alleen uit primenden van de 2e soort (=primenden met 1 bereikbaar en minstens 1 onbereikbaar punt) bestaat.”

Scherper:

“Bevat de grens uitsluitend primenden van de 1e en 2e soort (1e soort = primenden die uit slechts 1 punt bestaan), dan heeft de verzameling der primenden van de eerste soort de continue machtheid.”

Precies deze stellingen worden in 1944 bewezen in het gemeenschappelijke artikel van Wolff met Tatiana van Aardenne-Ehrenfest, het laatste artikel van Wolff.

Wolff in contact met Van Vuuren

De verslechtering in de jaren 1942 en 1943 worden weerspiegeld in de briefwisseling van Wolff met de Utrechtse Rector Magnificus, sociaal-geograaf prof.dr. Louis van

Vuuren (1873–1951). In de zomer van 1942 beseft Wolff hoe ernstig de situatie is en hij zet alle middelen in om een beschermde status te krijgen, zodat zijn gezin en hijzelf niet voor ‘werkverruiming’ naar Duitsland of Polen zouden hoeven. Wolff, die dan al met zijn vrouw inwoont in Tuindorp, benadert 27 juli 1942 eerst Barrau. Hij wil met hulp van Barrau zijn onafgebroken wetenschappelijke arbeid vanaf november 1940 documenteren. Zijn publicaties vanaf 1940 tonen dat aan, maar zijn overdrukken liggen in de opslag:

“Ik kom nu met het volgende verzoek: Leen mij (je krijgt ze terug) de afdrukjes vanaf 1940 (begint ongeveer met een C.R. [*Comptes Rendus*] noot getiteld zo iets als ‘itération d’une représentation conforme’, daarna Ak. verhandelingen [in de KNAW *Proceedings*] en een paar afdrukjes uit *Mathematica*. Totaal circa 12 afdrukjes.

Kun je, als Voorzitter van de Faculteit, een verklaring bijvoegen dat ik sedert mijn ontheffing gestadig wetensch. arbeid verricht, met een groot aantal wetenschappelijke verhandelingen als resultaat (in de diss. van Mlle Ferrand van 12 Juni ’42 word ik op vele bladzijden prijzend geciteerd), dan zal mij dat zeer welkom zijn. Bij het minste bezwaar echter laat je dat achterwege.

Er is wel veel haast bij: uit Utrecht zijn al verscheidene joodsche jongelui en gezinshoofden naar de ‘werkverruiming’ getransporteerd. Wel te verstaan: deze keuring geldt uitsluitend Joden.

Misschien kun je ook van Vuuren inlichten: de bezettingsoverheid heeft verklaard, dat de ontslagen joden verder met rust zouden worden gelaten.

Voor je moeite mijn dank bij voorbaat. Vale en houd moed.

Beste groeten van gezin tot gezin,
t.t. J. Wolff.”

[t.t.: *totus tuus*, geheel de Uwe]

Eén dag later al stelt Barrau de gevraagde verklaring op, eindigend met:

“Het zou voor de mathematische wetenschap van het grootste belang zijn, indien kon worden toegestaan, dat gezegde Dr. J. WOLFF zich ongestoord aan zijn hooge wetenschappelijke bezigheden bleef wijden.

De Hoogleraar
J.A. Barrau”

Op 2 augustus 1942 schrijft Wolff rechtstreeks aan Van Vuuren, de eerste brief uit een uitgebreide correspondentie. Wolff hoopt dat Van Vuuren iets voor Ernst kan doen. Deze heeft wel enig houvast (een taak bij de Joodse Raad, vergunning om bij de universiteit ingeschreven te blijven, een doktersattest over zijn astma), maar dat lijkt Wolff onvoldoende. Hij schrijft dat hij de Joodse Raad verzocht heeft om Ernst enkele uren onderwijs te laten geven aan het Joods Lyceum. En mocht Ernst toch opgeroepen worden, dan wil collega-hoogleraar, medicus C.D. de Langen, hem in de kliniek opnemen. Wolff benadrukt hoe dringend de situatie is: “Wèl te verstaan, het gaat over transporteren naar Polen. (...) Ik verneem dat morgen (Maandag) de oproepingen beginnen.”

Van Vuuren antwoordt de dag erop dat hij de zaak al met Barrau besproken had. Barrau zal Wolff schrijven en de gevraagde verklaring voor Ernst afgeven.

“Ik geloof niet dat er gevaar dreigt. Uit de brief van Barrau zal je blijken waarom ik dat niet geloof. Niettemin voeg ik hierbij een verklaring voor je zoon die ik hierbij insluit met een enveloppe aan zijn adres, zodat je die dadelijk na lezing kunt posten. Ik doe dat zoo omdat ook de lezing van deze verklaring je eenige geruststelling kan geven, naar ik hoop.

Met hartelijke groeten, ook aan Mevrouw Wolff”

Meteen bedankt Wolff de rector met brief tussen hoop en vrees:

“Amice,
Grote dank voor je bemoeiingen, waardoor Ernst twee sterke wapens in handen heeft gekregen, die waarschijnlijk, op zichzelf beschouwd, hem al vrij maken; en waardoor mijn vrouw en ik heel wat zijn opgelucht, ook moreel gesterkt doordat wij telkens weer de

bekräftiging zien van wat wij al wisten, namelijk wie onze vrienden zijn. Wil onze sentimentaliteit verontschuldigen. Verdrukten worden sentimenteel als ze hulp zien, ze gaan te gronde als ze die niet zien; het eerstgenoemde onafhankelijk van het effect der hulp. We zijn in oorlog, dus sneuvelen is mogelijk.”

Wolff heeft vertrouwen in de Joodse Raad, die hij dag en nacht bezig ziet met goed werk. Dan volgt opeens de zin:

“Inmiddels schijnt de ‘manoeuvre’ in Utrecht 14 dagen uitgesteld te zijn.”

En weer terug naar de Joodse Raad. Wolff vindt het verstandig dat Ernst werkt voor de Joodse Raad, want

“uitstekende afleiding en van groot voordeel, daar de overheid er bijzonder op let, wie bij den J. Raad is (ik ben er ook bij, als docent, als houder van wisk. voordrachten, als lid der Subcommissie Ernst Cohen, Roos, Wolff, Dresden).

Het beste wensen wij voor je vrouw en jezelf.

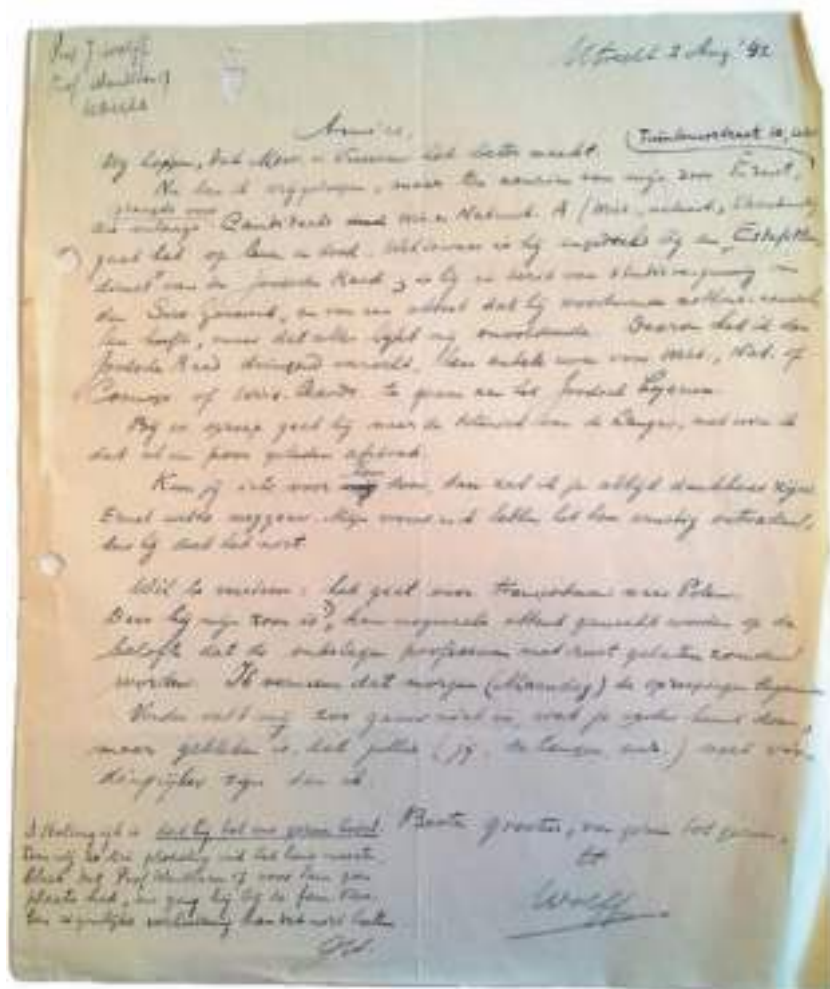
Hartelijke groeten,
t.t.
J Wolff”

Deze ‘Subcommissie’ van de Joodse Raad werkt aan de oprichting van een opleidingsinstituut voor Middelbare Akten met Joodse docenten en alleen voor Joodse studenten.⁹ Regierungsrat Rombach waarschuwt de initiatiefnemers op 20 mei 1942:

“dass das von ihnen zu gründende Institut nur fuer juedische und nicht fuer arische Schueler in Frage komme und dass es bekanntlich verboten sei, dass juedische Lehrer arische Schueler unterrichten.”

Voor wiskunde zijn Freudenthal, Wolff en David van Dantzig de beoogde docenten. Wolff ontleent aan deze onderneming van de Joodse Raad een officiële positie, die hem althans enige tijd houvast geeft. Het onderwijs lijkt echter niet van start te zijn gegaan.

De ongunstige ontwikkelingen volgen elkaar snel op. Op 15 augustus 1942, nog geen twee weken na zijn vorige brief, laat Wolff aan Van Vuuren weten dat hij volgens de Joodse Raad op 20 augustus naar Amsterdam ‘geëvacueerd’ zal worden. Intussen is ook het huis aan de Prof. Wentlaan door de bezetter in be-



Brief van J. Wolff aan L. van Vuuren, 2 augustus 1942

slag genomen en hebben zijn vrouw en hij woonruimte toegewezen gekregen in het “Rusthuis van dokter M.A. de Jong, Maliesingel 36, Utr.”. Wolff benadrukt dat ze hierdoor van Maartensdijk, waar toe Tuindorp op dat moment behoorde, terugverhuisd zijn naar Utrecht. “We zijn dus sedert dien datum te Utrecht, en niet te Maartensdijk. Dat maakt groot verschil, omdat joden uit Utrecht nog niet ge-evacueerd worden.” Verder bespreekt hij welke instanties van de bezetter Van Vuuren zou kunnen benaderen om een goed woord voor hem te doen, en over welke schriftelijke verklaringen hij beschikt die zijn verzoek om bescherming ondersteunen. Twee dagen later stuurt hij Van Vuuren die genoemde verklaringen: een overzicht van zijn loopbaan in het onderwijs, een overzicht van de woonsituatie, een verklaring van oogarts Prof. Weve over de gespecialiseerde zorg die Mevrouw Wolff nodig heeft, een attest van huisarts Koster, een verklaring van de Centrale Commissie voor het Joodse Onderwijs over Wolffs werkzaamheden en een verslag van de bespreking over de MO-cursussen van 19 juni 1942.

Dit alles en het verlies van zoon Louis in mei 1940 is volgens Wolff voldoende straf. “Moet nu deportatie er nog bij? Bovendien heeft indertijd de bezettende overheid den Rector Magn. meegedeeld, dat de in Maart '40 [hij bedoelt 1941] ontslagen joodse hoogleraren verder met rust zouden worden gelaten.” Verder verklaart Wolff zelf dat hij ‘apolitisch’ is en altijd was. “[Ik] zou geen tijd hebben voor andere dan wiskundige overpeinzingen. 13 werken zijn van mijn hand verschenen sedert 1940.” Wolff zegt te hopen dat Van Vuuren zijn vindingrijkheid wil inzetten. Van Vuuren heeft de bijlagen bewaard.

Een kleine week later is de dreiging voelbaar. De voor 20 augustus aangekondigde evacuatie naar Amsterdam is niet doorgestaan, zo schrijft Wolff 21 augustus. Wel werd het rusthuis doorzocht:

“In den nacht van Dinsdag op Woensdag, om half 4, werd ons rusthuis doorzocht, de persoonsbewijzen gecontroleerd, en werd dokter de Jong meegenomen. Hij is naar de Gestapo in A/dam overgebracht.”¹⁰

2 hollandsche en 1 duitse politie-man vormden de visite. Een hollander kwam voor ons bed, rookende een si-

gaar, controleerde onze persoonsbewijzen en vertrok.

Met Ernst is nog steeds niets aan de hand.

Hartelijke groeten v.h.t.h.

tt

Wolff”

[v.h.t.h.: van huis tot huis]

Diezelfde dag volgt er een ‘Tweede bulletin van heden’. Wolff heeft gehoord dat zijn vrouw en hij niet op de evacuatielijst staan. Dat kan komen door de actie van Van Vuuren, schrijft hij, maar ook door de verhuizing van Maartensdijk naar Utrecht, die wellicht “het raderwerk der bureaucratie, wat mijn geval betreft, totaal in de war heeft gestuurd. Zoo laten.” Hij beseft wel dat tegen personen die de oproep negeren een arrestatiebevel uitgevaardigd wordt. “Mijnnetwegen!” laat hij erop volgen. En hij heeft gehoord dat de evacuatie uitgaat van de Wehrmacht. In dat geval heeft de plaatselijke commandant iets te zeggen. Van Vuuren heeft in deze periode zowel bij de Nederlandse autoriteiten in Den Haag als bij de Duitse bezetter voor Wolff gepleit, zoals zal blijken.

Twee dagen later, 23 augustus 1942, een nieuw ‘communiqué’. Wolff heeft met de heer Sarphati van de Joodse Raad in Amsterdam gesproken, die eerder had geadviseerd om af te wachten. Sarphati handhaafde het advies en voegde toe:

“over eenige maanden zullen wij een lijst moeten indienen van hen, die op 20 Aug. uit Maartensdijk naar Amsterdam hebben moeten gaan. Er is dan kans, dat ik dan weer in het strijdperk moet treden.

Daarom is het raadzaam dat ik inmiddels word vrijgesteld... tenzij dat reeds het geval is...

Zoo niet, dan heb ik er een mooi wapen vandaag bijgekregen: een legitimatie als ‘leeraar bij den Joodschen Raad voor A/dam’. Ik zal er foto-copieën van laten maken en er je een sturen. Inderdaad hecht de bezettende overheid groote waarde aan de werkzaamheden voor de J.R.

Het doet me groot genoeg, dat mijn bevinding bij den heer Sarphati volkomen overeenstemt met je telefonische mededeeling van gisterenavond.

Beste groeten,

tt

J Wolff”

De volgende brief aan Van Vuuren (4 september 1942) betreft Ernst, die gekeurd moet worden voor ‘werkverruiming’. Wolff vraagt of Van Vuuren stappen kan doen om te zorgen dat Ernst afgekeurd wordt en geeft daartoe een aantal argumenten, die Ernst ook in een eigen verzoekschrift naar voren zal brengen.

De razzia's die in heel Nederland vanaf 2 oktober 1942 enkele dagen lang plaatsvonden, doen Wolff direct op 3 oktober 1942 opnieuw schrijven, beginnend met een verwijzing naar het lied ‘Wij leven vrij, wij leven blij’:

“Amice,

op den geheelen dierb'ren grond van Nederland hebben vannacht arrestaties van Joden plaats gehad. Om 11:30 werd een dame uit ons asyl Maiesingel 36 weggehaald: haar man zit in Westerbork. Daar is ze vannacht ook heen gebracht. [onderaan toegevoegd: Haar gemmer ging me door merg en been. Ik ben er nog kapot van.] Vrijwel alle Joden van Drente zijn vannacht ge-arresteerd, evenzo Arnhem, Elden [tegenwoordig Arnhem-Zuid], enz. De J. Raad deelde mij veel faits accompis mee.

Nu zijn er toch wel collega's, bijv. van Loon, Siccama, Westra (met wie ik zeer amicaal was, ook met Roels was ik amicaal)¹¹ die ons (mijn vrouw, Ernst en mij) kunnen beschermen, door bij de Duitschers, die ze kennen, een ‘goed woord’ te doen?

[achter een accolade over 6 regels:] Ook zou het nuttig zijn te telegrafeeren aan de Zentralstelle für Jüdische Auswanderung, Adama van Scheltemaplein 1, Amsterdam met verzoek, mij telegrafisch te berichten dat op mijn legitimatiebewijs als functionaris van den Joodschen Raad een stempel komt voor ‘polizeilichen Schutz’ (velen hebben er al een).”

Hierna herhaalt Wolff het overzicht van de gebeurtenissen, te beginnen bij de dood op 12 mei 1940 van Louis. En hij beschrijft de zeer slechte conditie, ook psychisch, van zijn vrouw en vraagt:

“Kun je enkele collega's, als voren bedoeld, snel mobiliseren, dan bij voorbaat mijn dank, die groot is, zooals je weet. Er is natuurlijk geen tijd voor schriftelijk (anders dan telegrafisch of telefonisch) werken, want vannacht her-

haalt zich het spel op den ganschen nederlandschen dierb're grond.

Ernst is in het Stads- en Ak. Ziekenhuis (bronchitis). Ik vernam bij den J. Raad dat ze ook uit de ziekenhuizen patiënten oppikken.

Het spijt me zeer dat ik geen fraaier bulletin kan geven.

Met hartelijke groeten v.h.t.h. en beste wenschen voor je vrouw en jezelf

tt.

J Wolff"

Dat Van Vuuren in actie gekomen is, blijkt uit de eerstvolgende brief van Wolff, van 14 oktober 1942:

"Waarde van Vuuren,

Hartelijk bedankt voor alles wat je in mijn belang gedaan hebt, waarbij ik vooral denk aan de onaangename bezoeken die je hebt afgelegd.

Verleden week vertelde Weve aan mijn vrouw, dat ik op de 'Rückstelliste' sta, evenals Jordan. Maar gisteren zei Barrau, dat je het alleen maar vermoedde. Dat is dus twijfelachtig. Bovendien: zonder bewijsstuk ga ik naar Polen, tenzij mijn persoonsbewijs een stempel bevat met 'bis auf weiteres freigestellt von Arbeitseinsatz', wat niet is.

De Rückstelliste, die juist voor mensen als ik dient, wordt behandeld door Mr. de Waard, Departement van Binnenlandsche Zaken. Zou je de goedheid willen hebben, dat Dept. op te bellen, en te vragen of ik op die lijst sta, en of mijn gezin (Mevr. Betsy Wolff-Gersons geb. 12/6/79, ik 18/4/82, en Ernst 19/10/19) daar ook profijt van heeft?

Voor het geval ik er niet opsta, zou het mij aangenaam zijn, als je mij voor die lijst wilt aanbevelen (met mijn gezin).

Op je aanraden heb ik zo'n stempel 'bis auf weiteres freigestellt von Arbeitsdienst' bij Mr. de Haas weer aangevraagd. Daar zal wel nul uitkomen, want 10 dagen geleden had ik er hem al over gesproken zonder resultaat. Maar terstond daarna had ik mij gewend tot Prof. D. Cohen, Voorz. Joodsche Raad A/dam. Blijkens diens schrijven van gisteren schijnt hoop te bestaan.

't Is een rare tijd: er wordt met mensenlevens gejongleerd: Polen is de dood.

Ik ben niet eens met het gisteren door Barrau voorgedragen standpunt 'een nieuwe actie is vruchteloos', en vecht

liever door, hetgeen me tot heden goed bevallen is, bijv. Ernst en ik zitten nog niet in Polen.

Kun je iets bereiken of doen bereiken wat betreft die Rückstelliste, dan mijn grooten dank bij voorbaat.

Beterschap aan je vrouw door ons allen toegewenscht!

Hartelijke groeten

Julius Wolff & gezin

Mr. Murman¹² behandelt de Rückstelliste ook. Maar de Rector Magn. heeft natuurlijk meer invloed."

Wolff heeft de brief zo over het papier verdeeld dat hij op de onderste helft zijn dertien publicaties sinds 1940 kan noteren. Bovenaan de voorzijde heeft hij geschreven: "De lijst der publicatiën kan worden afgescheurd." Dat laatste heeft Van Vuuren niet gedaan; de lijst is nog net met de brief verbonden.

Wolff bedankt Van Vuuren in bovenstaande brief onder meer voor de afgelegde 'onaangename bezoeken'. Een daarvan was aan prof.dr. O.C.H. Nieschulz (1899–1980), die een voor Van Vuuren ongemakkelijke dubbelrol vervulde. Enerzijds was Otto Nieschulz in 1942 onder druk van de bezetter in Utrecht buitengewoon hoogleraar veterinaire parasitologie geworden, anderzijds was hij als nazi-Duitsler lid van de NSDAP en had hij daar de functie van Kreisinspektor. Hoe Van Vuuren de zaak van Wolff bepleit heeft valt niet na te gaan, in elk geval ontvangt hij een schriftelijke afwijzing (gedateerd 7 oktober 1942) van de vertegenwoordiger van de Rijkscommissaris in

de provincie Utrecht, Bruno Müller-Reinert. De brief begint:

"Der Kreisinspekteur Prof. Dr. O. Nieschulz hat sich auf Ihre Bitte hin an mich gewandt, bezüglich Befreiung des Oben genannten [d.w.z. Wolff] von der Deportation."

De twee slotzinnen zijn voldoende om de schreeuwende Nazi-propaganda te karakteriseren. Broeyer [2, pp. 121–122] bespreekt de brief in detail.

"Wenn der Jude Prof. Wolff keinen Stempel in seinem Ausweis erhalten hat, dann hat das bestimmt seine Gründe. Ich bitte Sie einzusehen, dass in dieser Zeit, wo täglich deutsche Männer, darunter auch Niederländer, in diesem jüdischen Krieg ihr Leben hingeben müssen, kein Jude ein Recht darauf hat, persönlich von den allgemeinen Massnahmen verschont zu werden.

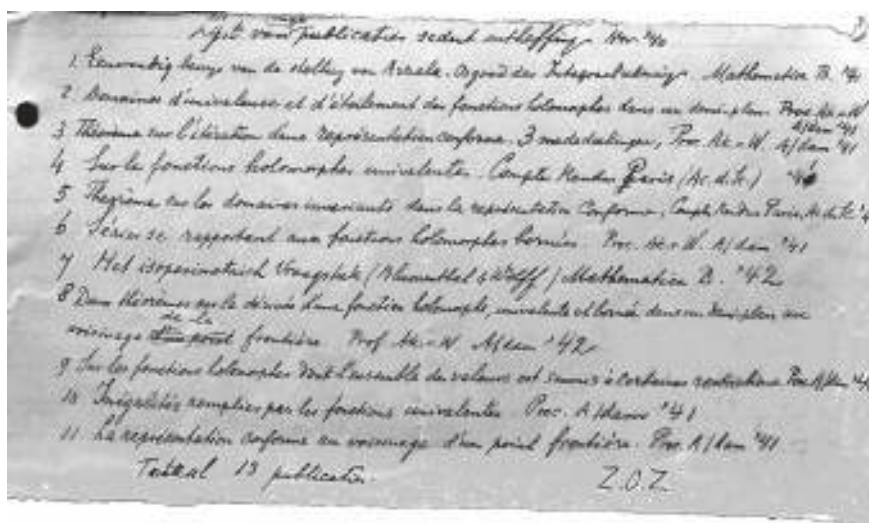
I.V.

Müller-Reinert"

[I.V.: In Vertretung, d.w.z. in opdracht van Seyss-Inquart]

Op zondag 18 oktober 1942 laat Wolff aan Van Vuuren weten dat hij de woensdag erna met alle bewoners van Maliesingel 36 naar Amsterdam zal vertrekken. Hij vraagt opnieuw dringend hulp om op de Rückstelliste te komen, zal hier advocaat Murman over benaderen en geeft de namen door van Nederlandse ambtenaren die hierover gaan:

"Nader verneem ik dat de Secretaris-Generaal van het Dept. van Binnenland-



Publicaties 1940–1942; afscheurbaar lijstje in brief aan L. van Vuuren, 14 oktober 1942

sche Zaken, Mr. Dr. Frederiks, met Mr. de Waard en Mr. Kan daarover beslissen, en dat collega Ernst Cohen een verklaring heeft dat hij op de Rückstell-liste staat.

Daar mijn werk in binnen- en buitenland zeer gewaardeerd wordt, kom ik m.i. ook in aanmerking.

Verneem ik niets, dan zal ik mijzelf met een verzoekschrift tot dien Secretaris-Generaal wenden.

Maar de Rector Magnificus heeft meer gewicht dan ik.

Opm. het aantal joodsche professoren in Nederland is vrijwel nul; dus het aantal is geen bezwaar.

Met hartelijke groeten,
beterschap met je vrouw,

t.t.
J Wolff”

In zijn eerste brief uit Amsterdam, 26 december 1942 vanuit Cliostraat 37ⁱⁱ, deelt Wolff mee dat hij van advocaat Murman heeft begrepen dat Mr. Frederiks geen vrijstelling van tewerkstelling in het buitenland meer kan verlenen. Hij stuurt Murmans brief mee. Uit de correspondentie van Van Vuuren blijkt dat hij zelf meteen op 10 oktober 1942 bij Frederiks voor Wolff heeft gepleit. De reactie van Frederiks (4 december 1942) is identiek aan de reactie die advocaat Murman aan Wolff door gaf. Van Vuuren wist het standpunt van Frederiks ruim twee weken eerder dan Murman, maar waarschijnlijk had hij nog geen adres van Wolff in Amsterdam. Daarnaast had hij door de ernstige ziekte van zijn vrouw grote zorgen thuis.

Frederiks was niet het laatste houvast, zoals blijkt uit het vervolg van Wolffs brief:

“Op 23/12/42 verzocht ik Prof. v. Dam, Secr. Gen. van Opvoeding, Wet. en Cultuurbesch. mij op de door hem beheerde lijst (vrijstelling van opzending naar werkkamp; analoog met lijst Frederiks, die voor mij misliep door te laat verzoek, zie inliggende brief [van Murman]) te plaatsen. Tegelijk verzocht ik Mr. Frederiks mijn dossier naar Prof. van Dam te zenden.

Daar ik het wel heel erg vind, dat ze mij nog onbeschermd laten rondlopen, zou ik het op prijs stellen als de Universiteit van Utrecht in dezen iets kon doen, bijv. een vlelend woord tot Prof. van Dam richten; nóg beter: er heen gaan ter snellere afdoening.

Uitgespeeld kan worden o.a., dat ik op 28 maart 1942 25 jaar het land als hoogleraar gediend heb en vanaf Sept. 1906 het land als wiskunde-docent diende.

Bij voorbaat dank en hartelijke groeten, mede van mijn vrouw, die wederom hier een oogoperatie onderging (Zeeman) met nog niet te beoordelen gevolg. Vale

J Wolff”

Van Vuuren reageert 5 januari 1943:

“Amice

De vele beslommingen, die het Universitaire leven bedreigen en bedreigen, gevoegd bij de zware ziekte van mijn vrouw, voor wie ik geen hoop meer zie,¹³ verhinderden mij nog naar den Haag te gaan voor de bespreking met van Dam van je geval. Ik moet nu in ieder geval den 8 Januari a.s. in den Haag zijn, alwaar ik ontboden ben en zal dan trachten een en ander te bespreken.

m.vr.gr. voor U beiden”

Het verloop van het contact tussen Van Vuuren en Van Dam is in de correspondentie niet na te gaan maar Wolffs brief van 15 januari 1943 aan Van Vuuren duidt op diens invloed. Wolff schrijft dat hij van Van Dam twee brieven heeft gehad, gedateerd op 13 januari 1943, een Nederlands- en een Duitstalige, waarin staat dat de “General-Kommissar zur besonderen Verwendung” zijn aangelegenheid welwillend overweegt. Wolff dankt Van Vuuren voor de moeite die hij voor hem gedaan heeft en die reeds succes heeft. De brief eindigt met: “De rest komt vanzelf.” Het lijkt goed te gaan, want op 8 februari 1943 deelt Wolff mee dat hij zijn nummer op de Van Dam-lijst heeft ontvangen, en dat zijn vrouw daarmee “automatisch geschützt” is. Dat geldt nog niet voor Ernst en daarom heeft hij Van Dam gevraagd om een nummer op de lijst voor Ernst. Zijn artikelen krijgt hij blijkbaar niet meer in Nederland gepubliceerd: “Ik stuur mijn artikelen tegenwoordig naar de *Commentarii Math. Helv.*” (zie het publicatie-overzicht). Hij eindigt met “veel dank voor je bemoeiingen voor mij.”

Maar het tij keert. Ernst schrijft 8 maart 1943 aan Van Vuuren:

“Hooggeleerde Heer,
Hierbij deel ik U mede, dat mijn ouders op het ogenblik gevangen worden gehouden in de Zentralstelle für Jüdische

Auswanderung, Adema van Scheltemaplein 1, Amsterdam Z.

Omtrent de oorzaak van de arrestatie tast ik vrijwel in het duister. Misschien kunt U zich met de autoriteiten in verbinding stellen om de invrijheidstelling van mijn ouders te bevorderen.

U kunt mij telefonisch bereiken 's middags van 2–2.30 op nummer 28296.

U bij voorbaat dankend voor de te nemen moeite, teken ik met de meeste hoogachting,

Ernst Wolff [handtekening en naam]”

Van Vuuren heeft een dag later een afspraak in Den Haag om de zaak van fysioloog H.J. Jordan te bepleiten. 's Ochtends voor zijn vertrek naar Den Haag leest hij de brief van Ernst en neemt de zaak van Wolff op in de notitie die hij Van Dam zal overhandigen. De notitie begint met een verzuchting:

“HoogGeachte Heer van Dam,
Weinig had ik kunnen vermoeden dat ik U reeds zo spoedig weer moest lastig vallen. Er zijn twee gevallen die ik in Uwe aandacht meen te moeten aanbevelen al weet ik dat het U wel evenals mij zal gaan, nl. dat het wel eens TE veel kan worden, wat men in deze dagen van ons vergt en vooral op geen enkele logische grondslag verwachten kan.”

Dan volgt het pleidooi voor Jordan, waarna hij vervolgt:

“Il. Hedenmorgen kreeg ik een brief van Ernst Wolff den begaafden zoon van Prof. Dr. J. Wolff, die al zo gelukkig was dat hij beschermd werd, zoowel door zijn functie bij den Jodenraad in Utrecht, als door de lijst waarop hij door U geplaatst was, en die nu met zijn vrouw wordt vastgehouden in de Zentralstelle für Jüdische Auswanderung, Adema van Scheltemaplein 1, Amsterdam Z. Mevrouw Wolff lijdt zeer ernstig aan een gevaarlijke oogziekte (glaucoom) waarvoor zij hier reeds door Weve geopereerd werd, helaas zonder veel succes en is psychisch zeer overspannen. Ik vrees van deze arrestatie inderdaad ZEER ernstige gevolgen zal hebben. Moge gij de kracht en de weg kunnen vinden iets voor deze beide ongelukkige mensen te doen. Ik zeide het zooeven, onze machteloosheid dreigt de spanningen voor ons zelf haast te

groot te doen worden! Ik weet echter dat gij niets zult nalaten wat hier hulpe bieden kan.

Met de verzekering mijner gevoelens van Hoogachting en Onderscheiding

De rector magnificus

L. van Vuuren [handtekening]"

Wolff en echtgenote worden 11 maart 1943 in Westerbork ingeschreven, waar ze in barak 65 verblijven. Ernst geeft de nieuwe situatie op 16 maart 1943 aan Van Vuuren door. Het stelt hem gerust dat dit geen strafbarak is. Er wordt van alle kanten geprobeerd om zijn ouders weer uit Westerbork vrij te krijgen, maar "men is wel algemeen van meening, dat er nog wel eenige tijd overheen zal gaan, eer het zover is." Hij besluit met de vraag "Is U soms iets bekend omtrent eventuele activiteit van Prof. van Dam? Ik heb nog niets van hem gehoord."

Van Vuuren antwoordt per omgaande (17 maart 1943). Ik heb de zaak direct aan Van Dam in handen gegeven, schrijft hij. Die heeft toegezegd zo spoedig mogelijk maatregelen te zullen nemen. Dan volgt er een opmerkelijke zin:

"Hij gaf mij alleen zijn verbazing te kennen, dat je Vader niet naar Barneveld had willen gaan. Laten we hopen, dat Van Dam toch iets bereiken kan."

Heeft Wolff gedacht dat de bescherming van de Van Dam-lijst zo ver ging dat zijn vrouw en hij niet uit Amsterdam hoefden te vertrekken, ook niet naar Barneveld, en zijn ze daarom naar Westerbork overgebracht? En Ernst Wolff zelf? Hij wordt 31 maart 1943, twee weken na zijn brief aan Van Vuuren, naar Barneveld overgebracht. De dag ervoor had Ernst per brief aan secretaris-generaal Frederiks om uitstel gevraagd van zijn vertrek naar Barneveld. Hij wilde eerst zijn moeder bezoeken, die tijdelijk in het Groningse Academisch Ziekenhuis aan haar oog behandeld werd. Maar later die dag liet hij Frederiks per telegram weten: "Ben besloten morgen naar Barneveld te gaan. Verzoeken brief ongeschreven te beschouwen. Ernst Wolff."

Van 11 maart tot 18 mei 1943 verblijven Jules en Betsie Wolff in Westerbork ... om dan alsnog naar het 'Joodsch Tehuis' in Barneveld overgeplaatst te worden. Wolff stuurt meteen een adreswijziging aan Van Vuuren, die op 21 mei 1943 opgelucht antwoordt:

"Het was voor mij een heele opluchting toen ik hedenmorgen je adresverandering ontving. Je begrijpt hoe het mij te moede was, toen Ernst mij uit Amsterdam telefoneerde, en ik sedert dien niets meer hoorde dan je adresverandering naar Westerbork. Je zoudt mij een groot genoegen kunnen doen, door mij te melden, of toen jij uit Westerbork vertrok Ernst Cohen daar uit Vught was aangekomen. Wij zijn nl. omtrent hem in volkomen onzekerheid.

Met hartelijke groeten ook aan Mevrouw Wolff"

Dan volgt het laatste stuk uit de correspondentie tussen Wolff en zijn rector, een briefkaart van 22 mei 1943:

"Waarde Van Vuuren,
Dank voor je brief waaruit je vreugde met onze verhuizing blijkt. Wij zijn er blij mee.

Cohen zag ik nimmer in mijn vorige verblijfplaats; ik concludeer dat hij er waarschijnlijk niet was. Gezien echter de mensenmassa, voel ik mij niet zeker.

Hartelijke groeten, ook voor de anderen te Utrecht,

tt
J.Wolff"

De correspondentie laat twee mensen zien in hun gevecht met een macht die er andere principes op nahoudt dan zij zelf. Woord houden geldt niet meer. Wolff is lang opgewekt en strijdbaar gebleven, Van Vuuren heeft zijn collega door dik en dun gesteund. In de na-oorlogse zuivering zijn andere zaken (daaronder een lezing in Duitsland in het eerste oorlogsjaar en Van Vuurens verdediging in de Senaat, maart/april 1943, van de door de studenten te tekenen loyaliteitsverklaring) hem zo zwaar aangerekend dat hij oneervol ontslagen werd, maar zijn pal staan voor Wolff mag ook gezien en gewaardeerd worden.

Woord houden geldt niet meer

In Barneveld verblijven Wolff en zijn vrouw een week in het voornamere deel De Schaffelaar, maar dan worden ze naar De Biezen overgebracht om op 29 mei terug te verhuizen naar De Schaffelaar.¹⁴ Eind juli wordt daarheen ook hun Utrechtse inboedel overgebracht. Op 11 augustus 1943 tekent Michel Winkel, die na verblijf in De Biezen eind juli ook naar De Schaffelaar

verhuisd is, het portret van Julius Wolff (zie de pagina hiernaast).

Aanvankelijk bestaat de indruk dat degenen die in Barneveld geïnterneerd zijn, gespaard blijven.¹⁵ Maar de bezetter denkt daar anders over en 29 september volgt toch het transport van de gehele groep naar Westerbork. Op diezelfde dag al stuurt Wolff een adreswijziging aan dr. L.W. Nieland,¹⁶ die in Utrecht zijn colleges waarneemt: "Kamp Westerbork post: Hooghalen Oost, Barak 85." In Westerbork zien Wolff en Blumenthal elkaar weer, want op 28 oktober 1943 schrijft Wolff in een briefkaart aan Nieland: "Blumenthal is ook hier. Hij neemt wekelijks deel aan de wiskunde-bijeenkomsten, die uit ca. 10 mensen bestaan." Ook informeert hij Nieland over de toegestane communicatie met de buitenwereld: zelf mag Wolff "om de 14 dagen 2 briefkaarten, subs. 1 brief" sturen. "Aangekende brieven tot 2 KG mogen gestuurd worden. Dus pakketten aangetekend en <2 KG." Twee weken later bedankt hij Nieland: "Waarde Nieland, Ons aller dank voor de uitstekende zending, die ons gisteren bereikte. Je kunt je moeilijk voorstellen, hoe verheugd wij telkens zijn en hoe wij de samenstelling bewonderen ondanks de moeilijkheden." Dan informeert hij naar de situatie in Utrecht ("In Utrecht zal alles wel zijn gangetje gaan. Graag hoop ik er eens meer van te hooren.") en hij vertelt over Westerbork: "Hier in W is het bij behoorlijk weer best uit te houden; bij slecht weer is de straat een beetje modderig maar droogt snel op. Wij treffen hier een groot deel van onze familie aan!" Zijn zoon Ernst, halfzus Cato (zich noemende Flora Francisca) Hegt-Wolff en haar man Jonas Hegt zijn op dat moment in Westerbork, en ook verschillende familieleden van zijn echtgenote Betsie.

Naast de briefkaarten zijn er twee brieven van Wolff aan Nieland bewaard gebleven, op voorgedrukt, gelinieerd papier ("Nur die Linien beschreiben") van Kamp Westerbork en beschadigd doordat de postzegels afgescheurd zijn. Aanvullingen van verloren tekst staan tussen < >. De vermoedelijk vroegste van de brieven is ongedateerd, de andere heeft als datum "Westerbork 26-11-43".

De ongedateerde brief hoopt dat het "Amice" Nieland en gezin goed gaat en deelt mee "dat ons drielik het goed maakt, gezien de omstandigheden die voor velen niet in alle opzichten schitterend zijn." Dan



Julius Wolff, in Barneveld getekend door Michel Winkel, 11 augustus 1943 [3, p. 267]

bespreekt Wolff een verzoek dat Nieland heeft gehad om een getaltheorieboek te schrijven voor lezers die alleen hbs als achtergrond hebben. Geen gemakkelijke taak, schrijft hij, en hij wenst Nieland "succes ermee." Over zijn eigen activiteiten schrijft Wolff: "Mijn voordrachten gingen best, maar nu is er stagnatie doordat het gehoor vaak ziek of verhinderd is. Des te meer geef ik aan jonge lui wat gemoedelijke leiding." Vermoedelijk was hij betrokken bij de kampschool van Westerbork. Wolff sluit de brief af met: "Prof. Barrau schreef mij den laatsten tijd nu en dan. Houd je taai. Hartelijke groeten, mede namens mijn gezin: Wolff"

De brief van 26 november volgt hier in zijn geheel:

"Westerbork 26-11-43

Waarde Nieland

Hartelijk dank voor je briefkaart. Voortaan kan ieder één brief schrijven op Vrijdag, telkens om de 14 dagen. Antwoord moet geplaatst worden op het antwoordvel. Volgens mijn beste weten heb ik kennis gegeven van de ontvangst van het mooie <pakket> waarover ons drietal zich <zeer?> verheugd heeft. Mocht je er niets over gehoord hebben, dan betuig ik hiermede nog eens onzen hartelijken dank. Men kan zich moeilijk indenken in de blijdschap waarmee zo'n pakket ontvangen wordt.

Weinig verneem ik uit Utrecht behalve dat onlangs een pakket kwam van v. Vuuren. Het beste is nu voor de pak-

kettenstuurders, dat ze de bemiddeling inroepen van den Joodschen Raad, afdeling Utrecht, Springweg 164. Dat doen ook de heeren en dames die mij af en toe wat sturen. Daarvan heeft de leiding: Mej. E.L. van Rijckevorsel, Maliesingel 76, Utrecht.

Ontvang ons aller hartelijke groeten, en moge je zoon flink groeien,

JWolff"

De brief is interessant omdat hij laat zien wie het gezin Wolff vanuit Utrecht steunen: de rector magnificus, die een pakket stuurt, zijn vervanger Nieland, en de "heeren en dames", met wie hij zijn studenten aanduidt. In elk geval was Lies van Rijckevorsel een van hen.¹⁷

Begin 1944 circuleert in Nederland het gerucht dat Wolff overleden zou zijn. De voorzitter van de Faculteit Wis- en Natuurkunde, L.M.R. Rutten, schrijft hierover op 7 januari aan Curatoren: "Vandaag sprak ik Dr. Nieland, die me vertelde, dat hij nog zeer kort geleden een brief met goede berichten van collega Wolff had gehad. Het gerucht van diens overlijden moet dus op een misverstand berusten. Het schijnt uitgegaan te zijn van Van der Corput uit Groningen, maar die verzekerde me voor eenige dagen telefonisch, dat hij het bericht maar als gerucht gehoord had."

Na de brief van 26 november 1943, die Wolff zelf uit Westerbork aan Nieland schreef, is er nog nieuws van Wolff uit 1944, en wel in een brief van Lies van Rijckevorsel aan Nieland:

"5 Maart '44

Utrecht

Zeer geachte Heer Nieland,

Gelukkig kan ik U mededeelen, dat ik gisteren een brief ontving van Prof. Wolff. Eigenlijk schrijft hij niet, hoe het hem gaat, hij legt in de brief precies uit, hoe ik met de zegel die erbij is, een pakje kan verzenden. Verder vraagt hij nieuws uit Utrecht, 'Ik geloof, dat wij wat dat betreft, erg achter zijn,' schrijft hij. Het humoristische optimisme van hem, mis ik wel in zijn brief. Bovendien schrijft hij Geachte mej., terwijl hij in zijn optimistisch gestemde brieven, mij altijd bij de naam noemt (ik was met zijn dochter in dezelfde klas).

Maar ik ben alweer blij met een levensteeken en vooral met de zegel. Ik wilde met de brief terug en met het pakje even wachten. Misschien kunt U mij

iets zenden voor 't pakket (veel hoeft het niet te zijn, ik mag maximaal 2 K.G. zenden en ik wilde op het Laboratorium ook aan de studenten om bijdragen vragen. Het gaat weer onder 't motto 'alle beetjes helpen'>. Bovendien wilt U hem misschien graag nog iets vertellen. Als U mij dit schrijft, zal ik het graag in de brief aan hem erbij zetten.

Maar waar zij, meen ik, per maand 2 brieven mogen schrijven, ontvangt U misschien zelf binnenkort een brief.

Met vriendelijke groeten, en bij voorbaat mijn dank (U vindt me, hoop ik, niet onbescheiden).

Hoogachtend,
E.J. van Rijckevorsel"

Het 'humoristische optimisme' van Wolff was er in zijn brief van maart 1944 niet meer. En uit Utrecht werd het stil, behalve van de kant van de pakkettenstuursers.

Het gezin Wolff wordt op 13 september 1944 naar Bergen-Belsen gedeporteerd, waar ze in het centrale Sternlager verblijven. Jules Wolff, Betsie Wolff-Gersons en Ernst

Wolff komen daar in het voorjaar van 1945 kort na elkaar om, op 8 februari, 9 maart en 3 maart. De overlijdensakten geven voor Betsie en Ernst als oorzaak van overlijden 'Herzschwäche' en 'Herzlähmung'.

Van het gezin Wolff-Gersons heeft dochter Lenie ondergedoken in Rotterdam de oorlog overleefd. Met Jaap Valkhoff kreeg ze na de oorlog twee dochters. Ook de tekenaar van het laatste portret van Jules Wolff overleefde met zijn schetsboek de oorlog. J.A. Barrau, die Wolff vanaf hun gemeenschappelijke Amsterdamse studententijd kende en zowel in Groningen als in Utrecht collega was van Wolff, typeert hem in 1947 [1] met onder meer deze woorden:

"Wolff's publicaties zijn gekenmerkt door elegante bewijsvoering en door keurige en stipte redactie. Deze eigenschappen van stiptheid en sierlijkheid maakten ook zijne, door eene fijne geestigheid gekruide, mondelinge voordrachten, alsook — naar het eenparig getuigenis zijner studenten — elk zijner colleges, voor de toehoorders tot een

genoegen en een genot. Dit vernuftig betoog en deze geestige voordracht zijn nu tot zwijgen gebracht."

De zinspreuk van het Wiskundig Genootschap "Een onvermoeide arbeid komt alles te boven" is voor Wolff niet opgegaan. ❧

Erratum bij deel 1 (pagina 78)

Wolff slaagde in 1900 voor de hbs met vijfjarige cursus (de hbs A werd pas in 1923 formeel geregeld). In de zomer van 1901 toonde hij in een staatsexamen zijn bekwaamheid voor de studie in de geneeskunde en de wis- en natuurkunde. Op grond daarvan liet de Universiteit van Amsterdam hem toe als student.

Dankwoord

De directeur van het NIOD dank ik voor de toestemming om uit beperkt openbare brieven van en aan L.W. Nieland te putten. Bij het werk aan dit artikel heb ik veel te danken gehad aan de steun in allerlei vorm van Gerard Alberts, Henk Broer, Jan Hogendijk, Martinus van Hoom, Okke Klaassen, Jaap Korevaar, Adriaan Monna, Henk de Snoo, Elsbeth en Connie Valkhoff en Laurens en Mattheke Winkel. De vader van deze laatsten, Mr. Hans Winkel, attendeerde me met de door zijn oom Michel Winkel gemaakte portrettekening als eerste op Julius Wolff.

Noten

- 1 Een beknopt overzicht van het leven van Julius Wolff en zijn gezin in de oorlog is te vinden in [2]. Dit artikel gaat terug op de primaire bronnen.
- 2 Zie voor details [9].
- 3 In Utrecht treft dat naast Wolff zijn collega's Ornstein en Roos en enkele assistenten.
- 4 Na eerste opvang in de buitenplaats Zuylenveld woonden de Blumenthals eerst in Delft, waar Blumenthal alleen als repetitor met studenten kon werken. Omdat vanaf september 1940 het kustgebied verboden terrein was voor niet-ariërs, vertrokken de Blumenthals naar Utrecht, waar ze de eerste nacht bij Wolff logeerden en daarna tot hun vertrek naar kamp Vught in april 1943 op acht adressen woonden.
- 5 Antonie Frans Monna (1909–1995), in Leiden opgeleid en daar in 1935 gepromoveerd, werkt op dat moment als verzekeringswiskundige. Daarnaast blijft hij een actief onderzoeker [7].
- 6 Monna is dan net uit Dordrecht terug verhuisd naar zijn ouderlijk huis in de Haagse Emmastraat.
- 7 Op 25 augustus 1942 waren ze al eerder op weg naar Westerbork. Dankzij steun van Utrechtse vrienden werden ze in Amersfoort uit de trein gehaald en konden ze terugkeren naar Utrecht.
- 8 We zouden tegenwoordig voor 'primende' priemeinde lezen.
- 9 Ernst Cohen was in Utrecht emeritus hoogleraar chemie, Jacob Roos was veterinaire hoogleraar en ook ontheven van zijn functie, Daniël Dresden, werktuigbouwkundig ingenieur, was van 1920 tot 1928 hoogleeraar geweest in Delft. Dresden heeft als enige van het viertal de oorlog overleefd. Na de oorlog was hij voorzitter van TNO. Een bespreking op 19 juni 1942 tussen Cohen, Dresden, Wolff en de inspecteur voor het Joodse Algemeen Vormend Onderwijs A. Bartels levert een lijst met MO-cursussen voor elf vakken op.
- 10 De Joodse arts Martin Andries de Jong, geboren 1890 in Breda, werd op 19 oktober 1942 in Auschwitz vermoord.
- 11 Van de genoemde vrienden onder de collega's werd prof. mr. dr. H. Westra (1883–1959) in 1942 (NSB-)burgemeester van Den Haag. Hij kreeg na de oorlog zes jaar gevangenisstraf. De andere drie, prof. mr. J. van Loon (1888–1975), prof. mr. dr. D.G. Rengers Hora Siccama (1876–1962) en prof. dr. F.M.J.A. Roels (1885–1962), werden in 1945 oneervol ontslagen op grond van het zuiveringsbesluit. Dit gebeurde overigens ook met rector Van Vuuren.
- 12 Advocaat mr. A. Murman trad voor Wolff op, zoals blijkt uit een brief van Murman aan Wolff van 24 december 1942, die zich in de omslag 'Joodsche Zaken' van Van Vuuren bevindt.
- 13 De echtgenote van Van Vuuren, Mw. Van Vuuren-van Langen, overleed 9 januari 1943, 70 jaar oud.
- 14 G. Italie vermeldt de verhuizing naar De Biezen 24 mei 1943 in zijn dagboek [6, p. 373–374].
- 15 De situatie van de Barneveld-groep wordt indringend beschreven in [8].
- 16 Lubbertus Willem Nieland (Leeuwarden 1901) had het ongeluk in Putten te wonen. Bij de represaille van 1 oktober 1944 was hij één van 661 Puttense mannen die naar concentratiekampen werden afgevoerd. Hij overleed 13 mei 1945 in een Engels ziekenhuis nabij Bremen. Zie ook [4].
- 17 Elise Jacoba (Lies) van Rijckevorsel (Naarden 1914 – Leusden 1971) zat samen met Wolffs dochter Lenie in de vierde klas van het Utrechtse stedelijk gymnasium en haalde daar in 1933 het diploma gymnasium bèta. Ze nam volop deel aan het studentenleven, als actrice, als schermster en in verschillende bestuursfuncties. In 1946 slaagde ze voor het doctoraal examen wiskunde, ze heeft dus ook onderwijs van Nieland gehad.

Bronnen

Voor de levensbeschrijving zijn de gebruikelijke genealogische bronnen geraadpleegd. Deze zijn hieronder niet opgenomen. Ook artikelen en familieadvertenties in kranten, geraadpleegd via delpher.nl en de website van het Centraal Bureau voor Genealogie, zijn hieronder niet splitslist. Een belangrijke bron is de gepubliceerde genealogie van de familie Wolff [10].

Archiefbronnen

3 brieven en een briefkaart van J. Wolff aan A.F. Monna (30 maart, 20 april, 19 mei en 23 mei 1942): Archief A.F. Monna, in een persoonlijke mededeling van dr. A. Monna, Utrecht.

<http://www.lichtenbelt.com/genealogie/cruytparenteel/tekst.htm> bevat de in noot 17 vermelde genealogische gegevens over Elise Jacoba van Rijkckevorsel, dochter van J.A. (Nanny) Kruijt.

Amsterdam, archief KNAW:

Memories tot aanbeveling voor gewoon lid (...) 1938 en 1939 (met dank aan H. Broer).

Amsterdam, NIOD Instituut voor Oorlogs-, Holocaust- en Genocidestudies:

toegang 101b inv.nr 368, Stukken betreffende het verzoek van Ernst Wolff te Amsterdam aan secretaris-generaal K.J. Frederiks om enkele dagen uitstel van zijn vertrek naar Barneveld in verband met een bezoek aan zijn zieke moeder op die dag, 30 maart 1943

toegang 101b inv.nr 379, Opgaven door directeur van het Joods Tehuis De Schaffelaar te Barneveld E. Wolthuis van namen van nieuwe bewoners te Barneveld, 1 mei–27 juli 1943

toegang 101b inv.nr 412, Verzoek van de directeur van het Joods Tehuis De Schaffelaar te Barneveld E. Wolthuis om de inboedel van J. Wolff van Utrecht naar Barneveld over te brengen

toegang 250i inv.nr 889, Brieven en briefkaarten die door kampgezetenen zijn verzonden (namen beginnend met Vr.–Z.); hierin een adreswijziging en twee brieven van J. Wolff aan L.W. Nieland en een brief van Mw. E.J. van Rijckevorsel aan L.W. Nieland

Groningen, Groninger Archieven:

toegang 46 inv.nr 624, Handelingen van de faculteit der wis- en natuurkundige wetenschappen aan de hogeschool te Groningen, 1915–1929: Notulenboek van de faculteitsvergaderingen. p. 29, 34, 116

toegang 46 inv.nr 629, Faculteit der wis- en natuurkundige wetenschappen, Ingekomen en concepten-van-uitgaande stukken, 1909-febr-28 tot 1922-juli-30. Brieven van en aan curatoren van 6-11-1916 en 6-1-1917, deze laatste met publicatielijst van J. Wolff

Groningen, Universiteitsbibliotheek:

Series lectionum 1918. Online: <http://facsimile.ub.rug.nl/cdm/fullbrowser/collection/Planos/id/1038/rv/compoundobject/cpd/1120>

Den Haag, Centraal bureau voor genealogie:

familieadvertenties en Duitse overlijdensakten via 'Oorlogsbronnen'

Den Haag, Koninklijke Bibliotheek:

artikelen en advertenties in kranten via delpher.nl

Den Haag, verzekeringsmaatschappij Aegon:

gegevens over aanstelling Wolff bij O.L.V.E.H.

afkomstig uit persoonlijke mededeling 22-8-2016 van de heer Pierre Don, bedrijfsarchivaris

Haarlem, Noord-Hollands Archief:

toegang 288

inv.nr 3 Correspondentie van C. Visser met J. Wolff (1931–1937)

inv.nr 5 Aantekeningen van colleges van prof. dr. J. Wolff (1929–1931)

toegang 423, inv.nrs 52 en 79 Correspondentie met E.W. Beth (1931, 1937)

toegang 504 inv.nrs 1 en 2 Dictaten van drs. R.W. Lijdsman uit periode 1925–1955, onder meer van Wolff en Nieland

toegang 506 nr 1: Dr. L.W. Nieland, Ingekomen en enige minuten van uitgaande stukken (1928–1944)

toegang 508 inv.nrs 1-3 G. Röhrmann, Collegedictaten en andere aantekeningen, onder meer colleges van Wolff (1932–1936)

toegang 615 inv.nr 85 Brief en briefkaart van Wolff aan H. Freudenthal (1935, 1943)

toegang 685, doos 5 Archief T.P. van Aardenne-Ehrenfest (niet geïnventariseerd)

Utrecht, Utrechts Archief:

toegang 59 (Archief Curatoren Rijksuniversiteit Utrecht)

inv.nrs 264, 265, 270 Jaarverslagen, ... aan de minister van binnenlandse zaken, c.q. de minister van onderwijs, resp. 1923/24, 1924/25 en 1929/30

inv.nrs 343–346 *Jaarboek der Rijks-universiteit te Utrecht* 1921–1922 tot 1924/25

inv.nr 532 Stukken betreffende de tenuitvoerlegging van de zogeheten ariërpagraaf... (hierin een kopie van de ontslagbrief van 23-11-1940, de ontzegging van de toegang tot de Leeszaal, correspondentie over het gerucht dat Wolff overleden zou zijn)

inv.nr 647 Stukken betreffende de hooglaren in de integraalrekening, ... (hierin stukken over de voordracht van Wolff, tevens correspondentie van curatoren met Wolff en met anderen over Wolff)

inv.nr 648 Stukken betreffende de hooglaren in de ... meetkunde (hierin Wolffs correspondentie over de opvolging van De Vries)

inv.nr 1018 Stukken betreffende de docent in de integraal- en differentiaalrekening, ... (1940-1945) (hierin correspondentie over de vervanging door L.W. Nieland)

toegang 292-1 (Archief Senaat en Rector Rijksuniversiteit Utrecht) inv.nrs 81 en 84 Ingekomen stukken en minuten van uitgaande stukken van rector magnificus L. van Vuuren, daarin omslagen 'Joodsche Zaken' waarin correspondentie met Wolff en over hem

Utrecht, Universiteitsmuseum:

Briefkaart en vijf brieven van J. Wolff aan collega's, onder wie de rector magnificus van de Rijksuniversiteit Utrecht (1923–1934)

Westerbork, Archief Kamp Westerbork:

Drie briefkaarten aan L.W. Nieland (20-10-1943, 28-10-1943, 12-11-1943)

Publicaties van Julius Wolff

1907

Dynamen, beschouwd als duale vectoren (Academisch proefschrift ... aan de universiteit van Amsterdam ...), M.M. Olivier, Amsterdam, 1907 [JFM 41.0625.01]

1910–1911

Über ein Nullsystem beim Büschel quadratischer Flächen, *NAW* 2/9 (1910–1911), 85–115. [JFM 46.0403.01] Bekroonde prijsvraaginzending.

Quadratische omwentelingscomplexen en omwentelingscongruenties (2, 2), *Versl. Kon Akad. v. Wet.* 19 (1911), 1280–1284. [JFM 42.0693.03]

1915

Die Striktionscurven der quadratischen Flächen im nicht-euklidischen Raume, *NAW* 2/11 (1915), 210–231. [JFM 45.0897.01]

Die ebenen und räumlichen Kräftefelder in denen jede Gerade eine Tautochrone oder Pseudo-tautochrone ist, *NAW* 2/11 (1915), 291–327. Bekroonde prijsvraaginzending.

Congruenties met brandlijnen, *Handelingen van het 15de Ned. natuur- en geneeskundig congres gehouden te Amsterdam* (1915), 206–208. [JFM 45.0932.06]

1916

'De nieuwe onderzoekingen op het gebied der algebraïsche oppervlakken', rede, gehouden 2 februari 1916, bij de opening van zijn lessen in de wiskunde, als privaattoespreker aan de universiteit van Amsterdam, 1916; online: pub.math.leidenuniv.nl/~edixhovensj/talks/2014/cleveringa/oratie.pdf.

1917

'Complexe getallenstelsels', rede uitgesproken bij de aanvaarding van het hoogleraarsambt aan de Rijks-universiteit te Groningen op 28 maart 1917, P. Noordhoff, Groningen, 1917. [JFM 46.0186.04]

1918

Over het differentieëren van bepaalde integralen, *NAW* 2/12 (1918), 450–453. [JFM 46.0403.01]

1919

Sur les suites de fonctions holomorphes, *CR* 169 (1919), 566–569. [JFM 47.0308.03] (*CR* staat steeds voor *Comptes Rendus hebdomadaires des séances de l'Académie des Sciences*)

Over reeksen van analytische functies, *Versl. Kon Akad. v. Wet.* 27 (1919), 319–323. [JFM 47.0309.01]

Over de quasi-uniforme convergentie, *Versl. Kon Akad. v. Wet.* 27 (1919), 1098–1103. [JFM 47.0309.02]

Eenige toepassingen van de quasi-uniforme convergentie op reeksen van reële en van holomorfe functies, *Versl. Kon Akad. v. Wet.* 28 (1919), 341–352; Erratum, 464.

1919–1920

Over het termsgewijs differentieëren van reeksen, *NAW* 2/13 (1919–1920), 185–186. [JFM 47.0246.01]

Over twee stellingen van Caratheodory, *NAW* 2/13 (1919–1920), 288–291. [JFM 47.0302.02]

Over twee formules van Castelnovo, *NAW* 2/13 (1919–1920), 298–299. [JFM 47.0635.02]

1920

Über Folgen analytischer Funktionen, *Math. Ann.* 81 (1920), 48–51. [JFM 47.0310.01]

- Over de stelling van Picard, *Versl. Kon Akad. v. Wet.* 29 (1920), 171–174. [JFM 47.0302.01]
- 1921
- Riemann'sche integralen op puntverzamelingen, *Christiaan Huygens* 1 (1921), 150–162. [JFM 48.0264.03]
- Sur les séries $\sum \frac{A_k}{z-a_k}$, *CR* 173 (1921), 1056–1057, 1327–1328. [JFM 48.0320.01] (CR staat steeds voor *Comptes Rendus hebdomadaires des séances de l'Académie des Sciences*) Op het eerste deel volgt een positief commentaar van Émile Borel.
- 1922
- 'Over het subjectieve in de wiskunde', rede gehouden bij de aanvaarding van het ambt van hoogleraar aan de Rijks-universiteit te Utrecht op maandag 16 oktober 1922, P. Noordhoff, Groningen, 1922.
- Inleiding tot de analytische meetkunde van het platte vlak*, P. Noordhoff, Groningen, 1922. [JFM 48.0685.02]
- Over convexe puntverzamelingen in het platte vlak, *Christiaan Huygens* 2 (1922), 124–132. [JFM 48.0217.03]
- 1923
- Sur les ensembles non mesurables, *CR* 177 (1923), 863–864. Op het artikel volgt een positief commentaar van Émile Borel.
- Over de verzameling der waarden x , waarvoor een functie $f(x)$ tussen twee door haar aangenomen waarden ligt, *Handelingen van het 19e Ned. natuur- en geneeskundig congres gehouden te Maastricht* (1923), 121–122. [JFM 49.0175.02]
- Over het osculatievlak, *NAW* 2/14 (1923), 132–136. [JFM 49.0504.01]
- Over de continuïteitspunten van functies, *Versl. Kon Akad. v. Wet.* 32 (1923), 148–149. [JFM 49.0176.03]
- Inwendige grensverzamelingen, *Versl. Kon Akad. v. Wet.* 32 (1923), 150–151 [JFM 49.0142.01]
- Over een meetbaarheidsstelling van Carathéodory, *Versl. Kon Akad. v. Wet.* 32 (1923), 891–892. [JFM 49.0142.02]
- 1924
- Sur l'importance d'un théorème de M. Vitali dans la théorie de la mesure, *Bulletin Soc. Math. France* 52 (1924), 578–585. [JFM 50.0129.02]
- Über die Loomansche Erweiterung eines Satzes von Pompéiu, *NAW* 2/14 (1924), 327–339. [JFM 50.0250.03]
- Over perfecte puntverzamelingen, waarin alle puntenparen irrationale afstanden hebben, *Versl. Kon Akad. v. Wet.* 33 (1924), 61–62. [JFM 50.0132.02]
- 1925
- Over afgeleide functies van een reële veranderlijke, *Handelingen van het 20e Ned. natuur- en geneeskundig congres gehouden te Groningen* (1925), 154–155. [JFM 51.0215.05]
- Een afbeelding van de waaiers in R_3 op de kegelsneden van een vlak, *Versl. Kon Akad. v. Wet.* 34 (1925), 325–330. Engelse versie *Proc. Akad. Wet. Amsterdam* 28 (1925), 450–455. [JFM 51.0497.01 en .02]
- Over een functie die in ieder interval iedere waarde op een onaftelbare puntverzameling aanneemt, *Versl. Kon Akad. v. Wet.* 34 (1925), 1121–1122, [JFM 51.0200.02]
- 1926
- Sur l'itération des fonctions holomorphes dans une région, et dont les valeurs appartiennent à cette région, *CR* 182 (1926), 42–43. [JFM 52.0309.02]
- Sur l'itération des fonctions bornées, *CR* 182 (1926), 200–201. [JFM 52.0309.03]
- Sur une généralisation d'un théorème de Schwarz, *CR* 182 (1926), 918–920. [JFM 52.0309.05]
- Sur une généralisation d'un théorème de M. Schwartz, *CR* 183 (1926), 500–502. [JFM 52.0309.06]
- Sur les bitangentes d'une quartique. A propos des articles de MM. Winants et Delens, *Enseign. Math.* 25 (1926), 119–120. [JFM 52.0658.04]
- On a function which assumes any value on a non-enumerable set of points in any interval, *Proc. Akad. Wet. Amsterdam*, 29 (1926), 127–128. [JFM 52.0242.03]
- 1927
- Une généralisation d'un théorème de H. Jentzsch, *CR* 184 (1927), 795–798. [JFM 53.0290.01]
- Sur les séries $\sum \frac{A_k}{z-a_k}$, *CR* 185 (1927), 1250–1252. [JFM 54.0359.02]
- Über die Iteration derjenigen in einem Gebiete regulären Funktionen, deren Werte dem Gebiete angehören, *Math. Z.* 26 (1927), 125–127. [JFM 53.0304.01]
- Over de grenswaarden van holomorfe functies, *Versl. Kon Akad. v. Wet.* 36 (1927), 1237. [JFM 53.0285.01]
- 1928
- Sur les limites radiales d'une fonction holomorphe dans un cercle, *Bulletin Soc. Math. France* 56 (1928), 167–173. [JFM 54.0346.01]
- Sur les séries $\sum \frac{A_k}{z-a_k}$, *CR* 186 (1928), 62–63. [JFM 54.0359.02]
- Une propriété des séries de fractions rationnelles, *CR* 186 (1928), 565–566. [JFM 54.0359.03]
- Naschrift [bij 'Eenwaardig of meerwaardig' van P. Wijdene], *Euclides* 4 (1928), 104–105.
- Bewerkingen met breuken en haar verband met verschillende gebieden der wiskunde, *Euclides* 4 (1928), 226–238. [JFM 54.0102.07]
- Une propriété des fractions continues, *NAW* 2/15 (1928), 377–378. [JFM 54.0234.01]
- Over reeksen van rationale functies, *NAW* 2/15 (1928), 379–385. [JFM 54.0359.05]
- On the boundary limit infinite of a holomorphic function, *Proc. Akad. Wet. Amsterdam* 31 (1928) 718–720. Ook *Versl. Kon Akad. v. Wet.* 37 (1928), 495–497. [JFM 54.0346.02]
- On the limits of holomorphic functions, *Proc. Akad. Wet. Amsterdam* 31 (1928), 254. [JFM 54.0346.03]
- On the sufficient conditions for analyticity of functions of a complex variable, *Proc. Int. Math. Congress (Toronto 1924)*, Toronto Univ. Press, Toronto, 1928, vol. 1, 457–459. [JFM 54.0328.02]
- 1929
- Sur l'itération des fonctions holomorphes dans un demi-plan, *Bulletin Soc. Math. France* 57 (1929), 195–203. [JFM 55.0769.04]
- Een stelling over conforme afbeelding, *Proc. Akad. Wet. Amsterdam* 32 (1929), 1261–1263. [JFM 55.0208.04]
- 1930
- Sur la dérivée angulaire dans la représentation conforme, *CR* 190 (1930), 575–576. [JFM 56.0983.06]
- Sur la dérivée angulaire, *CR* 191 (1930), 921–923. [JFM 56.0984.01]
- G. Schaake, J. Wolff, Over de tweede middelwaardestelling der integraalrekening, *NAW* 2/16(4) (1930), 28–33. [JFM 56.0221.04]
- Over normale en niet-normale vlakke algebraïsche krommen, *NAW* 2/16(4) (1930), 34–36. [JFM 56.1166.09]
- Sur la représentation conforme, *Proc. Akad. Wet. Amsterdam* 33 (1930), 96–97. Samenvatting in *Versl. Kon Akad. v. Wet.* 39 (1930), 15. [JFM 56.0983.04, 57.1427.04]
- Sur la représentation conforme d'un demi-plan sur un domaine qui en fait partie, *Proc. Akad. Wet. Amsterdam* 33 (1930), 1023–1024. Samenvatting in *Versl. Kon Akad. v. Wet.* 39 (1930), 160. [JFM 56.0986.02, 57.1427.05]
- Quelques propriétés des fonctions holomorphes dans un demi-plan dont toutes les valeurs sont dans ce demi-plan, *Proc. Akad. Wet. Amsterdam* 33 (1930), 1185–1188. Samenvatting in *Versl. Kon Akad. v. Wet.* 39 (1930), 170–171. [JFM 57.1425.03, 56.0983.05]
- Sur la croissance et la décroissance des fonctions entières, *Rend. Circ. Mat. Palermo* 54 (1930), 207–216. [JFM 56.0973.04]
- 1931
- Fourier'sche Reihen mit Aufgaben*, P. Noordhoff N.V., Groningen, 1931.
- 1932
- Dubbele integralen, in: H.B.A. Bockwinkel, *Kollege integraalrekening ... met een aanhangsel over dubbele integralen van J. Wolff...*, Drukkerij Holland, Amsterdam, 1932, pp. 441–485.
- J. Wolff en F. de Kok, Les fonctions holomorphes à partie réelle positive et l'intégrale de Stieltjes, *Bulletin Soc. Math. France* 60 (1932), 221–227. [Zbl 0006.17101]
- Sur l'itération des fonctions holomorphes dans un demi-plan, *CR* 194 (1932), 833–834. [Zbl 0003.40601]
- J. Wolff en B. Grootenboer, Sur une propriété des dérivées d'une fonction à partie réelle positive, *CR* 195 (1932), 997–998. [Zbl 0005.40302]
- Oppervlakten en inhouden, *Euclides* 9 (1932), 154–164.
- J. Wolff en P.G.J. Vredenduin, Sur les coefficients d'une série de Fourier, *NAW* 2/17 (1932), 144–146. [Zbl 0003.25402]
- Sur l'itération et sur la fonction de Königs, *Proc. Akad. Wet. Amsterdam* 35 (1932), 502–506. Ook *Versl. Kon Akad. v. Wet.* 41 (1932), 55. [Zbl 0004.30002]
- Beschränkte analytische Funktionen und Stieltjes-Integrale, *Verhandlungen des Internationalen Mathematiker-Kongresses Zürich 1932*, Orell Füssli, Zürich, 1932, vol. 2, 126–127. [JFM 58.0353.18]
- 1933
- Sur la série de Fourier d'une fonction monotone, *Bulletin Soc. Math. France* 61 (1933), 253–257. [JFM 59.0304.01]
- Extension d'un théorème de M. Warschawski sur

- la représentation conforme, *CR* 196 (1933), 891–893. [Zbl 0006.26401]
- Sur l'intégrale d'une fonction holomorphe à partie réelle positive, *CR* 196 (1933), 1949–1950. [Zbl 0008.11901]
- Sur l'intégrale de Stieltjes représentant une fonction holomorphe à partie réelle positive, *CR* 197 (1933), 17–18. [Zbl 0007.16705]
- Sur la fonction harmonique conjuguée d'une fonction harmonique bornée, *CR* 197 (1933), 1180–1182. [Zbl 0008.07302]
- J. Wolff en A. Denjoy, Sur la division d'une sphère en trois ensembles, *Enseign. Math.* 32 (1933), 66–68. [Zbl 0008.18103]
- 1934
- Sur la représentation conforme des bandes, *Compos. Math.* 1 (1934), 217–222. [Zbl 0009.40403]
- Une propriété de la représentation conforme des bandes, *CR* 198 (1934), 707–709. [Zbl 0008.36205]
- L'intégrale d'une fonction holomorphe et à partie réelle positive dans un demi-plan est univalente, *CR* 198 (1934), 1209–1210; Errata, 1464. [Zbl 0008.36301]
- Démonstration simple d'une propriété de l'intégrale d'une fonction holomorphe à partie réelle positive, *NAW* 2/18 (1934), 20–21. [Zbl 0009.21601]
- S. Warschawski en J. Wolff, Zum Randverhalten der zweiten Derivierten der Abbildungsfunktion bei konformer Abbildung, *Proc. Akad. Wet. Amsterdam* 37 (1934), 145–149. [Zbl 0009.17402]
- 1935
- Sur le lieu des points équidistants de deux continus et la division du plan par une courbe de Jordan, *Bulletin Soc. Math. France* 63 (1935), 36–55. [Zbl 0012.03505]
- Sur la conservation des angles dans la représentation conforme d'un domaine au voisinage d'un point frontière, *CR* 200 (1935), 42–43. [Zbl 0010.36201]
- La représentation d'un demi-plan sur un demi-plan à une infinité d'incisions circulaires, *CR* 200 (1935), 630–631. [Zbl 0011.12102]
- Metriek van puntverzamelingen. Lebesgue-integratie. *Mathematica B* 4 (1935), 1–12, 33–50, 65–71. [JFM 61.0238.01, .02, .03]
- Démonstration d'un théorème sur la conservation des angles dans la représentation conforme d'un domaine au voisinage d'un point frontière, *Proc. Akad. Wet. Amsterdam* 38 (1935), 46–50. [Zbl 0011.12101]
- 1936
- Over [de] leraarsopleiding, *Vivos vocos* 13(10) (1936), 115–116.
- Généralisation d'un théorème de M. Carleman sur les séries de fractions rationnelles, *CR* 202 (1936), 551–553. [Zbl 0013.17201]
- 1937
- Sur les domaines invariants dans la représentation conforme, *CR* 204 (1937), 1101. [Zbl 0016.16904]
- 1938
- Les trajectoires définies par l'équation $dz/dt = w(z)$ = fonction holomorphe à partie réelle positive dans le demi-plan $D(x > 0)$, *CR* 206 (1938), 1546–1548. [Zbl 0019.03203]
- L'équation différentielle $dz/dt = w(z)$ = fonction holomorphe à partie réelle positive dans un demi-plan, *Compos. Math.* 6 (1938–1939), 296–304; Errata, 478. [Zbl 0019.42003]
- 1940
- Théorème sur les domaines invariants dans la représentation conforme, *CR* 210 (1940), 658–659. [Zbl 0024.42201]
- Sur les fonctions holomorphes dont l'ensemble des valeurs est soumis à certaines restrictions, *Proc. Akad. Wet. Amsterdam* 43 (1940), 1018–1022. [Zbl 0023.40404]
- 1941
- Sur les fonctions holomorphes univalentes, *CR* 213 (1941), 158–160. [Zbl 0025.26002]
- Eenvoudig bewijs van de stelling van Arzelà-Osgood der Integraalrekening, *Mathematica B* 10 (1941–1942), 90–93. [Zbl 0026.00603]
- Théorème sur l'itération d'une représentation conforme, *Proc. Akad. Wet. Amsterdam* 43 (1940), 1016–1017, 44 (1941) 195–197, 308–309. [Zbl 0023.40501, 0024.33302, 0024.33303]
- Séries se rapportant aux fonctions holomorphes bornées, *Proc. Akad. Wet. Amsterdam* 44 (1941), 619–624. [Zbl 0025.17101]
- Inégalités remplies par les fonctions univalentes, *Proc. Akad. Wet. Amsterdam* 44 (1941), 956–963; Errata, 1163. [Zbl 0026.21802]
- Domaines d'univalence et d'étoilement des fonctions holomorphes à partie réelle positive dans un demi-plan, *Proc. Akad. Wet. Amsterdam* 44 (1941), 1210–1213. [Zbl 0026.40003]
- 1942
- Inégalités remplies par les dérivées des fonctions holomorphes, univalentes et bornées dans un demi-plan, *Commentarii Mathematici Helvetici* 15 (1942–43), 296–298. [Zbl 0028.40102]
- La représentation conforme au voisinage d'un point frontière, *Proc. Akad. Wet. Amsterdam* 45 (1942), 169–170. [Zbl 0026.40005]
- O. Blumenthal en J. Wolff, Die isoperimetrische Aufgabe, *Mathematica B* 11 (1942), 12–26. [Zbl 0026.35902]
- Deux théorèmes sur la dérivée d'une fonction holomorphe univalente et bornée dans un demi-plan au voisinage de la frontière, *Proc. Akad. Wet. Amsterdam* 45 (1942), 574–577. [Zbl 0027.05701]
- 1944
- T. van Aardenne-Ehrenfest en J. Wolff, Über die Grenzen der einfachzusammenhängenden Gebiete, *Commentarii Mathematici Helvetici* 16 (1943–44), 321–323.

Publicaties over Wolff en achtergronden

(zie ook deel 1)

- 1 J.A. Barrau, In memoriam prof. dr. J. Wolff, *NAW* 2/22 (1947), 113–114.
- 2 Frits Broeyer, *Het Utrechtse universitaire verzet – 'Heb je Kafka gelezen?' 1940–1945*, Uitgeverij Matrijs, Utrecht, 2014.
- 3 J.G. van der Corput, Wiskunde, in K.F. Proost en J. Romein, eds., *Geestelijk Nederland 1920–1940. Deel II De wetenschappen van natuur, mens en maatschappij*, NV Uitg.-Mij Kosmos, Amsterdam en Antwerpen, 1948, pp. 255–291; het portret van Wolff door Michel Winkel op p. 267 en paragraaf 'De betekenis van J. Wolff' op pp. 279–280.
- 4 J.G. van der Corput, F. van der Blij, In memoriam Dr. L.W. Nieland, *NAW* 2/22 (1947), 217–219.
- 5 V. Felsch en E.R. Wiehn, eds., *Otto Blumenthals Tagebücher: ein Aachener Mathematikprofessor erleidet die NS-Diktatur in Deutschland, den Niederlanden und Theresienstadt*, Hartung-Gorre, Konstanz, 2011.
- 6 W.M. de Lang, ed., *Het oorlogsdagboek van Dr. G. Italie, Amsterdam en Antwerpen*, Uitgeverij Contact, 2009.
- 7 A. Monna en M. van der Put, Antonie Frans Monna – Ambtenaar en wiskundige, *NAW* 5/2 (2004), 136–146.
- 8 J. Presser, *Ondergang. De vervolging en verdelging van het Nederlandse jodendom 1940–1945*, 2 delen, Staatsuitgeverij, Den Haag, 1985; in het bijzonder deel 1, pp. 439–447.
- 9 T. Tabak, 'En men zal u een nieuwe naam geven': vijf vergeten oorlogsslachtoffers van de Rijksuniversiteit Groningen, Rijksuniversiteit Groningen, Groningen, 2007.
- 10 M. Wolff, *De nakomelingen van Wolff ben Eleazar en Moshe ben Gompertz Halevi, 1695–1995*, Arnhem, 2001; in het bijzonder pp. 196–200.

Boekbesprekingen

| Book Reviews

Redactie: Hans Cuypers en Hans Sterk

Review Editors NAW - MF 7.092
Faculteit Wiskunde & Informatica
Technische Universiteit Eindhoven
Postbus 513
5600 MB Eindhoven
reviews@nieuwarchief.nl
www.win.tue.nl/wgreview



Mircea Pitici (ed.)

The Best Writing on Mathematics 2016

Princeton University Press, 2017

xxii + 377 p., prijs \$32.95

ISBN 9780691175294



Mircea Pitici (ed.)

The Best Writing on Mathematics 2017

Princeton University Press, 2018

xvi + 224 p., \$24.95

ISBN 9780691178639

In NAW van maart 2015, pagina 87, en in NAW van december 2016, pagina's 303 en 304, staan de recensies afgedrukt van de corresponderende boeken uit 2013, respectievelijk 2014 en 2015. Net zo als bij die eerdere besprekingen beperken we ons ook nu tot het weergeven van de inhoud van een aantal der bijdragen, ditmaal van twaalf van de dertig uit de 2016-bundel en van tien van de negentien uit de 2017-bundel. De bijdragen zijn uit verschillende tijdschriften afkomstig.

Uit de 2016-bundel: (1) H.E. Christanson en S.R. Garcia, 'G.H. Hardy, Mathematical biologist'. Een korte bijdrage over het hoe en waarom Hardy ertoe kwam zich te verdiepen in de genetica. (2) B. Polster, 'Stacking wine bottles revisited'. Hier wordt, met kleurenplaatjes en tekst, verhaald hoe men op de bodem van een kist n even grote flessen onregelmatig naast elkaar kan leggen, en vervolgens de kist opvult naar boven, waarna het blijkt dat altijd bovenop de $(2n-1)$ -de rij een plank gelegd kan worden, precies horizontaal, die aan elk der n eronder liggende flessen raakt. Variaties op dit feit worden uiteengezet. (3) J. Bowman, 'The way the billiard ball bounces'. Na een gemakkelijk te begrijpen inleiding aangaande periodieke banen, worden verbindingen geschetst die er zijn met het werk van de Fieldsmedaillewinnaars Avila en Mirzakhani. (4) E. Klarreich, 'Mathematicians chase Moonshine shadows'. Een overzicht van de zogeheten 'moonshine' in de eindige-groepentheorie en elders, wordt gepresenteerd. Het betreft werk van McKay, Thompson, Borcherds, Cheng, Ramanujan, Duman en Ono. (5) D. Castelvecchi, 'The impenetrable proof'. Een bijdrage over Mochizuki's poging om het bewijs van het *abc*-vermoeden te leveren. Ook over de ontvangst door collega's wordt verteld. (6) B. Green, 'Why string theory still offers hope we can unify physics'. Een persoonlijke bijdrage over het onderwerp, van de studententijd van de auteur tot op heden. (7) T. Khovanova, E. Nie en A. Puranik, 'The pioneering role of the Sierpinski gasket'. De *Ulam-Warburton automaton* en de *Sierpinski gasket* zijn nauw met elkaar verbonden; het verband ertussen (veel dieper dan ogenschijnlijk bekend) wordt tentoongespreid. Mooie bijdrage! (8) J. Dauben en M. Senechal, 'Math at the Met'. Een verhaal over het Metropolitan Museum of Art in New York, met name over wat er binnen te zien is op het gebied van bètawetenschappen. Prachtige illustra-

ties in kleur in deze bijdrage, alsmede uitvoerige referenties, onder andere over getallen, spellen, ruimte en tijd. (9) D. Richetan, 'Circular reasoning; who first proved that C divided by d is a constant'. Een verhaal, zich uitstrekkende over de tijd, aangaande het feit dat de verhouding van de omtrek van een cirkel tot de straal ervan constant is. Goed historisch overzicht. (10) V. Blåsjö, 'The myth of Leibniz's proof of the fundamental theorem of calculus'. Zie NAW 5/6 (2015), 46–50. (11) A. Shell-Gallash, 'The spyrograph and mathematical models from nineteenth century Germany'. Er bestaan verbanden tussen beide zaken, zoals de inversor van Peaucellier en Schillings lijnen producerende modellen. Deze en andere worden beschreven, voorzien van kleurenillustraties. (12) J. Stillwell, 'What does 'depth' mean in mathematics?'. Inderdaad, het begrip 'diepte' wordt hier uitgediept. Als kapstokken worden gebruikt: Dirichlets stelling over priemgetallen in een rekenkundige rij, Poincarés vermoeden (bewezen door Perelman), Fermats laatste stelling (bewezen door Wiles), de classificatie van de eindige simpele groepen (1880–1981). Maar er is meer te vinden in deze bijdrage.

Dan de 2017-bundel: (a) E. Lamb, 'The largest known prime number'. Ten tijde van de publicatie van dit artikel ging het om de vondst van het 49ste Mersenne-priemgetal. Achtergronden hiervan zijn beschreven. (b) S. Roberts, 'An infinitely rich mathematician turns 100'. De getallentheoreticus Richard Guy werd 100 in 2016. Het artikel vertelt over zijn leven en werk en invloed. (c) G. L. Alexanderson en L. F. Klosinski, 'Ramanujan in bronze'. Het artikel geeft een overzicht over leven en werk van Ramanujan en Hardy, maar veel meer nog over een buste-beeld van Ramanujan dat na vele omzwervingen door Alexanderson werd verworven op een veiling voor slechts 500 dollar. (d) L. Riddle, 'Creating symmetric fractals'. Deze worden met herhaalde-functie-systemen, abstracte algebra en het tellen van pixels voortgebracht. Kleurenafbeeldingen op glanspapier verlichtigen de bijdrage. (e) N. Kasraei, Y. Kourian en M. Madavinejad, 'Girth for domes: An analysis of three Iranian domes'. Het gaat hier om de koepel van de Yazd Jame-moskee en de inwendige en uitwendige koepel van de Saveh Jame-moskee te Iran. Uitvoerig worden de constructies beschreven. Ook hier kleurenafbeeldingen op glanspapier. (f) S. Breen en A. O'Shea, 'Threshold concepts and undergraduate mathematical teaching'. Het artikel bespreekt 'drempelbegrippen' oftewel begrippen die, eenmaal doorzien, toegang geven tot ontwikkeling van deelgebieden van de wiskunde. Toegelicht is dat onder andere voor limieten, functies, nevenklassen en factorgroepen van groepen, juist ook in verband met onderwijs aan eerstejaarsstudenten. (g) V. Blåsjö, 'How to find the logarithm of any number using nothing but a piece of string'. Verhaald wordt over het 'Leibniz-recept', als gedaan in de zeventiende eeuw voor de kettinglijn. (h) C. H. Se'quin en R. Shian, 'Rendering Pacioli's rhombicuboctahedron'. Uitvoerig wordt beschreven, voorzien van zwart-wit-illustraties en kleurenillustraties, hoe de rhombicuboctahedron voorkomend op het schilderij *Ritratto di Fra'Luca Pacioli* uit 1495, kan worden weergegeven door middel van meetkunde en computertechnieken, deels via oude technieken en deels via moderne. (i) J. Gray, 'Who would have won the Fields medal 150 years ago?'. De auteur suggereert, met redenen omkleed, wie daarvoor in aanmerking hadden kunnen komen, aannemende dat een (met namen omklede) commissie van beoordelaars aan het werk was geweest. Hij komt dan uit bij Cremona en Gibbs als winnaars. Aardig speculatief artikel. (j) J. P. Marquis, 'Stairway to heaven: The abstract method and

levels of abstrahism in mathematics'. Voor de inhoud van deze meer dan voortreffelijke bijdrage, zich afspelende in de twintigste eeuw, zij direct verwezen naar *The Mathematical Intelligencer* 38(3) (2016), 41–51.

De hier niet behandelde bijdragen uit de 2016-bundel gaan onder andere over didactiek-aspecten, Hardy en zijn *A Mathematician's Apology*, fractalen met foto's, grafentheorie, combinatoriek, Einstein en Pythagoras, Oresmes beginsel van kromming, opsporen van fouten in grote databestanden, waarschijnlijkheidsrekening en statistiek. Idem dito voor de 2017-bundel: wiskundig geproduceerde zaken in de praktijk, *quantum strings* en random groei, dingen verkregen door achteruit redeneren, projectieve maanschaduwmeetkunde, rekenen op je vingers als kind, didactiek en leerprocessen, paradoxen en beperkingen in de wetenschap, Bayesiaanse hersenen, voorspellingen via statistiek. Dit alles overziende, kan ik beide bundels van harte aanbevelen. Misschien die van 2017 iets meer dan die van 2016?

Robert van der Waall



Stefan Müller-Stach (Hrsg.)

Richard Dedekind

Was sind und was sollen die Zahlen?

Stetigkeit und Irrationale Zahlen

Springer 2017

x + 204 p., prijs €29,99

ISBN 9783662543382

Het boek bevat de teksten *Was sind und was sollen die Zahlen?* [WZ] en *Stetigkeit und Irrationale Zahlen* [SZ] van Richard Dedekind. Het boek behoort tot de Springer-reeks 'Klassische Texte der Wissenschaft'. Elk boek uit die reeks heeft nagenoeg dezelfde structuur: een of ander beroemd werk wordt in oorspronkelijke druk in het midden opgenomen en van gedetailleerd commentaar voorzien. Dat is de kern van zo'n boek. Eran voorafgaand is onder andere een korte biografie van de auteur van het te bespreken werk te vinden en wat de aanleiding is geweest voor de auteur om het werk te schrijven; erna wordt de invloed en receptie-geschiedenis van het werk beschreven. Zo is ook de structuur van het hier te bespreken boek. De teksten WZ en SZ zijn door Stefan Müller-Stach van een uitgebreide en gedetailleerde toelichting voorzien; de gedrukte teksten WZ en SZ maken de helft uit van het boek van tweehonderd pagina's en bevinden zich zoals gebruikelijk in de reeks in het midden van het boek. Dit middendeel wordt voorafgegaan door een historische inleiding en een overzicht van het onderzoek dat Dedekind deed naar het getalbegrip. Na het middendeel volgt een beschrijving van de receptiegeschiedenis en de invloed van de werken WZ en SZ samen met een overzicht van de stand van zaken van het onderzoek betreffende het getalbegrip. Het middendeel is het meest interessante stuk van het hele boek en is zeer goed te volgen; er is weinig voorkennis voor nodig. De toelichting die Müller-Stach geeft is goed en erg nuttig. Het probleem van dit boek is dat alles behalve het middendeel voor menig een niet zo makkelijk leesbaar zal zijn. In de eerste twee hoofdstukken behandelt Müller-Stach immers veel zaken die niet direct met WZ of SZ uit hoofdstuk 3 te maken hebben. De lezer

wordt blijkbaar wel verondersteld van die zaken kennis te hebben. Om er een aantal te noemen: categorietheorie, theorie van recursie en berekenbaarheid, modeltheorie, algebraïsche getaltheorie en zelfs klassenlichamentheorie. Doordat er zoveel behandeld wordt wat niet direct relevant is voor het bestuderen van WZ en SZ wordt ook het geduld van de lezer erg op de proef gesteld. Een punt wat ik niet zo kon waarderen is het volgende. In hoofdstuk 2 noemt Müller-Stach de recursiestelling uit WZ (Satz 126) een van de belangrijkste stellingen van Dedekind en dan laat hij nog twee versies ervan volgen. In het artikel van Müller-Stach ‘Richard Dedekind: Style and Influence’ (arXiv:1612.03326) noemt hij het zelfs het belangrijkste resultaat van WZ. Veel van de onderwerpen overigens die hij in dat artikel schrijft vindt u ook in zijn boek. Müller-Stach mag best die mening hebben maar mij interesseert meer welk resultaat Dedekind het belangrijkste vindt van WZ. Wat Dedekind het belangrijkste resultaat vindt is vermeld in zijn beroemde brief aan Keferstein, waarover later meer.

Laten we overgaan tot de kern van het boek; het is zeer goed mogelijk u bij het lezen te beperken tot die kern. Het meest interessante deel van het boek is behalve de teksten van WZ en SZ, hoofdstuk 4 waarin uitleg gegeven wordt van de teksten WZ en SZ en waarin de inhoud ervan samengevat wordt in modern taalgebruik. De oorspronkelijke tekst WZ die uit 172 items bestaat (‘Satz’, ‘Erklärung’, ‘Bemerkung’...), wordt per item uitgebreid en uitstekend van uitleg voorzien. Een echte ommissie is hoe Müller-Stach omgaat met de voor het begrip van WZ belangrijke brief van Dedekind van 27 februari 1890 aan Hans Keferstein, een ‘Oberlehrer’ in Hamburg. Keferstein had in 1890 een artikel gepubliceerd bij de Mathematischen Gesellschaft Hamburg over de boeken van Frege en Dedekind betreffende het getalbegrip; wat Dedekind betreft gaat het over de tekst WZ. Dedekind voelde zich gedwongen in 1890 om te antwoorden met een essay dat hij op 9 februari 1890 aan Keferstein stuurde en waarin hij Keferstein bekritiseerde op drie punten. Hij stuurt het naar Keferstein met het verzoek het te publiceren in hetzelfde tijdschrift waarin Keferstein zijn paper publiceerde of, als Keferstein overtuigd was geraakt van zijn eigen ongelijk, daarover een verklaring te publiceren. Dedekind liet het aan Keferstein zelf over hoe ermee om te gaan. Eén van de drie punten was dat Keferstein het belangrijke kettingbegrip uit WZ wilde schrappen, wat zou inhouden dat de mathematische inductie onmogelijk werd. Het kettingbegrip houdt in: laat φ een afbeelding zijn van een verzameling X naar zichzelf; een deelverzameling Y van X heet een ketting als $\varphi(Y)$ bevat is in Y . Op 14 februari 1890 bevestigt Keferstein de ontvangst van het essay maar is niet van plan zijn mening betreffende het kettingbegrip te herzien. Dedekind stuurt hem op 27 februari 1890 een lange brief waarin hij op briljante wijze de ontwikkeling van zijn ideeën uiteenzet die ten grondslag liggen aan WZ. Hij schrijft dat zijn aannames zeer zorgvuldig zijn gekozen en dat dat zeker het geval is voor het kettingbegrip dat Keferstein wil elimineren. Voor meer informatie zie het boek *From Frege to Gödel* van Jean van Heijenoort. Het enige wat Müller-Stach over deze brief meldt in het eerste hoofdstuk is dat hij de brief als bijlage opgenomen heeft omdat deze een zeer goede inkijk geeft in de denkwijze van Dedekind. Op deze brief moet je zeker uitgebreid ingaan als je WZ behandelt. Deze brief geeft bovendien antwoord op de vraag wat Dedekind het belangrijkste vindt van WZ; in de aanvang van de brief formuleert Dedekind een tweetal vragen waar WZ antwoord op moet geven. Meegenomen

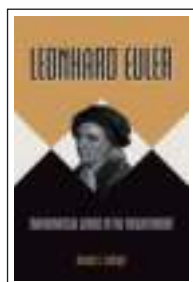
is in ieder geval dat de brief nu in het Duits beschikbaar is. In het boek van Jean van Heijenoort staat de brief afgedrukt in het Engels.

De paragraafsgewijze behandeling van SZ is kort maar daarom zeker niet minder interessant. Het begrip ‘Stetigkeit’ staat daarbij centraal. Dedekind definieert in paragraaf 4 van SZ het begrip voor de getallenrechte als volgt: “Zerfallen alle Punkte der Geraden in zwei Klassen von der Art, dass jeder Punkt der ersten Klasse links von jedem Punkt der zweiten Klasse liegt, so existiert ein und nur ein Punkt, welcher diese Einteilung aller Punkte in zwei Klassen, diese Zerschneidung der Geraden in zwei Stücke, hervorbringt.” Maar als Dedekind eenmaal zijn sneden ingevoerd heeft en tot reële getallen heeft verklaard toont hij in paragraaf 5 van SZ aan dat dit begrip ook van toepassing is op de verzameling sneden: “Zerfällt das System R aller reellen Zahlen in zwei Klassen U_1, U_2 von der Art, dass jede Zahl α_1 der Klasse U_1 kleiner ist als jede Zahl α_2 der Klasse U_2 , so existiert eine und nur eine Zahl α , durch welche diese Zerlegung hervorgebracht wird.” Müller-Stach merkt op dat dit begrip ‘Stetigkeit’ tegenwoordig aangeduid wordt met ‘Volständigkeit’. Deze opmerking is belangrijk om te begrijpen wat Dedekind met de titel van SZ bedoelt. Het is dan ook niet verstandig om het woord ‘Stetigkeit’ zomaar te vertalen met ‘Continuïteit’. De uitleg over Dedekind-sneden door Müller-Stach in modern taalgebruik is uitgebreid. Dat er ook sneden zijn die niet voortgebracht worden door rationale getallen toont hij zoals meestal gebeurt, aan de hand van de Dedekind-sneede van $\sqrt{2}$; Dedekind doet het in paragraaf 4 van SZ voor $\sqrt{n}$ met n een positief geheel getal dat zelf geen kwadraat is van een geheel getal, om op die manier te laten zien dat er oneindig veel sneden zijn die niet voortgebracht worden door een rationaal getal. Dedekinds indirecte bewijs is overigens verrassend. Om aan te tonen dat de geordende lichamen gevormd door Dedekind-sneden, Cantors fundamenteaalrijen en intervallschakelingen isomorf zijn verwijst Müller-Stach naar het boek van Heinz-Dieter Ebbinghaus e.a., *Zahlen* (Springer, 1992). Het is aan te bevelen om de eerste twee hoofdstukken van dat boek eens door te nemen, ze zijn geschreven door Klaus Mainzer. De meesten van ons hebben waarschijnlijk slechts op één manier kennis gemaakt met de introductie van de reële getallen, in dit boek worden meerdere manieren geïntroduceerd en met elkaar vergeleken. Dat er ook problemen zijn met Dedekind-sneden, waarover Müller-Stach overigens niets meldt, wordt verwoord door Freudenthal in *Euclides* 24(3), jaargang 1948/1949: “De snede van Dedekind hoort niet thuis in de universitaire leerboeken der analyse als grondslag van de theorie der reële getallen. De snede van Dedekind is een gezochte en gekunstelde methode, die aanvankelijk elegant lijkt, maar zeer omslachtige en onelegante bewijzen vereist, wanneer men de theorie der reële getallen hierop wil baseren...” Indien men een volledige uitwerking wil zien van de eigenschappen van Dedekind-sneden dan is het aan te bevelen om de hoofdstukken 3 en 4 van het boek *Grundlagen der Analysis (Foundations of Analysis)* van Edmund Landau eens te bekijken. Men zal direct overtuigd zijn van Freudenthals bezwaren; maar het werk dat Landau daar verzet zal toch moeten gebeuren. Freudenthal voert de reële getallen in met oneindige decimaalbreuken. In SZ schrijft Dedekind ook dat het bewijzen van alle eigenschappen van de reële getallen omslachtig is; maar ik heb het idee dat hij in paragraaf 6 van SZ aangeeft hoe die zaken toch elegant te bewijzen. Het voorbeeld dat hij kiest, is de eigenschap $(a+b)c = ac + bc$ in de reële

getallen. Wellicht wil hij daar het volgende zeggen: stel dat je die eigenschap kent voor de rationale getallen, dan kies je drie rijen rationale getallen $\{a_n\}$, $\{b_n\}$ en $\{c_n\}$ die naar a , b en c convergeren; omdat $(a_n + b_n)c_n = a_n c_n + b_n c_n$ geldt voor rationale getallen, volgt de eigenschap dan ook voor de limieten. Voorgaande is makkelijk in te zien als je de reële getallen identificeert met de punten op de getallenrechte; maar de betekenis van de redenering wordt anders en abstracter als je de formules interpreteert binnen de verzameling Dedekind-snedes of de verzameling equivalentieklassen van Cauchy-rijen. Dedekind verwijst in de voornoemde paragraaf naar de continuïteit van de functies maar werkt het niet verder uit. Müller-Stach besteedt er helemaal geen aandacht aan en werkt het dan ook niet uit en dat is toch jammer gezien het moeizame werk van Landau en de bezwaren van Freudenthal.

In hoofdstuk 5 'Rezeptionsgeschichte' en hoofdstuk 6 'Wirkungsgeschichte und Positionen der Forschung' worden veel onderwerpen beknopt genoemd die meestal indirect met Dedekind te maken hebben: onder andere het werk van Peano, Noether, Van der Waerden, Hilbert en Skolem, het programma van Hilbert, recursieve functies en de theorie van berekenbaarheid, de ZF-axioma's. Müller-Stach verwijst bij die onderwerpen naar zijn uitgebreide literatuurlijst van 256 boeken of artikelen. Deze laatste twee hoofdstukken samen met de literatuurlijst stellen de lezer prima in staat om onderwerpen die hem of haar interesseren verder te bestuderen. Er valt zeker voor iedereen wel wat te ontdekken. Tot slot: het centrale deel van het boek dat bestaat uit de teksten van WZ en SZ van Dedekind en de toelichting van Müller-Stach zijn zeer goed te lezen en zeker nuttig om te bestuderen. Wat het overige gedeelte betreft zal iedereen een eigen modus moeten vinden hoe daarmee om te gaan.

Math Dicker



Ronald S. Calinger

Leonhard Euler
Mathematical Genius in the Enlightenment

Princeton University Press, 2016
xvii + 669 p., prijs \$55.00
ISBN 9780691119274

Leonhard Euler (1707–1783), een van de meest fascinerende wiskundigen, alleen al door de haast niet te bevatten omvang van zijn werk (meer dan 25000 pagina's), en door de veelzijdigheid daarvan. Door indrukwekkende resultaten, ook door zijn invloed op tijdgenoten in vele brieven met 275 correspondenten, ook door zijn aantekeningen in zijn 'Notizbuch', en door zijn methode van werken heeft hij een enorme nalatenschap voor ons gecreëerd. We zien hoe Euler gecompliceerde berekeningen kon uitvoeren en die inpassen in diepe theorie; toepassingen en onderwijs zien we in zijn werk.

Zijn publicaties zijn in de getaltheorie, analyse in vele verschijningsvormen, meetkunde, logica, grafentheorie en waarschijnlijkheidsrekening; in de natuurkunde: mechanica, akoestiek en optica, in astronomie en in muziek.

Hij leefde in Basel (1707–1727), Sint-Petersburg (1727–1741), Berlijn (1741–1766) en weer Sint-Petersburg (1766–1783). Euler had

contacten met grote wiskundigen, filosofen en staatshoofden uit die tijd. Hij had een omvangrijke familie en daarbij het vermogen zich te concentreren in een hectisch familieleven. Van zijn omvangrijke werk is nog niet alles gepubliceerd. Welke aspecten moeten in een biografie van deze veelzijdige persoon beschreven worden?

In dit boek worden hoofdzakelijk aspecten beschreven over het leven van Euler, in alle verschijningsvormen. Een prachtige documentatie van de posities die hij ingenomen heeft en van personen waarmee hij in contact stond. We krijgen een mooi tijdsbeeld van de intellectuele omgeving waarin Euler geleefd en gewerkt heeft. We zien aspecten van zijn familieleven en hoe hij daarmee omging. De auteur heeft nieuwe bronnen bestudeerd en toegankelijk gemaakt. Een prachtig uitgangspunt voor oriëntatie op deze aspecten van deze grote geleerde en zijn rol in zijn tijd.

Een biografie zou niet alleen moeten bestaan uit het vermelden van feiten. Ik mis in dit boek vragen, evaluaties, overzichten en vooral inhoudelijke conclusies over de wiskundige Euler en zijn invloed op de wiskunde, op de natuurkunde en op andere intellectuele aspecten van ons leven. Iemand met een formidabele kennis over dit onderwerp, zoals deze auteur, zou ons een grote dienst bewijzen met *het formuleren van historische vragen en historische interpretaties van dit materiaal*.

Het boek is minder overzichtelijk dan ik zou willen. Eenzelfde onderwerp wordt in dit boek vaak op heel verschillende plaatsen besproken. Het zou beter zijn om elk onderwerp systematisch en gestructureerd als aparte paragraaf te behandelen. En het helpt de lezer ook al niet dat de algemene index ontoereikend is; voor één onderwerp wordt (willekeurig?) wel of niet verwezen naar een pagina waar dit voorkomt.

De auteur geeft af en toe wiskundige uitleg. Soms begrijp ik niet wat de auteur wil zeggen. Formules komen haast niet voor, en waar ze er wel zijn zien we fouten. Hoe kun je zo over een groot wiskundige schrijven? Ik geef een paar voorbeelden.

Het lijkt mij onwaarschijnlijk dat Euler de waarde van π als 3.14159365... gebruikte zoals op pagina 289 beweerd wordt (de zesde decimaal is fout). Eveneens is het onwaarschijnlijk dat Euler de waarde $e = 2.718281845904$ (pagina 204) gebruikte (de achtste en negende decimaal ontbreken, en $e \notin \mathbb{Q}$).

Op pagina 80 wordt een fragment uit een brief van Goldbach aan Euler (Moskou 1 december 1729) weergegeven waarin verteld wordt dat Fermat, Goldbach en Euler de vraag bestudeerden naar de primaliteit van $2^{2n-1} + 1$. Een wiskundige ziet dat dit getal voor elke $n \geq 1$ deelbaar is door 3, dus niet priem voor $n > 1$. We zien dat het hier gaat om de 'Fermat-getallen' $2^{2^{n-1}} + 1$. Iemand die deze kennis niet heeft, kan dan toch wel de brief van Goldbach zorgvuldig lezen en deze formule juist vermelden (zoals het overigens later wel goed op dezelfde pagina staat)? Waarom niet een wiskundige vragen het manuscript op dergelijke verschrijvingen te controleren? Die zou bovenstaande fouten kunnen corrigeren, en die zou zich direct afvragen of inderdaad Euler beweerde dat de diofantische vergelijking $89 = 11 \cdot x^2 + y$ geen oplossingen heeft (pagina 104).

De Latijnse tekst "...Fermatii observatio..." uit de brief van Goldbach aan Euler, Moskou 1 december 1729, wordt hier vertaald als "...Fermat's conjecture...", zie pagina 80. Het is een interessante vraag welke beweringen Fermat als vraag, als vermoeden of als stelling beschouwde; daar wordt hier aan voorbijgegaan.

Voor Goldbach (1690–1764) en Euler was deze terminologie in hun werk wel degelijk duidelijk. In de brief van Goldbach aan Euler,

Moskou 7 juni 1742, wordt zijn beroemde vermoeden (een vorm van: “elk even getal minstens 4 kan geschreven worden als de som van twee priemgetallen”) geformuleerd als “...eine conjecture hazardieren...” (bij mijn weten de eerste keer dat dit woord met deze betekenis in de wiskundige literatuur gebruikt wordt). Euler schrijft terug, Berlijn 30 juni 1742: “ein jeder numerus par eine summa duorum primorum sey, halte ich für ein ganz gewisses theorema, ungeachtet ich dasselbe nicht demonstrieren kann.” We zien dat Goldbach en Euler zorgvuldig onderscheid maakten tussen verschillende kwalificaties van een wiskundige uitspraak. De vertaling ‘observatio’ → ‘conjecture’ lijkt mij onjuist; het gaat voorbij aan historisch interessante vragen rond Fermat, Goldbach en Euler en ook over het later gebruik van het woord ‘conjecture’.

Terzijde: er bestaat ook het Nederlandse woord ‘conjectuur’, maar met een heel andere connotatie (als je een verminkt of onleesbaar manuscript probeert te ontcijferen kun je gissen wat er zou moeten staan: gissing, tekstverbetering).

Het *Basel-probleem*: bereken de som $\sum_{n>0} 1/n^2$, geformuleerd door Mengoli in 1650; Huygens, Leibniz, de Bernoulli's, Stirling, De Moivre waren niet in staat dit op te lossen. Euler maakte eerst berekeningen van een benadering door eindige sommen uit te rekenen (correct tot twintig decimalen). Euler voerde de *reële* functie in

$$\zeta(s) := \sum_{n>0} 1/n^s, \quad s \in \mathbb{R}.$$

In 1735 deed Euler de sensationele ontdekking dat $\zeta(2) = \pi^2/6$. De auteur van dit boek claimt op pagina 119 dat door eerdere berekeningen “apparently Euler saw that the answer to the problem was near to $\pi^2/6$.” Op pagina 107: “Euler must have seen that the exact sum of the Basel problem is near $\pi^2/6$.” Wat bedoelt de auteur met deze uitspraak? Euler wist dat de ‘exact sum’ gelijk is aan $\pi^2/6$. Bovendien, als historicus kun je zoiets beter als precies geformuleerde vraag, dan als ongefundeerde conclusie formuleren. We zouden de vraag kunnen stellen of Euler achteraf de berekening $\pi^2/6 = 1.6449340668482264...$ vergeleek met zijn eerdere afschattingen.

Euler vond op experimentele grond de functionaalvergelijking voor $\zeta(-)$. Deze en andere abstracte overwegingen brachten Euler waarschijnlijk op het spoor van de juiste waarde van $\zeta(2)$. Later berekende Euler $\zeta(2n)$ voor $2 \leq 2n \leq 26$, en verder gaf Euler een algemene formule voor alle $\zeta(2n)$ met $n \geq 1$. Een fascinerende geschiedenis, die veel verder gaat dan conclusies uit berekeningen.

Overigens, Riemann (1826–1866) beschouwde complexe getallen $z \in \mathbb{C}$ als exponenten in de definitie van $\zeta(z)$ en Riemann gaf een bewijs voor de functionaalvergelijking voor deze complexe functie, die we nu de Riemann-zëtafunctie noemen.

Op pagina 103 zien we hoe Euler in 1730 een bewering van Christian Wolff (1679–1754), dat $M_{11} := 2^{11} + 1$ een priemgetal zou zijn, weerlegt door op te merken dat $M_{11} = 2047 = 23 \times 89$. Jammer dat hierbij niet uitgelegd wordt dat Euler in 1750 een criterium formuleerde, en dat Lagrange een stelling bewees in 1775: *voor een priemgetal p met $p \equiv 3 \pmod{4}$ geldt dat $q := 2p + 1$ een priemgetal is dan en slechts dan als q een deler is van M_p* . We zien hoe Euler het bijzondere geval, een berekening, ziet als onderdeel van een algemene structuur. Dit boek laat dit niet zien.

Conclusie: Dit boek bevat weinig wiskundig materiaal, dat lijkt me een goede keuze van de auteur, maar wat er wel in staat is vaak fout of gebrekkig. Ontwikkelingen in de wiskunde waar Euler

een rol in speelde, worden niet uitgediept. *Jammer genoeg worden goede historische vragen over ontwikkelingen en begrippen in de wiskunde niet gesteld*. In deze aspecten schiet dit boek tekort.

Zo maar wat mooie details. Zie de discussie tussen Clairaut en Euler (pagina 206), waar een methode om primaliteit van een getal te testen van Euler wel subtiel maar onnodig genoemd wordt en getaltheorie in het algemeen bedoeld zou zijn om “de geest te oefenen”.

Of zie de geschiedenis over de fontein van Sanssouci waar getwijfeld werd of Euler deze toepassing van de wiskunde wel goed begreep (pagina's 312–314).

Op pagina 265 zien we hoe Euler vermeldt dat een resultaat (uit 1744) ten onrechte aan hem toegeschreven wordt, in plaats van aan Gerhard Andreas Müller (in een artikel uit 1743).

Op pagina's 422/423 zien we hoe Euler een resultaat nog niet naar de drukker stuurt omdat hij de prioriteit aan Lagrange laat. Hier zien we een wetenschapper van groot formaat, ook op dit vlak.

Waarom de titel van dit boek? De ‘eeuw van de verlichting’ wordt meestal gesitueerd in 1715–1789, een periode waar intellectuele en filosofische gedachten in Europa een grote ontwikkeling doormaakten. De bewoording is afkomstig van Immanuel Kant (1724–1804), zoals verwoord in zijn essay ‘Beantwortung der Frage: Was ist Aufklärung?’ Het leven van Euler viel vrijwel geheel samen met deze periode. Maar dat is niet de motivatie voor de titel van dit boek.

De Academie in Sint-Petersburg, opgericht in 1724 in opdracht van tsaar Peter de Grote (1672–1725), vanaf 1725 onder beleid van zijn weduwe Catharina I (Catharina de Grote, 1684–1727), had als doel wetenschappers de juiste omgeving voor hun onderzoek te geven. Met die gedachte werd Euler naar Sint-Petersburg gehaald.

Euler had grote interesse in het toepassen van zuivere wiskunde in praktische problemen maar vooral ook in onderwijs, in het verspreiden van wiskundige gedachten. In de periode 1760–1762 schreef Euler *Lettres à une princesse d'Allemagne sur divers sujets de physique et de philosophie*, uitgegeven in drie delen in Moskou 1768–1774, later herdrukt in Parijs 1787–1789. Dit was een reeks van 234 brieven geschreven aan Sophie Charlotte Friederike von Brandenburg-Schwedt en haar jongere zuster Louise. Zie E343 in het Euler-archief.

Dit werd een van de belangrijke documenten in de ‘eeuw van de verlichting’. Het gaf niet-wiskundigen inzicht hoe je zuivere wiskunde kunt ontwikkelen (diagrammen over doorsneden van verzamelingen werden precies uitgelegd, om maar iets te noemen), stap voor stap brengt Euler het materiaal op een hoger niveau, en hoe je wiskunde kunt toepassen (hoe construeer je een orgelpijp, hoe snel verplaatst licht zich, en nog veel meer). Deze onschatbare bron van informatie en uitleg over wiskundige en natuurkundige begrippen, en nog veel meer, werd een bron van informatie die ver buiten de kring van exacte wetenschappers een grote invloed had. Immanuel Kant, Johann Wolfgang von Goethe (1749–1832) en Arthur Schopenhauer (1788–1860) hebben dit werk gelezen, ze waren vol lof erover. Zie ook brieven 49 en 50 als reactie op een brief van Voltaire (1694–1725), zie pagina 34. De metafysica maakte plaats voor informatie en methoden uit de exacte wetenschappen. Euler heeft hierin een grote invloed op filosofen uit zijn tijd gehad. Daarom lijkt mij de titel van dit boek gerechtvaardigd; we vinden op pagina's 460–469 van dit boek een mooie beschrijving van dit werk van Euler en de invloed daarvan.

Dit boek geeft waardevolle informatie over het leven van Euler in al zijn facetten, en over de rol van Euler in de wetenschap van de achttiende eeuw.

Informatie over zijn publicaties, correspondenties en nog veel meer vinden we op The Euler Archive-website van de MAA: <http://eulerarchive.maa.org>.

Frans Oort



David Rowe

**A Richer Picture of Mathematics
The Göttingen Tradition and Beyond**

Springer International Publishing, 2018

xix + 461 p., prijs €169,00

ISBN 9783319678184

David Rowe is hoogleraar in de geschiedenis van de wiskunde, met als specialiteit de Duitse wiskunde van de negentiende eeuw. Deze gouden eeuw voor de Duitse wiskunde met als grootste namen Gauss, Riemann en Hilbert had als centrum het kleine provinciestadje Göttingen. Over de enorme betekenis van elk van deze drie voor de hedendaagse wiskunde kun je met gemak een lijvig boek vullen.

Het boek van Rowe bestaat uit een bundeling van ruim dertig artikelen geschreven in de periode 1984 tot 2013 voor de *Mathematical Intelligencer*, opgesplitst in zes delen, die elk nog weer zijn voorzien van een inleiding. De aanleiding voor deze uitgave was het vijftienvigjarige jubileum van Rowe als hoogleraar aan de Johannes Gutenberg Universiteit van Mainz.

Het boek bevat een veelheid aan feiten en verhalen. Wist U wie over Gauss sprak als een vos die met zijn dikke staart zijn sporen goed wist uit te wissen? Was het Abel en bij welke gelegenheid zei hij dat? U leest erover in het tweede hoofdstuk.

De hoofdrolspelers van het boek zijn Felix Klein en David Hilbert, die beiden hoogleraar waren te Göttingen in de perioden 1886–1913 en 1895–1930 respectievelijk. Klein zag zichzelf als de hoeder van de rijke wiskundetraditie in het Göttingen van Gauss en Riemann. In hoofdstuk 11 beschrijft Rowe op levendige wijze de felle competitie tussen Klein en Henri Poincaré over de uniformiseringsstelling voor Riemannoppervlakken. Ook hoe deze ontspoorde in een scherpe briefwisseling naar aanleiding van het gebruik door Poincaré van het woord ‘Fuchse’ functies. Aanvankelijk dacht de iets jongere Poincaré de zaak te kunnen sussen door ook het begrip ‘Kleinse’ functies in te voeren, maar dat bleek een vergissing en de rapen waren gaar. Klein wees Poincaré erop dat indien hij de relevante literatuur vanaf het begin van dit onderwerp had gekend (in het bijzonder die van Riemann uit 1857, Schwarz uit 1873 en Klein uit 1879) hij nooit de naam Fuchs zou hebben gebruikt. In zijn antwoord aan Klein ontkende Poincaré de naam Kleinse functie te hebben ingevoerd als *Widergutmachung*. En ach, het ging tenslotte maar over namen. “Name ist Schall und Rauch” citeerde hij uit Goethes *Faust*. Hierbij is het wellicht aardig de stelling van Vladimir Arnold, die overigens zelf een groot fan van Poincaré was, in herinnering te roepen: iedere naamgeving van een stelling of begrip in de wiskunde naar een zeker persoon is incorrect. Voorts is de stelling van Arnold ook van toepassing op zichzelf.

Uiteindelijk heeft Klein wel een beetje zijn gelijk gekregen en zijn eigen favoriete benaming ‘automorf’ is thans gebruikelijk: automorfe vormen en automorfe representaties staan centraal in het Langlands-programma. De felle competitie met Poincaré en het negatieve gekibbel over namen waren overigens de trigger voor de mentale instorting van Klein in 1882.

Het tweede deel van het boek gaat voornamelijk over Felix Klein. In het derde deel wordt de bloeiperiode onder Hilbert besproken, met als natuurlijk vervolg de relativiteitsrevolutie in deel vier. De voordrachten van Einstein in 1915 in Göttingen komen aan bod en Hilberts bijdrage aan de variationele formulering van de Einstein-veldvergelijking. Het was wederom een periode van ongekende bloei in Göttingen, waarin de beste wiskundigen zoals Minkowski, Hilbert, Weyl en Emmy Noether zich naast hun zuivere wiskunde ook diepgaand inlieten met de theoretische natuurkunde.

Het laatste deel van het boek bestaat uit nog wat losse eindjes. Is wiskunde kunst of is het een wetenschap? En een stukje over Coxeter, en als laatste een stukje over Dirk Struik. Het is een prachtig boek geworden waar ik met heel veel plezier in heb gelezen. Van harte aanbevolen.

Gert Heckman



Alex van den Brandhof

Priemwoestijnen

Prometheus, 2018

256 p., prijs €21,99

ISBN 9789044636833

Het boek gaat over de grote wiskundige ontdekkingen van de eenentwintigste eeuw. Een van de aardige kenmerken van dit boek is de nummering van de hoofdstukken. Niet hoofdstuk 1 tot en met 17, maar hoofdstuk 2001 tot en met 2017. Het deed me denken aan de Nederlandse familiegeschiedenis *Het zwijgen van Maria Zachea*, geschreven door Judith Koelemeijer. De hoofdstukken worden in dat boek geduid met de namen van familieleden. Familieleden met verschillende ervaringen. Ook dit boek *Priemwoestijnen* is een geschiedenis van uiteenlopende vermoedens en bewijzen van soms zeer kleurrijke wiskundigen.

In elk hoofdstuk wordt een hoogtepunt uit de wiskunde belicht. Het lijkt me niet eenvoudig om een keuze te bepalen. De zeventien hoogtepunten verschillen enorm van elkaar. Kun je ze wel met elkaar vergelijken? Moeten we het zien als een profieltekening van een pittige Alpenetappe van een Tour de France? Een berg van de eerste categorie is dan toch ‘Het Poincaré-vermoeden’ uit 2003. Een hoogtepunt uit de topologie, een deelgebied van de wiskunde met als koosnaampjes rubbermeetkunde of kleimeetkunde. In deze meetkunde maken we geen onderscheid tussen de omcirkelde driepuntige ster van Mercedes-Benz en zo’n heerlijke bretzel (zoute krakeling met drie gaten — in Amerika heet het pretzel) uit de Beierse keuken. Voor de geïnteresseerde leek, ook al doet auteur Van den Brandhof zijn uiterste best om het goed uit te leggen — meer afbeeldingen had ook gemogen — is dit geen gemakkelijk hoofdstuk. Zeer leesbaar is wel de anekdote van de

Rus Grigori Perelman die drie jaar later na de publicatie van de lijst van de zeven millenniumproblemen de wiskundewereld verbaasde met het oplossen van één van die problemen. We komen dan bij de voor de hand liggende vraag: voor wie is dit boek geschreven?

Van den Brandhof beantwoordt zelf deze vraag op pagina 11: “Ik heb dit boek echter geschreven voor mensen zonder veel wiskundige voorkennis.” Menig wiskundedocent van de middelbare school zal er hier en daar toch een flinke kluif aan hebben om alles goed te doorgronden. Bijvoorbeeld de vergelijking van Turán op pagina 190:

$$\sum_{p < x} (\ln(p))^2 + \sum_{pq < x} \ln(p) \ln(q) = 2x \ln(x) + O(x).$$

Ook de auteur zelf vindt dat deze fundamentele formule niet op deze plek uitgelegd moet worden. Voor een groot publiek is dit interessante boek niet geschreven. Je hebt wel degelijk wat wiskundekennis en vaardigheden nodig.

Waar gaan die hoogtepunten over? Sowieso vier mooie hoofdstukken over priemgetallen, te weten rekenkundige priemrijen van 2004, het *abc*-vermoeden in 2012, priemtwelingen van 2013 en priemwoestijnen van 2014. Over meetkunde: het Poincaré-vermoeden van 2003, de Erdős–Mordell-ongelijkheid van 2007 en vlakvullende vijfhoeken van 2017. Over spellen: de engel en de duivel van 2006, boter, kaas en eieren uit 2009 en het kaartspel Set van 2016.

Wat de titel van het boek betreft: die dekt niet de inhoud van het boek, maar een substantieel deel van het boek gaat over priemgetallen. Priemwoestijnen vinden we, al eerder vermeld, terug in hoofdstuk 2014. Het is boeiend om te lezen hoe Paul Erdős op jonge leeftijd van zijn vader te horen kreeg, niet alleen wat een priemgetal is en dat er oneindig veel van zijn, maar dat stukken van de getallenlijn waar geen priemgetallen in voorkomen priemwoestijnen heten. Hij leerde ook hoe je priemwoestijnen kunt construeren van willekeurige lengte maar dat dit niet wil zeggen dat je dan ook weet wat de lengte is van de langste priemwoestijn. In hoofdstuk 2014 wordt ook vermeld dat eind negentiende eeuw het bewijs van de priemgetalstelling wordt geleverd, bijna gelijktijdig maar onafhankelijk van elkaar, door Jacques Hadamard en Charles de la Vallée Poussin. De stelling houdt in dat de afstand $P_{n+1} - P_n$ tussen twee opeenvolgende priemgetallen ongeveer gelijk is aan de natuurlijke logaritme van P_n . En dan lezen we een spannend verhaal over de ontwikkeling en vooruitgang van het vinden van de lengte van de langste priemwoestijn en over Terence Tao die het priemwoestijnvermoeden van Erdős oploste.

Kun je er als docent iets mee in de klas of in de collegezaal? Zeker. Bij wiskunde B (en zeker bij wiskunde D) in bovenbouw vwo kun je mooi ‘De Erdős–Mordell-ongelijkheid uit 2007’ presenteren. In 1935 stond in een rubriek ‘Advanced Problems’ (no. 3750) van *The American Mathematical Monthly* onder andere het volgende meetkundeprobleem: Vanuit een willekeurig punt O binnen een gegeven driehoek ABC worden de loodlijnen OP , OQ en OR op de zijden getekend. Bewijs dat $OA + OB + OC \geq 2(OP + OQ + OR)$. Het lijkt zinvol om de studenten het bewijs eerst zelf te laten proberen. Het is echt geen schande als ze er niet uitkomen. Pogingen mogen ook mislukken. Maar het is wel boeiend om later te vertellen over de vele (geslaagde) pogingen en om tot slot een elegant bewijs te presenteren met als doel de schoonheid van meetkunde te laten zien. Het bewijs van het tweetal Claudi Alsina en Roger Nelsen is echt heel fraai.

Hoofdstuk 2012 ‘Het *abc*-vermoeden’ is een heel geschikt hoofdstuk om het met studenten over te hebben. Je moet je wel inleven in nieuwe woorden, bijna Martin Toonder-achtig. We maken kennis met getallen die kras zijn, superkras zelfs, getallen die pips zijn en via de operatie radicaal kun je een kras getal pips maken. Dit heb je allemaal nodig om het *abc*-vermoeden te kunnen begrijpen. Voor de leerling in de bovenbouw van het vwo is het voldoende om de exponentiële vergelijking $g^k = c$, waarbij g en c bekend zijn, op te kunnen lossen. Desnoods zonder logaritme maar wel met behulp van de grafische rekenmachine. En we lezen dat als het *abc*-vermoeden echt bewezen kan worden, er dan weer andere zaken gelden.

Vlakvullende vijfhoeken is een (laatste) hoofdstuk dat prachtig omgezet kan worden in leerlingmateriaal. We lezen wanneer een tegel vlakvullend is. Er wordt helder uitgelegd dat convexe vlakvullende tegels niet meer dan zes zijden kunnen hebben. De vlakvullende eigenschap van tegels met drie, vier of zes zijden is zo uitgelegd maar die van die vijfhoeken is een stuk ingewikkelder. Martin Kindt schreef al eens over de Caïro-tegels. Dat gebeurt hier ook. En dan krijgen we de ontwikkeling te lezen van de classificatie van vlakvullende convexe vijfhoeken. Met als hoogtepunt het bewijs van de Franse wiskundige Michaël Rao dat er niet meer dan vijftien soorten zijn. En dan nog wel een bewijs met behulp van de computer. Computerbewijs? Dat was de auteur al eerder tegengekomen bij het bewijs van de vierkleurenstelling. In zijn geboortjaar 1976 hadden wiskundigen de computer voor het eerst ingezet om een stelling te bewijzen. Met het bewijs (van Andrew Wiles), van de laatste stelling van Fermat, één van de drijfveren, zo bekend de auteur, om dit boek te schrijven.

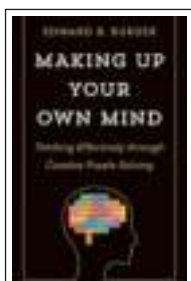
Er is nog een achttiende hoogtepunt, het boek zelf. Een must, ik ben er enthousiast over. Aanschaffen dus als u het nog niet gedaan heeft. Het boek hoort niet alleen thuis in de mediatheek van de middelbare school maar ook in de boekenkast van elke wiskundedocent en elke wiskundestudent. Natuurlijk had ik graag gekleurde plaatjes gezien, bijvoorbeeld bij de hoofdstukken over het kaartspel Set en Vlakvullende vijfhoeken. Zeker zijn ook sommige bronnen niet zo toegankelijk voor veel lezers, pittige wiskunde dus. Maar er is toch veel heldere uitleg, leuke smeuke anekdotes en overzichtelijke geschiedenis van nieuwe inzichten en ontwikkelingen. Ik merk bijvoorbeeld bij de ‘De Erdős–Mordell-ongelijkheid uit 2007’ dat ik zelf nieuwsgierig word hoe Erdős op dit probleem is gekomen. De auteur zet je ertoe aan om op zoek te gaan naar de driehoeksformule van Euler (1765) en het bewijs ervan. Wat die formule inhoudt? Laten we met d de afstand aangeven tussen de middelpunten O en I van respectievelijk de omgeschreven en de ingeschreven cirkel van driehoek ABC . De formule van Euler geeft dan een verband tussen deze afstand d en de beide stralen R (van de omgeschreven cirkel) en r (van de ingeschreven cirkel): $d^2 = R^2 - 2 \cdot r \cdot R$.

Al eerder heb ik opgemerkt dat sommige hoofdstukken omgezet kunnen worden, volgens een activerende werkvorm, in uitdagend student/leerling materiaal. Aan de slag dus. *Jacques Jansen*

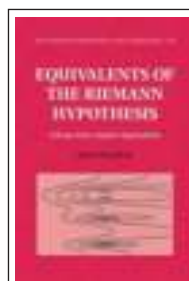
Erratum

In de bespreking van Bryan Hayes’ *Foolproof* in het decembernummer staat abusievelijk vermeld dat Bryan Hayes Senior editor is bij Scientific American. Dit moet zijn Senior writer voor American Scientist.

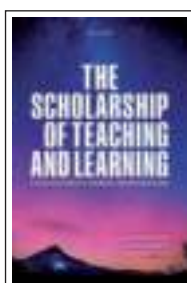
Recent verschenen publicaties. Als u een van deze boeken wilt bespreken of als u suggesties heeft voor andere boeken voor deze rubriek, laat dit dan per e-mail weten aan reviews@nieuwarchief.nl.



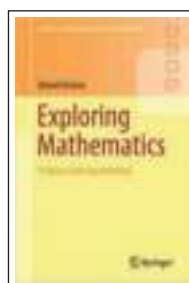
Edward B. Burger
Making Up Your Own Mind
 Thinking Effectively through Creative
 Puzzle-Solving
 Princeton University Press, 2018
 ISBN 9780691182780
press.princeton.edu/titles/14166.html



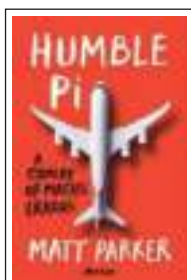
Kevin Broughan
Equivalents of the Riemann Hypothesis
 Volume 1: Arithmetic Equivalents
 Volume 2: Analytic Equivalents
 Cambridge University Press, 2017
 ISBN 9781108178228
 ISBN 9781108178266
doi.org/10.1017/9781108178228
doi.org/10.1017/9781108178266



Jacqueline Dewar, Curtis Bennett, Matthew
 A. Fisher
**The Scholarship of Teaching and
 Learning**
 A Guide for Scientists, Engineers, and
 Mathematicians
 Oxford University Press, 2018
 ISBN 9780198821212
oup.com/academic/product/9780198821212



Daniel Grieser
Exploring Mathematics
 Problem-Solving and Proof
 Springer, 2018
 ISBN 9783319903217
springer.com/9783319903194



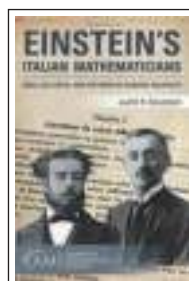
Matt Parker
Humble Pi
 A Comedy of Math Errors
 Penguin Books, 2019
 ISBN 9780241360231
penguin.co.uk/books/300640/humble-pi/9780241360231



Benedict Gross, Joe Harris, Emily Riehl
Fat Chance
 Probability from 0 to 1
 Cambridge University Press, 2019
 ISBN 9781108728188
cambridge.org/9781108728188



Seth Sullivant
Algebraic Statistics
 American Mathematical Society, 2018
 ISBN 9781470435172
bookstore.ams.org/gsm-194



Judith R. Goodstein
Einstein's Italian Mathematicians:
 Ricci, Levi-Civita, and the Birth of General
 Relativity
 American Mathematical Society, 2018
 ISBN 9781470428464
bookstore.ams.org/mbk-113



Brad G. Osgood
**Lectures on the Fourier Transform and
 Its Applications**
 American Mathematical Society, 2019
 ISBN 9781470441913
bookstore.ams.org/amstext-33



C. Herbert Clemens
Two-Dimensional Geometries
 A Problem-Solving Approach
 American Mathematical Society, 2019
 ISBN 9781470447601
bookstore.ams.org/amstext-34