

Inhoud | Contents

Artikelen | Features

- Interview | Interview**
 241 Sir Roger Penrose: A passion for patterns, puzzles and physics
Nicos Starreveld, Raf Bocklandt
- Onderzoek | Research**
 246 Fluctuations of Markov processes and a connection to Hamilton–Jacobi equations
Richard C. Kraaij
- Evenement | Event**
 251 BIMS II: Wiskunde speelt grote rol in ons dagelijks leven
Lisa Hernandez Lucas, Tetyana Kadankova
- Onderzoek | Research**
 254 Divisibility by 16 of class numbers in families
Djordjo Milovic
- Reis naar het bewijs | Trip to the Proof**
 259 How I discovered an ‘automatic’ transcendence proof of the formal power series π
Jean-Paul Allouche
- Maatschappij | Society**
 263 Hoe een president/burgemeester/voorzitter te kiezen?
Harrie de Swart
- Geschiedenis | History**
 271 De geschiedenis van het tijdschrift Pythagoras, deel 3: Langs de rand van de afgrond en toch gered; de periode vanaf 1985
Martinus van Hoorn, Jan Guichelaar
- In Memoriam | Obituary**
 280 Ton Levelt: Wiskunde noopt tot bescheidenheid
Gert Heckman
- Onderzoek | Research**
 282 Mathematics for Big Data
Alessandro Di Bucchianico, Laura Iapichino, Nelly Litvak, Frank van der Meulen, Ron Wehrens
- Boekbespreking | Book Review**
 291 De kwadratuur van de cirkel en de Banach-Tarski-paradox
K. P. Hart
- Onderwijs | Education**
 295 De Taalkunde Olympiade
Milan Lopuhaä-Zwakenberg

Rubrieken | Departments

- 235 Redactioneel
Raf Bocklandt
- 236 Agenda
Margriet Oomen
- 238 Nieuws
Margriet Oomen
- 269 Het keerpunt van Hans Ree
Daan Mulder
- 287 10 jaar ‘In de verdediging’
Geertje Hek
- 300 Boekbesprekingen
Hans Cuypers, Hans Sterk

Uitgelicht

241



Sir Roger Penrose wordt geïnterviewd door Nicos Starreveld en Raf Bocklandt.

263



Harrie de Swart beschrijft een methode voor het kiezen van een president, burgemeester of voorzitter.

Colofon

Het Nieuw Archief voor Wiskunde is een uitgave van het Koninklijk Wiskundig Genootschap en verschijnt vier maal per jaar. Het tijdschrift richt zich op eenieder die zich beroepsmatig met wiskunde bezighoudt, als academisch of industrieel onderzoeker, student, leraar, journalist of beleidsmaker. Het stelt zich ten doel te berichten over ontwikkelingen in de wiskunde in het algemeen en in de Nederlandse wiskunde in het bijzonder.

ISSN 0028-9825

Adres

Nieuw Archief voor Wiskunde
Centrum Wiskunde & Informatica
Postbus 94079, 1090 GB Amsterdam
tel. 020-5924288
redactie@nieuwarchief.nl
www.nieuwarchief.nl

Hoofredactie

Raf Bocklandt (r.r.j.bocklandt@uva.nl)
Robbert Fokkink (r.j.fokkink@tudelft.nl)

Eindredactie/Bladmanager

Fred Drissen (fred@nieuwarchief.nl)

Redactie

Viktor Blåsjö (UU), Hans Cuypers (TU/e), Geertje Hek (UvA), Teun Koetsier (VU), Margriet Oomen (UL), Nicolaos Starreveld (UvA), Hans Sterk (TU/e), Mark Timmer (UT)

Problemenrubriek

Rob Eggermont (problems@nieuwarchief.nl)

Bureau redactie

Claartje Ottens

Illustraties

Ryu Tajiri

Vormgeving

Susanne Laws (omslag, begeleiding binnenwerk)
Kitty Molenaar (ontwerp)

Druk

Veldhuis Media

Advertenties

advertenties@nieuwarchief.nl

Koninklijk Wiskundig Genootschap

www.wiskgenoot.nl

Platform Wiskunde Nederland

www.platformwiskunde.nl

European Mathematical Society

www.euro-math-soc.eu

International Mathematical Union

www.mathunion.org

Koninklijk Wiskundig Genootschap

Het Koninklijk Wiskundig Genootschap (KWG) is een landelijke vereniging van beoefenaars van de wiskunde. In 1778 opgericht onder de zinspreuk: 'Een onvermoeide arbeid komt alles te boven' is het 's werelds oudste nationale wiskundegenootschap. Leden ontvangen het Nieuw Archief voor Wiskunde als onderdeel van hun lidmaatschap.

Bestuur

Jan Wiegerinck (UvA, voorzitter), Marije Elkenbracht (ABN AMRO, penningmeester), Sonja Cox (UvA, secretaris), Erik van den Ban (UU), Danny Beckers (VU), Theo van den Bogaart (HU), Marie-Colette van Lieshout (CWI), André Ran (VU), Mark Veraar (TUD)

Secretariaat

Koninklijk Wiskundig Genootschap, CWI
Postbus 94079, 1090 GB Amsterdam
wiskgenoot@wiskgenoot.nl
www.wiskgenoot.nl

Ledenadministratie KWG / Abonnementen

Postbus 1064, 7940 KB Meppel
admin@wiskgenoot.nl, tel. 085-0160252

Contributie

Tarieven per jaar (bij betaling per automatische incasso krijgt u € 2,50 korting):

- gewoon lid: € 92,50
- reciprociteitslid: € 72,50
- gepensioneerden en werklozen: € 47,50
- aio's, oio's, studenten: € 37,50 (max. 4 jaar)
- lid zonder Nieuw Archief: € 52,50

Studenten en pas afgestudeerden kunnen een jaar lang gratis lid worden.

Voor verzending van het Nieuw Archief naar het buitenland wordt een portotoeslag van € 10 in rekening gebracht.

Instituten in Nederland en buitenland kunnen zich abonneren op het Nieuw Archief voor Wiskunde voor € 100 (Nederland), € 110 (Europa) of € 112,50 (buiten Europa).

Members of foreign societies

Members of SIAM, the *Société Mathématique de France*, the *Gesellschaft für Angewandte Mathematik und Mechanik*, the *Deutsche Mathematiker-Vereinigung*, and of the *American, Australian, Belgian, Indian, London, Spanish, and South-African Mathematical Societies* living outside of the Netherlands pay € 72,50 instead of the full membership fee of € 92,50 a year. Conversely, these foreign societies, as well as the VvS+OR and the NVORWO, have reduced membership fees for KWG members. A postage charge of € 10 is added for members living abroad but in Europe, and a charge of € 12,50 for members living outside of Europe.

Exchange subscriptions

Koninklijk Wiskundig Genootschap Library
Centrum Wiskunde & Informatica
P.O. Box 94079, NL-1090 GB Amsterdam
KWG-exchange@cw.nl

Informatie voor auteurs

Kopij

Het Nieuw Archief voor Wiskunde is een geredigeerd tijdschrift. Kopij dient per e-mail te worden aangeboden aan kopij@nieuwarchief.nl. Uitgebreide informatie en auteursinstructies kunt u vinden op www.nieuwarchief.nl.

Volgende nummers

nummer	maand	verschijnen	deadline kopij
20(1)	maart	2019	verstreken
20(2)	juni	2019	01-02-2019
20(3)	september	2019	01-05-2019
20(4)	december	2019	01-08-2019

Instituutsleden

De publicaties van het Koninklijk Wiskundig Genootschap worden mede mogelijk gemaakt door de bijdragen van de volgende instituten.

	Centrum Wiskunde & Informatica
	Rijksuniversiteit Groningen
	Universiteit van Amsterdam
	Universiteit Leiden
	Vrije Universiteit
	Universiteit Utrecht
	Technische Universiteit Eindhoven
	Eurandom
	Technische Universiteit Delft
	Universiteit Twente
	Radboud Universiteit Nijmegen
	Freudenthal Instituut

Op het omslag

Een Penrose-betegeling is een niet-periodieke betegeling gegenereerd door een aperiodieke set tegels. Lees het interview van Nicos Starreveld en Raf Bocklandt met Sir Roger Penrose op p. 241. [Afbeelding naar een idee van Raf Bocklandt.]

Schoonheid, kunstelwerk en knutselwerk

Wanneer wiskundigen gevraagd wordt wat hen zo aantrekt in hun vakgebied, prijkt schoonheid vaak bovenaan het lijstje van de mogelijke antwoorden. Maar wat is wiskundige schoonheid precies? Sommigen zien het in een prachtig visueel patroon, anderen in een abstracte zeer algemene stelling, nog anderen in een onverwachte toepassing van een simpel idee. Zoals het Engelse spreekwoord zegt ‘beauty is in the eye of the beholder’ en veel hangt af van je eigen voorkennis en achtergrond. Bovendien hebben wiskundigen vaak de neiging om hun eigen esthetische ervaringen te verbergen achter een muur van vakjargon.

Hoe vaak worden mooie ideeën onherkenbaar gemaakt omdat de auteur (of de referee) vindt dat het nog net ietsje algemener kan? Hoe vaak verandert een logische strategie voor een bewijs in een kunstelwerk van technische details om alles rigoureus te krijgen, zonder dat we daarbij de nodige uitleg krijgen over het hoe en waarom? Hoe vaak worden interessante concepten enkel geïllustreerd met een triviaal voorbeeld? Al deze dingen maken het moeilijk voor een buitenstaander om binnen te kijken in de gedachten van de wiskundige en te delen in zijn of haar verwondering om al dat moois.

Het is een van de opdrachten van het *Nieuw Archief voor de Wiskunde* om hier iets aan te verhelpen en in dit nummer proberen we dat te doen op verschillende manieren. Eerst en vooral laten we de wiskundigen zelf aan het woord. We hebben een uitgebreid interview met Sir Roger Penrose, waarin hij vertelt over de oorsprong van de ideeën achter zijn werk over zwaartekracht en kosmologie, over zijn passie voor symmetrie en puzzels en zijn relatie met M.C. Escher. Daarnaast hebben we twee bijdragen van de winnaars van de Stieltjesprijs, een prijs voor het beste proefschrift verdedigd aan een Nederlandse universiteit. De prijs voor 2016 werd ex aequo toegewezen aan Richard Kraaij en Djordjo Milovic, en zij namen die in april 2018 in ontvangst op het Nederlands Mathematisch Congres. In dit nummer vertelt Richard Kraaij over zijn recente onderzoek naar Markovketens, terwijl Milovic aan de hand van de vergelijking van Pell een introductie geeft over zijn werk over de grootte van klassiegroepen. Ten slotte hebben we ook nog

een bijdrage in onze rubriek ‘Trip to the proof’ waarin Jean-Paul Allouche beschrijft hoe een spelfout in een artikel aanleiding gaf tot zijn bewijs dat het $\mathbb{F}_q$ -analogon van π irrationaal is.

Daarnaast hebben we ook een aantal mooie verhalen over de raakvlakken tussen wiskunde en het echte leven. Harrie de Swart vertelt ons hoe je wiskunde kan gebruiken om een nieuw kiessysteem te ontwerpen dat een aantal betere eigenschappen heeft dan de huidige systemen die gebruikt worden. Het artikel ‘Mathematics for Big Data’ belicht hoe verschillende methoden uit wiskunde en statistiek kunnen gebruikt worden om de immer groeiende toevloed van data te beheersen. We brengen verslag uit van BIMS, een evenement in Brussel dat de schoonheid en impact van de wiskunde belicht en dit jaar bijzondere aandacht besteedde aan wetenschapscommunicatie.

Het laatste aspect van wiskundige schoonheid is het zelf aan de slag gaan. Net zoals je nooit het verfrissende gevoel van een duik in het water zal ervaren als je enkel over zwemmen leest in een boek, is het opperste gevoel van wiskundige voldoening onbereikbaar als je niet zelf eens een bewijs in elkaar hebt geknutseld of een wiskundig raadsel hebt opgelost. Helaas hebben we in ons decembern timer uitzonderlijk geen problemenrubriek, maar jullie hoeven toch niet op jullie honger te blijven zitten want we hebben een exotisch alternatief. Naast de oude wiskundige puzzels die je kan vinden in het derde deel over de geschiedenis van Pythagoras, hebben we ook een bijdrage van Milan Lopuhaä-Zwakenberg, een postdoc in Eindhoven en tevens ook medeorganisator van de Taalkunde Olympiade. In dit artikel schotelt hij jullie een aantal typische linguïstische problemen voor die in deze competitie aan bod komen en die met een gezonde dosis logisch inzicht kunnen worden opgelost.

წარმატებებს გისურვებთ!

✎

Raf Bocklandt, hoofdredacteur

Korteweg-de Vries Instituut, Universiteit van Amsterdam

Agenda

| Upcoming Events

december 2018

3–7 december 2018

Mathematical Modeling with Measures: Where Applications, Probability and Determinism Meet

Een workshop mede georganiseerd door Sander Hille (UL).

plaats Lorentz Center@Snellius, Leiden

info lorentzcenter.nl

10–14 december 2018

Machine Learning and Reverse Engineering for Soft Materials

Een workshop mede georganiseerd door Marjo-lein Dijkstra (UU).

plaats Lorentz Centrum@Oort, Leiden

info lorentzcenter.nl

17–19 december 2018

20th Anniversary Eurandom

Workshop ter gelegenheid van het 20-jarig bestaan van Eurandom.

plaats Eurandom, Eindhoven

info eurandom.nl

januari 2019

12 januari 2019

Wintersymposium KWG 2019

Jaarlijks symposium van het KWG. Dit jaar is het thema 'Is statistiek wel betrouwbaar?'.

plaats Academiegebouw, Utrecht

info wintersymposium.weebly.com

14–16 januari 2019

LNMB-conferentie

44ste conferentie over de wiskunde van besliskunde georganiseerd door het Landelijk Netwerk Mathematische Besliskunde (LNMB).

plaats Congrescentrum De Werelt, Lunteren

info lnmb.nl/conferences

21–23 januari 2019

18th Winter School Mathematical Finance

Winterschool over financiële wiskunde met onder andere minicursussen van Jim Gatheral (The City University of New York) en Paolo Guasoni (Dublin City University).

plaats Congrescentrum De Werelt, Lunteren

info staff.science.uva.nl/p.j.c.spreij

21–31 januari 2019

Eerste ronde Wiskunde Olympiade

De eerste ronde van de jaarlijkse landelijke wiskundewedstrijd voor leerlingen uit de onderbouw van havo en vwo.

plaats op eigen scholen

info wiskundeolympiade.nl

22 januari 2019

The Road to Reality

Een workshop met als spreker Sir Prof. Roger Penrose georganiseerd door het Korteweg-de Vries Instituut voor Wiskunde en het Institute for Advanced Study (IAS Amsterdam).

plaats IAS, Amsterdam

info ias.uva.nl

28 januari–1 februari 2019

Study group: Mathematics with industry

Wiskundigen werken samen een week lang aan problemen voorgelegd door bedrijven.

plaats WICC, Wageningen

info swi-wiskunde.nl

31 januari–1 februari 2019

Panama-conferentie 'Rekenen-wiskunde doen'

Jaarlijkse Panama-conferentie richt zich op alle aspecten van leren en onderwijzen van rekenen-wiskunde.

plaats Congrescentrum Koningshof, Veldhoven

info panamaconferentie.sites.uu.nl

februari 2019

1–2 februari 2019

Nationale Wiskunde Dagen

De 25ste editie van de tweedaagse conferentie voor wiskundeleraren. Dit jaar in Veldhoven omdat de Leeuwenhorst in Noordwijkerhout niet beschikbaar is vanwege een verbouwing.

plaats Congrescentrum Koningshof, Veldhoven

info uu.nl/nationale-wiskunde-dagen

Suggesties voor deze agenda zijn welkom.

Redacteur: Margriet Oomen

agenda@nieuwarchief.nl

4–8 februari 2019

□ Scheduling Meets Fixed-Parameter Tractability
Workshop met als doel wetenschappers uit de scheduling- en geparametriseerde complexiteits-theorie samen te brengen.

plaats Lorentz Center@Oort, Leiden

info lorentzcenter.nl

6 februari 2019

□ OnderbouwWiskundeDag

De OWD is een activiteit van het Freudenthal Instituut en een onderdeel van 'Wiskunde voor Teams'.

plaats eigen school

info [uu.nl/onderwijs/onderbouwwiskunedag](http://uu.nl/onderwijs/onderbouwwiskundedag)

maart 2019

8 maart 2019

□ Nationale Rekencoördinator Dag

Dag voor rekencoördinatoren en leerkrachten, waar het rekenonderwijs van de basisschool centraal staat.

plaats Vergadercentrum Domstad, Utrecht

info nrcd.sites.uu.nl

14 maart 2019

□ Tweede ronde Nederlandse Wiskunde Olympiade

De tweede ronde van de Nederlandse Wiskunde Olympiade speelt zich af op de universiteiten

plaats universiteiten van Nederland

info wiskundeolympiade.nl

15–16 maart 2019

□ Finale Wiskunde A-lympiade

De Wiskunde A-lympiade is een competitie voor leerlingen uit de bovenbouw havo/vwo, die wiskunde A in hun pakket hebben.

plaats Veluwe

info www.fi.uu.nl/alympiade

19 maart 2019

□ W4 Kangaroo-wedstrijd

Wereldwijde Wiskundewedstrijd voor kinderen van groep 3 van de basisschool tot en met 6 vwo.

plaats basisscholen en middelbare scholen

info w4kangoeroe.nl

april 2019

3 april 2019

□ Grote Rekendag 'Uit verhouding'

Een dag voor alle basisscholen in Nederland en Vlaanderen (groep 1 t/m 8) die helemaal in het teken staat van rekenen.

plaats basisscholen in Nederland en België

info groterekendag.nl

7–13 april 2019

□ European Girls' Mathematical Olympiad

Europese wiskundewedstrijd speciaal voor meisjes.

plaats Kiev, Oekraïne

info egmo.org

8–12 april 2019

□ Symplectic Dynamics

Workshop mede georganiseerd door Holger Waalkens (RUG).

plaats Lorentz Center@Oort, Leiden

info lorentzcenter.nl

23–24 april 2019

□ Nederlands Mathematisch Congres

55ste Nederlands Mathematisch Congres, jaarlijkse bijeenkomst van wiskundig Nederland. Met plenaire sprekers Barbara Gentz, Jan Hesthaven, Gábor Lugosi en Anke van Zuylen.

plaats Congrescentrum Koningshof, Veldhoven

info nmc2019.nl

26–28 april 2019

□ Benelux Mathematical Olympiad

Jaarlijkse olympiade voor middelbare scholieren uit België, Nederland en Luxemburg.

plaats Nederland

info bxmo.org

mei 2019

6–10 mei 2019

□ Mathematics of Quantum Information Theory
Workshop georganiseerd door Jop Briët (CWI), Martijn Caspers (TUD), Bas Janssens (TUD), Mari Ozols (CWI) en Barbara Terhal (TUD).

plaats Lorentz Center@Snellius, Leiden

info lorentzcenter.nl

17 mei 2019

□ ECENT-ELWleR-conferentie

Jaarlijkse conferentie voor lerarenopleiders van lerarenopleidingen STEM (wiskunde/rekenen en natuurwetenschappen/techniek).

plaats Vergadercentrum Domstad, Utrecht

info elbd.sites.uu.nl

juni 2019

2–7 juni 2019

□ MAPSP 2019

Tweejaarlijkse workshop over scheduling.

plaats Hotel De Zeeuwse Stroom, Renesse

info sbe.maastrichtuniversity.nl/mapsp2019

17–21 juni 2019

□ Statistics Conference

Statistiekconferentie ter ere van de 60ste verjaardag van Aad van der Vaart.

plaats Marekerk, Leiden

info pub.math.leidenuniv.nl/~schmidthieberaj/aadbirthday

juli 2019

1–5 juli 2019

□ Data Science for Dynamical Systems

Workshop mede georganiseerd door Hermen Jan Hupkes (UL) en Martina Chirilus-Bruckner (UL).

plaats Lorentz Center@Oort, Leiden

info lorentzcenter.nl

Nieuws

| News

Deze rubriek is een kroniek van wiskundige activiteiten in Nederland. Toekomstige activiteiten worden aangekondigd en van voorbije activiteiten wordt verslag gedaan. Wilt u uw aankondiging of verslag in deze rubriek geplaatst zien? Stuur ons dan uw bijdrage, zo mogelijk met illustratie. De redactie behoudt zich het recht voor berichten te weigeren of in te korten.

Redacteur: Margriet Oomen
 nieuws@nieuwarchief.nl

Rekentoetsing toch weer terug in voortgezet onderwijs en mbo

De afgelopen jaren heeft de rekentoets in het voortgezet onderwijs en het mbo voor veel discussies gezorgd. De toets is verscheidene jaren afgenomen op alle niveaus en heeft tweemaal daadwerkelijk meegeteld in de zak-slaagregeling van het vwo, voordat dit bij het afgelopen eindexamen weer is teruggedraaid. Nog steeds wordt de toets in het huidige schooljaar verplicht afgenomen, hoewel het resultaat geen effect meer heeft op het al dan niet behalen van een diploma.

Het regeerakkoord sprak vorig jaar al van een alternatief, waar afgelopen november meer duidelijkheid over is gekomen. Scholen krijgen nu meer verantwoordelijkheid in de implementatie van het rekenbeleid, door zelf een schoolexamen rekenvaardigheden vast te mogen stellen. Of rekenen hierbij een apart vak is of verweven wordt in de andere vakken, dat is aan de scholen zelf. Ook de wijze van toetsing ligt niet meer vast – dat kan gebeuren door middel van verscheidene toetsen door het jaar heen of wederom een enkele eindtoets, eventueel met een of meerdere herkansingsmogelijkheden. Aan de verplichte centrale rekentoets komt hiermee een einde. Het schoolexamen moet uiteraard wel aan bepaalde inhoudelijke eisen voldoen: de zogenoemde referentieniveaus die beschrijven welke vaardigheden leerlingen moeten beheersen, blijven bestaan en moeten met het schoolexamen worden afgedekt.

Met de voorgestelde wijziging gaat het rekencijfer ook weer meedoen voor het diploma – nu niet alleen bij het vwo, maar bij alle niveaus. Leerlingen die in 2019 beginnen aan een mbo-opleiding of in 2021 eindexamen doen op de middelbare school zullen hiermee geconfronteerd worden; zij zullen minimaal een 4 moeten halen voor het schoolexamen rekenen om uiteindelijk een diploma in ontvangst te kunnen nemen. De leerlingen die in 2020 eindexamen doen krijgen al wel te maken met het schoolexamen rekenen, maar voor hen heeft het behaalde resultaat nog geen effect. De Nederlandse Vereniging van Wiskundeleraars geeft aan niet achter de voorgestelde aanpak te staan en merkt op dat de focus weer ligt op rekentoetsing in plaats van rekenonderwijs.

Mark Timmer

Erik Bekkers wint twee prijzen voor Medical Imaging-onderzoek

De Philips Impact Award is een prijs voor wetenschappelijk onderzoek dat bijdraagt aan de maatschappij en het welzijn van patiënten. De Philips Impact Award werd in juli 2018 uitgereikt op de ‘Medical Imaging with Deep Learning’-conferentie in Amsterdam. De Medical Image Computing and Computer Assisted Interventions (MICCAI) reikt jaarlijks de prestigieuze MICCAI Young Scientist Awards uit aan jonge auteurs van de beste artikelen in dit vakgebied. Erik Bekkers, promovendus in de Mathematical Image Analysis-groep van de Technische Universiteit Eindhoven, won beide prijzen voor zijn werk op het gebied van Medical Imaging Analysis. Samen met biomedisch ingenieur Maxime Lafarge ontwikkelde hij een *deep learning*-techniek die symmetrie in een dataset gebruikt om optimaal trainingssamples te benutten. Daarnaast gebruikten Bekker en Lafarge geometrische structuren voor ‘learning architectures’. Op deze manier konden ‘machines’ focussen op relevante eigenschappen van afbeeldingen zonder eerst de onderliggende ruimtelijke structuur te leren.

tue.nl

Wiskunde als wapen tegen woestijnvorming

Wanneer een nieuwe woestijn ontstaat of een bestaand woestijngebied opruikt, spreekt men van verwoestijning. Promovendus Robbin Bastiaansen van de Universiteit Leiden vergelijkt wiskundemodellen voor verwoestijning met satellietdata van de aarde. Door samen te werken met zowel wiskundigen als ecologen is Bastiaansen in staat een grondige vergelijking te maken tussen de wiskundige modellen en de werkelijkheid. Bastiaansen publiceerde zijn onderzoek in het prestigieuze tijdschrift *Proceedings of the National Academy of Sciences*. Een van zijn resultaten is dat bijna-woestijngebieden veel veerkrachtiger blijken te zijn dan tot nu toe werd aangenomen. Dit is belangrijk omdat totale ineenstorting van een gebied tot woestijn een vrijwel onomkeerbaar proces is.

universiteitleiden.nl



Stéphanie van der Pas en Leonie Zeune genomineerd voor VIVA400

Het populaire magazine *VIVA* rijkt jaarlijks de VIVA400 Awards uit aan topvrouwen die het afgelopen jaar in de schijnwerpers stonden wegens bijzondere prestaties. De VIVA400 Awards worden uitgereikt in de categorieën Creatieven, Knappe Koppen, Krachtpatsers, Techtalenten, Wereldverbeters en Zakenwonders. De wiskundigen Stéphanie van der Pas, assistent professor aan de Universiteit Leiden en Leonie Zeune, promovendus aan de Universiteit Twente, zijn beiden genomineerd in de categorie Knappe Koppen vanwege hun bijdrage aan de wiskunde.

viva.nl

Stieltjesprijs 2017 toegekend aan Jorn van de Pol

De Stieltjesprijs is de prijs voor het beste Nederlandse proefschrift dat verdedigd is aan een Nederlandse universiteit. De prijs wordt jaarlijks uitgereikt en beschikbaar gesteld door de Stichting Compositio Mathematica en de stichting Thomas Stieltjes. Dit jaar bestond de jury uit Odo Diekmann (UU), Arnout van Enter (RUG), Richard Gill (UL), Barry Koren (TU/e), Frans Oort (UU, voorzitter) en Marc Uetz (UT). De jury koos unaniem voor het proefschrift *Large Matroids: Enumeration and Typical Properties* van Jorn van de Pol. Van de Pol behaalde met nieuwe technieken en inzichten belangrijke resultaten in een vakgebied binnen de wiskunde dat al vijftig jaar vast zat. Volgens de jury is het zeer zeldzaam en hoogst bewonderenswaardig dat één proefschrift van doorslaggevend belang is voor een heel wiskundig vakgebied. Jorn van de Pol promoveerde cum laude aan de Technische Universiteit Eindhoven. Zijn begeleiders waren prof.dr. Remco van der Hofstad, dr. Rudi Pendavingh en prof.dr. Nikhil Bansal.

platformwiskunde.nl

Anonieme post en sf-schrijver helpen bij combinatorisch probleem

Op 16 september 2011 stelt een anime-fan op een online forum de volgende vraag: "Hoeveel afleveringen van de niet-chronologische serie *Melancholy of Haruki Suzumiya* moet ik kijken om de veertien episodes van seizoen 1 in alle mogelijke volgordes te zien?" Eén uur later post een anoniem persoon dat hij tenminste 93.884.313.611 afleveringen moet kijken. Het gegeven argument werkt voor elke hoeveelheid afleveringen in een serie.

In de wiskunde is het bovenstaande probleem bekend als het superpermutatieprobleem. Stel een seizoen bestaat uit drie afleveringen. Dit betekent dat je de afleveringen in de volgordes 123, 132, 231, 213, 312, 321 kunt kijken. Kijk je achtereenvolgens de afleveringen 123132231213312321 dan heb je alle afleveringen gezien in alle mogelijke volgordes. Veel efficiënter is het om achtereenvolgens de afleveringen 123121321 te kijken, ook dan heb je alle afleveringen in alle mogelijke volgordes gezien. Zo'n rij getallen die alle mogelijke permutaties van een verzameling gehele getallen bevat, heet in de wiskunde een superpermutatie. Op het forum vroeg men dus eigenlijk naar de superpermutatie met het kleinste mogelijk aantal elementen.

Wiskundigen onderzoeken superpermutaties al 25 jaar. In 1993 vermoedden de wiskundigen Daniel Ashlock and Jenett Tillotson dat het minimale aantal elementen in een superpermutatie van n gehele getallen gegeven wordt door de formule $n! + (n-1)! + \dots + 1!$. Ashlock and Tillotson verifieerden deze formule voor $n = 1, 2, 3, 4$ en later bewees een andere wiskundige de formule voor $n = 5$. In 2014, drie jaar na de anonieme post, bewees de wiskundige Houston dat de formule niet correct was voor $n = 6$. Hoewel de wiskundige Johnston in 2011 het argument in de anonieme post op het animefanforum bij toeval las, bekeek hij het argument niet in detail. Toen Houston in 2014 zijn resultaat publiceerde was Johnston de anonieme post allang vergeten.

Op 26 september 2018 twitterde wiskundige John Baez over het resultaat van Houston. De Australische sciencefictionschrijver Egan zag de tweet. Egan, wiskundige van opleiding, bestudeerde het probleem uit de tweet voor zijn plezier. Na het lezen van enkele relevante artikelen vond Egan binnen twee dagen een nieuwe bovengrens. Nadat Egan zijn resultaat bekendmaakte, herinnerde Johnston zich opeens de post op het online forum en informeerde Houston. Uiteindelijk schreven Houston en zijn collega's Pantone en Vatter een artikel over de ondergrens voor het probleem met als eerste auteur de anonieme post.

quantamagazine.org



De vijf hoofdrolspelers in *Melancholy of Haruki Suzumiya*

Wiskundedocent Swier Garst promoveert in Groningen

Op 19 oktober is Swier Garst gepromoveerd in de wiskunde aan de Rijksuniversiteit Groningen. Dit is bijzonder omdat Garst de eerste wiskundeleraar is die een proefschrift schreef naast zijn baan als docent. Garst onderzocht hoe de techniek van vouwen en draaien leidt tot een beter begrip van dynamische systemen. De voltooiing van het proefschrift getiteld *Dynamics Amidst Folding and Twisting in 2-dimensional Maps* kostte hem jaren. Naast wiskundedocent aan het RGO te Middelharnis was Garst ook voorzitter van de Nederlandse Vereniging van Wiskundeleraars en gaf hij les aan de Hogeschool van Rotterdam. Hierdoor kon hij alleen in zijn vrije uren aan het promotieonderzoek werken. Wanneer Swier Garst geen les gaf, reisde hij graag af naar Delft om daar met vriend en professor Jan Aarts te werken aan zijn onderzoek. Helaas overleed Jan Aarts in juni, maar gelukkig heeft hij de goedkeuring van het proefschrift nog meegemaakt.



Swier Garst geflankeerd door zijn paranimfen, zoon Swier Jr. en schoonzus Pauline

Nieuwe samenwerking Johann Bernoulli Instituut voor Wiskunde

Het Johann Bernoulli Instituut voor Wiskunde en Informatica (JBI) en het Instituut voor Kunstmatige Intelligentie en Cognitieve Engineering (ALICE) zijn recentelijk samen gegaan in het Bernoulli Instituut voor Wiskunde, Informatica en Kunstmatige Intelligentie (BI). Doel is om de unieke expertise in deze drie disciplines te combineren en verder uit te bouwen. Op 1 november was er een interdisciplinair symposium ter ere van de officiële opening van het Bernoulli Instituut.

rug.nl

Bekendmaking winnaars ICIAM-prijzen 2019

Het International Council for Industrial and Applied Mathematics heeft de winnaars bekendgemaakt van de ICIAM-prijzen 2019. Siddharta Mishra (ETH, Zwitserland) wint de ICIAM Collatz Prize, George Papanicolaou (Stanford University, VS) de ICIAM Lagrange Prize, Claude Bardos (Université Paris Diderot, Frankrijk) de ICIAM Maxwell Prize, Yvon Maday (Sorbonne Université, Paris, Frankrijk) de ICIAM Pioneer Prize en Giulia di Nunno (University of Oslo, Noorwegen) de ICIAM Su Buchin Prize. De prijzen worden uitgereikt op het vierjaarlijkse Internationale Congres voor Industrial and Applied Mathematics dat van 15–19 juli 2019 plaatsvindt in Valencia, Spanje.

iciam.org

Koninklijk Wiskundig Genootschap

55ste Nederlands Mathematisch Congres

Het 55ste NMC vindt plaats op dinsdag 23 en woensdag 24 april 2019 in Veldhoven. Een tweedaags congres met diner en overnachting. Plenaire sprekers zijn Barbara Gentz (random dynamic and stochastic processes), Jan Hesthaven (scientific computing), Gábor Lugosi (statistics, information theory) en Anke van Zuylen (combinatorial optimisation). De *early bird*-registratie sluit op 31 december 2018. Voor meer informatie zie: nmc2019.nl.

KWG Wintersymposium

Het jaarlijkse Wintersymposium voor docenten en andere geïnteresseerden valt in 2019 op zaterdag 12 januari. Het thema is dit jaar 'Is statistiek wel betrouwbaar?' Sprekers: prof. Ronald Meester (VU), prof. Peter Grunwald (CWI, UL), prof. Casper Albers (RUG) en prof. Klaas Slooten (VU). Voor meer informatie zie: wintersymposium.weebly.com.

Website en ledenadministratie

Het is sinds de zomer niet meer mogelijk veranderingen aan te brengen aan de huidige KWG-website (volgens de beheerder is de website 'gehackt'). Het is ons niet gelukt in samenwerking met de huidige beheerder een plan te maken om dit probleem te verhelpen. Daarom stappen wij per 1 januari 2019 over naar een andere website- en ledendatabasebeheerder: AllUnited. De nieuwe website zal waarschijnlijk minder mooi gevonden worden, daar staat tegenover dat de functionaliteit (ledenlogin en dergelijke) zal verbeteren.

Oproep voor nominaties voor de N.G. de Bruijnprijs

In 2019 zal de tweejaarlijkse N.G. de Bruijnprijs weer tijdens het NMC worden uitgereikt. De prijs wordt uitgereikt voor het beste wiskundig wetenschappelijke werk dat in gerefereerde tijdschriften verschenen is in de jaren 2016 tot en met 2018. De prijs wordt beschikbaar gesteld door Elsevier vanwege de samenwerking met het KWG bij het publiceren van *Indagationes Mathematicae*. In aanmerking voor de prijs komen kandidaten die de Nederlandse nationaliteit hebben, in Nederland wonen of verbonden zijn aan een Nederlandse instelling. Kandidaten worden voorgedragen middels minimaal één aanbevelingsbrief die uiterlijk 15 januari 2019 in het bezit van de jury (Henk Broer, Marius Crainic en Jan van Neerven) dient te zijn. Eenieder wordt uitgenodigd om kandidaten voor te dragen. Aanbevelingsbrieven dienen gericht te worden aan de voorzitter van de jury: Jan van Neerven, TU Delft/DIAM, Postbus 5031, 2600 GA Delft, e-mail: j.m.a.m.vanneerven@tudelft.nl.

Recent verschenen:

Indagationes Mathematicae (www.elsevier.com/locate/indag)

Special Issue L.E.J. Brouwer, 50 years later, Dirk van Dalen, Geurt Jongbloed, Jan Willem Klop, Jan van Mill (eds.), Volume 29, Issue 6, 2018.

Epsilon Uitgaven (www.epsilon-uitgaven.nl)

Zebra 56. Optimaliseren in Formule 1, Jesper de Groot, € 10, 2018.

Zebra 55. De Meetkunst van Albrecht Dürer, Martin Kindt, € 10, 2018.

Zebra 54. Kosmische Straling, Hans Montanus, Jan-Willem van Holten en David Fokkema, € 10, 2018.

Zebra 53. De (max,+)-algebra en het ontwerpen van een dienstregeling voor de NS, Gerardo Soto y Koelemeijer, € 10, 2018.

Nicos Starreveld

Korteweg-de Vries Institute
University of Amsterdam
n.j.starreveld@uva.nl

Raf Bocklandt

Korteweg-de Vries Institute
University of Amsterdam
r.r.j.bocklandt@uva.nl

Interview Sir Roger Penrose

A passion for patterns, puzzles and physics

Sir Roger Penrose is a British mathematical physicist, mathematician and philosopher of science. He is Emeritus Rouse Ball Professor of mathematics at the University of Oxford. In July he visited Utrecht for the '19th UK and European Meeting on the Foundations of Physics' and on this occasion Nicos Starreveld and Raf Bocklandt, editors of this journal, had an interview with him about life, the universe and everything.

Penrose was born in 1931 in Colchester, Essex, England. From a young age he got familiar with mathematics and physics. His father, Lionel Penrose was a medical geneticist, he was a professor of eugenics at University College London. He also had a keen interest into mathematics and chess, interests that he transmitted to his sons. Penrose's mother, Margaret Leathes was also medically trained, but she did not practice medicine.

"My father had a deep interest in mathematics, we had long walks talking about nature and mathematics. The physics side came more from my brother Oliver who was very well read. He used to read to me the book *Mr. Tompkins in Wonderland*."

(Mr. Tompkins is a fictional character created by the physicist George Gamow. In this book he explores a dream where the speed of light and the Planck constant are different so that you can see relativistic and quantum effects with your own eyes.)

Penrose's older brother Oliver Penrose became a theoretical physicist and was a Professor of Mathematics at Heriot-Watt University in Edinburgh from 1986 until his retirement in 1994. His younger brother, Jonathan Penrose, is a chess grandmaster who won the British Chess Championship

ten times between 1958 and 1969.

"I was at school, about fifteen years old, and I had to decide which subjects I wanted to choose for my final two years. When the headmaster asked me, I told him I wanted to do biology, mathematics and chemistry. He told me it was not possible to do mathematics and biology together. I then said mathematics, physics and chemistry. My parents were very annoyed when I got home, they wanted me to become a doctor."

Instead Penrose started undergraduate studies in mathematics at University College London, where he graduated with a first class degree. Afterwards he moved to Cambridge to do research with Prof. W.V.D. Hodge, who was a professor in geometry and astronomy. In 1958 he completed his PhD, with his doctoral thesis *Tensor Methods in Algebraic Geometry*, written under the supervision of Prof. John Todd.

Moving to physics

Although mathematics was what he loved the most, physics never ceased to excite.

"I was interested in physics all the time. The thing that set me off in that direction was a series of radio talks by Fred Hoyle (British astronomer and cosmologist in

Cambridge University). The last talk was about the steady-state theory. In this theory he described how the universe remains the same and how galaxies disappear when they reach the speed of light. I did not understand that, how could they disappear like that? They fade away maybe, so I went to Cambridge to discuss it with my brother Oliver.

We were having lunch together and he said 'I am no expert in that, but a good friend of mine is sitting over there, he will tell you, he is an expert in cosmology.' That was Dennis Sciama, so I described this to him and he had never seen this argument, he was impressed enough. When I went to Cambridge to do research in pure mathematics we had discussions about cosmology and physics, he knew everything that was going on. And this was wonderful education for me."

The discussions with cosmologist Dennis Sciama inspired Penrose to make the switch to cosmology; he started doing research in geometry and general relativity. In the years that followed, while he held a position at the department of mathematics at Birkbeck college in London, Penrose developed novel mathematical methods in general relativity. He introduced the calculus of spinors and showed that this method, when compared to the classical method of tensors, yields simpler equations when solving Einstein's equations. This path led Penrose to a much deeper understanding of the laws of the universe.



Photo: Wikimedia Commons: Biswarup Ganguly

Sir Roger Penrose

In 1964 Penrose wrote the epoch-making paper where he stated the First Singularity Theorem. In this paper he introduced the concept of a 'trapped surface' to characterize a gravitational collapse that has reached a point of no return. Gravitational collapse describes the contraction of a massive astronomical object, under the influence of its own gravity, towards its center of gravity. Gravitational collapse is the process that gives birth to black holes! The 'trapped surface' describes the region around a black hole where light is 'trapped' and can't escape out of it any more. The formation of black holes as a result of gravitational collapse is described by Einstein's general relativity, Penrose's First Singularity Theorem states that this process will inevitably lead to the formation of a singularity. Penrose still remembers the precise moment these ideas came to him.

"I was at Birkbeck College at that time and a friend of mine, Ivo Robinson, was visiting me. He was somebody who liked talking, he spoke very elegantly and was very nice to listen to. He was talking, talking, talking to me while we were walking along the street.

Then we got to a road where we had to stop talking because of the traffic. As I crossed the road, an idea came to me but on the other side he started talking to me again and the idea locked up into my head.

Later that day he went away and I was thinking 'why do I feel this state of elation?' I felt happy about something, but I didn't know what it was. So I went through the day: what kind of breakfast I had,... all things that had happened, one after the other.

Then I remembered crossing the street and suddenly it came back. I realized what I thought of: a characterization of the collapse in a way that has no symmetries at all. It's basically light rays converging all around on a sphere, so you have a topological condition. It was just a rough idea: I didn't have a complete working argument, it was still slightly uncomfortable in some places, but the main elements were all there."

At the same time Penrose's work on space-time singularities was inspiring Dennis Sciama's brilliant student, Steven Hawking, who wrote the magnificent essay entitled *Singularities and the Geometry of*

space-time. Together, Hawking and Penrose proved the gravitational singularity theorems and made the theoretical prediction that black holes emit radiation, called Hawking radiation. The first meeting between Hawking and Penrose is also portrayed in 'The Theory of Everything' but he warns us to take that movie with a grain of salt.

"Don't believe the film! The film has Stephen going to London to hear me giving a lecture. It shows Stephen listening to it and afterwards coming at me, saying he was heavily inspired by this lecture.

I did give a talk in London, but Stephen Hawking was not there, only Dennis Sciama was. This talk was about the singularity in the black hole collapse using topology. So Dennis asked me to give a repeat talk in Cambridge, which I did and then I did meet Stephen. We discussed things and this started him off on this kind of thinking."

Art and Escher

Apart from his work in mathematics and physics, Penrose is also known for some artistic creations as well. His Penrose tiles adorn the floors and walls of many build-

ings all over the world and the famous impossible triangle was first described in an psychology article by himself and his father. Moreover they both corresponded with M.C. Escher and inspired some of his artwork.

“In 1954, I was in my second year as a graduate student in Cambridge doing mathematics and the International Congress of Mathematicians that year was to be held in Amsterdam. At one point during the conference, I was getting onto a bus and somebody else was just getting off.

This was one of the lecturers at Cambridge, Sean Wylie. He taught topology, which I liked a lot. He was holding a catalog with the picture *Night and Day*, the one with the birds flying in both directions. I asked: ‘What is that?’ He replied: ‘Oh, there is this exhibition with art from an artist called Escher and I think you will be interested.’

I had never heard of him but I went to the Van Gogh Museum and there were these pictures all around the room. Absolutely stunning, I was blown of my feet. It was quite a big room, and several of them stuck in my mind. Particularly the one called *Relativity*, with the stairs in different directions.

I came away from that thinking: ‘Gosh, this is amazing. I’d like to try something myself.’ Something new, just an idea maybe that I hadn’t seen. So I played around with rivers and bridges, roads going in different directions, an impossible situation. I simplified it to this triangle, a tripod triangle. When I came home and I showed it to my father and he asked: ‘What’s that?’ He also got caught by this and he produced some buildings which were inconsistent and then he made an impossible staircase.

We decided we like to write a paper on it, but we didn’t know what the subject

was and what journal we would submit it to. My father knew the editor of the *British Journal of Psychology* and he said: ‘Well, we’ll call it psychology and we’ll send it to that Journal.’ They accepted it and in this paper we gave credit to Escher and to the catalog of the museum.

My father sent a copy of the article to Escher — I don’t know if he had this address I think it went through somebody else. Anyway, it did find his way to Escher and he started to communicate with my father.”

Later Penrose also had the opportunity to meet with Escher in person.

“I was very bad at correspondence but once I was driving in Holland with my wife and we passed Baarn, where Escher lived. I was given his phone number from my father’s letters. I called Escher and he was very friendly and said: ‘Come and have tea.’

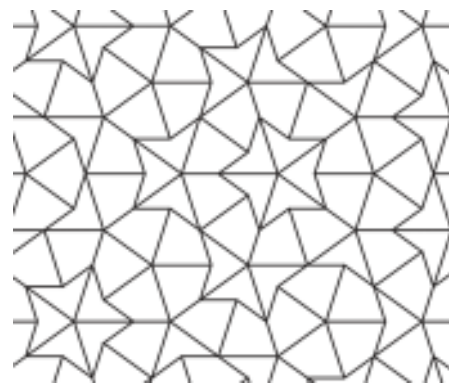
We went there and he was very generous and pleasant. There was this long table almost completely empty except some piles of prints at the end. He said: ‘This is where I work.’ I was expecting staircases going out of the windows in all directions, but no it was just a very ordinary house. Then he said: ‘Look I have this pile of prints. Of these ones I’ve not got very many left, so I can’t give you one of them. But from that pile over there you can take one.’ So, I took the pile and went through it, some of them were quite familiar to me, but then there was one I hadn’t seen before.

I said to him ‘This one’, and he replied: ‘That’s very interesting, usually people don’t appreciate that picture.’ It’s called *Fishes and Scales*. It’s a square but slightly rounded corners and you have a big fish on the bottom left. Its scales soon begin to become other fish and if you follow them then you end up at another big fish. Its scales are fish too and as you go back they become the fish you started with.”

That was not the end of Penrose’s relationship with Escher. Later he would also be the source of inspiration of one of his last paintings.

“When I visited him he gave me this print and all I could do was give him some cardboard pieces of a puzzle in return. These were all identical shapes which would tile a plane but in a way which required twelve different orientations before it repeated.

He then wrote to me to say: ‘Look, I found out how it’s done. Is this really



An example of a Penrose tiling

unique and what is the plan underlying it?” So I showed him the plan: you match this against, this against this, et cetera. You can have other designs like this and I drew some bird shape. I said it’s not very good I’m sure you could do far better than this.

So he wrote back to me and he showed me the picture with the ghosts. He was not all together pleased with it. I think he thought he could have done better but it was probably the one of last ones he made.”

This puzzle would later evolve into the famous Penrose tilings that tile the entire plane in a nonperiodic way. Surely Escher would have loved this but unfortunately he passed away before he could play around with it.

“I would say I was too slow to find these things. It was only just shortly after he died. My father died around the same time and both of them would have got a lot out of them.”

Another set of pictures by Escher that are very interesting to mathematicians are his tilings of the hyperbolic plane. The hyperbolic plane is an abstract two-dimensional space that behaves in almost all respects as the ordinary Euclidean plane except that you can draw more than one line through a point parallel to a given point. It is impossible to embed the hyperbolic plane into ordinary Euclidean space in such a way that it preserves all distances, but there are other interesting depictions of it. In the Poincaré disc model all the points of the hyperbolic plane are mapped into a disk and all lines in the hyperbolic plane become circle segments that stand perpendicular on the boundary of the disk. This model has the special property that it is conformal, which means



The impossible triangle

that it preserves angles: if two lines make a certain angle in the hyperbolic plane the corresponding circle segments in the Poincaré disk will make the same angle. Escher used this model for his 'Circle limit' paintings. Although the model preserves angles it does not preserve size and this is why the fishes, angles and demons get smaller and smaller as they approach the limit circle, while in the hyperbolic plane all these creatures have exactly the same size.

"These pictures came about as a result of the same conference in Amsterdam. Another mathematician at this conference was Coxeter. He was a very distinguished geometer and he was very impressed by Escher. He said to him: 'Look there you could do very good things with hyperbolic geometry, and particularly the Beltrami model.' You have to be careful about this, because most people call it the Poincaré disk. But the history of it is not quite so straightforward. Poincaré did rediscover it but originally it was discovered by Beltrami, an Italian geometer.

Beltrami had discovered the conformal representation of the hyperbolic plane, which is the Poincaré disk, the projective representation, which is called the Klein representation, and the half plane representation, which is called the Poincaré half plane.

He had found all these models together and he had figured out the relationship between them. This was very cleverly done but other people didn't know about it. Poincaré did other things with it which are important, but Beltrami had put the whole thing in a much better geometrical picture.

The conformal model is the most beautiful one and that is the one Coxeter suggested Escher should use. And that he did, he made an extraordinarily precise picture. Right up to the edge you have these tiny figures and they're still very correct."

Conformal cosmology

Penrose's fascination for conformal symmetries also shines through in his work on cosmology. He developed a new theory in which the universe goes through an endless sequence of cycles, that each start with a big bang. But unlike other theories in which each cycle ends with a crunch, Penrose theory predicts that the universe keeps on expanding and expanding. But as the last stars and galaxies fade away and all the black holes evaporate, it becomes conformally symmetric. This means that there is no difference between big and small, only angles are preserved. From a conformal point of view this vast radiation filled universe looks exactly the same as the tiny concentrated energetic soup that

we see just after the big bang and the cycle can start all over again.

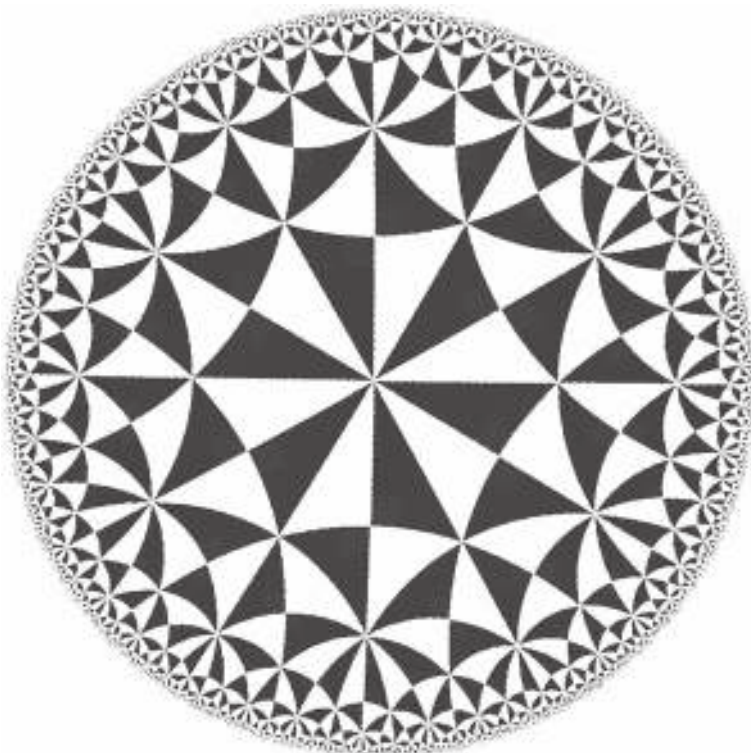
"One of the things that deeply troubled me for many many decades is the second law of thermodynamics. Excuse me when I call that the mammoth in the room. People say the elephant in the room but it is even bigger. The second law of thermodynamics tells us that things get more random so to speak: entropy is increasing. Saying exactly the same thing the other way around, back in the past things get less and less random.

Now go back until you see the earliest things we can observe, the Cosmic Microwave Background. If you look at it, one of the most striking features of that is its thermal spectrum. If you compare it to the spectral curve of a radiating black body, it fits absolutely beautifully. It tells you that you have a state of maximum entropy. Back in time the entropy gets smaller but you get to a maximum.

That's strange... but it's not a paradox because you have not taken gravity into consideration. Gravity tends to work the other way: entropy goes up when things clump whereas for ordinary gas in a box entropy goes up as it spreads out. Gravity being universally attractive means that you have a uniform distribution with low entropy and then the entropy goes up when it condenses. Well that is why we see galaxies, stars, our Sun..."

But this does not explain why the universe started off in this thermal equilibrium. The standard way cosmologists solve this puzzle is by introducing inflation. This theory proposes that just after the big bang the universe went through a stage of very rapid expansion, in which it grew exponentially by a factor of 10^{50} . So everything we see around us was so close together that before inflation started it all had the same temperature and therefore the cosmic background radiation looks uniform in all directions. But Penrose is not convinced.

"Inflation is just not a solution! The easiest way to think of it is when you reverse time. Imagine your universe and as it contracts, the irregularities will increase and then they will produce black holes. You can put the inflaton field in as much as you like, it makes no difference. That irregular start will not be smoothed by inflation. It's like a fractal: if you stretch it out it gets worse."



Coxeter's tiling of the hyperbolic plane that was an inspiration for Escher's 'Circle limits' paintings

Instead Penrose came up with a different way to solve the problem.

“Some years ago, I had this idea of conformal cyclic cosmology. In this model you have a universe where the Big Bang is the conformal continuation of the exponential expansion caused by Einstein’s cosmological constant. The cosmological constant ensures that the universe will expand exponentially in the far future. In a way it does the same as inflation but at the wrong end of the universe: not at the beginning but at the end.

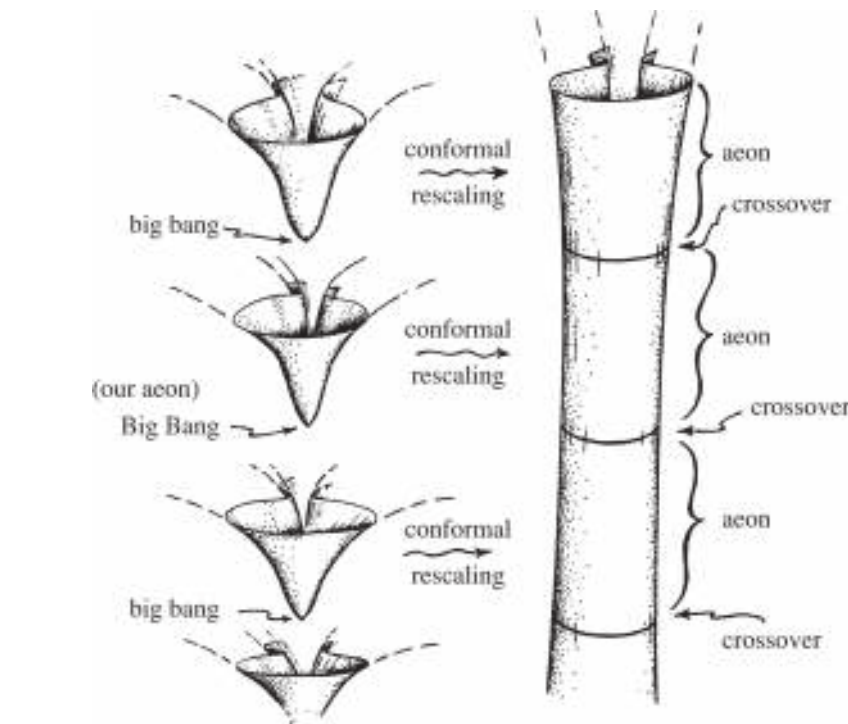
However, if you have a conformal picture and you look at our Big Bang conformally, you can stretch it out and it looks very similar to the other end of the universe. So my contention is that they actually match and that our Big Bang was the conformal continuation of the remote future of a previous universe.”

Penrose proposal has a strange consequence. If the universe goes through consecutive cycles the second law of thermodynamics tells us the entropy should be increasing all the time. Yet in his model each cycle the universe seems to start with the same entropy. How does this work?

“You mean why you don’t have entropy increasing, increasing, increasing,... with each cycle? The reason is as follows. Where is the most entropy in our universe now? Easily in supermassive black holes. What happens to those supermassive black holes? Well they evaporate away and with them some of the degrees of freedom in the universe get lost. To estimate the entropy, you have to have a phase space. But if you lose degrees of freedom this means your phase space collapses down.

You say, okay that black hole has swallowed all those degrees of freedom. It has disappeared, forget it. But up to that point I had been counting those degrees of freedom in my calculation of entropy. When that black hole is gone I change my mind about what I regard as the phase space. I say okay, with this gone, my measure of entropy has come down. It’s not that it has violated the second law. It’s just that I have a new renormalized definition of entropy, which does not include those degrees of freedom. That new quantity, which I now call the entropy, is smaller.

Once you’ve lost all the black holes, the entropy value comes down because we are



Schematic description of conformal cyclic cosmology, as appeared in Penrose’s article ‘The big bang and its dark-matter content: whence, whither, and wherefore’, published in *Foundations of Physics* 48(10), October 2018, 1177–1190.

not interested in those degrees of freedom anymore. The second law starts with this new renormalized entropy and that’s the argument. It’s a bit subtle, but I think it’s consistent: you can live with the second law, as well as with cyclic cosmology.”

But is all this just pure speculation or does he have evidence for his theory?

“Just a few days ago, I was in Poland visiting my colleague Krzysztof Meissner. He and another astronomer, Daniel An, had done an analysis based on my idea of conformal cyclic cosmology and they found evidence for this which seems to be extremely significant.

They were seeing little points in the sky which seemed to emit huge amounts of energy. When Meissner mentioned this, I thought: ‘Yeah, I think I know what that is.’ In the previous aeon before the Big Bang you will have supermassive black holes and these black holes will after a while start to radiate away by Hawking radiation. This is after a very long time, when the universe has gotten much colder. You have to wait 10^{100} years, an enormous time, but then they start to radiate and the entire energy of these black holes is concentrated into one point in the sky.

We have just written a paper about this, which we have sent to *Physical Review*

Letters. In it we identify twenty points in the sky where there is a source of a huge amount of energy. We call these Hawking points. Although we’re little cautious to say what they are, we argue that they are remnants of a previous cosmological cycle.”

So even at the age of 86 Penrose is still actively exploring and trying to understand the cosmos. Whether his proposal of cyclic conformal cosmology will work out, time will tell. Lot’s of time, perhaps even 10^{100} years... ✦

Event 22 January 2019

In January 2019 Sir Prof. Roger Penrose will be in the Netherlands for the presentation of the Dutch translation of his monumental book *The Road to Reality: A Complete Guide to the Laws of the Universe*. On 22 January the Institute of Advanced Study of the University of Amsterdam will host a public event where Penrose will discuss the three world model. The three world model was proposed by Penrose as a means to understand how the physical, mental and mathematical worlds are connected. The book will be published by Merlin Uitgaven.

Richard C. Kraaij

Delft Institute of Applied Mathematics
Delft University of Technology
r.c.kraaij@tudelft.nl

Research Stieltjes Prize 2016

Fluctuations of Markov processes and a connection to Hamilton–Jacobi equations

In 2016 Richard Kraaij has been awarded the Stieltjes Prize for one of the two best PhD theses in mathematics in the Netherlands. The prize was awarded for his thesis entitled *Semigroup Methods for Large Deviations of Markov Processes*, which he completed at Delft University of Technology. After a postdoc in Bochum he returned to Delft as Assistant Professor. In this article he describes his current research on Markov processes.

Fluctuations of simple averages

What more is there to be said about the limiting behaviour of the average of n independent and identically distributed (iid) random variables than the law of large numbers and the central limit theorem?

Consider two examples. Let X_i be a sequence of iid coin tosses:

$$X_i = \begin{cases} -1 & \text{with probability } \frac{1}{2}, \\ 1 & \text{with probability } \frac{1}{2}. \end{cases}$$

Let Y_i be a sequence of standard normal random variables $Y_i \sim \mathcal{N}(0,1)$:

$$\mathbb{P}[Y_i \leq y] = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^y e^{-\frac{1}{2}x^2} dx.$$

In both examples $\mathbb{E}[X_i] = \mathbb{E}[Y_i] = 0$ and $\text{Var}(X_i) = \text{Var}(Y_i) = 1$. This means that by the law of large numbers

$$\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n X_i \rightarrow 0, \quad \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n Y_i \rightarrow 0,$$

almost surely, whereas by the central limit theorem the rescaled averages converge

weakly to a standard normal random variable

$$\frac{1}{\sqrt{n}} \sum_{i=1}^n X_i \rightarrow \mathcal{N}(0,1), \quad \frac{1}{\sqrt{n}} \sum_{i=1}^n Y_i \rightarrow \mathcal{N}(0,1).$$

Does this mean that both sequences behave the same?

That of course depends on which question one would like to answer. Suppose that you feel lucky and go to play some games in the casino, in which two fair games can be played. Denote by X_i and Y_i the pay-offs of these games. Clearly, the casino wants to make a profit, so they charge a price a to play a game. What is the probability that after n games, you have gained some money?

Here a difference must turn up: if $a \geq 1$, then each game of the first type will make a loss with probability one, whereas for games of the second type, there still is a chance to make a profit.

To study more precisely the asymptotic behaviour of the probability to gain some money, that is the event that $\sum_{i=1}^n X_i \geq na$

or similarly for the games of type Y , we next consider upper bounds for the probability

$$\mathbb{P}\left[\sum_{i=1}^n X_i \geq na\right] = \mathbb{P}\left[\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n X_i \geq a\right], \quad a \geq 0.$$

This we do via Markov's inequality. For an arbitrary $\lambda > 0$, this yields

$$\begin{aligned} \mathbb{P}\left[\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n X_i \geq a\right] &= \mathbb{P}[e^{\lambda \sum_{i=1}^n X_i} \geq e^{\lambda na}] \\ &\leq e^{-na\lambda} \mathbb{E}[e^{\lambda \sum_{i=1}^n X_i}] \\ &= \exp\{-n(\lambda a - \log \mathbb{E}[e^{\lambda X_1}])\}. \end{aligned} \quad (1)$$

Denote $I_X(a) = \sup_{\lambda \geq 0} \{\lambda a - \log \mathbb{E}[e^{\lambda X_1}]\}$. By optimizing over λ , we obtain

$$\mathbb{P}\left[\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n X_i \geq a\right] \leq e^{-nI_X(a)}. \quad (2)$$

A direct calculation of I_X and I_Y yields

$$I_X(a) = \begin{cases} \frac{1-a}{2} \log(1-a) \\ + \frac{1+a}{2} \log(1+a) & \text{if } a \in [0,1], \\ \infty & \text{if } a \geq 1, \end{cases}$$

$$I_Y(a) = \frac{1}{2} a^2.$$

Even though we have only proven an upper bound, on an exponential scale, the bound in (2) is sharp. A combination of an upper bound with a corresponding lower bound on an exponential scale is called a *large deviation principle* (LDP).

The law of large numbers is reflected by $I_X(0) = I_Y(0) = 0$. That the central limit theorem holds for both sequences of averages is reflected by the fact that I_X and I_Y have the same second order Taylor expansion around 0, see Bryc [2]. Finally, note that $I_Y(a) < I_X(a)$ for all $a > 0$, with the difference becoming larger for large values of a . This means that we have a much larger probability (even though both exponentially small) to win some money in the long run by playing games of type Y rather than by playing games of type X .

A general framework

To prepare for some more involved large deviation principles, we extend our set-up. A general framework for the study of large deviations was introduced by Varadhan [13], who was awarded the Abel prize for his contributions to large deviation theory. We say that random variables Z_n on a space E satisfy an LDP with rate function $I : E \rightarrow [0, \infty]$ if

$$\limsup_n \frac{1}{n} \log \mathbb{P}[Z_n \in G] \leq - \inf_{a \in G} I(a) \quad \text{for all closed sets } G,$$

$$\liminf_n \frac{1}{n} \log \mathbb{P}[Z_n \in U] \geq - \inf_{a \in U} I(a) \quad \text{for all open sets } U.$$

Indeed, the large deviation principle can be interpreted as

$$\mathbb{P}[Z_n \approx a] \asymp e^{-nI(a)}$$

by considering the large deviation upper and lower bound for open and closed balls of small radius. In the case of previous section, playing the game of type X , leads to $Z_n = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n X_i$ and $G = [a, \infty)$.

The procedure to obtain an LDP in terms of the logarithm of the Laplace transform in (1) and (2) was generalized to this general setting by Bryc [3].¹ He established that the random variables Z_n satisfy an LDP if² for all continuous and bounded functions f the limit

$$\Lambda_f := \lim_n \frac{1}{n} \log \mathbb{E}[e^{nf(Z_n)}] \quad (3)$$

exists. In that case the rate function is given by

$$I(a) = \sup_f f(a) - \Lambda_f. \quad (4)$$

Having introduced this more general machinery, we can consider large deviations for more difficult objects. We proceed by considering the large deviations of processes.

Adding a temporal component

The question of making a profit after n games is not natural. We would rather ask for the probability that at no single time we have made a loss, that is: the probability of not going bankrupt. After all, having gone bankrupt, there is no way to recover.

Say that we play n games per hour. Then the rescaled total pay-off (if we play with games of type X) at time $t \geq 0$ (time in hours) is

$$t \mapsto Z_{X,n}(t) := \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{\lfloor nt \rfloor} X_i. \quad (5)$$

We can rephrase our large deviation principle of the previous section as

$$\mathbb{P}[Z_{X,n}(1) \geq a] \asymp e^{-nI_X(a)}.$$

The probability of not going bankrupt in the first hour translates into

$$\mathbb{P}[\forall t \leq 1: Z_{X,n}(t) \geq at]. \quad (6)$$

Even though this probability is evidently smaller, the exponential asymptotic rate of decay is also $I_X(a)$!

We explore where this decay rate comes from. Consider a large deviation at time $s \in (0, 1)$ of size sa , as well as a large deviation of size a at time $t = 1$:

$$\mathbb{P}[Z_{X,n}(s) \approx sa, Z_{X,n}(1) \approx a].$$

By the Markov property, we can condition on the state at time s , and find that this probability equals



Richard Kraaij

$$\begin{aligned} & \mathbb{P}[Z_{X,n}(s) \approx as] \mathbb{P}[Z_{X,n}(1) \approx a | Z_{X,n}(s) \approx as] \\ &= \mathbb{P}[Z_{X,n}(s) \approx as] \mathbb{P}[Z_{X,n}(1-s) \approx a(1-s)]. \end{aligned} \quad (7)$$

By appropriate rescaling in the calculation that lead to (2), we find

$$\begin{aligned} & \mathbb{P}[Z_{X,n}(s) \approx sa, Z_{X,n}(1) \approx a] \\ & \asymp e^{-n(sI_X(a) + (1-s)I_X(a))} \\ &= e^{-nI_X(a)}, \end{aligned} \quad (8)$$

which indeed gives us the same rate $I_X(a)$. On the other hand, a general structure can be recognized from the middle term by noting that if γ is a the function $\gamma(t) = at$, then $a = \frac{\gamma(s) - \gamma(0)}{s}$ and $a = \frac{\gamma(1) - \gamma(s)}{1-s}$. Thus, the term in the exponent equals

$$-n \left(sI_X \left(\frac{\gamma(s) - \gamma(0)}{s} \right) + (1-s)I_X \left(\frac{\gamma(1) - \gamma(s)}{1-s} \right) \right).$$

For more general trajectories γ , one finds similarly that the probability of Z_n being close to γ at times t_i equals

$$\begin{aligned} & \mathbb{P}[Z_{X,n}(t_i) \approx \gamma(t_i), i \in \{0, \dots, k\}] \\ & \asymp e^{-n \sum_{i=1}^k (t_i - t_{i-1}) I_X \left(\frac{\gamma(t_i) - \gamma(t_{i-1})}{t_i - t_{i-1}} \right)}. \end{aligned} \quad (9)$$

Thus, the exponent contains a Riemann sum of terms I_X that are evaluated in difference quotients along the trajectory γ . By taking more and more times at which we consider a large deviation, a general principle appears, from which the asymptotic decay rate for (6) can be derived.³

Theorem 1 (Mogulskii [12]). *Consider iid random variables U_i and consider $t \mapsto Z_{U,n}(t)$ as in (5).⁴ Denote by*

$$\begin{aligned} \Lambda_U(\lambda) &:= \log \mathbb{E}[e^{\lambda U}], \\ I_U(a) &:= \sup_{\lambda} \{\lambda a - \Lambda_U(\lambda)\}. \end{aligned}$$

Then

$$\mathbb{P}[\{Z_{U,n}(t)\}_{t \in [0,1]} \approx \{\gamma(t)\}_{t \in [0,1]}] \asymp e^{-nJ_U(\gamma)}.$$

The function J_U is given by

$$J_U(\gamma) = \begin{cases} \int_0^1 I_U(\dot{\gamma}(s)) ds & \text{if } \gamma \text{ is absolutely continuous,} \\ \infty & \text{otherwise} \end{cases}$$

As an unavoidable consequence of the more complex set-up of our problem, we end up with a more complex rate function J_U . Note, however, the similarities of Mogulskii result to (1) and (2) or (3) and (4). Indeed, the optimization procedure that lead to (2) and (4) is replaced by the integral over an expression that is obtained from a similar optimization procedure that is carried out for each infinitesimal interval of time.

What we have gained from Mogulskii's result is that in addition to the asymptotics corresponding to never going bankrupt, we can now calculate the asymptotics of any possible trajectory of capital gains. For example, the casino might decide that instead of having a fixed price to play a game, the price is dependent on the time of the day that the game is played. Playing during the morning, in off peak hours is cheap, whereas playing during the evening is expensive. By Mogulskii's theorem we can still calculate the asymptotics of not going bankrupt.

The key components in Mogulskii's theorem

The structure of the question above becomes more complex if the price of playing a game becomes dependent on how much money you have earned on average in the past (e.g. a progressive policy in which rich people pay more). To compute the asymptotic probability of not going bankrupt, we now have to take into account the price we pay for each game in the stochastic process $Z_n(t)$. In addition, to make the analysis a little easier, we assume that instead⁵ of playing at times k/n , we assume that the time between the played games has an exponential distribution with mean $1/n$. If a game is played at time t , your rescaled wealth changes at time t by

$$\frac{1}{n}U_t - \frac{1}{n}a(Z_n(t)).$$

Here U_t (e.g. a game of type X or Y) is the pay-off of the game played at time t and $a(Z_n(t))$ is the cost of this game. The probability of not going bankrupt in the first hour translates into

$$\mathbb{P}[\forall t \leq 1: Z_n(t) \geq 0].$$

To extend the analysis to this more complex process, we identify the three crucial components of the derivation above:

1. We chose a finer and finer mesh of times in the interval $[0, 1]$.
2. The rate function for these meshes had an additive structure due to the Markov property of the process in (5), see (7) and (9).
3. We were able to explicitly calculate what was the limiting rate function due to the simple form of the rate function for a finite set of times.

For our more general Markov processes $t \mapsto Z_n(t)$, clearly step 1 does not lead to

any issues. By using the Markov property, we can reproduce an analogue of the first line of (7), but not the second, and it is not clear that on an exponential scale, these probabilities have suitable asymptotic behaviour. In particular, taking two times $0 \leq s < t$ and a point x it is not clear that there is a function $J_{t-s}(\cdot | x)$ such that

$$\mathbb{P}[Z_n(t) \approx y | Z_n(s) \approx x] \asymp e^{-nJ_{t-s}(y|x)}. \quad (10)$$

If there is a family of such functions, we do not necessarily know what they look like. Thus, we are not immediately able to derive a rate function for the full process, as we were able to do for Mogulskii's theorem.

Feng and Kurtz [9] made a major step towards a general resolution of these issues. Let us follow their first step towards establishing the asymptotic behaviour in (10). The resolution of this issue will lead to a key concept that allows us to solve the second problem as well.

To compute the large deviation asymptotics for (10), we turn to Bryc's result. Based on (3), we aim to study the logarithm of the exponential moments of the process at some t , given that at some earlier time we are at x . This leads us to define a collection of (non-linear) operators $\{V_n(t)\}_{t \geq 0}$ on the space of bounded continuous functions

$$V_n(t)f(x) = \frac{1}{n} \log \mathbb{E}[e^{nf(Z_n(t))} | Z_n(0) = x].$$

Note that the Markov property of our process yields that V_n is a semigroup with respect to time: $V_n(t)V_n(s)f = V_n(t+s)f$ and $V_n(0) = 1$. By Bryc's theorem and the Markov property, it follows that the LDP for the vector $(Z_n(t_0), Z_n(t_1), Z_n(t_2), \dots, Z_n(t_k))$ with $0 = t_0 < t_1 < \dots < t_k$ holds if there is a operator semigroup $V(t)$, such that

$$V_n(t)f \rightarrow V(t)f. \quad (11)$$

The function $J_{t-s}(y|x)$ of (10) is then given, see (4), by

$$J_{t-s}(y|x) = \sup_f f(y) - V(t-s)f(x).$$

Putting all increments together, we see that the vector $(Z_n(t_1), Z_n(t_2), \dots, Z_n(t_k))$ with $0 = t_0 < t_1 < \dots < t_k$ satisfies an LDP:

$$\begin{aligned} &\mathbb{P}[\forall i \in \{1, \dots, k\}: Z_n(t_i) \approx \gamma(t_i)] \\ &\asymp \exp \left\{ -n \sum_{i=1}^k J_{t_i - t_{i-1}}(\gamma(t_i) | \gamma(t_{i-1})) \right\}. \end{aligned} \quad (12)$$

This rate function is the analogue of (9) in

the setting of playing games in the casino with a progressive pricing policy. Note, however, that all steps in this derivation can be carried out for a general Markov process. We conclude that the large deviation principle of the trajectories of a sequence of Markov processes can be traced back to the convergence of non-linear operator semigroups.

At this moment, it is not clear whether there is an explicit form for the functions J_t , nor of the limiting rate function if we take a finer and finer mesh of times. This problem has to wait until we have better grip on the concepts that can be used to study the convergence of non-linear semigroups, which is an analytic problem that we treat next.

Operator semigroups and their generators

Consider the following problem posed by Cauchy [4]. Find all maps $f: \mathbb{R}^+ \rightarrow \mathbb{C}$ satisfying

$$\begin{cases} \phi(t+s) = \phi(t)\phi(s) & \text{for all } s, t \geq 0, \\ \phi(0) = 1. \end{cases}$$

Assuming that ϕ is continuous⁶, it can be shown that all maps of this type are of the type $\phi_a(t) := e^{ta}$ with $a \in \mathbb{C}$.

The factor a , which can be found by $a = \partial_t \phi_a(t) |_{t=0}$, captures all essential information of the semigroup ϕ_a . In addition, the dependence of ϕ_a on a is robust under convergence: for a sequence of $a_n \in \mathbb{C}$ with $a_n \rightarrow a$, it holds that $\phi_{a_n} \rightarrow \phi_a$ uniformly on compacts.

We use this insight to tackle the convergence question posed in (11).

Consider any of the non-linear semigroups $\{V_n(t)\}_{t \geq 0}$. We formally define the (non-linear and unbounded) operators H_n by

$$H_n f := \partial_t V_n(t)f |_{t=0} \quad (13)$$

for f for which the right-hand side exists.⁷

In analogy to the setting that Cauchy considered, we aim to find an operator H such that $H_n \rightarrow H$, to write $V_n(t) = e^{tH_n}$ and $V(t) = e^{tH}$, and to conclude that $V_n(t)f \rightarrow V(t)f$.

This statement is easier said than done. Taking the exponent of an unbounded non-linear operator needs some care. In particular, defining the exponent in terms of a power series gives trouble as we are taking a sum over compositions of unbounded operators. Following Hille [10],

we turn to Euler's procedure to obtain the exponential, namely, we aim to write

$$V_n(t)f = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 - \frac{t}{n} H_n\right)^{-n} f. \quad (14)$$

Suppose that for all $\lambda > 0$ the resolvent $R_n(\lambda) := (1 - \lambda H_n)^{-1}$ exists, then by general theory $R_n(\lambda)$ is a continuous operator.⁸ Thus, the formula (14) involves only bounded operators, which are much easier to handle than a definition of e^{tH_n} in terms of a power series.

To answer the question whether for all $\lambda > 0$ the resolvent $R_n(\lambda) := (1 - \lambda H_n)^{-1}$ exists as a non-linear operator, we need to be able to solve for all functions h and $\lambda > 0$ the equation

$$f - \lambda H_n f = h.$$

This equation is called the Hamilton-Jacobi equation for the operator H_n . Using the Markovian structure of the process, we can always find such a solution, and therefore we have a resolvent.

Finally, to come back to the convergence question, the following result (glossing over technical definitions and issues) was proven by Feng and Kurtz [9].

Theorem 2 (Feng-Kurtz extension of the Trotter-Kato theorem). *Put $H_n = \partial_t V_n(t) |_{t=0}$. Suppose that H is an operator such that*

- $H \subseteq \text{LIM} H_n$ in the sense that if $(f, g) \in H$ (where we interpret H as a graph), then there are $(f_n, g_n) \in H_n$ such that $\lim_n f_n = f$ and $\lim_n g_n = g$;
- for all h and $\lambda > 0$ there is a unique viscosity solution to the Hamilton-Jacobi equation $f - \lambda H f = h$.⁹

Then there is a semigroup $V(t) = \lim_n (1 - \frac{t}{n} H)^{-n}$ and we have for all f and $t \geq 0$ that $\lim_n V_n(t)f = V(t)f$.

The key component idea in the proof of this theorem is to show that the convergence of Hamiltonians allows one to show that solutions to $f - \lambda H_n f = h$ give a candidate solution for the limiting equation $f - \lambda H f = h$. Uniqueness of solutions makes this procedure robust, i.e. the resolvents converge in a 'strong' topology, and this can be used to derive the convergence of semigroups.

We apply this in the setting of our casino game with wealth-dependent cost for each game. In the case that we play games of type X , then the operator H_n is given by

$$H_{n,X}f(x) = \frac{1}{2} \left[e^{n(f(x + \frac{1-a(x)}{n}) - f(x))} - 1 \right] + \frac{1}{2} \left[e^{n(f(x - \frac{1-a(x)}{n}) - f(x))} - 1 \right].$$

The operator carries in its structure the 50% chance of winning a game, after which the wealth changes by $1 - a(x)$, and the 50% chance of losing $1 + a(x)$. This operator has a limit H given by

$$H_X f(x) = \frac{1}{2} [e^{f'(x)(1-a(x))} - 1] + \frac{1}{2} [e^{-f'(x)(1+a(x))} - 1]. \quad (15)$$

In the case that we play with games of type Y , we similarly obtain

$$H_{n,Y}f(x) = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-y^2/2} \left[e^{n(f(x + \frac{y-a(x)}{n}) - f(x))} - 1 \right] dy$$

and a limiting operator

$$H_Y f(x) = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-y^2/2} [e^{f'(x)(y-a(x))} - 1] dy. \quad (16)$$

In both cases,¹⁰ there are unique viscosity solutions for the Hamilton-Jacobi equation and we obtain that $V_n(t) \rightarrow V(t)$.

Large deviations

As we have seen, Theorem 2, combined with the discussion on (11), implies that large deviation principles for the trajectories of a sequence of Markov processes can be traced back to the two conditions of Theorem 2 and the verification of a compactness property.¹¹ The rate function is in terms of a limit of a Riemann-sum like the expression in (12).

To conclude our analysis, we re-express the large deviation rate function in a more accessible form. This can be done using control theory. As in (15) and (16), the operator H can usually be expressed in the form $Hf(x) = \mathcal{H}(x, f'(x))$ where $\mathcal{H}$ is a function of space and 'momentum'. In analogy with the basic notions in mechanics, we call $\mathcal{H}$ a *Hamiltonian*.¹² As in Mogulskii's theorem, Theorem 1, one obtains from the Hamiltonian $\mathcal{H}$ a *Lagrangian* $\mathcal{L}(x, v) = \sup_p \langle p, v \rangle - \mathcal{H}(x, p)$. Using this Lagrangian one can use control theory to define an operator $\hat{R}(\lambda)$ such that the function $\hat{R}(\lambda)h$ is a viscosity solution to $f - \lambda H f = h$. If the Hamilton-Jacobi equation has a unique viscosity solution, both our solutions must be the same. Thus, we have found an explicit form for the resol-

vent, that can be used to give an explicit form for the semigroup $V(t)$ and the conditional rate functions J_t . This leads to a generalization of Theorem 1.

Theorem 3 (Feng and Kurtz). *Let $Z_n(t)$ be Markov processes with semigroups $V_n(t)$ and operators H_n that satisfy the conditions of Theorem 2.¹³ Then a large deviation principle holds with rate function J given by*

$$J(\gamma) = \begin{cases} \int_0^\infty \mathcal{L}(\gamma(s), \dot{\gamma}(s)) ds & \text{if } \gamma \text{ is absolutely continuous,} \\ \infty & \text{otherwise.} \end{cases}$$

By evaluating the Lagrangians $\mathcal{L}_X$ and $\mathcal{L}_Y$ that correspond to (15) and (16), we have established the asymptotic form of the probability that one does not go bankrupt in a casino with a progressive cost for playing games.

We conclude that this method leads to an effective way of establishing large deviation principles for Markov processes by turning probabilistic questions into analytic ones. In particular, the main challenge is to establish uniqueness of viscosity solutions of Hamilton-Jacobi equations. Following the introduction of viscosity solutions in the 1980's by Crandall and Lions [6], see also Crandall, Ishii and Lions [5] for an overview of the early results, well-posedness was established for a class of Hamilton-Jacobi equations on open domains for which the operator H was either Lipschitz or coercive, see Bardi and Capuzzo-Dolcetta [1].

Application of these methods in statistical physics, even for the simplest model like the Curie-Weiss model which tries to explain phase-transitions in ferromagnetic materials like iron, leads to Hamiltonians of the type ($\beta \geq 0$)

$$\begin{aligned} \hat{H}f(x) &= \hat{\mathcal{H}}(x, f'(x)) \\ &= \frac{1-x}{2} e^{\beta x} [e^{2f'(x)} - 1] \\ &\quad + \frac{1+x}{2} e^{-\beta x} [e^{-2f'(x)} - 1], \\ x &\in [-1, 1]. \end{aligned} \quad (17)$$

In this case the domain is the closed interval $[-1, 1]$, the exponentials make the operator non-Lipschitz, and the pre-factors $1-x$ and $1+x$ make the operator non-coercive.

Theorem 4 (Kraaij [11]). *For all $\lambda > 0$ and continuous and bounded h , uniqueness holds for the Hamilton-Jacobi equation $f - \lambda \hat{H}f = h$.*

We observe that already the simple class of mean-field models like the Curie–Weiss model leads to non-trivial Hamiltonians that fall outside of the ‘classical’ setting. Extensions of this setting are considered in the study of chemical reaction networks where similar non-Lipschitz and non-coercive behaviour occurs. Well-posedness in this setting remains an open problem. More generally, the large deviation analysis in statistical physics or mathematical

biology introduces various kinds of new Hamiltonians that all fall outside the ‘classical’ setting and for which well-posedness issues are unsolved. Issues arise from boundary conditions, singular behaviour or infinite dimensional contexts.

Theorem 4 and more recent works by the author, as well as work by Dupuis, Ishii, and Soner [7], Feng and Katsoulakis [8], indicate that these methods are robust also in these more difficult settings as well as in infinite dimensional contexts. But in addition, they indicate that this field has more non-trivial open problems than problems that we are able to solve at the moment. $\diamondsuit$

Biography

- Assistant professor, 2018 onward at the Delft University of Technology.
- Visiting researcher at École Polytechnique of Paris, in September 2017 and May and December of 2018.
- Postdoc, 2016–2018 at the Ruhr University of Bochum, Germany.
- PhD student of Mathematics (cum laude), 2012–2016 at the Delft University of Technology.
- Master of Mathematics (cum laude), 2010–2012 at Free University of Amsterdam,
- Bachelor of Mathematics (cum laude), 2007–2010 at Radboud university of Nijmegen.

Notes

- 1 Preceding Bryc’s work, Varadhan [13] proved that the LDP for the variables Z_n with rate function I implies that (3) holds with $\Lambda_f = \sup_a f(a) - I(a)$. Thus, the definition of the large deviation principle, Bryc’s result and Varadhan’s result can be considered a non-linear generalization of the Portman–teau theorem. In fact, most large deviation results have weak-convergence counterparts.
- 2 To be complete: one has to assume exponential tightness as well. This can be interpreted as a sort of compactness property for the sequence of random variables Z_n .
- 3 Set $\gamma^*(t) = at$. Jensen’s inequality can be used to show that indeed $\inf_{\hat{\gamma} \in \{\gamma \mid \gamma(t) \geq at\}} J_X(\hat{\gamma}) = J_X(\gamma^*) = I_X(a)$, so the easiest way not to go bankrupt, is to only barely stay solvent at all times.
- 4 We also assume that the random variables have exponential moments.

- 5 The analysis can be carried out for the Markov chain as well, but the formula’s that follow are less intuitive.
- 6 The conclusion holds under much weaker assumptions, e.g. local integrability suffices.
- 7 If A_n is the infinitesimal generator of the continuous time Markov process Z_n , then $H_n f = n^{-1} e^{-nf} A_n e^{nf}$. If we work with a discrete time Markov chain instead, the analysis can be carried out in similar manner at the cost of some relatively straightforward approximation procedures by taking $H_n f = \frac{1}{n} \log(e^{-nf} (P_n - 1) e^{nf})$, where P_n is the transition matrix of the Markov chain. This operator is found by replacing the derivative in (13) by the corresponding difference quotient.
- 8 To establish continuity one uses that the operators H_n satisfy the *maximum principle*, which is satisfied for all operators obtained from Markov processes using this procedure.

- 9 The notion of viscosity solutions for Hamilton–Jacobi equations is based on the maximum principle of H . This notion is robust enough to effectively treat non-linear equations. For a early reference work, see Crandall, Ishii, and Lions [5].
- 10 Assuming, for simplicity, that a is a bounded continuous function.
- 11 Arising from the footnote going with Bryc’s theorem, see the discussion around accompanying equation (3).
- 12 More generally, we interpret the underlying space as a manifold and write $Hf(x) = \mathcal{H}(x, df(x))$, where $\mathcal{H}$ is a function on the co-tangent bundle. $\mathcal{L}$ is then a function defined on the tangent bundle.
- 13 Assuming that the processes Z_n also satisfy some compactness property.

References

- 1 M. Bardi and I. Capuzzo-Dolcetta, *Optimal Control and Viscosity Solutions of Hamilton–Jacobi–Bellman Equations*, Birkhäuser, 1997.
- 2 W. Bryc, A remark on the connection between the large deviation principle and the central limit theorem, *Statistics & Probability Letters* 18(4) (1993), 253–256.
- 3 W. Bryc, Large deviations by the asymptotic value method, in *Diffusion Processes and Related Problems in Analysis*, Vol. 1 (Evanston, IL, 1989), Progr. Probab., Vol. 22, Birkhäuser, 1990, pp. 447–472.
- 4 A.-L. Cauchy, *Cours d’analyse de l’École Royale Polytechnique*, 1821.
- 5 M.G. Crandall, H. Ishii and P.L. Lions, User’s guide to viscosity solutions of second order partial differential equations, *Bull. Am. Math. Soc., New Ser.* 27(1) (1992), 1–67.
- 6 M.G. Crandall and P.L. Lions, Viscosity solutions of Hamilton–Jacobi equations, *Trans. Amer. Math. Soc.* 277(1) (1983), 1–42.
- 7 P. Dupuis, H. Ishii and H.M. Soner, A viscosity solution approach to the asymptotic analysis of queueing systems, *The Annals of Probability* 18(1) (1990), 226–255.
- 8 J. Feng and M. Katsoulakis, A comparison principle for Hamilton–Jacobi equations related to controlled gradient flows in infinite dimensions, *Archive for Rational Mechanics and Analysis* 192(2) (2009), 275–310.
- 9 J. Feng and T.G. Kurtz, *Large Deviations for Stochastic Processes*, American Mathematical Society, 2006.
- 10 E. Hille, *Functional Analysis and Semi-Groups*, American Mathematical Society Colloquium Publications, Vol. 31, American Mathematical Society, 1948.
- 11 R.C. Kraaij, Large deviations for finite state Markov jump processes with mean-field interaction via the comparison principle for an associated Hamilton–Jacobi equation, *Journal of Statistical Physics* 164(2) (2016), 321–345.
- 12 A.A. Mogulskii, Large deviations for processes with independent increments, *Ann. Probab.* 21(1) (1993), 202–215.
- 13 S. Varadhan, Asymptotic probabilities and differential equations, *Communications on Pure and Applied Mathematics* 19(3) (1966), 261–286.

Lisa Hernandez Lucas

Vakgroep Wiskunde
Vrije Universiteit Brussel
lisa.hernandez.lucas@vub.ac.be

Tetyana Kadankova

Vakgroep Wiskunde
Vrije Universiteit Brussel
tetyana.kadankova@vub.be

Evenement The Beautiful Impact of Mathematics in Society (BIMS II)

Wiskunde speelt grote rol in ons dagelijks leven

Op dinsdag 20 maart 2018 vond voor de tweede keer de conferentie 'The Beautiful Impact of Mathematics in Society' (BIMS II) plaats op de Vrije Universiteit Brussel (VUB). Bij deze editie lag de focus op wetenschapscommunicatie, met een bijzondere aandacht voor het communiceren van wiskunde naar een breed doelpubliek. Het is geen geheim dat er binnen de wetenschapscommunicatie een kloof bestaat tussen experts en algemeen publiek. Wat gaat er mis als die groepen met elkaar communiceren? En wat kunnen wetenschappers doen om dit proces te verbeteren? BIMS II probeerde meer licht te werpen op verschillende aspecten van deze problematiek. Lisa Hernandez Lucas en Tetyana Kadankova doen verslag.

Een mooie dag voor wiskunde

Op de eerste dag van de lente trokken leerkrachten, wiskundigen en sympathisanten massaal naar de 'Nelson Mandela'. In deze conferentiezaal op de VUB-campus in Brussel begon om 9 uur de tweede editie van BIMS. Elke deelnemer kreeg bij registratie een goodiebag, met daarin een notitieboekje, balpen en een heuse virtual reality-bril. Deze laatste diende als hulpmiddel om de tips van de dag in praktijk om te zetten. Met een app op je smartphone en deze bril op je neus, kun je door een virtueel publiek wandelen en je presentatie over wiskunde oefenen.

Een dappere onderneming

Om 9.30 uur beet Toon Verlinden de spits af met zijn presentatie 'How to present mathematics with an impact?' Je kent Toon Verlinden misschien als één van de auteurs van *The Floor is Yours*, een boek boordevol tips om je onderzoek kort, aantrekkelijk en verstaanbaar te presenteren. Tips die niet van toepassing zijn in ons vakgebied, aldus vele wiskundigen. Toon gaat hier echter niet mee akkoord, en is daarom een uitdaging aangegaan. Op een kwartier tijd zou hij het onderzoek van doctoraatsstudent Doryan Temmerman voorstellen. Het resultaat was een bondige en entertainende introductie in de groepentheorie.



Toon Verlinden

De rest van zijn tijdslot vulde hij met tips die we kunnen meenemen voor onze eigen presentaties. Wij onthouden vooral de volgende twee tips: echte beelden en illustraties meenemen en gebruiken, geeft meer diepte aan je presentatie en het is belangrijk om een duidelijke *key message* te formuleren en hiermee je presentatie af te sluiten.

Wetenschap in het nieuws

Na een korte pauze voor een verfrissing op deze warme dag, kwam Koen Wauters spreken. Nee, niet de zanger van Clouseau, maar wel de wetenschapsverslaggever van het VRT-journaal. Met zijn presentatie 'Leer denken als een journalist', de enige Nederlandse lezing van de dag, vestigde hij onze aandacht op waarom wetenschap al dan niet het nieuws haalt.

De wereld van de journalistiek zit ingewikkeld in elkaar. Publiciteit is belangrijk voor de wetenschap om de interesse van het volk te blijven houden, maar het is niet altijd even simpel. Leuke, maar triviale feitjes, zoals waarom een haan niet doof wordt als hij kraait, blijven vaak beter hangen dan grote doorbraken waar niemand iets van begrijpt.

Ook het gebruik van beelden kan een nieuwsfeit veel aantrekkelijker maken, maar het is niet altijd evident om een beeld te tonen bij wetenschap, laat staan

bij wiskunde. Met voldoende toewijding en een beetje creativiteit lukt dit echter wel, zo toonde Koen ons een voorbeeld van een nieuwsstukje waarin verteld wordt over een doorbraak van wiskundige Stefaan Vaes, die de Francqui-Prijs kreeg in 2015. Deze prestigieuze prijs wordt jaarlijks uitgereikt aan een vooraanstaand Belgisch onderzoeker, alternerend uit de exacte wetenschappen, humane wetenschappen, en biologische en medische wetenschappen. Het fragmentje startte met de onmisbare kop koffie, en we zagen hoe Stefaan samenwerkte met een student terwijl de reporter het verhaal vertelde.

Ten slotte kregen we ook de boodschap mee dat de wereld van het nieuws soms een harde wereld is. Hoe interessant je doorbraak ook kan zijn, als er net in dezelfde week een aanslag plaatsvindt, dan haal je helaas het nieuws niet. Blijven proberen is de boodschap.

Wiskunde voor de fun

Na een middagpauze vol netwerkgelegenheden en heerlijke broodjes, kwam het dynamische duo Rudi Penne en Paul Levrie het publiek entertainen met allerlei wiskundetrivia. Een eerder ongewone presentatie in de context van de populariserende wiskunde. Een wiskundepresentatie voor een niet-professioneel publiek gaat namelijk meestal over het nut van de wis-

kunde in onze maatschappij. Dit soort presentaties is essentieel, omdat ze het belang van de wiskunde aantonen. Maar ze brengen ook het misleidende idee met zich mee dat wiskunde alleen maar serieus kan zijn. Met hun presentatie 'Mathematics, a guilty pleasure' bewezen Rudi en Paul echter dat wiskunde ook gewoon mooi en leuk mag zijn. Met hun eigen unieke flair gaven ze ons een rondleiding door het kleurrijke wiskundelandschap.

Op het einde van hun presentatie kwam Kim Verhaeghe, een Digital Content Manager van het welgekende maandblad *Eos*, hen vergezellen om geïnteresseerden uit te nodigen om, net als Rudi en Paul, een blog te starten op Eos Blogs. Ook onze collega Ann Doods, die veel aandacht besteedt aan het populariseren van wiskunde, heeft haar webstek op Eos Blogs en verschijnt zelfs maandelijks in *Eos* met haar column.

Fouten maken mag

Giovanni Samaey, auteur van het boek *X-factor*, behandelde met zijn lezing 'The invisible power of mathematics: from stories for a broad audience to educational innovation' twee uitersten. Enerzijds bewees hij de grote kracht van wiskunde, namelijk hoe die zo hard verweven is in zoveel aspecten van onze maatschappij. Hierbij haalde hij verschillende onderwerpen uit zijn boek aan. Maar anderzijds wees hij ook op de grote zwakte van de wiskunde: het is moeilijk en saai. Althans, dat is de ervaring van veel leerlingen uit het middelbaar onderwijs en zelfs van vele volwassenen. Wat kunnen we hieraan doen? Dat was de grote vraag die Giovanni zich stelde en probeerde te beantwoorden.

Toon meteen een toepassing, dat was Giovanni zijn eerste punt. Als je integralen introduceert aan de hand van een voorbeeld, dan is het de leerlingen meteen duidelijk wat het nut ervan is. Hierbij is het ook belangrijk dat je duidelijk maakt dat het concept van integralen abstract is, en dus in geheel verschillende situaties kan toegepast worden.

Ten tweede is het ook belangrijk om je leerlingen zelf te laten denken. Dit is niet altijd makkelijk. Als een groep leerlingen een probleem voorgeschoteld krijgt, durven ze vaak geen oplossing voor te stellen, uit angst om iets doms te zeggen.

Om ze toch op weg te helpen, steunt Giovanni op het 'McDonalds-principe'. Je kent het wel: een groep mensen wilt sa-



Koen Wauters

men iets eten, maar niemand heeft een voorstel. Tot iemand de McDonalds voorstelt, dan vloeien er plots betere ideeën. Hetzelfde principe werkt in de klas. Wanneer je als leerkracht een McDonalds-voorstel doet, dan komen er betere ideeën uit de klas zelf.

Maar het belangrijkste punt dat aan-gehaald werd, is dat er ruimte moet zijn om fouten te maken. De focus van het onderwijs ligt te veel op de eindresultaten en niet genoeg op het leerproces. Het belangrijkste onderdeel van het leerproces is leren van je fouten. Daarom moeten leerkrachten hun leerlingen aanmoedigen om niet bang te zijn om fouten te maken.

Hou het simpel

Keynote-spreker Ionica Smeets sloot het rijtje af met haar lezing 'How to talk about mathematics?' Ionica is hoogleraar wetenschapscommunicatie aan de Universiteit Leiden. Ze komt regelmatig op televisie en heeft reeds enkele boeken geschreven.

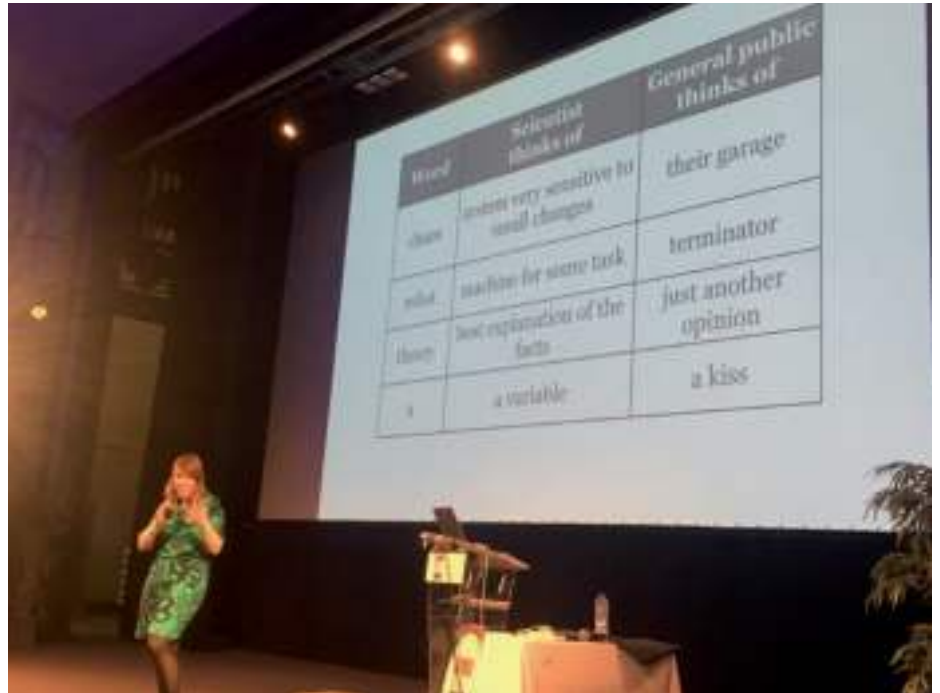
Hou het simpel, dat was de kernboodschap die Ionica kwam brengen. Dat klinkt echter een stuk gemakkelijker dan het werkelijk is, en dat maakte ze ons ook duidelijk. Zo moet je bijvoorbeeld voorzichtig zijn met vakjargon. Dit toonde ze aan met data uit een onderzoek. Wanneer een groep mensen gevraagd werd om aan te duiden op een figuur waar de 'stomach' zich bevindt, duidde de meerderheid de buik aan. Wanneer dit echter aan dokters gevraagd werd, duidde de meerderheid het orgaan de maag aan. Bovendien beseffen wetenschappers ook niet altijd dat ze jargon aan het gebruiken zijn.

Om de aandacht van je publiek vast te houden, is het daarnaast ook belangrijk om het leuk te houden. Je presentatie aanvullen met anekdotes of beeldfragmenten is hier een handig hulpmiddel voor. Ionica bewees dit door dit zelf toe te passen in haar presentatie.

Reacties van de deelnemers

We hadden het genoeg om veel leerkrachten samen met hun leerlingen te verwelkomen. Ze waren zeer enthousiast over het congres. Dat bleek ook tijdens de netwerking in de middagpauze.

Robin Van den Bossche, bachelorstudent in wiskunde getuigde: "Het congres BIMS II wees op een problematiek die we als wiskundigen maar al te goed kennen: de op het eerste gezicht onmo-



Ionica Smeets

gelijke taak om wiskundige kennis over te brengen zonder uw gesprekspartner of publiek in slaap te praten. De nadruk van deze editie lag dan ook op de aspecten die lezingen of lessen omtrent wiskunde aangenamer kunnen maken, wat uiteraard een zeer interessant concept is voor leerkrachten of studenten die in het onderwijs willen stappen, zoals mezelf. Ik heb onder andere geleerd over de vele misconcepties omtrent wiskunde die nog steeds in onze huidige maatschappij leven, in het bijzonder bij studenten in het secundair onderwijs. Als toekomstige leerkracht heeft dit congres mij nog meer aangemoedigd om mijn steentje bij te dragen deze misconcepties uit de wereld te helpen."

Zuurstof en bier

Elke spreker werd bedankt met een warm applaus en Ann Dooms overhandigde ze een luchtplantje. Want zoals Lex Schrijver ooit zei: "Wiskunde is als zuurstof. Als het er is, merk je het niet. Als het er niet is, merk je dat je niet zonder kunt." Een quote die prachtig omschrijft wat het doel van deze tweede editie van BIMS was. Maar de dag eindigde hier niet, althans niet voor iedereen. Arne Van Antwerpen en Sam Mattheus organiseerden namelijk een heuse Maths Jam in het historische Brusselse café *A la Mort Subite*.

Het concept van de Maths Jam is oorspronkelijk ontstaan in Engeland en heeft nu een groot succes in de hele wereld. Wiskundeliefhebbers komen samen om wiskunde-uitdagingen aan te gaan en hun ervaringen te delen door leuke wiskundige problemen op te lossen in een gezellige en informele sfeer, zoals een pub of eetcafé.

Dit was ook het geval op de avond van 20 maart. Daarbij werden wiskundige raadsels en puzzels opgelost met een pintje erbij. Een perfecte afsluiter voor deze eerste lentedag.

Key message

Zoals Toon Verlinden ons geleerd heeft, sluiten we dit stukje af met de *key message*: wiskunde is een fundamentele wetenschap, die in ons dagelijks leven een veel grotere rol speelt dan dat we eigenlijk beseffen. Aldus is BIMS II erin geslaagd, zoals de naam al suggereert, de mooie *impact* van wiskunde op de maatschappij te illustreren. ☺

BIMS III

BIMS is een jaarlijks wederkerend colloquium aan de Vrije Universiteit Brussel. In 2019 zal het plaatsvinden in september en het onderwerp van die editie wordt 'Wiskunde in data science'.

Djordjo Milovic

Department of Mathematics
University College London
djordjo.milovic@ucl.ac.uk

Research Stieltjes Prize 2016

Divisibility by 16 of class numbers in families

In 2016 Djordjo Milovic has been awarded the Stieltjes Prize for one of the two best PhD theses in mathematics in the Netherlands. The prize was awarded for his thesis entitled *On the 16-rank of Class Groups of Quadratic Number Fields*, which he completed at Leiden University. After a membership at the Institute for Advanced Study in Princeton he became a Research Associate at University College London. In this article he describes his current research on class numbers in families.

The negative Pell equation

In number theory, an important generalization of the ring of rational integers

$$\mathbb{Z} = \{\dots, -2, -1, 0, 1, 2, \dots\}$$

is the ring of integers of a number field. One of the main applications of such rings of integers is that they help us study integral solutions to polynomial equations over the usual integers $\mathbb{Z}$. For example, let d be a positive squarefree integer, and for simplicity assume that d is even. As we will see, the existence of integral solutions $x, y \in \mathbb{Z}$ to the *negative Pell equation*

$$x^2 - dy^2 = -1 \quad (1)$$

is intricately related to certain arithmetic invariants of the *quadratic number ring*

$$\mathbb{Z}[\sqrt{d}] = \{m + n\sqrt{d} : m, n \in \mathbb{Z}\}.$$

Addition and multiplication in $\mathbb{Z}[\sqrt{d}]$ is straightforward, defined exactly as one would expect:

$$\begin{aligned} (m_1 + n_1\sqrt{d}) + (m_2 + n_2\sqrt{d}) \\ = (m_1 + m_2) + (n_1 + n_2)\sqrt{d} \end{aligned}$$

and

$$\begin{aligned} (m_1 + n_1\sqrt{d})(m_2 + n_2\sqrt{d}) \\ = (m_1m_2 + dn_1n_2) + (m_1n_2 + m_2n_1)\sqrt{d}. \end{aligned}$$

However, the resulting arithmetic in $\mathbb{Z}[\sqrt{d}]$ can be quite tricky. Unlike in the case of $\mathbb{Z}$, an element in $\mathbb{Z}[\sqrt{d}]$ need not have unique factorization into irreducible elements. For instance, in $\mathbb{Z}[\sqrt{10}]$, the element 6 has two essentially distinct factorizations, namely $2 \cdot 3$ and $(4 + \sqrt{10})(4 - \sqrt{10})$.

Unique factorization is recovered after passing to *ideals*. An ideal in $\mathbb{Z}[\sqrt{d}]$ (or in any ring) is a set of elements $\mathfrak{a}$ closed under addition and contagious under multiplication; more precisely, for all elements α_1 and α_2 of $\mathfrak{a}$ and any element β of $\mathbb{Z}[\sqrt{d}]$, the elements $\alpha_1 + \alpha_2$ and $\alpha_1\beta$ belong to $\mathfrak{a}$. In this language, unique factorization in $\mathbb{Z}[\sqrt{d}]$ is equivalent to the statement that every ideal in $\mathbb{Z}[\sqrt{d}]$ is *principal*, i.e., that it is the set of multiples of some α in $\mathbb{Z}[\sqrt{d}]$ (in which case we say that α is a *generator* of that principal ideal). To measure the failure of ideals to be principal, one attaches

to $\mathbb{Z}[\sqrt{d}]$ an invariant called the (*ordinary*) *class group* Cl_d and defined as the quotient of the group of all non-zero ideals of $\mathbb{Z}[\sqrt{d}]$ by the subgroup of those that are principal. Hence, if every ideal happens to be principal, this quotient is trivial, and so unique factorization in $\mathbb{Z}[\sqrt{d}]$ is equivalent to the statement that the class group Cl_d is the trivial group of one element.

A closely related invariant is the *narrow class group* Cl_d^+ , defined as the quotient of the group of all non-zero ideals of $\mathbb{Z}[\sqrt{d}]$ by the subgroup of those that are principal *and* have a generator $m + n\sqrt{d}$ of positive *norm*, i.e., satisfying $(m + n\sqrt{d})(m - n\sqrt{d}) = m^2 - dy^2 > 0$. Since the norm is multiplicative, and since the element $\sqrt{d}$ has norm $-d < 0$, one deduces that the class group Cl_d coincides with the narrow class group Cl_d^+ exactly when $\mathbb{Z}[\sqrt{d}]$ has an element of norm -1 ; in other words, $\text{Cl}_d = \text{Cl}_d^+$ if and only if the negative Pell equation (1) is solvable with $x, y \in \mathbb{Z}$.

A burgeoning area of research in number theory is *arithmetic statistics*, the study of how various arithmetic invariants behave on average. In our case, one might be interested in knowing *how often* (1) is solvable over the integers, that is, how often the ordinary and the narrow class groups coincide. This is a very difficult question. To get a first sense of its intricacies, notice that (1) cannot have

an integral solution whenever d has a prime factor $\ell \equiv 3 \pmod{4}$; for in that case, reducing the equation modulo ℓ (i.e., comparing remainders upon division by ℓ) would give $x^2 \equiv -1 \pmod{\ell}$, which cannot happen when $\ell \equiv 3 \pmod{4}$. The set of even squarefree integers with no prime factors congruent to 3 modulo 4 has natural density 0 in the set of all even squarefree integers, so to ask in a meaningful way how often (1) is solvable, one has to restrict attention to a very thin subset of squarefree integers. Despite these and other challenges, in 1993, Stevenhagen [18] managed to formulate a precise conjecture as to what the answer should be and backed it up with both a convincing heuristic argument and carefully collected numerical data. About a decade ago, Fouvry and Klüners [4, 5] actually proved first cases of Stevenhagen's conjecture.

Consider now a negative Pell equation of a very particular shape, namely the equation

$$x^2 - 2py^2 = -1, \quad (2)$$

where p is an odd prime number. In this case, the 2-part of the narrow class group Cl_{2p}^+ is *cyclic*, so it becomes somewhat easier to analyze whether or not $\text{Cl}_{2p}^+ = \text{Cl}_{2p}$. Stevenhagen's conjecture for negative Pell equations of this shape states that if

$$\delta(X) = \frac{\#\{p \text{ prime}, p \leq X, (2) \text{ is solvable over } \mathbb{Z}\}}{\#\{p \text{ prime}, p \leq X\}},$$

then the limit $\lim_{X \rightarrow \infty} \delta(X)$ exists and is equal to $\frac{1}{3}$. It was already known to Stevenhagen in 1993 that

$$\frac{5}{16} \leq \liminf_{X \rightarrow \infty} \delta(X) \leq \limsup_{X \rightarrow \infty} \delta(X) \leq \frac{3}{8}.$$

While these are still the best known unconditional bounds, Koymans and the author [10] recently improved the upper bound to $\frac{11}{32}$ conditional on a standard technical conjecture in analytic number theory, and a forthcoming work of the author will improve the lower bound to $\frac{21}{64}$. The path to these results passes through class groups of certain *imaginary* quadratic number fields. The connection between Cl_{2p}^+ and class groups Cl_{-p} and Cl_{-2p} of the quadratic number rings $\mathbb{Z}[\sqrt{-p}]$ and $\mathbb{Z}[\sqrt{-2p}]$, respectively, has been known for quite some time [12, 17]. In this article, we will focus on the class group Cl_{-2p} for primes $p \equiv 3 \pmod{4}$. Although information about these class groups has no direct bearing on the negative Pell equation (2), the method first developed to study these class groups [15] has since been applied in several settings, including in the aforementioned work [10].

The main theorem and basic strategy

The 2-part of the class group Cl_{-2p} is also cyclic, i.e., of the form $\mathbb{Z}/2^k\mathbb{Z}$ for some positive integer k , and so the 2-part of Cl_{-2p} is entirely determined by the highest power of 2 dividing the size of Cl_{-2p} , called the *class number* and denoted by h_{-2p} . In practice, to get better and better bounds for the solvability of (2), one has to obtain results about the natural density of primes for which higher and higher powers of 2 divide the size of Cl_{-2p} . Again, although it has no applications to the solvability of (2), one can study these questions for the groups Cl_{-2p} for primes $p \equiv 3 \pmod{4}$ (and it turns out that methods developed in this setting were later applicable to (2)). The best previous result was due to Hasse in 1969 [7], who proved that

$$\lim_{X \rightarrow \infty} \frac{\#\{p \text{ prime}, p \leq X, p \equiv 3 \pmod{4}, 8 \text{ divides } h_{-2p}\}}{\#\{p \text{ prime}, p \leq X\}} = \frac{1}{8}.$$

One can view the method of proof in this case as a special case of a method developed by Stevenhagen [16], where one constructs an auxiliary number field M , called a *governing field*, where the divisibility by 8 of the size of Cl_{-2p} is related to how the principal ideal generated by p factors into ideals in the ring of integers of M . In this case, one can take

$$M = \mathbb{Q}(\sqrt{2}, \sqrt{2 + \sqrt{2}}).$$

Once a governing field is constructed, one can apply the Chebotarev Density Theorem, which counts the natural density of primes p giving rise to a specified factorization type. Subsequent progress came to a halt as no one could construct any analogous governing fields for divisibility by 16. Far from constructing a governing field, [15] took an entirely different approach. The novelty was to apply a sieving technique originally due to Vinogradov [20] and subsequently improved by Vaughan [19] and Friedlander, Iwaniec, Mazur and Rubin [6], among others. This sieving technique, which we call here the *method of sums of type I and type II*, produces qualitatively different results from the Chebotarev Density Theorem, and its successful application to the aforementioned problems about class groups already suggests a drastic change in behavior between divisibility by 8 and divisibility by 16.

The main theorem is as follows. The condition that 8 divides the size of Cl_{-2p} for a prime $p \equiv 3 \pmod{4}$ turns out simply to be that $p \equiv 15 \pmod{16}$. One can write such a prime as

$$p = u^2 - 2v^2 \text{ with } u, v > 0 \text{ and } u \equiv 1 \pmod{16}. \quad (3)$$

Leonard and Williams [13] then proved in 1982 that

$$16 \text{ divides } h_{-2p} \Leftrightarrow \text{the Jacobi symbol } \left(\frac{v}{u}\right) \text{ is equal to } 1. \quad (4)$$

The Jacobi symbol is an extension of the *Legendre symbol*; in this case, it can take the values 1 and -1 , and, if u were a prime itself, the symbol $\left(\frac{v}{u}\right)$ would equal 1 if and only if there existed an integer n with $v \equiv n^2 \pmod{u}$. The main theorem of [15] is the following.

Theorem 1. *For each prime $p \equiv 15 \pmod{16}$, choose rational integers u and v as in (3). Then there exists an absolute constant $C > 0$ such that for every real number $X > 1$, we have*

$$\left| \sum_{\substack{p \leq X, p \text{ prime} \\ p \equiv 15 \pmod{16}}} \left(\frac{v}{u}\right) \right| \leq CX^{\frac{199}{200}}.$$

Since the number of primes $p \equiv 15 \pmod{16}$ up to X is approximately $\frac{1}{8} \frac{X}{\log X}$, and since

$$\lim_{X \rightarrow \infty} \frac{CX^{\frac{199}{200}}}{\frac{1}{8} \frac{X}{\log X}} = 0,$$

colloquially the theorem says that the Jacobi symbol $\left(\frac{v}{u}\right)$ is equal to 1 and -1 as one traverses the primes $p \equiv 15 \pmod{16}$, which in turn implies that

$$\lim_{X \rightarrow \infty} \frac{\#\{p \text{ prime}, p \leq X, p \equiv 3 \pmod{4}, 16 \text{ divides } h_{-2p}\}}{\#\{p \text{ prime}, p \leq X\}} = \frac{1}{16}.$$

The new qualitative behavior that we mentioned above is exemplified by the power-saving bound in Theorem 1—the savings of $X^{100}/\log X$ is substantially larger than the savings of $\log X$ that one would get from the Chebotarev Density Theorem.

The proof of Theorem 1 proceeds by applying the methods of sums of type I and type II not over the usual integers $\mathbb{Z}$, as is the case in most applications in the literature, but over the quadratic ring $\mathbb{Z}[\sqrt{2}]$. In this setting, the method relies in an essential way on the construction of a (well-behaved) sequence $\{s_a\}_a$ indexed by non-zero ideals of $\mathbb{Z}[\sqrt{2}]$ such that

$$s_p = \left(\frac{v}{u}\right) \quad (5)$$

when p is the principal prime ideal generated by $u + v\sqrt{2}$ or $u - v\sqrt{2}$ with u and v as in (3). One immediate reason that this may be a challenging task is that the choice of u and v in (3) is not unique—the reader can check that one gets another valid choice for u and v by multiplying $u + v\sqrt{2}$ by $577 + 408\sqrt{2}$.

Some ideas of the proof

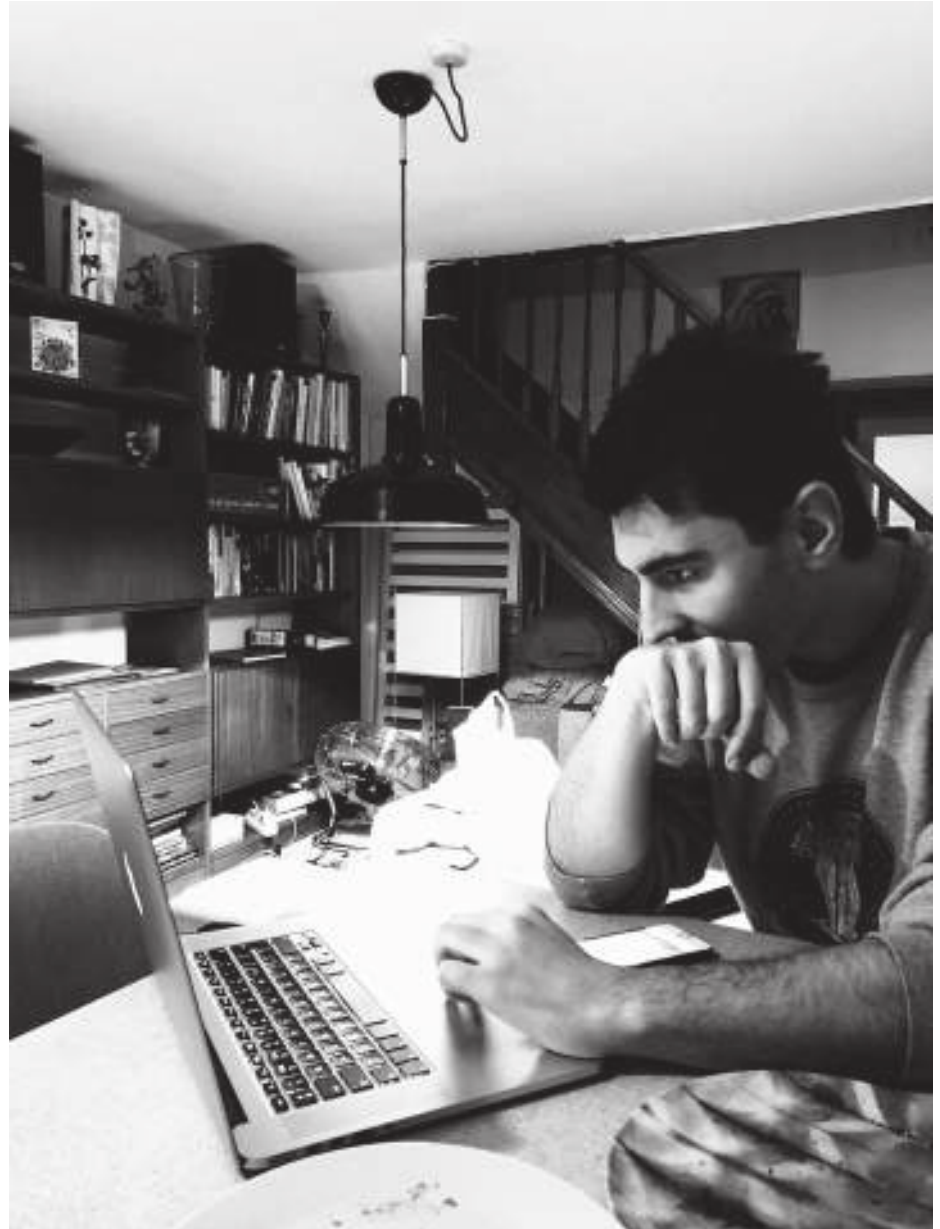
Class groups of quadratic number rings were first studied by Gauss, albeit in the language of binary quadratic forms. Although this language has largely fallen out of fashion in favor of the modern notions of number rings and ideals, we will nevertheless present several key ideas used in the proof of Theorem 1 in the setting of binary quadratic forms, both because these ideas can thus be expressed in an elementary way and because it is in this setting that these ideas were first discovered.

A *binary quadratic form over $\mathbb{Z}$* is a homogeneous quadratic polynomial with integer coefficients; in other words, it is a polynomial of the type

$$f(x, y) = ax^2 + bxy + cy^2, \quad a, b, c \in \mathbb{Z}. \quad (6)$$

We sometimes call $f(x, y)$ a *form* for short. The form f is said to be *primitive* if $\gcd(a, b, c) = 1$. The *discriminant* of f is the integer $\Delta = b^2 - 4ac$. The set of all binary quadratic forms over $\mathbb{Z}$, which we denote by $V_{\mathbb{Z}}$, is in one-to-one correspondence with the set of ordered triples of integers; in fact, we will sometimes use the shorthand (a, b, c) to denote the form in (6).

The set $V_{\mathbb{Z}}$ is acted on by the group $\mathrm{SL}_2(\mathbb{Z})$ of 2-by-2 matrices of determinant 1 with integer entries. This action is essen-



Djordjo Milovic

tially tantamount to a linear change of coordinates. To be precise, if

$$\gamma = \begin{pmatrix} r & s \\ t & u \end{pmatrix} \in \mathrm{SL}_2(\mathbb{Z}),$$

then we define the right action of γ on a form $f(x, y) = ax^2 + bxy + cy^2$ by setting

$$\begin{aligned} f^\gamma(x, y) &= a(rx + sy)^2 \\ &\quad + b(rx + sy)(tx + uy) \\ &\quad + c(tx + uy)^2. \end{aligned}$$

Two forms (a, b, c) and (a', b', c') are said to be *equivalent* if there exists $\gamma \in \mathrm{SL}_2(\mathbb{Z})$ such that $\gamma \cdot (a, b, c) = (a', b', c')$. We write $[a, b, c]$ for the equivalence class of the form (a, b, c) ; hence

$$\begin{aligned} [a, b, c] &= [ar^2 + brt + ct^2, \\ &\quad 2ars + bru + bst + 2ctu, \\ &\quad as^2 + bsu + cu^2] \end{aligned}$$

whenever r, s, t , and u are integers satisfying $ru - st = 1$. Equivalent forms always have the same discriminant. We denote set of equivalence classes of primitive forms of a non-square discriminant Δ by $\mathrm{Cl}(\Delta)$. Gauss proved that the set $\mathrm{Cl}(\Delta)$ is actually an abelian group—in other words, there is a commutative composition law on the set of classes of forms of discriminant Δ . For a beautiful modern proof of this fact, we encourage the reader to read about Bhargava's cubes of integers [1]. The class group of interest Cl_{-2p} is isomorphic to the

group $\text{Cl}(-8p)$ corresponding to discriminant $-8p$.

Since $\text{Cl}(\Delta)$ is an abelian group, we will denote the group operation induced by the composition law by $+$. In other words, if A and B are two classes of discriminant Δ , we will denote their composition simply by $A+B$; similarly, given an integer $n \geq 1$, we will write nA to denote the composition of A by itself n times. The identity element in $\text{Cl}(\Delta)$, which we denote by I , is

$$I = \begin{cases} [1, 0, -\Delta/4] & \text{if } \Delta \equiv 0 \pmod{4}, \\ [1, 1, (1-\Delta)/4] & \text{if } \Delta \equiv 1 \pmod{4}, \end{cases}$$

and the inverse of the class $[a, b, c]$ is $[a, -b, c]$, so that

$$[a, b, c] + [a, -b, c] = I.$$

Dirichlet gave a simple formula for the composition law for forms of a certain type: if $a_1, a_2, b, c \in \mathbb{Z}$, then

$$[a_1, b, a_2 c] + [a_2, b, a_1 c] = [a_1 a_2, b, c].$$

Leonard and Williams [13] made use of this formula for certain forms of discriminant $\Delta = -8p$, where p is a prime number congruent to 15 modulo 16. If p is such a prime and u and v are as in (3), we set $A = [u, 4v, 2u]$. Then the discriminant of A is indeed $16v^2 - 8u^2 = -8p$. Dirichlet's composition law implies that $2A = A + A = [u^2, 4v, 2]$. Acting on the form $(u^2, 4v, 2)$ by

$$\begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & v \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \in \text{SL}_2(\mathbb{Z}),$$

we see that $2A = [u^2, 4v, 2] = [2, 0, p]$. Now, since $0 = -0$, we see that $4A = 2A + 2A = I$. After checking that $A \neq I$, one deduces that A is an element of order 4 in $\text{Cl}(-8p) \cong \text{Cl}_{-2p}$. This is significant because the machinery to check that a class is a 4th power is well-developed (see for instance [17]), while checking if a class is an 8th power is generally out of reach (see [14] for one place where it can be done). By checking if an element of order 4 is a 4th power, one can check for the existence of elements of order 16 and thereby obtain the crucial criterion (4).

We finish by presenting the other key application of the theory of binary quadratic forms in the proof of Theorem 1. As we mentioned before, a significant obstacle to using the method of sums of type I and type II is to construct an appropriate se-

quence $\{s_a\}_a$. For the method to work well, this needs to be done for *all* non-zero ideals in $\mathbb{Z}[\sqrt{2}]$ and not just for prime ideals $\mathfrak{p}$ as in (5). First, we say that an element $m + n\sqrt{2}$ in $\mathbb{Z}[\sqrt{2}]$ is *odd and totally positive* if and only if

$$m \text{ is odd, } m > 0 \text{ and } m^2 - 2n^2 > 0. \quad (7)$$

So suppose that $\mathfrak{a}$ is a principal ideal of $\mathbb{Z}[\sqrt{2}]$ that has an odd and totally positive generator $u + v\sqrt{2}$. To obtain the desired property (5), we wish to define $s_a = (\frac{v}{u})$ (possibly up to some well-controlled factors). However, as $(3 + 2\sqrt{2})(3 - 2\sqrt{2}) = 1$, the elements $u + v\sqrt{2}$ and

$$\begin{aligned} (u + v\sqrt{2})(3 + 2\sqrt{2}) \\ = (3u + 4v) + (2u + 3v)\sqrt{2} \end{aligned}$$

both generate the same principal ideal in $\mathbb{Z}[\sqrt{2}]$. Moreover, if $u + v\sqrt{2}$ is odd and totally positive, then so is $(3u + 4v) + (2u + 3v)\sqrt{2}$. However, it is *not* always true that the corresponding Jacobi symbols $(\frac{v}{u})$ and $(\frac{2u+3v}{3u+4v})$ are equal. Hence, as stated, the value of s_a is *not* well-defined! To overcome this, we proved the following result [15, Proposition 2, p.979]. For an odd and totally positive element $\alpha = m + n\sqrt{2}$ of $\mathbb{Z}[\sqrt{2}]$, we define $[\alpha]$ to be the Jacobi symbol $(\frac{n}{m})$.

Theorem 2. Suppose $u + v\sqrt{2}$ is an odd and totally positive element of $\mathbb{Z}[\sqrt{2}]$. Then $[u + v\sqrt{2}] = [(u + v\sqrt{2})(3 + 2\sqrt{2})^4]$. In other words,

$$\left(\frac{v}{u}\right) = \left(\frac{408u + 577v}{577u + 816v}\right).$$

The proof of Theorem 2 was initially discovered using a surprising identity involving binary quadratic forms. The Jacobi symbols are first interpreted as Artin symbols via class field theory, and the claim in the theorem is ultimately reduced to the claim that, if

$$\begin{aligned} u' + v'\sqrt{2} &= (577u + 816v) \\ &\quad + (408u + 577v)\sqrt{2} \\ &= (u + v\sqrt{2})(3 + 2\sqrt{2})^4, \end{aligned}$$

then $[u, 16v, 32u] = [u', 16v', 32u']$. This last claim follows immediately upon noticing that the matrix

$$\begin{pmatrix} 17 & 96 \\ 3 & 17 \end{pmatrix}$$

transforms the form $(u, 16v, 32u)$ into the

form $(u', 16v', 32u')$. The upshot of Theorem 2 is that if $\mathfrak{a}$ is a principal ideal of $\mathbb{Z}[\sqrt{2}]$ that has an odd and totally positive generator α , then the quantity

$$\begin{aligned} [\alpha] &+ [\alpha(3 + 2\sqrt{2})^1] \\ &+ [\alpha(3 + 2\sqrt{2})^2] \\ &+ [\alpha(3 + 2\sqrt{2})^3] \end{aligned}$$

depends only on $\mathfrak{a}$ and *not* on the choice of odd and totally positive generator α . After attaching proper weights to the four summands above, one obtains a well-defined sequence s_a satisfying the property (5) and conducive to the method of sums of type I and type II [15, (3.5), p.993].

Concluding remarks

The method used in Theorem 1 has since been used by Koymans and the author to prove analogous theorems for the class groups Cl_{-2p} with $p \equiv 1 \pmod{4}$ as well as for the class groups Cl_{-p} [9, 10]. The latter result relies on a conjecture about short character sums, although Koymans recently published an unconditional proof [8]. Under a similar short character sum conjecture, however, one can prove much more — a governing field for divisibility by 16 of h_{-p} *does not exist* [11]. This confirms the suspicions first brought up in [15] that a genuinely new type of behavior enters into play when studying class group elements of order 16. $\diamond$

Biography

- Research Associate, 2017 onward, University College London.
- Member, 2016–2017, Institute for Advanced Study (Princeton).
- PhD in Mathematics (cum laude), 2013–2016, Universiteit Leiden and Université Paris-Sud (Orsay).
- MA in Mathematics (cum laude), 2011–2013, Université Paris-Sud (Orsay) and Università degli Studi di Milano.
- BA in Mathematics (cum laude), 2007–2011, Princeton University.

References

- 1 M. Bhargava, Higher composition laws I: A new view on Gauss composition, and quadratic generalizations, *Ann. of Math.* 159(1) (2004), 217–250.
- 2 H. Cohn and J.C. Lagarias, On the existence of fields governing the 2-invariants of the classgroup of $\mathbb{Q}(\sqrt{dp})$ as p varies, *Math. Comp.* 41(164) (1983), 711–730.
- 3 H. Cohn and J.C. Lagarias, Is there a density for the set of primes p such that the class number of $\mathbb{Q}(\sqrt{-p})$ is divisible by 16? *Colloq. Math. Soc. János Bolyai* 34 (1984), 257–280.
- 4 E. Fouvry and J. Klüners, On the negative Pell equation, *Ann. of Math. (2)* 172(3) (2010), 2035–2104.
- 5 E. Fouvry and J. Klüners, The parity of the period of the continued fraction of $\sqrt{d}$, *Proc. Lond. Math. Soc. (3)* 101(2) (2010), 337–391.
- 6 J.B. Friedlander, H. Iwaniec, B. Mazur and K. Rubin, The spin of prime ideals, *Invent. Math.* 193(3) (2013), 697–749.
- 7 H. Hasse, Über die Klassenzahl des Körpers $P(\sqrt{-2p})$ mit einer Primzahl $p \neq 2$, *J. Number Theory* 1 (1969), 231–234.
- 8 P. Koymans, The 16-rank of $\mathbb{Q}(\sqrt{-p})$, arXiv:1809.07167, 2018.
- 9 P. Koymans and D. Milovic, On the 16-rank of class groups of $\mathbb{Q}(\sqrt{-2p})$ for primes $p \equiv 1 \pmod{4}$, *Int. Math. Res. Notices* rny010 (2018), 1–22.
- 10 P. Koymans and D. Milovic, Spins of prime ideals and the negative Pell equation $x^2 - 2py^2 = -1$, arXiv:1611.10337, 2018.
- 11 P. Koymans and D. Milovic, Joint distribution of spins, arXiv:1809.09597, 2018.
- 12 P. Kaplan and K.S. Williams, On the strict class number of $\mathbb{Q}(\sqrt{2p})$ modulo 16, $p \equiv 1 \pmod{8}$ prime, *Osaka J. Math.* 21 (1984), 23–29.
- 13 P.A. Leonard and K.S. Williams, On the divisibility of the class numbers of $\mathbb{Q}(\sqrt{-p})$ and $\mathbb{Q}(\sqrt{-2p})$ by 16, *Canad. Math. Bull.* 25(2) (1982), 200–206.
- 14 D. Milovic, On the infinitude of $\mathbb{Q}(\sqrt{-p})$ with class number divisible by 16, *Acta Arith.* 178(3) (2017), 201–233.
- 15 D. Milovic, On the 16-rank of class groups of $\mathbb{Q}(\sqrt{-8p})$ for $p \equiv -1 \pmod{4}$, *Geom. Func. Anal.* 27(4) (2017), 973–1016.
- 16 P. Stevenhagen, Ray class groups and governing fields, in *Théorie des nombres, Année 1988/89, Fasc. 1*, Publ. Math. Fac. Sci. Besançon, Univ. Franche-Comté, Besançon, 1989, p. 93.
- 17 P. Stevenhagen, Divisibility by 2-powers of certain quadratic class numbers, *J. Number Theory* 43(1) (1993), 1–19.
- 18 P. Stevenhagen, The number of real quadratic fields having units of negative norm, *Experiment. Math.* 2(2) (1993), 121–136.
- 19 R.C. Vaughan, Mean Value Theorems in Prime Number Theory, *J. London Math. Soc. (2)* 10 (1975), 153–162.
- 20 I.M. Vinogradov, The method of trigonometrical sums in the theory of numbers, *Trav. Inst. Math. Stekloff* 23 (1947), 3–109.

Jean-Paul Allouche

CNRS, IMJ-PRG

Sorbonne Université, Paris

jean-paul.allouche@imj-prg.fr

Trip to the Proof

How I discovered an ‘automatic’ transcendence proof of the formal power series Pi

The formal power series π_C which can be seen as an analog of $\pi = 3.14159\dots$ in positive characteristic was introduced by Carlitz and proved transcendental by Wade. Jean-Paul Allouche looks back upon his discovery of an ‘automatic’ transcendence proof (i.e., a transcendence proof using finite automata) of π_C in 1990.

In 1988, a time where authors of papers received after publication ‘offprints’ or ‘reprints’, i.e., bulk reproductions of their articles, I received a bunch of reprints of a paper at the *Compte-Rendus de l’Académie des Sciences*, about continued fraction expansions of algebraic formal power series in positive characteristic [2]. Among my reprints was, by mistake, a reprint of the article that followed my own article in the journal [18]. Its title, which I found intriguing, was ‘Propriétés de transcendance des valeurs de la fonction zêta de Carlitz’. I looked at the paper, and was attracted by the following definition:

$$\pi := \prod_{n=1}^{\infty} \left(1 - \frac{t^{q^n} - 1}{t^{q^{n+1}} - 1} \right) \quad (\text{sic})$$

and by the claim that this number is transcendental. M. Mendès France easily convinced me that this number is algebraic! I will describe how this extra reprint and

this misprint teased me and lead me to write the article [3].

More on the misprint

Let $\mathbb{F}_q$ the finite field with $q = p^a$ elements. Let $\mathbb{F}_q((1/t))$ be the field of Laurent series in $1/t$, i.e., the set of formal series $\sum_{n \geq n_0} a_n t^{-n}$ where a_n belongs to $\mathbb{F}_q$. Let π_C^* (C for Carlitz) denote the product π given above. Expanding it as a formal series in $1/t$, we see that π_C^* is in $\mathbb{F}_q((1/t))$. It is easy to prove that π_C^* is algebraic over $\mathbb{F}_q(t)$ (note that $\mathbb{F}_q(1/t) = \mathbb{F}_q(t)$). Namely, using the fact that the Frobenius map $y \rightarrow y^p$ is a morphism for addition and multiplication, we have

$$\begin{aligned} (\pi_C^*)^q &= \left(\prod_{n=1}^{\infty} \left(1 - \frac{t^{q^n} - 1}{t^{q^{n+1}} - 1} \right) \right)^q \\ &= \prod_{n=1}^{\infty} \left(1 - \frac{t^{q^{n+1}} - 1}{t^{q^{n+2}} - 1} \right) \end{aligned}$$

hence

$$\left(1 - \frac{t^q - 1}{t^{q^2} - 1} \right) (\pi_C^*)^q = \pi_C^*$$

which proves that π_C^* is algebraic over $\mathbb{F}_q(t)$. Thus there must be a misprint in [18] in the definition of π , which is claimed to be transcendental.

Algebraicity in positive characteristics

It often happens in mathematics that slightly changing the formulation or the context of a possibly difficult problem leads to another problem which can be less difficult, or interesting, or both. It also can happen that the new problem does not throw any light on the one we started from. An example is to determine the transcendence (on the rationals) of a real number. How is this question modified if the numbers are written in base q and you perform addition and multiplication *without carries*? To write things more formally, take $q = p^a$ a prime power, let $\mathbb{F}_q$, $\mathbb{F}_q[t]$, $\mathbb{F}_q(t)$, $\mathbb{F}_q[[t^{-1}]]$, and $\mathbb{F}_q((t^{-1}))$ denote respectively the field with q elements, the ring of polynomials over $\mathbb{F}_q$, the field of rational functions with

characteristic 0	positive characteristic
$\mathbb{Z}$	$\mathbb{F}_q[t]$
$\mathbb{Q}$	$\mathbb{F}_q(t)$
$\mathbb{R}$ $\cup$	$\mathbb{F}_q((t^{-1}))$ $\cup$
{algebraic (over $\mathbb{Q}$) real numbers}	{algebraic (over $\mathbb{F}_q(t)$) Laurent power series}

Table 1

coefficients in $\mathbb{F}_q$, the ring of formal power series in $1/t$ over $\mathbb{F}_q$, i.e., the ring of formal power series $\sum_{n \geq 0} a_n t^{-n}$ with coefficients in $\mathbb{F}_q$ and the usual rules for adding and multiplying formal power series on some field, and the field of Laurent series in $1/t$, i.e., of Laurent series $\sum_{n \geq n_0} a_n t^{-n}$. Then, we have the analogy with the real numbers shown in Table 1.

One of my interests, going back to the eighties, is the result of Christol [16] and of Christol, Kamae, Mendès France and Rauzy [17] that gives a combinatorial characterization of the algebraic formal power series in positive characteristic.

Theorem 1 [16, 17]. *Let $(a_n)_{n \geq 0} \in \mathbb{F}_q^{\mathbb{N}}$. Then the formal power series $\sum_{n \geq 0} a_n t^{-n}$ is algebraic over $\mathbb{F}_q(t)$ if and only if the set of subsequences $\{(a_{q^k n + r})_{n \geq 0}, k \geq 0, r \in [0, q^k - 1]\}$ is finite.*

A sequence $(a_n)_{n \geq 0}$ such that the set of its subsequences (called the q -kernel of the sequence) $\{(a_{q^k n + r})_{n \geq 0}, k \geq 0, r \in [0, q^k - 1]\}$ is finite, is called a q -automatic sequence. For more on q -automatic sequences, the reader can consult [7, 19, 21]. Contrarily to what is conjectured in the real case (typically that irrational algebraic numbers have a random-like base 10 expansion), Theorem 1 asserts that the coefficients of an algebraic formal power series in positive characteristic have some regularity. It is thus very tempting to play with this theorem to try discovering transcendental ‘simple’ formal power series. For example, I proved in [1] that the series $\sum s_2(n^2) t^{-n}$ is transcendental over $\mathbb{F}_2(t)$, where $s_2(n)$ is the sum modulo 2 of the binary digits of the integer n . But such series might be considered as *ad hoc* in that they do not occur ‘naturally’ in the literature, in particular in the literature published before 1979.

An allusion to the Carlitz functions

After reading the extra reprint [18], I could not resist to (I *had to*) read the papers of Carlitz and of Wade, and to learn what was going on. Carlitz introduced analogs of the exponential function, of the logarithm, of the Riemann zeta function, and of π . The right definition of Carlitz’s π is actually

$$\pi_C := \prod_{n=1}^{\infty} \left(1 - \frac{t^{q^n} - t}{t^{q^{n+1}} - t}\right).$$

Furthermore there is a mysterious relation between π_C , the Carlitz exponential function and the Carlitz zeta function that resembles the fact that $2i\pi$ is the period of the exponential function, while π^{2k} is a rational multiple of $\zeta(2k)$, where k is a positive integer and ζ the Riemann zeta function. Namely the period of the Carlitz exponential is equal to $(t^q - t)^{1/(q-1)} \pi_C$, while, letting for n a positive integer $\zeta_C(n) = \sum_{P \text{ monic} \in \mathbb{F}_q[t]} \frac{1}{P^n}$ denote the Carlitz zeta function, it can be proved that, for $(q-1)|n$, $\zeta_C(n)$ is a rational multiple of π_C (see [15], where Carlitz called ξ_{∞} what is called π_C here). The reader will have noted that the fact of being even for the integer argument of the Riemann zeta function ‘corresponding’ to the fact of being divisible by $q-1$ for the argument of the Carlitz zeta function has something to do with the number of invertible elements of $\mathbb{Z}$ and of $\mathbb{F}_q[t]$: this can be used to complete Table 1.

A naive but fruitful approach

Comparing the ‘true’ value and the misprinted value of π_C made me think of a rather frequent approach of mathematical problems that I already alluded to above: if you do not really know how to solve a problem, find or invent a ‘similar’ problem and attack it. It might be the case that solving the latter helps to solve the former. But it might also be the case that you can combine these ‘similar’ questions and obtain a new question which might shed some light on the initial question. Here, given the form of the quantities π_C and π_C^* it is tempting to consider their quotient. An easy computation yields

$$\begin{aligned} \frac{\pi_C^*}{\pi_C} &= \prod_{n \geq 1} \left(1 - \frac{t-1}{t^{q^{n+1}}-1}\right) \\ &= \prod_{n \geq 1} \left(1 - \frac{t-1}{(t-1)q^{n+1}}\right) \\ &= \prod_{n \geq 1} \left(1 - \frac{1}{(t-1)q^{n+1}-1}\right). \end{aligned}$$

To prove that π_C is transcendental, it suffices to prove that $\frac{\pi_C^*}{\pi_C}$ is transcendental, since π_C^* is algebraic. Furthermore the expression above is transcendental if and only if the same expression where $(t-1)$ is replaced by t is transcendental. Now why bother with π_C^* ? Would it not be easier to introduce π_C^{**} defined by (compare with π_C^*)

$$\pi_C^{**} := \prod_{n=1}^{\infty} \left(1 - \frac{t^{q^n}}{t^{q^{n+1}}}\right) = \prod_{n=1}^{\infty} \left(1 - \frac{1}{t^{q^{n+1}-q^n}}\right)?$$

It is quite easy to prove that π_C^{**} is also algebraic, and that the quotient π_C^{**}/π_C is equal to

$$\frac{\pi_C^{**}}{\pi_C} = \prod_{n \geq 1} \left(1 - \frac{1}{t^{q^{n+1}-1}}\right).$$

So that it is enough to prove the transcendence of the product P defined by

$$P := \prod_{n \geq 1} \left(1 - \frac{1}{t^{q^n-1}}\right).$$

The next remark is a combinatorial one: P can be expanded as

$$P = \prod_{n \geq 1} \left(1 - \frac{1}{t^{q^n-1}}\right) = \sum_{n \geq 1} a_q(n) t^n$$

where $a_q(n)$ is equal to 0 if n cannot be written as $n = \sum_{j \in J} (q^j - 1)$ for some finite set of indices J , and $a_q(n) = (-1)^{\#J}$ if n can be written as $n = \sum_{j \in J} (q^j - 1)$ (such a decomposition is unique if it exists). Thus, using the Christol theorem, to prove that P is transcendental, it suffices to prove that the sequence $(a_q(n))_{n \geq 1}$ is not q -automatic. Since the image of a q -automatic sequence is also q -automatic, it suffices to prove that the sequence $(b_q(n))_{n \geq 1}$ is not q -automatic, where $b_q(n) = |a_q(n)|$: in other words $(b_q(n))_{n \geq 1}$ is the characteristic sequence of the set of integers W defined by

$$\begin{aligned} \mathcal{W}_q &:= \{n \in \mathbb{N}, n = \sum_{k \geq 0} \varepsilon_k (q^k - 1), \\ &\text{where } \varepsilon_k = 0 \text{ or } 1 \\ &\text{and } \varepsilon_k = 0 \text{ for } k \text{ large enough}\}. \end{aligned}$$

An unexpected coincidence

Once the interest of the set $\mathcal{W}_q$ above unveiled, I recognized $\mathcal{W}_2$ that B  tr  ma, Shallit and myself encountered in a quite different context [6]. Namely the von Neumann definition of integers (see, e.g., [14]) introduces sets $A_0, A_1, \dots, A_n, \dots$ defined by

$$\begin{aligned} A_0 &= \emptyset, \\ A_1 &= \{\emptyset\}, \\ A_2 &= \{\emptyset, \{\emptyset\}\}, \\ &\vdots \\ A_{n+1} &= A_n \cup \{A_n\}, \\ &\vdots \end{aligned}$$

Replacing $\emptyset$ with $\{\}$, we get

$$\begin{aligned} A_0 &= \{\}, \\ A_1 &= \{\{\}\}, \\ A_2 &= \{\{\}, \{\{\}\}\}, \\ &\vdots \\ A_{n+1} &= A_n \cup \{A_n\}, \\ &\vdots \end{aligned}$$

Hence, replacing the braces $\{\}$ with a and $\}$ with b , and suppressing the comma we obtain

$$\begin{aligned} A_0 &= a b, \\ A_1 &= a a b b, \\ A_2 &= a a b a a b b b, \\ &\vdots \end{aligned}$$

one can prove that the same sequence of ‘words’ on $\{a, b\}$, up to the final b can be obtained by iterating the morphism of monoid $a \rightarrow aab, b \rightarrow b$: start from a , and at each step replace simultaneously each a with aab and each b with b , so that, starting from a , yields

$$\begin{aligned} a, \\ a a b, \\ a a b a a b b, \\ \vdots \end{aligned}$$

The characteristic function of the indices of a ’s, namely the characteristic function of the sequence is nothing but $(b_2(n))_{n \geq 1}$, the characteristic function of the set

$$\begin{aligned} \mathcal{W}_2 &:= \{n \in \mathbb{N}, n = \sum_{k \geq 0} \epsilon_k (2^k - 1), \\ &\text{where } \epsilon_k = 0 \text{ or } 1 \\ &\text{and } \epsilon_k = 0 \text{ for } k \text{ large enough}\}. \end{aligned}$$

We proved in [6] that the sequence $(b_2(n))_{n \geq 1}$ is not 2-automatic by using an idea of Shallit consisting of looking at the sequences $(b_2(2^k n + 2^k - k))_{n \geq 0}$, with $k \geq 2$. Namely we proved that $b_2(2^k n + 2^k - k) = 0$ for $n \in [0, 2^k - 3]$ and $b_2(2^k n + 2^k - k) = 1$ for $n = 2^k - 2$. This implies that all the sequences $(b_2(2^k n + 2^k - k))_{n \geq 0}$ are distinct, thus providing an infinite set of subsequences of b_2 of the form $(b_2(2^k n + j))_{n \geq 0}$ with $j \in [0, 2^k - 1]$. Hence b_2 is not 2-automatic since its 2-kernel is infinite, which implies that P is not algebraic using Theorem 1.

The proof for b_q is ‘essentially’ the same in that it ‘suffices to make $2 = q$ ’ (which is of course more difficult than to make $q = 2$), i.e., to try to generalize the proof for $q = 2$ by guessing what the right generalization of each step might be.



Jean-Paul Allouche (right) with Jia-Yan Yao (left)

This was not the end of the story

A link between π_C and the bracket series

In the same paper [3] we proved via Christol’s theorem another transcendence result already proved by Wade in [29].

Theorem 2 (Wade). *The bracket series $\sum_{k \geq 1} \frac{1}{[k]}$ is transcendental over $\mathbb{F}_q(t)$, where $[k] := t^{q^k} - t$.*

Our proof was ‘simple’ in that it used only the Christol theorem and the fact that for any integer $M > 0$ there exist infinitely many primes congruent to 1 modulo M (recall that this last claim can be proved by elementary methods without using the whole Dirichlet theorem on primes in arithmetic progressions, see, e.g., [25]).

It happens, as we noted later on in [3], that $\frac{\pi'_C}{\pi_C} = \sum_{k \geq 1} \frac{1}{[k]}$, where π'_C is the derivative of π_C with respect to t . Since, as the reader can easily prove, the derivative of an algebraic formal power series is also algebraic, this gives that the transcendence of the bracket series implies the transcendence of π_C , yielding another simple proof of the transcendence of π_C .

More in this direction. A dream

A year later V. Berthé proved what the author did not succeed in proving, namely that Christol’s theorem can be used to prove that, letting $\zeta_C(k)$ denote the Car-

litz zeta function, the quotient $\zeta_C(k)/\pi_C^k$ is transcendental for $k \in [1, q-2]$ (see [10, 11]). Actually the quantities $\zeta_C(k)$ for any $k \geq 1$ and $\zeta_C(k)/\pi_C^k$ for any k not divisible by $q-1$ are transcendental: this was proved by J. Yu in 1991 [34], using the deeper and more complicated theory of Drinfeld modules. Several papers were then devoted to proving transcendence (or algebraicity) results for functions à la Carlitz in positive characteristic (see, e.g., [5, 8, 9, 12, 13, 20, 22, 23, 24, 26, 28, 30, 31]; also see the survey [27]).

At that time, I had (and I still have) a kind of dream, wishing that the various methods used to prove the transcendence of quantities à la Carlitz could be ‘unified’. There were four methods: the Wade method, the criteria à la De Mathan, the ‘automatic method’, and last but not least the powerful Drinfeld modules. This wish was only partially realized: the first three methods were (essentially) unified. The readers can consult the papers [20, 28, 32, 33]: they might then want to attack the question of unifying these three methods with Drinfeld modules ...

Acknowledgments

We warmly thank Jia-Yan Yao for his help in pointing out several references and R. Fokkink for several very useful remarks.

References

- 1 J.P. Allouche, Somme des chiffres et transcendance, *Bull. Soc. Math. France* 110 (1982), 279–285.
- 2 J.P. Allouche, Sur le développement en fraction continue de certaines séries formelles, *C. R. Acad. Sci. Paris, Sér. I* 307 (1988), 631–633.
- 3 J.P. Allouche, Sur la transcendance de la série formelle Π , *Séminaire de Théorie des Nombres, Bordeaux, Série II* 2 (1990), 103–117.
- 4 J.P. Allouche, Finite automata and arithmetic, *Séminaire Lotharingien de Combinatoire* (Gerolfingen, 1993), 1–18.
- 5 J.P. Allouche, Transcendence of the Carlitz–Goss gamma function at rational arguments, *J. Number Theory* 60 (1996), 318–328.
- 6 J.P. Allouche, J. Bétréma and J. Shallit, Sur des points fixes de morphismes d'un monoïde libre, *RAIRO, Inform. Théor. Appl.* 23 (1989), 235–249.
- 7 J.P. Allouche, J. Shallit, *Automatic Sequences. Theory, Applications, Generalizations*, Cambridge University Press, 2003.
- 8 J.P. Allouche and D. Thakur, Automata and transcendence of the Tate period in finite characteristic, *Proc. Amer. Math. Soc.* 127 (1999), 1309–1312.
- 9 G.W. Anderson, W.D. Brownawell, and M.A. Papanikolas, Determination of the algebraic relations among special Γ -values in positive characteristic, *Ann. of Math.* 160 (2004), 237–313.
- 10 V. Berthé, De nouvelles preuves 'automatiques' de transcendance pour la fonction zêta de Carlitz, in *Journées Arithmétiques, 1991 (Genève)*, *Astérisque* 209 (1992), pp. 159–168.
- 11 V. Berthé, Fonction ζ de Carlitz et automates, *J. Théor. Nombres Bordeaux* 5 (1993), 53–77.
- 12 V. Berthé, Automates et valeurs de transcendance du logarithme de Carlitz, *Acta Arith.* 66 (1994), 369–390.
- 13 V. Berthé, Combinaisons linéaires de $\zeta(s)/\Pi^s$ sur $\mathbb{F}_q(x)$, pour $1 \leq s \leq q-2$, *J. Number Theory* 53 (1995), 272–299.
- 14 N. Bourbaki, *Théorie des ensembles*, Hermann, 1963, chap. 3, p. 39.
- 15 L. Carlitz, On certain functions connected with polynomials in a Galois field, *Duke Math. J.* 1 (1935), 137–168.
- 16 G. Christol, Ensembles presque périodiques k -reconnaissables, *Theoret. Comput. Sci.* 9 (1979), 141–145.
- 17 G. Christol, T. Kamae, M. Mendès France and G. Rauzy, Suites algébriques, automates et substitutions, *Bull. Soc. Math. France* 108 (1980), 401–419.
- 18 G. Damamme and Y. Hellegouarch, Propriétés de transcendance des valeurs de la fonction zêta de Carlitz, *C. R. Acad. Sci. Paris, Sér. I*, 307 (1988), 635–637.
- 19 N. Pytheas Fogg, *Substitutions in Dynamics, Arithmetics and Combinatorics*, Lecture Notes in Mathematics 1794, Springer, 2002.
- 20 J. Fresnel, M. Koskas and B. de Mathan, Automata and transcendence in positive characteristic, *J. Number Theory* 80 (2000), 1–24.
- 21 F. von Haeseler, *Automatic Sequences*, de Gruyter Expositions in Mathematics 36, Walter de Gruyter & Co., 2003.
- 22 Y. Hu, Transcendence of $L(1, \chi_s)/\Pi$ and automata, *J. Number Theory* 187 (2018), 215–232.
- 23 M. Koskas, *Complexité de suites–Fonctions de Carlitz*, Thèse, Université Bordeaux I, 1995.
- 24 M. Mendès France and J.-Y. Yao, Transcendence and the Carlitz–Goss gammafunction, *J. Number Theory* 63 (1997), 396–402.
- 25 J. Neukirch, *Algebraic Number Theory*, Springer, 1999, §1.10, Exercice 1, p. 64.
- 26 D.S. Thakur, Automata-style proof of Voloch's result on transcendence, *J. Number Theory* 58 (1996), 60–63.
- 27 D.S. Thakur, Automata and transcendence, in *Number theory (Tiruchirapalli, 1996)*, *Contemp. Math.*, 210, Amer. Math. Soc., 1998, pp. 387–399.
- 28 D.S. Thakur, Z.Y. Wen, J.Y. Yao and L. Zhao, Transcendence in positive characteristic and special values of hypergeometric functions, *J. Reine Angew. Math.* 657 (2011), 135–171.
- 29 L.I. Wade, Certain quantities transcendental over $GF(p^n, x)$, *Duke Math. J.* 8 (1941), 701–720.
- 30 Z.Y. Wen and J.Y. Yao, Transcendence, automata theory and gamma functions for polynomial rings, *Acta Arith.* 101 (2002), 39–51.
- 31 J.Y. Yao, Some transcendental functions over function fields with positive characteristic, *C. R. Math. Acad. Sci. Paris* 334 (2002), 939–943.
- 32 J.Y. Yao, A transcendence criterion in positive characteristic and applications, *C. R. Math. Acad. Sci. Paris* 343 (2006), 699–704.
- 33 J.Y. Yao, Special values of fractional hypergeometric functions for function fields, *C. R. Math. Acad. Sci. Paris* 350 (2012), 801–806.
- 34 J. Yu, Transcendence and special zeta values in characteristic p , *Ann. of Math.* 134 (1991), 1–23.

Harrie de Swart

School of Humanities and Digital Sciences, Tilburg University, en
Faculteit Wijsbegeerte, Erasmus Universiteit Rotterdam
h.c.m.deswart@uvt.nl, deswart@fwb.eur.nl

Maatschappij

Hoe een president/burgemeester/voorzitter te kiezen?

Uit de literatuur is al lang bekend dat de meest bekende en meest gebruikte kiesregels een aantal onacceptabele eigenschappen hebben; zie bijvoorbeeld [10, 11]. De hoop op een kiesregel die alleen fraaie eigenschappen heeft leek door de onmogelijkheidsstelling van Arrow (1951) ijdel te zijn. Echter in 2010 maakten Balinski en Laraki duidelijk dat, door de kiezers te vragen naar hun waarderingen van de kandidaten in plaats van naar hun volgorde van voorkeur over de kandidaten, wel een kiesregel mogelijk is met fraaie eigenschappen: *Majority Judgment*. Majority Judgment baseert zich op de mediaan van de waarderingen die een kandidaat van zijn kiezers krijgt. Balinski en Laraki laten aan de hand van presidentsverkiezingen zien hoe slecht de huidige kiesregels uitpakken in de Verenigde Staten en in Frankrijk en hoe Majority Judgment tot andere en betere resultaten zou leiden. Harrie de Swart, emeritus hoogleraar logica in Tilburg en Rotterdam, legt in dit artikel uit hoe Majority Judgment in zijn werk gaat.

Amerikaanse presidentsverkiezingen 2016

In [4] en in [6] geven Balinski en Laraki een analyse van de Amerikaanse Presidentsverkiezingen in 2016. Hun conclusie is eenduidig: het kiessysteem van de USA werkt niet, dat wil zeggen, selecteert niet de kandidaat die globaal de hoogste waardering van het electoraat heeft. Om dat te illustreren maken ze gebruik van de resultaten

van een opiniepeiling onder 1787 kiezers van alle politieke richtingen door het Pew Research Center in maart 2016, zie Tabel 1.

Balinski en Laraki ontwikkelen in hun boek [2] en in hun artikel [3] een theorie, *Majority Judgment* (MJ), om de evaluaties (in plaats van de rangordeningen) van de kandidaten door de kiezers te aggregeren tot een sociale of gemeenschappelijke

volgorde van voorkeur $\succeq_{MJ}$ over de kandidaten. Zoals gesuggereerd in de term Majority Judgment, spelen meerderheden daarbij een wezenlijke rol. In feite bepaalt Majority Judgment voor elke kandidaat de *mediaan* van zijn of haar evaluaties.

Voor John Kasich is er een meerderheid van $05 + 28 + 39 = 64\%$ die vindt dat Kasich minstens een *average* verdient en er is een andere meerderheid van $15 + 13 + 39 = 67\%$ die vindt dat hij hoogstens een *average* verdient. Derhalve is *average* per definitie de *meerderheidsgraad* van Kasich. In de tabel zijn de meerderheidsgraden van de diverse kandidaten aangegeven door vette letters te gebruiken. De meerderheidsgraad van Kasich, Sanders, Cruz en Clinton is *average*, die van Trump is *poor*. Daarom ordent Majority Judgment Kasich, Sanders, Cruz en Clinton boven Trump: $Kasich \succ_{MJ} Trump$, et cetera. Maar hoe ordent Majority Judgment Kasich en Sanders, die dezelfde meerderheidsgraad hebben?

Daartoe beschouwen we het waardenprofiel van Kasich en Sanders als getoond in Tabel 2. Links en rechts van het midden vindt men 50% van de uitgebrachte evaluaties. Kasich en Sanders hebben beide een $(50 + 12)\%$ meerderheid voor [*average*, *average*]. Maar Kasich heeft een $(50 + 13)\%$ meerderheid voor [*average*, *average*] terwijl Sanders een $(50 + 13)\%$ meerderheid heeft voor [*average*, *poor*]. Daarom ordent Majority Judgment Kasich boven Sanders: $Kasich \succ_{MJ} Sanders$.

Het vinden van de kleinste van deze vier getallen 17, 22, 14 en 12, is hetzelfde

kandidaat	great	good	average	poor	terrible
John Kasich	05	28	39	13	15
Bernie Sanders	10	26	26	15	23
Ted Cruz	07	22	31	17	23
Hillary Clinton	11	22	20	16	31
Donald Trump	10	16	12	15	47

Tabel 1 Opiniepeiling Pew Research Center onder 1787 kiezers, maart 2016 (waarden in %).

	great	good	average	average	poor	terrible
Kasich	05	28	17	22	13	15
Sanders	10	26	14	12	15	23

Tabel 2 Waardenprofiel van Kasich en Sanders (waarden in %).



Ted Cruz, John Kasich, Donald Trump, Hillary Clinton en Bernie Sanders

als het vinden van het hoogste percentage van de waarden strikt boven en strikt onder de meerderheidsgraad van elke kandidaat.

Zij p_A het percentage van A 's waarden strikt boven de meerderheidsgraad α_A van A en q_A het percentage van A 's waarden strikt onder α_A . A 's *majority gauge* is per definitie (p_A, α_A, q_A) . De *majority-gauge regel* $\succ_{MG}$ rangschikt A boven B , $A \succ_{MG} B$, als $\alpha_A > \alpha_B$ of $(\alpha_A = \alpha_B$ en $p_A > \max\{q_A, p_B, q_B\})$ of $(\alpha_A = \alpha_B$ en $q_B > \max\{p_A, q_A, p_B\})$.

In ons voorbeeld: de majority gauge van Kasich is (33, average, 28) en die van Sanders is (36, average, 38). $q_{\text{Sanders}} = 38 > \max\{33, 28, 36\}$, derhalve $\text{Kasich} \succ_{MG} \text{Sanders}$. Indien $\succeq_{MG}$ beslissend is (geschreven als $\succ_{MG}$), dan is zijn ordening identiek aan die van $\succ_{MJ}$.

Om analoge redenen vinden we $\text{Sanders} \succ_{MJ} \text{Cruz}$ en $\text{Cruz} \succ_{MJ} \text{Clinton}$, zodat Majority Judgment de presidentskandidaten als volgt ordent:

$$\begin{aligned} \text{Kasich} &\succ_{MJ} \text{Sanders} \succ_{MJ} \text{Cruz} \\ &\succ_{MJ} \text{Clinton} \succ_{MJ} \text{Trump.} \end{aligned}$$

Deze ordening is het logische resultaat van meerderheden die beslissen over de beoordelingen van de kandidaten in plaats van de meerderheidsregel die kandidaten ordent naar het aantal stemmen dat ze krijgen.

Waarom kan de meerderheidsregel verkeerd uitpakken? Om dat duidelijk te maken bekijken Balinski en Laraki [4] het *waardenprofiel* van Clinton en Trump, zie Tabel 3. Merk op dat de evaluaties van Clinton die van Trump domineren, zodat Clinton van Trump zou moeten winnen,

zie Tabel 4. Maar de meerderheidsregel (Majority Rule, MR) kan makkelijk falen Clinton als winnaar aan te wijzen: veronderstel dat aan het waardenprofiel voor Clinton en Trump het volgende *opinieprofiel* van deze kandidaten zoals getoond in Tabel 5 ten grondslag ligt. De individuele stempercentages in dit opinieprofiel zijn in overeenstemming met de evaluaties die elk ontving in het waardenprofiel. Bijvoorbeeld, de 22% kiezers die Clinton een *good* gaven zijn nu verdeeld in twee groepen: een groep van 10% die Clinton een *good* geeft en Trump een *great* en een groep van 12% kiezers die Clinton een *good* geeft en Trump een *terrible*. Bij toepassen van de *meerderheidsregel* op dit opinieprofiel, zal Trump Clinton verslaan met $10 + 16 + 12 + 15 = 53\%$ tegen $11 + 12 + 4 + 4 = 31\%$, terwijl Clintons evaluaties die van Trump domineren. Merk op dat in dit opinieprofiel de 53% kiezers die Trump prefereren boven Clinton dat slechts lichtelijk doen, terwijl de meeste kiezers die Clinton prefereren boven Trump dat sterk doen.

	<i>great</i>	<i>good</i>	<i>average</i>	<i>poor</i>	<i>terrible</i>
Clinton	11	22	20	16	31
Trump	10	16	12	15	47

Tabel 3 Waardenprofiel van Clinton en Trump (waarden in %).

<i>at least:</i>	<i>great</i>	<i>good</i>	<i>average</i>	<i>poor</i>	<i>terrible</i>
Clinton	11	33	53	69	100
Trump	10	26	38	53	100

Tabel 4 De evaluaties van Clinton domineren die van Trump (waardes in %).

	10	16	12	15	14	11	12	04	04	02
Clinton	<i>go</i>	<i>av</i>	<i>po</i>	<i>te</i>	<i>te</i>	<i>gr</i>	<i>go</i>	<i>av</i>	<i>po</i>	<i>te</i>
Trump	<i>gr</i>	<i>go</i>	<i>av</i>	<i>po</i>	<i>te</i>	<i>te</i>	<i>te</i>	<i>te</i>	<i>te</i>	<i>te</i>

Tabel 5 Opinieprofiel van Clinton en Trump (waardes in %).

Arrows onmogelijkheidsstelling

Een van de minder prettige eigenschappen van 'meeste stemmen gelden' (Plurality Rule; PR) is dat deze kiesregel niet *Onafhankelijk van Irrelevante Alternatieven* is (niet OIA). Om dat duidelijk te maken beschouwen we het volgende profiel bestaande uit negen kiezers met de volgende volgorde van voorkeur over de kandidaten A , B en C :

- 4: ABC
 3: BCA
 2: CBA

De competitie is duidelijk tussen A en B en onder toepassen van ‘meeste stemmen gelden’ (PR) wint A met 4 tegen 3 eerste stemmen van B : $A \succ_{PR} B$. Echter in de competitie tussen A en B speelt een derde (irrelevante) kandidaat C een beslissende rol: zou C niet meedoen, dan stemmen de twee C -stemmers voor B en dan zou B met 5 tegen 4 eerste stemmen winnen van A : $B \succ_{PR} A$.

De meerderheidsregel ofwel paarsgevijs vergelijken is wel OIA: in een competitie tussen twee kandidaten A en B wordt alleen gekeken naar de relatieve posities van A en B ten opzichte van elkaar en daarbij spelen andere alternatieven geen rol. Echter de meerderheidsregel heeft een andere onaangename eigenschap, namelijk dat de uitkomst onder deze kiesregel niet transitief hoeft te zijn en dus niet werkbaar. Laten we dit illustreren met het standaard voorbeeld van Condorcet (± 1850). Beschouw weer drie kandidaten A , B en C en drie kiezers met de volgende volgordes van voorkeur:

- 1: ABC
 1: BCA
 1: CAB

De eerste en derde kiezer, dus een meerderheid, prefereren A boven B , dus $A \succ_{MR} B$. De eerste en tweede kiezer, dus een meerderheid, prefereren B boven C , dus $B \succ_{MR} C$. Maar de tweede en derde kiezer, dus een meerderheid, prefereren C boven A , dus $C \succ_{MR} A$. De meerderheidsregel levert dus in dit voorbeeld een cyclische uitkomst; er is geen winnaar: $A \succ_{MR} B \succ_{MR} C \succ_{MR} A$. In [8] laat Gehrlein zien dat de kans op het voorkomen van zo’n cyclische uitkomst bij drie kandidaten en een (zeer) groot aantal kiezers ongeveer 1 op 16 is, een niet te verwaarlozen getal. De kiesregel ‘meeste stemmen gelden’ is duidelijk wel transitief: als A meer eerste stemmen heeft dan B en B heeft meer eerste stemmen dan C , dan zal ook A meer eerste stemmen hebben dan C .

Samenvattend: ‘meeste stemmen gelden’ (PR) is niet OIA, maar wel transitief. De meerderheidsregel (MR) daarentegen is wel OIA, maar niet transitief.

De vraag is dus of er geen procedure is te bedenken die zowel OIA als ook tran-

sitief is. In 1951 werd aan die hoop een abrupt einde gemaakt door de zogenaamde *onmogelijkheidsstelling* van Arrow [1]: bij drie of meer kandidaten is de enige kiesregel (gebaseerd op individuele volgorden van voorkeur van de kiezers), die OIA en transitief is (samen met nog enkele andere voor de hand liggende eigenschappen, zoals anonimiteit en neutraliteit), een dictatuur, dat wil zeggen er zal een kiezer zijn wiens voorkeur altijd de gemeenschappelijke of sociale voorkeur is, ongeacht de voorkeuren van de andere kiezers.

Eerst enkele definities. Een profiel p associeert met elke kiezer een (lineaire of zwakke) ordening van de kandidaten of alternatieven. En een kiesmethode of kiesregel M voegt aan ieder profiel een gemeenschappelijke of sociale (zwakke) ordening $\succeq_M$ van de kandidaten toe.



Er zijn vele bewijzen van Arrows stelling. We zullen hier een eenvoudig bewijs geven van een variant van Arrows stelling dat recentelijk gegeven is door Balinski en Laraki in hun artikel [3]. Hiertoe formuleren we eerst *Mays axioma's* [9] voor een kiesmethode M in het geval van twee kandidaten:

1. *Gebaseerd op vergelijken*: De invoer voor de kiesmethode bestaat uit de individuele voorkeuren van de kiezers over de kandidaten.
2. *Onbeperkt domein*: Elke stemconfiguratie is toegestaan, met andere woorden de kiesmethode moet aan elk profiel een uitkomst toevoegen.
3. *Anonimiteit*: Veranderen van de namen van de kiezers verandert de uitkomst niet.

4. *Neutraliteit*: Veranderen van de namen van de kandidaten verandert de uitkomst niet.
5. *Monotonie*: als A wint of gelijk met B eindigt ($A \succeq_M B$) en een of meer kiezers veranderen hun preferentie ten gunste van A , dan zal de kiesmethode A boven B plaatsen ($A \succ_M B$).
6. *Volledigheid*: Voor elk tweetal kandidaten A en B plaatst de kiesmethode A boven B ($A \succ_M B$) of B boven A ($B \succ_M A$) of verklaart A en B indifferent ($A \approx_M B$).

Stelling (May [9]). *In het geval van slechts twee kandidaten is de enige kiesmethode die voldoet aan bovenstaande zes axioma's de meerderheidsregel.*

(Bedenk dat in het geval van twee alternatieven de meerderheidsregel op hetzelfde neerkomt als ‘meeste stemmen gelden’.)

Bewijs (Balinski en Laraki [3]). Veronderstel de kiesmethode M voldoet aan bovenstaande zes axioma's. Anonimiteit impliceert dat alleen de aantallen tellen: het aantal kiezers n_A die A boven B prefereren, het aantal kiezers n_B die B boven A prefereren, en het aantal kiezers n_{AB} die indifferent zijn tussen A en B . Volledigheid garandeert dat er een uitkomst moet zijn.

Veronderstel $n_A = n_B$ en $A \succ_M B$. Vanwege neutraliteit resulteert het verwisselen van de namen in $B \succ_M A$. Maar het nieuwe profiel is identiek aan het oorspronkelijke profiel. Contradictie. Derhalve $A \approx_M B$ indien $n_A = n_B$.

Veronderstel $n_A > n_B$. Verander de voorkeuren van $n_A - n_B$ kiezers die A boven B prefereren in indifferenties om volgens axioma 2 een geldig profiel te verkrijgen. Voor dit profiel geldt $A \approx_M B$. Terug veranderen naar het oorspronkelijke profiel levert volgens het monotonie axioma dat $A \succ_M B$. $\square$

Voor het geval van een willekeurig aantal kandidaten voegen Balinski en Laraki [3] aan bovenstaande zes axioma's nog twee axioma's toe:

7. *Transitiviteit*: Als $A \succeq_M B$ en $B \succeq_M C$, dan $A \succeq_M C$.
8. *Onafhankelijk van Irrelevante Alternatieven*: Als $A \succeq_M B$ en andere kandidaten worden toegevoegd of verwijderd, dan nog altijd $A \succeq_M B$.

Stelling (Arrows onmogelijkheidsstelling [1]). Voor $n \geq 3$ kandidaten is er geen kiesmethode M die voldoet aan de axioma's 1–8.

Bewijs (Balinski en Laraki [3]). Beschouw een willekeurig tweetal kandidaten A en B . Volgens OIA is het voldoende alleen deze twee te beschouwen. Axioma's 1 tot 6 impliceren dat de kiesmethode M de meerderheidsregel MR moet zijn. Omdat het domein onbeperkt is, toont de Condorcet-paradox nu aan dat MR de transitiviteit schendt. Dus kan er geen kiesmethode zijn die aan alle axioma's voldoet. $\square$

De vraag of het mogelijk is aan de onmogelijkheidsstelling van Arrow te ontsnappen heeft vele wiskundigen, economen, politicologen en filosofen gedurende zo'n zestig jaar beziggehouden. Merk op dat als twee kiezers zeggen dat ze A boven B prefereren, dat ze dan totaal verschillende dingen kunnen bedoelen: de een dat A uitstekend is en B goed; een ander dat A goed is en B slecht en weer een ander dat A slecht is en B zo mogelijk nog slechter. Het gevolg is een babylonische spraakverwarring en terugkijkend moet men niet verbaasd zijn dat dit tot problemen leidt, uitmondend in een onmogelijkheidsstelling.

Reeds in de eerste helft van de vorige eeuw hebben G. Mannoury, L.E.J. Brouwer, D. van Dantzig, F. van Eeden en gelijgezinden, verenigd in de *Signifische Kring*, gewezen op het belang van een zorgvuldig taalgebruik. Hieronder enige citaten van Mannoury uit 1917:

“Wie zijn gevoel wil leiden en beheersen, moet het eerst ontleden en de gewone, van ouds gebruikelijke taalvormen zijn daartoe ten enenmale onvoldoende.”

“Aan de verdere ontwikkeling en doorwerking van filosofische gedachten staat een beletsel in de weg. ... Ik ken geen beeld, dat van het beletsel dat ik op het oog heb een duidelijker voorstelling zou kunnen geven, dan dat van de oud-testamentische ziener: de toren Babels, symbool van de verwarring der spraken.”

Dit is precies wat er gebeurt als verschillende mensen zeggen dat ze A boven B prefereren. Ze bedoelen allen wat anders.

In hun boek [2] komen Balinski en Laraki met een oplossing: in plaats van kiezers

naar hun volgorde van voorkeur over de kandidaten te vragen, moet je hen vragen een *evaluatie* (waardering) van alle kandidaten te geven in termen die door alle betrokkenen goed begrepen worden. Bijvoorbeeld in termen van: excellent (*ex*), very good (*vg*), good (*go*), acceptable (*ac*), poor (*po*) en reject (*re*). Het aantal mogelijke waarderungen dient voldoende groot te zijn, zodat een kiezer zijn onderscheid van de kandidaten ook tot uitdrukking kan brengen.

Merk op dat evaluaties veel *informatiever* zijn dan volgordes van voorkeur: uit de evaluaties van de kandidaten door een kiezer kan men zijn volgorde van voorkeur afleiden, maar niet omgekeerd! Uit een volgorde van voorkeur over de kandidaten kan men niet de waarderungen van de kiezer afleiden.

Door een preciezer taalgebruik, evaluaties in plaats van ordeningen, konden Balinski en Laraki in [3] ook vaststellen dat de meerderheidsregel dominantie niet respecteert. We lichten dit toe in de volgende paragraaf.

Het respecteren van dominantie

Het was al lang bekend dat de meerderheidsregel geen rekening houdt met de intensiteiten waarmee kiezers de ene kandidaat prefereren boven de andere. In [3] geven Balinski en Laraki voor het eerst handen en voeten aan deze ietwat vage constatering. Beschouw twee kandidaten A en B die van vijf kiezers de waarderungen krijgen, zoals weergegeven in het *opinieprofiel* in Tabel 6. Hierbij staat *ex* voor ‘excellent’, *vg* voor ‘very good’, *go* voor ‘good’, *ac* voor ‘acceptable’, *po* voor ‘poor’ en *re* voor ‘reject’. De eerste drie kiezers prefereren B licht boven A , terwijl de laatste twee kiezers A sterk prefereren boven B . Volgens de meerderheidsregel wordt A door B verslagen met 2 tegen 3: $B \succ_{MR} A$.

Echter, als we nu naar de waarderungen van A en B kijken, geordend van hoog naar laag, dan ontstaat onderstaand *waarden-*

kiezer:	1	2	3	4	5
kandidaat A	<i>go</i>	<i>ac</i>	<i>po</i>	<i>ex</i>	<i>vg</i>
kandidaat B	<i>vg</i>	<i>go</i>	<i>ac</i>	<i>po</i>	<i>re</i>

Tabel 6 Opinieprofiel twee kandidaten, vijf kiezers.

kandidaat A	<i>ex</i>	<i>vg</i>	<i>go</i>	<i>ac</i>	<i>po</i>
kandidaat B	<i>vg</i>	<i>go</i>	<i>ac</i>	<i>po</i>	<i>re</i>

Tabel 7 Waardenprofiel twee kandidaten, vijf kiezers.

profiel in Tabel 7. Het is A die de betere waarderungen heeft, met andere woorden, de waarderungen van A *domineren* die van B . Preciezer, het waardenprofiel $\alpha = (\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n)$ van kandidaat A *domineert* waardenprofiel $\beta = (\beta_1, \beta_2, \dots, \beta_n)$ van kandidaat B indien voor elke i , $\alpha_i \geq \beta_i$ en voor minstens een k , $\alpha_k > \beta_k$. En dus zou A in plaats van B de winnaar moeten zijn! De meerderheidsregel respecteert dus dominantie niet. Anderzijds dient elke redelijke kiesmethode dominantie te respecteren.

De vraag is of er een kiesmethode is die dominantie wel respecteert? Jazeker, Majority Judgment van Balinski en Laraki [2, 3]. Laten we de werking van Majority Judgment toelichten aan de hand van bovenstaand voorbeeld.

Er is een meerderheid van drie kiezers die vinden dat A minstens een *go* verdient, en er is een andere meerderheid van drie kiezers die vinden dat A hoogstens een *go* verdient. Daarom is de *meerderheidsgraad* van A per definitie *go*. Voor B is er een meerderheid van drie kiezers die vinden dat B minstens een *ac* verdient en een andere meerderheid van drie kiezers die vinden dat B hoogstens een *ac* verdient. Daarom is de meerderheidsgraad van B per definitie *ac*. De meerderheidsgraad van A is hoger dan die van B en volgens Majority Judgment is dan A de winnaar: $A \succ_{MJ} B$.

Majority Judgment kijkt *horizontaal* naar meerderheden in het waardenprofiel, terwijl de meerderheidsregel *verticaal* naar meerderheden in het opinieprofiel kijkt. Majority Judgment respecteert dominantie, de meerderheidsregel doet dat niet.

Eigenschappen van Majority Judgment

Uit de definitie van Majority Judgment volgt onmiddellijk:

Stelling (Balinski en Laraki). Majority Judgment neemt de waarderungen van de kandidaten door de kiezers als invoer en voldoet aan de axioma's 2–8.

Majority Judgment heeft onder anderen de volgende eigenschappen:

1. Majority Judgment geeft een (sociale) ordening $\succeq_{MJ}$ van de kandidaten en de gemeenschap is indifferent tussen twee kandidaten ($A \approx_{MJ} B$) precies dan wanneer ze dezelfde beoordelingen hebben. Majority Judgment meet de steun van

het electoraat voor de kandidaten en ordent hen naar rato hun steun. Met de meerderheidsregel kunnen de kiezers hun meningen over de kandidaten niet uitdrukken; iedere kiezer wordt beperkt tot het steunen van één kandidaat met uitsluiting van alle anderen.

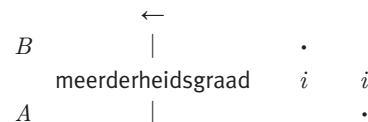
2. Het is evident uit de definities dat Majority Judgment OIA is: of $A \succeq_{MJ} B$ of $B \succeq_{MJ} A$ hangt niet af van een derde kandidaat C . Plurality Rule is niet OIA.
3. Bij meer dan twee kandidaten is $\succeq_{MJ}$ transitief: als $A \succeq_{MJ} B$ en $B \succeq_{MJ} C$, dan $A \succeq_{MJ} C$. De meerderheidsregel is niet transitief.



4. Majority Judgment respecteert per definitie *dominantie*: als de waarderings van A die van B domineren, dan $A \succ_{MJ} B$. Dit geldt niet voor 'meeste stemmen gelden' en ook niet voor de meerderheidsregel.
5. Majority Judgment is *bestand tegen strategisch gedrag voor wat betreft de meerderheidsgraad*: een groep met invoer hoger (respectievelijk lager) dan de meerderheidsgraad kan de meerderheidsgraad niet doen stijgen, respectievelijk verlagen. Bijvoorbeeld, veronderstel dat een kandidaat A de volgende waarderings krijgt: *good acceptable poor*. De meerderheidsgraad van A is dan *acceptable*. De kiezer die hem een *good* gaf kan de meerderheidsgraad van A niet doen stijgen; een *excellent* geven in plaats van een *good* verandert de meerderheidsgraad van A niet. Dit is

zeker niet het geval voor mechanismen gebaseerd op punten optellen of het gemiddelde nemen.

6. Majority Judgment is *partieel bestand tegen strategisch gedrag met betrekking tot de gemeenschappelijke volgorde van voorkeur* (bij voldoende veel graden). Dat wil zeggen als een kiezer, die B boven A waardeert, de meerderheidsgraad van B kan verhogen, dan kan hij die van A niet verlagen; en als hij die van A kan verlagen, dan kan hij die van B niet verhogen. Bijvoorbeeld, veronderstel kiezer i geeft B een hogere beoordeling dan A en A heeft dezelfde meerderheidsgraad als B :



De enige manier waarop kiezer i B 's meerderheidsgraad kan verhogen is door B een beoordeling te geven hoger dan B 's meerderheidsgraad in plaats van een beoordeling lager dan B 's meerderheidsgraad. Maar omdat i aan A een lagere beoordeling gaf dan B , kan hij A 's meerderheidsgraad niet verlagen. Deze eigenschap is zeker niet waar voor enig mechanisme gebaseerd op sommen of gemiddelden van punten.

7. De meerderheidsgraad van een kandidaat is een belangrijk signaal naar de kandidaten en het electoraat.
8. Majority Judgment stimuleert kandidaten de hoogst mogelijke waarderings te krijgen van zoveel mogelijk kiezers; elke graad draagt bij aan het eindoordeel. Kandidaten kunnen zich niet focussen op 51% van het electoraat en, indien de winnaar, vervolgens claimen 100% van het electoraat te vertegenwoordigen.
9. Merk op dat elke methode, waarbij kiezers punten geven aan kandidaten en waarbij kandidaten gerangschikt worden naarmate ze punten verzameld hebben, ook voldoet aan de axioma's 2–8. Maar een dergelijke methode is niet bestand tegen strategisch gedrag voor wat betreft het eindoordeel van een kandidaat noch voor wat betreft de rangorde van de kandidaten. Bovendien is een methode gebaseerd op punten geven niet consistent met Majority Judgment, en ook niet met de meerderheidsregel.

	1	2	3	4	5	6	7
A	<i>ex</i>	<i>ex</i>	<i>ex</i>	<i>ac</i>	<i>ac</i>	<i>ac</i>	<i>ac</i>
B	<i>po</i>	<i>po</i>	<i>po</i>	<i>go</i>	<i>go</i>	<i>go</i>	<i>go</i>

Tabel 8 Voorbeeld met twee kandidaten, zeven kiezers.

Beschouw het volgende voorbeeld in Tabel 8. Verticaal gezien: B verslaat A met 4 tegen 3, dus B is de MR-winnaar. Horizontaal gezien: de meerderheidsgraad van B is *go*, die van A is slechts *ac*; dus B is in dit voorbeeld ook de MJ-winnaar. Merk op dat met 5 punten voor *ex*, 4 voor *vg*, 3 voor *go*, 2 voor *ac*, 1 voor *po* en 0 voor *re*, A van B wint met 23 punten tegen 15. Dus *het optellen van punten is noch consistent met Majority Judgment, noch met de meerderheidsregel*.

10. Het idee van Approval Voting is dat elke kiezer 1 punt geeft aan de kandidaten die hij goedkeurt en 0 punten aan de kandidaten die hij afkeurt. Met 1 punt voor *go* of hoger wint B met 4 punten tegen 3 voor A . Maar met 1 punt voor *ac* of hoger wint A met 7 punten tegen 4 voor B . Dus *Approval Voting geeft willekeurige uitkomsten en is niet consistent met Majority Judgment en ook niet met de meerderheidsregel*.

Presidentsverkiezingen in Frankrijk

In [5] en in [7] nemen Balinski en Laraki de Franse presidentsverkiezingen onder de loep. De conclusie is wederom uiterst negatief: het Franse kiessysteem kan makkelijk een winnaar opleveren die door de overgrote meerderheid verworpen wordt. Bij de Franse presidentsverkiezingen zijn er twee stemrondes: 1. Als in de eerste ronde een kandidaat meer dan de helft van de uitgebrachte stemmen krijgt is hij verkozen. 2. In het andere geval is er een tweede ronde tussen de twee kandidaten met de meeste stemmen in de eerste ronde.

Bij de presidentsverkiezing van 23 april 2017 waren aanvankelijk Hollande, Sarkozy en Le Pen de belangrijkste kandidaten.

Stel de volgorde van voorkeur waren als volgt:

34%	Hollande	Sarkozy	Le Pen
32%	Sarkozy	Hollande	Le Pen
34%	Le Pen	Sarkozy	Hollande

In dit geval heeft niemand meer dan 50% van de stemmen en Sarkozy met het min-

	<i>très bien</i>	<i>bien</i>	<i>assez bien</i>	<i>passable</i>	<i>insuffisant</i>	<i>à rejeter</i>
Mélenchon	13,3	22,2	28,8	09,1	11,1	15,5
Macron	09,6	22,8	25,7	11,0	11,1	19,8
Hamon	05,5	11,7	29,4	17,0	15,3	21,1
Dupont-Aignan	03,9	09,5	23,9	17,9	20,4	24,4
Le Pen	15,3	14,0	16,3	06,7	13,6	34,1
Poutou	02,8	08,5	22,6	17,6	22,8	25,7
Fillon	08,2	11,9	17,9	10,6	17,9	33,5
Lassale	00,9	04,0	19,6	19,1	27,2	29,2
Arthaud	01,4	05,5	19,2	16,3	28,4	29,2
Asselineau	01,0	03,5	17,9	16,6	29,4	31,6
Cheminade	00,4	02,4	16,9	17,1	30,9	32,3

Tabel 9 Opiniepeiling uitgevoerd door La Fabrique Spinoza op 11–12 april 2017 (waarden in %).

ste aantal stemmen valt af. In de 2e ronde krijgt Hollande vervolgens $34 + 32 = 66\%$ van de stemmen en wint. Stel nu dat Hollande in de eerste ronde meer steun krijgt ten koste van Le Pen:

37%	Hollande	Sarkozy	Le Pen
32%	Sarkozy	Hollande	Le Pen
31%	Le Pen	Sarkozy	Hollande

Dan mag Le Pen in de tweede ronde niet meedoen en wint Sarkozy in de tweede ronde met $32 + 31 = 63\%$ van de stemmen. Meer steun voor Hollande betekent dus verlies in plaats van winst! Met andere woorden: *het Franse kiessysteem is niet monotoon*: meer steun kan betekenen dat je verliest in plaats van wint.

Overigens was er zowel voor Hollande als voor Sarkozy een grote meerderheid van de Fransen die zich verzette tegen hun kandidatuur. Waarom deden ze dan (aanvankelijk) toch mee? Omdat de meerderheidsregel in twee rondes hen de kans geeft met 20% van de stemmen in de eerste ronde zich te kwalificeren voor de

tweede ronde tegen Le Pen en vervolgens te winnen. Ironisch dat drie kandidaten, elk verworpen door een grote meerderheid, het debat lange tijd gemonopoliseerd hebben.

Bij de presidentsverkiezing van 23 april 2017 behaalden Macron (En Marche!, EM), Le Pen (Front National, FN), Fillon (Les Républicains, LR) en Mélenchon (La France Insoumise, FI) de hoogste percentages:

Emmanuel Macron	EM	24,01%
Marine Le Pen	FN	21,30%
François Fillon	LR	20,01%
Jean-Luc Mélenchon	FI	19,58%

Wederom, als Macron in de eerste ronde 1,30% meer steun had gekregen ten koste van Le Pen, dan was de tweede ronde tussen Macron en Fillon geweest en was wellicht Fillon president geworden. Meer steun in de eerste ronde kan betekenen dat je in de tweede ronde verliest!

La Fabrique Spinoza [7] heeft op 11–12 april 2017 een opiniepeiling uitgevoerd onder duizend personen die geacht wer-

den representatief te zijn voor de Franse bevolking. Deze opiniepeiling leverde de resultaten uit Tabel 9 op.

De meerderheidsgraad voor Mélenchon is *assez bien*: een meerderheid van $13,3 + 22,2 + 28,8 = 64,3\%$ vindt dat hij minstens een *assez bien* verdient en een andere meerderheid van $15,5 + 11,1 + 09,1 + 28,8 = 64,5\%$ vindt dat hij hoogstens een *assez bien* verdient. Op analoge wijze zien we dat de meerderheidsgraad van Macron ook *assez bien* is, terwijl de meerderheidsgraad van Hamon, Dupont-Aignan, Le Pen en Poutou *passable* is. De meerderheidsgraad van de diverse kandidaten is in de tabel aangegeven door vette cijfers te gebruiken.

Mélenchon en Macron hebben dezelfde meerderheidsgraad. Maar het percentage $p_{\text{Mélenchon}}$ kiezers dat Mélenchon een waardering hoger dan zijn meerderheidsgraad geeft is $13,3 + 22,2 = 35,5\%$ en het percentage $q_{\text{Mélenchon}}$ dat hem een waardering geeft lager dan zijn meerderheidsgraad is $15,5 + 11,1 + 9,1 = 35,7\%$. Voor Macron vinden we $p_{\text{Macron}} = 9,6 + 22,8 = 32,4\%$ en $q_{\text{Macron}} = 19,8 + 11,1 + 11,0 = 41,9\%$. Omdat $41,9 > \max\{35,5, 35,7, 32,4\}$ volgt dat Mélenchon $\succ_{MG}$ Macron en dus ook Mélenchon $\succ_{MJ}$ Macron. Op analoge wijze vinden we:

$$\text{Mélenchon} \succ_{MJ} \text{Macron} \succ_{MJ} \text{Hamon} \\ \succ_{MJ} \text{Dupont-Aignan} \succ_{MJ} \text{Le Pen}$$

Zie ook de website www.mieuxvoter.fr die bedoeld is om Majority Judgment te promoten. $\dashv\dashv$

Dankwoord

De redactie van het Nieuw Archief voor Wetenschap, in het bijzonder Robbert Fokkink, heeft waardevolle suggesties gedaan voor de presentatie van de inhoud van dit artikel. Hartelijk dank daarvoor.

Referenties

- 1 K. Arrow, *Social Choice and Individual Values*, Yale University Press, 1951.
- 2 M. Balinski en R. Laraki, *Majority Judgment; Measuring, Ranking and Electing*, MIT Press, 2010.
- 3 M. Balinski en R. Laraki, *Majority Judgment vs Majority Rule*, Cahier 2016-4, École Polytechnique, Paris, 2016.
- 4 M. Balinski en R. Laraki, Trump and Clinton victorious: proof that US voting system does not work, *The Conversation* 58752 (2016).
- 5 M. Balinski en R. Laraki, Pour éviter un nouveau 21 Avril instaurons le jugement majoritaire, *The Conversation* 58178 (2016).
- 6 M. Balinski, How Majority Voting Betrayed Voters again in 2016, *The Conversation* 69206 (2016).
- 7 M. Balinski en R. Laraki, Résultats du vote au jugement majoritaire. Elections présidentielle de 2017, www.jugementmajoritaire2017.com.
- 8 W.V. Gehrlein, Condorcet's paradox and the likelihood of its occurrence: different perspectives on balanced preferences, *Theory and Decision* 52 (2002), 171–199.
- 9 K.O. May, A set of independent, necessary and sufficient conditions for simple majority decision, *Econometrica* 20 (1952), 680–684.
- 10 A. Storcken en H. de Swart, *Verkiezingen, Agenda's en Manipulatie*, Epsilon Uitgaven, deel 23, 1992.
- 11 H. de Swart e.a., *Verkiezingen, een web van paradoxen*, Zebra-reeks, deel 8. Epsilon Uitgaven, 2000.

Daan Mulder

mulderdaan@live.nl



Het keerpunt van Hans Ree

Ik beschouw wiskunde wel als een hoger iets dan schaken, aanzienlijk hoger

Als ik schaakgrootmeester en schrijver Hans Ree (1944) mail met de vraag of hij zich wil laten interviewen, antwoordt hij dat vrijdagmiddag hem goed uitkomt. Niet te vroeg, want hij moet 's ochtends zijn schaakcolumn in NRC nog afmaken. Het komt handig uit dat we allebei in Amsterdam wonen. "Om drie uur in café Welling?", stel ik voor. Hans verbetert me; Welling is om die tijd nog niet open. Het wordt café Wildschut, vlak om de hoek bij het appartement waar hij met zijn vrouw Lien woont. Niet alleen studeerde Hans zelf wiskunde aan de Universiteit van Amsterdam, ook is Lien de dochter van Arend Heyting, de 'kroonprins van het intuïtionisme' na L.E.J. Brouwer. Een gesprek over wiskunde als ideaal en schaken als hartstocht.

Waarom koos je voor schaken in plaats van wiskunde?

"Wiskunde of schaak was een ander leven. Bij het schaken ben je aan niemand iets verschuldigd. Dat leven beviel me beter. Het idee dat je iedere ochtend op een bepaalde tijd uit je bed zou moeten komen, dat stond me heel erg tegen. En het reizen is natuurlijk fijn, in een tijd dat verre reizen naar andere werelddelen helemaal nog niet zo gangbaar waren. In 1966 gingen we naar Cuba omdat daar een olympiade was, daar kwam geen mens, behalve schakers. De bedevaartstochten van Mulisch en zijn geestverwanten, die waren er nog niet. Dat was een paar jaar later.

Er waren een paar mensen die in mijn jaar zaten, waarvan ik meteen merkte, en iedereen wist, dat waren lui die ademden wiskunde. Dat was zoals een ander de *Donald Duck* las, zo lasen zij artikelen. Eentje daarvan was — misschien zegt de naam je iets, hij is later hoogleraar geworden — Peter van Emde Boas. Dat was een van die talentvolle mensen. Dat was iets totaal anders. Ik was, nou ja, redelijk bekwaam, maar verder niks. Maar zoals zij tegenover wiskunde stonden, zo stond ik tegenover het schaken. Als ik

een schaaktijdschrift had, hoefde ik geen tekst of diagrammen te hebben, ik las de zetten en zag de partij voor me. En dan had ik ook niet het idee dat ik een inspanning verrichtte. Zoals iemand die de *Donald Duck* leest ook niet het idee heeft dat hij een inspanning verricht.



Hans Ree

Schaken deed ik vanaf mijn zesde, maar vanaf mijn elfde jaar pas intensief. Lid van de schoolschaakclub, een jaar later lid van de jeugdschaakclub, met de boeken die ik kon vinden, schaakrubrieken van Lodewijk Prins uit *Het Parool* knippen. Dat was een hartstocht, en wiskunde was niet een hartstocht. Hoewel ik het wel heel erg mooi vond. Ik had eigenlijk zelfs het idee: wiskunde is het mooiste wat er in de wereld is.

Ook vanuit een soort snobisme. Want wij, ik, een paar wiskundevrienden, wij wilden wiskunde die helemaal niks met het gewone leven te maken had. Toepasbare wiskunde, dat vonden wij niks, en toegepaste wiskunde al helemaal niet. Zuivere wiskunde, dat was het rijk van de geest. Dat was trouwens, maar dat wisten wij niet, zoals Brouwer er ook over dacht. Ingenieurs en zo, dat waren eigenlijk een soort apen. Goed, ik heb later wel ingezien dat het flauwekul was. Maar zo dachten wij toen wel, toen we tweedeaars waren."

Lag schaken daar nog in het verlengde van?

"Ja, dat is ook nergens goed voor behalve voor zichzelf, net zoals de wiskunde. De zuivere wiskunde, als je ervan uitgaat dat het nergens goed voor is, wat dus niet juist is, dan heeft het nog een waarde op zichzelf, net als muziek een waarde op zichzelf heeft. En die is niet mis. Je kan zeggen: muziek is ergens voor, weet ik veel, om mensen in een vrolijke of juist een droevige stemming te brengen. Dan doe je muziek onrecht. Daar gaat het niet om, of de mensen er vrolijk van worden.

Muziek is op zichzelf iets belangrijks. En zo zagen wij de wiskunde ook, en het schaken ook. Ik beschouw wiskunde wel als een hoger iets dan schaken, aanzienlijk hoger. Maar iets anders is wat je met je leven gaat doen.

Ik had lang gedacht dat ik als wiskundige zou gaan werken. Ik ben eerder bijvoorbeeld nog bij de Hogeschool Twente langsgeslagen. Eerdergenoemde Lodewijk Prins organiseerde daar het studium generale en hij vond het wel leuk als ik ook naar Twente zou komen. Maar ik deed dat uit beleefdheid, want hoewel ik in Amsterdam nog wel aan een promotie zou willen beginnen was er toch eigenlijk geen haar op mijn hoofd die eraan dacht daarvoor naar Twente te gaan. Dat liet ik niet merken. Het moment van verlichting kwam voor mij in 1968 op de Schaakolympiade in Lugano. Ik stond onder de douche te piekeren en besepte dat ik het helemaal geen prettige gedachte vond om als wiskundige te werken. En toen dacht ik: ‘Niemand dwingt je toch?’

Met schaak was ik in staat om, weliswaar op bescheiden schaal, mijn inkomen te verdienen. Dat was op een kleine studentenkamer, een auto kwam helemaal niet bij me op. Je had ook niet veel nodig omdat je wel zo’n vier maanden in buitenlandse hotels zat, waar alles voor je betaald werd. Mijn inkomsten werden ook wel meer toen ik erover ging schrijven. In 1968 kreeg ik een wekelijkse rubriek in de *Haagse Post*. Ik weet nog dat ik daar 150 gulden in de week voor kreeg. Een *Haagse Post* zelf kostte in de kiosk een gulden. Nou ja, als het nog zou bestaan, zou dat weekblad nu zo’n 6 euro kosten. Als je dat maal 150 neemt, dan is het wel een groot bedrag. Het is niet een goede vergelijking, maar het was toch een heel aanzienlijk bedrag, waar alle vaste lasten makkelijk door gedekt waren. En daarnaast had ik nog de inkomsten van het schaken zelf.

Toch was ik vanaf 1970 als hobby aan een proefschrift aan het werken, of vooral niet aan het werken, in slaktempo, bij professor Johannes de Groot, in de topologie. Het had nog niet veel voorgesteld, hoewel ik toch wel van plan was om het te doen. Maar ja, dan is er weer dit toernooi, dan is er weer dat toernooi. En toen plotseling overleed die De Groot.

Later, dat wist ik toen niet, hoorde ik van Lien — die kende hem ook, want De Groot woonde in Laren, en Lien woonde in Laren, en zij had ook een wiskunde-professor als vader en zij speelde af en toe bij hen thuis met het dochttertje van De Groot — dat het was gekomen doordat hij zo lang was, en dat hij met zijn hoofd in zijn eigen huis tegen de deurpost was aangelopen, en daardoor stierf. Heel plotseling. Ja, dat was eigenlijk iets waardoor ik toch met wiskunde ben gestopt. Ik was wel aan hem gehecht, het was een heel aardige man en bijzonder enthousiast over zijn vak. Hij was ook in staat om mij, terwijl ik er voor het grootste deel buiten stond, toch binnenboord te houden. Maar ik zag er niks in om dat dan bij iemand anders een soort van opnieuw te gaan proberen.”

Kende je Lien toen nog niet?

“Nee, ik heb Lien pas in 1982 ontmoet. Wel kende ik haar vader, Arend Heyting. Die was door Brouwer naar Amsterdam gehaald en heeft die intuïtionistische wiskunde van Brouwer toen geaxiomatiseerd. Hij heeft ook een inleidend leerboek over intuïtionisme geschreven, waarover ik nog wel tentamen heb gedaan. Maar Heyting was zelf geen intuïtionist in de zin dat echte intuïtionisten zoals Brouwer vonden dat wiskunde zo moest en traditionele wiskunde verkeerd was. Heyting had dat niet. Voor hem was het een vak zoals er andere vakken zijn. Ik heb tijdens mijn studie een stuk meer met De Groot te maken gehad dan met Heyting. Het is dus niet zo dat hij mij en Lien bij elkaar heeft gebracht. Ik had geen idee dat Heyting kinderen had, laat staan dat hij er elf had. Lien was, toen ik haar ontmoette op kunstenaarssociëteit De Kring, al wel heel lang journalist, en dat was wel mijn wereld. Wiskunde was toen iets dat allang achter me lag.

Er waren veel schakers op De Kring. Donner, Timman, Sosonko, Hartoch, die ken je misschien niet, ook een schaakmeester. En veel mensen die geen beroepsschaker waren maar wel veel schaakten. We zaten vaak de helft van de week tot vier uur ’s nachts in de Kring te kletsen en te drinken. Wij waren vrij prominent daar, hoor. Ik herinner me nog eens dat ik met drie andere schakers aan

een grote tafel zat met twee schaakborden en de stukken erop, en toen liep Nelly Frijda langs en die riep: ‘Ik wil aandacht, godverdomme!’, en gooide die hele tafel met alle stukken om, alles op de grond. Kun je nagaan hoe prominent wij daar aanwezig waren.”

Wat dacht je bij de opkomst van de schaakcomputer?

“In de jaren zeventig waren die schaakcomputers er, maar dat was iets waar je om lachte, zo van: ‘Kijk nou eens wat ie voor een malle dingen heeft gedaan.’ Ik weet nog dat — het zal in de jaren tachtig zijn geweest — ik af en toe bij Hein Donner op bezoek kwam. Hij had een hersenbloeding gehad en verbleef in een verpleeghuis van 1983 tot 1988, toen is hij gestorven. Hij had altijd gezegd: ‘Computers kunnen niet schaken, dat zal nooit iets worden.’ Op een gegeven moment, in 1988, kwam ik bij hem, en ik zei: ‘Kijk, Hein, een computer heeft in Amerika gewonnen van een internationale meester bij een echt officieel toernooi, zal ik die partij eens laten zien?’ Hij zei langzaam: ‘Ha-ha-ha,’ want hij kon nauwelijks meer praten, ‘computers kunnen helemaal niet schaken, alleen Ree gelooft dat! Laat maar een partij van Timman zien, dat is beter.’ Dat heb ik toen maar gedaan.”

Op welk van je gespeelde partijen ben je het trotst?

“Ik heb in mijn leven een paar goede partijen gewonnen, en ook tegen heel prominente spelers, wereldkampioen Michail Tal, Viktor Kortchnoi, Bent Larsen. Het winnen van topspelers is wel fijn natuurlijk, maar ik kan niet zeggen dat het nou zo’n enorme indruk op me maakte. De meest gelukkigste herinnering heb ik aan de partijen waar ik eigenlijk ten onrechte, terwijl ik glad verloren stond, terwijl ik nog maar een minuut over had voor vijftien zetten, terwijl de tegenstander ruim tijd had, toch remise wist te spelen of zelfs wist te winnen. Die dingen, zo veilig ontkomen terwijl je even in de muil van het beest bent geweest, dat geeft toch het grootste geluksgevoel.”

Goede suggesties voor een Nederlandse wiskundige met een keerpunt in zijn of haar carrière zijn welkom via keerpunt@nieuwarchief.nl.

Martinus van Hoorn

oud-hoofdredacteur Euclides
mc.vanhoorn@wxs.nl

Jan Guichelaar

redacteur Pythagoras
j.guichelaar4@gmail.com

Geschiedenis

De geschiedenis van het tijdschrift Pythagoras, deel 3: Langs de rand van de afgrond en toch gered; de periode vanaf 1985

In 1985 begon voor Pythagoras een nieuwe en onzekere periode. In deze derde aflevering belichten Martinus van Hoorn en Jan Guichelaar deze moeilijke fase van het blad tot 1998, het jaar waarin Pythagoras overgaat naar het Wiskundig Genootschap. Evenals voor de vorige afleveringen zijn diverse schriftelijke bronnen gebruikt, terwijl nu logischerwijze met méér betrokkenen kon worden gesproken, of anderszins contact kon worden onderhouden.

Pythagoras was in 1985 door de vertrouwde schoolboekenuitgever Wolters-Noordhoff overgedragen aan de stichting IVIO te Lelystad. Pythagoras bleef een kwalitatief goed blad. Maar er kwamen productieproblemen, die niet opgelost werden, waardoor de redactie uiteindelijk besloot het bijltje erbij neer te leggen. Dit hoewel ook binnen IVIO een forse inspanning werd geleverd om de uitgave van Pythagoras tot een succes te maken.

Daarna kwam Pythagoras nog onder de hoede van twee andere uitgevers, MEMO en NIAM. In deze jaren vonden verscheidene wisselingen plaats in de redactie. Men kan bewondering hebben voor wat een aantal enthousiaste redacteurs in die jaren hebben gedaan. Tegelijk valt op dat ook anderen zich hebben ingezet voor het blad.

Pythagoras werd vanaf het begin uitgegeven onder auspiciën van de NOCW, van waaruit het tijdschrift ook was opgericht. Vanaf 1985 kwam de uitgave eveneens onder auspiciën van de Stichting Christiaan Huygens, die opgericht was door enkele re-

dactieleden van Pythagoras en Archimedes ten behoeve van de continuïteit van beide bladen — al stond in de statuten een meer algemene formulering. De NOCW en de Stichting Christiaan Huygens speelden in het vervolg elk een belangrijke rol. Dankzij de NOCW werd Pythagoras gered.

In 1998 werd het Wiskundig Genootschap eigenaar van Pythagoras. Dit betekende een jarenlange bestaanszekerheid, die tot vandaag de dag duurt. Omdat één van de auteurs van deze artikelenserie in 2001 mederedacteur van Pythagoras werd, wordt het wedervaren van Pythagoras vanaf omstreeks 1998 buiten beschouwing gelaten. Bovendien vinden beide auteurs voor een historisch onderzoek enige afstand in de tijd wenselijk.

IVIO

De stichting IVIO was in 1936 als Instituut voor Individueel Onderwijs opgericht door prof. Ph.A. Kohnstamm (1875–1951).¹ Deze was aanvankelijk hoogleraar thermodynamica te Amsterdam, maar legde zich vanaf 1918 toe op de pedagogiek. IVIO was een

ideële instelling, die met de bij velen bekende AO-boekjes de algemene ontwikkeling wilde bevorderen van mensen in een minder kansrijke positie. Het uitgeven van Pythagoras en Archimedes sloot in zekere zin aan bij deze doelstelling. In zekere zin, want de lezers van deze bladen konden zich door hun abonnement weliswaar extra ontwikkelen, maar deze lezers verkeerden niet in een achtergestelde positie. Deze discrepantie leidde tot interne discussie: pasten Pythagoras en Archimedes principieel gezien binnen IVIO?²

IVIO bracht de AO-boekjes uit op een bescheiden formaat. Daardoor kon de prijs laag blijven, zodat de boekjes een groot publiek konden bereiken. Pythagoras en Archimedes werden door IVIO uitgebracht op hetzelfde bescheiden formaat. Er hoefde dus niet te worden geïnvesteerd in een nieuwe vormgeving. Niettemin kostte een abonnement meteen al f 19,50. Dit was bijna een verdubbeling van de vorige prijs, f 9,95.

Omdat IVIO geen schoolboekenuitgever was, beschikte het niet over adressenbestanden van scholen of leraren. Gelukkig droeg Wolters-Noordhoff deze bestanden over; in een intern stuk werd Wolters-Noordhoff hierom geprezen.³ Zodoende werden de leraren die Pythagoras en Archimedes tot 1985 aan de man hadden

gebracht bij IVIO bekend. Het IVIO wilde de leraren aanschrijven, maar besloot tegelijkertijd de abonnementen persoonlijk te maken. Pythagoras en Archimedes werden dus niet meer door leraren uitgereikt tijdens de les, maar aan de leerlingen toegezonden op hun huisadres. Wel kregen leraren die een bepaald aantal (acht) nieuwe abonnees wierven, een gratis abonnement voor zichzelf. De brief die naar de scholen en de leraren ging, was een gezamenlijk schrijven van de Stichting Christiaan Huygens en IVIO.⁴

Samenvattend kan men zeggen dat het onderbrengen van de beide tijdschriften bij IVIO aldaar leidde tot interne discussie, terwijl IVIO koos voor een persoonlijke binding met de abonnees, en tegelijk de abonnementsprijs sterk verhoogde.

De redactie vanaf 1985

Gelukkig kon Pythagoras verder gaan met een ervaren redactie. Redactiesecretaris werd Klaas Lakeman, leraar te Amsterdam. Hij was in 1983 redacteur van Pythagoras geworden door te reageren op een oproep daartoe van Wolters-Noordhoff.⁵ Hij had redactionele ervaring bij de *Spectrum Encyclopedie*. Gesprekspunten van de redactie met IVIO waren door hem grondig doordacht, onder meer voor een werkoverleg met hem en Hessel Pot bij IVIO.⁶ Door de voorbereiding verliep het overleg constructief. Bovendien bleek van de zijde van IVIO een gemotiveerde medewerker aanwezig, Piet van Abeelen. Dankzij diens aanwezigheid groeide meteen ook vertrouwen. Helaas overleed Piet van Abeelen in april 1986, waardoor een deel van de nieuw verworven expertise inzake het uitbrengen van Pythagoras, en Archimedes, bij IVIO opnieuw moest worden opgebouwd.

Naast Klaas Lakeman bleven Jan van de Craats, Hans de Rijk en Hessel Pot redacteur. Jan van de Craats zette de Pythagoras Olympiade voort, en deed nog veel meer. Henk Mulder was teruggetreden als redacteur, maar bleef wel medewerker.

In het contract tussen de Stichting Christiaan Huygens en IVIO was opgenomen dat IVIO jaarlijks f1500 betaalde aan de stichting, die dit dan verdeelde; de eindredacteur kreeg f700, de overige redacteurs kregen elk f100 plus een paginavergoeding voor het bewerken van artikelen van andere auteurs, welke vergoeding gedeeld werd met die andere auteurs.⁷ Voor de



Foto: Jan Guichelaar

Figuur 1 Klaas Lakeman in 2018.

vorige jaargang was nog afgerekend door Wolters-Noordhoff.⁸

Men kan gerust zeggen dat Pythagoras kwalitatief gered werd door de redacteurs. Tegelijk was het aan het idealisme van Andries Greiner, directeur van IVIO, en diens medewerker Piet van Abeelen te danken dat het blad kon blijven voortbestaan.

Pythagoras verschijnt weer

Het IVIO wilde zowel Pythagoras als ook Archimedes zes maal per jaar laten verschijnen, Pythagoras in de oneven maanden, Archimedes in de even maanden. De doordenking van IVIO-zijde behelsde logischerwijze beide bladen. Maar de redacties handelden onafhankelijk van elkaar en hadden geen onderling overleg. Hoogstens kon het voorkomen dat iemand voor beide bladen schreef, zoals Henk Mulder, of van beide bladen redacteur was, zoals Hans de Rijk. Aanvankelijk was ook Klaas Lakeman redacteur van Archimedes.

Het eerste nummer van Pythagoras nieuwe stijl verscheen in oktober 1985. Geen oneven maand weliswaar, maar de voorbereiding door IVIO kostte natuurlijk enige tijd, waardoor september niet haalbaar was. Dat Pythagoras kort daarna kon verschijnen was een klein mirakel. Dit eerste nummer opende met een bijdrage van de kunstenaar Popke Bakker over het dubbelverstek. Hij was bij Lakeman bekend vanuit de stichting Ars et Mathesis. Het dubbelverstek kwam terug in de volgende jaargang. Hoogtepunt was de constructie van een slingerlijn langs alle hoekpunten van een regelmatig twaalfvlak (zie Figuur 3). Sommigen wilden meteen gaan rekenen,



Foto: Ineke van de Craats-Oosterwold

Figuur 2 Jan van de Craats.

maar misschien was het verstandiger eerst de figuur goed te bekijken.

In de eerste jaren vanaf 1985 publiceerden vooral Klaas Lakeman, Jan van de Craats en Hessel Pot. Laatstgenoemde presenteerde benaderingen van π met behulp van louter tweeën. Omdat hij vreesde voor problemen met het zetwerk had hij de formules zelf getekend (zie Figuur 4).⁹

Lakeman had plezier in het werk, onder meer vanwege de reacties van lezers. In maart 1986 schreef hij aan de redactie: "Het begint er op te lijken dat het lezerspubliek ontwaakt, en zelf ook de pen ter hand neemt. Er komen redelijk veel reacties op diverse artikelen binnen. Ook nieuwe artikelen." Hiermee verwoordde hij het grote belang van interactie.¹⁰

In 1987 trok Pot zich terug uit de redactie; hij had eerder belangrijk werk gedaan en draaide vanaf 1985 weer volop mee; zijn vertrek werd betreurd, maar zijn beslissing

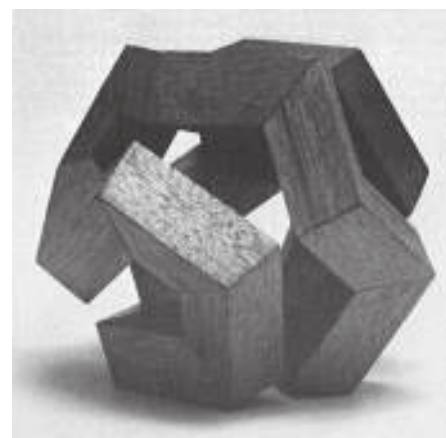


Foto: uit Pythagoras 26-5

Figuur 3 Slingerconstructie langs alle hoekpunten van een dodecaëder, door Popke Bakker.

Pi in 15 (!) tweeën

We komen nog even terug op het stukje 'Pi in $(2^7)^2$ tweeën' in het vorige nummer. Daar werd gevraagd om de benaderingsformules voor π (van Brent en Salamin) te schrijven met een minimaal aantal tweeën. De stand op dit moment is:

$$\pi_0 = 2 \quad (1 \text{ twee})$$

$$\pi_1 = \left(\frac{\sqrt{2} + 2}{2} \right)^2 \quad (4 \text{ tweeën})$$

$$\pi_2 = \left(\frac{\sqrt{2} + \sqrt{2}}{2} \right)^{2+2} / (\sqrt{2} - (\sqrt{2})^{-2}) \quad (8 \text{ tweeën})$$

$$\pi_3 = \frac{\left(\frac{\sqrt{2} + \sqrt{2}}{2} \right)^2 \cdot \sqrt{2\sqrt{2} - \sqrt{2}} + \sqrt{2}}{[(2 - \sqrt{2}) \cdot 2 - \sqrt{2}] \cdot \sqrt{2} + \sqrt{2}} \quad (15 \text{ tweeën})$$

De laatste vorm (voor π_3) betekent een geheel onverwachte verbetering van de 15-tweeën-vorm die we in het vorige nummer gaven.

Voor wie het narekent: benaderende uitkomsten zijn

(2) 2,9142136 3,1405792 3,1415926

Figuur 4 Pi in tweeën, in Pythagoras 25-5. De formules waren door de auteur getekend en als illustratie ingestuurd.

sing werd gerespecteerd. Hij bleef artikelen schrijven en ook op andere wijze actief. Nog in 1989 verzocht hij het Mathematisch Instituut van de Universiteit Utrecht om Pythagoras in de bibliotheek op te nemen.¹¹ Pot meldde zijn vertrek onder meer bij de NOCW, de instantie die hem acht jaar eerder had aangesteld. Van de NOCW kreeg hij nu een mooie bedankbrief, plus een cadeau (een stapel blauwe kubussen), bij hem thuis bezorgd door de penningmeester van de NOCW.¹²

Een opvolger voor Pot was er niet, waardoor de werkzaamheden van Van de Craats en Lakeman navenant in omvang toenamen. Er waren initiatieven geweest om nieuwe auteurs of redacteurs te vinden; onder meer was gecorrespondeerd met het bestuur van de Nederlandse Vereniging van Wiskundeleraars, dat een lijst met tien namen had opgesteld.¹³ Van deze lijst werd nadien niets meer vernomen.

De inhoud van Pythagoras werd in deze periode alom gewaardeerd, wat onder meer in een jaarverslag van de NOCW te lezen valt: "De inhoud van de jaargang 1985–1986 heeft veel waardering geoogst, zodat er goede hoop is dat het aantal abonnees blijft stijgen." Het Vlaamse blad *Wiskunde en Onderwijs* schreef over "het uitstekend wiskundetijdschrift voor jonge-

ren in Nederland".¹⁴ Overigens is niet duidelijk waaraan de NOCW ontleende dat het aantal abonnees (reeds) een stijgende lijn zou vertonen.

In de periode vanaf 1985 was de bijdrage van Hans de Rijk bescheiden. Wel trad hij op namens de Stichting Christiaan Huygens, waarvan hij voorzitter was, onder meer in overleg met IVIO.

Problemen

De situatie leek redelijk florissant. Maar er waren problemen. Ten eerste bleek dat de drukker het wiskundig zetwerk niet aankon; de moeilijkheidsgraad daarvan was kennelijk onderschat. Het gevolg was dat geregeld extra controlerondes van drukproeven nodig waren. Maar dit leidde tot vertragingen. Voorop elk nummer van Pythagoras werd steeds de maand van verschijnen vermeld. Zo is te zien dat het eerste nummer van jaargang 1986–1987 pas in no-

vember 1986 verscheen. De vertraging was bezwaarlijk jegens de abonnees, die het laatste nummer van een jaargang vóór de zomervakantie moesten ontvangen. De vertraging was ook bezwaarlijk voor de Pythagoras Olympiade, omdat inzendingstermijnen van oplossingen moesten worden verschoven. Tegenover de abonnees gaf de redactie te kennen de vertraging te willen wegwerken (zie het Redactioneel in Figuur 5). Maar dit lukte niet, en in 1987 stapte IVIO over naar een andere drukker.¹⁵

Ten tweede wilde het aantal abonnees niet substantieel groeien. Over de precieze aantallen abonnees is weinig informatie voorhanden; deze werden niet automatisch aan de redactie doorgegeven. Daarbij kwam dat het blad naar de huisadressen van de abonnees werd gezonden, zodat onduidelijk was hoeveel middelbare scholieren abonnee waren. Na herhaald aandringen van Pot verkreeg deze in het voorjaar van 1987 enige informatie: de jaargangen 25 en 26 telden 3693 respectievelijk 3494 abonnees.¹⁶ Ten opzichte van het laatste jaar bij Wolters-Noordhoff, toen er ruim 5000 abonnees waren, was nog een aanzienlijk aantal afgehaakt. Oorzaken hiervan waren onbekend; allicht had de verdubbelde abonnementsprijs meegespeeld.

De abonnementsgelden waren noodzakelijk voor een sluitende exploitatie. Maar daartoe was een groter aantal abonnees nodig. In het schooljaar 1985–1986 had IVIO voor Pythagoras en Archimedes f 250.000 uitgegeven, vooral voor promotie, opstart en technische kosten. Daartegenover stonden inkomsten op basis van 3300 abonnees van Pythagoras à f 19,50, ook 3300 abonnees van Archimedes à f 19,50, en 800 gezamenlijke abonnees à f 35,00, dus in totaal f 156.700. Er was een verlies van liefst f 93.300. De begroting voor het schooljaar 1986–1987 vermeldde een verlies van f 53.000.¹⁷ IVIO had met Pythagoras en Archimedes een groot financieel risico binnengehaald. Aan verlaging van de abonnementsprijs viel niet te denken.

Redactioneel

Met enige vertraging, weliswaar buiten onze schuld, is dit dan het eerste nummer van de zesentwintigste jaargang. We beloven er alles aan te doen om deze vertraging zo snel mogelijk weg te werken.

Figuur 5 Verklaring van de redactie in Pythagoras 26-1, verschenen in november 1986.

Redactioneel

Het heeft even geduurd, maar hier is dan het eerste nummer van de zevenentwintigste jaargang. Aan het tweede nummer leggen we de laatste hand. Het is dan ook binnen korte tijd te verwachten. En daarna hopen we dat met de overgang naar een andere drukker alle problemen de wereld uit zijn, zodat Pythagoras weer regelmatig verschijnt.

Figuur 6 Verklaring van de redactie in Pythagoras 27-1, verschenen in februari 1988.

De NOCW probeerde donateurs voor Pythagoras te werven. Waarschijnlijk in maart 1986 schreef de secretaris van de NOCW daartoe een oproep in de *Mededelingen* van het Wiskundig Genootschap. Na een inleidende tekst, waarin de kwaliteit van Pythagoras geprezen werd, stond in deze oproep: “Om de abonnementsprijs te kunnen verlagen roept de NOCW, gesteund door het bestuur van het WG, de leden van het WG op om donateur te worden van Pythagoras.”¹⁸ Van een respons hierop is niets bekend.

De problemen met het netwerk verdwenen niet na de komst van een andere drukker. Het eerste nummer van jaargang 27 verscheen pas in februari 1988, vijf maanden te laat. De redactie was in haar ‘Redactioneel’ over de oorzaak van de vertraging duidelijk naar de abonnees (zie Figuur 6).

De vertraging met de 27ste jaargang kon nog gedeeltelijk op het conto geschoven worden van de oude drukker, maar dat gold niet voor nieuwe vertragingen, die daarna optraden. Het was voor de redactie steeds meer frustrerend. Uiteindelijk besloot Lakeman zijn functie in 1990 neer te leggen, waarin hij werd gevolgd door Van de Craats. Lakeman lichtte Pot, met wie hij in contact was gebleven, hierover nadien in.¹⁹ Zo eindigde de redactieperiode van Lakeman en Van de Craats. Zij zijn in die jaren voor Pythagoras van onschatbare waarde geweest.

Drie heel moeilijke jaren, 1990–1993

Hoe nu verder? Er was één redacteur overgebleven, Hans de Rijk. Ook was de vroegere redacteur Henk Mulder nog actief. Konden zij Pythagoras redden? In eerste instantie leek dit inderdaad de gekozen weg. Hans de Rijk (als redactiesecretaris) en Henk Mulder gingen de nieuwe redactie vormen. Maar zij wilden of konden niet het werk van Lakeman en Van de Craats overnemen. Daarom dupliceerden zij oude ar-

tikelen. In het Redactioneel in Pythagoras 30-1 (verschenen december 1990) verklaarden zij: “We willen toch het interessantste uit vorige jaargangen aanbieden en doen dat door in de komende jaargang iets van het beste uit vroegere jaargangen tussen de andere bijdragen te plaatsen.” Zodoende verscheen Pythagoras vol met oude bijdragen. Nieuwe bijdragen waren gering in aantal.

In het colofon werden zes medewerkers genoemd, die voor nieuwe artikelen konden zorgen, maar dat kennelijk nauwelijks deden. Omdat elke bronvermelding ontbrak is moeilijk na te gaan welke bijdragen waar vandaan waren gehaald. Hoe dan ook, het blad verscheen. Het tweede nummer vermeldde Henk Huijsmans als derde redacteur. Huijsmans, zelf geen wiskundige, was al jaren actief voor Archimedes, en secretaris van de Stichting Christiaan Huygens. Hij had als bestuurder van de stichting gezien dat de redactie van Pythagoras ondersteuning nodig had, en nam zijn verantwoordelijkheid. Het doel van de stichting was immers beide bladen te doen voortbestaan.²⁰

Het derde nummer vermeldde een heel andere lijst medewerkers. Nu waren nieuwe mensen gevonden die bijdragen konden leveren. Een verrassing was dat Hans de Rijk zich uit de redactie had teruggetrokken en alleen voorkwam als medewerker. Henk Mulder was nu redactiesecretaris en Henk Huijsmans eindredacteur. Mulder

en Huijsmans kenden elkaar, onder meer via Archimedes. Bovendien werkten beiden in Breda, zodat overleg tussen hen gemakkelijk was. Huijsmans was rector van het Newman College, Mulder werkte, tot zijn pensioen, aan een andere school.

Vanaf het zesde nummer werden gelukkig de namen van de auteurs van artikelen vermeld, maar nog niet de bronnen van de herplaatste artikelen. De 31ste jaargang, 1991–1992, werd verzorgd door dezelfde mensen als de 30ste jaargang (zie Figuur 7).

Met ingang van de 32ste jaargang was er een opvallende verandering. Er was een nieuwe uitgever, MEMO te Utrecht. De positie van Pythagoras en Archimedes stond bij IVIO allang ter discussie, zoals bekend. De ontwikkelingen bij Pythagoras verhoogden de druk. IVIO wilde beide bladen van de hand doen. Dat bericht bereikte MEMO, dat deels op hetzelfde terrein als IVIO opereerde, en aldaar ontstond interesse.

MEMO was een naamloze vennootschap, bestuurd door de Utrechtse universiteit. MEMO was opgericht door Nederlandse en Belgische universiteiten om uitgaven voor deze instellingen te verzorgen. Een gezamenlijk bedrijf zou dit goedkoper maken. Men wilde ook uitgaven voor het voortgezet onderwijs verzorgen, zodat Pythagoras en Archimedes binnen MEMO pasten.²¹ Zo verscheen in september 1992 Pythagoras onder de vlag van MEMO, met vrijwel dezelfde redacteurs en medewerkers als voorheen. De redactie was versterkt met Hans Oomis; Duparc was geen medewerker meer. De verschijningsachterstand was weggevoerd — kopieerwerk was immers eenvoudiger dan zetwerk.

Binnen MEMO was Ton Fokker de verantwoordelijke man. Hij had de bladen binnengehaald. Omdat hij niet meteen de bestaande constellaties kon veranderen, verscheen Pythagoras nog een jaar op dezelfde manier, met vooral oude artikelen.

Begin 1993 bedankte Henk Mulder om gezondheidsredenen. Hij overleed in juli



Figuur 7 Redactie en medewerkers in Pythagoras 31-1 (september 1991).



Figuur 8 Illustratie bij het artikel over krommen die door Rijkswaterstaat werden toegepast bij de bouw van fly-overs, door Henk Mulder en Jan van de Craats, in Pythagoras 28-3.

1993. In de redactie werd hij opgevolgd door Frank Roos. Henk Mulder had in Pythagoras veel stukken geschreven. Ook na zijn overlijden verschenen nog verscheidene stukken van hem. Hij stond bekend om zijn originele invallen. Een voorbeeld hiervan was zijn vraag aan Rijkswaterstaat naar het wiskundig model bij de bouw van fly-overs. Daaraan bleken clotoïden ten grondslag te liggen. Met hulp van Jan van de Craats ontstond een mooi artikel, dat in 1989 verscheen (zie Figuur 8).

Terugkijkend op de jaren 1990–1993 kan men zeggen dat de situatie verre van ideaal was en niet veel langer kon voortduren. Maar wel is Pythagoras blijven bestaan zonder onherstelbaar reputatieverlies. Ten slotte kwam het blad bij een uitgever, MEMO, die erin wilde investeren. Dat Pythagoras in deze jaren bleef voortbestaan is te danken aan de inzet van verscheidene mensen — zij zijn hier genoemd.

Vanaf september 1993 veranderde Pythagoras in vele opzichten. Daarover gaat de volgende paragraaf.

Hans de Rijk zou nog tot 1996 genoemd blijven als medewerker. In deze jaren publiceerde hij zelden in Pythagoras. Sinds 1961 waren vele bijdragen van zijn hand gekomen. Ook was hij redactiesecretaris geweest. Behalve bij Pythagoras werkte hij bij Archimedes, publiceerde hij over onmogelijke figuren of werken van Escher, en nog veel meer.²²

De laatste redactie van leraren, 1993–1996

Pythagoras verscheen in 1993 in een nieuwe vormgeving op groter formaat. Er was door MEMO zichtbaar geïnvesteerd in verbetering van het blad. Ook was een nieuwe redactie geformeerd, bestaande uit Jan Mahieu, Frank Roos en Marcel Snel. De eindredactie bleef bij Henk Huijsmans. Er waren

bijdragen van redacteurs en anderen. Ge-regeld verschenen verslagen van Wiskunde Olympiades. Veel aandacht werd gegeven aan reacties van lezers; de interactie was terug, het blad leefde weer. Zo begon Pythagoras aan een nieuwe fase. De eerste twee nummers van de nieuwe serie verschenen in september en november 1993, geheel volgens plan.

Het leek veelbelovend. Maar toen voltrok zich een catastrofe. Uitgeverij MEMO ging failliet. Noch de verantwoordelijk leidinggevende Ton Fokker, noch de redactie had het bankroet zien aankomen.²³ Hoe nu verder? In een faillissement liggen alle bevoegdheden bij de curator, die de schuldeisers voorrang zal geven. De curator bleek bereid de rechten op Pythagoras en Archimedes uit de boedel over te hevelen naar een nieuwe uitgever, het NIAM te Den Haag, zoals Fokker in een brief aan de abonnees vertelde.²⁴ De curator zal geen financiële rekeningen uit beide bladen hebben verwacht, en wilde meewerken aan de redding ervan; dit in samenwerking met Ton Fokker, die zelf overgestapt was naar het NIAM. Zo konden de bladen op het nippertje blijven voortbestaan — niet ondanks, maar dankzij hun wankele financiële basis.

In zijn brief aan de abonnees schreef Fokker dat het NIAM een investering van f 40.000 moest doen. Diverse instellingen zouden bereid zijn een eenmalige bijdrage te leveren. Nu vroeg Fokker ook de lezers om een extra bijdrage. Wat dit opleverde is niet bekend. Feit is dat de zittende redacteurs en dezelfde zakelijk leider gewoon konden doorgaan met hun werk. Dat deden zij. Pythagoras bleef op hetzelfde, nog nieuwe formaat verschijnen, met dezelfde nieuwe vormgeving.

Wel was vertraging ontstaan. De nummers 3 en 4 van jaargang 33 verschenen in april 1994 als dubbelnummer. In het voorwoord hiervan werd aan de abonnees machtiging gevraagd om namens hen de aan MEMO betaalde abonnementsgelden terug te vorderen. Deze actie haalde niets uit.²⁵

Het NIAM (Nederlands Instituut voor Audiovisuele Media) produceerde diverse educatieve uitgaven en was de opvolger van de Nederlandse Onderwijs Film.

De redactie werkte voortvarend aan de inhoud van het blad. In nummer 5 van jaargang 33 stond een aankondiging van een Vierkant Zomerkamp; de redactie keek breder en stimuleerde ook andere mogelijkheden om met wiskunde bezig te zijn

buiten het schoolprogramma. In de volgende jaargang verscheen een verslag van het zomerkamp.

Pythagoras bevatte in deze tijd veel korte stukjes, vaak met een vraagstelling eraan vastgeknoopt. Geleidelijk slaagde de redactie erin ook langere stukken op te nemen, waarin wat dieper kon worden gegraven. Het niveau van de stukken was minder gevarieerd dan in de beginjaren; vooral het hogere niveau werd er weinig in aangetroffen. Daarom was de aandacht voor olympiades een gelukkige zaak. Er waren verscheidene gastauteurs. De interactie met de lezers werd zeer gestimuleerd. Pythagoras had weliswaar niet de hoedanigheden die het eerder had, maar het blad werd zichtbaar gewaardeerd bij (een deel van?) de lezers.

Veel werk werd gedaan door Jan Mahieu. Hij werkte schier onvermoeibaar aan verbetering van de inhoud. Gedurende jaargang 35 was hij zelfs de enige wiskundige als redacteur, naast Henk Huijsmans als eindredacteur. Iedereen die op de periode 1993–1996 terugkeek, roemde het werk van Mahieu.²⁶ Maar in 1996 zette hij er een punt achter. Hij kon het redactiewerk op deze manier, naast zijn leraarschap, niet voortzetten.

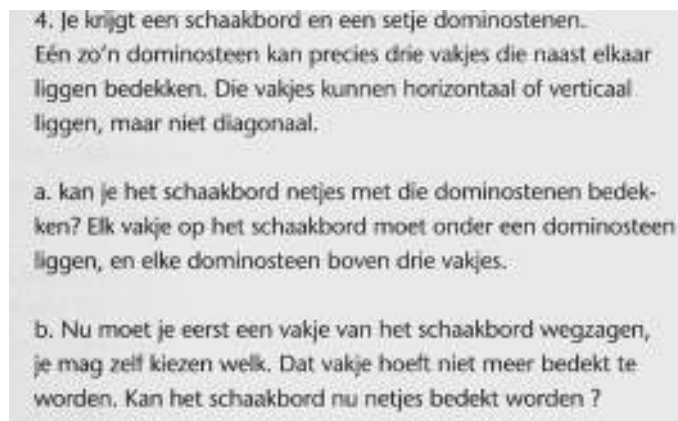
Jan Mahieu (1941–2000) was leraar te Zwolle. Hij was jarenlang mede-auteur van de methode *Getal en Ruimte* (uitgegeven door Educaboek). Bij de auteurs van *Getal en Ruimte* bestond veel sympathie voor Pythagoras. Van één van deze auteurs, Hans Steur, verscheen in 1980 het boek *Levende Wiskunde*; in het voorwoord hiervan zegde de auteur expliciet dank aan Pytha-



Figuur 9 Jan Mahieu.



Figuur 10 Fragment van een artikel uit Pythagoras 35-1. Hierop kwamen meerdere reacties: het kon immers ook anders. De driekolomsopmaak was problematisch voor formules.



Figuur 11 Opgave 4 uit de hernieuwde Pythagoras Olympiade, in Pythagoras 34-4 (scan uit nr. 35-1, bij de oplossing).

goras, waaruit hij verscheidene voorbeelden geput had. Jan Mahieu had meegewerkt aan *Levende Wiskunde*. Hij kwam in beeld als redacteur van Pythagoras doordat Ton Fokker, voornoemd, degene kende die bij Educaboek de uitgave van *Getal en Ruimte deed*.²⁷

Er is een e-mailbericht van Rob Tijdeman uit 1996 waarin deze vertelt over zijn telefonisch contact met Jan Mahieu.²⁸ Zodoende is bekend dat Mahieu bij zijn redactiewerk op meerdere moeilijkheden stuitte, zoals:

1. Het afbreken van formules door de opmaak in te smalle kolommen.
2. Herhaalde fouten in de tekst, vooral wanneer deze formules bevatte, hoewel de tekst op schijf werd aangeleverd. Fouten in figuren werden vermeden, omdat Mahieu deze zelf maakte.
3. Geregeld een vertraagde aanlevering van drukproeven. Het was zelfs voorgekomen dat Mahieu zijn vakantie moest uitstellen omdat een drukproef veel te laat kwam.

De omgang met wiskundige teksten was dus ook bij deze uitgever problematisch. Tijdeman tekende hierbij aan dat voor het redactiewerk slechts een geringe vergoeding werd verstrekt. Men kan Mahieu slechts bewonderen voor het werk dat hij voor Pythagoras deed.

In Pythagoras 34-3 (maart 1995) werd de Pythagoras Olympiade nieuw leven ingeblazen. De redactie was benaderd door "een oud-winnaar van de Wiskunde Olympiade", die het voorstel deed samen met andere oud-deelnemers een puzzelrubriek op te zetten.²⁹ De namen van de samenstellers werden niet onthuld. De lezers konden hun oplossing zenden naar een adres

binnen de TU Eindhoven. De puzzelrubriek kreeg meteen de vertrouwde naam Pythagoras Olympiade. Jan van de Craats vertelde desgevraagd zich niet te herinneren dat hem daarvoor toestemming was gevraagd, maar achteraf zegt hij zich er geheel mee te kunnen verenigen.³⁰

De nieuwe Pythagoras Olympiade werd voortgezet in de jaargang 1995–1996. Nu werden de namen van de opstellers van de opgaven genoemd: Sander van Rijnsouw en Wim Oudshoorn. Eerstgenoemde was de initiatiefnemer; hij was zelf ooit vanwege zijn inzendingen op de 'oude' Pythagoras Olympiade toegelaten tot de tweede ronde van de Nederlandse Wiskunde Olympiade en wilde deze mogelijkheid graag in ere herstellen.³¹

Men kan constateren dat in de loop van de jaren 1993–1996 Pythagoras allengs interessanter werd. Er kwamen meer stukken over nieuwe ontwikkelingen, of over traditionele onderwerpen die buiten het schoolprogramma vielen. Men denke aan nieuws over het bewijs van de stelling van Fermat (destijds hot news), of aan een stuk over perfecte getallen, of over de rechte van Euler in een driehoek. Inhoudelijk leek er een voorzichtig gunstige trend te zijn. Dit neemt niet weg dat in het seizoen 1995–1996 tweemaal een rectificatie moest worden geplaatst, omdat in het blad een onjuistheid was gesignaleerd. Dit zal te maken hebben gehad met de ernstige onderbezetting van de redactie. Goed is dat beide keren attente lezers op de onjuistheid wezen. In een vergadering van de NOCW bleek veel kritiek te bestaan op de inhoud; het blad zou aantrekkelijker moeten.³²

De onderbezetting van de redactie was niet vol te houden. In 1996 hielden Huijsmans en Mahieu ermee op.³³ Dit was

gelukkig tijdig voorzien. Zo toog de volgende jaargang een nieuwe redactie aan het werk, dankzij voorbereidend werk van Rob Tijdeman als voorzitter van de NOCW. Het voorwoord van het laatste nummer van jaargang 35 vermeldde: "Onder auspiciën van de Nederlandse Onderwijscommissie voor de Wiskunde is een brede schrijversgroep geformeerd en een nieuwe redactie samengesteld."

Overgang naar het Wiskundig Genootschap

Uit de periode 1993–1996 mag één bijdrage nog speciaal worden genoemd, namelijk de aankondiging van een college voor middelbare scholieren, te verzorgen door prof. Rob Tijdeman te Leiden.³⁴ De aankondiging had hij zelf geschreven. Tijdeman wilde de kloof met het vwo overbruggen, schreef hij.

In 1994 was Tijdeman voorzitter geworden van de NOCW. Hij overdacht mogelijkheden de positie van Pythagoras te versterken door een kwaliteitsimpuls, met waarborgen voor de continuïteit. Dit zou mede kunnen door redacteurs te zoeken binnen de universitaire gemeenschap.³⁵ Hij besprak dit met de NOCW-leden Henk Schuring (secretaris) en Thijs Notenboom (penningmeester). Zij zochten een jonge gesprekspartner uit de universitaire wereld, die met hen kon meedenken. Daartoe legden zij contact met Erjen Lefeber, oud-olympiadewinnaar en actief als leider van Vierkant Zomerkampen. Deze werd in februari 1996 gebeld door Schuring.³⁶

In mailberichten van maart 1996 gaf Tijdeman nadere overwegingen.³⁷ Hij wilde niet louter een groep redacteurs of schrijvers van artikelen; dan immers kon de één na de ander afhaken en kon (zoals eerder) een onderbezetting ontstaan. Verder wilde hij rubrieken invoeren, waarvoor een voor-



Figuur 12 Rob Tijdeman.



Figuur 13 Henk Huijsmans.



Figuur 14 Erjen Lefebber.

raad kopij kon worden opgebouwd. Ook dacht hij aan tijdelijke thema's, waarvoor gastschrijvers konden worden gevraagd. Ten slotte wilde Tijdeman goede afspraken met het NIAM om problemen, zoals door Mahieu geschetst, te voorkomen. Een stuurgroep, bestaande uit Tijdeman, Notenboom, Schuring en Lefebber, moest zich over een en ander buigen. Lefebber vertelt dat hij vooral met Tijdeman overlegde.³⁸

Op 28 maart 1996 overlegde Tijdeman met Huijsmans, die de Stichting Christiaan Huygens vertegenwoordigde, en Fokker van het NIAM. Hierin werd aan Fokker voorgesteld dat het NIAM voor Pythagoras een kundige bureauredacteur moest hebben.³⁹ De samenwerking met Huijsmans was uitstekend; deze wilde graag nieuwe bestuursleden van de stichting op voordracht van de NOCW. Tijdeman vond het contact met Fokker bemoedigend, hij zag dat het NIAM er iets van wilde maken, maar, schreef hij: "Gerust ben ik er niet op."⁴⁰

Vervolgens begon de werving van redactieleden en schrijvers van artikelen. Verscheidene mensen uit de universitaire wereld werden benaderd, door Tijdeman zelf, of namens hem door anderen. Aldus waren er meerdere mensen bij betrokken. Met name Chris Zaal en KP Hart reageerden positief naar Tijdeman, waarbij Zaal nog een eigen motivatie gaf. Daarbij stelde hij: "Pythagoras dient reclame te maken voor de wiskunde, niet voor universitair onderzoek."⁴¹

Voor leraren plaatste het NIAM een advertentie in *Euclides*.⁴² Hierin stond onder meer: "De laatste jaren is het blad echter wat verwijderd geraakt van de bovenbouw havo/vwo." Bij de opstellers van de tekst leefde duidelijk de wens het wiskundig niveau te verhogen. De leraren Haverkorn en

Sinia traden toe tot de redactie; zij zouden echter binnen afzienbare tijd om uiteenlopende redenen terugtreden.⁴³

In september 1996 verscheen Pythagoras met een nieuwe redactie (Lefebber, Zaal, Hart, Haverkorn, Sinia), en in een vernieuwde vormgeving. Hierover meer in de volgende paragraaf. Er daagde weer een gezonde toekomst.

In notulen van NOCW-vergaderingen staat dat het NIAM nogal eens laks was, zoals ten aanzien van persberichten, uitbetalingen en het bijhouden van adreslijsten.⁴⁴ De NOCW werkte met het NIAM aan een contract, dat echter nimmer zou worden getekend.⁴⁵ Huijsmans bleek, namens de Stichting Christiaan Huygens, bereid de rechten op de naam Pythagoras af te staan aan de NOCW — waarbij men zich kan afvragen of de stichting deze rechten ooit officieel verkregen had. Tegelijk mag men constateren dat de NOCW geen rechtspersoon

was. Merkwaardig is ook dat het NIAM in mei 1997 schreef over deze rechten, alsof die bij het NIAM berustten.⁴⁶ De stichting droeg desondanks deze rechten over aan de NOCW (zie Figuur 12).⁴⁷ Tijdeman liet een onderzoek uitvoeren door het Beneluxmerkenbureau naar het gebruik van de naam Pythagoras.⁴⁸ Er bleek geen probleem te zijn.

Ondanks de afspraken met het NIAM ervoer de redactie toch steeds problemen, vooral bij de behandeling van wiskundige teksten. Daarover werd met het NIAM overlegd, maar dit bracht geen oplossing. Op 22 augustus 1998 deelde Tijdeman aan Fokker mede, dat de redactie niet verder wilde samenwerken met het NIAM. Dit was definitief.⁴⁹ Tegelijk stuurde Tijdeman, formeel namens de NOCW, een schrijven naar Fokker, waarin hij voorstellen deed voor een afwikkeling, en wel conform het (niet getekende) contract. Het NIAM moest zo-



Figuur 12 Overdracht naamrecht aan de NOCW.

doende Pythagoras eerst aanbieden aan de NOCW.⁵⁰

Nu ging het snel. Tijdeman onderhield contact met de NOCW en met het bestuur van het WG — het WG zou immers partij zijn, omdat de NOCW slechts een commissie van het WG was. Tijdeman en Fokker waren toevallig beiden twee weken in het buitenland. Maar reeds op 9 september 1998 spraken Tijdeman en enkele NOCW-leden, plus Chris Zaal namens de redactie, met Fokker. Tijdeman deed van dit gesprek verslag aan de NOCW-leden en aan het WG-bestuur; hij vergat niet het belang van Pythagoras voorop te zetten: het wekken van interesse voor de wiskunde bij middelbare scholieren. Ook meldde hij dat het NIAM voor de overdracht van Pythagoras f50.000 vroeg, omdat het NIAM destijds een dergelijk bedrag betaald zou hebben. In het gesprek werd het bedrag verlaagd tot f30.000.⁵¹ Het WG-bestuur, onder leiding van (waarnemend) voorzitter Michiel Hazewinkel, was uiterst geïnteresseerd en wilde Pythagoras graag overnemen, maar Hazewinkel wilde niet verder gaan dan f10.000; en daar bleef het bij.⁵² Zo werd het WG de nieuwe eigenaar van Pythagoras.

De drukker werd Giethoorn Ten Brink in Meppel, die ruime ervaring had met wiskundig zetwerk. In een brief aan de abonnees vertelde Hazewinkel dat het WG nu de eigenaar was. Het abonnementsgeld bleef gelijk, f37,50. De redactie bleef op zijn post.⁵³

Een doorslaggevende rol bij de overgang naar het WG was zonder twijfel gespeeld door Rob Tijdeman. Hij had eerst

de nieuwe redactiestructuur op poten gezet, en aan het eind resoluut gehandeld om Pythagoras los te weken bij het NIAM. Steeds had hij de mening van de meest betrokkenen gevraagd. Alles gebeurde in goed overleg. Tijdeman dacht aan de inhoud en de continuïteit van het blad, en zorgde steeds voor voldoende draagvlak. Hij behoort ook tot de weinigen die, gedurende de gehele geschiedenis van Pythagoras, het belang van het blad expliciteerden. Uiteraard moet hier bovendien de zeer coöperatieve opstelling van het WG-bestuur en haar voorzitter Hazewinkel worden genoemd.

De overgang naar het WG betekende tevens het einde van de (min of meer) gezamenlijke geschiedenis van Pythagoras en Archimedes bij opeenvolgende uitgevers. Redactionele samenwerking was er nooit geweest. Wel waren sommige redacteurs verbonden aan beide bladen. Huijsmans had, als bestuurder van de Stichting Christiaan Huygens, beide redacties eens uitgenodigd bij hem thuis.⁵⁴ De interesses lagen evenwel te ver uiteen.

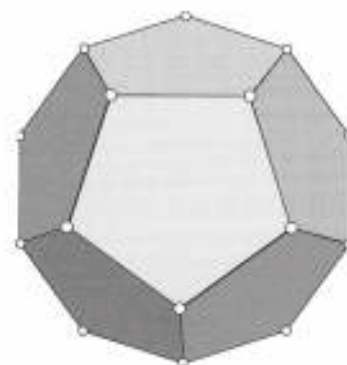
Bij Archimedes deden zich soortgelijke problemen voor als bij Pythagoras, waardoor de continuïteit eveneens dubieus werd. Archimedes hield op te bestaan in 2003.

Pythagoras inhoudelijk vanaf 1996

In 1996 trad een nieuwe redactie aan, waarin Zaal, Hart en Lefeber zitting hadden, samen met twee leraren, die echter, zoals gezegd, afhaakten. Het blad kreeg direct een degelijke inhoud, op een hoger niveau. Per jaar werden thema's gekozen, waaraan meerdere bijdragen werden ge-

Dodecaëder

Hier zie je een regelmatig twaalfvlak. Is het mogelijk om de getallen 1 tot en met 20 op de twintig hoekpunten te zetten volgens deze spelregel: de som van de getallen op de hoekpunten van elk zijvlak moet hetzelfde zijn?



Figuur 16 Opgave van Dion Gijswijt in Pythagoras 39-2 (december 1999).

wijd. In jaargang 36 (1996–1997) was dit: dynamische systemen en chaos, waarvoor de hoogleraren Takens en Broer (Groningen) waren gevraagd. De Pythagoras Olympiade bleef; het duo dat de opgaven opstelde was uitgebreid tot een trio, met Ronald van Luijk.

In de loop van jaargang 36 verscheen een nieuwe opgavenrubriek, verzorgd door Dion Gijswijt, die toen nog student was. Zijn fraaie opgaven (later 'dionigma's' genoemd) werden al gauw befaamd. Gijswijt bleef deze opgaven publiceren tot 2009; vijftig ervan werden opgenomen in het jubileumboek dat in 2011 uitkwam.⁵⁵

Al gauw had Chris Zaal de leiding in de redactie, wat trouwens nog niet bleek in het colofon. Aanvankelijk heette hij officieel eindredacteur, en pas vanaf april 1998 werd dat hoofd- en eindredacteur. Dat hij niettemin vrijwel direct hoofdredacteur was, blijkt uit notulen van een NOCW-vergadering, waarin hierover zorg werd uitgesproken: was dit bevorderlijk voor de continuïteit?⁵⁶ Maar in feite was de continuïteit voor een lange reeks van jaren gewaarborgd. Zaal bleef gedurende vijf jaar, en Hart is nog steeds redacteur. De termijn van vijf jaar voor de hoofdredacteur is tot op heden een zekerheid geworden.

De NOCW juichte de kwaliteitsverbetering toe. Maar de inhoud zou wat meer afgestemd mogen zijn op de middelbare scholier.⁵⁷ Dit zou uiteraard gevolgen kunnen hebben voor het aantal abonnees. Gesteld werd dat onder de abonnees veel



Figuur 17 K.P. Hart in 2018.



Figuur 18 Chris Zaal in 2018.

Foto: Jan Guichelaar

Foto: Jan Guichelaar

‘ouderen’ zouden zijn.⁵⁸ Tijdeman had in het voorjaar van 1996 geschreven dat er toen 2600 abonnees waren.⁵⁹ Maar mutaties waren niet steeds bijgehouden. Op verzoek van Zaal werd het abonneebestand opgeschoond, waarna er omstreeks 2000 overbleven.⁶⁰

De periode vanaf 1998 wordt hier niet verder beschreven. Deze periode verdient op een later tijdstip een eigen geschiedschrijving.

Slot

Pythagoras werd gered, Archimedes niet. Heeft dit te maken met de overzichtelijke omvang van de universitaire wiskunde-

wereld in Nederland? Velen kennen elkaar. De wereld van fysici, chemici, astronomen en anderen is veel diverser en omvangrijker.⁶¹ Een instantie als de NOCW, die voor Pythagoras cruciaal was, is daar niet.

Verder valt op dat wiskundigen vrij algemeen waarderen dat een wiskundetijdschrift voor jongeren in stand blijft. Ook onder wiskundeleraren leeft dit. Tijdeman wilde met Pythagoras belangstelling opwekken voor de wiskunde, Zaal verklaarde dat Pythagoras reclame dient te maken voor de wiskunde. Deze uitspraken liggen dicht bij elkaar. Denkelijk willen bovendien veel wiskundeleraren hun betere leerlingen graag extra stof aanbieden.

Zou het kunnen dat deze overwegingen door de jaren heen belangrijk zijn geweest voor het behoud van Pythagoras? ❦

Dankwoord

De auteurs zijn dank verschuldigd aan degenen met wie zij een gesprek hadden, zoals in de noten genoemd, ook aan degenen die bereid waren een eerdere versie van dit artikel door te nemen, te weten J. van de Craats, K.P. Hart, N.T. Lakeman, A.A.J. Lefebber, H.N. Pot, R. Tijdeman en C.G. Zaal, verder aan Hessel Pot voor het ter beschikking stellen van zijn gehele Pythagoras-archief, aan Erjen Lefebber voor het delen van stukken uit zijn digitale collectie, en aan de directeur van het PWN voor de ruimhartig verleende inzage in het NOCW-archief.

Noten

- Intussen: Instituut voor Individuele Ontwikkeling.
- Telefoongesprek Van Hoorn met A. Greiner, destijds directeur IVIO, 26-7-2017.
- Archief H.N. Pot, memo Piet van Abeelen, IVIO, 28-8-1985.
- Archief H.N. Pot, mailing naar scholen en leraren, met inschrijfformulieren, september 1985.
- Deze oproep is niet teruggevonden.
- E-mailbericht Hessel Pot aan de auteurs 27-11-2017.
- Archief H.N. Pot, contract Stichting Christiaan Huygens en IVIO, zoals vastgesteld in bestuursvergadering van deze stichting 2-9-1985.
- Gesprek auteurs met K. Lakeman 20-4-2018.
- E-mailbericht Pot aan Van Hoorn 13-6-2018.
- Archief H.N. Pot, brief Lakeman aan redactie 21-3-1986.
- Archief H.N. Pot, brief Pot aan Math. Inst. UU, 24-6-1989.
- Archief H.N. Pot, brieven Pot aan NOCW 8-4-1987, NOCW aan Pot 12-5-1987, Pot aan NOCW (met notitie op eigen kopie) 24-6-1987. De penningmeester van de NOCW was J.M. Notenboom.
- Archief H.N. Pot, brieven Pot met Lakeman aan bestuur NVvW 7-11-1986, secretaris NVvW aan Pot 20-12-1986.
- Archief NOCW, Jaarverslag over 1986. Archief H.N. Pot, gedeelte uit Wiskunde en Onderwijs 1986, nr. 48.
- Archief H.N. Pot, brieven Lakeman aan IVIO 23-5-1987, IVIO (Greiner) aan Lakeman 14-6-1987.
- Archief H.N. Pot, notitie 13-3-1987 naar aanleiding van telefoongesprek met IVIO.
- Archief H.N. Pot, kostenoverzicht door IVIO, oktober 1986.
- Archief NOCW, tekst van oproep door NOCW, circa maart 1986.
- Archief H.N. Pot, brief Lakeman aan Pot met cc aan Van de Craats, 31-10-1990.
- Gesprek auteurs met H.A.C. Huijsmans 28-9-2016. N.B.: zijn naam wordt ook gespeld als Huysmans, hetgeen blijkbaar incorrect is.
- Gesprek auteurs met T. Fokker 2-11-2016.
- Presentatie Chris Zaal op het symposium voor Hans de Rijk, 30-3-2007 te Leiden.
- Gesprek met Fokker 2-11-2016.
- Collectie M.C. van Hoorn, brief T. Fokker vanuit NIAM aan abonnees, maart 1994.
- Gesprek met Fokker 2-11-2016.
- Gesprekken auteurs met H.A.C. Huijsmans 28-9-2016, T. Fokker 2-11-2016, F.D. Roos 18-1-2017.
- Gesprek met Fokker 2-11-2016.
- Archief NOCW, e-mailbericht Tijdeman aan Notenboom en Schuring (leden NOCW) en Lefebber 8-3-1996.
- Voorwoord in Pythagoras 34-3 (maart 1995).
- E-mailbericht Van de Craats aan Van Hoorn 4-6-2018.
- E-mailbericht Van Rijnsouw aan Lefebber 7-6-2018.
- Archief NOCW, notulen 26-2-1996.
- Voorwoord in Pythagoras 35-5/6 (september 1996).
- Pythagoras 34-5/6, september 1995, 20-21.
- Archief NOCW, e-mailberichten Tijdeman aan Notenboom, Schuring en Lefebber 3-3-1996 en 5-3-1996.
- Deze alinea deels gebaseerd op e-mailbericht Lefebber aan Van Hoorn 4-6-2018.
- Archief NOCW, e-mailberichten Tijdeman aan Notenboom, Schuring en Lefebber 3-3-1996 en 5-3-1996.
- E-mailbericht Lefebber aan Van Hoorn 4-6-2018.
- Archief NOCW, e-mailbericht Tijdeman aan Huijsmans en Fokker 1-4-1996.
- Collectie A.A.J. Lefebber, e-mailbericht Tijdeman aan Notenboom en Lefebber 29-3-1996.
- Gesprek auteurs met Chris Zaal en KP Hart 16-5-2018. Collectie Lefebber, e-mailberichten aan Tijdeman van Chris Zaal 16-4-1996 en KP Hart 23-4-1996.
- Euclides 71-7 (april/mei 1996) 239.
- Gesprek auteurs met Zaal en Hart 16-5-2018; e-mailbericht Lefebber aan Van Hoorn 4-6-2018.
- Archief NOCW, notulen 28-1-1997.
- Archief NOCW, concept contract (ongedaateerd). Archief NOCW, brief Tijdeman als voorzitter NOCW aan Fokker (NIAM) 20-8-1998.
- Archief NOCW, brief Fokker (NIAM) aan Tijdeman 2-5-1997.
- Archief NOCW, Verklaring H.A.C. Huijsmans inzake overdracht naamrecht 22-9-1997.
- Archief NOCW, notulen 14-11-1997.
- Archief NOCW, brief Tijdeman aan Fokker 22-8-1998.
- Archief NOCW, brief Tijdeman als voorzitter NOCW aan Fokker (NIAM) 22-8-1998.
- Archief NOCW, e-mail Tijdeman aan NOCW en bestuur WG 10-9-1998.
- Gesprek auteurs met onder anderen Zaal 16-5-2018. Zaal was bij de slotonderhandeling aanwezig.
- Collectie M.C. van Hoorn, brief Hazewinkel aan abonnees 12 oktober 1998.
- Gesprek auteurs met Huijsmans 28-9-2016. De bijeenkomst bij Huijsmans was omstreeks 1993.
- Alex van den Brandhof, Jan Guichelaar, Arnout Jaspers, *De Pythagoras Code. Het beste uit een halve eeuw wiskunde voor liefhebbers* (2011), 217-228.
- Archief NOCW, notulen 17-10-1996.
- Archief NOCW, notulen 10-2-1998.
- Archief NOCW, notulen 28-1-1997.
- Collectie A.A.J. Lefebber, conceptbrief Tijdeman aan potentiële redacteurs, gevoegd bij e-mailbericht Tijdeman aan Notenboom en Lefebber 29-3-1996.
- Gesprek auteurs met onder anderen Zaal 16-5-2018.
- Uit gesprek auteurs met Zaal en Hart 16-5-2018.

Gert Heckman

IMAPP

Radboud Universiteit Nijmegen

g.heckman@math.ru.nl

In Memoriam Ton Levelt (1932–2018)

Wiskunde noopt tot bescheidenheid

Afgelopen zomer overleed Ton Levelt op 86-jarige leeftijd. Het overgrote deel van zijn arbeidzaam leven werkte hij als hoogleraar wiskunde aan de Radboud Universiteit in Nijmegen. Zijn oud-collega Gert Heckman vertelt over zijn leven en over zijn geliefde wiskunde.

Ton werd in 1932 geboren als derde op rij en oudste zoon in een groot katholiek gezin van tien kinderen. Het belang van een goede opleiding was een evidentie en het talent daarvoor was in het gezin Levelt ruim aanwezig. Zijn vader was zelf gepromoveerd chemicus en zijn moeder had natuurkunde gestudeerd.

Amsterdam en Utrecht

Na zijn studie wiskunde aan de Universiteit van Amsterdam werd Ton in 1957 aangesteld als wetenschappelijk medewerker bij de afdeling Zuivere Wiskunde van het Mathematisch Centrum. Hier moet zijn interesse voor speciale functies zijn aangewakkerd. Een publicatie over de Meijer G -functie alsmede ook zijn werk met Balthasar van der Pol stammen uit deze tijd. In 1959 verruilde hij het Mathematisch Centrum in Amsterdam voor het Mathematisch Instituut van de Universiteit van Utrecht. In 1961 promoveerde Ton aan zijn Alma Mater op een proefschrift getiteld *Hypergeometric Functions*. Zijn promotor was Dick de Bruijn.

Hypergeometrische functies

De hypergeometrische functies uit de titel van het proefschrift zijn reeksen van de vorm

$${}_nF_{n-1} \left(\begin{matrix} \alpha_1, \dots, \alpha_n \\ \beta_1, \dots, \beta_n \end{matrix} \middle| z \right) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(\alpha_1)_k \cdots (\alpha_n)_k}{(\beta_1)_k \cdots (\beta_n)_k} z^k$$

met $(\alpha)_k = \alpha(\alpha+1) \cdots (\alpha+k-1)$ het Pochhammer symbool. De complexe getallen $\alpha_1, \dots, \alpha_n, \beta_1, \dots, \beta_{n-1}, \beta_n = 1$ heten de parameters en z is de variabele van de hypergeometrische functie. Als functie van z is deze oplossing van de hypergeometrische differentiaalvergelijking van orde n op $\mathbb{C}$, met regulier singuliere punten in $0, 1$ en ∞ .

Voor $n=2$ betreft het de klassieke hypergeometrische functie, die reeds uitvoerig bestudeerd was door Euler, Gauss, Kummer en Riemann. Riemann zag het belang van de complexe-functietheorie hiervoor scherp in. Hij toonde aan dat analytische voortzetting in z aanleiding gaf tot een 2-dimensionale representatie van de fundamenteelgroep van het complexe vlak met de punten $z=0$ en $z=1$ weggelaten, de zogenaamde monodromierepresentatie, die voor de hypergeometrische functie berekenbaar is en in essentie ook de functie karakteriseert.

In zijn proefschrift generaliseerde Ton dit werk van Riemann voor de klassieke hypergeometrische functie met $n=2$ naar het geval van hogere hypergeometrische functies van algemene orde $n \geq 2$. Het belangrijkste inzicht is de formulering en

elegante oplossing van een onderliggend probleem in lineaire algebra, hetgeen in het eerste hoofdstuk gebeurt. De Bruijn zag aanvankelijk niet zo veel in de interesse van Ton voor die ouderwetse speciale functies, maar dat veranderde nu. “Kun je nu na dit inzicht niet eens wat helderheid scheppen in Bailey’s boek *Generalized Hypergeometric Series* uit 1935”, zo stelde De Bruijn voor. Dit boek is een wonderlijke verzameling hypergeometrische identiteiten in de stijl van Hardy en Ramanujan.

In het laatste en vierde hoofdstuk van zijn proefschrift gaf Ton zekere toepassingen. Bijvoorbeeld de Kummer-relaties over het verband tussen oplossingen rond $z=0$ en $z=\infty$ via analytische voortzetting langs de negatieve reële as werden helder gemaakt. Ook de kwadratische transformatie-formule van Whipple en Dixons evaluatie-formule te $z=1$, beide voor zekere ${}_3F_2$ functies, lukten vanuit dit nieuwe perspectief. Maar een groot deel van Bailey’s boek bleef een raadsel. Jaren later maakte Ton naar mij eens de vergelijking tussen Bailey’s boek en het laatste Bijbelboek *Openbaringen*. Beide niet echt te begrijpen.

Dat De Bruijn uiteindelijk wel zeer gecharmeerd was van dit proefschrift mag ook blijken uit het feit dat de promotie een cum laude kreeg. Na afloop van de promotie grapte de vader van Ton tegen de Bruijn dat wiskunde maar een merkwaardig vak was: een proefschrift schrijven van amper 42 bladzijden, en dan cum laude krijgen.

Maar in zijn speech tijdens het promotiediner verdedigde De Bruijn de cum laude met verve: “Het is juist van grote kwaliteit in de wiskunde, wanneer je in een beperkt aantal bladzijden wezenlijk nieuwe inzichten kan bloot leggen.”

Parijs

Na zijn promotie ging Ton als postdoc naar Parijs, en volgde hij daar colleges bij Alexander Grothendieck. Daar leerde hij ook Jaap Murre goed kennen, die enkele jaren ouder was. Na een postdoc-periode bij André Weil in Chicago was Jaap op advies van Weil naar Parijs gekomen om de moderne algebraïsche meetkunde van Grothendieck zelf te leren. Jaap was goed bij de les, vertelde Ton me, maar bij tijd en wijle was het zwaar voor het gehoor. Claude Chevalley was ook bij de voordrachten aanwezig. Op zeker moment toen Grothendieck weer helemaal los ging, verzuchtte Chevalley met zijn armen in de lucht: “Mais, cher Grothendieck, pourquoi on se sert de tout ça?”

Nijmegen

In 1964 werd Ton benoemd als hoogleraar wiskunde aan het enkele jaren daarvoor opgerichte Mathematisch Instituut van de Katholieke Universiteit te Nijmegen. Tot aan zijn emeritaat in 1997 heeft Ton zijn beste krachten aan onze universiteit gegeven, in het onderwijs en onderzoek van wiskunde en ook bestuurlijk als hoofd van de afdeling wiskunde. Zijn inspanningen voor dit laatste hebben hem veel tijd gekost, maar zijn hart lag vooreerst bij het onderwijs en onderzoek van zijn geliefde wiskunde.

De algebraïsche analyse heeft een grote vlucht genomen. Het fraaie bewijs door Joseph Bernstein van de meromorfe voortzetting van p^s via de b -functie en holonome D -modulen, en Delignes oplossing van het Riemann–Hilbert-probleem in meer variabelen, waren ontwikkelingen die Ton zeer kon appreciëren. Zijn eigen werk over hypergeometrische functies kreeg vervolg met de classificatie van algebraïsche hypergeometrische functies door Frits Beukers en mijzelf eind jaren tachtig. In het najaar van 1987 gaf ik hierover een voordracht op het Intercity Seminarium in Leiden. Na afloop kwam Ton Levelt naar me toe met nuttig inhoudelijk commentaar. Terzijde merkte hij op dat er in de toekomst een positie van UHD in Nijmegen vacant zou komen, mocht



Ton Levelt

ik belangstelling hebben. Ruim een jaar later werd ik collega van Ton in Nijmegen.

Computeralgebra

Met de opkomst van de computer raakte Ton ook geïnteresseerd in de computer-algebra. Het eredoctoraat van onze universiteit aan Bruno Buchberger voor het door hem ontwikkelde Gröbner-basis-algoritme in 1993 was natuurlijk op instigatie van Ton Levelt en er werd een passend feestje gevierd. Ton speelde ook met die computer-algebra, en was bijvoorbeeld heel enthousiast toen hij een 1-parameter-beweging van cycloheptaan hiermee had kunnen berekenen. Knutselwerk noemde hij dat in zijn afscheidsrede, en daar hield hij van.

Bescheidenheid

Ik heb Ton leren kennen als een sociaal betrokken mens en een warme persoonlijkheid. Na zijn emeritaat was hij zeer geregeld op ons instituut aanwezig, bij een voordracht, voor de bibliotheek of anderszins. In de loop der jaren werd dit echter

minder, en verplaatste ons contact zich naar bezoeken bij hem thuis, met koffie en een glaasje. Dierbare gesprekken waren het, over allerlei aspecten van het leven. Zijn laatste interesse naar het werk van Korteweg over oppervlakken van faseovergang is onaf gebleven. Het werd hem allengs moeilijker om nog wiskunde te doen.

“Wiskunde noopt tot bescheidenheid”, zei Ton me eens. Ik begreep dat toen zo dat hij wilde zeggen dat de diepere problemen in wiskunde enorm lastig zijn, en je dus met je neus op je beperkingen wordt gedrukt. Dit noopt je bescheiden te blijven. Maar anderzijds kunnen we ons ook verwonderen over de enorme kracht van wiskunde voor allerhande toepassingen. De beroemde fysicus Eugene Wigner heeft dit in zijn artikel over de onredelijke effectiviteit van wiskunde in de natuurwetenschappen helder verwoord. Nu ik deze zin van Ton opnieuw op me laat inwerken, denk ik dat die meer iets zegt over hoe Ton uiteindelijk in het leven stond, namelijk gewoon als een bescheiden mens. ☼

Alessandro Di Bucchianico

*Department of Mathematics and Computer Science
Eindhoven University of Technology
a.d.bucchianico@tue.nl*

Frank van der Meulen

*Department of Applied Mathematics
Delft University of Technology
f.h.vandermeulen@tudelft.nl*

Laura Iapichino

*Department of Mathematics and Computer Science
Eindhoven University of Technology
l.iapichino@tue.nl*

Ron Wehrens

*Biometris
Wageningen University & Research
ron.wehrens@wur.nl*

Nelly Litvak

*Department of Applied Mathematics
University of Twente, and
Department of Mathematics and Computer Science
Eindhoven University of Technology
n.litvak@utwente.nl*

Research

Mathematics for Big Data

This essay highlights several examples of using mathematics and statistics to analyse problems involving Big Data. More often than not, mathematics is essential for extracting usable information from the data. However, it usually remains hidden under the bonnet, and the general public seems to take it for granted. With this paper Alessandro Di Bucchianico, Laura Iapichino, Nelly Litvak, Frank van der Meulen and Ron Wehrens want to show some essential contributions of the fields of mathematics to Big Data using successful real-life examples.

‘Big Data’ has become a buzz word in the last decade, both in science and among the general public. Scientists from all areas encounter this in the shift of content and methods in their research as well as in current scientific funding programmes. For example, Big Data is one of the selected routes in the Dutch National Scientific Agenda (NWA) and the large funding programme Commit2Data has been launched in the Dutch Digital Delta in 2016.

As the Big Data Team of the 4TU Applied Mathematics Institute, we feel that mathematicians should actively engage in Big Data activities. It is the goal of this paper

to show the importance of mathematics in Big Data.

The role of mathematics is easy to overlook and not fully recognized because technological advances are much more visible than mathematical advances even though the latter often have more impact. Here is a small illustration. It is common knowledge that the speed-up of computers due to technological advances follows Moore’s Law: doubling of speed every eighteen months. However, it is much less known that the speed-up due to advances in mathematical methods in scientific computing and optimization is at least of the

same order of magnitude, and in some areas even much higher (see [6, 23]).

In this essay we present several explicit real-life examples of the mathematics behind Big Data, highlighting the role and importance of specific areas of mathematics in these contexts. We show a wide variety of examples: search engines, virtual prototyping in manufacturing, data assimilation, web data analytics, healthcare, recommendation systems, genomics and other omics sciences, and precision farming. In this way, we hope to stimulate mathematicians to work on topics related to Big Data, as well as to encourage industries and researchers in computer science and other fields to collaborate with mathematicians in this direction.

Similar and more detailed accounts have appeared at other places, see, e.g., [11, 19], National Research Council (2013) and the London Workshop Report on Statistics and Science (<http://bit.ly/londonreport>).

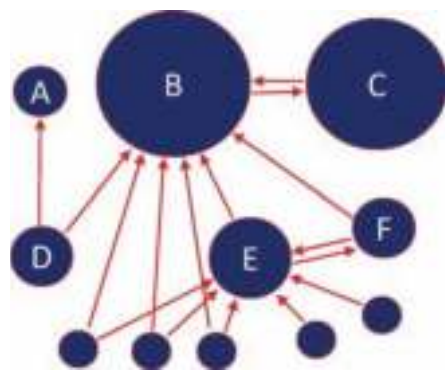


Figure 1 PageRank, example from Wikipedia.

Search engines

The quality of a search engine depends greatly on ranking algorithms that define in which order web pages will appear for the user. This is indeed crucial because most of us do not go beyond the first page of search results. Google's PageRank, at the very heart of the success of Google, was the first and most famous ranking algorithm.

The revolutionary idea of Google was that the importance of a web page depends on quantity, but also on quality of links that point to this page. This can be seen on a small example from Wikipedia in Figure 1.

The size of the nodes represents their PageRank score. Node B has a large PageRank because it has many incoming links. The PageRank of node C is high because it received the only outgoing link from the important node B. Mathematically, the World Wide Web is modelled as a graph with pages as nodes and hyperlinks as directed edges, and then a large set of equations is solved to find the PageRank values for each node in the graph.

Right after PageRank was introduced, its fast computation became a problem of great interest because the Google matrix is

huge, at the moment it would have hundreds of billions of rows and columns. In the beginning of this century, major speed gains were achieved due to sophisticated new methods from, mainly, linear algebra [5]. Another interesting mathematical and practical problem is the vulnerability of PageRank to deliberate manipulations, such as link farms created intentionally to boost the PageRank.

If we want to predict effectiveness of ranking, it is also important to understand its relation to the network structure. Can we predict the largest PageRank, investigate its stability, pick up a signal from hidden communities? Can we use ranking to detect important changes in the network structure? A lot of empirical results are available but they do not answer these questions in sufficient generality. To solve these and other problems we need to develop new approaches in probability theory and the theory of random graphs (see e.g. [9]).

Virtual prototyping in manufacturing

High development costs in industry have led many manufacturers to replace building and testing physical prototypes by virtual prototyping, i.e., testing using large-scale simulations of extensive mathematical models based on physical principles. Specific examples are the automotive industry and the aircraft industry (see, e.g., the Virtual Hybrid Testing Framework of Airbus). Such simulations should be handled with care since there is uncertainty in the outcomes due to both model limitations and the numerical accuracy of the simulations, often requiring solving large systems of differential equations. On the one hand there is uncertainty due to replacing physical reality by a mathematical model. This involves both the uncertainty caused by

the modeling simplifications (structural uncertainty) and the uncertainty in knowing model parameters (parameter uncertainty). On the other hand, given a complicated mathematical model, it is important to know how accurately numerical methods can approximate specified outputs from this model.

The term Uncertainty Quantification is often used as general term for scientific research in this area. There exist several mathematical approaches to study this uncertainty. One such approach is applying statistical techniques related to experimental design for computer experiments like Latin hypercube sampling and response surface methods. Another approach is to cast the mathematical model as a stochastic partial differential equation and try to solve that. Recent high-level mathematics combining analysis and stochastics is used such as perturbation expansion methods for random fields, stochastic operator expansions and polynomial chaos (Wiener chaos).

Model order reduction (MOR) techniques (see, e.g., [23]) have been recently introduced and exploited to overcome the issue of severe computational times required for solving mathematical models of real-life processes. Over the past four decades, reduced-order models have been developed aimed at replacing the original large-dimension numerical problem (typically called high-fidelity approximation) by a reduced problem of substantially smaller dimension. Depending on the context, there are different strategies to generate the reduced problem from the high-fidelity one, e.g., Krylov subspace based methods, moment matching techniques, proper orthogonal decomposition, balanced truncation, reduced basis methods. Very short CPU times and limited storage capacities demanded today by MOR methods allow to tackle a wide range of problems arising in engineering, computational science, and physical and biological sciences.

Data assimilation

Weather forecasting, for some people the main reason to watch the news, is a data-intensive computational problem with many economic implications (agriculture, hospitality business, airlines, healthcare, large public events). The change over time of measurable atmospheric quantities can be

Pagerank

'Easily bored' surfer. Consider a simple model of a surfer browsing web pages. With probability α , the surfer follows a randomly chosen outgoing link of a page, and with probability $1 - \alpha$ the surfer is bored and jumps to a random page. Initially, Google used $\alpha = 0.85$. PageRank of a page is the stationary (long-run) probability that the surfer visits this page.

Eigenvector. Equivalently, PageRank is the so-called dominant left eigenvector of the transition matrix of the above process: the entry (i, j) of this matrix is the probability that the surfer on page i will proceed to page j . Such an eigenvector is unique. The PageRank of a web page is the corresponding component of this unique dominant left eigenvector.

described in terms of dynamical systems, transferring information in time-ordered observed data to a physical model of the system. This process is often referred to as data-assimilation. Its development has been highly influenced by professionals working in the atmospheric and oceanographic sciences. When discretized in space, a typical model for numerical weather prediction is a differential equation system with dimension of order 10^9 [18]. The state variable of the dynamical system may represent unknown quantities such as for example velocity, temperature and pressure at a grid of locations.

The application of mathematical models to large dynamic data sets has naturally popped up in many other communities as well. Within signal processing recovering the unknown state of the dynamical system is known as filtering or smoothing, where the first term refers to online recovery (as opposed to static recovery). Probabilists and statisticians usually speak of state and parameter estimation. Over the past thirty years there has been tremendous progress for this kind of problems. Under specific assumptions on the dynamical system computationally efficient methods such as the (ensemble) Kalman filter can be used. In more general settings, a Bayesian formulation of the problem and application of Markov Chain Monte Carlo methods and Sequential Monte Carlo methods can be exploited (see, e.g., [21,22]). Whereas these methods are presently not yet applicable to weather forecasting, they have proved to be powerful in simplified problems of less demanding dimensions and constitute a very active area of research [8,17].

Web data analytics

Many companies collect large amounts of customer data through their web services. However, having these data does not mean that we already know everything. Even simple tasks like counting the number of distinct records in a large customer database (e.g., the number of distinct customers that use a certain service) requires advanced mathematics. The exact counting is computationally prohibitive mainly because we cannot keep all objects in the restricted working memory of a computer. However, we might not need that level of accuracy—in such cases it is often sufficient to work with approximate estimates.

HyperLogLog

Hash functions. Each digital object is converted to a sequence of zero's and one's using hash functions. On a set of different objects a good hash-function appears as if randomly generated: zero's and one's have probability $\frac{1}{2}$, independently of each other. **Count zero's.** The idea of LogLog-type algorithms is to sweep through objects keeping in the memory *only the largest number of zero's* at the beginning hash functions. For example, if we observed

00101, 10011, 01010,

we will remember 2, the largest number of zeros. Roughly, the probability to see 2 zero's followed by one at the beginning of the hash function is

$$\frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} = \frac{1}{8},$$

so we conclude that we saw approximately 8 objects!

HyperLogLog. In this form, the estimation is obviously *too rough*, so it cannot be directly used in practice. A lot of mathematics went into making the result more precise. This includes dividing hash functions into registers, using different corrections for small and large samples, harmonic averages. All these ideas are included in HyperLogLog, ensuring its applicability. Further improvements are possible, e.g., this was the goal of the paper [15].

Why LogLog? Assume we have N objects. Then hash functions have length $\log_2(N)$. Hence, the number of zero's is a number between 0 and $\log_2(N)$, so we need only $\log_2 \log_2(N)$ bits of memory to remember this number.

Probability theory has been essential in developing algorithms such as Count-Min Sketch, MinHash and HyperLogLog that use random hash functions to store answers. Such algorithms may be accurate within 2% while using only memory in the order of the (iterated) logarithm of the original sample size. An important issue in developing in these algorithms is to control the variance of the estimators, in order to get consistently accurate estimates.

HyperLogLog is one of the most elegant mathematical solutions for counting distinct objects in Big Data applications, widely used in practice. Researchers at Google [15] state that Google's data analysis system PowerDrill routinely performs about five million 'count distinct objects' computations per day. In about one hundred cases, the resulting number is greater than one billion. In 2014 HyperLogLog was implemented by Amazon's data structure store Redis as well. An interesting human interest note: the commands of HyperLogLog begin with PF - the initials of the French mathematician Philippe Flajolet who developed this algorithm (see, e.g., [12]).

Maybe even more exciting from a scientific point of view was the result in [3] where HyperLogLog was used to accomplish an incredible task of computing average distances in the complete Facebook graph of more than 700 million nodes. It

turned out that the distance (the number of hops along the edges of the Facebook graph) between two Facebook users is on average less than 4!

Healthcare

Medical devices like MRI scanners obtain large image data at relatively low velocity. Efforts are undertaken to reduce the time it takes to makes scans (typically thirty minutes) since hospitals could obtain higher efficiency of the expensive MRI equipment and patients would suffer less from the unpleasant high noise levels. Making scans at a lower resolution is not an option because of medical reasons. An MRI scan uses magnetic fields to order the spins of hydrogen atoms and radio waves to disturb these spins. When the spins return to their original position, energy is emitted. This energy is measured so that one gets an indication of the amount of tissue. Using magnetic gradients it is possible to localize these measurements.

The mathematical bottom line of this procedure is that MRI scans produce Fourier coefficients one by one. Traditional approaches to reconstruction algorithms cannot yield the desired reduction of scanning time because of the so-called Nyquist-Shannon criterion. Again, advanced mathematical techniques have provided the breakthrough. The basic idea is to project

the observed data onto a smaller subspace using sparsity in the data. Remarkably, random projections yield sampling strategies and reconstruction algorithms that outperform traditional signal processing techniques. These methods are known under the name compressed sensing. For other applications of compressed sensing in healthcare, we refer to <https://www.healthcare.siemens.nl/magnetic-resonance-imaging/clinical-specialties/compressed-sensing>.

Compressed sensing has been applied successfully in a wide range of other tasks as well, including network tomography, electron microscopy, and facial recognition.

Recommender systems

Webshops like Amazon analyze the buying behaviour of their customers and present visitors of the Amazon website with recommendations of books and other items that may be of interest. In a similar way Netflix gives suggestions for movies to its customers. A way to provide such recommendations is to set up a matrix of user ratings of movies (columns are ratings, rows are users). Of course, such a matrix has many empty entries since there are many more movies (Netflix has around 20,000) than people can see and rate.

The idea behind the recommender systems is that there are relatively few ‘latent’ features that drive our preferences (a sparsity principle). That is, there are a few typical items (books or movies) and a few typical users. Translated into matrices, this means looking for a nonnegative matrix factorization of the preference matrix. This means that a very large and sparse preference matrix is presented as a product of two matrices with much lower dimensions. Although computers become faster, this is mainly increase in CPU speed and much less in faster memory. Factorizations of large matrices, however, require a huge amount of communication between working memory and storage memory. There is thus a need for memory efficient factorization algorithms that go far beyond traditional factorization algorithms for singular value decompositions (see, e.g., [16]) for a technical account by the team that won the One Million Dollar Netflix competition). An exciting new approach in this field is the use of randomized methods like stochastic gradient algorithms (see [1]).

Genomics and other omics sciences

Now that technology has become available (and affordable!) to rapidly obtain information about the genetic composition of biological samples, huge quantities of data are generated routinely. This is not only true when looking at genetic information (hence the term genomics) but also when looking at proteins (proteomics) and metabolites (metabolomics), to name just two other members of the ‘omics’ family. The Big Data aspect here refers to the huge amount of information that we have on a relatively small number of subjects. A typical example is genetic information on humans, animals or plants that consists of millions of measurements (data points) for each subject. The resulting ‘high-dimensional’ data require the development of new statistical techniques to draw correct conclusions because traditional statistical methods for such data lead to an unacceptable high number of false positives (see, e.g., [7]).

Furthermore, advanced data processing methods are needed to convert the measured data into information — one example is the BLAST algorithm [2], incidentally also the most highly cited paper of the nineties) to align sequences of nucleotides or amino acids with database entries. In each case we are confronted with the issue mentioned before: we know an awful lot about very few samples, which makes statistical analysis extremely hard. Typical questions are finding genes, proteins or metabolites related

to certain traits or treatment effects. Network analysis is getting more and more attention (see, e.g., [20]) as a means to bring experimental results into the realm of the things we already know about the biology of the system — one of the main challenges is to combine the different omics data layers into coherent models that explain the behaviour of the system under study [14].

Precision farming

Agriculture is rapidly becoming a data-rich environment, tractors currently being connected to the Internet 24/7 and resembling computers on (large) wheels rather than the dusty and primitive muscle-machines they were in the 20th century. As a result, new questions can be addressed that were unthinkable only ten, twenty years ago: by combining several different information sources (satellite images, plant growth models, management data on plot level) the farmer can, e.g., try to devise optimal strategies to deliver the right amount of water and nutrients to his land and in this way obtain the highest possible yield (see, e.g., [4, 10] and many others).

Here, the problems are the typical big-data problems: even assuming one has access to all databases and knows how to read and use the data, it is not a trivial question how to combine data with very different characteristics, found in different locations and measured for different purposes. One thing is certain: mathematics and statistics play a pivotal role.



Figure 2 Smart agriculture.

Conclusion

Mathematics and statistics, being extremely generic tools, have played an important part in technological and scientific developments over the last centuries, and will continue to do so also in this Big Data era. Not only will they contribute to solving problems faster and more efficiently, they will expand our horizon, exposing questions that we never thought about and maybe

did not even expect to be solvable. It is important to realize that advances in this area have both a push and a pull component: without being confronted with real-life problems we might lack the incentive or the direction to pursue promising avenues, but without fundamental knowledge we simply lack the tools to tackle the problems successfully. This was expressed in a concise way by Bin Yu in her 2014

Institute of Mathematical Statistics presidential address:

“Work on real problems, relevant theory will follow.”

(see <http://bulletin.imstat.org/2014/10/ims-presidential-address-let-us-own-data-science>). Hence the stress on the applications in this paper: mathematics needs them, just like the applications need mathematics. ☞

References

- 1 C. C. Aggarwal, *Recommender Systems*, Springer, 2016
- 2 S. Altschul, W. Gish, W. Miller, E. Myers and D. Lipman, Basic local alignment search tool, *Journal of Molecular Biology* 215(3) (1990), 403–410.
- 3 L. Backstrom, P. Boldi, M. Rosa, J. Ugander and S. Vigna, Four degrees of separation, *Proceedings of the 4th Annual ACM Web Science Conference*, 2012, pp. 33–42.
- 4 J. Behmann, A. Mahlein, T. Rumpf, C. Römer and L. Plümer, A review of advanced machine learning methods for the detection of biotic stress in precision crop protection, *Precision Agriculture* 16 (2015), 239–260.
- 5 P. Berkhin, A Survey on PageRank Computing, *Internet Mathematics* 2(1) (2015), 73–120.
- 6 R. E. Bixby, A brief history of linear and mixed-integer programming computation, *Documenta Mathematica* (2012), 107–121.
- 7 P. Bühlmann and S. A. Van De Geer, *Statistics for High-dimensional Data: Methods, Theory and Applications*, Springer, 2013.
- 8 A. Cuzol and E. A. Memin, Stochastic filtering technique for fluid flow velocity fields tracking, *IEEE Transactions on Pattern Analysis and Machine Intelligence* 31(7) (2009), 1278–1293.
- 9 N. Chen, N. Litvak and M. Olvera Cravioto, Generalized PageRank on directed configuration networks, *Random Structures & Algorithms* 51(2) (2017), 237–274.
- 10 D. E. Clay, S. A. Clay and S. A. Bruggeman, eds., *Practical Mathematics for Precision Farming*, ASA, CSSA and SSSA, 2017.
- 11 J. Fan, F. Han and H. Liu, Challenges of Big Data Analysis, *National Science Review* 1(2) (2014), 293–314.
- 12 P. Flajolet, E. Fusy, G. Olivier and F. Meunier, Hyperloglog: The analysis of a near-optimal cardinality estimation algorithm, in *AofA'07: Proceedings of the 2007 International Conference on Analysis of Algorithms*, 2007.
- 13 *Frontiers in Massive Data Analysis*, National Academies Press, 2013.
- 14 R. D. Hawkins, G. C. Hon and B. Ren, Next-generation genomics: an integrative approach, *Nature Reviews Genetics* 11 (2010), 476–486.
- 15 S. Heule, M. Nunkesser and A. Hall, HyperLogLog in practice: Algorithmic engineering of a state of the art cardinality estimation algorithm, *Proceedings of the 16th International Conference on Extending Database Technology*, 2013, pp. 683–692.
- 16 Y. Koren, R. Bell and C. Volinsky, Matrix factorization techniques for recommender systems, *Computer* 8 (2009), 42–49.
- 17 K. J. H. Law and A. M. Stuart, Evaluating data assimilation algorithms, *Monthly Weather Review* 140 (2012), 3757–3782.
- 18 K. J. H. Law, A. M. Stuart and K. C. Zygalakis, *Data Assimilation. A Mathematical Introduction*, Springer Texts in Applied Mathematics, Vol. 62, Springer, 2015.
- 19 B. G. Lindsay, J. Kettenring and D. O. Siegmund, A Report on the Future of Statistics, *Statistical Science* 19(3) (2004), 387–413.
- 20 K. Mitra, A. R. Carvunis, S. K. Ramesh and T. Ideker, Integrative approaches for finding modular structure in biological networks, *Nat. Rev. Genet.* 14 (2013), 719–732.
- 21 C. P. Robert and G. Casella, *Monte Carlo Statistical Methods*, Springer Texts in Statistics, Springer, 2004, 2nd edition.
- 22 S. Särkkä, *Bayesian Filtering and Smoothing*, Cambridge University Press, 2013.
- 23 W. Schilders, Introduction to Model Order Reduction, in *Mathematics in Industry Model Order Reduction: Theory, Research Aspects and Applications*, Springer, 2008, pp. 3–32.

Geertje Hek

la Voie-du-Coin 7
1218 Grand-Saconnex, Zwitserland
verdediging@nieuwarchief.nl

10 jaar 'In de verdediging'

Onder de kop 'In de verdediging' heeft u de afgelopen tien jaar kunnen lezen over net-gepromoveerden en de weg die ieder van hen had afgelegd richting zijn of haar promotie. Al die jaren werd deze rubriek verzorgd door Geertje Hek. Na tien jaar en 48 interviews gaat zij het stokje overdragen en is het tijd voor een compilatie.

Het begon allemaal met Fai Lung Tsang, die in Groningen promoveerde bij Marius van der Put en co-promotor Heide Gluesing-Luerssen (University of Kentucky). Hij vertelde over de equivalentie die hij had bezeten tussen een probleem in niet-commutatieve algebra en een schaakprobleem voor n onderling niet-aanvallende torens op een schaakbord met genummerde velden. Ook deelde hij met de lezer dat hij nooit zijn eerste ontmoeting met prof. Van der Put zou vergeten, en hoe hij in de toekomst misschien een *Febo-automatiek* zou openen in zijn thuisstad Hong Kong — Nederland had een onvergetelijke indruk op hem achtergelaten.

In dat eerste nummer kwam een tweede 'zuiver' wiskundige aan het woord: Oliver Lorscheid, de eerste student die bij Gunther Cornelissen in Utrecht promoveerde in het kader van zijn Vidi-project *Non-Archimedean Geometry and Automorphic Forms*. Behalve over zijn onderzoek aan toroïdale automorfe vormen over functioneellichamen vertelde hij ook over de onverwacht grote cultuurverschillen tussen Duitsland en Nederland en over de twee weghelften waarop zijn onderzoek zich afspeelde: op de rechterhelft leerde hij de wiskunde te begrijpen en op de linkerhelft leerde hij omgaan met de wiskunde.

Diverse wiskunde

Deze eerste twee voorbeelden illustreren nog niet echt de veelheid aan promovendi en proefschriften die de revue zijn gepasseerd en die hopelijk een goede afspiegeling zijn van de diverse wiskunde die in Nederland wordt beoefend. Het besproken onderzoek omvatte onder andere Markov ketens, Shimura-variëteiten, matroïden, een dynamisch systeem dat gebruikt kan worden om getalsontwikkelingen te maken, representatietheorie van Liegroepen, knopentheorie, elliptische oppervlakken, en verbanden tussen graafparameters en de invariantentheorie van de orthogonale groep.

Behalve zuivere wiskunde kwamen er ook veel toepassingen aan bod. Een greep hieruit: onderzoek aan windmolenparken, aan aspecten van oceaancirculatie en aan getijdebekkens, simulaties van angiogenese — het proces waarbij nieuwe bloedvaten ontstaan uit bestaande bloedvaten, wiskundige analyse van hersengolven, volatilititeit van financiële producten, tomografie, algoritmen om robots samen te laten werken, modelleren van infectieziektes op dynamische netwerken, en gebruik van Riemann-Finsler-meetkunde voor medische beeldvorming.

Wetenschapsfilosofie, didactisch onderzoek en theoretische informatica kwamen

aan bod. Logica, met onderzoek naar toelaatbare regels voor intermediaire logica's, tussen klassieke en intuïtionistische logica's. Categorische logica om een kwantumlogica op te bouwen die beter aansluit bij onze logische intuïtie dan gangbare kwantummechanica. En ook historisch onderzoek, naar het leven en werk van de zeventiende eeuwse wiskundige Frans van Schooten.

Veel geleerd

Met mijn achtergrond in de differentiaalvergelijkingen en dynamische systemen was het gemakkelijk om promovendi uit die hoek te interviewen. Op de standaardopdracht "Vertel in 15 tot 20 zinnen aan een algemeen wiskundig publiek waar je proefschrift over gaat" kwam in zo'n geval een antwoord dat ik meteen begreep. Van kandidaten als Peter van Heijster (gepromoveerd bij Arjen Doelman, UvA) en Yves van Gennip (gepromoveerd bij Mark Peletier, TU/e) wist ik al bij voorbaat vrij goed waarover hun onderzoek ging. Maar wanneer het onderzoek bijvoorbeeld over categorietheorie ging, was mijn schamele 'een categorie is een verzameling objecten met pijlen ertussen' te beperkt om het eerste antwoord te begrijpen. Het blijkt dat iedereen een ander beeld heeft bij een 'algemeen wiskundig publiek'. Wat we algemeen bekend veronderstellen varieert nogal met het instituut waar we werken of de opleiding die we hebben genoten.

Zeker om het antwoord op de vervolgvraag "Wat is het belangrijkste resultaat in



je proefschrift?” te begrijpen moest ik dus vaak om nadere uitleg vragen. Vaak hielden ook de samenvatting of de introductie van het proefschrift, maar soms moest ik echt hard werken om een klein beetje te begrijpen van de wiskunde waarover het proefschrift ging. En dan alleen nog maar de basis. Ik denk ook dat sommige kandidaten mede dankzij het interview inzagen dat het niet eenvoudig is om hun werk aan een breder wiskundig publiek uit te leggen.

Dat harde werken was heel leerzaam. Zonder de interviews had ik veel minder wiskunde buiten mijn eigen vakgebied doorgewerkt en begrepen. Eind jaren negentig was Richard Gill directeur van het toenmalig Mathematisch Instituut in Utrecht. Toen het stafcolloquium steeds minder goed bezocht werd, vaak omdat we met zijn allen dachten ‘dat we het toch niet zouden begrijpen en dus wel iets beters te doen hadden’, riep hij op een gegeven moment iedereen op het matje door te zeggen dat zo’n algemeen colloquium een groot goed is, dat ervoor kan zorgen dat je kennis minder verkokert en dat je beter begrijpt wat collega’s bezighoudt. Met het herlezen van de reeks *In de verdediging* valt me op dat de interviews voor mij een beetje dezelfde rol hebben gespeeld die hij toedichtte aan het Utrechts stafcolloquium. De beste interviews waren zoals een goede algemeen-wiskundig-colloquiumvoordracht: ze gaven een helder beeld van het hoe en waarom van het onderzoek en maakten dat ik met plezier nog wat meer las of probeerde te puzzelen aan voorbeeldjes.

Subsidies

Niet alleen de vakgebieden en de onderwerpen illustreren wat er in de afgelopen tien jaar zoal gebeurde in wiskundig Nederland. De diverse onderzoekssubsidies geven een aanvullend beeld. Natuurlijk bepaalde NWO met de Vidi- en Vici-beurzen mede aan welke onderzoeksvragen promovendi konden gaan werken. Het onderzoek van Chris Heunen werd nog door twee Pionier-projecten gefinancierd: *Program Security and Correctness* van Bart Jacobs en *Quantization, Noncommutative Geometry and Symmetry* van Klaas Landsman (beiden RU Nijmegen).

Sommige promovendi boorden zelf andere, minder bekende, geldbronnen aan. Ka Yin Leung kreeg bijvoorbeeld een Mozaiek-subsidie van NWO voor haar onderzoek *Dangerous Connections: The Spread of Infectious Diseases on Dynamic Networks*

waarop ze onder begeleiding van Odo Diekmann en Mirjam Kretzschmar (RIVM) aan de Universiteit Utrecht promoveerde. Het programma Mozaiek had als doel meer afgestudeerden uit minderheidsgroepen in de wetenschap te laten instromen om wetenschappelijk talent te behouden.

Het onderzoeksvoorstel van Kees Hoogland werd in 2010 door het ministerie van OCW geselecteerd voor het programma Onderwijsbewijs II — een programma om ‘bewezen’ antwoorden op actuele onderwijsvragen te krijgen. Hij promoveerde bij Birgit Pepin (TU/e) en Arthur Bakker (UU) op zijn onderzoeksvraag “Wat is bij wiskundige contextopgaven het effect op de score van leerlingen wanneer we de representatie van de probleemsituatie veranderen van beschrijvend naar voornamelijk beeldend?” Christian Bokhove was een van de eerstegraads vwo-docenten die promotieonderzoek mochten doen naar vernieuwingen in de bètavakken, gefinancierd door het Dudoc-programma van het Platform Bèta Techniek. Hij promoveerde in Utrecht bij Jan van Maanen en Paul Drijvers op de rol die ICT kan spelen bij het verwerven, oefenen en toetsen van algebraïsche vaardigheden en inzicht.

Wetenschapscommunicatie

Meewerken aan een interview voor het *Nieuw Archief voor Wiskunde* is op zichzelf al een vorm van wetenschapscommunicatie, maar sommige promovendi staken nog veel meer energie in de uitleg van hun onderzoek aan een algemeen publiek, of haalden de pers dankzij een bijzondere toepassing van hun werk.

“Wiskundige maakt mayo lekkerder”, kopte *De Telegraaf* over het werk van Jok Tang (TU Delft). Die kop maakte mij nieuwsgieriger dan de titel van zijn proefschrift: *Two-Level Preconditioned Conjugate Gradient Methods with Applications to Bubbly Flow Problems*. Tang ontwikkelde onder begeleiding van Kees Vuijk snelle methoden om de ontmenging van een mayonaise-emulsie, of algemener, een stroming van oliedruppels in water te simuleren.

Roland van der Veen deed in het klein aan heel bijzondere wetenschapscommunicatie. Met zijn onderzoek bij Eric Opdam (UvA) en Stavros Garoufalidis (Georgia Tech) sloeg hij een brug tussen twee zeer verschillende manieren om knopen te bestuderen. Tijdens het lekenpraatje voorafgaand aan zijn verdediging brachten hij en zijn para-

nimfen op een choreografie van eigen hand de knopen uit zijn proefschrift tot leven.

Tammo Jan Dijkema mocht de relevantie van zijn onderzoek bij Rob Stevenson (UvA) en Henk van der Vorst (UU) uitleggen aan de hand van een poster en een mobiele telefoon in het Universiteitsmuseum in Utrecht. Deze waren onderdeel van de langlopende tentoonstelling *Boeiende bagage*. De telefoon, of specifiek de ingebouwde camera, was het voorwerp waarmee Tammo Jan zijn promotieonderzoek naar benadering met behulp van wavelets illustreerde.

Het idee om dijken van binnen te laten inspecteren door teams van robots met sensoren spreekt veel mensen aan. “Mits goed gebracht natuurlijk”, aldus Ewoud Vos, die hierop promoveerde in Groningen bij Jacqueline Scherpen en Arjan van der Schaft. Hij gaf zelf een presentatie in het kader van de Museum Jeugduniversiteit, voor een publiek van meer dan honderd enthousiaste kinderen met wie hij een ongekende interactie had.

De koningin van de wetenschapscommunicatie is natuurlijk Ionica Smeets, die ten tijde van haar promotie bij Rob Tijdeman en Cor Kraaikamp nog ‘wiskundemeisje’ was. Over haar eigen werk vertelde ze niet zo veel in haar columns en op TV: ze werkte in Leiden “aan kettingbreuken, benaderingen en algoritmen”. Maar toen het bijna misging — in wat de eindversie van haar proefschrift had moeten zijn, zag promotor Rob Tijdeman een fout — deelde ze deze ramp in de krant met half Nederland. Niet alleen dapper, het leverde haar ook nog eens steunbetuigingen op van ‘best wel bekende wiskundigen’ die vertelden zelf ook dat soort momenten te hebben gekend.

Het interview met Ionica was trouwens anders dan alle andere: iedereen kreeg per e-mail een tiental vragen, die dan na wat heen en weer mailen leidden tot het uiteindelijke stukje. Ionica vond zo’n mailwisseling te omslachtig en stuurde een file met een geluidsopname van haar gesproken antwoorden.

Vallen en opstaan

‘Rampen’ zoals beschreven door Ionica Smeets werden vaker genoemd. Said el Marzguioui werkte bij Jan Wiegerinck (UvA) aan pluri-fijne topologie — een topologie die voortkomt uit de pluripotentialtheorie. Hij had al gauw een overwinningsgevoel, omdat hij een twintig jaar oude vraag van

de Deen Fuglede had beantwoord. Echter, hij leerde ook al vrij snel dat onderzoek vaak gepaard gaat met vallen en opstaan: ongeveer twee maanden na het oplossen van Fugledes probleem ontdekte zijn promotor een ernstig gat in het bewijs. Een zware tegenslag; het leek erop dat het hele bewijs ging instorten. Bovendien hing zijn hele onderzoeksproject van dit probleem af. Na vele slapeloze nachten en dagenlang hard werken kwam het toch nog goed.

Roland van der Veen vertelde dat hij na maanden werk inzag dat zijn oplossing van het probleem waarmee hij worstelde gebaseerd was op een misvatting. Extra beëldend was het dat hij op dat moment over de Nescio-brug in Amsterdam fietste: "Het was alsof de brug instortte."

Sommige promovendi voelden zich in zo'n situatie machteloos, anderen konden er beter mee omgaan. En ook andere aspecten van het aio-schap werden niet altijd hetzelfde beleefd. Menigeen roemde de vrijheid — niemand die je oplegt wat je moet doen of je stoort bij je werk. Arno Kret, die in Parijs aan de Université Paris-Sud, Orsay promoveerde, formuleerde dit heel mooi: "Ik houd simpelweg van wiskunde, van nieuwe dingen leren en onderzoek doen. Ik vind het het leukste om in de bibliotheek te zitten met niks anders aan mijn hoofd en gewoon rustig wiskunde te doen."

Er waren ook kandidaten die het onderzoek vaak 'eenzaam ploeteren achter je bureau' noemden. Jaap Eldering, die eerst bij Hans Duistermaat werkte en na de schok van diens overlijden nieuwe begeleiders vond in Heinz Hanßmann en Erik van den Ban, was een van hen. Ook Mirjam ter Brake (gepromoveerd bij Henk Schuttelaars en Arnold Heemink, TU Delft), Jantien Dopper (gepromoveerd bij Jan Hogendijk, UU) en wederom Ionica Smeets. Is het toeval dat het voornamelijk vrouwelijke aio's waren die het onderzoek eenzaam vonden en het mede dankzij een periode van intensief samenwerken of andere sociale aspecten als onderwijs geven of conferenties bijwonen hebben volgehouden?

Ka Yin Leung blies samen met kamergenote Valentijn Karemaker nieuw leven in de Nederlandse tak van *European Women in Mathematics*. Zij gelooft dat diversiteit leidt tot verschillende wetenschappelijke perspectieven die waardevol kunnen zijn in het onderzoek en vindt dat de wiskundegemeenschap belang moet hechten aan diversiteit. Mensen die 'anders zijn dan

de standaard' moeten zich welkom voelen in de gemeenschap. Wellicht is het willen werken binnen een groep of hebben van een breder klankbord dan alleen de eigen begeleider een van de aspecten die sommige vrouwen 'anders dan de standaard-wiskundige' maken?

Schertsstellingen

Tot zo'n 110 à 150 jaar geleden promoveerde men nog op een aantal stellingen, zonder proefschrift, die dan mondeling verdedigd moesten worden. Aan bepaalde Nederlandse universiteiten is het nog steeds verplicht om dergelijke stellingen te publiceren bij een proefschrift. Aan andere niet, maar sommige promovendi vinden het toch een leuke uitdaging om stellingen te schrijven. Het is traditie naast de serieuze ook enkele *schertsstellingen* op te nemen, die men wel moet kunnen verdedigen als er een vraag over komt. Met dat verdedigen zat het bij de geïnterviewden wel goed. Vaak kwam er een heel betoog over de favoriete stelling.

Tammo Jan Dijkema gaf bijvoorbeeld zijn Nederlandse proefschrifttitel, *Adaptieve tensorproductwaveletmethoden voor het oplossen van partiële differentiaalvergelijkingen* als voorbeeld bij zijn stelling "De regels voor spatiegebruik in het Nederlands zorgen voor erg lange woorden. Toch zijn ze te prefereren boven hun Engelse equivalenten, omdat ze ambiguïteit kunnen wegnemen."

Daniël Pelt, die werkte aan het CWI en promoveerde in Leiden bij Joost Batenburg, had al een achtergrond als wetenschappelijk programmeur. Hij vond een van zijn stellingen heel belangrijk: "Practical problems usually occur when applying new algorithms on real-world data. Algorithm developers should perform additional research and work to solve these problems, rather than relying on others to solve the problems for them."

Het proefschrift *Curing the Queue*, dat Maartje Zonderland schreef onder begeleiding van Richard Boucherie en Nelly Litvak (UT) en Fred Boer van het LUMC, ging over de inzet van mathematische beslissonde voor het verbeteren van zorglogistiek. Zij had de toepasselijke stelling "Patiënt is de lijdende vorm van *patience*."

Mark Timmer promoveerde aan de UT in de theoretische informatica en studeerde tegelijkertijd af als wiskundedocent bij Nellie Verhoef. Via het project 'Promovendi

voor de klas' werd hij parttime wiskundedocent en kon hij dus gefundeerd poneren: "Het wiskundecurriculum op Nederlandse middelbare scholen is te veel gericht op procedures, en te weinig op bewijs en daadwerkelijk begrip."

Bas Heijne (gepromoveerd bij Jaap Top, Groningen) had ook een bijdrage aan het onderwijsdebat: "Het feit dat aanwezigheid bij een bepaald college verplicht wordt gesteld, is doorgaans veelzeggend over het nut van dit college."

"Onderzoek doen aan de Navier–Stokes-vergelijkingen is extra spannend zolang de existentie en uniciteit van hun oplossingen niet bewezen is", luidde de favoriete stelling van Benjamin Sanderse, die met Barry Koren (CWI, TU/e) werkte aan windmolenparksimulaties voor het Energieonderzoek Centrum Nederland (ECN) in Petten. Een groot deel van zijn onderzoek en zijn belangrijkste resultaten waren heel fundamenteel numeriek wiskundig van aard. "Misschien vinden we met nauwkeurigere numerieke simulaties wel hints die het wiskundige bewijs kunnen helpen."

Yves van Gennip schreef een erg lange stelling met ingebedde disclaimer: "Het 'verschil' tussen 'zuivere' en 'toegepaste' wiskunde is een beetje zoals het verschil tussen PSV en Ajax. Beide spelen hetzelfde spelletje; een spelletje dat veel minder interessant zou zijn als een van beide van het toneel zou verdwijnen. Desondanks is er een beeldbepalende groep mensen die tegen alle rationele overwegingen in blijft volhouden dat er fundamentele verschillen bestaan die het zelfs waard zijn om sociale verhoudingen voor te ontworpen. Ik wil overigens geenszins suggereren dat een van beide takken van wiskunde al jarenlang geen aansprekende resultaten meer geboekt zou hebben en alleen maar beoefend zou worden door mensen die de naam hebben arrogant te zijn."

De geïnterviewden vormden maar een fractie van de tientallen wiskundigen die er per jaar in Nederland promoveren, maar hopelijk wel een interessant en representatief deel. Zonder te suggereren dat de wiskunde in hokjes kan worden ingedeeld was het doel toch een podium te bieden aan promovendi van diverse pluimage. Vertegenwoordigers van alle universiteiten, met verschillende achtergronden, en van zoveel mogelijk richtingen binnen het gehele spectrum van 'echt zuiver' tot 'zuiver met hele mooie toepassingen'.

K. P. Hart

Faculteit EWI
TU Delft
k.p.hart@tudelft.nl

Boekbespreking Grzegorz Tomkowicz en Stan Wagon: *The Banach–Tarski Paradox*

De kwadratuur van de cirkel en de Banach-Tarskiparadox

De kwadratuur van de cirkel is een veelgebruikte metafoor voor iets dat onmogelijk is. Maar is dat terecht? De stelling van Banach–Tarski over decomposities van bollen is alom bekend als de Banach-Tarskiparadox. Het kwadratuurprobleem en de stelling nemen een belangrijke plaats in in het boek *The Banach–Tarski Paradox* van Tomkowicz en Wagon, dat hier besproken wordt door K. P. Hart.

Ik heb ooit een cartoon gehad waarop een passer tegen een muur of lantaarnpaal geleund staat te dromen; in het droomwolkje zien we een vierkant. Ik ben hem helaas kwijtgeraakt. Hij deed natuurlijk denken aan de bekende onmogelijkheid een vierkant met oppervlakte π te construeren met behulp van slechts een passer en een lijniaal.

In de eerste helft van de vorige eeuw bewezen Stefan Banach en Alfred Tarski [2] een stelling die bekend geworden is als de Banach-Tarskiparadox: het is mogelijk de massieve eenheidsbol in de driedimensionale ruimte in eindig veel verzamelingen te verdelen en deze eindig veel verzamelingen na wat transleren en roteren samen te voegen tot twee kopieën van diezelfde massieve eenheidsbol. U kunt hier zelf een cartoon bij bedenken; ik denk aan een plaatje waarop Banach en Tarski helpen bij

de wonderbaarlijke vermenigvuldiging van het brood en de vissen. In het hier te bespreken boek *The Banach–Tarski Paradox* van Tomkowicz en Wagon [9] staat het volgende ‘epigram’:

Delians: How can we be rid of the plague?

Delphic Oracle: Construct a cubic altar having double the size of the existing one.

Banach en Tarski: Can we use the Axiom of Choice?

Wat hebben de kwadratuur van de cirkel en de Banach-Tarskiparadox met elkaar te maken? Ze komen allebei voor in het voornoemde boek en hoe dat zo komt zullen we in de rest van dit artikel zien.

Het boek is de tweede editie van het boek met dezelfde naam van Wagon [10], en veel van wat hier besproken wordt is tussen die twee edities bewezen (en één resultaat is zelfs van na de tweede editie).

Euclides en Archimedes

We kunnen natuurlijk niet om de oorsprong van het cirkelprobleem heen.

Wie *De Elementen* van Euclides leest, vindt daarin, onder veel meer, constructies van:

1. een vierkant met dezelfde oppervlakte als een gegeven rechthoek;
2. een rechthoek met dezelfde oppervlakte als een gegeven parallellogram;
3. een parallellogram met dezelfde oppervlakte als een gegeven driehoek.

Hier zien we de oorsprong van het woord ‘kwadratuur’: we achten de oppervlakte van een figuur bepaald als we een vierkant hebben geconstrueerd/bepaald dat even groot is als de figuur. Aantonen dat twee figuren even groot zijn gebeurt bij Euclides en anderen door de ene in een (eindig) aantal stukken te verdelen en de stukken van deze legpuzzel zo aan elkaar te leggen dat de tweede figuur ontstaat.

De manier van verdelen is bij Euclides gebonden aan regels die voortvloeien uit zijn postulaten: door twee gegeven punten kunnen we een lijn trekken, en als twee

punten gegeven zijn dan kunnen we de cirkel tekenen door het ene punt en met het andere als middelpunt. Nieuwe punten verkrijgen we door deze lijnen en cirkels te snijden.

Wat in *De Elementen* ontbreekt is een constructie van, gegeven twee punten A en B , een vierkant met dezelfde oppervlakte als de cirkel om A die door B gaat.

Iemand die wel iets over die oppervlakte kon zeggen was Archimedes. Die bewees dat de oppervlakte van een cirkelschijf, met straal r , gelijk is aan die van een driehoek met hoogte gelijk aan de straal en basis gelijk aan de omtrek van die cirkel. Aangezien de omtrek van de cirkel gelijk is aan $2\pi r$ is de oppervlakte van de schijf dus gelijk aan $\frac{1}{2} \cdot 2\pi r \cdot r$ en dat is gelijk aan het welbekende πr^2 . Archimedes had deze notaties nog niet tot zijn beschikking; hij moest het bij de bovengegeven formule-ring houden.

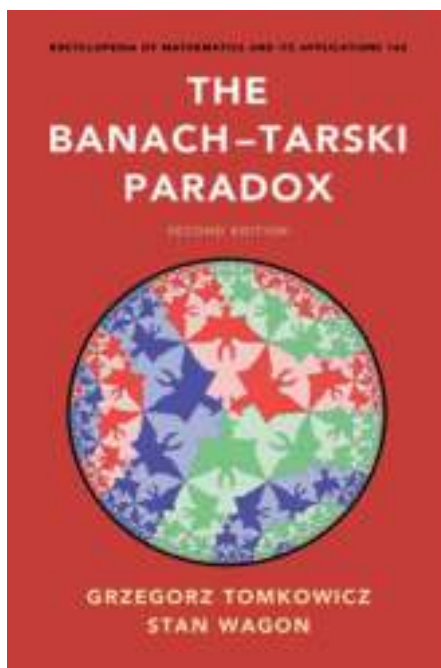
Archimedes liet ook zien dat, in moderne termen, π tussen de twee rationale getallen $3\frac{10}{71}$ en $3\frac{1}{7}$ ligt. De bewijzen zijn te vinden in 'Measurement of a Circle' in [1] (of online via de Wikipedia-pagina met dezelfde naam). Hierbij zij aangetekend dat het bewijs van het even groot zijn van de cirkelschijf en de driehoek niet euclidisch is maar gebruikmaakt van de uitputtingsmethode: de aanname dat de oppervlakten *niet* gelijk zijn leidt, via in- en omgeschreven regelmatig veelhoeken, tot een tegenspraak.

Onmogelijkheid

In de negentiende eeuw werd duidelijk waarom die kwadratuur van de cirkel niet in *De Elementen* gegeven was. Het is namelijk niet mogelijk om deze met inachtneming van alleen de regels van Euclides uit te voeren.

Het waarom van deze onmogelijkheid ligt in de algebra. Nadat we twee punten A en B in het vlak hebben getekend kunnen we een assenstelsel maken en wel zó dat onze punten de coördinaten $(0,0)$ en $(1,0)$ krijgen. De eerste propositie in *De Elementen* laat zien hoe een gelijkzijdige driehoek te construeren met AB als basis (of eigenlijk meteen twee). De snijpunten van de cirkels om A door B en om B door A geven ons dergelijke driehoeken. In termen van coördinaten hebben we nu $(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\sqrt{3})$ en $(\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}\sqrt{3})$ geconstrueerd.

Algebraïsch blijkt dat we werkend volgens de regels van Euclides — met passer



Grzegorz Tomkowicz en Stan Wagon, *The Banach-Tarski Paradox*, 2nd edition, Cambridge University Press, 2016, 360 p., hardcover, ISBN 9781107042599, prijs £ 74.99.

en latje — het volgende kunnen doen: optellen, aftrekken, vermenigvuldigen, delen en vierkantwortels trekken. *En dat is alles.* Op deze manier zijn veel getallen, zoals $\sqrt{2}$, $\sqrt{\sqrt{2}}$, $\sqrt{2+\sqrt{3+\sqrt{5}}}$,... te construeren, maar *lang niet alle getallen*. De precieze formulering, in termen van graden van lichaamsuitbreidingen, is te vinden in vrijwel elk boek over Galoistheorie. N.B.: we noemen een getal a construeerbaar als het punt met coördinaten $(a,0)$ dat is.

Nu komt de kwadratuur van de cirkel erop neer een vierkant te maken waarvan de oppervlakte gelijk is aan die van de cirkel om A door B . In onze termen: construeer een vierkant met oppervlakte π , of, met Archimedes, een driehoek met hoogte 1 en basis 2π . Zodra dat laatste gedaan is kunnen we de aan het begin beschreven stappen uitvoeren om het vierkant te maken.

Uiteindelijk komt dit dan weer neer op het construeren van π of $\sqrt{\pi}$. In 1882 liet Lindemann zien dat er geen enkele manier is om uitgaande van het getal 1 en met gebruik van optellen, aftrekken, vermenigvuldigen, delen, en vierkantwortels het getal π te maken.

Maat

In het begin van de twintigste eeuw rees de behoefte om aan steeds meer deelverzamelingen van de getallenlijn, het vlak,

en de ruimte respectievelijk een 'lengte', 'oppervlakte' of 'volume' toe te kennen.

In [5] zette Lebesgue de eerste stappen:

"Nous nous proposons d'attacher a chaque ensemble borné un nombre positif ou nul que nous appellerons sa mesure et satisfaisant aux conditions suivantes:

- 1 Il existe des ensembles dont la mesure n'est pas nulle.
- 2 Deux ensembles égaux ont même mesure.
- 3 La mesure de la somme d'un nombre fini ou d'une infinité dénombrable d'ensembles, sans points communs, deux à deux, est la somme des mesures de ces ensembles."

Met het woord 'maat' bewaren we enige afstand tot de concrete meetkunde maar voor de reële rechte, het platte vlak, en de ruimte leiden de eisen van Lebesgue voor bekende meetkundige figuren tot respectievelijk hun lengte, oppervlakte en inhoud, op vermenigvuldiging met een constante na. Uit eisen 2 en 3 laat zich namelijk snel bewijzen dat voor elke n de maat van het interval $[0, \frac{1}{n}]$ gelijk is aan de maat van $[0,1]$ gedeeld door n . Door de volle kracht van eis 3 te gebruiken volgt dat voor elk positief reëel getal a de maat van $[0,a]$ gelijk is aan a maal de maat van $[0,1]$. Hieruit volgt dat er een vaste constante α is zó dat voor elk interval de maat gelijk is aan α maal zijn lengte; en α is gewoon gelijk aan de maat van $[0,1]$. Eis 1 impliceert dat $\alpha \neq 0$. Dezelfde redenering gaat op voor het vlak en de ruimte. We kiezen er natuurlijk voor om de maat van het eenheidsinterval, het eenheidsvierkant, en de eenheidskubus op 1 te normaliseren.

Zoals gezegd, voor bekende meetkundige figuren heeft de maat de 'juiste' waarde; voor algemenere verzamelingen is het echter oppassen geblazen.

De Banach-Tarskiparadox

Een extreem voorbeeld werd gegeven door de Polen Banach en Tarski. Voortbouwend op werk van Hausdorff lieten deze zien dat men een massieve bol met straal 1 in eindig veel deelverzamelingen kan verdelen, en dat men daarna die eindig veel stukken in elkaar kan schuiven tot twee massieve bollen van straal 1. Wie met het artikel van Banach en Tarski in de hand nu een wonderbaarlijke vermenigvuldiging van één sinaasappel tot twee sinaasappels

wil uitvoeren komt bedrogen uit. De bollen zijn ideale wiskundige bollen, geen fysieke sinaasappels. En, en daar was het Banach en Tarski om te doen, de stukken waarin ze de bol verdeelden zijn zo lelijk dat er op geen enkele manier een maat aan toe te kennen is. Immers, als dat wel mogelijk was dan zou $1 + 1 = 1$ bewezen zijn.

Hoe de constructies van Hausdorff en van Banach en Tarski in hun werk gaan wordt in het onderhavige boek *The Banach-Tarski Paradox* van Tomkowicz en Wagon uitgebreid beschreven. Banach en Tarski bewezen meer, hun algemene stelling luidt:

Stelling. *Als A en B begrensde deelverzamelingen van $\mathbb{R}^3$ zijn, met niet-leeg inwendige, dan kan men A en B schrijven als respectievelijk $\bigcup_{i=1}^n A_i$ en $\bigcup_{i=1}^n B_i$, waarbij de families paarsgewijs disjunct zijn en waarbij voor elke i de verzamelingen A_i en B_i congruent zijn.*

We noemen A en B congruent als er een isometrie ρ van de ruimte is met $\rho[A] = B$.

The Banach-Tarski Paradox

Het boek vertelt het verhaal van deze stelling op de eerste 36 bladzijden, maar is dan nog lang niet klaar. Er zijn namelijk nog veel meer situaties waar 'paradoxale decomposities' mogelijk zijn.

Tomkowicz en Wagon bekijken de algemene situatie van een groep G die werkt op een verzameling X . We noemen twee deelverzamelingen A en B van X (G -)equidecomposabel als $A = \bigcup_{i=1}^n A_i$ en $B = \bigcup_{i=1}^n B_i$, met beide families paarsgewijs disjunct, en zó dat A_i en B_i telkens (G -)congruent zijn: er is een $g_i \in G$ met $B_i = g_i A_i$. Een deelverzameling E van X noemen we (G -)paradoxaal als deze te schrijven is als de vereniging van twee disjuncte verzamelingen, A en B , beide (G -)equidecomposabel met E zelf.

Het bovengenoemde resultaat van Hausdorff kunnen we formuleren als: "De eenheidssfeer S^2 in de ruimte is paradoxaal ten opzichte van de groep van alle rotaties." Het eerste resultaat van Banach en Tarski zegt dat de eenheidsbol in $\mathbb{R}^3$ paradoxaal is ten opzichte van de isometriegroep van $\mathbb{R}^3$.

Bestudering van de bewijzen leert dat alles is terug te voeren tot paradoxale decomposities van het vrije product $\mathbb{Z}_2 * \mathbb{Z}_3$ van $\mathbb{Z}_2$ en $\mathbb{Z}_3$ en/of de vrije groep van rang 2 die in dit product bevat is. Dat vrije

product is een ondergroep van de rotatiegroep van $\mathbb{R}^3$, voortgebracht door twee rotaties: één van orde 2 en één van orde 3; die groep werkt dus op S^2 en door middel van een keuzefunctie voor de verzameling banen onder de werking wordt de decompositie van de groep vertaald naar een decompositie van S^2 .

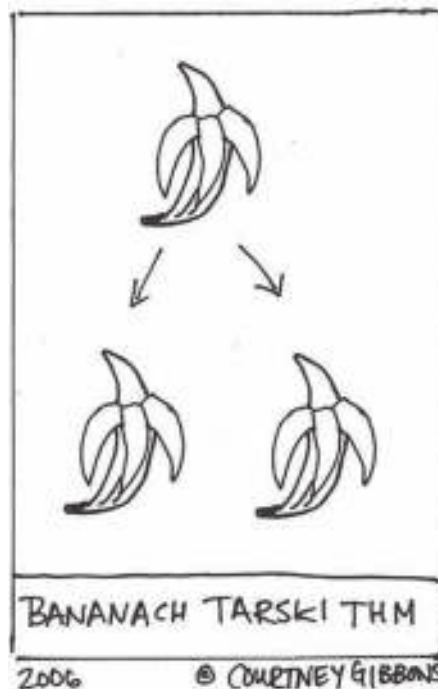
Het boek valt grofweg uiteen in drie delen:

het begin: hierin gaan de schrijvers op zoek naar vele paradoxale decomposities, met als voornaamste wapen de vrije groep op twee generatoren;

het midden: hierin vinden we situaties waarin paradoxale decomposities juist niet mogelijk zijn;

het eind: dit wat kortere stuk bekijkt de rol van het Keuzeaxioma in dit alles.

Wat het laatste betreft: hierboven is het woord 'keuzefunctie' al gevallen en zonder een zekere hoeveelheid keuze krijgen we geen Banach-Tarskiparadox. Er is namelijk een model van de verzamelingenleer (zonder Keuzeaxioma) waarin alle deelverzamelingen van $\mathbb{R}^n$ Lebesgue-meetbaar zijn. En omdat $1 + 1 \neq 1$ absoluut is, zijn in dat model de resultaten van Hausdorff en van Banach en Tarski niet geldig. Aan de andere kant, de volle kracht van het Keuzeaxioma is niet nodig; de titel van [7] zegt het al: de Banach-Tarskiparadox volgt uit de stelling van Hahn-Banach.



Het eerste deel bevat nog een positieve oplossing, uit 2005 [11], van een probleem opgeworpen door onze landgenoot J. H. de Groot: "Kun je de Banach-Tarski constructie (voor de bol) zo uitvoeren dat de stukken door middel van continue functies verplaatst kunnen worden, en wel zó dat men op tijdstip 0 één bol heeft en op tijdstip 1 twee bollen en waarbij de stukken de hele tijd disjunct blijven?" Ook noemenswaardig is een hoofdstuk over het hyperbolische vlak; dat laat ook paradoxale decomposities toe en een en ander wordt kleurrijk geïllustreerd met Escher-achtige plaatjes.

Het middelste stuk brengt ons, onder meer, weer terug naar de kwadratuur van de cirkel. In het vlak is geen Banach-Tarski constructie met isometrieën mogelijk, er is namelijk een eindig additieve uitbreiding van de Lebesgue-maat die congruente verzamelingen gelijke maat toekent.

Dit bracht Tarski ertoe om in [8] de volgende vraag te stellen: zijn een cirkelschijf en een vierkant, van gelijke oppervlakte, equidecomposabel ten opzichte van de isometriegroep van het vlak? Hier werden verder geen eisen aan de aard van de stukken gesteld.

De kwadratuur van de cirkel

Een eerste antwoord kwam in [3]: met een schaar lukt het niet. Dat wil zeggen, als men het vierkant met behulp van enkelvoudige krommen in eindig veel stukken knipt, en dat mogen heel ingewikkelde krommen zijn, niet eens rectificeerbaar, dan is de resulterende legpuzzel niet uit te leggen tot een cirkelschijf.

Het bewijs voor rectificeerbare krommen is te aardig om hier niet te schetsen. Neem een puzzelstukje P en definieer een functie f_P op zijn rand als volgt. Als x op de rand ligt en er een $\varepsilon > 0$ is zó dat de rand binnen de schijf $N(x, \varepsilon)$ om x met straal ε een stuk van een cirkelboog is, definieer dan $f_P(x) = 1$ als $N(x, \varepsilon) \cap P$ convex is en $f_P(x) = -1$ als dat niet zo is. In alle andere gevallen zetten we $f_P(x) = 0$ — dit gebeurt zeker als x op de buitenrand van het vierkant ligt.

Integreer nu, voor elk stukje P , de functie f_P over de rand van P , ten opzichte van de booglengthe. Als we de resultaten optellen dan vallen alle stukjes integraal in het inwendige tegen elkaar weg; we houden dan de integraal langs de buitenrand van het vierkant over, en die is gelijk aan 0

omdat de functies op die rand alleen de waarden 0 aannemen.

Als we de puzzel zouden uitleggen in een cirkelschijf dan zou de som van de integralen ook gelijk zijn aan de integraal langs de buitenrand, maar die integraal is gelijk aan de lengte van de cirkel. De functies nemen immers op de hele rand de waarde 1 aan, behoudens in een eindig aantal punten.

In 1990 gaf Laczkovich in [4] een positief antwoord op Tarski's vraag: met behulp van alleen translaties zijn een schijf en een vierkant met dezelfde oppervlakte equidecomposabel. Het boek geeft een volledig bewijs van een algemene stelling van Laczkovich: als A en B gelijke oppervlakte hebben en als hun randen niet al te dik zijn (de Minkowski-dimensie is klein) dan zijn A en B equidecomposabel ten opzichte van de groep $\mathbb{R}^2$ zelf (werkend als translatiegroep).

In het voorwoord van het boek werd nog als een van de "outstanding problems left open" aangemerkt of de stelling van Laczkovich zonder gebruik van het Keuze-

axioma bewezen kon worden. Niet lang na het verschijnen van het boek lieten Andrew Marks and Spencer Unger in [6] zien dat dat inderdaad kan: men kan stukken gebruiken die Borel zijn en, zeker in het geval van schijf en vierkant, van zeer lage complexiteit. Het bewijs is een mooie combinatie van beschrijvende verzamelingenleer, grafentheorie, en optimaliseringstechnieken.

Het verloopt grof geschetst als volgt. We nemen aan dat de schijf en het vierkant binnen het eenheidsvierkant V liggen. Een stelling van Laczkovich garandeert dat we vijf vectoren u_1, u_2, u_3, u_4 , en u_5 in V kunnen kiezen waarvan de gehele lineaire combinaties genomen modulo 1 de maten van de schijf en het vierkant zeer goed benaderen in de volgende zin. Neem $A \subseteq V$ en bekijk voor elke $N \in \mathbb{N}$ alle vijftallen $(z_1, z_2, z_3, z_4, z_5)$ in $\mathbb{Z}^5$ met $|z_i| \leq N$ voor alle i . We noteren met $d_N(A)$ het quotiënt van het aantal vijftallen waarvoor $\sum_{i=1}^5 z_i u_i \in A$ en $(2N+1)^5$. De rij getallen $d_N(A)$ convergeert vrij snel naar de Lebesgue-maat van A , als de rand van A een kleine Minkowski-

dimensie heeft. Het is zelfs zo dat voor elke $x \in V$ de opgeschoven lineaire combinaties, $x + \sum_{i=1}^5 z_i u_i$, ook deze eigenschap hebben en zelfs uniform in x .

Na de keuze van een geschikte N zijn er dan vanuit elke x in de schijf veel lineaire combinaties die in het vierkant zitten, en omgekeerd. Dit leidt tot een tweedelingsgraaf met de schijf links en het vierkant rechts en een tak van x naar y als $y = x + \sum_{i=1}^5 z_i u_i$ (met $|z_i| \leq N$). Een versie van de huwelijksstelling leidt tot een volledige matching tussen schijf en vierkant. Elke lineaire combinatie bepaalt een klasse echtparen en deelverzamelingen van de schijf en het vierkant die door die combinatie in elkaar overgevoerd worden.

Om te zorgen dat de volledige matching Borel is gaan Marks en Unger op zoek naar maximale stromen in de graaf bepaald door de werking van $\mathbb{Z}^5$ op V . Er is namelijk een goed ontwikkelde theorie over matchings en maximale stromen in Borel-grafen. De niet-triviale details moet u maar in het artikel lezen. $\diamond$

Referenties

- 1 Archimedes, *The Works of Archimedes*, edited by T. L. Heath, Dover Publications, 2002. Reprint of the 1897 edition and the 1912 supplement.
- 2 Stefan Banach en Alfred Tarski, Sur la décomposition des ensembles de points en parties respectivement congruentes, *Fundamenta Mathematicae* 6 (1924), 244–277.
- 3 Lester Dubins, Morris W. Hirsch en Jack Karush, Scissor congruence, *Israel Journal of Mathematics* 1 (1963), 239–247.
- 4 M. Laczkovich, Equidecomposability and discrepancy; a solution of Tarski's circle-squaring problem, *Journal für die Reine und Angewandte Mathematik* 404 (1990), 77–117.
- 5 H. Lebesgue, Intégrale, longueur, aire, *Annali di Matematica Pura et Applicata* (3) 7 (1902), 231–359.
- 6 Andrew S. Marks en Spencer T. Unger, Borel circle squaring, *Annals of Mathematics* (2) 186 (2017), 581–605.
- 7 Janusz Pawlikowski, The Hahn–Banach theorem implies the Banach–Tarski paradox, *Fundamenta Mathematicae* 138 (1991), 21–22.
- 8 A. Tarski, Problème 38, *Fundamenta Mathematicae* 7 (1925), 381.
- 9 Grzegorz Tomkowicz en Stan Wagon, *The Banach–Tarski Paradox*, Encyclopedia of Mathematics and its Applications 163, Cambridge University Press, 2016.
- 10 Stan Wagon, *The Banach–Tarski Paradox*, Encyclopedia of Mathematics and its Applications 24, Cambridge University Press, 1985.
- 11 Trevor M. Wilson, A continuous movement version of the Banach–Tarski paradox: a solution to de Groot's problem, *Journal of Symbolic Logic* 70 (2005), 946–952.

Milan Lopuhaä-Zwakenberg

TU/e Security Group
Technische Universiteit Eindhoven
m.a.lopuhaa@tue.nl

Onderwijs

De Taalkunde Olympiade

Een aanzienlijk deel van de wiskunde gaat over het bestuderen van patronen en structuren. Het is dan ook geen toeval dat veel wiskundigen fanatieke puzzelaars zijn. Waar de meeste wiskundige puzzels zich focussen op getallen of meetkundige figuren, houdt wiskundige Milan Lopuhaä-Zwakenberg zich het liefst bezig met het puzzelen aan de structuur van exotische talen. Naast zijn baan als postdoc bij de TU/e Security Group is hij daarom ook verbonden aan de Taalkunde Olympiade, waar hij tijdens de laatste editie van het KWG Wintersymposium verslag van deed. In dit artikel vat hij dat verhaal samen en vindt u een selectie van opgaven om zelf mee aan de slag te gaan.

De Taalkunde Olympiade is een wedstrijd voor middelbare scholieren, vergelijkbaar met de Wiskunde Olympiade. Anders dan de Wiskunde Olympiade is het echter niet gekoppeld aan een specifiek schoolvak. Hoewel de naam misschien anders doet vermoeden, is talenkennis niet nodig om het goed te doen bij deze olympiade. De opgaven komen namelijk uit talen waar de deelnemer niets vanaf weet, en hij/zij moet uit de gegeven informatie zelf de structuur van de taal achterhalen, om dit vervolgens toe te passen om nieuwe tekst te vertalen of te analyseren. Kortom, activiteiten waar abstract denken goed van pas komt. Sommige opgaven betreffen zelfs berekeningen in een onbekende taal, waar wiskunde dus expliciet aan bod komt. Het is dan ook niet verwonderlijk dat het vaak juist de leerlingen zijn met een Natuur & Techniek-profiel die het het beste doen, en leerlingen die het goed doen op de Taalkunde Olympiade doen het vaak ook goed op de Wiskunde Olympiade.

De Nederlandse Taalkunde Olympiade wordt georganiseerd door de Universiteit

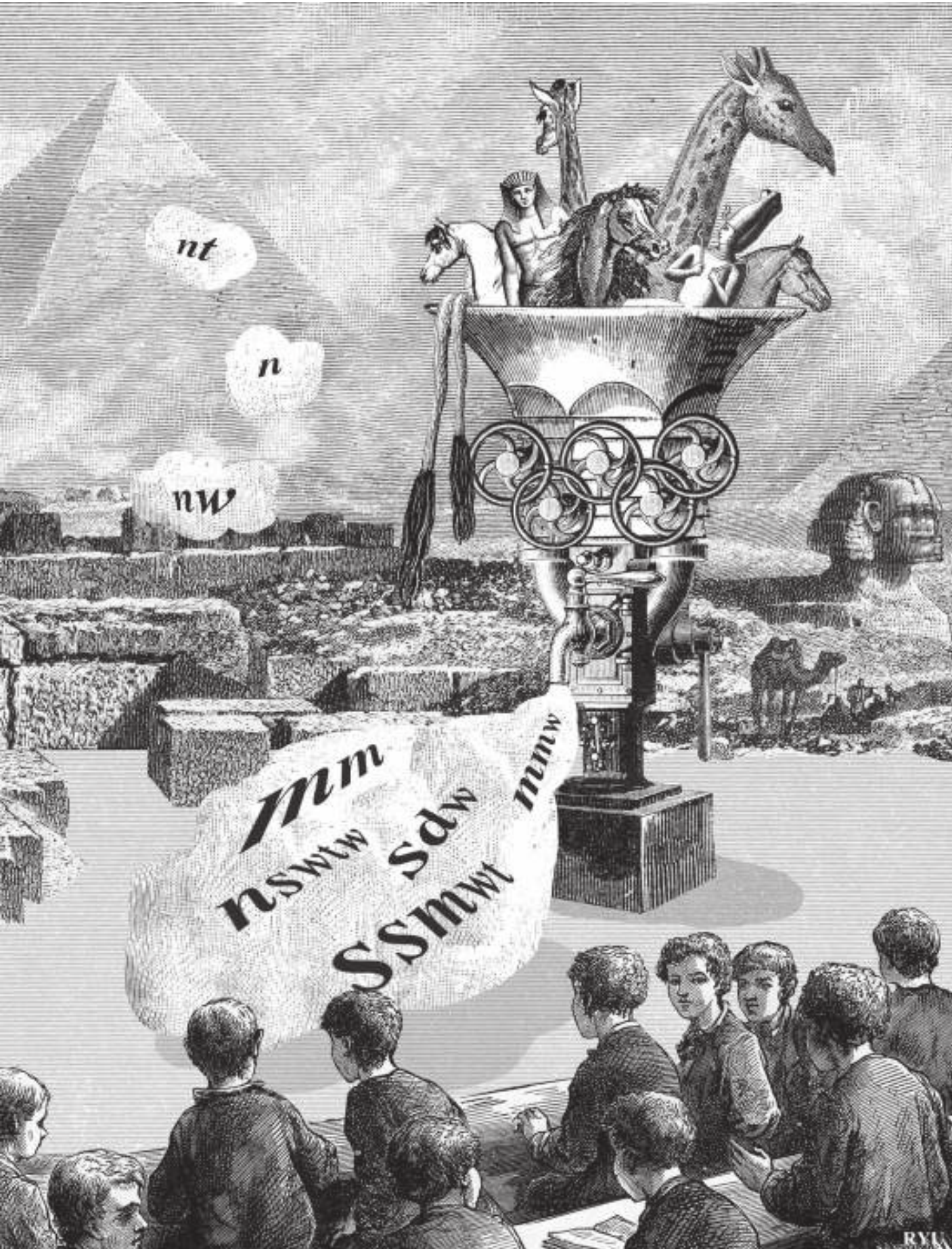
Leiden en bestaat uit twee rondes. De voorronde is in december, en de leerlingen hebben een weekend de tijd om vier à vijf opgaven te maken van het niveau van Opgave 1 hieronder. De antwoorden geven ze op via een online formulier. Hieraan doen ongeveer 300 leerlingen mee. De beste 150 daarvan worden uitgenodigd voor de tweede ronde. Deze wordt elk jaar in Leiden georganiseerd en bestaat uit zes opgaven, waar de leerlingen in totaal vier uur de tijd voor hebben. Bij deze opgaven moeten de leerlingen niet alleen het juiste antwoord geven, maar ook de redenering die ze hebben gebruikt om tot dat antwoord te komen. Voorbeelden van deze opgaven zijn Opgaven 2 en 3.

De beste vier deelnemers van de tweede ronde vormen het Nederlandse team voor de Internationale Taalkunde Olympiade. Deze internationale wedstrijd wordt elk jaar begin augustus gehouden, ieder jaar in een ander land (in 2018 was het in Praag). Aan deze wedstrijd doen circa dertig landen mee. De olympiade bestaat uit een individuele wedstrijd en een groepswedstrijd. Bij de individuele wed-

strijd hebben de leerlingen zes uur de tijd om zes opgaven te maken. Deze opgaven zijn gelijkwaardig aan de opgaven van de tweede ronde van de Nederlandse olympiade, maar wel van een wat hoger niveau; een voorbeeld hiervan is Opgave 4. Bij de groepswedstrijd hebben de leerlingen vier uur de tijd om aan een grotere, moeilijkere opdracht te werken. Deze opgaven zijn vaak te groot en te complex om volledig op te lossen, en het gaat erom om zo ver mogelijk te komen in de gegeven tijd. Naast de wedstrijden worden er ook een hoop activiteiten gepland, en is er voldoende gelegenheid om kennis te maken met het land en met de andere teams.

Hierna volgen ter illustratie een aantal opgaven uit verschillende olympiades, min of meer gesorteerd op moeilijkheid. Van de eerste twee opgaven zijn uitwerkingen toegevoegd; de uitwerkingen van de andere opgaven zijn te vinden op respectievelijk <https://www.universiteitleiden.nl/pre-classes/taalkunde-olympiade> en www.ioling.org. Voor de liefhebber zijn daar ook nog meer opgaven te vinden. ☞

Ken jij vwo-leerlingen die wellicht geïnteresseerd zijn in de Taalkunde Olympiade? Raad hen dan aan om eens een kijkje te nemen op: <https://www.universiteitleiden.nl/pre-classes/taalkunde-olympiade>.



Illustratie: Ryu Ijiri

Opgave 1 (Voorronde Nederlandse Taalkunde Olympiade 2017)

Middel-Egyptisch is een Afro-Aziatische taal die tussen 2000 en 1300 voor Christus werd gesproken in Egypte. Het werd geschreven in hiërogliefen, maar voor deze opgave wordt een transcriptie gebruikt. De klinkers van het Middel-Egyptisch werden niet geschreven. Bekijk de volgende uitdrukkingen in het Middel-Egyptisch (de letters *ʔ*, *h*, *t*, *h* en *ǧ* geven bepaalde medeklinkers uit het Middel-Egyptisch aan. Hoe ze precies werden uitgesproken is niet van belang voor deze opgave):

- | | |
|--------------------------|--------------------------------|
| a. <i>sdw nw mm</i> | ‘de staarten van de giraf’ |
| b. <i>sʔ n nswt</i> | ‘de zoon van de koning’ |
| c. <i>mḥnt nt ḥmntṛw</i> | ‘de veerboot van de priesters’ |
| d. <i>ḥmww nw mḥnwt</i> | ‘de roeren van de veerboten’ |
| e. <i>ǧwt nt ssmwt</i> | ‘de lichamen van de paarden’ |
| f. <i>mmw nw ms</i> | ‘de giraffen van het kind’ |
| g. <i>mswwt nt mm</i> | ‘de avondmalen van de giraf’ |

Hieronder staan nog een aantal uitdrukkingen in het Egyptisch. Het middelste woord is steeds weggelaten.

mḥnwt ... nswtw
mmw ... sʔw
mswt ... ḥmntṛw
sd ... ǧt
ḥmw ... msw

1. Vul het middelste woord aan zodat de zin een goede Egyptische zin wordt.
2. Vertaal de zinnen hierboven.

Opgave 2 (Nederlandse Taalkunde Olympiade 2014)

Het Cherokee is een Irokese taal uit Noord-Amerika die tegenwoordig door zo'n 20.000 sprekers gesproken wordt, voornamelijk in Oklahoma en Noord-Carolina. In het Cherokee bestaan er verschillende werkwoordsvormen die we in het Nederlands allemaal met ‘geven’ zouden vertalen. Ze worden in verschillende situaties gebruikt. Beschouw de volgende situaties. (De *j* wordt uitgesproken als de Engelse *j* in *job*, de *y* als de Nederlandse *j* in *jas*, en de *v* als het Franse *un*. De *ʔ* wordt gebruikt om de plofklank in het Nederlandse *beademing*. De *t* en *k* worden uitgesproken zoals de Engelse *t* en *k*, en de *d* en *g* als de Nederlandse *t* en *k*. De andere klanken klinken net zoals in het Nederlands.)

Moeder tegen vader, aan het avondeten:

- | | |
|-------------------------|---------------------------|
| <i>Nuna sgihvsi</i> | ‘geef me de aardappelen!’ |
| <i>Asusdi sginehvsi</i> | ‘geef me de jus!’ |
| <i>Ama hinehvsi</i> | ‘geef hem het water!’ |

(In het Cherokee worden dit soort bevelen ook als verzoek gebruikt. In het Nederlands zou dit vaak onbeleefd klinken, maar in het Cherokee niet.)

Een zuster tegen een andere op de kraamafdeling van het ziekenhuis:
Usdi hiyakasi ‘geef hem de baby!’

Een brandweerman tegen een groep anderen bij een brand:

- | | |
|--------------------------|---------------------|
| <i>Asladiʔa isginvsi</i> | ‘geef me het touw!’ |
| <i>Ama isginehvsi</i> | ‘geef me water!’ |

Diezelfde brandweerman tegen dezelfde groep, als de brand geblust is:

Gadu isgihvsi! ‘geef me een broodje!’

Taalkundeolympiadedeelnemers die niet kunnen wachten om aan de opgaven te beginnen, tegen de surveillant:

Kohweli isginvsi ‘geef ons het papier!’

De surveillant, uitleggend dat de deelnemers het papier na afloop aan de andere surveillant moeten geven:

Kohweli ejinvsi ‘geef hem het papier!’

Een moeder krijgt in de dierenwinkel van de kassabediende het volgende advies voor een cadeau voor haar drie kinderen:

Ajaʔdi gahiyakasi ‘geef hen een vis!’

Een aantal mensen koopt een paard bij een boer:

Sogwili isgakasi ‘geef ons het paard!’

1. Vertaal de volgende zinnen naar het Cherokee (de situatie hoeft je niet te vertalen)

- a. Een man bij de bakker: ‘geef me een broodje!’
- b. Een zuster tegen de andere: ‘geef me de baby!’
- c. De surveillant die de opgaven ontvangt bij de olympiade: ‘geef me het papier!’
- d. Bob krijgt van zijn vriend John een tip hoe hij zijn vissen moet verzorgen: ‘geef ze water!’

2. De Cherokee woorden voor ‘koffie’, ‘kat’, ‘riem’ en ‘maïs’ zijn respectievelijk *kawi*, *wesa*, *adadlosdi* en *selu*. Vertaal de volgende zinnen naar het Cherokee (de situatie hoeft je niet te vertalen):

- a. Een man tegen de kelner in een café: ‘geef me koffie!’
- b. Een gezin (vader, moeder, dochter) in de dierenwinkel tegen de twee mensen achter de kassa: ‘geef ons de kat!’
- c. Een verkoper tegen een groep andere verkopers: ‘geef hem de riem!’
- d. Een kelner tegen een andere kelner, wijzend op een gezin in het restaurant dat al lang op hun eten zit te wachten: ‘geef hen de maïs!’

3. Het Cherokee woord voor ‘kalkoen’ is *gvna*. Verzin voor elk van de volgende zinnen een situatie waarin deze gebruikt kan worden, teken deze situaties, en geef een vertaling voor de zinnen in die situaties:

- a. *gvna isgihvsi*
- b. *gvna sgakasi*

4. Leg uit waarom *asusdi sgihvsi* opgevat kan worden als een belediging voor de kok.

Opgave 3 (Nederlandse Taalkunde Olympiade 2005)

Hieronder staan de maandnamen in het Georgisch in willekeurige volgorde:

თებერვალი, აპრილი, ივლისი, დეკემბერი, სექტემბერი, იანვარი, ივნისი, მაისი, ნოემბერი, ოქტომბერი, აგვისტო, მარტი.

Bepaal de betekenis van alle Georgische maandnamen en hoe ze (ongeveer) worden uitgesproken.

Opgave 4 (Internationale Taalkunde Olympiade 2015)

Hieronder staan een aantal vergelijkingen, gedeeltelijk in het *Klassiek Nāhuatl* (de taal van het Azteekse rijk), en gedeeltelijk in het *Arammba* (een taal uit Papoea-Nieuw-Guinea).

mahtlactli-on-cē × *mahtlactli*

cem-pōhualli × *ōme*

yē-pōhualli-on-chicōme + *mahtlactli-on-nāhui*

mācuilli + *ōme*

mahtlactli-on-ēyi × *ēyi*

mācuilli × *ēyi*

= *mācuil-pōhualli-on-mahtlactli*

= *ōm-pōhualli*

= *nāuh-pōhualli-on-cē*

= *chicōme*

= *cem-pōhualli-on-caxtōlli-on-nāhui*

= *caxtōlli*

ngámbi + ngámbi

ngámbi + asàr

yànpaaro tàxwo + fete asàr tàxwo

yenówe × yenówe tàxwo

nimbo × fete

nimbo + yànpaaro tàxwo

= **ngámbi × yànpaaro**

= **tambaroy**

= **yànpaaro fete**

= **fete yenówe tàxwo**

= **tarumba**

= **yenówe tàxwo**

yē-tzontli-on-nāuh-pōhualli-on-caxtōlli-on-cē

cen-tzontli-on-cem-pōhualli-on-mahtlactli-on-ōme

cen-tzontli

cen-xiquipilli

= **ndamno**

= **yànpaaro tarumba**

= **tarumba tambaroy fete asàr**

= **weremeke tarumba nimbo yànpaaro**

1. Schrijf alle vergelijkingen in cijfers.

2. Schrijf in het Nāhuatl: 42, 94.

3. Schrijf in het Arammba: 43, 569.

Oplossing opgave 1

Voordat we vragen 1 en 2 kunnen beantwoorden, moeten we eerst de structuur van het Middel-Egyptisch achterhalen. In de voorbeeldzinnen valt het op dat er in elke uitdrukking *n*, *nt* of *nw* staat; we vermoeden dat dit ‘van’ zou kunnen betekenen. Dit is waarschijnlijk ook het woord dat we in vraag 1 iedere keer in het midden in zouden moeten vullen. De vraag is nu welke vorm we bij elk van de vragen moeten invullen. Kijken we naar de voorbeeldzinnen, dan lijkt het erop dat de vorm van dit woord afhangt van het eerste woord: eindigt dit op een *w*, dan is het *nw*; eindigt het op een *t*, dan is het *nt*; anders is het *n*. Deze regel verklaart de vormen in de voorbeeldzinnen, en dus kunnen we de zinnen in vraag 1 aanvullen met respectievelijk *nt*, *nw*, *nt*, *n*, *nw*. Om vraag 2 te beantwoorden moeten we weten wat de individuele woorden betekenen. Elke voorbeeldzin is van de vorm ‘de X van de Y’, en het voornaamste wat we moeten doen is weten met welke Egyptische woorden X en Y corresponderen. Hiervoor kunnen we het beste kijken naar zinnen a en g. Deze bevatten beide het woord *mm*, en de vertalingen bevatten beiden het woord ‘giraf’. We kunnen dus aannemen dat *mm* ‘giraf’ betekent. Op grond van deze twee zinnen kunnen we bovendien aannemen dat de woordvolgorde in het Egyptisch hetzelfde is als in het Nederlands. Deze beide observaties worden bevestigd door zin f, die begint met *mmw*, en waarvan de vertaling begint met ‘giraffen’.

Op grond hiervan kunnen we de zelfstandig naamwoorden uit de voorbeeldzinnen vertalen, zoals getoond in Tabel 1. Op grond

	enkelvoud	meervoud
staart		<i>sdw</i>
giraf	<i>mm</i>	<i>mmw</i>
zoon	<i>s?</i>	
koning	<i>nswt</i>	
veerboot	<i>mḥnt</i>	<i>mḥnwt</i>
priester		<i>ḥmntrw</i>
roer		<i>ḥmww</i>
lichaam		<i>ḏwt</i>
paard		<i>ssmwt</i>
kind		<i>ms</i>
avondmaal		<i>mswwt</i>

Tabel 1

van ‘giraf’ en ‘veerboot’ lijken er twee manieren te zijn om van een enkelvoud een meervoud te maken: ten eerste door er een *-w* achter te plaatsen, ten tweede door een *-t* op het eind te vervangen door *-wt*. Met behulp van deze regel en ons ‘woordenboek’ hierboven kunnen we nu vraag 2 beantwoorden en de zinnen vertalen. De antwoorden zijn: ‘de veerboten van de koningen’, ‘de giraffen van de zoons’, ‘het avondmaal van de priesters’, ‘de staart van het lichaam’ en ‘het roer van de kinderen’.

Oplossing opgave 2

1. Om te weten wat de antwoorden zijn, kijken we eerst naar de voorbeeldzinnetjes. Omdat we niet weten waar we precies op moeten letten, beginnen we eerst met de twee zinnetjes die het meest op elkaar lijken:

Nuna sgihvsi 'geef me de aardappelen!'
Asusdi sginehvsi 'geef me de jus!'

Bij deze zinnetjes is het enige verschil in situatie het lijdend voorwerp. Het lijkt er dus op alsof het lijdend voorwerp bepaalt of het woord eindigt in *-hvsi* of *-nehvsi*. Als we nu kijken naar de andere zinnen, dan zien we dat deze werkwoordstammen voorkomen bij de volgende lijdende voorwerpen:

-hvsi *nuna* (aardappelen), *gadu* (broodje)
-nehvsi *asusdi* (jus), *ama* (water)

Nu we deze stammen geïdentificeerd hebben, zien we dat we de voorvoegsels *sgi-*, *hi-*, en *isgi-* kunnen identificeren. Deze kunnen we weer 'lostrekken' van de stammen bij de andere voorbeeldzinnen, en zo ontdekken we twee nieuwe stammen:

-akasi *usdi* (baby), *aja?di* (vis), *sogwili* (paard)
-nvsi *asladi?a* (touw), *kohweli* (papier)

Het feit dat er een *-y-* tussen het voorvoegsel en de stam komt in *hi-y-akasi* en *gahi-y-akasi* kunnen we begrijpen door naar de uitspraak te kijken: in het Nederlands spreek je namelijk ook een [j] uit tussen een *i* en een *a*, bijvoorbeeld in het woord *diadeem*, dat je uitspreekt als [dijadeem]. Nu we weten wanneer welke stam bij welk lijdend voorwerp gebruikt wordt, moeten we nog uitvinden wanneer welk voorvoegsel gebruikt wordt. We zien in de vertaling sowieso een verschil tussen 'geef me', 'geef hem', 'geef ons' en 'geef hen', dus we kunnen beginnen met de verschillende voorvoegsels daarop in te delen:

'geef me' *sgi-*, *isgi-*
 'geef hem' *hi-*, *aji-*
 'geef ons' *isg(i)-*
 'geef hen' *gahi*

Ten eerste zien we dat het voorvoegsel *isgi-* niet een *-y-* krijgt als het aan de stam *akasi* wordt geplakt, maar in plaats daarvan verliest het de *i*. Verder zien we dat er voor 'geef me' en 'geef hem' twee vormen zijn. Als we nu kijken naar het verschil in situatie tussen *ama hinehvsi* en *kohweli ejinvsi*, dan zien we dat in de eerste zin maar één persoon aangesproken wordt, terwijl in de tweede zin meerdere mensen aangesproken worden. Hetzelfde blijkt het verschil te zijn tussen *sgi-* en *isgi-*. Dit geeft ons genoeg informatie om de eerste vraag te beantwoorden, en we vinden:

- Gadu sgihvsi*
- Usdi sgakasi*
- Kohweli isginvsi*
- Ama gahinehvsi*

Bij vraag b moeten we nog wel bedenken of het *sgakasi* of *sgiya-kasi* moet zijn, maar we zien *sgakasi* staan in de formulering van vraag 3, dus dat lijkt het waarschijnlijkst.

2. Nu krijgen we een aantal nieuwe woorden; we weten nu dus niet welke werkwoordstam we ervoor moeten gebruiken. Om hierachter te komen kijken we nog eens naar de werkwoordstammen die we gevonden hebben:

-hvsi *nuna* (aardappelen), *gadu* (broodje)
-nehvsi *asusdi* (jus), *ama* (water)
-akasi *usdi* (baby), *aja?di* (vis), *sogwili* (paard)
-nvsi *asladi?a* (touw), *kohweli* (papier)

We willen nu weten wat de indeling in deze categorieën bepaalt. De vorm van het Cherokee woord lijkt niet uit te maken, terwijl we de indeling goed kunnen begrijpen als we kijken naar de Nederlandse betekenis. We kunnen dan de volgende categorieën opstellen:

-hvsi voedsel
-nehvsi vloeistoffen
-akasi levende dingen
-nvsi overig

(Deze categorie blijkt te bestaan uit buigbare objecten. Dat is wat lastiger om uit deze opgave te halen, maar uit het Cherokee zijn andere gegevens waaruit dit blijkt.)

Met behulp van deze informatie kunnen we de vragen beantwoorden:

- Kawi sginehvsi*
- Wesa isgakasi*
- Adadlosdi ejinvsi*
- Selu gahihvsi*

3. We zien twee verschillen tussen de zinnetjes: ten eerste is het voorvoegsel bij de eerste zin *isgi-* en bij de tweede *sg(i)-*, en ten tweede is de werkwoordstam bij de eerste *-hvsi* en bij de tweede *-akasi*. Blijkbaar gaat het bij de eerste zin om een kalkoen als eten, en bij de tweede zin om een kalkoen als levend dier. We kunnen de tweede zin dus vertalen als 'geef me de kalkoen', in het geval dat de spreker, bijvoorbeeld, tegen een enkele kalkoenboer praat. De tweede zin heeft twee mogelijke vertalingen: Het kan ook 'geef me de kalkoen' betekenen (waarbij de kalkoen gebraden is, en er meerdere personen worden aangesproken), of 'geef ons de kalkoen' (waarbij we niet kunnen zien hoeveel personen er worden aangesproken).

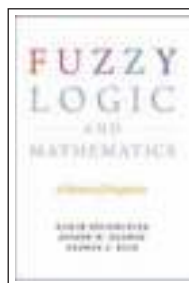
4. De zin betekent 'geef me de jus', maar we zien dat de werkwoordstam *-hvsi* wordt gebruikt om te refereren naar de jus, in plaats van *-nehvsi*, wat we verwachten bij vloeistoffen. Blijkbaar vindt de spreker de jus te massief.

Boekbesprekingen

| Book Reviews

Redactie: Hans Cuypers en Hans Sterk

Review Editors NAW - MF 7.092
Faculteit Wiskunde & Informatica
Technische Universiteit Eindhoven
Postbus 513
5600 MB Eindhoven
reviews@nieuwarchief.nl
www.win.tue.nl/wgreview



Radim Bělohlávek, Joseph W. Dauben,
George J. Klir

Fuzzy Logic and Mathematics A Historical Perspective

Oxford University Press, 2017
xii + 531 p., prijs £71.00
ISBN 9780190200015

In recent years, there has been a wide appreciation for fuzzy methods. Such methods are deeply rooted in fuzzy logic and are able to deal with uncertainty as a general concept. A major reason for its success is that dealing with 'yes', 'no' and 'maybe' seems to stand closer to everyday language and experience than the possibly more scientific and Boolean reasoning into 'yes' and 'no'. Fuzzy methods have been around since the nineteen sixties, but their advent has been slow, as they have long been criticized for their rather subjective and irreproducible interpretation. In this way, they have long been second-ranked and far below the measure theory based probabilistic methods. In recent years, however, we have seen the emergence of fuzzy logic in machine learning environments and in practical applications like the intelligent vacuum cleaner, waste water treatment and fuzzy control theory. At present, the digital society is offering increasing opportunities with good and important new applications. Fuzzy methods can't be ignored anymore, and have found their place in science, both in fundamental aspects and in bridging with other fields in science. As concerns my own domain: in spatial studies fuzzy methods are playing an important role since at least 25 years, when Peter Burrough and Martien Molenaar were among the first to use those methods for fuzzy classifications of soils, land areas and urban regions.

Now this book has appeared, there is much that ensures that it will be the classic reference for many years to come.

First, the book is rather complete: it goes all the way from Lukasiewicz' three-valued logic to the various aspects of fuzzy logic as we see it today. It divides the science of fuzzy logic into fuzzy logic in the broad sense, which is almost equivalent to the theory of fuzzy sets, and fuzzy logic in the narrow sense, which is equivalent to a logical system that focuses on modes of reasoning that are approximate rather than exact. This is followed by the inverse route: mathematics based on fuzzy logic. It describes fuzzy numbers, fuzzy differentiation and even fuzzy random variables. The final chapter of the book contains a wealth of applications: from engineering, through decision-making, natural sciences and psychology to social sciences and even medicine.

Second, the book covers the history of the field, arguably starting in 1965 with the seminal paper Zadeh, and it includes many interesting sidelines. Of particular interest is a transcript of the debate in 1972 between Lofti Zadeh and Rudolf Kalman, one of the early critics of this domain. The historical component of the book, although not very prominent, is extended with pictures of famous fuzzicians, and records of key meetings in the field.

Third, the scientific level is highly adequate: the main theorems are given, with proofs where possible and necessary, and hence it contributes to being both a study book and a reference book. The referencing is quite good, containing some 1500 recent and more remote references. The only criticism that one can have is that the

literal citations are printed in a relatively small font, which makes those at least not very appealing to read.

It was an unforgettable event when, one day in 2007, Lofti Zadeh gave a lecture in Enschede. He was then 86, and flew into Münster, taking his trip to the university by public transport. His lecture, still stuck in my memory, was titled ‘Granular Computing—Computing with Uncertain, Imprecise and Partially True Data’. The more than a hundred attendants were kept in a quiet, scientific admiration as can only happen to the real giants in science. He presented as the best possible teacher, and we could afterwards only conclude that we heard something on the edge of science, being entirely novel. Lofti Zadeh died only recently, in 2017, at the age of 96. We can be happy that his legacy forms the parts and the core of this excellent book. *Alfred Stein*



Øystein Linnebo

Philosophy of Mathematics

Princeton Foundations of Contemporary

Philosophy

Princeton University Press, 2017

203 p., prijs \$ 29.95

ISBN 9780691161402

Voor mij ligt een juweeltje van een boek over de wijsbegeerte van de wiskunde. Een schitterend werk dat zijn weerga niet kent, althans in het Nederlands taalgebied. De wijsbegeerte van de wiskunde is bij ons stiefmoederlijk bedeed, althans binnen de wiskundefaculteiten. En voor de faculteiten van de wijsbegeerte liggen de wiskundig-wijsgerige onderwerpen dikwijls verre van de gebaande interessesferen. Hoe anders is het in het gedachten-goed van Linnebo — hoogleraar filosofie aan de universiteit van Oslo — die tevens banden heeft met universiteiten in het Verenigd Koninkrijk en de Verenigde Staten. En zo is het al tientallen jaren: de wiskundig-wijsgerige denkrichtingen en -resultaten zijn meer uit andere hoeken te verwachten dan uit die van ons.

Linnebo's boek geeft een voortreffelijke en tamelijk complete inleiding in de wijsbegeerte van de wiskunde. Als filosoof dwingt hij met zijn boek bewondering af door de gedegen behandeling van tamelijk geavanceerde wiskundige onderwerpen. Opvallend hierbij is dat hij zijn eigen standpunten niet onder stoelen of banken steekt, maar deze in het gehele discours op een natuurlijke wijze verwerkt met respect voor afwijkende standpunten. De sterke en zwakke kanten van gemaakte keuzes komen duidelijk aan bod en triggeren de lezer om hierover verder na te denken. Dit komt onder andere naar voren bij wijsgerige overwegingen met betrekking tot wiskundige existentieën en dan met name bij gedachten over de ontologie van wiskundige entiteiten.

Dat brengt mij op de inhoud van het boek. Natuurlijk hebben we het dan over platonisme in zijn diverse vormen, over aprioriteit, noodzakelijkheid, abstracte objecten en over de integratie-uitdaging: “Can we explain how human beings in a seemingly a priori way acquire knowledge of necessary truths concerned with abstract objects?” Dit is het centrale Leitmotiv van de wijsbegeerte van de wiskunde en vormt de rode draad in dit boek. Natuurlijk komen we dan direct uit bij de visie van

Kant en zijn onderscheid tussen a priori en a posteriori versus analytisch en synthetisch. Maar ook bij Freges logicisme en de verschillende vormen van realisme. Van groot belang hierbij is de tweede-orde Dedekind–Peano-rekenkunde, waarbij wij wiskundigen weer vaste grond onder onze voeten gaan voelen. Maar, zoals bekend, leidden deze overwegingen tot een ‘disaster’, namelijk tot de paradox van Russell, waarmee de grondslagen van de wiskunde op drijfzand gebouwd leken te zijn.

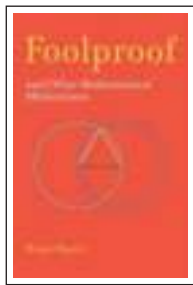
Tallose pogingen zijn vanaf het begin van de twintigste eeuw ondernomen om deze en andere paradoxen te lijf te gaan, zoals het formalisme (in twee vormen), deductivisme, structuralisme en dergelijke. De grootste namen uit de twintigste-eeuwse wiskunde komen hierin voorbij: Hilbert (finitisme, potentieel oneindige, ideale elementen), Russell (typentheorie), Cantor (actueel oneindige), Gödel ((on)volledigheidsstellingen). En natuurlijk de Nederlanders Brouwer en Heyting met het intuïtionisme. De overwegingen van Linnebo blijven bepaald niet steken in algemene filosofische praat, maar worden heel precies wiskundig geanalyseerd. Dat geldt in het bijzonder ook voor zijn beschouwing over het empirisme in de wiskunde waarbij na Mill speciaal Quine met zijn holistische benadering een grote rol speelt. Ook het nominalisme in de wiskunde, met de klassieke presentatie van Benacerrafs epistemologische afwijzing van het object realisme (1973) en Fields introductie van zijn nominalisme programma (1982), komt natuurlijk aan de orde. De wiskundige intuïtie krijgt veel aandacht, speciaal in het kader van het identificatieproces van wiskundige ‘dingen’. In de laatste vier hoofdstukken behandelt Linnebo een aantal onderwerpen vanuit een hoger standpunt: abstractie, iteratieve concept van verzamelingen ZF, ZFC, structuralisme (eliminatief en non-eliminatief, categorieëentheorie).

Veel van de genoemde onderwerpen zijn al tijdens het interbellum uit en te na bestudeerd. Maar de tijd heeft sindsdien niet stilgestaan. Ook in de tweede helft van de twintigste eeuw en in de tijd na de eeuwwisseling is er erg veel werk verzet op de genoemde terreinen. In de vorige alinea noemde ik al enige punten. Maar dat geldt voor alle hoofdstukken. Linnebo stipt de laatste ontwikkelingen aan en geeft literatuurverwijzingen hiernaartoe. Enkele voorbeelden: Shapiro (2005) die over alle relevante onderwerpen prachtige surveys heeft geschreven, Boolos (1998) die Frege liet herleven, Burgess (2015) over de structurele benadering, Zach (2015) over Hilberts programma. Linnebo voert ze alle ten tonele met schitterende mathematische commentaren.

De discussies over existentie en ontologie in de wiskunde gaan wereldwijd onverminderd voort. De centrale thema's van de wijsbegeerte van de wiskunde blijven teruggaan op Plato. Momenteel zijn er geen filosofen meer die een puur platonische visie op de wereld aanhangen. Linnebo maakt echter duidelijk dat het zonder de simpliciteit van het platonische idealisme moeilijk is om precies te zeggen hoe de wiskunde zijn duidelijke universaliteit verkrijgt. Dat er dan grote wijsgerige moeilijkheden op het wiskundige pad liggen, is duidelijk. Maar dat is meer een wijsgerige dan een vakwiskundige zaak. Denken over de wiskunde is op dit punt aanmerkelijk lastiger dan werken in de wiskunde, waarin wij gelukkig zijn te werken met wiskundige objecten wat de ‘philosophical conundrums’ ook mogen zijn. Dat neemt niet weg dat iedere wiskundige op zijn minst op de hoogte moet zijn van de filosofische impact van ons vak. Het draagt niet bij aan de technische beheersing van ons vak, maar wel aan het verruimen van de wiskundige horizon, waarbinnen we werken.

In het algemeen is een wijsgerige tekst vaak al lastig genoeg om te lezen en als dat dan een wijsgerige tekst over de wiskunde betreft, is het voor velen vaak extra moeilijk. Speciaal geldt dit voor beginnende wiskundestudenten, die na hun middelbare schooltijd nog helemaal moeten wennen aan de typisch wiskundige redeneerwijze. En om daarover dan al in het begin te moeten reflecteren valt helemaal niet mee. Hier wreekt zich het Nederlandse manco van het ontbreken van een wijsgerige introductie op het atheneum/gymnasium en vooral wreekt zich hier de positivistische/utilistische karaktertrekken van het wiskundecurriculum in het secundair onderwijs. Om het boek goed op zijn waarde te kunnen schatten en met vrucht te kunnen bestuderen is enige kennis van de grondslagen van de wiskunde noodzakelijk, zoals logica en verzamelingentheorie. Bovendien is enige kennis van niet-euclidische meetkunden gewenst. In feite mag verwacht worden dat iemand die geïnteresseerd is in de wijsbegeerte van de wiskunde tevens grondige studie zal maken van de wiskunde an sich.

Het boek is met zorg uitgevoerd, ieder hoofdstuk eindigt met een paragraafje 'Selected Further Reading'. Een uitvoerige bibliografie en een prima index besluiten het boek. *Wim Kleijne*



Brian Hayes

**Foolproof
and Other Mathematical Meditations**

MIT Press, 2017

x + 234 p., prijs \$24.95

ISBN 9780262036863

As the subtitle suggests, reading this book offers a unique opportunity to meditate about mathematics and its many fascinating sides, providing the reader with reasons as to why one may end up falling in love with the subject. At the end one is led to agree with the author that "mathematics is too important and too much fun to be left to the mathematicians".

Brian Hayes, Senior editor at Scientific American, is "not a native of the Republic of Numbers", but thanks to his work as scientific journalist, he has ended up spending a big part of his life there, hanging out in mathematical circles, gaining insights into the subject and making his own discoveries along the way. The realisation of how much his life "has been greatly enriched by the experience" seems to be one of the main reasons behind the publication of this volume.

Foolproof is a collection of short essays about mathematics, containing historical diversions, discussions about current research topics, and insights into old and new problems. The author's personal taste and interest for computer science and modelling frequently transpires: more than once he takes the opportunity to discuss the implementation of algorithms and everyday life applications. This may be the only limitation to this collection: the mathematical world described here only constitutes a small region of the whole mathematical landscape. However, it is exactly the author's familiarity with the topics that allow him to show passion and go down into great depth. Chapter 13, the last in the collection, to which the book owes its name, meditates on the value of computer

aided proofs, offering a comprehensive account on a controversial topic in mathematics and in the philosophy of science.

Being an expert and skilled storyteller, Hayes always unravels the stories hiding behind a mathematical result or concept, and at the same time provides accounts of his personal journey leading to the understanding of that very topic. He is able to highlight those features of a mathematical result that make it especially appealing, and uses tricks that get the reader hooked to the book — Chapter 7 starts with a dream, Chapter 1 reviews a well-known story about the young Gauss, Chapter 9 provides a historical account of what led Markov to the definition of his widely used model for stochastic processes.

Like in all good stories, every piece in the collection ends with a moral, a take-away message for the reader. This ensures that something from every chapter will linger on with them, making them wonder about the beauty of mathematics, and about the human endeavours behind mathematical results.

Being a collection of popular science articles, the book is clearly meant for (but not limited to) the general public. It can provide high school students, scientists in other fields, and curious readers a unique insight into a world that is sometimes perceived as very abstract and distant. Last but not least, the book is also highly enjoyable for mathematicians themselves, and offers a very good example of how science communication about mathematics should and can be done. *Francesca Arici*



Bart Jacobs

**Introduction to Coalgebra
Towards Mathematics of States and
Observation**

Cambridge Tracts in Theoretical Computer Science 59

Cambridge University Press, 2017

xvi + 477 p., prijs £110.00

ISBN 9781107177895

Coalgebra is een vakgebied, op de grens van de wiskunde en de theoretische informatica, dat in de afgelopen decennia is opgekomen als een universeel raamwerk voor het modelleren en bestuderen van stapsgewijs evoluerende processen. Dit raamwerk ligt ingebed in de categorieënleer en combineert daarmee wiskundige eenvoud met een brede toepasbaarheid, in de informatica en mogelijk in andere disciplines zoals de biologie, de economie of de natuurkunde.

Een coalgebra is niets anders dan een afbeelding of transitie van een toestandsruimte X naar een object TX . Bijvoorbeeld: als TX de machtsverzameling PX van een verzameling X is, dan kunnen we een functie $c: X \rightarrow PX$ zien als een nondeterministisch transitie-systeem dat een toestand $x \in X$ afbeeldt op de collectie $c(x)$ van toestanden die mogelijk volgen op x . In het algemene geval is T , het type van de coalgebra, een endofunctor in een of andere basiscategorie, meestal die met verzamelingen als objecten en functies als afbeeldingen. De brede toepasbaarheid van coalgebra ligt er in dat veel aspecten van een proces, zoals invoer, uitvoer, nondeterminisme of interactie met een omgeving, op natuurlijke wijze kunnen worden versleuteld in de functor T . Dynamische kernbegrippen als toestand, evolutie, gedrag of invariantie, vinden

dan een natuurlijke modellering in de theorie van de coalgebra. De term *coalgebra* duidt op de verwantschap, om precies te zijn een categorie-theoretische dualiteit, met de algebra. Veel algebraïsche begrippen hebben een coalgebraïsche tegenhanger, zoals congruentie versus bisimulatie, of inductie versus coïnductie.

Het hier besproken werk is de eerste inleiding in boekvorm die dit vakgebied toegankelijk beoogt te maken voor een publiek van onderzoekers in de wiskunde, de (theoretische) informatica, en daarbuiten. De auteur, hoogleraar in Nijmegen en nationaal bekend als expert op het terrein van computerbeveiliging, is een van de grondleggers van dit opkomende wetenschapsveld.

Jacobs' boek biedt een rijke en gedetailleerde kennismaking met het vakgebied. Het eerste hoofdstuk laat aan de hand van eenvoudige voorbeelden zien hoe coalgebra een natuurlijke manier is om computationele processen te modelleren; het introduceert coïnductie als een krachtig coalgebraïsch definitie- en bewijsprincipe, en maakt een verbinding met de temporele logica.

In het tweede hoofdstuk komen onder andere niet-welgefundeerde verzamelingen en eindige automaten aan de orde, als voorbeelden van coalgebra's voor zogeheten (Kripke-) polynomiale functoren. Onderweg introduceert de auteur voldoende categorieëentheorie om essentiële begrippen als de terminale coalgebra te bespreken, en om de overeenkomsten en verschillen tussen algebra en coalgebra uit te leggen.

Twee toestanden in mogelijk verschillende coalgebra's heten observationeel equivalent als ze precies hetzelfde gedrag vertonen. Dit fundamentele concept kan worden geformaliseerd met behulp van bisimulaties, de coalgebraïsche tegenhangers van congruenties in de algebra. Hoofdstuk 3 behandelt deze bisimulaties, voor Kripke-polynomiale functoren.

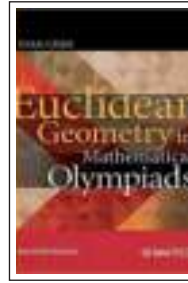
In het daaropvolgende hoofdstuk bespreekt de auteur enkele belangrijke niet-polynomiale functoren, waarmee onder andere probabilistische processen kunnen worden gemodelleerd. Vervolgens komen eerdere begrippen als bisimulatie en terminale coalgebra's opnieuw langs, maar nu op het hogere abstractieniveau van een willekeurige endofunctor op een willekeurige basiscategorie, voor zover deze een zogeheten logisch factoriseringssysteem toelaat.

Monades en comonades, bijzondere endofunctoren met een aanvullende structuur, spelen een belangrijke rol in de semantiek van programmatuur: dit is het onderwerp van hoofdstuk 5. Na een gedetailleerde introductie van (co-)monades laat Jacobs zien hoe bijvoorbeeld de sporensemantiek (trace semantics) van een computationeel proces kan worden beschreven met behulp van de Kleisli-categorie van een monade.

In het zesde en laatste hoofdstuk richt de auteur zich op logische aspecten van coalgebra. Hij concentreert zich eerst op invarianten: predicaten, oftewel deelverzamelingen van de toestandsruimte, die bewaard blijven onder de transities van de coalgebra. Daarna bespreekt hij kort de coalgebraïsche modale logica, die kan worden gezien als de corresponderende notie van de equationele logica in de algebra. Als laatste onderwerp behandelt hij asserties, waarbij predicaten worden belicht vanuit het perspectief van de finale coalgebra.

Door de onderliggende categorieëentheorie pas te introduceren waar het nodig is, heeft Jacobs het veld maximaal toegankelijk gemaakt, en met een weelde aan opgaven is het werk heel geschikt als collegemateriaal. Ten slotte geven de 471 referenties een uitstekende ingang tot de vakliteratuur.

Yde Venema



Evan Chen

Euclidean Geometry in Mathematical Olympiads

MAA Problem Books, 2016

xv + 311 p., prijs \$57.00

ISBN 9780883858394

Auteur Evan Chen — zeer recent nog maar gedurende vijf jaar een regelmatig deelnemer aan diverse wiskundeolympiades en in 2014 zowel tweede bij de USAMO (*USA Mathematical Olympiad*) als ook winnaar van een gouden medaille op de IMO (*International Mathematical Olympiad*) en toen dit boek uitkwam in 2016 nog student (!) — vond als deelnemer te weinig of eigenlijk geen geschikte bronnen om zich mee voor te bereiden op deelname aan dergelijke olympiades. Veel boeken bevatten veel theorie maar te weinig uitdagende opgaven om te oefenen en andere boeken bevatten juist heel veel opgaven met zelfs oplossingen, maar vaak zonder heldere uitleg hoe je op het idee van de gegeven oplossing zou kunnen komen. Inderdaad een veel voorkomend fenomeen als je regelmatig dit soort bundels leest of doorwerkt. De doelstelling van dit boek is dus onmiskenbaar de lezer stapje voor stapje duidelijk te maken hoe je langzaam grip op een opgave kunt krijgen. Voordat we verder gaan moet de lezer beseffen hoe ingenieus en duivels moeilijk olympiadeopgaven in het algemeen en IMO-opgaven in het bijzonder zijn en hoe frustrerend het vaak is een soms betoverend mooie oplossing te lezen waarvan je weet dat je daar helemaal niets van zelf had kunnen bedenken. De wiskundig geoefende lezer die wel eens een poging heeft gedaan een IMO-opgave te proberen zal een gevoel van respect voor de vaak nog zeer jonge IMO-deelnemer (middelbare scholier immers, soms nog maar 14 of 15 jaar oud zelfs) niet kunnen onderdrukken, zeker als die deelnemer erin slaagt überhaupt een opgave (al was het er maar één van de zes) tot een goed einde te brengen. De gemiddelde wiskundedocent bijvoorbeeld mag zijn of haar handen dichtknijpen als het lukt om geheel zelfstandig zo'n IMO-opgave op te lossen. Welnu, ik denk dat Chen er in dit helder geschreven boek heel goed in is geslaagd de juiste munitie aan te dragen en die zodanig te organiseren en presenteren dat je gaandeweg het gevoel krijgt dat deelname aan (laten we ons richten op de IMO) een niet geheel kansloze missie zou zijn.

Chen laat zijn hoofdstukken (ik noem wat titels die soms ook een beetje de didactische aanpak van Chen verraden zoals 'Angle Chasing' en 'When to Invert') telkens beginnen met een stukje theorie vergezeld van een zwikje gerelateerde stellingen en technieken — gevolgd door een aantal opgaven waarin die technieken worden gedemonstreerd — en ze worden afgesloten met een serie oefenopgaven. Voor elk van die oefenopgaven worden achter in het boek een of meerdere (tot een enkele keer zelfs zeven hints voor één opgave aan toe) genummerde (dus naar meerdere opgaven mogelijk verwijzend) hints gegeven (694 in totaal!) en van een respectabel deel (ruim 80) van de opgenomen opgaven (toch slechts ongeveer een kwart van het totaal schat ik) wordt achterin een complete oplossing gegeven. Verder wordt van vrijwel elke opgave de bron (de betreffende wedstrijd of olympiade of door

Chen zelf bedacht) gegeven zodat de lezer de oplossing online kan achterhalen. Daarmee zijn de twee nadelen van dit boek duidelijk. De ijverige lezer moet namelijk heel wat *analoog* bladeren noem ik het maar even (naar de afdeling hints en vervolgens weer elders in het boek naar de oplossing als die wel wordt gegeven in het boek) en – mijns inziens een groter nadeel – ook heel wat *virtueel* bladeren op hopelijk nog in de cloud vindbare sites voor het verlossende woord in het geval dat de oplossing niet in het boek wordt verstrekt.

Ondanks de titel worden trouwens ook zijstapjes gezet naar weliswaar euclidische meetkunde, maar via voor de man zelf destijds toch onbekende technieken, zoals die van complexe getallen en van barycentrische coördinaten. Een mooi laatste hoofdstuk bevat Chens persoonlijke favoriete opgaven waarvan ik u er een presenter (om nu direct even te proberen wellicht):

In driehoek ABC is AD de bissectrice van hoek A (met D op BC). Punten M en N zijn de projecties van B en C op AD . De cirkel met diameter MN snijdt BC in X en Y . Bewijs dat hoek BAX gelijk is aan hoek CAY .

[Tip: projectieve meetkunde kan uitkomst bieden.]

De gekozen opgaven komen uit wiskundeolympiades en trainingskampen en selectiewedstrijden uit de hele wereld of uit Chens eigen koker. Chen heeft een volslagen helder taalgebruik en is ondanks zijn leeftijd (hij was toen het uitkwam nog geen 25!) didactisch op een niveau waar de gemiddelde docent pas na dertig jaar lesgeven met een beetje geluk aan toe is en hij is er dus mijns inziens met glans in geslaagd het boek te schrijven dat hij een paar jaar geleden nog maar zelf héél graag had willen hebben. Het boek kan en zal generaties van slimme leerlingen en studenten een onuitputtelijke bron verschaffen met behulp waarvan men zich allerlei wiskunde en vooral de benodigde heuristiek eigen kan maken en de lezer (ook zeer aanbevolen voor een wiskundedocent van een 6 vwo-klas wiskunde B of wiskunde D) kan maanden, nee jaren in dit boek ronddwalen (daarom heeft het mij ongeveer een jaar gekost deze recensie te schrijven...).

Ten slotte nog een adviesje van de auteur. Over het oplossen van (wiskundige) problemen zegt Chen op zijn site: "This is why it's so important in anything to enjoy the process itself. Time spent thinking about the final result is time spent not working towards it." How very wise. Geen goedkoop boek, maar elke (euro- of dollar-) cent waard.

Joop van der Vaart

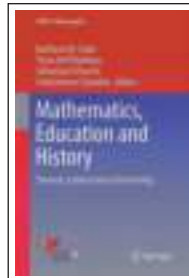
Recent verschenen publicaties. Als u een van deze boeken wilt bespreken of als u suggesties heeft voor andere boeken voor deze rubriek, laat dit dan per e-mail weten aan reviews@nieuwarchief.nl.



Walter Dittrich

**Reassessing Riemann's Paper
On the Number of Primes Less Than a
Given Magnitude**

Springer, 2018
ISBN 9783319914824
springer.com/9783319914817



K.M. Clark, T.H. Kjeldsen, S. Schorcht,
C. Tzanakis

**Mathematics, Education and History
Towards a Harmonious Partnership**

Springer, 2018
ISBN 9783319739243
springer.com/9783319739236



Titu Andreescu, Marian Tetiva

Sums and Products

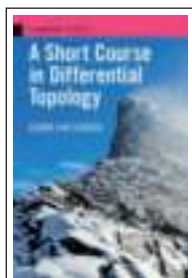
XYZ Press, 2018
ISBN 9780999342817
bookstore.ams.org/xyz-31



Sanne Blauw

**Het bestverkochte boek ooit (met deze titel)
Hoe cijfers ons leiden, verleiden en misleiden**

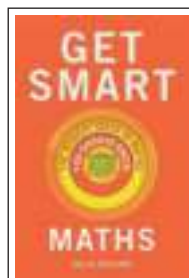
de Correspondent, 2018
ISBN 9789082821642
kiosk.decorrespondent.nl



Bjørn Ian Dundas

A Short Course in Differential Topology

Cambridge University Press, 2018
ISBN 9781108349130
doi.org/10.1017/9781108349130



Julia Collins

**Get Smart
Maths**

Quercus, 2018
ISBN 9781786483355
quercusbooks.co.uk/books/detail.page?isbn=9781786483355