

Inhoud | Contents

Artikelen | Features

- Biografie | Biography**
78 De onvermoeide arbeid van Julius Wolff
Jan van Maanen
- Geschiedenis | History**
87 De stelling van Denjoy en Wolff
Han Peters
- Geschiedenis | History**
90 Gelijkverdeelde rijen bestaan niet
Rob Tijdeman
- Evenement | Event**
93 NWD: En dat is dan $(2 + 0 + 1) \times 8 = 24!$
Rob van Oord
- Maatschappij | Society**
97 Netwerken met groepsstructuren
Clara Stegehuis
- In Memoriam | Obituary**
101 Mijn herinneringen aan Fred van der Blij
Jaap Korevaar
- 104 Een diplomaat aan het front
Jan de Lange
- 106 Schipperend tussen ars en mathesis
Klaas Lakeman
- 109 Wetenschappelijk werk
Roelof Bruggeman
- Evenement | Event**
111 Order structures, Jordan algebras, and geometry
Bas Lemmens, Onno van Gaans
- Evenement | Event**
115 NMC 2018: Impressie van het 'NMC nieuwe stijl'
Wil Schilders
- Interview | Interview**
119 Bruno Stoufflet: "Mathematics is quite easy if you understand it, I taught my daughters"
Barry Koren, Robbert Fokkink
- Onderwijs | Education**
124 Fontys-opleiding Toegepaste Wiskunde ontwikkelt een nieuw curriculum
Karin Verouden, Bram van der Broek
- Evenement | Event**
127 Nederlands succes bij de IMC geen toevalstreffer
Jaap de Jonge
- Geschiedenis | History**
131 De geschiedenis van het tijdschrift Pythagoras, deel 2: Voorspoed en tegenslag; de periode 1966–1985
Martinus van der Hoorn, Jan Guichelaar

Rubrieken | Departments

- 71 Redactioneel
Robbert Fokkink
- 72 Agenda
Nicolaos Starreveld
- 74 Nieuws
Nicolaos Starreveld
- 139 Boekbesprekingen
Hans Cuypers, Hans Sterk
- 147 Problemen
Rob Eggermont

Uitgelicht



Jan van Maanen heeft een studie van het leven en werk van Julius Wolff gemaakt.



Een verslag van de Nederlandse Wiskunde Dagen door Rob van Oord.

Colofon

Het Nieuw Archief voor Wiskunde is een uitgave van het Koninklijk Wiskundig Genootschap en verschijnt vier maal per jaar. Het tijdschrift richt zich op eenieder die zich beroepsmatig met wiskunde bezighoudt, als academisch of industrieel onderzoeker, student, leraar, journalist of beleidsmaker. Het stelt zich ten doel te berichten over ontwikkelingen in de wiskunde in het algemeen en in de Nederlandse wiskunde in het bijzonder.

ISSN 0028-9825

Adres

Nieuw Archief voor Wiskunde
Centrum Wiskunde & Informatica
Postbus 94079, 1090 GB Amsterdam
tel. 020-5924288
redactie@nieuwarchief.nl
www.nieuwarchief.nl

Hoofdredactie

Raf Bocklandt (r.r.j.bocklandt@uva.nl)
Robbert Fokkink (r.j.fokkink@tudelft.nl)

Eindredactie/Bladmanager

Fred Drissen (fred@nieuwarchief.nl)

Redactie

Hans Cuypers (TU/e), Geertje Hek (UvA), Jan Hogendijk (UU), Teun Koetsier (VU), Nicolaos Starreveld (UvA), Hans Sterk (TU/e), Mark Timmer (UT)

Problemenrubriek

Rob Eggermont (problems@nieuwarchief.nl)

Bureau redactie

Claartje Ottens

Illustraties

Ryu Tajiri

Vormgeving

Susanne Laws (omslag, begeleiding binnenwerk)
Kitty Molenaar (ontwerp)

Druk

Veldhuis Media

Advertenties

advertenties@nieuwarchief.nl

Koninklijk Wiskundig Genootschap

www.wiskgenoot.nl

Platform Wiskunde Nederland

www.platformwiskunde.nl

European Mathematical Society

www.euro-math-soc.eu

International Mathematical Union

www.mathunion.org

Koninklijk Wiskundig Genootschap

Het Koninklijk Wiskundig Genootschap (KWG) is een landelijke vereniging van beoefenaars van de wiskunde. In 1778 opgericht onder de zinspreuk: 'Een onvermoeide arbeid komt alles te boven' is het 's werelds oudste nationale wiskundegenootschap. Leden ontvangen het Nieuw Archief voor Wiskunde als onderdeel van hun lidmaatschap.

Bestuur

Jan Wiegerinck (UvA, voorzitter), Marije Elkenbracht (ABN AMRO, penningmeester), Sonja Cox (UvA, secretaris), Erik van den Ban (UU), Danny Beckers (VU), Theo van den Bogaart (HU), Marie-Colette van Lieshout (CWI), André Ran (VU), Mark Veraar (TUD)

Secretariaat

Joke Blom, CWI
Postbus 94079, 1090 GB Amsterdam
wiskgenoot@wiskgenoot.nl
www.wiskgenoot.nl

Ledenadministratie KWG / Abonnementen

Postbus 1064, 7940 KB Meppel
admin@wiskgenoot.nl, tel. 085-0160252

Contributie

Tarieven per jaar (bij betaling per automatische incasso krijgt u € 2,50 korting):

- gewoon lid: € 92,50
- reciprociteitslid: € 72,50
- gepensioneerden en werklozen: € 47,50
- aio's, oio's, studenten: € 37,50 (max. 4 jaar)
- lid zonder Nieuw Archief: € 52,50

Studenten en pas afgestudeerden kunnen een jaar lang gratis lid worden.

Voor verzending van het Nieuw Archief naar het buitenland wordt een portotoeslag van € 10 in rekening gebracht.

Instituten in Nederland en buitenland kunnen zich abonneren op het Nieuw Archief voor Wiskunde voor € 100 (Nederland), € 110 (Europa) of € 112,50 (buiten Europa).

Members of foreign societies

Members of SIAM, the *Société Mathématique de France*, the *Gesellschaft für Angewandte Mathematik und Mechanik*, the *Deutsche Mathematiker-Vereinigung*, and of the *American, Australian, Belgian, Indian, London, Spanish, and South-African Mathematical Societies* living outside of the Netherlands pay € 72,50 instead of the full membership fee of € 92,50 a year. Conversely, these foreign societies, as well as the VvS+OR and the NVORWO, have reduced membership fees for KWG members. A postage charge of € 10 is added for members living abroad but in Europe, and a charge of € 12,50 for members living outside of Europe.

Exchange subscriptions

Koninklijk Wiskundig Genootschap Library
Centrum Wiskunde & Informatica
P.O. Box 94079, NL-1090 GB Amsterdam
KWG-exchange@cw.nl

Informatie voor auteurs

Kopij

Het Nieuw Archief voor Wiskunde is een geredigeerd tijdschrift. Kopij dient per e-mail te worden aangeboden aan de hoofdredactie. Uitgebreide informatie en auteursinstructies kunt u vinden op www.nieuwarchief.nl.

Volgende nummers

nummer	maand	verschijnen	deadline kopij
19(3)	september	2018	verstreken
19(4)	december	2018	01-08-2018
20(1)	maart	2019	01-11-2018
20(2)	juni	2019	01-02-2019

Instituutsleden

De publicaties van het Koninklijk Wiskundig Genootschap worden mede mogelijk gemaakt door de bijdragen van de volgende instituten.

	Centrum Wiskunde & Informatica
	Rijksuniversiteit Groningen
	Universiteit van Amsterdam
	Universiteit Leiden
	Vrije Universiteit
	Universiteit Utrecht
	Technische Universiteit Eindhoven
	Eurandom
	Technische Universiteit Delft
	Universiteit Twente
	Radboud Universiteit Nijmegen
	Freudenthal Instituut

Op het omslag

Clara Stegehuis is een van de deelnemende bloggers van Faces of Science, een initiatief van de KNAW, De Jonge Akademie en NEMO Kennislink. Lees haar artikel over netwerken met groepsstructuren op pagina 97.

Man, man, man

Het duurt nog meer dan vijftig jaar voordat man en vrouw gelijk zijn in de wiskunde. In de astrofysica, waar men niet snel schrikt van een eon meer of minder, gaat het zelfs eeuwen duren. Onderzoekers van de universiteit van Melbourne hebben dit uitgerekend. Zo'n termijn van eeuwen klinkt misschien overdreven, maar ook andere studies komen op zulke getallen uit. Vorig jaar voorspelde het World Economic Forum dat het economisch gat tussen man en vrouw pas over 216 jaar verdwenen zal zijn.

In Melbourne bekeek men niet alleen per discipline maar ook per land hoe het staat met de wetenschappelijke emancipatie. Nederland doet het matig. In veel landen wordt momenteel meer dan veertig procent van het wetenschappelijk werk geschreven door vrouwen. In ons land is het minder. Ook deze constatering uit Melbourne wordt bevestigd door het WEF, dat in Nederland de laatste jaren de economische ongelijkheid tussen man en vrouw zelfs ziet toenemen.

Het Australische onderzoek werd gestart door een entomoloog, die zich liet inspireren door de geschiedenis van het bijenonderzoek. Een bijenkolonie wordt gerund door vrouwen met mannen in een bijrol. Een mannetjesbij is eigenlijk niet meer dan een levend omhulsel van zijn spermatozoïden. Tegenwoordig weet zelfs een kind dat bijen matriarchaal zijn, maar het heeft lang geduurd voordat dit besef er was. Aristoteles dacht dat de bijenkoningin een mannetje was, dat zijn vrouwtjes eropuit stuurde om jonge bijtjes uit de bloemetjes te halen. De bloemetjes en de bijtjes waren al snel van tafel, maar de misvatting dat de koningin een man was hield bijna tweeduizend jaar stand. Pas aan het eind van de zestiende eeuw realiseerden entomologen zich dat een bijenkolonie werd geregeerd door een vrouw. In die tijd had Engeland een buitengewoon succesvolle koningin. De wetenschap had een rolmodel nodig om op het goede spoor te komen.

Juist aan die rolmodellen ontbreekt het in Nederland en dat wordt vaak weggewuifd. Toen Mark Rutte bij de presentatie van zijn nieuwe kabinet geconfronteerd werd met het tekort aan vrouwen uit zijn partij, was zijn antwoord: "We gaan voor de beste mensen, het is wat het is." Een paar maanden later stond een van die beste mensen alweer op straat. De politiek kan misschien meer

rolmodellen gebruiken, de wiskunde kan dat zeker. De helft van de Nederlandse universiteiten heeft geen enkele vrouwelijke voltijd hoogleraar wiskunde en de andere helft heeft er maar eentje. Zo'n vijf procent van onze voltijd hoogleraren is een vrouw en daar hebben we vijftig jaar over gedaan. Reken zelf de halfwaardetijd uit.

Is het dan tijd voor positieve discriminatie? Deze vraag kwam aan de orde in de vrouwen-in-wiskunde-sessie, in de lunchpauze van het NMC. Er werd een tijdje over gesproken, de voors en tegens werden afgewogen. Uiteindelijk was de conclusie nee, positieve discriminatie is geen goed idee. Even later in de discussie merkte een van de sprekers op, dat haar de schellen van de ogen vielen toen ze een vrouwelijke hoogleraar tegenkwam. Dat kan dus ook, een vrouwelijke hoogleraar. Een sterker argument voor positieve discriminatie kan ik niet bedenken en omdat de vrouwencommissie geen man had om de notulen te maken, notuleer ik dat maar even hier.

Er gebeurde nog veel meer op het NMC, dat overigens georganiseerd werd op de plek waar Mark Rutte zich positioneerde als partijleider door een vrouw uit zijn partij te gooien. We brengen een uitgebreid verslag van dit NMC nieuwe stijl. Clara Stegehuis won er de KWG PhD-prijs en beschrijft haar werk op het gebied van random grafen. Ook is er een interview met Bruno Stoufflet, een van de hoofdsprekers. Naast het NMC hebben we veel aandacht voor de Utrechtse wiskundige Julius Wolff, die in de eerste helft van de vorige eeuw werkte aan complexe functietheorie. Jan van Maanen schreef een biografie in twee delen. Het eerste deel staat in dit nummer, samen met een bijdrage van Han Peters over de stelling van Denjoy-Wolff. Julius Wolff was ook betrokken bij de oplossing van Tatjana Ehrenfest van een probleem van Van der Corput. Rob Tijdeman schrijft erover. Ten slotte staan we stil bij het overlijden van Fred van der Blij begin dit jaar. Hij was niet alleen actief in wiskunde maar ook in kunst, verschillende mensen halen herinneringen aan hem op.

Agenda

| Upcoming Events

juni 2018

4–6 juni 2018

□ Highlights of algorithms 2018

Een workshop met als doel om recente ontwikkelingen in het gebied van algorithmen te laten zien.

plaats CWI, Amsterdam

info cwi.nl

4–8 juni 2018

□ GQT Graduate School and Colloquium

Een colloquium georganiseerd door het GQT-cluster, met lezingen van onder andere Gil Cavalcanti (Utrecht), Walter van Suijlekom (Leiden) en Hessel Posthuma (Amsterdam).

plaats Groesbeek, Nijmegen

info gqt.nl

8 juni 2018

□ Mark Kaç Seminar

Maandelijks seminar voor onderzoekers in kansrekening en statistische mechanica, met sprekers Anton Thalmaier (Luxemburg) en Pietro Caputo (Rome).

plaats Utrecht

info www.win.tue.nl/markkac

9 juni 2018

□ ISI-NETWORKS Day

Een workshop georganiseerd door de Indian Statistical Institute (ISI) en NETWORKS. Vijf lezingen zijn gepland met als onderwerp stochastische processen en complexe netwerken.

plaats Lipsius, Leiden

info thenetworkcenter.nl

18–22 juni 2018

□ Effective Methods for Diophantine Problems

Een workshop mede georganiseerd door Bas Edixhoven (UL) and Robin de Jong (UL).

plaats Lorentz Center@Oort, Leiden

info lorentzcenter.nl

juli 2018

3–6 juli 2018

□ Information Universe Conference

Een conferentie over de rol van informatie in het bestuderen van het universum.

plaats Groningen

info rug.nl

7–14 juli 2018

□ International Mathematical Olympiad

Internationale finale van de wiskundeolympiade, dit jaar in Roemenië.

plaats Cluj-Napoca, Roemenië

info imo2018.org

22–28 juli 2018

□ International Mathematics Competition for University Students

Internationale wiskundewedstrijd voor studenten.

plaats Blagoevgrad, Bulgarije

info imc-math.org.uk

30 juli – 3 augustus 2018

□ Logical Aspects of Quantum Information

Een workshop georganiseerd door Samson Abramsky (Oxford), Ivano Ciardielli (München), Phokion Kolaitis (Santa Cruz) en Martin Otto (Darmstadt).

plaats Lorentz Center@Oort, Leiden

info lorentzcenter.nl

augustus 2018

1–9 augustus 2018

□ ICM 2018

Het vierjaarlijkse International Congress of Mathematicians wordt dit keer voor het eerst in Latijns-Amerika gehouden, in Rio de Janeiro, Brazilië.

plaats Rio de Janeiro

info icm2018.org

20–24 augustus 2018

□ Modern Developments in Algebraic Dynamics: Challenges and Opportunities

Een workshop mede georganiseerd door Evgeny Verbitskiy (Leiden) met als onderwerp algebraïsche dynamica

plaats Lorentz Center@Snellius, Leiden

info lorentzcenter.nl

Suggesties voor deze agenda zijn welkom.

Redacteur: Nicolaos Starreveld

agenda@nieuwarchief.nl

23–24 augustus 2018

□ Workshop on Algorithmic and Combinatorial Aspects of Partition Functions

Een workshop over partitie functies die vaak een belangrijke rol spelen in combinatoriek, kansrekening en de statistische physica.

plaats Science Park, Amsterdam

info sites.google.com/site/guusregts

24–25 augustus 2018

□ Vakantiecursus 2018

Vakantiecursus van PWN voor leraren, studenten van lerarenopleidingen en voor andere belangstellenden. Dit jaar is het thema ‘Cryptografie: wiskunde in het dagelijks leven’.

plaats Technische Universiteit Eindhoven

info platformwiskunde.nl/vakantiecursus

27 augustus 2018

□ Celebrating Mathematics Event

Evenement voorafgaand aan de opening van de fotoexpositie ‘Women in mathematics’, die van 28 augustus tot eind september op de wiskundeafdeling van de TU Eindhoven te zien is.

plaats Technische Universiteit Eindhoven

info tue.nl

27–28 augustus 2018

□ 7th IFAC Workshop on Distributed Estimation and Control in Networked Systems (NecSys 18)

Een workshop met als onderwerp complexe dynamische systemen en netwerken.

plaats Groningen, University of Groningen

info fwno6.housing.rug.nl/necsys2018

27–31 augustus 2018

□ Nonlinear PDEs on Metric Graphs and Branched Networks

Een workshop mede georganiseerd door Martina Chirilus-Bruckner (Leiden).

plaats Lorentz Center@Snellius, Leiden

info lorentzcenter.nl

31 augustus – 1 september 2018

□ Vakantiecursus 2018

Vakantiecursus van PWN voor leraren, studenten van lerarenopleidingen en voor andere belangstellenden. Dit jaar is het thema ‘Cryptografie: wiskunde in het dagelijks leven’.

plaats CWI, Amsterdam

info platformwiskunde.nl/vakantiecursus

september 2018

10–13 september 2018

□ Statistical Inference for Stochastic Process Models in Weather and Climate Science

Een workshop mede georganiseerd door Shota Gugushvili (Leiden) en Peter Spreij (Amsterdam).

plaats Lorentz Center@Snellius, Leiden

info lorentzcenter.nl

14 september 2018

□ Finale Nederlandse Wiskunde Olympiade

De finale van de jaarlijkse landelijke wiskundewedstrijd voor leerlingen van havo en vwo.

plaats Eindhoven

info wiskundeolympiade.nl

18–21 september 2018

□ LeGO 2018: 14th International Workshop on Global Optimization

Tweejaarlijkse workshop georganiseerd door Michael Emmerich, Andre Deutz, Sander Hille en Yaroslav Sergeyev.

plaats Leiden

info universiteitleiden.nl

29 september 2018

□ Wiskundetoernooi

Wiskundetoernooi voor teams van middelbare scholieren. Een team bestaat uit 4 of 5 leerlingen uit 5–6 vwo en een begeleider.

plaats Radboud Universiteit, Nijmegen

info ru.nl/wiskundetoernooi

29 september 2018

□ Junior Wiskunde Olympiade

Jaarlijks landelijke wiskundewedstrijd voor leerlingen van havo en vwo, georganiseerd door de VU in samenwerking met de Nederlandse Wiskunde Olympiade en W4Kangoeroe.

plaats Amsterdam

info beta.vu.nl/nl/scholieren/

oktober 2018

3–5 oktober 2018

□ 43rd Woudschoten Conference 2018

Een jaarlijkse conferentie van de Nederlands-Vlaamse Numerieke Analyse-groepen, georganiseerd door de Werkgemeenschap Scientific Computing (WSC).

plaats Woudschoten, Zeist

info wsc.project.cwi.nl/events

5 oktober 2018

□ Dag van de Leraar

Ieder jaar is het op 5 oktober de internationale Dag van de Leraar. In het kader van deze dag organiseert de Onderwijscoöperatie de verkiezing Leraar van het Jaar.

plaats overal

info dagvandeleraar.nl

november 2018

3 november 2018

□ Jaarvergadering NVvW

Jaarlijkse vergadering en studiedag van de Nederlandse Vereniging van Wiskundeleraren.

plaats Ichthus College, Veenendaal

info nvvw.nl

9 november 2018

□ Prijsuitreiking van de Nederlandse Wiskunde Olympiade

De prijsuitreiking van de finale van de Nederlandse Wiskunde Olympiade.

plaats Eindhoven

info wiskundeolympiade.nl

12–14 november 2018

□ 47ste Bijeenkomst Stochastici

Workshop georganiseerd door Marie-Colette van Lieshout (CWI).

plaats Lunteren

info eurandom.nl

16 november 2018

□ Wiskunde B-dag

De Wiskunde B-dag is een 1-daagse opdracht voor op school voor teams uit 5 havo en 5/6 vwo met wiskunde B in hun profiel.

plaats deelnemende scholen

info uu.nl/onderwijs/wiskunde-b-dag

16 november 2018

□ Voorronde A-lympiade

Voorronde van de jaarlijkse competitie voor leerlingen uit de bovenbouw havo/vwo met wiskunde A in hun pakket.

plaats eigen school

info www.fi.uu.nl/alympiade

Nieuws

| News

Deze rubriek is een kroniek van wiskundige activiteiten in Nederland. Toekomstige activiteiten worden aangekondigd en van voorbije activiteiten wordt verslag gedaan. Wilt u uw aankondiging of verslag in deze rubriek geplaatst zien? Stuur ons dan uw bijdrage, zo mogelijk met illustratie. De redactie behoudt zich het recht voor berichten te weigeren of in te korten.

Redacteur: Nicolaos Starreveld
 nieuws@nieuwarchief.nl

Abelprijs toegekend aan Robert P. Langlands

De Noorse Academie van Wetenschappen heeft de Abelprijs voor 2018 toegekend aan de wiskundige Robert Langlands (1936) voor zijn visionaire programma dat de representatietheorie en de getaltheorie verbindt. De hoogleraar wiskunde van Princeton University in de Verenigde Staten krijgt een bedrag van zes miljoen Noorse kronen (623.000 euro). In 1967, toen Langlands universitair docent was aan Princeton University, stuurde hij een brief met zijn bevindingen aan de wiskundige André Weil. In zijn brief introduceerde hij een theorie die diepe connecties maakte tussen twee gebieden, de getaltheorie en de harmonische analyse. Deze twee gebieden van de wiskunde werden tot dan als onoverbrugbaar beschouwd. Zijn innovatieve ideeën hebben geleid tot het beroemde Langlands-programma, een web van invloedrijke vermoedens die twee gebieden van de wiskunde met elkaar verbinden. De feestelijke uitreiking van de prijs vond plaats op dinsdag 22 mei in Oslo, alwaar Langlands de prijs ontving uit handen van de Noorse koning Harald V.

abelprize.no



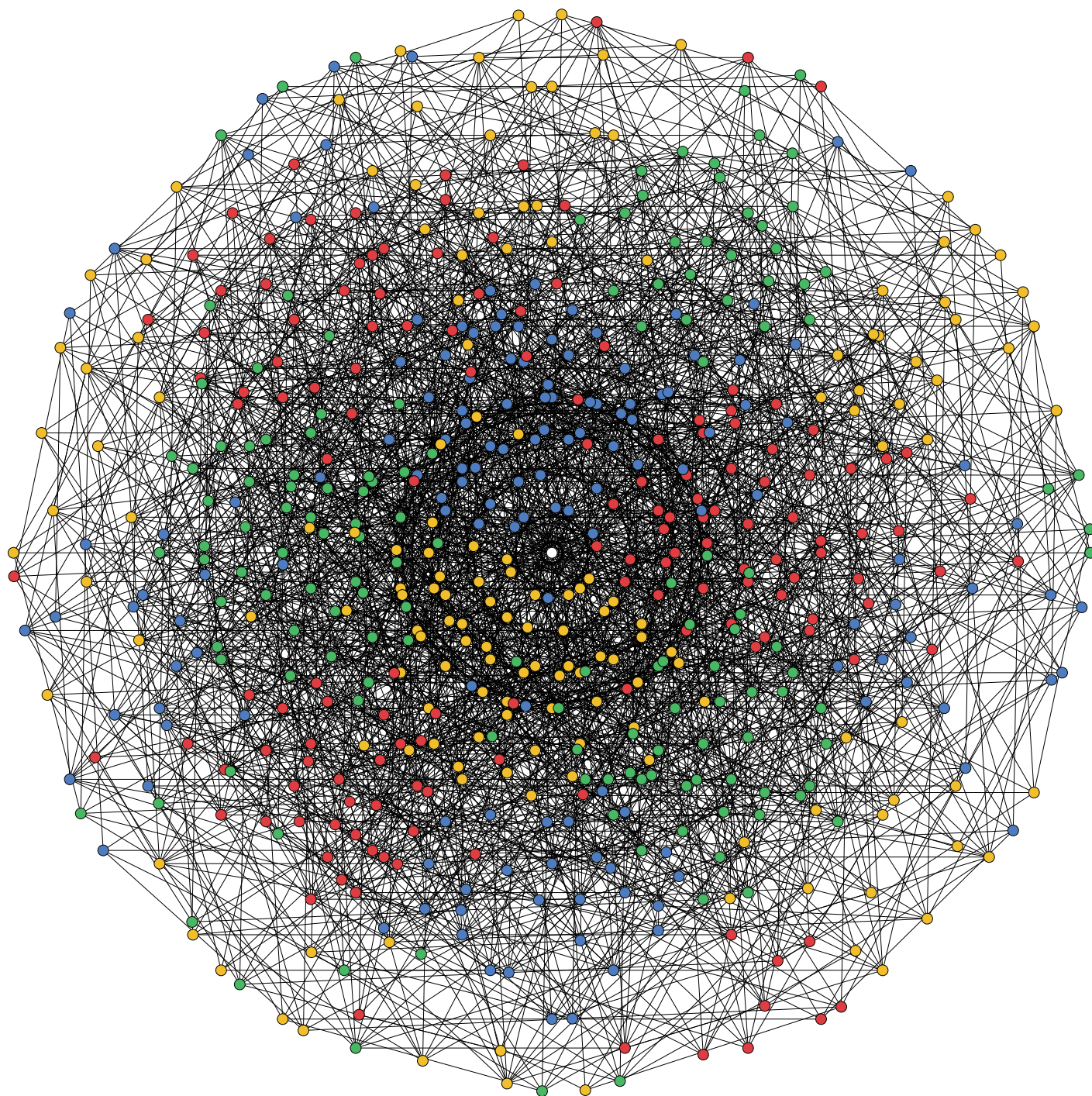
Van der Hofstad en Laurent gekozen tot KNAW-leden

Onderzoekers Remco van der Hofstad van de TU Eindhoven en Monique Laurent van het CWI zijn gekozen tot leden van de Koninklijke Nederlandse Akademie van Wetenschappen (KNAW). Dit maakte de KNAW op 19 april 2018 bekend. KNAW-leden zijn vooraanstaande wetenschappers die worden voorgedragen door collega-onderzoekers binnen en buiten de Akademie. Op 17 september worden de 21 nieuwe Akademieleden geïnstalleerd in het Trippenhuys van de KNAW.

Remco van der Hofstad (1971) is hoogleraar Kansrekening aan de Technische Universiteit Eindhoven en directeur van Eurandom. Hij is een wiskundige die de brug slaat tussen fundamenteel en toegepast onderzoek. Zo hebben chemici dankzij Van der Hofstad meer inzicht in de vorming van polymeerketens. En zo kunnen natuurkundigen nu beter rekenen aan percolatieprocessen waarbij vocht door een filter sijpelt. Daarnaast wordt het onderzoek van Van der Hofstad gebruikt om netwerken zoals Facebook te modelleren.

Naast onderzoeker en lid van het management team van het CWI is Monique Laurent (1960) als hoogleraar Combinatorische Optimalisering verbonden aan Tilburg University. Monique Laurent gebruikt wiskunde om praktische en theoretische problemen aan te pakken. Gebruikmakend van technieken uit algebra, meetkunde en discrete wiskunde ontwikkelt zij wiskundige gereedschappen en efficiënte algoritmen voor optimaliseringsproblemen, met een breed scala aan toepassingen: van logistiek tot data-analyse en quantum-informatietheorie.

knaw.nl, Annette Kik (CWI)



Er is voortgang geboekt op het Hadwiger-Nelson-probleem

Het Hadwiger-Nelson-probleem is een open probleem in de grafentheorie en dateert uit 1950. De vraag is hoeveel kleuren er nodig zijn om het vlak op zo'n manier te kleuren dat geen twee punten met onderlinge afstand 1 dezelfde kleur krijgen. Een ondergrens en een bovengrens waren al lang bekend, die zijn 4 (William en Leo Moser, 1961) en 7 (John R. Isbell). In april 2018 heeft Aubrey de Grey, een Brits biomedisch gerontoloog en bio-informaticus, de ondergrens verhoogd van 4 naar 5. Hij heeft een verzameling van 1.581 elementen geconstrueerd die niet gekleurd kan worden met 4 kleuren.

Marijn Heule, een Nederlands informaticus verbonden aan de University of Texas, Austin, wist de verzameling van De Grey met behulp van SAT-solvers al gauw uit te dunnen tot 826 elementen. Maar hij vindt nog steeds verbeteringen. Bij het ter perse gaan van dit blad had hij de verzameling al gereduceerd tot 610 elementen. Zie de figuur hierboven, waarin de verzameling is geïllustreerd als een graaf. Punten op afstand 1 zijn verbonden via een zijde. Het kleurgetal van deze graaf is 5, maar als je een willekeurige knoop weghaalt, zijn 4 kleuren genoeg. Daarom hebben alle knopen kleur groen, blauw, rood of geel, behalve de knoop in het centrum. Die is wit.

quantamagazine.org

Zilver en brons voor Nederlandse dames op Europese olympiade

Bij de zevende European Girls' Mathematical Olympiad, die van 9 tot 15 april plaatsvond in Florence, Italië, heeft Gabriëlle Zwaneveld (17) uit Den Haag een zilveren medaille behaald. Christel van Diepen (17) uit Arnhem en Anouk Eggink (17) uit Deventer sleepen beiden een bronzen medaille in de wacht. Het vierde teamlid, Floor Beks (16) uit Grou, wist één van de zes wedstrijdopgaven foutloos op te lossen en kreeg hiervoor een eervolle vermelding. De European Girls' Mathematical Olympiad wordt jaarlijks georganiseerd om meisjes te stimuleren hun wiskundetalent te benutten. De leerlingen kregen op elk van de twee wedstrijddagen drie zeer pittige wiskundeopgaven om op te lossen. Hiervoor kregen ze beide dagen vier en een half uur de tijd. In totaal ontvingen 52 van de 195 deelnemers een bronzen medaille, 39 een zilveren medaille en 17 een gouden medaille. In het officiële landenklassement haalde Nederland een 24ste plaats van de 52 deelnemende teams. Het Nederlandse team werd begeleid door Birgit van Dalen (Universiteit Leiden en ISW Hoogeland Naaldwijk), Quintijn Puite (TU Eindhoven en Hogeschool Utrecht) en Jetze Zoethout (Universiteit Utrecht).

wiskundeolympiade.nl

Diamantprijs

Het wiskundecluster DIAMANT reikt sinds kort een prijs uit aan de beste jonge spreker op zijn halfjaarlijkse symposium. In november ging de prijs naar Arthur Bik (Universiteit Bern) en in april ging de prijs naar Lasse Grimmelt (Universiteit Utrecht). Arthur sprak over het tellen van kritieke punten van de afstandsfunctie op variëteiten met een orthogonale actie. Lasse vertelde over sommen van Fouvry-Iwaniec-priemgetallen.

DIAMANT-cluster



Lasse Grimmelt (links) ontvangt de wisselbeker van Arthur Bik (rechts) onder het alziend oog van juryvoorzitter Hendrik Lenstra

Uitslag tweede ronde bekend

Op vrijdag 16 maart werd de tweede ronde van de Wiskunde Olympiade op twaalf universiteiten gehouden. Er waren 1018 leerlingen uitgenodigd op grond van hun score in de eerste ronde. Ook hebben er 10 leerlingen een wildcard ontvangen. Uiteindelijk deden er 919 leerlingen daadwerkelijk mee aan de tweede ronde. In totaal worden circa 150 leerlingen uitgenodigd voor de finale op vrijdag 14 september aan de TU Eindhoven.

wiskundeolympiade.nl

Gasboringen, profvoetballers en tulpen

Hebben de maatregelen van de overheid om minder gas te boren in Groningen geleid tot minder aardbevingen? Kunnen we data gebruiken om de kwaliteit van profvoetballers te bepalen? Wat is een optimale strategie om tulpen te kweken? Een groep van ongeveer zestig wiskundigen heeft zich van 29 januari t/m 2 februari tijdens de Studiegroep Wiskunde met de Industrie (SWI) 2018 aan de Technische Universiteit Eindhoven over deze, en nog drie andere uitdagende vragen van Nederlandse bedrijven en organisaties gebogen. De concrete (deel)oplossingen die opgeleverd zijn werden door de bedrijven enthousiast ontvangen en worden deels direct in de praktijk geïmplementeerd of leiden tot verdere samenwerking met de betrokken wiskundigen. De resultaten zullen vastgelegd worden in zowel wetenschappelijke rapporten als in verhalen voor een algemeen publiek. SWI wordt georganiseerd vanuit de Commissie Innovatie van het Platform Wiskunde Nederland.

Alessandro Di Bucchianico, swi-wiskunde.nl

Fietsen en draagvleugelboten

Delftse studenten tonen in een wetenschappelijke publicatie aan dat fietsbewegingen draagvleugelboten stabiel over het water kunnen laten vliegen. Dreig je te vallen met je fiets, dan stuur je ongemerkt in de richting van de aankomende val. Dit correctie-principe is natuurkundig te verklaren; de steunpunten — je wielen — blijven namelijk in balans met het zwaartepunt. Nu is voor het eerst ook wetenschappelijk aangetoond dat dit principe van fietsstabiliteit een draagvleugelboot, zoals de TU Delft Solar Boat, stabiel kan houden. De studenten publiceerden hun bevindingen onlangs in het wetenschappelijke tijdschrift *Naval Engineers Journal* van de American Society of Naval Engineers. Draagvleugels zijn kleine vleugels onder een boot, die met genoeg snelheid de romp van de boot uit het water weten te liften op dezelfde manier als vliegtuigvleugels de romp van een vliegtuig de lucht in tillen. Stabiliteit van een 'vliegende boot' is al jaren een uitdaging. In dit fenomeen hebben studenten Gijsbert van Marrewijk en Johan Schonebaum zich vastgebeten sinds ze in 2013 deel uitmaakten van het TU Delft Solar Boat Team. "Wij valideerden met een wiskundig model of een draagvleugelboot met twee draagvleugels achter elkaar in het water op dezelfde manier stabiel gehouden wordt als een fiets", vertelt van Marrewijk. Door de TU Delft Solar Boat uit 2016, ontworpen en gebouwd door studenten van de TU Delft, onder begeleiding van fietsonderzoeker Arend Schwab te onderwerpen aan diverse experimenten, toonden ze aan dat de draagvleugelboot zichzelf inderdaad stabiel houdt op dezelfde wijze als een fiets dat doet.

tudelft.nl

Scholiere ontdekt foutje in geodriehoek van de HEMA

Eindexamenkandidate Lonneke van Krimpen ontdekte bij het maken van een oefenexamen dat er iets mis is met haar geodriehoek van de HEMA. Ze telde op de korte zijde 11 streepjes tussen de 50 en 60. Bij een normale geodriehoek staan daar 9 streepjes tussen, wist Lonneke. Immers met de streepjes worden hele graden aangegeven en 9 streepjes verdelen het segment tussen 50 en 60 in 10 graden.

Nadat Lonneke een tweet over deze fout had geplaatst, kwam de HEMA in actie, en haalde de hele partij geodriehoeken met verkeerde streepjes uit de handel. Op de foto bij de tweet is overigens te zien dat ook andere segmenten verkeerd verdeeld zijn, en bovendien zijn de streepjes niet correct uitgelijnd.

De HEMA zegt blij te zijn dat Lonneke de fout op het spoor is gekomen: “We willen haar op een goede manier bedanken dat ze hier op zo’n belangrijk moment van het jaar, met de eindexamens voor de deur, achter is gekomen”, aldus de woordvoester. telegraaf.nl



Wiskunde in je broekzak: cryptografie in het dagelijks leven

Welke wiskunde zit er in je broekzak? Daar vind je wellicht je portemonnee met pasjes, en je mobiele telefoon: daar zit best wel de nodige wiskunde in. Maar heb je die echt ‘in je broekzak’? Het thema van de PWN Vakantiecursus 2018 is ‘Cryptografie’: de wiskunde van het beveiligen van gegevens door middel van versleuteling en authenticatie. platformwiskunde.nl

Leve de Wiskunde 2018!

‘Leve de Wiskunde’ is een jaarlijkse bijeenkomst waar wiskundigen van de UvA aan middelbareschooldocenten en -scholieren wat vertellen over hun vakgebied. De editie van 2018 vond plaats op vrijdag 6 april, en ruim 120 docenten en scholieren kwamen luisteren naar Han Peters, Guido Schäfer, Sam van Gool en Jan-Pieter Dorsman. Han liet een dronken man wandelen over de schijf: zou de man weer in de oorsprong komen of aan de rand blijven plakken? Guido toonde een filmpje van het Britse TV-spel *Split or steal* — een pijnlijke illustratie van het speltheoretisch ‘prisoner’s dilemma’. Bij Sam van Gool leerden we over automaten, de kleine broertjes van de Turingmachine. Ten slotte heeft Jan-Pieter ons op luchtige wijze uitgelegd wat een Markovketen is. Gelukkig hoefden de aanwezigen niet de hele dag te luisteren: in de pauzes werden

allerlei strategiespellen aangeboden, zoals *boter-kaas-en-eieren* op een oneindig groot rooster, en varianten op het klassieke *Nim*. Aan het einde van de dag hebben enkele scholieren ons blij verrast met optimale strategieën voor verschillende spellen. [Sonja Cox](https://sonja-cox.nl)

Nieuwe NWO-strategie 2019–2022

Op 12 april maakte NWO haar strategisch plan voor de periode 2019–2022 bekend. Het plan beschrijft vijf ambities om de komende jaren de wetenschappelijke en maatschappelijke invloed van het Nederlandse onderzoek te bevorderen. De transitie die NWO de afgelopen jaren heeft doorlopen was hiertoe een eerste stap. Met dit strategisch plan zet NWO nu een tweede stap. nwo.nl

Koninklijk Wiskundig Genootschap

Veranderingen bestuur KWG

Op de Algemene Ledenvergadering van 4 april j.l. is Erik van den Ban afgetreden als voorzitter van het KWG. De ALV heeft unaniem Jan Wiegerinck (UvA) verkozen als opvolger. Tevens hebben Joke Blom en Herman te Riele het bestuur verlaten (na respectievelijk 7 en 15 jaar in het bestuur te hebben gezeten). Hun plaats is — met instemming van de ALV — ingenomen door Danny Beckers (VU) en Marie-Colette van Lieshout (CWI).

Nieuwe Pythagoras-website

Mede dankzij royale hulp van alle wiskunde-instituten in Nederland is de nieuwe website van het tijdschrift *Pythagoras* gelanceerd, zie pyth.eu. Er wordt hard gewerkt om alle oude Pythagoras-nummers hierop beschikbaar te stellen.

Nieuwe hoofdredacteur NAW

Raf Bocklandt (UvA) is toegetreden als hoofdredacteur van het *Nieuw Archief van de Wiskunde*. Daarmee heeft het NAW weer twee hoofdredacteurs.

NMC 2018

Op 3 en 4 april vond het 54ste Nederlands Mathematisch Congres plaats in Veldhoven. Dit ‘NMC nieuwe stijl’ beviel goed, en NWO heeft toegezegd ook komend jaar een NMC naar dit format te steunen. Voor een verslag van het NMC zie pagina 115.

Oproep voor nominaties voor de N.G. de Bruijnprijs

In 2019 zal de tweejaarlijkse N.G. de Bruijnprijs weer tijdens het NMC worden uitgereikt. De prijs wordt uitgereikt voor het beste wiskundig wetenschappelijke werk dat in gereferende tijdschriften verschenen is in de jaren 2016 tot en met 2018. De prijs wordt beschikbaar gesteld door Elsevier vanwege de samenwerking met het KWG bij het publiceren van *Indagationes Mathematicae*. In aanmerking voor de prijs komen kandidaten die de Nederlandse nationaliteit hebben, in Nederland wonen of verbonden zijn aan een Nederlandse instelling. Kandidaten worden voorgedragen middels minimaal één aanbevelingsbrief die uiterlijk 1 oktober 2018 in het bezit van de jury (Henk Broer, Marius Crainic en Jan van Neerven) dient te zijn. Eenieder wordt uitgenodigd om kandidaten voor te dragen. Aanbevelingsbrieven dienen gericht te worden aan de voorzitter van de jury: Jan van Neerven, TU Delft/DIAM, Postbus 5031, 2600 GA Delft, e-mail: j.m.a.m.vanneerven@tudelft.nl.

Jan van Maanen

Freudenthal Instituut
Universiteit Utrecht
j.a.vanmaanen@uu.nl

Biografie Julius Wolff (1882–1945), deel 1

De onvermoeide arbeid van Julius Wolff

Een wiskundige die van groot belang was voor de Utrechtse universiteit in het interbellum maar binnen de universiteit en onder historici weinig aandacht heeft gekregen, is Julius Wolff. Jan van Maanen heeft nu een studie van het leven en werk van Wolff gemaakt, waarvan dit het eerste deel is. Het tweede deel zal in het decembernummer van dit blad verschijnen.

Wolff verzorgde aan de Universiteit Utrecht tussen 1922 en 1940 het onderwijs in de analyse en had veel promovendi. Na de oorlog hebben Barrau [1] en Van der Corput [4, hoofdstuk 'Wiskunde'] Wolffs werk en stijl getypeerd. Pas de studies van Van Walsum [10] en Broeyer [3] brachten Wolff opnieuw voor het voetlicht, met nadruk

op de oorlogsjaren. Deze studie geeft een biografie van Julius Wolff, een beschrijving van zijn wetenschappelijke werk en een publicatie-overzicht.

Jeugd en opleiding

Julius ('Jules') Wolff wordt op 12 april 1882 in Nijmegen geboren in een joodse

familie als zoon van veehandelaar Levie ('Louis') Wolff en diens tweede vrouw Ida Jacobsohn. Ze wonen in Nijmegen op de Ganzenheuvel. Jules is de jongste van drie kinderen. Hij heeft een oudere halfzus Cato (geboren in 1874) en broer Bernard (1880). (Voor meer detail, onder meer over het gezin waarin Julius Wolff opgroeide, zie www.fisme.science.uu.nl/staff/janm.) Vanaf 1885 woont het gezin Wolff tien jaar in Huize Centurio in Bemmelen, tegenwoordig Loostraat 10. Het is een aanzienlijk huis met een boomgaard. In mei 1895 verhuist het gezin naar Arnhem. In 1900 slaagt Jules aan de Arnhemse hbs voor het examen hbs A. Nadat hij ook staatsexamen hbs B gedaan heeft, studeert hij vanaf najaar 1901 wis- en natuurkunde aan de Universiteit van Amsterdam. Hier leert hij J.A. Barrau (1873–1953) kennen, zijn latere collega in Groningen en Utrecht. Tijdens zijn studie woont Wolff in de Hemonstraat, eerst op 45ⁱⁱ en vanaf 1903 op 35ⁱⁱ. In de zomer van 1905 behaalt hij *cum laude* het doctoraal examen. Aansluitend werkt hij bij de hoogleraar Korteweg aan het proefschrift *Dynamen beschouwd als duale vectoren*, dat hij op 15 januari 1908 in Amsterdam met succes verdedigt.

Gezin en eerste banen

Jules Wolff werkt sinds augustus 1906 als leraar aan de Rijks-hbs in Meppel en verhuist in september van Arnhem naar Mep-



Foto: A. Stuart, Bemmelen

Huize Centurio te Bemmelen met latere eigenaar Mathieu Strootman, circa 1920



Foto: Universiteitsmuseum Utrecht

Wolff in Middelburg, 1911

pel. Hij doet mee aan de jaarlijkse prijsvragen van het Wiskundig Genootschap. In 1906 wordt zijn inzending over een vraag uit de mechanica bekroond. In de jaren erna zal hij nog verschillende keren succes hebben en twee decennia later zal hij ook als jurylid optreden. In 1908 wordt Wolff leraar aan de Rijks-hbs in Middelburg. Zijn wetenschappelijke verdiensten vallen op, in 1910 wordt hij benoemd tot lid van het Zeeuwsch Genootschap der Wetenschappen. Ook publiceert hij in 1910 zijn eerste

artikelen, in *Nieuw Archief voor Wiskunde* een bekroonde inzending voor een prijsvraag, het andere in de *Verslagen van de Koninklijke Akademie van Wetenschappen*.

Jules Wolff trouwt op 9 augustus 1911 in Tilburg met Betsij ('Betsie') Gersons. Aan de Londensekaai 7 in Middelburg wordt 12 augustus 1912 hun zoon Louis geboren. In 1914 verhuizen ze naar Amsterdam, waar Jules benoemd is tot leraar wis- en natuurkunde aan het Stedelijk ('Barlaeus') Gymnasium. Op 20 februari 1915 wordt dochter

Hélène Ida ('Lenie') geboren. En als in februari 1916 Jules' vader overlijdt komt zijn moeder bij Jules en Betsie inwonen. Ze zal bij hen blijven wonen tot haar overlijden in 1924.

De wetenschap trekt. Jules Wolff wordt toegelaten als privaatdocent aan de Gemeenteuniversiteit. Hij houdt op 2 februari 1916 een openbare les over 'De nieuwere onderzoekingen op het gebied der algebraïsche oppervlakken'. Deze stap wordt opgemerkt, in elk geval in Groningen. Daar vertrekt eind 1916 hoogleraar Fred. Schuh naar Delft. De faculteit zet de Deense wiskundige Harald Bohr als eerste op de voordracht.

"Als No 2 op de voordracht voornoemd, beveelt de Faculteit bij Uw College aan den heer Dr. J. Wolff, leeraar te Amsterdam, en privaatdocent aan de Gem. Universiteit aldaar.

Ofschoon de heer Wolff niet op eéne lijn gesteld kan worden met den vorigen candidaat, zoo geldt toch van hem, dat hij onder de jongere Nederlandsche mathematici zeker eene eerste plaats inneemt; en in aanmerking nemende, dat hij nog jong is en zijne publikatie's nog niet zoo talrijk kunnen zijn, mag op grond van wat hij alreeds gepraeesteerd heeft, het beste voor de toekomst van hem gehoopt worden. De heer Wolff is reeds zesmaal door het Wiskundig Genootschap te Amsterdam bekroond geworden voor door hem beantwoorde prijsvragen van genoemd genootschap; hiernevens (: Bijlage II) gaat eene lijst zijner publikatie's. Volgens deskundigen kenmerkt hij zich door het bezit van een scherp en doordringend wiskundig talent, en met succes heeft hij zich o.m. beziggehouden met de moeilijke problemen, welke aan de nieuwere richtingen der wiskunde eigen zijn.

De heer Wolff is bekend als een innemend man, en een uitstekend docent, met opgewekte voordracht, zoodat hij ook als leeraar bij het gymasiaal onderwijs te Amsterdam zeer goed heeft voldaan. Het is op deze gronden, dat de Faculteit meent, Dr. Wolff met volle gerustheid voor den te vervullen leerstoel, te kunnen voordragen."

Hoogleraar in Groningen

Als Harald Bohr laat weten in Kopenhagen te blijven, wordt Wolff bij KB van 6



De rede in Amsterdam en de oraties in Groningen en Utrecht (1916, 1917, 1922)

februari 1917 benoemd tot hoogleraar in ‘de differentiaalrekening, de theorie der functiën en de hogere stekunde’ (hogere algebra), zie [5]. Op 28 maart 1917 begint hij in Groningen zijn werk met een rede over ‘Complexe getallenstelsels’. Aan het einde daarvan richt hij zich tot de ‘Hooggeleerde Barrau’, die hij tijdens zijn studie in Amsterdam had leren kennen en die ook bij Korteweg gepromoveerd was. Barrau, sinds 1913 hoogleraar in Groningen, had in de discussie over de opvolging van Schuh voor Wolff gepleit. Woorden van dank heeft Wolff voor zijn voorganger Schuh en voor zijn Amsterdamse leermeesters H. de Vries en L.E.J. Brouwer.

Zomer 1917 verhuizen Jules en Betsie Wolff met hun twee kinderen en met Jules’ moeder naar Aweg 26 in Groningen, waar 9 oktober 1919 zoon Ernst geboren wordt. Mei 1922 verhuizen ze naar Jozef Israëlsstraat 82, waar ze tot eind oktober 1922 zullen blijven.

Wolff neemt in Groningen het onderwijs energiek ter hand. Hij geeft in cursusjaar 1918–1919 vier uur differentiaal- en integraalrekening, één uur hogere algebra, één uur functietheorie, twee uur algebraïsche functies en één uur differentiaalvergelijkingen. In de jaren erna wisselt alleen het onderwerp van het caputcollege (algebraïsche functies). Barrau en Wolff geven samen een werkcollege. Met zijn publicatie in Frans, Duits en Engels en door de keuze voor internationale tijdschriften richt

Wolff zich op een internationaal publiek. De meeste artikelen verschijnen in de *Comptes Rendus* van de Parijse Académie en in het *Bulletin* van de Franse wiskundige vereniging. In 1921 en 1922 is Wolff voorzitter van het Wiskundig Genootschap (WG) na vanaf 1915 lid van het bestuur te zijn geweest. In 1917 maakt hij met de hoogleraren Brouwer, Kluyver, Ornstein en J. de Vries deel uit van een commissie van het WG “ter overweging van de wenschelijkheid, het onderwijs aan de Nederlandsche universiteiten een uitbreiding te doen ondergaan.” Kern van de aanbevelingen is: splits het wiskundeonderwijs in zes deelgebieden in combinatie met een “belangrijke uitbreiding der wiskundige leerkrachten”, die aan minstens één universiteit ingevoerd moet worden, en breid aan de overige universiteiten beperkt uit. De bezetting met een hoogleraar analyse, een hoogleraar meetkunde en soms een lector voor de propaedeutische wiskunde blijft echter nog decennia gehandhaafd.

Als begin 1922 de Franse hoogleraar Denjoy Utrecht verlaat ten gunste van de Sorbonne, draagt de Faculteit Wis- en Natuurkunde 7 juli 1922 als eerste Julius Wolff voor:

“Dr. Wolff heeft, vooral in de 5 jaren gedurende welke hy hoogleraar is, blyken gegeven van een merkwaardige intuïtie op analytische-mathematisch gebied. Het is hem by herhaling gelukt, een ant-

woord te vinden op vragen welke wiskundigen van naam onderzocht hadden zonder tot een oplossing te geraken. Zyn laatste ontdekking, opgenomen in de *Comptes Rendus* de l’Académie des Sciences, is aanleiding geweest voor het indienend lid dier Akademie om te wyzen op de groote belangrykheid van het door Dr. Wolff verkregen resultaat.

Dr. Wolff is in hooge mate bekend met de uitkomsten welke de wiskundigen der tegenwoordige periode op het gebied der analyse hebben verkregen en weet ze dienstbaar te maken aan het onderwijs.

Wy willen hieraan toevoegen dat Dr. Wolff niet uitsluitend specialiteit [sic] in de theorie der functies is, maar, blykens publicaties uit de periode vóór het aanvaarden van het hoogleraarsambt, ook in andere gebieden der wiskunde goed thuis is.

Ten slotte merken wy op, dat Dr. Wolff een uitstekend akademisch docent is.”

Hoogleraar in Utrecht

Op 23 augustus 1922 delen Curatoren aan Wolff het KB van zijn benoeming mee, die hij de dag erna aanvaardt. Ik neem mij voor, schrijft hij,

“mijn beste krachten te stellen ter beschikking van het onderwijs aan de Utrechtsche Universiteit en van de wetenschap.”

Oktober 1922 is een maand van verandering. Het gezin verhuist naar de Utrechtse Stadhouderslaan, waar het aanvankelijk op nummer 76 woont en vanaf juli 1925 op 51. 16 oktober 1922 houdt Wolff zijn oratie 'Over het subjectieve in de wiskunde', volgens de aftredend rector "eene zeer toegejuichte rede". Wolff profileert zich ermee als iemand met een interesse die zich veel verder uitstrekt dan zijn directe leeropdracht. Zaterdag 21 oktober begint hij zijn colleges. Hij geeft dezelfde vakken als in Groningen.

Brieven uit de jaren twintig en dertig laten Wolff zien als een betrokken lid van de academische gemeenschap. In 1928 is hij betrokken bij een relletje. Zijn collega Jan de Vries treedt af. Kamerlid Ir. Willem Albarda benadert De Vries. De twee kennen elkaar uit Delft, waar De Vries vóór zijn benoeming in Utrecht doceerde. Albarda doet een goed woordje voor de net 25 jaar oude B.L. van der Waerden. Albarda's brief wordt in de faculteit besproken, waarna Wolff zich bij curatoren meldt:

“Enkele faculteitsleden vinden een krachtig optreden noodzakelijk en zijn er op gesteld, dat in ieder geval Curatoren weten, dat

1^o de vakgroep Wiskunde, Natuurkunde, Astronomie het na rijp beraad geheel eens is geworden omtrent de voordracht en de volgorde daarvan; bij deze besprekingen passeerde Dr. V. d. Waerden met andere begaafde jeugdige mathematici de revue. Wij vonden echter die personen te jong, zij zijn pas begonnen met iets te presteren, terwijl Prof. Barrau te Groningen door zijn talrijke belangrijke publicaties en zijn ongeëvenaarde doceerkunst ons alle waarborgen geeft dat Utrecht een meetkundig centrum blijft. Ook Prof. Dr. Schouten en Dr. Schaake komen volgens ons inzicht eerder in aanmerking dan die jeugdige personen.

2^o de geheele faculteit eenstemmig met de voordracht accoord ging.

Mij werd door enkele faculteitsleden verzocht, met U te overleggen, of er tegenmaatregelen moeten worden genomen, en zoo ja, welke."

Curatoren benoemen inderdaad Barrau. Die had zich in 1917 sterk gemaakt voor de benoeming van Wolff in Groningen, nu doet Wolff in Utrecht hetzelfde voor hem.

Twee brieven uit 1930 aan de Utrechtse rector laten zien dat Wolff deel nam aan de ‘professorenkrans’, en dat hij zich – waarschijnlijk op verzoek van de rector – kritisch uitliet over de situatie van de Utrechtse wiskunde:

“Zie hier wat m.i. in het jaarverslag kan:

Doordien aan onze universiteit slechts twee hoogleraren voor de geheele Wiskunde zijn, geen hoogleeraar voor de Getallentheorie, doordien een assistent ontbreekt, zoodat onder anderen geen sprake kan zijn van een goed beheer van leeszaal en boekerij; doordien een behoorlijk geëquippéerd mathematisch instituut ontbreekt, in welk opzicht Utrecht vrijwel eenig op de wereld is en zelfs bij de Technische Hoogeschool te Delft, waar de Wiskunde slechts hulpvak is, verre ten achter staat, biedt onze Universiteit nog steeds geen gelegenheid tot een behoorlijke studie in de Wis- en Natuurkunde."

Maatschappelijke betrokkenheid blijkt uit Wolffs lidmaatschap van het op 8 juli 1933 opgerichte ‘Nederlandsch comité van kunstenaars en intellectueelen ter bestrijding van de terreur in Duitschland’. De regering vond dat dit comité zich keerde tegen de bevriende natie Duitsland en zette het in januari 1934 op de ‘zwarte lijst’ van verenigingen die voor rijksambtenaren verboden waren. Tegen deze achtergrond moet Wolffs brief van 27 februari 1934 gezien worden:

“Mijne Heeren Curatoren.

Met het oog op onlangs door onze Regeering verboden lidmaatschappen zend ik Uw college afschrift van een brief dien ik op 5 februari aangetekend zond.

~~~~~

Afschrift: Aan het Comité van Kunstenaars en Intellectueelen  
Postbus Z 66 A/dam

Buiten alle politiek staande heb ik indertijd mijn instemming betuigd met een protest tegen ergerlijk onrecht dat in Duitschland wordt gepleegd.

Nu onze Regering het lidmaatschap van het Comité voor ambtenaren verbiedt, daar zij meent dat het Comité niet vrij is van politiek, verzoek ik, indien ik als lid beschouwd werd, te worden geschrapt als lid van Uw Comité.

Hoogachtend  
J. Wolff

Met verschuldigde hoogachting,

Uw dw  
I. Wolff”

In 1934 zijn er in Wolffs geboortestad Nijmegen ongeregelde heden rond een bijeenkomst van de NSNAP, waarin haat gezaaid wordt tegen Joodse burgers. Wolff protesteert bij de Nijmeegse burgemeester en vraagt “om die dingen in het vervolg te voorkomen.” Burgemeester Steinweg laat in een brief weten herhaling “zoveel mogelijk” te zullen voorkomen. Het gebeurt niet vaak dat Wolff ervoor kiest om zich als Joods burger te manifesteren. In de openbaarheid deed hij dat alleen in 1924 twee keer. In januari was hij lid van het comité van aanbeveling van het Palestina-Opbouwfonds, dat een lezing organiseerde over ‘Het Joodsche Leed en het Joodsche Land’. Een half jaar later werd hij lid van het Genootschap voor de Joodsche Wetenschap in Nederland, dat eind 1919 was opgericht om “een band te vormen tusschen alle Joden, die op het gebied van de Joodsche theologie, geschiedenis, letterkunde, statistiek, het administratief recht of op

|          |                                 |   |    |                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                           |
|----------|---------------------------------|---|----|---------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|
| D'WOLFF, | Harmonische functies,           | 2 | 25 | Grondzeigenschappen, Doormeen afleefing,<br>Wegulairc functie met toecoming op de<br>stelling van Ploord-Landau.                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                          |
|          | Differentiaal<br>verselykingen, | 3 | 28 | Functietheoretische behandeling van de li-<br>nnaire hogere differentiaalvergelvkingen<br>van de 2e, 3de, 4de, 5de, 6de, 7de, 8de, 9de, 10de,<br>11de, 12de, 13de, 14de, 15de, 16de, 17de, 18de,<br>19de, 20de, 21de, 22de, 23de, 24de, 25de,<br>26de, 27de, 28de, 29de, 30de, 31de, 32de,<br>33de, 34de, 35de, 36de, 37de, 38de, 39de, 40de,<br>41de, 42de, 43de, 44de, 45de, 46de, 47de, 48de,<br>49de, 50de, 51de, 52de, 53de, 54de, 55de, 56de,<br>57de, 58de, 59de, 60de, 61de, 62de, 63de, 64de,<br>65de, 66de, 67de, 68de, 69de, 70de, 71de, 72de,<br>73de, 74de, 75de, 76de, 77de, 78de, 79de, 80de,<br>81de, 82de, 83de, 84de, 85de, 86de, 87de, 88de,<br>89de, 90de, 91de, 92de, 93de, 94de, 95de, 96de,<br>97de, 98de, 99de, 100de, 101de, 102de, 103de,<br>104de, 105de, 106de, 107de, 108de, 109de, 110de,<br>111de, 112de, 113de, 114de, 115de, 116de, 117de,<br>118de, 119de, 120de, 121de, 122de, 123de, 124de,<br>125de, 126de, 127de, 128de, 129de, 130de, 131de,<br>132de, 133de, 134de, 135de, 136de, 137de, 138de,<br>139de, 140de, 141de, 142de, 143de, 144de, 145de,<br>146de, 147de, 148de, 149de, 150de, 151de, 152de,<br>153de, 154de, 155de, 156de, 157de, 158de, 159de,<br>160de, 161de, 162de, 163de, 164de, 165de, 166de,<br>167de, 168de, 169de, 170de, 171de, 172de, 173de,<br>174de, 175de, 176de, 177de, 178de, 179de, 180de,<br>181de, 182de, 183de, 184de, 185de, 186de, 187de,<br>188de, 189de, 190de, 191de, 192de, 193de, 194de,<br>195de, 196de, 197de, 198de, 199de, 200de, 201de,<br>202de, 203de, 204de, 205de, 206de, 207de, 208de,<br>209de, 210de, 211de, 212de, 213de, 214de, 215de,<br>216de, 217de, 218de, 219de, 220de, 221de, 222de,<br>223de, 224de, 225de, 226de, 227de, 228de, 229de,<br>230de, 231de, 232de, 233de, 234de, 235de, 236de,<br>237de, 238de, 239de, 240de, 241de, 242de, 243de,<br>244de, 245de, 246de, 247de, 248de, 249de, 250de,<br>251de, 252de, 253de, 254de, 255de, 256de, 257de,<br>258de, 259de, 260de, 261de, 262de, 263de, 264de,<br>265de, 266de, 267de, 268de, 269de, 270de, 271de,<br>272de, 273de, 274de, 275de, 276de, 277de, 278de,<br>279de, 280de, 281de, 282de, 283de, 284de, 285de,<br>286de, 287de, 288de, 289de, 290de, 291de, 292de,<br>293de, 294de, 295de, 296de, 297de, 298de, 299de,<br>300de, 301de, 302de, 303de, 304de, 305de, 306de,<br>307de, 308de, 309de, 310de, 311de, 312de, 313de,<br>314de, 315de, 316de, 317de, 318de, 319de, 320de,<br>321de, 322de, 323de, 324de, 325de, 326de, 327de,<br>328de, 329de, 330de, 331de, 332de, 333de, 334de,<br>335de, 336de, 337de, 338de, 339de, 340de, 341de,<br>342de, 343de, 344de, 345de, 346de, 347de, 348de,<br>349de, 350de, 351de, 352de, 353de, 354de, 355de,<br>356de, 357de, 358de, 359de, 360de, 361de, 362de,<br>363de, 364de, 365de, 366de, 367de, 368de, 369de,<br>370de, 371de, 372de, 373de, 374de, 375de, 376de,<br>377de, 378de, 379de, 380de, 381de, 382de, 383de,<br>384de, 385de, 386de, 387de, 388de, 389de, 390de,<br>391de, 392de, 393de, 394de, 395de, 396de, 397de,<br>398de, 399de, 400de, 401de, 402de, 403de, 404de,<br>405de, 406de, 407de, 408de, 409de, 410de, 411de,<br>412de, 413de, 414de, 415de, 416de, 417de, 418de,<br>419de, 420de, 421de, 422de, 423de, 424de, 425de,<br>426de, 427de, 428de, 429de, 430de, 431de, 432de,<br>433de, 434de, 435de, 436de, 437de, 438de, 439de,<br>440de, 441de, 442de, 443de, 444de, 445de, 446de,<br>447de, 448de, 449de, 450de, 451de, 452de, 453de,<br>454de, 455de, 456de, 457de, 458de, 459de, 460de,<br>461de, 462de, 463de, 464de, 465de, 466de, 467de,<br>468de, 469de, 470de, 471de, 472de, 473de, 474de,<br>475de, 476de, 477de, 478de, 479de, 480de, 481de,<br>482de, 483de, 484de, 485de, 486de, 487de, 488de,<br>489de, 490de, 491de, 492de, 493de, 494de, 495de,<br>496de, 497de, 498de, 499de, 500de, 501de, 502de,<br>503de, 504de, 505de, 506de, 507de, 508de, 509de,<br>510de, 511de, 512de, 513de, 514de, 515de, 516de,<br>517de, 518de, 519de, 520de, 521de, 522de, 523de,<br>524de, 525de, 526de, 527de, 528de, 529de, 530de,<br>531de, 532de, 533de, 534de, 535de, 536de, 537de,<br>538de, 539de, 540de, 541de, 542de, 543de, 544de,<br>545de, 546de, 547de, 548de, 549de, 550de, 551de,<br>552de, 553de, 554de, 555de, 556de, 557de, 558de,<br>559de, 560de, 561de, 562de, 563de, 564de, 565de,<br>566de, 567de, 568de, 569de, 570de, 571de, 572de,<br>573de, 574de, 575de, 576de, 577de, 578de, 579de,<br>580de, 581de, 582de, 583de, 584de, 585de, 586de,<br>587de, 588de, 589de, 590de, 591de, 592de, 593de,<br>594de, 595de, 596de, 597de, 598de, 599de, 600de,<br>601de, 602de, 603de, 604de, 605de, 606de, 607de,<br>608de, 609de, 610de, 611de, 612de, 613de, 614de,<br>615de, 616de, 617de, 618de, 619de, 620de, 621de,<br>622de, 623de, 624de, 625de, 626de, 627de, 628de,<br>629de, 630de, 631de, 632de, 633de, 634de, 635de,<br>636de, 637de, 638de, 639de, 640de, 641de, 642de,<br>643de, 644de, 645de, 646de, 647de, 648de, 649de,<br>650de, 651de, 652de, 653de, 654de, 655de, 656de,<br>657de, 658de, 659de, 6 |

Inhoud van de door Wolff in het collegejaar 1923–1924 gegeven colleges

Bron: Utrechts Archief, Jaarverslag ... aan de minister van binnenlandse zaken en de minister van onderwijs-toegang 50 inv. nr. 264

enig ander terrein der Joodsche Wetenschap reeds iets hebben gepresteerd of verwacht worden iets te zullen presteren.”

In samenwerking met Hans Freudenthal bepleit Wolff de zaak van hun Duitse collega, tevens studiegenoot van Freudenthal, Erich Rothe (1895–1988), voor wie ontslag dreigde op grond van zijn joodse afkomst:

“Utrecht, 29 Oct '35

Zeer geachte Heer Freudenthal,

Met dank voor de toezending van de gegevens aangaande Dr. E. Rothe deel ik U mee dat ik geschreven heb aan de Academic Assistance Council, Rooms of the Royal Society, Burlington House, London W.1., met bijvoeging van de stukken. Ik heb veel hoop dat zij iets kunnen doen.

Met vriendelijke groeten,

Uw dw

J. Wolff”

Rothe ontkwam in 1937–38 via Zwitserland naar de Verenigde Staten.

Al in 1933 had Wolff zijn contacten in de VS aangewend ten behoeve van de joodse immigrant Stefan Warschawski (1904–1989), met wie hij in 1934 een artikel over conforme afbeeldingen publiceerde. Warschawski schreef op 16 oktober 1933 uit Utrecht aan Courant dat er in Nederland weinig plaatsen waren voor jonge wiskundigen...

“Daarom doet Prof. Wolff ook elders zijn best om mij een plaats te verschaffen. Zo heeft hij onder andere aan de met hem van vroeger bevriende Prof. Struik geschreven. [...] Deze heeft nu geantwoord dat hij zich ten behoeve van mij tot Prof. Richardson (Brown University) gewend heeft.” [8, p.108]

Warschawski emigreerde in 1934 naar de Verenigde Staten.

Wolff is ook bestuurlijk actief binnen de universiteit. Als faculteitsvoorzitter voert hij in 1939 de correspondentie met Werner Heisenberg in Leipzig, Nobelprijswinnaar natuurkunde in 1932. De faculteit had hem het professoraat in de theoretische fysica aangeboden. Wolff deelt curatoren op 27 september 1939 de reactie van Heisenberg mee: Heisenberg is vereerd, maar de oorlog brengt voor hem verplichtingen mee. Daardoor, zo citeert Wolff Heisenbergs reactie, kan hij nu geen antwoord geven op een vraag die betrekking heeft op een situatie die pas na de oorlog speelt. Wolff

laat curatoren weten: “De Faculteit, hoezeer ook gesteld op de aanwinst van zulk een enorme kracht, kan zich onmogelijk schikken in het wachten op het einde van den oorlog, daar de duur niet geschat kan worden.” Pas in 1942 had Utrecht met de benoeming van Léon Rosenfeld weer een hoogleraar theoretische fysica. Broeyer [3, pp.24–26] geeft meer detail.

Naast zijn academische werk is Wolff vanaf 1 januari 1932 wiskundig adviseur bij de Onderlinge Levens Verzekeringmaatschappij ‘Eigen Hulp’ (OLVEH), die in Den Haag gevestigd is en die in 1968 en 1983 via fusies in Aegon zal opgaan.

### Onderwijs en onderzoek

De universiteiten hebben in het interbellum twee hoogleraren, een voor analyse en een voor de meetkundige vakken. Zowel in Groningen als in Utrecht geeft Wolff de analysevakken. Over 1922–1923, zijn eerste Utrechtse collegejaar, hebben we geen bronnen. Over het tweede collegejaar zijn de gegevens informatief, zoals blijkt uit het jaarverslag van de universiteit. Het overzicht van Wolffs colleges bevat gevorderde vakken: harmonische functies, (voortgezette) differentiaalvergelijkingen, algebraïsche functies en capita selecta, waarvan de inhoud per jaar wisselde. Lector H.B.A. Bockwinkel gaf vanaf 1919 het inleidend onderwijs in de differentiaal- en integraalrekening.

Een jaar later (1924–1925) geeft Wolff ook basiscolleges (integraalrekening in samenhang met maattheorie, differentiaalvergelijkingen en functietheorie). Nieuw dat jaar is de invoering van een colloquium samen met zijn collega Jan de Vries, twee uur op maandagmiddag. Nadere detaillering is mogelijk dankzij collegedictaten van studenten (C. Visser over 1929–1931, G. Röhrman over 1932–1936 en R. Lijdsman over 1940). Daaruit blijkt dat Wolff in zijn Capita Selecta een veelheid aan onderwerpen behandelde (onder meer convergentie van machtreeksen, de priemgetalverdeling, het continuüm, Fourierreeksen, Lebesgue-integratie en gehele functies). Bijna alle dictaten bevatten afgeronde, samenhangende theorie.

Bovengenoemde Kees Visser zette zijn studie bij Wolff voort tot en met zijn promotie in 1935. Brieven van promotor aan promovendus tonen een betrokken coach. Wolff bemoeit zich niet alleen met de wiskundige ontwikkeling van Visser, hij heeft

ook oog en inzet voor diens maatschappelijke situatie en voorziet ‘Amice’ Visser van waardevolle contacten. Via Émile Borel publiceert Visser al voor zijn promotie in de Parijse *Comptes Rendus*. Ook introduceert Wolff Visser bij Dirk Jan Struik, die van eind 1934 tot juli 1935 in Nederland is. Stuur Struik overdrukken, adviseert hij. En hij zet Visser op het spoor van een Rockefeller Fellowship voor een jaar in de Verenigde Staten. Voor de zekerheid is er ook een tip voor een alternatief: “Vacature te Tiel aanstaande. Oproep zal spoedig komen. Houd die in de gaten.” Visser, die na zijn afstuderen in het voorjaar van 1934 een zieke leraar verving aan de Gemeentelijke hbs in Dordrecht, was op zoek naar een eigen aanstelling. Wolff biedt ook aan om referenties te geven. De laatste brief dateert van 21 augustus 1937. Visser is dan al weer een jaar terug uit de Verenigde Staten en is wiskundeleraar in Dordrecht. Wolff feliciteert hem met zijn huwelijk. De gelukwens komt te laat “door de tijdelijke verhuizing Utrecht–Scheveningen”. En met zijn kenmerkende belangstelling voegt Wolff toe: “Als slecht krantenlezer weet ik niets van een al- of niet-benoeming te Dordrecht. Het zou mij zeer verheugen als die plaats je niet ontsnapt mocht zijn.”

De plaatsen zijn Visser niet ontsnapt. In 1946 werd hij hoogleraar in Delft en van 1956 tot 1976 in Leiden, zie ook [6].

De ruim honderd publicaties van Wolff tonen grote veelzijdigheid. Hij houdt zich naast analyse en functietheorie, het zwaartepunt in zijn leeropdracht, bezig met meetkunde, grondslagen en de verbinding met de fysica. Zijn proefschrift over *Dynamen, beschouwd als duale vectoren* (1907) en de beantwoording van een prijsvraag (1915) zijn voorbeelden van het laatste. Een dynaam is een krachtenstelsel. Het heeft dezelfde beschrijving als een schroef en wordt door een ‘dual getal’ gegeven, een tweetal reële getallen waarvan het eerste de hoeksnelheid en het tweede de translatie langs de as weergeeft. Wolff past dynamen toe in de meetkunde en de mechanica.

Wolffs redes in Amsterdam, Groningen en Utrecht tonen zijn brede interesse. In Amsterdam (1916) behandelt hij ‘algebraïsche oppervlakken’. Na een historische inleiding over de analogie van krommen en oppervlakken sinds Leibniz schetst hij de twee belangrijkste richtingen in de laatste vijftig jaar. Voortbouwend op Clebsch en



Bron: ETH-Bibliothek Zürich, Bildarchiv; foto: Meiner, Johannes; Portr. 10680-Fl; Public Domain Mark

De deelnemers aan het internationale wiskundecongres in Zürich, 1932; in de uitsnede Julius Wolff

Max Noether werkten vooral Franse wiskundigen door met transcendente methoden terwijl de Italianen, zoals Castelnuovo en Enriques, algebraïsche methoden toepasten. Algebraïsche oppervlakken, zo besluit hij, zijn het waard “te worden bestudeerd door wiskundigen van verschillende richting en aanleg. De analyst heeft in deze werkplaats even goed als de geometer gelegenheid tot ontplooiing van zijn talenten,...” In zijn Groningse oratie (1917) over ‘complexe getallenstelsels’ bespreekt Wolff uitbreidingen van de complexe getallen in verband met de fysische toepassingen, zoals de quaternionen. Argumenten uit de groepentheorie spelen een belangrijke rol. Ook nu geeft hij een overzicht van de recente literatuur. Wolff behandelt in zijn Utrechtse oratie (1922) de grondslagendiscussie. De axiomatiek van Hilbert en het intuïtionisme van Brouwer dwingen wiskundigen te kiezen hoe ze hun begrippen, zoals bijvoorbeeld het continuüm, willen invoeren. Het helpt niet om, zoals Hilbert doet, de intuïtionisten van een ‘Putschver-

such’ te beschuldigen, zegt Wolff, die vervolgt: “Rustverstoring moge den hervormers verweten worden, erkend zij dat zij niet alleen afbreken, maar ook opbouwen: Brouwer biedt ons een nieuwe verzamelingenleer aan, al zal het (...) eenigen tijd duren, eer ze gemeengoed van de wiskundigen is.” Zijn conclusie luidt:

“Het gaat er dus om, wat Wiskunde is. De strijd zal nog lang voortduren.”

In Wolffs boeken, tijdschriftartikelen en promotieonderwerpen ligt het zwaartepunt bij de analyse. Hij schreef boeken over analytische meetkunde (1922) en *Fourier'sche Reihen mit Aufgaben* (1931). Een hoofdstuk van zijn hand over dubbelintegralen besluit het boek *Kollege integraalrekening* (...) van H.B.A. Bockwinkel (1932). Drie artikelen van in totaal 38 pagina's met een overzicht van de Lebesgue-integratie (1935) sluiten hier goed bij aan.

Het analyseonderzoek is meestal in Franse stijl, in combinatie met afschattingen volgens Landau. Wolff woonde zelfs in

Parijs enkele malen (1924, 1937) een zitting van de Académie bij. Zijn bijdragen werden meestal door Émile Borel ingebracht. In twee gevallen liet Borel op een artikel van Wolff een lovend commentaar volgen, zoals in 1923 bij een artikel over niet-meetbare verzamelingen. Ook met Arnaud Denjoy, die van 1917 tot 1922 in Utrecht de analyse onderwees en er de voorganger van Wolff was, onderhield Wolff goede contacten. De twee publiceerden in 1933 een gemeenschappelijk artikel, nog steeds actueel is de *stelling van Denjoy-Wolff* (1926) (zie voor meer informatie het artikel van Han Peters elders in dit nummer [7]) en in een artikel over reeksen (1921) deelt Wolff mee dat het voortkomt uit een gesprek met Denjoy. De functietheorie kent de *stelling van Julia-Wolff-Carathéodory*, die in 1920 gepostuleerd werd door Julia en bewezen door Wolff (1926) en Carathéodory (1929). De stelling hangt samen met het *lemma van Schwarz* over een analytische functie  $f$  in de open eenheidscirkel. Wolff breidde in 1926 deze stelling uit tot de

rand van de eenheidscirkel. Deze uitbreiding wordt het *lemma van Schwarz-Wolff* genoemd. Boas [2] geeft een gedetailleerde beschrijving.

Verschillende artikelen van Wolff ontstonden als congresbijdragen. In Nederland nam hij deel aan de Nederlandse natuur- en geneeskundige congressen en twee maal bezocht hij het vierjaarlijkse internationale wiskundecongres, in 1924 in Toronto en in 1932 in Zürich. Over Toronto doet Wolff verslag in het *Algemeen Handelsblad* (3 september 1924). De Nederlandse delegatie, uitgezonden door het WG, bestond naast Wolff en echtgenote uit de hoogleraren W. Kapteyn (Utrecht, in 1918 met emeritaat gegaan), J.A. Barrau (Groningen) en W. van der Woude en echtgenote (Leiden). Een belangrijk onderwerp in zijn verslag is de afwezigheid van de Duitse wiskundigen, “hetgeen moet worden toegeschreven aan de helaas nog steeds voortdurende politieke onverdraagzaamheid en wrok”, en waartegen verschillende landen waaronder Nederland bij het ‘Conseil international des recherches’ protesteerden met het voorstel om deze ban op te heffen. Over de deelname van Wolff aan het congres in Zürich (1932) bericht in Utrecht de aftredend rector in zijn jaarverslag. Wolff staat op de foto van de deelnemers. Tijdens het congres blijkt dat een belangrijk onderdeel uit zijn bijdrage een jaar eerder ook door de Hongaars-Zweedse wiskundige Marcel Riesz gevonden was.

In Toronto besprak Wolff het werk van H. Looman, die in 1923 bij hem gepromoveerd was, en zijn bijdrage in Zürich sluit aan bij het werk over Stieltjes-integralen, waarop F. de Kok in 1932 promoveerde. Wolff heeft 25 keer de doctorsbul uitgereikt, waarvan drie keer in 1918 in Groningen. Onder de gepromoveerden zijn twee vrouwen, een in Groningen en een in Utrecht. De meeste proefschriften hebben betrekking op eigenschappen van analytische functies, vooral hun voortzetting tot de rand van de open eenheidsschijf. Meetkunde, verzamelingenleer, differentiëren en integreren, sommatie van reeksen en iteratie komen elk een tot vier keer als promotieonderwerp voor. Zeven promoties krijgen het oordeel *cum laude*. Met promovendi Grootenboer (1932), De Kok en Vredenduin (1931) publiceert Wolff gemeenschappelijke artikelen. Veel van de gepromoveerden waren of werden leraar en enkele van hen hebben in het wiskun-

deonderwijs bekendheid gekregen: Van Haselen als schoolboekauteur, Vredenduin en Wansink om hun didactische publicaties, De Kok als lector in Delft en Visser als hoogleraar in Delft en Leiden.

### Contacten met het middelbaar onderwijs

Na zijn overstap van het middelbaar onderwijs (MO) naar de universiteit zet Wolff het contact met het MO voort. Vanaf 1921 tot 1931 is hij geëngageerd bij eindexamens. De geëngageerden zijn in vijf talen een groot deel van de maand juni op verschillende scholen bij de mondelinge examens aanwezig. Wolff is vanaf 1922 ook regelmatig geëngageerd bij examens van de TH Delft en hij maakt van 1927 tot 1939 deel uit van de examencommissie voor de MO-akten wiskunde. In 1928 zorgt hij voor opschudding door werk van een leerling af te keuren, terwijl de leraar het correct vindt. De leerling had  $x = 9$  gevonden als een van de oplossingen van de vergelijking  $x + \sqrt{x} = 6$ . Als  $\sqrt{9} = -3$  in orde bevonden wordt, is  $x = 9$  inderdaad een oplossing. Maar Wolff bevond dat niet in orde en noemde de eenwaardigheid van de wortelfunctie een ‘internationale conventie’. De examinerator schreef aan *Euclides*, hetgeen leidde tot een uitvoerig artikel ‘Eenwaardig of meerwaardig’ van redacteur Wijdenes. Deze constateerde dat er in de schoolboeken geen eenduidige opvatting was over de een- of meerwaardigheid van  $\sqrt{x}$ . In een naschrift (1927–1928) bij het artikel van Wijdenes licht Wolff zijn standpunt toe. Hij begint met de nu (2018) overal gehanteerde definitie “Bij het rekenen met reële getallen definieert men  $\sqrt{a}$ , voor  $a > 0$ , als het positieve getal welks kwadraat gelijk is aan  $a$ .” Van de stelling  $\sqrt{ab} = \sqrt{a} \cdot \sqrt{b}$  voor  $a > 0$  en  $b > 0$  zou niets overblijven bij een dubbelzinnige definitie, stelt hij. Gelijkheid van twee uitdrukkingen heeft alleen zin als deze ondubbelzinnig zijn.

Begin jaren dertig is Wolff lid van de ‘commissie Muller’ van de Algemeene Vereniging van Academisch gevormde Leraren. Wolff neemt in deze commissie, die maart 1932 rapport uitbrengt, met de wiskundigen Bremekamp en Droste een minderheidsstandpunt in. De drie stellen dat in de lerarenopleiding prioriteit moet liggen in het praktisch oefenen van het klassikaal lesgeven boven de theoretische kennis van de pedagogiek en psychologie van de puberteitsperiode. In 1936 rakelt Wolff het onderwerp opnieuw op. Hij reageert op het

verslag in het studentenblad *Vivos vocos* van het landelijk overleg van de bèta-faculteiten over de lerarenopleiding. Een van de conclusies uit dit overleg van 30 december 1935 luidt: “Over de wenselijkheid van een pedagogisch-didactische leraarsopleiding in universitair verband was men het geheel eens.” Wolff reageert in het volgende nummer (24 januari 1936) en twee dagen later neemt de krant *Het Vaderland* zijn reactie over en maakt er landelijk nieuws van:

“Prof. dr. J. Wolff heeft er nu op geantwoord, dat nooit één enkele student hem den wensch bijv. van didactische colleges heeft kenbaar gemaakt. Durft men dat niet? Dat aan te nemen ware kwetsend. Conclusie: er zijn misschien wel eenige studenten vervuld van dien wensch, doch niet vurig genoeg om er met hun hoogleeraar over te praten. Dedden ze dat, dan zou hij een college gaan geven over de didactiek der Wiskunde als volgt: als gij leeraar wordt, praepareer dan uw lessen met de allergrootste zorg, controleer het huiswerk uwer leerlingen, duld geen slordigheid, sta niet teveel te doceeren, laat de leerlingen ook in de klas flink werken, deel uw rector of directeur al uw moeilijkheden mee, en zoek overigens uw eigen methode volgens uw eigen karakter.

Het college is hiermee geëindigd. Laat u niet wijsmaken dat er nog meer is. (...)”

Het komt hem op kritische reacties te staan. De Utrechtse gymnasiumleraar en medelid van de ‘commissie Muller’ A.D. Nathans en de Haagse leraar Nederlands en Frans en polemist F.C. Dominicus zetten in het *Utrechts Nieuwsblad* en *De Telegraaf* Wolffs opvattingen neer als achterhaald, ongeïnformeerd en soms ook feitelijk onjuist. De volgende twee passages uit het betoog van Dominicus vatten toon en inhoud van de kritiek goed samen:

“Het is gepraat van iemand, die ondanks zijn practijk in drie verschillende typen van scholen, niet het geringste denkbeeld heeft van de moeilijkheden, welke zich daar kunnen voordoen.”

en de laatste twee alinea’s

“En dit kan ik hem tenslotte wel zeggen, dat de leeraren, die ik ken, voor verreweg het grootste deel ten volle overtuigd zijn, dat een goede opleiding nuttig en noodig is. Wil men daarvan

een caricatuur maken en ze voorstellen als een theoretisch college in geschiedenis van psychologie en paedagogiek, dan is dit natuurlijk een klein kunstje.

Maar zóó zien de leeraren, die in de levende M[idde]lbare[S]chool staan, het niet. Laat prof. Wolff zich daarvan eerst eens op de hoogte stellen en dan zal hij bemerken, dat er nog wel wat anders te verrichten is dan eenige huismiddeltjes aan de hand te doen.”

In *De Telegraaf* volgen een reactie van Wolff (12 maart 1936), een weerwoord van Dominicus (17 maart 1936) en een ‘woord van protest’ tegen de werkwijze van Dominicus door de Utrechtse logicus Griss (1 april 1936). De discussie over de universitaire lerarenopleiding zal met telkens nieuwe opponenten nog vele malen terugkomen.

In het archief van Tatiana van Aardenne-Ehrenfest bevindt zich een opmerkelijke brief, die verband houdt met het bovenstaande. De brief, gedateerd Ede 6-2-1936, is van de hand van Carel (C.C.J.) de Ridder. De Ridder (Amsterdam 1881–Ede 1962) studeerde na een Amsterdamse promotie in de rechten wis- en natuurkunde in Leiden, in 1925 afgesloten met het doctoraal examen. Hij was een ouderejaars studiegenoot van Tatiana Ehrenfest (Wenen

1905–Dordrecht 1984), die in januari 1928 in Leiden afstudeerde. De Ridder schrijft in zijn brief:

“Gisteren kwam toevallig Prof. Wolff in Utrecht in de Wisk. Leeskamer, toen ik er was. Er waren verder geen mensen aanwezig, we konden wel een uur samen praten. Ik vond hem erg aardig. Eerst over de krantenartikels (die daar lagen) waarin hij aangevallen wordt omdat hij gezegd heeft dat aparte leeraarsopleiding aan de Universiteit voor wisk., enz. larie is. Het was niet voor de algemeene pers bestemd geweest, wat hij aan een studentenblad had geschreven, — ‘maar nu’, zei hij, ‘krijg ik last van vlooiën en muggen.’

Daarna over sommen. (...)”

Er volgt een bewijs van de Stelling van Steiner–Lehmus, zoals Wolff dat door een Haagse gymnasiumleerling had horen geven. Dan gaat De Ridder verder:

“Daarna zei ik dat ik jou het vraagstuk van v.d. Corput had opgegeven, maar slecht en onvolledig. En ik vroeg hem of hij het voor je volledig wilde opschrijven. Daartoe was hij dadelijk bereid (zie bijgaand het origineel, ik heb copie), maar zei nog even: is die dame mis-

schien intuïtioniste? Ik heb geantwoord dat ik dacht van niet. — Verkeerd? —”

De Ridder besluit met enkele familie zaken bestemd voor Gijs (van Aardenne), Tatiana's echtgenoot.

De brief schetst een levendig beeld van Wolff. Nog opmerkelijker is dat het laatste artikel van Wolff, in *Commentarii Mathematici Helvetici* (1944), gepubliceerd werd samen met Tatiana van Aardenne-Ehrenfest als eerste auteur. De wegen van Wolff en Mevrouw van Aardenne hebben elkaar eerder gekruist, bijvoorbeeld in hun bezigheden als geëngageerde, maar deze brief heeft de afstand tussen de twee aanzienlijk teruggebracht. Tatiana van Aardenne-Ehrenfest heeft het probleem van Van der Corput in zijn oorspronkelijke formulering uit 1935 in twee artikelen (1945, 1949) opgelost, zie het artikel van Rob Tijdeman elders in dit nummer [9], dat ook een foto bevat van Wolffs redactie van het probleem.

Het tweede deel van deze biografie, te verschijnen in het decembernummer van dit blad (NAW 5/19, Nr. 4), bespreekt de oorlogsjaren, met onder meer het dagboek van Otto Blumenthal, met wie Wolff aan tal van wiskundige onderwerpen werkte. Het bevat tevens een bronnenoverzicht, secundaire literatuur en Wolffs publicatielijst. ☛

## Bronnen

Voor de levensbeschrijving zijn de gebruikelijke genealogische bronnen geraadpleegd. Deze zijn hieronder niet opgenomen. Ook artikelen en familieadvertenties in kranten, geraadpleegd via [delpher.nl](http://delpher.nl) en de website van het Centraal Bureau voor Genealogie, zijn hieronder niet uitgesplitst. Een belangrijke bron is de gepubliceerde genealogie van de familie Wolff [11].

## Archiefbronnen

### Groningen, Groninger Archieven:

toegang 46 inv.nr 624, Handelingen van de faculteit der wis- en natuurkundige wetenschappen aan de hogeschool te Groningen, 1915–1929: Notulenboek van de faculteitsvergaderingen. p. 29, 34, 116

toegang 46 inv.nr 629, Faculteit der wis- en natuurkundige wetenschappen, Ingekomen en concepten-van-uitgaande stukken, 1909-febr-28 tot 1922-juli-30. Brieven van en aan curatoren van 6-11-1916 en 6-1-1917, deze laatste met publicatielijst van J. Wolff

### Groningen, Universiteitsbibliotheek:

Series lectionum 1918. Online: <http://facsimile.ub.rug.nl/cdm/fullbrowser/collection/Planos/id/1038/rv/compoundobject/cpd/1120>

### Den Haag, Centraal bureau voor genealogie:

familieadvertenties en Duitse overlijdensakten via ‘Oorlogsbronnen’

### Den Haag, Koninklijke Bibliotheek:

artikelen en advertenties in kranten via [delpher.nl](http://delpher.nl)

### Den Haag, verzekeringsmaatschappij Aegon:

gegevens over aanstelling Wolff bij O.L.V.E.H. afkomstig uit persoonlijke mededeling 22-8-2016 van de heer Pierre Don, bedrijfsarchivaris

### Haarlem, Noord-Hollands Archief:

toegang 288

inv.nr 3 Correspondentie van C. Visser met J. Wolff (1931–1937)

inv.nr 5 Aantekeningen van colleges van prof. dr. J. Wolff (1929–1931)

toegang 504 inv.nrs 1 en 2 Dictaten van drs. R.W. Lijdsman uit periode 1925–1955, onder meer van Wolff en Nieland

toegang 508 inv.nrs 1-3 G. Röhrmann, Collegedictaten en andere aantekeningen, onder meer colleges van Wolff (1932–1936)

toegang 615 inv.nr 85 Brief en briefkaart van Wolff aan H. Freudenthal (1935, 1943)

toegang 685, doos 5 Archief T.P. van Aardenne-Ehrenfest (niet geïnventariseerd)

### Utrecht, Utrechts Archief:

toegang 59 (Archief Curatoren Rijksuniversiteit Utrecht)

inv.nrs 264, 265, 270 Jaarverslagen, ... aan de minister van binnenlandse zaken, c.q. de minister van onderwijs, resp. 1923/24, 1924/25 en 1929/30

inv.nrs 343-346 *Jaarboek der Rijksuniversiteit te Utrecht 1921–1922 tot 1924/25*

inv.nr 647 Stukken betreffende de hoogeraren in de integraalrekening, ... (hierin stukken over de voordracht van Wolff, tevens correspondentie van curatoren met Wolff en met anderen over Wolff)

inv.nr 648 Stukken betreffende de hoogeraren in de ... meetkunde (hierin Wolffs correspondentie over de opvolging van De Vries)

### Utrecht, Universiteitsmuseum:

Briefkaart en vijf brieven van J. Wolff aan collega's, onder wie de rector magnificus van de Rijksuniversiteit Utrecht (1923–1934)

**In het artikel besproken publicaties van Wolff**

(aan het eind van deel 2 volgt een compleet publicatie-overzicht)

1907

*Dynamen, beschouwd als duale vectoren* (Academisch proefschrift ... aan de universiteit van Amsterdam ...), M.M. Olivier, Amsterdam, 1907/ [JFM 41.0625.01]

1910–1911

Über ein Nullsystem beim Büschel quadratischer Flächen, *NAW* 2/9 (1910–1911), 85–115. [JFM 46.0403.01] Bekroonde prijsvraaginzending.

Quadratische omwentelingscomplexen en omwentelingscongruenties (2, 2), *Versl. Kon Akad. v. Wet.* 19 (1911), 1280–1284. [JFM 42.0693.03]

1915

Congruenties met brandlijnen, *Handelingen van het 15de Ned. natuur- en geneeskundig congres gehouden te Amsterdam* (1915), 206–208. [JFM 45.0932.06]

1916

‘De nieuwe onderzoekingen op het gebied der algebraïsche oppervlakken’, rede, gehouden 2 februari 1916, bij de opening van zijn lessen in de wiskunde, als privaatdocent aan de universiteit van Amsterdam, 1916; online: [pub.math.leidenuniv.nl/~edixhovensj/talks/2014/cleveringa/oratie.pdf](http://pub.math.leidenuniv.nl/~edixhovensj/talks/2014/cleveringa/oratie.pdf).

1917

‘Complexe getallenstelsels’, rede uitgesproken bij de aanvaarding van het hoogleraarsambt aan de Rijks-universiteit te Groningen op 28 maart 1917, P. Noordhoff, Groningen, 1917. [JFM 46.0186.04]

1921

Riemann'sche integralen op puntverzamelingen, *Christiaan Huygens* 1 (1921), 150–162. [JFM 48.0264.03]

Sur les séries  $\sum \frac{A_k}{z - a_k}$ , *CR* 173 (1921), 1056–1057, 1327–1328. [JFM 48.0320.01] (CR staat steeds voor *Comptes Rendus hebdomadaires des séances de l'Académie des Sciences*) Op het eerste deel volgt een positief commentaar van Émile Borel.

1922

‘Over het subjectieve in de wiskunde’, rede gehouden bij de aanvaarding van het ambt van hoogleeraar aan de Rijksuniversiteit te Utrecht op maandag 16 oktober 1922, P. Noordhoff, Groningen, 1922.

*Inleiding tot de analytische meetkunde van het platte vlak*, P. Noordhoff, Groningen, 1922. [JFM 48.0685.02]

Over convexe puntverzamelingen in het platte vlak, *Christiaan Huygens* 2 (1922), 124–132. [JFM 48.0217.03]

1923

Sur les ensembles non mesurables, *CR* 177

(1923), 863–864. Op het artikel volgt een positief commentaar van Émile Borel.

Over de verzameling der waarden  $x$ , waarvoor een functie  $f(x)$  tusschen twee door haar aangenomen waarden ligt, *Handelingen van het 19e Ned. natuur- en geneeskundig congres gehouden te Maastricht* (1923), 121–122. [JFM 49.0175.02]

1925

Over afgeleide functies van een reële veranderlijke, *Handelingen van het 20e Ned. natuur- en geneeskundig congres gehouden te Groningen* (1925), 154–155. [JFM 51.0215.05]

1926

Sur l'itération des fonctions holomorphes dans une région, et dont les valeurs appartiennent à cette région, *CR* 182 (1926), 42–43. [JFM 52.0309.02]

Sur l'itération des fonctions bornées, *CR* 182 (1926), 200–201. [JFM 52.0309.03]

Sur une généralisation d'un théorème de Schwarz[tz], *CR* 182 (1926), 918–920. [JFM 52.0309.05]

Sur une généralisation d'un théorème de M. Schwartz, *CR* 183 (1926), 500–502. [JFM 52.0309.06]

1928

Naschrift [bij ‘Eenwaardig of meerwaardig’ van P. Wijdenes], *Euclides* 4 (1928), 104–105.

On the sufficient conditions for analyticity of functions of a complex variable, *Proc. Int. Math. Congress (Toronto 1924)*, Toronto Univ. Press, Toronto, 1928, vol. 1, 457–459. [JFM 54.0328.02]

1931

*Fourier'sche Reihen mit Aufgaben*, P. Noordhoff N.V., Groningen, 1931.

1932

Dubbele integralen, in: H.B.A. Bockwinkel, *Kollege integraalrekening ... met een aanhangsel over dubbele integralen van J. Wolff...*, Drukkerij Holland, Amsterdam, 1932, pp. 441–485.

J. Wolff en F. de Kok, Les fonctions holomorphes à partie réelle positive et l'intégrale de Stieltjes, *Bulletin Soc. Math. France* 60 (1932), 221–227. [Zbl 0006.17101]

J. Wolff en B. Grootenboer, Sur une propriété des dérivées d'une fonction à partie réelle positive, *CR* 195 (1932), 997–998. [Zbl 0005.40302]

J. Wolff en P.G.J. Vredenduin, Sur les coefficients d'une série de Fourier, *NAW* 2/17 (1932), 144–146. [Zbl 0003.25402]

Beschränkte analytische Funktionen und Stieltjes-Integrale, *Verhandlungen des Internationalen Mathematiker-Kongresses Zürich 1932*, Orell Füssli, Zürich, 1932, vol. 2, 126–127. [JFM 58.0353.18]

1933

J. Wolff en A. Denjoy, Sur la division d'une sphère en trois ensembles, *Enseign. Math.* 32 (1933), 66–68. [Zbl 0008.18103]

1935

Metriek van puntverzamelingen. Lebesgue-integratie. *Mathematica B* 4 (1935), 1–12, 33–50, 65–71. [JFM 61.0238.01, .02, .03]

1936

Over [de] leraarsopleiding, *Vivos vocos* 13(10) (1936), 115–116.

1944

T. van Aardenne-Ehrenfest en J. Wolff, Über die Grenzen der einfachzusammenhängenden Gebiete, *Commentarii Mathematici Helvetici* 16 (1943–44), 321–323.

**Publicaties over Wolff en achtergronden**

- 1 J.A. Barrau, In memoriam prof. dr. J. Wolff, *NAW* 2/22 (1947), 113–114.
- 2 H.P. Boas, Julius and Julia: Mastering the Art of the Schwarz Lemma, *Am. Math. Monthly* 117, November 2010, 770–785.
- 3 Frits Broeyer, *Het Utrechtse universitaire verzet – ‘Heb je Kafka gelezen?’ 1940–1945*, Uitgeverij Matrijs, Utrecht, 2014.
- 4 J.G. van der Corput, Wiskunde, in K.F. Proost en J. Romein, eds., *Geestelijk Nederland 1920–1940. Deel II De wetenschappen van natuur, mens en maatschappij*, NV Uitg.-Mij Kosmos, Amsterdam en Antwerpen, 1948, pp. 255–291; met portret van Wolff door Michel Winkel op p. 267 en paragraaf ‘De betekenis van J. Wolff’ op pp. 279–280.
- 5 *Jaarboek der Rijksuniversiteit te Groningen, 1916–1917*, J.B. Wolters, Groningen, Den Haag, 1917, p. 41.
- 6 R.A. Kortram, In memoriam Cornelis Visser, *NAW* 5/2 (september 2001), 202–203. Online: <http://www.nieuwarchief.nl/serie5/pdf/naw5-2001-02-3-202.pdf>.
- 7 H. Peters, De stelling van Denjoy en Wolff, *NAW* 5/19(2) (juni 2018), 87–89.
- 8 R. Siegmund-Schultze, *Mathematiker auf der Flucht vor Hitler. Quellen und Studien zur Emigration einer Wissenschaft*, Vieweg, Braunschweig/Wiesbaden, 1998. Dokumente zur Geschichte der Mathematik Band 10.
- 9 R. Tijdeman, Gelijkverdeelde rijen bestaan niet, *NAW* 5/19(2) (juni 2018), 90–92.
- 10 S. van Walsum, *Ook al voelt men zich gewond. De Utrechtse universiteit tijdens de Duitse bezetting 1940–1945*, Universiteit Utrecht, Utrecht, 1995.
- 11 M. Wolff, *De nakomelingen van Wolff ben Eleazar en Moshe ben Gompertz Halevi, 1695–1995*, Arnhem, 2001; in het bijzonder pp. 196–200.

Han Peters

Korteweg-de Vries Instituut voor Wiskunde  
Universiteit van Amsterdam  
h.peters@uva.nl

## Geschiedenis

# De stelling van Denjoy en Wolff

Elders in dit nummer vindt u een biografie van Julius Wolff (1882–1945) van de hand van Jan van Maanen. In 1926 bewees Wolff samen met Arnaud Denjoy een stelling over holomorfe afbeeldingen die nog steeds actueel is. Han Peters gaat in dit artikel verder in op deze stelling van Denjoy en Wolff.

In het begin van de twintigste eeuw ontstond er veel interesse in complexe dynamische systemen, met name in Frankrijk. In dit vakgebied bestudeert men het asymptotische gedrag van banen

$$z, f(z), f^2(z), \dots$$

van holomorfe afbeeldingen  $f: X \rightarrow X$ . Hier is  $X$  een (deelverzameling van)  $\mathbb{C}$ , een Riemannoppervlak, of nog algemener, een complexe variëteit. Door belangrijke bijdragen van onder anderen de Franse wiskundigen Montel, Julia en Fatou werd het vakgebied op de kaart gezet en werden vele eigenschappen van deze systemen blootgelegd. Onder andere bestudeerde men eigenschappen van lokaalholomorfe functies  $f$  rond een vast punt  $z = f(z)$ , en de iteratie van polynomen in het complexe vlak; zie Figuur 1 voor een illustratie van een zogenaamde Juliaverzameling. In beide richtingen werden veel belangrijke doorbraken geboekt, al bleven ook veel fundamentele vragen liggen tot het vakgebied ongeveer een halve eeuw later opnieuw opbloede. In Nederland werd gewerkt aan dynamica op de schijf, het geval waarin de ruimte  $X$  gelijk is aan de eenheidsschijf  $\mathbb{D}$ . Een belangrijke rol is hier weggelegd voor het Lemma van Schwarz:

**Lemma van Schwarz.** Zij  $f: \mathbb{D} \rightarrow \mathbb{D}$  een holomorfe functie met  $f(0) = 0$ . Dan volgt voor alle  $z \in \mathbb{D}$  dat

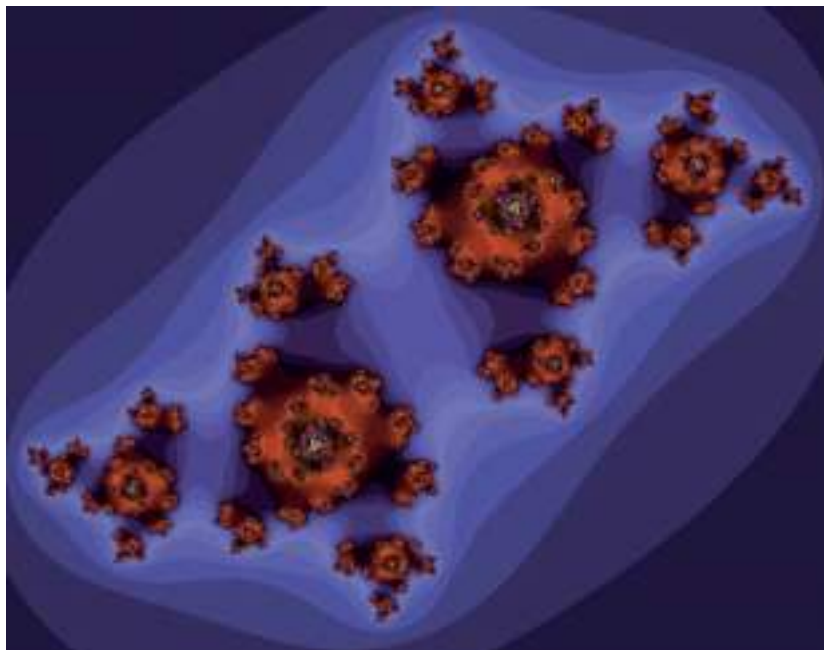
$$|f(z)| \leq |z|,$$

met gelijkheid dan en slechts dan als  $f$  een rotatie is: dus als  $f: z \mapsto e^{i\theta}z$ .

Stel nu dat we een automorfisme van de schijf hebben, dat wil zeggen een bijectieve holomorfe afbeelding  $f: \mathbb{D} \rightarrow \mathbb{D}$ . Als  $f(0) = 0$  dan volgt uit het Lemma van Schwarz dat  $f$  een rotatie is, want het lemma gaat op voor zowel  $f$  als  $f^{-1}$ . Als  $f(0) = a \neq 0$  dan bekijken we de afbeelding  $g = \psi_a \circ f$ , waar

$$\psi_a(z) = \frac{z-a}{1-\bar{a}z}.$$

Men controleert eenvoudig dat  $\psi_a$  een automorfisme van de schijf is, en dus  $g$  ook,



**Figuur 1** De Juliaverzameling van  $z \mapsto z^2 - 0,3 + 0,7i$ .

met  $g(0) = 0$ . Zoals net gezien is  $g$  een rotatie, en er volgt dat alle automorfismen van de eenheidsschijf de vorm

$$\varphi: z \mapsto e^{i\theta} \frac{z - a}{1 - \bar{a}z}$$

hebben, waar  $\theta$  reëel is en  $a \in \mathbb{D}$ . Merk op dat deze automorfismen, voorbeelden zijn *Möbiustransformaties*, gedefinieerd zijn op de hele Riemannsche cirkel  $\hat{\mathbb{C}} = \mathbb{C} \cup \{\infty\}$ . Voor  $a = 0$  krijgen we precies de rotaties met vaste punten in 0 en oneindig. In alle andere gevallen voldoen de vaste punten van  $\varphi$  aan de tweedegraadsvergelijking

$$e^{i\theta}(p - a) = p \cdot (1 - \bar{a}p),$$

en dus aan

$$p^2 + \frac{(e^{i\theta} - 1)}{\bar{a}}p - \frac{ae^{i\theta}}{\bar{a}} = 0.$$

Er volgt dat het product van de twee vaste punten gelijk moet zijn aan  $-ae^{i\theta}/\bar{a}$ , wat norm 1 heeft. Er zijn dus drie mogelijkheden: (1) één van de vaste punten ligt binnen, en het andere ligt buiten de eenheidscirkel, (2) beide vaste punten liggen op de eenheidscirkel, of (3) er is een dubbel vast punt, noodzakelijk ook op de eenheidscirkel.

Het feit dat de cirkel op de cirkel wordt afgebeeld legt sterke restricties op de afgeleiden van  $\varphi$  in de vaste punten. In geval (1) kunnen we conjugeren met  $\psi_p$ , waardoor het vaste punt in de oorsprong komt te liggen. Uit het Lemma van Schwarz volgt dat  $\psi_p \circ \varphi \circ \psi_p^{-1}$  een rotatie is. We zeggen dat  $\varphi$  *conjugent* is aan een rotatie.

In geval (2) is het ene punt aantrekkend ( $|\varphi'(z)| < 1$ ) en het andere afstotend ( $|\varphi'(z)| > 1$ ). In dit geval is de afbeelding conjugent aan de functie  $z \mapsto c \cdot z$ , voor  $|c| < 1$ . Merk op dat 0 nu het aantrekkende vaste punt is, en oneindig het afstotende. Op het afstotende vaste punt na convergeren alle banen naar het aantrekkende punt.

In het laatste geval (3) is de afgeleide in het vaste punt noodzakelijk gelijk aan 1; het punt heet *parabolisch*. In dit geval is de afbeelding conjugent aan de functie  $z \mapsto z + 1$ , waarvan alle banen naar het parabolische vaste punt oneindig convergeren.

Het gedrag van afbeeldingen  $f: \mathbb{D} \rightarrow \mathbb{D}$  die niet bijtief zijn werd beschreven door Wolff en Denjoy, die onafhankelijk van elkaar de oplossing publiceerden in 1926 [4, 7]. Het leverde de volgende stelling op:

**Stelling van Denjoy en Wolff.** *Zij  $f: \mathbb{D} \rightarrow \mathbb{D}$  holomorf. Of  $f$  is conjugent aan een rotatie, of alle banen convergeren naar een uniek punt  $\hat{z} \in \bar{\mathbb{D}}$ .*

De stelling wordt in alle klassieke leerboeken over dit onderwerp behandeld, bijvoorbeeld in [1, 3, 6]. We volgen het boek van Milnor. Het voornaamste ingrediënt in het bewijs is de *Poincarémetriek* op de schijf. Een *conforme metriek* is een infinitesimale metriek  $\varphi(z) |dz|$ , voor een gladde functie  $\varphi: \mathbb{D} \rightarrow [0, +\infty)$ . Zo'n metriek induceert een afstands begrip door voor elke gladde kromme  $\gamma: [a, b] \rightarrow \mathbb{D}$  een lengte

$$\ell(\gamma) = \int_a^b |\gamma'(t)| \varphi(\gamma(t)) dt$$

te definiëren. De afstand  $d_\varphi(z, w)$  is de minimale lengte van een kromme van  $a$  naar  $b$ .

Gebruikmakend van de afgeleide van de functies  $\psi_a$  kan men bewijzen dat er, tot op een multiplicatieve constante, een unieke functie  $\varphi$  is waarvoor de afstand  $d_\varphi(\cdot, \cdot)$  invariant is onder holomorfe automorfismen, dat wil zeggen  $d_\varphi(f(z), f(w)) = d_\varphi(z, w)$ . We schrijven  $d_{\mathbb{D}}(\cdot, \cdot)$  voor deze afstand, de *Poincaréafstand*. De precieze vorm van de functie  $\varphi$ , die alleen van de norm  $|z|$  afhangt, is voor ons niet van belang; het bewijs gebruikt alleen de volgende eigenschappen:

1. De ruimte  $(\mathbb{D}, d_{\mathbb{D}})$  is compleet, dat wil zeggen: iedere Cauchyrij is convergent. Bovendien:  $\varphi(z) \rightarrow \infty$  als  $|z| \rightarrow 1$ .
2. Afstanden worden behouden onder automorfismen van de schijf. Voor alle andere holomorfe functies van  $\mathbb{D}$  naar  $\mathbb{D}$  geldt dat ze afstanden strikt verkleinen.
3. Schijven  $B_r(z) = \{w: d_{\mathbb{D}}(z, w) < r\}$  zijn precies euclidische schijven (maar voor  $z \neq 0$  is  $z$  niet het euclidische middelpunt).

Eigenschap 1 kan eenvoudig berekend worden uit de formules van automorfismen van  $\mathbb{D}$ . Eigenschap 2 volgt uit het Lemma van Schwarz, en eigenschap 3 uit het feit dat cirkels (plus lijnen) door Möbiustransformaties op cirkels (plus lijnen) worden afgebeeld.

**Bewijs van de stelling.** Voor automorfismen van de schijf hebben we het gedrag reeds bepaald. We mogen daarom aannemen dat  $f$  geen automorfisme is, en Poincaré afstanden dus strikt verkleint. We bekijken

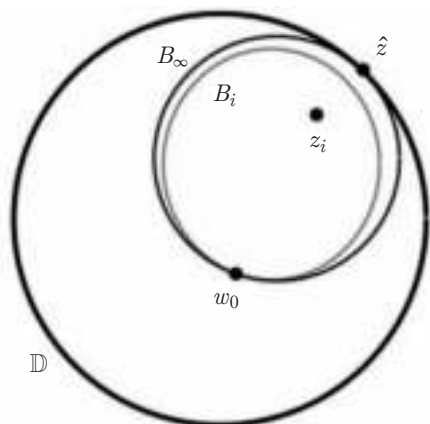
de afbeeldingen  $f_\epsilon = (1 - \epsilon) \cdot f$ . Vanwege de vastepuntstelling van Brouwer, toegepast op een iets kleinere gesloten schijf, volgt dat iedere  $f_\epsilon$  een uniek vast punt heeft. Wegens compactheid van  $\bar{\mathbb{D}}$  kunnen we een rij  $\epsilon_i$  kiezen waarvoor deze vaste punten  $z_i$  convergeren, zeg naar  $\hat{z} \in \bar{\mathbb{D}}$ .

Als  $\hat{z} \in \mathbb{D}$  dan volgt onmiddellijk dat dit een vast punt van  $f$  is. Omdat  $f$  afstanden strikt verkleint moeten alle banen naar dit vaste punt convergeren, en zijn we klaar. We mogen dus aannemen dat  $\hat{z} \in \partial\mathbb{D}$ , in welk geval  $f$  geen vast punt kan hebben. We beweren dat hieruit volgt dat alle banen van  $f$  naar de rand convergeren. Het bewijs van deze bewering is het lastigste deel van het bewijs, en indien gewenst kan de lezer de komende twee alinea's overgeslaan zonder later in de problemen te komen.

Stel dat niet alle banen naar de rand convergeren. Dan zijn er een punt  $z \in \mathbb{D}$ , en een stijgende rij natuurlijke getallen  $(n_j)$  waarvoor  $f^{n_j}(z)$  bevat is in een compacte deelverzameling van  $\mathbb{D}$ . Door indien nodig een geschikte deelrij te kiezen mogen we aannemen dat  $f^{n_j}(z) \rightarrow p \in \mathbb{D}$ . Door eventueel opnieuw een deelrij te nemen mogen we aannemen dat  $n_{j+1} - n_j \rightarrow \infty$ . We definiëren  $g_j = f^{n_{j+1} - n_j}$ , en merken op dat  $g_j(f^{n_j}(z)) = f^{n_{j+1}}(z)$ . Aangezien de functies  $g_j$  Poincaréafstanden verkleinen en zowel  $f^{n_j}(z)$  als  $f^{n_{j+1}}(z)$  naar  $p$  convergeren volgt dat  $g_j(p) \rightarrow p$ .

Hieruit volgt dat de rij  $g_j$  bevat is in een compacte deelverzameling van  $\mathcal{O}(\mathbb{D}, \mathbb{D})$ , de ruimte van holomorfe functies uitgerust met de topologie van uniforme convergentie op compacte deelverzamelingen van  $\mathbb{D}$ . Dit feit zullen we gebruiken zonder het te bewijzen. Er volgt dat we opnieuw een deelrij kunnen nemen zodat  $g_j \rightarrow g: \mathbb{D} \rightarrow \mathbb{D}$ . Omdat  $g_j(p) \rightarrow p$  volgt dat  $g(p) = p$ . Maar omdat  $g$  een limiet is van de rij  $f^{m_j}$ , waar  $m_j = n_{j+1} - n_j$ , volgt dat  $g$  en  $f$  commuteren. Het volgt in het bijzonder dat  $f(p)$  ook een vast punt is van  $g$ . Maar omdat  $f$  afstanden strikt kleiner maakt, geldt dat ook voor  $g$ , en dus kan  $g$  niet twee verschillende vaste punten hebben. Hieruit volgt dat  $f(p) = p$ , en we hebben een tegenspraak met de observatie dat  $f$  geen vast punt heeft. Dus inderdaad: alle banen van  $f$  convergeren naar de rand van  $\mathbb{D}$ .

Kies nu een willekeurig punt  $w_0 \in \mathbb{D}$ . We introduceren de stralen  $r_i = d_{\mathbb{D}}(w_0, z_i)$  en de schijven  $B_i = B_{r_i}(z_i)$ . Volgens eigenschap 3 is  $B_i$  een euclidische schijf, relatief



**Figuur 2** Een schijf  $B_i$  en de horoschijf  $B_\infty$ , beide bevat in  $\mathbb{D}$ , met de gemarkeerde punten  $\hat{z}$ ,  $z_i$  en  $w_0$ .

compact bevat in  $\mathbb{D}$  wegens eigenschap 1, die het punt  $z_i$  bevat en waarvoor  $w_0 \in \partial B_i$ . Aangezien  $z_i \rightarrow \hat{z}$  volgt dat de schijven  $B_i$  convergeren naar een schijf  $B_\infty$ , noodzakelijk de unieke schijf bevat in  $\mathbb{D}$  die raakt aan de rand van  $\mathbb{D}$  in het punt  $\hat{z}$  en waarvoor  $w_0 \in \partial B_\infty$ . Zo'n schijf rakend aan de rand van  $\mathbb{D}$  wordt wel een *horoschijf* genoemd; zie Figuur 2.

Omdat  $z_i$  een vast punt van  $f_{\epsilon_i}$  is, volgt dat  $f_{\epsilon_i}$  de schijf  $B_i$  binnen zichzelf afbeeldt. Aangezien  $f_{\epsilon_i} \rightarrow f$  en  $B_i \rightarrow B_\infty$  volgt dat  $f$  de schijf  $B_\infty$  binnen zichzelf afbeeldt. Zoals eerder bewezen convergeren alle banen in  $\mathbb{D}$  naar de rand  $\partial\mathbb{D}$ , dus het volgt dat banen in  $B_\infty$  naar het randpunt  $\hat{z}$  convergeren, het enige punt in  $\partial\mathbb{D}$  bevat in  $\bar{B}_i$ .

Omdat  $w_0$  willekeurig gekozen was kan de schijf  $B_\infty \subset \mathbb{D}$  willekeurig groot gemaakt worden, en volgt dat alle banen in  $\mathbb{D}$  naar  $\hat{z}$  convergeren.  $\square$

**Opmerking.** Volgens de beroemde afbeeldingsstelling van Riemann is elk enkelvoudig samenhangend gebied in  $\mathbb{C}$  (ongelijk aan  $\mathbb{C}$ ) biholomorf af te beelden op de schijf. Het is dus voor de hand liggend om te denken dat de Stelling van Denjoy en Wolff voor alle begrensde enkelvoudig samenhangende gebieden geldt. Dit is echter niet zo. Het is illustratief om na te gaan

waar in het bewijs wordt gebruikt dat gewerkt wordt op een eerlijke ronde schijf.

### Generalisaties in $\mathbb{R}^n$

De Poincaréafstand kan op verschillende alternatieve manieren gedefinieerd worden. Gegeven vier verschillende punten  $a, x, y, b \in \mathbb{C}$  definiëren we het *kruisquotiënt* door

$$[a, x, y, b] := \frac{|a - y| \cdot |b - x|}{|a - x| \cdot |y - b|}.$$

Het is snel duidelijk dat  $[a, x, y, b]$  gelijk blijft onder translaties  $z \mapsto z + \alpha$ , onder dilataties  $z \mapsto r \cdot z$ , en onder rotaties  $z \mapsto e^{i\varphi} z$ . Meetkundig minder intuïtief, maar eenvoudig te controleren met een berekening, is het feit dat het kruisquotiënt invariant is onder de inversie  $z \mapsto \frac{1}{z}$ . Het volgt dat het kruisquotiënt ook invariant is onder alle mogelijke composities van die vier afbeeldingen, en dus onder gebroken lineaire transformaties: afbeeldingen van de vorm

$$z \mapsto \frac{Az + B}{Cz + D},$$

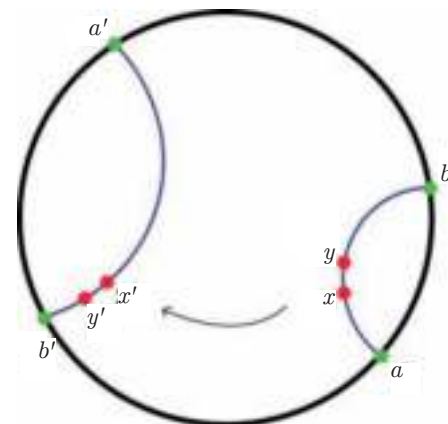
met  $AD - BC \neq 0$ .

Stel nu dat  $x, y \in \mathbb{D}$ , met  $x \neq y$ . De punten  $x, y$  liggen op een unieke cirkel die loodrecht op de eenheidscirkel staat, noem de snijpunten van deze cirkel  $a, b$ , zie Figuur 3. We definiëren

$$\rho(x, y) = \log[a, x, y, b].$$

Men controleert dat  $\rho(\cdot, \cdot)$  voldoet aan de driehoeksongelijkheid, en dus een afstand definieert.

Zij  $f$  nu een automorfisme van  $\mathbb{D}$ . Zoals eerder besproken is  $f$  een gebroken lineaire transformatie, en beeldt de cirkel door de punten  $a, x, y, b$  dus af op een cirkel door de punten  $f(a), f(x), f(y)$  en  $f(b)$ . De punten  $f(a)$  en  $f(b)$  liggen nog steeds op de eenheidscirkel, omdat deze invariant is. Tot slot merken we op dat  $f$  een conforme afbeelding is, en dus tussen verschillende krommen behoudt. Het volgt dat de cirkel door  $f(x)$  en  $f(y)$  haaks de eenheidscirkel



**Figuur 3** Het kruisquotiënt  $[a, x, y, b]$  wordt behouden onder automorfismen.

doorsnijdt in de punten  $f(a)$  en  $f(b)$ . De afstand  $\rho(\cdot, \cdot)$  is dus invariant onder automorfismen van  $\mathbb{D}$ , en daarom gelijk aan (een constante maal) de Poincaré-afstand.

Voor een begrensde convex domein  $U \subset \mathbb{R}^n$  kunnen we op vergelijkbare manier een metriek definiëren. Voor punten  $x, y \in U$  nemen we nu de rechte lijn door  $x$  en  $y$ , en kiezen voor  $a, b$  de corresponderende snijpunten van deze lijn met de rand van  $U$ . Weer blijkt dat

$$\rho(x, y) = \log[a, x, y, b]$$

voldoet aan de driehoeksongelijkheid, en dus een metriek op  $U$  definieert: de *Hilbert-afstand*. In 1997 bewees Beardon [2] de volgende generalisatie van de Stelling van Denjoy en Wolff:

**Stelling.** Zij  $U \subset \mathbb{R}^n$  een begrensde en strikt convex domein, en zij  $f: U \rightarrow U$  een contractie met betrekking tot de Hilbert-afstand. Dan convergeren alle banen van  $f$  naar een uniek punt  $x \in \bar{U}$ .

In zekere zin is de Stelling van Denjoy en Wolff dus niet een stelling over holomorfe functies, maar een stelling over contracties. Zie [5] voor nog verdere veralgemeniseringen naar convexe maar niet noodzakelijk strikt convexe domeinen.  $\dashv$

### Referenties

1. A. Beardon, *Iteration of Rational Functions*, Graduate Texts in Mathematics, No. 132, Springer, 1991.
2. A.F. Beardon, The dynamics of contractions. *Ergodic Theory Dyn. Systems* 17 (1997), 1257–1266.
3. L. Carleson en T.W. Gamelin, *Complex Dynamics*, Universitext: Tracts in Mathematics, Springer, 1993.
4. A. Denjoy, Sur l'itération des fonctions analytiques, *C. R. Acad. Sci.* 182 (1926), 255–257.
5. B. Lemmens, B. Lins, R. Nussbaum en M. Wortel, Denjoy–Wolff theorems for Hilbert's and Thompson's metric spaces, *J. Anal. Math.* 134 (2018), 671–718.
6. J. Milnor, *Dynamics in One Complex Variable*, Third edition, Annals of Mathematics Studies, No. 160, Princeton University Press, 2006.
7. J. Wolff, Sur l'itération des fonctions holomorphes dans une région, et dont les valeurs appartiennent à cette région, *C. R. Acad. Sci.* 182 (1926), 42–43.

Rob Tijdeman

Mathematisch Instituut

Universiteit Leiden

tijdeman@math.leidenuniv.nl

## Geschiedenis

# Gelijkverdeelde rijen bestaan niet

In 1935 stelde J. G. van der Corput een vraag over gelijkverdeling van rijen die in 1945 door mevrouw Van Aardenne-Ehrenfest beantwoord werd. Daarmee startte een interessante ontwikkeling die hier door Rob Tijdeman samengevat wordt.

Stel je wilt  $n$  punten gelijkelijk verdelen over een cirkel. Dan is er een ideale oplossing: je verdeelt de cirkel in  $n$  stukken van gelijke lengte en neemt de eindpunten. Het wordt veel ingewikkelder als je telkens een punt wilt toevoegen en daarbij de punten min of meer gelijkverdeeld wilt houden. Hoe gelijkverdeeld kun je dat doen? Dat is een vraag die J. G. van der Corput in 1935 stelde. In 1948 formuleerde Van der Corput het in een artikel over de wiskunde in Nederland in de jaren 1940–1945 zo [4, p. 273]:

“Stel, ik wijs op een lijnstuk een bepaald punt aan, een seconde later een tweede punt, weer een seconde later een derde punt, en zo ga ik door tot in de eeuwigheid. Kan ik het nu zo inrichten, dat elk paar even lange deelintervallen van het beschouwde lijnstuk steeds ongeveer evenveel aangewezen punten bevat? Nauwkeuriger gezegd, kan ik het gedaan krijgen, dat de afwijking tussen de aantallen der aangewezen punten kleiner is dan honderdduizendmiljard (of een ander groot getal, zo u dit wenst)?”

Als dat het geval is, noemt Van der Corput de aangewezen punten rechtvaardig verdeeld op het lijnstuk, maar hij sprak het sombere vermoeden uit, dat er geen rechtvaardige verdelingen bestaan.

Deze formulering lijkt op de formulering die Wolff van het probleem geeft (zie [11, p. 14]), en die mevrouw Van Aardenne in 1936 van haar ouderejaars studiegenoot in Leiden Carel de Ridder ontving. In 1945 slaagde Van Aardenne er in om zoals Van der Corput het zelf uitdrukte ‘op vernuftige wijze’ te bewijzen dat er geen rechtvaardig verdeelde rijen bestaan. Van der Corput's vraag werd het startpunt voor een theorie over onregelmatigheden in verdelingen van punten in verzamelingen. In het bijzonder is het probleem om  $n$  punten in een vierkant zo gelijk mogelijk te verdelen nauw verwant met het gelijkverdelingsprobleem van een rij punten op een cirkel. Gelijkverdeelde rijen in hoogdimensionale blokken vinden toepassingen in de numerieke wiskunde, onder andere bij berekeningen in de financiële wiskunde. Voor een uitgebreide verhandeling verwijs ik naar Faure,

Kritzer en Pillichshammer [6] en voor een recente ontwikkeling naar Larcher [9].

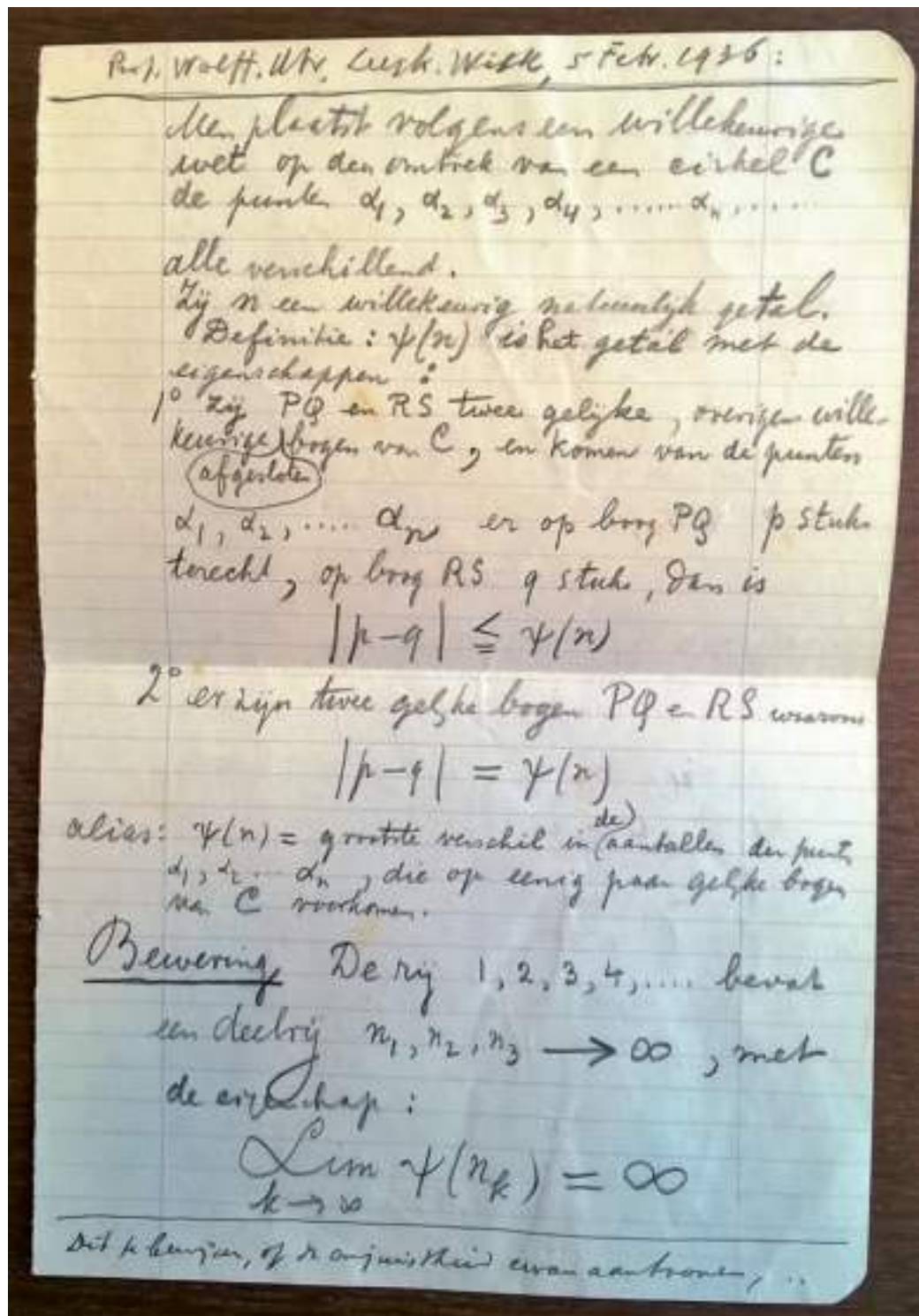
## Het eendimensionale geval

We gaan in op de vraag van Van der Corput. We beschouwen daartoe het interval  $[0,1)$  waarbij het getal  $x$  het punt op de eenheidscirkel onder hoek  $2\pi x$  met de positieve  $x$ -as representeert. Dus  $x = 0$  correspondeert met  $(1,0) \in \mathbb{R}^2$ ,  $x = 1/4$  met  $(0,1)$ ,  $x = 1/2$  met  $(-1,0)$  en  $x = 3/4$  met  $(0,-1)$ . Van Aardenne bewees dus dat het onmogelijk is om een rij  $\omega = (x_n)_{n=1}^\infty \in [0,1)$  te vinden zó dat voor elk paar intervallen van gelijke lengte in  $[0,1)$  het verschil van de aantallen punten uit die rij in die intervallen begrensd blijft als je de punten aftelt.

Om de kwaliteit van rijen te kunnen vergelijken moet een maat worden ingevoerd. Voor een rij  $\omega = (x_1, x_2, \dots, x_N, \dots)$  in  $[0,1)$  definiëren we de *discrepantie*  $D_N(\omega)$  voor  $N = 1, 2, \dots$  als

$$D_N = D_N(x_1, \dots, x_N) \\ = \sup_{0 \leq \alpha < \beta \leq 1} |A(\alpha, \beta; N) - N(\beta - \alpha)|$$

waar  $A(\alpha, \beta; N)$  het aantal  $n$ 's is met  $\alpha \leq \{x_n\} < \beta$  en  $1 \leq n \leq N$ . We noemen de rij  $\omega$  *gelijkverdeeld modulo 1* als



Bron: Noord-Hollands Archief, Haarlem, toegang 685, doos 5

Het probleem van Van der Corput, genoteerd door Wolff; bijlage bij brief, 6-2-1936, van C.C.J. de Ridder aan Tatiana van Aardenne-Ehrenfest

$\lim_{N \rightarrow \infty} D_N(\omega)/N = 0$ . Het betekent dat elk deelinterval van  $[0, 1]$  in de limiet een fractie van de punten van  $\omega$  bevat die gelijk is aan de lengte van het interval. Uit de definitie volgt direct dat voor elke rij  $\omega$  en elke  $N$  geldt dat

$$1 \leq D_N(\omega) \leq N.$$

In 1904 merkte Lerch [10] op dat voor de rij  $(n\alpha \bmod 1)$  met  $\alpha = (1 + \sqrt{5})/2$  de rij  $(\frac{D_N(\omega)}{\log N})$  begrensd is. De begrensdheid geldt voor alle getallen  $\alpha$  waarvoor de wijzergetallen in de kettingbreukexpansie begrensd zijn, in het bijzonder voor elk irrationaal getal dat wortel is van een niet-triviaal kwadratisch polynoom met ge-

hele coëfficiënten. In 1922 bewezen Hardy en Littlewood [7] en Ostrowski [13] dat anderzijds in dit resultaat de factor  $\log N$  niet verbeterd kan worden.

Van der Corput introduceerde een andere rij waarvoor  $(\frac{D_N(\omega)}{\log N})$  begrensd is. De naar hem genoemde rij krijg je door de getallen  $0, 1, 2, \dots$  binair te schrijven en dan de bits

achter de komma te ‘spiegelen’. De Van der Corputrij is

$$0, \frac{1}{2}, \frac{1}{4}, \frac{3}{4}, \frac{1}{8}, \frac{5}{8}, \frac{3}{8}, \frac{7}{8}, \frac{1}{16}, \frac{9}{16}, \frac{5}{16}, \dots$$

Zoals in de inleiding beschreven vroeg Van der Corput [3] zich af of er een oneindige rij  $\omega$  bestaat waarvoor  $D_N(\omega)$  begrensd blijft als  $N \rightarrow \infty$ . Deze vraag werd beantwoord door Van Aardenne-Ehrenfest, dochter van de fysicus Paul Ehrenfest. Zij bewees dat er geen enkele rij bestaat waarvoor  $D_N(\omega)$  begrensd blijft [1]. Een paar jaar later toonde ze aan dat er een  $c > 0$  is zó dat er voor elke rij  $\omega$  oneindig veel  $N$ 's zijn met  $D_N(\omega) > c \frac{\log \log N}{\log \log \log N}$  [2]. In 1954 verbeterde Roth de ondergrens tot  $c\sqrt{\log N}$  [14]. Ten slotte bewees Schmidt in 1972 dat voor elke rij  $\omega$  er oneindig veel  $N$ 's zijn met  $D_N > c \log N$  met  $c = 1/100$ , [15]. Eerder genoemde rijen hebben dus afgezien van de multiplicatieve constante de optimale discrepantie.

De zoektocht daarna betrof de optimale waarde van de constante  $c$ . We noemen hier alleen de nu bekende beste grenzen. In 2016 bewees Larcher dat in Schmidts resultaat  $c = 0,21$  genomen kan worden [9]. Anderzijds construeerde Ostromoukhov een variant van de Van der Corputrij waarvoor geldt dat  $D_N(\omega) \leq 0,354 \log N$  voor alle  $N$  [12]. De factor  $\log N$  geldt voor bijna het gehele interval  $[0, 1]$ : in 1980 bewezen

Wagner en de auteur [16] dat als  $A_N(x)$  het aantal gehele getallen  $n$  is met  $1 \leq n \leq N$  en  $0 \leq x_n < x$  en  $D_N^*(x) = |A_N(x) - Nx|$ , dat dan voor elke rij  $\omega$  geldt dat

$$\max_{1 \leq n \leq N} D_n^*(x) > \frac{1}{400} \log N - 2$$

voor alle  $x \in [0, 1]$  met uitzondering van een deelverzameling van  $[0, 1]$  met Lebesguemaat ten hoogste  $3N^{-1/6}$ .

### Het meerdimensionale geval

Voor een natuurlijk getal  $k$  beschouwen we rijen  $\omega$  in het eenheidsblok  $[0, 1]^k$ . De *discrepantie* van  $\omega = (x_1, x_2, \dots, x_N)$  definiëren we als

$$D_N = D_N(x_1, x_2, \dots, x_N) = \sup_J |A(J, N) - N\mu(J)|$$

waarbij het supremum genomen wordt over alle deelblokken in  $[0, 1]^k$  van de vorm

$$J = \{(x_1, \dots, x_k) : \alpha_i \leq x_i \leq \beta_i \text{ voor } 1 \leq i \leq k\},$$

$A(J, N)$  het aantal getallen  $i$  met  $1 \leq i \leq N$  is waarvoor  $x_i$  in  $J$  ligt en  $\mu$  de Lebesguemaat aangeeft. De rij  $\omega$  heet *gelijkverdeeld* als  $\lim_{N \rightarrow \infty} D_N/N = 0$ . Dat houdt in dat in de limiet elk deelblokje een fractie van de punten van  $\omega$  bevat die gelijk is aan zijn volume.

Roth bewees zijn resultaat voor willekeurige dimensie [14]. Voor elke rij  $\omega$  in  $[0, 1]^k$  geldt voor zekere  $c_k > 0$  dat voor on-

eindig veel waarden van  $N$  geldt dat

$$D_N > c_k (\log N)^{k/2}.$$

Anderzijds zijn generalisaties van de Van der Corputrij geconstrueerd, zoals sommige Halton- en  $(t, s)$ -rijen, die voor zekere  $C_k > 0$  voor alle  $N$  voldoen aan

$$D_N < C_k (\log N)^k.$$

Vermoed wordt dat de bovengrens de goede orde van grootte aangeeft, maar behalve voor  $k = 1$  is het gat tussen onder- en bovengrens nog niet gedicht.

De discrepantie van een eindige rij in  $[0, 1]^{k+1}$  met  $k > 0$  is nauw verwant met de discrepantie van een oneindige rij in  $[0, 1]^k$ . De relatie tussen beide rijen is dat als de oneindige rij met lage discrepantie begint met  $x_1, x_2, \dots, x_N$  in  $[0, 1]^k$ , deze vergeleken wordt met de rij

$$\left(x_1, \frac{0}{N}\right), \left(x_2, \frac{1}{N}\right), \dots, \left(x_N, \frac{N-1}{N}\right) \text{ in } [0, 1]^{k+1}.$$

Zo geconstrueerde puntverzamelingen heten naar Hammersley. Er is dus een  $c_k^* > 0$  zó dat voor elke verzameling van  $N$  punten in  $[0, 1]^k$  geldt  $D_N > c_k^* (\log N)^{(k-1)/2}$  [8, p. 105], terwijl er een  $C_k^*$  is en voor elke  $N$  er verzamelingen van  $N$  punten in  $[0, 1]^k$  zijn met  $D_N < C_k^* (\log N)^{k-1}$  (zie bijvoorbeeld [5, Chapter 3]). In het geval  $k = 2$  is de ondergrens wel  $c_k^* \log N$  vanwege Schmidts resultaat [8, p. 109].  $\ddots$

### Referenties

- 1 T. van Aardenne-Ehrenfest, Proof of the impossibility of a just distribution of an infinite sequence of points over an interval, *Indag. Math.* 7 (1945), 71–76.
- 2 T. van Aardenne-Ehrenfest, On the impossibility of a just distribution, *Indag. Math.* 11 (1949), 264–269.
- 3 J.G. van der Corput, Verteilungsfunktionen I, *Proc. Akad. Amsterdam* 38 (1935), 813–821.
- 4 J.G. van der Corput, Wiskunde, in *Geestelijk Nederland 1920-1940, Deel II: De Wetenschappen van Natuur, Mens en Maatschappij*, Kosmos, 1948.
- 5 J. Dick en F. Pillichshammer, *Digital Nets and Sequences. Discrepancy Theory and Quasi-Monte Carlo Integration*, Cambridge University Press, 2010.
- 6 H. Faure, P. Kritzer en F. Pillichshammer, From Van der Corput to modern constructions of sequences for quasi-Monte Carlo rules, *Indag. Math.* 26 (2015), 760–822.
- 7 G.H. Hardy, J.E. Littlewood, Some problems of Diophantine approximation: The lattice points of a right-angled triangle I, *Proc. London Math. Soc.* (2) 20 (1922), 15–36.
- 8 L. Kuipers en H. Niederreiter, *Uniform Distribution of Sequences*, Wiley, 1974.
- 9 G. Larcher, On the discrepancy of sequences in the unit-interval *Indag. Math.* 27 (2016), 546–558.
- 10 M. Lerch, Question 1547, *L'Intermédiaire Math.* 11 (1904), 144–145.
- 11 J. van Maanen, Julius Wolff (1882–1945), [www.fi.uu.nl/~janm](http://www.fi.uu.nl/~janm).
- 12 V. Ostromoukhov, Recent progress in improvement of extreme discrepancy and star discrepancy of one-dimensional sequences, in P.L. Ecuyer and A.B. Owen (eds.), *Monte-Carlo and Quasi-Monte-Carlo Methods 2008*, Springer, 2009, pp. 561–572.
- 13 A. Ostrowski, Bemerkungen zur Theorie der Diophantischen Approximationen I, *Abh. Math. Sem. Hamburg* 1 (1922), 77–98.
- 14 K.F. Roth, On irregularities of distribution, *Mathematika* 1 (1954), 73–79.
- 15 W.M. Schmidt, Irregularities of distribution VII, *Acta Arith.* 21 (1972), 45–50.
- 16 R. Tijdeman en G. Wagner, A sequence has almost nowhere small discrepancy, *Mh. Math.* 90 (1980), 315–329.

Rob van Oord

Waddinxveen  
robvanoord@tiscali.nl

**Evenement** 24ste Nationale Wiskunde Dagen

# En dat is dan $(2+0+1)\times 8=24!$

Op vrijdag 2 februari en zaterdag 3 februari vonden in Noordwijkerhout voor de 24ste keer de Nationale Wiskunde Dagen plaats. Dit jaar was er in het programma speciale aandacht voor het thema vrouwen. Een persoonlijke impressie van Rob van Oord.

Met een flippo op de achterkant van de FUNRUN-trofee (het traditionele T-shirt) wordt cryptisch uitgebeeld dat dit jaar de Nationale Wiskunde Dagen voor de vierentwintigste keer gehouden zijn. Met een auto vol spullen en twee collega's van mijn oude school gingen we goedgemutst naar Noordwijkerhout. Deze keer stonden er veel knutsel- en vouwworkshops in het programma met als klapper het optreden van Katie Steckles [1], een jonge Britse wiskundige uit Manchester van wie ook veel op YouTube te vinden is. Ze is iemand die op middelbare scholen lezingen houdt en workshops geeft waarin ze leerlingen enthousiast maakt voor wiskunde. In 2016 kreeg ze de Josh Award voor haar inspanningen waarmee ze wiskunde populair maakt.

Na een schitterende Dûnsje yn Style, Dansen op de Stijl, door twaalf prachtige in zwarte lange jurken geklede dames op en rond Rietveld-krat-krukjes in allerlei kleuren opende Joke Daemen de NWD met het treurige nieuws dat professor Frederik van der Blij op 27 januari is overleden. Ik heb net als Joke ooit college van hem gehad en aan den lijve het zogenoemde Van der Blij-effect gevoeld. Zelfs nog in 2003, op de lerarendag in Groningen, waarop ik zelf

mijn eerste workshop voor collega's gaf ("Makkelijker kan ik het niet maken, maar wel leuker"), kreeg ik dat gevoel weer bij zijn lezing over Kletterdriehoeken. Driehoeken waarvan een zwaartelij, een hoogtelij en een bissectrice door een punt gaan [2].

Maar laat ik beginnen met de startlezing van de NWD. Hoewel Leila Schneps van huis uit getaltheoreticus is heeft ze bijzondere belangstelling voor wiskunde bij moordprocessen. Zo schrijft ze ook graag thrillers onder het pseudoniem Catherine Shaw. Ik zie al zeven titels op het internet. In een boeiend verhaal liet Leila zien hoe je de fout in kunt gaan door statistische gegevens verkeerd te gebruiken. Ze liet, gekleed in een zwierige India-jurk, zien



Dûnsje yn Style



Leila Schneps

Foto: F. van der Lecq

hoe aanvullende informatie en vooroordelen van invloed kunnen zijn op het oordeel (van een jury) over een verdachte.

Als publiek konden we interactief stemmen op uitspraken over de geloofwaardigheid van extra argumenten of iemand schuldig zou zijn aan een moord. Ook als wiskundemensen onder elkaar waren we telkens behoorlijk verdeeld. Ze schreef hier een boek over: *Math on Trial, how members get used and abused in the courtroom*. Ook uitspraken over de kans op kanker na een positieve test kunnen behoorlijk fout zijn, omdat hier voorwaardelijke kansen aan de orde zijn. Neem aan dat bekend is dat voor een bepaalde test geldt dat deze voor 95% van de vrouwen die kanker hebben een positieve uitslag geeft. Neem bovendien aan dat 1 op de 1000 vrouwen kanker heeft. Neem ook aan dat de kans op een positieve uitslag op de test bij gezonde vrouwen 1% is. Bij 100.000 vrouwen die getest worden hebben er dus 100 kanker. De test geeft hen 95 keer een positieve uitslag. Maar bovendien geeft 1% van de 99.900 tests bij vrouwen zonder kanker foutief aan dat er toch kanker is (1% kans op een 'false positive'). Dus bij de  $(999 + 95) = 1.094$  positieve testen is er maar in 95 gevallen echt sprake van kanker: 8,7%. De ene dokter beweert dat je bij een positieve uitslag 95% kans hebt dat je echt kanker hebt, terwijl de andere dokter zegt dat de kans slechts ongeveer 1 op 10 is. Welke dokter heeft er nu gelijk?

### Een eitje

Na de lunch volgde ik de lezing van Professor Robert Mudde. Hij demonstreerde dat vrijwel alle vragen in het dagelijks leven op te lossen zijn met de 'balansvergelijking':

$$\frac{d}{dt} = \text{in} - \text{uit} + \text{productie}.$$

Ik kreeg bij zijn lezing weer hetzelfde gevoel dat ik altijd heb bij een natuurkunde-probleem. Je hoeft 'alleen maar' de differentiaalvergelijking op te stellen. Maar je moet wel even weten wat er constant blijft en hoe het behoud van energie moet worden ingepast. Dat geleiding evenredig gaat met de diameter van een staaf of evenredig met de inhoud van een bol. Dat alle eenheden moeten kloppen, dus dat er altijd wel een constante bij komt die in feite ervoor zorgt dat de eenheden van beide kanten van de vergelijking gelijk zijn. Als de leraar het voorzegt is het "oh ja", maar zelf kom ik er niet op. Het model waarbij je kijkt naar de wereldbevolking die 1% per jaar groeit, waarbij er dus niemand van buiten de aarde bij komt en er niemand van de aarde weggaat, snap ik nog wel. Het levert in het balansmodel

$$\frac{dN}{dt} = 0 - 0 + 0,01N(t)$$

met de oplossing van

$$N'(t) = 0,01 \cdot N(t)$$

is

$$N = N_0 \cdot e^{0,01t}.$$

Maar de balansvergelijking bij de vraag hoe lang je een struisvogelei moet koken

als je voor een kippenei (van zeg 60 gram) 8 minuten rekent, is al een stuk lastiger. Bij een ei in heet water gaat het er om hoe lang het duurt voordat de warmte van het kokende water buiten het ei ervoor zorgt dat het binnenste op 70°C komt, de temperatuur waarop eiwit stolt. In de balansvergelijking gaat er alleen warmte in het ei, er komt geen warmte uit en er wordt ook geen warmte geproduceerd, dus de balansvergelijking is

$$\frac{dE}{dt} = \text{in}.$$

Je moet ook bedenken dat de vloeistof in het ei stil staat, dus er vindt alleen geleiding plaats. Omdat een ei ongeveer bolvormig is gaat de geleiding evenredig met  $D^3$ , met  $D$  de diameter van het ei.  $\Delta E \sim D^3 \cdot \rho \cdot c_P \cdot \Delta T$ , met  $c_P$  de soortelijke warmte van de vloeistof en  $\rho$  een constante. Hieruit volgt

$$\frac{dE}{dt} \sim D^3 \cdot \rho \cdot c_P \cdot \frac{dT}{dt}.$$

Je kunt stellen dat  $D^3 \sim \text{massa}$  is, dus  $D^2 \sim \text{massa}^{2/3}$ . Het *Fouriergetal*  $Fo_q$  is gelijk aan  $\frac{at}{D^2}$ , waarin  $a$  een constante is die voor alle eisoorten hetzelfde is:  $a = \frac{\lambda}{\rho c_P}$ . Dit geeft

$$t_{\text{struisvogel}} = \left( \frac{m_{\text{struisvogel}}}{m_{\text{kip}}} \right)^{2/3} \cdot t_{\text{kip}}$$

oftewel

$$t_{\text{struisvogel}} = \left( \frac{1200}{60} \right)^{2/3} \cdot 8 = 58,94$$

minuten. Dus het koken van een struisvogelei duurt ongeveer 60 minuten.

Bij de vraag hoe lang het duurt voordat je je vingers brandt aan het handvat van een lepel die in een pan heet water (soep) wordt gezet komt het begrip *indringdiepte* tevoorschijn. Dit is de  $x$ -coördinaat van het snijpunt van de raaklijn vanuit het punt op de  $y$ -as aan de grafiek van de oplossing. Er geldt  $l \approx \sqrt{\pi a t}$ . Voor zilver geldt  $a = 2 \cdot 10^{-4}$ . Het duurt dus ongeveer 2,65 minuten voordat je je brandt aan een zilveren lepel van 10 cm, want

$$t = 0,1^2 / (\pi \cdot 2 \cdot 10^{-4}) \approx 159 \text{ s}.$$

Vooraf moet je controleren dat de eenheden kloppen. Ik ga uit van m en s.

Om niet alles zelf te hoeven uitrekenen kan gebruikgemaakt worden van een speciale tabel van  $\frac{T_1 - T}{T_1 - T_0}$  tegen  $Fo$ . Hiermee kun je snel vinden dat het afkoelen van een blikje cola van 250°C naar 80°C door het in het vriesvak van de koelkast te leggen ongeveer 15 minuten duurt.



**Figuur 1** Kubus binnenste buiten.

Foto: Liesbeth Walther



**Figuur 2** Origami met modules.

### Knutselhoek

Alle tijd tussen de workshops en lezingen in ben ik gauw naar de Harvard-zaal gegaan. Florine Meijer en ik hebben daar een knutselhoek gemaakt. Een soort doorlopende workshop met boeiende wiskundige modellen.

Op tafel liggen allerlei voorbeelden en bouwplaten die deelnemers aan de NWD kunnen gebruiken om iets na te maken of zelf creatief mee bezig te zijn. Er waren voortdurend flink wat collega's aan het knutselen. De kubus binnenstebuiten (Figuur 1), origami met modules (Figuur 2), hartenvlechten, flexagons, Möbius-harten, enzovoorts. Op de volgende NWD mag ik een workshop geven waarbij ik dieper op de samenhang tussen de modellen zal ingaan.

Het werken met modellen is hot. Ik las deze week in de krant dat Peter Beck een 'Humanity Star' in een baan om de aarde heeft gelanceerd. "Een hemelse discobal (met een doorsnee van ruim 1 meter) die de mensen moet herinneren aan hun kwetsbare plek in het universum." En Elon Musk liet een knalrode Tesla-auto de ruimte in schieten.

### Vouwen

Wat doe je met de NWD-posters die over zijn? Henk Hogervorst wist er wel raad mee. Met de speciale zigzagvouwtechniek wist hij de afgelopen maanden veel mooie kunstwerken te vouwen. In het Atrium kon je zijn creaties ook bewonderen. In de workshop oefenden we met de techniek. Henk kwam later ook nog in onze knutselhoek om met liefhebbers een groter object te vouwen. Voordat je aan een groot vouwsel begint moet je eerst eens uitzoeken welk effect de vouwhoeken op de kromming van het eindproduct hebben. Wat duidelijk werd is dat je gewoon zelf moet gaan proberen om te snappen welke vouwhoeken een mooi resultaat opleveren. Zie Figuur 3. In Figuur 4 en 5 zie je hoe hij na het vouwen twee verschillende aanzichten heeft gecreëerd. De ene kijkrichting zie je een donker patroon, de andere een licht patroon. Bij het ontwerpen kun je daar op inspelen.

In de avondlezing nam Katie Steckles ons mee naar allerlei wiskundige vouwsels en knipsels. Eén van haar uitdagingen was dat je uit een vierkant blaadje met één keer

in een rechte lijn knippen elke letter van het alfabet krijgt. Het wiskundige aspect zit hem in het uitzoeken hoe je het blaadje moet vouwen zodat het lukt. Op onze stoelen lagen enkele blaadjes waarmee we meteen tijdens de lezing haar ideeën in de praktijk konden brengen. Na enkele keren dubbelvouwen maakten we met één keer knippen een vijfpuntige ster.

Op internet heb ik al filmpjes gezien van colleges van Erik Demaine [3]. Hij levert ook het bewijs dat je elke figuur die getekend is met rechte randen altijd zo kunt vouwen dat je met één keer knippen die figuur uit het blaadje kunt krijgen.

### Je kunt er niet vroeg genoeg mee beginnen...

De laatste lezing die ik bijwoonde werd gegeven door Lieven Verschaffel. Paul Drijvers had hem ontmoet op een conferentie over wiskundendidactiek.

Welke reken-/wiskunde-ervaringen bij jonge kinderen zorgen ervoor dat je later beter beslagen ten ijs komt bij wiskunde? In acht items doet Lieven uit de doeken welke factoren wel, en welke niet bijdragen tot een voorspelde betere basis voor



**Figuur 3** Verschillende vouwhoeken.



**Figuur 4** Een donker patroon.



**Figuur 5** Een licht patroon.



Katie Steckles

Foto: Mieke Abels

wiskunde. Het belangrijkste is dat er nu steeds meer aandacht is voor onderzoek naar voorspellend belang van gericht onderwijs van getallen en relaties. De resultaten daarvan kunnen leiden tot een goede aanpak van reken-/wiskundelessen vanaf de kleutertijd en voor beter leren van wiskunde op de middelbare school.

Piaget was een van de eersten die daar serieus onderzoek naar gedaan heeft. Hij richtte zich op logisch-mathematische vaardigheden. Er is niet duidelijk aangetoond dat zijn aanpak tot hogere wiskundige vaardigheden leidt. Met tellen op weg naar rekenen heeft meer effect. Neuropsychologisch onderzoek heeft aangetoond dat leren tellen, onderscheiden in vijf telprincipes, bepalend is voor later beter zijn in wiskunde. Er zijn onderzoeken geweest naar hoe mensen numerieke informatie represente-

ren. Aantallen schatten, en aantallen vergelijken, zowel symbolisch als niet symbolisch, stimuleren de zogenoemde *number sense*. Een beter groothedsbegrip leidt tot een hogere wiskundevaardigheid. Aandacht voor operaties, zoals optellen, geeft toename en wegnemen leidt tot afname, evenals kenmerken van commutativiteit en associativiteit, zorgen ook voor een hogere wiskundevaardigheid aan het eind van de basisschool. Mijn vrouw is kleuterjuf. Als zij haar rekenactiviteiten voorbereidt, hebben we het vaak over wat ze dan spelenderwijs zou kunnen doen. Ontdekken van patronen en structuren, in rijtjes gekleurde kralen, of ontbrekende lijntjes laten aanvullen. Spontane aandacht voor getallen, relaties, patronen en structuren maken de les rijker. Het voeren van een raaf (een pop) met bessen, waarbij de

kleuters meetellen, het tonen van plaatjes, “wat zie je?”, waarbij ze dan ook het aantal dieren dat ze zien noemen. Onderzoek wijst uit dat dit allemaal factoren zijn die bijdragen tot een betere wiskundevaardigheid. Ten slotte moeten we niet vergeten dat ook factoren als intelligentie, cognitieve flexibiliteit, taalvaardigheid en werkgeheugen een rol spelen bij de ontwikkeling van wiskunde bij kinderen. In de klas van mijn vrouw zitten steeds meer kinderen die taalachterstand hebben, weinig van thuis mee krijgen op gebied van lezen en spelletjes doen. Voor hen is het vaak moeilijk om te begrijpen wat de vraag van de juf betekent. Ook bij tel- en rekenopdrachten is hoe je het zegt belangrijk. Maar duidelijk is dat je niet vroeg genoeg kunt beginnen met tellen en rekenen.

### Zwart-witte dieren

In een wervelende show met plaatjes en filmpjes vertoonde Luc van den Broeck in de afsluitende lezing hoe hij met zijn leerlingen in Excel via sleutelfuncties de plaatjes van twee verschillende dieren kan omzetten naar een derde dier. Zo liet hij ons zien dat een konijn en een vis om te vormen zijn tot een bok. Het principe berust erop om hokjes binnen een dier zwart te maken en erbuiten wit. De gebruikte techniek maakt enkel gebruik van tabellen met logica (XOR) [4].

Bij de afsluitende lunch kwam ik er achter dat ik weer te weinig tijd heb gehad om de stands in de Rotonde te bezoeken. Daar had ik vast nog wat gratis spullen kunnen meekrijgen. Nu moest ik het doen met de vrijwel lege tas van Scheepstra. Helaas dit keer geen handige stoffen tas die ik altijd voor van alles gebruik, maar een soort Medium Shopper. In elk geval waren mijn hoofd en mijn maag weer goed gevuld deze dagen.

### Referenties

- 1 [www.katiesteckles.co.uk/](http://www.katiesteckles.co.uk/)
- 2 Wiskunde moet uitdagender en spannender, *Nieuwe Wiskrant* 23 (2004), 4–6, [www.fi.uu.nl/wiskrant/artikelen/234/234juni\\_blij.pdf](http://www.fi.uu.nl/wiskrant/artikelen/234/234juni_blij.pdf). Zie

ook het artikel in *Nieuw Archief voor Wiskunde* 5/16(2) (2015), 83–87.

- 3 [en.wikipedia.org/wiki/Erik\\_Demaine](https://en.wikipedia.org/wiki/Erik_Demaine);  
[www.youtube.com/watch?v=2CDQFvDAZCw](https://www.youtube.com/watch?v=2CDQFvDAZCw).

- 4 Drie technieken voor visuele cryptografie; [vandenbroeck\\_luc@telenet.be](mailto:vandenbroeck_luc@telenet.be).

Clara Stegehuis

Faculteit Wiskunde en Informatica  
Technische Universiteit Eindhoven  
c.stegehuis@tue.nl

Maatschappij Faces of Science

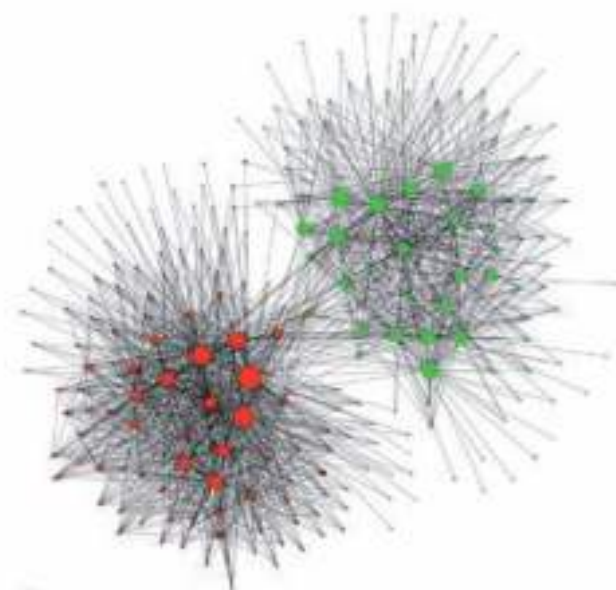
# Netwerken met groepsstructuren

Op de website Facesofscience.nl bloggen jonge talentvolle wetenschappers over hun ervaringen en passies. Zo laten ze aan een breed publiek zien hoe de wetenschappelijke wereld eruitziet. Faces of Science is een initiatief van de Koninklijke Nederlandse Akademie van Wetenschappen (KNAW), De Jonge Akademie en NEMO Kennislink. Sinds vorig jaar is een van de deelnemende bloggers Clara Stegehuis. Zij is promovenda aan de Technische Universiteit Eindhoven in de vakgroep Stochastiek, onder begeleiding van Remco van der Hofstad en Johan van Leeuwen. Ze doet hier onder andere onderzoek naar hoe groepsstructuren in netwerken de verspreiding van epidemieën beïnvloeden. In dit artikel vertelt zij over haar onderzoek.

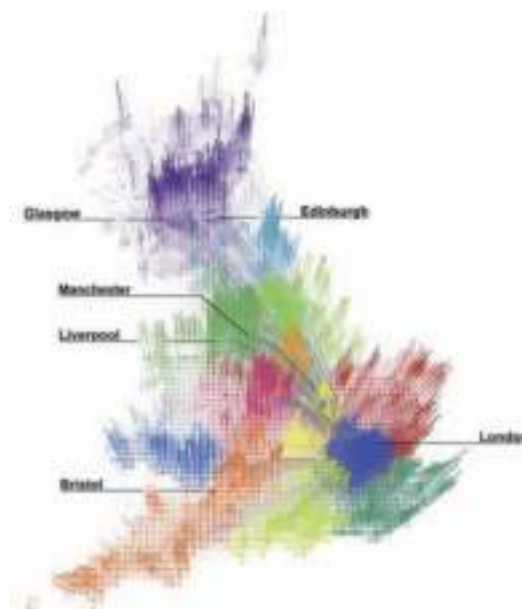
Complexe netwerken kun je overal terugvinden. Je kunt bijvoorbeeld denken aan netwerken in je brein, netwerken op het internet, netwerken op sociale media of

communicatienetwerken. Een voorbeeld van een communicatienetwerk is te zien in Figuur 1, die het telefoonnetwerk van België laat zien. Punten in dit netwerk

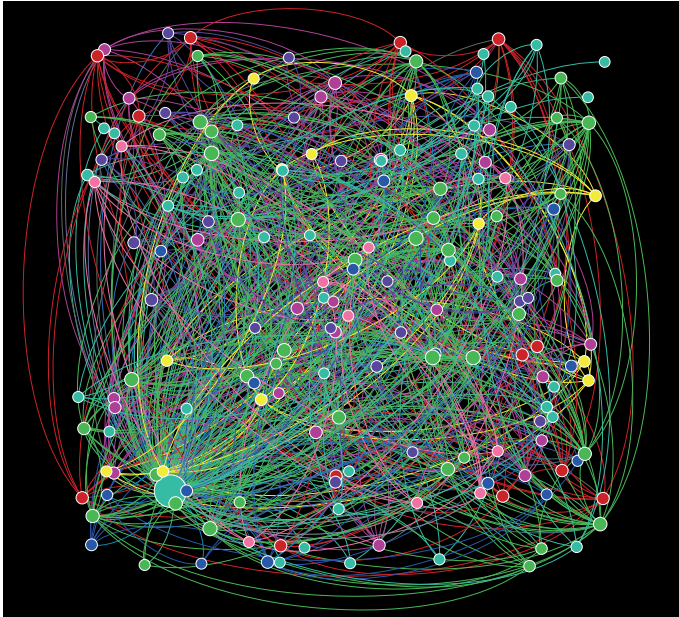
zijn Belgen, en er is een lijn tussen twee Belgen als ze elkaar ooit een keer gebeld hebben. Het is meteen duidelijk dat België verdeeld is in twee groepen. Een groep van Franstaligen, en een groep van Vlamingen, die onderling vaak bellen. Tussen de twee groepen zijn maar weinig lijnen, wat niet zo gek is gezien de taalbarrière. Maar ook landen zonder taalbarrière kunnen verdeeld zijn in groepen. In het plaatje van het telefoonnetwerk van Groot-Brittannië in Figuur 2 zijn vergelijkbare groepsstructuren te zien. Mensen uit dezelfde provincie bellen elkaar veel vaker dan mensen



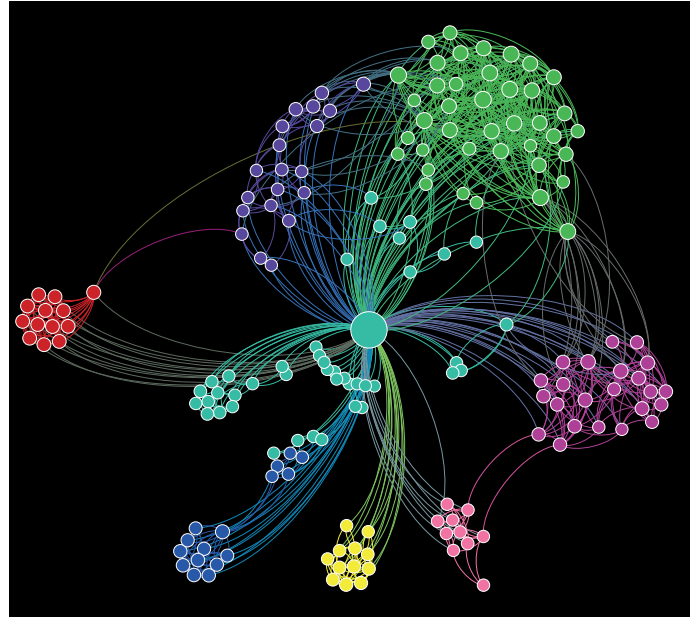
Figuur 1 Belgisch telefoonnetwerk [1].



Figuur 2 Engels telefoonnetwerk [4].



**Figuur 3** Mijn LinkedIn-netwerk.



**Figuur 4** Mijn LinkedIn-netwerk, wat logischer geordend.

uit andere provincies. Londen verbindt alle verschillende groepen in het telefoonnetwerk met elkaar.

Het interessante is dat heel andere soorten netwerken vergelijkbare groepsstructuren zien. In Figuur 3 zie je bijvoorbeeld een plaatje van mijn LinkedIn-netwerk. Punten in dit netwerk zijn mijn LinkedIn-connecties, en een lijn betekent dat twee van mijn vrienden ook met elkaar bevriend zijn. Op het eerste gezicht lijkt dit netwerk een grote chaos. Toch zien we in Figuur 4 dat het netwerk verborgen groepsstructuren bevat. Maar hoe kun je deze groepsstructuren wiskundig uit de chaos van het vorige plaatje halen? Dit is een moeilijke vraag waar onder andere wiskundigen, natuurkundigen en informatici zich het afgelopen decennium over gebogen hebben. Het vinden van deze verborgen groepsstructuren heeft ook veel praktische toepassingen, doordat groepsstructuren in allerlei verschillende soorten netwerken voorkomen. Je kunt bijvoorbeeld denken aan adverteerders in sociale netwerken die zich willen richten op bepaalde groepen van mensen met dezelfde interesses of woonplaats.

### Wat is een groep?

Om te ontdekken waar de groepen zich in een netwerk bevinden, moet eerst duidelijk zijn wat een groep precies is. Als we naar de bovenstaande plaatjes kijken, is het intuïtief duidelijk dat een groep aan twee eigenschappen voldoet:

- Er zijn relatief veel verbindingen tussen punten in dezelfde groep.
- Er zijn relatief weinig verbindingen tussen punten in verschillende groepen.

Eén van de eerste methoden om groepsstructuren in netwerken te vinden gebruikt precies deze twee eigenschappen van groepen. Deze methode maximaliseert de *modulariteit* [3]. Stel dat we een netwerk op een bepaalde manier opdelen in  $K$  groepen. De *modulariteit*  $M$  van deze specifieke opdeling is dan

$$M = \sum_{c=1}^K \frac{L_c}{L} - \left( \frac{k_c}{2L} \right)^2.$$

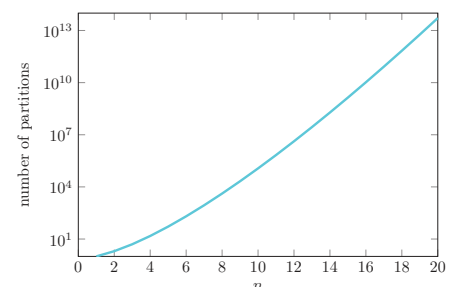
Hier is  $L$  het totale aantal lijnen in het netwerk en  $L_c$  het aantal lijnen binnen groep  $c$ .  $k_c$  is de som van de graden van alle punten in groep  $c$ , waar de graad van een punt het aantal lijnen is dat met dat punt verbonden is. Als we de modulariteit willen maximaliseren, zegt de eerste term in deze vergelijking dus dat we zo veel mogelijk lijnen binnen de groepen willen hebben. Maar dit alleen is niet genoeg. Als we alleen het aantal lijnen binnen de groepen maximaliseren, dan is het altijd het beste om het netwerk in één grote groep met alle punten erin te verdelen. Dan zitten alle lijnen uit het netwerk namelijk binnen een groep. Daarom heeft de vergelijking ook nog een tweede term. Deze tweede term beschrijft het verwachte aantal lijnen binnen groep  $c$  als we het netwerk opnieuw zouden tekenen met hetzelfde aantal lij-

nen en dezelfde graden, maar de lijnen compleet willekeurig met elkaar verbinden. Modulariteit meet dus hoe veel meer lijnen er binnen de groepen zijn dan dat je eigenlijk verwacht had.

### Veel manieren om een netwerk op te delen

De vergelijking voor modulariteit kan voor iedere verdeling van een netwerk in groepen berekenen hoe goed die verdeling is. Maar helaas lost dit het probleem van het vinden van de groepsstructuren nog niet op. Een naïeve manier om de beste opdeling in groepen te vinden is om voor alle mogelijke opdelingen te berekenen wat de modulariteit is, en daaruit de opdeling met de hoogste modulariteit te kiezen. Figuur 5 laat zien hoe veel manieren er zijn om een netwerk met  $n$  punten op te delen in groepen.

Dit maakt meteen wel duidelijk dat we nooit alle mogelijke manieren om een netwerk in groepen te verdelen af kunnen gaan: bij een netwerk met maar 20 punten



**Figuur 5** Het aantal manieren om een netwerk van  $n$  punten in groepen op te delen.

moet je al voor  $10^{13}$  verschillende opdelingen de modulariteit berekenen! Het is voor grote netwerken dus onmogelijk om de opdeling met de hoogste modulariteit te vinden. Gelukkig zijn er slimme methoden gevonden om toch een goede opdeling van het netwerk te krijgen.

Een voorbeeld hiervan is om te beginnen met het opdelen van het netwerk in  $n$  groepen, een groep voor ieder punt. Dan kijkt het algoritme voor alle paren van twee groepen of de modulariteit groter wordt als de punten uit die twee groepen samen in één groep worden gestopt. Zo ja, dan worden de punten uit deze twee groepen inderdaad samengevoegd tot één groep. Hierna is het netwerk opgedeeld in grotere groepen. Daarna kijkt het algoritme weer of het samenvoegen van twee groepen soms een grotere modulariteit oplevert. Dit gaat zo door tot het samenvoegen van twee groepen niet meer leidt tot een hogere modulariteit.

### Resolutielimiet

Ondanks deze slimme methode om groepen met hoge modulariteit te vinden, is er nog een probleem met modulariteit. Het blijkt namelijk dat de modulariteit in een netwerk met  $n$  punten het hoogst is als er alleen maar groepen zijn met minstens  $\sqrt{n}$  punten [2]. Deze beperking wordt ook wel de resolutielimiet genoemd. Stel dat we in het netwerk van alle 2 miljard Facebookgebruikers zoeken naar groepen, dan moeten deze groepen dus minimaal vijftigduizend personen bevatten! Dit is veel groter dan

iedere vriendengroep op Facebook die je eigenlijk in het netwerk zou willen terugvinden. Figuur 6 laat een ander voorbeeld zien waar deze resolutielimiet ervoor zorgt dat de juiste groepsstructuur niet teruggevonden wordt met modulariteit. Als we de grote ring groot genoeg maken, dan bevat het netwerk te weinig punten om de kleine groepen nog te kunnen ontdekken, omdat die kleiner zijn dan  $\sqrt{n}$ .

### Een kaart van het netwerk

Een meer recente methode om groepen in netwerken te vinden heeft deze resolutielimiet niet. De *Infomap*-methode [5] bekijkt een random wandeling over het netwerk: een persoon die van punt naar punt over de lijnen van het netwerk loopt. Iedere keer kiest hij met gelijke kans een van de burens van het punt waar hij nu is om naartoe te gaan. Als een netwerk groepsstructuren bevat, dan verwacht je dat deze *random walker* relatief veel tijd doorbrengt binnen een groep voordat hij deze verlaat, omdat groepen relatief veel lijnen bevatten. Tussen de verschillende groepen zijn veel minder lijnen, de random walker zal dus niet zo vaak van groep naar groep bewegen. Maar hoe gebruik je deze intuïtie om de groepsstructuren te ontdekken?

Stel dat je in woorden wil beschrijven hoe een random walker zich door het netwerk heen beweegt. Om dit te doen, moet je ieder punt in het netwerk een naam geven. Je beschrijft bij elke stap de naam van het punt waar de walker zich naartoe

beweegt. In een groot netwerk heb je dan veel verschillende namen nodig. Een slimme manier om de route te beschrijven is zoals een route op een kaart. Niet alle straten in Nederland hebben een unieke naam, er zijn verschillende Stationsstraten in Nederland. Maar binnen een bepaalde stad zijn straatnamen natuurlijk wel uniek. Als je een route door Nederland beschrijft, dan zul je waarschijnlijk de straatnamen gebruiken van de stad waar je nu bent. Alleen als je naar een andere stad toe gaat, gebruik je de naam van die andere stad. In een netwerkperspectief zijn we dus eigenlijk op zoek naar de steden en dorpen in het netwerk: gebieden met veel straten.

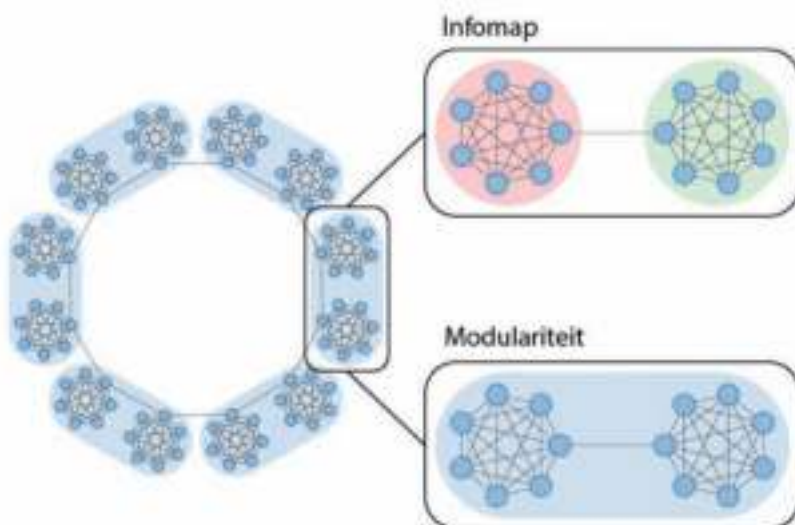
### De beschrijving van een wandeling

Stel dat we binaire namen geven aan punten in een netwerk dat is opgedeeld in groepen. Namen binnen een groep moeten uniek zijn. Als een groep veel punten bevat, worden de binaire namen van punten in die groep dus erg lang. Alle groepen hebben ook een unieke binaire naam (dit zijn de 'steden'). We beschrijven de route van de random walker door steeds de naam van het punt te noemen waar hij naartoe gaat. Als de random walker van groep wisselt, moeten we daarnaast de naam van de nieuwe groep opschrijven. De beschrijving wordt dus erg lang als de random walker vaak van groep verandert, omdat we steeds zowel de naam van het punt waar de walker naartoe gaat, als de bijbehorende groepsnaam moeten opschrijven. De beschrijving wordt juist kort als we groepen hebben waar de random walker lang in blijft rondlopen. Als we de groepen te groot maken, wordt de beschrijving juist weer erg lang, omdat de unieke binaire namen van de punten dan erg lang worden. De vraag is dan: wat is de opdeling in groepen die de beschrijving van de random walk zo kort mogelijk maakt?

Voor een opdeling van het netwerk in groepen berekent de *Map equation* hoe veel binaire getallen gemiddeld nodig zijn om een stap van de random walker te beschrijven:

$$L = q_{\text{uit}} H(\text{uit}) + \sum_{c=1}^K q_{\text{in}}^c H_c(\text{in}).$$

Hier is  $q_{\text{uit}}$  de kans dat een willekeurige stap van de random walker een stap tussen twee verschillende groepen is, en  $q_{\text{in}}^c$  de kans dat een willekeurige stap van de



**Figuur 6** De methode met modulariteit vindt de kleine groepen in dit netwerk niet terug, terwijl de Infomap-methode dit wel doet.



## Jaap Korevaar

Korteweg-de Vries Instituut voor Wiskunde  
Universiteit van Amsterdam  
j.korevaar@uva.nl

### In Memoriam Frederik van der Blij (1923–2018)

# Mijn herinneringen aan Fred van der Blij

Op 27 januari 2018 is Frederik van der Blij overleden, emeritus hoogleraar wiskunde van de Universiteit Utrecht en erelid van het Koninklijk Wiskundig Genootschap. Hij werd 94 jaar. Vier vrienden en oud-collega's blikken terug op zijn leven en werk. In dit eerste deel Jaap Korevaar, eveneens erelid van het KWG. Vorig jaar op het NMC 2017 zijn Van der Blij en Korevaar in het zonnetje gezet omdat zij beiden toen 75 jaar lid waren van het KWG.

Fred van der Blij, mijn oudste en beste vriend, enkele maanden jonger dan ik; we hebben elkaar 77 jaar gekend.

In september 1940 ontmoetten we elkaar als beginnende wiskundestudenten aan de Leidse Universiteit. Het klikte meteen tussen ons en met natuurkunde eerstejaars Hans Tolhoek. Nieuwe studenten wis- en natuurkunde konden hulp krijgen van oudere studenten bij studievereniging De Leidsche Flesch, waar we kennismaakten met tweedejaars natuurkunde Nico van Kampen. Ik ben ook enkele keren bij Fred thuis geweest op de Jan van Goyenkade, waar ik zijn toen chronisch zieke vader ontmoette en zijn zorgzame moeder, en zijn oudere zuster Ria. Ik kwam ook onder de indruk van Freds sterke geloof. Later hoorde ik van Fred dat hij en zijn vriendin Ingetje Zevenhuizen als tieners samen de bijbel bestudeerden en les gaven op een zondagsschool.

Als uitstekende hbs-leerlingen en kinderen van niet-rijke ouders hadden Fred en ik een studiebeurs, respectievelijk renteloze lening. Dat was dus in de oorlog, onder de Duitse bezetting. We hebben samen veel ellende meegemaakt. De Universiteit Leiden werd op last van de bezetter al eind

november 1940 gesloten. Aanleiding was de protestrede van professor Cleveringa op 26 november tegen het ontslag van de Joodse docenten, en de daarop volgende studentenstaking. Leiden zou de hele

oorlog gesloten blijven, en de studenten moesten naar huis.

Gelukkig konden wij thuis studeren uit goede collegedictaten van oudere studenten, en tot najaar 1941 konden we tentamen doen bij docenten thuis. Meteen in 1940 waren Fred en ik erg onder de indruk gekomen van lector Kloosterman, toen de beste wiskundige in Leiden en een fantastische docent. Hij heeft zijn stempel gedrukt op onze ontwikkeling: naast onderzoek zouden we goed lesgeven belangrijk vinden.

#### Verder studeren in Utrecht

Begin 1942 mochten de Leidse studenten elders verder. Fred, Hans Tolhoek en ik (en ook Nico van Kampen) zijn naar de Universiteit Utrecht gegaan. Het hele jaar 1942 hebben Fred en ik een grote kamer gedeeld aan de Catharijnesingel. Fred was soepeler in de omgang en meer volwassen dan ik — hij had al lang een vriendin — en hij werd voor mij als een iets oudere broer.

Fred studeerde ongelooflijk snel. Net voor Leiden helemaal op slot ging had hij daar eind 1941 al kandidaatsexamen gedaan, wat ook in normale omstandigheden uitzonderlijk geweest zou zijn! Ik zou pas in december 1942 in Utrecht kandidaats doen. Al gauw zou Fred mij twee jaar voor zijn: hij zou al in 1944 in Utrecht praktisch klaar komen voor het doctoraalexamen, en zou in 1947 bij Kloosterman promoveren [2]. Inmiddels waren Fred en ik in 1942 lid ge-



Frederik van der Blij

Foto: uit het archief van de familie Van der Blij

worden van het Wiskundig Genootschap. We gingen toen allebei proberen om zoveel mogelijk van de ‘Wiskundige Opgaven’ op te lossen.

Rond de jaarwisseling 1942–43 is de ‘Arbeitseinsatz’ ook van toepassing geworden op studenten; zij moesten naar Duitsland voor werk in de oorlogsindustrie. Ik ben toen bijna opgepakt bij mijn ouders thuis, maar was net op tijd ondergedoken. Na enkele maanden kreeg de Nederlandse regering in Den Haag — het College van secretarissen-generaal — een concessie van de Duitsers: studenten mochten verder studeren mits zij de zogenaamde loyaliteitsverklaring tekenden. Die hield in dat je de wetten van de Haagse regering zou gehoorzamen en niets zou ondernemen tegen de bezetter. Een soortgelijke verklaring was al veel eerder, zonder veel ophef, getekend door vrijwel alle ambtenaren. Slechts een enkele hoogleraar had toen ontslag genomen. Onder studenten ontstond echter (begin 1943) veel verzet. Sommige studenten hadden relaties die hen aan een veilige baan konden helpen. Zo werd onze oude bekende Nico van Kampen assistent bij zijn oom Frits Zernike in Groningen, de latere Nobelprijs winnaar. Fred en ik hadden zulke relaties niet, en ook niet de middelen om onder te duiken. Daarom hebben wij en andere onbemiddelde studenten ‘getekend’, met ingrijpende gevolgen na de oorlog. We zijn nog bijna het hele jaar 1943 in Utrecht gebleven, tot de universiteit daar praktisch dicht ging. De Technische Hogeschool Delft bleef open en daar ben ik eind 1943 assistent geworden, als opvolger van onze oudere vriend Dick de Bruijn, die na zijn promotie naar Philips ging.

### Wiskundeleraar in Warffum

Na de oorlog werden alle ‘tekenaars’ bestraft. Doordat circa 86 procent van de studenten *niet* getekend had, waren de ‘niet-tekenaars’ een symbool geworden van Nederlands verzet tegen de Duitsers. Een kanttekening is hierbij wel op zijn plaats: circa 30 procent van de studenten had zich gemeld voor de Arbeitseinsatz in Duitsland. Tekenaars mochten voor straf een half jaar of langer niet naar een universiteit, maar Fred was eind 1944 al klaar met zijn tentamens voor het doctoraal examen. Na de oorlog is Fred al gauw getrouwd met zijn vriendin Inge Zevenhuizen en wiskundeleraar geworden in Warffum, in

Groningen; kort daarna kon hij in Leiden officieel zijn doctoraal doen. In Warffum ben ik een keer bij Fred op bezoek geweest en toen hebben we samen met zijn zus Ria een tochtje naar Schiermonnikoog gemaakt. Ik wist toen al lang dat ik hoogleraar wilde worden en denk dat hetzelfde gold voor Fred.

### Mathematisch Centrum

In 1947 werden Fred en ik de eerste medewerkers aan het pas opgerichte Mathematisch Centrum in Amsterdam, althans de eersten die najaar 1947 op het MC aan het werk gingen. Onder de directie van de professoren J.G. van der Corput, J.F. Koksma en D. van Dantzig begonnen we in een leegstaande ruimte van de Sociale Dienst aan de Nieuwe Kerkstraat, dichtbij de Magere Brug over de Amstel. Al gauw verhuisde het MC naar een ander gebouw van de dienst, op de hoek van de Wijtenbachstraat en de Linnaeusstraat. Daar kwam de speelse geest van Fred boven: hij plakte etiketten, zoals ‘Differentialvergelijkingen’, boven de loketten in de ontvangstruimte! Niet veel later betrok het Centrum een oude school aan de Tweede Boerhaavestraat, waar het geruime tijd zou blijven.

Fred en ik hebben aan het MC heel intensief en met veel plezier samengewerkt. In theorie waren we wetenschappelijke onderzoekers, en we hebben samen wel iets geschreven, maar aan het nog ongeorganiseerde Centrum moesten we van alles aanpakken. In het kader van wat Van der Corput als zijn missie beschouwde, hielpen we bij het organiseren van wiskundecursussen in heel Nederland. Zelf gaven we in Amsterdam avondcursussen calculus en analyse, en ook nog een cursus statistiek voor medici en biologen. We hielpen Koksma bij het opzetten van een bibliotheek. Van Dantzig vroeg ons om een wiskundig manuscript te bewerken van een leidende figuur bij een potentiële opdrachtgever. Als echte kwajongens schreven Fred en ik een rapportje met tegenvoorbeelden voor de stellingen in het artikel. Van Dantzig was niet echt boos, maar legde uit dat dat niet zijn bedoeling was!

Meer constructief begonnen we een serie voordrachten ‘Actualiteiten’ over nieuwe ontwikkelingen, waarover we gelezen hadden in de literatuur die bij het MC binnenkwam uit het buitenland. Die voordrachten waren op zaterdagochtenden van

Akademiedagen; het was fijn dat we onze vroegere leermeester Kloosterman voor zo’n spreekbeurt konden strikken! Een enkele keer moesten we op het Mathematisch Centrum syllabi vermenigvuldigen op de primitieve stencilmachine. Zie voor een en ander het latere interview van Fred en mij, ‘Klussen en een carrière’, door Gerard Alberts en Bert Peletier, pp 161–171 in de CWI-publicatie *Zij mogen uiteraard daarbij de zuivere wiskunde niet verwaarlozen* [1], alsmede artikelen over Van der Corput door Henri Duparc en mij [3,7].

Fred en ik zagen elkaar ook geregeld op zondag bij hem en Inge thuis. Zij woonden boven een garagebedrijf aan de Ceintuurbaan, tegenover het mooie Sarphatipark. Toen Fred daar een keer een gewaagd grapje maakte over lieve witte konijntjes wees Inge hem terecht: “Zo kan het wel weer even, Fred.”

### Wiskundeleraar in Breda

Al na een jaar aan het Mathematisch Centrum werd Fred gevraagd om hoogleraar wiskunde te worden aan de TH Delft. Hij nam ontslag bij het MC, maar vanwege de loyaliteitsverklaring kon hij ten slotte toch niet in Delft aan het werk. Fred heeft mij later nooit willen vertellen wat er precies gebeurd is, maar terugredenerend vanuit mijn eigen latere ervaring in Delft, denk ik dat er bezwaren gekomen zijn van enkele collega’s buiten de wiskunde, en vooral van oudere Delftse studenten die de loyaliteitsverklaring niet getekend hadden. Fred is toen leraar geworden aan een gymnasium in Breda.

### Hoogleraar in Utrecht en directeur IOWO

In 1954 heeft de befaamde wiskundige, professor Hans Freudenthal, Fred naar Utrecht gehaald, met aanvankelijke leeropdracht elementaire analyse. Daar werd Fred al gauw hoogleraar; hij kreeg een geweldige reputatie als docent en heeft vele jongeren geïnspireerd. Vergelijk ook het artikel [8] door Hans van Lint en Rob de Jong getiteld ‘Het Van der Blij-effect’: meteen na zijn college waren de studenten heel enthousiast en dachten ze alles begrepen te hebben, maar later thuis viel dat tegen. Het meeste onderzoek van Fred betrof getaltheorie en algebra. Daarnaast heeft hij uitstekende onderzoekers opgeleid, zoals Jack van Lint, Marius van der Put en Jan Hogendijk; van Lint en Hogendijk zijn later lid geworden van de KNAW, de Akademie

van Wetenschappen. Net als Freudenthal (1963–64) is Fred (1970–71) ook rector magnificus geweest. Ten slotte volgde hij Freudenthal op als directeur van het IOWO, het Instituut voor de Ontwikkeling van het Wiskunde Onderwijs, het latere Freudenthal Instituut.

### Een hecht contact

Mijn eigen geschiedenis is iets anders gelopen al zijn er overeenkomsten. Na mijn promotie bij Kloosterman [6] over werk aan het Mathematisch Centrum ben ik eerst twee jaar in Amerika geweest, daarna ruim een jaar aan de TH Delft. In die tijd, in 1952, is Freds zoon Fred geboren, ongeveer tegelijk met mijn dochter Wilma; er moet ergens een foto zijn van de twee baby's bij elkaar. In Delft kreeg ik soortgelijke problemen als Fred vier jaar daarvoor. Daarna heb ik nog ruim twintig jaar in Amerika gewerkt.

We hebben altijd contact gehouden; Fred is een keer op bezoek geweest bij mij aan de Universiteit van Californië in San Diego, onder een bezoekersprogramma voor uitmuntende docenten. De contacten werden sterker toen ik (vanaf 1974) terug was in Nederland: ik ging geregeld bij Fred en Inge op bezoek in Bilthoven.

Het is misschien aardig om hier te vermelden dat Hans Tolhoek hoogleraar natuurkunde was geworden in Groningen, en landelijk bekend werd door zijn streven om colleges 'Wetenschap en Samenleving' aan alle universiteiten verplicht te stellen. Nico van Kampen was een vooraanstaand fysicus geworden en hoogleraar in Utrecht; ik sprak hem vaak bij de Akademie. Hij zou later bij een breder publiek bekend worden door zijn kritische boekje *Waanwetenschap* [5].

In de periode 1989–91 waren Fred en ik lid van de Verkenningcommissie Wiskunde (VCW) van het Ministerie van Onderwijs



Jaap Korevaar (links) op bezoek bij Fred van der Blij in september 2017

Foto: uit het archief van de familie van der Blij

en Wetenschappen. Behalve zeven gewone leden waren er nog vijf Nederlands-sprekende leden uit het buitenland. De opdracht was om het gehele Nederlandse wiskundeonderzoek en universitaire onderwijs te evalueren, en om aanbevelingen te doen tot verbetering, vergelijk het uiteindelijke rapport [9]. De commissie bezocht 24 instellingen en nog tien bedrijven werden schriftelijk geraadpleegd. Overal stelde de VCW kritische vragen en er was ook inhoudelijke kritiek. Bij de visitatie van het Freudenthal Instituut kwam uiteraard de controverse rond het daar gepropageerde 'realistisch rekenen' aan de orde.

Na Freds pensionering ging ik geregeld bij hem op bezoek in Gorssel, en ten slotte in Heino. In die latere jaren kwam ik onder de indruk van Freds artistiek-wiskundige knutselwerk. Ongeveer tien jaar geleden hebben Fred en ik nog enige tijd samengewerkt aan het probleem van priemtwelingen: paren van priemgetallen of ondeelbare getallen, die twee verschillen, zoals

3 en 5, 5 en 7, 11 en 13, enzovoort. Niemand weet of er oneindig veel zulke tweelingen zijn, maar er is een beroemd vermoeden van Hardy en Littlewood [4] over het aantal priemtwelingen tot grote  $x$ . Zoals bekend is het aantal priemgetallen tot  $x$  asymptotisch gelijk aan  $x/\log x$ , en het aantal priemtwelingen zou vergelijkbaar moeten zijn met  $x/\log^2 x$ . Ik had een analytische formulering gevonden voor dat vermoeden, en Fred kreeg toen een lumeneuze inval voor een aanpak. Jammer genoeg heeft die niet echt gewerkt — een streng bewijs zou Fred en mij samen beroemd gemaakt hebben!

Het was de laatste jaren wat moeilijk om met Fred een gesprek te voeren, maar in september 2017 konden we opeens nog een keer gezellig met elkaar praten over de oude tijd. Nog één opmerking tot slot: Fred en ik hebben het allebei als een groot voorrecht beschouwd dat we les mochten geven aan heel veel talentvolle jongeren! ☺

### Referenties

- 1 G. Alberts, F. van der Blij en J. Nuis, eds., *Zij mogen uiteraard daarbij de zuivere wiskunde niet verwaarlozen*, CWI, 1987, 391 pp.
- 2 Frederik van der Blij, *Theta Functions of Degree  $m$* , Dissertatie, Universiteit Leiden 1947, 47 pp.
- 3 H.J.A. Duparc en J. Korevaar, Johannes Gualtherus van der Corput (4 September 1890–13 September 1975), *Nieuw Archief voor Wiskunde* 3/30 (1982), 1–39.
- 4 G.H. Hardy en J.E. Littlewood, Some problems of 'partitio numerorum'. III: On the expression of a number as a sum of primes, *Acta Math.* 44 (1923), 1–70.
- 5 N.G. van Kampen, *Waanwetenschap*, Epsilon Uitgaven, deel 52, 2002.
- 6 J. Korevaar, *Approximation and Interpolation Applied to Entire Functions*, Dissertatie, Universiteit Leiden, 1949, 56 pp.
- 7 J. Korevaar, Johannes Gualtherus van der Corput (4 September 1890–13 September 1975), *Indag. Math. (N.S.)* 26 (2015), 715–722.
- 8 H. van Lint en R. de Jong, Het Van der Blij-effect, *Nieuw Archief voor Wiskunde* 5/5 (2004), 119–124.
- 9 *Wiskunde in beweging*, Rapport van de Verkenningcommissie Wiskunde, Ministerie van Onderwijs en Wetenschappen, 's-Gravenhage, 1992.

Jan de Lange

voormalig hoogleraar-directeur Freudenthal Instituut  
Katwijk  
j.delange@uu.nl

In Memoriam Frederik van der Blij (1923–2018)

# Een diplomaat aan het front

Op 27 januari 2018 is Frederik van der Blij overleden, emeritus hoogleraar wiskunde van de Universiteit Utrecht en erelid van het Koninklijk Wiskundig Genootschap. Hij werd 94 jaar. Vier vrienden en oud-collega's blikken terug op zijn leven en werk. In dit tweede deel bespreekt Jan de Lange de periode dat Van der Blij directeur was van het Instituut Ontwikkeling Wiskunde Onderwijs (IOWO), wat later het Freudenthal Instituut is gaan heten. Jan de Lange was daar zijn opvolger als directeur.

Fred van der Blij was een vriendelijke, innemende, belangstellende man. Niet zo op de voorgrond tredend, maar een goed luisterende, rechtschapen hoogleraar. Echt niets op aan te merken.

Het was dan ook een speling van het noodlot dat hij juist directeur van het Freudenthal Instituut was rond 1980. Dat heette toen anders: Instituut Ontwikkeling Wiskunde Onderwijs (IOWO). Vóór 1980 had het een kleine veertig werknemers. En tot dat moment was er nauwelijks tegenwind geweest. Enter Ad Hermes.

Ad Hermes was een katholieke wiskundeleraar, die zich via de gemeentepolitiek van Beverwijk in de Tweede Kamer ontwikkelde tot staatssecretaris van Onderwijs en Wetenschappen belast met basisonderwijs en de verzorgingsstructuur. En dat was nou net het probleem. Ad wilde, nota bene als wiskundeleraar, zich sterk maken voor de Stichting Leerplanontwikkeling (SLO), en volgens zijn logica, moest het IOWO overgaan naar de SLO.

Die logica stuitte op enige weerstand: een internationaal bekende Amerikaan, Tom O'Brien, startte een protestbrievenactie. En een groot aantal IOWO'ers weigerde de overstap. Waaronder schrijver dezes.

En Van der Blij stak zijn mening op het ministerie niet onder stoelen of banken. Uiteindelijk werd het IOWO opgeheven, maar het Freudenthal Instituut gered: de afdeling 'Onderzoek' van het IOWO mocht, vijf man groot, overleven binnen de universitaire structuur van de Universiteit Utrecht. Zonder deze dramatische maar achteraf succesvolle en allesbeslissende redding zou het Freudenthal Instituut er nooit geweest zijn. Dat vond van der Blij's voorganger Hans Freudenthal ook. Die bleef aan als vrijwilliger. De naam werd Onderzoek Wiskundeonderwijs en Onderwijs Computercentrum (OW&OC), later Freudenthal Instituut.

Maar van der Blij werd zwaar gestraft: hij moest persoonlijk die vijf mensen uitzoeken. Ofwel: hij moest een dikke dertig

mensen ontslag aan zeggen. Lees nu even de eerste zinnen terug van dit stukje.

Later heeft hij zijn opvolger verteld dat dit de lastigste taak van zijn leven was geweest. Dat had hij niet hoeven vertellen. Ik herinner me de enorme spanning die in de gangen hing van de Tiberdreef. Een voor een werden we opgeroepen. En een voor een kwamen we weer naar buiten. Altijd met bedrukt gelaat: want als jij mocht blijven dan wist je zeker dat er minstens drie anderen dat geluk niet hadden.

Het waren sombere dagen. Ook voor de vijf wat gelukkigere vogels. Het is zo goed dat Fred getuige is geweest van, en een grote rol heeft gespeeld in de ongelofelijke opbloei, zowel nationaal als internationaal. Dat laatste (internationaal) is volgens hem beslissend geweest voor de groei.

We hebben later nog wel eens gelachen om staatssecretaris Hermes en de wet op de onderwijsverzorging. Van der Blij: de vriendelijk hoogleraar die zijn tanden kon laten zien als de situatie dat vroeg en dan ook nog eens niet weg liep van de verantwoordelijkheid.

## HEWET-project

Heel belangrijk was zijn inzet — naast de 'doorstart' van het instituut — voor het HEWET-project. Dat betrof de herverdeling



Foto: uit het archief van de familie Van der Blij

Frederik van der Blij in zijn studeerkamer

eindexamenprogramma's wiskunde. Vóór 1 januari 1981 had Fred hemel en aarde en het ministerie in de vorm van drs. W.C. Riel, bewogen om een project dat een nieuwe curriculum wiskunde A op moest leveren echt door het nieuwe OW&OC instituut te laten uitvoeren.

Zijn tactiek werkte boven verwachting: er werd een team bij OW&OC aangesteld met als netto resultaat een extra functie voor vijf jaar! In april 1981 werd onze Fred voorzitter van de begeleidingscommissie HEWET Herverkaveling Wiskunde 1 en 2. De taak van deze commissie was drieledig: het ministerie adviseren welke scholen mochten experimenteren met wiskunde A (er lag al een rapport). Ten tweede: het team te adviseren omtrent de komende experimenten (hier werden materialen voor ontwikkeld). En ten slotte adviseren naar het ministerie omtrent nascholing. Dat laatste werd nog een heikel punt, maar het tact en de rechtlijnigheid van de voorzitter bleken uiteindelijk succesvol.

Voor OW&OC, later dus het Freudenthal Instituut, bleek dit nadien de levenslijn naar een duurzame toekomst. Ook hier werd later de meesterhand van de schilder duidelijk. Het is voor mij, als naast betrokkene moeilijk om objectief te zijn. Maar in een wat willekeurige volgorde ziet de strategie van Fred, er ongeveer zo uit:

1. Laat het IOWO als onderzoeksgroepje een been tussen de deur houden binnen de (sub)faculteit Wiskunde van de Universiteit Utrecht.
2. Zorg ervoor dat er een substantieel project komt voor de bovenbouw van het vwo. Dat maakt overleving mogelijk en spreekt wellicht de wiskundigen wat meer aan. Wordt zelf voorzitter van het begeleidingsteam.
3. Zorg dat de formatie van OW&OC hierdoor uitgebreid wordt.
4. Streef ondertussen naar de status van volwaardige 'vakgroep' bij de faculteit en bereid een eventuele leerstoel voor.

Hierbij werkte Fred nauw samen met Dirk Siersma.

5. En gewoon, als veiligheidsklep: zorg ervoor dat er eventueel iemand van binnen uit kan solliciteren naar deze leerstoel. Schrijver dezes werd 'aangemoedigd' een proefschrift te schrijven over het HEWET-project, waarin hij een rol speelde, vooral met Martin Kindt samen.

#### Tot slot

Hoe het ook zij: Fred van der Blij heeft een enorm grote rol gespeeld in het meebouwen aan het Freudenthal Instituut. En aan de inhoud van het Nederlandse wiskunde-onderwijs: hij vervulde talrijke andere rollen bij het vormgeven van het havo-onderwijs, en de curricula voor 12-16-jarigen (Commissie van der Blij).

Beste Fred: dankzij jou hebben velen een fantastische tijd gehad bij IOWO, OW&OC en Freudenthal Instituut. Gelukkig heb ik je dat herhaaldelijk kunnen laten weten. Nog een keer: Bedankt! ☺

Klaas Lakeman

bestuurslid Ars et Mathesis  
Heemskerk  
nt.lakeman@hccnet.nl

In Memoriam Frederik van der Blij (1923–2018)

# Schipperend tussen ars en mathesis

Op 27 januari 2018 is Frederik van der Blij overleden, emeritus hoogleraar wiskunde van de Universiteit Utrecht en erelid van het Koninklijk Wiskundig Genootschap. Hij werd 94 jaar. Vier vrienden en oud-collega's blikken terug op zijn leven en werk. In dit derde deel bespreekt Klaas Lakeman, bestuurslid van de Stichting Ars et Mathesis, de beginperiode van deze stichting, waarvan Van der Blij de eerste voorzitter was.

Zaterdag 17 december 1983 was in Baarn de oprichtingsvergadering van de Stichting Ars et Mathesis. Aanwezig waren Frederik van der Blij beoogd voorzitter, Hans de Rijk beoogd secretaris, Klaas Lakeman beoogd penningmeester en Wim Veldhuysen. Ed de Moor was aanwezig als toehoorder en zou na enkele maanden definitief tot het bestuur toetreden. In dit eerste bestuur was de mathesis oververtegenwoordigd, de ars was nog ver te zoeken. Voor de voorzitter in spe een mooie uitdaging om in die richting het nodige veldwerk te verrichten. Een taak die hem op het lijf geschreven was zoals zou blijken.

Het initiatief tot de Stichting Ars et Mathesis was genomen door Hans de Rijk in samenspraak met Van der Blij. Voordien had Van der Blij al menigmaal in publicaties en lezingen getuigd van zijn warme belangstelling voor de relatie tussen kunst en wetenschap, met name de wiskunde. Reden waarom Hans de Rijk hem had overgehaald tot dit initiatief. De Rijk zelf had inmiddels onder zijn bekendste pseudoniem Bruno Ernst veel gepubliceerd over het werk van M.C. Escher. Met name zijn *De toverspiegel van M.C. Escher* was op dat moment wereldvermaard. Naar aanlei-

ding van Eschers prenten *Belvédère*, *Warterval*, en *Klimmen en dalen* en het werk van de Zweedse graficus Oscar Reutersvärd (1915–2002) stelde De Rijk Ars et Mathesis direct voor een eerste uitdaging: een grote

internationale tentoonstelling 'Onmogelijke figuren'.

De Moor en in mindere mate Van der Blij vonden deze doelstelling wat te beperkt. Zij ijverden voor een ruimer blikveld van Ars et Mathesis. Goed beschouwd hadden onmogelijke figuren enkele uitzonderingen daargelaten, weinig van doen met kunst en nog minder met wiskunde. In het allereerste nummer van Arthesis, het mededelingenblad van de stichting dat na lang



Een van de vele kunstwerken die Frederik van der Blij maakte

Foto: uit het archief van de familie Van der Blij

aandringen van Ed de Moor in september 1986 verscheen, zou Frederik van der Blij voor die ruime zienswijze pleiten met het artikel 'Ars et Mathesis, wat bezielt ze?'

### Tentoonstellingen

Achteraf bekeken is het verbazingwekkend dat die eerste grote uitdaging al in september 1986 gestalte kreeg in het museum Hedendaagse Kunst Utrecht onder de titel 'Impossible figures'. Van der Blij hield een inleiding bij de tentoonstelling en deed de opening. Tevens verzorgde hij op een drietal zaterdagmiddagen een uitgebreide rondleiding. Gaande de voorbereidingen was zijn enthousiasme aangewakkerd door het artistieke gehalte van werken van kunstenaars als Monika Buch, Jos de Mey, Joop van Bossum en Arthur Stibbe om er een paar te noemen. Toch bleef hij waakzaam. "Als we na deze tentoonstelling maar niet gezien worden als een stel onmogelijke figuren", liet hij zich dikwijls ontvallen.

Mede door zijn vele connecties binnen zowel de wiskunde als de kunst zag Van der Blij al tijdens de voorbereidingen van genoemde tentoonstelling kansen om de horizon van Ars et Mathesis te verbreden. Zo wees hij op mogelijkheden voor mintentoonstellingen 'Onmogelijke Figuren' gekoppeld aan het International Congress over de Psychology of Mathematical Education van 21 tot en met 26 juli 1985 in Noordwijkerhout en kort daarna in augustus de 37ste conferentie voor verbetering van het wiskundeonderwijs (CIEAEM) in het Doelencomplex van de universiteit te Leiden. Dit als opwarmertjes voor de komende grote tentoonstelling. In Noordwijkerhout was op 26 juli zelfs een apart middagprogramma voor A&M-belangstellenden, een bijeenkomst die gezien kan worden als de eerste Ars et Mathesis-dag. Op die middag hield Van der Blij aan de hand van een diaprojectie een voordracht getiteld 'Over Ars et Mathesis—Kunst en Wiskunde'.

De Vlaamse schilder Jos de Mey (1928–2007) was een van de kunstenaars die gehoor gaf aan een oproep om werk in te zenden voor de tentoonstelling 'Impossible figures'. Naast veel toepasselijk werk bleek hij te beschikken over een schetsboek met 246 varianten op de bekende Pythagorasboom, tijdens de Tweede Wereldoorlog ontworpen door Albert Ernst Bosman (1891–1961). Een aantal daarvan was uitgewerkt in olieverf, aquarel en zeef-



Frederik van der Blij

Foto: uit het archief van de familie Van der Blij

druk en werd vanaf 22 november 1985 tentoongesteld in het Vlaams Cultureel Centrum/De Brakke Grond in Amsterdam. Bij de opening werd het boekje *Bomen van Pythagoras, variaties van Jos de Mey* gepresenteerd. Daarin een tweetal bijdragen van Van der Blij getiteld *Enzovoorts* en *De omtrek van de boom en gebroken dimensies*. Daarmee sloeg hij tegelijk een brug naar wat nog moest komen de wereld van de fractals. Dit was kenmerkend voor hem. Steeds wist hij door zijn onbevangen kijk verrassende verbanden te leggen en over de horizon van vakgebieden heen te kijken. Er was weinig binnen de wiskunde en de wereld van de kunst dat hem niet interesseerde. Overal had hij belangstelling voor.

### Van der Blij-effect

In september 1984 wees Van der Blij al op een in Duitsland langs universiteiten en spaarbanken rondreizende tentoonstelling over computergrafiek. Vooral toen het museum Hedendaagse Kunst Utrecht daar ook belangstelling voor toonde, zette hij alles in het werk om deze naar Nederland te halen. Uiteindelijk werd dat de tentoonstelling 'Schoonheid in de Chaos' van 4 juli tot en met 30 augustus 1987 in Utrecht, met als ondertitel 'computerbeelden op grond van de theorie van complexe dynamische systemen'. Voor velen, zeker niet-wiskundigen werd dat een eerste kennismaking met de fractale wereld van Benoit Mandelbrot en het zogenaamde 'appelmannetje'. Van der Blij zorgde voor een eenvoudig ten-

toonstellingsgidsje, verrichte de opening en hield daarna een eerste rondleiding langs de onder supervisie van H.-O. Peitgen en P.H. Richter vervaardigde computerbeelden.

Tijdens die rondleiding werd het zogenaamde 'Van der Blij-effect' ten volle gedemonstreerd. Van der Blij wist zijn toelichting en uitleg wederom zo te brengen dat ook iedere niet wiskundig geschoolde aanwezige er volledig van overtuigd was alles volkomen te hebben begrepen. Echter thuisgekomen zal menigeen zich wel hebben afgevraagd wat hij of zij nu wel zo goed had begrepen. En of men niet bij de neus genomen was.

Van der Blij kreeg het druk met Ars et Mathesis. Op 29 november 1987 opende hij alweer een tentoonstelling in Hedendaagse Kunst Utrecht. Ditmaal met werk van Gerard Caris onder de titel 'Gerard Caris en de vijfhoek'. En met 'De kunst van Gerard Caris en de geometrie' wederom een bijdrage aan de begeleidende tentoonstellingscatalogus.

### Een stapje terug

In het jaar daarop werd meer en meer duidelijk dat Van der Blij niet langer de druk op zijn schouders wilde hebben van de Ars et Mathesis-kar te moeten trekken. Hij gaf aan dat hij als voorzitter graag vervangen wilde worden. Maart 1989 kreeg dat zijn beslag. Ars et Mathesis de rug toe keren was er echter nog niet bij. Hij bleef actief deel uitmaken van het bestuur. In deze vrije rol droeg hij meer dan voorheen ideeën aan voor lezingen op de inmiddels traditioneel geworden jaarlijkse Ars et Mathesis-dag in november. Ook verzorgde hij zelf een aantal lezingen op die dagen zoals over 'Moiré', over 'Vijf- zeven- en andere hoeken' of onder de titel 'Escher, een geometrisch kunstenaar?' Verder schreef hij nog een aantal artikelen voor het mededelingenblad *Arthesis*. Altijd vanuit de voor hem eigen onconventionele invalshoek en zienswijze.

### Afscheid van Ars et Mathesis

Er kwam een dag dat het bestuur van Ars et Mathesis afscheid moest nemen van Frederik van der Blij. Dat was 2 september 1998. In een speciale bestuursvergadering werd in een keer afscheid genomen van drie bestuursleden: Wim Veldhuysen, net als Van der Blij man van het eerste uur, Koos Verhoeff en Van der Blij. Een hele aderlating

### Het Van der Blij-object

Het Van der Blij-object bestaat uit zes identieke hoekstukken van elektriciteitspijp, die met kleine tussenstukjes pijp zijn verbonden. Het wordt met een stevig elastiek dat door het geheel heen loopt, bij elkaar gehouden. Als we het object uit elkaar trekken dan kunnen we het in elk van de drie vormen in elkaar zetten. In elkaar

gezet blijkt vorm 1 dan star, terwijl de vormen 2A en 2B beweeglijk blijken te zijn: 2A is zonder het object uit elkaar te trekken in 2B over te voeren. Daarbij roteren opeenvolgende stukken ten opzichte van elkaar om de as van het verbindingspijpje. We hebben bij de vormen 2A en 2B klaarblijkelijk te maken met een 'overconstrained linkage'. De vraag is of het een bekend mechanisme is.



Van de Blij-object, vorm 1



Van de Blij-object, vorm 2A



Van de Blij-object, vorm 2B

Foto's: Klaas Lakeman

na vijftien jaar. Van der Blij kreeg daarop het predicaat 'Ere-voorzitter' mee en net als Veldhuysen een door Koos Verhoeff vervaardigde kunstige constructie, terwijl Verhoeff zelf een fraai werk van Rinus Roelofs ten deel viel.

Al die jaren was het een genot om met Van der Blij te vergaderen. Van meet af aan was het de gewoonte om aan het begin van de bestuursvergaderingen elkaar meegebrachte objecten en artikelen te tonen die op een of andere manier met de ars en de mathesis in verband konden worden gebracht. Het kwam zelden voor dat Van der Blij daarbij werd verrast. Door zijn enorme belangstelling vond hij altijd wel een aanknopingspunt en kwam dan met toelichtende verklaringen en speelse uitleg. Als hem dan al iets onbekend voor kwam, moest dat ogenblikkelijk volledig worden doorgrond. Zoals toen het dubbel of ruimtelijk verstek voor het eerst ter

sprake kwam. Ogenblikkelijk sloeg Van der Blij aan het rekenen om te komen tot een simpel sluitend object. Later zou Koos Verhoeff dat met computerhulp ruimschoots verbeteren en uitgroeien tot de wiskunstenaar van het ruimtelijk verstek.

Uiteraard bracht Van der Blij ook spullen mee, dikwijls met huis-, tuin- en keukenmateriaal zelf in elkaar gefroëld. Het kunnen demonstreren was voor hem belangrijker dan een perfecte nette uitvoering. Bij gebrek aan vergaderruimte werd het bestuur een keer bij Frederik van der Blij thuis uitgenodigd. In de huiskamer stonden veel objecten permanent uitgesteld. Die moesten natuurlijk uitvoerig worden bekeken en toegelicht zodat er bijna geen tijd meer overbleef om te vergaderen.

Ars et Mathesis vergeten kon Van der Blij niet. En dat was wederzijds. Een enkele keer bezocht hij nog een A&M-dag. Sinds 2007 krijgen donateurs die de Ars

et Mathesis-dag bezoeken het jaarboek uitgereikt dat in plaats van het mededelingenblad *Arthesis* is gekomen. Als trouw bezoeker van deze dagen nam Henny Susijn steeds een extra exemplaar mee om dat persoonlijk aan Van der Blij te overhandigen. Afgelopen november liet zij het bestuur nog weten hoe trots en opgetogen Van der Blij ook nu weer was over het pas verschenen jaarboek.

### Over Ars et Mathesis

Meer over de Stichting Ars et Mathesis is te vinden op de website [arsetmathesis.nl](http://arsetmathesis.nl) daar zijn onder 'Publicaties' ook alle nummers van het mededelingenblad *Arthesis* te downloaden. De komende Ars et Mathesis-dag op zaterdag 17 november 2018 zal in het teken staan van het zevende lustrum en daarnaast zal er aandacht worden besteed aan Frederik van der Blij en het inmiddels ook overleden ex-bestuurslid Koos Verhoeff. Meer daarover te zijner tijd op de website.

### Referenties

- 1 Frederik van der Blij, *Schoonheid in de chaos*, Hedendaagse Kunst Utrecht, 1987.
- 2 Frederik van der Blij en Wouter Kotte (samenstelling), *Gerard Caris en de vijfhoek*, Hedendaagse Kunst Utrecht, 1987.
- 3 Bruno Ernst e.a., *Bomen van Pythagoras*, Aramith, 1985.

## Roelof Bruggeman

Mathematisch Instituut  
Universiteit Utrecht  
r.w.bruggeman@uu.nl

### In Memoriam Frederik van der Blij (1923–2018)

# Wetenschappelijk werk

Op 27 januari 2018 is Frederik van der Blij overleden, emeritus hoogleraar wiskunde van de Universiteit Utrecht en erelid van het Koninklijk Wiskundig Genootschap. Hij werd 94 jaar. Vier vrienden en oud-collega's bliken terug op zijn leven en werk. In dit vierde deel belicht Roelof Bruggeman, in 1972 gepromoveerd bij Van der Blij, zijn wetenschappelijke werk.

Het belangrijkste thema in het werk van Van der Blij zijn kwadratische vormen. Zijn proefschrift bij Kloosterman [1] gaat over thetafuncties. Dat zijn varianten van voortbrengende functies van aantallen van manieren om een getal door een gegeven kwadratische vorm voor te stellen. Het laatste artikel op MathSciNet, met Bram van Asch, gaat over productvoorstellingen van een ander type voortbrengende functies bij dezelfde grootheid.

#### Kwadratische vormen

Een eenvoudig voorbeeld van kwadratische vormen is  $S_n(x) = x_1^2 + x_2^2 + \dots + x_n^2$ , waarbij de vector  $x = (x_1, x_2, \dots, x_n)$  gehele coördinaten heeft. De waarden van  $S_n$  zijn geheel, en voor deze kwadratische vormen 0 of positief.

De *voorstellingsaantallen*  $A_n(k)$  zijn het aantal manieren om gehele  $k \geq 0$  als  $k = S_n(x)$  te schrijven. Het gedrag van  $A_n(k)$  voor  $k \rightarrow \infty$  kan op verschillende manieren onderzocht worden. Eén manier is de voortbrengende functie

$$F_n(q) = \sum_{k \geq 0} A_n(k) q^k = \sum_{x \in \mathbb{Z}^n} q^{S_n(x)}.$$

In principe kun je deze voortbrengende functie bestuderen met  $q$  als een formele variabele. In dit geval is het interessant  $q$  als complex getal te zien met  $|q| < 1$ . Dan convergeert de reeks absoluut, en

levert een functie op de eenheidsschijf in  $\mathbb{C}$ . Schrijf  $q = e^{\pi iz}$ , dan is  $f_n(z) = F_n(e^{\pi iz})$  een complex differentieerbare functie op het *bovenhalfvlak*  $\{z \in \mathbb{C} : \text{Im } z > 0\}$ . Zulke functies komend van kwadratische vormen noemt men *thetafuncties*.

De functie  $f_n$  voldoet aan de volgende vergelijkingen:

$$\begin{aligned} f_n(z+2) &= f_n(z), \\ f_n(-1/z) &= (-iz)^{n/2} f_n(z). \end{aligned}$$

Functies met dit (of een soortgelijk) transformatiegedrag noemt men *modulaire vormen*. Ruimten van modulaire vormen met een voorgeschreven transformatiegedrag hebben eindige dimensie, vaak met een bekende basis. Dat levert informatie op over  $f_n$ , en over de voorstellingsaantallen  $A_n(k)$ .

Toen ik in 1968 als promovendus begon bij Van der Blij en Mars, kreeg ik een stapeltje overdrukken, en ook een exemplaar van het proefschrift [1]. Dit proefschrift sluit aan op werk [8] van promotor H.D. Kloosterman. Het bestudeert thetafuncties bij kwadratische vormen waarbij de gehele vector  $x \in \mathbb{Z}^n$  vervangen is door een rechtehoekige gehele matrix. Dan wordt  $z$  vervangen door een symmetrische complexe matrix, met positief definitief imaginair deel. Op deze manier krijgt men modulaire vormen op het Siegel-bovenhalfvlak, een ge-

neralisatie van het hierboven genoemde complexe bovenhalfvlak.

#### De kwadratische vorm $E_8$

Een heel bijzondere kwadratische vorm is  $E_8$ , een kwadratische vorm in 8 variabelen, die in verschillende gebieden van de wiskunde opduikt, één daarvan vormt de studie van de octaven.

Gedeeltelijk samen met Springer heeft Van der Blij verschillende artikelen geschreven over ringen in octaven [2, 3, 4, 5]. De octaven  $\mathbb{O}$  (tegenwoordig in het Engels vaak *octonions* genoemd) passen in het rijtje

$$\mathbb{R} \subset \mathbb{C} \subset \mathbb{H} \subset \mathbb{O}$$

van reële getallen, complexe getallen, quaternionen en octaven. Het zijn lineaire ruimten over  $\mathbb{R}$  met dimensies 1, 2, 4 en 8, waarin je kunt optellen en vermenigvuldigen, en waarin elementen ongelijk aan 0 een inverse hebben voor de vermenigvuldiging. In elke uitbreidingsstap raakt men iets van de gewone rekenregels kwijt. In de uitbreiding  $\mathbb{R} \subset \mathbb{C}$  de ordening; in  $\mathbb{C} \subset \mathbb{H}$  de commutativiteit,  $ab = ba$ ; in  $\mathbb{H} \subset \mathbb{O}$  de associativiteit,  $a(bc) = (ab)c$ . Net zoals  $\mathbb{Z}$  een deelring van  $\mathbb{R}$  is, zijn er deelringen van gehelen in de grotere delingsalgebra's. In  $\mathbb{O}$  is deze deelring in essentie uniek. Van der Blij en Springer bestuderen deze deelring in [3]. De natuurlijke kwadratische vorm op deze deelring is één van de verschijningsvormen van  $E_8$ .

#### Eulerproducten

In zijn laatste wetenschappelijk publicatie [7] bekijken Van Asch en Van der Blij ande-

re voortbrengende functies met voorstellingsaantallen van kwadratische vormen, namelijk de Dirichletreeks

$$\sum_{m \geq 1} \frac{A_m(tm^2)}{m^s}$$

voor een vast geheel getal  $t$  zonder kwadraten in zijn priemontwikkeling.

Dirichletreeksen zijn bekend van de zeta-functie van Riemann,

$$\zeta(s) = \sum_{m \geq 1} \frac{1}{m^s},$$

absoluut convergent voor  $\operatorname{Re} s > 1$ . Deze Dirichletreeks heeft een Eulerproduct:

$$\zeta(s) = \prod_p \frac{1}{1 - p^{-s}},$$

waarin  $p$  de priemgetallen doorloopt. Van Asch en Van der Blij geven in [7] expliciet de factoren in het soortgelijke product van  $\sum_{m \geq 1} \frac{A_m(tm^2)}{m^s}$ .

### Reguliere veelhoeken

In [6] beschouwt Van der Blij de dimensie van reguliere veelhoeken. Dat was eerder bekeken, maar [6] is in mijn ogen karakteristiek voor zijn brede belangstelling.

Als je met drie rietjes van gelijke lengte en wat draad een regelmatige driehoek maakt krijg je een star voorwerp, gelegen in een vlak. De vierhoek gevormd door vier rietjes van gelijke lengte is niet star, en kun je tot een driedimensionaal object vervormen. De vierhoek wordt star en tweedimensionaal als je voor de diagonalen van de vierhoek ook rietjes gebruikt, met een lengte die  $\sqrt{2}$  zo groot is als de lengte van de zijden. (Laten we ervan af zien dat die diagonale rietjes elkaar in de weg zitten.) Maar je zou ook zes rietjes van gelijke lengte kunnen gebruiken; dan krijg je een regelmatig viervlak, dat driedimensionaal is.

Dit kun je generaliseren tot  $n$  punten  $P_1, \dots, P_n$  in een ruimte met dimensie min-



Fred van der Blij tijdens het geven van college

Foto: uit het archief van de familie Van der Blij

stens  $n$ , waarbij de afstanden tussen  $P_i$  en  $P_{i+1}$  alle gelijk zijn, zeg  $\sqrt{D_1}$  (indices modulo  $n$  bekeken), de afstanden tussen  $P_i$  en  $P_{i+2}$  alle gelijk zijn aan  $\sqrt{D_2}$ , evenzo voor  $P_i$  en  $P_{i+3}$ , enzovoorts, tot de af-

standen tussen  $P_i$  and  $P_{i+k}$  met  $k \leq n/2$ . Denkbare vragen: Welke keuzen van de  $D_j$  zijn mogelijk? Zo ja, in welke dimensie past de zo ontstane reguliere veelhoek? Zie [6] voor antwoorden. ♦♦♦

### Referenties

- 1 F. van der Blij, *Theta Functions of Degree m*, Proefschrift, Leiden, 1947.
- 2 F. van der Blij en T.A. Springer, The arithmetic of octaves and of the group  $G_2$ , *Indag. Math.* XXI (1959), 406–418.
- 3 F. van der Blij en T.A. Springer, Octaves and triality, *Nieuw Archief voor Wiskunde* 3/8 (1960), 158–169.
- 4 F. van der Blij, History of the octaves, *Simon Stevin* 34(III) (1961), 106–125.
- 5 F. van der Blij, Units of octaves, *Indag. Math.* XXVIII (1966), 126–130.
- 6 F. van der Blij, Regular polygons in Euclidean space, *Lin. Algebra and its Applications* 226–228 (1995), 345–352.
- 7 B. van Asch en F. van der Blij, Integral quadratic forms and Dirichlet series, *Ramanujan J.* 22(1) (2010), 1–10.
- 8 H.D. Kloosterman, The behaviour of general theta functions under the modular group and the characters of binary modular congruence groups, *Ann. of Math.* 47 (1946), I: 317–375; II: 376–447.

Bas Lemmens

SMSAS  
University of Kent, Canterbury, UK  
b.lemmens@kent.ac.uk

Onno van Gaans

Mathematisch Instituut  
Universiteit Leiden  
vangaans@math.leidenuniv.nl

Event Workshop Lorentz Center, 29 May–2 June 2017

# Order structures, Jordan algebras, and geometry

In this article Bas Lemmens and Onno van Gaans discuss one of the central themes of the Lorentz Center workshop ‘Order Structures, Jordan Algebras, and Geometry’ held in May 2017 at the Lorentz Center in Leiden, which was organised by the authors in collaboration with Cho-Ho Chu from Queen Mary University of London.

The notion of a Jordan algebra has a long and rich history in mathematics. It was originally introduced by Pascual Jordan in a quest to find alternative algebraic settings for quantum mechanics. Although this program failed, Jordan algebras turned out to have deep connections with diverse areas of mathematics including Lie theory, differential geometry and mathematical analysis.

A *real Jordan algebra* is a real vector space  $\mathcal{A}$  with a bilinear product  $(a, b) \in \mathcal{A} \times \mathcal{A} \mapsto a \cdot b \in \mathcal{A}$  satisfying

1.  $a \cdot b = b \cdot a$ ,
2.  $a^2 \cdot (a \cdot b) = a \cdot (a^2 \cdot b)$  (Jordan Identity).

So, Jordan algebras are commutative, but in general fail to be associative – the Jordan Identity only gives power associativity.

Throughout this article we will assume that the Jordan algebra has a *unit*, denoted  $e$ . A Jordan algebra is said to be *formally real* if  $a^2 + b^2 = 0$  implies  $a = 0$  and  $b = 0$ . A prime example of a formally real Jordan algebra is the space of  $n \times n$  Hermitian matrices,  $\mathcal{H}_n(\mathbb{C})$ , with Jordan product

$$A \cdot B = \frac{AB + BA}{2} \quad (1)$$

for  $A, B \in \mathcal{H}_n(\mathbb{C})$ .

More generally one can consider the space of bounded self-adjoint operators on a Hilbert space  $H$ , denoted  $B(H)_{\text{sa}}$ , and define a Jordan product  $A \cdot B$  as in (1). Another interesting class of examples are the so called *spin factors* which are defined as follows. Let  $H$  be a Hilbert space with inner product  $\langle \cdot, \cdot \rangle$  and let  $V = H \oplus \mathbb{R}$ . For  $(x, \alpha)$

and  $(y, \beta)$  in  $V$  (so  $x, y \in H$  and  $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ ) one defines a Jordan product by

$$(x, \alpha) \cdot (y, \beta) = (\beta x + \alpha y, \alpha \beta + \langle x, y \rangle).$$

Finally we should also mention the space  $C(K)$  of continuous functions on a compact Hausdorff space  $K$  with Jordan product  $f \cdot g = fg$ , which is an associative Jordan algebra.

In a famous paper Jordan, von Neumann and Wigner classified the finite dimensional formally real Jordan algebras [6]. They showed, in finite dimensions, that every formally real Jordan algebra can be written as a direct sum of simple ones of which there are only five types: the space of symmetric  $n \times n$  real matrices,  $\mathcal{S}_n(\mathbb{R})$ , with  $n \geq 3$ , the space of  $n \times n$  Hermitian matrices,  $\mathcal{H}_n(\mathbb{F})$ , over the fields  $\mathbb{C}$  and  $\mathbb{H}$  with  $n \geq 3$ , the spin factors with  $H$  an  $n$ -dimensional real inner-product space with  $n \geq 0$ , and an exceptional one  $\mathcal{H}_3(\mathbb{O})$ , where  $\mathbb{O}$  are the octonians. This is a 27-dimensional formally real Jordan algebra which is also known as the Albert algebra. In all but the spin factors the Jordan product is as in (1).

## Symmetric cones

A deep connection between finite dimensional formally real Jordan algebras and the geometry of cones was independently discovered by Koecher [8] and Vinberg [16].

Here a *cone*  $C$  is a convex subset of a real vector space  $V$  such that  $C \cap (-C) = \{0\}$





Max Koecher

Photo: Konrad Jacobs, Mathematisches Forschungsinstitut Oberwolfach



Ernest Vinberg

and  $\lambda C \subseteq C$  for all  $\lambda \geq 0$ . Koecher and Vinberg showed that the interior,  $\mathcal{A}_+^\circ$ , of the cone of squares  $\mathcal{A}_+ = \{x^2: x \in \mathcal{A}\}$  in a finite-dimensional formally real Jordan algebra is a *symmetric cone*. Recall that the interior,  $C^\circ$ , of a cone  $C$  in a finite dimensional vector space  $V$  is a *symmetric cone* if

1. there exists an inner product  $(\cdot | \cdot)$  on  $V$  such that  $C$  is *self-dual*, i.e.,

$$C = C^* \\ = \{y \in V: (y | x) \geq 0 \text{ for all } x \in C\},$$

2.  $C^\circ$  is *homogeneous*, that is to say, the group of (linear) automorphisms of  $C$ ,

$$\text{Aut}(C) = \{A \in \text{GL}(V): A(C) = C\},$$

acts transitively on  $C^\circ$ .

Conversely, any symmetric cone in a finite-dimensional vector space  $V$  can be realised as the interior of the cone of squares of a formally real Jordan algebra on  $V$ . For example, the *Lorentz cone*,

$$\Lambda = \{(x_1, \dots, x_n, x_{n+1}) \in \mathbb{R}^{n+1}: \\ \sqrt{x_1^2 + \dots + x_n^2} \leq x_{n+1}\},$$

is the cone of squares in the spin factor  $\mathbb{R}^n \oplus \mathbb{R}$ .

This characterisation of finite-dimensional Euclidean Jordan algebras provides a connection with the geometry of real manifolds. Indeed, symmetric cones are prime examples of Riemannian symmetric spaces. To explain this connection in more detail we need to recall some basic results from the Jordan theory. Let  $\mathcal{A}$  be a real Jordan algebra with unit  $e$ . The *spectrum* of  $a \in \mathcal{A}$  is given by

$$\sigma(a) = \{\lambda \in \mathbb{R}: a - \lambda e \text{ is not invertible}\}.$$

An element  $c$  of  $\mathcal{A}$  is called an *idempotent* if  $c^2 = c$ , and it is said to be *primitive* idempotent if it cannot be written as the sum of two non-zero idempotents.

Now suppose that  $\mathcal{A}$  is a finite-dimensional Euclidean Jordan algebra. A set  $\{c_1, \dots, c_k\} \subseteq \mathcal{A}$  of primitive idempotents is called a *complete system of orthogonal primitive idempotents*, or, a *Jordan frame* if

1.  $c_i \cdot c_j = 0$  for all  $i \neq j$ ,
2.  $c_1 + \dots + c_k = e$ .

The Spectral Theorem [5, Theorem III.1.2] says that for each  $a$  in a finite-dimensional Euclidean Jordan algebra  $\mathcal{A}$  there exists a Jordan frame  $\{c_1, \dots, c_k\}$  and unique real numbers  $\lambda_1 \leq \dots \leq \lambda_k$  such that  $a = \lambda_1 c_1 + \dots + \lambda_k c_k$ . In fact,  $\sigma(a) = \{\lambda_1, \dots, \lambda_k\}$ . Note that some of the  $\lambda_i$  may be equal. Thus, any element has a spectral decomposition in terms of orthogonal primitive idempotents. Using this fact it can be shown that the interior,  $\mathcal{A}_+^\circ$ , of the cone of squares satisfies

$$\mathcal{A}_+^\circ = \{x \in \mathcal{A}: \sigma(x) \subseteq (0, \infty)\} \\ = \{x^2: x \in \mathcal{A} \text{ invertible}\}.$$

We also have a functional calculus. For example, for  $a = \lambda_1 c_1 + \dots + \lambda_k c_k$  we can define

$$\log a = (\log \lambda_1) c_1 + \dots + (\log \lambda_k) c_k$$

and

$$a^{-1/2} = \lambda_1^{-1/2} c_1 + \dots + \lambda_k^{-1/2} c_k.$$

Given  $a \in \mathcal{A}$ , the linear map  $Q_a: \mathcal{A} \rightarrow \mathcal{A}$  given by

$$Q_a b = 2(a \cdot (a \cdot b)) - a^2 \cdot b$$

for  $b \in V$  is called the *quadratic representation* of  $a$ . In case of  $\mathcal{H}_n(\mathbb{C})$  it is easy to check that  $Q_A B = ABA$  for all  $B$ .

It is known that if  $a \in \mathcal{A}$  is invertible, then  $Q_a \in \text{Aut}(\mathcal{A}_+)$ , see [5, Proposition III.2.2].

Using these results we can now make the connection with Riemannian symmetric spaces. Indeed, if  $\mathcal{A}$  is a finite-dimensional formally real Jordan algebra, then the symmetric cone  $\mathcal{A}_+^\circ$  can be equipped with a Riemannian metric,

$$\delta(a, b) = \|\log Q_{a^{-1/2}b}\|_2 \\ = \sqrt{\sum_{i=1}^k \log^2 \lambda_i(Q_{a^{-1/2}b})},$$

where the  $\lambda_i(Q_{a^{-1/2}b})$  are the eigenvalues of  $Q_{a^{-1/2}b}$  including multiplicities. Indeed,  $\delta$  is a length metric, i.e.,

$$\delta(a, b) = \inf_{\gamma} L(\gamma),$$

where the infimum is taken over all (piecewise) smooth paths  $\gamma: [\alpha, \beta] \rightarrow \mathcal{A}_+^\circ$  from  $a$  to  $b$ , and the length of  $\gamma$  is given by

$$L(\gamma) = \int_{\alpha}^{\beta} \|Q_{\gamma(t)^{-1/2}} \gamma'(t)\|_2 dt.$$

The Riemannian manifold  $(\mathcal{A}_+^\circ, \delta)$  is a *symmetric space*. In fact, at each  $a \in C^\circ$  the map  $S_a: \mathcal{A}_+^\circ \rightarrow \mathcal{A}_+^\circ$  given by

$$S_a(b) = Q_a b^{-1} \text{ for } b \in \mathcal{A}_+^\circ,$$

is a *symmetry* at  $a$ , i.e., a  $\delta$ -isometry that has  $a$  as an isolated fixed point and satisfies  $S_a^2 = \text{Id}$  on  $\mathcal{A}_+^\circ$ .

### Infinite-dimensional symmetric cones

There exists no analogue of the Koecher–Vinberg characterisation of formally real Jordan algebras in terms of the geometry of cones in infinite dimensions. One obvious obstruction is the fact that most infinite-dimensional formally real Jordan algebras are not realised in an inner-product space, so there is no natural notion of self-duality, nor, can one define a Riemannian metric on the interior of the cone of squares. Recent works [3, 4, 10, 17], however, indicate that there may exist alternative notions of ‘symmetric’ cones that would allow one to characterise the formally real Jordan algebras in arbitrary dimensions and thereby extending the Koecher–Vinberg result. The main purpose of the workshop was to explore these possibilities. In the remainder of this article we will outline some of the promising approaches that were discussed.

To set up the problem in infinite dimensions it is natural to consider a beautiful infinite-dimensional generalisation of the formally real Jordan algebras due to Alfsen, Schultz and Størmer [1] which are called

JB-algebras. A *JB-algebra* is a real Jordan algebra  $\mathcal{A}$ , which is equipped with a norm  $\|\cdot\|$  making it a Banach space, where the norm satisfies:

1.  $\|a \cdot b\| \leq \|a\| \|b\|$  (Banach algebra condition),
2.  $\|a^2\| = \|a\|^2$  ( $C^*$ -algebra condition),
3.  $\|a^2\| \leq \|a^2 + b^2\|$  (positivity condition),

for all  $a, b \in \mathcal{A}$ . Note that condition 3 ensures that the Jordan algebra is formally real. Moreover, the JB-algebra norm satisfies  $\|e\| = \|e^2\| = \|e\|^2$ , so that  $\|e\| = 1$ .

The JB-algebras naturally belong to category of so called complete order-unit spaces. Recall that a cone  $C$  in a real vector space  $V$  induces a partial ordering  $\leq$  on  $V$  by  $v \leq w$  if  $w - v \in C$ . An element  $u \in C$  is called an *order-unit* if for each  $v \in V$  there exists  $\lambda \in [0, \infty)$  such that

$$-\lambda u \leq v \leq \lambda u.$$

The triple  $(V, C, u)$  is called an *order-unit space* if, in addition,  $C$  is *Archimedean*, meaning that if  $v \in V$  and  $w \in C$  are such that  $nv \leq w$  for all  $n = 1, 2, \dots$ , then  $v \leq 0$ . An order-unit space has a natural norm,

$$\|v\|_u = \inf\{\lambda > 0 : -\lambda u \leq v \leq \lambda u\},$$

which is called the *order-unit norm*. With respect to this norm the cone  $C$  is closed and has a non-empty interior. In fact,  $u \in C^\circ$ . We call the order-unit space *complete* if it is complete with respect to the order-unit norm.

If  $\mathcal{A}$  is JB-algebra with cone of squares  $\mathcal{A}_+$  and unit  $e$ , then the triple  $(\mathcal{A}, \mathcal{A}_+, e)$  is a complete order-unit space and the JB-algebra norm  $\|\cdot\|$  coincides with the order unit norm  $\|\cdot\|_e$ . We should mention that in finite dimensions the JB-algebra norm is different from the norm induced by the inner-product under which the cone of squares is self-dual.

As each finite-dimensional vector space  $V$  with a closed cone  $C$  that has a non-empty interior, is a complete order-unit space, the Koecher-Vinberg characterisation can be recast as saying that a finite dimensional order-unit space  $(V, C, u)$  is a JB-algebra if and only if the interior of the cone is symmetric. So, it is natural to ask the following question.

**Question 1.** *Can we characterise the JB-algebras among the complete order-unit spaces in terms of the geometry of the cone in arbitrary dimensions?*

There appear to be several natural approaches to establish such a characterisation.

### A Finsler geometric approach

The first one takes a Finsler geometric point of view. It relies on the fact that the interior of the cone in an order-unit space  $(V, C, u)$  can be equipped with a natural Finsler metric, namely Thompson's metric. This metric connects the order structure of the cone with its metric geometry in the following way. On  $C^\circ$ , *Thompson's metric* is defined by

$$d_T(v, w) = \max\{\log M(v/w), \log M(w/v)\}$$

for  $v, w \in C^\circ$ , where

$$M(x/y) = \inf\{\beta > 0 : x \leq \beta y\}$$

for  $x, y \in C^\circ$ . For example, in the case of the JB-algebra  $B(H)_{sa}$  we have for  $A$  and  $B$  in the interior of the cone  $B(H)_{sa}^+$  that  $A \leq \beta B$  if and only if

$$B^{-1/2}AB^{-1/2} = Q_{B^{-1/2}A} \leq \beta I,$$

as  $Q_{B^{-1/2}}$  is an automorphism of the cone. Thus,

$$\begin{aligned} \log M(A/B) &= \sup\{\log \lambda : \lambda \in \sigma(B^{-1/2}AB^{-1/2})\} \\ &= \sup \sigma(\log B^{-1/2}AB^{-1/2}). \end{aligned}$$

On the other hand,  $B \leq \alpha A$  if and only if

$$\alpha^{-1}I \leq B^{-1/2}AB^{-1/2} = Q_{B^{-1/2}A},$$

as  $Q_{B^{-1/2}}$  is in automorphism of the cone. Thus,

$$\begin{aligned} \log M(B/A) &= \sup\{-\log \lambda : \lambda \in \sigma(B^{-1/2}AB^{-1/2})\} \\ &= -\inf \sigma(\log B^{-1/2}AB^{-1/2}). \end{aligned}$$

So, we get that

$$\begin{aligned} d_T(A, B) &= \max\{|\mu| : \mu \in \sigma(\log B^{-1/2}AB^{-1/2})\} \\ &= \|\log B^{-1/2}AB^{-1/2}\|. \end{aligned}$$

In fact, on the interior of the cone in a JB-algebra  $\mathcal{A}$ , Thompson's metric satisfies

$$\begin{aligned} d_T(a, b) &= \max\{|\mu| : \mu \in \sigma(\log Q_{b^{-1/2}a})\} \\ &= \|\log Q_{b^{-1/2}a}\| \end{aligned}$$

for all  $a, b \in \mathcal{A}_+^\circ$ . In an order-unit space Thompson's metric is a length metric on  $C^\circ$  with a Finsler structure [14]. Indeed, if  $v$  and  $w$  are points in  $C^\circ$ , then

$$d_T(v, w) = \inf_{\gamma} \text{Length}(\gamma),$$

where the infimum is taken over all piecewise smooth paths  $\gamma : [\alpha, \beta] \rightarrow C^\circ$  from  $v$  to  $w$ , and

$$\text{Length}(\gamma) = \int_{\alpha}^{\beta} \|\gamma'(t)\|_{\gamma(t)} dt.$$

Here  $\|\cdot\|_{\gamma(t)}$  is the order-unit norm with respect to the order-unit  $\gamma(t) \in C^\circ$ . So,  $(C^\circ, d)$  is a Finsler manifold.

As in finite-dimensional Euclidean Jordan algebras the group  $\text{Aut}(\mathcal{A}_+)$  acts transitively on the interior of the cone of squares in a JB-algebra. Indeed, given  $a, b \in \mathcal{A}_+^\circ$ , the automorphism  $Q_{b^{1/2}} \circ Q_{a^{-1/2}}$  maps  $a$  to  $b$ . So,  $(\mathcal{A}_+^\circ, d_T)$  is a homogeneous Finsler manifold.

In analogy to the Riemannian case we call a Finsler manifold  $(M, d)$  *symmetric* if for each  $x \in M$  there exists a  $d$ -isometry  $S_x : M \rightarrow M$  which has  $x$  as an isolated fixed point and satisfies  $S_x^2 = \text{Id}$  on  $M$ .

This definition is motivated by the fact that if  $\mathcal{A}$  is a JB-algebra, the Finsler manifold  $(\mathcal{A}_+^\circ, d_T)$  is symmetric. In fact, in that case, the symmetries coincide with the Riemannian symmetries in finite dimensions. So for each  $a \in C^\circ$  the symmetry at  $a$  is given by

$$S_a(b) = Q_a b^{-1} \quad \text{for } b \in C^\circ.$$

To see that  $S_a$  is indeed a  $d_T$ -isometry we first note that if  $T : C \rightarrow C$  is an automorphism of the cone  $C$  in an order-unit space, then for each  $x, y \in C^\circ$  we have that  $x \leq \beta y$  if and only if  $Tx \leq \beta Ty$ , and hence  $M(x/y) = M(Tx/Ty)$ . Thus, every automorphism of  $\mathcal{A}_+$  is a  $d_T$ -isometry. The symmetry  $S_a$  is the composition of the automorphism  $Q_a$  of  $\mathcal{A}$  and the map  $\iota : b \mapsto b^{-1}$ .

Now note that  $b^{-1} \leq \beta a^{-1}$  is equivalent to  $e \leq \beta Q_{b^{1/2}a^{-1}}$ . As  $(Q_x y)^{-1} = Q_{x^{-1}y^{-1}}$  for all  $x, y \in C^\circ$ , we deduce that  $b^{-1} \leq \beta a^{-1}$  if and only if  $e \leq \beta (Q_{b^{-1/2}a})^{-1}$ , which is equivalent to

$$Q_{b^{-1/2}a} = Q_{(Q_{b^{-1/2}a})^{1/2}e} \leq \beta e.$$

This implies that  $b^{-1} \leq \beta a^{-1}$  is equivalent to  $a \leq \beta b$ , and hence  $M(\iota(b)/\iota(a)) = M(b^{-1}/a^{-1}) = M(a/b)$  for all  $a, b \in \mathcal{A}_+^\circ$ . This proves that  $\iota$  is a  $d_T$ -isometry as well.

Using the notion of a symmetric Finsler manifold a natural way to answer Question 1 would be by establishing the following conjecture.

**Conjecture 1.** *If  $(V, C, u)$  is a complete order-unit space, then  $(C^\circ, d_T)$  is a symmetric Finsler manifold if and only if  $V$  is a JB-algebra with unit  $u$ , cone of squares  $C$ , and JB-algebra norm  $\|\cdot\|_u$ .*

A significant complication to solve Conjecture 1 arises through the fact that geodesics are in general not unique for Thompson's metric [9], which is a key difference with the finite-dimensional Riemannian case. However, if the order-unit space is a JB-algebra  $\mathcal{A}$ , then there are *distinguished geodesics* between points  $a, b \in \mathcal{A}_+^\circ$  for Thompson's metric, which are given by  $\gamma_{ab}(t) := Q_{a^{1/2}}(Q_{a^{-1/2}b})^t$ , see [12]. In finite-dimensional formally real Jordan algebras these distinguished geodesics are precisely the geodesics for the Riemannian metric. It turns out that in a JB-algebra, the symmetries  $S_a$  map distinguished geodesics to distinguished geodesics [11]. Thus, in the JB-algebra setting the Finsler geometry of Thompson's metric shares certain geometric features with the Riemannian geometry in finite dimensions.

One way to establishing Conjecture 1 would be by connecting it with existing results for complex Jordan algebras, known as JB\*-algebras, see [15]. If  $(V, C, u)$  is an order unit space, then we can consider its complexification  $V_{\mathbb{C}} = V \oplus iV$ . The set

$$T_C = \{z \in V_{\mathbb{C}} : \operatorname{Im} z \in C^\circ\}$$

is called a *tube domain* if it is biholomorphic to a bounded domain in  $V_{\mathbb{C}}$ . A tube domain  $T_C$  is called *symmetric* if at each  $z \in T_C$  there exists a holomorphic involution  $S_z : T_C \rightarrow T_C$  which has  $z$  as an isolated fixed point. In [7] Braun, Kaup and Upmeyer showed that the symmetric tube domains

are in one-one correspondence with JB\*-algebras. Since JB\*-algebras are exactly the complexification of JB-algebras, the one-one correspondence would provide a way to establish Conjecture 2.

Alternatively, one could start by making additional assumptions on the symmetries in the Finsler manifold  $(C^\circ, d_T)$ . Inspired by Loos's definition of symmetric spaces [13] one could for example assume in addition that the symmetries  $S_x$  are smooth and satisfy

$$S_x(S_y(S_x(z))) = S_{S_x(y)}(z) \text{ for all } x, y, z \in C^\circ.$$

Both these assumptions hold in the case of a JB-algebra.

### An order theoretic approach

The second approach to answering Question 1 takes a purely order theoretic point of view and is more ambitious. If we consider the symmetry  $S_e$  at the unit  $e$  in a JB-algebra  $\mathcal{A}$ , we get the inverse map  $\iota : a \mapsto a^{-1}$  on  $\mathcal{A}_+^\circ$ . This map has a special order theoretic property; namely, it is an *order-antimorphism*, i.e.,

$$a \leq b \text{ if and only if } \iota(b) \leq \iota(a).$$

Moreover,  $\iota$  is *anti-homogeneous* in the sense that  $\iota(\lambda a) = \lambda^{-1} \iota(a)$  for all  $\lambda > 0$  and  $a \in \mathcal{A}_+^\circ$ .

There is some evidence indicating that the following striking order theoretic characterisation of JB-algebras holds.

**Conjecture 2.** *If  $(V, C, u)$  is a complete order-unit space, then there exists a bijective anti-homogeneous order-antimorphism  $g : C^\circ \rightarrow C^\circ$  if and only if  $V$  is a JB-algebra with unit  $u$ , cone of squares  $C$ , and JB-algebra norm  $\|\cdot\|_u$ .*

In fact, this conjecture is known to hold for finite-dimensional order-unit spaces by recent work of Walsh [17]. Additional supporting evidence was provided by Lemmens, Roelands and van Imhoff in [10], where it was shown that if  $(V, C, u)$  is a complete order-unit space with a strictly convex cone, then there exists a bijective anti-homogeneous order-antimorphism  $g : C^\circ \rightarrow C^\circ$  if and only if  $V$  is a spin factor.

During the workshop various related problems and approaches were discussed. Overall it was a very fruitful meeting, which provided an ideal opportunity for researchers with diverse mathematical backgrounds to meet. The format of the workshop worked well with four hours of lectures each day: a two-hour introductory talk introducing the main theme of the day and two one-hour talks that were more specialised. There was plenty of time for discussion and small group collaborations. We also had two stand-up sessions for which people could sign up to present further thoughts, or lead a discussion, on the problems and results. These sessions worked well and quickly became very lively with a lot of audience participation. The workshop has already stimulated new work in this area, see for example the recent paper by Bertram [2], and will undoubtedly have further impact in years to come. ☺

### Acknowledgement

The authors would like to thank the Foundation Compositio Mathematica, the NDNS+ and GQT research clusters, the Mathematical Institute Leiden for their generous support, and the Lorentz Center for their outstanding organisation.

### References

1. E.M. Alfsen, F.W. Shultz and E. Stormer, A Gelfand–Neumark theorem for Jordan algebras, *Adv. Math.* 28(1) (1978), 11–56.
2. W. Bertram, Cyclic orders defined by ordered Jordan algebras, *J. Lie Theory* 28(3) (2018), 643–661.
3. C.-H. Chu, Jordan triples and Riemannian symmetric spaces, *Adv. Math.* 219 (2008), 2029–2057.
4. C.-H. Chu, Infinite dimensional Jordan algebras and symmetric cones, *J. Alg.* 491 (2017), 357–371.
5. J. Faraut and A. Korányi, *Analysis on Symmetric Cones*, Oxford Mathematical Monographs, Clarendon Press, Oxford University Press, 1994.
6. P. Jordan, J. von Neumann and E. Wigner, On an algebraic generalization of the quantum mechanical formalism, *Ann. of Math.* (2) 35(1) (1934).
7. R. Braun, W. Kaup and H. Upmeyer, A holomorphic characterization of Jordan  $C^*$ -algebras, *Math. Z.* 161(3) (1978), 277–290.
8. M. Koecher, Positivitätsbereiche im  $\mathbb{R}^n$ , *Amer. J. Math.* 97(3) (1957), 575–596.
9. B. Lemmens and M. Roelands, Unique geodesics for Thompson's metric, *Ann. Inst. Fourier (Grenoble)* 65(1) (2015), 315–348.
10. B. Lemmens, M. Roelands and H. van Imhoff, An order theoretic characterization of spin factors, *Q. J. Math.* 68(3) (2017), 1001–1017.
11. B. Lemmens, M. Roelands and M. Wortel, Hilbert and Thompson isometries on cones in JB-algebras, arXiv:1609.03473.
12. Y. Lim, Finsler metrics on symmetric cones, *Math. Ann.* 316(2) (2000), 379–389.
13. O. Loos, *Symmetric Spaces. I: General Theory*, W.A. Benjamin, 1969.
14. R.D. Nussbaum, Finsler structures for the part metric and Hilbert's projective metric and applications to ordinary differential equations, *Diff. Int. Eq.* 7(5–6) (1994), 1649–1707.
15. H. Upmeyer, *Symmetric Banach Manifolds and Jordan  $C^*$ -algebras*, North Holland Math. Studies, 1985.
16. E.B. Vinberg, Homogeneous cones, *Soviet Math. Dokl.* 1 (1961), 787–790.
17. C. Walsh, Gauge-reversing maps on cones, and Hilbert and Thompson isometries, *Geom. Topol.* 22(1) (2018), 55–104.

Wil Schilders

directeur PWN

w.h.a.schilders@tue.nl

**Evenement** 54ste Nederlands Mathematisch Congres (NMC 2018)

# Impressie van het 'NMC nieuwe stijl'

Op 3 en 4 april werd in congrescentrum Koningshof te Veldhoven het 54ste Nederlands Mathematisch Congres gehouden. Ditmaal op een andere leest geschoeid: niet meer aan een universiteit, met veel nieuwe ingrediënten, met zes uitgenodigde sprekers, met informatiesessies over allerlei voor de wiskunde belangwekkende zaken, en een avondprogramma met een diner, een voorstelling en een afsluitend samenzijn in de gezellige Metro Bar. Een impressie van Wil Schilders, directeur PWN en lid van het organisatiecomité.

De insteek/hoop was dat veel deelnemers zouden kiezen voor een overnachting, zodat er intensief met elkaar gesproken kon worden. Immers, vanwege de vele verschillende vakgebieden zijn er maar weinig gelegenheden om ook eens kennis te nemen

van het onderzoek en de activiteiten van Nederlandse collega's. Middels een generuze financiële bijdrage van NWO konden de deelnamekosten beperkt gehouden worden, hetgeen leidde tot een zeer geslaagd congres met meer dan 270 deel-

nemers en, inderdaad, zo'n 200 overnachtingen. De locatie werd ook als zeer goed en adequaat ervaren. Aardig feit is dat het conferentiecentrum een oud klooster is. De zaal voor de hoofdlezingen was vroeger de kapel. Achter het ene gordijn zat een monumentaal orgel verstopt, achter het andere gordijn gebrandschilderde ramen.

## Opening en plenaire voordrachten

Nadat de bussen met deelnemers gearriveerd waren, en eerder aangekomen deelnemers zich tegoed konden doen aan kof-



Photo: Martijn Anthonissen



Discussiepanel bestaande uit Adriana Garroni, Sarah Gaaf en Laura Mančinska

fie, broodjes en plakjes cake, begon het congres met de openingsceremonie, waarin Niek Lopes Cardozo het woord opende namens NWO, gevolgd door Gerrit Timmer van ORTEC en ten slotte de voorzitter van het Koninklijk Wiskundig Genootschap, Erik van den Ban.

Daarna was het de beurt aan de eerste keynote speaker, Jean-François Le Gall, die sprak over 'Random planar geometry', meteen na de pauze gevolgd door de tweede keynote, Adriana Garroni over 'Variational models in Materials Science: the importance of having defect'. De Brabantzaal was bij beide voordrachten uitstekend gevuld.

#### Discussiepanel en parallele sessies

Er was door de congresorganisatie een druk programma opgezet, waarbij ook tijdens de lunchpauzes er allerlei sessies plaatsvonden. Zo was er de eerste middag een geanimeerde discussie tijdens de door EWM-NL georganiseerde bijeenkomst, die goed bezocht werd, al dan niet met brood-

jes in de hand. Er was gekozen voor een discussie met een panel, waarin Adriana Garroni, Sarah Gaaf en Laura Mančinska plaatsgenomen hadden.

Na de middag was het tijd voor de eerste set van parallele sessies, en wel zeven stuks: een aantal georganiseerd door wiskundeclusters (GQT en NDNS+), door onderzoeksschool DISC, en door de projecten Networks en QuSoft. Daarnaast was er een sessie met ex-ai'o's welke nu in de industrie werkzaam zijn, vooral met de bedoeling om de huidige generatie promovendi een idee te geven van hoe het is om in het bedrijfsleven werkzaam te zijn. Ten slotte een sessie georganiseerd door de commissie Publicaties van Platform Wiskunde Nederland, waarin de nieuwere vormen van publiceren aan de orde kwamen, inclusief 'fair open access'.

#### Beeger-lezing en wetenschapsagenda

Na de koffiepauze was het dan de beurt aan de Beeger-lezing, ditmaal gegeven

door Fernando Rodriguez Villegas en getiteld 'Hypergeometric motives'. De middag werd afgesloten met een korte inleiding door Stan Gielen, voorzitter van NWO, over de Nationale Wetenschapsagenda (NWA), en hoe dit voor nieuwe subsidiegelden heeft gezorgd. Vanuit het publiek kwamen in de daarop volgende discussie vele vragen hierover, vooral over hoe een en ander subsidietechnisch wordt ingericht.

#### Speeddaten

Hoewel er vervolgens tijd was om een drankje te nuttigen, wilde dit niet zeggen dat er geen activiteiten waren. Er was tijd om de verschillende posters langs te lopen en te bekijken, en het was voor de jongeren tijd om te gaan speeddaten met de zeven bedrijven die zich hiervoor hadden aangemeld. De animo voor deze speeddate was groot, en de bedrijven waren meer dan een uur lang bezig om in een kort tijdsbestek van vijf minuten van gedachten te wisselen met de promovendi en andere



Vragen uit het publiek



Speeddate

geïnteresseerden. Het werd algemeen als een leuk en ludiek evenement ervaren, zeker voor herhaling vatbaar, met wellicht hier en daar een kleine aanpassing.

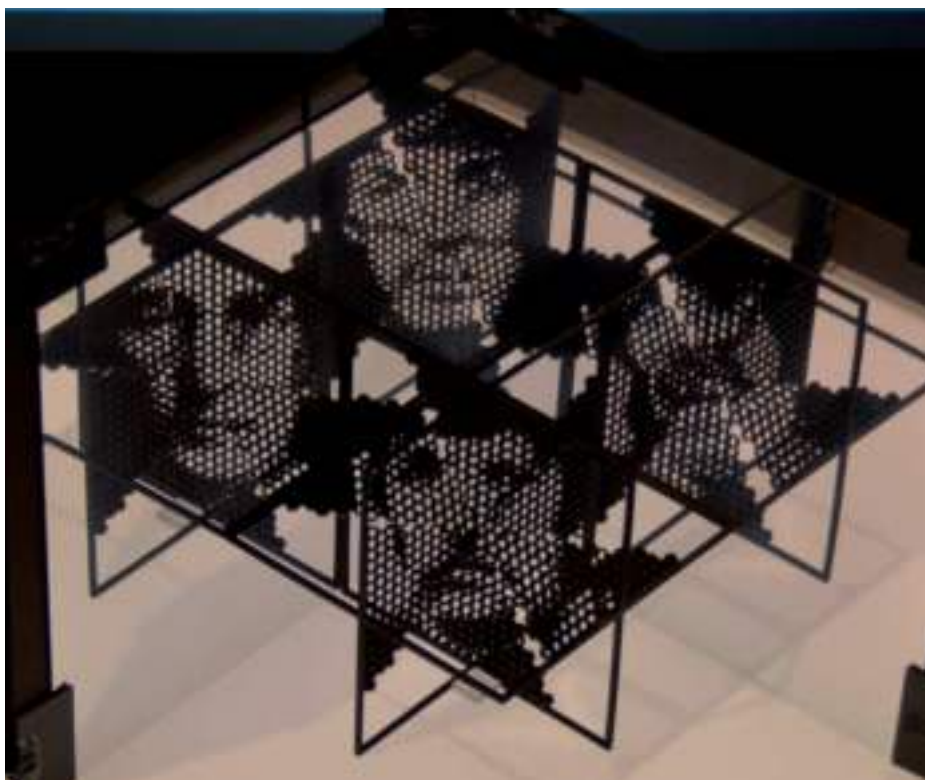
### Avondprogramma

Na deze ontspannende, dan wel voor sommigen inspannende, activiteiten was het tijd voor het diner. Het was een mooi gezicht om meer dan 200 Nederlandse wiskundigen aan ronde en mooie gedekte tafels te zien zitten. Iedereen liet zich het uitstekend verzorgde en heerlijke 3-gangendiner goed smaken, en overall vonden mooie discussies plaats. Een en ander leidde ook tot een kleine vertraging in het avondprogramma, maar dat was geen probleem, aangezien de beide heren van Ars en Mathesis er zin in hadden en een interessante 'voorstelling' ten beste gaven. De objecten die zij hadden meegebracht zagen er op het eerste gezicht erg vreemd uit, maar op de juiste manier voor de projector gehouden bleek dat er de gezichten van Gödel, Escher en Bach uit te voorschijn kwamen. Hiervoor waren zij geïnspireerd geraakt door de voorkant van het gelijknamige en zeer bekende boek. En hoewel de heren geen wiskundigen zijn, vroegen ze zich toch af of het misschien ook kon voor vier foto's in plaats van drie. Na veel gepuzzel zijn ze daaruit gekomen, en dat vertelden ze in detail, waarna vervolgens het wonder aanschouwd kon worden in een speciaal daarvoor gemaakte spiegelkast: foto's van de vier Beatles werden zichtbaar. Er vormde zich na de voorstelling een lange rij van deelnemers die hier een mooie foto van wilden maken, en een en ander van dichtbij wilden zien.

Voor de liefhebbers was de Metro Bar in de kelder geopend tot in de kleine uurtjes, en hiervan werd op grote schaal gebruikgemaakt. Waarbij de stemming, niet vreemd, allengs vrolijker werd. De laatste deelnemers gingen pas na 1.00 uur richting hun kamers!

### Wiskunderaad

Na een gezamenlijk ontbijt, waarbij iedereen langzaam maar zeker binnendruppelde, begon de tweede dag van het NMC 2018 met een voordracht door Frank van der Duyn Schouten over het werk van de Wiskunderaad, in het leven geroepen door NWO en PWN. Frank legde uit wat de WR is, en wat zij doet. In het vorige nummer van NAW is al een samenvatting te lezen van



De vier Beatles worden zichtbaar in de spiegelkast van Ars en Mathesis

deze activiteiten. Belangrijk was de mededeling dat het nieuwe kabinet wel oren heeft naar zogenaamde 'sectorplannen', en dat er dus inderdaad nu een sectorplan Bèta en Techniek komt, waarvoor tientallen miljoenen euro's beschikbaar zijn. Wiskunde zal daar zeker van meeprofitieren.

Na het betoog over de WR was het tijd voor de voorzitter van PWN, Sjoerd Verduyn Lunel, die vertelde over de activiteiten van PWN, die onder andere leidden tot het ontstaan van het Deltaplan voor de wiskunde en de Wiskunderaad. En over de uitvoering van de actielijnen in het Deltaplan, waarvan het 'NMC nieuwe stijl' een voorbeeld is. Ook tijdens deze twee zeer informatieve voordrachten was de zaal weer erg goed gevuld.

### Plenaire voordrachten tweede dag

Hierna was het weer tijd voor een aantal plenaire voordrachten, voor en na de koffiepauze. Eerst was het de beurt aan professor Yi Ma over 'Low-dimensional Structures and Deep Models for High-dimensional Data'. Een mooie voordracht, die echter bijna niet had plaatsgevonden: het lokale organisatiecomité, en met name de voorzitter, heeft veel moeite moeten doen om te zorgen dat Yi Ma toch nog tijdig een visum kreeg... op Goede Vrijdag,

dus drie dagen voor het NMC 2018! Na de koffiepauze sprak de CTO van Dassault Aviation, Bruno Stoufflet, over 'Low-dimensional Structures and Deep Models for High-dimensional Data', met veel mooie plaatjes en aantonend dat wiskunde in de toepassing absoluut essentieel is.

### Tafel Wiskunde

Ook op de tweede dag was er nauwelijks tijd om rustig een broodje te verorberen tijdens de lunch, want eerst was het de beurt aan Jan Bouwe van de Berg, voorzitter van het dagelijks bestuur van de PWN-commissie Onderzoek (DB-CO), alsmede sinds eind 2017 voorzitter van de Tafel Wiskunde bij NWO. Jan Bouwe vertelde over de achtergronden van 'tafels' bij NWO, en wat de voorziene activiteiten zullen zijn van de Tafel Wiskunde. Zie hiervoor ook de website van NWO-ENW.

### Jaarvergadering KWG

Hierna was het tijd voor de jaarvergadering van het KWG, waarbij zoals gebruikelijk weer allerlei vragen en opmerkingen op het bestuur werden afgevuurd, een goede en actieve vereniging betamend. De voorzitter bedankte de leden Joke Blom en Herman te Riele, die afscheid namen, en gaf vervolgens aan het einde van de



Het bestuur van het KWG

Photo: Martijn Anthonissen

vergadering het stokje over aan de nieuwe voorzitter (die eerst nog wel officieel werd gekozen), Jan Wiegerinck.

### Parallele sessies en Docentendag

Het middagprogramma begon weer met zeven parallelle sessies: de clusters Diamant en Star, een sessie over computational science en eentje over machine learning, alsmede een sessie over de Studiegroep Wiskunde met de Industrie (SWI). Ook was het de traditionele Docentendag, waar onder andere de Pythagoras Profielwerkstukprijs werd uitgereikt. De winnaar wordt bepaald door het publiek en, zoals zo vaak, de stemmen staakten zodat er twee prijswinnaars waren. Het KWG liet zich hierdoor niet uit het veld slaan, de voor-

zitter zorgde onmiddellijk voor een tweede prijs! Verheugend was het hoge niveau van de vwo'ers. En ook deze middag waren de zaaltjes goed gevuld.

De laatste parallelle sessie was gewijd aan voordrachten van de twee winnaars van de Stieltjesprijs, en voordrachten van vier promovendi die streden om de KWG PhD-prijs.

### Slotvoordracht en prijsuitreikingen

De laatste plenaire voordracht kwam van William Slofstra, getiteld 'Quantum entanglement, Tsirelson's problem, and group theory'. En hoewel het al laat was toen de plenaire prijsuitreiking begon, om 17.30 uur, was er nog veel belangstelling. Grote vraag was allereerst: "Wie zou de KWG PhD-prijs in de wacht gesleept hebben?" Dat bleek Clara Stegehuis te zijn van de TU Eindhoven, en zij nam de prijs in ontvangst van de nieuwe KWG-voorzitter en Peter van Emde Boas, die de sponsor van de prijs representerende. Als laatste volgde de uitreiking van de Stieltjesprijs, waarvoor twee proefschriften uit 2016 als beste waren gekwalificeerd door de jury (uit een totaal van bijna 80!). Richard Kraaij en Djordjo Milovic namen de prijs in ontvangst uit handen van de sponsor, *Compositio Mathematicae*, gerepresenteerd door de secretaris, Bas Edixhoven, en de vorige c.q. huidige voorzitters van de jury, Odo Diekmann en Frans Oort, die ook de laudatio's uitspraken.

### Een geslaagde pilot

Al met al kunnen we terugkijken op een zeer geslaagd NMC nieuwe stijl, met een groot aantal deelnemers, veel overnachtingen, veel nieuwe ingrediënten die in de

smaak vielen en ook veel nuttige en waardevolle informatie voor wiskundigen. Er vindt momenteel een evaluatie plaats van het congres, en er zal overleg volgen met NWO over deze pilot. Maar in ieder geval is zeker dat het volgend jaar op eenzelfde manier zal plaatsvinden, het programma-comité is al druk bezig met het selecteren van uitgenodigde sprekers, en het lokale organisatiecomité heeft ook al een eerste overleg gehad. Wij hopen dan ook van harte dat er volgend jaar nog meer deelnemers zullen zijn! Op naar de 300... Het NMC is een unieke gelegenheid om, vlak na Pasen (de twee dagen onmiddellijk volgend op Paasmaandag), eens goed met de Nederlandse wiskundegemeenschap samen te komen. ☺



Erik van den Ban (links) draagt het voorzitterschap van het KWG over aan Jan Wiegerinck (rechts)

Photo: Martijn Anthonissen



Richard Kraaij (links) en Djordjo Milovic (rechts), de winnaars van de de Stieltjesprijs

Photo: Martijn Anthonissen

**Barry Koren**

*Centre for Analysis, Scientific Computing and Applications  
TU Eindhoven  
b.koren@tue.nl*

**Robbert Fokkink**

*Delft Institute of Applied Mathematics  
TU Delft  
r.j.fokkink@tudelft.nl*

**Interview** Bruno Stoufflet, Chief Technology Officer at Dassault Aviation

# “Mathematics is quite easy if you understand it, I taught my daughters”

On 4 April 2018, the second day of NMC 2018, Barry Koren and Robbert Fokkink interviewed Bruno Stoufflet, the main industrial speaker at NMC 2018.

**Short biography**

Spring 1958, to give birth to her son, Bruno Stoufflet's mother went from Paris to the place where her parents lived, Verdun, Bruno's single residence out of the Paris area so far. Bruno grew up and went to schools in Paris, among which the gymnasium, where he passed the scientific final exam and the contest to enter École Polytechnique. He studied mathematics at École Polytechnique, Palaiseau and Université de Paris-Sud, did his PhD research at the Rocquencourt site of INRIA (the French sister institute of CWI), and obtained his PhD degree in applied mathematics from Université de Pierre et Marie Curie in 1984. Since that year until now he is employed by Dassault Aviation, where he currently is Chief Technology Officer.

**Mathematics**

Mathematics was Bruno's favorite study. He liked it very much, more than physics and other studies. He particularly liked the logic in mathematics and the fact that you don't need to rely so much on memory when

studying it; Bruno: “If you have the reasoning, you can retrieve the results.” Later, he taught his three daughters: “Mathematics is quite easy if you understand it.”

At École Polytechnique he remained fond of mathematics and — important for his career — he discovered applied mathematics, through Jacques-Louis Lions (renowned mathematician and father of 1994 Fields Medal winner Pierre-Louis Lions). In Jacques-Louis Lions' large-class cours-



Bruno Stoufflet, lecturing as main industrial speaker at NMC 2018

es, Bruno learned finite-element methods, the variational formulation, optimization, and — more generally — how to tackle practical problems by mathematics. In small-scale courses with deepening, Bruno met mathematics lecturer Roland Glowinski. Glowinski advised Bruno to start PhD research in applied mathematics. To be able to do so, he first obtained the Diplôme d'Études Approfondies de Mathématiques Appliquées, from Université de Paris-Sud in Orsay. In the following two-and-half years only, at INRIA Rocquencourt, he succeeded to complete his PhD research, on a thesis entitled *Résolution numérique des équations d'Euler des fluides parfaits compressibles par des schémas implicites en éléments finis*.

During his PhD research, Bruno came into contact with mathematicians working

at Dassault Aviation. He was recruited by Dassault, directly after he had obtained his PhD degree; no postdoc position abroad. Bruno: "As opposed to today, travelling and partly doing your research abroad was not very common those days in France."

### Dassault

At Dassault, Bruno continued to do the kind of work that he had already done during his PhD research: to develop and implement new numerical methods for the Euler equations of fluid dynamics, but now directed towards real engineering problems, of Dassault's space plane Hermes and fighter aircraft Rafale. Computational design, finding optimal shapes of aircraft designs by computational means (inverse computing) was arising. About 20 mathematicians were working at Dassault Aviation those days, among others on methods for computational design. Today, this number is still the same. Dassault keeps a keen eye on having good mathematicians as employees. Bruno: "We put emphasis on having design capacity at the top level. There is an understanding at Dassault that this is really critical for the quality of our products."

### Computers

*Those days, it must have been hard to model so much by computer, because computers were not yet that powerful.*

"Yes. When I was at École Polytechnique, only a few years before my start at Dassault, the only goal of the only computer-science course given there was to learn Fortran, and we only had punch cards to make our software and other input readable to computers. It was awful. In future, I will never be using computers, I thought. But when I arrived at INRIA and at Dassault, there were computer screens linked to mainframes, still not very user-friendly, but the improvement was enormous. There was a huge discrepancy between punch cards and what I could suddenly use when arriving at INRIA and Dassault."

*Was the design of aircraft mainly done through wind tunnels these days?*

"No, engineers did use simple computational methods to direct the design, like the method of characteristics and potential-flow methods. These methods have a lot of limitations though, for instance with

respect to positions of shock waves and the presence and strengths of vortices. You are very far from a realistic description of an air flow with these methods. Wind tunnels were still used a lot that time. The design of the engine air inlets of Rafale, for instance, has taken thousands of wind-tunnel hours."

### Civil versus military aircraft

*Dassault fills a unique niche within the European aircraft manufacturing industry with its Falcon family of small civil aircraft, its Rafale family of military aircraft and its very innovative unmanned military aircraft nEUROn. Dassault is complementary to Airbus, which designs and manufactures large civil aircraft only.*

"Yes. Airbus and Dassault have a full range of cooperation on the research side."

*Is designing military aircraft mathematically more challenging than designing civil aircraft?*

"Yes, with military aircraft you have a larger spectrum of configurations, depending on the different systems attached to the aircraft. Moreover, the stealth aspects are there; to make the aircraft invisible for radar. nEUROn is a stealth aircraft, it is a huge step forward in stealth properties, really a breakthrough as compared to Rafale. Designing military aircraft is particularly more demanding in computational efficiency."

*Are the stealth aspects exclusive for military aircraft, are they no issue at all for civil aircraft?*

"In principle, the computational methods developed for simulating stealth aspects (methods using the Maxwell equations) are for military aircraft only. Yet, sometimes, we also apply these methods to antenna-integration problems on civil aircraft."

### Research partners

*How important is ONERA (Office National d'Études et Recherche Aérospatiale, the French sister institute of the American NASA and the Dutch NLR) for mathematics used at Dassault?*

"We are not working very much with ONERA on mathematical problems. For mathematics, we rely on INRIA and university groups. But this does not mean that we have no relations with ONERA. For the de-

### Hermes

In 1984, upon request by the European Space Agency, Dassault Aviation started the development of a European reusable spacecraft, Hermes (messenger of the gods), as an alternative to the American Space Shuttle.

As opposed to the Space Shuttle, Hermes was to be mounted on top of, instead of alongside, the main launching rocket, Ariane V, implying a smaller frontal area and hence lower aerodynamic drag. Hermes never entered the manufacturing stage though. During the Hermes design phase, it became clear that Ariane V was not capable to carry Hermes during launch. The design of a new rocket that was suited to do so was beyond budget. Policy makers decided to stop the Hermes program therefore. On the positive side: the many computations in the Hermes program had offered several years of challenging research work to tens of applied mathematicians throughout Europe, with Dassault Aviation in the leading role.



Artist impression of Hermes space plane



Dassault aircraft, left: a Falcon; right: a Rafale and a nEURon

velopment of turbulence models and other mathematical-physical models relevant for aircraft design, such as icing models and lightning models, we cooperate with ONERA, and for materials research and wind-tunnel experiments we even heavily rely on ONERA. A very special international wind tunnel being used by Dassault is the European Transonic Wind Tunnel (ETW) in Köln, a cryogenic wind tunnel, using nitrogen flows at very low temperatures in order to have the same viscous effects as in real flight."

### Wind tunnel experiments versus computer simulations

*What is more accurate nowadays, the computer or the wind tunnel; if they give different results, which of both do you trust?*  
 "In ETW you can have the same viscous effects as in real flight, the so-called Reynolds number in an ETW experiment can be the same as in real flight, but of course on wind-tunnel models for ETW you will still miss geometrical details of the real, full-scale aircraft. So, you will still have discrepancies. In computer simulation you can be very accurate in all aspects. An important source of discrepancies in computer simulations though, still today, is the mathematical-physical model used for turbulence. In engineering practice we cannot compute Navier–Stokes-flow solutions to the smallest physical scale of turbulence, the Kolmogorov microscale; turbulence models have to be applied therefore. A second source of computational discrepancies is formed by numerical errors. So, in both wind-tunnel experiments and computer simulations, we have sources of dis-

crepancies with real flight. A new approach being followed by Dassault to understand the discrepancies between real flight on the one hand and wind-tunnel experiments and computations on the other hand, are large-scale, detailed measurements on real aircraft. It is not wise to strive for a tool which gives you the truth, because you will never get this. However, having a tool of which you fully know and understand the discrepancies, in order to take the proper margins in your design, is very relevant for engineering practice. A difficult source of discrepancies is the deformation of the aircraft in flight, due to the aerodynamic forces exerted on it. Another one is turbulence.

Finally, an important difference between wind-tunnel experiments and computer simulation is that computer simulation gives you the unique capacity to perform a design loop, which you do not have with a wind-tunnel model. Once you have built a scale model of an aircraft to be investigated in a wind tunnel, you cannot change it during the experiment. A computational model of an aircraft can be changed though during the computation; through a single computation you can explore a wide range of potential configurations."

*So that's why they do not yet have the Joint Strike Fighter; they are still in a computational design loop?*

"No [laughing], to my knowledge, the F35 [editor: Joint Strike Fighter] has no aerodynamic design issues. It is more an issue of system integration and maintenance capacity, because of the complexity of the F35, with its 360 degrees vision system for the pilot and alike."

### Academic contacts

*Is it possible to publish in the open literature at Dassault?*

"In the past, it was quite easy to publish. In the Hermes program for instance, there was no issue of confidentiality, because it was a European project with a lot of visibility. Now it is more difficult, but people still continue to publish. Of course, you need a clearance of your management, but it is still possible. At Dassault we want to be close to the scientific community and we want to actively participate in scientific conferences. Therefore, we also have to publish from time to time, to be part of the scientific community. We have some groups with experts, who have extra opportunities to publish. Dassault also has in-house PhD students; France has industrial PhD students, PhD students working in industry with a fellowship from the government. [editor: NWO started the same recently.] The students are in connection with a professor at the university. The limitation at Dassault is that candidates for these positions must have the French nationality."

*Do they get a background check?*

"Yes, they do. Further, Dassault still has external PhD students in connection with its research teams, who they may recruit afterwards, as in my case. And we have some people who give courses in engineering schools or are part-time professor at a university. One of Dassault's research engineers, a specialist in stochastic methods, is part-time professor in the group of Jean-François Le Gall, one of the other keynote speakers at NMC 2018. Das-



Évariste Galois

sault facilitates academic careers for its employees who are capable and willing to do so.”

### French mathematics

*France has a very rich history in mathematics, until today. Are you proud of something in French mathematics, do you have a hero in French mathematics?*

“Well,... there is a French mathematician, a romantic one, who died very young but had very important contributions to mathematics nevertheless, Galois. He died in a duel, a pistol fight, at the age of 20 only.”

*The entire night before the duel, Galois wrote about mathematics. If he had not*

*done so and would have slept well instead, he might have won.*

“[Laughing] Yes...”

### Developments since arrival at Dassault

*Has mathematics at Dassault changed a lot over the years, since you came to Dassault?*

“Well, the need to improve the accuracy of numerical methods is not that high anymore as it was when I arrived at Dassault. We have reached a rather satisfactory accuracy level. Challenges are now more in the development and incorporation of new models and in obtaining numerical solutions as efficiently as possible. We do more development work now in modelling and on solvers. This may change in future though.”

*Is it almost perfect now?*

“No, it’s not perfect yet.”

*Close to perfect?*

“No. We also have new competition, from meshless methods, like smoothed particle hydrodynamics, often being offered in commercial packages.”

*Meshless methods are very well-suited for complex geometries.*

“Yes, but we are requiring a level of accuracy that meshless methods do not yet offer, but they improve. It is a new competition that is coming.”

*Is it possible to put a helicopter in a computer simulation now, a body of which*

*parts are moving relatively with respect to each other, the helicopter rotor blades with respect to the helicopter fuselage for instance?*

“Yes, ONERA is doing it, but I don’t know at which accuracy. It’s very complex in terms of implementation and data management.”

*Immersed boundary methods can handle geometries ‘swimming’ through a fixed computational grid. Are immersed boundary methods considered at Dassault?*

“No, they are not considered because we don’t have that many applications with bodies moving relatively with respect to each other. I know that ONERA is developing immersed boundary methods, but these methods are also very difficult in terms of data management.”

*Immersed boundary methods are also rather crude with respect to boundary-layer resolution, isn’t it?*

“Oh, yes. We prefer to generate unstructured boundary-fitted grids around our aircraft geometries, and we prefer to regenerate the grid in case of relative motions of body parts”.

### Future of mathematics at Dassault

*What is important future mathematics at Dassault?*

“An important future mathematics topic is the emergence of data analytics. There was shortage of time to speak about this in my presentation at NMC 2018. We will need mathematics to make use of the increasing

### Meshless methods

Commonly used equations to describe fluid flows are the Navier–Stokes equations, partial differential equations which, for flows around aircraft, cannot be solved analytically. Numerical methods are used instead.

Most numerical methods discretize the computational domain as a grid of fixed points or cells: the mesh. On the mesh, numerical formulae are defined to locally approximate derivatives and integrals, occurring in (differential and integral forms of) the Navier–Stokes equations. Examples of families of such numerical methods are finite-difference methods (using meshes

of fixed points), and finite-volume and finite-element methods (using meshes of fixed cells).

The use of a mesh becomes difficult in case of flow bodies that are very complex in geometry, that are deforming, or that have relative motions with respect to each other. In these cases, methods describing fluid flows by moving mathematical particles, may be used as an alternative; particles that may exchange momentum and energy. An example of such a particle method is smoothed particle hydrodynamics.

The particles in this method do not directly model real physical particles, such as the molecules or atoms of the

fluid considered. The mathematical particles may be much larger than real physical particles, but they do have physical properties such as location, velocity and mass, and they do obey proper physical laws when colliding with each other or with other bodies in the flow. A pleasant property of a particle method as smoothed particle hydrodynamics is that it does not need a mesh; it is meshless. The mathematical particles can move throughout the entire computational domain; they can have any position inside or at the boundary of the domain, as long as they do not coincide with the position of another particle.



Bruno Stoufflet, answering questions after his lecture at NMC 2018

Photo: Marijn Anthonissen

amount of data that is becoming available. Another topic for the future is stochastic modelling. We have to qualify and quantify more and more risks taken by decisions in our designs. We have to learn people what stochastic modelling means and what it can bring to have a more robust design.”

*Is the safety factor put on the design of aircraft structures, to account for uncertainties, still 1.5? Or has this old, crude approach been replaced meanwhile by computer simulations with uncertainty quantification; by probabilistic designing and engineering?*

“The safety-factor approach may be way too crude indeed, but aircraft certification — the law — still requires the safety-factor approach. It is very hard to get rid of regulations prescribed by law. And if we would try to get rid of them, after all, it might very well appear to be a huge effort for an alternative which is not very valuable.”

#### **Future of aircraft from Dassault**

*Concerning future aircraft to be designed and manufactured by Dassault, would the*

*rapidly growing drone market be interesting for Dassault?*

“The engineering difficulties of a drone are not limited to getting it flying; aerodynamics and flight mechanics are not the only major issues for drones. Designing a drone is also about what information you want to obtain and provide. Drone design is a data-acquisition problem; a problem of designing the sensor, electronics and data-handling systems. Dassault has to acquire the skills to do this. From a scientific perspective, drone engineering also has to encompass artificial intelligence and information theory. Drone technology is interesting for Dassault. There are a lot of developments in drone technology that may be applied in Dassault’s future aerospace systems.”

#### **Own research**

*You probably have no time for research now, but you are strongly involved in high-tech developments. Would a university position be something for you?*

“Yes, but not for having a position, not just for myself. When you have taken distance

from research as I have done, it is very difficult to come back and to be relevant.”

*You could combine it with your industrial knowledge and experience, and carry these over to students?*

“Yes perhaps in terms of industrial experience, but not in terms of research. I have lost research competence, I have no longer the skills to be an efficient researcher. I can understand mathematics research very well, but I can no longer practice it myself as efficiently as young researchers can.”

*Maybe your grandchildren can do so in future.*

“Yes, maybe,... not my daughters.”

*What are your daughters doing?*

“The eldest one is physiotherapist. The second one is an artist, she is living from painting. The third one is in neuro-science, she is working on the brains of mice.”

*Oh, beautiful!*

*Bruno, we thank you very much for the very nice interview.*

◆◆◆

Karin Verouden

Fontys Hogescholen  
k.verouden@fontys.nl

Bram van den Broek

Fontys Hogescholen  
b.vandenbroek@fontys.nl

## Onderwijs

# Fontys-opleiding Toegepaste Wiskunde ontwikkelt een nieuw curriculum

Mede na overleg met het werkveld, in de vorm van een actieve Raad van Advies en gesprekken met het bedrijfsleven, heeft de opleiding Toegepaste Wiskunde van Fontys Hogescholen het landelijk besluit van de Vereniging Hogescholen aangegrepen om een volledig nieuw curriculum in te richten. Een van de innovaties is een afstudeerrichting *Engineering* op hbo-niveau. Een unicum in Nederland. In dit artikel geven Karin Verouden en Bram van den Broek, beiden docenten van Fontys Hogescholen, een nadere beschrijving van het nieuwe curriculum.

Naast wiskundeopleidingen op universiteiten telt Nederland ook vijf opleidingen Toegepaste Wiskunde op hbo-niveau; de Hogeschool van Amsterdam, Inholland, de Haagse Hogeschool, de NHL Stenden en Fontys Hogescholen. Voorheen stonden deze opleidingen bekend als de opleiding Bedrijfswiskunde. De naamsverandering hangt samen met een door de Vereniging Hogescholen ingezette herindeling van alle hbo-opleidingen in grotere opleidingsdomeinen. De opleidingen Toegepaste Wiskunde behoren tot het domein Engineering en delen dezelfde competenties met een aantal andere technische opleidingen. Studenten die de opleiding afronden ontvangen de graad 'Bachelor of Science'.

Afgestudeerden van Toegepaste Wiskunde zullen na het afronden van hun opleiding een belangrijke rol spelen in het systematisch en analytisch aanpakken van praktische problemen binnen bedrijven, zorginstellingen, overheidsinstellingen en

non-profitorganisaties. Deze organisaties hebben een groeiende behoefte aan kwantitatieve onderbouwing van beslissingsprocessen, waaraan de hbo'ers kunnen bijdragen met het toepassen van wiskundige modellen. Hbo-wiskundigen beschikken over vaardigheden die hen in staat stellen te werken in multidisciplinaire teams, veelal in projectvorm, binnen uiteenlopende bedrijfstakken.

### Nieuw curriculum

Iedere opleiding Toegepaste Wiskunde in Nederland bepaalt haar eigen accenten in het curriculum. In afstemming op de arbeidsmarkt en de wensen van het bedrijfsleven heeft de opleiding van Fontys Hogescholen gekozen voor drie afstudeerrichtingen: *Engineering*, *Data Analysis* en *Operations Research*. Deze afstudeerrichtingen zijn vanaf het eerste studiejaar vormgegeven in drie leerlijnen. De leerlijn *Operations Research* richt zich volledig op

de logistieke sector en de leerlijn *Data Analysis* heeft naast de klassieke thema's uit de kansrekening en statistiek, ook programmeervaardigheden hoog in het vaandel staan. De leerlijn *Engineering* focust zich vanuit de klassieke calculusthema's vanaf het eerste jaar van de opleiding op toepassingen in de engineering. Belangrijke onderwerpen zijn 'systemen en signalen' en 'modelvorming met differentiaalvergelijkingen'. De afstudeerrichting *Engineering* wordt in Nederland alleen door Fontys-opleiding Toegepaste Wiskunde aangeboden.

### Engineering

Dit vakgebied is gespecialiseerd in het creëren en verbeteren van onze omgeving door technologische innovaties. Wiskundige hbo-engineers kunnen werken in de technische sector bij grote bedrijven, bij ingenieurbureaus en bij het midden- en kleinbedrijf. Zij kunnen samenwerken met meerdere ingenieursdisciplines, zoals mechatronica, elektrotechniek of werktuigbouwkunde. Vaak zijn andere ingenieurs uit deze disciplines zeer goed in staat om technologische systemen te ontwerpen, maar worden de modellen van deze systemen door hen ervaren als een *black box*. Wiskunde kan van cruciaal belang zijn om deze systemen te verbeteren. Hier is een

**Project Engineering: rekenen aan een chirurgische robotarm**

Microsure is een spin-off van de Technische Universiteit Eindhoven en houdt zich bezig met de ontwikkeling van een medische robotarm, die in de nabije toekomst gebruikt zal worden voor microchirurgie. “Deze robotarm zal onder andere worden gebruikt voor borstreconstructies bij vrouwen die borstkanker hebben gehad”, legt werktuigbouwkundig ingenieur Ferry Schoenmakers uit. Hij heeft eerstejaars studenten de vraag voorgelegd hoe de ruimte waarin de robotarm kan bewegen op een eenvoudige manier groter kan worden. Uit het onderzoek van de studenten bleek dat twee zogenoemde linklengtes, ofwel de afstand tussen twee scharnieren, van grote invloed waren op de beweeglijkheid van de arm. Door de linklengtes allebei iets langer te maken, werd de robotarm heel snel beweeglijker, waardoor de chirurg veel vrijer kan opereren. Deze uitkomst is dan ook in een volgend systeem van de robotarm doorgevoerd.

rol weggelegd voor een wiskundig ingenieur, die zowel een goed begrip heeft van de technologie, als ook van wiskundige modellen van technologische systemen.

De focus in de afstudeerrichting *Engineering* ligt op het ontwikkelen van de vaardigheid om wiskunde in te zetten voor praktijkgerichte technologische problemen. Studenten leren om een praktische context te vertalen naar een wiskundig model. In vergelijking met een wetenschappelijke opleiding is er vooral aandacht voor de toepassing van de modellen en minder voor de theoretische achtergronden hiervan. Het implementeren van de wiskundige modellen in een geschikte softwaretool staat continu op de agenda. Meteen bij aanvang van de opleiding maken de studenten binnen de *Engineering*-leerlijn kennis met MATLAB. In het derde en vierde studiejaar leren studenten bovendien werken met simulatiesoftware Simulink en een specifieke tool voor de eindige-elementenmethode.

**Data Analysis**

Organisaties beschikken in toenemende mate over grote hoeveelheden data, op

basis waarvan inzicht kan worden verkregen in bedrijfsprocessen. Deze inzichten kunnen worden aangewend om processen te verbeteren en onderbouwde beslissingen te nemen. De leerlijn *Data Analysis* verbindt de vakgebieden wiskunde en informatica. Kennis en vaardigheden worden gebruikt om bewerkingen rondom data uit te voeren, zoals het verzamelen, opschonen en structureren, analyseren, modelleren en inzichtelijk maken, om zo patronen bloot te leggen, voorspellingen te doen en conclusies te trekken. Binnen deze leerlijn wordt dan ook veel aandacht gegeven aan de ontwikkeling van programmeervaardigheden. Zo leren studenten reeds in het propedeusejaar werken met de programmeertaal *Python*. Later in de opleiding komt hier de softwaretool *R* bij. Een data-analist heeft een kritische, onderzoekende houding ten aanzien van zijn werk. Hij bekijkt de problematiek niet alleen vanuit het perspectief van de opdrachtgever, maar is zich ook bewust van verschillende contexten van het probleem en het effect van zijn werk op andere belanghebbenden.

**Project Data Analysis: vergroten effectiviteit waterzuiveringsinstallaties**

Een voorbeeld van de werkzaamheden van een data-analist is het verbeteren van de effectiviteit van de zuiveringsinstallaties voor een waterzuiveringsbedrijf. Uitgangspunt voor dit project is een statisch model, dat gebruikmaakt van gegevens van fabrikanten van delen van de installatie. Op basis van meetgegevens van de installaties van het bedrijf en met behulp van data, die verzameld is door andere nutsbedrijven en overheidsinstanties, kan het model worden uitgebreid en dynamisch worden gemaakt. De *near real-time output* van het nieuwe model kan door experts van de organisatie gebruikt worden om knelpunten in het waterzuiveringsproces aan te wijzen en verbeteringen voor te stellen. Het operationeel management van de organisatie kan het model gebruiken om de vraag naar en het aanbod van de dienst beter op elkaar af te stemmen.

**Operations Research**

Bijna ieder bedrijf van enige omvang heeft te maken met problemen op het gebied van logistiek en operations research (OR). Hbo'ers op het gebied van operations research zijn in staat om relevante informatie te verzamelen en te structureren en kunnen een breed arsenaal aan wiskundige modellen en technieken uit de operations research toepassen om logistieke problemen aan te pakken. Bij de leerlijn *Operations Research* wordt gebruikgemaakt van de software AIMMS en het spreadsheet-programma Excel. Logistieke vraagstukken doen zich voor in vervoersbedrijven, distributiecentra, grotere productiebedrijven en instellingen zoals ziekenhuizen. De OR-engineer heeft in bedrijven de functie van planner voor voorraadbeheer, productie of transport, van logistiek engineer of van efficiency-onderzoeker.

**Professionalisering en Projecten/Stages**

Naast de drie wiskundeleerlijnen profileert de opleiding zich met een leerlijn *Professionalisering* en een leerlijn *Projecten/Stages*. Het eerste doel van de leerlijn Professionalisering is dat studenten *soft skills* ontwikkelen, zoals samenwerken, presenteren en communiceren. Bedrijven hechten er grote waarde aan dat wiskundig specialisten in staat zijn om hun berekeningen om te zetten in begrijpelijke taal voor niet-wiskundige derden; collega's uit andere disciplines, beleidsmakers en klanten. Aangezien iedere keuze voor een wiskundig model slechts een gedeeltelijke representatie is van de werkelijkheid, leren de studenten binnen het vak beroepsethiek na te denken over de gevolgen van hun keuze voor een wiskundig model, voor mens en milieu. Om de studenten voor te bereiden op een internationaal georiënteerde samenleving krijgen zij cursussen Engels, netwerken en solliciteren. Iedere professional neemt zichzelf mee in zijn werk en daarom ook staat een tweede doel, de professionele en persoonlijke ontwikkeling van de student als mens, binnen deze leerlijn centraal. Studenten leren hun eigen kwaliteiten kennen en benoemen, zij werken aan assertiviteit, time-management en onderzoeken hun eigen waarden om een moreel oordeel te kunnen vormen. Dit laatste ook met het oog op de loopbaan die zij verkiezen.

De leerlijn *Professionalisering* wordt uitgevoerd in het eerste en tweede studiejaar van de opleiding. Vervolgens loopt de leer-

### Project *Operations Research*: plannen kookevenement voor een buurtvereniging

In het project *Running Dinner* hebben tweedejaars studenten een buurtvereniging in Den Bosch geholpen met het plannen van hun jaarlijkse kookevenement en hen zo vele avonden puzzelen met honderden papiertjes bespaard. Bovendien is de doelstelling — zoveel mogelijk mensen met elkaar in contact brengen — maximaal gerealiseerd. In de rol van OR-consultant hebben de studenten een acquisitiesprek gevoerd om de eisen en wensen aan de oplossing boven tafel te krijgen, het probleem wiskundig gemodelleerd en geanalyseerd en een geschikte oplosmethode — in de vorm van een stapsgewijze aanpak — gekozen. Vervolgens werden verschillende optimalisatiealgoritmen in software geïmplementeerd. Dit werkproces heeft geleid tot een softwaretool, waarmee de buurtvereniging haar eigen handmatig gemaakte planning op conflicten kan controleren, maar ook binnen een mum van tijd automatisch een zeer goed, conflictvrij planningsvoorstel kan genereren.

lijn door in de stage/projectlijn. Vanaf het eerste studiejaar nemen studenten deel aan projecten. In jaar drie en vier lopen zij stage. Alles wat de studenten in de eerste jaren hebben geleerd, passen zij toe in de praktijk. Tijdens intervisiebijeenkomsten bespreken zij hun ervaringen en bevindingen. Binnen de professionele context van een bedrijf of organisatie werken de studenten niet alleen aan opdrachten, maar definiëren zij ook persoonlijke leerdoelen. Zij sluiten de opleiding af met een individuele stage van een half jaar, in binnen- of buitenland.

### Opbouw van de opleiding

Gedurende de eerste twee jaar van de opleiding Toegepaste Wiskunde van Fontys Hogescholen wordt de wiskundige basis gelegd voor de drie afstudeerrichtingen, georganiseerd in de drie beschreven wiskundeleerlijnen. Enerzijds wordt hierin een landelijke kennisbasis gevolgd met klassieke thema's zoals calculus, lineaire algebra, kansrekening en statistiek. Anderzijds worden hierin keuzes gemaakt door de opleiding zelf, mede afgestemd op de behoeften van het bedrijfsleven. Met enige regelmaat wordt het werkveld dan ook bij de ontwikkeling van het onderwijs betrokken. Binnen de wiskundevakken staat het leren toepassen van wiskunde centraal, onder andere door het gebruik van passende software. De studenten gebruiken de software ook bij de tentaminering met behulp van het zogenaamde *Windows to Go*-systeem. Het kunnen werken met software betekent overigens niet dat er geen uitwerkingen meer op papier worden gemaakt. Er wordt van de studenten verwacht dat zij bepaalde berekeningen zonder gebruik van software kunnen uit-

voeren. Ook hierbij ligt de nadruk op het toepassen van wiskundige methoden. De klassieke bewijsvoering komt doorgaans niet aan de orde.

Vanaf het derde studiejaar maken de studenten een keuze voor een afstudeerrichting. Hoewel hun focus op de gekozen richting ligt, volgen de derdejaars en vierdejaars studenten daarnaast ook nog een aantal vakken uit de andere leerlijnen. Bovendien is in het derde jaar een minor opgenomen waarin zij volledige keuzevrijheid hebben voor verdere verdieping of verbreding. Het onderwijs wordt overwegend uitgevoerd in hoor- en werkcolleges. Naast de klassieke vorm van tenta-

minering, maken samenwerkingsprojecten deel uit van de toetsing. In het derde en vierde studiejaar worden studenten onder andere getoetst door in groepsverband te werken aan casussen. Sommige onderwijseenheden worden met een portfolio afgerond.

De formele toelatingseisen voor de opleiding Toegepaste Wiskunde op hbo-niveau zijn landelijk vastgelegd. Een vwo-leerling is vanuit ieder profiel met wiskunde A of B zonder meer toelaatbaar. Van havoleerlingen die een CM- of EM-profiel hebben gevolgd, wordt expliciet geëist dat zij wiskunde B hebben gehad; vanuit het NG- en NT-profiel is een havoleerling zonder meer toelaatbaar. Ook vanuit het mbo is instroom naar de opleiding mogelijk. Naast studenten met een havo-, vwo- of mbo-achtergrond stromen er ook studenten binnen die eerst een academische opleiding of een andere hbo-opleiding hebben geprobeerd. De diverse achtergronden leiden tot een heterogene groep studenten in het eerste jaar, die onderling verschillen in hun oordeel over de moeilijkheidsgraad van de opleiding. Het curriculum is zodanig opgebouwd dat studenten met wiskunde B op havoniveau een goede aansluiting ervaren. De opleiding werkt met een norm van 60 EC na één jaar, oftewel de propedeuse moet na één jaar worden behaald. ☛

| Jaar 1 | Project                            | Professionalisering                | Engineering                                  | Data Analysis                      | Operations Research    |
|--------|------------------------------------|------------------------------------|----------------------------------------------|------------------------------------|------------------------|
| P1     | Beat-It                            | Studievaardigheden;<br>Soft skills | Goniometrie;<br>Complexe getallen            | Beschrijvende statistiek;<br>Excel | Inleiding logistiek    |
| P2     | Verkenning logistiek<br>werkgebied | Engels;<br>Presenteren             | Differentiëren;<br>Integreren                | Kansrekening;<br>programmeren      | Inleiding Modelleren   |
| P3     | Modelleren robotarm                | Mindset;<br>Samenwerken            | Lineaire algebra;<br>Partieel differentiëren | Kansverdelingen;<br>programmeren   | Lineair Programmeren   |
| P4     | Analyse verkoopcijfers             | Engels;<br>Netwerken               | Vervolg integreren;<br>Reeksen               | Regressie;<br>programmeren         | Discrete Optimalisatie |

| Jaar 2 | Project / stage                  | Professionaliseren                                | Engineering                                       | Data Analysis                              | Operations Research                       |
|--------|----------------------------------|---------------------------------------------------|---------------------------------------------------|--------------------------------------------|-------------------------------------------|
| P1     | Planningsapplicatie<br>ontwerpen | Presenteren<br>Internationalisering               | Gewone<br>differentiaalvergelijkingen             | Hypothese toetsen                          | Verdieping logistiek                      |
| P2     |                                  | Soliciteren<br>Bedrijfskunde<br>Rapportage Engels | Signaalanalyse                                    | Variantieanalyse;<br>Introductie R         | Improving Search                          |
| P3     | Oriënterende<br>stage            | Ethiek<br>Zakenreis                               | Vectorcalculus                                    | Introductie Machine<br>Learning; vervolg R | Verdieping Modelleren<br>en Optimaliseren |
| P4     |                                  | eindassessment                                    | Inleiding partiële<br>differentiaalvergelijkingen | Statistisch onderzoek                      | Casusopdracht                             |

| Jaar 3 / 4           | Engineering                                                                                                                                                                                                                                                                                                                | Data Analysis                                                                                                                                                                                                                                                                                     | Operations Research                                                                                                                                                                                                                                                                                               |
|----------------------|----------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|---------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|-------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|
| P1                   | Minor                                                                                                                                                                                                                                                                                                                      |                                                                                                                                                                                                                                                                                                   |                                                                                                                                                                                                                                                                                                                   |
| P2                   |                                                                                                                                                                                                                                                                                                                            |                                                                                                                                                                                                                                                                                                   |                                                                                                                                                                                                                                                                                                                   |
| P3<br>P4<br>P1<br>P2 | Kernvakken:<br>Partial Differential Equations<br>System and Control<br>Advanced FEM and Control<br>Image and Data Processing in Engineering<br>Scientific Computing<br><br>Keuzevakken:<br>Keuze van 3 vakken uit de kernvakken van<br>Data Analysis en / of Operations Research<br><br>Projectstage (in P3/P4 van Jaar 3) | Kernvakken:<br>Machine Learning<br>Modelling<br>Predictive Analytics<br>Data Skills for Business<br>Image and Data Processing in Engineering<br><br>Keuzevakken:<br>Keuze van 3 vakken uit de kernvakken van<br>Engineering en / of Operations Research<br><br>Projectstage (in P3/P4 van Jaar 3) | Kernvakken:<br>Inventory Management<br>Simulations of Queueing Systems<br>Data Skills for Business<br>Operations Planning and Warehousing<br>Management Accounting<br><br>Keuzevakken:<br>Keuze van 3 vakken uit de kernvakken van<br>Engineering en / of Data Analysis<br><br>Projectstage (in P3/P4 van Jaar 3) |
| P3                   | Afstudeerstage                                                                                                                                                                                                                                                                                                             |                                                                                                                                                                                                                                                                                                   |                                                                                                                                                                                                                                                                                                                   |
| P4                   |                                                                                                                                                                                                                                                                                                                            |                                                                                                                                                                                                                                                                                                   |                                                                                                                                                                                                                                                                                                                   |

Figuur 1 Schema van de opleiding Toegepaste Wiskunde van Fontys Hogescholen.

## Jaap de Jonge

Korteweg-de Vries Instituut, Universiteit van Amsterdam  
EWI, TU Delft  
Gymnasium Felisenum, Velsen-Zuid  
c.j.dejonge@uva.nl

### Evenement Internationale Wiskunde Competitie

# Nederlands succes bij de IMC geen toevalstreffer

De laatste jaren zit er flinke groei in de prestaties van Nederlandse deelnemers bij de *Internationale Wiskunde Competitie* voor studenten (IMC). Een deel van het succes lijkt een voortzetting van de prestaties bij de IMO, de *Internationale Wiskunde Olympiade* voor middelbare scholieren. Een analyse van Jaap de Jonge, bestuurslid van Stichting Nederlandse Wiskunde Olympiade.

Aan het begin van deze eeuw had niemand kunnen verwachten dat er vijftien jaar later meer dan duizend eerstejaars studenten wiskunde in Nederland zouden zijn. Die enorme stijging in aantallen wordt vaak verklaard op basis van de toenemende relevantie van wiskunde in de maatschappij en de goede baankansen. Toch mag een andere verklaring niet ontbreken: een hernieuwd elan, een hernieuwd plezier in wiskunde, dat bij de trainingen voor de olympiades breed gedeeld wordt. Dat zijn niet alleen trainingen voor de allerbesten: op veel scholen in het land helpen wiskundeleraren hun leerlingen in de voorbereiding op de eerste ronde van de wiskundeolympiade, waaraan tal van kinderen deelnemen die geen wiskunde gaan studeren, maar wel ervaren hoe leuk het is om vraagstukken op te leren lossen die op het eerste gezicht onoverkomelijk moeilijk zijn. Trainen om onverwachte wiskundige opgaven in een beperkte tijd op te lossen kan een mooie aanvulling zijn op het leren van nieuwe theorie waarover een proefwerk wordt gegeven.

Niet zo is op de universiteit een training voor de *Internationale Studenten Competitie* een prachtige verrijking van het curriculum. Trainen voor zo'n competitie ligt ergens tussen het voorbereiden van een

tentamen en het doen van onderzoek in: bij een studentenwedstrijd is de verrassingsfactor vaak groter dan bij een tentamen, maar de opgaven van de *International Mathematics Competition* doen een beroep op de grondige wiskundige kennis die aan de universiteit wordt onderwezen. De creativiteit die nodig is om een nooit eerder gezien probleem op te lossen, is van groot belang voor toekomstige onderzoekers.

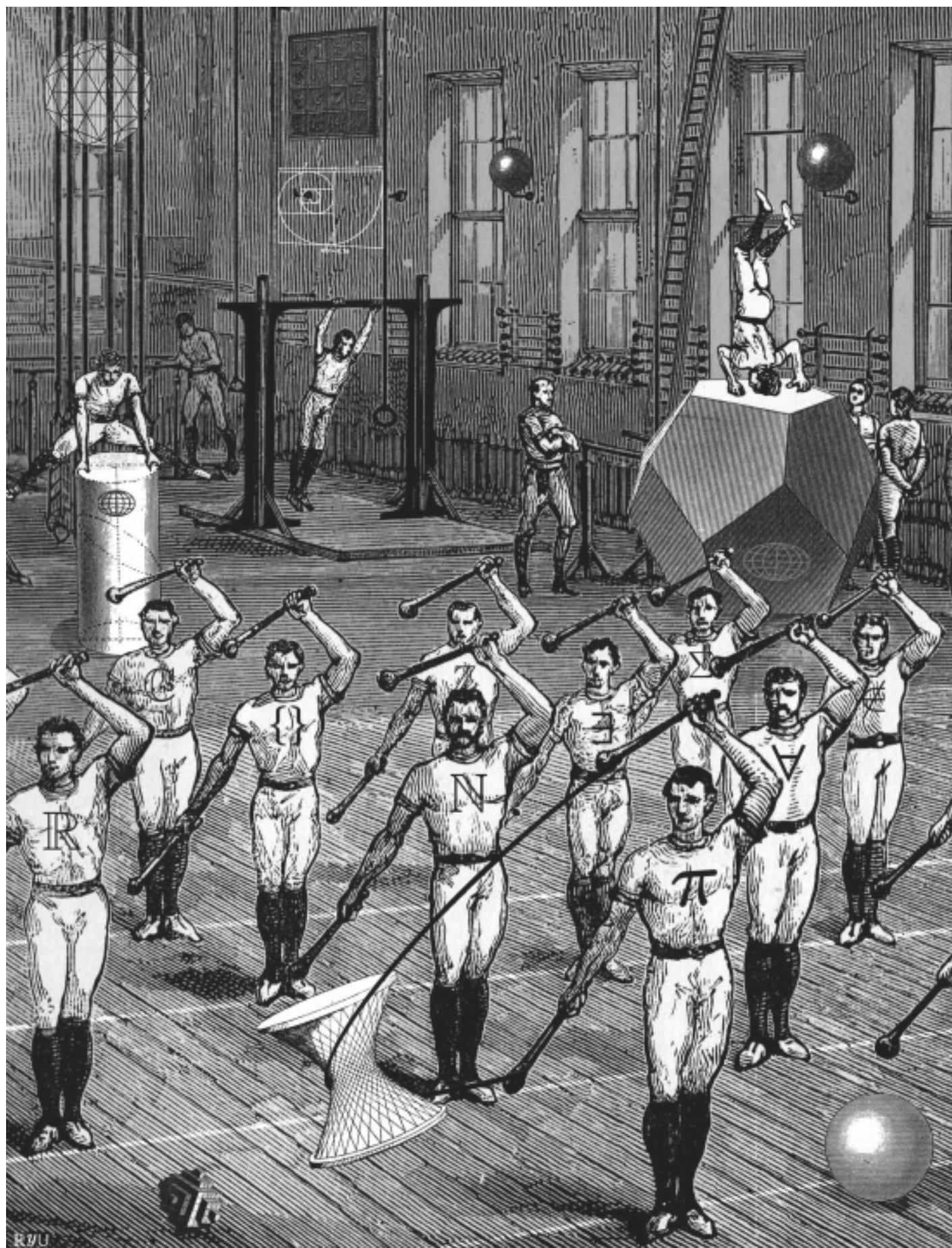
#### Zomer 2017: Nederlandse topscores

De *International Mathematics Competition for University Students*, zoals de IMC voluit heet, is een jaarlijkse wiskundewedstrijd voor wiskundestudenten die niet ouder dan 23 zijn. Hoewel het een individuele wedstrijd is, doen de meeste studenten mee in een team van hun eigen universiteit. Er zijn twee wedstrijddagen, elk met vijf vragen, waarvoor de studenten steeds vijf uur de tijd hebben. De opgaven komen uit de gebieden algebra, analyse, combinatoriek en meetkunde.

In de zomer van 2017 waren Nederlandse universiteitsteams zeer succesvol, met een opvallend hoge klassering: plaats 11, 12, 13 en 14 voor respectievelijk Universiteit Utrecht, Universiteit Leiden, de Radboud Universiteit en de Universiteit van Amsterdam (in een veld met 71 teams).

Jeroen Winkel van de RU was de beste Nederlandse deelnemer op de elfde plaats. Voor het eerst deden vorig jaar ook een team van de Technische Universiteit Delft (42ste) en een van de Technische Universiteit Eindhoven mee, dat op de 54ste plaats eindigde.

Het Nederlandse succes kwam niet uit de lucht vallen, al duurde het een paar jaar voor er een ware Nederlandse golf zichtbaar werd. In 2015 waren de Nederlandse universiteitsteams voor het eerst in bredere zin actief en succesvol bij de IMC. Toen deed ook een team van de Radboud Universiteit mee, dat meteen achttiende van de 68 teams werd, met bovendien de beste Nederlandse deelnemer: Jeroen Winkel, die twaalfde werd in een veld met 326 deelnemers. Zijn goede prestatie kwam niet helemaal als een verrassing: het jaar daarvoor had hij bij de IMO een gouden medaille gehaald. Zeer indrukwekkend was ook de prestatie van het team van de UU, dat zevende werd, pal achter een team uit Barcelona en een top vijf met twee Russische teams, een Hongaars team, een Pools team en het nationale team van Israël. Vijf van de zes teamleden van de UU waren oud-IMO-deelnemers, onder wie goudenmedaillewinnaar in 2012 Jeroen Huijben. De teams van de UvA (44ste) en de LEI (65ste) bleven daarbij wat achter, maar dat werd in 2016 al beter, toen de UvA 27ste werd en de LEI 44ste. De UU, met dit keer louter oud-IMO-deelnemers, werd tiende. De RU kreeg geen teamvermelding omdat alleen Jeroen Winkel



meedeed, die evenals Jeroen Huijben bij de nummers 11–16 zat.

### Plovdiv

De *International Mathematics Competition* is in 1994 begonnen in het Bulgaarse Plovdiv, met voornamelijk Bulgaarse deelnemers. Daarna werd het deelnemersveld allengs internationaler. Na uitstapjes in het buitenland vindt de wedstrijd sinds 2010 altijd plaats in Blagoëvgrad (uitgesproken als: Bla-go-jev-grad), ook in Bulgarije. Inmiddels hebben studenten van meer dan tweehonderd universiteiten uit meer dan vijftig landen deelgenomen.

In 2006 deed Nederland voor het eerst mee, met acht wiskundestudenten uit Amsterdam, Utrecht en Leiden. Hoewel er op persoonlijke titel werd meegedaan, staat op de IMC-site een team van de UU als 29ste in de uitslag vermeld en een team van de UvA als 37ste, in een veld met 43 deelnemende teams. In de jaren daarna waren er uit Nederland alleen teams van de UvA en de UU, waarbij de Utrechters stevast hoger eindigden dan de Amsterdammers, al had de UvA met Iris Smit twee keer de beste Nederlandse deelnemer. In 2012 behaalde het Utrechtse team, met als sterkste deelnemers Floris van Doorn en Julian Lyczak, zelfs al een mooie achttiende plaats, in een veld met 68 teams. Bijzonder knap was dat jaar de tiende plaats en een gouden medaille van Floris in het individuele klassement van 316 deelnemers.

### Geen toeval

Dat UU-student Floris van Doorn in 2012 een indrukwekkende tiende plaats bij de *International Mathematics Competition* behaalde, was geen toeval. Vier jaar daarvoor had Floris als middelbare scholier deelgenomen aan de *International Mathematics Olympiad*, waar hij een al even knappe zilveren medaille won. Ook zijn teamgenoot Julian Lyczak, de beste Nederlander bij de IMC's van 2010 en 2011, was oud-deelnemer van de IMO, net als overigens de eerder genoemde Iris Smit.

Bij deze *Internationale Wiskunde Olympiade voor middelbare scholieren* is de opgaande lijn van Nederland al wat langer zichtbaar. In 2008 (met Floris van Doorn) haalde Nederland het beste resultaat in meer dan twintig jaar. In 2009 ging het even wat minder, maar daarna was Nederland niet meer te stuiten: in 2010 werd het team

38ste van 95 landen, en in de jaren die volgden waren die cijfers 28/101, 22/100, 25/97 en in 2014 zelfs 13/101. Nederland hield dat laatste jaar landen als Hongarije, Duitsland, het Verenigd Koninkrijk en Frankrijk achter zich. Doordat er daarna een vrijwel geheel nieuw team moest worden gebouwd, waren de resultaten in 2015 en 2016 even wat minder sterk, maar de vorige zomer werd de prestatie van 2014 bijna geëvenaard, met de cijfers 18/111.

Aan dat alles ligt in de eerste plaats de sterk verbeterde organisatie van de Nederlandse Wiskunde Olympiade ten grondslag. Sinds ruim tien jaar wordt er



Pim Spelier (links) en Jeroen Winkel (rechts), gouden medaillewinnaars IMC 2017

met grote inzet gewerkt aan het verbeteren van die wedstrijd ter popularisering van de wiskunde. Zo is er een wedstrijdronde bijgekomen, is de jaarlijkse Benelux Wiskunde Olympiade (BxMO) opgericht, is er een schat aan trainingsmateriaal ontwikkeld en is er een systeem waarin de deelnemers steeds beter getraind worden door steeds beter getrainde oud-deelnemers. De spil van alle veranderingen is het duo Quintijn Puite en Birgit van Dalen, beiden oud-IMO-deelnemers, die begrijpen dat er naast een goede organisatie en een beleid van voortdurende verbetering een onmisbare factor is voor alle succes: een groot enthousiasme bij zichzelf en de vele vrijwilligers, onder wie in de eerste plaats de trainers. Ook de organisatie van IMO 2011 in Nederland, waarbij het Nederlandse team al een mooie 28ste plaats veroverde, kwam voort uit dat enthousiasme. De voorbereidingen voor een andere, jongere, maar snel groeiende wiskundeolympiade zijn al een half jaar in gang: in 2020 wordt de European Girls' Mathematical Olympiad (EGMO; [www.egmo2020.nl](http://www.egmo2020.nl)) in Nederland georganiseerd, opnieuw met de inzet van veel vrijwilligers die wiskunde een warm hart toedragen.

### Inspiratie uit Kraków

Voor Jan Wiegerinck, toenmalig directeur van het Korteweg-de Vries Instituut van de UvA, was training voor deelname aan de IMC in 2005 een manier om de studie wiskunde aantrekkelijker te maken. Hij was geïnspireerd door zijn Poolse collega Armen Edigarian van de Jagellonian University in Krakow, van wie de studenten regelmatig en met grote inzet meededen aan wiskundewedstrijden. Omdat hij wist dat promovendus Fokko van de Bult succesvol IMO-deelnemer en olympiadetrainer was geweest, vroeg hij die om trainingen te geven. Opleidingsdirecteur Chris Zaal maakte er een honoursvak van: *Training IMC* (3 ECTS), waaraan bachelorstudenten uit de drie opeenvolgende studiejaar kunnen deelnemen. In 2005 vond ook de eerste *Landelijke Interuniversitaire Mathematische Olympiade* (LIMO) plaats, voor studenten uit Nederland en Vlaanderen en ook door studenten georganiseerd. Kenmerkend was de tijd in Nederland rijp voor universitaire wiskundecompetities. Toch duurde het nog tien jaar voor meerdere Nederlandse teams succesvol werden.

Het succes van de Nederlandse teams komt voor een groot deel voort uit de initiatieven van individuele studenten. Zo deed het team van de TU Delft de afgelopen zomer mee omdat de twee leden enthousiast waren geraakt door deelname aan de LIMO en op zoek waren gegaan naar méér. Beide studenten, Arjan Cornelissen en Stan Tendijs, allebei zonder IMO-achtergrond, hebben veel zelf geregeld. Gelukkig is er op internet een schat aan trainingsmateriaal te vinden, waarvan veel is ontwikkeld door oud-IMO-deelnemers als Julian Lyczak, Iris Smit en Raymond van Bommel.

Alleen aan de UvA is voorbereiding op de IMC in het curriculum opgenomen. Het vak *Training IMC* is erg populair en een selectie is nodig om uit de deelnemers een team te kunnen formeren. Bastiaan Cnossen, goudenmedaillewinnaar bij de IMC van 2016, zegt daarover: "De training bevordert het vermogen om snel zelf de oplossingen van een probleem te vinden. Je leert om echt zelf na te denken, omdat de problemen bijna nooit met standaard methoden op te lossen zijn. Deze vaardigheid is natuurlijk wel nuttig voor de rest van je studie." UvA-student Wouter Rienks, vorig jaar goudenmedaillewinnaar bij de IMC, is erg enthousiast en roemt de mogelijkheid om door de IMC met veel ver-

### Twee voorbeeldopgaven van het IMC

**IMC 2017-2.** Zij  $f: \mathbb{R} \rightarrow (0, \infty)$  een differentieerbare functie en neem aan dat er een constante  $L > 0$  bestaat zodanig dat

$$|f'(x) - f'(y)| \leq L |x - y|$$

voor alle  $x, y \in \mathbb{R}$ . Bewijs dat

$$(f'(x))^2 < 2Lf(x)$$

voor alle  $x \in \mathbb{R}$ .

**Oplossing.** Stel dat  $x \in \mathbb{R}$  en  $a := f'(x) \geq 0$  (het andere geval gaat analoog). Er geldt voor alle  $\Delta \in [0, \frac{a}{L}]$  dat

$$f'(x - \Delta) \geq a - L \cdot \Delta.$$

In het bijzonder zien we, door te integreren over  $\Delta$  dat

$$\begin{aligned} f(x) &> f(x) - f\left(x - \frac{a}{L}\right) = \int_0^{\frac{a}{L}} f'(x - \Delta) d\Delta \\ &\geq \int_0^{\frac{a}{L}} (a - L\Delta) d\Delta = \frac{a^2}{2L}. \end{aligned}$$

**IMC 2015-8.** Bekijk alle  $26^{26}$  woorden met 26 letters uit het Latijnse alfabet. Definieer het *gewicht* van een woord als  $\frac{1}{k+1}$ , waarbij  $k$  het aantal letters is dat niet voorkomt in het woord. Bewijs dat de som van de gewichten van alle woorden gelijk is aan  $3^{75}$ .

**Oplossing.** Zij  $X_{26}$  de verzameling van 26-letterige woorden met letters uit het Latijnse alfabet en  $X_{25}$  de verzameling van 25-letterige woorden met letters uit het Latijnse alfabet plus de letter  $*$ .

We construeren een afbeelding  $\varphi: X_{26} \rightarrow X_{25}$  door aan elk 26-letterig woord het 25-letterige woord toe te kennen dat je krijgt door de laatste letter weg te halen en alle instanties van die letter te vervangen door  $*$ . Zo wordt aan *levensverzekeringswiskunde* in  $X_{26}$  bijvoorbeeld *lv\*nsv\*rz\*k\*ringswiskund* in  $X_{25}$  toegekend.

Voor elke  $W \in X_{26}$  zijn er precies  $k$  andere elementen van  $X_{26}$  die naar hetzelfde woord gestuurd worden, waarbij  $k$  het aantal letters is dat niet voorkomt in  $W$ . Bovendien is  $\varphi$  surjectief. Er volgt nu dat de gevraagde som gelijk is aan

$$\sum_{W \in X_{26}} \frac{1}{|\varphi^{-1}(\varphi(W))|} = |\varphi(X_{26})| = |X_{25}| = 27^{25} = 3^{75}.$$

schillende wiskundestudenten in contact te komen, al merkt hij op dat de opgaven inhoudelijk vrij ver buiten de studie staan. Mike Daas, oud-IMO-deelnemer, meent: “Ik denk dat het leukste aan IMC is dat het een deel van de creativiteit die wiskunde inherent in zich draagt, accentueert en op de voorgrond plaatst. De meeste vakken komt men door met het leren van slechts een klein aantal verschillende nieuwe bewijsideeën, welke men op de tentamens slechts dient te kunnen reproduceren voor een goed cijfer. Voor IMC-opgaven is creativiteit en inzicht nodig, iets waarvan ik niet heel zeker ben of het wel voldoende wordt gestimuleerd gedurende de reguliere bachelor vakken, waarschijnlijk om de studie niet te moeilijk te maken. Natuurlijk kun je ook voor IMC-opgaven trainen, maar creativiteit blijft een belangrijk deel van de oplossing. Dus in die zin verrijkt het de opleiding, denk ik.”

In het hele land, aan alle universiteiten met wiskundeopleiding, lopen getalenteerde studenten rond die graag een keer meedoen aan iets als de IMC, al vraagt bijvoorbeeld Wouter Rienks zich af “of de (enorm) competitieve sfeer wel iets voor mij is”. Maar wie wars is van competitie kan toch veel plezier hebben van IMC-training: “Het is gericht op het probleemoplossend denken en leert de studenten verschillende handige vaardigheden. Hierdoor wordt het

vak ook nuttig voor studenten die niet aan de IMC mee kunnen/willen doen”, aldus Bastiaan Cnossen.

Het aardige aan een goede IMC-training is dat het ook studenten zonder IMO-achtergrond tot grote prestaties kan brengen: Wouter Rienks noch Bastiaan Cnossen zat op een school die de Nederlandse Wiskunde Olympiade organiseerde. Oud-IMO-deelnemers blijken echter een grote voorgrond te hebben opgebouwd door de trainingen die ze als middelbare scholier deden ter voorbereiding op de IMO. Mike Daas, vorig jaar met een gouden medaille ook de best presterende van het UvA-team, zegt daarover: “Het viel mij reeds vele jaren geleden op hoeveel makkelijker de nationale rondes van de wiskundeolympiade me afgingen al na slechts een jaar in de trainingsgroep gezeten te hebben.



Eva van Ammers, bronzenmedaillewinnaar IMC 2017

Blijkbaar werkt het echt; men sterkt simpelweg het probleemoplossend denken en in het bijzonder word je erg goed in het analyseren en herkennen van dat soort olympiadeopgaven. [...] Ik vermoed dat het er ook voor zorgt dat mijn reguliere studie me makkelijker afgaat; alles dankzij de training.”

### Blijdschap

Het nut van een goede voorbereiding is maar één ding. Eva van Ammers, wiskundestudent aan de UU, bronzenmedaillewinnaar bij IMO 2015 én IMC 2016 en IMC 2017, en ook nog eens IMO-trainer, benadrukt een ander, minstens zo belangrijk aspect: de blijdschap die ze voelde toen ze door de IMO-trainingen in contact kwam met anderen die ook dol zijn op wiskunde en er met plezier heel hard aan willen werken. Het zijn studenten als Eva die het nieuwe elan van de Nederlandse (studenten)wiskunde belichamen. Het zou mooi zijn als andere wiskundeopleidingen zich laten inspireren door het initiatief van het Amsterdamse KdV Instituut — en alle scholen in Nederland hun wiskundetalenten bieden wat ze toekomst.

### Referenties

- 1 [www.imc-math.org.uk](http://www.imc-math.org.uk)
- 2 [www.imo-official.org](http://www.imo-official.org)
- 3 [www.wiskundeolympiade.nl](http://www.wiskundeolympiade.nl)

Martinus van Hoorn

oud-hoofredacteur Euclides  
mc.vanhoorn@wxs.nl

Jan Guichelaar

redacteur Pythagoras  
j.guichelaar4@gmail.com

## Geschiedenis

# De geschiedenis van het tijdschrift Pythagoras, deel 2: Voorspoed en tegenslag; de periode 1966–1985

In deel 1 van deze geschiedschrijving over het tijdschrift Pythagoras bleek dat de uitgave ervan al spoedig succesvol was: het blad werd alom gewaardeerd en het aantal abonnees overtrof de stoutste verwachtingen. Deel 1 liep tot 1966, in welk jaar de eerste redacteur G. Krooshof terugtrad. Zo mooi als in de beginjaren zou het niet blijven. In 1985 stootte de uitgever het blad zelfs af, omdat deze geen mogelijkheid meer zag het blad zonder verlies uit te geven. Het kwam bijna tot opheffing. In deze tweede aflevering laten Martinus van Hoorn en Jan Guichelaar diverse thematische aspecten, alsook de moeilijkheden die waren ontstaan, de revue passeren. De basis ligt weer in schriftelijke bronnen en gesprekken met betrokkenen.

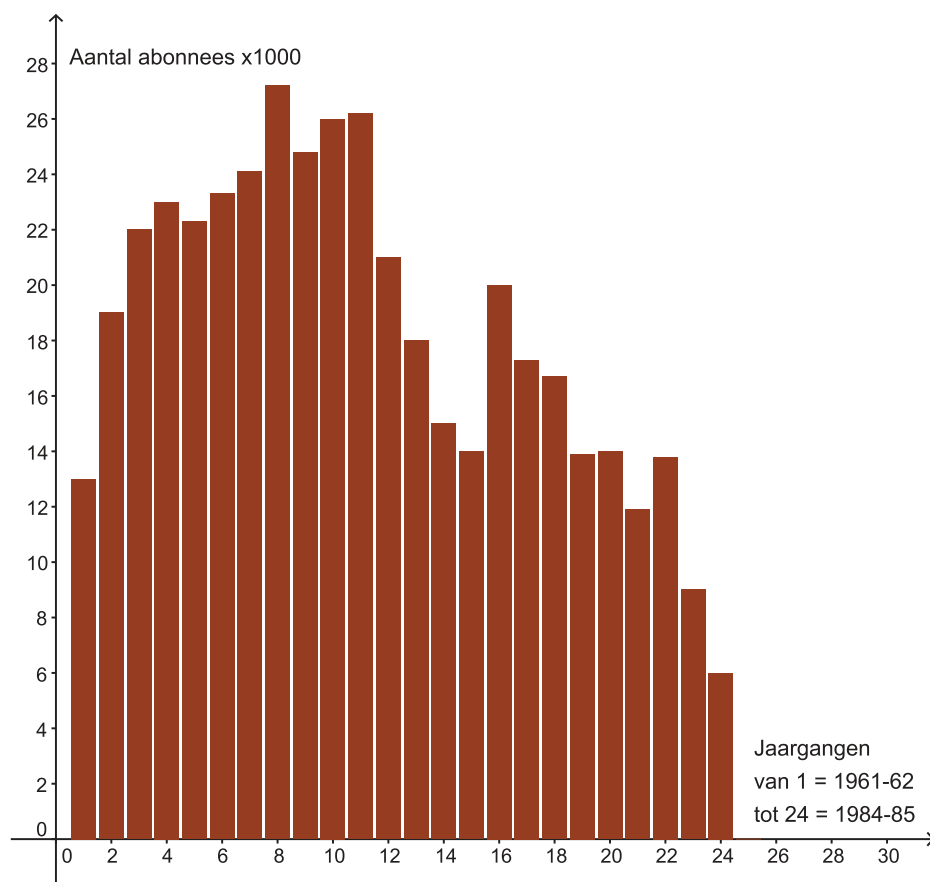
is de weergave van het aantalsverloop onbetwistbaar.

In rechtstreekse relatie tot het aantal abonnees stond de honorering van de redactieleden. Onder meer in 1967 kwam het honorarium van de redactieleden ter sprake.<sup>2</sup> Freudenthal, die toen nog voorzitter was van de NOCW, wilde liever alleen onkostennota's, maar de redactie gaf de voor-

### Pieken en dalen in het aantal abonnees

In 1966 was de structuur rond Pythagoras bijzonder stabiel. Het blad werd uitgegeven door J.B. Wolters in Groningen, al spoedig overgaand in Wolters-Noordhoff, en het verscheen onder auspiciën van de Nederlandse Onderwijs Commissie voor Wiskunde (NOCW).<sup>1</sup>

In vergaderingen van de NOCW vormde Pythagoras een vast agendapunt. In de jaren zeventig werd steeds vaker het aantal abonnees onderwerp van gesprek. In Figuur 1 is dit aantal gedurende de eerste 24 jaar weergegeven. Na de bliksemstart, naar 13.000 abonnees in het eerste verschijningsjaar, volgde een verdere snelle groei, tot circa 25.000 abonnees in de jaren 1968–1972. Daarna begon echter een achteruitgang, tot ongeveer 6.000 abonnees in 1985. Weliswaar bracht de zestiende jaargang (1976–1977) een opleving, maar vooral na 1982 ontstond een krachtige neerwaartse trend. Ten aanzien van de abonneeaantallen geldt enig voorbehoud, omdat deze aantallen niet steeds volgens hetzelfde schema werden bijgehouden. Weliswaar komen in verslagen geregeld abonneeaantallen voor, maar de peildata konden verschillen. In hoofdzaak



Figuur 1 Aantallen abonnees op Pythagoras (x1000), 1961–1985.



**Figuur 2** Hyperboloïde-krukje. Pythagoras jaargang 8, nummer 4 (voorjaar 1969), binnenzijde omslag. Speciaal voor Pythagoras gefotografeerd.

keur aan een honorarium. Het bleef een honorarium, uitgekeerd door de Stichting Jeugd en Wiskunde, die haar geld ontving van de uitgever, op basis van het aantal abonnees. De hoogte van de vergoeding was met een formule door uitgever en NOCW vastgelegd.<sup>3</sup>

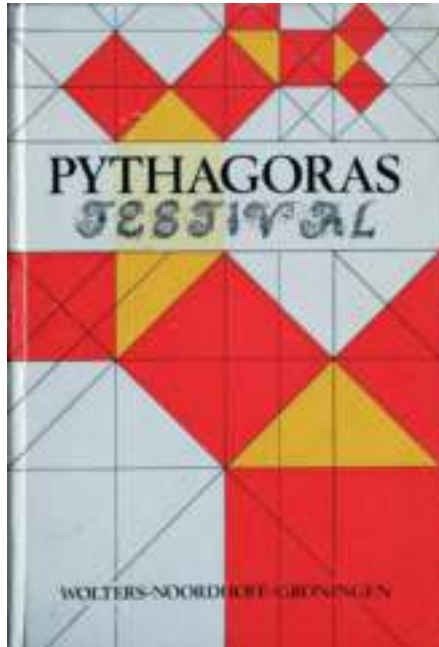
De hoogste vergoeding, f850 per redactielid, werd uitgekeerd voor de achtste jaargang. Later nam de vergoeding door de teruggang van het aantal abonnees af tot f150,00 per redactielid.

Naast het honorarium ontving elke redacteur van de NOCW een toelage voor de aanschaf van boeken. Van elk redactielid werd een schriftelijke verantwoording gevraagd van de besteding van deze toelage. Redacteur Guus Vonk meldde in 1969 dat hij van zijn boekengeld f20 had betaald aan een fotograaf; hij had twee foto's laten maken, waaronder een opname van een hyperboloïde-krukje, voor zijn bijdrage over gekromde oppervlakken (zie Figuur 2).<sup>4</sup>

Toen de financiële situatie minder florissant werd, bleek de Nederlandse Vereniging van Wiskundeleraren bereid jaarlijks f1500 te doneren om het boekengeld te behouden.<sup>5</sup>

#### Jubileumboek, poster

In 1969 stelde Wolters-Noordhoff voor een bloemlezing uit acht jaargangen Pythagoras uit te geven.<sup>6</sup> De titel zou kunnen zijn: *Het beste uit Pythagoras*. Hiertegen maakte het NOCW-lid D.N. van der Neut



**Figuur 3** Voorzijde Pythagoras Festival (1970).

bezwaar.<sup>7</sup> "Is 'het beste' niet onaardig tegen niet-opgenomen auteurs?" vroeg hij. Daarop werd gekozen voor de titel *Pythagoras Festival*.<sup>8</sup> Redacteur Hans de Rijk stelde deze bloemlezing samen.

Ongeveer tegelijkertijd werd voor de liefhebbers een mooie poster beschikbaar gesteld, voorstellende de boom van Pythagoras, zoals ontworpen door Albert E. Bosman (1891–1961).<sup>9</sup>

#### Succes, maar ook zorgen

Auke Oosten, die in 1966 tot de redactie was toegetreden, stapte na enkele jaren van zijn school over naar Wolters-Noordhoff, waar hij Pythagoras in zijn portefeuille kreeg. Hij bleef bijna acht jaar bij Pythagoras, waarvan de laatste vijf jaar als redactiesecretaris.<sup>10</sup> Gedurende het grootste deel van die periode ging het uitstekend met het blad.

Vele Denkerkes werden in Pythagoras opgenomen, verzorgd door Ary van Tooren.

Deze onderhield daarbij een levendige correspondentie met de inzenders van oplossingen.

Na het zeer succesvolle eerste decennium werden binnen de NOCW toch zorgen geuit. Begin 1971 wilde Freudenthal een redactievergadering van Pythagoras bijwonen, waar hij kritische opmerkingen wilde maken over de inhoud.<sup>11</sup> Niet duidelijk is waarover zijn kritiek ging.

Een voortdurend probleem werd de opvolging van vertrekkende redacteurs.<sup>12</sup> Begin 1972 meldde de redactie dat zij niet pessimistisch was. Het afgelopen jaar, waarbij elk nummer geheel door een enkele redacteur verzorgd werd, was goed bevallen. Maar de redactie drong toch aan op het aantrekken van nieuwe mensen.<sup>13</sup> Dat lukte toen niet. Uit de NOCW kwam de suggestie een wervend stuk te schrijven in *Euclides*.<sup>14</sup> Deze oproep leidde tot de benoeming van Wim Kleijne als redactielid en ook tot de inzending van nieuwe artikelen, zodat weer een behoorlijke kopijvoorraad ontstond.<sup>15</sup>

Weinig redacteurs bleven gedurende veel jaren actief.<sup>16</sup> Zodoende werd, naast het aanvullen van de kopijvoorraad, het aantrekken van nieuwe mensen een terugkerende bron van zorg. In 1973 kwam er een nieuw probleem bij, omdat onverwacht het aantal abonnees flink was teruggelopen. Dit probleem werd de jaren daarna alleen maar groter.

Tijdens het schooljaar 1973–1974 vertrok Auke Oosten, waarna Krooshof nog een klein half jaar terugkwam om de redactie te ondersteunen. De Rijk werd nu redactiesecretaris, en Henk Mulder, leraar natuurkunde te Breda, kwam de redactie versterken. De komst van Mulder was een suggestie van Oosten. Mulder had al verscheidene artikelen voor Pythagoras geschreven. Tot zijn overlijden in 1993 zou hij als redacteur of medewerker een drijvende kracht achter Pythagoras blijven. Mulder



**Figuur 4** Denkerkje uit Pythagoras 9-2 (november 1969), met het karakteristieke logo. De oplossing van dit (eventueel) generaliseerbare probleem kwam in een later nummer.

11. Een leraar heeft een aantal proefwerkvragen op het bord geschreven. Achter elke vraag schrijft hij de nummers van de leerlingen die die vraag moeten beantwoorden. Hij doet dat zo dat elk van de 29 leerlingen twee vragen moet beantwoorden en dat alle leerlingen verschillende paren vragen krijgen. Hoeveel vragen staan er tenminste op het bord?



Figuur 5 Henk Mulder (1923-1993).

schreef ook voor het zusterblad *Archimedes*.

Eind 1973 haalde het NOCW-lid A.F. Monna flink uit. Hij schreef aan NOCW-secretaris Van Dormolen dat met de toetreding van Mulder de problemen niet waren opgelost.<sup>17</sup> Eigenlijk moest de hele redactie weg!<sup>18</sup> Verjonging was nodig, schreef hij. Monna kreeg geen steun voor zijn actie. In januari 1974 stapte hij uit de NOCW.<sup>19</sup>

### Vertrek Ary van Tooren

Ary van Tooren (1921-1993), redactielid sinds 1963, was in 1975, aan het eind van jaargang 14, uit de redactie getreden en een opvolger die in zijn voetsporen kon treden was moeilijk te vinden. Van Tooren had zich gedurende twaalf jaar geconcentreerd op de Denkertjes.<sup>20</sup> Daarvan waren er in elk regulier nummer tien stuks verschenen. Veruit de meeste van deze Denkertjes stonden

op zichzelf, los van artikelen in het blad. Dit principe was losgelaten in Van Toorens laatste redactiejaar, toen soms Denkertjes werden gekoppeld aan artikelen.

Van Tooren was jarenlang lid van de opgavencommissie voor de Nederlandse Wiskunde Olympiade; ook daar werd zijn vermogen vraagstukken op te stellen gewaardeerd. Toen Nederland ging meedoen aan de Internationale Wiskunde Olympiade (1969) leidde hij het Nederlandse team. In die functie werd Van Tooren in 1975, op zijn verzoek, opgevolgd door Jan van de Craats.<sup>21</sup>

### Een opleving, en toch weer daling

Bij de start van de 16e jaargang (1976-1977) steeg het aantal abonnees naar 20.000, maar daarna daalde dit aantal toch weer. Waaraan de opleving te danken was, is niet bekend. Mogelijk was in 1976 een promotieactie gehouden, maar bedankte een deel van de extra lezers al spoedig. Dit mogelijke scenario zou reden kunnen zijn de inhoud van het blad nader te bezien. In feite was dit een jaar eerder al gedaan. In april 1975 was een enquête met Pythagoras meegestuurd, met zes hoofdvragen over de jaargang 1974-1975:<sup>22</sup>

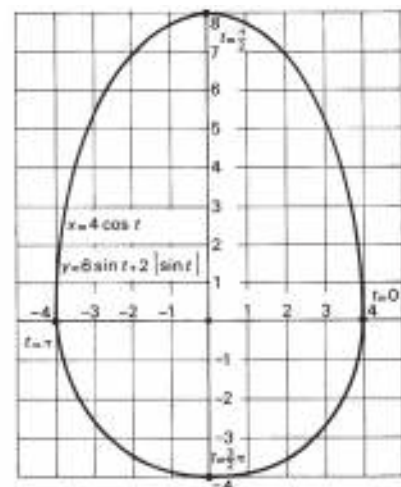
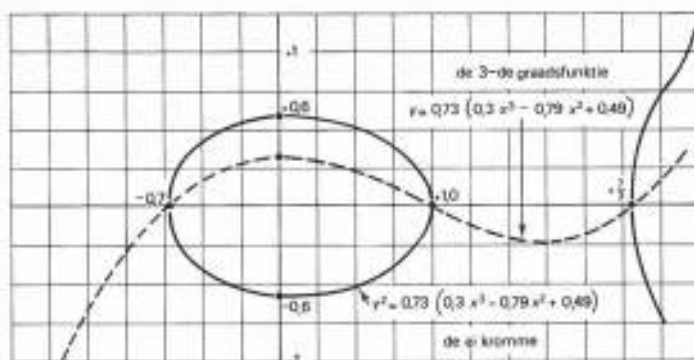
1. Vind je Pythagoras voor jou waardevol?
2. Welke twee artikelen vond je bijzonder interessant?
3. Welke twee artikelen vond je waardeeloos?
4. Vind je de artikelen over het algemeen te moeilijk?
5. Kun je je nog een interessant artikel uit de vorige jaargang herinneren?
6. Over welke onderwerpen zou je graag wat in de volgende jaargang zien?

Conclusies op basis van deze enquête zijn helaas niet bekend.

In het eerste nummer van de 17e jaargang (1977-1978) verscheen een probleem dat veel lezers enorm kon aanspreken. Dit was het fraaie probleem van de ei-kromme, dat wil zeggen: geef een vergelijking van een kromme die de vorm van een ei heeft. Dit probleem leende zich bij uitstek voor interactie met de lezers; maar jammer genoeg werden meteen al verschillende oplossingen gegeven (zie Figuur 6). Later bleken er toch spontane reacties bijgekomen te zijn.<sup>23</sup> Dit geval laat zien dat verschillende lezers zich uitgedaagd voelden en graag zelf iets wilden doen.

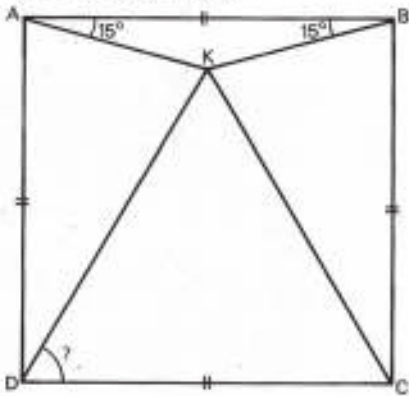
De conclusie dat leerlingen graag iets zelf wilden ontdekken betreft eveneens de Denkertjes. Na het vertrek van Van Tooren werden steeds de oplossingen van de Denkertjes achterin hetzelfde nummer geplaatst. Daardoor verdween een groot deel van de uitdaging, zodat de interactie met de lezers, waarmee Van Tooren aldoor druk was geweest, sterk afnam. Interactie met lezers betekende ook betrokkenheid van deze lezers. Waarom de redactie voor deze werkwijze koos vertelde zij niet. Dit neemt niet weg dat er nog steeds fraaie Denkertjes voorkwamen, zoals het vraagstuk in Figuur 7 uit het eerste nummer van de 18e jaargang.

Eind 1977 werd de noodklok geluid.<sup>24</sup> Er waren weinig artikelen in portefeuille. Het voortbestaan van Pythagoras kwam daardoor in gevaar, mede doordat de redactie nog maar bestond uit De Rijk, Mulder, Vonk en Kleijne. Lerarenopleidingen en didactiekdocenten werden aangeschreven om artikelen te verwerven en namen van



Figuur 6 Twee uitwerkingen van het probleem van de ei-kromme, Pythagoras 17-1 (oktober 1977), die direct al werden gegeven. Links die van Henk Baas, rechts die van Chris Blok.

Dit is op het eerste gezicht een zeer simpel meetkundig probleempje; maar je bent knap als je het oplost!  
 Gegeven: Vierkant  $ABCD$   
 $\angle BAK = \angle ABK = 15^\circ$   
 Te berekenen:  $\angle CDK$ .



**Figuur 7** Denkertje in Pythagoras 18-1 (oktober 1978). De oplossing stond reeds achterin hetzelfde nummer.

mogelijke redacteuren te krijgen. Eind 1978 schreef Hans de Rijk, alias Bruno Ernst, een notitie, waarin onder meer stond:<sup>25</sup>

- Er is gebrek aan kopij; het vierde nummer kan al niet meer gevuld worden. Hijzelf, dat wil zeggen De Rijk, kan voldoende onderwerpen bedenken, maar noodzakelijke voorstudie zal hem te veel tijd kosten.
- Een dalend aantal abonnees. Is Pythagoras te moeilijk? Is het blad niet interessant genoeg? Sluit het niet aan bij de schoolstof? Zijn leraren te weinig gemotiveerd?

Begin 1979 was er bij de NOCW onduidelijkheid over het functioneren van de redactie. Hans de Rijk zou alles zelf (willen) doen, en ook voorgestelde redacteuren afwijzen.<sup>26</sup> In een brede vergadering, met onder meer de NOCW en de redactie, werd de situatie nogmaals besproken.<sup>27</sup> Ook werden mogelijke oorzaken van de achteruitgang van het aantal abonnees genoemd. Sommige argumenten die gegeven werden, lijken ad hoc. Aan het eind van dit artikel wordt in een afzonderlijke paragraaf geprobeerd een analyse te geven van oorzaken van stijging en daling van het abonneeaantal.

De Denkertjes werden node gemist. In de hele 18e jaargang stonden inderdaad weinig Denkertjes: tien in totaal. Gedurende vele jaargangen waren dat tien per nummer. Al gedurende de jaren zeventig werden Denkertjes geregeld gekoppeld aan artikelen. Met andere woorden: men

moest eerst een bepaald artikel doorneemen. Vanaf 1975 werden de oplossingen van de Denkertjes steeds achterin elk nummer opgenomen – een ongeduldige lezer kon dus gewoon even spieken.

Jan van de Craats opperde het idee van ‘medewerkers van de redactie’, die voor kopij konden zorgen. Gedurende enige jaren heeft inderdaad een aantal medewerkers de redactie ondersteund.<sup>28</sup> In het colofon werden steeds ongeveer vijf medewerkers genoemd. NOCW-secretaris Joo van Dor-

molen schreef een brief aan verscheidene docenten om toetreding tot de redactie te overwegen.<sup>29</sup> Daarop meldde Hessel Pot zich als medewerker.<sup>30</sup> Jan van de Craats had nog een idee:<sup>31</sup> een Pythagoras Olympiade, naast de landelijke olympiade op de scholen, met drie opgaven per nummer, prijzen per nummer en jaarlijks een laddercompetitie. Met zoveel goede ideeën kon het niet uitblijven: Van de Craats trad toe tot de redactie. Vanaf de jaargang 1979–1980 verschenen in elk nummer drie opgaven in het kader van deze Pythagoras Olympiade. Oplossingen werden later gepubliceerd. De Pythagoras Olympiade, met fraaie opgaven op olympiadeniveau, stimuleerde zeker een belangrijke groep lezers tot activiteit.

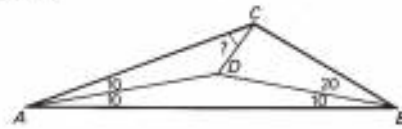
### Redders in de nood

In 1979 bedankte De Rijk als redactiesecretaris.<sup>32</sup> Hij moest om gezondheidsredenen het primaat van zijn werkzaamheden leggen bij zijn lessen. Hij bleef wel redactielid. Redactie, NOCW, uitgever en medewerkers vergaderden eind september in Utrecht over de ontstane situatie. Freudenthal memoreerde de betekenis van De Rijk. Soeteman van Wolters-Noordhoff stelde een splitsing voor van de functies hoofdredacteur en eindredacteur.<sup>33</sup> Pot, daartoe uitgenodigd door Freudenthal, nam voorlopig het redactiesecretariaat waar en trad daarmee toe tot de redactie.



**Figuur 8** Hessel Pot in 2010.

PO 19. Gegeven is een driehoek  $ABC$  en een punt  $D$  erbinnen zo, dat  $\angle CAD = \angle DAB = \angle ABD = 10^\circ$  en  $\angle DBC = 20^\circ$ . Bereken  $\angle ACD$ .



Figuur 9 Opgave uit de Pythagoras Olympiade, in Pythagoras 20-2 (november 1980).

Met de komst van Pot en Van de Craats was de rust enigszins weergekeerd. De redactie bestond nu uit zes leden. De kwaliteit van het blad was hoog, werd in het jaarverslag van de NOCW gemeld.<sup>34</sup> Eind 1980 werd Pot formeel benoemd tot eindredacteur en redactiesecretaris.<sup>35</sup> Aangezien Guus Vonk uit de redactie trad werd weer versterking gezocht. Vonk werkte bij het IOWO, dat per 1 januari 1981 zou worden opgeheven.<sup>36</sup> Hij leidde daar het Onderwijs Computercentrum. Door de opheffing van het IOWO verwachtte hij meer tijd nodig te hebben voor zijn werk. In Pythagoras had hij twaalf jaar lang bijdragen geschreven, vaak over rekenmachientjes en algoritmen.<sup>37</sup>

In april 1981 schreven de redacteuren Mulder en Van de Craats aan Pot.<sup>38</sup> Mulder vond het niet motiverend dat zijn stukjes nogal eens werden veranderd. Van de Craats dacht dat zijn stukjes wellicht te moeilijk waren. Hij wilde zich op de Pythagoras Olympiade concentreren.

Redactiemedewerker Martinus van Hoorn zag de neergang van Pythagoras en schreef een uitgebreide analyse met suggesties tot verbetering aan Pot; de kern daarvan was dat de artikelen in Pythagoras vaak aan de lange kant waren en weinig te raden overlieten aan de lezers. De lezers zouden te zeer consument worden, in plaats van te worden gestimuleerd tot creatief meedenken. Pot schreef op deze brief: 'twijfels'.<sup>39</sup>

Vanaf de 21e jaargang (1981–1982) vermeldde het colofon ook een adres in België. Het ging om de vestiging van Wolters-Noordhoff in Leuven. Van daaruit werd Pythagoras verspreid naar scholen in Vlaanderen. Er waren toen ongeveer 700 Vlaamse scholieren abonnee. Dit aantal Vlaamse abonnees was er al vanaf 1974.<sup>40</sup> Misschien was de vermelding van het adres in Leuven dus alleen een organisatorische aangelegenheid. Maar wel was de verspreiding naar Vlaamse leerlingen belangrijk; deze is daarna blijven bestaan.

Eind 1981 bleek dat Pot in enkele jaren teveel van zichzelf had geëist. 'Het gaat

niet meer', schreef hij.<sup>41</sup> Hij meldde bovendien dat er onvoldoende kopij was. Hij zou het tweede en derde nummer van de lopende jaargang nog afronden. Drie oproepen om nieuwe redacteuren te werven hadden niets opgeleverd. De intensiteit van Pots inspanningen blijkt uit zijn archief, dat hij aan de schrijvers van dit artikel ter hand stelde. Voor elk nummer van Pythagoras in die jaren is er een zeer uitgebreid dossier. Daarnaast hield Pot zijn correspondentie bij met buitenlandse zusterbladen. Ten slotte hebben de schrijvers van dit artikel kunnen putten uit zijn correspondentie met NOCW, overige redactieleden en uitgever, die door hem ook zorgvuldig werd bijgehouden. Pot was gedurende de jaren 1979–1981 zeker een redder in nood voor Pythagoras. Hij bleef vanaf 1981 wel redactielid.

Pot had voordat hij terugtrad als redactiesecretaris enkele vragen voor leraren naar Euclides gestuurd, die daarin in maart 1982 verschenen. Naar aanleiding hiervan schreef Ed de Moor een epistel met zijn ideeën omtrent Pythagoras (zie Figuur 10).<sup>42</sup>

Begin 1982 besprak de NOCW de situatie.<sup>43</sup> Pot werd geprezen om zijn uitstekende werk. Maar het was voor hem meer dan een halve baan geweest. Dat kon niet naast zijn andere werk. De Rijk, evenals Pot aanwezig, schetste Pythagoras, ondanks

alles, als een gezond en sterk blad. In een notitie van Soeteman van Wolters-Noordhoff stond dat het blad alleen voor freaks en puzzelaars was, dat helaas de verloren bleven (deze bedroegen wel f50.000), terwijl de redactie er niet in slaagde elke keer tijdig kopij aan te leveren.<sup>44</sup> Er was bij de laatste twee nummers zelfs tien weken vertraging. Wolters-Noordhoff deed daarom het rigoureuze voorstel een jaar met Pythagoras te stoppen. Gedurende de komende, 22e jaargang wilde De Rijk het hoofdredacteurschap (c.q. redactiesecretariaat) wel op zich nemen.

De verschijningsachterstanden hadden te maken met kopijgebrek, maar misschien ook met de wisselingen in de redactie. Het aanleveren van zetklare kopij was — zeker toentertijd — geen geringe klus, waarbij ook een geregelde communicatie met de uitgever noodzakelijk was. De onregelmatige verschijning was de abonnees natuurlijk niet ontgaan. Een school uit Nijverdal verwoordde zijn ongenoegen over de vertragingen in een brief.<sup>45</sup>

Het plan de uitgave een jaar stil te leggen verdween van tafel, maar Wolters-Noordhoff wilde nu overgaan naar vier nummers per jaar, die dan op een groter formaat, en in een opener opmaak, zouden worden uitgebracht.<sup>46</sup> Aldus waren er minder deadlines gedurende een jaargang, en werd de opmaak eenvoudiger. Bovendien werd het aantal bladzijden gehalveerd, waardoor minder kopij nodig was. De redactie was tegen vermindering van het aantal nummers.<sup>47</sup> Maar dit werd vanaf jaargang 22 (1982–1983) toch doorgevoerd. Deze verandering, die dus feitelijk een vermindering was, leidde tot een

Er zouden wellicht meer korte, eenvoudige, doch pakkende zaken tussen moeten.  
(Voorbeeld: Wat is het maximale aantal paarden, dat je op een schaakbord kunt plaatsen zodat ze elkaar niet bedreigen. Het daarbij op de schoonheid van het bewijs (zwart-wit).)  
Als ze een paar van dat soort zaken tussen zitten, dan vang je die ESAVO lezing ook wel.  
Ontvangers van JENGD-SCHAAK kijken vaak alleen maar naar de schaakprobleempjes achter op.

Figuur 10 Fragment brief Ed de Moor, 24-2-1982. Zijn suggestie ten aanzien van mavoleerlingen leek optimistisch.

schriftelijk bezwaar van een opletende lezer, die opmerkte dat hij voor dezelfde abonnementsprijs nu de helft minder aan inhoud kreeg.<sup>48</sup>

Eind 1982 werd in een extra NOCW-vergadering een notitie besproken met als titel 'De toekomst van Pythagoras'. De doelgroep moest verbreed worden, en de omvang van het blad moest structureel kleiner blijven vanwege het chronische tekort aan kopij.<sup>49</sup> Met de 23e jaargang kwam er met Leo Wiegerink, Luc Kuijk en Klaas Lakeman de nodige redactionele versterking. Zij waren de nieuwe redders in nood. Wiegerink voerde het redactiesecretariaat gedurende de 23e en de 24e jaargang.

### Wolters-Noordhoff doet een laatste poging

Bij Wolters-Noordhoff was de begeleiding van Pythagoras overgenomen door Nol van 't Riet. Het aantal abonnees was gezakt tot 9.000. Er werd nog een uiterste poging gedaan om de zaak weer op de rails te krijgen, met een rechtstreekse betaling van de redactiesecretaris en de eindredacteur, en een onkostenvergoeding voor de andere redactieleden. Wolters-Noordhoff nam feitelijk Pythagoras over en de NOCW werd adviseur. Van het eerste nummer van de 24e jaargang (1984–1985) gingen maar liefst 40.000 exemplaren als wervingsmateriaal naar de scholen. Maar dit leidde niet tot een stijging van het aantal abonnees. Er was duidelijk structureel iets mis.

De Stichting Jeugd en Wiskunde leidde intussen een sluimerend bestaan; van het doorsluizen van vergoedingen aan redactieleden was immers geen sprake meer. Deze stichting hief zichzelf begin 1985 op.<sup>50</sup> Omdat de problemen niet opgelost waren, en vooral omdat het aantal abonnees bleef dalen, meende Wolters-Noordhoff te moeten stoppen met de uitgave. Bij brief van 16 januari 1985 maakte Wolters-Noordhoff dit aan de NOCW bekend. Het aantal abonnees was gedaald tot onder de 5.000; daar zouden in de loop van het schooljaar nog wel wat bijkomen, maar het eerdere minimum van 9.000 zou niet meer gehaald worden. Lakeman voerde al overleg met een mogelijke nieuwe drukker.<sup>51</sup> Wolters-Noordhoff stopte tegelijk ook met de uitgave van Archimedes. In *NRC Handelsblad* verscheen een artikel onder de kop 'Einde schooltijdschriften Pythagoras en Archimedes'.<sup>52</sup> Hoewel het natuurkunde-, scheikunde- en sterrenkundetijdschrift



Figuur 11 Hans Freudenthal in 1983.

Foto: Konrad Jacobs, Mathematisches Forschungsinstitut Oberwolfach

Archimedes medio jaren zeventig enige tijd méér abonnees had dan Pythagoras, waren beide tijdschriften in hetzelfde schuitje beland. Een fusie van beide lag niet voor de hand. Van 't Riet meldde namens Wolters-Noordhoff een verlies van enkele tienduizenden gulden over 1984. Verscheidene betrokkenen zochten, zoals ook eerder, naar verklaringen voor de neergang. Zie de hieraan gewijde paragraaf aan het eind van dit artikel.

In hetzelfde jaar, 1985, kwam er een doorstart van Pythagoras en Archimedes. Er werd een nieuwe stichting opgericht: de Stichting Christiaan Huygens, met als hoofddoel Pythagoras en Archimedes uit te geven. In het bestuur namen zitting: J.A.F. de Rijk, ir. H.A.C. (Henk) Huijsmans, drs. N.T.M. Lakeman, ir. H.M. Mulder en drs. H.N. Pot.<sup>53</sup> Huijsmans kwam van Archimedes en zou ook voor Pythagoras nog een voorname rol gaan spelen.

De toekomst zag er door deze ontwikkeling beter uit. Wolters-Noordhoff deed beide tijdschriften over aan de Stichting IVIO te Lelystad. Opnieuw werd het nieuws bekendgemaakt in *NRC Handelsblad*: 'Pythagoras en Archimedes komen weer terug'.<sup>54</sup> De Stichting IVIO (Instituut voor Individuele Ontwikkeling) was bekend als uitgever van de populaire AO-boekjes. Directeur van het IVIO was Andries Greiner, die van Dio Soeteman van Wolters-Noordhoff vernomen had dat Pythagoras en Archimedes in de etalage stonden. Hij mocht de bladen gratis overnemen.<sup>55</sup>

Freudenthal maakte bekend na 24 jaar te stoppen met het adviseren van de redactie. Dat was, stelde de NOCW, ook niet meer nodig, omdat de kwaliteit van de kopij goed was.<sup>56</sup> De invloed van Freudenthal is in al die jaren groot geweest. Vrijwel alle artikelen passeerden zijn bureau. Bijna altijd gaf hij zijn (soms summiere) commentaar. Als eens niet alles hem gepasseerd had, kon hij daarover een pinnig briefje schrijven aan de redactie. Er zijn in Freudenthals archief veel kleine briefjes terug te vinden die over kopij voor Pythagoras gaan. Vaak betrof zo'n briefje alleen zijn goedkeuring van een artikel. Het is uitermate bewonderenswaardig dat Freudenthal, die op vele terreinen actief was, de moeite nam het tijdschrift Pythagoras 24 jaar lang nauwgezet te volgen en van advies te voorzien. Nog in de laatste jaren had hij meerdere redactievergaderingen bijgewoond.<sup>57</sup> Maar nu, in zijn tachtigste levensjaar, zette hij een punt achter dit enorme werk.

Pythagoras verscheen met ingang van de 25e jaargang op het formaat van de AO-boekjes. De redactie was inmiddels terug naar vier leden.<sup>58</sup> Klaas Lakeman deed het redactiesecretariaat. Daarmee brak voor Pythagoras een nieuwe periode aan, waarover het derde artikel in dit drieluik gaat.

De jaren tot de overname in 1985 waren uitermate moeilijk geweest. Redactie, NOCW en uitgever hadden zich meerdere keren gebogen over de toekomst van Pythagoras. Maar uiteindelijk scheen de neergang onstuitbaar.

Wolters-Noordhoff nam op waardige wijze afscheid van Pythagoras. De uitgever bewerkstelligde dat — na instemming door de redactie van Euclides — een geheel nummer van Euclides werd gewijd aan de 24 voorbije jaren van het blad Pythagoras. Dit Pythagoras-nummer werd samengesteld door Klaas Lakeman.<sup>59</sup>

### Oorzaken van de opgang en neergang

Geregeld werden mogelijke oorzaken genoemd van daling van het aantal abonnees. Over de oorzaken van stijging ging het minder vaak. Wij proberen hier enig zicht op de oorzaken van stijging en daling te krijgen. Daarbij is het goed te beseffen dat veruit de meeste abonnees werden geteld onder scholieren — voor wie het blad bestemd was. Elk jaar ging er vanuit Wolters-Noordhoff een brief naar de vaksecties wis-

|       |                                   |
|-------|-----------------------------------|
| 117 x | Hearts v Veldenscoll., Baastricht |
| 60 x  | Chr. St. Aellen                   |
| 45 x  | Sevius Lyceum, Doorn              |
| 41 x  | St. Dorvise, Bittard              |
| 41 x  | St. Janscollege, Bommesteek       |
| 40 x  | Bischoffs. College, Bittard       |
| 36 x  | Philips v Nieuw St., Weert        |
| 36 x  | Gemeenschapsschool, Binnings      |
| 45 x  | Sted. Gymn., Schiedam             |
| 34 x  | Jansen Boeckscoll., Den Bosch     |
| 34 x  | Erasmians Gymn., Rotterdam        |
| 33 x  | Kottenpark College, Breda         |
| 33 x  | Sorrens Lyceum, Breda             |
| 33 x  | St. Michael St., Gelsen           |
| 30 x  | Dr. Schaapman College, Dongen     |
| 30 x  | Guido de Brer St., Rotterdam      |
| 29 x  | St. Nicolaas Lyc., Amsterdam      |
| 29 x  | Grachtendijk HAO, Bontel          |
| 27 x  | Gemeenschapsschool, Breda         |
| 27 x  | Mensen Alting Coll., Breda        |
| 27 x  | Nieuw St., Gelsen                 |
| 25 x  | Therboeck St., Gelsen             |
| 25 x  | Chr. Lyceum, Veenendaal           |
| 25 x  | Chr. Lyceum, Zeist                |

Het jaer dus 1985!

**Figuur 12** De scholen die begin 1985 nog 25 of meer abonnementen afnamen, waaronder (zelfs) een havoschool zonder vwo. Met een kreet van de opsteller van dit overzicht. Bron: Wolters-Noordhoff, 28 januari 1985.

kunde, en vervolgens werden door leraren abonnees gewonnen onder de leerlingen. Uitgangspunt was en bleef dat de meeste leraren graag hun betere leerlingen willen laten kennismaken met onderhoudend gebrachte extra stof. Voor de leraren die een bepaald aantal abonnees werven stelde Wolters-Noordhoff een gratis abonnement beschikbaar. Dit staat nergens in het colofon van Pythagoras vermeld, het werd al-

leen opgenomen in de jaarlijkse brief aan de vaksecties wiskunde.<sup>60</sup>

De opstelling van de leraren was dus van doorslaggevend belang. Dit wordt geaccentueerd door het bijgevoegde overzicht van de scholen met relatief veel abonnees, van januari 1985. Er waren toen toch nog zeven scholen met veertig of meer abonnementen, terwijl één school zelfs ruim honderd abonnees telde.<sup>61</sup> De veronderstelling ligt voor de hand dat zulke scholen actieve vaksecties hadden, die met graagte abonnees werven. Ook werd er tussen sommige van deze scholen, zoals die in Zuid-Limburg, mogelijkwerijs over een en ander gecommuniceerd.

De afhankelijkheid van de leraren kan mede verklaren dat na 1980 geen herstel meer optrad; leraren die waren opgehouden met abonneewerving wilden daar vast niet zomaar weer mee beginnen, zolang hun vertrouwen in Pythagoras te gering was. Uiteraard hoeft de leraar niet de enige factor te zijn geweest. De inhoud van het blad zal er eveneens toe hebben gedaan (en uiteraard kon dat de opstelling van leraren beïnvloeden). Zo nu en dan lazen wij

in een brief, of elders, dat de Denkartjes werden gemist. Duidelijk is ook dat sommige lezers graag oplossingen van Denkartjes hadden willen inzenden. Het verlies aan uitdaging door de publicatie van de oplossingen van de Denkartjes achterin hetzelfde nummer, vervolgens ook de teruggang in het aantal Denkartjes, het zijn factoren die meegespeeld zullen hebben. Dit geldt evenzeer voor een verlies aan uitdaging door langere artikelen, die weinig te raden overlieten. Eenvoudig meetbaar is dit allemaal niet.

Maar het lijkt té gemakkelijk om eerst naar externe factoren te wijzen. Bij nader inzien blijkt trouwens dat aan de werking van veel van de soms genoemde externe oorzaken ernstig kan worden getwijfeld.<sup>62</sup>

Een interne factor is de moeilijkheidsgraad van de bijdragen en problemen in Pythagoras. Over de periode tot 1985 kan niet gezegd worden dat alles te moeilijk was voor een grote groep leerlingen. Dat geldt weliswaar voor de Pythagoras Olympiade in vergelijking tot de vroegere Denkartjes, het geldt zeker niet voor alle bijdragen. Ten slotte zal ook een geregeld voorgekomen verschijningsachterstand meespelen. De neergang begin jaren tachtig heeft misschien vooral daarmee te maken. Elke abonnee wil logischerwijze waar voor zijn geld. In hoeverre stijging van de abonnementsprijs heeft meegespeeld durven we niet te zeggen.

Resumerend kan men waarschijnlijk, voor de periode 1961–1985, als belangrijke interne oorzaken voor de stijging en daling van het aantal abonnees aanwijzen:

- de inhoud van het blad, inclusief de uitdaging en de moeilijkheidsgraad,
- de verkregen medewerking van de leraren, en
- de regelmatige verschijning van het blad.

Discussie over deze en andere verklaringen zal altijd wel blijven bestaan. Het is natuurlijk toe te juichen als argumenten opnieuw worden gewogen. ☺

#### Verantwoording

Een eerdere versie van dit artikel is gelezen door J.A.F. de Rijk, A.B. Oosten, D.W. Soeteman, A.A. van 't Riet en H.N. Pot, waarvoor de auteurs hen erkentelijk zijn; ook zijn zij H.N. Pot erkentelijk voor de inzage in zijn uitgebreide Pythagoras-archief. De auteurs zijn de directeur van het PWN erkentelijk voor de inzage in het NOCW-archief.

#### Engelstalige editie

Vanaf september 1968 tot 1971 werd Pythagoras uitgegeven in Engeland, onder de naam *A mathematical magazine for pupil and teacher*, door Fanfare Educational Publishing Co. in Londen. De redactie van deze Engelstalige versie werd gevormd door M. Bruckheimer en D.E. Mansfield. Het ging om vertalingen van Pythagoras-nummers van enkele jaren daarvoor. Het eerste nummer was vrijwel een kopie van het eerste nummer van de 4e jaargang. Uit de jaarverslagen van de NOCW blijkt dat het aantal abonnementen in Engeland in 1968 2.700 was (plus 2.500 losse nummers), in 1969 6.000 en in 1970 5.000.<sup>63</sup> In 1971 werd de Engelstalige uitgave gestaakt. Over de inkomsten die vanuit Engeland naar Wolters-Noordhoff zouden worden overgemaakt, werd uitgebreid gediscussieerd. Men werd het eens over: 40 procent naar de uitgever, 40 procent naar de auteurs, en 20 procent naar de Stichting Jeugd en Wiskunde.<sup>64</sup>

De 'Denkartjes' werden herdoopt in 'Teasers'. Als voorbeeld Teaser 3:

*In a 10 km race, the winner finishes with a lead of 2 km over No. 2, and a lead of 4 km over No. 3. What is the lead of No. 2, when he finishes, over No. 3, assuming that all three have constant speeds?*



**Figuur 13** De Engelse uitgave van Pythagoras.

## Noten

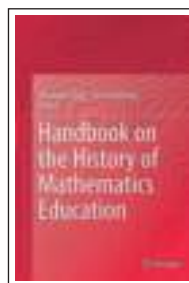
- 1 Het archief van de Nederlandse Onderwijs Commissie voor Wiskunde (NOCW) berust bij het Platform Wiskunde Nederland. Het archief van H. Freudenthal is aanwezig in het Noord-Hollands Archief in Haarlem. Voor het archief van H.N. Pot, voor zover *Pythagoras* betreffend, wordt een bestemming gezocht.
- 2 Archief NOCW, notulen vergadering 5 mei 1967.
- 3 Archief NOCW, brief uitgever Wolters aan NOCW 13 januari 1967.
- 4 Archief NOCW, brief Monna (secretaris NOCW; via diens secretaresse) aan G.A. Vonk met verzoek inzending overzicht besteding boekengeld 27 juni 1969; brief Vonk aan Monna over deze besteding (ongedateerd).
- 5 Archief NOCW, brief NVvW aan NOCW 30 september 1975.
- 6 Archief NOCW, brief Monna aan de redactie van *Pythagoras* 22 april 1969, verwijzend naar een brief van Wolters-Noordhoff aan de NOCW van 11 april 1969.
- 7 Archief NOCW, brief Van der Neut aan de NOCW 28 april 1969.
- 8 Bruno Ernst (redactie), *Pythagoras Festival*, (Wolters-Noordhoff, Groningen 1970).
- 9 [nl.wikipedia.org/wiki/Boom\\_van\\_Pythagoras](https://nl.wikipedia.org/wiki/Boom_van_Pythagoras).
- 10 Archief NOCW, brief Oosten aan de NOCW 26 november 1973.
- 11 Archief NOCW, notulen vergadering 13 februari 1971.
- 12 Archief NOCW, notulen vergadering 29 september 1971.
- 13 Archief NOCW, notulen vergadering 10 februari 1972.
- 14 Archief NOCW, notulen vergadering 5 oktober 1972.
- 15 Archief NOCW, notulen vergadering 22 oktober 1973.
- 16 Na het vertrek van Krooshof was Auke B. Oosten tot de redactie toegetreden, snel gevolgd door H.J. Engels en G.A. Vonk. Met Van Tooren en De Rijk waren er dus vijf leden. In 1970 kwamen A.J. Elsenaar, R.H. Plugge (die 2 jaar bleef) en C. van der Linden (die 1 jaar bleef), terwijl Engels vertrok. In 1973 kwam W. Kleijne bij de redactie, en in 1974 Henk Mulder.
- 17 Archief NOCW, brief Monna aan Van Dormolen 12 december 1973.
- 18 De redactie bestond toen uit A.J. Elsenaar (vanaf 1969), Bruno Ernst (vanaf 1961), W. Kleijne (vanaf 1973), A.B. Oosten (vanaf 1966), A.F. van Tooren (vanaf 1963), G.A. Vonk (vanaf 1968).
- 19 Archief NOCW, brief Monna aan NOCW 17 januari 1974.
- 20 Onder meer: Archief NOCW, Verslag redactie *Pythagoras* over de 9e jaargang (1969–1970): “De Denkertjes werden geheel verzorgd door Van Tooren.”
- 21 Lezing J. van de Craats voor de Werkgroep Geschiedenis van het Reken- en Wiskunde-onderwijs van de Nederlandse Vereniging van Wiskundeleraren, 17 september 2016.
- 22 Persoonlijk archief M.C. van Hoorn, inlegvel bij *Pythagoras* 14-4 (april 1975).
- 23 *Pythagoras* 17-1 en 17-5.
- 24 Archief NOCW, memorandum Soeteman 2 december 1977.
- 25 Archief NOCW, discussiestuk Hans de Rijk 5 december 1978.
- 26 Archief NOCW, notulen vergadering 13 februari 1979.
- 27 Archief NOCW, verslag van de gezamenlijke vergadering op 9 maart 1979.
- 28 Archief NOCW, brief Van Dormolen aan De Rijk 29 juni 1979. In deze brief werden vijf medewerkers genoemd, te weten D.K. Wielenga, M.C. van Hoorn, W. Ganzevoort, W. Pijs en H.N. Pot.
- 29 Archief H.N. Pot, brief Van Dormolen aan Pot 15 juni 1979.
- 30 Archief H.N. Pot, brief Van Dormolen aan Pot 24 augustus 1979.
- 31 Archief NOCW, brief Van de Craats aan De Rijk 4 april 1979.
- 32 Archief NOCW, brief De Rijk aan NOCW 9-8-1979. De functienaam ‘redactiesecretaris’ werd jarenlang veel gebruikt, maar soms werd de naam ‘hoofdredacteur’ gebezigd voor blijkbaar dezelfde functie.
- 33 Archief NOCW, notulen vergadering 25 september 1979.
- 34 Archief NOCW, Jaarverslag NOCW 1979.
- 35 Archief NOCW, notulen vergadering 31 oktober 1980.
- 36 IOWO = Instituut voor de Ontwikkeling van het Wiskunde Onderwijs te Utrecht. Tot 1975 was Freudenthal hoogleraar-directeur van het IOWO; na hem kwam F. van der Blij. Na de opheffing vond een doorstart plaats op kleinere schaal, waarin ook het Onderwijs Computercentrum een plaats kreeg.
- 37 Archief NOCW, Jaarverslag NOCW 1980. Vonk bleef wel medewerker. Archief H.N. Pot, brief Vonk aan medewerkers *Pythagoras* 2 juni 1980.
- 38 Archief H.N. Pot, brieven Mulder aan Pot 18 april 1981, en Van de Craats aan Pot 22 april 1981.
- 39 Archief H.N. Pot, brief Van Hoorn aan Pot 20 juni 1981.
- 40 Archief H.N. Pot, Abonnementenverloop 1974–1980 (stuk afkomstig van Wolters-Noordhoff) januari 1981.
- 41 Archief H.N. Pot, brief Pot aan de NOCW 30 oktober 1981.
- 42 *Euclides* 57, nummer 7 (maart 1982) 292. Archief H.N. Pot, brief De Moor aan Pot 24 februari 1982. N.B. Kennelijk was het maantnummer van *Euclides* al in februari uitgekomen — óf De Moors datering was onjuist.
- 43 Archief NOCW, notulen vergadering 15 februari 1982.
- 44 Archief NOCW, brief Soeteman aan Kleijne 19 februari 1982. N.B. Indien de aantallen betalende abonnees sterk achterblijven bij de verwachting, kunnen de verliezen hoog oplopen. Dit is met voorbeeldberekeningen eenvoudig te onderbouwen.
- 45 Archief H.N. Pot, brief College Noetsele aan Pot 4 mei 1982.
- 46 Archief H.N. Pot, brief Soeteman aan Pot 13 mei 1981.
- 47 Archief H.N. Pot, notitie en brief Pot aan de NOCW, 14 mei 1981 respectievelijk 12 juni 1981. Pot stelde een forse prijsstijging voor en het inleveren van de onkostenvergoedingen en boekentoelagen van de redactieleden. Maar dit was (ook) te rigouzeus.
- 48 Archief H.N. Pot, brief Menke Ubbens (Sneek) aan Pot, december 1982.
- 49 Archief NOCW, notulen vergadering 5 oktober 1982.
- 50 Archief NOCW, notulen vergadering 30 maart 1984.
- 51 Archief NOCW, notulen vergadering 3 april 1985.
- 52 *NRC Handelsblad* 24 januari 1985.
- 53 Archief H.N. Pot, Statuten Stichting Christiaan Huygens 13 mei 1985.
- 54 *NRC Handelsblad* 31 oktober 1985.
- 55 Telefoongesprek met A. Greiner 26 juli 2017. Telefoongesprek met D.W. Soeteman 28 juli 2017.
- 56 Archief NOCW, notulen vergadering 10 juni 1985.
- 57 Mededeling Luc Kuijk 7 oktober 2017.
- 58 Wiegerink, Kuijk en Mulder vertrokken. Van de Craats, Pot, De Rijk en Lakeman bleven over.
- 59 *Euclides* 61-1 (augustus/september 1985).
- 60 Mededeling A.A. van 't Riet per e-mail 22 november 2017.
- 61 Archief H.N. Pot, Adressenbestand 28 januari 1985 (een stuk van Wolters-Noordhoff).
- 62 Externe factoren die genoemd zijn: daling van het aantal leerlingen per cohort (is te geleidelijk om sterke daling van het aantal abonnees te verklaren), teruggang in keuze voor Wiskunde II eind jaren zeventig (dito), concurrentie door andere bladen (maar toen in 1964 *Archimedes* werd opgericht, bleef de belangstelling voor *Pythagoras* stijgen), de invoering van de Mammoeuwet (deze kon ook positief werken omdat er havo-leerlingen bij kwamen), leraren wilden niet werven voor een commerciële uitgever (maar toen *Pythagoras* al terugloopte kende, maakte *Archimedes* nog flink opgang), economische crises (die zouden soms wel, soms niet van invloed zijn), enzovoort
- 63 Archief NOCW, Jaarverslagen NOCW over 1968, 1969 en 1970.
- 64 Archief NOCW, brief Wolters-Noordhoff aan NOCW 29 augustus 1967.

# Boekbesprekingen

| Book Reviews

Redactie: Hans Cuypers en Hans Sterk

Review Editors NAW - MF 7.092  
 Faculteit Wiskunde & Informatica  
 Technische Universiteit Eindhoven  
 Postbus 513  
 5600 MB Eindhoven  
[reviews@nieuwarchief.nl](mailto:reviews@nieuwarchief.nl)  
[www.win.tue.nl/wgreview](http://www.win.tue.nl/wgreview)



Alexander Karp, Gert Schubring (Eds.)

## **Handbook on the History of Mathematics Education**

Springer, 2014

ix + 634 p., prijs €202,29

ISBN 9781461491552

Dit is het eerste wereldwijde overzichtswerk over de geschiedenis van wiskundeonderwijs, een betrekkelijk nieuw domein van onderzoek. Het boek geeft een impressie van wiskundeonderwijs in verschillende periodes, culturen en landen; in de Inleiding schrijven de redacteurs dat ze zowel streven naar weergave van de huidige stand van zaken van het onderzoek als naar stimulering van nieuw onderzoek. Veel gerenommeerde onderzoekers hebben aan dit boek meegewerkt; de 40 auteurs zijn afkomstig uit 16 verschillende landen, waarbij opvalt dat drie landen samen maar liefst 21 auteurs leveren: de Verenigde Staten (8), Frankrijk (7) en Italië (6). De 29 hoofdstukken zijn gegroepeerd in zes delen, de nummers van de hoofdstukken staan achter de titel. I. History and Methodology of the Field (1–2). II. Mathematics Education in Different Epochs and in Different Regions: Antiquity and the Middle Ages (3–6). III. Mathematics Education in Different Epochs and in Different Regions: Premodern Period (7–9). IV. Mathematics Education in Different Epochs and in Different Regions: Modern Period (10–20). V. History of Teaching Mathematical Subjects in School (21–26). VI. Issues and Processes Across Borders (27–29). De behandeling per hoofdstuk is in een overzichtswerk noodzakelijk beknopt. De referenties aan het eind van elk hoofdstuk vormen echter een goed uitgangspunt voor verdere studie. De focus van de artikelen ligt, voor zover van toepassing, op het pre-universitair onderwijs, dat wil zeggen theoretisch onderwijs tussen lager onderwijs en universitair onderwijs en bij voorkeur gegeven in onderwijsinstellingen. Hier volgt een beknopt overzicht van de delen II–VI.

In de delen II–IV staat het wiskundeonderwijs in verschillende regio's en tijden centraal. Het hoofdstuk over de Oudheid behandelt in vogelvlucht wiskundeonderwijs in Mesopotamië, het Oude Egypte en de Grieks-Romeinse wereld. Vervolgens zijn er hoofdstukken over de Oosterse wereld (voornamelijk China, Japan en India), Europa (West en Oost) en de Islamitische wereld, tot de zeventiende eeuw. In het deel over de Vroegmoderne tijd is een hoofdstuk over Amerika opgenomen, wiskundeonderwijs in de Islamitische wereld ontbreekt hier. Voor Noord-Amerika bespreekt de auteur wiskundeonderwijs vanaf de kolonisatie door Engelse en Franse settlers. Een van de eerste scholen was door de West-Indische Compagnie in 1628 opgericht in Nieuw Amsterdam (New York); evenals in het moederland gebruikelijk was, stond de school onder toezicht van de Gereformeerde Kerk. Wat betreft Latijns-Amerika is er een paragraaf over wiskundeonderwijs bij de oorspronkelijke bevolking voor de kolonisatie door Europeanen. De auteur richt zich vervolgens op voortgezet onderwijs van de zestiende tot de achttiende eeuw. Voor Europa kozen de twee auteurs weer voor een indeling op grond van religie: West-Europa (rooms-katholiek en protestants) en Oost-Europa (orthodox). Het onderscheid tussen rooms-katholiek en protestants was vooral voor het institutionele onderwijs in de Duitse landen belangrijk,

met ook gevolgen voor het wiskundeonderwijs, denk bijvoorbeeld aan het zeer gestructureerd ontworpen curriculum door de Jezuïeten en het betrekkelijk grote aantal gemeentelijke scholen in protestantse gebieden. Voor wiskundeonderwijs ten behoeve van beroepsbeoefenaren, zoals stuurlied, vestingbouwers, militaire ingenieurs en molenbouwers, zou deze indeling op basis van religie niet zinvol zijn. Echter de geschiedenis van dit wiskundeonderwijs komt niet of nauwelijks ter sprake. Voor de periode vanaf 1800, gekenmerkt door de ontwikkeling van de huidige onderwijsstructuren, zijn er meer hoofdstukken over de geschiedenis van wiskundeonderwijs per land: Europese, Amerikaanse, Aziatische en enkele Afrikaanse landen (benoemd als voormalige Franse, Britse en Portugese koloniën en Zuid-Afrika). Tunesië dient als voorbeeld van de geschiedenis van wiskundeonderwijs in de Islamitische wereld in de moderne tijd. Men heeft geprobeerd alle werelddelen aan de orde te laten komen. Dat was voor Australië kennelijk wat lastig. Voor dit werelddeel is in deel V (History of Teaching Mathematical Subjects in School) toch nog een plek gevonden, in een hoofdstuk over beroepsonderwijs, 'History of teaching vocational mathematics', een wat vreemde eend in de bijt. Het hoofdstuk gaat over de geschiedenis van wiskundeonderwijs in beroepsopleidingen voor 15–19-jarigen in Duitsland en in Australië.

De overige hoofdstukken in deel V behandelen achtereenvolgens de geschiedenis van onderwijs in rekenen, in algebra, in meetkunde en in differentiaal- en integraalrekening en de geschiedenis van onderwijspraktijken. De nadruk bij de behandeling van de wiskundige onderwerpen ligt op de ontwikkelingen in het onderwijs in Frankrijk, Duitsland, Italië en Engeland, andere landen komen soms aan de orde. In het hoofdstuk over de geschiedenis van meetkundeonderwijs noemen de auteurs ook Hans Freudenthal en het echtpaar Van Hiele-Geldof. Niet behandeld worden bijvoorbeeld de geschiedenis van het onderwijs in trigonometrie of statistiek. De geschiedenis van onderwijspraktijken behandelt kennis verwerven, kennis vastleggen en kennis toetsen. In het zesde en laatste deel vinden we enkele onderwerpen die niet in eerdere delen pasten of op het laatste moment toegevoegd zijn: de geschiedenis van internationale samenwerking in het wiskundeonderwijs, een hoofdstuk over de geschiedenis van hulpmiddelen en technologieën in wiskundeonderwijs en als laatste een hoofdstuk over de opleidingen voor leraren wiskunde, vanaf de negentiende eeuw, geschreven door de enige Nederlandse auteur.

Tot slot enkele opmerkingen. Het hier besproken handboek geeft een breed overzicht over de huidige stand van zaken van onderzoek naar de geschiedenis van wiskundeonderwijs over de hele wereld. Dat is waardevol voor onderzoekers, docenten en studenten. Het streven naar een brede dekking is geografisch geslaagd in de zin dat elk werelddeel in minstens één hoofdstuk aan de orde komt. De behandeling is wat onevenwichtig, sommige auteurs schrijven zeer gedetailleerd, anderen nogal globaal. Dat is moeilijk te vermijden bij deze opzet, een positief effect hiervan is de vermindering van monotonie. De focus van beide redacteuren op voortgezet pre-universitair wiskundeonderwijs is potentieel een stevige beperking; gelukkig hebben verscheidene auteurs zich hierdoor niet laten weerhouden om ook iets over andere vormen van wiskundeonderwijs te schrijven. Wiskundeonderwijs is al vele duizenden jaren zeer belangrijk voor de verspreiding van wiskundige kennis. Hoe zou een handboek van de geschiedenis van wiskundeonderwijs eruitzien als we zou-

den uitgaan van vragen zoals: wie kregen wiskundeonderwijs, waarom werd wiskundeonderwijs gegeven, welke wiskunde werd onderwezen, wie waren de wiskundeleraars? In het hier besproken handboek komen deze onderwerpen soms, meestal zijdelings, aan de orde. Voorbeelden zijn de vraag welke onderwerpen uit de wiskunde een moslim het best kon bestuderen om daarmee zijn brood te verdienen (hoofdstuk 5) en de inhoud en vorm van meetkundeonderwijs in scholen voor de lagere sociale klasse in Frankrijk in de negentiende eeuw (hoofdstuk 11). In een dergelijk boek zou voortgezet pre-universitair onderwijs een van de vele vormen van wiskundeonderwijs zijn. Een handboek over de geschiedenis van verspreiding van wiskundige kennis door middel van onderwijs zou een welkome aanvulling zijn. Hier ligt een uitdaging voor Springer of een andere uitgever. Ondanks de genoemde leemtes is dit handboek een rijke bron van informatie en een aanrader voor elke zich zelf respecterende bibliotheek van instellingen voor hoger onderwijs waar wiskunde deel van uitmaakt. Een snelle inspectie van catalogi van Nederlandse universiteiten leert dat de universiteitsbibliotheken in Utrecht, Leiden, Groningen, Enschede, Eindhoven en Amsterdam een exemplaar hebben, als e-boek. In Tilburg, Maastricht, Rotterdam, Delft en Nijmegen ontbreekt het in de bibliotheek, hoewel de beide laatstgenoemde universiteiten een masteropleiding leraar wiskunde aanbieden. Dat is dus een gemis. *Jenneke Krüger*



Roland van der Veen, Jan van de Craats

**The Riemann Hypothesis  
A Million Dollar Problem**

*Anneli Lax New Mathematical Library, vol. 46*

MAA, 2015

144 p., prijs \$45.00

ISBN 9780883856505

This booklet is a translation of the Dutch version published by Epsilon Uitgaven (*De Riemann-hypothese: Een miljoenenprobleem*, Epsilon Uitgaven, deel 69). The present English translation, published by the Mathematical Association of America (MAA) in 2015, soon found its way to success and recently won the Beckenbach Book Prize in 2017. This prize is awarded by the MAA for books that are exemplary in the field of expository mathematics writing for a wide audience.

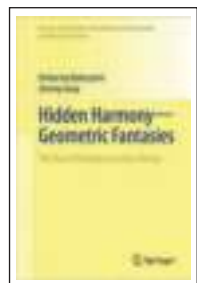
Of course the subtitle 'A Million Dollar Problem' refers to the fact that the Riemann hypothesis occurs on the list of seven Millennium Prize problems with a one million dollar award for a solution of any of them. The Riemann hypothesis is the oldest among them and still unsolved.

The Riemann hypothesis itself concerns the function  $\zeta(s) = \frac{1}{n^s} + \frac{1}{2^s} + \dots + \frac{1}{n^s} + \dots$  of the complex variable  $s$ . Riemann showed in his famous 1859 paper that  $\zeta(s)$  can be continued analytically throughout the complex plane minus 1 and he showed that the distribution properties of the primes are intimately linked to the zeros of  $\zeta(s)$  in the critical strip given by  $0 < \text{Re}(s) < 1$ . Riemann stated that it would be nice to be able to show that all these zeros have real part  $\frac{1}{2}$ . Thus the Riemann hypothesis was born. If true it has many implications in number theory, in particular the theory of the primes.

The book under review arose from the material belonging to a webclass for high school students which was run by the authors at the University of Amsterdam between 2006 and 2010. No other mathematical knowledge beyond high school mathematics is assumed and everything else is explained in the book. In about sixty pages the authors start with Eratosthenes' sieve and the prime counting problem and end with Riemann's formula which connects the prime counting function in an explicit way with the zeros in the critical strip. The nice feature is the presence of many exercises, both during the text and at the end of each chapter in the form of problems that delve a bit deeper. And if one of these problems may be too hard, one can consult the solutions in an appendix to the book. In some exercises of the last chapters the reader is invited to do some explicit computations with  $\zeta(s)$ . For example, evaluate  $\zeta(s)$  at special points, or find a numeric approximation for a zero. The computational tool is website Wolfram Alpha ([www.wolframalpha.com](http://www.wolframalpha.com)) which knows how to do these calculations for you. In this way the reader gets a hands-on experience with  $\zeta(s)$ .

I often meet students who want to know more about Riemann's hypothesis and I always refer them to this excellent introduction. Mathematical colleagues who work far away in a different field may also benefit from reading it. The book makes light reading for mathematicians and a great opportunity to learn about one of the greatest mysteries in mathematics.

Frits Beukers



Umberto Bottazzini, Jeremy Gray

**Hidden Harmony – Geometric Fantasies  
The Rise of Complex Function Theory**

Springer, 2013

xvii + 848 p., prijs €137,79

ISBN 9781461457244

Cauchy (1789–1857) leefde in een roerige tijd waarin de macht in Frankrijk nogal eens wisselde. Hoe de carrière en het werk van Cauchy hierdoor beïnvloed zijn, beschrijven Bottazzini en Gray helder en uitgebreid in *Hidden Harmony – Geometric Fantasies*. Cauchy was vurig katholiek en even vurig royalist. Hij werd (schandaal!) benoemd in de Académie door Louis XVIII in de plaats van Monge die er door Louis om politieke redenen uit werd gezet. Na de revolutie van 1830, die leidde tot het afzetten van Charles X, volgde Cauchy zijn koning in een vrijwillige ballingschap van acht jaar. Dit leidde tot wetenschappelijk isolement, dat mede door zijn politieke standpunten ook na zijn terugkeer in Parijs bleef bestaan. Misschien daarom (mijn interpretatie, de auteurs laten dit soort gepyschologiseer graag aan de lezer over) ontwikkelde Cauchy een enorme publicatiedrift, die leidde tot zijn baanbrekende werk over de fundamenteën van de reële en complex analyse en partiële differentiaalvergelijkingen, maar ook tot te veel onbetekenende artikelen. Ook zijn waardering voor andermans werk was nogal beperkt.

Cauchy speelde een grote rol in de geschiedenis van het artikel van Abel waarin deze zijn stelling over integralen van algebraïsche functies bewees. Abel bood het artikel in 1826 aan de Académie aan, er gebeurde drie jaar niets, Cauchy nam niet de tijd om het te beoordelen. Abel overleed in 1829, Jacobi begon druk uit te oefenen en toen kwam er snel een (oppervlakkig) positief rapport van

Cauchy. Het duurde tot 1840 voor het artikel gepubliceerd werd. De publicatie kwam tot stand onder de verantwoordelijkheid van Libri, die het manuscript achterover drukte. Deze schurkachtige Libri stal een aanzienlijk aantal waardevolle boeken en manuscripten en moest in 1848 Frankrijk ontvluchten. Pas in 1952 werd Abels manuscript grotendeels in Florence teruggevonden tussen Libri's bewaarde stukken. De laatste bladzijden kwamen pas in 2002 terecht.

Ook de geschiedenis van Goursats bewijs van de stelling van Cauchy vind ik opmerkelijk. Je zou denken dat er over het Lemma van Goursat niet veel te doen zou zijn geweest. Niets is minder waar. Goursat gaf zijn eerste bewijs in 1884, Pringsheim had hier onmiddellijk commentaar op, wees op lacunes in het bewijs, en gaf in verschillende artikelen andere bewijzen van de stelling. Op verzoek van Osgood kwam Goursat met een verbeterd bewijs in de eerste aflevering van de *Transactions AMS* in 1900. Ook daarop reageerde Pringsheim met enkele artikelen en in 1903 gaf hij het 'definitieve' bewijs. Het feit dat topologie in die tijd nog nauwelijks bestond, is een van de oorzaken van de langdurige controverse.

*Hidden Harmony – Geometric Fantasies* is een boek over de geschiedenis van de functietheorie. Het is *geen* leerboek functietheorie, sterker nog, behoorlijke kennis van de functietheorie is wel handig om het boek volledig te appreciëren. De auteurs nemen wel degelijk de moeite op belangrijke momenten zaken op een hedendaagse manier uit te leggen, maar dit is niet hun voornaamste doel en maakt de tekst nog niet geschikt om als leerboek te dienen.

Voor zover ik dat kan beoordelen — ik ben geen geschiedkundige — is het boek een geweldige bijdrage aan de geschiedenis van de wiskunde. De auteurs blijven zo dicht mogelijk bij de oorspronkelijke notatie. Dat maakt het volgen van de wiskundige redeneringen lastiger, maar is verre te verkiezen boven het in moderne notatie weergeven van een bewijs, omdat dat bijna onvermijdelijk tot *hineininterpretieren* leidt. Op bescheiden toon, maar met harde argumenten afkomstig uit de talrijke originele bronnen, ondersteunen zij hun interpretaties en conclusies. In het bijzonder geven zij zo aan wanneer en waarom zij met andere wiskundige geschiedschrijvers van mening verschillen.

Een goed voorbeeld (p.102) is hun verschil van mening met F. Smithies' *Cauchy and the Creation of Complex Function Theory* (CUP, 1997), over het inzicht dat Cauchy al in 1814 al dan niet zou hebben in de meetkundige betekenis van zijn stelling.

In de inleiding geven Bottazzini en Gray aan dat dit boek de eerste allesomvattende geschiedenis van de complexe functietheorie beschrijft. Het verbaast me niet dat een werk van deze breedte en diepgang over de opkomst van de complexe analyse niet eerder geschreven is. De auteurs hebben bijkans het onmogelijke gedaan door in een tekst van 759 pagina's het ontstaan en de ontwikkeling van de functietheorie tussen 1790 en 1914 te beschrijven en te analyseren. Om een idee te geven van de ongelooflijke hoeveelheid arbeid die in dit boek zit: er staan 137 publicaties van Cauchy in de bibliografie, en die komen allemaal op een of andere manier inhoudelijk in de tekst terug. De bibliografie zelf beslaat 62 pagina's en de lijst van personen (niet helemaal terecht auteurslijst genoemd, Napoleon en Bismarck staan er ook in) bestaat uit 735 namen. *Iedereen* die in de negentiende eeuw iets met functietheorie gedaan heeft, staat erin!

Iets over de inhoud van dit boek is onontkoombaar. Cauchy, Riemann en Weierstrass worden algemeen als de *founding fathers*

van de functietheorie gezien. Aan hen en hun werk zijn respectievelijk de hoofdstukken 3, 5 en 6 gewijd, waarin hun resultaten, inzichten en levensloop, alsook de interactie met de wiskundige wereld worden behandeld. Legendre, Jacobi, Abel en Gauss en hun werk over elliptische functies vormen een passend begin van het boek, want met elliptische functies werden voor het eerst complexwaardige functies op het complexe vlak bestudeerd.

Hoofdstuk 2 bespreekt de overgang 'van reëel naar imaginair'. We zien daar dat tot in het begin van de negentiende eeuw de meeste wiskundigen (uitzonderingen zijn Euler en Gauss) de complexe getallen vooral als een doos met slimme, maar niet goed begrepen rekentrucs gebruikten om problemen uit de mathematische fysica aan te pakken. Vervolgens zien we Cauchy op het toneel verschijnen, en wordt aandacht besteed aan zijn memoir uit 1814 en zijn *Cours d'Analyse*, waarin de reële analyse voor het eerst rigoureus werd behandeld en een min of meer moderne definitie van continuïteit werd gegeven.

Onderwerp van Hoofdstuk 4 is het werk, van begin tot het midden van de negentiende eeuw, van Abel, Jacobi, Gauss, Hermite en Liouville over elliptische en hyperelliptische integralen. De worsteling met de meerwaardigheid van de integrand, het inverteren van de integralen en het gebruik van thetafuncties om elliptische functies te beschrijven, alsook hun toepassingen in getaltheorie en mathematische fysica, het wordt allemaal besproken.

Hoofdstuk 7 gaat over toepassingen van de functietheorie in andere gebieden van de wiskunde zoals die in de tweede helft van de negentiende eeuw gevonden en ontwikkeld werden. Onderwerpen zijn speciale functies, differentiaalvergelijkingen in het complexe vlak, asymptotische expansies en de zadelpuntmethode, het Dirichletprobleem, conforme afbeeldingen en het drielichamenprobleem. Het gaat om werk van onder meer Kovalevskaya, Schwarz, Gauss, Bonnet en Fuchs.

Meer geavanceerde onderwerpen komen in Hoofdstuk 8: de historie en de moeizame tocht naar het bewijs van de Riemannafbeeldingstelling en de Uniformiseringsstelling worden uitgebreid uit de doeken gedaan. Herman Weyls *Die Idee der Riemannsche Fläche* wordt onder de loep genomen. Hier vinden we ook de grote Franse bijdragen: Goursats bewijs van de stelling van Cauchy, de stelling van Hadamard over gehele functies van eindige orde en hun nulpunten, de priemgetalstelling, de kleine en grote stelling van Picard en de complexe dynamica van Julia en Fatou.

De eerste ontwikkelingen in de theorie van holomorfe functies van meer complexe veranderlijken vormen het onderwerp van Hoofdstuk 9. Weierstrass' analyse van de nulverzamelingen, het niet biholomorf equivalent zijn van bol en polyschijf, de Cousinproblemen (de pogingen tot generalisatie naar meer veranderlijken van de stellingen van Weierstrass en Mittag-Leffler over het bestaan van analytische functies met lokaal voorgeschreven nulpunten-, respectievelijk poolgedrag) en de stellingen van Hartogs over analytische voortzetting. In het laatste hoofdstuk bespreken de auteurs de belangrijkste leerboeken uit de periode, te beginnen bij Briot en Bouquet (1875) en eindigend met Hurwitz-Courant (1922), Bieberbach (I, 1921; II, 1931), Copson (1935), Knopp (1913) en Pincherle (1932). We zien hoe de leerboeken zich in vijftig jaar ontwikkelden van enigszins zoekende, rivaliserende boeken, die zeker niet foutloos waren, tot boeken met min of meer de huidige kanonieke basisinhoud, mogelijk aangevuld met enige speciale voortgezette onderwerpen. De ideeën van Cauchy, Riemann en

Weierstrass zijn dan geïntegreerd en van de rivaliteit tussen hun opvattingen is niets overgebleven.

Geen boek is perfect en in hoofdstuk 9 over meer complexe veranderlijken, staan een paar fouten. In Sectie 9.4.5 lijkt het alsof Reinhardt in navolging van Poincaré bewees dat de sfeer  $|z_1|^2 + |z_2|^2 = 1$  niet holomorf equivalent is met de polyschijf  $|z_1| \leq 1, |z_2| \leq 1$ . Dat is wel waar, maar niet wat Poincaré en Reinhardt bewezen: het gaat natuurlijk om de bol  $|z_1|^2 + |z_2|^2 < 1$  en de polyschijf  $|z_1| < 1, |z_2| < 1$ , zoals ook uit de eerste alinea van dezelfde sectie kan worden opgemaakt. Even verderop in Sectie 9.5 wordt beweerd dat een gebied in  $\mathbb{C}^n$  holomorfegebied is dan en slechts dan als het een *strikt* pseudoconvex gebied is. Het moet zijn: dan en slechts dan als het een pseudoconvex gebied is. Al met al zijn dit kleine onvolkomenheden en is dit een bijzonder waardevol boek voor 'ieder die de functietheorie een warm hart toedraagt'. Vanzelfsprekend geldt dat des te meer voor wie functietheorie of geschiedenis van de wiskunde doceert.

Jan Wiegerinck



Victor J. Katz et al. (Eds.)

### Sourcebook in the Mathematics of Medieval Europe and North Africa

Princeton University Press, 2016

ix + 574 p., prijs \$95.00

ISBN 9780691156859

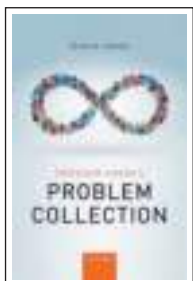
Het millennium van de jaren rond 500 tot ongeveer 1500 is voor velen gehuld in duisternis en donkerte. Zij realiseren zich te weinig dat de essenties van het leven zich onder dezelfde zon en in hetzelfde licht voltrokken als tegenwoordig. Dat de omstandigheden weliswaar verschilden van die van nu, maar dat de drijfveren van de mens dezelfde waren als tegenwoordig. En onder dat gesternte werd ook toen hartstochtelijk wiskunde bedreven. In die duizend jaren was Europa in feite een ontmoetingsplaats van christelijke, joodse en islamitische beschavingen. Geleerden uit vele windstreken trokken heen en weer, schreven hun verhandelingen en studeerden met vakgenoten dat het een lieve lust was. Dus niets nieuws onder de zon, wij doen nog steeds hetzelfde. Ik kan niet nalaten om dat telkens weer naar voren te brengen, met name om de huidige arrogantie van de 21ste-eeuwer wat te temperen. Kort en goed, er is in die middeleeuwse gewesten van Europa en Noord-Afrika heel wat gereisd, gestudeerd en geschreven. Brokstukken van die overvloedige productie zijn weliswaar bekend gebleven, maar ook liggen vele teksten tot op de huidige dag nog onontsloten in diverse archieven van kloosters en bibliotheken. Het is een prijzenswaardig initiatief van de schrijvers om — althans een deel van — die teksten in Engelse vertaling te publiceren. Onder redactie van prof.em. Victor J. Katz, prof.em. Menso Folkerts, prof.em. Barnabas Hughes, prof. Roi Wagner en prof.em. J. Lennart Berggren schreven zij met medewerking van andere geleerden de uitgebreide hoofdstukken van dit boek: 1. The Latin Mathematics of Medieval Europe; 2. Mathematics in Hebrew and Medieval Europe; 3. Mathematics in the Islamic World in Medieval Spain and North Africa. Omvangrijke hoofdstukken met in ieder van die hoofdstuk-

ken een mooi doorlopend historisch verhaal, gelardeerd met in het Engels vertaalde originele middeleeuwse stukken. Niet in hapklare brokken geknipt, maar zo volledig mogelijk gepresenteerd. Kruisverbanden met culturele invloeden worden daarbij veelvuldig gegeven. Verschillende van de Hebreeuwse en Arabische ‘Sources’ verschijnen in dit boek voor het eerst in Engelse vertaling. Het boek biedt op deze wijze een overweldigende rijkdom aan teksten in een samenhangende historische beschouwing met referentie naar moderne deelstudies. In een bespreking als deze is het niet mogelijk om alle onderwerpen te noemen, daarom noem ik slechts één willekeurig gekozen voorbeeld. Ik kies daarvoor de bijdrage over Levi ben Gershon (op p. 253) met betrekking tot zijn *Ma’ase Hoshev, the Art of the Calculator*. Levi ben Gershon (1288–1344), woonde voornamelijk bij Orange in de Provence; hij staat in het Latijn bekend onder de naam Gersonides. Hij schreef over een grote diversiteit van onderwerpen, waarbij de schrijver van dit stuk refereert aan ‘onze’ Freudenthal en naar de tijd waarin de *Ma’ase Hoshev* verscheen. De tekst behandelt 68 theorema’s en problemen over onder andere Combinatoriek, waarbij hij in sommige gevallen een vorm van inductie gebruikt. Deze algemene beschouwing wordt gevolgd door een veertien pagina’s lange vertaling van het oorspronkelijke Hebreeuwse stuk: interessante stof.

Op soortgelijke wijze passeren zeer vele andere onderwerpen de revue, zoals de *conchoïde* (Abner van Burgos), bewijzen van theorema’s van Heron en Ceva (Al-Mu’taman Ibn Hūd), Euclides’ parallellenpostulaat (Muhyī al-Din al-Maghribī) en vele vele andere.

Het boek opent met een algemene inleiding en de talloze deelsecties starten eveneens met algemene inleidingen op het betreffende onderwerp. Een groot aantal (voet)noten en referenties openen wegen naar verdere studie. Het taalgebruik in het boek is zodanig dat het gemakkelijk leest. De gebruikte typografie is zorgvuldig gekozen: Times Roman en Arial, zodat de tekst van de schrijver zich in typografische zin onderscheidt van de vertaalde bronnen. De opgenomen tekeningen zijn prachtig uitgevoerd. Kortom, een geweldig rijk boek, van belang voor historici van ons vak, maar niet alleen voor hen. Ieder die geïnteresseerd is in de bronnen van de pre-moderne wiskunde zal met plezier veel van zijn/haar gading hierin vinden.

Wim Kleijne



Peter M. Higgins

### **Professor Higgins's Problem Collection**

Oxford University Press, 2017

vii + 126 p., prijs €19,99

ISBN 9780198755470

De presentatie van de vijftig in dit boekje door Peter M. Higgins (geboren in Australië en na aldaar en in Californië gewerkt te hebben vanaf 1990 verbonden aan *Essex University* in Colchester, UK) bij elkaar gebrachte problemen (vaak onderverdeeld in meerdere deelproblemen) is wat mij betreft (afgezien van een nogal vreemde notatie van een decimaal getal) boven elke lof verheven. Een kristalhelder en uitermate precies taalgebruik, vaak bekende maar

altijd interessante problemen en een zeer prettige lay-out met als bonus dat de oplossingen telkens direct op de pagina erna (op de achterkant van de pagina met het probleem zelfs) staan. Voor mij (die regelmatig dit soort *problem collections* doorwerkt) is het meestal een crime om telkens elders in zo’n boek naar de oplossingen te moeten zoeken. Het boekje lijkt me vooral heel bruikbaar voor een bevlogen wiskundedocent, zeker als die is gezegend met geïnteresseerde B- en/of D-leerlingen, want het niveau van de problemen loopt van 4 vwo tot eerstejaars universitaire wiskunde. Aan het eind van elk van de vijf secties (Getallen, Algebra, Meetkunde, Kans en Combinaties, en Beweging, met tien problemen per sectie) staan een toepasselijk stukje theorie (wellicht een handige opfrisser voor de docent) en nog een aantal probleem-gerelateerde opmerkingen en tips.

De problemen zijn vaak puur wiskundig van aard (zoals bijvoorbeeld het vinden van de sinus van 36 graden met behulp van de lengte van een diagonaal van een regelmatige vijfhoek) en minder vaak puur recreatief (zoals bijvoorbeeld het beroemde — in 2015 toen het online ging een wereldwijde buzz veroorzakende — *Cheryl’s Birthday Problem*, waar wiskundig, logisch redeneren niet het hoofddoel maar het hulpmiddel was), dus in die zin wijkt het af van de gebruikelijke problem collections (zoals bijvoorbeeld die van de bij de lezer hopelijk meer dan bekende Martin Gardner), maar desondanks een waardevolle aanvulling op mijn uitdijende boekenverzameling op het gebied van de zogenaamde recreatieve wiskunde. Erg nuttig voor ondergetekende (mezelf beschouwend als bevlogen docent) was het om weer eens te lezen hoe je *Newtons ladderprobleem* ook al weer exact kon oplossen zonder al na drie minuten te verzanden in een schier onoplosbare vierdegraadsvergelijking. Ook heel nuttig om een 4 vwo-klas (en de lezer?) wat realiteitszin bij te brengen door na te rekenen hoe klein of toch hoe groot de kans eigenlijk is dat de vier Engelse clubs die zich in 2014 geplaatst hadden bij de laatste zestien van de FA Cup tegen elkaar moesten spelen in de kwartfinales, uiteraard na eerst de leerlingen te hebben gevraagd (of jezelf te hebben afgevraagd) hoe groot zij (of jij) die kans achten. Tot slot uit de — kleine — deelsectie *Logische Puzzels*, als een aardig voorbeeld van hoe je iets kan weten als anderen hebben geconcludeerd dat zij iets niet weten, het volgende mopje: “Drie logici A, B en C gaan een bar in. De barman vraagt ze of ze allemaal wat willen drinken, waarop A zegt dat zij dat niet weet. Vervolgens zegt ook B dat hij dat niet weet. Tot slot antwoordt C bevestigend.”

Joop van der Vaart



Franz Lemmermeyer, Peter Roquette (Hrsg.)

### **Die Briefwechsel Hasse-Scholz-Taussky**

Universitätsverlag Göttingen, 2016

xxii, 574 p., prijs €51,00

ISBN 9783863952532

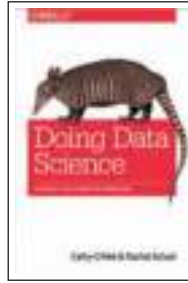
Nadat eerder de briefwisseling tussen Hasse en Emmy Noether en die tussen Hasse en Artin door de auteurs werd verzorgd, is nu door hen de voorhanden zijnde correspondentie tussen Hasse en

Taussky, die tussen Hasse en Scholz en die tussen Scholz en Taussky in boekvorm uitgegeven. De auteurs motiveren in de Inleiding over het belang van hoe en waarom van juist deze drie personen bij elkaar in één band.

Het leven en werk van Arnold Scholz (1904–1942) komt in het boek voor het eerst volledig tot zijn recht. Hij heeft in zijn korte leven heel wat wiskundige concepten bedacht, in artikelen uitgewerkt, maar ook daarbuiten zijn een grote hoeveelheid zaken in brieven vermeld. Een overzicht van de wiskunde en het belang ervan in het tijdsgewricht wordt uit de doeken gedaan in een apart hoofdstuk van 46 bladzijden, van de hand van Lemmermeyer, geheten: ‘Arnold Scholz: Zwischen Mathematik und Politik’. Het voorwoord van het boek rept over dit hoofdstuk als een ‘schets’, doch er is hier sprake van valse bescheidenheid; het is behoorlijk uitvoerig en informatief. Evenzo behandelt Lemmermeyer in 24 bladzijden een ‘schets’ van leven en werk van Olga Taussky (1906–1995). Als trefwoorden in het overzicht over Scholz treffen we bijvoorbeeld aan: klassenlichamentheorie, constructie van getallenlichamen met voorgegeven Galoisgroep, knopentheorie, het roemruchte begrip ‘Abelsche Durchkreuzung’, vertakkingsgroepen. Evenzo bij Taussky: klassenlichamentheorie, de hoofdeideaalstelling, groepsuitbreidingen, Hilberts stelling 94, groepentorens en klassenlichamentorens.

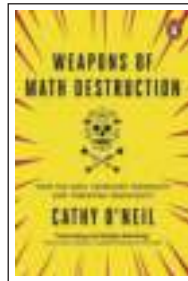
Het behoeft geen betoog dat de wiskundige inhoud van de brieven (verdeeld over zo’n 470 bladzijden) een prachtige inkt geeft in, en een openbaring is van, nu bekende en ook niet-algemeen-bekende ontwikkelingen in de getaltheorie van destijds. Bovendien hebben de auteurs daarbij een redelijke hoeveelheid commentaar opgenomen ten behoeve van het huidige lezerspubliek. Voorts is in het boek opgenomen, Scholz’s ongepubliceerde manuscript ‘Spezielle Körper’. De inhoud had in de *Mathematische Enzyklopädie* terecht moeten komen, maar dat is niet gelukt door de oorlogsomstandigheden en de voortijdige dood van Scholz. De auteurs zijn erin geslaagd, voor het eerst nu in drukvorm, een gedegen uiteenzetting te geven van Scholz’s aantekeningen aangaande: discriminanten, eenheden, ideaalklassen, kwadratische alsmede kubieke en abelse getallenlichamen, lichamen met zeker type van voorgegeven Galoisgroep, inbedding van een gegeven Galoislichaam in lichamen met voorgeschreven ‘Aufspaltungsgruppe’. De auteurs voegen daar nog zes bladzijden met modern commentaar aan toe. De allerlaatste voetnoot in dat commentaar gaat (weer) over de Abelsche Durchkreuzung, met de vermelding dat dit concept telkenmale zijn belang heeft bewezen en nog steeds bewijst, zoals bijvoorbeeld bij het bewijs van de Stelling van Scholz–Reichardt van de hand van Serre (Proposition 2.1.7 in diens *Topics in Galois Theory*, Lecture Notes van Henri Darmon, 1991) en bij elliptische krommen. Trouwens, de techniek van de Abelse Durchkreuzung is door Hilbert gebruikt in diens bewijs van de Stelling van Kronecker–Weber. Ook Tchebotarev kon daarmee zijn Dichtheidstelling bewijzen en Emil Artin gebruikte het bij zijn bewijs van de Reciprociteitsstelling. Een ieder die geïnteresseerd is in de ontwikkelingen van algebra en getallentheorie in Duitsland tot aan zo 1950, kan ik de inhoud van het boek ten sterkste aanbevelen. Tot slot zij de lezer verwezen naar de recensies over de briefwisseling Hasse–Artin van de auteurs (NAW 5/17, 2016, pp. 143–144), idem over de wiskunde-dagboeken van Hasse (NAW 5/15, 2014, p. 147) en idem over de briefwisseling Hasse–Noether (NAW 5/8, 2007, p. 231).

Robert van der Waal



Cathy O'Neil, Rachel Schutt  
**Doing Data Science**  
**Straight Talk from the Frontline**

O'Reilly Media, 2013  
xii + 408 p., prijs €31,51  
ISBN 9781449358655



Cathy O'Neil  
**Weapons of Math Destruction**  
**How Big Data Increases Inequality and Threatens Democracy**

Penguin, 2016  
x + 258 p., prijs €9,99  
ISBN 9780141985411

Cathy O'Neil is haar carrière begonnen als universitair wiskundige op het gebied van de aritmetische algebraïsche meetkunde. Op een gegeven moment heeft zij de overstap gemaakt naar het bedrijfsleven en ging ze als een zogenaamde quant werken in de financiële wereld. Uiteindelijk heeft ze die wereld verlaten uit onvrede over de gang van zaken daar en is ze actief geworden in de Occupy Wall Street beweging. Verder is Cathy O'Neil actief als blogger over wiskunde (mathbabe.org). Met deze achtergrond is zij een interessant persoon om inzicht te verschaffen rondom de vaak gehypte begrippen data science en big data. Deze recensie behandelt twee van haar boeken, die sterk verschillen van elkaar en beide een interessante kijk geven op data science.

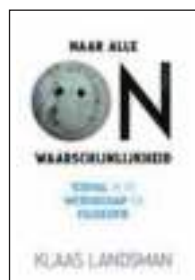
Het boek *Doing Data Science* is gebaseerd op een college ‘Introduction to Data Science’ aan de Columbia University dat destijds gegeven werd door Rachel Schutt. Columbia University is een van de leidende Amerikaanse universiteiten op het gebied van data science met een uitgebreid multidisciplinair Data Science Institute (<http://datascience.columbia.edu>). Het college had een brede doelgroep op het oog waarbij nauwelijks voorkennis op het gebied van wiskunde werd vereist en had als doel studenten voor te bereiden op een baan als data scientist in het bedrijfsleven. Het college werd daarom opgezet als een reeks gastcolleges met sprekers vanuit het bedrijfsleven, die elk een specifieke case uit hun bedrijf behandelden. Het boek vult dit aan door op een praktische manier met een minimum aan wiskundige details uit te leggen wat de gebruikte technieken doen maar vooral ook waarvoor ze gebruikt dienen te worden. De behandelde onderwerpen bevatten geheel in de traditie van data science niet alleen onderwerpen uit de statistiek en data-mining zoals lineaire regressie, logistische regressie en principale componenten analyse,  $k$ -nearest neighbours, random forests enzo-voort, maar ook praktische zaken als het voorbereiden van data, visualiseren van data en opslaan en het bewerken van grote databestanden met bijvoorbeeld Hadoop en MapReduce. Verder komen er nog allerlei andere actuele wiskundige onderwerpen voorbij zoals random grafen, MCMC simulatietechnieken en causaliteit. Hoewel het college inmiddels niet meer in deze vorm schijnt te bestaan, zijn alle data sets en R-code nog via de website van de uitgever beschikbaar ([https://github.com/oreillymedia/doing\\_data\\_science](https://github.com/oreillymedia/doing_data_science)).

Zoals eerder gezegd richt het boek zich niet op wiskundigen en zal men dus tevergeefs naar wiskundige details zoeken. Als men wiskundige details wil zien zonder te veel technische details kan men beter andere boeken raadplegen zoals bijvoorbeeld *Computer Age Statistical Inference* van Efron en Hastie. Ook gaan de bespiegelende delen over wat data science is niet heel diep en kan men over details van sommige statistische zaken van mening verschillen met de auteurs. Het boek geeft ondanks dit alles een inspirerend beeld over wat er allemaal komt kijken bij data science, en het is een verademing dat, in tegenstelling tot veel andere boeken over dit onderwerp, de auteurs een stevige wiskundige achtergrond hebben. Ten slotte wordt er in het boek ook enige aandacht besteed aan ethische aspecten van data science. Die ethische aspecten komen naar voren bij toepassingen van data science in het dagelijkse leven zoals het verkrijgen van hypotheeken van een bank of sollicitatieprocedures. Dit thema is het onderwerp van het tweede boek. Hoewel ik als wiskundige niet helemaal gelukkig ben met de woordspeling in de titel (veel van de algoritmen waar het om gaat zijn niet specifiek wiskundig en dit geeft wiskunde ten onrechte een slechte reputatie), geven de specifieke voorbeelden die genoemd worden in de verschillende hoofdstukken een onthutsend beeld van het gebruik van niet-transparante algoritmen die voor individuen grote gevolgen hebben. O'Neil heeft dit thema (met name het verkeerde of slordige gebruik van wiskunde) al voor het verschijnen van het boek uitgebreid behandeld in bovengenoemde blog. Persoonlijk vond ik het voorbeeld van het gebruik van algoritmen om onderwijzers op basisscholen in de stad Washington te beoordelen schokkend. Het begon met een op zich goed bedoelde actie van de burgemeester van Washington om de kwaliteit van het basisonderwijs te verbeteren. De uitvoering via een geautomatiseerde analyse van toetsresultaten van leerlingen leidde echter tot ontslag van uitstekende leerkrachten die de pech hadden in achterstandsbuurten te werken. Protesten van zulke leerkrachten

werden niet ontvankelijk verklaard en de redenen van het ontslag werden ook niet anders onderbouwd dan door te zeggen dat een (niet-transparant) algoritme aangaf dat de betrokken leerkrachten ondermaats waren. Vergelijkbare verhalen in andere situaties zoals afwijzingen van kandidaten bij sollicitatieprocedures, weigeringen van hypotheeken of vaststellen van verzekeringspremies worden uitvoerig beschreven. Het hoofdstuk over Facebook is op het moment dat ik deze recensie schrijf (april 2018) uiterst actueel geworden door de rel over het lekken van Facebook-gegevens aan Cambridge Analytica. Hoewel O'Neil terecht de grote gevaren voor de samenleving van big data beschrijft en het goed is dat het grote publiek zich hiervan bewust wordt, schetst ze toch wel een enigszins eenzijdig beeld. Ik zou het persoonlijk passend hebben gevonden als in het laatste hoofdstuk aandacht besteed zou zijn aan pogingen in de academische wereld om tegenwicht te bieden. Ik denk hierbij aan de FAIR-principes van data management (FAIR staat voor vindbaar (Findable), toegankelijk (Accessible), interoperabel (Interoperable), en herbruikbaar (Reusable)) zoals beschreven door Wilkinson en anderen (waaronder de nodige Nederlanders). In dezelfde lijn en nog relevanter is de recente opgang van 'responsible predictive analytics'. Tenslotte zien we dit ook terug in onze nationale wetenschapsagenda, in het bijzonder in de titel van de route die betrekking heeft op data science: *Waardecreatie door verantwoorde toegang tot en gebruik van big data*.

Beide boeken zijn vlot geschreven en geven ieder op hun eigen manier een interessante en leerzame kijk op de ontwikkelingen rond data science. Het eerste boek is niet geschikt als leerboek voor een vak dat voor wiskundestudenten bedoeld is, maar het kan voor docenten wel een inspiratiebron zijn door de vele echte toepassingen die behandeld worden. Het tweede boek belicht op heldere wijze de ethische aspecten van data science. Ik zou graag zien dat studenten dit boek lezen en zich hierdoor bewust worden van de vele aspecten van data science. *Alessandro Di Bucchianico*

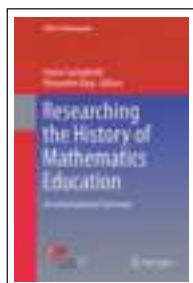
*Recent verschenen publicaties. Als u een van deze boeken wilt bespreken of als u suggesties heeft voor andere boeken voor deze rubriek, laat dit dan per e-mail weten aan [reviews@nieuwarchief.nl](mailto:reviews@nieuwarchief.nl).*



Klaas Landsman  
**Naar alle onwaarschijnlijkheid**  
 Toeval in de wetenschap en filosofie  
 Prometheus, 2018  
 ISBN 9789044636321  
[webwinkel.uitgeverijprometheus.nl/book/klaas-landsman](http://webwinkel.uitgeverijprometheus.nl/book/klaas-landsman)



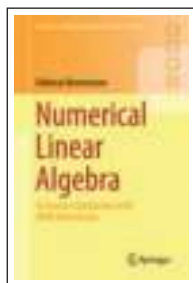
Henk Tijms  
**Probability: A Lively Introduction**  
 Cambridge University Press, 2017  
 ISBN 9781108407847  
[cambridge.org/9781108407847](http://cambridge.org/9781108407847)



Fulvia Furinghetti, Alexander Karp (Eds.)  
**Researching the History of Mathematics Education**  
 An International Overview  
 Springer, 2018  
 ISBN 9783319682945  
[springer.com/9783319682945](http://springer.com/9783319682945)



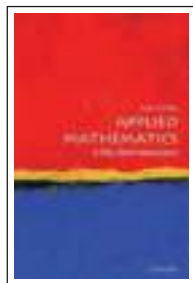
Thomas Sonar  
**The History of the Priority Dispute between Newton and Leibniz**  
 Mathematics in History and Culture  
 Springer, 2018  
 ISBN 9783319725635  
[springer.com/9783319725611](http://springer.com/9783319725611)



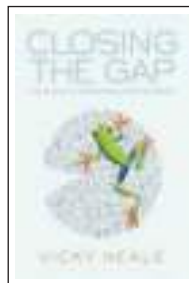
Folkmar Bornemann  
**Numerical Linear Algebra**  
 A Concise Introduction with MATLAB and Julia  
 Springer, 2018  
 ISBN 9783319742229  
[springer.com/9783319742229](http://springer.com/9783319742229)



John MacCormick  
**What can be computed?**  
 A Practical Guide to the Theory of Computation  
 Princeton University Press, 2018  
 ISBN 9781400889846  
[press.princeton.edu/titles/11348.html](http://press.princeton.edu/titles/11348.html)



Alain Goriely  
**Applied Mathematics**  
 A Very Short Introduction  
 Oxford University Press, 2018  
 ISBN 9780198754046  
[oup.com/academic/product/9780198754046](http://oup.com/academic/product/9780198754046)



Vicky Neale  
**Closing the Gap**  
 The Quest to Understand Prime Numbers  
 Oxford University Press, 2017  
 ISBN 9780198788287  
[oup.com/academic/product/9780198788287](http://oup.com/academic/product/9780198788287)



Alex van den Brandhof  
**Priemwoestijnen**  
 Hoogtepunten uit de wiskunde van de 21e eeuw  
 Prometheus, 2018  
 ISBN 978904463683  
[webwinkel.uitgeverijprometheus.nl/book/alex-van-den-brandhof](http://webwinkel.uitgeverijprometheus.nl/book/alex-van-den-brandhof)



Yann Bugeaud  
**Linear Forms in Logarithms and Applications**  
 European Mathematical Society, 2018  
 ISBN 9783037191835  
[ems-ph.org/books/book.php?proj\\_nr=228](http://ems-ph.org/books/book.php?proj_nr=228)



James W. Cannon  
**Topology as Fluid Geometry**  
 American Mathematical Society, 2017  
 ISBN 9781470437152  
[bookstore.ams.org/mbk-109](http://bookstore.ams.org/mbk-109)



Benjamin Hutz  
**An Experimental Introduction to Number Theory**  
 American Mathematical Society, 2018  
 ISBN 9781470430979  
[bookstore.ams.org/amstext-31](http://bookstore.ams.org/amstext-31)

# Problemen

## | Problem Section

This Problem Section is open to everyone; everybody is encouraged to send in solutions and propose problems. Group contributions are welcome. For each problem, the most elegant correct solution will be rewarded with a book token worth €20. (To compete for the book token you should have a postal address in The Netherlands.)

Please send your submission by e-mail (LaTeX is preferred), including your name and address to [problems@nieuwarchief.nl](mailto:problems@nieuwarchief.nl).

The deadline for solutions to the problems in this edition is 1 September 2018.

---

### Problem A

Let  $n > 2$  be an odd integer and let  $C$  be an embedding of the circle in  $\mathbb{R}^n$ . That is,  $C = f([0, 1])$ , where  $f : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}^n$  is continuous,  $f(0) = f(1)$ , and  $f$  is injective on  $[0, 1)$ . Show that there is an affine hyperplane in  $\mathbb{R}^n$  that contains at least  $n + 1$  points from  $C$ .

---

### Problem B

Place coins on the vertices of the lattice  $\mathbb{Z}^2$ , all showing heads. You are allowed to flip coins in sets of three at positions  $(m, n)$ ,  $(m, n + 1)$  and  $(m + 1, n)$  where  $m$  and  $n$  can be chosen arbitrarily. Is it possible to achieve a position where two coins are showing tails and all others show heads using finitely many moves?

---

### Problem C

Say that a natural number is  $k$ -repetitive if its decimal expansion is a concatenation of  $k$  equal blocks. For instance, 1010 is 2-repetitive and 666 is 3-repetitive. Let  $R_k$  be the set of all  $k$ -repetitive numbers. Determine its greatest common divisor.

---

**Edition 2017-4** We received solutions from Math Dicker (Hoensbroek), Hendrik Reuvers (Maastricht) and Sep Thijssen (Lent). The book tokens go to Hendrik Reuvers for problem A and Math Dicker for problem C.

---

### Problem 2017-4/A

Consider two identical bags of stones, all having integral weights. No two weights in a bag are the same. Suppose that the stones from these two bags are divided into proper subsets of equal cardinality and equal total weight. No two weights in a subset are the same. Is it then possible to readjust this division such that each subset contains stones from the same bag?

**Solution** Solved by Hendrik Reuvers and Sep Thijssen in the same way. No, this is not always possible. If one bag has weights  $\{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$  and the other bag has weights  $\{1', 2', 3', 4', 5', 6'\}$  then it is possible to divide the weights into

$$\{1, 3, 4, 6\}, \{2', 3', 4', 5'\}, \{2, 5, 1', 6'\}$$

Clearly, this division cannot be readjusted such that each subset contains stones of the same color, since six is not divisible by four. This solves the problem.

However, it is possible to divide the bag  $\{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$  into subsets of equal weight and cardinality in another way, namely  $\{1, 6\}, \{2, 5\}, \{3, 4\}$ . The NAW problem section is understaffed and overworked and runs the risk of coming to a full stop. This is why problems are not always stated accurately. The problem gets harder if we alter the last sentence: is it then possible to divide each single bag into proper subsets of equal weight? Again, it turns out that this is not always possible, but the simplest example that we know has cardinality fifteen.

**Problem 2017-4/B**

Let  $H_1, \dots, H_k$  be  $k$  planes in  $\mathbb{R}^3$ . Prove that the unit ball contains an open ball of radius  $\frac{1}{k+1}$  which does not intersect any of the planes.

**Solution** We need to find a point  $p$  that has distance  $\geq 1/(k+1)$  to the planes such that  $\|p\| \leq k/(k+1)$ . In other words, we need to show that the sets

$$P_i = \{x \in \mathbb{R}^3 : d(x, H_i) < 1/(k+1)\}$$

do not cover the ball of diameter  $k/(k+1)$ . Such a set  $P_i$  is called a *plank*. Our planks are open. Tarski proved that closed planks can only cover the unit ball if their widths add up to 2 or more. The widths of our planks add up to  $2k/(k+1)$ . If we make these planks a wee bit less wide then they cannot cover the ball of radius  $k/(k+1)$ . For every  $d < 1/(k+1)$  there is a point of distance  $\geq d$  to the planes. By compactness, there is a  $p$  that has distance  $\geq 1/(k+1)$  to the planes.

To prove his result, Tarski used the well-known but remarkable fact that the area of the intersection of a plank and a sphere is constant, as long as both faces of the plank intersect the sphere. If the widths of the planks do not add up to two, we can stack them around the equator without reaching out to the poles. Therefore these planks will never cover the ball's surface, no matter where you put them.

What if we replace the ball by an oval? If a boiled egg has unit width, can you slice it into pieces with total width less than one? This is called Tarski's plank problem, raised by Tarski in 1932 and solved by Bang in 1951. The plank problem has a way of turning up in number theory. Problem B is Lemma 4.1 in a recent paper by Akiyama and Caalim on beta-expansions and the plank problem, see [arxiv:1509.04785v2](https://arxiv.org/abs/1509.04785v2). Surprisingly, the plank problem is more difficult for cubes. Is it possible to find a cube of size  $1/(k+1)$  inside the unit cube and outside the  $k$  planes? Davenport conjectured that such a cube exists in one of his works on simultaneous Diophantine approximation. It is equivalent to a conjecture by Bang at the end of his 1951 paper and remains unsolved.

**Problem 2017-4/C** (proposed by Hendrik Lenstra)

Suppose that  $a, b, n, m$  are integers, and that  $m, n$  are positive, such that  $a^n \equiv b^n \equiv -1 \pmod{m}$ . Prove there exists an integer  $c$  such that  $ab \equiv c^2 \pmod{m}$ . Also provide a fast method to compute such a  $c$  which works even if the prime factors of  $m$  are unknown.

**Solution** Solved by Math Dicker and Hendrik Reuvers, although their method to compute  $c$  is not as efficient as the method below.

If  $n$  is odd, then we may take  $c = (ab)^{(n+1)/2}$  and we are done. We may assume that  $n$  is even. In particular,  $-1$  is a square modulo  $m$ . Since  $-1$  is not a square modulo 4, either  $m$  is odd or  $m$  is even and  $m/2$  is odd. In the latter case, we can reduce the problem to odd  $m$  by the Chinese Remainder Theorem. We may assume that  $m$  is odd.

By the Chinese Remainder Theorem  $ab$  is a square modulo  $m$  if and only if it is a square modulo  $p^k$  for all  $p^k$  that divide  $m$ . The group  $(\mathbb{Z}/p^k\mathbb{Z})^*$  is cyclic for odd primes and therefore so is its subgroup  $S = \{x : x^{2n} \equiv 1 \pmod{p^k}\}$ . An element of  $S$  is a square if and only if  $x^n \equiv 1 \pmod{p^k}$ . It follows that  $ab$  is a square in  $S$ , and hence modulo  $m$ .

We have to provide a fast method to compute  $c$  if the prime factors of  $m$  are unknown. Observe that if at any point we find  $y^2 \equiv 1 \pmod{m}$  for a certain integer  $y$  with  $y \not\equiv \pm 1 \pmod{m}$ , then this allows us to factor  $m = \gcd(y+1, m) \cdot \gcd(y-1, m)$ . These two factors are relatively prime since  $m$  is odd and  $y+1, y-1$  can only have 2 as a common divisor. By the Chinese Remainder Theorem, it suffices to find roots of  $ab$  modulo  $\gcd(y+1, m)$  and modulo  $\gcd(y-1, m)$ .

We write  $n = u2^v$  and we let  $c_0 = (ab)^{(u+1)/2}$ . Then  $c_0^2 \equiv (ab)y_0$  with  $y_0 \equiv (ab)^u$ . In particular  $y_0^{2^v} \equiv 1$ . If  $y_0 \equiv 1$  then we are done. If not, let  $w \geq 0$  be the maximal integer such that  $y_0^{2^w} \not\equiv 1$ . If  $y_0^{2^w} \not\equiv -1$ , then we can factor  $m$  as described above. If  $y_0^{2^w} \equiv -1$  then we replace  $c_0$  by  $c_1 = c_0 a^{u2^{v-w}-1}$  and  $y_0$  by  $y_1 = y_0 a^{u2^{v-w}}$ . It follows that  $y_1^{2^w} \equiv 1$ . Repeat iteratively. Since the minimal  $l$  required to get  $y_l^{2^l} \equiv 1$  strictly shrinks in each step, eventually we will either find  $y_k \equiv 1$  and  $c_k^2 \equiv ab$  or we can factor  $m$ .