

Inhoud | Contents

Artikelen | Features

- Onderzoek | Research**
 236 Toetsen als gokken: een redelijk alternatief voor de p-waarde
Peter D. Grünwald
- Evenement | Event**
 245 Brouwer, een wiskundige van wereldformaat, belicht van diverse kanten
Rien Kaashoek
- Evenement | Event**
 247 Enkele persoonlijke herinneringen aan L.E.J. Brouwer
Jaap Korevaar
- Evenement | Event**
 250 Snapshots van Brouwers leven en werk
Dirk van Dalen
- Evenement | Event**
 260 Sporen van Brouwer
Alexander Rinnooy Kan
- Geschiedenis | History**
 264 Brouwer versus Menger: scheiden doet lijden
Jan van Mill
- In Memoriam | Obituary**
 271 Walter (Wouter) van Stigt: Trots op Brouwer
Wim Veldman
- Column | Column**
 273 Er is er een jarig
Casper Albers
- Biografie | Biography**
 275 Wie weet wie Willem Wijthoff was?
Robbert Fokkink
- Geschiedenis | History**
 283 The how and why of constructions in classical geometry
Viktor Blåsjö
- Opinie | Opinion**
 295 Vergeet 'zuivere en toegepaste' wiskunde
Ferdinand Verhulst

Rubrieken | Departments

- 231 Redactioneel
Jan van Neerven
- 232 Agenda
Nicolaos Starreveld
- 234 Nieuws
Nicolaos Starreveld
- 281 Het keerpunt van Maxim Hendriks
Jan Beuving
- 292 In de verdediging
Geertje Hek
- 298 Boekbesprekingen
- 306 Problemen

Uitgelicht



In dit nummer veel aandacht voor de vijftig jaar geleden overleden L. E. J. Brouwer, zoals een lezing van zijn biograaf Dirk van Dalen.



'Casper grijpt een kans' is een nieuwe vaste column van Casper Albers over alledaagse statistische onderwerpen.

Colofon

Het Nieuw Archief voor Wiskunde is een uitgave van het Koninklijk Wiskundig Genootschap en verschijnt vier maal per jaar. Het tijdschrift richt zich op eenieder die zich beroepsmatig met wiskunde bezighoudt, als academisch of industrieel onderzoeker, student, leraar, journalist of beleidsmaker. Het stelt zich ten doel te berichten over ontwikkelingen in de wiskunde in het algemeen en in de Nederlandse wiskunde in het bijzonder.

ISSN 0028-9825

Adres

Nieuw Archief voor Wiskunde
Centrum Wiskunde & Informatica
Postbus 94079
1090 GB Amsterdam
tel. 020-5924288
redactie@nieuwarchief.nl
www.nieuwarchief.nl

Hoofredactie

Jan van Neerven (j.m.a.m.vanneerven@tudelft.nl)

Eindredactie/Bladmanager

Fred Drissen (fred@nieuwarchief.nl)

Redactie

Hans Cuypers (TU/e), Jan Draisma (TU/e), Geertje Hek (UvA), Jan Hogendijk (UU), Teun Koetsier (VU), Sjoerd Rienstra (TU/e), Nicolaos Starreveld (UvA), Hans Sterk (TU/e), Mark Timmer (UT)

Problemenrubriek

Gabriele Dalla Torre (UL), Christophe Debry (KU Leuven), Jinbi Jin (UL), Marco Streng (UL), Wouter Zomervrucht (UL)

Bureau redactie

Lætitia Diemer

Illustraties

Ryu Tajiri, Amsterdam

Vormgeving

Susanne Laws (omslag, begeleiding binnenwerk)
Kitty Molenaar (ontwerp)

Druk

Drukkerij Ten Brink, Meppel

Advertenties

advertenties@nieuwarchief.nl

Koninklijk Wiskundig Genootschap

www.wiskgenoot.nl

Platform Wiskunde Nederland

www.platformwiskunde.nl

European Mathematical Society

www.euro-math-soc.eu

International Mathematical Union

www.mathunion.org

Koninklijk Wiskundig Genootschap

Het Koninklijk Wiskundig Genootschap (KWG) is een landelijke vereniging van beoefenaars van de wiskunde. In 1778 opgericht onder de zinspreuk: 'Een onvermoeide arbeid komt alles te boven' is het 's werelds oudste nationale wiskundegenootschap. Leden ontvangen het Nieuw Archief voor Wiskunde als onderdeel van hun lidmaatschap.

Bestuur

Erik van den Ban (UU, voorzitter), Joke Blom (CWI, penningmeester), Sonja Cox (UvA, secretaris), Fetsje Bijma (VU), Theo van den Bogaart (HU), Geurt Jongbloed (TUD), André Ran (VU), Herman te Riele (CWI), Mark Veraar (TUD)

Secretariaat

Joke Blom, CWI
Postbus 94079, 1090 GB Amsterdam
wiskgenoot@wiskgenoot.nl
www.wiskgenoot.nl

Ledenadministratie KWG / Abonnementen

Postbus 1064, 7940 KB Meppel
admin@wiskgenoot.nl, tel. 085-0160252

Contributie

De contributie voor gewone leden bedraagt in 2016 € 90 per jaar. Voor gepensioneerden en werklozen € 45. Voor studenten, aio's en oio's van een Nederlandse universiteit of hbo-opleiding € 35. Studenten en pas afgestudeerden kunnen een jaar lang gratis lid worden. Voor leden van de wiskundige vakverenigingen VvS+OR, NVvW en NVORWO geldt het gereduceerd tarief van € 70. Leden die het Nieuw Archief voor Wiskunde niet willen ontvangen, betalen slechts € 50 contributie. Losse nummers zijn te bestellen voor € 20.

Instituten in Nederland en buitenland kunnen zich abonneren op het Nieuw Archief voor Wiskunde voor € 100 (Nederland), € 110 (Europa) of € 112,50 (buiten Europa).

Members of foreign societies

Members of SIAM, the *Société Mathématique de France*, the *Gesellschaft für Angewandte Mathematik und Mechanik*, the *Deutsche Mathematiker-Vereinigung*, and of the *American, Australian, Belgian, Indian, London, Spanish, and South-African Mathematical Societies* living outside of the Netherlands pay € 70 instead of the full membership fee of € 90 a year. Conversely, these foreign societies, as well as the VvS+OR and the NVORWO, have reduced membership fees for KWG members. A postage charge of € 10 is added for members living abroad but in Europe, and a charge of € 12,50 for members living outside of Europe.

Exchange subscriptions

Koninklijk Wiskundig Genootschap Library
Centrum Wiskunde & Informatica
P.O. Box 94079, NL-1090 GB Amsterdam
KWG-exchange@cw.nl

Informatie voor auteurs

Kopij

Het Nieuw Archief voor Wiskunde is een geredigeerd tijdschrift. Kopij dient per e-mail te worden aangeboden aan de hoofdredactie. Uitgebreide informatie en auteursinstructies kunt u vinden op www.nieuwarchief.nl.

Volgende nummers

nummer	maand	verschijnen	deadline kopij
18(1)	maart 2017		verstreken
18(2)	juni 2017		01-02-2017
18(3)	september 2017		01-05-2017
18(4)	december 2017		01-08-2017

Instituutsleden

De publicaties van het Koninklijk Wiskundig Genootschap worden mede mogelijk gemaakt door de bijdragen van de volgende instituten.



Centrum Wiskunde & Informatica



Rijksuniversiteit Groningen



Universiteit van Amsterdam



Universiteit Leiden



Vrije Universiteit



Universiteit Utrecht



Technische Universiteit Eindhoven



Eurandom



Technische Universiteit Delft



Universiteit Twente



Radboud Universiteit Nijmegen



Freudenthal Instituut

Op het omslag

Het is dit jaar vijftig jaar geleden dat de bekende Nederlandse wiskunde L.E.J. Brouwer overleed. Aanleiding voor het KWG en de KHMW om een lezingenmiddag over Brouwer te organiseren. Alles over deze middag en nog meer over Brouwer kunt u lezen vanaf pagina 245.

Kiezen en delen

Er zijn van die momenten waarop je zou wensen dat er beter naar wiskundigen geluisterd werd. Zo'n moment was de vroege ochtend van 9 november, toen ik bij het opstaan even op mijn laptop keek om te zien wie de Amerikaanse presidentsverkiezingen gewonnen had. Ik zal niet de enige zijn geweest die in één keer klaarwakker was, na wekenlang comfortabel te hebben gesluimerd dankzij een legertje opiniepeilers. Het probleem om een goede peiling te ontwerpen is duidelijk nog niet opgelost. Het probleem van eerlijke verkiezingen wel: die bestaan niet. Ruim vijftig jaar geleden bevestigde Kenneth Arrow dat er geen verkiezingsmodel bestaat waarbij aan een aantal natuurlijke eerlijkheidscriteria wordt voldaan, zoals 'als iedere kiezer A boven B verkiest, dan eindigt A boven B ' en 'er is geen individu wiens wil de uitslag bepaalt'. Aan dit resultaat van Arrow, die mede hiervoor in 1972 de Nobelprijs voor Economie kreeg, moest ik onwillekeurig denken toen bleek dat Hillary Clinton meer stemmen had gekregen dan haar rivaal Donald Trump. Dit voorval staat niet op zichzelf: u herinnert zich de verkiezingen van 2000, toen Al Gore ook meer stemmen kreeg dan de uiteindelijke winnaar, George W. Bush.

In het 'approval voting'-systeem, gepopulariseerd door Steven Brams, mag de kiezer alle kandidaten aankruisen die hij/zij acceptabel acht. De winnaar is de kandidaat die het vaakst wordt aangekruist. Dit systeem verkiest de best geaccepteerde kandidaat, ook in de aanwezigheid van 'spoilers' zoals Gary Johnson nu en Ralph Nader in 2000. Een prettige bijkomstigheid is dat negatieve campagnevoering in dit systeem minder effectief is.

Waarom wordt het dan niet gebruikt? Op deze vraag zijn twee antwoorden. Het eerste is: het wordt wel gebruikt, bijvoorbeeld door... wiskundigen! Onder meer de AMS, MAA en de American Statistical Association gebruiken dit systeem.

Het tweede antwoord is van Brams, die concludeert dat "academics probably are not the best sales people for two reasons:

(1) they lack the skills and resources, including time, to market their ideas, even when they are practicable; and (2) they squabble among themselves."

Niet alleen bij verkiezingen, ook in de wetenschap wil men graag het kaf van het koren scheiden. Onlangs nog was er veel aandacht in de media voor onderzoek waaruit blijkt dat veel resultaten in de psychologie slecht reproduceerbaar blijken. Dit is een slechte zaak die de wetenschap in diskrediet brengt. NWO heeft zelfs een speciale pot met geld beschikbaar gesteld voor reproductiestudies. Peter Grünwald draagt in dit nummer oplossingen aan. Daarnaast verwelkomen we Casper Albers, die een vaste column voor het Nieuw Archief gaat schrijven. Ook veel aandacht voor geschiedenis, met bijdragen van Viktor Blåsjö over meetkundige constructies, Robbert Fokkink over de relatief onbekende Nederlandse wiskundige Wijthoff, en Jan van Mill over de controverserond Brouwers dimensiebegrip.

Op 2 december was het precies vijftig jaar geleden dat Luitzen Egbertus Jan Brouwer overleed, reden voor het KWG om 2016 tot Brouwerjaar uit te roepen. Dat gaat niet ongemerkt voorbij: op 2 september was er een Brouwerlezingenmiddag bij de KHMW, op 9 december een Brouwersymposium op het Science Park, *Indagationes Mathematicae* publiceert een speciaal aan Brouwer gewijd nummer, en ook het Nieuw Archief laat zich niet onbetuigd: Rien Kaashoek doet verslag van de genoemde lezingenmiddag en we delen met u de drie lezingen van Jaap Korevaar, Dirk van Dalen en Alexander Rinnooy Kan. Samen schetsen zij een mooi beeld van de persoon Brouwer en diens flamboyante leven. ❦

Jan van Neerven, hoofdredacteur
Delft Institute of Applied Mathematics, TU Delft

Agenda

| Upcoming Events

december 2016

9 december 2016

□ L. E. J. Brouwer, fifty years later

Symposium georganiseerd door het KWG ter ere van de 50ste sterfdag van L. E. J. Brouwer.

plaats Science Park, Amsterdam

info wiskgenoot.nl

12–16 december 2016

□ Guided Tour through Random Media

Workshop georganiseerd door Remco van der Hofstad (TU/e), Aernout van Enter (RUG), Marek Biskup (UCLA, Los Angeles) en Frank Redig (TUD).

plaats Eurandom, Eindhoven

info www.eurandom.nl

januari 2017

14 januari 2017

□ Wintersymposium KWG 2017

Jaarlijks symposium van het KWG met dit jaar als thema 'Raakvlakken tussen wiskunde en informatica'.

plaats Academiegebouw, Utrecht

info wiskgenoot.nl

17–19 januari 2017

□ LNMB-conferentie

42ste conferentie over de wiskunde van besluitkunde georganiseerd door het Landelijk Netwerk Mathematische Besluitkunde (LNMB).

plaats Congrescentrum De Werelt, Lunteren

info lnmb.nl

19–20 januari 2017

□ 35ste Panama-conferentie

Jaarlijkse conferentie die zich richt op alle aspecten van leren en onderwijzen van rekenen-wiskunde. Dit jaar is het thema 'Goed en fout in het reken-wiskundeonderwijs'.

plaats Congrescentrum Koningshof, Veldhoven

info www.fi.uu.nl/panama

23–25 januari 2017

□ 16th Winter School Mathematical Finance

Winterschool over financiële wiskunde met onder andere minicursussen van Damir Filipović (Lausanne) en Jan Kallsen (Kiel).

plaats Congrescentrum De Werelt, Lunteren

info staff.science.uva.nl/~spreij/winterschool/winterschool.html

23–25 januari 2017

□ YES VIII Workshop on Uncertainty Quantification

Achtste editie van de Young European Statisticians workshop met onder andere lezingen van David Blei, Richard Nickl en Aad van der Vaart.

plaats Eurandom, Eindhoven

info www.eurandom.nl

23–27 januari 2017

□ Studiegroep Wiskunde met de Industrie

Jaarlijkse studiegroep waarin wiskunde en industrie samen problemen oplossen, dit jaar georganiseerd door UvA en CWI.

plaats Amsterdam Science Park

info swi-wiskunde.nl

23 januari – 2 februari 2017

□ 1ste ronde Nederlandse Wiskunde Olympiade

Het begin van de jaarlijkse wiskundewedstrijd voor leerlingen van havo en vwo.

plaats eigen school

info wiskundeolympiade.nl

februari 2017

1, 8, 15, 22 februari en 8, 15 maart 2017

□ Filosofie van de wiskunde

In zes lessen leer je van dr. ir. Teun Koetsier hoe wiskundige structuren bestaan, hoe je ze kent en waarom wiskunde zo ongelooflijk fascinerend is.

plaats Campus Woudenstein, Rotterdam

info nemokennislink.nl

3–4 februari 2017

□ Nationale Wiskunde Dagen

23ste editie van de tweedaagse conferentie voor wiskundeleraren.

plaats Noordwijkerhout

info uu.nl/nationale-wiskunde-dagen

Suggesties voor deze agenda zijn welkom.

Redacteur: Nicolaos Starreveld

agenda@nieuwarchief.nl

6–24 februari 2017

IMAGINARY, Wiskunde in beelden

Tijdens het schooljaar 2016–2017 trekt IMAGINARY door Nederland, een tentoonstelling georganiseerd door Platform Wiskunde Nederland (PWN) en de Nederlandse universiteiten.

plaats Stadskantoor Utrecht

info imaginarymaths.nl

6, 13, 20 februari en 6, 13, 20, 27 maart 2017

Wetenschap & religie onverenigbaar?

Een zevendaagse cursus gegeven door dr. Jeroen Bouterse over de connectie tussen wetenschap en religie.

plaats Campus Woudenstein, Rotterdam

info nemokennislink.nl

8 februari 2017

OnderbouwWiskundeDag

Leerlingen van 3 havo/vwo werken in teams van drie of vier leerlingen gedurende een dag aan een ‘grote’ wiskundige (denk)opdracht waarin probleemoplossen centraal staat.

plaats eigen school

info uu.nl/onderwijs/onderbouwwiskundedag

16 februari 2017

Bètadag

Studenten van bètafaculteiten laten aan leerlingen van 3 havo/vwo zien waarom zij hun studie zo interessant, fascinerend en onmisbaar vinden.

plaats bètafaculteiten in het hele land

info betadagen.nl

27 februari – 10 maart 2017

KK-theory, Gauge Theory and Topological Phases School

Een workshop over nieuwe ontwikkelingen in de Kasparov-theorie (KK-theorie) gemotiveerd door toepassingen in de ijktheorie (Gauge-theorie).

plaats Lorentz Center@Oort, Leiden

info lorentzcenter.nl

maart 2017

6–10 maart 2017

SEMSTAT, Statistical Network Science

Een workshop over de statistische analyse van netwerken georganiseerd door Mathisca de Gunst, Remco van der Hofstad, Rui Pires da Silva Castro, Botond Szabo en Ernst Wit.

plaats Eurandom, Eindhoven

info www.eurandom.nl

6–24 maart 2017

IMAGINARY, Wiskunde in beelden

Tijdens het schooljaar 2016–2017 trekt IMAGINARY door Nederland, een tentoonstelling georganiseerd door Platform Wiskunde Nederland (PWN) en de Nederlandse universiteiten.

plaats Leiden

info imaginarymaths.nl

16 maart 2017

Onderwijsparade 2017

Met deze jaarlijkse ‘optocht’ van studenten en docenten wil de Onderwijsparade een substantiële bijdrage leveren aan onderwijsverbetering.

plaats Utrecht

info uu.nl/agenda/onderwijsparade-2017

16 maart 2017

W4Kangoeroe

WereldWijde WiskundeWedstrijd voor basis- en middelbare scholieren.

plaats eigen scholen

info w4kangoeroe.nl

17 maart 2017

2de ronde Nederlandse Wiskunde Olympiade

De tweede ronde van de Nederlandse Wiskunde Olympiade. De beste leerlingen gaan door naar de finale in september.

plaats Nederlandse universiteiten

info wiskundeolympiade.nl

22 maart 2017

Grote Rekendag

Een dag voor alle basisscholen in Nederland en Vlaanderen (groep 1 t/m 8) die helemaal in het teken staat van rekenen. Het doel is kinderen onderzoekend te laten rekenen.

plaats basisscholen in Nederland en Vlaanderen

info groterekendag.nl

april 2017

6–12 april 2016

European Girls' Mathematical Olympiad

Europese wiskundewedstrijd speciaal voor meisjes

plaats Zürich, Zwitserland

info egmo.org

11–12 april 2017

NMC 2017

53ste Nederlands Mathematisch Congres, jaarlijkse bijeenkomst van wiskundig Nederland.

plaats Utrecht

info wiskengenoot.nl

mei 2017

19 mei 2017

ECENT/ELWleR-conferentie

Jaarlijkse conferentie voor lerarenopleiders van Expertisecentrum Lerarenopleidingen Natuurwetenschappen en Techniek en Expertisecentrum Lerarenopleidingen Wiskunde en Rekenen

plaats Freudenthal Instituut

info uu.nl/agenda/ecentelwier-conferentie-2017-o

22 mei – 9 juni 2017

IMAGINARY, Wiskunde in beelden

Tijdens het schooljaar 2016–2017 trekt IMAGINARY door Nederland, een tentoonstelling georganiseerd door Platform Wiskunde Nederland (PWN) en de Nederlandse universiteiten.

plaats Groningen

info imaginarymaths.nl

29 mei - 2 juni

Order Structures, Jordan Algebras, and Geometry

Workshop mede georganiseerd door Onno van Gaans (UL)

plaats Lorentz Center@Snellius, Leiden

info lorentzcenter.nl

juni 2017

19 juni – 17 juli 2017

IMAGINARY, Wiskunde in beelden

Tijdens het schooljaar 2016–2017 trekt IMAGINARY door Nederland, een tentoonstelling georganiseerd door Platform Wiskunde Nederland (PWN) en de Nederlandse universiteiten.

plaats Groningen

info imaginarymaths.nl

Nieuws

| News

Deze rubriek is een kroniek van wiskundige activiteiten in Nederland. Toekomstige activiteiten worden aangekondigd en van voorbije activiteiten wordt verslag gedaan. Wilt u uw aankondiging of verslag in deze rubriek geplaatst zien? Stuur ons dan uw bijdrage van ± 350 woorden, zo mogelijk met illustratie. De redactie behoudt zich het recht voor berichten te weigeren of in te korten.

Redacteur: Nicolaos Starreveld

nieuws@nieuwarchief.nl

De geheimen van DNA aan het licht brengen

Het dynamische gedrag, de evolutie en de structuur van het menselijk DNA is een onderwerp waar veel aandacht aan geschonken wordt. Variaties in het DNA zijn vaak verantwoordelijk voor bepaalde ziektes, daarom kan kennis over de mogelijke verschillen ons veel vertellen over specifieke gezondheidsrisico's. Bovendien wordt het DNA op verschillende manieren door de cellen gebruikt, om eiwitten te produceren bijvoorbeeld. Mathematische modellen van de ruimtelijke architectuur van het DNA kunnen mogelijk de manier waarop de genetische code georganiseerd is en gebruikt wordt door de cellen benaderen. Twee onderzoeksgroepen hebben afgelopen maanden hun bevindingen gepubliceerd.

Onderzoekers van ERIBA (European Research Institute for the Biology of Ageing), Rijksuniversiteit Groningen, UMC Groningen, Radboud UMC, XJTU (Xi'an Jiaotong University), Saarland University, CWI en UMC Utrecht hebben een grote stap gezet in het beter begrijpen van het menselijk DNA. De studie maakt deel uit van het Genoom van Nederland (GoNL-project). Een van de kerndoelen van deze studie is het in kaart brengen van het genoom van de Nederlandse bevolking en de variaties daarin. Door voor 250 Nederlandse families alle variaties in hun DNA in kaart te brengen, hebben de onderzoekers weer een stuk van de 'donkere materie', de grote onbekende, van het menselijk genoom weten uit te pluizen. Deze nieuwe informatie maakt het mogelijk voor onderzoekers om variaties in het DNA te bestuderen en de resultaten te gebruiken om genetische ziektes beter te begrijpen. Deze bevindingen werden op 6 oktober gepubliceerd in het wetenschappelijke vakblad *Nature Communications*.

Onderzoekers van het RCMCD en de Universiteit van Hiroshima hebben mathematische modellen geconstrueerd om de beweging van het DNA in de cel te bestuderen. Uit hun onderzoek blijkt dat de topologische structuur van het DNA binnen de cel een belangrijke rol speelt in de benadering van de genetische code door de cellen. Hun analyse houdt rekening met de 'fractaaldimensie' van het DNA, wat laat zien hoe samengeperst het DNA is opgeslagen in de cel. "De manier waarop het DNA opgeslagen is zou kunnen aanduiden hoe de cellen bepaalde genen gebruiken", aldus Soya Shinkai, onderzoeker aan het universiteit van Hiroshima. Hun bevindingen werden op 20 oktober gepubliceerd in het wetenschappelijke vakblad *Plos Computational Biology*. nature.com en plos.org

Wachtwoorden en wachtwoorden!

Heb je ooit bedacht hoeveel wachtwoorden je per dag ergens moet invullen? E-mails, je account van de universiteit, enzovoort, enzovoort. En heb je ooit bedacht wat de efficiëntste en veiligste manier is om wachtwoorden te kiezen en op te slaan? Moet je tientallen complexe wachtwoorden uit je hoofd leren of is je geboortedatum sterk genoeg? Volgens wiskundige Samira Samadi lijkt het efficiënter en veiliger om een algoritme uit je hoofd te leren waarmee je sterke wachtwoorden kunt onthouden. Samira Samadi is een wiskundige die aan het Georgia Institute of Technology onderzoek doet naar 'mentale algoritmes' om wachtwoorden te onthouden. Een van de algoritmen om wachtwoorden te genereren is gebaseerd op een aantal 'kern'-symbolen, een aantal 'sleutelwoorden' en een mechanisme om letters vanuit deze sleutelwoorden te kiezen.

nemokennislink.nl

Netwerkentheorie in de humanistiek

Onderzoekers uit het Verenigd Koninkrijk, Duitsland en Ierland hebben grafentheorie gebruikt om een stap te zetten in het achterhalen van de oorsprong van een oude literaire tekst. In 1760 publiceerde James Macpherson een bundel epische gedichten. Hij beweerde dat hij die in het Engels had vertaald van oude Schots-Gaelische bronnen. De mysterieuze auteur van die gedichten was een derde-eeuwse bard, Ossian. Hoewel die gedichten snel bekend werden en werden vergeleken met het werk van Homerus, waren er geleerden die twijfelden aan de authenticiteit van de tekst. In epische poëzie wordt een mythologische wereld gebouwd met goden, helden en koningen; in het algemeen werd een 'sociaal netwerk' van personen en families beschreven. Deze bijzonderheid van epische poëzie werd gebruikt door onderzoekers om het werk van Macpherson te vergelijken met het werk van oude Griekse en Ierse schrijvers. Hun resultaten duiden aan dat er significant netwerkstructurele verschillen zijn tussen het werk van Macpherson en dat van Homerus, maar het lijkt dat Ossians sociale netwerken wel gelijk zijn aan die van oude Ierse verhalen, bekend als *Acallam na Senórach* (Colloquy of the Ancients). *worldscientific.com*



'Ossians Schwanengesang', schilderij van Nicolai Abildgaard

Quantumknopen ontdekken

Knopentheorie is een deelgebied van de topologie en bestudeert wiskundige knopen. We komen knopen dagelijks tegen, als we onze schoenveters strikken of als we een weekend gaan zeilen. Hoewel geïnspireerd door alledaagse knopen, hebben wiskundige knopen geen eindpunten maar zijn samengebonden. Een wiskundige knoop is een equivalentieklasse van imbeddingen van de cirkel in de driedimensionale euclidische ruimte. In de natuurkunde worden knopen vaak gebruikt om verschillende verschijnselen te bestuderen, zoals het gedrag van atomen en moleculen, maar ook kosmische structuren in het heelal. Tot nu toe zijn wel knopen waargenomen in klassieke systemen maar niet in quantumsystemen. Onderzoekers uit de Verenigde Staten en Finland zijn erin geslaagd om quantumknopen waar te nemen. De structuur die zij hebben waargenomen correspondeert met een niet-triviaal topologisch element van de derde homotopiegroep. *nature.com*

Teaching & Learning Lab

Op vrijdagmiddag 11 november 2016 openden het Freudenthal Instituut en Educate-IT een splinternieuwe ruimte in het Buys Ballot Gebouw op de Uithof: het Teaching & Learning Lab. Het Freudenthal Instituut maakt onderdeel uit van de Faculteit Bètawetenschappen van de Universiteit Utrecht. Educate-IT is een programma van het UU die docenten ondersteunt om de kwaliteit van hun onderwijs te verbeteren. In deze ruimte gaan vanaf dit najaar vo- en ho-docenten experimenteren met nieuwe onderwijsvormen. *fi.uu.nl*

Het mentale proces om een probleem op te lossen

De menselijke vaardigheid om problemen op te kunnen lossen is gebaseerd op een complex stelsel van samenwerkende neuronen. In de wiskunde ervaren wij vaak dat de benadering van een probleem een proces is. Eerst proberen we het probleem te begrijpen, daarna bouwen we een tactiek om de oplossing te benaderen en uiteindelijk vullen we alle technische gaatjes in. Twee onderzoeksgroepen hebben dit cognitieve proces proberen te bestuderen.

Onderzoekers van de Carnegie Mellon University hebben neuro-imaging gebruikt om te bestuderen hoe het brein werkt als we een wiskundig probleem proberen op te lossen. Een andere onderzoeksgroep van de Johns Hopkins University heeft de invloed van het gezichtsvermogen op de ontwikkeling van numerieke vaardigheden bestudeerd. Zij hebben twee groepen mensen bestudeerd tijdens het oplossen van een wiskundig probleem. De eerste bestaat uit mensen die blind werden geboren en de tweede uit slechtzienden. De deelnemers moesten een aantal tests doen tijdens een fMRI-meting. Volgens deze metingen waren er regio's die bij beide groepen geactiveerd werden, dus het is waarschijnlijk dat sommige aspecten van de neurologische basis van numerieke kennis zich onafhankelijk van visuele ervaringen ontwikkelen. Omgekeerd, bij de groep blinden waren er ook een aantal regio's bijzonder actief die in de groep slechtzienden met het visuele proces gerelateerd zijn. Een interessante bevinding die laat zien dat visuele ervaringen misschien wel invloed hebben op de ontwikkeling van de neurologische basis van numeriek denken. *pss.sagepub.com en pnas.org*

Koninklijk Wiskundig Genootschap

❑ Wintersymposium 2017

Op zaterdag 14 januari vindt het jaarlijkse Wintersymposium van het KWG plaats. Thema is 'Raakvlakken tussen wiskunde en informatica', Registratie via wiskgenoot.nl/wintersymposium.

❑ NMC 2017

Het 53ste Nederlandse Mathematisch Congres wordt dit jaar in Utrecht gehouden, op 11 en 12 april.

❑ Vacature managementteam Pythagoras

Het KWG is op zoek naar een voorzitter voor het managementteam van *Pythagoras* (onbezoldigd), zie wiskgenoot.nl. Reacties of suggesties graag sturen naar wiskgenoot@wiskgenoot.nl.

Recent verschenen:

❑ Epsilon Uitgaven (www.epsilon-uitgaven.nl)

86. *Kansrekening van Alledag, een Wereld vol Verrassingen*, Henk Tijms, € 12, 2016.

Zebra 47. *Sociale netwerken*, Bart Husslage, € 10, 2016.

Peter D. Grünwald

Centrum Wiskunde & Informatica, Amsterdam, en
Mathematisch Instituut, Universiteit Leiden
peter.grunwald@cwi.nl

Onderzoek

Toetsen als gokken: een redelijk alternatief voor de p-waarde

De laatste tijd is er in de media veel aandacht geweest voor het feit dat veel wetenschappelijke resultaten niet reproduceerbaar zijn. Behalve bij de betreffende vakgebieden zit er volgens onderzoeker Peter Grünwald van het CWI en Universiteit Leiden ook een substantieel probleem bij de gebruikte wiskunde: p-waarden doen maar zeer ten dele wat ze horen te doen. In dit artikel gaat hij in op bezwaren die kleven aan de standaardmethode voor statistisch onderzoek, en laat zien dat er een veelbelovend alternatief bestaat.

Er kleven een aantal fundamentele bezwaren aan de standaardmethode voor statistisch onderzoek, het p-waarde-gebaseerde nulhypothese-toetsen (pHT). Sommige van deze bezwaren zijn al sinds ongeveer 1960 bekend [5, 14] maar tegen die tijd was pHT al zo wijdverbreid geraakt in de toegepaste wetenschappen dat alle — herhaalde — pogingen tot verandering van paradigma op niets uitliepen. (Ik sta zelf keer op keer weer te kijken hoe weinig wetenschappers nu feitelijk van deze bezwaren afweten, en hoevelen ze afdoen als ‘niet essentieel’ of ‘er bestaat nu eenmaal geen perfecte methode’.) Ik zal hier een aantal van deze problemen bespreken, en laten zien dat er wel degelijk een veelbelovend alternatief bestaat — de *toets-martingaalmethode*. Een toets-martingaal meet feitelijk de opbrengst van een *gokstrategie*. In standaard

pHT staat een *kleine p-waarde* voor veel evidentie tegen de nulhypothese; in de toets-martingaalmethode staat een *grote (virtuele) financiële winst* voor evidentie tegen de nulhypothese. Dit idee werd geïntroduceerd door Volodya Vovk [18] (toevallig — of niet — Kolmogorovs laatste promovendus), en bouwt zelf weer verder op het werk van, onder anderen, de vroeg gestorven J. Kiefer (1924–1981) [3], het werk van Wald en vooral Robbins op het gebied van sequentieel toetsen (Lai [12] geeft een mooi overzicht) en de klassieker van Ville [17], een van de eerste en meest invloedrijke artikelen over het gebruik van ‘martingalen’ in de kansrekening.

Mede door de zeer theoretische insteek van Vovk heeft de toets-martingaalmethode tot voor kort een slapend bestaan geleid. Om de methode praktisch toe te passen

moesten nog veel details uitgewerkt worden. Sinds 2010 is hier een begin mee gemaakt, onder anderen door Vovk zelf [16] en ook — samen met co-auteurs — door mijzelf, als onderdeel van mijn Vici-project ‘Safe Statistics’ [6, 13]. De methode is nu klaar om in statistische software verwerkt te worden — iets waar ik mij de komende jaren op zal richten. De toets-martingaalmethode is verwant aan de Bayesiaanse statistiek, maar verschilt op een aantal cruciale punten, waar ik ook kort op in zal gaan.

Dit stuk is een wiskundige uitwerking en uitbreiding van een eerder stuk dat verschenen is in *StatOr* [9], en een deel van de tekst is overgenomen van het *StatOr*-artikel. Het *StatOr*-artikel was op zijn beurt gebaseerd op de lezing ‘Paranormale Statistiek’, die ik in 2015 gaf op de jaarlijkse Nederlandse Wiskunde Dagen.

Motivatie: de reproducibility crisis

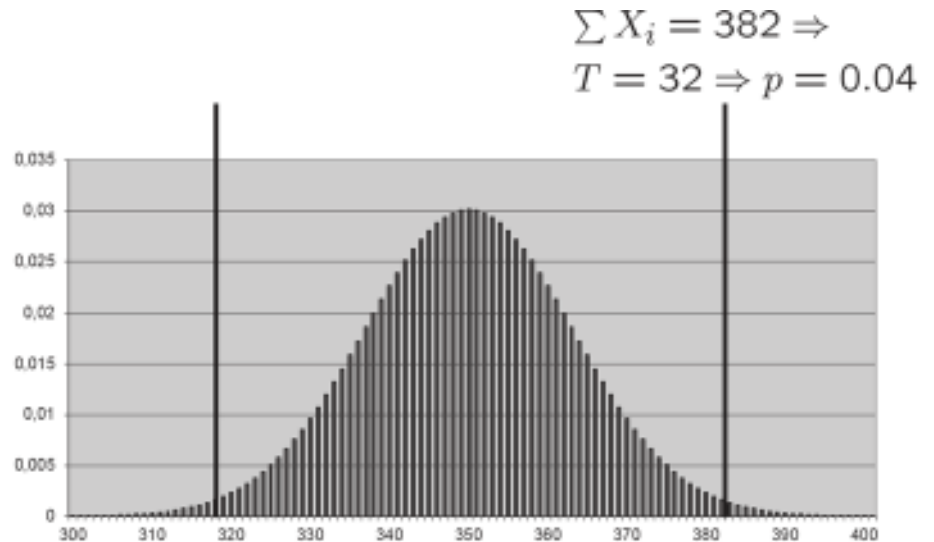
Het tijdschrift *Science* heeft er een speciale thema-uitgave aan gewijd en ook *The Economist* vond het een hoofdartikel waard: een schrikbarend hoog percenta-

ge wetenschappelijke resultaten is niet reproduceerbaar. Met name in de geneeskunde en psychologie wordt onderkend dat er sprake is van een *reproducibility crisis*. In de geneeskunde is dit al een aantal jaren duidelijk, met name door het werk van Ioannidis [11] ('Why most published research findings are false'). Voor de psychologie werd het afgelopen augustus nog eens bevestigd, alweer in *Science*: een grote groep onderzoekers probeerde een groot aantal psychologische studies zo zuiver mogelijk te reproduceren; zoals in vrijwel alle Nederlandse kranten stond te lezen bleek minder dan de helft van de onderzoeken reproduceerbaar [1].

De twee belangrijkste redenen voor de reproducibility crisis zijn wellicht publicatiebias en het feit dat verschillende populaties en experimentele condities vaak niet met elkaar vergelijkbaar zijn. (In plaats van uit te leggen wat publicatiebias is, verwijs ik liever naar de cartoon <https://xkcd.com/882> van het onvolprezen xkcd.com: een plaatje zegt hier meer dan duizend woorden.) Zo zijn de proefpersonen in psychologische experimenten meestal studenten psychologie, die zelfs al het een en ander weten over hoe psychologische experimenten in elkaar zitten — wat voor die studenten geldt, hoeft zeker niet voor de populatie als geheel te gelden. Maar er zit ook een substantieel (en vaak onderschat) probleem bij de wiskunde zelf — en daar gaat het in dit artikel over. p-waarden doen namelijk maar zeer ten dele wat ze horen te doen. Ik zal nu eerst uitleggen wat p-waarden zijn, alvorens de problemen te bespreken.

Definitie van de p-waarde

Stel we observeren data $X^N \equiv X_1, \dots, X_N$. We hebben twee mogelijke verklaringen voor deze data: de nulhypothese H_0 , die de status quo representeert, en daarnaast de alternatieve hypothese H_1 . In medische toetsen staat H_0 vaak voor 'nieuw geneesmiddel werkt niet', en H_1 voor 'geneesmiddel is werkzaam'. Zowel H_0 als H_1 worden gerepresenteerd als verzamelingen van kansverdelingen. Voor het gemak beperken we ons in deze opfrisser tot het geval dat $H_0 = \{P_0\}$ *enkelvoudig* is, dat wil zeggen slechts een enkele verdeling P_0 bevat. Een p-waarde is een functie p die de verzameling van mogelijke uitkomsten afbeeldt op $[0, 1]$, en waarvoor geldt dat



De p-waarde voor het Bernoulli-voorbeeld, bij $N = 700$ met toetsingsgrootheid $T = |\sum X_i - N/2|$. De grafiek laat voor elke waarde van $\sum X_i$ zijn hoe groot de kans erop is onder H_0 . We observeren 382 enen, hetgeen overeenkomt met een p-waarde van 0,04: dit is de kans dat het aantal enen $T = 32$ of nog méér afwijkt van het verwachte aantal 350. Deze kans is gelijk aan de 'oppervlakte' van de grafiek buiten de meest linker- en rechterstreep. Als we precies 350 ($T = 0$) enen zouden observeren is de p-waarde 1; de twee strepen staan bij 350 en vallen dan over elkaar, de oppervlakte buiten de strepen is dan 1. Hoe groter de geobserveerde T , hoe verder de strepen van het midden verhuizen. We verwerpen de nulhypothese als T zo groot is dat de bijbehorende p-waarde kleiner of gelijk is aan het van te voren gekozen significance level α . Bijvoorbeeld, als we $\alpha = 0,1$ hadden gekozen, verwerpen we de nulhypothese zodra we $|T| \geq 23$ observeren, omdat $|T| > 23$ equivalent is met $p \leq 0,1$.

Voor elke $0 \leq \alpha \leq 1$: $P_0(p(X^N) \leq \alpha) \leq \alpha$. (1)

De meer gangbare indirecte definitie (bijvoorbeeld op Wikipedia) komt neer op de striktere eis dat (1) met gelijkheid geldt, dus $P_0(p(X^N) \leq \alpha) = \alpha$, maar dit is eigenlijk niet noodzakelijk voor de klassieke toetsingstheorie. Om de definitie verder toe te lichten gebruiken we het *Bernoulli-voorbeeld* waarbij de $X_i \in \{0, 1\}$ binair zijn, de nulhypothese H_0 zegt dat X_i onafhankelijk Bernoulli($\frac{1}{2}$)-verdeeld zijn, dus uitkomsten van een eerlijke munt, en de alternatieve hypothese $H_1 = \{P_{1,\theta} \mid \theta \neq 1/2\}$ zegt dat de munt niet eerlijk is.

p-waarden kunnen gedefinieerd worden aan de hand van verschillende statistieken van de data, de zogenaamde toetsingsgrootheden. Laten we eerst even aannemen dat het aantal datapunten N vast ligt. In het Bernoulli-voorbeeld kunnen we bijvoorbeeld als toetsingsgrootheid $T(X^N) = |\sum_{i=1}^N X_i - N/2|$, de discrepantie tussen het daadwerkelijke aantal enen en het verwachte aantal enen, nemen. We zetten $\alpha_t := P_0(T(X^N) \geq t)$, en we definiëren vervolgens $p(X^N) := \alpha_{T(X^N)}$ als de kans op een uitkomst die minstens zo extreem is als de uitkomst die we daadwerkelijk hebben waargenomen. Aangezien voor elke t geldt $\{X^N: T(X^N) \geq t\} = \{X^N: \alpha_{T(X^N)} \leq \alpha_t\}$ volgt dan ook

$$P_0(p(X^N) \leq \alpha_t) = P_0(\alpha_{T(X^N)} \leq \alpha_t) \\ = P_0(T(X^N) \geq t) = \alpha_t,$$

zodat (1) geldt met gelijkheid voor alle α die gelijk zijn aan α_t voor een t in het bereik van T ; dan is eenvoudig in te zien dat (1) zelf (met ongelijkheid) geldt voor alle $0 \leq \alpha \leq 1$, zodat $p(X^N)$ een valide p-waarde is. Met behulp van een toetsingsgrootheid T kunnen we dus een p-waarde definiëren, en om de toets compleet te maken hebben we nu nog een *onbetrouwbaarheidsdrempel* oftewel *significance level* α nodig — vaak wordt deze op 0,05 gezet. We 'verwerpen' dan de nulhypothese als de waargenomen p-waarde $p(X^N) \leq \alpha$. De rationale hierachter is dat met deze procedure de kans op een *Type-I fout* kleiner of gelijk is aan α :

$$P_0('Ik verwerp H_0') \leq \alpha. \quad (2)$$

Dit wil zeggen dat, als we een leven lang hypothesen toetsen en steeds dezelfde drempel α aanhouden, we *zelfs* in het geval dat de nulhypothese *altijd* waar is, op de lange termijn maar een fractie α van de keren de nulhypothese verwerpen. Mochten — zoals hopelijk het geval is — de nulhypothesen in sommige experimenten niet waar zijn, dan is de fractie van de toetsen waarin de nulhypothese wel waar is, maar we die toch verwerpen, zelfs kleiner dan α .

Na deze opfrisser kunnen we nu een aantal van de problemen met p-waarden de revue laten passeren.

Probleem 1: *Beperkte toepasbaarheid, wegens onbekende kansen en stopregel.* Om p-waarden te gebruiken moet je een toetsingsgrootheid T hebben zodat je de kans $P_0(T(X^N) \geq t)$ kunt uitrekenen. Je kunt pHT niet gebruiken in vele eenvoudige scenario's waarbij toetsen intuïtief heel wel mogelijk is, maar zo'n toetsingsgrootheid niet valt te definiëren. Een simpel voorbeeld is weersvoorspelling: tot een aantal jaren geleden gaven de weerman op RTL 4 en de weervrouw op NOS elke dag een 'kans dat het morgen regent'. Je zou willen toetsen wie van de twee dit beter doet. Als de RTL-man consequent hoge regenkans geeft voor dagen waarop de zon blijkt te schijnen en de NOS-vrouw dat niet doet, zou je willen concluderen dat de NOS-vrouw beter is. Het is echter onmogelijk om een p-waarde te berekenen onder de nulhypothese 'ze zijn even goed'. Daarvoor moet je namelijk niet alleen weten hoe goed de voorspellers het doen op de data die echt hebben plaatsgevonden, *maar ook hoe goed ze het zouden hebben gedaan in situaties die zich niet hebben voorgedaan!* Je moet dus weten wat de RTL-man voor kans zou voorspellen voor vandaag als het eergisteren geregend zou hebben, ook al scheen in werkelijkheid eergisteren de zon. Dit soort 'counterfactual' voorspellingen zijn intuïtief irrelevant (en niet benodigd in de toets-martingaal-methode), maar ze zijn nodig om p-waarden te berekenen [4, 8]. Een gerelateerd probleem is dat, om valide p-waarden uit te kunnen rekenen, het experimentele protocol ofwel de *stopregel* volledig bekend moet zijn bij begin van het experiment. Voorbeelden van zo'n protocol in het Bernoulli-voorbeeld zijn 'zet N vast op 100' of 'ga door met data verzamelen totdat je voor het eerst achterelkaar drie enen hebt gezien' (dan is N zelf een stochast). In de praktijk weten we vaak niet van tevoren wat de stopregel is, of willen we het protocol aanpassen aan de hand van onvoorziene omstandigheden; met standaard pHT mag dat niet — terwijl het in de praktijk voortdurend gebeurt. Het mooie van de toets-martingaal-methode is dat ze resultaten oplevert die robuust zijn — ze blijven geldig, ook al wordt het protocol 'onderweg' aangepast (dit

punt, en nog enkele kritiekpunten waar ik hier niet eens op inga, worden in detail uitgewerkt in [9]).

Probleem 2: *Interpretatie.* Stel een nieuw geneesmiddel is in twee ziekenhuizen getoetst — de nulhypothese is, zoals altijd, dat het geneesmiddel niet beter werkt dan het placebo. Ziekenhuis A rapporteert p-waarde p_A en ziekenhuis B rapporteert p-waarde p_B . Natuurlijk zijn de twee patiëntenpopulaties verschillend, maar we zouden toch graag een allereerste indicatie willen krijgen van de gezamenlijke bewijskracht van de twee experimenten. Hoe doen we dit? Het meest voor de hand ligt de p-waarden te vermenigvuldigen, maar zoals Fisher [7] al aangaf is dit niet goed: omdat p-waarden kleiner dan 1 zijn wordt het resultaat altijd kleiner, wat de oorspronkelijke p-waarden ook waren. In werkelijkheid moet je een correctie toepassen. Er zijn meerdere 'correcte' correcties, die echter allemaal een ander antwoord geven. Welke correctie moet je gebruiken? Zou het niet fijner zijn om een methode te hebben waarbij er een uniek-optimale manier is om resultaten te combineren? De toets-martingaal biedt zo'n manier — je kunt gewoon vermenigvuldigen.

Ook is het niet duidelijk wat het precies betekent als je een p-waarde observeert die veel kleiner is dan de van tevoren gekozen drempel α , zeg $\alpha = 0,05$. Het significantieconcept is bedacht door Neyman en

Pearson, en als je hun werk letterlijk neemt, impliceert het dat, als je een p-waarde observeert die veel kleiner is dan α , je die informatie eigenlijk weg kunt gooien — je dient alleen maar te rapporteren 'nulhypothese verworpen', dus ' $p \leq \alpha$ ', ook al is de waargenomen p kleiner dan 0,001. Het probleem is namelijk dat je zo'n kleinere p niet kunt vertalen naar een kleinere Type-I-fout. Die is namelijk alleen gedefinieerd als we de verzameling uitkomsten in precies twee delen splitsen: die met $p \leq \alpha$ (significant) en die met $p > \alpha$. Maar nu willen we de verzameling uitkomsten bijvoorbeeld in minstens drie verzamelingen opsplitsen ($p > 0,05$, $0,001 < p \leq 0,05$, $p \leq 0,001$). Dan is strikt genomen de kans op een Type-I-fout (2) niet eens meer gedefinieerd; en als we hem wel formeel zouden willen definiëren ontstaan er grote problemen [2, 20]. We zouden bijvoorbeeld een conditionele uitspraak willen doen als '*gegeven* dat ik een toets-resultaat krijg met $p \leq 0,001$ en daarom besluit de nulhypothese te verwerpen, is mijn Type-I-fout op zijn hoogst 0,001'. Zo'n uitspraak is echter onjuist: als we het extreme geval onder (2) bekijken waarin we ons hele leven lang hypothesen toetsen en de nulhypothese altijd waar zijn, zullen we toch 1 op de 1000 keer $p \leq 0,001$ waarnemen en de nulhypothese verwerpen, en *gegeven* dat we $p \leq 0,001$ waarnemen, doen we dan met zekerheid een foute uitspraak, en is onze Type-I-fout dus 1!



Sir Ronald Fisher (links) en Jerzy Neyman (rechts), twee van de grootste statistici die ooit geleefd hebben, in de jaren dertig beiden werkzaam aan University College London. Er wordt vaak gesproken over de controverse tussen de twee grote scholen binnen de statistiek, de Bayesiaanse en de frequentistische. Maar hoewel Neyman en Fisher beiden 'frequentistisch' waren, waren ze het volstrekt oneens over hypothesetoetsen — hetgeen het des te merkwaardiger maakt dat de huidige praktijk feitelijk een amalgaam is van de door hen voorgestelde methodes.

Toch is het duidelijk dat een kleinere p wel *iets* zegt over extra bewijsmateriaal tegen de nulhypothese, en dus is het begrijpelijk dat de gewoonte is ontstaan om die kleinere p toch te rapporteren. Aldus is de standaard hypothesetoets feitelijk een merkwaardig amalgaam van twee methodes: Fisher, wellicht de grootste statisticus die ooit geleefd heeft, stelde voor om p -waardes te rapporteren als mate van bewijskracht, maar moest niets hebben van significance levels en Type-I-fouten. Neyman, ook een van de grootste statistici, ging het om garanties op Type-I-fouten, en zag de daadwerkelijke p -waarde als minder belangrijk — zie Figuur 2. De huidige praktijk suggereert dat een kleinere p -waarde een kleinere Type-I fout impliceert, maar we hebben al gezien dat dat niet zo is. Maar wat zegt die kleinere p dan? Dat is nog niet zo eenvoudig!

Probleem 3: nog meer interpretatie — de p -waarde versus de posterior. In bovenstaand kader staat een eenvoudige vraag over p -waardes die aan Amerikaanse artsen werd voorgelegd. Er waren 397 respondenten. Van hen koos 15 procent antwoord 1, 19 procent antwoord 2 (correct), 52 procent antwoord 3 en 15 procent antwoord 4. Dat betekent dat meer dan de helft van de artsen de zogenaamde *prosecutor's fallacy* (antwoord 3) begaat: zij verwarren de kans op de (nul-)hypothese gegeven de data met de kans op de data gegeven de hypothese. (De prosecutor's fallacy heet niet voor niets zo — zij kwam en komt nog steeds ook voor in de rechtszaal, onder andere in de geruchtmakende zaak tegen Lucia de Berk.) Een p -waarde $< 0,05$ betekent dat die laatste kans kleiner is dan $0,05$; over de eerste kans kun je binnen het pHT-paradigma niets zeggen. (Preciezer: er is voordat het experiment een verzameling $\mathcal{R}$ van uitkomsten vastgesteld met kans $< 0,05$ onder de nulhypothese, en $p < 0,05$ betekent dat de daadwerkelijke uitkomst in $\mathcal{R}$ viel.) Binnen het pHT-paradigma wordt de 'echte' toestand van de wereld namelijk als een onbekend maar vast, niet-random gegeven gezien: ofwel H_0 is waar, ofwel H_1 is waar, maar je kunt geen kansverdeling op H_0 en H_1 leggen. Een Bayesiaans statisticus is wel bereid dit te doen; het ligt dan voor de hand om bijvoorbeeld te stellen dat *a priori* $p(H_0) = p(H_1) = \frac{1}{2}$ (hier en in het vervolg gebruiken we kleine letters voor kansfuncties, en hoofdletters voor

Toets uw eigen interpretatie van p -waarden!

Het geruchtmakende artikel 'What Do Doctors Know about Statistics?' [21] beschrijft de resultaten van een enquête onder Amerikaanse artsen, waarbij een aantal basale vragen over statistiek werd gesteld. Een van de vragen was: *Een dubbelblinde gerandomiseerde toets van een nieuw geneesmiddel leidt tot de conclusie dat het 'significant beter' is dan de placebo ($p < 0,05$). Welke uitspraak klopt het best?*

- 1 Het is wetenschappelijk bewezen dat het geneesmiddel beter werkt dan de placebo.
- 2 Als het geneesmiddel niet werkt, is er minder dan 5% kans op zo'n soort resultaat.
- 3 Er is minder dan 5% kans dat het geneesmiddel niet beter werkt dan de placebo (dus er is minstens 95% kans dat het beter werkt).
- 4 Geen idee.

Zie de hoofdttekst voor het juiste antwoord, en de ontluisterende resultaten onder artsen en wiskundeleraren.

kansmaten). Zij kan dan met de stelling van Bayes de *a posteriori* kans $p(H_0 | X^N)$ op H_0 gegeven de data bepalen, als

$$p(H_0 | X^N) = \frac{p(X^N | H_0)p(H_0)}{p(X^N | H_0)p(H_0) + p(X^N | H_1)p(H_1)} \quad (3)$$

waarbij $p(X^N | H_0) := p_0(X^N)$ de kans is op data X^N onder de nulhypothese. In ons Bernoulli-voorbeeld (eerlijke muntjes) hebben we dus $p(X^N | H_0) = 2^{-N}$. De kans $p(X^N | H_1) := \int_{\theta \in \Theta} p_\theta(X^N | H_1) \pi(\theta) d\theta$ wordt gedefinieerd als de *marginale* kans op X^N volgens P_θ , waarbij θ zelf ook weer beschouwd wordt als verdeeld volgens een *a priori* kansdichtheidsfunctie $\pi(\theta)$. Bayes zelf en kort daarna Laplace namen voor onze Bernoulli H_1 de homogene verdeling $\pi(\theta) \equiv 1$, zodat

$$\begin{aligned} p(X^N | H_1) &= \int_0^1 p_\theta(X^N) d\theta \\ &= \int_0^1 \theta^{\sum_{i=1}^N X_i} (1-\theta)^{N-\sum_{i=1}^N X_i} d\theta. \end{aligned}$$

Er zijn binnen de statistiek hele veldslagen gevoerd over de merites van de Bayesiaanse aanpak; Fisher en Neyman wezen hem categoraal af. Maar zelfs als je sympathie hebt voor hun kritiek, is het toch zinvol om eens te kijken wat er zou gebeuren in een *geïdealiseerde* situatie waarin de natuur H_0 wel degelijk kiest door een eerlijk muntje te gooien. Je vindt dan dat bij data die een p -waarde van $0,05$ opleveren, de posterior kans van H_0 in de meeste gevallen vele malen *groter* is dan $\frac{1}{20}$ — hij kan in feite willekeurig dicht bij 1 liggen. (Dit probleem zou veel minder erg zijn als er een vaste omrekenfactor van p -waardes naar posterior kansen zou bestaan. Maar die bestaat helaas niet — de omrekenfactor hangt af

van de modellen, de toetsingsgrootheid, de hoeveelheid geobserveerde data N en de (stop-) regel waarmee N werd bepaald.) Dit geldt ook als we een andere gladd prior op p leggen die nergens 0 is — de precieze keuze van zo'n verdeling doet er heel weinig toe. Aangezien de meeste artsen (en wetenschappers!) p -waarden toch eerder op de Bayesiaanse manier interpreteren, is dit erg zorgelijk: $p < 0,05$ zegt, in termen van de kans op de nulhypothese gegeven de data, veel minder dan de meeste mensen (althans artsen) denken.

Dit interpretatieprobleem wordt vaak weggewuifd — statistiek is nou eenmaal moeilijk, we kunnen niet verwachten dat artsen (of rechters) het begrijpen. Probleem is dat het in ieder geval bij artsen wel gaat om mensen die geacht worden vakliteratuur te lezen, die bol staat met resultaten die significant zijn op ' $p < 0,05$ ' of ' $p < 0,01$ '. Bovendien: onder het motto *What do Math Teachers know about Statistics* heb ik dezelfde vraag als hierboven ook aan mijn (700-koppige) publiek gesteld tijdens een voordracht op de *Nederlandse Wiskunde Dagen*. Hoewel daar slechts 20 procent antwoord 3 gaf, gaf een schrikbarend percentage van 40 procent antwoord 4. Blijkbaar vinden wiskundeludenten het ook nog heel moeilijk. Samenvattend hebben we dus een methode, ontwikkeld in termen van Type-I-fouten, die geen goede Type-I-fout-interpretatie heeft (Probleem 2 hierboven), en ook geen goede Bayesiaanse interpretatie (Probleem 3).

Valt een veel algemener toepasbare methode die een veel concretere interpretatie heeft dan niet toch te prefereren? Ik

denk het wel — zowel Bayesiaans toetsen als de toets-martingaal zijn zo'n methode. Er is dan ook — bijvoorbeeld in de psychologie [19] — een soort Bayesiaanse revolutie gaande. Ik denk dat dit een stap in de goede richting is, maar dat de toets-martingaalmethode uiteindelijk meer mogelijkheden en minder interpretatieproblemen biedt — ik kom hierop terug aan het eind van dit artikel.

Een redelijk alternatief: de toets-martingaal

Voordat we de algemene definitie geven lichten we het idee van de toets-martingaal toe aan de hand van het Bernoulli-voorbeeld: stel dat we mogen *gokken* op de uitkomsten $X_1, X_2, \dots$ op de volgende manier: we hebben een bepaald beginkapitaal K_0 en mogen dat vrijelijk verdelen over uitkomst ' $X_1 = 0$ ' en ' $X_1 = 1$ '. Nadat X_1 gerealiseerd is, zeg $X_1 = x$, krijgen we twee keer onze inzet op x uitbetaald; de inzet op de andere uitkomst zijn we kwijt. Dus als we bijv. een fractie $q(1)$ van ons kapitaal op $X_1 = 1$ inzetten en een fractie $q(0) := 1 - q(1)$ op $X_1 = 0$, dan is ons nieuwe kapitaal K_1 na ronde 1 gelijk aan $K_1 = 2q(X_1)K_0$. We mogen nu het nieuwe kapitaal K_1 vrijelijk verdelen over de twee mogelijke uitkomsten van X_2 en krijgen opnieuw twee keer onze inzet op de echte uitkomst uitbetaald, terwijl we de inzet op de andere uitkomst verliezen. Als we bijvoorbeeld een fractie $q'(1)$ inzetten op $X_2 = 1$ en $q'(0) := 1 - q'(1)$ op $X_2 = 0$, dan is ons eindkapitaal na ronde 2 gelijk aan $K_2 := 2q'(X_2)K_1 = 4q'(X_2)q(X_1)K_0$. Zo gaat het spel door: we kunnen steeds K_j herverdelen over uitkomst X_{j+1} , en krijgen steeds twee keer onze inzet op de daadwerkelijke uitkomst terug, en dit gaat zo door tot aan ronde N als er geen data meer is, en we eindigen met eindkapitaal K_N . Deze manier van sequentieel-gokken-met-herinzet heet *Kelly gambling* in de economische literatuur. Een *gokstrategie* is een functie die elk initieel segment $X^t \equiv X_1, \dots, X_t$ van elke lengte $t \geq 0$ afbeeldt op een reëel getal $q(1 | X^t) \in [0, 1]$ dat aangeeft, gegeven verleden $X_1, \dots, X_t$, welke proportie van ons tot nog toe verzamelde kapitaal K_t we inzetten op uitkomst $X_{t+1} = 1$. We schrijven dus voortaan $q(X_2 | X^1)$ in plaats van $q'(X_2)$, om duidelijk te maken dat de strategie die we hanteren af mag hangen van het verleden. Ons eindkapitaal bij data X^N wordt dan gegeven door $K_N = M(X^N) \cdot K_0$, waar-

$$M(X^N) := 2^N \prod_{t=1}^N q(X_t | X^{t-1}) \quad (4)$$

We noemen de functie M , gedefinieerd op datasequenties van willekeurige lengte, de *toets-martingaal behorend bij gokstrategie r* .

We merken eerst op dat de uitbetaling (een factor 2 van de inzet) neerkomt op een *eerlijke gok als* de nulhypothese waar is. Immers, bij deze uitbetaling geldt dat, wat voor gokstrategie we ook hanteren, ons *verwacht* eindkapitaal onder de nulhypothese nooit groter is dan ons beginkapitaal. Als we met een bepaalde gokstrategie juist *wel* veel geld winnen, is dat dus een indicatie dat de nulhypothese onjuist is. Dit is in het kort waar de martingaalmethode op neerkomt: bij klassiek toetsen leggen we een *test statistic* (toetsingsgrootheid) vast, die een p-waarde bepaalt; hoe kleiner de p-waarde, hoe groter de indicatie dat de nulhypothese onjuist is. In de martingaalmethode leggen we een *gokstrategie* vast; hoe meer geld we daarmee winnen, hoe groter de indicatie dat de nulhypothese onjuist is.

In het Bernoulli-voorbeeld zouden we bijvoorbeeld op tijdstip t kunnen kijken naar de waargenomen frequentie van enen tot nu toe, $\hat{\theta}_t := \sum_{i=1}^t X_i / t$. Als dit sterk afwijkt van $\frac{1}{2}$ is dit, intuïtief, een indicatie dat de nulhypothese onjuist is en dat er meer winst te behalen valt als we een proportie van ongeveer $\hat{\theta}_t$ van ons geld op 1 zouden zetten. Nu is het gevaarlijk om *precies* $\hat{\theta}_t$ in te zetten: als $\hat{\theta}_t$ gelijk is aan 0 (alleen nullen gezien) of 1 (alleen enen gezien) zouden we *al* ons geld op 0 respectievelijk 1 zetten, en dus met een bepaalde kans ook al ons geld verliezen. We kunnen ons indekken voor dit risico door, net iets minder agressief, op tijdstip t een proportie van $\check{\theta}_t = \sum_{i=1}^t (X_i + 1) / (t + 2)$ op uitkomst 1 in te zetten. Dit blijkt een zeer effectieve gokstrategie te zijn onder het alternatief H_1 : als deze alternatieve hypothese juist is, winnen we met bovenstaande gokstrategie exponentieel veel geld. Meer specifiek, is het eenvoudig om aan te tonen dat ons verzamelde kapitaal K_N op tijdstip N gegarandeerd tenminste

$$M(X^N) = (N + 1)^{-1} \exp(2N(\hat{\theta}_N - \frac{1}{2})^2) \quad (5)$$

keer K_0 bedraagt [8]. Volgens de wet van de grote aantallen zal $\hat{\theta}_N$ naar θ convergeren, zodat (5) exponentieel stijgt als $\theta \neq \frac{1}{2}$. De ongelijkheid van Hoeffding impliceert

zelfs dat voor elke vaste $\epsilon > 0$, de kans dat $P_\theta(|\hat{\theta}_N - \theta| > \epsilon)$ exponentieel klein is in N ; als $\theta \neq \frac{1}{2}$ maken we dus exponentieel veel winst met kans vrijwel 1.

Opmerkingen

We mogen dus gokstrategieën gebruiken waarbij onze inzet op tijdstip t van het verleden $X_1, \dots, X_{t-1}$ afhangt; dit is zelfs cruciaal om winst te kunnen maken als de nulhypothese niet klopt. Maar de gokstrategie *zelf* mag niet afhangen van de data; deze moet feitelijk vaststaan voordat we de data gezien hebben. Als we de gokstrategie namelijk achteraf bepalen kunnen we altijd de triviale strategie gebruiken die al het geld op tijdstip t inzet op de daadwerkelijke uitkomst X_{t+1} ; dat zou natuurlijk op bedrog neerkomen. *Wel* kunnen we vrijelijk gokstrategieën combineren. In het bovenstaande geval zou bijvoorbeeld scepticus 1 kunnen denken dat de data weliswaar onafhankelijk Bernoulli θ zijn, maar dat $\theta \neq \frac{1}{2}$; scepticus 2 zou kunnen denken dat elke X_t weliswaar marginale kans $\frac{1}{2}$ heeft, maar niet onafhankelijk is van X_{t-1} ; dit zou getest kunnen worden door een gokstrategie die de hoeveelheid geld ingezet op 1 afhankelijk maakt van wat er op tijdstip $t-1$ is gebeurd. Als we nu denken dat scepticus 1 of scepticus 2 weleens gelijk zou kunnen hebben, maar we weten niet wie, dan kunnen we een *nieuwe* gokstrategie maken, waarbij we de gokstrategie van scepticus 1 en 2 combineren: we investeren 50 procent van ons beginkapitaal K_0 in de strategie van scepticus 1, en 50 procent in de strategie van scepticus 2. Vervolgens laten we beide sceptici hun strategieën spelen. Als een van de twee eindkapitaal K_N behaalt, behalen wij minstens eindkapitaal $K_N/2$. Formeel: als M en M' twee toets-martingalen zijn, dan is $\frac{1}{2}M + \frac{1}{2}M'$ er ook een. Als een van de twee sceptici 'gelijk' heeft, zal zijn kapitaal exponentieel groeien, en is die factor twee al snel verwaarloosbaar: we doen het dus 'bijna' zo goed als de beste van de twee. Het is lang niet zo eenvoudig om twee p-waardetoetsen te combineren.

Verder is van belang dat, als we deze methode gebruiken voor een daadwerkelijke hypothesetoets, we niet *echt* hoeven te gokken en we dus ook niet *echt* iemand hoeven te vinden die bereid is onze inzetten te accepteren en eventuele winsten uit te betalen:

Het gaat om een puur virtueel spel, waarbij we kijken *hoeveel winst we zouden maken als we volgens een bepaalde gokstrategie zouden gokken, onder uitbetalingen die eerlijk zouden zijn als de nulhypothese waar was.*

Formele definitie

Stel H_0 en H_1 zijn allebei verzamelingen van kansverdelingen over X^∞ . De nulhypothese is dat de data $X_1, \dots, X_N$ verdeeld zijn volgens een $P \in H_0$. Voor het gemak nemen we even aan dat alle uitkomsten X_t in een eindige verzameling $\mathcal{X} = \{0, 1, \dots, k\}$ vallen; uitbreiding naar het aftelbaar oneindige en continue geval is echter eenvoudig. Een toets-martingaal wordt gedefinieerd door twee componenten: een gokstrategie en een eerlijk uitbetalingsproces.

Een *gokstrategie* is een functie die, voor elk tijdstip t , gegeven elk *verleden* $X^{t-1} \equiv (X_1, \dots, X_{t-1})$ een vector $v_0, v_1, \dots, v_{k-1}$ bepaalt, waarbij v_j de fractie van het kapitaal, verzameld tot aan tijdstip $t-1$ is, dat ingezet zal worden op de uitkomst $X_t = j$. Als de daadwerkelijke uitkomst $X_t = j'$ is, dan schrijven we $v_{j'}$ als $q(X_t | X^{t-1})$. Elke functie $q: \bigcup_{t \geq 0} \mathcal{X}^t \rightarrow \mathbb{R}^k$ waarbij alle componenten van $q(\cdot | X^t)$ niet-negatief zijn en voor alle t , alle mogelijke realisaties van X^{t-1} , geldt dat $\sum_{x \in \mathcal{X}} q(x | X^{t-1}) = 1$, is een geldige gokstrategie. In ons Bernoulli-voorbeeld gebruiken we bijvoorbeeld $q(1 | X^t) = (\sum_{i=1}^t X_i + 1) / (t + 2)$.

Een *uitbetalingsproces* r is een functie die, voor elk tijdstip t , gegeven elk verleden $X^{t-1} \equiv (X_1, \dots, X_{t-1})$ een vector $w_0, w_1, \dots, w_{k-1}$ bepaalt, waarbij w_j de factor weergeeft waarmee de inzet op uitkomst j vermenigvuldigd wordt als $X_t = j$ daadwerkelijk de uitkomst is. Als de daadwerkelijke uitkomst j' is, dan schrijven we $w_{j'}$ als $r(X_t | X^{t-1})$. In ons Bernoulli-voorbeeld was $r(1 | X^{t-1}) = r(0 | X^{t-1})$ voor alle mogelijke realisaties van X^{t-1} . In het algemeen geldt dat als een fractie $q(X_t | X^{t-1})$ van het verzamelde kapitaal op tijdstip $t-1$ ingezet wordt op uitkomst X_t , dan is het kapitaal na tijdstip t dus gelijk aan $q(X_t | X^{t-1}) r(X_t | X^{t-1})$.

Eerlijke uitbetalingsprocessen: we komen nu bij het cruciale punt, namelijk dat we willen kijken naar weddenschappen die eerlijk (geen verwachte winst of verlies) zouden zijn onder H_0 . We zullen dit alleen definiëren voor het geval dat onder alle verdelingen in H_0 de data onafhankelijk zijn; uitbreiding naar het algemene geval

is zeer eenvoudig. In het geval dat de data onder H_0 onafhankelijk zijn, zeggen we dat een uitbetalingsproces *eerlijk* is onder H_0 voor gegeven gokstrategie q als voor elk tijdstip t , elk verleden $X_1, \dots, X^{t-1}$ geldt:

Voor alle $P \in H_0$:

$$\mathbb{E}_{X_t \sim P}(q(X_t | X^{t-1}) \cdot r(X_t | X^{t-1})) = 1. \quad (6)$$

Dit betekent dat het *verwachte* eindkapitaal $\mathbb{E}[K_t | X^{t-1}]$ na uitkomst X_t , gegeven uitkomsten X^{t-1} , altijd gelijk is aan het gerealiseerde kapitaal K_{t-1} na uitkomsten X^{t-1} . ‘Eerlijk’ betekent dus dat je in verwachting geen winst maakt. Verdere intuïtie achter deze definitie is het eenvoudigst in het geval dat H_0 enkelvoudig is, $H_0 = \{P_0\}$. In dat geval bestaat er een uitbetalingsproces r' dat eerlijk is onder H_0 voor willekeurige q . Het is daarmee ook eerlijk voor q die zodanig zijn dat er, voor elke realisatie X^{t-1} , een $x \in \mathcal{X}$ bestaat met $q(x | X^{t-1}) = 1$ en voor $x' \neq x$, $q(x' | X^{t-1}) = 0$, i.e. op tijdstip t wordt al het geld op x gezet. Dan kan (6) herschreven worden als:

$$\begin{aligned} \text{Voor alle } x \in \mathcal{X} \text{ met } P_0(X_t = x) > 0: \\ P_0(X_t = x) \cdot r'(x | X^{t-1}) &= 1, \\ \text{i.e. } r'(x | X^{t-1}) &= \frac{1}{P_0(x)}. \end{aligned} \quad (7)$$

De uitbetaling bij een uitkomst moet dus omgekeerd evenredig zijn met de kans op die uitkomst. In ons Bernoulli-voorbeeld betekent dit dus dat, bij beide uitkomsten, de inzet op de gerealiseerde uitkomst wordt verdubbeld.

De *toets-martingaal* behorende bij gokstrategie q en eerlijk (voor q) opbrengstproces r , is nu het proces $M^1, M^2, \dots$ waarbij $M^n \equiv M(X^n)$ gedefinieerd is als

$$M(X^n) := \prod_{t=1}^n q(X_t | X^{t-1}) \cdot r(X_t | X^{t-1}). \quad (8)$$

We hebben dus dat $K_n = M(X^n) \cdot K_0$, en wanneer je begint met beginkapitaal $K_0 = 1$, dan $K_n = M(X^n)$: de *toets-martingaal op tijdstip n meet het eindkapitaal dat je zou hebben verworven met beginkapitaal 1*.

We kunnen nu een hoge waarde van een toets-martingaal direct interpreteren als ‘sterke indicatie dat nulhypothese onjuist is’ — immers, als H_0 waar is dan is ons verwachte eindkapitaal niet groter dan ons beginkapitaal. Maar als we, zoals in klassiek pHT, graag grenzen op onze Type-I-fout willen, dan kunnen we een gelddrempel A instellen, en de nulhypothese verwerpen

als $M(X^N) \geq A$. Het mooie is nu dat deze procedure toch weer gerelateerd kan worden aan klassiek pHT: de type-I-fout van zo’n procedure is op zijn hoogst $\alpha := 1/A$, maar in dit geval geldt dit *onafhankelijk van de stopregel die N bepaalt*:

Stelling: Martingaal groot $\Rightarrow$ Robuuste p-waarde klein. *Laat M een willekeurige toets-martingaal zijn (zodat er dus een gokstrategie bestaat zodanig dat, voor alle n , $M(X^n)$ het verzamelde kapitaal is op tijdstip n bij beginkapitaal 1 en ‘eerlijke’ uitbetalingen). Dan geldt (vergelijk met (1)):*

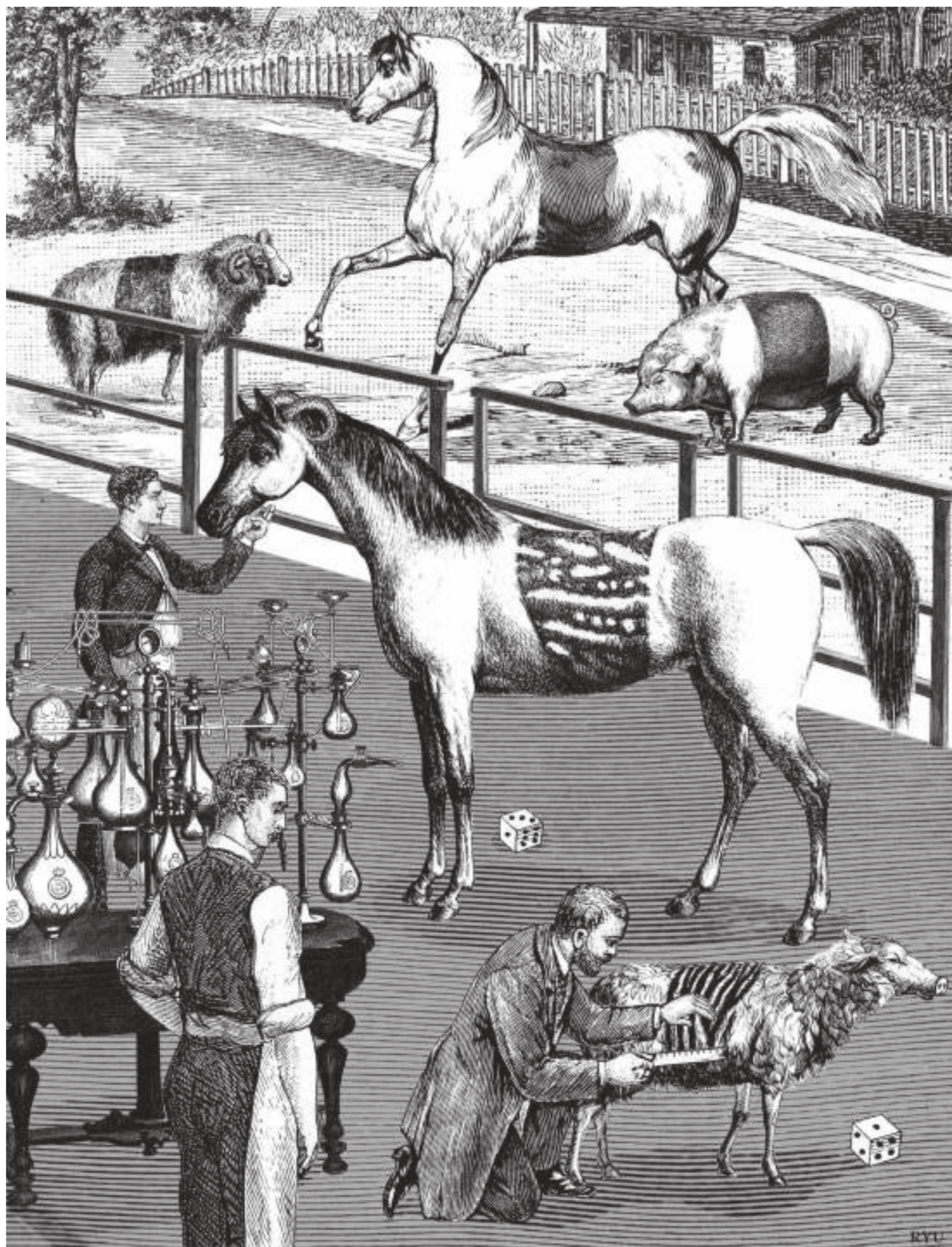
Voor elke $0 \leq \alpha \leq 1$:

$$P_0\left(\text{Er bestaat een } n \text{ met } \frac{1}{M(X^n)} \leq \alpha\right) \leq \alpha. \quad (9)$$

Deze stelling geldt voor algemene toets-martingalen en willekeurige H_1 ; hij kan worden uitgebreid naar meervoudige, willekeurige H_0 . Het bewijs volgt eenvoudig uit het ‘optional stopping theorem’ in martingalentheorie; voor een expliciet bewijs zie [16]. Ze impliceert dat de kans dat er *überhaupt* een n bestaat waarbij de martingaal over A heengaat kleiner is dan $1/A$. We kunnen $1/M(X^n)$ dus als een *robuuste* p-waarde zien: verwerpen als $1/M(X^n)$ kleiner is dan $1/A$ leidt tot een Type-I-foutkans $\leq 1/A$ onafhankelijk van de gebruikte stopregel! Daar komt bij dat $M(X^n)$ berekend kan worden zonder ‘counterfactual kansen’ te hoeven weten — het is zonder meer toepasbaar op de weersvoorspellingstoets van Probleem 1. Ook kunnen toets-martingalen van onafhankelijke experimenten — als eerste provisorische indicatie van de gecombineerde evidentie — zonder meer vermenigvuldigd worden [9].

Toets-martingalen versus Bayes

In vele praktische situaties, het Bernoulli-voorbeeld inclusief, is $H_0 = \{P_0\}$ enkelvoudig. In dat geval definieert elke Bayesiaanse hypothesetoets met uniforme a priori kansen op H_0 en H_1 automatisch een toets-martingaal, zoals we nu laten zien. Neem voor het gemak weer aan dat de uitkomstenruimte $\mathcal{X}$ eindig is en dat data volgens P_0 onafhankelijk is, en beschouw eerst een willekeurige kansverdeling Q over X^∞ , waarbij we de conditionele kans die Q toekent aan de gerealiseerde X_t gegeven X^{t-1} schrijven als $q(X_t | X^{t-1})$. Omdat voor elk verleden X^{t-1} geldt dat $\sum_{x \in \mathcal{X}} q(x | X^{t-1}) = 1$ en $q(x | X^{t-1}) \geq 0$ kunnen we q óók zien als gokstrategie, die



ons vertelt om een fractie $q(x | X^{t-1})$ van ons kapitaal op tijdstip t te zetten op uitkomst $X_t = x$. Uit (7) volgt dat voor eenvoudige H_0 geldt dat $r(x | X^{t-1}) = 1/p_0(x)$ een eerlijk uitbetalingsproces is, en dan geeft (8) dat

$$\begin{aligned} M(X^N) &= \prod_{t=1}^N \frac{q(X_t | X^{t-1})}{p_0(X_t)} \\ &= \frac{q(X_1, \dots, X_N)}{p_0(X_1, \dots, X_N)} \end{aligned} \quad (10)$$

een toets-martingaal is. De laatste gelijkheid volgt hier door *telescoping*, dat wil zeggen het herhaaldelijk toepassen van de definitie van conditionele waarschijnlijkheid en uitvermenigvuldigen. Dit betekent dus dat voor elke kansverdeling Q met kansfunctie q , de likelihood ratio $q(X^N)/p_0(X^N)$ een toets-martingaal definieert. Dit geldt dus ook als we Q gelijk zetten aan $P(\cdot | H_1)$, zodat $q(X^N) := \int p_\theta(X^N) \pi(\theta) d\theta$, de Bayesiaanse kansverdeling van de data gegeven model H_1 . We krijgen dan via de stelling van Bayes (3) dat, met uniforme priors $P(H_0) = P(H_1) = \frac{1}{2}$, de a posteriori odds (kansverhouding) oftewel de *Bayes factor* $B^N := p(H_1 | X^N) / p(H_0 | X^N)$ gezien kan worden als een toets-martingaal — er moet volgens de regel van Bayes immers gelden dat $B^N = M(X^N)$ met M als in (10).

Een mooi voorbeeld hiervan is de toets-martingaal die we definieerden boven (5): deze is inderdaad precies gelijk aan $p(H_1 | X^N) / p(H_0 | X^N)$ waarbij $P(\cdot | H_j)$ gedefinieerd is met een homogene π zoals onder (3) — feitelijk laat (5) dus een (monotone transformatie van een) Bayesiaanse posterior kans op H_1 zien! Dezelfde constructie werkt voor willekeurige (bijvoorbeeld met oneindige X , afhankelijke $X_t, \dots$) H_0 en H_1 , en willekeurige priors π binnen H_1 , zolang H_0 maar enkelvoudig is.

We kunnen dus elke Bayesiaanse toets met prior kans $\frac{1}{2}$ op enkelvoudige nulhypothese als een martingaaltoets zien en de posterior odds tegen H_0 als de virtuele winst van de bijbehorende gokstrategie. Dit feit is op zich al bekend sinds het werk van Doob in de jaren veertig. Een veel recenter inzicht is echter, dat er ook martingaaltoetsen bestaan die geen Bayesiaanse interpretatie hebben en toch zinvol (en soms zelfs te prefereren) zijn — met uitzondering van het klassieke werk van Robbins en anderen op het gebied van sequentieel toetsen (dit gaan weer terug tot de jaren vijftig — zie [12]) werden nuttige niet-Bayesiaanse martingaaltoetsen tot voor kort eigenlijk nau-

welijks gebruikt. In de laatste fase van mijn Vici-project heb ik gewerkt aan het ontwerpen van dit soort toetsen. Ik sluit dit artikel af met drie korte voorbeelden:

Voorbeeld 1. Het redelijker alternatief

Beschouw een martingaaltoets waarbij we de nulhypothese verwerpen zodra $M(X^N) \geq A$, zodat de kans op een Type-I-fout kleiner is dan $1/A$. Stel nu dat H_0 niet waar is, en dat de data verdeeld zijn volgens $P_\theta \in H_1 \setminus H_0$. Er treedt een Type-II-fout op als we toch de nulhypothese accepteren, dus als, bij steekproefgrootte N , $P_\theta(M(X^N) < A)$. We willen graag dat een goede toets ook een kleine kans op een Type-II-fout geeft. Beschouw nu ons Bernoulli-voorbeeld. Voor elke redelijke martingaaltoets, en voor elke $\theta \neq \frac{1}{2}$, gaat de Type-II-foutkans uiteindelijk naar 0 naarmate we meer data observeren die verdeeld zijn volgens deze P_θ . Het is ook duidelijk dat naarmate θ dichter bij $\frac{1}{2}$ zit, we meer data nodig zullen hebben, het probleem wordt dan immers moeilijker. We kunnen nu een kleine $0 < \epsilon \ll 1$ vastleggen, en ons afvragen hoe ver θ van $\frac{1}{2}$ moet af zitten om te garanderen dat de kans op een Type-II-fout bij steekproefgrootte N kleiner is dan ϵ . Dit is een maat voor de efficiëntie van een martingaaltoets. In het Bernoulli-geval geldt, voor elke Bayesiaanse toets met voldoende ‘gladde’ a priori verdelingen, dat we, met $\theta_0 = \frac{1}{2}$,

$$(\theta - \theta_0)^2 \geq C \cdot \frac{\log N}{N}$$

moet gelden om Type-II-foutkans ϵ te kunnen garanderen bij N uitkomsten, voor een constante C die afhangt van ϵ . Iets dergelijks geldt voor Bayesiaanse toetsen met enkelvoudige H_0 zodra H_1 een voldoende regulier ‘parametrisch model’ is, zoals bijvoorbeeld Poisson, (multivariaat) normaal, Gamma enzovoort.

Nu blijkt echter dat er ook martingaaltoetsen zijn waarbij we al Type-II-foutkans ϵ halen zodra we θ kiezen met

$$(\theta - \theta_0)^2 \geq C \cdot \frac{\log \log N}{N}.$$

We kunnen met zo’n toets dus, met eenzelfde Type-I-fout, een kleinere Type-II-fout halen: de toets is gevoeliger voor afwijken van de nulhypothese. [13] beschrijft martingaaltoetsen die deze efficiëntie halen, gebaseerd op een keuze voor q die de *switch distribution* werd genoemd door Van Erven e.a. [6]. Let wel: deze toets heeft

dus nog steeds alle martingaal-voordelen zoals geldigheid en implementeerbaarheid zonder kennis van de stopregel. De klassieke Neyman–Pearson p-waarde gebaseerde toets haalt, nog net iets beter, C/N , maar de prijs is dat deze garantie alleen geldt en de toets alleen implementeerbaar is als die N van tevoren vastgelegd is. Asymptotisch gezien is de switch-martingaaltoets dus bijna zo krachtig als de klassieke toets.

Voorbeeld 2. Het ontbrekende alternatief

Soms wil men toetsen of een nulhypothese (althans tot op zekere hoogte) correct is, zonder dat men een heel specifieke alternatieve hypothese in gedachten heeft. Er zijn tegenwoordig bijvoorbeeld machientjes te koop die een reeks enen en nulen produceren die via quantummechanische effecten tot stand zijn gekomen. De producenten claimen dat deze reeksen ‘echt’ random (onafhankelijk Bernoulli($\frac{1}{2}$)) zijn. Wanneer we de reeksen nu proberen te comprimeren met een standaard data-compressor als *rar* of *zip* (aanwezig op uw laptop) en we vinden dat we substantieel kunnen comprimeren, dan is dit een duidelijke aanwijzing dat de data in werkelijkheid *niet* volledig random zijn. Zo’n soort datacompressietoets is door Ryabko en Monarev [15] ook daadwerkelijk uitgevoerd op (niet-quantum) pseudo-toevalsgeneratoren, en zij vonden dat ze niet bepaald goed waren: substantiële compressie door middel van *rar* bleek mogelijk. Ryabko’s compressietoets is geen standaard Neyman–Pearson nulhypothesetoets, omdat het niet duidelijk is wat het alternatief precies is: bij een standaard toets zouden we een precies alternatief moeten formuleren (zoals ‘de data komen van een 1ste-orde Markov-keten’). Om dezelfde reden is Ryabko’s toets ook niet Bayesiaans. Ryabko’s toets — die mij buitengewoon overtuigend lijkt — kan echter wel degelijk als een supermartingaaltoets geïnterpreteerd worden — nog een extra reden om ons niet te beperken tot Bayesiaans toetsen.

We zien hier een twistpunt waarbij Neyman en de Bayesianen op één lijn stonden tegenover Fisher. Voor Neyman en Bayes moet er altijd een precies geformuleerd alternatief H_1 zijn: minder vertrouwen in H_0 betekent automatisch meer vertrouwen in H_1 . Ryabko’s randomness-toets is daarentegen Fisheriaans: compressie leidt ertoe dat men H_0 verwerpt, maar niet dat men

een bepaalde H_1 accepteert — zie Figuur 2 en het voortreffelijke overzicht ‘Could Fisher, Jeffreys and Neyman have agreed on testing?’ [2].

Voorbeeld 3. De meervoudige nulhypothese Het grootste, en interessantste, verschil tussen Bayesiaanse en martingaaltoetsen ontstaat echter wanneer de nulhypothese meervoudig is. De definitie van toets-martingaal vereist dan dat we een uitbetalingsproces q en opbrengstproces r construeren zodanig dat (6) geldt voor *alle* $P \in H_0$. Vovk [18] stelt deze eis maar noch Vovk noch enig ander auteur werkt verder uit hoe zo’n q en r geconstrueerd zouden moeten worden — dit zou dan op zo’n manier moeten gebeuren dat ook de kans op Type-II-fouten snel naar nul gaat. In de eer-

ste vier jaar van mijn Vici-onderzoek ben ook ik hier geen stap verder mee gekomen, maar in het laatste jaar is het dan uiteindelijk gelukt om voor een willekeurige H_0 en gokproces q een bijbehorend eerlijk opbrengstproces r te construeren met de benodigde eigenschappen. De resulterende toetsen bieden beduidend sterkere garanties dan Bayesiaanse toetsen, waarvoor (6) voor meervoudige H_0 in het algemeen niet geldt. Zo blijven Bayesiaanse toetsen in het meervoudig- H_0 -geval alleen geldig onder ‘optioneel stoppen’ als men de a priori verdeling π_0 binnen H_0 daadwerkelijk gelooft. In de praktijk worden meestal π_0 gekozen die handig rekenen — met ‘echt geloof’ heeft dat niet zoveel te maken. De martingaaltoetsen blijven geldig onder optioneel stoppen onder *elke* $P \in H_0$. $\diamond$

Biografie

Peter Grünwald is senior onderzoeker aan het Centrum Wiskunde & Informatica en hoogleraar statistisch leren aan de Universiteit Leiden. In 2010 ontving hij, samen met Harry van Zanten, de Van Dantzigprijs van de VvS+Or, de hoogste Nederlandse onderscheiding op het gebied van statistiek en OR. Hij is auteur van *The Minimum Description Length Principle* (MIT Press, 2007), een boek over data-analyse met behulp van datacompressie, gerelateerd aan de supermartingaalmethode. Dank aan Stéphanie van der Pas, die mij attenderde op [21], en aan Mark de Rooij en Eric-Jan Wagenmakers voor meerder nuttige discussies.

Referenties

- 270 auteurs, Estimating the reproducibility of psychological science, *Science* 349 (6251), 2015.
- J.O. Berger, Could Fisher, Jeffreys and Neyman have agreed on testing? *Statistical Science* 18(1) (2003), 1–12.
- C. Brownie en J. Kiefer, The ideas of conditional confidence in the simplest setting, *Comm. Statistical Theory and Methods* 6 (69) (1977), 691–751.
- A.P. Dawid, Present position and potential developments: Some personal views, statistical theory, the prequential approach, *Journal of the Royal Statistical Society, Series A* 147(2) (1984), 278–292.
- W. Edwards, H. Lindman en L.J. Savage, Bayesian statistical inference for psychological research, *Psychological Review* 70 (1963), 193–242.
- T. van Erven, P. Grünwald en S. de Rooij, Catching up faster by switching sooner: A predictive approach to adaptive estimation with an application to the AIC-BIC dilemma, *Journal of the Royal Statistical Society, Series B* 74(3) (2011), 361–397; with discussion, 397–417.
- R. Fisher, *Statistical Methods for Research Workers*, Genesis Publishing, 1925.
- P. Grünwald, *The Minimum Description Length Principle*, MIT Press, Cambridge, MA, 2007.
- P. Grünwald, Paranormale statistiek: over de vele problemen met p-waarden, en een redelijk alternatief, *STATOR* 16(3) (2015), 9–16.
- P. Grünwald, Safe probability, Technical report, 2016, arxiv.org/abs/1604.01785.
- J. Ioannidis, Why most published research findings are false, *PLoS Medicine* 2(8) (2005), doi:10.1371/journal.pmed.0020124.
- T.L. Lai, Martingales in sequential analysis and time series, 1945–1985, *Electronic Journal for History of Probability and Statistics* 5(1) (2009).
- S. van der Pas en P.D. Grünwald, Almost the best of three worlds: Risk, consistency and optional stopping for the switch criterion in single parameter model selection, Preprint, 2014, [arXiv:1408.5724](https://arxiv.org/abs/1408.5724).
- J.W. Pratt, On the foundations of statistical inference: Discussion of Birnbaum’s paper, *Journal of the American Statistical Association* 57 (1962), 314–315.
- B. Ya. Ryabko en V.A. Monarev, Using information theory approach to randomness testing, *Journal of Statistical Planning and Inference* 133(1) (2005), 95–110.
- G. Shafer, A. Shen, N. Vereshchagin en V. Vovk, Test martingales, Bayes factors and p-values, *Statistical Science* 26(1) (2011), 84–101.
- J. Ville, Etude critique de la notion de collectif, *Monographies des Probabilités* 3 (1939).
- V.G. Vovk, A logic of probability, with application to the foundations of statistics, *Journal of the Royal Statistical Society, Series B* 55 (1993), 317–351; with discussion.
- E.J. Wagenmakers, A practical solution to the pervasive problems of p-values, *Psychonomic Bulletin and Review* 14(5) (2007), 779–804.
- R.L. Wolpert, Testing simple hypotheses, in H.H. Bock en W. Polasek, eds., *Data Analysis and Information Systems: Statistical and Conceptual Approaches*, Springer, 1996, pp. 289–297.
- H.R. Wulff, B. Andersen, P. Brandenhoff en F. Guttler, What do doctors know about statistics? *Statistics in Medicine* 6(1) (1987), 3–10.

Rien Kaashoek

Afdeling Wiskunde
Vrije Universiteit
m.a.kaashoek@vu.nl

Evenement Lezingenmiddag 'L.E.J. Brouwer – Haarlems wiskundig wonderkind'

Brouwer, een wiskundige van wereldformaat, belicht van diverse kanten

Onder de intrigerende titel 'L.E.J. Brouwer – Haarlems wiskundig wonderkind' vond op vrijdagmiddag 2 september in het mooie Hodshon Huis van de Koninklijke Hollandsche Maatschappij der Wetenschappen (KHMW) in Haarlem een lezingenmiddag plaats. Dit symposium was georganiseerd door het Koninklijk Wiskundig Genootschap (KWG) in samenwerking met de KHMW, ter gelegenheid van het feit dat L.E.J. Brouwer vijftig jaar geleden overleed na een verkeersongeval. Rien Kaashoek, lid van het organisatiecomité, blikt terug. Meteen na dit verslag vindt u de teksten van de lezingen van de drie hoofdsprekers.

Brouwer bracht zijn middelbare schooltijd van 1892 tot 1897 door in Haarlem, eerst op de hbs (hij slaagde, 14 jaar oud, voor het hbs-examen in 1895). Ruim een jaar eerder, in januari 1894, was hij toegelaten tot het Stedelijk Gymnasium en deed dat eindexamen in 1897. Hij ontving twee getuigschriften die hem bekwaam verklaarden tot een universitaire studie in welke faculteit dan ook. Dat Haarlemse wonderkind, die wij nu kennen als een van de grootste wiskundigen die Nederland heeft voortgebracht, was het onderwerp van de lezingenmiddag.

Het programma was in tal van opzichten interessant voor een breed publiek. De circa 140 deelnemers, waaronder veel genodigden, kwamen uit de kring van de KHMW en het KWG of waren vrienden of kennissen van de sprekers of de organisatoren. Bijzonder was dat ook leerlingen van het Stedelijk Gymnasium in Haarlem en van het Maimonides College in Amsterdam onder de aanwezigen waren. De bijeenkomst werd geopend door prof.dr. Louise Gunning-Schepers, de voorzitter van de KHMW. Prof.dr. Erik van den Ban, de voorzitter van het KWG, was de dagvoorzitter.

De hoogleraren Jaap Korevaar, Dirk van Dalen en Alexander Rinnooy Kan waren de hoofdsprekers. Korevaar vertelde over zijn persoonlijke herinneringen aan L.E.J. Brouwer, in Nederland en de Verenigde Staten.

Van Dalen, Brouwer-biograaf bij uitstek, sprak over Brouwer als persoon en wetenschapper. Hij had twee maal zoveel tijd als de andere sprekers, maar zonder moeite had hij nog een uurtje extra gevuld. Sporen van Brouwer in de hedendaagse wetenschap was het onderwerp van Rinnooy Kan, oud-voorzitter van de KHMW. Hij vertelde ook hoe hij als wiskundestudent in Leiden voor het eerst over Brouwer hoorde tijdens het topologiecollege van professor Van Est.

Er was nog een ander bijzonder moment aan het einde van het programma, ook be-



Dirk van Dalen



Jaap Korevaar

langrijk voor de stad Haarlem: de officiële overdracht van het archief van Brouwer door professor Dirk van Dalen aan het Noord-Hollands Archief te Haarlem. Tussen haakjes, in dat archief zijn de meeste persoonlijke archieven van het Koninklijk Wiskundig Genootschap ondergebracht.

De deelnemers genoten van de gastvrije inloop aan het begin met koffie en thee en van de royale receptie aan het eind van de middag. Voor veel van de aanwezige wiskundigen had de receptie in de mooie zalen van het Hodshon Huis het karakter van een reünie. En dan was er ook nog een mooie leestafel.

Na afloop ontvingen alle deelnemers een mooi tasje met de beeltenis van Brou-

wer en met als inhoud een dankbrief van de voorzitter van het Koninklijk Wiskundig Genootschap, de tekst van de lezing van professor Van Dalen, een paar folders van het KWG, en verder ook nog een prachtig boekje, *Verhalen rond een foto. Lorentz' gouden doctoraat: een huldiging zonder weerga*, een uitgave van de KHMW, geschreven door Frits Berends (emeritus hoogleraar theoretische natuurkunde Leiden).

Ik heb de organisatie van het evenement vanaf het eerste begin meegemaakt. Voor de KWG-bestuursleden Geurt Jongbloed, Erik van de Ban en Joke Blom was het geen geringe klus. Veel dank zijn wij verschuldigd aan drs. Saskia van Manen,



De officiële overdracht van het Brouwer-archief, met zittend drs. Lieuwe Zoodma, directeur van het Noord-Hollands Archief, en staand professor Dirk van Dalen.

de secretaris van de KHMW, die het hele proces zeer goed begeleidde en onze 'linking pin' was met het KHMW-bestuur. Alle foto's in dit verslag zijn gemaakt door Hilde de Wolf (<http://www.hildedewolf.nl/kwg>), de 'huis-fotograaf' van de KHMW. Het was goed van verschillende kanten te horen dat het een zeer geslaagde middag was. ☺



Het publiek luistert aandachtig naar de lezing van Alexander Rinnooy Kan

Jaap Korevaar

KdV Instituut voor Wiskunde
Universiteit van Amsterdam
j.korevaar@uva.nl

Evenement Lezingenmiddag ‘L.E.J. Brouwer – Haarlems wiskundig wonderkind’

Enkele persoonlijke herinneringen aan L.E.J. Brouwer

Dit jaar is het vijftig jaar geleden dat de bekende Nederlandse wiskundige L.E.J. Brouwer overleed. Ter gelegenheid van dit feit organiseerden het Koninklijk Wiskundig Genootschap samen met de Koninklijke Hollandsche Maatschappij der Wetenschappen op 2 september een lezingenmiddag in het Hodshon Huis in Haarlem, de plaats waar Brouwer een belangrijk deel van zijn jeugd doorbracht. Dit artikel is een weergave van de lezing die Jaap Korevaar op deze middag hield.

L.E.J. Brouwer (Bertus) werd in 1881 geboren in Overschie; zijn ouders (van Friese afkomst) waren onderwijzers. Hij ontwikkelde zich tot een knappe slanke man, die in zijn lange leven veel vrouwen gecharmeerd heeft.

Brouwer ging in 1897 wiskunde studeren in Amsterdam, waar hij in 1907 promoveerde bij D.J. Korteweg, toen de bekendste Nederlandse wiskundige. (Korteweg is later ook internationaal bekend geworden door de Korteweg–de Vries-vergelijking, die een rol speelt in diverse onderdelen van de fysica.)

In 1904 had Brouwer een huisje laten bouwen in Blaricum, het Gooise dorp waar hij (later in een groter huis) zou blijven wonen. Nog in hetzelfde jaar maakte hij kennis met de elf jaar oudere gescheiden vrouw Lize de Holl, met wie hij trouwde. Zij werkte in de apotheek van haar moeder aan de Overtoom (waarboven zij door de week bleef wonen), en zou in 1907 het apothekersdiploma halen. Na een vol leven overleed Brouwer in 1976 als gevolg van een aanrijding dichtbij huis.

Ik zal niet meer zeggen over Brouwers leven, want dan zou ik toch maar anderen napraten, met name de volgende spreker, professor Dirk van Dalen uit Utrecht. Met assistentie van zijn vrouw Dokie heeft hij schitterende biografieën geschreven over Brouwer en zijn werk, zie met name de dikke boeken [7] en [8]. Wie iets korters zoekt kan beginnen met een bijlage van *Vrij Ne-*

derland uit 1981, geschreven door Dirk van Dalen, Hans Freudenthal en Gerrit Krol [6], of met de indringende bespreking van [7] door Tom Koornwinder [15]. Er is natuurlijk heel veel over Brouwer te vinden op internet: diverse artikelen in Wikipedia, en onder meer het biografische artikel door J.J. O'Connor en E.F. Robertson [20] in de St Andrews-reeks.

Brouwer leverde fundamentele bijdragen op twee gebieden van de wiskunde. Hij was een van de grote ontwikkelaars van de *topologie*, populair gezegd, de wiskundige leer van continue vervormingen. Daarbij komt meteen de vraag op of er bij zulke vervormingen iets op zijn plaats kan blijven. Die vraag leidt tot de beroemde dekpuntstellingen van Brouwer. De eenvoudigste zegt het volgende: als je een massieve bol continu naar zichzelf afbeeldt, dan blijft er tenminste één punt op zijn plaats. Algemener geldt dit voor elke begrensde gesloten *convexe* deelverzameling van $\mathbb{R}^n$. Andere belangrijke topologische resultaten betreffen het begrip dimensie en de graad van een afbeelding.

Brouwer is ook bekend als grondlegger van het *intuitionisme*. Terwijl (onder meer vanwege paradoxen) de grondslagen van de wiskunde internationaal veel aandacht kregen, ontwikkelde hij zijn intuitionistische opzet van de wiskunde. Fundamenteel voor Brouwer is de intuïtie van de *tijd*. We beleven een zekere gebeurtenis, en *later* een andere gebeurtenis. Zo ont-

staat ook het begrip tellen, en ontstaan een voor een de natuurlijke getallen. Alles in Brouwers wiskunde moet in de loop van de tijd geconstrueerd kunnen worden. Deze constructivistische opzet staat geen bewijzen toe uit het ongerijmde: als iets *niet* onwaar is, dan hoeft het nog niet waar te zijn.

Terwijl er ook elders ontwikkelingen waren trok *Brouwers* intuitionistische wiskunde de aandacht binnen en buiten Nederland. Daarbij ontstonden verschillende vormen van intuitionisme, denk aan H. Weyl, A. Fraenkel, M.J. Belinfante, A. Heyting, D. van Dantzig, H. Freudenthal, E.W. Beth, S.C. Kleene, en later Errett Bishop, D. van Dalen, A.S. Troelstra, H.P. Barendregt.

Zie voor het intuitionisme, naast de boeken door van Dalen, ook het boek door W.P. van Stigt [21]. De constructieve



Foto van Brouwer met zijn vrouw Lize op het omslag van de door Dirk van Dalen geschreven biografie [7].



wiskundes van Brouwer en anderen zijn tegenwoordig van groot belang voor type theorie en programmeren in de informatica. In het algemeen zijn zogenaamde *theorem provers* gebaseerd op beslisbare subsets van de logica. Zie Martin-Löf [19] en de Coq Proof Assistant [5] (verwijzingen met dank aan Paul Klint).

Als geen ander heeft Brouwer de Nederlandse wiskunde internationaal op de kaart gezet. Hij hield veel voordrachten in het buitenland, en genoot groot aanzien in Göttingen, tot de Nazi-tijd het Mekka van de wiskunde. Brouwer werd een belangrijke redacteur van de *Mathematische Annalen*, toen een toptijdschrift. Hij stimuleerde veel jonge wiskundigen. Door hem kwam Freudenthal naar Amsterdam, en anderen kwamen voor een kort of lang bezoek: P. Alexandrov en P. Urysohn, K. Menger, W. Hurewicz.

In 2007 werd Brouwer in Nederland geëerd met een postzegel van TNT Post. Let op de formule $\nexists A \vee \neg A$ in de foto!



Postzegel van Brouwer uit 2007

Herinneringen

Ik beschouw mezelf als alumnus van de Universiteit Leiden: doctoraal 1947, promotie 1949. Maar door de oorlog en zijn gevolgen ben ik alleen in 1940 enkele maanden in Leiden geweest, en later af en toe voor tentamens. Zo herinner ik mij een waarschuwing van professor Droste: "Als je iets wil bereiken in de wiskunde, verlies je dan niet in grondslagenonderzoek." Van 1947 tot 1949 was ik medewerker aan het pas opgerichte Mathematisch Centrum in Amsterdam. Daar zag ik het conflict tussen Brouwer en professor van der Corput (mijn chef) over de leiding bij de Amsterdamse universitaire wiskunde. Opvallend in die tijd was ook dat Brouwer een keer in één week zijn jaarlijks verplichte aantal uren college afwerkte; andere wiskundecollegisten legden toen hun colleges stil.

Ik maakte Brouwer voor het eerst persoonlijk mee op een vergadering van het Wiskundig Genootschap. Dat was in hotel Krasnapolsky in Amsterdam, op 25 oktober 1947 (datum achterhaald door Herman te Riele). Op die dag sprak G. F. C. Griss (wiskundeleraar in Gouda) over wat hij zijn *negatieloze wiskunde* noemde. Die was nog strenger dan het intuïtionisme van Brouwer. Zie Griss' artikelen [10, 11], en vergelijk Beth [1], van Dantzig [9], Heyting [12]. Na afloop was er een uitgebreide discussie voor het bord. Eerst tussen Griss en onder meer van Dantzig, die sprak over zijn affirmatieve wiskunde. Ik denk dat Freudenthal er ook bij was. Vervolgens kwam Heyting aan het woord; die probeerde uit te leggen wat *Brouwer* bedoeld had. Op het laatst verscheen Brouwer zelf, onverwachts, van achter uit de zaal; niemand had gemerkt dat hij binnengekomen was. Brouwer rende met wapperende jaspanden naar voren. En hij riep: jullie hebben het *allemaal* verkeerd begrepen!

De tweede keer dat ik Brouwer meemaakte was aan de Universiteit van Wisconsin in Madison, waar ik (via Purdue University, 1949–51 en de Technische Hogeschool Delft) begin 1953 aankwam als assistant professor. Wisconsin had een goed Math Department. De staf was breed georiënteerd en actief in onderzoek; daarnaast werd goed onderwijs belangrijk gevonden. In de jaren dertig had Madison het eerste universitaire rekencentrum in Amerika. Er waren ongeveer twaalf vaste stafleden, de meeste full professor. De bekendste waren R. H. Bing (topologie) en Stephen C. Kleene (logica, recursietheorie),



David van Dantzig

zie [13] en vergelijk [14]. Verder onder meer Rudolph E. Langer (differentiaalvergelijkingen, asymptotiek), editor van *Duke Journal* en later directeur van het Army Mathematics Research Center. (Walter en Mary Ellen Rudin waren er toen nog niet.)

Terug naar Brouwer. Hij was in 1951 met emeritaat gegaan, en als wiskundige wereldberoemd. In het najaar van 1953 maakte hij een grote rondreis door Canada en de Verenigde Staten, waarbij hij heel veel voordrachten hield. Het programma was georganiseerd in overleg met H. S. M. Coxeter in Toronto en onder meer Steve Kleene. De laatste was bekend met de Amsterdamse intuïtionisten en had na de oorlog enige maanden bij hen doorgebracht; vergelijk Beth [1], Mac Lane [18]. Kleene had Brouwer uitgenodigd voor een bezoek aan Madison, waar Brouwer twee voordrachten hield. (Ik heb de data niet kunnen achterhalen.) De eerste voordracht ging over zijn topologische werk. Hij begon de tweede, over intuïtionisme, met de mededeling dat zijn resultaten van de vorige dag natuurlijk niet deugden. Aan het slot vroeg ik brutaal aan Brouwer: "Meende u nu dat uw topologische werk niet deugt?" Zijn antwoord was: "What do you think?" "Wat denk je?"

Het is misschien leuk om te vermelden dat mijn vrouw Jopie en ik Brouwer de tweede dag bij ons thuis hadden uitgenodigd voor het avondeten. Na aankomst vertelde Brouwer geanimeerd over zijn recente safari in Zuid-Afrika. (Hij was daar op bezoek geweest bij zijn vroegere leerling Barend de Loor.) Jopie had haar best gedaan met een kipschotel in de oven. Toen we aan tafel



Arend Heyting



R. H. Bing



Stephen C. Kleene

gingen zei Brouwer opeens: “Iedereen weet natuurlijk dat ik vegetariër ben...”. Gelukkig had Jopie een goede soep gemaakt, waarmee ze Brouwer tevreden kon stellen!

Toen ik van 1964 tot 1974 aan UC San Diego werkte kreeg ik daar al snel als collega de bekende analyticus Errett Bishop, die kort daarvoor tot Brouwers constructivisme bekeerd was. Zie [2] en vergelijk Warschawski [22].

Tot slot een opmerking die Brouwer zelf wel aangesproken zou hebben. Rond 1990 hielden mijn leerling J.L.H. Meyers en ik ons in Amsterdam bezig met Chebyshev-kwadratuur op diverse meerdimensionale gebieden. Voor het speciale geval van een

boloppervlak (met oppervlakte 1) was het probleem om N punten zo te kiezen, dat de integraal van een functie over de sfeer optimaal benaderd wordt door het arithmetische gemiddelde van de functiewaarden in die punten. Preciezer: wat is het minimale aantal punten $N(d)$ dat je nodig hebt om met arithmetische gemiddelden, een exact resultaat te krijgen voor alle polynomen in x_1, x_2, x_3 van de graad d ? We construeerden stelsels punten op het oppervlak waarvoor $N(d) = O(d^3)$, en spraken het vermoeden uit dat het beste resultaat zou zijn $N(d) = O(d^2)$ (minder kan niet); analoog voor hoger-dimensionale sferen. Zie [16, 17]. Ons vermoeden is enkele ja-

ren geleden bewezen door Bondarenko en Viazovska in Kiev, zie [4]. Hierin speelt een dekpuntstelling van Brouwer een belangrijke rol. Kort daarna gaven Bondarenko, Radchenko en Viazovska een tweede bewijs. Dat gebruikt Brouwers werk over de graad van een afbeelding, en is verschenen in de *Annals of Mathematics* [3]. Brouwer had de resultaten zeker mooi gevonden, maar zou natuurlijk net als ik ook nog vragen om een constructief bewijs! ☞

Dankbetuiging

De auteur betuigt zijn hartelijke dank aan Tom Koornwinder voor de illustraties.

Referenties

- 1 E.W. Beth, Semantical considerations on intuitionistic mathematics, *Indag. Math.* 9 (1947), 512–517.
- 2 Errett Bishop, *Foundations of Constructive Analysis*, McGraw-Hill, 1967.
- 3 A. Bondarenko, D. Radchenko en M. Viazovska, Optimal asymptotic bounds for spherical designs, *Ann. of Math.* (2) 178 (2013), 443–452.
- 4 A. Bondarenko en M. Viazovska, Spherical designs via Brouwer fixed point theorem, *SIAM J. Discrete Math.* 24 (2010), 207–217.
- 5 *The Coq Proof Assistant*, <https://coq.inria.fr>.
- 6 Dirk van Dalen, Hans Freudenthal en Gerrit Krol, L.E.J. Brouwer en de eenzaamheid van het gelijk, bijvoegsel *Vrij Nederland*, nr. 8, 21 februari 1961.
- 7 Dirk van Dalen, L.E.J. Brouwer 1881–1966, een biografie, Bert Bakker, 2001.
- 8 Dirk van Dalen, L.E.J. Brouwer – Topologist, Intuitionist, Philosopher. *How Mathematics is Rooted in Life*, Springer, 2013.
- 9 D. van Dantzig, On the principles of intuitionistic and affirmative mathematics, I, II, *Indag. Math.* 9 (1947), 429–440, 506–517.
- 10 G.F.C. Griss, Negatielozie intuïtionistische wiskunde, *Nederl. Akad. Wetensch. Verslagen, Afd. Natuurkunde* 53 (1944), 261–268.
- 11 G.F.C. Griss, La mathématique intuitioniste sans négation, *Nieuw Arch. Wisk.* 3/3 (1955), 134–142 (postuum gepubliceerd verslag van een colloquiumvoordracht in Brussel).
- 12 A. Heyting, G.F.C. Griss and his negationless mathematics, *Synthese* 9(1) (1955), 91–96.
- 13 S.C. Kleene, On the interpretation of intuitionistic number theory, *J. Symbolic Logic* 10 (1945), 109–124.
- 14 S.C. Kleene, *Introduction to Metamathematics*, Van Nostrand, 1952.
- 15 T.H. Koornwinder, De Amsterdamse wiskundige L.E.J. Brouwer, n.a.v. een recente biografie door Dirk van Dalen, *Scoop* (Studievereniging NSA, UvA), mei 2002, 20–29.
- 16 J. Korevaar and J.L.H. Meyers, Spherical Faraday cage for the case of equal point charges and Chebyshev-type quadrature on the sphere, *Integral Transform. Spec. Funct.* 1 (1993), 105–117.
- 17 J. Korevaar and J.L.H. Meyers, Chebyshev-type quadrature on multidimensional domains, *J. Approx. Theory* 79 (1994), 144–164.
- 18 Saunders Mac Lane, Stephen Cole Kleene, in *Biographical Memoirs*, Vol. 75, The National Academies Press, 1998.
- 19 Per Martin-Löf, Intuitionistic type theory, https://en.wikipedia.org/wiki/Per_Martin-Löf.
- 20 J.J. O’Connor and E.F. Robertson, Luitzen Egbertus Jan Brouwer, www.groups.dcs.st-and.ac.uk/~history/Biographies/Brouwer.html.
- 21 W.P. van Stigt, *Brouwer’s Intuitionism*, Studies in the History and Philosophy of Mathematics, Vol. 2. North-Holland, 1990.
- 22 S.E. Warschawski, Errett Bishop—in memoriam, in *Errett Bishop: Reflections on Him and His Research*, San Diego, CA, 1983, *Contemp. Math.* No. 39, Amer. Math. Soc., 1985, pp. 33–39.

Dirk van Dalen

Departement Wijsbegeerte
Universiteit Utrecht
d.vandalen@uu.nl

Evenement Lezingenmiddag 'L. E. J. Brouwer – Haarlems wiskundig wonderkind'

Snapshots van Brouwers leven en werk

Dit jaar is het vijftig jaar geleden dat de bekende Nederlandse wiskundige L. E. J. Brouwer overleed. Ter gelegenheid van dit feit organiseerden het Koninklijk Wiskundig Genootschap samen met de Koninklijke Hollandsche Maatschappij der Wetenschappen op 2 september een lezingenmiddag in het Hodshon Huis in Haarlem, de plaats waar Brouwer een belangrijk deel van zijn jeugd doorbracht. Dit artikel is een weergave van de lezing die Dirk van Dalen op deze middag hield.

In de hier volgende tekst zullen wij niet zozeer de diverse wiskundige ontwikkelingen volgen, als wel een keuze maken uit de rijke sortering aan incidenten, ideeën en anekdotes die een interessant licht kunnen werpen op de onorthodoxe student/geleerde Bertus Brouwer. Bijna alle gebeurtenissen en overwegingen zijn te vinden in de biografieën overige uitgaven van en over Brouwers werk.

Jeugd en studie

Brouwer kwam in 1881 ter wereld in Overschie, nu een deel van Rotterdam. Brouwers ouders waren beiden onderwijzer. De vader accepteerde een baan in Medemblik, waar hij bleef tot 1892. De jonge Brouwer werd in 1890 toegelaten tot de hbs in Hoorn. (Dit leverde hem een plaats als jongste hbs-leerling op in het *Guinness Book of Records*.) Niet lang daarna verhuisde de familie naar Haarlem, waar vader Brouwer hoofd werd van een mulo. Uit Brouwers jonge jaren is niet zoveel overgeleverd, het opvallendste was nog de episode waarin hij zijn vader listig opsloot in de kelder om een hele nacht een te zijn

met de natuur van de Haarlemse duinen. Dit 'buiten slapen' bleef een uitdaging tot op hoge leeftijd. In 1953 logeerde hij bij de filosoof Von Wright in Helsinki, hij kon de verleiding niet weerstaan, vroeg en kreeg toestemming om in de tuin te slapen – en zulks geschiedde.



Het gezin Brouwer met Bertus staand rechts

In Haarlem stapte Brouwer over naar het gymnasium (1894); zijn hbs-diploma behaalde hij alsnog in 1895. Het zij terzijde opgemerkt dat Brouwer een gymnasium-diploma nodig had om toegelaten te worden tot de universiteit. Zijn gymnasium-jaren waren overigens welbestede, de kennis van de klassieken die hij opdeed kwam hem in zijn verdere leven uitstekend van pas. Verder nam hij ook deel aan het culturele leven ter plaatse, hij kende velen van de literair-artistieke garde, zoals bijvoorbeeld Van Deyssel, Boutens, Thorn Prikker.

Met het gymnasium-diploma op zak kon hij een universiteit uitzoeken; voor een bèta-man leek Leiden de beste keus, maar Brouwer hield het op Amsterdam. Hij had inmiddels een sterke voorkeur voor wiskunde ontwikkeld, en dan was Amsterdam met de grote Korteweg het aantrekkelijkst. Eenmaal ingeschreven volgde hij de colleges van onder meer Van der Waals, Korteweg en Van Pesch. Over de studie zelf valt niet zoveel te zeggen, met zijn begaafdheid scoorde Brouwer hoog. Er is een verhaal in omloop over het college van Van Pesch. Deze hoogleraar scheen nu en dan in de collegestof te verdwalen. Toen hij weer eens in een bewijs bleef steken stapte Brouwer uiteindelijk op het bord af, nam het krijtje uit de hand van de verblufte hoogleraar, maakte het bewijs af en retourneerde het krijtje. Ondanks zijn grote begaafdheid kostte de studie hem meer tijd

dan men gedacht zou hebben — in 1900 deed hij kandidaatsexamen en in 1904 doctoraalexamen. Niets om bezorgd over te zijn, maar toch — waarom deed deze briljante student zo lang over zijn studie? Er is een verklaring: de militaire dienst. In het toenmalige systeem kon een student alvast een deel van zijn dienstplicht vervullen tijdens de vakanties. Brouwer greep deze mogelijkheid aan, een beslissing die hem nog jaren berouwde. De superieure student, voor wie geen college of practicum te moeilijk was, bleek niet bestand tegen het militaire bestaan. Zijn mededienstplichtigen konden hem niet vergeven dat hij op alle punten slimmer was dan zij, en zijn superieuren dachten er al net zo over. Resultaat: Brouwer werd het mikpunt van alle al of niet openlijke agressie. Het gevolg was dat hij na iedere vakantie volkomen overspannen was en een maand of wat rust moest nemen. Dat betekende overigens niet dat hij bij de pakken neerzat. In 1901 maakte hij een voetreis naar Rome waar hij zijn studiegenoot en vriend Ruud Mauve opzocht. Die reis was niet zonder problemen, hij ontsnapte op het nippertje aan een roversbende, en eenmaal in Italië werd hij voor landloperij gearresteerd, voornamelijk omdat hij een rood boekje met het woord ‘socialisme’ in de titel op zak had. Gelukkig vond de politie in een andere jaszak een brief van de vermaarde wiskundeprofessor Bianchi en kon hij zijn reis weer voortzetten.

Terug in Nederland deed hij examen, huwde Lize de Holl, en liet een houten huisje — de hut — bouwen door zijn vriend



Het echtpaar Bertus en Lize Brouwer in de tuin

Ruud Mauve. Lize was een tien jaar oudere gescheiden vrouw, dochter van een huisarts op de Overtoom. Zij was getrouwd met een voormalige militaire arts, Peijpers, die een volle neef van haar was. Peijpers wenste geen kinderen, en greep desnoods zelf in om zwangerschappen te beëindigen. Uiteindelijk raakte Lize in verwachting en ontvluchtte het huis. Brouwer ontmoette haar en werd ongeneeslijk verliefd. Het paar trouwde op 2 augustus 1904, Konin-ginnedag. Lize studeerde farmacie en werd later apotheker in de apotheek die verbonden was geweest aan de praktijk van haar vader. De apotheek was gevestigd in een fraai gebouw, de voormalige dokterspraktijk, op de Overtoom. Met al deze beslom-

meringen op zijn pad besloot Brouwer nu ernst te maken met een promotie. Korteweg accepteerde hem als kandidaat — en Brouwer ging vervolgens zijn eigen weg. Brouwer was sterk filosofisch georiënteerd, sterker nog: mystiek. In 1905 interesseerde hij zich sterk voor de Leidse wijsgeer Bolland, en zijn onderzoek in die richtingen mondde uit in zijn Delftse lezing en het bijbehorende boek *Leven, Kunst en Mystiek*. Dit boek bleef wat marginaal totdat Frederik van Eeden het ontdekte en recenseerde onder de titel ‘Een machtig Brouwsel’.

De dissertatie

Ondanks al deze uitstapjes werkte Brouwer aan de opbouw van zijn dissertatie. Toch kon hij geen weerstand bieden aan zijdelingse boeiende en veelbelovende onderzoeken die uitmondten in fraaie artikelen (en een venijnig prioriteitsconflict). De promotie vond plaats in 1907. Er waren twee hoofdthema's: topologie en grondslagen van de wiskunde. De topologie was een voortzetting van de eerste aanzetten tot generalisaties van de meetkunde in de negentiende eeuw. Er waren prominente namen aan verbonden — Euler, Listing, Riemann, Betti, Poincaré,... In de jaren na de promotie wierp Brouwer zich volledig op deze nieuwe meetkunde — het huwelijk van meetkunde en algebra, met de analyse als bruidsmisje.

Het grondslagenonderzoek opende geheel nieuwe wegen. De eerdere pogingen tot fundering van de wiskunde gingen uit van bepaalde ideeën, zoals de logica (Pe-



De hut



Foto: Brouwer-archief

Het studentendispuut Clio met Brouwer tussen het schilderij en de spiegel en Adama van Scheltema rechts van de kandelaar

ano, Russell, Frege) en de verzamelingen (Cantor, Zermelo). Brouwer wenste de wortels van de wiskunde dieper te leggen, volgens hem waren zijn voorgangers er niet in geslaagd de harde kern van de wiskunde, namelijk de existentie van wiskundige objecten (in het bijzonder de natuurlijke getallen) aan te tonen. Brouwer vond die objecten in de menselijke geest; hier is een formulering van de basis van de wiskunde:

“...de oerintuïtie van de wiskunde (en van alle andere werkingen van het intellect) als het van kwaliteit ontdane substraat van alle waarneming van verandering, een eenheid van continu en discreet, een mogelijkheid van samendenken van meerdere eenheden, verbonden door een ‘tussen’, dat door inschakeling van nieuwe eenheden, zich nooit uitput.”

Brouwer is op tal van plaatsen teruggekomen op deze oerintuïtie. De oerintuïtie geeft, om zo te zeggen, het individu de getallen 1, 2, 3,..., en bij nadere introspectie zelfs het principe van volledige inductie cadeau.

Voor Brouwer zijn de wiskundige objecten dus construeren in de menselijke geest. Op dit punt verschilde hij wezenlijk van de bestaande filosofieën van de wiskunde. De consequenties zijn aanzienlijk: een object is een geconstrueerde (of construeerbare) structuur, en een bewijs is een constructie

van het gebouw dat door de taal omschreven wordt. De existentie van een object wordt aldus door een constructie gegarandeerd. Onder deze opvatting wordt het *Tertium non Datur* (Principe van de Uitgesloten Derde) — *A of niet-A* een constructieopgave en in het algemeen is er over de oplosbaarheid van zo’n opgave weinig te zeggen. Ergo het *Tertium non Datur* is geen geldig wiskundig principe. Nauwkeurige lezers zullen getroffen worden door Brouwers uiteenzetting op pagina 111 van de dissertatie, daar wordt het *tertium non datur* geaccepteerd. Maar helaas, Brouwer had de betreffende formulering ontleend aan het college van zijn filosofie professor, Bellaar Spruyt. En diens formulering deugde niet. In het proefschrift wordt verder



Foto: Brouwer-archief

Korteweg, de promotor van Brouwer

niet zoveel gezegd over TND, maar een wat omslachtige formulering van Hilbert — *Hilberts Dogma* (elk wiskundig probleem kan bewezen of weerlegd worden) — wordt kordaat afgewezen. Het proefschrift bevat tal van vooruitziende opmerkingen over de wiskunde en haar taal, de metamathematica, et cetera.

Eerste topologische periode 1909–1914

Na zijn promotie stortte Brouwer zich geheel op de topologie. Zijn onderzoek had hem de overtuiging gegeven dat in dit vakgebied nog tal van schatten begraven lagen. En inderdaad, Brouwer slaagde er in om in korte tijd een indrukwekkende hoeveelheid publicaties over dit onderwerp te publiceren. Een ruwe telling komt op veertig artikelen, met een aantal baanbrekende, schokkende resultaten. Vanaf de jaren twintig begon de wiskundige gemeenschap de Brouwerse resultaten en methoden op te nemen. We noemen een aantal van de belangrijkste innovaties: *invariantie van dimensie* (gevolgd door een prioriteitsconflict met Lebesgue), *dekpuntstelling*, *uniformisering van automorfe functies* (het laatste resulteerde in een conflict met Koebe, de koning van de functietheorie), *invariantie van gesloten krommen*, *de stelling van Jordan in hogere dimensies*, *de structuur van perfecte verzamelingen*, *de definitie van dimensie* (in de jaren twintig gevolgd door een prioriteitsconflict met Karl Menger). Het zij hierbij opgemerkt dat Brouwer in alle prioriteitsconflicten volkomen in het gelijk stond, maar dat zijn tegenstanders, in plaats van hun ongelijk te erkennen, er op den duur het zwijgen toe deden.

In die periode werd Brouwer gezien als de wiskundige tovenaars. Hij schreef daarover aan zijn vriend Carel Adama van Scheltema:

“Ofschoon ik tegenwoordig tamelijk vruchtbaar ben, en mij langzamerhand enige internationale faam en nijd heb verworven, moet je van mijn werk geen al te serieuze indruk krijgen, want ik heb nog altijd de intieme zekerheid, dat wiskundig talent gelijkwaardig is met abnormale ontwikkeling van de grote-teenagel.

Wel speel ik op congressen voor de pausen der wetenschap de rol van enthousiaste vaandrager, maar als ik in gedachtenrijke gesprekken ‘mit flam-

mender Begeistering' de verschietsen schilder, die mijn werk bezielen, laaft ondertussen mijn schijnbaar zo geabsorbeerde blik zich aan de monomanie hunner gelaatsuitdrukkingen, en ziet in sommigen troosteloos gevangen helden, in anderen giftmengende kobolden. ... Mijn productiviteit zal dan ook nooit een grootse schepping brengen, want ze wordt uitsluitend bevrucht door spotzieke ontleding van het bestaande.

Geen der vakgenoten zal dit echter ooit doorgronden, hoewel het enkelen op den duur bij mij onaangenaam te moede wordt, die gaan dan rond, en spreken kwaad."

De topologische activiteiten eindigen vlak voor de Eerste Wereldoorlog met een majestueus slotakkoord: *de exacte dimensiedefinitie*. Brouwers contacten met Duitsland, in het bijzonder Göttingen, werden verbroken. Hij keerde in de daarop volgende jaren dan ook terug tot de grondslagen. Hij had al incidentele artikelen over dit onderwerp gepubliceerd. Een daarvan heeft een wat curieuze rol gespeeld in de naamgeving binnen de grondslagen. Brouwer had zijn eigen school de naam *Intuitionisme* gegeven, gebaseerd op de oerintuïtie van het proefschrift. Aanvankelijk had hij zijn school de naam neo-intuitionisme gegeven, maar het 'neo' liet hij al snel vallen. De uiteindelijke naamgeving is te herleiden tot de titel van Brouwers inaugurele rede, 'Intuitionisme en Formalisme', afgedrukt in het *Wiskundig Tijdschrift* (1912), en bijna gelijktijdig in vertaling in het *Bulletin of the American Mathematical Society*. Hilbert nam de naamgeving direct over.

Brouwers eerste zuiver wiskundige ontwikkelingen van het intuitionisme zijn voornamelijk te vinden in zijn collegeaantekeningen. In het college verzamelingsleer van 1912–13 verschijnen aarzelend de zogenaamde keuzerijen. Dat wil zeggen rijen natuurlijke getallen die niet door een wet gegeven worden en die de mogelijkheid van vrije keuze toelaten. Hij had in zijn proefschrift al opgemerkt dat niet alle reële getallen door wetten gegeven konden worden, en hij noemde de overblijvende getallen *onbekende getallen*. Deze voorlopers van keuzerijen stonden, om zo te zeggen, voorlopig in de coulissen te wachten.

Het collegedictaat van 1915–16 gaat verder in op deze keuzerijen. Wat duidelijk wordt is dat Brouwer een coherente

visie had op, wat ik voor het gemak noem, het *intuitionistische universum*. Dat intuitionistische universum werd in feite de jaren twintig door Brouwer in zijn eentje opgebouwd en bestudeerd. Het was geen deel-universum van het klassieke wiskundige universum (zeg van Aristoteles, Cantor of Frege). Het verband tussen de beide universa is een traditioneel onderwerp van het metamathematisch onderzoek.

Na het einde van de Eerste Wereldoorlog wijdde Brouwer zich opnieuw aan de opbouw en verspreiding van de intuitionistische wiskunde.

Politiek, het Conseil en de boycot

Vanaf 1918 gaan politieke en wetenschappelijke meningsverschillen een rol spelen in Brouwers leven, en ook in de Europese wiskundewereld. Zoals alle oorlogvoerende partijen opgelucht waren dat in 1918 de gruwelen van de oorlog voorbij waren, zo hoopten de wiskundigen dat de terugkeer naar een normale verhouding snel zou plaatsvinden. Hier traden nu, niet geheel onverwacht, botsingen op tussen de wetenschappers van de Entente en van de Centrale mogendheden. De geallieerde wetenschap stichtte een internationale organisatie, het *Conseil International de Recherches*, waarvan de organisaties en geleerden van de Entente lid van mochten worden, maar Duitsers en Oostenrijkers uitgesloten waren. Brouwer verzette zich tegen die boycot, de wetenschap en de wetenschappers behoorde niet uit po-

litieke motieven verdeeld te worden. Hij deed dat in publicaties, vergaderingen, en ook door niet naar het internationale congres van het *Conseil* in Straatsburg te gaan, maar naar het congres van de *Naturforscherverein* in Bad Nauheim (1920). Een daad van protest die niet onopgemerkt bleef. Zijn bijdrage aan het congres baarde opzien, al was het alleen maar door de titel, 'Heeft ieder reëel getal een decimale ontwikkeling?'. Het artikel was een wonder van helderheid, niettemin vonden vele van de toehoorders het vreemd en onbegrijpelijk. Fricke schreef aan zijn oom, Felix Klein: "Brouwer moet natuurlijk heel serieus genomen worden, maar is in wezen onbegrijpelijk. Landau stelde voor, gezien Brouwers bijdrage, een sectie voor pathologische wiskunde te introduceren en die bij de medische sectie onder te brengen."

Maar de bom was gelegd, iedereen kon kennis nemen van de ideeën van deze eccentric geleerde die zelfs het beginsel van de uitgesloten derde ontkende. Een zo flagrante inbreuk op het gezonde verstand kon Hilbert niet laten passeren. Zijn gezag in Duitsland (en in de wiskunde) was zo groot, dat hij zich geen ernstige zorgen behoefde te maken. De situatie veranderde toen zijn reeds wereldvermaarde leerling, Hermann Weyl, zich bij Brouwer aansloot. In zijn opzienbarende artikel 'Über die neue Grundlagenkrise der Mathematik' (1921) sloot Weyl zich bij Brouwer aan met zijn uitroep "Und Brouwer, das ist die Revolution." Vanaf die tijd trok Hilbert door



Op het congres van de Naturforscherverein in Bad Nauheim in 1920. Op de voorgrond Hamburger. Middelste rij: Kerékjártó, Brouwer, Szasz en Landau. Achterste rij: Schur, Pólya en Bessel-Hagen.



Lize en Bertus Brouwer klaar voor de reis naar Bad Nauheim

Foto: Brouwer-archief

Europa met de boodschap “Brouwer vergist zich en die aangekondigde revolutie is slechts een Putsch.” Men moet bedenken dat Brouwer en Weyls revolutie niets minder was dan een ultieme belediging. Het gezag van Hilbert in Duitsland en zeker in Göttingen was legendarisch. Hij was niet alleen de koning van de Duitse wiskunde, maar ook de traditionele autoritaire geleerde wiens gezag zonder meer erkend werd. Over deze antieke hoogleraren zijn tal van anekdotes in omloop; over Hilbert vertelde Dirk Jan Struik dat hij tijdens zijn verblijf in Göttingen een afspraak wilde maken met Bernays — Hilberts beste leerling waar het ging om grondslagen-problemen — om de komende zondag een wandeling in de om-

geving te maken. Bernays dacht even na en sprak vervolgens: “Aber dann muss ich zuerst Herrn Geheimrat Zustimmung fragen.” Het hoeft dus geen verwondering te wekken dat Hilbert op tal van plaatsen zijn gehoor meedeelde dat Brouwer er volkomen naast zat. Volgens hem was Brouwer een verlate volgeling van Kronecker, en wilde hij eveneens de irrationale getallen uit de wiskunde bannen. Het zij hier opgemerkt, dat het hoogst onwaarschijnlijk is dat Kronecker zoiets serieus gezegd kan hebben, maar voor Brouwer gold dit zeker niet.

Hilberts publicaties (laat staan zijn toespraken) bevatten allerlei curieuze passages. Om een paar te citeren:

“Aus diesem Paradies dass Cantor uns geschaffen, soll uns niemand vertreiben können” (1926)

“Dieses Tertium non Datur dem Mathematiker zu nehmen wäre etwa, wie wenn man dem Astronomen das Fernrohr oder dem Boxer das Gebrauch de Fäuste untersagen wollte.”

“...die Mathematik ist eine voraussetzungslose Wissenschaft. Zu ihrer Begründung brauch ich weder den lieben Gott, wie Kronecker, noch die Annahme einer besonderen auf das Prinzip der vollständigen Induktion abgestimmte Fähigkeit unseres Verstandes, wie Poincaré, noch die Brouwersche Urintuition...”

Wat een wetenschappelijk-filosofische discussie had moeten zijn ontaarde in ongefundeerde beschuldigingen. In ieder geval vond Hilbert het gehoor aan zijn zijde. Courant schreef hem enthousiast

“Es wird Sie vielleicht freuen zu hören, dass Ihr Münster Vortrag in Kopenhagen geradezu wie eine Bombe eingeschlagen hat und von allen Seiten mit der grössten Begeisterung aufgenommen worden ist. Es freute mich auch ganz ausserordentlich zu sehen, dass endlich auch die Aussenstehenden anfangen zu verstehen, dass mit Ihrer Theorie das erlösende Wort gesprochen ist. Ich glaube, das von Ihrem Vortrag wirklich eine riesige Wirkung nach den verschiedensten Richtungen ausgehen wird. Auch von Hecke, dem es wieder gut geht, hatte ich einen begeisterten Brief darüber.” (Courant aan Hilbert, 10-09-1925)

In wezen kwam Hilberts verdediging/aanval niet uit boven het niveau van sappige uitvallen. De lezer zal zich afvragen hoe een onmiskenbaar geniaal en intelligent man zo laag kon vallen. Geplaagd door dezelfde vraag heb ik Bernays in een interview gevraagd hoe Hilbert zulke curieuze uitspraken kon doen. Zijn antwoord loste dat probleem op: “Ach, Hilbert hat sich die Sachen von Brouwer niemals angesehen.” Hoe teleurstellend ook, hier lag de oplossing. Hilbert bestreed een zelfbedachte misvatting. Hilberts publicaties en voordrachten waren overigens niet louter negatief. Hij begon in de jaren twintig serieus zijn formalisatieprogramma uit te werken.

En Brouwer, wat deed hij? In feite was hij volledig bezet met zijn opbouw van de

intuitionistische wiskunde, maar hij vond toch ook wel tijd om hier en daar voordrachten te houden. In een voordracht gehouden in 1923 geeft Brouwer zijn mening over Hilberts formalistische programma dat een opbouw van de wiskunde op grond van axioma's bepleit, waar de betrouwbaarheid van het systeem gegarandeerd wordt door een consistentie bewijs: "Aan het bereiken van dit doel behoeft geenszins getwijfeld te worden, maar daarmee is nog geen wiskundige waarde verkregen; een niet door een tegenspraak weerlegde onjuiste theorie die niet door enige contradictie gestopt wordt is daarom niet minder onjuist, zoals een door geen reprimerend gerecht verworpen misdadige politiek daarom niet minder misdadig is."

Na Hilberts uitvoerige en herhaalde kritiek op Brouwers programma besloot Brouwer voor eens en altijd een afdoende expositie van de diverse standpunten in schrift neer te leggen. Hij deed dat in het artikel 'Intuitionistische Betrachtungen über den Formalismus' (1928). Na een uitvoerige bespreking van zijn vier *Einsichten* formuleerde Brouwer zijn visie op de ontwikkeling van het intuitionisme en de zwakheden van het formalisme als volgt:

"Volgens het voorafgaande heeft het formalisme van het intuitionisme slechts weldaden ontvangen en kan zij in de toekomst nog verdere weldaden verwachten. Dientengevolge zou de formalistische school het intuitionisme enige erkenning kunnen betuigen, in plaats van op honende wijze er tegen te polemiseren, en daarbij niet eens de juiste auteurschap in acht te nemen... Bovendien zou de formalistische school moeten bedenken dat in het kader van het formalisme van de eigenlijke wiskunde tot dusver nog *niets* in veiligheid gesteld is (omdat de consistentie van het axiomastelsel nog steeds uitblijft). Daarentegen heeft het intuitionisme op grond van zijn constructieve verzamelingsdefinitie en de hoofdeigenschap der finiete spreidingen reeds enige theorieën van de wiskunde zelf met onwankelbare zekerheid opnieuw opgericht. Als dus de formalistische school, afgaande op haar in druk verschenen beweringen, bij het intuitionisme bescheidenheid opgemerkt heeft, dan zou dat voor haar een aanleiding zijn om, wat deze deugd aangaat, niet bij het intuitionisme achter te blijven."

De Brouwer-Hilbert-discussie eindigde in zoverre onbeslist, dat het formalisme nog steeds een consistent systeem in het vooruitzicht stelt. Voor Brouwer belangrijke gebeurtenissen waren de voordracht over intuitionisme in Berlijn (1927) en de Weense voordracht 'Mathematik, Wissenschaft und Sprache'. Deze laatste voordracht waar in detail de intuitionistische positie behandeld werd, was mede belangrijk omdat Wittgenstein onder zijn gehoor was (en misschien Gödel). Er is een onmiskenbare invloed van Brouwers lezing op Wittgensteins inzichten.

De invloed van de Berlijnse cursus moet niet onderschat worden, mede omdat hij de eerste complete expositie van het intuitionisme was [Brouwer, 1992], en omdat het intuitionisme hierdoor in Duitsland een onverwachte zichtbaarheid verkreeg. Brouwers optreden maakte furore bij de studenten, die zich naar aanleiding van Hilberts denigrerende opmerking over Brouwers ideeën trots *Putschisten* noemden. De Berlijnse student Freudenthal volgde Brouwers colleges; omdat hij vooraf het intuitionisme grondig bestudeerd had, was hij als enige in staat een zakelijke discussie met Brouwer te voeren (persoonlijk mededeling).

De jaren twintig eindigden wat de Grundlagenstreit betreft in een schaakmat en de discussie verflauwde. Het Bologna-

congres plaatste Brouwer en Hilbert wel in de schijnwerpers, maar voornamelijk wat betreft politieke en organisatorische details (de *Mathematische Annalen*-affaire). Plotseling in 1931 veranderde het grondslagenlandschap. Op het congres 'Tagung für Erkenntnislehre der exakten Wissenschaften' dat in 1931 in Königsberg gehouden werd maakte een jonge logicus, Kurt Gödel, bekend dat de geformaliseerde rekenkunde incompleet was. Dit was de verrassing van de eeuw: Hilberts programma moest falen. Men kan zich de opwindning voorstellen — een ramp voor de simpele vorm van het formalisme. Van de groten der grondslagen was alleen Hilbert op het congres, hij miste helaas Gödels voordracht omdat hij op dat tijdstip zelf moest optreden. Von Neumann, de snelste denker van zijn generatie, had direct gezien dat Gödels resultaat nog verder strekte: formele systemen zoals die voor de rekenkunde kunnen hun eigen consistentie niet bewijzen: exit Hilberts programma. Hilbert was door zijn aanhangers niet op de hoogte gebracht van de verstreckende resultaten van Gödel, men achtte deze te pijnlijk en volgens de folklore werd hij pas in het begin van 1932 op de hoogte gesteld. Hij was niet alleen teleurgesteld, maar werkelijk boos.

En hiermee kwam een einde aan de Grundlagenstreit, de underdog Brouwer had gelijk gekregen.

Het Bologna-congres en de politiek

Terwijl de wiskundige discussie gaande was werd de laatste fase van het boycotconflict uitgevochten. Er was een internationaal wiskunde congres aangekondigd in 1928 in Bologna. Het hete hangijzer was: worden Duitsland en Oostenrijk uitgenodigd? De sfeer was allang niet zo gespannen meer als in 1920, maar de meningen liepen hier en daar uiteen. Brouwer kon het niet laten zijn mening te ventileren, volgens hem (en sommige Duitsers) waren de wiskundigen uit de centrale landen ten onrechte langdurig van internationale samenwerking geweerd, met ondeugdelijke argumenten en vaak met grove beledigingen. De geallieerde partijen hadden het meest geleden onder de oorlogshandelingen en men kan zich voorstellen dat in het bijzonder de Franse en Belgische wiskundigen gedurende de oorlog en in de jaren direct volgend op de vrede van Versailles weinig vleierende opmerkingen ventileerden over hun Duitse collega's. De



Hilbert en Weyl

Foto: Brouwer-archief

Duitse geleerden hadden tijdens de oorlog eveneens tamelijk tactloos gehandeld toen Duitsland allerlei, meest terechte, verwijten gedaan waren. Het Duitse document is bekend geworden als ‘Verklaring der 93’; het ontkende de verwijten met een heftig “Es ist nicht wahr.”

Er was nog een steen des aanstoots: de publicatie van het Riemann-deel van de *Mathematische Annalen*. Sommige redacteuren, waaronder Hilbert, wilden in een aanzet naar verzoening Franse auteurs opnemen; Brouwer en enkele anderen verzetten zich daartegen. De tegenstemmers wonnen, een uitslag die Hilbert in het bijzonder Brouwer nooit vergeven heeft. De Bologna-conferentie was weer zo’n twistpunt. Hilbert was voor deelname van Duitsland, en Brouwer was tegen. Uiteindelijk werd de keuze vrij gelaten, en een aanzienlijke delegatie vertrok naar Bologna. Hoewel de Centralen slechts als ‘waarnemers’ werden toegelaten, was dit het einde van de splitsing. In het vervolg was de inschrijving vrij voor iedereen.

Hilbert was in die periode al ernstig ziek en in zijn bezorgdheid over het verdere verloop van internationale wiskundige samenwerking achtte hij Brouwer niet langer geschikt als lid van de redactie van de *Mathematische Annalen*. En na enig overleg met de overige redactieleden werd Brouwer de wacht aangezegd. Dit ontkende een gigantische ruzie. Einstein, die eveneens in de redactie zat, vond Hilberts beslissing te ver gaan, hij sprak van een ‘oorlog tussen de kikkers en de muizen’. Hij weigerde het document te ondertekenen. Uiteindelijk werd besloten de redactie te reorganiseren en over te gaan op een kleinere redactie, waar Brouwer niet in voorkwam, maar waarbij men hoopte dat dit de pil enigszins zou vergulden voor Brouwer. Zoals te verwachten was, voelde Brouwer zich toch dodelijk beledigd. Hij trok zich vanaf die tijd terug uit de Duitse wiskundegemeenschap.

Dit was, gekoppeld aan het genoemde resultaat van Gödel, het definitieve eind van de langdurige wrijving. Brouwer vermeed verdere internationale activiteiten en was in de jaren dertig nauwelijks wiskundig actief.

Een Blaricumse burger

Sinds zijn vestiging in Blaricum onderhield Brouwer bepaalde banden met de lokale gemeenschap. Hoewel hij gezien werd als



Brouwer aan het werk in zijn tuin in Blaricum

‘die grote geleerde’, trok hij normaal op met zijn burens en dorpsgenoten. Zo ging hij, toen een moeder van een kleine jongen hem vertelde dat haar zoontje ziek was, met een boek onder zijn arm naar haar huis en las de jongen langdurig en herhaald voor. Hij kon ook uitstekend omgaan met adolescenten en hun problemen. Een geval dat aan de vergetelheid onttrokken is, betrof de jonge man Steinmetz. Deze Blaricumse jongen zat in een periode van onzekerheid en besluiteloosheid over zijn toekomst. Op de een of andere manier kwam hij in contact met Brouwer, die zich zijn lot aantrok. In indringende en persoonlijke gesprekken zag hij kans om hem een nieuwe kijk op de toekomst te geven. Steinmetz meldde zich uiteindelijk bij de marine. Daar had hij het tot luitenant gebracht toen de oorlog uitbrak. Na de capitulatie weigerde hij zijn erewoord aan de bezetter te geven, dat hij zich niet tegen het nieuwe gezag zou verzetten; hij had immers al de eed op hare Majesteit afgelegd. Het gevolg was dat hij zich moest melden voor krijgsgevangenschap. Hierop volgde een tocht langs diverse kampen, waar hij herhaaldelijk ontsnapte. Ten slotte kwam hij in het vermaarde kasteel Colditz terecht, dat de reputatie had van een hermetische bewaking. Niettemin zag hij, als eerste of een van de eersten, kans met een medegevangene te ontsnappen en naar Zwitserland te vluchten. Vandaar trok hij verder naar Engeland. Ongeveer een jaar

voor zijn dood heb ik hem nog geïnterviewd. De Brouwer-episode stond hem nog helder voor de geest, en hij was Brouwer blijvend dankbaar voor de toenmalige morele steun.

Brouwer maakte ook deel uit van de Gooische Significa-groep, met Van Eeden, Henri Borel, van Ginneken en anderen. Bijeenkomsten vonden vaak plaats op het gazon voor Brouwers huis. Verder nam hij deel aan de lokale politiek. Hij was lid van de Neutrale Partij en nam met succes deel aan de gemeenteraadsverkiezingen. In 1935 kwam hij aan de top van de lijst, en in 1939 scoorde Brouwer het hoogste van alle lokale kandidaten.

Verder organiseerde hij in de jaren twintig de Amsterdamse topologische school in Blaricum. Beroemdheden als Alexandrov, Vietoris, Menger en Wilson maakten deel uit van die school.

Onderwijs

De meest uiteenlopende onderwerpen werden op Brouwers colleges behandeld, algebra, analyse, topologie, verzamelingsleer, intuïtionistische wiskunde, mechanica,... De studenten waren in het algemeen gefascineerd, hier was een man die ter plaatse nieuwe dingen, of oude dingen op een nieuwe manier, aansneed. Hij nam het niet zo nauw met de regels van het onderwijs. Zo vertelde Bob van Rootselaar dat hij bij Brouwer thuis tentamen deed over een of ander onderwerp. Toen alles naar bevredig-

ging verlopen was, vroeg Van Rootselaar: “Krijg ik nog een tentamenbriefje?” Waarop Brouwer antwoordde: “Het is hier geen kakschooltje, ik kom wel op je examen.”

Oud-studenten bleven hem vaak jarenlang trouw. Mijn wiskundeleraar kon met grote bevrediging melden dat hij met Brouwer in de trein had gezeten.

Onroerend goed

Huizen en grond fascineerden Brouwer. Hij had zijn grond in Blaricum gekocht van professor Van Rees; een progressief man die vroeger leiding gegeven had aan een commune, met de naam ‘Christen Anarchisten’. In 1927 kocht Brouwer de aangrenzende villa De Pimpernel. In de jaren twintig kocht hij een huis in Bad Harzburg (voor rekening van Cor Jongejan, zijn secretaresse en vertrouweling). Even later kocht hij nog een huis in Berlijn, en er zijn geruchten dat hij ook een buitenhuis in Fischerkaten (tegenwoordig in Polen) bezat.

Omdat wij niet wisten welk huis Brouwer in Harzburg bezat, hebben mijn vrouw en ik Harzburg bezocht. Het adres was vage-lijk bekend, en eenmaal ter plaatse vonden wij een oude man die al vanaf de jaren twintig in de straat woonde. Hij kon bevestigen dat de professor daar gewoond had. Hij vertelde dat Brouwer zijn vader aangeboden had wat marken van hem te

kopen voor guldens. Die zouden dan waardevaster zijn. De vader had het aanbod afgeslagen.

Bij de aankoop van een aangrenzend stuk grond had hij in Blaricum het recht op overpad bedongen. Om dat recht zeker te stellen moest hij eenmaal per jaar het grondstuk oversteken. Van deze plicht maakte hij een kijkspel. Als er een party was in de tuin van de betrokken buurman verzamelde Brouwer wat getrouwen, klom over het hek en marcheerde over het landgoed, om even later met dezelfde optocht terug te keren.

In 1927 had Brouwer zich op financieel terrein gewaagd, en wel om een dubieuze beleggingspraktijk aan de kaak te stellen. Er was een investeringsmaatschappij, Sodalitas-Medicorum Oblatorum Ordinis Sancti Benedicti, die een spa in Boedapest exploiteerde. Omdat het toezicht in handen was van een katholieke organisatie werd de belegging als zeer betrouwbaar gezien in Nederland. Brouwer vond al snel dat het niet pluis was met deze organisatie. Toen hij vervolgens actie ging voeren ten bate van zijn medebeleggers kwam hij in aanraking met de louches aspecten van de kerk en het bankwezen. Het kostte hem vele bezoeken aan Boedapest en juridische consulten. Zijn wiskundestudenten merkten dat hun hoogleraar vaak niet kwam opdagen omdat hij naar Boedapest was. Het scheelde niet veel of hij was zelf bankroet gegaan. Freudenthal merkte in een brief aan Hopf schertsend op dat “Brouwer er al in geslaagd was om sommige bisschoppen in het gevang te krijgen, om zo te zeggen met de straf die hij voor Koebe, Hilbert en Menger in gedachten had.” In 1944 had Brouwer 67 kilo documenten verzameld over de Sodalitas-affaire. Uiteindelijk werd de zaak opgelost met onder andere een gevangenisstraf voor de Nederlandse bankier die verantwoordelijk was voor de Nederlandse zijde van de affaire. Deze affaire was zeker medeverantwoordelijk voor Brouwers ontbrekend wiskundig onderzoek in de jaren dertig.

De bezetting

In de jaren '40-'45 werden de universiteiten met enig wantrouwen gezien door de nieuwe machthebbers. Zoveel studenten, dat moest wel uitlopen op verzet. Daarom werd in 1943 de studenten een verklaring ter ondertekening voorgelegd die hoor-

zaamheid aan het toen heersende beleid beloofde. De verklaring is onder de naam ‘loyaliteitsverklaring’ de geschiedenis ingegaan. Ondertekening was niet verplicht, maar wie weigerde kon opgeroepen worden om in Duitsland te gaan werken. De introductie van de verklaring riep vrijwel direct onenigheid op in de studenten-gemeenschap. Enerzijds betekende de ondertekening een zekere mate van loyaliteit ten opzichte van de bezetter, anderzijds hield een weigering met grote zekerheid de beëindiging van de studie en (onvrijwillige) steun aan de Duitse industrie in. Tegelijkertijd was er een zeker gevoel dat ‘tekenen’ de mogelijkheid bood om in het verzet te gaan. Binnen de Academische Senaat van Amsterdam waren de meningen verdeeld, de rechtmatigheid van het loyaliteitsbesluit werd betwist, en volgens een deel van de senaatsleden kon de ondertekening op ieder moment door de student teruggetrokken worden.

Op het Mathematisch Instituut werd een mededeling ophangen (8 april 1943) dat de verklaring redelijkerwijs zonder bezwaar getekend kon worden, maar dat studenten, wanneer zij zich niet langer met de inhoud konden verenigen altijd nog hun verklaring konden intrekken en hun studie staken. De mededeling was ondertekend door Brouwer en de lectoren Bruins en Heyting. De loyaliteitsverklaring was de bron van lange en heftige discussies in universitaire kring. De naoorlogse hoogleraar N.G. de Bruijn was later van mening dat het introduceren van die verklaring door de overheid en de bezetter, al of niet bedoeld, voornamelijk de studenten uiteen gedreven had. De principiële onder de studenten verwierpen het tekenen zonder meer; de meer pragmatische studenten, waaronder onderduikers en verzetsstrijders zagen in dat een enkele handtekening onder een verwerpelijk document hen vrijstelde van tewerkstelling in Duitsland, en meer gelegenheid gaf voor verzetswerk. Tijdens de oorlog en na de bevrijding was de loyaliteitsverklaring een bron van felle discussies. Het moet hierbij opgemerkt worden dat communistische stafleden ondertekening vaak heel begrijpelijk vonden. Een prominent lid van de Gerrit van der Veen groep, de latere hoogleraar Van der Tweel, gaf in een interview te kennen dat hij in 1943, en nog steeds, de ondertekening een respectabele actie vond. Was Brouwer dan toch wellicht een meeloper? Daar kan



Foto: Brouwer-archief

Brouwer met zijn secretaresse Cor Jongejan en zijn vrouw Lize op de Brocken, de hoogste berg in de Harz.

nauwelijks sprake van zijn. Tijdens zijn directeurschap van de wiskundefaculteit was het Mathematisch Instituut een belangrijk centrum van illegaal werk. Hoewel hij zelf niet deelnam, zou hij bij een Duitse inval zeker als medeschuldige beschouwd zijn, met alle gevolgen van dien. In het instituut werden documenten van allerlei soort vervalst, de activiteiten gingen lange tijd ongestoord door, maar op een moment was er een inval waarbij onder andere de conciërge Koppers werd gearresteerd. Hij werd op transport gesteld en overleed uiteindelijk in een concentratiekamp.

In Blaricum speelde Brouwer zijn bescheiden rol door op zijn terrein in en onder de huisjes en hutten onderduikers te herbergen. Lang na de oorlog hadden wij het geluk de dame te treffen en te interviewen die tijdens de bezetting als onschuldig meisje de onderduikers van voedsel voorzag en de huisjes schoon hield.

Na de bevrijding werd Brouwer door de zuiveringscommissie opgeroepen. In feite viel hem niet veel te verwijten, maar in de sfeer van afrekening werd hij toch voor enige tijd geschorst. De lezer die hem nu zo langzamerhand kent, kan zich voorstellen dat hij zich uitermate beledigd voelde.

Naoorlogse jaren – de reiziger

Brouwer hervatte zijn werk aan het instituut, waar inmiddels een omvangrijke personeelsswisseling plaats had gevonden. Freudenthal had, hoewel niet op eigen wens, Amsterdam verlaten voor Utrecht. Nieuwe benoemingen waren die van onder anderen Van der Corput, Van der Waerden (maar met enige bittere gevoelens gezien zijn verblijf in oorlogstijd in Leipzig), Popken, van Dantzig, Heyting, Beth; Bruins werd lector. Na een paar jaar hervatte Brouwer zijn voordrachten in het buitenland, de eerste was in 1947 in Leuven. In 1948 werd Brouwer benoemd tot *Foreign member* of the Royal Society en in 1955 volgde een benoeming tot Honorary Fellow of the Royal Society in Edinburgh. In de jaren volgend op 1947 was hij gasthoogleraar in Cambridge. In 1949 en 1950 nam hij deel aan congressen in Parijs, en in 1951 en 1952 (Shearman lectures) droeg hij weer voor in London. Zuid-Afrika ontving hem in 1952 (Barend de Loor, Pretoria, promoveerde in 1925 bij Brouwer).

Ten slotte kreeg hij een uitnodiging voor een voordracht op het Canadian Congres in Toronto in 1953. Na afloop bezocht hij tal

van universiteiten in de Verenigde Staten. Bij het Toronto-congres demonstreerde hij zijn nog steeds aanwezige fitheid bij de congrespicnic; op een gegeven moment was de leiding Brouwer kwijt — heeft iemand de grote man gezien? En toen bleek hij in een boom te zitten.

Na Toronto bezocht hij onder andere Urbana, Lafayette, Ithaca, Berkeley, Cambridge, Boulder, Cambridge (Mass), en New York. Deze reis was een uitgelezen gelegenheid om collega's en vrienden uit het verleden te ontmoeten. In Berkeley ontving Tarski hem, na Brouwers voordracht sprak hij de gedenkwaardige woorden "Het is heel goed dat Brouwer hier gesproken heeft, dan kunnen de wiskundigen zien dat er in en om de logica genoeg moeilijke en diepe dingen gebeuren." In New York werd Brouwer opgevangen door de mysticus-filosoof Gutkind (evenals Brouwer, Landauer en Van Eeden lid van *De koninklijke van geest*, een groep filosofen uit de jaren voorafgaand aan de eerste wereldoorlog). Tijdens dit bezoek deed zich een curieus voorval voor: de Gutkinds woonden in het Master Institute en Hotel. Toen ze met Brouwer het gebouw binnengingen troffen ze Paul Wittgenstein, de broer van de grote wijsgeer. Paul was de beroemde eenhandige pianist voor wie onder anderen Ravel een prachtig pianoconcert had geschreven; hij had een studio in het zelfde instituut. Eenmaal in de lift stelde Gutkind Brouwer voor als een vriend van Ludwig. Toen sprak

Paul de woorden "Ik wens niets van doen te hebben met een vriend van mijn broer." Hij drukte op het knopje en verliet de lift op de eerste stop. Verder bezocht Brouwer nog Einstein en Gödel in Princeton. Gödel schreef na afloop aan zijn moeder dat een Hollandse professor een bezoek van veertien dagen gebracht had, een beroemde man die sterk betrokken was in zijn gebied. Het ligt voor de hand dat Brouwer niet met het latere onderzoek op de hoogte was — Gödel schreef: "Hij is al 72 en niet meer up to date."

Brouwer genoot van zijn reis. Bij een van de instituten die hij bezocht voor een voordracht werd hij enigszins bedremmeld ontvangen door de directeur, die hem meedeelde dat tot zijn spijt het instituut niet in staat was om het beloofde honorarium uit te keren. Brouwer vertelde later "Ik zei niets maar gaf hem de twee uur voordracht in plaats van de één uur voordracht."

Op MIT droeg Brouwer ook voor, zijn lokale gastheer was Dirk Jan Struik. De twee kenden elkaar nog uit de goede oude tijd, de jaren tien en twintig. Eenmaal in Cambridge aangekomen, bezocht Brouwer met Struik de resten van Thoreaus cottage at Walden (Concord). De naam Walden was Brouwer niet onbekend, Van Eedens kolonie in Bussum was naar Thoreaus kolonie genoemd. Toen Struik in 1962 gasthoogleraar in Utrecht was vond Brouwer een charmant huisje voor hem op loopafstand van zijn eigen huis.



Brouwer kijkt met beeldhouwer Wertheim het beeld van zijn hoofd



Foto: Brouwer-archief

Een groet aan Brouwer uit Warschau van de top van het grondslagenonderzoek.

De late jaren

In 1959 verloor Brouwer zijn vrouw Lize, hij leefde daarna in De Pimpernel. Cor Jongejan had de functies van de huisvrouw overgenomen. Al vanaf de jaren tien was zij een huisvriendin van de Brouwers. Ze was als vriendin van Louise opgenomen, en uiteindelijk is ze nooit meer weggegaan. In feite was ze Brouwers secretaresse, maar later kreeg ze een echte aanstelling bij het Mathematisch Instituut. Nog later zette ze zich in voor de apotheek.

In zijn laatste jaren trok Brouwer zich meer terug, de ongemakken van een hoge leeftijd bleven hem niet bespaard. Daarenboven had hij zijn financiële problemen; Brouwer had nooit een warme verhouding met de belastingdienst gehad; zijn bezittingen (grond, de apotheek,...) hadden niet geresulteerd in een harmonieuze verhouding met de inspecteur van belastingen, zijn achterstallige belastingbetalingen waren een vast thema van de correspondentie. Hij had tegenover vrienden zich uitgelaten in termen als "Ik maak er zo'n rotzooi van dat niemand er meer uit kan komen." Nog in oktober 1966 stuurde de inspecteur hem een dwangbevel!

Brouwer bleef tot op hoge leeftijd een actief correspondent. Hij hield contacten met zijn oude collega's en vrienden. Er was

ook een nieuwe vriendin in zijn leven gekomen: Emilie Haspels. Emilie had een avontuurlijk leven gehad, toen de Tweede Wereldoorlog uitbrak deed zij in haar functie van archeologe onderzoek in Turkije. Daar werd ze gearresteerd en tewerkgesteld als schoonmaakster van schoolgebouwen. Toen het tot de gezaghebbers doordrong dat ze wel meer kon kreeg ze een baan in het onderwijs. Na de oorlog terug in Amsterdam kreeg ze een aanstelling als hoogleraar archeologie. Er ontstond een hechte vriendschap tussen hen. Zij reisde voortdurend de hele wereld over, en er zijn tal van brieven bewaard gebleven die van die kalme liefde getuigen.

Op 6 december 1966 maakte een aanrijding op de Torenlaan een eind aan zijn leven; het was al donker toen hij de straat overstak om een cadeautje weg te brengen en hij had zich gehuld in een grauwe paardendeken. Bij zijn begrafenis waren, op zijn verzoek, alleen enkele naaste vrienden en familieleden aanwezig, van de wiskundige gemeenschap alleen Euwe.

In 2003 werd bij zijn graf een gedenkplaat aangebracht. En zo werd Nederlands grootste wiskundige dan toch nog met een monument geëerd.

En het Intuitionisme?

Brouwers topologie werd al spoedig erkend. Iedere serieuze topoloog waren in zijn opleiding de noviteiten van Brouwer onder ogen gekomen. Met het intuitionisme was dat wat problematischer. De doorsnee wiskundige zou waarschijnlijk zeggen, dat is heel mooi en belooft veel, maar ik volg mijn klassieke voorvaders. Het hielp natuurlijk ook niet dat Hilbert en zijn volgelingen zich uiterst kritisch uitlieten over Brouwers nieuwe wiskunde. We kunnen nu toch zeggen dat het intuitionisme als grondslagenfilosofie en constructieve praktijk algemeen erkenning gevonden

heeft. Daarnaast bracht het intuitionisme een interessante systematisering van de constructieve methoden; vooral de informatica heeft ingezien dat de intuitionistische visie op de wiskunde en haar algoritmische perspectieven ver uitgingen boven een sektarische wiskundebeoefening, maar een uiterst nuttig en krachtig apparaat verschaft voor een systematisch begrip van 'effectief' en 'algoritme'. Op deze wijze kan men de intuitionistische wiskunde ook beschouwen als een deel van de bestaand klassieke wiskunde dat de constructiviteit behandelt. Met enige gepaste ironie zou men kunnen spreken van 'intuitionisme light'. Wat hier telt is niet de ultieme fundering van de wiskunde, maar een nuttige systematisering van het begrip 'constructief'.

Alle foto's in dit artikel komen uit Brouwers collectie, met uitzondering van de foto's van de hut (Dokie van Dalen) en het graf (Gerard de Vries).



Foto: Gerard de Vries

Het monument bij het graf van Brouwer in Blaricum

Referenties

- 1 M. van Atten, *On Brouwer*, Wadsworth, London, 2003.
- 2 L.E.J. Brouwer, *Collected Works*. Vol. 1, *Philosophy and Foundations of Mathematics*, A. Heyting, ed., North-Holland, 1975; Vol. 2, *Geometry, Analysis Topology and Mechanics*, H. Freudenthal, ed., North-Holland, 1976.
- 3 L.E.J. Brouwer, *Brouwer's Cambridge Lectures on Intuitionism*, D. van Dalen, ed., Cambridge University Press, 1981.
- 4 D. van Dalen, ed., *L.E.J. Brouwer en C.S. Adama van Scheltema. Droeve snaar, vriend van mij*, Privé domein. Arbeiders Pers, 1984.
- 5 D. van Dalen, *L.E.J. Brouwer 1881–1966. Een Biografie. Het heldere licht der wiskunde*, Bert Bakker, 2001.
- 6 D. van Dalen, ed., *L.E.J. Brouwer en de grondslagen van de wiskunde*, Epsilon Uitgaven, deel 51, 2001.
- 7 D. van Dalen, *L.E.J. Brouwer. Topologist, Intuitionist. Philosopher. How Mathematics is rooted in Life*, Springer, London, 2010.
- 8 D. van Dalen, ed., *The Selected Correspondence of L.E.J. Brouwer*, Springer, 2012.
- 9 D. van Dalen, ed., *L.E.J. Brouwer – van Mystiek tot Wiskunde*, Epsilon Uitgaven, deel 74, 2013.
- 10 A.S. Troelstra en D. van Dalen, *Constructivism in Mathematics, I, II*, North-Holland, 1988.

Alexander Rinnooy Kan

voormalig voorzitter van de KHMW
ahgrinnooykan@hotmail.com

Evenement Lezingenmiddag 'L. E. J. Brouwer – Haarlems wiskundig wonderkind'

Sporen van Brouwer

Dit jaar is het vijftig jaar geleden dat de bekende Nederlandse wiskundige L. E. J. Brouwer overleed. Ter gelegenheid van dit feit organiseerden het Koninklijk Wiskundig Genootschap samen met de Koninklijke Hollandsche Maatschappij der Wetenschappen op 2 september een lezingenmiddag in het Hodshon Huis in Haarlem, de plaats waar Brouwer een belangrijk deel van zijn jeugd doorbracht. Dit artikel is een weergave van de lezing die Alexander Rinnooy Kan, de vorige voorzitter van de KHMW, op deze middag hield.

Dames en heren, het is een grote eer en een groot genoegen om bij deze mooie bijeenkomst het woord te mogen voeren. Een grote eer en alleen al een genoegen omdat ik het niet zo vaak meer meemaak dat ik bij een bijeenkomst waar ik spreek verreweg de jongste spreker ben. En ik zeg dat vooral met groot respect voor de wat oudere sprekers hier, die al hebben gedemonstreerd heel veel te bieden te hebben waar het gaat om de persoon van Brouwer. In circuskringen bestaat de uitdrukking 'a hard act to follow'. Zo voel ik mij nu ook gepositioneerd na de vorige spreker, Dirk van Dalen, met zijn encyclopedische kennis van Brouwer, zijn leven en werken.

Herinneringen aan Brouwer

Brouwer was een groot wiskundige. En grote wiskundigen, grote onderzoekers, grote geleerden, laten vooral sporen na door hun werk. Voor Brouwer geldt dat zeker. De eerste spreker, Jaap Korevaar, liet u zelfs nog een recent voorbeeld daarvan zien. Brouwer laat zijn sporen zeer nadrukkelijk na, en dat zal zeker ook nog wel even duren. Hij had een bijzonder arbeidzaam le-

ven, waarin hij bijzonder veel heeft gepresteerd. Mede-grondlegger van de topologie, grondlegger van het intuïtionisme; talloze wiskundigen zijn geïnspireerd door zijn werk en zijn prestaties. En nogmaals, ik kan niet genoeg de lof zingen van zijn biograaf, Dirk van Dalen: zijn wetenschappelijke biografie, de beschrijving van zijn leven, het is een indrukwekkend oeuvre op zich. Ik sta dus voor u met de nodige bescheidenheid, in de allereerste plaats, maar ook wel met een zekere nostalgie. Ik ben te jong om herinneringen aan Brouwer zelf te hebben. Het beste dat ik voor elkaar kan krijgen is een herinnering aan iemand die een herinnering had aan Brouwer. En dat was professor Van Est — vergunt u mij een kort moment van nostalgie — die in Leiden waar ik wiskunde studeerde, het college topologie verzorgde. Dat deed hij op een heel bijzondere manier. Wie hem gekend heeft zal ook het beeld herkennen, in het Engels klinkt het mooier dan in het Nederlands: 'a scholar and a gentleman'. Hij gaf prachtig college, en beantwoordde de vele vragen van zijn studenten, met licht opgetrokken wenkbrauwen van verbazing, maar immer hoffelijk. In de loop van dat college

kwam ook de naam Brouwer ter sprake. Natuurlijk vooral toen de dekpuntstelling aan de orde kwam. De dekpuntstelling is een resultaat dat aan iedereen uit te leggen valt. De metafoor van het kopje thee waarin geroerd wordt, hebt u al voorbij zien komen. De onvermijdelijkheid van een kruintje van een bepaald type kapsel is de tweede aansprekende metafoor. Zo ook werd de dekpuntstelling neergezet, en bij die gelegenheid vertelde Van Est ook iets van zijn eigen herinneringen aan Brouwer. Dat waren hele typerende herinneringen, die enigszins getekend werden door wat Brouwer was overkomen na de oorlog, waarover straks nog iets meer. Dat verhaal alleen al maakte Brouwer een onvergetelijke persoonlijkheid. Er zijn niet heel veel stellingen die worden geëtaleerd en aangekeikt met de naam van de ontdekker eraan gehangen, maar de dekpuntstelling was daar één van.

Brouwer heeft een geweldig oeuvre nagelaten, en dat is niet onopgemerkt gebleven. Hij is gelukkig en terecht op vele momenten in zijn leven daarvoor geëerd: in 1954 kreeg hij een eredoctoraat aan de Universiteit van Cambridge, in 1950 al had hij een foreign membership verworven, een lidmaatschap, van de Royal Society. Hij werd ook door vele universiteiten benaderd om daar hoogleraar te worden, maar is toch uiteindelijk de Universiteit van Amsterdam altijd trouw gebleven. Hij was natuurlijk ook, zoals dat bij dit soort

levenslopen hoort, een zeer actief redacteur van vele vooraanstaande tijdschriften, waaronder uiteraard de *Mathematische Annalen*. En toch, wie overziet wat hij gepresteerd heeft, en hoe hij geleefd heeft, realiseert zich ook dat herinnering aan hem niet in alle opzichten een gemakkelijke is. Ook daarin vaar ik in allereerste instantie op wat Van Est liet doorschemeren. Een verhaal dat gecombineerd werd met wat na de Tweede Wereldoorlog Van der Waerden overkwam. Van der Waerden, ook een groot wiskundige die na een lang en moeizaam proces uiteindelijk in 1950 benoemd kon worden aan de Universiteit van Amsterdam, maar in 1951 alweer vertrok en uiteindelijk in Zürich belandde. Het leidt geen enkele twijfel dat de beeldvorming rond Brouwer in sterke mate is beïnvloed door die naoorlogse jaren. In sterke mate, en bepaald niet in positieve zin. Dat heeft veel te maken met de moeizame zuivering die in die periode heeft plaatsgevonden, het verifiëren van de antecedenen van de hoogleraren met een terugblik op wat ze in de oorlogsjaren al dan niet gedaan hadden. Brouwer is daar zelf bijzonder verbiterd door geraakt.

Een verbluffend leven

Brouwer was in alle opzichten een bijzonder complexe man en een bijzonder excentrieke persoonlijkheid. Kleurrijk is hier een understatement. Dat hebt u al begrepen uit een aantal van de anekdotes die hier zijn gepasseerd. Vandaar dat het zo'n gelukkige zaak is dat we in die vuistdikke biografieën van Dirk van Dalen veel van die kleurrijke details kunnen terugvinden, waardoor Brouwer tot leven komt als wetenschapper, maar ook vooral als mens. Ontleed en vereeuwigd. Dat is alleen al een gelukkige zaak, omdat het bijvoorbeeld dat ene incident, van die naoorlogse periode, in een passend licht zet. Want dat beeld van Brouwer — dat ik eerlijk gezegd ook zelf wel enigszins met mij meedroeg — als iemand die een zekere sympathie koesterde jegens het bezettersregime, dat beeld is volstrekt onverdiend. Het heeft hem zeer onterecht gedwarsboomd in veel van zijn naoorlogse kansen. Ware dat niet gebeurd, dan zou hij zonder enige twijfel in de voetsporen van Weyl naar de Verenigde Staten zijn vertrokken met een mooie benoeming aan een gerenommeerde universiteit, en dat had hem een zonniger levenseinde bezorgd dan hem nu gegend was.

De biografieën van Van Dalen zijn dus informatief, nuttig, ze trekken het beeld recht, blijkbaar nodig, maar ze zijn niet alleen daarom belangrijk en het lezen meer dan waard. Ze schetsen ook heel veel details van een verbluffend leven. Dat is eigenlijk het enige woord dat hier past, een verbluffend leven, want Brouwer was niet alleen een geniaal wiskundige, maar leidde ook een buitengewoon kleurrijk bestaan. Ik ken geen wiskundige — het hier aanwezige gezelschap niet buitengesloten — die zo'n kleurrijk en excentriek leven heeft geleid als Brouwer. Het leest als een schitterend verhaal. U heeft het eerste begin daarvan al in detail gehoord uit de mond van Dirk van Dalen zelf. Het is de loopbaan van een wonderkind: hbs, gymnasium alfa, gymnasium bèta, beginnend in Friesland, en een korte tijd ook in Haarlem. Ik vind zelf de claim 'Haarlems wonderkind' een tikje pretentius, maar laten we het zien als rechtvaardiging voor uw aanwezigheid hier in dit Haarlemse instituut. Dat hij een wonderkind was lijdt geen twijfel. Als gepromoveerde aan de Universiteit van Amsterdam ging hij de wereld in met één kenmerkende karaktertrek, toen al heel zichtbaar aanwezig, namelijk de vastbeslotenheid geen enkel compromis te accepteren. Dat staat haaks op wat Nederlanders normaal pleegt te kenmerken. Er is een mooi citaat van hem dat dat illustreert: "Juist omdat ik de nietigheid van al het aardse voel, zal geen zijbestreving of vrees mijn gang storen." Dat heeft de wereld geweten. Brouwer is inderdaad compromisloos door het leven gegaan. Dat heeft veel opgeleverd, maar ook veel energie gekost. Hij schrijft dit aan Carel Adema van Scheltema, een van de vele grote niet-wiskundige namen die ook in de biografie voorkomen. Een ander voorbeeld, Fredrik van Eeden, hoorde u ook al voorbijkomen. Albert Einstein, dat zal zo blijken, was er ook een. Brouwer was iemand die zich omringde met veel interessante tijdgenoten.

Dramatische taferelen

Brouwer was gepromoveerd, en begon aan zijn compromisloze leven. Dat leven laat zich het beste samenvatten in een reeks dramatische taferelen, elk daarvan dramatisch op zijn eigen manier. Het begon met de benoeming tot hoogleraar aan de Universiteit van Amsterdam. Die was het gevolg van wat — dat is misschien zijn eerste bijzondere kwaliteit — kan worden



L.E.J. Brouwer

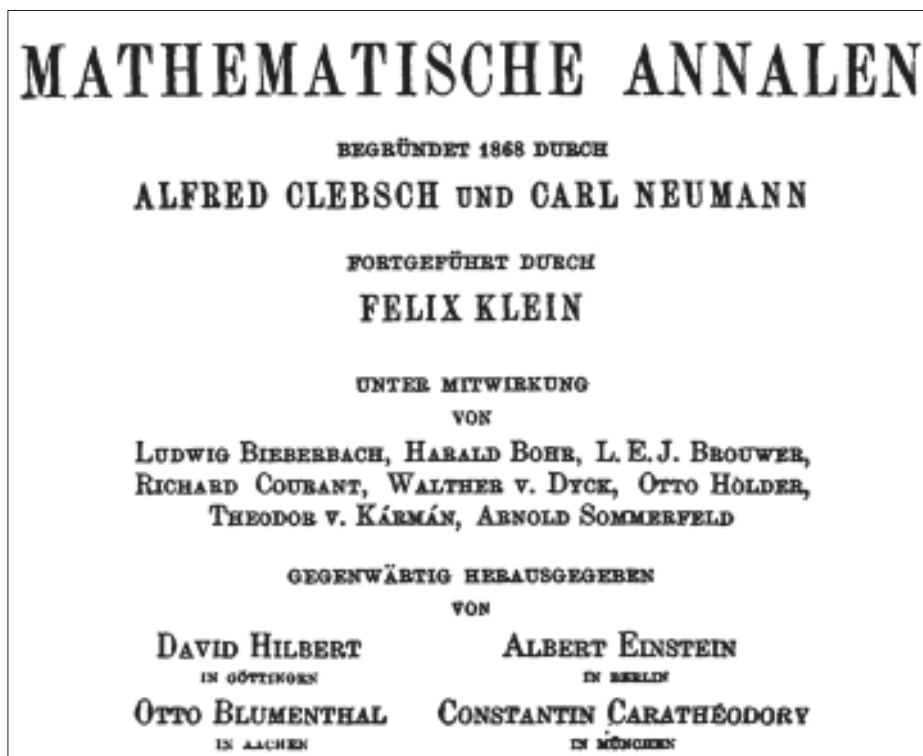
gezien als een buitengewone vernuftige reeks van onderhandelingen waarbij voortdurend schermde met aanbiedingen die hem elders gedaan waren: Groningen, maar uiteindelijk ook Berlijn en Göttingen. Wie denkt dat dat een eigentijds fenomeen is, wordt hier gecorrigeerd, want ook toen waren er sterren en topsterren die hun eisen konden stellen. Brouwer was er erg goed in om met de Universiteit van Amsterdam, toen nog rechtstreeks in gesprek met de gemeente, tot grote materiële concessies te komen. Hoewel, groot: een

extra assistentschap, bescheiden salarisverhoging — maar hij deed zijn best.

Ook waren er dramatische taferelen rond zijn leven in Blaricum, waar hij een groot deel van zijn leven heeft doorgebracht en toendertijd, nog meer dan nu, een omgeving waar kunstenaars actief waren. Die zorgden voor een passend excentrieke omlijsting, en Brouwer was omringd door vele bewonderaars van velerlei kunne. En inderdaad, daar waren dus ook vele bewonderaars bij. Tot mijn spijt heeft Dirk van Dalen niet alle details onthuld van de beroemde huisjes. Waren ze er geweest, dan was er zeker ook belangstelling voor geweest. Dat durf ik wel te beweren op grond van wat ik in zijn boek gelezen heb. Ook daar was Brouwer een figuur van een kleurrijkheid die we onder wiskundigen niet al te vaak aantreffen.

Een ander dramatisch tafereel dat mij bijgebleven is, speelde zich af in de Eerste Wereldoorlog — waarin Nederland neutraal was. Brouwer deed het genereuze aanbod om wiskunde militair in te zetten voor de vervolmaking van de luchtfotogrammetrie. Dat is het verkennen van vijandig terrein vanuit — de toen net beschikbare — vliegtuigen. U kunt zich voorstellen dat de wiskunde een rol kan spelen bij het passend aan elkaar plakken van foto's die vanuit verschillende hoeken zijn gemaakt. Brouwer had daar heel interessante ideeën over. Nu was er een proef bedacht om dat eens uit te gaan proberen in Nederland, namelijk door vanuit verschillende hoeken vanuit de lucht de stad Utrecht te fotograferen. Maar helaas moest die worden afgelast, want de Nederlandse luchtmacht had op dat moment geen benzine beschikbaar. Dat is toch schrijnend: hier is een land aan de rand van de oorlog, en de luchtmacht beschikt niet over benzine. U ziet, in zoverre Defensie nu niet overbedeeld is in de rijksbegroting, heeft dat een lange voorgeschiedenis.

Na de Eerste Wereldoorlog volgt een bijzonder dramatische episode waarin Brouwer het gevecht levert tegen de uitsluiting van de Duitse wetenschap. Er was een brede beweging om Duitse onderzoekers 'kalt zu stellen' — uit te sluiten van de reguliere contacten en ze te weren van wetenschappelijke conferenties. Daar was verzet tegen, en Brouwer leidde dat verzet. Dat was lovenswaardig, maar, typerend voor Brouwer, hij slaagde er in de loop van die episode in vele medestanders tegen zich in te nemen. En waarom? Omdat hij vond dat de



Fragment van de titelpagina van de *Mathematische Annalen*, band 98, 1928

Duitsers alleen maar terug mochten keren als er een complete formele verontschuldiging van de kant van alle geallieerde boosdoeners daaraan vooraf gegaan zou zijn. Daar hadden de geallieerden niet zo'n zin in. De Duitsers waren al min of meer teruggekeerd, dus eigenlijk was het op een punt om met de mantel der liefde bedekt te worden. Maar Brouwer insisterde geheel in de geest van zijn compromisloze karakter dat er nog een formele afronding moest plaatsvinden, die natuurlijk nimmer plaatsgevonden heeft.

Het redacteurschap van de *Mathematische Annalen* heeft eveneens veel dramatiek opgeleverd, alleen al in de correspondentie met de afgewezen auteurs in de nog vreedzame periode binnen de redactie. Die liet Brouwer niet ontsnappen met een mild oordeel. Het leidde tot bijzonder heftige correspondenties. Een van de mooiste vond ik een woedende briefwisseling met de Nederlandse wiskundige J.A. Schouten — een naam die sommigen onder u zullen herkennen — van wie Brouwer een artikel had geweigerd voor de *Mathematische Annalen*. Schouten was daar bijzonder ongelukkig mee en correspondeerde daar over. Dat liep helemaal uit de hand. Ik kan het niet nalaten een zin te citeren uit de laatste brief van Brouwer: "Het heden van u ontvangen schrijven zal door mij niet

worden gelezen." Duidelijke taal. Ook hier aarzelde Brouwer niet om scherp stelling te nemen ten dienste van de waarheid en niets dan de waarheid.

Dan was er ook een andere dramatische episode in de opkomst en uiteindelijk ook de neergang van de Significa. Daarin komt bijvoorbeeld de naam van Gerrit Mannoury manifest naar voren. Maar ook Jacob Israël de Haan, een bijzonder excentrieke zionist, speelt in deze episode een belangrijke rol. Het is een feest te lezen hoe Brouwer genadeloos kritisch oordeelt over mogelijke nieuwe belangstellenden en betrokkenen. In het bijzonder komt daarbij de figuur van Bolland in beeld, een beroemd filosoof uit die jaren. Bolland wordt door Brouwer afgewezen, want, zo zegt hij: "De emoties van Bolland beschouw ik als zijnde van louter sportieve aard." Ruimte voor mystiek achtte hij dus niet aanwezig. Bolland was zelf overigens ook een nogal excentrieke man, die de gewoonte had om bij zijn colleges, als hij een paar gezichten in de zaal zag die hem niet bevielen, niet te beginnen voordat deze zich hadden teruggetrokken. Hij had een zeer aparte stijl van spreken, maar trok desalniettemin een breed publiek.

Dan was er natuurlijk ook nog de grondslagenstrijd, die uiteindelijk leidde tot een dramatische aanvaring met David Hilbert

en als ontknoping had dat de gehele redactie van de *Mathematische Annalen* tot aftreden werd gedwongen. Waarom was dat onvermijdelijk? Dat was de enige manier om Brouwer uit te schakelen zonder dat het het karakter zou krijgen van een persoonlijke aanval. Na heel lang heen en weer praten en heel lang heen en weer schrijven trok de complete redactie van de *Mathematische Annalen* zich terug. Dit tot grote verbazing — hier komt hij dan — van Albert Einstein, die dit allemaal aanzag, er niets van begreep en sprak over een oorlog tussen kikkers en muizen. Dat lijkt mij een voldoende diskwalificatie, maar is ook typerend voor de hoeveelheid energie en correspondentie die eraan besteed is.

Tijdens de Bezetting heeft de voor Brouwer noodlottige episode plaatsgevonden waarin hij aarzelde — dat werd hem later verweten — om studenten aan te moedigen tot openlijk verzet. Daar zouden op zich nog wel goede gronden voor aan te voeren zijn, maar het is hem zeer aangerekend omdat andere hoogleraren dat niet deden. Andere universiteiten gingen daarin zeker verder dan de Universiteit van Amsterdam, en uiteindelijk heeft dat voor Brouwer tot een zuiveringsproces geleid. Deze schaduw is altijd over zijn leven blijven hangen, met de gevolgen die ik al schetste: na de oorlog was het moeilijk voor hem om in Amerika de plek te vinden die hij eigenlijk verdiende.

Rode draden

Alsof dat al allemaal nog niet genoeg was lopen er door Brouwers leven nog meer rode draden die nog meer kleur en excentriciteit toevoegen. Ik noem er u een paar. De zakelijke avonturen van Brouwer. Ook al niet typerend voor de meeste zuivere wiskundigen, maar Brouwer was een redelijk succesvol onroerendgoedspeculant. Hij begon met zijn studiebeurs van Sint Jobsleen daarvoor in te zetten. Ik weet niet of we dat de studenten hier moeten aanraden. Hoewel: op de huizenmarkt van Amsterdam is dat misschien nog wel te overwegen. Hoe dan ook, Brouwer deed dat. Hij had op een gegeven moment huizen in Amsterdam, in Berlijn en in de Harz. Hij verkocht en kocht, met wisselend succes, maar uiteindelijk eindigde hij toch als een redelijk welgesteld man.

Een andere rode draad in dit wonderlijke leven was zijn intensieve bemoeienis met de apotheek van zijn vrouw. Lize was

apotheker, en was dat haar hele leven. Brouwer bemoeide zich werkelijk overal mee, en tot op hoge leeftijd zette hij een zwaar stempel op het financiële beleid van de apotheek, met over het algemeen redelijke catastrofale gevolgen. Die apotheek had eigenlijk een heel winstgevend project kunnen zijn, maar was dat niet. Een goede zakenman was hij dus eigenlijk niet. Anders was dat — en nu kom ik tot mijn vreugde tot de hele kleine maar toch wel hele relevante lijn naar de Hollandsche Maatschappij — voor zijn neef, die ook L.E.J. Brouwer heette, maar die het bracht tot president-directeur van de Koninklijke [Koninklijke Nederlandse Petroleum Maatschappij, tegenwoordig Koninklijke Shell, red.]. Deze L.E.J. Brouwer heeft voor de Koninklijke Hollandsche Maatschappij der Wetenschappen veel betekend door een zeer royale erfenis na te laten aan de Maatschappij, weliswaar apart gezet in een stichting, maar toch beschikbaar voor de Maatschappij, waar bijvoorbeeld jaarlijks nog een heel mooi symposium uit wordt georganiseerd. Als u de gang inloopt vanuit de aula, dan ziet u aan uw rechterhand een portret van deze L.E.J. Brouwer hangen, en met wat goede wil herkent u daarin wellicht de markante trekken van zijn oom.

Brouwer — een andere rode draad — was zeker niet alleen een wiskundige. Hij was ook zeer betrokken bij mystiek en filosofie. De ironie is dat hij na de oorlog meer welkom was in de kring van mystici en filosofen dan in de kring van wiskundigen.

Brouwer was een compromisloos man, en weer een andere rode draad in zijn leven is de enorme reeks conflicten waarin hij verzeild raakte. Een querulant inderdaad, met een extreem rechtvaardigheidsgevoel. Op het moment dat hem iets niet beviel, op het moment dat zijn rechtvaardigheidsgevoel werd geschaad, aarzelde hij niet om alle wegen van verzet te bewandelen. Vaak natuurlijk zonder enig succes, maar toch. Vanuit deze attitude is het dan misschien ook niet verrassend dat hij zich in de politiek heeft gewaagd, zij het in de dorpspolitiek van Blaricum, waar hij het bracht tot hulp-wethouder. Ook niet direct een toppositie, maar wel illustratief. Ik kan u verzekeren, als inwoner van de gemeente Bloemendaal, dat dorpspolitiek een bron van emoties is. Zo ook Blaricum.

Tot slot de onvermijdelijke laatste rode draad: een onafzienbare reeks vriendin-

nen. We moeten het onder ogen zien, en de biograaf aarzelt ook niet het aan te duiden. Misschien niet allemaal met een eigen huisje, maar toch wel met een eigen plaats in het zeer ruime hart van Brouwer. Overigens alles in volle openheid naar Lize, zijn vrouw. En tot op zeer hoge leeftijd waren deze dames op afroep beschikbaar om hem een beetje te vertroetelen, bijvoorbeeld als hij het dagelijks luchtbad achter de rug had. En het luchtbad — wat zou dat anders kunnen zijn, u raadt het al — was een in volle bloetheid uitgevoerde gymnastische oefening in de frisse lucht. Ook vaak uitgevoerd in de aanwezigheid van nietsvermoedende gasten, anders dan de bewonderaarster zelve.

Een groot Nederlander

Over Galilei is eens gezegd dat hij vandaag de dag een graag geziene gast bij de talkshow van Jeroen Pauw zou zijn. En Brouwer staat nog een stapje hoger: er zitten krachtige GTST-elementen in zijn leven. Veel goede tijden, een enkele slechte tijd. Dit is een leven, anders dan dat van de meeste wiskundigen, met een geheel eigen amusementswaarde. Zo de wiskunde ooit iemand heeft voortgebracht die zou kunnen dingen naar de ultieme successtatus van een zedelijke televisieserie, dan is het toch wel Brouwer. En misschien heeft u in gedachten al zitten denken aan goede acteurs die de rol van Brouwer zouden kunnen spelen, respectievelijk de rollen van zijn bewonderaars. Ik zou wel wat suggesties hebben, en ik hoop dat er voor Bolland een eervolle bijrol is weggelegd. Mocht het ooit tot zo'n serie komen, dan zal ik namens de Maatschappij de aula aanbieden als locatie voor de colleges van Brouwer. Ook die waren zeer kleurrijk. Er mochten vragen gesteld worden, dat was ook moeilijk te voorkomen, maar wie dat deed werd na afloop van het college door een assistent van Brouwer gevraagd om daar voortaan liever van af te zien.

Sporen van Brouwer, het zijn er vele. Een onomstreden fraaie wiskundige erfenis, de topologie in de allereerste plaats. Een vol en arbeidzaam leven. Onderzoeker van onverbiddelijke gedisciplineerdheid, met een uitzonderlijk brede belangstelling, consistent en consequent in zijn standpunten. Een groot Nederlander, kortom, aan wie de herinnering gekoesterd moet worden.

Jan van Mill

KdV Instituut voor Wiskunde
Universiteit van Amsterdam
j.vanmill@uva.nl

Geschiedenis

Brouwer versus Menger: scheiden doet lijden

Het begrip *scheider* heeft in de ontwikkeling van de dimensietheorie tot verwarring geleid en was er de oorzaak van dat L.E.J. Brouwer in conflict kwam met K. Menger. In dit artikel neemt Jan van Mill het begrip scheider onder de loep en poogt zicht te krijgen op wat nu precies de verwarring heeft veroorzaakt en de gemoederen nog altijd bezighoudt.

Voor 1700 waren er twee Nederlandse wiskundige genieën, die de wereld nu nog kent: Simon Stevin en Christiaan Huygens. Stevin was overigens een Vlaming; wij delen hem met de Belgen. In de drie eeuwen daarna is er maar één, namelijk Luitzen Egbertus Jan Brouwer (1881–1966).

Hij was een wonderkind. Op negenjarige leeftijd ging hij naar de hbs in Hoorn, op zijn zestiende begon hij met de studie wis- en natuurkunde aan de Universiteit van Amsterdam en in 1912 werd hij daar hoogleraar. Brouwers bijdrage aan de wiskunde is groot en wel om twee redenen. Ten eerste bracht hij de *topologie* op gang.¹ De sleutelvraag in de meetkunde is: wat gebeurt er met meetkundige figuren onder toegestane vervormingen? De topologie is de liberaalste tak van de meetkundefamilie, zij staat continue vervormingen toe. Dat zijn vervormingen waarin wel geduwd en getrokken mag worden, maar niet geknipt of geplakt, *vloeiende bewegingen* dus. De topologie staat daarom ook wel als ‘rubbermeetkunde’ bekend. Ook was Brouwer de grondlegger van het zogenaamde *intuitionisme*. In zijn intuitionistische formele logica is de regel van de uitgesloten derde niet geldig. Deze logica wordt heden ten dage vooral toegepast in de theoretische

informatica bij de algoritmische berekenbaarheid van wiskundige entiteiten.

Brouwer was een originele en dwarse denker die gedurende zijn carrière met menigeen botste. Hij schrok er niet voor terug om met de groten der aarde moordende conflicten uit te vechten, zoals met David Hilbert (1862–1943) over de grondslagen van de wiskunde. Hilbert was misschien wel de meest bekende wiskundige van zijn dagen. De geschiedenis heeft geleerd dat Brouwer in zijn conflicten meestal het gelijk aan zijn zijde had. Er lijkt slechts één uitzondering te zijn op deze regel en dat betreft het conflict met de Oostenrijkse wiskundige Karl Menger (1902–1985) over wie de échte grondlegger is van de dimensietheorie. In de ogen van Brouwer was hij dat en toen Menger zich dat in zijn boek [32] toe-eigende, vlogen de heren elkaar in de haren. Het conflict spitste zich toe op de vraag welke definitie van scheider (zie onder) de juiste is en of Brouwer zijn vermeende fouten had verdoezeld bij zijn werk als redacteur van het postuum verschenen monumentale werk van Urysohn [38, 39]. Dat laatste was een onprettige beschuldiging. De meeste verhandelingen over de controverse, waaronder de gezaghebbende bijdragen van Freudenthal [15],

Alexandroff [3], Johnson [27] en Van Dalen [16], ondersteunen de weergave van de feiten door Brouwer. De eveneens gezaghebbende Engelking twijfelt niet over de vraag wie de eerste dimensiefunctie heeft gedefinieerd, maar hij vindt Brouwers argumenten op bepaalde punten niet echt overtuigend [18, p. 7]. In zijn boek [17] gaat Engelking een stap verder als hij schrijft op pagina 392: “Dimension theory was originated by Menger and Urysohn.” In het onovertroffen meesterwerk uit 1948 van Hurewicz en Wallman [25] wordt op pagina 4 aan Brouwer het krediet gegeven dat hij verdient maar aan de controverse wordt wijselijk voorbij gegaan. De verwarring over de scheiders wordt daar wel aanzienlijk vergroot door de bewering dat er in de meeste gevallen eigenlijk niets aan de hand is. Het duurde tot het jaar 2000 voor daar helderheid over kwam (Fedorchuk en Van Mill [21]): *scheiden doet lijden*.

Het doel van dit artikel is niet om het conflict tussen Brouwer en Menger opnieuw te beschrijven, dat is immers al op een voortreffelijke manier gedaan in de bovengenoemde bronnen. In plaats daarvan wordt het begrip scheider onder de loep genomen en gepoogd zicht te krijgen op wat nu precies de verwarring heeft veroorzaakt en de gemoederen nog altijd bezighoudt. En hoe de worsteling in de vroege dagen van de dimensietheorie verliep om tot het juiste begrip van scheider te komen.

De conclusie van dit artikel is dat Brouwer bij het corrigeren van zijn ‘slip of the pen’ misschien te veel op zijn intuïtie vertrouwd.

De benodigde topologische voorkennis stijgt naarmate het artikel vordert. In het begin is de stijl informeel, maar geleidelijk aan zal geheel in Brouweriaanse stijl de wiskundige strengheid zoveel mogelijk worden opgevoerd.

Ik ben veel dank verschuldigd aan Jan Aarts, Henno Brandsma, Robbert Fokink, Klaas Pieter Hart, Dale M. Johnson, Teun Koetsier, Dieter Remus en de gezamenlijke dames Van Mill voor nuttig commentaar.

Prelude

Deze paragraaf is onder meer gebaseerd op Van Mill [33]. *Dimensietheorie* is een klassiek gebied van de wiskunde dat beoogt topologische ruimten op een bepaalde manier te ordenen. Een *topologische ruimte* is in dit artikel een deelverzameling van de separabele Hilbertruimte ℓ^2 . Een *dimensiefunctie* is een functie die aan elke topologische ruimte een getal in $\{-1, 0, 1, 2, \dots\}$ toekent, haar *dimensie*, op zo’n manier dat de ruimte in topologische zin steeds complexer wordt naarmate de dimensie stijgt. Het gaat hier dus om *topologische* dimensie. Er zijn tegenwoordig bijvoorbeeld in de dynamica vele verschillende dimensiebegrippen waaronder Hausdorff-dimensie. De standaard Cantor-verzameling heeft topologische dimensie 0 en Hausdorff-dimensie $\log_3(2)$.

Bij een nuttige dimensiefunctie is een punt 0-dimensionaal, een lijn 1-dimensionaal, een vlak 2-dimensionaal en de ruimte waarin we leven 3-dimensionaal, et cetera. Hoe zou je dit formeel kunnen aanpakken en bewijzen, en is dimensie invariant bij de bewegingen die in de topologie zijn toegestaan? Een punt kan niet worden overgevoerd in een lijn en het is niet moeilijk in te zien dat een lijn niet vloeiend kan worden overgevoerd in een vlak, maar hoe zit het met een vlak en de 3-dimensionale euclidische ruimte? Dit probleem bood hardnekkig weerstand aan alle aanvallen en had duidelijk een doorbraak nodig. Die kwam van Brouwer.

Een goede definitie van dimensie was niet voorhanden. Al in 1843–1844 schreef Bolzano [5] over dimensie voor deelverzamelingen van de driedimensionale euclidische ruimte. Maar dit artikel werd pas ongeveer honderd jaar na schrijven gepu-



Karl Menger

bliceerd, dus dat schoot niet op. Zijn definitie is nooit gebruikt, maar is in essentie sterk verwant aan een nu gangbare definitie van dimensie. Zie ook Johnson [26]. Na een aantal vage pogingen van verschillende auteurs was er in 1912 de eerste serieuze poging om tot een dimensiebegrip te komen van de bekende Franse wiskundige Henri Poincaré [34], die leefde van 1854 tot 1912. Poincaré stierf spoedig na de publicatie van zijn artikel en hij heeft daardoor zijn ideeën nooit kunnen uitwerken.

Voortbouwend op de ideeën van Poincaré, gaf Brouwer [8] in 1913 de eerste formele definitie van (topologische) dimensie, de zogenaamde *dimensionsgrad* $Dg X$ van een topologische ruimte X behorend tot de klasse ‘Normalmengen (im Fréchet’schen Sinne)’. In de terminologie van nu zijn dat Poolse ruimten² zonder geïsoleerde punten (zie ook Johnson [27, p.172, regels 27–29]). De ruimten van dimensie 0 zijn bijzonder bij Brouwer, we komen hier later op terug.

Het was een revolutionaire gedachte van Brouwer om een dimensiefunctie te definiëren in puur topologische termen en voor een abstracte klasse van topologische ruimten. Hij bewees dat $Dg \mathbb{R}^n = n$ en dus kan een vlak niet in een vloeiende beweging overgevoerd worden in de 3-dimensionale euclidische ruimte. (Dit werd al eerder bewezen in Brouwer [6]). Dit resultaat en de technieken die door Brouwer werden

gebruikt schokten de wiskundige wereld van zijn dagen.

Brouwers bewijs van de stelling $Dg \mathbb{R}^n = n$ gebruikt een spel. Het is een spel voor twee personen en heet *dimensie-berekening*. Bij het begin van het spel heeft speler B de ruimte X waarvan de dimensie berekend moet worden. Bij iedere zet kiest A uit de ruimte van B twee disjuncte gesloten deelverzamelingen. En daarna kiest B telkens als nieuwe ruimte een gesloten deelverzameling S die A en B scheidt. Dit spel wordt gespeeld totdat B er bij de k -de stap in slaagt een S te kiezen van dimensie 0. Als nu B er voor kan zorgen dat, ongeacht hoe A speelt, altijd $k \leq n$, terwijl anderzijds A , ongeacht de keuzes van B , er voor kan zorgen dat nooit $k < n$, dan is vastgesteld dat de dimensie van X gelijk is aan n . En als B nooit in staat is om een 0-dimensionale scheider te kiezen, dan krijgt X de dimensie oneindig. Dit zou wel eens de eerste keer kunnen zijn dat de notie van een spel wordt gebruikt in een serieus bewijs; hierin lijkt Brouwer weer zijn tijd ver vooruit te zijn geweest.

In dezelfde periode bewees Brouwer [7] zijn beroemde *dekpuntstelling*, één der meest gebruikte stellingen uit de wiskunde. Deze stelling zegt ruwweg dat na niet al te wild roeren in een kopje koffie ten minste één molecuul zijn oorspronkelijke positie zal hebben ingenomen. De meeste wiskundigen kennen de dekpuntstelling en gebruiken haar veelvuldig, maar hebben er geen idee van hoe zij bewezen moet worden. We zullen later zien dat de dekpuntstelling het hart is van de dimensietheorie.

Twee tegenvoorbeelden

We beschrijven hier twee klassieke en gemakkelijk te visualiseren voorbeelden van deelruimten van het platte vlak die in de literatuur regelmatig opduiken als tegenvoorbeelden tegen diverse beweringen. In de volgende paragraaf over scheiders spelen zij een belangrijke rol.

Het eerste voorbeeld is het bekende $\sin(1/x)$ -continuüm³ S . Dit continuüm is de vereniging van de deelverzamelingen A en B van $\mathbb{R}^2$, waarbij

$$A = \{(x, \sin(1/x)) : 0 < x \leq 1/\pi\},$$

$$B = \{(0, y) : -1 \leq y \leq 1\}.$$

Bezie de punten $P = (0, -1)$, $Q = (1/\pi, 0)$ en $R = (0, 1)$ van S . Het is duidelijk dat S zelf het enige continuüm in S is dat zowel P als Q bevat. Dus, elk continuüm

in S dat zowel P als Q bevat, bevat ook R . Zoals we later zullen zien heeft deze eenvoudige opmerking Brouwer heel wat hoofdbrekens gekost.

Laat C het *Cantor-discontinuüm* zijn in $\mathbb{I} = [0, 1]$. Dat is de verzameling die je krijgt door uit het interval $[0, 1]$ het middelste derde interval weg te laten, dan uit de overblijvende twee intervallen de middelste derden en ga zo maar door. Aan het eind van het proces is er nog heel veel over, maar daar zit geen enkel lijnstukje in want wat in totaal is weggelaten heeft lengte 1. Vandaar de term *discontinuüm*.

We bezien nu C als deelverzameling van $\mathbb{I} \times \{0\} \subseteq \mathbb{R}^2$. Laat Q de verzameling van eindpunten zijn van alle weggelaten intervallen. Dus Q bevat de punten $\frac{1}{3}, \frac{2}{3}, \frac{1}{9}$, et cetera. Zij $P = C \setminus Q$. Voor $c \in C$, zij L_c het rechte lijnstuk in $\mathbb{R}^2$ van $(c, 0)$ naar $q = (\frac{1}{2}, \frac{1}{2})$. Laat F_c de verzameling van alle punten $(x, y) \in L_c$ zijn met y rationaal als $c \in Q$ en y irrationaal als $c \in P$. De deelruimte $F = \bigcup_{c \in C} F_c$ van $\mathbb{R}^2$ staat bekend als de *waaier van Knaster en Kuratowski* [29].⁴

De ruimte F heeft een aantal bijzondere eigenschappen. Allereerst is zij samenhangend. Dat kan gemakkelijk bewezen worden door een geschikte toepassing van de Stelling van Baire. Ook blijkt dat als Y een samenhangende deelverzameling is van $F \setminus \{q\}$, dat Y dan bestaat uit slechts één punt. Dit heeft tot gevolg dat F geen continua bevat. Voor details, zie [29] en [17, 6.3.23].

Een deelverzameling van een topologische ruimte heet in goed Nederlands *clopen* als zij open zowel als gesloten is.

Lemma 1. *Als V een niet-lege relatief clopen deelverzameling is van $F \setminus \{q\}$, dan behoort q tot de afsluiting⁵ van V .*

Bewijs. Als dat namelijk niet het geval is, dan zou V een open deelverzameling zijn van F die tevens gesloten is. Maar dat is in tegenspraak met de samenhang van F . $\square$

Gevolg 1. *Als $x \in F \setminus \{q\}$ en als U een open omgeving is van x in F met $q \notin \bar{U}$, dan geldt dat elke relatief clopen deelverzameling V van $F \setminus \{q\}$ die x bevat de rand $\bar{U} \setminus U$ van U snijdt.*

Bewijs. Laat D een (relatief) clopen deelverzameling zijn van $F \setminus \{q\}$ die x bevat maar $\bar{U} \setminus U$ mist. Dan is $V = D \cap U = D \cap \bar{U}$

een clopen verzameling van $F \setminus \{q\}$ die bevat is in $\bar{U}$ en dus q niet bevat. Maar dat is in tegenspraak met Lemma 1. $\square$

De waaier van Knaster en Kuratowski is niet een Poolse ruimte omdat zij een gesloten topologische kopie van de ruimte van alle rationale getallen bevat. Met (heel veel) meer moeite dan bij de waaier kan een Poolse deelruimte van het platte vlak worden geconstrueerd met dezelfde eigenschappen. Bezie daartoe de zogenaamde volledige Erdősruimte E_c uit [19]. Dat wil zeggen,

$$E_c = \{x \in \ell^2 : (\forall i \in \mathbb{N}) (x_i \text{ is irrationaal})\}.$$

Het is duidelijk dat E_c een G_δ -verzameling⁶ is van ℓ^2 en dus is zij Pools⁷. Ook is zij *totaal onsamenvhangend*, dat wil zeggen, voor elk tweetal verschillende punten x en y van E_c bestaat er een clopen deelverzameling V van E_c die x bevat maar y niet. Erdős [19] bewees dat elke niet-lege clopen deelverzameling van E_c onbegrensd is (in norm). Dat impliceert dat E_c 1-dimensionaal is. Tevens zijn E_c en $E_c \times E_c$ homeomorf; het kwadraat van een 1-dimensionale ruimte kan dus 1-dimensionaal zijn. Uit Knaster [28] volgt dat er een samenhangende ruimte X is met een punt $x \in X$ zodat $X \setminus \{x\}$ homeomorf is met E_c . De ruimte X is Pools en een variant daarvan kan met de techniek in Engelking [18, Examples 1.4.6, 1.4.7 en 1.4.8] in het platte vlak worden ingebed. Dit voorbeeld valt dus binnen de klasse van ruimten waarvoor Brouwer zijn dimensiefunctie definieerde.

Scheiders

Zoals we eerder zagen definieerde Brouwer [8] in 1913 de dimensiefunctie $\dim$ en bewees dat op $\mathbb{R}^n$ die functie de waarde n aanneemt. Een onmiddellijk gevolg is dat de euclidische ruimten $\mathbb{R}^n$ en $\mathbb{R}^m$ homeomorf zijn precies dan wanneer $n = m$. Een generalisatie van dit resultaat staat bekend als *Brouwers Stelling over de Invariantie van Gebied*: als U een open deelverzameling is van $\mathbb{R}^n$ en $f: U \rightarrow f(U) \subseteq \mathbb{R}^n$ een continue bijectie, dan is $f(U)$ open in $\mathbb{R}^n$ en $f: U \rightarrow f(U)$ een homeomorfisme. Fantastische resultaten die antwoorden gaven op lang openstaande fundamentele problemen. In 1923, tien jaar na de publicatie van Brouwers artikel, verschenen er wolken aan de horizon. Nie-

mand had in de tussentijd enig probleem ontdekt totdat de Russische wiskundige Urysohn (1898–1924) het artikel [8] las. Tijdens het congres van de Deutsche Mathematiker-Vereinigung in Marburg stelde hij in 1923 dat er een moeilijkheid is met de definitie van scheider zoals gehanteerd door Brouwer en dat derhalve de bewijzen van zijn stellingen niet deugden.

Wij bespreken in deze paragraaf vijf noties van scheider die een rol speelden of later gingen spelen in de artikelen van Brouwer. Het doel van deze paragraaf is de relaties tussen deze noties helder te krijgen.

Als A en B deelverzamelingen zijn van de topologische ruimte X , dan verstaan we onder een *continuüm van A naar B* een continuüm in X dat zowel A als B snijdt.

Zij X een topologische ruimte en laat A , B en C paarsgewijs disjuncte gesloten deelverzamelingen zijn van X . Laat (S1), (S2), (S3), (S4) en (S5) afkortingen zijn van de volgende beweringen:

- (S1) Elk continuüm van A naar B snijdt C .
- (S2) Elke *gesloten* samenhangende deelverzameling van X die zowel A als B snijdt, snijdt ook C .
- (S3) Elke samenhangende deelverzameling van X die zowel A als B snijdt, snijdt ook C .
- (S4) $X \setminus C$ kan geschreven worden als $U \cup V$, waarbij U en V disjuncte open omgevingen zijn van A respectievelijk B .
- (S5) $X \setminus C$ kan geschreven worden als $U \cup V$, waarbij U en V disjuncte open omgevingen zijn van A respectievelijk B terwijl tevens U te schrijven is als een vereniging van open samenhangende verzamelingen.

Voor $i \leq 5$ zeggen we dat C een (Si)-scheider is tussen A en B .

Opmerkingen:

- (S1) In de literatuur wordt een (S1)-scheider een *snede* genoemd.
- (S2) Dit is de definitie van scheider in Brouwer [8].
- (S3) Toen Brouwer geconfronteerd werd met de kritiek van Urysohn, reageerde hij als volgt. Hij stelde dat de bewijzen van zijn stellingen correct zijn modulo kleine triviale aanpassingen die elke competente wiskundige ogenblikkelijk zou moeten kunnen zien. En dat hij — Brouwer — (S2) geschreven

had maar (S3) bedoelde, het woord *gesloten* bij (S2) moet worden doorgehaald. Dat was niets meer dan een ‘slip of the pen’ die erin was geslopen door druk van buiten (Van Dalen [16, p.408, regels 8–9]). Bovendien had hij de ‘fout’ in een zeer vroeg stadium gezien en door ‘omstandigheden’ was het er niet van gekomen dat aan de wiskundige gemeenschap tijdig te communiceren.⁸ Hij publiceerde errata ruim tien jaar na de publicatie van zijn oorspronkelijke artikel in verschillende tijdschriften, onder meer in [9–14]. Behalve deze errata bombardeerde Brouwer verscheidene wiskundigen met brieven. De veelheid aan reacties laat zien hoezeer hij door de kritiek getroffen was.

- (S4) Dit is de definitie van scheider in Urysohn [37] en Menger [31].
 (S5) Deze definitie van scheider is identiek aan (S4) met extra samenhang daaraan toegevoegd. Dit begrip komt wellicht ‘wat uit de lucht vallen’, zie verderop voor nadere informatie.

Het bewijs van het volgende lemma laten we aan de lezer.

Lemma 2. $(S5) \Rightarrow (S4) \Rightarrow (S3) \Rightarrow (S2) \Rightarrow (S1)$.

De problemen voor Brouwer begonnen met Urysohn's observatie dat $(S2) \not\Rightarrow (S3)$. Om dat in te zien, beschouwde Urysohn het $\sin(1/x)$ -continuüm S (zie de vorige paragraaf). Laat $A = \{(0, -1)\}$, $B = \{(1/\pi, 0)\}$ en $C = \{(0, 1)\}$. Het enige deelcontinuüm van S dat A en B snijdt is S zelf en dus snijdt het C . Maar dan voldoet C aan (S2), terwijl $S \setminus C$ een samenhangende verzameling is die zowel de punten in A als B bevat! Met andere woorden, $(S2) \not\Rightarrow (S3)$, zelfs voor continua.

Lemma 3. *Geen der implicaties in Lemma 2 kan worden omgekeerd, zelfs niet in de klasse van alle samenhangende topologische ruimten.*

Bewijs. Zij $X = F \cup K$, waarbij F de waaier van Knaster en Kuratowski is (zie de vorige paragraaf) en K een topologische kopie is van het interval $\mathbb{I}$ met $|F \cap K| = 1$. Zij x het unieke punt in $F \cap K$, zij y een willekeurig punt in $K \setminus F$, en laat $a, b \in F \setminus \{x\}$ twee willekeurige maar verschillende punten zijn. Dan is $C = \{y\}$ een (S1)-scheider

tussen $A = \{a\}$ en $B = \{b\}$ om de flauwe reden dat er helemaal geen continua bestaan in X die zowel a als b bevatten. Maar F is een gesloten samenhangende deelverzameling van X die zowel A als B snijdt, maar C mist. Met andere woorden, $(S1) \not\Rightarrow (S2)$ en het tegenvoorbeeld is samenhangend.

Dat $(S2) \Rightarrow (S3)$ werd boven aangetoond met een continuüm als tegenvoorbeeld.

Bezie weer de waaier F van Knaster en Kuratowski. Kies een willekeurig punt $x \in F \setminus \{q\}$, en laat U een open omgeving zijn van x zodat $q \notin \bar{U}$. Zij nu $A = \{x\}$, $B = \bar{U}/U$ en $C = \{q\}$. Elke niet-triviale samenhangende deelverzameling van F bevat q , want $F \setminus \{q\}$ bevat slechts triviale samenhangende deelverzamelingen. Dus C voldoet aan (S3). We beweren dat C niet aan (S4) voldoet. Immers, stel dat $F \setminus \{q\}$ geschreven kan worden als $V \cup W$, waarbij V en W disjuncte open omgevingen zijn van A respectievelijk B . Dan is V een (relatief) clopen deelverzameling van $F \setminus \{q\}$ die B mist. Maar dat is in tegenspraak met Gevolg 1. Met andere woorden, $(S3) \not\Rightarrow (S4)$.

Bezie voor $(S4) \Rightarrow (S5)$ weer het $\sin(1/x)$ -continuüm S . Zij $A = \{(0, -1)\}$, $B = \{(0, 1)\}$, en C de doorsnijding van de x -as met S . Dan is C een (S4)-scheider, maar uiteraard voldoet C niet aan (S5). $\square$

Gebruiken we de volledige Erdősruimte E_c (zie de vorige paragraaf) in het bewijs van Lemma 3 dan zijn alle tegenvoorbeelden ‘Normalmengen (im Fréchet'schen Sinne)’. Door deze tegenvoorbeelden te vermenigvuldigen met $\mathbb{I}^n$, verkrijgen we zelfs samenhangende Poolse tegenvoorbeelden van willekeurig hoge dimensionsgrad (zie de volgende paragraaf). De implicaties in Lemma 3 kunnen dus ‘nooit’ worden omgekeerd. Vanwege de leesbaarheid hebben we er bewust voor gekozen om de bewijzen van deze beweringen niet op te nemen.

Gevolg 2. $(S3) \Rightarrow (S4)$.

In een belangrijke klasse van topologische ruimten zijn alle beschouwde begrippen van scheider equivalent. Het gaat om de klasse van alle Poolse lokaal samenhangende ruimten, dat wil zeggen separabele ruimten waarvan de topologie gegeneerd wordt door een volledige metriek en een basis voor de open verzamelingen hebben

bestaande uit samenhangende verzamelingen.

Lemma 4. *Onderstel dat X Pools en lokaal samenhangend is, dan geldt $(S1) \Rightarrow (S5)$.*

Bewijs. Bezie de open verzameling $Y = X \setminus C$. Vanwege lokale samenhang is elke component van Y open. Laat $\mathcal{E}$ de familie van alle componenten van Y zijn. Stel dat er een element $E \in \mathcal{E}$ is dat zowel A als B snijdt. Merk op dat E eveneens Pools en lokaal samenhangend is. Uit de samenhang van E en een resultaat van Mazurkiewicz [30] (zie ook [17, 6.3.11]), volgt dat er een topologische kopie J van (het continuüm) $\mathbb{I}$ in E bestaat die zowel A als B snijdt. Maar dat is in tegenspraak met (S1). Zij nu $\mathcal{U} = \{E \in \mathcal{E} : E \cap A \neq \emptyset\}$ en $\mathcal{V} = \mathcal{E} \setminus \mathcal{U}$. Dan zijn $U = \bigcup \mathcal{U}$ en $V = \bigcup \mathcal{V}$ disjuncte open omgevingen van A respectievelijk B zodat $X \setminus C = U \cup V$, hetgeen is zoals gewenst. $\square$

Hardnekkige misverstanden

Deze paragraaf gaat over enkele hardnekkige misverstanden die ik zal pogen uit de wereld te helpen.

We gaan eerst in op hoe een dimensiefunctie doorgaans wordt gedefinieerd. De lege ruimte krijgt altijd de waarde -1 toegekend. De ruimten van dimensie 0 zijn in een bepaalde zin ‘triviaal’.⁹ Dan gaat de definitie recursief verder. De dimensie van een topologische ruimte X is ten hoogste n , waarbij $n \geq 1$, als voor elk tweetal disjuncte gesloten deelverzamelingen A en B van X een scheider C tussen A en B bestaat van dimensie hooguit $n-1$. De ruimte X is n -dimensionaal als zij hooguit n -dimensionaal is maar niet hooguit $(n-1)$ -dimensionaal. Alle ruimten waaraan op deze wijze niet een getal uit $\{-1, 0, 1, 2, \dots\}$ wordt toegekend heten *oneindig-dimensionaal*.

Een dimensiefunctie hangt dus af van twee vooraf gekozen variabelen: (1) de klasse ‘triviale’ ruimten, en (2) de notie van scheider tussen twee gesloten verzamelingen. Verschillende variabelen leveren verschillende dimensiefuncties op. Maar niet elke keuze van de variabelen levert een nuttig dimensiebegrip op. Je kunt bijvoorbeeld alle niet-lege topologische ruimten 0-dimensionaal verklaren. Dan heb je een prima dimensiebegrip maar het zegt niets. We schreven eerder dat bij een nuttig dimensiebegrip een punt 0-dimensionaal is, een lijn 1-dimensionaal, een vlak 2-dimensionaal en de ruimte waarin we leven

3-dimensionaal, et cetera. Om dergelijke dimensiefuncties gaat het in de dimensietheorie.

De dimensionsgrad Dg uit [8] zit als volgt in elkaar. De ‘triviale’ ruimten zijn de ruimten die geen enkel continuüm bevatten, en de notie van scheider is (S2). Zoals we eerder opmerkten, beperkte Brouwer zich hierbij tot de klasse ‘Normalmengen (im Fréchetischen Sinne)’, dat wil zeggen, Poolse ruimten zonder geïsoleerde punten (zie ook Johnson [27, p. 172, regels 27–29]).

De definitie van de Menger–Urysohn-dimensiefunctie ind gaat als volgt. De lege ruimte krijgt wederom de waarde -1 toegekend. Vervolgens gaat de definitie recursief verder: $ind X \leq n$, waarbij $n \geq 0$, als voor elk punt a in X en elke gesloten deelverzameling B van X met $a \notin B$ er een (S4)-scheider C is tussen $\{a\}$ en B met $ind C \leq n - 1$. Ten slotte, $ind X = n$ als $ind X \leq n$ en $ind X \not\leq n - 1$, en $ind X = \infty$ als $ind X \neq n$ voor elke n . We spreken ook wel over de *kleine inductieve dimensie* van een topologische ruimte.

Deze definitie lijkt niet helemaal te passen in het schema zoals we dat boven beschouwden. Maar dat is schijn. Definieer de *grote inductieve dimensie* $Ind X$ van een topologische ruimte X als volgt. De ‘triviale’ ruimten zijn de 0-dimensionale ruimten. Dat wil zeggen, de ruimten die een basis hebben van clopen verzamelingen, en de definitie van scheider is (S4). Deze dimensiefunctie staat ook bekend onder de naam *Brouwer–Čech-dimensie*. Een belangrijke stelling is dat voor elke

ruimte X geldt: $ind X = Ind X$ [18, 1.6.4].

Het eerste hardnekkige misverstand is dat Brouwer een ‘foute’ dimensiefunctie zou hebben gedefinieerd gebaseerd op een ‘foute’ notie van scheider. Johnson [27, p. 173, regel 21] is daar het meest expliciet over: “There is a subtle difficulty in this definition of separation which makes it ‘wrong’.” Maar dit is onjuist. Er is niets verkeerd aan het begrip (S2) en derhalve ook niet met de dimensionsgrad. Het beste bewijs hiervan is mijns inziens dat voor een compacte ruimte X geldt: $Dg X = ind X$, zie Urysohn [39], Hurewicz [24] en Tamarin [36].¹⁰ Fedorchuk, Levin en Shchepin [20] bewezen dit voor ruimten die een aftelbare vereniging zijn van compacte deelruimten.¹¹ Dus zelfs voor lokaal compacte ruimten stemmen alle beschouwde dimensiefuncties overeen. Maar voor willekeurige topologische ruimten bleek de dimensiefunctie ind een beter onderscheid op te leveren dan de dimensionsgrad. Vandaar dat ind de standaard is geworden. Je moet dus niet spreken in termen van ‘goed of fout’, maar in termen van ‘meer of minder nuttig’.

Het tweede hardnekkige misverstand is dat $Dg X$ en $ind X$ dezelfde waarde aannemen als X Pools en lokaal samenhangend is. Op pagina 4 van Hurewicz en Wallman [25] staat zelfs zonder bewijs dat de dimensionsgrad van Brouwer en het nu gangbare dimensiebegrip overeenkomen in de klasse van *alle* lokaal samenhangende topologische ruimten, Pools of niet. Deze mededeling is zeer geruststellend want de meeste wiskundigen werken alleen met

ruimten die lokaal samenhangend zijn en daar treden dus kennelijk geen verschillen in de dimensiebegrippen op. Deze zelfde bewering is te vinden in talloze artikelen en boeken die over de (geschiedenis van de) dimensietheorie gaan. Maar in 2000 bewezen Fedorchuk en Van Mill [21] dat er samenhangende en lokaal samenhangende Poolse ruimten X bestaan met $Dg X = 1$ en $ind X$ willekeurig groot: *scheiden doet lijden*.

De verwarring lijkt ingegeven door Lemma 4: als de beschouwde ruimte Pools en lokaal samenhangend is, dan stemmen alle noties van scheider overeen. Maar een gesloten deelverzameling van een lokaal samenhangende ruimte is niet noodzakelijk lokaal samenhangend. Dus zodra men in een lokaal samenhangende ruimte een scheider kiest, dan is er in het algemeen geen sprake meer van lokale samenhang en kan Lemma 4 niet meer worden toegepast.

Laten we deze paragraaf besluiten met de introductie van een nieuwe dimensiefunctie die in het vervolg een rol gaat spelen. De *grote dimensionsgrad* DG definiëren we als volgt. De ‘triviale’ ruimten zijn wederom de ruimten die geen enkel continuüm bevatten, en de notie van scheider is (S3). Het derde hardnekkige misverstand dat we de wereld uit willen helpen is dat deze dimensiefunctie dicht in de buurt komt bij die van Menger en Urysohn.

Lemma 5. *Voor elke topologische ruimte X geldt: $Dg X \leq DG X$.*

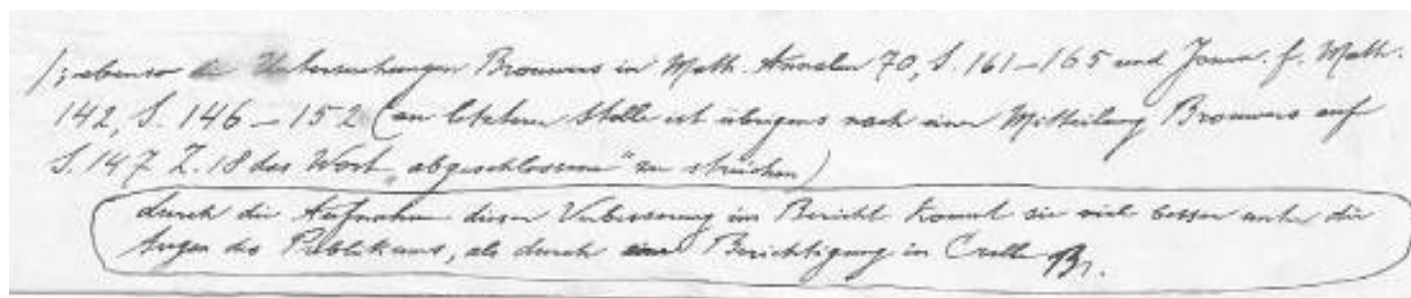
Bewijs. Het is duidelijk dat $Dg X = 0 \Leftrightarrow DG X = 0$. Stel dat de bewering waar is voor alle ruimten X met $DG X \leq n$, waarbij $n \geq 0$. Bezie nu een ruimte Y met $DG Y = n + 1$, en laat A en B twee disjunctie gesloten verzamelingen zijn van Y . Volgens aanname bestaat er een (S3)-scheider C tussen A en B met $DG C \leq n$. Maar elke (S3)-scheider is een (S2)-scheider volgens Lemma 2. Met andere woorden, tussen elk tweetal disjunctie gesloten verzamelingen van Y bestaat een (S2)-scheider C met, volgens de inductieonderstelling, $Dg C \leq DG C \leq n$. Maar dan geldt: $Dg Y \leq n + 1$. $\square$

Met de techniek van Fedorchuk, Levin en Shchepin [20] kan gemakkelijk bewezen worden dat voor elke σ -compacte ruimte X geldt: $ind X = DG X$.



Alexandroff, Brouwer en Urysohn

Foto: Brouwer-archief



Verwijzing naar 'slip of the pen' van Brouwer

Afbeelding: Brouwer-archief

Komt DG dus 'dicht in de buurt van' ind? Het antwoord is: helaas niet. Voor de voorbeelden X in Fedorchuk en Van Mill geldt namelijk dat $DG X = 1$ terwijl $\text{ind } X$ willekeurig groot kan zijn, zie [21, Lemma 2.3].

Reacties Brouwer op kritiek Urysohn

Tijdens het congres van de Deutsche Mathematiker-Vereinigung in Marburg stelde Urysohn in 1923 dat er een moeilijkheid is met de definitie van scheider zoals gehanteerd door Brouwer en dat derhalve de bewijzen van zijn stellingen niet deugden. Hij sprak van een 'irreparable mistake' (Van Dalen [16, p. 404, regels 26–27]). Zoals we eerder opmerkten, stelde Brouwer onder meer in [14] dat hij (S2)-scheiders had geschreven maar (S3) had bedoeld. Dit is de beroemde 'slip of the pen' die door Urysohn werd geaccepteerd.

Brouwer verving Dg kennelijk door de dimensiefunctie DG uit de vorige paragraaf want als je 'gesloten' in (S2) schrappt dan verkrijgt je (S3). Maar we zagen dat die dimensiefunctie niet veel verbetering brengt.

In [14, p. 318, regels 12–13] beweert Brouwer dat (S3) equivalent is met het volgende:

(S3)' A und B heißen in X durch C getrennt, wenn C in X eine A enthaltende, aber nicht B enthaltende Gebietsmenge bestimmt.

(Brouwer gebruikte andere symbolen: A is bij hem ρ , B is ρ' , C is π_1 en X is π .) Deze uitspraak heeft ook tot verwarring geleid in de literatuur. Allereerst over de vraag wat Brouwer verstaat onder *Gebietsmenge*. Het lijkt erop dat Brouwer hier gewoon *open verzameling* bedoelde, zie voetnoot * op pagina 150 van [8]. Dit wordt bevestigd door Freudenthal [15, p. 550, regels 23–26], die wel een waarschuwing afgeeft:

"Formally Gebietsmenge is Brouwer's term for relative open set. Its historical origin, however, is the division of the plane or euclidean space by a closed subset into a number of domains; any union of such domains is called a Gebietsmenge."

Je moet dus oppassen met dit begrip want zijn historische betekenis is een andere dan die Brouwer lijkt te hebben bedoeld. Bij Hausdorff [22, p. 215, regels 10–11] is open verzameling een *Gebiet*. (In de referentielijst verwijzen we naar een herziene druk van Hausdorffs boek, de eerste druk werd in 1914 gepubliceerd). Hij noemt daar ook het woord *Gebietsmenge* in voetnoot 1 op pagina 215 en lijkt zich aan te sluiten bij wat Weierstraß daaronder verstaat: een vereniging van samenhangende open verzamelingen. Maar geheel duidelijk is het niet. In de derde druk [23, p. 173, regels 4–5] is in de Engelse vertaling de terminologie aangepast: "A closed connected set is called a continuum; an open connected set is called a domain." Ook Alexandroff en Hopf [4, p. 51, regel 24] verstaan onder *Gebiet* een samenhangende open verzameling.

Johnson [27, p. 174, regels 14–17] vertaalt (S3)' als volgt:

"... wenn C in X eine A enthaltende, aber nicht B enthaltende Gebietsmenge bestimmt."

(... if C determines a domain set [i.e., a union of connected open sets; thus an open set] in X containing A , but containing no part of B .)

(We hebben ook hier de symbolen aangepast.) En Van Dalen [16, p. 409, regels 1–3] gaat nog een stap verder:

In the published corrections Brouwer used a somewhat different version of separation: S separates A and B if S determines a domain containing A , but not B .

Vermoedelijk bedoelde Van Dalen hier eveneens 'domain set'. En dan is er ook nog Alexandroff [2] die in 1924 aan *Gebietsmenge* een geheel andere betekenis toekende, namelijk, die van familie van open verzamelingen.

Verder is het onduidelijk wat Brouwer precies bedoelde met *bestimmt* in (S3)', het woord dat door Johnson werd vertaald met *determines*. Brouwer moet daar naar mijn mening bedoeld hebben dat $X \setminus C$ uiteenvalt in twee disjuncte open verzamelingen, waarbij de ene A bevat en de andere B , (S4) dus. Er is namelijk geen andere interpretatie die topologisch hout snijdt. Maar dan zijn (S3) en (S3)' niet equivalent. Zekerheid over wat Brouwer precies bedoelde valt niet meer te krijgen naar mijn (bescheiden) mening. We bespreken namelijk een artikel dat bijna honderd jaar geleden is geschreven. Bovendien, wat doet het er eigenlijk toe? De prestaties van Brouwer waren formidabel en zijn bewijs van de n -dimensionaliteit van $\mathbb{R}^n$ is correct als je uitgaat van (S4)-scheiders. Dat is wat belangrijk is en de rest is eigenlijk van ondergeschikt belang.

De moderne dimensietheorie is geheel gestoeld op de Dekpuntstelling van Brouwer [7] dat voor elke n , elke continue functie $f: \mathbb{I}^n \rightarrow \mathbb{I}^n$ een dekpunt heeft. Om die stelling te bewijzen kan men het apparaat van de algebraïsche topologie aanroepen. Maar het meest elementaire bewijs ervan volgt uit een combinatorisch resultaat van Sperner [35]. Er kan gemakkelijk bewezen worden dat Brouwers Dekpuntstelling voor $\mathbb{I}^n$ equivalent is met het bestaan van een n -dimensionale topologische ruimte. De Dekpuntstelling is dus het hart van de dimensietheorie. Brouwers Stelling over de Invariantie van *Gebiet* is ook een ogenblikkelijk gevolg van de Dekpuntstelling (Hurewicz en Wallman [25, Theorem VI 9]).

Epiloog

Als ik door de gangen van het Korteweg-De Vries Instituut voor Wiskunde van de Universiteit van Amsterdam loop, dan vraag ik mij weleens af wat ik zou doen als ik Brouwer zou tegenkomen. Uit de verhandelingen van Van Dalen [16] komt hij naar voren als iemand die slimmer was dan de meeste mensen, altijd tot debat en polemieken be-

reid, scherp en soms onaangenaam. Maar, wel een strijder die met open vizier streed. En een strijder die voor de Nederlandse wiskunde en informatica van onmetelijke betekenis is geweest. Er bestaat geen twi- fel over dat hij de grondvester was van de dimensietheorie, of zijn pen enkele malen is uitgeschoten als het om trivialiteiten ging of niet, dat doet er niets toe. Dat Menger

[32] hem dit wilde ontnemen kan moeilijk anders dan als kwalijk worden bestempeld. En Brouwers onvrede over deze handelswijze is heel erg begrijpelijk. Nu terug naar de vraag wat ik zou doen als ik Brouwer zou tegenkomen. Ik denk dat ik toch wel een praatje met hem zou willen maken en hem de volgende vraag zou willen stellen: “Beste Bertus, wat vind jij nou van die Trump?” ☺

Noten

- 1 En dat was maar goed ook. De Nobelprijs voor Natuurkunde is dit jaar toegekend aan drie Britten voor de ontdekking van topologische fase-overgangen, een quantummechanisch verschijnsel dat in de jaren tachtig ontdekt werd.
- 2 Een *Poolse ruimte* is een volledige sepa- rabele metrische ruimte.
- 3 Een *continuüm* is een compacte samenhan- gende topologische ruimte die tenminste twee punten bevat.
- 4 Bronislaw Knaster (1893–1980) was een be- kend Pools wiskundige. Toen ik hem bezocht in 1979 in Wrocław (Polen) vroeg hij mij mijn lezing in het Frans te houden. Was ik soms een student van L.E.J. Brouwer? Uiteraard antwoordde ik ontkennend. Na mijn lezing nam hij mij mee naar zijn studeerkamer om

- zijn boeken te bewonderen. Daar vroeg hij me of ik een student was van J. de Groot (1914–1972). Ook daar antwoordde ik ont- kennend op. Toen wees hij me op de foto's van Brouwer en De Groot die naast elkaar hingen aan een muur van zijn studeerkamer. Kazimierz Kuratowski (1896–1980) was ook een bekend Pools wiskundige. Hem heb ik in 1976 in Praag ontmoet.
- 5 Een punt x van een topologische ruimte X behoort tot de afsluiting $\bar{A}$ van een deelver- zameling A van X als elke omgeving van x , hoe klein die omgeving ook is, een punt van A bevat.
- 6 Een deelverzameling A van een topologi- sche ruimte X heet een G_δ -verzameling van X als zij te schrijven is als $\bigcap_{n=1}^\infty U_n$, waarbij elke U_n open is in X .

- 7 Een G_δ -verzameling van een Poolse ruimte is weer Pools, zoals werd bewezen door Alex- androff en Hausdorff, [17, Theorem 4.3.23].
- 8 Alle ‘bewijzen’ wijzen in de richting dat Brouwer hier de waarheid sprak. Zie Freu- denthal [15], Alexandroff [3], Johnson [27] en Van Dalen [16].
- 9 Dit is een volkomen legitieme handelswijze die in de dimensietheorie ‘dimensie modulo een klasse’ is gaan heten (Aarts en Nishiura [1]).
- 10 Dit is een niet-triviale bewering en het be- wijs omzeilt behendig het probleem dat bij ind en Dg de respectievelijke noties van scheider niet overeenstemmen.
- 11 Zo’n ruimte heet σ -compact.

Referenties

- 1 J.M. Aarts en T. Nishiura, *Dimension and Extensions*, North-Holland Mathematical Li- brary, Vol. 48, North-Holland, 1993.
- 2 P. Alexandroff, Über die Struktur der bikomp- akten topologischen Räume, *Math. Ann.* 92(3-4) (1924), 267–274.
- 3 P. Alexandroff, Die Topologie in und um Hol- land in den Jahren 1920–1930, *Nieuw Arch. Wiskunde* 3/17 (1969), 109–127.
- 4 P. Alexandroff en H. Hopf, *Topologie. I*, Berichtiger Reprint, Die Grundlehren der mathematischen Wissenschaften, Band 45, Springer, 1974.
- 5 B. Bolzano, Über Haltung, Richtung, Krüm- mung und Schnörkelung bei Linien sowohl als Flächen sammt einigen verwandten Be- griffen, in: J. Vojtěch, ed., *Spisy Bernarda Bolzana*, Vol. 5, Geometrické práce, 1948.
- 6 L.E.J. Brouwer, Beweis der Invariantz der di- mensionenzahl, *Math. Ann.* 71 (1911), 161–165.
- 7 L.E.J. Brouwer, Über Abbildung von Manni- gfaltigkeiten, *Math. Ann.* 71 (1912), 97–115.
- 8 L.E.J. Brouwer, Über den natürlichen Di- mensionsbegriff, *J. Reine Angew. Math.* 142 (1913), 146–152.
- 9 L.E.J. Brouwer, Over het natuurlijke dimen- siebegrip, *KNAW Versl.* 32 (1923), 881–886.
- 10 L.E.J. Brouwer, Über den natürlichen Dimen- sionsbegriff, *KNAW Proc.* 26 (1923), 795–800.
- 11 L.E.J. Brouwer, Bemerkungen zum natür- lichen Dimensionsbegriff, *KNAW Proc.* 27 (1924), 635–638.
- 12 L.E.J. Brouwer, Berichtigung, *J. Reine Angew. Math.* 153 (1924), 253.
- 13 L.E.J. Brouwer, Opmerkingen over het na- tuurlijke dimensiebegrip, *KNAW Versl.* 33 (1924), 476–478.
- 14 L.E.J. Brouwer, Zum natürlichen Dimensions- begriff, *Math. Z.* 21 (1924), 312–314.
- 15 L.E.J. Brouwer, *Collected Works, Vol. 2: Geo- metry, Analysis, Topology and Mechanics*, edited by Hans Freudenthal, North-Holland, 1976.
- 16 D. van Dalen, *L.E.J. Brouwer—Topologist, Intuitionist, Philosopher. How mathematics is rooted in life*, Springer, 2013.
- 17 R. Engelking, *General Topology*, Helder- mann, 1989, 2nd ed.
- 18 R. Engelking, *Theory of Dimensions Finite and Infinite*, Heldermann, 1995.
- 19 P. Erdős, The dimension of the rational points in Hilbert space, *Annals of Math.* 41 (1940), 734–736.
- 20 V.V. Fedorchuk, M. Levin en E.V. Shchepin, On the Brouwer definition of dimension, *Us- pekhi Mat. Nauk* 54 (1999), 193–194.
- 21 V.V. Fedorchuk en J. van Mill, Dimensions- grad for locally connected Polish spaces, *Fund. Math.* 163 (2000), 77–82.
- 22 F. Hausdorff, *Grundzüge der Mengenlehre*, Chelsea, 1949.
- 23 F. Hausdorff, *Set Theory* (English translation of *Grundzüge der Mengenlehre*, 3rd ed., 1937), Chelsea, 1962, 2nd English ed.
- 24 W. Hurewicz, Normalbereiche und Dimen- sionstheorie, *Math. Ann.* 96 (1927), 736–764.
- 25 W. Hurewicz en H. Wallman, *Dimension The- ory*, Van Nostrand, 1948.
- 26 D.M. Johnson, Prelude to dimension theory: the geometrical investigations of Bernard Bolzano, *Arch. History Exact Sci.* 17 (1977), 262–295.
- 27 D.M. Johnson, The problem of the invari- ance of dimension in the growth of modern topology, Part II, *Arch. Hist. Exact Sci.* 25 (1981), 85–267.
- 28 B. Knaster, Sur un problème de P. Al- exandroff, *Fund. Math.* 33 (1945), 308–313.
- 29 B. Knaster en K. Kuratowski, Sur les ensem- bles connexes, *Fund. Math.* 2 (1921), 206–255.
- 30 S. Mazurkiewicz, O arytmetyczacji ciągów, *C.R. Varsovie* 6 (1913), 305–311.
- 31 K. Menger, Über die Dimension von Punkt- mengen I, *Monatsh. für Math. und Phys.* 33 (1923), 148–160.
- 32 K. Menger, *Dimensionstheorie*, B.G. Teubner, 1928.
- 33 J. van Mill, Brouwers dimensionsgrad: con- troverse en verwarring, *Nieuw Arch. Wiskun- de* 5/14 (2013), 130–138.
- 34 H. Poincaré, Pourquoi l’espace a trois di- mensions, *Revue de Metaph. et de Morale* 20 (1912), 483–504.
- 35 E. Sperner, Neuer Beweis für die Invarianz der Dimensionszahl und des Gebietes, *Abh. Math. Semin. Hamburg. Univ.* 6 (1928), 265–272.
- 36 L.A. Tumarkin, Über die Dimension nicht abgeschlossener Mengen, *Math. Ann.* 98 (1928), 637–656.
- 37 P. Urysohn, Les multiplicités Cantorienes, *C.R. Acad. Paris* 175 (1922), 440–442.
- 38 P. Urysohn, Mémoire sur les multiplicités Cantorienes, *Fund. Math.* 7 (1925), 30–137.
- 39 P. Urysohn, Mémoire sur les multiplicités Cantorienes (suite), *Fund. Math.* 8 (1926), 225–359.

Wim Veldman

IMAPP, FNWI
Radboud Universiteit
w.veldman@math.ru.nl

In Memoriam Walter (Wouter) van Stigt (1927–2015)

Trots op Brouwer

Op 24 november 2015 overleed Walter van Stigt, een Nederlandse wiskundige die een groot deel van zijn werkzame leven doorbracht in Engeland. In 1971 promoveerde hij op een proefschrift over L. E. J. Brouwer. Zijn vakgenoot Wim Veldman herdenkt hem.

Walter van Stigt is de auteur van *Brouwer's Intuitionism* (Elsevier, 1991), een boek dat gaat over Brouwers leven, Brouwers filosofie en Brouwers wiskunde. Walter was overtuigd van het grote belang van Brouwers denkbeelden en vond dat er vaak te

weinig aandacht is voor de oorsprong en de filosofische achtergrond van die denkbeelden. Zijn boek bevat dertien appendices met teksten en correspondentie van Brouwer, te beginnen met de *Geloofsbelijdenis* die Brouwer als jongen van 17 aflegde voor de Remonstrantse kerk in Haarlem. Walter heeft ook een Engelse vertaling gemaakt en gepubliceerd (zie *Notre Dame J. Formal Logic* 37 (1996), 381–429) van *Leven, Kunst en Mystiek*, de tekst van een reeks lezingen die Brouwer gaf toen hij 22 was en waarvan slechts (ook door Walter vertaalde) fragmenten waren opgenomen in Brouwers in 1975 verschenen *Collected Works*. Walter vond dat de hele tekst belangrijk is als je wilt begrijpen wie Brouwer was en hoe hij dacht. Samen met Paolo Mancosu redigeerde hij het boek *From Brouwer to Hilbert, the Debate on the Foundations of Mathematics in the 1920s*, Oxford UP, 1998. Voor dit boek vertaalde Walter een aantal artikelen van Brouwer in het Engels.

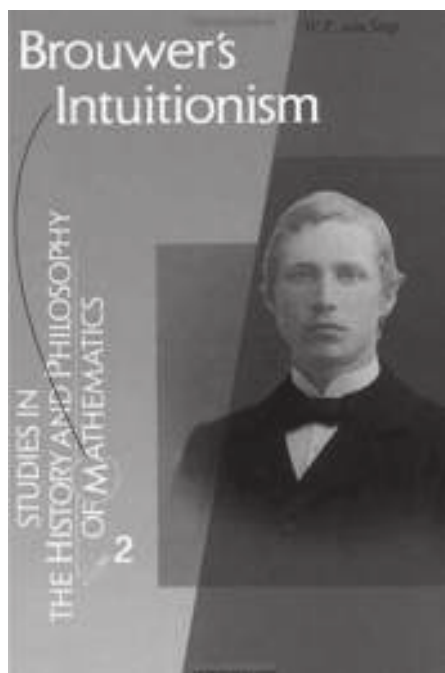
Walter (Wouter Petrus) van Stigt werd geboren op 1 januari 1927. Hij was de oudste zoon in een groot Amsterdams katholiek gezin. De architect Joop van Stigt was een van zijn broers.

Priester

Walter trad in bij de Missionarissen van de Heilige Familie en werd, na zijn studie van filosofie en theologie in Oudenbosch, tot priester gewijd in 1953. In opdracht van zijn orde ging hij Engels studeren in Nijmegen. Hij was muzikaal: hij speelde fluit en had een mooie stem. In 1956 organiseerde hij, in de Vereniging in Nijmegen, een opvoering van Henry Purcell's *The Fairy Queen*, een masque die gebaseerd is op Shakespeares *A Midsummer Night's Dream*. Hij voerde de regie en speelde zelf de rol van Oberon. Dit project zou hem zijn leven lang met trots blijven vervullen. Omdat hij de muziek van Purcell op authentieke wijze wilde uitvoeren bouwde hij het eerste van de drie klavecimbels die hij in de loop van zijn leven zou maken. Het laatste en mooiste maakte hij samen met zijn broer Willem en zijn zuster Nanda in 1995.

Engeland

In 1958 behaalde Walter zijn kandidaats-examen en legde hij het priesterschap neer. Hij verhuisde naar Engeland, waar hij leraar Frans en Engels werd, en hij trouwde in 1960 met Judith Sachs. Ze kregen drie kinderen, Nicholas, Kathryn en Elisabeth. In 1963 begon hij in deeltijd wiskunde te studeren aan London University en hij voltooide die studie drie jaar later. De Engelse logicus G. Kneebone was een van



Het omslag van *Brouwer's Intuitionism*



Walter van Stigt

Foto: erven Walter van Stigt

zijn docenten en vroeg Walter, toen Brouwer overleed, in 1966, hem te helpen bij het maken van een levensbeschrijving. In 1968 werd hij Senior Lecturer in Mathematics aan Whitelands College en later werd hij daar decaan. Aangemoedigd door G. Kneebone, verdiepte hij zich verder in het intuïtionisme. Hij kreeg het gevoel dat de geest van Brouwers revolutie onvoldoende levend werd gehouden: het onderzoek dat in de intuïtionistische wiskunde werd verricht was in zijn ogen nogal 'logisch'

terwijl Brouwer altijd had onderstreept dat wiskunde op de eerste plaats staat en logica een ondergeschikte rol speelt. In 1971 promoveerde hij op een proefschrift over Brouwer.

Brouwer-archief

De Nederlandse organisatie voor Zuiver Wetenschappelijk Onderzoek (ZWO) verleende hem, op voorspraak van Dirk van Dalen, een bezoekersbeurs in Utrecht voor het academisch jaar 1976/77. In dat jaar

werkte hij aan zijn boek en, mede met het oog daarop, aan het verzamelen van verspreid geraakte documenten van en over Brouwer, en ander biografisch materiaal. Hij legde contact met Brouwers neef en erfgenaam, ir. L.E.J. Brouwer, en sprak met vele betrokkenen. Op aanwijzing van ir. Brouwer vond hij, in Amsterdam, de correspondentie tussen Brouwer en diens promotor Korteweg, waaruit bleek dat Korteweg de eerste versie van Brouwers proefschrift had willen verwerpen. Ook stootte hij, in een kelder van de Technische Hogeschool in Delft, op Brouwers aantekeningen voor colleges in Berlijn en Cambridge. In Göttingen vond hij de correspondentie tussen Hilbert en Brouwer. Getroffen door de goede organisatie van het *Hilbert-archief* in Göttingen begon hij het *Brouwer-archief* waarin hij zijn vondsten onderbracht. Hij zette zich in voor een zorgvuldig beheer van dit archief dat onder de verantwoordelijkheid stond van hemzelf en Dirk van Dalen. Het Brouwer-archief is nu deel van het Noord-Hollands Archief in Haarlem.

In 1982 verviel het ambt van decaan aan Whitelands College. Walter werd deeltijd-hoogleraar wiskunde en Director van het London program van de University of Southern Maine. Een Leverhulme Fellowship stelde hem in staat zijn onderzoek over de filosofie van de wiskunde voort te zetten aan Wolfson College in Oxford waar hij in het gezelschap was van Michael Dummett, Robin Gandy en Dan Isaacson. Hij werkte, ook voor andere Amerikaanse universiteiten, aan Kingston University, tot 1997.

Energiek en hartelijk

Zijn vrouw Judith overleed in 2014. Walter en Judith hebben vijf kleinkinderen.

Walter kon veel. Hij was energiek, optimistisch, ondernemend en enthousiast, en buitengewoon hartelijk voor iedereen die hij ontmoette. Hij heeft ons op het hart gedrukt trots te zijn op Brouwer, zuinig te zijn op zijn erfgoed en goed ons best te doen hem echt te begrijpen.

We zullen met dankbaarheid aan Walter blijven denken.

✶

Casper Albers

Psychometrie & Statistiek
Rijksuniversiteit Groningen
c.j.albers@rug.nl



Column Casper grijpt een kans

Er is er een jarig

Caspers Albers zal vanaf nu op regelmatige basis in dit blad een column schrijven over alledaagse statistische onderwerpen.

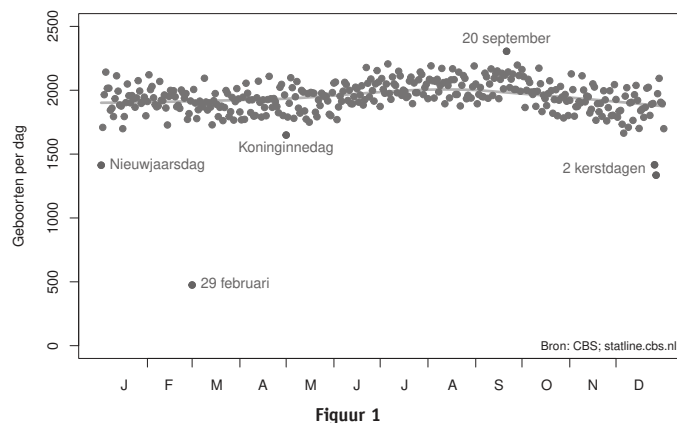
Dit wordt mijn eerste bijdrage aan NAW en het lijkt me gepast dat ik die dan maar besteedt aan een van de bekendere problemen uit de statistiek en kansrekening: de verjaardagenparadox. *Hoe groot moet een groep willekeurige personen zijn zodat de kans dat er minstens twee personen op dezelfde dag jarig zijn minimaal 50 procent is?* Voor het beantwoorden van deze vraag wordt doorgaans de aanname gemaakt dat er elke dag precies evenveel mensen jarig zijn (en dat 29 februari niet bestaat).

Vervolgens is het beantwoorden van de vraag een kwestie van elementaire kansrekening (althans, elementair voor het lezerspubliek van dit blad). De kans dat in groep van één persoon iedereen een unieke verjaardag heeft, is vanzelfsprekend 1. De kans dat een nieuwe persoon die wordt toegevoegd aan de groep ook een unieke verjaardag heeft, is $364/365$; bij een derde persoon is dit $363/365$, et cetera. Voor een groep van k personen, is de kans op k unieke verjaardagen dan $365! / (365^k \times (365 - k + 1)!)!$. Bij $k = 23$ is deze kans kleiner dan 50 procent en de kans op overlappende verjaardagen dus groter dan 50 procent (50,7 procent om wat preciezer te zijn).

Je kan hier vervolgens hele interessante wiskunde mee doen — de Taylorontwikkeling is bijvoorbeeld verrassend accuraat — maar dat ga ik niet doen: ik wil me buigen over de statistiek rond dit probleem: die aanname, dat elke dag van het jaar evenveel jarigen kent, klopt die wel? En als die aanname niet klopt — op de ene dag zijn meer jarigen dan op de andere — wat heeft dat dan voor gevolgen voor de groeps grootte die nodig is om minimaal 50 procent kans op een dubbele verjaardag te hebben? Of je juist grotere of kleinere groepen kan verwachten is intuïtief goed te beredeneren door aan een extreem scenario te denken: als iedereen op dezelfde dag jarig is (dus maximale niet-uniformiteit), dan is $k = 2$ al voldoende. De groeps grootte zal dus kleiner worden (of, doordat we met gehele getallen werken, gelijk blijven).

Het CBS houdt minutieus bij hoeveel geboortes er per dag zijn, het is bijna alsof er in elke kraamkamer een statisticus staat te turven. In de maanden juli tot en met oktober ligt het geboortecijfer per dag in Nederland bijna 10 procent boven dat van de andere maanden. En dan zijn er ook nog speciale dagen (zoals 1 januari en 25 december) waarop er wel natuurlijke bevallingen zijn (baby's houden geen rekening met feestdagen), maar geen bevallingen door geplande keizersneden.

Ik heb de CBS-gegevens van de jaren 2010–2013 bestudeerd (een vierjarige periode zodat er een jaar met, en drie jaren zonder 29 februari in zitten). Het aantal geboortes per dag varieert van 302 (op 15 december 2013) tot 625 (22 september 2010): niet bepaald uniform. Over deze vier jaren heen blijkt 29 februari vanzelfsprekend de minst populaire dag om te bevallen; de vruchtbaarste dagen zijn 20 september en 5 juli (geen idee waarom), zie Figuur 1. Gemiddeld worden er zo'n 485,7 baby's per dag geboren, met een standaarddeviatie van 36,1. Als we nu de aanname maken dat deze vier jaar een goede afspiegeling vormen van de verdeling van geboortes over de jaren, kunnen we een realistischere berekening maken. (Al zal de echte verjaardagsverdeling ongetwij-



Figuur 1

feld niet exact hetzelfde zijn als de verdeling van geboortes over 2010–2013.)

Je zou dit probleem — in theorie — wiskundig aan kunnen pakken. De kans op een dubbele verjaardag is één min de kans op enkel unieke verjaardagen. Voor elk van de 366 dagen is er nu een aparte kans, $p_1, \dots, p_{366}$ (met restrictie $\sum_i p_i = 1$), op een verjaardag. Voor een groep van k personen, zijn er $(366 - k + 1)!$ verschillende combinaties van verjaardagen zodat er geen dubbele vergaderingen zijn — een gigantisch groot aantal. Voor elk van die combinaties is uit te rekenen wat de kans erop is via de multinomiale verdeling, in dit geval:

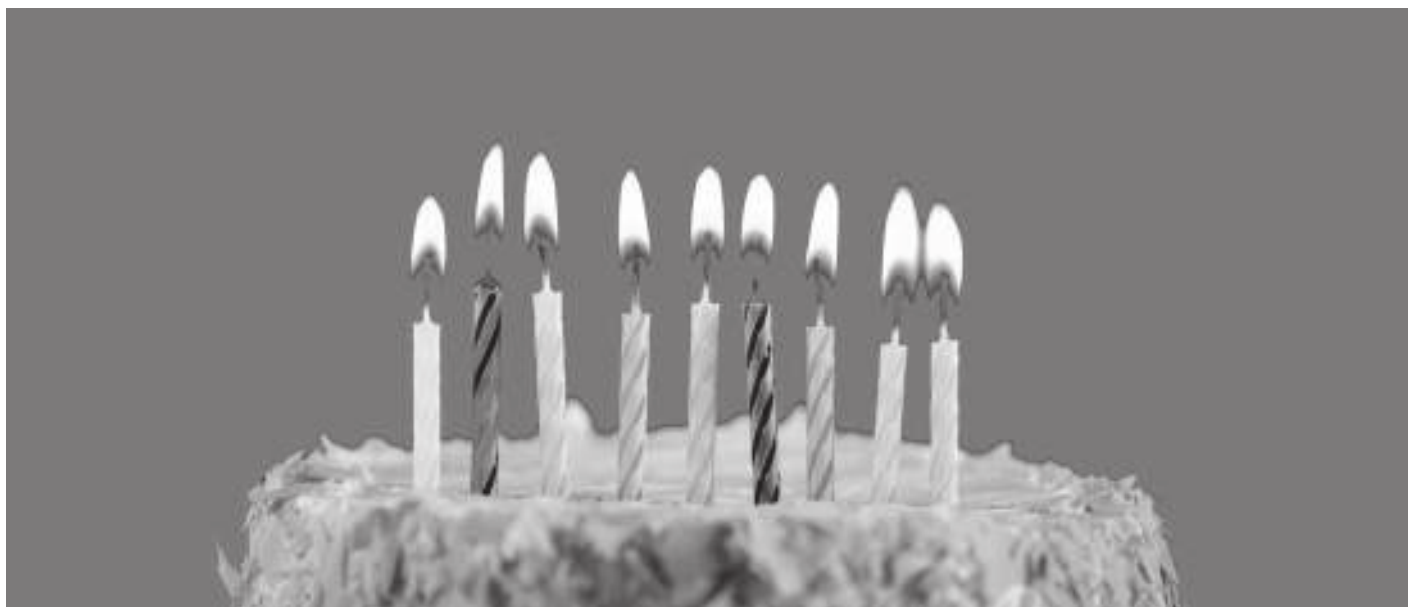
$$P(x_1, \dots, x_k) = k! \prod_{i=1}^k p_{x_i},$$

en omdat de p 's gemiddeld $1/366$ zijn, levert dit een microscopisch klein getal op bij grotere k . Uiteindelijk moet je een gigantisch aantal microscopische getallen optellen. Theoretisch kan het, maar praktisch is het niet.

Een veel praktischere oplossing is om deze kans te benaderen met brute rekenkracht wel: met een paar regels programmeercode heb je binnen enkele seconden een miljoen groepjes van 23 personen gesimuleerd en geturfd in hoeveel groepjes personen een

verjaardag delen. Die proportie gedeelde verjaardagen levert een goede schatting op van de gezochte kans, alsmede de foutenmarge die je door het toeval krijgt. (Deze is bij een miljoen replicaties al erg klein, maar als je niet snel tevreden bent kan je gewoon nog even doorrekenen. Bij elke verviervoudiging van het aantal rekenstappen, halveert de foutenmarge.) Binnen een minuut heb je het ook voor groepen van 22, 21, ..., 1 persoon. En wat blijkt uit deze simulaties: de groeps grootte k is nog steeds 23. Bij $k = 22$ is de kans op gedeelde verjaardagen 47,6 procent, bij $k = 23$ is dit 50,8 procent. Het verschil met 50,7 procent dat je krijgt met de totaal onrealistische aanname van gelijke verdelingen van verjaardagen is dus verwaarloosbaar klein.

Dit is een interessante eigenschap die vaak opgaat in de statistiek: om je model op te stellen moet je aannames maken die vrij onrealistisch ogen. Vervolgens kan je met dat model de zaken die je wilt weten uitrekenen, maar het blijft knagen omdat je die aanname moest maken. Voor veel statistische modellen geldt echter dat ze erg robuust zijn tegen schendingen van de aanname: als je het niet te bont maakt (dus niet iedereen op 1 januari geboren laten zijn), krijg je prima antwoorden, ook als je aanname niet helemaal klopt. En dat is wel zo fijn: want dan kan je statistiek ook gebruiken in de situaties waarin onrealistische aannames niet opgaan. ☺



Robbert Fokkink

Delft Institute of Applied Mathematics
TU Delft
r.j.fokkink@tudelft.nl

Biografie Willem Wijthoff (1865–1939)

Wie weet wie Willem Wijthoff was?

Willem Wijthoff leidde een onopvallend leven en er is weinig informatie over hem te vinden, maar in de wiskunde heeft hij zijn sporen nagelaten in de vorm van het Wythoff-symbool en Wythoffs Nim. Twee verschillende begrippen, er zijn niet veel wiskundigen die dat op hun naam hebben staan. Wie was deze Willem Wijthoff eigenlijk? Robbert Fokkink schetst een beeld van het leven en werk van deze in de vergetelheid geraakte wiskundige.

Willem Abraham Wijthoff werd op 10 oktober 1865 geboren in Amsterdam. Hij groeide op in een monumentaal herenhuis op de hoek van de P.C. Hooftstraat en de Hobbe-
mastraat — tegenwoordig is het een flagshipstore van het strakke spijkerbroekenmerk G-Star Raw — waar hij bleef wonen tot aan zijn dood op 21 mei 1939. In de wiskunde wordt Wijthoff overigens geschreven met een y omdat Wijthoff dat zelf zo deed boven al zijn publicaties. De burgerlijke stand noteert een ij.

Willem Wijthoff was de jongste van vier kinderen. Hij had drie zussen: Geertruida, die net als hij wiskunde studeerde, Henriëtte, een schrijfster, en Anna, een kunstenares. De familie Wijthoff was welgesteld. De vader en de grootvader van Willem Wijthoff waren eigenaar van de Amsterdamse suikerraffinaderij Wijthoff en Zoon. Deze firma ging eind 1864 failliet, een gebeurtenis die nog werd vermeld door de minister van Financiën vanwege consequenties voor de Nederlandse schatkist, maar maakte in 1865 een doorstart op grote schaal onder de naam Internationale Suikerraffinaderij. Het waren roerige tijden voor de Nederlandse suikerindustrie, die toen nog draaide op suikerriet. Er was concurrentie van buitenlandse bietsuiker en er was weerstand tegen de erbarmelijke toestan-

den in de Amsterdamse fabrieken. Wijthoff en Zoon overleden kort na elkaar in 1880 en 1881. Een week na het overlijden van Wijthoff senior, in mei 1881, ging de Internationale Suikerraffinaderij failliet. Rond dezelfde tijd schreef Truida Wijthoff zich in als student wis- en natuurkunde aan de universiteit van Amsterdam [11]. De enige Nederlandse vrouw die eerder studeerde was Aletta Jacobs.

In 1884 gaat ook Willem wis- en natuurkunde studeren. Hij slaagt voor zijn kandidaatsexamen in 1887, gaat daarna in dienst en doet doctoraalexamen scheikunde in 1892 en doctoraal wis- en natuurkunde in 1895. In 1895 is hij assistent van de natuurkunde in Groningen, waarschijnlijk bij Schoute. Misschien is hij daar al begonnen aan zijn proefschrift, een verhandeling over transformatiegroepen van de vierdimensionale ruimte. Korteweg is de promotor, maar het onderwerp van het proefschrift ligt dicht bij de interesse van Schoute.

In 1893 start de *Revue Semestrielle des Publications Mathématiques*, een voorloper van *Math Reviews* en het *Zentralblatt*, onder redactie van Schoute. Truida is een van de medewerkers van het eerste uur, zij schrijft de reviews van de Scandinavische tijdschriften. Na zijn promotie in 1898 wordt ook Willem medewerker bij

de Revue. Hij neemt de Amerikaanse tijdschriften voor zijn rekening, blijft dat dertig jaar doen, en wordt hoofdredacteur na het overlijden van Schoute in 1913. Op de jaarlijkse vergadering van 1902 wordt hij gekozen in het bestuur van het Wiskundig Genootschap, maar al snel treedt hij terug. In de archieven van het WG zijn geen notulen te vinden met zijn naam en op de vergadering van 1903 is er sprake van een vacature die is ontstaan door de bedanking van Wijthoff. Toch moet hij zichtbaar



Figuur 1 In 1885 werd de Amsterdamsche Studentenbond opgericht, als tegenhanger van het elitaire Studentencorps. Willem Wijthoff was een van de oprichters en werd secretaris, ofwel ab-actis, zoals te zien in deze oproep in het *Nieuws van de Dag*, 5 september 1887. Het is moeilijk om informatie over Wijthoff boven water te krijgen, maar in de ASB was hij prominent aanwezig. Als de bond op 7 juli 1901 bij elkaar komt, op wat later de laatste vergadering blijkt te zijn geweest, is er nog een ultieme poging om de vereniging nieuw leven in te blazen via het plan Wijthoff, een voorstel tot een fusie met het Amsterdamse Studenten Toneel. Het is vergeefs, eind 1901 werd de ASB opgeheven.



Foto: Indisch Thee & Familie Archief

Figuur 2 Truida Wijthoff. Erelid van het WG.

zijn gebleven in de wiskundige gemeenschap. In 1916 bemoeit Brouwer zich met de opvolging van Kapteyn. Brouwers eerste kandidaat is Mannoury en zijn tweede kandidaat is Wijthoff [7]. Uiteindelijk kiest de Universiteit Utrecht voor Denjoy, die een hele reis moet maken vanuit Frankrijk vanwege tussenliggende loopgraven.

Het is onduidelijk waar Wijthoff werkte en of hij dat überhaupt ooit wel heeft gedaan. Hij wordt soms beschreven als leraar wiskunde, maar op welke school is niet bekend. Vanaf 1920 was hij lid van de examencommissie voor de onderwijzersacte. Bij bijna alle leden van de commissie staan de functies vermeld, hoogleraar of onderwijzer, directeur of inspecteur, maar bij Wijthoff staat alleen de woonplaats. Wat dat betreft is er meer terug te vinden over Truida, die lerares wiskunde was aan de meisjesschool in Middelburg van 1884 tot 1886. Op 6 augustus 1885 bericht de Middelburgse Courant over een vergadering van de gemeenteraad, waarin haar herbenoeming wordt besproken. De ene helft van de raad is voor een vaste benoeming, de andere helft wil een tijdelijk contract, omdat de financiële situatie van de school weinig rooskleurig is. Bovendien moet de relevantie van het wiskundeonderwijs op de meisjesschool eerst nog eens worden gezien. Het wordt uiteindelijk een tijdelijke benoeming, want in de zomer van 1886 is Truida weer terug in Amsterdam. Waarschijnlijk heeft ze daarna niet meer voor de klas gestaan. Ze gaat werken voor het Administratiekantoor tot Beheer van Amerikaanse Spoorwegwaarden, een beleg-

gingsfonds van de Amsterdamse bankier Wertheim. Ze was, net als haar broer, een trouw oplosser van de problemenrubriek in het *Nieuw Archief voor Wiskunde* en maakte er een gewoonte van om de jaarlijkse prijsvraag te winnen. Op de jaarvergadering van 1907 werd Truida benoemd tot

erelid van het WG, nadat ze de prijsvraag voor de tiende keer had gewonnen. Op de website van het KWG staan de ereleden Coxeter, Erdős, Mahler, Vinogradov, en nog wat andere mannen. Het zou aardig zijn als het eerste vrouwelijke erelid van het WG in dit rijtje wordt opgenomen.

Het gezin Wijthoff blijft lang bij elkaar wonen op de P.C. Hooftstraat 28. In 1898 en 1899 verlaten twee zussen het huis. Henriëtte verhuist naar Heiloo. Truida trouwt met haar neef Julius Kerkhoven, een civiel ingenieur die twintig jaar lang in Semarang heeft gewerkt voor de Nederlands-Indische spoorwegmaatschappij en die zijdelings wordt beschreven in *Heren van de Thee*, een roman van Hella Haasse. Ze gaan wonen in Apeldoorn. Truida wint nog vele malen de jaarlijkse NAW-prijsvraag en ook Julius wordt een oplosser van de problemenrubriek. Anna blijft wonen in de P.C. Hooftstraat, maar op huisnummer 21. De familie Wijthoff had twee huizen in bezit, nummer 21 en 28. Uiteindelijk geeft ook Willem nummer 21 op als zijn huisadres. Wijthoff en zijn drie zussen leidden dankzij hun familiekapitaal een comfor-



Foto: Indisch Thee & Familie Archief

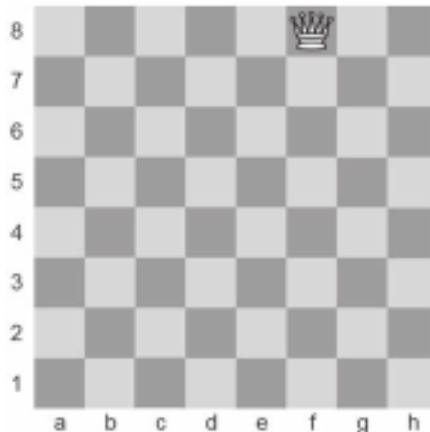
Figuur 3 Bij elkaar in het theehuis in de tuin van Truida in Apeldoorn. Van links naar rechts: Anna Wijthoff, Willem Wijthoff, Truida Wijthoff, Julius Kerkhoven, Anna Catharina Wijthoff-Kerkhoven.

tabel en rustig bestaan. Ze hadden een hechte band. Willem en Anna woonden bij elkaar in Amsterdam, Truida en Henriëtte woonden bij elkaar in Apeldoorn nadat Julius was overleden. Geen van hen had kinderen en daarom is er nu nog maar weinig over hen te vinden. Truida, de oudste van de vier, overlijdt als laatste in 1953.

Wythoffs Nim

In de *Revue Semestrielle* van 1902 schrijft Wijthoff een review over Boutons analyse van Nim (zie Figuur 4). Het moet hem aan het denken hebben gezet. Een paar jaar later schrijft hij in het *Nieuw Archief voor Wiskunde* over een spel met twee stapels munten, dat hij 'a modification of the game of Nim' noemt. Wijthoffs spel kun je ook spelen met een dame op een schaakbord, of een ander bord met meer velden zoals een go-bord. Hoe groter het bord hoe beter. Plaats de dame op een willekeurig beginpunt (zie Figuur 5) en verklaar dit tot rechterbovenhoek. De ene speler doet een zet met de dame en de nieuwe positie van de dame is de nieuwe rechterbovenhoek, zo wordt het bord dus kleiner. Nu is de andere speler aan zet. Degene die de dame op de linkerbenedenhoek zet, wint. Er zitten veel patronen in dit spel en dat is de reden dat er nog steeds over wordt gepubliceerd. Zoek in MathSciNet maar eens op Wythoff.

Wythoffs spel draait om de verloren velden, dat wil zeggen, de posities van de dame waarbij de beginspeler verliest. De linkerbenedenhoek a_1 is een verloren veld, want de beginspeler kan gelijk niet meer zetten. Ook b_3 is een verloren veld, want a_1 is onbereikbaar, maar wordt bereikbaar na elke mogelijke beginzet. De verloren velden op een gewoon schaakbord zijn a_1 , b_3 , c_2 , d_6 , e_8 , f_4 en h_5 . Speel de dame naar een verloren veld zodra je aan zet bent. Staat de dame al op een verloren veld, hoop dan op een vingerfout van de tegenstander.



Figuur 5 Wijthoffs spel met een dame op een schaakbord.

Op een oneindig schaakbord is de notatie met cijfers en letters niet vol te houden, dus noteren we (m, n) met coördinaten $0, 1, 2, 3, \dots$. Zet de veelvouden van de gulden snede $\phi = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$ op een rij, afgerond naar beneden op het gehele deel

$$1, 3, 4, 6, 8, 9, 11, 12, 14, 16, 17, 19, 21, \\ 22, 24, 25, 27, 29, 30, 32, 33, 35, \dots$$

Doe hetzelfde voor de veelvouden van ϕ^2 . Dit geeft de rij van de ontbrekende getallen

$$2, 5, 7, 10, 13, 15, 18, 20, 23, 26, 28, 31, 34, 36, \dots$$

Zet nu de twee rijen onder elkaar. De kolommen vormen de verloren velden. Er zit symmetrie in het spel, dit zijn de verloren velden met $m < n$, de andere verloren velden krijg je door het bord om te klappen.

$$\begin{array}{cccccccccccccccccccc} 1 & 3 & 4 & 6 & 8 & 9 & 11 & 12 & 14 & 16 & 17 & 19 & 21 & 22 & 24 & 25 & 27 \\ 2 & 5 & 7 & 10 & 13 & 15 & 18 & 20 & 23 & 26 & 28 & 31 & 34 & 36 & 39 & 41 & 44 \end{array}$$

Er is een andere manier om deze twee getallenrijen op te schrijven. Elk getal komt één keer voor en ook elk verschil tussen getallen in dezelfde kolom komt één keer voor. De simpelste manier om aan deze voorwaarden te voldoen is door te beginnen met 1 in de bovenste rij. Elk volgende getal komt dan op de eerste vrije plaats die dat toelaat: 2 past op de onderste rij,

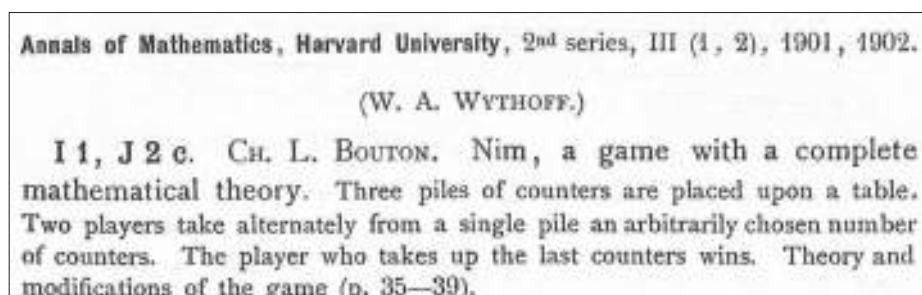
3 op de bovenste. Daarna is er voor 4 geen plaats op de onderste rij, want het verschil $4-3$ laat dit niet toe, dus 4 moet op de bovenste rij. Vervolgens past 5 op de onderste rij, enzovoort. Deze simpelste methode creëert de rij van verloren velden.

Er zijn nog meer patronen. De opeenvolgende paren van getallen in de Fibonacci-rij $\{1, 2\}, \{3, 5\}, \{8, 13\}, \{21, 34\}, \dots$ vormen een rij van verboden velden en wie verder kijkt, ontdekt Beatty-rijen en de stelling van Zeckendorf. Wie daar meer over wil weten, moet het artikel van Kimberling lezen [10], of hoofdstuk acht van Martin Gardners boek *Penrose Tiles to Trapdoor Ciphers*.

Wythoffs constructie

Iedereen kent de vijf platonische lichamen: tetraëder, kubus, octaëder, dodecaëder en icoosaëder (Figuur 6). In dimensie vier zijn er zelfs zes platonische lichamen, maar vanaf dimensie vijf verschijnen alleen kopieën van de tetraëder, kubus en octaëder. Alicia Boole Stott, een secretaresse in Liverpool en de dochter van George Boole, ontdekt op eigen houtje de vierdimensionale platonische lichamen [12]. Ze maakt kartonnen modellen van driedimensionale doorsneden van deze lichamen, die nog steeds worden bewaard in het Groninger Museum (zie Figuur 7). Aan het eind van de negentiende eeuw komt zij in contact met Schoute, die haar bezoekt in Engeland. Er ontstaat een langdurige samenwerking.

De driedimensionale doorsneden van Alicia Boole Stott zijn polytopen met een hoge mate van symmetrie. Het zijn geen platonische lichamen, want de facetten zijn niet congruent, maar ze zijn bijna net zo esthetisch. Boole Stott noemt ze *half-regelmatige polytopen*. Ze ontdekt twee meetkundige operaties, de *expansie* en *contractie*, waarmee ze deze halfregelmatige polytopen rechtstreeks kan produceren vanuit platonische lichamen, zonder doorsneden te gebruiken. Na lang aandringen van Schoute publiceert ze haar resultaten in 1910 in de verhandelingen van de KNAW [2]. Ondertussen gaat Schoute zelf aan de slag om de coördinaten vast te leggen van alle halfregelmatige lichamen die via contractie en expansie kunnen worden geproduceerd. Hij schrijft de *Analytical Treatment of the Polytopes Regularly Derived from Regular Polytopes*, een werk in vijf delen waarvan de eerste vier [14] verschijnen in de verhandelingen van de Akademie van



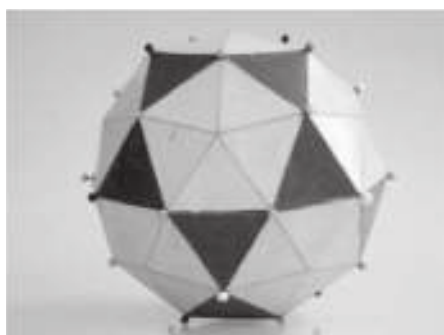
Figuur 4 Wijthoffs review over Boutons analyse van Nim.



Figuur 6 De vijf platonische lichamen.

Wetenschappen in 1911 en 1913. Voordat hij het vijfde deel [15] af kan maken, komt Schoute te overlijden. Er is alleen een stapel aantekeningen die wordt overgedragen aan Jacob Cardinaal, hoogleraar wiskunde en lid van de Akademie, voormalig rector magnificus in Delft. Hij schakelt de hulp in van Willem Wijthoff.

In de eerste drie delen had Schoute de methode van Boole Stott behandeld voor de drie platonische lichamen die in alle dimensies voorkomen: het simplex, de hy-



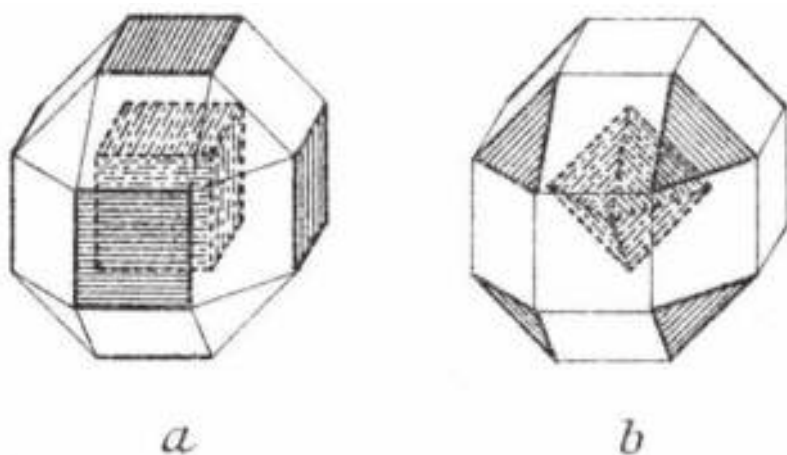
Figuur 7 Alicia Boole Stotts model van de icosidodecaëder, zoals te zien in het Groninger Museum. Het is een drie-dimensionale doorsnede van de 600-cel, waarvan de facetten bestaan uit driehoeken en vijfhoeken.

perkubus en het kruispolytoop. Deel vier ging over een halfregelmatic polytoop dat wordt opgespannen door hoekpunten van de hyperkubus die geen burens van elkaar zijn. Deel vijf, het deel dat op het bord van Cardinaal en Wijthoff terecht komt en dat twee jaar na Schoutes overlijden verschijnt, gaat over de speciale platonische lichamen die alleen in dimensie drie en vier voorkomen: de dodecaëder, de isocaëder in dimensie drie; de 24-cel, de 120-cel en de 600-cel in dimensie vier. Cardinaal en Wijthoff maken van het vijfde deel van de *Analytical Treatment* een nogal droge opsomming van zestig pagina's met coördinaten van halfregelmatic polytopen. Bijna de helft ervan zijn polytopen die ontstaan uit de 600-cel. De kampioen is $e_1 e_2 e_3 C_{600}$ met 14400 hoekpunten, waarvan de coördinaten drie pagina's in beslag nemen.

Wijthoff bedenkt dat het veel eenvoudiger is om de methode van Boole Stott te beschrijven met symmetriegroepen. De halfregelmatic polytopen hebben dezelfde symmetriegroep als de oorspronkelijke platonische lichamen. Je kunt net zo goed de convexe afsluiting nemen van $G \cdot x$, mits

de ribben allemaal even lang zijn. Om dit te bereiken, beschouwt Wijthoff een fundamenteel polytoop P , met de eigenschap dat het platonisch lichaam gelijk is aan de vereniging van $G \cdot P$. De symmetriegroep G wordt gegenereerd door spiegelingen in de facetten van P . Om ribben van gelijke lengte te produceren, moet x equidistant zijn met alle facetten van P die x niet bevatten. Dit heet tegenwoordig *Wythoffs constructie*. Wijthoff beschrijft zijn constructie aan de hand van de 600-cel, zijn grote plaaggeest uit het artikel met Cardinaal, een platonisch lichaam met een isometriegroep van orde 14400. Een kleine tien jaar later wordt Wijthoffs werk opgemerkt door Gilbert de Beauregard Robinson. Een ongebruikelijke gebeurtenis, want halfregelmatic polytopen zijn in de loop van de tijd telkens opnieuw ontdekt door onderzoekers die geen weet hadden van eerder werk. Robinson vertelt het door aan zijn mede-student Donald Coxeter (zie het hoofdstuk van Monson en Weiss in [8]), die Wythoffs constructie uitvoerig beschrijft in zijn boek over regelmatige polytopen en spiegelingsgroepen [5].

De icosidodecaëder in Figuur 7 en de semisnubkubus in Figuur 8 waren al bekend aan Archimedes. Het zijn twee van de dertien archimedische lichamen: polytopen met ribben van gelijke lengte en een symmetriegroep die transitief werkt op de hoekpunten. De vierdimensionale archimedische lichamen kunnen bijna allemaal worden gemaakt uit platonische lichamen via Wythoffs constructie. Er zijn twee essentiële uitzonderingen: de semisnub polyoctaëder, dat in 1900 werd gevonden door de Londense advocaat Thorold Gosset, en het grote antiprisma van John Conway en Michael Guy uit 1965. Conway en Guy produceerden alle vierdimensionale archimedische lichamen met behulp van de computer, en vonden nog een nieuwe vorm. "It would have been a bit disappointing if everything had already been found", zegt Conway daarover in zijn biografie [11].



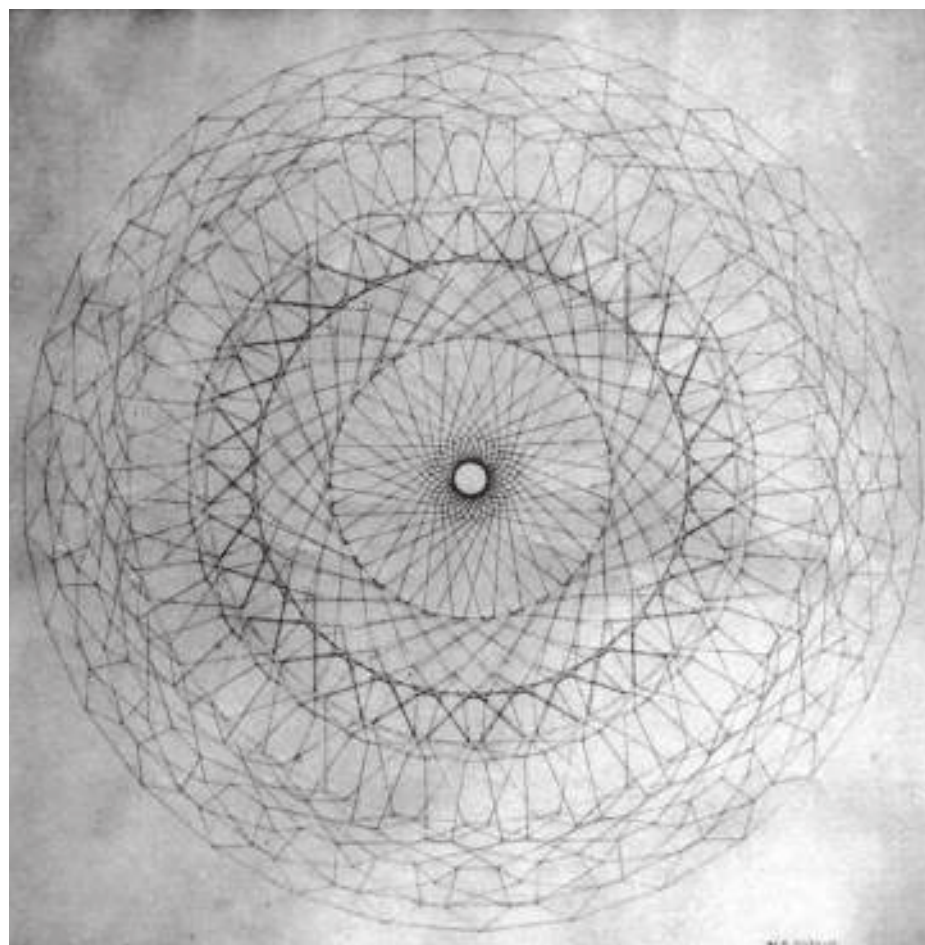
Figuur 8 Illustratie uit het artikel van Boole Stott van een 2-expansie gevolgd door een contractie. In de expansie in figuur a worden de zes gearceerde 2-cellen van de kubus naar buiten verplaatst en aangevuld met vierkanten en driehoeken. Het resultaat is een *semisnub kubus* (ook wel rhombicuboctaëder genoemd). In de contractie in b worden de vierkanten uit de semisnub kubus verwijderd en worden de driehoeken, die corresponderen met de hoekpunten in de oorspronkelijke kubus, naar binnen verplaatst. Het resultaat is een octaëder

Wythoffs tekening van de 120-cel

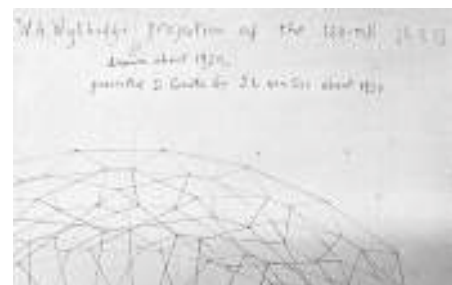
In maart 1957 schrijft John Conway, dan nog student in Cambridge, een lange brief aan Coxeter en eindigt met: “My absolute last remark is a question. Where can I find the requisite information to draw $\{5, 3, 3\}$, or do I have to work out the details for myself? I should be very thankful if you could supply me with some accessible information.” De $\{5, 3, 3\}$ waar Conway het over heeft is het Schäfli-symbool voor de 120-cel. De eerste pagina van Coxeters boek *Regular Polytopes* bestaat uit een tekening van de 600-cel. Op pagina 247 staat uitgelegd hoe je deze tekening zelf kunt maken, maar Coxeter legt niet uit hoe je de 120-cel moet tekenen. Het is dus niet zo gek dat Conway daar naar vraagt. Dit polytoop heeft het grootste skelet onder de vierdimensionale platonische lichamen, met maar liefst 600 hoekpunten en 1200 zijden. Op pagina 260 schrijft Coxeter: “Van Oss inherited Wythoff’s remarkable drawing of $\{5, 3, 3\}$ and showed me it when I visited

him in 1932. But the 1200 edges are too faint for photographic reproduction.” Salomon van Oss, een student van Schoute, was dé specialist op het gebied van polytopen in Nederland en de tekening van de 600-cel op de eerste pagina van Coxeters boek is van hem. Van Oss liet niet alleen Wijthoffs tekening zien, hij deed deze ook cadeau. Tegenwoordig is de tekening in het bezit van Asia Ivič Weiss (York University, Toronto).

Het was voor Wijthoff niet zo moeilijk om de 120-cel te tekenen (Figuur 9), want hij kende de coördinaten van alle polytopen op zijn duimpje. Tegenwoordig kan iedereen die coördinaten zo vinden op het internet en door de komst van de computer is het veel eenvoudiger om de 120-cel zichtbaar te maken. Dit polytoop heeft zijn eigen Wikipedia-pagina met projecties in twee dimensies en animaties in drie dimensies. Wie meer wil weten moet John Stilwells verhaal in de *Notices* lezen [16].



Figuur 9 Wijthoffs tekening van de 120-cel zoals gereproduceerd in [9], de ondertekening W.A. Wijthoff (met een ij) is vaag zichtbaar. Coxeter heeft erbij geschreven: “W.A. Wijthoff’s projection of the 120-cell $\{5, 3, 3\}$. Drawn about 1920. Presented to Coxeter by S. L. van Oss about 1930.”



Figuur 10 Detail van Wijthoffs tekening met het bijchrift van Coxeter.

Wythoffs bewijs van de stelling van Mantel

Opgave 28 uit het *Nieuw Archief voor Wiskunde* van 1907 is van de Delftse wiskundige Willem Mantel: “Er zijn eenige punten gegeven waarvan geen vier in een zelfde vlak liggen. Hoeveel rechten kan men hoogstens tusschen de punten trekken zonder driehoeken te vormen?” De oplossing van opgave 28 is dat het aantal rechten ten hoogste gelijk is aan het kwadraat van het aantal punten, gedeeld door vier. Tegenwoordig heet dit de stelling van Mantel: een graaf met n knopen en e zijden bevat een driehoek als $e > n^2/4$. Het is een speciaal geval van de stelling van Turán, die aan de basis staat van de extreme grafentheorie.

Opgave 28 wordt opgelost door Gouwentak, Mantel, Teixeira de Mattos, Schuh, en Wijthoff. De gepubliceerde oplossing, en daarmee het eerste bekende bewijs in de extreme grafentheorie, is van Wijthoff. Het is analoog aan het bewijs van Erdős van de stelling van Turán. Wijthoff toont aan dat een graaf zonder driehoeken en met een maximaal aantal zijden bipartiet is. Aangezien een bipartiete graaf op n knopen ten hoogste $n^2/4$ zijden heeft, is daarmee de stelling van Mantel bewezen.

De redenatie gaat als volgt. Laat a_1 een knoop van maximale graad in G zijn, met burens $b_1, \dots, b_p$. Laten $a_2, \dots, a_q$ de knopen zijn op afstand twee van a_1 , de burens van de burens. Dan vormen $a_1, \dots, a_q, b_1, \dots, b_p$ alle knopen, want een resterende knoop zou een extra zijde toelaten met a_1 zonder een driehoek te vormen in G . We hebben dus een partitie $A \cup B$ van de knopen. De b 's kunnen geen burens van elkaar zijn omdat ze anders een driehoek zouden vormen met a_1 . Als we nu aan kunnen tonen dat de a 's ook geen burens van elkaar zijn, dan zijn we klaar. Wijthoff beweert het volgende: haal de zijden tussen a 's weg en verbind elke knoop in A met elke knoop in B , dan gaat de graad van geen enkele knoop omlaag. De bewering is duidelijk

waar voor knopen in B , want die worden nu verbonden met heel A . De bewering is ook waar voor knopen in A , want die krijgen nu dezelfde graad als a_1 en die graad was maximaal. Als er in de oorspronkelijke graaf twee a 's met elkaar verbonden zouden zijn, dan zou de graad van b 's zelfs strikt toenemen, in tegenspraak met de aanname dat G een maximaal aantal zijden heeft. Dus G moet bipartiet zijn.

Naschrift

Het is onduidelijk wanneer de familie Wijthoff is verhuisd naar de P.C. Hooftstraat. De woningbouw buiten de stadswallen werd in Nederland officieel mogelijk door de Vestingwet van 1874, maar er werd al eerder gebouwd. De gemeenteraad legt de naam van de straat vast op 20 december 1872. De kadastrale tekening van P.C. Hooftstraat 20–28 is gedateerd op 1873 in het stadsarchief. Waarschijnlijk is de familie niet veel later verhuisd. Het was in die tijd aan de rand van de stad. Met de bouw van het Rijksmuseum, dat op een steenworp afstand staat, werd begonnen in 1876.

De ene grootvader van Willem Wijthoff was de suikerfabrikant Pieter George Lodewijk Wijthoff, de andere was de bankier en politicus Johannes Kerkhoven, die heeft geprobeerd de Dollard in te polderen. Hella Haasse beschrijft de familie Kerkhoven in *Heren van de Thee*, dat is vertaald in het Engels als *The Tea Lords*. Het boek is bovendien bewerkt tot een toneelstuk.

Willem Wijthoff schreef zijn achternaam vaak met een Griekse γ , maar niet altijd.

De spelling is vrij. Het Meertens Instituut maakt in de databank met familienamen geen onderscheid tussen een γ en een y .

De eerste publicatie van Brouwer betrof rotaties van de vierdimensionale ruimte. In deze publicatie verwijst Brouwer naar het proefschrift van Wijthoff. Het ligt voor de hand dat Korteweg zijn student Brouwer in contact heeft gebracht met zijn promovendus Wijthoff. Zo kreeg Brouwer dus al op jonge leeftijd te horen over de resultaten uit de school van Schoute. Misschien heeft deze kennis van polyeders en betegelingen Brouwer geholpen om de simpliciale approximatie te bedenken, het sleutelidee in het bewijs van de dekpuntsstelling. Misschien ook niet, maar in ieder geval heeft deze techniek zijn naam te danken aan Schoute, want die bedacht de term *simplex* in 1902.

De twee complementaire rijen van coördinaten in Wythoffs Nim zijn voorbeelden van wat later Beatty-rijen zijn genoemd. Klaarblijkelijk dacht Wijthoff ook al na over Beatty-rijen, want hij maakt enkele opmerkingen in die richting aan het eind van zijn artikel.

De dertien archimedische lichamen werden beschreven door Archimedes in een werk dat niet bewaard is gebleven. De meerdimensionale platonische lichamen werden gevonden door Ludig Schäfli, maar zijn werk werd pas bekend na zijn dood. De meerdimensionale archimedische lichamen werden bestudeerd door Thorold Gosset, bij gebrek aan cliënten in zijn advocatenpraktijk. De studie van polytopen is een riskante business.

Willem Mantel was repetitor in Delft en verdiende zijn brood door aankomende ingenieurs de calculus bij te brengen. Hij was ook een medewerker van de Revue Semestrielle. Buiten opgave 28 verschenen er in die tijd geen andere grafentheorieproblemen in het NAW. Dat is jammer, want Wijthoff had best de gedachtenstap kunnen zetten van een graaf zonder driehoeken naar een graaf zonder simplices. Gelukkig worden er tegenwoordig nog steeds resultaten over extreme grafen en polyeders geproduceerd in Amsterdam. Net als honderd jaar geleden gebeurt dat aan de rand van de stad. ↵

Dankwoord

Verschillende mensen hebben mij geholpen. Karel van der Hucht en Swanica Bergsma stelden informatie beschikbaar uit het Indisch Thee en Familie Archief, www.theefamiliearchief.nl. Asia Ivić Weiss maakte foto's van de tekening van Wijthoff, die zij bewaart in haar kamer in York University, Toronto. Jan Heerze doorzocht schoolarchieven in Apeldoorn, en stelde vast dat Truida Wijthoff daar geen lerares is geweest. Herman te Riele deed hetzelfde met het archief van het WG. Hij vond dat Willem Wijthoff geen enkele bestuursvergadering van het WG heeft bijgewoond en dat Truida Wijthoff erelid werd in 1907. Wieb Bosma haalde het plan Wijthoff uit een boekje over de ASB. Hij nodigde mij ook uit voor een lezing over speltheorie voor leraren tijdens het wiskundetoernooi in Nijmegen, in september 2015. Het leek me leuk om die lezing te beginnen met het werk van de 'leraar' Wijthoff en de obsessie die daarop volgde leidde uiteindelijk tot deze tekst.

Dit verhaal was onmogelijk geweest zonder het digitale archief Delpher van de Koninklijke Bibliotheek. Delpher verwijst naar het orakel en naar delven, net als Delft, waar ik dit verhaal geschreven heb.

Referenties

- 1 C. Berkers, *Anna Wijthoff (1864–1947), haar leven, haar illustraties en de receptie van haar werk*, BA-scriptie, Universiteit Utrecht, 2014, <http://dspace.library.uu.nl>.
- 2 A. Boole Stott, Geometrical deduction of semiregular from regular polytopes and space fillings, *Verhandelingen der Koninklijke Akademie van Wetenschappen te Amsterdam*, 1e sectie, deel XI(1) (1910), www.dwc.knaw.nl/DL/publications/PU00011492.pdf.
- 3 W. Bosma, Wiskundige Verpoelingen, *Nieuw Archief voor Wiskunde* 5/10 (2009), 42–47.
- 4 J.H. Conway, H. Burgiel en C. Goodman-Strauss, The symmetries of things, A.K. Peters, 2008.
- 5 H.S.M. Coxeter, Regular polytopes, Dover Publications 1973, 1e editie 1947.
- 6 H.S.M. Coxeter, Polytopes in the Netherlands, *Nieuw Archief voor Wiskunde* 3/26 (1978), 116–141.
- 7 D. van Dalen, L.E.J. Brouwer, *Topologist, Intuitionist, Philosopher*, Springer, 2012.
- 8 C. Davis en E.W. Ellers, *The Coxeter Legacy, Reflections and Projections*, Fields Institute Communications, Vol. 48, AMS, 2005.
- 9 H. Houtgraaf, *40 jaar U.S.A. 1911–21 februari 1951*, Gedenkboek der Unitas Studiosorum Amstelodamensium waarin opgenomen een korte geschiedsbeschrijving van de Amsterdamse Studenten Bond, Amsterdam 1951.
- 10 C. Kimberling, The Zeckendorf array equals the Wythoff array, *Fibonacci Quarterly* 33(1), 1995, 3–8.
- 11 P.J. Knechtmans, *Professoren van de stad: het Athenaeum illustre en de Universiteit van Amsterdam, 1632–1960*, Amsterdam University Press, 2007.
- 12 I. Polo Blanco, Alicia Boole Stott's models of sections of polytopes, *Lett. Mat. Int.* 2 (2014), 149–154.
- 13 S. Roberts, *Genius at Play, the Curious Mind of John Conway*, Bloomsbury, New York, 2015.
- 14 P.H. Schoute, Analytical treatment of the polytopes regularly derived from the regular polytopes (sections I–IV), *Verhandelingen der Koninklijke Akademie van Wetenschappen te Amsterdam*, 1e sectie, deel XI(3) (1911) en deel XI(5) (1913), biodiversitylibrary.org.
- 15 P.H. Schoute en J. Cardinaal, Analytical treatment of the polytopes regularly derived from the regular polytopes (section V), *Verhandelingen der Koninklijke Akademie van Wetenschappen te Amsterdam*, 1e sectie, deel XII(2) (1915), biodiversitylibrary.org.
- 16 J. Stillwell, The story of the 120-cell, *Notices of the American Mathematical Society* 48(1) (2001), 17–24.
- 17 J. Top en E. Weitenberg, Schoute herschijnt, *Nieuw Archief voor Wiskunde* 5/12 (2011), 116–120.
- 18 W.A. Wythoff, A Modification of the Game of Nim, *Nieuw Archief voor Wiskunde* 2/7 (1907), 199–202, archive.org.
- 19 W.A. Wythoff, A relation between the polytopes of the C600-family, *Verhandelingen der Koninklijke Akademie van Wetenschappen te Amsterdam*, 1e sectie, deel XX(2) (1918), 966–970 biodiversitylibrary.org.

Jan Beuving

cabaretier, Zeist
janbeuving@gmail.com



Het keerpunt van Maxim Hendriks

Door mijn hele huis liggen wiskundeboeken

Maxim Hendriks studeerde wiskunde in Leiden, en promoveerde op een zuiver wiskundig onderzoek aan de Technische Universiteit Eindhoven. Nu werkt hij bij Zermelo, een bedrijf dat software voor roostermakers op middelbare scholen ontwikkelt.

Zermelo, dat moet genoemd zijn naar de grote wiskundige Ernst Zermelo?

“Zeker. Het was ook het eerste wat mij opviel toen ik de vacature zag. Ik had nog nooit van het bedrijf gehoord, en zag de advertentie staan tussen allemaal heel prestigieuze banen in NRC Carrière: Zermelo zoekt softwareontwikkelaar. Ik wist niets van software, maar die naam sprong meteen in het oog.”

Staat er een standbeeld van hem op de werkvloer?

“Nee, dat zou eigenlijk wel een goed idee zijn!”

Wat is jouw taak binnen het bedrijf?

“Ik ben voornamelijk aan het programmeren. We maken roostersoftware voor middelbare scholen, met als doel dat we de lesuren kunnen inroosteren. Maar er zijn veel zaken van invloed op de kwaliteit van de uitkomst. Hoeveel leerlingen zijn er per lesjaar? Wat is de verwachting voor de profielkeuze? Op basis van dat soort informatie kunnen dan bijvoorbeeld beslissingen genomen worden over hoeveel man/vrouwkracht er nodig is. We zijn nu bezig met het ontwikkelen van een portal waarin al die randvoorwaarden op een

controleerbare manier verzameld kunnen worden.”

Dat is toch iets heel anders dan je promotieonderzoek. Waar ging dat over?

“De titel van mijn proefschrift was *Platonic Maps of Low Genus*. Een mengelmoes van topologische, combinatorische en

computeralgebraïsche onderwerpen. Vereenvoudigd gezegd ging het hierover: als je op een oppervlak, een bol of een torus bijvoorbeeld paaltjes slaat, en je verbindt al die paaltjes met elkaar zodat er allemaal gebiedjes ontstaan die, topologisch gezien, veelhoeken zijn, op hoeveel manieren kan dat dan? Nou, oneindig veel natuurlijk. Maar als je nu aan die veelhoeken restricties geeft, dat elk gebiedje evenveel zijanten moet hebben en elk paaltje evenveel verbindingen, en je gaat kijken naar de symmetrische indelingen van dat oppervlak, dan zijn de mogelijkheden ineens veel beperkter. Op een bol kom je al snel bij de (topologische versies van) regelmatige veelvlakken uit. Naar dat soort problemen heb ik onderzoek gedaan.”

Wist je tijdens dat promotietraject al dat je niet in de academia wilde blijven?

“Ja, ik wilde graag iets anders. Als ik door was gegaan in het wiskundige onderzoek, had ik geweten hoe de toekomst er ongeveer uitgezien had. En ik vroeg me af of ik daar gelukkiger van werd, als ik niet iets anders had geprobeerd. Bovendien: als ik als wiskundige echt geniaal was geweest, dan had ik dat waarschijnlijk al wel gehoord. Ik twijfelde aan mijn capaciteiten. Nog steeds trouwens. Twijfel is de fundering van mijn denken. Ik citeer graag Benne de Weger, van de



Maxim Hendriks

Foto: Abbe de Groot

TU/e, die altijd zegt: ‘Het beoordelen van je kwaliteiten kun je beter aan anderen overlaten.’”

Toch bezit je zeker kwaliteiten, anders zou je nooit zo ver gekomen zijn. Waarom ben je ooit wiskunde gaan studeren?

“Ik vond het op de middelbare school al geweldig. In de derde had ik een heel leuke leraar, en toen wist ik al dat ik deze kant op wilde. Alles met meetkundige vormen, driehoeken en cirkels en zo, vond ik prachtig. Ik heb ook meegedaan aan de internationale wiskundeolympiade, waar ik overigens slecht scoorde. Tegenwoordig boeken de Nederlandse leerlingen internationaal veel aansprekender resultaten dan destijds; volgens mij worden de teams van nu door Quintijn Puite en Birgit van Dalen uitstekend voorbereid op die wedstrijden.”

Je studeerde in Leiden. Wat was je afstudeerrichting?

“Mijn favoriete vakken lagen in de algebra. Toen ik in Leiden studeerde was Hansjörg Geiges daar een tijd hoogleraar. Die deed geweldig onderzoek. Toen hij terugging naar Keulen, zei hij tegen mij dat er daar aan de universiteit veel interessante meetkundevakken werden gegeven. Toen ben ik een jaar in Keulen gaan studeren, waar ik vooral vakken volgde als algebraïsche topologie en differentiaalmeetkunde. Overigens kun je er ook eeuwig gefrustreerd van raken, als je je erin verdiept, want je bent nooit zo ver als je wilt zijn. Ik wilde me de materie zó goed eigen maken, dat ik alles paraat had. Dat is me nooit gelukt.

Mijn afstudeeronderzoek heb ik niet heel handig aangepakt, want dat heb ik ook bij Geiges gedaan, maar toen woonde ik inmiddels weer in Leiden. De afstand was toch wel een probleem. Op zeker moment was ik er zo klaar mee dat ik een jaar gestopt ben en vakken bij filosofie heb gevolgd. Dat was studieontwikkend gedrag, maar wel uit interesse.”

Heb je meer van dat soort interesses?

“Oh ja, ik zou wel tien andere studies willen doen! Neem nu een fascinerend gebied als celbiologie. Hoe het leven in elkaar zit, en hoe enorm complex het al is om de meest simpele cel te simuleren

met een computer. Dat fascineert me mateloos. Maar ook geologie is heel interessant — daar heb ik laatst weer een boek over gekocht. Ik lees veel, al heb ik nog steeds het gevoel dat ik niets weet. Maar ik wil graag alles analyseren.”

Uiteindelijk ben je ondanks die interesses toch afgestudeerd.

“Jazeker. Mijn onderzoek ging over automorfismes van oppervlakken.”

Niet het eerste waar ik aan denk bij een ideale ingang voor een promotie aan de TU/e.

“Eindhoven staat natuurlijk bekend om de technische kwaliteiten, maar hun vakgroep Discrete Algebra en Meetkunde is ook heel goed. Mijn promotor, Arjeh Cohen, redeneerde als volgt: dat was jouw afstudeerrichting, dit is mijn expertise, dus laten we voor je promotieonderzoek precies in het midden van die twee gaan zitten.

Als je gaat promoveren, wordt van je verwacht dat je een concreet probleem oplost. Die abstracte wiskunde wordt in Eindhoven zo concreet mogelijk ingezet. Je moet ook beginnen met de concrete kant. Je leert het meeste door te doen. Hoe leer je omgaan met natuurlijke getallen? Door te rekenen! Je moet nooit met het abstracte beginnen. Eerst moet je intuïtie opbouwen. Daarna kun je de theoretische kennis uitdiepen.”

In je huidige werk ben je denk ik alleen maar concreet bezig?

“Ja, maar toch liggen door mijn hele huis wiskundeboeken open. Maar dan als hobby. Ik vind het heerlijk dat ik daar nu in kan lezen zonder drang of druk. Als ik iets niet snap, is het niet erg. Morgen kan ik een nieuwe poging wagen.”

Wat ligt er zoal open?

“Ik ben bijvoorbeeld bezig met een boek over klassieke bolmeetkunde. Typisch zo’n onderwerp dat je op de universiteit eigenlijk bij geen enkel vak meer leert. Waarschijnlijk omdat het vakgebied uitontwikkeld is, terwijl het toch ooit een trots van de wiskunde was. Sterrenkundigen en geodeten krijgen het natuurlijk allemaal nog in hun opleiding, maar ik heb het niet meer gehad.”

Zou je ooit weer de switch willen maken naar een academische carrière?

“Mijn hoofddoel bij het doen van wiskunde is inzicht te vergaren. Ik heb aan heel veel dingen geroken, maar er is niets waar ik echt volledig in rond kan zwemmen. Als ik ooit het gevoel zou krijgen dat ik in mijn leven te weinig verder kom met inzicht op wiskundig gebied, sluit ik niet uit dat ik terugkeer naar de academische wereld. Maar dat hangt af van de balans in al je bezigheden, waarheen die je brengen qua inzicht.

Uiteindelijk blijf ik wiskundige. Als mensen vragen wat voor werk ik doe, dan zeg ik ook altijd: ik ben wiskundige, maar ik werk als softwareontwikkelaar.”

Dit leek een mooie laatste zin van het interview, maar dan zegt Maxim bij het afscheid: “We hebben het nog niet over het zwemmertje gehad.”

Het zwemmertje?

“Ja, kijk, ik heb een zwemmertje uitgeknipt. [De interviewer krijgt een papieren poppetje te zien, JB.] Ik zwem zelf heel graag, dus bij de term keerpunt denk ik vooral aan zwembaden. Maar het keerpunt van een zwemmer in een zwembad is een mooie illustratie van hoe rotaties werken. Wat je in feite beoogt bij het omdraaien in een baan, is een rotatie over een verticale as, loodrecht op het wateroppervlak; je wilt de andere kant op. Maar omdat dat heel langzaam gaat, omdat het fysiologisch niet de handigste draai-as voor een mens is, voer je die rotatie uit door twee andere rotaties te doen: een over een horizontale as, en een over de lengteas van het lichaam. Soms is één rotatie dus efficiënter uit te voeren door twee rotaties te doen. Leuk hè!”

Goede suggesties voor een Nederlandse wiskundige met een keerpunt in zijn of haar carrière zijn welkom via keerpunt@nieuwarchief.nl.

Viktor Blåsjö

Mathematical Institute
Utrecht University
v.n.e.blasjo@uu.nl

History

The how and why of constructions in classical geometry

What can we learn today from the classical tradition of geometrical constructions? Viktor Blåsjö looks at construction methods through the ages, and points to lessons for teachers as well as philosophers.

Mathematics was for many thousands of years something you drew in the sand. It was active, hands-on. We can see this for instance in Rafael's fresco *The School of Athens* (Figure 1). Among the many philosophers and scientists shown, one and

only one is actually doing something with an instrument: Euclid, who is busy drawing figures with his compass. Likewise, Archimedes was killed by invading soldiers while tracing figures in the sand, as ancient sources report (e.g., Livy, *Ab*

Urbe Condita, XXV.31) and as depicted in Figure 2. Figure 3 again shows geometry drawn in Greek sand. As the inscription explains, it is based on a story about shipwrecked men finding hope in these signs of intelligent life on the beach where they washed ashore.

This do-it-yourself element of ancient mathematics makes it a lot of fun and also well-suited to modern pedagogical



Figure 1 Rafael's *School of Athens*. Early 16th century, the Vatican.



Figure 2 The death of Archimedes in an 18th-century engraving. From Giovanni Maria Mazzuchelli, *Notizie Isotoriche e Critiche Intorno alla Vita, alle Invenzioni, ed agli Scritti di Archimede Siracusano*.

inclinations. But at the time the purpose of this kind of mathematics was not pedagogical, for engaging students. Rather, it was cutting-edge research pursued by the very best mathematicians of their time, and, as we shall see, these mathematicians had excellent and sophisticated reasons for insisting on drawing everything in the sand.

The significance of the ruler and compass

The simplest embodiment of the tradition of which I speak is the ruler and compass of Euclidean geometry. In classical times, these simple tools were seen as embody-

ing the very essence of mathematical meaning and method, a fact that is easily obscured by how deceptively simple and natural they are. Indeed, one could argue that the ruler and the compass are as old as geometry itself. According to ancient sources [15, p. 52], geometry began, as its name suggests, as a form of ‘earth-measurement’. This was necessitated by the yearly overflowing of the Nile in Egypt: the flooding made the banks of the river fertile in an otherwise desert land, but it also wiped away boundaries between plots, so a geometer, or ‘earth-measurer’, had to be called upon to redraw a fair division of the precious farmable land. In fact, Egyptian geometers were not called ‘earth-measurers’ as in Greek but rather ‘rope-stretchers’. The rope was their basic tool, as Figure 4 illustrates. There are two basic ways of generating a curve using a rope: if you pull both ends you get a straight line, and if you hold one end fixed and move the other while holding the rope fully stretched you get a circle. In this way the ruler and the compass can be seen as arising immediately from the most basic motivation for geometry in practical necessity.

But in Greek times, around the fifth century BC, these simple tools took on a much more sophisticated theoretical importance (see for example the historical introduction in [8]). Consider for instance $\sqrt{7}$. Today we think of $\sqrt{7}$ as a number, but this is highly problematic since it cannot be written as a fraction of integers or a finite or repeating decimal expansion. What, then, is this mysterious number called $\sqrt{7}$, which no one has ever seen actually written down

in exact numerical form? Does it even exist at all?

If we take the ruler and the compass as the basis of mathematical ontology this problem disappears at once. By the simple construction of Figure 5 the elusive $\sqrt{7}$ is readily caught on paper in the form of a line segment as humble as any other. Furthermore the construction is as precise as it is simple. I carried out this construction with my students the other day. We did it back-of-an-envelope style, with some basic compasses I bought at a toy store. We made no special efforts to ensure accuracy. Yet when we measured our $\sqrt{7}$ segment and averaged our values we were off by less than 0.0001 from the true value.

But there is much more at stake here than the problem of incommensurability. Zeuthen famously advocated the thesis of “the geometrical construction as ‘existence proof’ in ancient geometry”, i.e., that “the construction ... served to ensure the existence of that which were to be constructed” [19, p. 223]. Phenomena such as the fact that $\sqrt{7}$ “does not exist” in the world of rational numbers could very well have suggested that concerns of this type are not as paranoid as they may seem at first sight. And legitimate existence doubts are by no means confined to intuitively obvious matters: the existence of the five regular polyhedra, for example, is far from obvious by any standard, until one sees constructions of them such as those with which Euclid crowned the *Elements* around 300 BC.

But the matter goes deeper still. Even existence questions aside, constructions are in the Greek tradition the very source of meaning in mathematics. It is a warrant guaranteeing that every mathematical proposition, no matter how subtle, has a definite ‘cash value’, as it were, i.e., that it has theory-independent, jargon-free, empirical content. Constructions, then, serve the purpose of grounding geometry in a concrete, pre-theoretical reality that is accessible and indisputable even to outsiders.

This means in particular that any proposition is in principle checkable without any understanding of its proof, since it can ultimately be boiled down to a construction recipe and an empirically checkable assertion about the resulting figure. That is to say, theorems in the Euclidean tradition are of the form “if you perform



Figure 3 Frontispiece from *Apollonii Pergaei Conicorum*, Oxford, 1710.



Figure 4 Egyptian geometers, or 'rope-stretchers', delineating a field by means of a stretched rope. From the tomb of Menna, Egypt, c. 14th century BC.

such-and-such operations, this will result", e.g., if you draw a triangle and add up its angles they will make two right angles. By thus speaking about measurements and relations in figures whose constructions have been specified, theorems in the Euclidean tradition imply a recipe for checking them empirically in as many instances as desired. This has many potential uses, from convincing sceptic outsiders to aiding explorative research. It also makes it possible to display expertise without revealing one's methods—a common practice in mathematics as late as the seventeenth century, where constructions published without proofs are commonplace. These kinds of advantages of construction-based mathematics are quite incompatible with the emphasis in modern mathematics on grand 'systemic' theorems such as Rolle's Theorem in analysis, Cayley's Theorem in group theory, and so on. These modern kinds of theorems are not of the constructive, Euclidean type, whose very formulation implies a verification procedure.

Another way of putting it is in terms of the positivist paradigm that has dominated much of empirical science in modern times. The positivist principle is that science should only speak of that which is observable or measurable; it should not engage in speculation about qualities and sympathies and whatnot that do not

translate into a recipe for concrete measurement, no matter how convincing a story one might be able to spin in such 'metaphysical' terms. Greek geometry lives by this principle too. It speaks of nothing it cannot exhibit in the most tangible, concrete form right before our eyes. The definition of $\sqrt{7}$ as a number such that $\sqrt{7} \times \sqrt{7} = 7$ could certainly be accused of being 'metaphysical' and therefore anti-scientific in the positivist sense. But once it has been concretely exhibited by a ruler-and-compass construction there is no longer any room for such a critique.

This foundational role of constructions was arguably the key characteristic that separated geometry from other scientific and philosophical theories in Greek times. For instance, the Greeks (following a program laid out by Plato in the fourth century BC) attempted to account for planetary motions using combinations of circles. This science was virtually a branch of mathematics. In particular, it was based on axiomatic-deductive reasoning, with its axioms even being supposedly 'obvious' assumptions such as that heavenly motions must be composed of circles since this is the most 'perfect' shape. But the one fundamental respect in which this science differed from geometry is that it was not constructive. It spoke of preexisting phenomena and tried to fit mathematical constructs to them, unlike geometry which built up all the objects of its theory from scratch using ruler and compass. Much the same can be said of many other branches of ancient science, such as the theory that all bodies are composed of four elements (earth, water, air, fire).

The importance of this distinction became all the more crucial when the scientific theories in question were refuted and abandoned in the sixteenth and seventeenth centuries. By the end of the seventeenth century no one believed anymore in the Aristotelian theory of the elements,

or that the earth was in the center of the solar system, or that planetary motion consists of combinations of circular motions, despite these theories having been considered virtually the pinnacle of human understanding for thousands of years. Geometry, however, fared differently; it passed the test of time with flying colours. Not a single theorem of ancient mathematics needed to be revised.

It was only natural, therefore, to seek the distinguishing characteristic that set geometry apart from the other sciences. And thinkers such as Descartes, Leibniz, and Hobbes found the answer in the constructive character of geometry. It is in this light that we must understand for instance Hobbes's otherwise peculiar-sounding claim (in 1656) that political philosophy, rather than physics or astronomy, is the field of knowledge most susceptible to mathematical rigour:

"Of arts, some are demonstrable, others indemonstrable; and demonstrable are those the construction of the subject whereof is in the power of the artist himself, who, in his demonstration, does no more but deduce the consequences of his own operation. The reason whereof is this, that the science of every subject is derived from a precognition of the causes, generation, and construction of the same; and consequently where the causes are known, there is place for demonstration, but not where the causes are to seek for. Geometry therefore is demonstrable, for the lines and figures from which we reason are drawn and described by ourselves; and civil philosophy is demonstrable, because we make the commonwealth ourselves." [10, pp. 183–184]

As bizarre as this may sound to modern ears, it makes perfect sense when we keep in mind the all-important role of constructions in classical geometry.

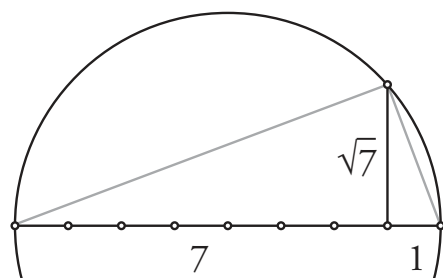


Figure 5 Ruler-and-compass construction of $\sqrt{7}$. A line segment of length $7 + 1$ is used as the diameter of a circle. A perpendicular line is erected at the point between the two subsegments. The height of the perpendicular is $\sqrt{7}$, as is easily seen by similar triangles.

Higher curves in Greek geometry

This strong emphasis on constructions was by no means a seventeenth-century afterthought. Rather, it was a key tenet of the Greek tradition all along. Beyond Euclidean ruler-and-compass geometry, three construction problems dominated in large part the development of Greek geometry: the duplication of the cube (finding a cube with twice the volume of a given cube), the quadrature of the circle (finding a square with area equal to that of a given circle), and the trisection of an angle (dividing an angle into three equal parts). (See for instance [17, IX].) And it is with good reason that these problems were seen as fundamental. They are very pure, prototypical problem—not to say picturesque embodiments—of key concepts of geometry: proportion, area, angle. The doubling of a plane figure, the area of a rectilinear figure, and the bisection of an angle are all fundamental results that the geometer constantly relies upon, and the three classical problems are arguably nothing but the most natural way of pushing the boundaries of these core elements of geometrical knowledge. The great majority of higher curves and constructions studied by the Greeks were pursued solely or largely because one or more of the classical construction problems can be solved with their aid.

For trisecting an angle, one of the Greek methods went as follows (see Figure 6). Consider a horizontal line segment OA . Raise the perpendicular above A and let B be any point on this line. We wish to trisect $\angle AOB$. Draw the horizontal through B and find (somehow!) a point E on this line such that when it is connected to O , the part EC of it to the right of AB is twice the length of OB . I say that $\angle AOC = \frac{1}{3}\angle AOB$, so we have trisected the angle, as desired. This is easy to show by introducing the midpoint D of EC , and drawing the horizontal through this point. This line will bisect BC , and by comparing angles in the resulting triangles the result follows easily.

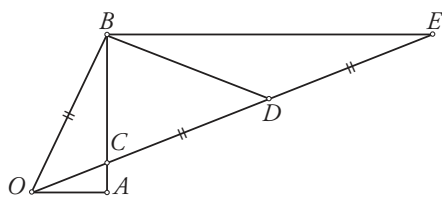


Figure 6 Trisecting an angle $\angle AOB$ by finding an auxiliary point E .



Figure 7 The defining property of the conchoid of Nicomedes.

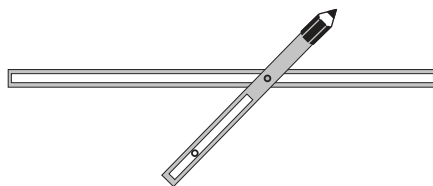


Figure 8 Instrument for drawing the conchoid of Nicomedes.

But how exactly are we supposed to find the point E ? This can in fact not be done by ruler and compass only. For this purpose Nicomedes invented a new curve and an instrument for drawing it. The curve is the conchoid of Figure 7, and the instrument must have been something like that shown in Figure 8. The point E in the above construction can be found using this instrument, by setting it up using O as the origin point, AB as the axis, and $2OB$ as the protruding length. The intersection of the resulting conchoid with the horizontal through B determines the desired point E .

This construction is strongly analogous to the ruler-and-compass construction of $\sqrt{7}$ above. In both cases, we would perhaps be inclined to think of the sought entity as an unproblematic numerical quantity. But in Greek geometry the task is to exhibit it concretely by carrying out definite construction steps using exact tools.

In terms of practical feasibility, however, the analogy rather breaks down. This in itself is quite illuminating and tells us a lot about Greek geometry. As we saw above, the $\sqrt{7}$ construction is theoretically profound as well as practically precise. So we could not know what relative importance Euclid and others attached to these two factors. But the conchoid construction is nowhere near as accurate in practice and surely not the best way to trisect an angle for any practical purpose. Thus it strongly suggests that the Greeks indeed attached great importance to the more philosophical reasons for insisting on constructions.

If you don't want to take my word for it you can build a conchoid instrument for yourself and use it to trisect an angle. I have done this with my students, and most of us were off by several degrees in our trisections. Fortunately for the construction

enthusiasts among us, building Nicomedes's instrument is easier than it looks if you have access to a well-stocked hardware store. I found a tool called a 'templater' consisting of linked rulers (see Figure 9) which served the purpose very well. As a plane of construction I found it useful to use a large sheet of very thick paper. To mark points in a manner that can attach to and support rulers I used flat-headed nails piercing through the paper from underneath.

I would argue that even conic sections were defined in terms of an instrument-construction along the above lines. Certainly the definition in terms of slicing a cone at first seems very different in character from the instrument-based constructions of circles or conchoids. But, in fact, one might argue that it really is a constructive definition *precisely* in the mould of Euclid. At



Figure 9 A hardware-store tool useful for building classical curve-tracing instruments.

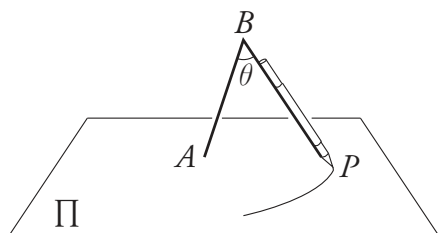


Figure 10 Generalised compasses for drawing conic sections. The angle θ and the direction of the axis AB are fixed. As the other leg rotates around the axis, the pen slides up and down in its cylinder, so as to always reach the plane Π . Figure from [16, p. 29], with altered notation.

least if one thinks of a cone as generated by the rotation of a line about an axis, for then, in a sense, a construction by ‘generalised compasses’ as in Figure 10 is really nothing but the physical manifestation of the literal meaning of the definition of a conic section. Such generalised compasses were described in the medieval Islamic commentary literature and could very well have been considered quite evident in Greek times. A tip for building these kinds of conic compasses today is to use a laser pointer in place of the pen, which removes the otherwise mechanically quite tricky issue of the pen needing to be able to slide freely up and down.

Very little is known about the early history of conic sections, but arguably the two main facts known about it are: (i) at an early stage conics were used for the duplication of the cube (since this amounts in modern terms to solving $x^3 = 2$, it can be accomplished by combining the hyperbola $xy = 1$ with the parabola $y = x^2/2$) and other problems of this type; (ii) in the earliest records, cones were defined as line segments rotated about an axis and conic sections as the intersection of a cone with a plane *perpendicular* to its side. The perpendicularity restriction in (ii) at first appears very artificial and strange. It makes no sense in terms of the natural applications of conic section theory in astronomical gnomonics and perspective optics, nor does it make any theorems about conics easier to prove. This suggests that the study of conic sections was not originally an end in itself, but only a way of interpreting curves already necessitated elsewhere. The solution of (i) came first, and the notion of a conic section was concocted as a way of explicating the curves involved in this important construction.

In fact, in my view, the reason for the perpendicularity condition in (ii) lies in the

conic compass approach of Figure 10. For suppose you want to set up this compass to trace for instance a parabola. How would you go about doing this, in such a way that you knew exactly what parabola you would get? The easiest way is to start with the pen arm BP perpendicular to the ground plane Π , which corresponds precisely to the perpendicularity condition in (ii).

To explain the complete construction of the parabola, it is convenient for us to use modern algebraic notation and modern coordinates. Of course the ancient Greeks did not have such methods, but everything we shall do was well within their reach by other means. Start with BP perpendicular to Π , and let this initial position of the pen point be denoted P' to distinguish it from a general point on the traced curve. The next step is to choose the angle θ . To get a parabola this angle needs to be 45° . If we take $BP' = 1$ as our unit length, AP' will be 1 as well. Let us introduce a coordinate system with $P' = (0, 0, 0)$ as the origin, $A = (0, 1, 0)$ as the point determining the direction of the y -axis, and $B = (0, 0, 1)$. As we now let the pen arm BP rotate about the axis AB , the pen point $P = (x, y, 0)$ traces out a certain curve. We can find the equation for this curve by considering the inner product of $\vec{BA} = (0, 1, 0) - (0, 0, 1) = (0, 1, -1)$ with $\vec{BP} = (x, y, 0) - (0, 0, 1) = (x, y, -1)$. The inner product identity

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = a_1 b_1 + a_2 b_2 + a_3 b_3 = |\vec{a}| |\vec{b}| \cos \theta$$

in this case becomes

$$y + 1 = \sqrt{2} \sqrt{x^2 + y^2 + 1} \frac{1}{\sqrt{2}}$$

which reduces to

$$y = \frac{1}{2} x^2.$$

If we want to trace the hyperbola $xy = 1$ instead, we can define our coordinate system by $P' = (1, 1, 0)$, $B = (1, 1, 1)$, and $A = (2, 2, 0)$. Then $AP' = \sqrt{2}$ and $AB = \sqrt{3}$, so that $\cos(\theta) = 1/\sqrt{3}$. In this case $\vec{BA} = (2, 2, 0) - (1, 1, 1) = (1, 1, -1)$ and $\vec{BP} = (x, y, 0) - (1, 1, 1) = (x-1, y-1, -1)$, and the inner product identity is

$$x - 1 + y - 1 + 1 = \sqrt{3} \sqrt{(x-1)^2 + (y-1)^2 + 1} \frac{1}{\sqrt{3}}$$

which reduces to

$$xy = 1.$$

By tracing both of these curves we have solved the problem of the duplication of the cube, for the x -coordinate of the intersection of $y = x^2/2$ and $xy = 1$ is $\sqrt[3]{2}$, which is the side length needed for the cube of twice the volume of a unit cube.

Of course the Greeks did not have modern algebraic notation, vectors and inner products, so their proofs would have been more laborious. Nevertheless the fact remains that starting with the pen in a perpendicular position is very natural and convenient in this context. Moreover, the above demonstrations are very well suited for modern classroom use, not only to investigate this bit of history but to show the great power of the notion of inner product. In these examples, an otherwise very complicated geometrical problem is reduced to a line or two of simple algebra; it's a genuinely impressive application of the inner product that would go well in any vector geometry class.

In my view it is highly plausible that the Greeks solved the problem of the duplication of the cube by giving a conic-compass construction of precisely the above kind, and that this was how conic sections were first encountered by mathematicians. This is a new hypothesis regarding the origin of the study of conic sections. For previous attempts—less convincing ones, in my opinion—at explaining the origin of the study of conic sections and the perpendicularity condition in particular, see [18, chapter 21] and [14], or, for a brief overview of their views, [1]. For an overview of the early history of conic sections, see [9, I.I].

Greek tradition in the seventeenth century

The importance of constructions in the Greek geometrical tradition was still keenly felt in the seventeenth century. In particular, it plays a crucial role in Descartes's *Géométrie* of 1637. In this work Descartes taught the world coordinate geometry and the identification of curves with equations. However, Descartes's take on these topics is radically different from the modern view in numerous respects. In particular, Descartes did *not* argue that the geometry of algebraic curves was a replacement for classical geometry, or a radically new approach to geometry. On the contrary, he argued at great length that it was in fact *subsumed* by classical geometry, and he would never have accepted it if it wasn't.

Descartes, accordingly, began by generalising the curve-tracing procedures of Euclid and then went on to show that the curves that could be generated in this way were precisely the algebraic curves (i.e., curves with polynomial equation of any degree), thereby establishing a pleasing harmony between classical construction-based geometry and the new methods of analytic geometry. Indeed, the historical record shows that Descartes's early geometrical research was devoted to curve-tracing procedures and instruments, and it was in this context that Descartes was gradually led to the idea of analytic and coordinate geometry. (See [5].)

By the time he published his *Géométrie*, Descartes had settled on his favoured curve-tracing method and become convinced that it encompassed all algebraic curves, and nothing else. Convincing his readers of this—and thereby justifying the new algebraic methods in terms of the standards of classical, construction-based geometry—is the dominant theme of the entire *Géométrie*. As he writes:

“To treat all the curves I mean to introduce here [i.e., all algebraic curves], only one additional assumption [beyond ruler and compasses] is necessary, namely, that two or more lines can be moved, one by the other, determining by their intersection other curves. This seems to me in no way more difficult [than the classical constructions].” [7, p. 43]

An example of this curve-tracing procedure is shown in Figure 11. To find the equation for the curve traced by the intersection C , take A as the origin of a coordinate system with $AB = y$ and $BC = x$, and introduce the notation $AK = t$, $LK = c$,

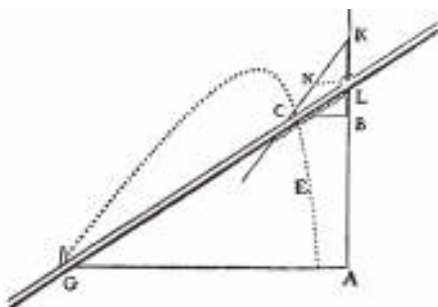


Figure 11 Descartes's method for tracing a hyperbola. The triangle KNL moves vertically along the axis $ABLK$. Attached to it at L is a ruler, which is also constrained by the peg fixed at G . Therefore the ruler makes a mostly rotational motion as the triangle moves upwards. The intersection C of the ruler and the extension of KN defines the traced curve, in this case a hyperbola. (From [6, p. 321].)

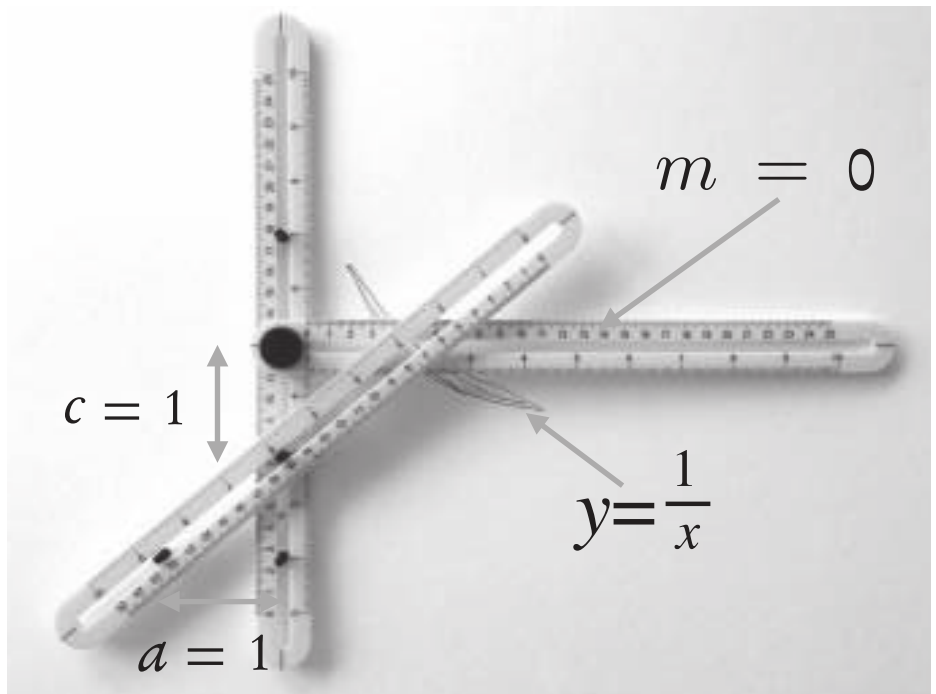


Figure 12 A practical implementation of Descartes's method of Figure 11 in the case $xy = 1$.

$AG = a$ and $m = KL/NL$. Thus t is variable while c , a and m are constants. In terms of these quantities we can then express the equations of the lines CNK and GCL , and then combine them so as to eliminate t , which gives the equation for the traced curve in terms of x , y , and constants.

We may ask ourselves: how can we use this method to generate for example the standard hyperbola $xy = 1$? This comes down to finding a suitable choice of constants in the equation we just derived. In fact, the choices $a = c = 1$ and $m = 0$ will do; this gives $xy = x + 1$ which is the sought curve except for a trivial vertical shift by one unit. Once you know the necessary constants, the instrument in question can quite easily be built using the ‘templater’ tool of Figure 9. I have done this with my students. Figure 12 shows the result. One sees that a quite small portion of the curve $xy = 1$ has been traced. I did this by placing a pen through the hole at

the intersection of those two rulers. One can then move the pen without touching any other part of the setup. Because of the constraints of the rulers, the pen is restricted to move only along the sought curves.

Once a curve has been generated this way it in turn can be taken in place of the initial straight line KNC , and so on. An example used by Descartes himself is that replacing the line KNC by a circle produces a conchoid (see Figure 13). Thus we have seen how Descartes's curve-tracing method quickly yields two of the key curves from the Greek tradition that were already crucial in our story above. This is no coincidence. Descartes was intimately familiar with the Greek tradition, and firmly devoted to preserving it. He did so with aplomb, and that was his proudest achievement in mathematics.

It goes without saying that the virtues Descartes saw in his construction procedures were theoretical in nature. His con-

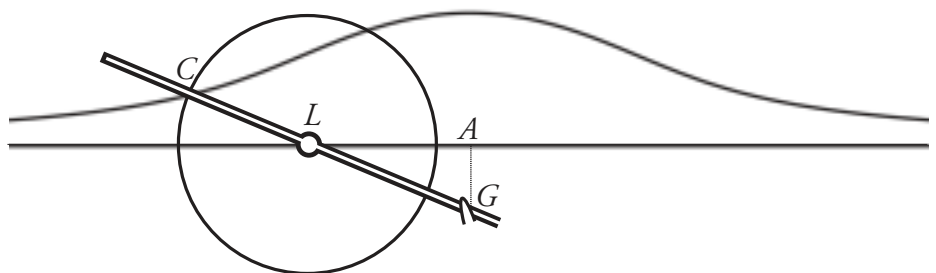


Figure 13 Construction of the conchoid using Descartes's method of Figure 11 with a circle in place of the line KNC .

structions are obviously quite hopeless to apply in practice in any but the very simplest cases. The setup of Figure 12 is already crude to say the least, and it soon gets much worse when curves of higher degree are involved. Thus the following anecdote could very well have much truth in it:

“[Descartes] was so learned that all learned men made visits to him, and many of them would desire him to show them ... his instruments ... He would draw out a little drawer under his table, and show them a paire of Compasses with one of the legges broken: and then, for his ruler, he used a sheet of paper folded double.” (Aubrey’s *Brief Lives*, 1898 ed., vol. 1, p. 222, quoted from [13, p. 42].)

Nevertheless, as we stressed already in the case of Nicomedes’s instrument above, even when practical feasibility goes out the window, constructions remain the theoretical cornerstone of mathematics. They are indeed what gives meaning to mathematical concepts. Without them, an equation such as $xy = 1$ is nothing but empty, meaningless symbols.

From a modern point of view we might object that the equation $xy = 1$, or its equivalent $y = 1/x$, has a definite geometrical meaning without the peculiar tracing tools of Descartes. Namely: fill in various x -values, compute the corresponding y -values, and plot the corresponding points. In this way as many points of the curve as desired can be produced, making its geometrical meaning clear. The problem with this, in seventeenth-century eyes, is that it does not generate the curve as a whole, and therefore it might ‘miss’ the one point we are looking for. Christiaan Huygens expressed this well. For the present audience I may quote him in the original Dutch:

“Doch soo en kan men niet seggen dat het beschrijven van een kromme linie door gevonden punten geometrisch ofte volkomen sij, of dat sulcke beschreven linien kunnen dienen tot geometrische constructie van eenighe problemata, dewijl hiertoe, nae mijn opinie, geen kromme linien en kunnen dienen als die door eenigh instrument vervolgens beschreven kunnen worden, gelijk den Cirkel door een passer; en de Conische Sectien, Conchoides en an-

dere door de instrumenten daertoe geinventeert. Want de linien met de handt van punt tot punt getrocken alleenlijck de gesochte quantiteyt ten naesten bij kunnen geven en dienvolgens niet naer de Geometrische perfectie. Want wat helpt het sooveel punten te vinden als men wil, indien men dat eene punct dat gesocht werdt niet en vindt?” [11]

“[One cannot say that the description of a curved line through found points is geometrical, that is to say complete, or that lines so described can serve as a geometrical construction for some problems, because for this, in my opinion, no curved lines can serve except those that can subsequently be described by some instrument, as the circle by a pair of compasses; and the conic sections, conchoids and others by the instruments invented thereto. For the lines drawn by hand from point to point can only give the sought quantity approximately and consequently not according to geometrical perfection. For what does it help to find as many points as one wishes, in case one does not find the one point that is sought?”]

Indeed this is what happens in the example above of using the intersection of $y = x^2/2$ and $xy = 1$ to solve the duplication of the cube. We solve the problem by *finding* the x -coordinate of the point of intersection. If the curves were defined in terms of plugging in x -values this would clearly be circular reasoning.

Finding the equation for the traced curve in Descartes’s construction in the above manner is certainly a good exercise in any course on analytic geometry. This is made all the more satisfying if it is followed by the physical tracing of the curve. And it will certainly be very healthy for students to be confronted with the excellent reasons seventeenth-century mathematicians had for preferring such methods of curve construction. Note well that Huygens’s critique of pointwise curve constructions applies to the way graphing calculators plot curves: Descartes and Huygens would have been none to impressed by such gadgets as far as exact geometry is concerned; on grounds of theoretical rigour they had good reason to stick with their mechanical instruments instead.

“A little boat will serve”

Huygens himself continued the construction tradition where Descartes had left off. According to Descartes, his curve-tracing could produce all algebraic curves, and

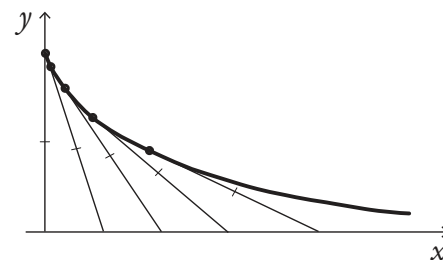


Figure 14 The tractrix, i.e., the curve traced by a weight dragged along a horizontal surface by a string whose other end moves along a straight line.

nothing but algebraic curves. The next frontier, thus, was non-algebraic curves, i.e., graphs of functions that cannot be expressed by a polynomial equation. The logarithm function is arguably the most fundamental function of this type. So Huygens faced the problem of finding a curve-tracing method, analogous to those above, which could be used to find the logarithm of any number.

Huygens [12] found the answer in the tractrix (Figure 14). In the *physique de salon* of seventeenth-century Paris, a pocket watch on a chain was a popular way for gentlemen to trace this curve, as shown in Figure 15. A pocket watch is quite well-suited for the purpose since it is quite heavy and has a low center of mass, which prevents undue slippage or wobbling. Also, since its back is typically somewhat rounded it only has one point of contact with the table top surface, as the mathematical idealisation requires. By dipping the watch in paint or rubbing it with soot one can ensure that it leaves a trace of its path. This is all very replicable in a modern classroom. Huygens himself investigated such matters in great detail and decided in favour of a more ambitious method: having a small boat trace the tractrix in a tub of syrup (Figure 16).



Figure 15 Tracing the tractrix by means of a pocket watch. From Giovanni Poleni, *Epistolarum mathematicarum fasciculus*, 1729.

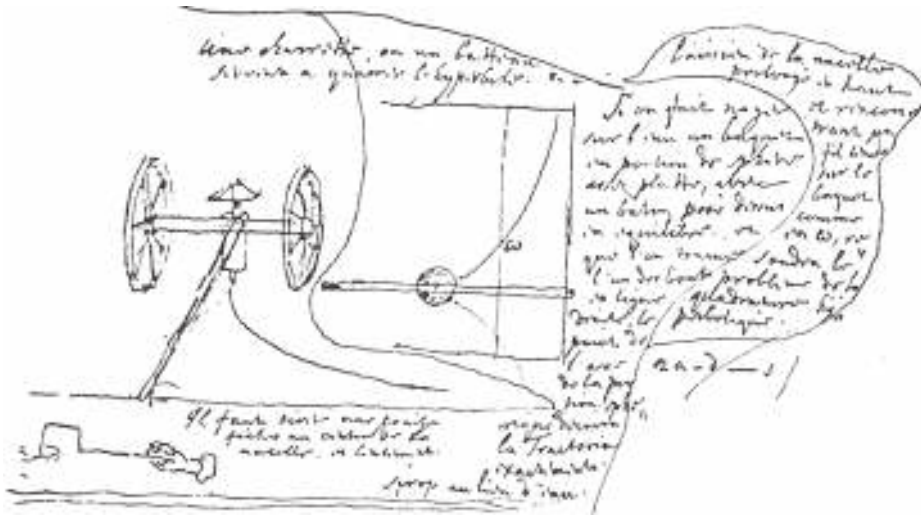


Figure 16 Detail of a 1692 manuscript by Christiaan Huygens on the tractrix (reproduced from [4, p. 30]). The sentence in the top left corner reads: “Une charette, ou un bateau servira a quarrer l’hyperbole” (“a little cart or boat will serve to square the hyperbola”). “Squaring a hyperbola” means finding the area under a hyperbola such as $y = 1/x$, so it is equivalent to computing logarithms, as Huygens was well aware. The bottom line reads: “sirop au lieu d’eau” (“syrup instead of water”). Syrup offers the necessary resistance and a boat leaves a clear trace in it.

The connection between the tractrix and the logarithm may be seen as follows. Let’s say that the length of the string is 1. At any point during the motion, we can consider it as the hypotenuse of a triangle with its other sides parallel to the axes. Thus the sides of this triangle are 1 for the hypotenuse, y for the height, and $\sqrt{1-y^2}$ for the last side by the Pythagorean Theorem. We can now find a differential equation for the tractrix by equating two different expressions for its slope: first the usual dy/dx and then the slope expressed in terms of the above triangle. This gives

$$dx = -\frac{\sqrt{1-y^2}}{y} dy.$$

To solve this differential equation we make the substitution $u^2 = 1 - y^2$, which gives

$$dx = \frac{u^2}{1-u^2} du.$$

We can split the right-hand-side expression into the partial fractions

$$\frac{u^2}{1-u^2} = \frac{1}{2} \left(\frac{u}{1-u} - \frac{u}{1+u} \right),$$

each of which we can integrate by making the substitutions $t_1 = 1 - u$ and $t_2 = 1 + u$ respectively, giving

$$x = \frac{1}{2} (-\log(t_1) + t_1 + t_2 - \log(t_2)) + C.$$

Substituting back and simplifying, we get

$$x = \log \left(\frac{1 + \sqrt{1-y^2}}{y} \right) - \sqrt{1-y^2}.$$

The desired configuration corresponds to $C = 0$ since $x(1) = 0$ and $x \rightarrow \infty$ as $y \rightarrow 0$. By $\log$ we mean the natural logarithm.

This solution shows that the tractrix is related to logarithms. It does not reveal an easy way of finding the logarithm of some given number, but Huygens managed to extract such a recipe. Let’s say that we seek $\log(1/Y)$. Huygens’s construction goes as follows. Consider first the auxiliary triangle shown in Figure 17, where the length of the leg a is chosen so that the hypotenuse equals this leg plus Y . We see that $(a+Y)^2 = a^2 + 1^2$, so $a = \frac{1-Y^2}{2Y}$, which tells us how to find the a (and thus construct the triangle) for the given Y . Next Huygens cuts off a portion of length 1 of

the hypotenuse, as in the second part of Figure 17. Here we find that $b^2 + y^2 = 1^2$, so that $b = \sqrt{1-y^2}$, and $\frac{y}{1} = \frac{1}{a+Y}$, so that $y = \frac{2Y}{1+Y^2}$, which when substituted into the above solution formula for the tractrix gives

$$\begin{aligned} x &= \log \left(\frac{1 + \sqrt{1-y^2}}{y} \right) - \sqrt{1-y^2} \\ &= \log \left(\frac{1 + \sqrt{1 - \left(\frac{2Y}{1+Y^2} \right)^2}}{\frac{2Y}{1+Y^2}} \right) - b \\ &= \log(1/Y) - b. \end{aligned}$$

Thus measuring $x+b$ gives $\log(1/Y)$, so we have found the sought logarithm as a concrete, measurable line segment. This construction fits very well in the long tradition outlined above. As ever, the sought quantity is determined by the intersections of curves generated by continuous motion. Nor was this the end of such attempts. Leibniz for instance devised a generalisation of the tractrix, involving a variable string length, which can be used to solve even more problems in the same spirit (see [2]). My recent dissertation [3] shows that these kinds of constructions were a key part of mainstream mathematics at this time and played an important role in the early development of the infinitesimal calculus.

Interestingly, the arc length of the tractrix from $y = 1$ to any point $y = C$ is $\log(C)$. So in fact all the hassle with the auxiliary triangles in Figure 17 could have been avoided and instead the result could have been found by simply putting a measuring tape along the tractrix and directly reading off the answer. But that would have been unacceptable and in violation of tradition. Above, for instance, we found the trisection of an angle in a complicated fashion. If we could simply have put a measuring tape along a circular arc and marking it into three equal pieces the problem would obviously have been trivial; or, perhaps

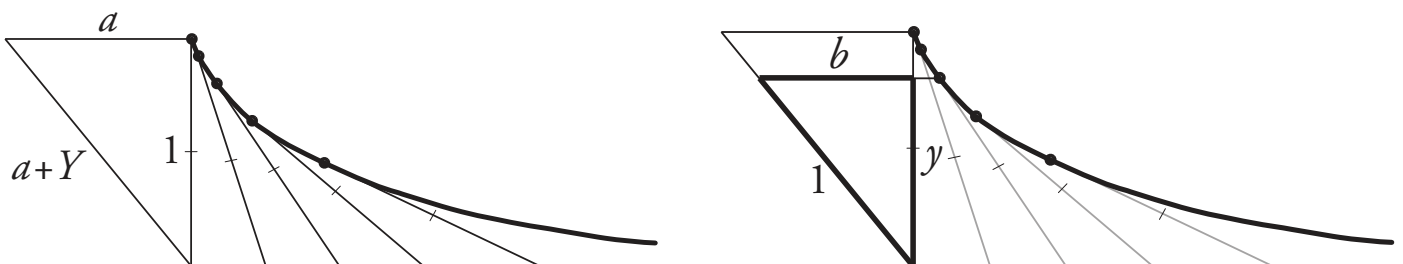


Figure 17 Huygens’s construction of logarithms from a tractrix.

better put, not a problem at all. The same goes for one of the other famous problems of antiquity: the quadrature of the circle. This too becomes elementary if one is allowed to simply measure the circumference of a circle with a measuring tape.

In all of these cases, the measuring tape solution is simple and very accurate for all practical purposes. Yet it was not accepted, and convoluted constructions based on intersections of curves were sought instead. This confirms once again that the construction paradigm was very much a theoretical obsession in the seventeenth century. But why insist on these standards, even theoretically? An official rationale can be given along the lines that tape-measure methods are not constructions in the proper sense; instead of straightforwardly producing

what is sought they come dangerously close to simply assuming it to be done. But one wonders if the real reason is not a more opportunistic one: tape-measure methods could not sustain a mathematical research programme. Allowing such methods would solve too much: the quadrature of the circle and the multisection of an angle would collapse into trivialities at once, and where's the fun in that? These problems are supposed to be the great prizes of mathematics, not child's play. This in itself is reason enough to deem such methods to be beyond the rules of the game.

Conclusion

In conclusion, we have seen that a consistent vision of mathematics as founded on

constructions was a major guiding force in the development of mathematics from ancient to early modern times. How dismayed these classical mathematicians would be at the casual neglect of constructions in modern mathematics! Today we are happy to reason about entities such as the square root or logarithm of a given number, the third of a given angle, a cube of a given volume, or the graph of an algebraic function, without first asking ourselves how we could produce these things from first principles on the blank canvas of a Mediterranean beach using nothing but sticks and stones. By ancient standards we live in a state of blissful ignorance. We may yet learn a thing or two from our ancient friends by opening our eyes from this complacent slumber. ☼

References

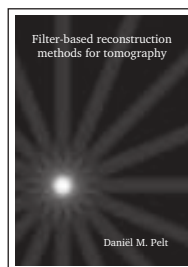
- Viktor Blåsjö, Why conic sections?, *Eureka* 47 (2015), 11–13.
- Viktor Blåsjö, The myth of Leibniz's proof of the fundamental theorem of calculus, *Nieuw Archief voor Wiskunde* 5/16(1) (2015), 46–50.
- Viktor Blåsjö, *Transcendental Curves in the Leibnizian Calculus*, Ph.D. thesis, Utrecht University, 2016.
- Henk J.M. Bos, Tractional motion and the legitimization of transcendental curves, *Centaureus* 31(1) (1988), 9–62.
- Henk J.M. Bos, *Redefining Geometrical Exactness: Descartes' Transformation of the Early Modern Concept of Construction*, Springer, 2001.
- René Descartes, *La Géométrie*. Leiden, 1637.
- René Descartes, *The Geometry of René Descartes*, translated by D.E. Smith and M.L. Latham, Dover, 1954.
- E.J. Dijksterhuis, *De Elementen van Euclides*, Vol. 1, Groningen, 1929.
- Thomas Little Heath, *Apollonius of Perga: Treatise on Conic Sections*, Cambridge University Press, 1896.
- Thomas Hobbes, *The English works of Thomas Hobbes of Malmesbury*, Vol. 7. Longman, Brown, Green, and Longmans, 1845.
- Christiaan Huygens, Letter to H. Coets, 27 August 1687, *Oeuvres complètes*, Tome IX, No. 2477.
- Christiaan Huygens, Letter to H. Basnage de Beauval, printed in *l'Histoire des Ouvrages des Sçavans*, February 1693, *Oeuvres complètes*, Tome X, No. 2793.
- A.G. Molland, Shifting the foundations: Descartes's transformation of ancient geometry, *Historia Mathematica* 3 (1976), 21–49.
- Otto Neugebauer, The Astronomical Origin of the Theory of Conic Sections, *Proceedings of the American Philosophical Society* 92(3) (1948), 136–138.
- Proclus, *A Commentary on the First Book of Euclid's Elements*, translated by Glenn R. Morrow, Princeton University Press, 1992.
- John Stillwell, *Mathematics and Its History*, 2nd ed, Springer, 2002.
- Ivor Thomas, *Greek Mathematical Works: Thales to Euclid*, Loeb Classical Library 335, Harvard University Press.
- H.G. Zeuthen, *Die Lehre von den Kegelschnitten im Altertum*, A.F. Høst & Sohn, 1886, originally published as: *Kegelsnitlaeren in Oltiden, Kongelig Danske videnskaberens Selskabs Skrifter*, 6th ser., 1(3) (1885), 1–319.
- H.G. Zeuthen, Die geometrische Construction als 'Existenzbeweis' in der antike Geometrie, *Mathematische Annalen* 47(2–3) (1896), 222–228.

In de verdediging

| In defence

Pas gepromoveerden brengen hun werk onder de aandacht. Heeft u tips voor deze rubriek of bent u zelf pas gepromoveerd? Laat het weten aan onze redacteur.

Redacteur: Geertje Hek
la Voie-du-Coin 7
1218 Grand-Saconnex
Zwitserland
verdediging@nieuwarchief.nl



Filter-based reconstruction methods for tomography

Daniël Pelt

Na een bachelor natuur- en sterrenkunde en een master wiskunde ging Daniël Pelt aan het werk als wetenschappelijk programmeur bij de afdeling Biologische Psychologie van de Vrije Universiteit Amsterdam. Maar de toegepaste wiskunde bleef trekken: “Je kunt heel divers werk doen in dit vakgebied, van het wiskundig analyseren van een probleem tot het efficiënt implementeren van een algoritme door programmeren.” Toen hij hoorde dat er een vacature was bij prof.dr. Joost Batenburg aan het Centrum Wiskunde & Informatica, solliciteerde Pelt en ging hij werken aan beeldreconstructiemethodes voor tomografie. Zijn werk resulteerde in het proefschrift *Filter-based reconstruction methods for tomography* dat hij op 3 mei 2016 verdedigde aan de Universiteit Leiden. Sinds juli werkt hij als post-doc bij het Lawrence Berkeley National Laboratory in Berkeley, CA, in de VS en hij hoopt in de toekomst nog veel interessant (toegepast) wiskundig onderzoek te doen.

Tomografie

Iedereen kent de röntgenfoto in de medische wereld: om een diagnose te kunnen stellen zonder te snijden wordt een patiënt belicht met een röntgenbron en de straling wordt achter de patiënt opgevangen door een detector. In een röntgenfoto is het vaak lastig om te zien of iets zich voorin of achterin het lichaam bevindt. Meestal kan een specialist toch een diagnose maken op basis van zo'n foto en zijn kennis over de structuur van het menselijk lichaam. Maar bij het behandelen van een tumor, bijvoorbeeld, is het belangrijk om de precieze positie van de tumor in het lichaam te weten. Hiervoor wordt vaak een zogeheten CT-scan gebruikt. De röntgenbron en de detector worden hierbij om de patiënt heen gedraaid, wat resulteert in meerdere foto's, elk gemaakt onder een andere hoek. Op basis van de opgenomen twee-dimensionale röntgenfoto's, ook wel projecties genoemd, reconstrueert de computer een driedimensionaal beeld van de interne structuur. De C van CT-scan staat daarom voor *Computerised*, de T voor *Tomografie*: “schrijven met dunne plakjes”.

Tomografie wordt in veel meer toepassingen gebruikt dan alleen in de medische wereld. In materiaalwetenschappen is het bijvoorbeeld nuttig om binnenin verschillende materialen te kunnen kijken terwijl ze onder druk staan of verhit worden. Vaak worden hiervoor ook andere stralingsbronnen gebruikt; in Pelts proefschrift gaat het bijvoorbeeld ook om elektronen.

Het tomografische reconstructieprobleem

Het berekenen van de onderliggende 3D-structuur op basis van een reeks 2D-projecties is makkelijker gezegd dan gedaan. Dit is het *tomografische reconstructieprobleem*, een klassiek inversepro-

bleem: gegeven de opgenomen data (de 2D-beelden, beschreven als een vector $\mathbf{p}$) en het voorwaartse model (het maken van de foto's, beschreven als een matrix $\mathbf{W}$), reken het 3D-origineel (beschreven als een vector van grijswaarden $\mathbf{x}$) uit dat het best bij het model en de opgenomen data past.

Pelt legt het uit op basis van projectie van een 2D-object en 1D-projecties. Het gescande object wordt als een eindige integreerbare functie $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ met begrensde drager gemodelleerd. Een (röntgen)straal door het object is een lijn $l_{\theta,t}$ met vergelijking $t = x \cos \theta + y \sin \theta$. De lijnintegraal van f over zo'n lijn $l_{\theta,t}$ levert een projectie

$$P_{\theta}(t) = \int_{l_{\theta,t}} f(x,y) ds = \iint_{\mathbb{R}^2} f(x,y) \delta(x \cos \theta + y \sin \theta - t) dx dy$$

waarin δ de Dirac-deltafunctie is. Het tomografische reconstructieprobleem is nu het vinden van de onbekende functie f gegeven de lijnintegralen $P_{\theta}(t)$ voor verschillende combinaties van θ en t . Zie Figuur 1. Standaard worden hiervoor twee soorten algoritmes gebruikt in de praktijk: analytische algoritmes en algebraïsche algoritmes. Analytische algoritmes bevatten meestal een filterstap waarin de opgenomen data geconvolveerd worden met een bepaald filter. Ze hebben over het algemeen erg weinig rekentijd nodig.

Een populair analytisch algoritme is het *filtered backprojection* (FBP) algoritme. Eerst wordt de convolutie van de projectiedata met een filter $h: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ toegepast:

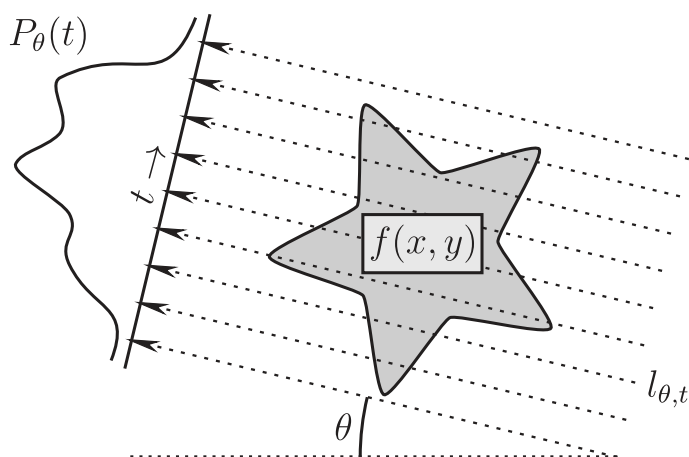
$$q_{\theta} = \int_{-\infty}^{\infty} h(\tau) P_{\theta}(t - \tau) d\tau$$

In het Fourier-domein wordt dit berekend als

$$q_{\theta} = \int_{-\infty}^{\infty} \hat{h}(u) \hat{P}_{\theta}(u) e^{2\pi i u t} du$$

met $\hat{h}$ en $\hat{P}_{\theta}$ de Fourier-getransformeerden van h en P_{θ} .

In de praktijk wordt meestal een standaard filter h gebruikt, zoals het theoretisch optimale Ram-Lak-filter, gedefinieerd door $\hat{h}(u) = |u|$. Hiermee kan $f(x,y)$ exact gereconstrueerd worden op



Figuur 1

basis van een continuüm van hoeken θ :

$$f(x,y) = \int_0^{\pi} q_{\theta}(x \cos \theta + y \sin \theta) d\theta. \quad (1)$$

Echter, in werkelijkheid is het aantal projecties natuurlijk maar eindig, zodat een discrete benadering van (1) moet worden gebruikt. Dit is precies wat het FBP algoritme doet.

Een beperkt aantal foto's

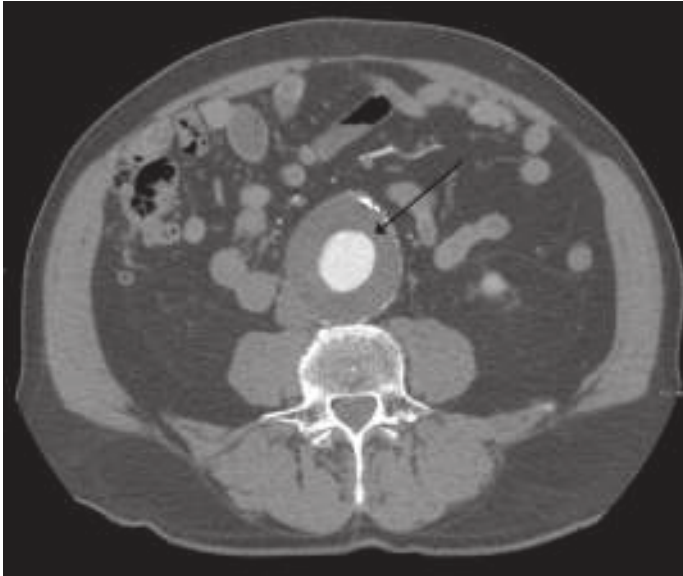
In de praktijk wil je goede resultaten bereiken op basis van zo weinig mogelijk projecties. Röntgenstraling is immers schadelijk voor de cellen. En als je een materiaal tijdens een proces met snelle veranderingen wilt bestuderen, is er niet voldoende tijd om veel projecties op te nemen. In dat geval, en ook in het geval van veel ruis in de foto's, is de kwaliteit van reconstructies berekend met analytische algoritmes vaak niet voldoende. De truc is dus om met weinig of slechte data toch mooie reconstructies te krijgen.

Algebraïsche algoritmes kunnen in deze gevallen reconstructies van hogere kwaliteit berekenen door het reconstructieprobleem te schrijven als een lineair systeem van vergelijkingen $\mathbf{W}\mathbf{x} = \mathbf{p}$. Dit lineaire systeem kan worden opgelost met verschillende iteratieve optimalisatiealgoritmes, die leiden tot verschillende algebraïsche algoritmes. Echter, in de meeste gevallen is het resulterende lineaire systeem onderbepaald en slecht geconditioneerd, wat het moeilijk kan maken om goede oplossingen te vinden als er ruis aanwezig is. Bovendien is een groot nadeel van algebraïsche algoritmes dat ze een enorm lange rekentijd vergen; het lineaire systeem dat opgelost moet worden heeft vaak miljoenen vergelijkingen voor miljoenen onbekenden. Vaak is de benodigde rekentijd van algebraïsche algoritmes zo groot, dat ze in de praktijk onbruikbaar zijn.

Nieuwe reconstructiealgoritmes

Pelt heeft in zijn proefschrift een aantal nieuwe reconstructiealgoritmes geïntroduceerd, die als doel hebben om de resultaten van filter-gebaseerde analytische algoritmes te verbeteren zonder de rekentijd significant te verhogen. De nieuwe algoritmes gebruiken een combinatie van de analytische en de algebraïsche aanpak. De snelheid van de nieuwe algoritmes is vergelijkbaar met die van analytische algoritmes, maar de beeldkwaliteit is vergelijkbaar met die van algebraïsche algoritmes. Bij de nieuwe algoritmes wordt gebruik gemaakt van het feit dat er in de filterstap van analytische algoritmes de vrijheid is om andere filters te gebruiken dan de standaard filters. Deze filters worden op verschillende manieren gedefinieerd en berekend, en kunnen afhangen van, bijvoorbeeld, de manier waarop gescand is of de eigenschappen van de objecten die gescand zijn. Op deze manier heeft Pelt verschillende algoritmes met verschillende eigenschappen ontwikkeld.

Het eerste algoritme gebruikt een filter dat geoptimaliseerd is voor de specifieke opgenomen data door een lineair systeem op te lossen dat lijkt op het systeem van algebraïsche algoritmes. De methode is gebaseerd op een algebraïsch model van het tomografieprobleem en levert veel betere reconstructies voor problemen met een beperkt aantal projecties dan analytische methodes. Het lineaire systeem dat hierbij wordt gebruikt is echter gebaseerd op het FBP-algoritme, waardoor het systeem veel kleiner is dan systemen die normaal bij algebraïsche methodes moeten worden opgelost. Bovendien is de implementatie eenvoudig en efficiënt



Afbeelding: James Hellman, MD.

Figuur 2 Een enkel 'plakje' van een CT-scan.

doordat het lineaire systeem gevormd wordt met behulp van het FBP-algoritme.

Het tweede algoritme gebruikt een filter dat geoptimaliseerd is voor de specifieke *scanner* die gebruikt is (i.e. het aantal foto's dat die maakt, de resolutie van de detector, et cetera) door een populair algebraïsch algoritme expliciet te benaderen met een analytisch algoritme. In beide gevallen zijn de driedimensionale beelden berekend met de nieuwe algoritmes vrijwel identiek aan de beelden die berekend zijn met algebraïsche algoritmes, maar is de rekentijd van dezelfde orde van grootte als die voor analytische algoritmes.

Pelts derde algoritme gebruikt filters die getraind zijn met behulp van neurale netwerken. In dit geval worden filters berekend die zeer specifiek zijn voor het type object dat gescand wordt, door gebruik te maken van eerder opgenomen data van hoge kwaliteit van soortgelijke objecten. Het blijkt dat deze aanpak het mogelijk maakt om het aantal benodigde foto's sterk te verminderen zonder dat de uiteindelijke kwaliteit van de berekende beelden sterk afneemt.

Tot slot laat zijn proefschrift zien dat het mogelijk is om bepaalde vormen van voorkennis over het gescande object (bijvoorbeeld welke grijswaardes het beeld kan hebben) efficiënt te gebruiken om de kwaliteit van het berekende beeld te verhogen, door een filter-gebaseerd algoritme alleen toe te passen in een klein gebied.

Toepassen op echte data

Pelt heeft stellingen bij zijn proefschrift geschreven. Een belangrijke stelling vindt hij zelf: "Practical problems usually occur when applying new algorithms on real-world data. Algorithm developers should perform additional research and work to solve these problems, rather than relying on others to solve the problems for them."

Pelt heeft het gevoel dat de stap tussen het publiceren van een nieuw algoritme en het toepassen van het algoritme op 'echte' data vaak vergeten wordt, terwijl er veel problemen kunnen optreden in deze stap. Zelf heeft hij in zijn proefschrift de meeste algoritmes ook op 'echte' data toegepast. Een goed voorbeeld daarvan is het zesde hoofdstuk, dat volledig gaat over het toepassen van het neurale-netwerk-algoritme op elektron-tomografie-data. Daarbij kwamen inderdaad vaak wat problemen kijken, bijvoorbeeld met bepaalde types ruis of artefacten in de data waarmee nog geen rekening was gehouden.

Qua rekentijd viel het werk vaak mee, aangezien het doel van de algoritmes uit Pelts proefschrift juist is om weinig rekentijd nodig te hebben. Om de rekentijd nog verder te verminderen maakt de groep van Batenburg op een slimme manier gebruik van grafische kaarten. Meestal worden krachtige *graphics processing units* of GPUs gebruikt om computerspellen er zo goed mogelijk uit te laten zien, maar wetenschappers gebruiken ze ook steeds vaker voor hun berekeningen. In het geval van de tomografie lukt dit door de fysica van het scannen bij het tomografieproces zodanig te simuleren dat het computerprogramma past bij de manier waarop een grafische kaart werkt.

In het laatste hoofdstuk van zijn proefschrift behandelt Pelt nog een praktisch probleem. Hij beschrijft hoe twee populaire software pakketten voor tomografie (TomoPy en de ASTRA toolbox) eenvoudig samen gebruikt kunnen worden, en dat het combineren van de sterke kanten van beide pakketten tot betere resultaten kan leiden dan het gebruik van elk pakket apart.

✎

Ferdinand Verhulst

*Mathematisch Instituut
Universiteit Utrecht
f.verhulst@uu.nl*

Opinie

Vergeet 'zuivere en toegepaste' wiskunde

In de wiskundewereld wordt vaak onderscheid gemaakt tussen 'zuivere wiskunde' en 'toegepaste wiskunde'. Wat houdt dit onderscheid eigenlijk in, en moeten we zo'n onderscheid eigenlijk wel maken? Aan de hand van het werk van Felix Klein en Wiktor Eckhaus gaat Ferdinand Verhulst op zoek naar een antwoord.

In 1966 studeerde ik af aan de Universiteit van Amsterdam op een gemengd probleem van astronomie en numerieke wiskunde. Daarna werkte ik vijf jaar bij wiskunde van de TU Delft, vervolgens bij wiskunde van de Universiteit Utrecht. Vanaf het begin van mijn loopbaan in 1966 speelde de tegenstelling zuivere en toegepaste wiskunde een belangrijke rol, meestal in de discussie op een onaangename manier.

Mijn opleiding in Amsterdam bestond wat de wiskunde betrof uit de klassieke definitie-stelling-bewijs-resultaten van analyse, meetkunde en algebra en daarnaast uit experimentele en behoorlijk veel theoretische (astro-)fysica. De tegenstelling zuiver-toegepast begreep ik helemaal niet en dat onbegrip bleef en blijft tot de dag van vandaag wringen. Er bestaat geen goede omschrijving van 'zuiver' en 'toegepast' en het is toch wel vreemd dat allerlei wetenschappers die in hun werk heel degelijk zijn zo losjesweg deze begrippen gebruiken en zelfs bij belangrijke beleidsbeslissingen een rol laten spelen. In juni 2016 zag ik nog een advertentie voor 'een zuivere wiskun-

dige' bij het Max Planck Instituut te Bonn. Navraag wat met 'zuivere wiskunde' werd bedoeld, leverde geen antwoord op.

Problemsolvers en conceptualisten

Een voorlopige conclusie zou kunnen zijn dat de begrippen zuivere en toegepaste wiskunde dan wel vaag en slecht omschreven zijn, maar kennelijk toch iets aanduiden dat leeft onder wiskundigen. Dit dacht ik tot dat ik een boek van David Ruelle las over het denken van de wiskundigen [6]. In dit boek komen de begrippen zuiver en toegepast namelijk niet voor. Ruelle onderscheidt onder wiskundigen de 'problemsolvers' en de 'conceptualisten' (we zullen met de term 'wiskundige' hier uitsluitend iemand aanduiden die wetenschappelijk onderzoek doet en publiceert in erkende wetenschappelijke tijdschriften). De problemsolvers houden zich bezig met problemen als "hoeveel priemgetallen zijn er?" of "hoe voorspel ik de waterstanden in een riviermonding?".

Ruelle noemt als een conceptualist Felix Klein, bijvoorbeeld in de opzet van zijn

Erlangen-programma. In dat programma speelt het inzicht een rol dat naast de klassiek euclidische meetkunde er projectieve meetkunde is ontwikkeld, affiene en (later) symplectische meetkunde, enzovoort. Het gaat hierbij om het inzicht dat zulke wiskundige technieken gezamenlijk structuren in de wiskunde vormen, het ligt dicht bij wiskundige filosofie. Dit algemene inzicht brengt eenheid in de wiskunde en geeft ook een zekere esthetische bevrediging.

Ruelle merkt op dat problemsolvers meestal ook conceptueel bezig zijn. Iemand die geïnteresseerd is in het aantal priemgetallen zal zich ook wel gaan bezig houden met de verdeling van priemgetallen, het tweelingpriemprobleem en als ultiem onderwerp het vermoeden van Riemann. Je kunt waterstanden voorspellen en dan alleen bekende algoritmen gebruiken, dan ben je uitsluitend problemsolver, maar het ligt ook voor de hand om de grote vragen van de stromingsleer, het bestaan van oplossingen van de Navier-Stokes-vergelijkingen of het begrijpen van turbulentie aandacht te geven.

Het gaat bij een eventuele evaluatie van bezigheden van een wiskundige om kwaliteit. Een wiskundige met een betaalde baan die uitsluitend problemsolver is, kan dat rechtvaardigen als zijn werk veel maat-

schappelijke betekenis heeft. Maar wetenschappelijke kwaliteit ontstaat als er problemen worden opgelost en tegelijk nieuw conceptueel inzicht wordt verkregen. Van de andere kant: een wiskundige die uitsluitend conceptualist is wordt alleen gerechtvaardigd indien zijn werk de wiskunde een totaal nieuwe wending geeft. In de praktijk zal er bij goede wiskundigen bijna altijd een mengvorm zijn.

Er is in deze tijd ook een nieuwe gebruiksvorm van wiskunde ontwikkeld. Ik denk hierbij aan een gereedschapskist als *Auto* dat veelzijdig de gebruiker in staat stelt om periodieke oplossingen van gewone differentiaalvergelijkingen te zoeken (ontwerper is de Nederlands-Canadese Eusebius Doedel). Een ander voorbeeld is *MatCont* dat numeriek bifurcaties in differentiaalvergelijkingen volgt en analyseert. Hoe passen zulke gereedschapskisten in het plaatje? Ze zijn ongetwijfeld een grote steun voor de problemsolvers, echter de buitengewoon uitgebreide theorie die aan de constructie van *Auto* en *MatCont* ten gronde ligt en bovendien de vele wiskundige vragen die de constructies nog steeds oproepen plaatsen het werk aan deze programma's duidelijk op de mengvorm van problemsolving en conceptueel.

Laten we concreter worden door een aantal voorbeelden te bekijken.

Topwiskundigen als Isaac Newton, Bernhard Riemann of Henri Poincaré waren zowel problemsolver als conceptualist en dan in beide gebieden op uitzonderlijk hoog niveau. Zij laten in hun werk zien hoe het oplossen van problemen tot hoger, conceptueel inzicht leidt. Hun werk in de wiskunde is grensverleggend en bij Newton en Poincaré geldt dat ook voor hun werk in de natuurkunde. Bij de allergrootste wiskundigen is de samenhang tussen problemsolving en grensverleggende conceptie duidelijk.

Laten we echter eens kijken naar enkele boeken van twee excellente wiskundigen, Felix Klein en Wiktor Eckhaus, die dicht bij het dagelijkse werk van de gemiddelde wetenschapper staan dan de genoemde topwiskundigen. We kiezen voor deze twee wiskundigen omdat Klein na concrete problemen te hebben onderzocht het conceptuele sterk benadrukt terwijl bij Eckhaus de problemsolving voorop lijkt te staan.

Felix Klein (1849–1925)

Hoe staat het met Felix Klein? Zoals we boven zagen is zijn Erlangen-programma

een voorbeeld van conceptualisme in de meetkunde, maar Klein hield zich ook bezig met differentiaalvergelijkingen, zie [3] en [4]. Aan het einde van de negentiende eeuw hielden boeken over gewone differentiaalvergelijkingen zich bezig met trucs om speciale exacte oplossingen te vinden en met het technisch moeilijker gebied van de speciale functies. Klein stelt een geheel nieuwe aanpak voor. Hij wil het globale karakter van oplossingen bestuderen, maar omdat dit nogal ambitieus is beperkt hij zich tot lineaire tweede orde vergelijkingen met ten hoogste drie singuliere punten:

$$y'' + p(z)y' + q(z)y = 0,$$

waarbij y' de eerste afgeleide naar de complexe variabele z is, $p(z)$ en $q(z)$ zijn rationaal in z met eventueel polen. Zulke vergelijkingen leiden bijvoorbeeld tot hypergeometrische of tot Lamé-functies. In de jaren voor 1890 heeft Klein grote bijdragen geleverd aan de theorie van automorfe functies en dit gebied vormt de inspiratie voor zijn werk over differentiaalvergelijkingen. Vertakkingspunten in het complexe vlak van oplossingen worden behandeld met uniformiseringsmethoden waarbij door geschikte transformatie een globale parametrisering ontstaat op het Riemann-oppervlak. Dat levert bijvoorbeeld bij elliptische functies een variabele die de uitwijking van een slinger en de bijbehorende periode van beweging in één tabel kan leveren. Klein filosofeert uitvoerig over het belang van de meetkunde in dit verband en dan speciaal over de synthetische en de algoritmische aanpak. Zijn colleges [3] geven meer het complexe-functie-kader om met behulp van automorfe functies naar differentiaalvergelijkingen te kijken dan dat er kwantitatief of kwalitatief zulke vergelijkingen worden bestudeerd. Dat komt wel aan de orde in de monografie die Klein met Sommerfeld schreef [4]. De uitwerking van Kleins opzet, grotendeels door Sommerfeld uitgevoerd, leidt tot de analyse van een aantal oscillatorproblemen uit de mechanica.

De grote nadruk op het gebruik van automorfe functies voor differentiaalvergelijkingen is belangrijk voor speciale functies maar heeft nauwelijks of geen invloed gehad op de ontwikkeling van de algemene theorie van differentiaalvergelijkingen. De opzet van de theorie zoals vanaf rond 1880 door Henri Poincaré gegeven, zie [7], is in de loop van de twintigste eeuw de leiden-

de theorie geworden. Klein was goed bekend met het werk van Poincaré en het is dan ook vreemd dat hij die ontwikkelingen negeerde. De conceptuele weg die Klein op het gebied van differentiaalvergelijkingen koos was wel natuurlijk, gezien zijn werk aan automorfe functies, maar heeft alleen op andere gebieden van de analyse succes gehad.

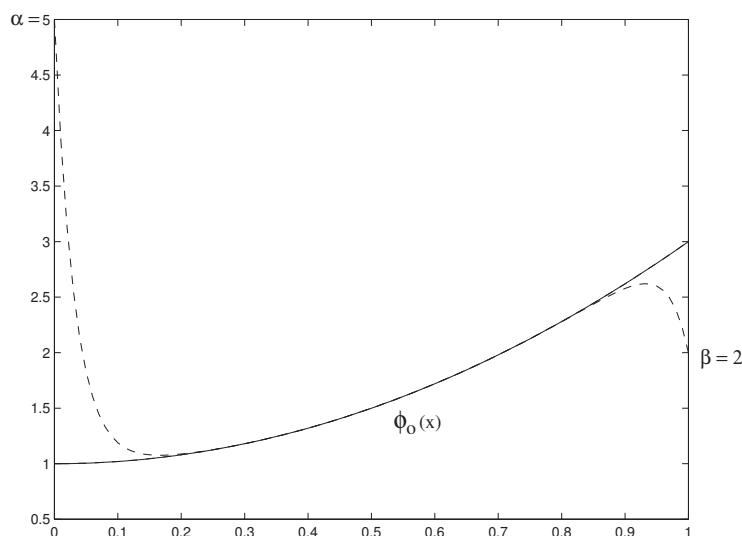
Wiktor Eckhaus (1930–2000)

Wiktor Eckhaus was een bijzonder creatieve problemsolver. Zijn hoofdthema's waren niet-lineaire stabiliteitstheorie, bifurcatie analyse en singuliere storingen; zie ook het *In Memoriam* [1]. Over het laatste gebied publiceerde Eckhaus een fundamenteel en samenvattend boek [2]. Wat zijn singuliere storingen? Bekijk eens het lineaire randwaarde probleem voor $\phi(x)$:

$$\begin{aligned}\varepsilon\phi'' + \phi &= 1 + 2x^2, \\ \phi(0) &= \alpha = 5, \\ y(1) &= \beta = 2.\end{aligned}$$

De parameter ε is steeds klein en positief. Het probleem kan exact worden opgelost, maar als we de parameter ε nul stellen verwachten we een benadering $\phi_0(x) = 1 + 2x^2$ van de oplossing te krijgen; ε kan immers willekeurig klein worden gekozen. Echter, voor $\varepsilon = 0$ ontstaat $\phi_0(0) = 1$, $\phi_0(1) = 3$, $\phi_0(x)$ voldoet kennelijk niet aan de randvoorwaarden. Als we toevallig $\alpha = 1$, $\beta = 3$ hadden gekozen was het goed gegaan, maar dan wisten we nog niet of we een echte benadering van de oplossing $\phi(x)$ hadden. Slecht idee dus? Nee, want de Duitse ingenieur-wiskundige L. Prandtl had voor zulke problemen het briljante idee dat in verschillende gebieden, in ons voorbeeld in $[0, 1]$, de oplossing verschillende benaderende (asymptotische) reeksontwikkelingen heeft die glad aan elkaar gepast moeten worden om een benadering van de oplossing voor het complete gebied te krijgen. (Voor een boeiende historische beschrijving zie [5].) In dit voorbeeld zijn dat de drie gebieden met allereerst een $\sqrt{\varepsilon}$ -omgeving van $x = 0$, ten tweede een $\sqrt{\varepsilon}$ -omgeving van $x = 1$ en ten derde het middengebied waar $\phi_0(x)$ een benadering is, zie Figuur 1.

Het gaat Eckhaus in zijn monografie [2] om verschillende zaken. Een conceptueel geluid in de Preface is "This book is an inquiry into the mathematical structure of the theory of singular perturbation."



Figuur 1 Matching bij de twee eindpunten voor het randwaardeprobleem. De 'benadering' $\phi_0(x)$ is een benadering in het middengebied.

Zo ontwikkelt hij in de eerste drie hoofdstukken de theorie van ordefuncties, reële, continue functies $\delta(\varepsilon)$ in een omgeving van $\varepsilon = 0$ waarvoor de limiet $\varepsilon \rightarrow 0$ bestaat. De verzameling van ordefuncties kan worden geordend, die ordening is partieel, ze vormen de basis voor een groot aantal asymptotische theorieën. Om het idee van Prandtl te gebruiken is het dan de kunst om lokale variabelen te identificeren die ons in staat stellen lokale reeksontwikkelingen te construeren. In het voorbeeld van boven gaat het om drie gebieden met variabelen $e^{-x/\sqrt{\varepsilon}}$, x en $e^{(1-x)/\sqrt{\varepsilon}}$.

Er blijken bij verschillende auteurs verschillende heuristische methoden te bestaan om die lokale variabelen te identificeren. Dat is meer een kwestie van smaak dan een wezenlijk probleem. Wel fundamenteel is de vraag of je de lokale benaderingen met elkaar kunt verbinden (matchen), hoe je dat moet uitvoeren en

of dat 'altijd' kan; met 'altijd' bedoel ik of het kan voor alle mathematisch-fysische problemen waarin een kleine parameter voorkomt. Hierbij speelt de zogenaamde 'overlap-hypothese' een belangrijke rol. Deze hypothese houdt in dat er tussen twee gebieden met lokale benaderingen een tussengebied bestaat waar beide lokale benaderingen geldig zijn zodat ze met elkaar verbonden kunnen worden (technische term: 'gematcht'). Eckhaus laat zien dat overlap een voldoende voorwaarde voor matching is maar niet noodzakelijk. Apriori aangeven bij een gewone of partiële differentiaalvergelijking, een delay-vergelijking of wat dan ook, of de methode van lokale benaderingen gevolgd door matching mogelijk is en vervolgens een benadering in de mathematische zin levert, blijft onopgelost. Wel laat Eckhaus in de volgende hoofdstukken zien hoe voor een groot aantal klassen vergelijkingen de heu-

ristische werkwijze gevolgd door bewijzen van geldigheid de procedure kan worden uitgevoerd. Dit is rechtvaardiging achteraf, de fundamentele aanpak is niet opgehelderd. Het is een mooi voorbeeld van wat Van der Blij eens in zijn colleges de moraal van de wiskundige noemde: "Doe wat je wilt en maak later alles in orde."

Conclusie

Als we een conclusie kunnen trekken is het dat het spreken over zuivere en toegepaste wiskunde alleen schijnbetekenis heeft. Dat kunnen we beter laten.

Verder heeft het zin om in het werk van wiskundigen problemsolving en concepties ontwikkelen te onderscheiden. In de praktijk zijn beide aspecten bij zo goed als alle wiskundigen aan te treffen, alleen de nadruk kan verschillend zijn. Zowel Klein als Eckhaus hebben in de genoemde boeken geprobeerd een conceptuele eenheid tot stand te brengen. Het zijn vruchtbare mislukkingen geworden, mislukking omdat het doel te beperkt of niet bereikt is, vruchtbaar omdat er ideeën zijn ontwikkeld die een zeker nut hebben gebracht. Bij Klein is het conceptuele aspect zozeer op de voorgrond geraakt dat hij binnen de algemene theorie van differentiaalvergelijkingen op een (overigens interessant) zijspoor is beland. Bij Eckhaus zijn de concepten scherp geformuleerd maar het fundamentele probleem van de algemene toepasbaarheid van het idee van Prandtl is open. Vermoedelijk kunnen geometrisch-topologische inzichten hier mede een bijdrage leveren.

De pogingen van beide wiskundigen om problemsolving en conceptueel denken bijeen te brengen zijn fraaie voorbeelden van de ontwikkeling van wiskundige activiteit.

Referenties

- 1 Arjen Doelman, Hans Duistermaat, Johan Grasman en Aart van Harten, In memoriam Wiktor Eckhaus (1930–2000), *Nieuw Archief voor Wiskunde* 5/2, (2001), 18–20.
- 2 Wiktor Eckhaus, *Asymptotic Analysis of Singular Perturbations*, North-Holland, 1979, 288 pp.
- 3 Felix Klein, *Über lineare Differentialgleichungen der zweiten Ordnung*, Lectures Sommersemester Göttingen, notes by E. Ritter, 1894, 524 pp..
- 4 F. Klein en A. Sommerfeld, *Über die Theorie des Kreisels*, B.G. Teubner, 1897, 512 pp.
- 5 R. E. O'Malley, *Historical Developments in Singular Perturbations*, Springer, 2014, 256 pp.
- 6 David Ruelle, *The Mathematician's Brain*, Princeton University Press, 2007, 160 pp.
- 7 Ferdinand Verhulst, *Henri Poincaré, Impatient Genius*, Springer, 2012, 260 pp.

Boekbesprekingen

| Book Reviews

Redactie: Hans Cuypers en Hans Sterk

Review Editors NAW - MF 7.092
Faculteit Wiskunde & Informatica
Technische Universiteit Eindhoven
Postbus 513
5600 MB Eindhoven
reviews@nieuwarchief.nl
www.win.tue.nl/wgreview



Andrew Sterrett (ed.)

101 Careers in Mathematics
3rd Edition

Mathematical Association of America, 2014
xvii + 335 p., prijs \$36.00
ISBN 9780883857861

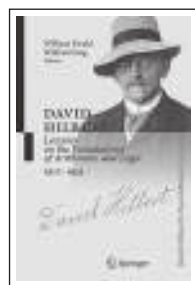
In dit zeer populaire boek (volgens de site van de onvolprezen, zeer actieve uitgever MAA zelf) krijgt elke deelnemende schrijver meestal twee pagina's om zijn of haar loopbaan te beschrijven en in die beschrijving vooral de rol te belichten die wiskunde daarin speelt of gespeeld heeft, want sommige auteurs zijn zelfs al met pensioen. Een groot deel van hen is begonnen als student wiskunde, terwijl anderen pas wiskunde zijn gaan (be)studeren na een lange omweg, velen zijn direct na de studie wiskunde als wiskundige gaan werken en weer anderen — soms al vrij snel — zijn in een geheel andere baan terechtgekomen, verscheidenen zijn nu als wiskundige aan het werk, maar de meesten niet. Ondanks deze diversiteit hebben ze niet alleen de liefde die ze hadden en hebben voor de wiskunde (en het plezier tijdens het bedrijven daarvan) gemeenschappelijk, maar noemen de auteurs vooral het enorme belang dat het wiskundig denken heeft gehad tijdens hun loopbaan, in welk veld men ook is terechtgekomen. Genoemd worden (vrij vertaald) probleemoplossende vaardigheden, logisch redeneren en gevoel voor concepten.

De eerste editie van *101 Careers in Mathematics* bevatte vreemd genoeg 108 van dergelijke levensverhalen, de tweede editie 139 (waarvan 31 nieuw en met updates van de eerste 108) en deze derde, meest recente editie zelfs 146 (van 68 vrouwen (!) en 78 mannen waarvan 7 nieuw en met weer updates van de vorige 139), dus u krijgt in ieder geval qua aantal meer dan waar voor uw geld.

De diversiteit van de verhalen die deze mensen vertellen is verbijsterend. Het moment dat men zich met wiskunde ging bezighouden (behalve als schoolvak) en erdoor werd gegrepen varieert van direct na de middelbare school tot vrijwel tegen het pensioen aan, de duur van een loopbaan in de wiskunde van nog geen jaar tot meer dan een halve eeuw, de mate waarin men wiskunde gebruikt van af en toe kleinere, maar uitermate belangrijke rekenkundige zaken (zoals geneesmiddelen prepareren in een ziekenhuis bijvoorbeeld) tot puur wiskundig fundamenteel onderzoek, en het gekozen beroep ten slotte (in een willekeurige volgorde) van basketballer, politicus, kunstenaar, bankmanager, jurist, bioloog of arts via game-designer, leraar, informaticus, actuaar of professor tot zelfs werkzaam in de onderzeeboot-ballistiek, Cultural Critic-At-Large, NASA-astronaut, Claims Manager en zelfs Troubleshooter. Opmerkelijk vaak (hoe logisch ook) genoemd als gewenste kwaliteit van een wiskundige (door sommigen helaas pas na enige tijd ontdekt) blijkt te zijn het na analyse van technische data deze data zo te kunnen presenteren dat het niet-technische management het kan begrijpen ('communication skills — visual, oral, and written — are extremely important')..., culminerend in de verzuchting van een computerwetenschapper: "It will be very frustrating to see your ideas ignored and the lesser ideas of a more articulate person gain acceptance." Herkenbaar voor de lezer?

Het achter elkaar uitlezen van 146 min of meer soortgelijke verhalen is af te raden (een stuk of vijf per keer is mijn advies) en verder hielp het mij niet dat ik geen enkele van de 146 (Amerikaanse, althans vrijwel alleen in Amerika werkzame) auteurs kende, terwijl ik altijd met veel plezier de levensverhalen of ervaringen van (of interviews met) bekende Nederlandse wiskundigen lees in de vakbladen (*Euclides* of het prachtblad dat u nu voor u heeft). Het boek bevat verder nog een vijftal (wat mij betreft overbodige) aanhangsels (gelukkig slechts 30 van de 335 pagina's) bedoeld voor de nieuwkomer, waarvan ik graag de (typisch) Amerikaanse titels geef (dat geeft een beter idee volgens mij): 'Seven Steps to Finding a Job', 'Interviewing Tips from the Pros', 'So You Want To Work in Industry', 'Teamwork – The Special Challenge of Industry en Degrees Earned by Mathematics Majors'. Goedbedoelde en ongetwijfeld nuttige, maar taaie materie...

Kortom, afgezien van de aanhangsels, een boeiend boek mits beetje bij beetje geconsumeerd met voor de wiskundig onderlegde lezer veel herkenbare zaken en voor de niet-wiskundige lezer hopelijk soms verrassende inzichten ('A calculating mind is a good mind') en het geheel is een warm pleidooi voor het scholieren verplicht laten kennismaken met zoveel mogelijk wiskundige ideeën, want er is vrijwel geen vakgebied waar je – zelfs tot in lengte van jaren – geen voordeel kunt hebben van een op wiskundige grondslag gestoelde geest en idem hersenen (voor zover te onderscheiden van elkaar) en het boek laat tevens overtuigend zien wat een van de schrijvers aldus stelde: "There are really no limits to what you can do if you are well prepared in mathematics" en een andere (de astronaut, inderdaad) niet on-grappig op een nog hoger niveau tilde met: "For me, the study of mathematics was the key that opened the doors to the universe". *Joop van der Vaart*



William Ewald, Wilfried Sieg (eds.)

David Hilbert's Lectures on the Foundations of Arithmetic and Logic 1917–1933

Springer, 2013 xxv + 1062 p., prijs €99,06
ISBN 9783540205784

This is the third volume of a six-volume set of David Hilbert's lectures, published and unpublished, on the Foundations of Mathematics in which all of Hilbert's work on meta-mathematics and proof theory is conveniently collected. The editors have produced an impeccable and exhaustive critical edition of all of Hilbert's papers on mathematical logic and meta-mathematics written between 1917 and 1931 in German. Each paper has been re-constituted, checked against misspellings and minor lapses and mistakes, provided with footnotes by the editors who also provide a scholarly apparatus of technical notes including alternative readings and providence for each of Hilbert's papers. In addition, this volume includes hitherto unpublished materials which include lecture notes by Hilbert written up by his students P. Bernays and N. Schönfinkel as well as notes taken by H. Kneser recording Hilbert's lectures between 1921 and 1923. Finally, the editors have included a reprint

of the first edition of Hilbert–Ackermann's *Grundzüge der theoretischen Logik* (1928) and of Bernays's unpublished *Habilitationschrift*.

The material is arranged into four main periods according to its historical chronology. For each period – 1917–1920; 1920–1922; 1922–1925; 1925–1931 – each paper or item is provided with an informative introduction which conveniently gives rather exhaustive cross-references to other papers and items of this volume. This index is especially valuable and easy to work with. For example, if one wants to know where Poincaré is mentioned, the index indicates by distinct type-faces where the name is mentioned by Hilbert and where by the editors (rather than running two separate indices). Overall, this volume is excellently designed for the historian as a working source book for whom it is clearly indispensable. But it should also serve those still interested in the Foundations of Mathematics and its open problems left by Hilbert and his students where, in particular, the existence of a finitistic consistency proof remains of special interest.

This central topic is played-down by the editors who are not finitists – and they are in good company. Viz., as the development of Hilbert's ideas over time can be glimpsed from this volume, Hilbert was also a reluctant finitist and remained ambivalent towards fully embracing Finitism as a whole. It may be accurate to say that Hilbert was more comfortable espousing Finitism than consistently practicing it – a task he left to his students with little or no guidance. The result was a research program in shambles: there never came to pass an 'Einführung in der Meta-mathematik'. Finitism was never given a definitive presentation and Hilbert never made it clear whether meta-mathematics was intended as a closed system of knowledge (in line with Wittgenstein's *Tractatus Logico-Philosophicus*) or as a future, vital area of mathematical research (like Intuitionism or Curry's Formalism). It appears as if Hilbert wanted it both ways, but that such a goal at cross-purpose with itself was not to be attainable. Thus, the long-standing criticism of Finitism that it does not admit a sharp specification of its deployments of mathematical means seems justified, and, furthermore, when they on occasion were, the results did not amount to as much as Hilbert claimed for them, such as, for example, Hilbert's *Ansatz* for settling the Continuum Hypothesis or for a consistency proof for 'all' of classical mathematics *modulo* some 'minor' details. As it turned out, these 'minor' details were not without their devils. No doubt, Hilbert learned from those failures and around 1930 he began to consider meta-mathematics entirely independent of set theory and in harmony with Kronecker's finitistic interpretation of mathematics. This new conception led to Herbrand's unusually transparent consistency proof for arithmetic with quantifier-free induction (1931) for which neither of Gödel's two incompleteness theorems apply. This could have been the beginning rather than the 'end' of Hilbert's Program but for Herbrand's untimely death. The editors omit the significance of Herbrand's orderly approach.

The most common account of Hilbert's meta-mathematics is that it was conceived too narrowly to command any serious mathematical considerations. It was only by the interventions by Tarski and Gödel, so the account goes, that its formalism and language became precise, i.e., 'mathematical', enough to unambiguously state and solve Hilbert's three main problems, viz., those of consistency, completeness and decidability for, in particular, formalized theories of arithmetic and set theory. The modern solution to all three of Hilbert's main meta-mathematical problems by what basically is a

single proof, due to Gödel, is well-known and the editors provide some details.

Ever since, however, has there been a debate about Hilbert's response to Gödel's proof of the formal unprovability of consistency — about which, for some, surprisingly, he had *nothing to say* in any of his last papers between 1930–1933. This lack of response on the part of Hilbert — 'Hilbert's silence' — has given rise to much speculation and talk about the 'end of Hilbert's Program'. The editors are far from impartial when weighting in on these speculations and they advance the hypothesis that Hilbert radically changed his notion of a formal system in order to meet and overcome the seeming obstruction posed by Gödel's proof. While, in fact, Hilbert's modification accomplishes just that (as shown by Herbrand's consistency proof of 1931), it may equally well, and more importantly, be understood as a new approach to the limits of Finitism which, at this late stage, Hilbert finally came to embrace in full: "Kronecker (hat) eine Auffassung klar ausgesprochen ... die heute im wesentlichen mit unsere finiten Einstellung zusammenfällt." (Hilbert, 1930, 3rd Hamburg address.) In particular, Hilbert's requirement is now that formal proofs must rest on a finite set of numerals (depending on the proof) which is found and identified as a result of 'unwinding' the proofs. The unwinding of the proof is simply the reverse of its construction provided the latter is piece-wise linear and the length of the construction sequence is bounded by a parameter whose value need not always be given an exact specification. What is specifically new about this approach is that the numerals used in formal proofs may be regarded as obtained in accordance with Brouwer's *choice sequences*, sequences of signs whose (programmed) termination may be indeterministic. This makes a proof of, say, a 'pi-one formula' into a non-mathematical object at least in the classical sense because it is based on shorter proofs of formulae having only numerals as their constant terms and the number of such formulae is determined by which numerals may be chosen, choices which are not necessarily pre-determined, yet bounded by their history (courses-of-values paths). It may not be so surprising, after all, that a consistency proof of arithmetic stops short of its own arithmetization in the case where consistency of the latter may be a special case of the former. If Large Cardinals can cause trouble for set theory it might not be far-fetched to expect 'Large Numerals' (occurring through arithmetization) to impede the indefinite propagation of the consistency property in a formal system (most recently questioned by Vladimir Voevodsky). Regardless of such speculations, it is clear that Hilbert did not need Gödel's proof to be motivated to change his view on the structure of formal systems and proofs. And besides, Hilbert had thought long and hard about these issues and Gödel had just gotten started. In addition, it was not Gödel but Hilbert who was the author and inventor of meta-mathematics, the chairman of the board you might say, which would entitle him — but not Gödel — to do with his own theory as he would see fit. Seen in this light, 'Hilbert's silence' may simply be interpreted as the irrelevance Hilbert attributed to Gödel's work for solutions of the consistency problem — a conclusion which also Herbrand reached based on the 1931-consistency proof. However, the editors are unwilling to give Hilbert any slack and much of their commentary on this issue in this tome reads as a tombstone or epitaph over Hilbert's and Herbrand's efforts. In this they follow the account in all modern textbooks in all languages. But this

might change with the current, rapid developments in computer science, algebraic geometry and various forms of combinatorics where people meet with Hilbert's original problems, often in new and challenging contexts. This volume may therefore also serve to inspire those who seek an alternative to current, set theory based meta-mathematics by making the source texts of the origin of the first such alternative easily available (when supplemented with Herbrand's *Écrits logiques* which has been available for some time — for example, Warren Goldfarb's *A translation of the 'Écrits logiques'*, published in 1971 by the D. Reidel Publishing Company). Finally, many people are given to the understanding that the classic two-volumes of *Grundlagen der Mathematik* by Hilbert-Bernays is the final presentation of this alternative — when, in fact, hardly a trace of it is discernable. It is regrettable in the reviewer's opinion that the editors did not use the opportunity to correct this misinformed understanding. However, for those of us who are aware of this incongruence this volume provides much needed reference material for, in detail, pointing out the omissions caused by history.

Catharine C. Hennix



Della Dumbaugh, Joachim Schwermer

Emil Artin and Beyond – Class Field Theory and L -Functions

Heritage of European Mathematics, Vol. 9

European Mathematical Society, 2015

xiii + 231 p., prijs €68,00

ISBN 9783037191460

This book focuses on the life and work of Emil Artin during the period in which he and his PhD students, initially inspired by Claude Chevalley, developed class field theory further. They redid a great deal of number theory through the lens of the so-called *ideles* and *adeles*. The 'beyond' in the title is discussed in two chapters, written by James Cogdell and Robert Langlands, respectively. Roughly speaking these discuss how the Artin L -series became part of the Langlands program. The Artin L -series helped Artin formulate his celebrated reciprocity law encompassing all earlier reciprocity laws and is now seen as the crowning achievement of abelian class field theory (for the proof Artin did not use his L -series).

Emil Artin (1898, Vienna–1962, Hamburg) was an Austrian mathematician of Armenian descent. One of his forefathers was called Artinian and changed this to the more German sounding Artin. Artin was born, studied and worked, in his early years, in various German-speaking cities in Europe. For this book his first period in Hamburg (which turned out to be the most productive scientifically) is most relevant. For various reasons (e.g., his wife was classified as being Jewish by the Nazis), he wanted to leave Germany relatively soon after the Nazis came to power. In 1937, Artin and his family arrived in America. Much later, in 1958, he returned to Hamburg where he worked until the end of his life.

In addition to the first four chapters written by the authors, Cogdell and Langlands each wrote a chapter. The chapters vary from almost purely historical to quite mathematical. Taken together, they offer a view of both the life of Artin in Hamburg (1930s) and his

life in America (especially the 1940s) and the development of class field theory at the time.

Artin was a great teacher and inspirer of youth. He enjoyed developing a subject from first principles and devoted much research to finding the simplest proofs at every stage. A very important example was a 1931/1932 course he gave on class field theory. This course had a lasting influence on mathematics. One of the participants was a young Chevalley who suggested some simplifications of proofs given by Artin. On the other hand, the lectures had a great influence on the final thesis of Chevalley. Indeed, a few years later Chevalley would develop the new ‘*éléments idéaux*’ (or *ideles*, for short) in a letter (1935) to Hasse. The letter is presented in this book. Over the course of the next few years Chevalley worked out the ideas in the letter in several publications. It is with Chevalley that the idelic approach to number theory started. Over the next twenty years, Artin and his PhD students (e.g., David Gilbarg, Margaret Matchett, John Tate) and his colleague George Whaples took up this point of view and pushed it forward. This is described in Chapter 3 (work with Whaples, leading to the notion of *adeles*) and Chapter 4 (PhD thesis of Matchett, who gave an idelic interpretation of zeta functions).

In Chapter 2 the focus is on how Artin created a (mathematical) life in America. Artin was well-received in America, largely because (elite) mathematics departments were seeking to expand their faculty and have more and better research output. Indeed, in this chapter the American mathematical world at the time is also described. Artin adapted quickly to it and soon started to become an important contributor himself.

Chapter 3 discusses the work of Artin and his young colleague Whaples, which is very much inspired by the aforementioned work of Chevalley. It was a conceptual breakthrough in algebraic number theory. Their main result is the use of the product formula for valuations to derive an axiomatic characterization of both algebraic number fields and algebraic function fields with a finite field of constants. They defined valuation vectors as the additive counterpart of the *ideles*, which later led to the notion of *adeles*.

André Weil described Artin’s first Hamburg period as a “love affair with the zeta function”. Given this, it is not so surprising that Artin thought about the possibility of interpreting the theory of zeta functions and *L*-series through the lens of *ideles* and valuation vectors and suggested it as a PhD subject. This led to the PhD thesis of Matchett, which is reproduced for the first time in this book. Matchett succeeded in redefining the classical zeta function in terms of integrals over the *idele* group, and in interpreting the Hecke characters as exactly those characters of the *ideal* group which can be derived from *idele* characters. However, she was not successful in establishing the functional equation for the zeta functions she considered. This was done by Tate in his thesis, using a simple Poisson formula. His groundbreaking step is that he makes full use of abstract analysis in groups of valuation vectors and *ideles* associated with algebraic number fields. What Tate essentially did was to give an adelic theory of Hecke’s *L*-series attached to Hecke characters. In addition to a discussion and reproduction of Matchett’s thesis, there is a description of her life and career.

Chapter 5 (written by Cogdell) discusses *L*-functions and non-abelian classfield theory, from Artin to Langlands. Cogdell, in a convincing and beautiful way, tries to reconstruct how Artin came to define his *L*-functions. Artin did so in 1923 with the hope of de-

veloping a non-abelian class field theory. In an interlude, Cogdell discusses Hecke’s approach to *L*-series. As Cogdell summarizes, Artin’s *L*-series are defined by an Euler product, have mysterious analytic properties and are blatantly arithmetic, whereas Hecke’s *L*-series are defined by a Dirichlet series, have easy analytic properties and are, in fact, characterized by them, but have mysterious Euler product and arithmetic meaning. It is with the Artin *L*-series that the primacy in present day number theory of the Euler product over Dirichlet series started. Cogdell ends his contribution by showing that the Artin and Hecke *L*-series, which from their definition look very different, are actually two sides of the same coin and are reconciled and greatly generalized in the Langlands program. He also points out that when the Langlands program will be completed, Artin’s dream of a non-abelian class field theory will also be fully realized.

In the final chapter, the letter from Langlands to Weil is presented, outlining his ideas concerning a new class of Euler products. Langlands himself comments on its mathematical content, what the reason was that led him to write this letter, and about the ebb and flow of his professional life.

In most books about the history of mathematics there is not much high-level mathematics. This book is quite different as the unfolding of the history goes hand in hand with a broad explanation of the relevant mathematical ideas. It provides a very important service to the mathematical community in making some very difficult and very important unpublished manuscripts available: the letter of Chevalley to Hasse, the PhD thesis of Matchett and the letter of Langlands to Weil. The latter, although not published, was available online earlier: <https://publications.ias.edu/rpl/section/21>. (This comment is due to Cogdell whom, along with Tomoko Kitagawa and Lola Thompson I would like to thank for proofreading of this review.)

It is clear, from studying this book, that a great deal of effort went into writing it and that the research for this book also took a lot of time (as can be seen from the many illuminating quotes from the literature on Artin). I find it fascinating and can highly recommend it to those with some background in algebraic number theory and zeta functions. I have one caveat though; reading it might cause a deep and unfulfillable wish on the part of the reader to meet Artin and follow his lectures!

Pieter Moree



Peter Borwein, Peter Liljedahl, Helen Zhai (eds.)

Mathematicians on Creativity

Mathematical Association of America, 2014
xviii + 199 p., prijs \$31.00
ISBN 9780883855744

Wiskundigen die denken en schrijven over creativiteit in hun vak, dat kan een interessante discussie opleveren. Een eeuw geleden deden Claparède en Flournoy, twee Franse psychologen, een onderzoek hiernaar. Zij beschreven hun methoden en de resultaten daarvan in 1902, 1904 en 1908. Hadamard en Henri Poincaré wa-

ren daar niet positief over; zij schreven over hetzelfde onderwerp prachtige verhandelingen, ook in diezelfde periode.

Dit boek gaat over dit onderwerp: "This book aims to shine a light on some of the issues of mathematical creativity. It is neither a philosophical treatise nor the presentation of experimental results, but a compilation of reflections from top-calibre working mathematicians." De auteurs nemen vragen die Hadamard in 1902 en 1904 stelde (Appendix A). Zij leggen die vragen voor aan een nogal willekeurige selectie van wiskundigen nu. De helft van dit boek bestaat uit de antwoorden daarop (maar zonder dat de auteurs vermelden welk antwoord bij welke vraag hoort), rijp en groen door elkaar heen. Verder verzamelen de auteurs allerlei citaten die iets met wiskunde te maken hebben, van 300 voor Christus, tot op heden, en die zetten ze dan, net zo chaotisch als die antwoorden, bij elkaar. Met als criterium voor de volgorde? De auteurs, alfabetisch geordend.

Als U iets wil lezen over bespiegelingen over het wiskundige denk- en scheppingsproces lees dan essays van Henri Poincaré, zoals *Science et Méthode* (Paris, 1908). Zie bijvoorbeeld Henri Poincaré, *Een nacht vol opwinding. Een keuze uit de filosofische essays*. Vertaald door D. Eringa met een inleiding door F. Verhulst. (Epsilon Uitgaven, deel 41, 1998). Hadamard schreef hier in 1945 een prachtige verhandeling over. Hij bespreekt allerlei aspecten van het wiskundig creatieve proces, en fasen daarin. Elk onderdeel voorzien van een degelijke argumentatie, ondersteund door citaten, niet alleen van wiskundigen, maar bij voorbeeld ook van Mozart, van een kunstenaar (over het scheppingsproces bij Rodin), van een bioloog, en nog veel meer. Elk citaat completeert en ondersteunt het prachtige beeld dat Hadamard schetst. Zie Jacques Hadamard, *The Psychology of Invention in the Mathematical Field* (Princeton University Press, 1945) en daarin: 'An inquiry into the working methods of mathematicians', pp. 137–141 (translated from *l'Enseignement Mathématique*, Vol. IV, 1902, Vol. VI, 1904).

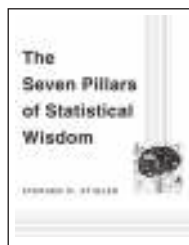
Wiskundigen zullen, ook nu nog, veel herkennen in deze stap-voor-stap beschrijving van Hadamard, in deze zorgvuldige analyse, en in vergelijkingen van het bestudeerde materiaal. Hoe schril steekt het boek dat we nu bespreken hier tegen af. Hier en daar vind ik een zin die het lezen waard is. In dit structuurloze werk buitelen antwoorden (op welke vraag?) en citaten van heel verschillende kwaliteit over elkaar heen. Het is de taak van een auteur details in te bedden in een algemeen kader, maar dat gebeurt hier niet. Dit boek roept bij mij de reactie op: "Ik heb een vreselijke hekel aan iemand die beweegt, maar niet weet waar naartoe," zoals Johan Cruijff het zo pakkend zegt.

In Appendix B geven de auteurs korte biografieën; wat een chaos: lang niet alle wiskundigen die langsgelopen zijn worden besproken, en de informatie die wel gegeven wordt is onsystematisch; een voorbeeld hoe het niet moet (een middag met internet, en je hebt althans dit onderdeel compleet en systematisch).

Een komische drukfout: de brief van Goldbach aan Euler, waarin het Goldbach-vermoeden in de kantlijn vermeld wordt, heeft als onderschrift '...dated June 7, 1942...'. De brief was 200 jaar eerder geschreven.

Dit boek zette mij weer eens aan het denken wat de minimale eisen zijn voor een dergelijke publicatie: niet zoals het in dit boek gebeurt. Het laat zien hoe moeilijk het is over dit onderwerp te schrijven, en ik las die prachtige tekst van Hadamard in detail.

Frans Oort



Stephen M. Stigler

The Seven Pillars of Statistical Wisdom

Harvard University Press, 2016

230 p., prijs €20,50

ISBN 9780674088917

Stephen Stigler heeft ons verblijd met een buitengewoon aardig boek over, zoals de titel al aangeeft, de zeven pilaren van statistische wijsheid. Om eerst de nieuwsgierigheid maar even weg te nemen: deze pilaren zijn achtereenvolgens aggregatie, informatie, likelihood, intercomparison, regressie, design en residu. De term 'zeven pilaren' zelf komt voort uit het bijbelboek *Spreuken* en de titel van zijn boek, zoals hij eerlijk toegeeft, onstond uit *The Seven Pillars of Wisdom* van Lawrence of Arabia. In het uitgebreide voorwoord van het boek geeft hij goede argumenten voor de keuzes van deze pilaren, argumenten die vooral gebaseerd zijn op grote ontwikkelingen in de geschiedenis van de statistiek. Met elkaar hebben deze pilaren het vakgebied statistiek vormgegeven. Zo beschrijft hij hoe het begrip aggregatie valt terug te voeren op heel oude Soemerische kleitabletten, waar al een 2×3 associatietabel op staat afgebeeld. Geweldig! Ook citeert hij Thucides die aangaf hoe ladders die bij belegeringen gebruikt werden een gemiddelde lengte moeten hebben. De moderne belangstelling voor aggregatie ontstond bij het bepalen van de magnetische noordpool, waar de variatie in de metingen goed geïnterpreteerd moest worden. Het volgende voorbeeld beschrijft hoe de wetenschap interesse begon te tonen in de vorm van de aarde: is het een bol, of is het een ellipsoïde? Met elkaar vormen dergelijke anekdotes een parelsnoer door de kernelementen van de statistiek. Uiteraard komen de groten uit de statistiek veelvuldig langs: Galton, Fisher, Bayes, Gosset, om maar enkelen te noemen. Buitengewoon lollig is ook een plaatje uit 1885, dat de 'gemiddelde wiskundige' beschrijft. Deze ontstond op basis van de 'gemiddelde mens', een concept dat we nu gelukkig wat achter ons gelaten hebben. Maar deze gemiddelde wiskundige was in die tijd, uiteraard, een man, en een met een baard. Deze man was gebaseerd op twaalf wiskundigen, maar dat waren in die tijd ook astronomen en fysici. Gelukkig is de wereld wel veranderd sindsdien.

Gezien de achtergrond van de auteur (een eerder boek van hem is *The History of Statistics*) is het niet verbazend dat de voorbeelden uit de geschiedenis van de statistiek komen. Toen ik onlangs in Chicago was kreeg ik de gelegenheid een college van Stigler bij te wonen. Dat was wel een mooie ervaring. De zaal was gevuld met een veertigtal studenten, de meesten waren afkomstig uit Oost-Azië, zoals dat aan de Amerikaanse universiteiten gebruikelijk is. Het onderwerp was de prioriteit van de kleinste-kwadratenmethoden, zeg maar de strijd tussen Legendre en Gauss. Tegen deze groep was hij in staat een college te geven met PowerPoint-slides in het Frans, Duits en Latijn, die uiteraard geen student kon lezen. Wat echt belangrijk was schreef hij wel op het bord. Het werd steeds duidelijker dat de passie van Stigler zeer sterk bij de geschiedenis van de statistiek ligt en beheerst gaf hij blijk van zijn grote eruditie.

Een grote kracht in dit boek is het laatste hoofdstuk. Hierin stelt hij de terechte vraag of we met zeven pilaren kunnen

volstaan, maar misschien nog wel belangrijker: wat zal de achtste pilaar worden bij het zich verder ontwikkelen van het vakgebied? Het zal nauwelijks verbazing wekken dat hij dit ziet gebeuren op het vlak van de big data. Hij onderscheidt daarbij drie aspecten: (1) het formuleren van voorspellingen en classificatie met big data, (2) problemen bij grote meervoudige vergelijkingen en (3) analyses in gevallen waar gefocuste vragen volgen als een laatste fase van een wetenschappelijke studie die althans gedeeltelijk een verklarend karakter had. Dat is een geweldige, bijna visionaire afsluiting van dit even leuke als leesbare boekje. Ik kan dit aan iedereen aanbevelen die niet alleen statistiek uitvoert in welke vorm dan ook, maar daar ook nog eens over nadenkt. Heerlijke lectuur.

Alfred Stein



Mircea Pitici (ed.)

The Best Writing on Mathematics 2014

Princeton University Press, 2015
xxii + 336 p., prijs \$24.95
ISBN 9780691164175



Mircea Pitici (ed.)

The Best Writing on Mathematics 2015

Princeton University Press, 2016
xxvi + 363 p., prijs \$24.95
ISBN 9780691169651

In NAW van maart 2015, pagina 67, staat de recensie afgedrukt van *The Best Writing on Mathematics 2013*. De hier te bespreken delen volgen qua opbouw, verantwoording en indeling datgene, wat in het begin en het einde van die recensie is opgemerkt. In het midden aldaar werden tien van de twintig bijdragen kort besproken. Laten we ons daarom nu beperken tot het weergeven van de inhoud van acht van de vierentwintig bijdragen van de 2014-bundel en van de inhoud van twaalf van de negenentwintig bijdragen van de 2015-bundel (de bijdragen uit de bundels zijn uit uiteenlopende tijdschriften afkomstig).

Uit de 2014-bundel: (1) M.J. Barany, 'Stuck in the middle: Cauchy's intermediate value theorem and the history of mathematics'. Een verhaal over colleges van Cauchy, twee door hem opgestelde bewijzen, gezien in hun tijdsgewricht. (2) S.-M. Belcastro, 'Adventures in mathematical knitting'. Het gaat er hier over, hoe oppervlakken van ruimtestructuren door breien te vervaardigen zijn. Met prachtige kleurenillustraties. Verwijzingen naar topologische structuren zijn volop aanwezig. (3) M. Braverman, 'Computing with real numbers from Archimedes and beyond'. Behandelt onder meer: de Bailey–Borwein–Plouffe-formule voor π , Turing machines, reële functies en berekening, dynamische systemen. Kleurenafbeeldingen aanwezig. (4) Twee bijdragen van J.H. Con-

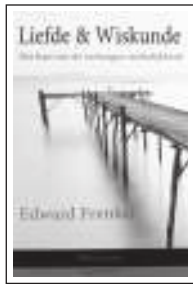
way, de ene over het Collatz-vermoeden in de getaltheorie, 'An unsettingtable arithmetical problem', en de andere over irrationaliteitsbewijzen van $\sqrt{2}$, 'Extreme proofs, part 1: The irrationality of $\sqrt{2}$ '. (5) J. Ellenberg, 'The beauty of bounded gaps'. Een overzicht wordt gegeven van het werk van Y. Zhang over het oplossen van de 'bounded gap conjecture' uit de getaltheorie, met uitleg van het probleem. (6) B. Hayes, 'Crickly curves'. Een overzicht wordt gegeven van werk van Cantor over aftelbaarheid, met pakkende deeltitels als: 'how to fill a space', 'programming by procrastination', 'grammar and arithmetic', 'all elbows', 'math on wheels'. (7) T. Khovanova, 'Conway's wizards'. Betreft verrassende raadsels van de hand van Conway. De 2014-bundel bevat voorts beschouwingen die direct te maken hebben met zaken die 'over' wiskunde, wiskundeonderwijs en filosofisch getinte dingen gaan. De boven vermelde acht bijdragen kunnen, afhankelijk van de persoonlijke voorkeur van de lezer, gezien worden als de meest inhoudelijk wiskundig getinte.

In de 2015-bundel is het overgrote centrale thema 'Spelen en spelletjes', met toepassingen van wiskunde in de recreatieve sfeer. De hele bundel is er doordrenkt mee, voorzien van kleurenreproducties. Waar gaat het om? De volgende twaalf bijdragen zijn op de voorgrond gezet, zonder daarbij de overige tekort te willen doen. (a) M.J. Barany en D. MacKenzie, A dusty discipline (gepubliceerd als 'Chalk' in *Representation in Scientific Practice Revisited*, MIT Press, 2014). Gepropageerd wordt de handhaving van borden waar met krijt op geschreven kan worden, in het huidige digitale tijdperk. Zulks helpt de geest om oplossingen van problemen naderbij te brengen volgens de auteurs (en niet alleen volgens hen). (b) A.T. Benjamin en E.J. Brown, 'Challenging magic squares for magicians'. Het onderwerp spreekt voor zichzelf. Veel diagrammen. (c) T. Walsh, 'Candy crush's puzzling mathematics'. P versus NP problematiek, beschouwing I-pad-spelletjes. (d) M. Freiberger, 'Chaos on the billiard table'. Er wordt verteld over banen van biljartballen op een gebruikelijke biljarttafel, maar ook op vervormde tafels. Veel digitale verwijzingen. (e) D. MacKenzie, 'Synthetic biology'. Een beschouwing over optredende patronen bij voortplanting door bacteriën, voorzien van kleurenillustraties. (f) E. Maor en E. Jost, 'Twisted math and beautiful geometry'. Spira mirabilis, cycloïde, brachistoon, rollende wielen, epi- en hypocycloïden, Steiners porismen. (g) B. Polster, 'Kenichi Miura's water wheel, or the dance of the shapes of constant width'. Reuleaux-driehoeken, evenwijdige vormen, waterwielen. Uitstekend artikel dat uitnodigt tot 'zelfbouw'. (h) A. Crannel, M. Franz en F. Futurama, 'Dürer: disguise, distance, disagreements, and diagonals'. Dit artikel kan als (toevallig?) vervolg worden gezien op mijn opmerking in de recensie van de 2013-bundel over perspectiviteitsassengebruik bij Dürer. (i) V. Hart en H. Segerman, 'The quaternion group as a symmetry group'. Het onderwerp is vele malen eerder beschouwd, onder andere door de Nederlander J.E. Mebius. (j) J. Conway en A. Ryba, 'The Steiner-Lehmus angle-bisector theorem'. Mooie bijdrage over dit onderwerp. (k) L. Rougetet, 'A prehistory of Nim'. Verhaalt over Boutons Nim en een zestiende-eeuwse Italiaanse bron. (l) J.S. Rosenthal, 'Statistics and the Ontario lottery retailer scandal'. Hier vinden we een analyse van een spannende gebeurtenis in 2001, waarin zaken als statistiek, politiek geroddel, inroepen van hulp door de politie, winnaar of geen winnaar, voorbijkomen en die jaren voortsleepte. De voorgaande twaalf onderwerpen zijn volgens mij

de absolute hoogtepunten uit de 2015-bundel. Maar zoals gezegd, de overige zeventien die hier onbesproken blijven, mogen er ook zijn.

Alles overziende, zie wat u doet met de 2014-bundel maar ruim een plaats in uw boekenkast in voor de 2015-bundel

Robert van der Waall



Edward Frenkel

Liefde & Wiskunde
Het hart van de verborgen werkelijkheid

vertaling van: *Love and Math. The heart of hidden reality*

Novecento, Amsterdam-Compiano, 2015

363 p., prijs €24,50

ISBN 9789491126048

Een boek met een bandje er omheen, met daarop een quote van Robbert Dijkgraaf: "Een meeslepende liefdesverklaring aan de wiskunde, haar schoonheid en haar eigenzinnigheid, geschreven door een van de briljantste Russische wiskundigen." En op de achterflap uitspraken van anderen, zoals: "Als je geen wiskundige bent zorgt dit boek er wel voor dat je er een wilt worden" en "Dit uiterst leesbare, gepassioneerd geschreven relaas over de meest opwindende ideeën in de moderne wiskunde wordt zeer aanbevolen aan iedereen die nieuwsgierig is en van schoonheid houdt."

Dit soort uitspraken maken op zichzelf al nieuwsgierig om dit boek ter hand te nemen. De schrijver is in ieder geval een bekend en briljant wiskundige. Lid van de American Academy of Arts and Sciences, winnaar van de Hermann Weyl Prize voor mathematische fysica, hoogleraar aan de universiteit van Californië, Berkeley om zo maar enkele achtergronden te noemen. Afkomstig uit Rusland wist hij zijn al vroeg ontluikende nieuwsgierigheid voor de wiskunde op allerlei manieren te voeden, vaak tegen de verdrukking in. Het was in de periode voordat de glasnost meer vrijheid bood, dat hem vanwege zijn Joodse achtergrond niet werd toegestaan verder te studeren: ondanks zijn toen al fenomenale prestaties werd hij niet toegelaten tot de Universiteit van Moskou. Enkele leermeesters namen hem in bescherming en gaven hem kansen om zich in de wiskunde verder te bekwamen. Zo vertelt Frenkel zijn levensgeschiedenis in dit boek en dat doet hij op een zeer aanstekelijke wijze. Zijn ontwikkelingsgeschiedenis, zijn studies, tegen de achtergronden van de heersende maatschappelijke situaties schetst hij levendig en nabij. Natuurlijk kennen wij allemaal de verhalen van de erbarmelijke en mensonterende toestanden die toen heersten. Dit verhaal van hem laat het ons meeleven uit de eerste hand.

Zo vormt dit boek een autobiografisch verhaal in een momenteel nauwelijks meer voor te stellen omgeving, die wezenlijk afwijkt van wat wij dagelijks meemaken. Als het daarbij gebleven was, dan zou dit boek geen plek gekregen hebben om er aandacht aan te besteden in deze kolommen. Er is namelijk veel meer. Enerzijds vertelt het boek het verhaal van de persoonlijke ontwikkelingsgeschiedenis van een van de meest vooraanstaande hedendaagse wiskundigen, anderzijds weet Frenkel in dit boek de geschiedenis

te vertellen van de ontwikkeling van moderne inzichten in de wiskunde. De rode draad in het boek vormt zijn eigen betrokkenheid bij het ontstaan en de voortgang van het Langlands-programma. De unificerende gedachten die hierin een centrale rol spelen, beschrijft hij op zeer boeiende wijze. Ze geven hem bovendien de gelegenheid om fundamenteel andere zaken aan de orde te stellen als die uit de klassieke wiskunde. Het doel dat de schrijver met dit boek voor ogen had, is om de geïnteresseerde buitenstaander in te leiden in facetten van de 'echte' wiskunde, die fundamenteel afwijken van het leren sommen maken op traditionele wijze. Daar heeft hij wel een heel instrumentarium voor nodig dat een niet-wiskundige niet tot zijn beschikking zal hebben. Hij doet dan ook zijn uiterste best om uit te leggen wat groepen zijn, wat Galois-theorie inhoudt, wat modulaire vormen zijn, wat de ijktheorie inhoudt, wat topologie inhoudt, wat symmetrie en supersymmetrie is, waar de snaartheorie over gaat, wat het verband is tussen de wiskunde en de mathematische fysica, wat het belang is van symmetrie en dualiteit, welke brug geslagen kan worden tussen getaltheorie en representaties van bepaalde groepen: zo maar een willekeurige greep van onderwerpen uit dit boek. Niet als losse onderwerpen, maar in een functionele onderlinge samenhang en tevens in een culturele context. En dat alles in 363 pagina's waarvan een groot deel ook besteed is aan zijn autobiografische verhaal. Dat dit overweldigende geheel de niet-wiskundige lezer al snel boven de pet zal gaan, laat zich raden. Daar staat dan weer tegenover dat het boek op een zodanige wijze geschreven is dat iedere lezer zich zal laten meeslepen door Frenkels enthousiasme.

Wiskundigen zullen smullen van dit boek, ondanks het feit dat de meeste zaken gesneden koek zullen zijn. Het enthousiasme, de sociaal/culturele context waarin het geheel zich afspeelt, de persoonlijke geschiedenis die er mee verweven is, maken dat vak-wiskundigen het boek maar moeilijk zullen kunnen wegleggen. Zo verging het mij althans: je wilt blijven doorlezen in deze spannende geschiedenis. Voor niet-wiskundigen geldt mijns inziens dat zij een behoorlijk doorzettingsvermogen moeten hebben om door het boek heen te komen. Vele begrippen en onderwerpen zullen, ook na herlezing, voor hen niet (gemakkelijk) te plaatsen en te begrijpen zijn. Wat dan overblijft is het aanstekelijke enthousiasme dat wellicht kan aansporen de wiskunde met andere ogen te gaan bezien. In ieder geval maakt Frenkel aan een ieder duidelijk hoe de moderne wiskundige werkt en dat het ook voor de vak-wiskundige niet allemaal van een leien dakje gaat. Dat ook de vakman/vakvrouw moet buffelen om stappen verder te kunnen komen.

Tot slot vertelt hij over zijn zoektocht naar de 'formule van de liefde' waarover enkele jaren geleden zijn bekende film 'Rites of Love and Math' is verschenen. Voor de niet-wiskundige geeft Frenkel achter in het boek een verklarende woordenlijst. Tevens volgt daarop een uitvoerig notenapparaat, waarin diverse onderwerpen uit de wiskunde nader toegelicht en uitgelegd worden. Samengevat: een ontzettend spannend boek waarin de lezer deelgenoot wordt van de liefde van Frenkel tot de wiskunde. Velen zullen zich in deze liefdesverklaring herkennen. Een prachtig boek waarmee Frenkel de wiskundige gemeenschap een dienst heeft bewezen in zijn aansporing te blijven zoeken en te studeren in dit prachtige vak van ons. Een boek ook, dat de geschiedenis van een belangrijk stuk wiskunde binnen de sociaal culturele omgeving beschrijft, een boek dat daarmee zelf geschiedenis schrijft.

Wim Kleijne

Recent verschenen publicaties. Als u een van deze boeken wilt bespreken of als u suggesties heeft voor andere boeken voor deze rubriek, laat dit dan per e-mail weten aan reviews@nieuwarchief.nl.



Sourcebook in the Mathematics of Medieval Europe and North Africa

Victor J. Katz, Menso Folkerts, Barnabas Hughes, Roi Wagner, J. Lennart Berggren (eds.)

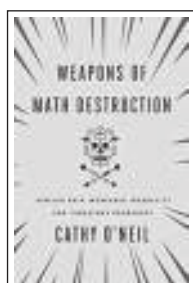
Princeton University Press, 2016
ISBN: 9780691156859
press.princeton.edu/titles/10910.html



My Search for Ramanujan: How I Learned to Count

Ken Ono, Amir D. Aczel

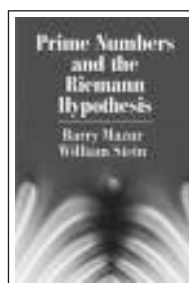
Springer, 2016
ISBN 9783319255668
www.springer.com/9783319255668



Weapons of Math Destruction. How Big Data Increases Inequality and Threatens Democracy

Cathy O'Neil

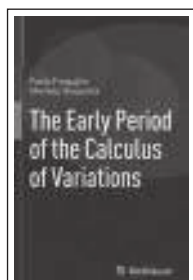
The Crown Publishing Group, 2016
ISBN 9780553418811
<http://crownpublishing.com/books/weapons-of-math-destruction>



Prime Numbers and the Riemann Hypothesis

Barry Mazur, William Stein

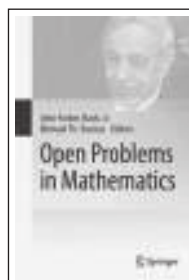
Cambridge University Press, 2016
ISBN 9781107499430
www.cambridge.org/9781107499430



The Early Period of the Calculus of Variations

Paolo Freguglia, Mariano Giaquinta

Birkhäuser, 2016
ISBN: 9783319389448
www.springer.com/9783319389448



Open Problems in Mathematics

John Forbes Nash, Jr., Michael Th. Rassias (eds.)

Springer, 2016
ISBN 9783319321608
www.springer.com/9783319321608



UK Success Stories in Industrial Mathematics

Philip J. Aston, Anthony J. Mulholland, Katherine M.M. Tant (eds.)

Springer, 2016
ISBN: 9783319254524
www.springer.com/9783319254524



Ordered Structures and Applications

Marcel de Jeu, Ben de Pagter, Onno van Gaans, Mark Veraar (eds.)

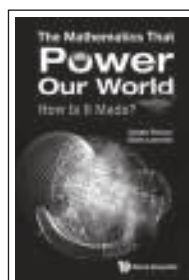
Birkhäuser, 2016
www.springer.com/9783319278407



Research on Teaching and Learning Mathematics at the Tertiary Level

Irene Biza et al.

Springer Open, 2016
ISBN 9783319418131
www.springer.com/9783319418131



The Mathematics that Power our World

Joseph Khoury, Gilles Lamothe

World Scientific, 2016
ISBN 978981344088
www.worldscientific.com/worldscibooks/10.1142/9860

Problemen

| Problem Section

This Problem Section is open to everyone; everybody is encouraged to send in solutions and propose problems. Group contributions are welcome.

For each problem, the most elegant correct solution will be rewarded with a book token worth €20. At times there will be a Star Problem, to which the proposer does not know any solution. For the first correct solution sent in within one year there is a prize of €100. When proposing a problem, please either include a complete solution or indicate that it is intended as a Star Problem.

Please send your submission by e-mail (LaTeX is preferred), including your name and address to problems@nieuwarchief.nl.

The deadline for solutions to the problems in this edition is 1 March 2017.

Problem A (folklore)

For a finite sequence $s = (s_1, \dots, s_n)$ of positive integers, denote by $p(s)$ the number of ways to write s as a sum $s = \sum_{i=1}^n a_i e_i + \sum_{j=1}^{n-1} b_j (e_j + e_{j+1})$ with all a_i and b_j non-negative. Here e_i denotes the sequence of which the i -th term is 1 and of which all the other terms are 0. Show that there exists an integer $B > 1$ such that for any product F of (positive) Fibonacci numbers, there exists a finite sequence $s = (s_1, \dots, s_n)$ with all $s_i \in \{1, 2, \dots, B\}$ such that $p(s) = F$.

Problem B (folklore)

Let ℓ be a prime number. For any group homomorphism $f: A \rightarrow B$ between abelian groups and for any integer $n \geq 0$, denote by f_n the induced homomorphism $A/\ell^n A \rightarrow B/\ell^n B$. Let $(k_n)_{n=0}^\infty$ and $(c_n)_{n=0}^\infty$ be sequences of integers.

Show that there exist integers $N, a, b \geq 0$ and a group homomorphism $f: (\mathbb{Z}/\ell^N \mathbb{Z})^a \rightarrow (\mathbb{Z}/\ell^N \mathbb{Z})^b$ such that for all $n \geq 0$ we have $\#\ker f_n = \ell^{k_n}$ and $\#\operatorname{coker} f_n = \ell^{c_n}$ if and only if $k_0 = c_0 = 0$ and the sequences $(k_{n+1} - k_n)_{n=0}^\infty$ and $(c_{n+1} - c_n)_{n=0}^\infty$ are non-negative, non-increasing, eventually zero, and there is a constant C such that for all n such that $k_{n+1} - k_n$ and $c_{n+1} - c_n$ are not both zero, their difference is C .

(Recall that the *cokernel* $\operatorname{coker} f$ of a group homomorphism $f: A \rightarrow B$ between abelian groups is the quotient of B by the image of f .)

Problem C (folklore)

Let R be the polynomial ring over $\mathbb{Z}$ with variables x_i, y_i, z_i for all $i \in \mathbb{Z}$. Let S be the polynomial ring over $\mathbb{Z}$ with variables t_i for all $i \in \mathbb{Z}$. Let $\tau: R \rightarrow R$ be the isomorphism of rings given by $x_i \mapsto x_{i+1}, y_i \mapsto y_{i+1}$ and $z_i \mapsto z_{i+1}$.

Consider the morphism $f: R \rightarrow S$ of rings given by $x_i \mapsto t_{i-1} t_i t_{i+1}, y_i \mapsto t_i^3$ and $z_i \mapsto t_i^2$. Does there exist a finite number of elements $r_1, \dots, r_n \in R$ such that the kernel I of f is generated as an ideal in R by $\{\tau^i r_j: i \in \mathbb{Z}, j = 1, \dots, n\}$?

Edition 2016-2 We received solutions from Hendrik Reuvers, Pieter de Groen en Toshihiro Shimizu.

Problem 2016-2/A (folklore)

Denote for all positive rational numbers x by $f(x)$ the minimum number of 1's needed in a formula for x involving only ones, addition, subtraction, multiplication, division and parentheses. For example, $f(1) = 1$, and $f(\frac{1}{3}) = 4$, as $\frac{1}{3} = \frac{1}{1+1+1}$ and as no such formula exists with at most three 1's. Note that $f(11) \neq 2$ (concatenation of ones is not allowed). Moreover, denote for all positive rational numbers x by $h_2(x)$ the number $\log_2(p) + \log_2(q)$, where $\log_2$ denotes the base-2 logarithm, and where p, q are positive integers such that $x = \frac{p}{q}$ and $\gcd(p, q) = 1$. Show that for all x , we have

$$f(x) > \frac{1}{2} h_2(x).$$

Redactie:

Gabriele Dalla Torre

Christophe Debry

Jinbi Jin

Marco Streng

Wouter Zomervrucht

Problemenrubriek NAW

Mathematisch Instituut

Universiteit Leiden

Postbus 9512

2300 RA Leiden

problems@nieuwarchief.nl

www.nieuwarchief.nl/problems

Solution We received a solution from Toshihiro Shimizu, to whom the book token is awarded, and the solution of whom the following is based on.

Let x be a positive rational number, and let p, q be positive integers such that $x = \frac{p}{q}$ and $\gcd(p, q) = 1$. We show by induction on $f(x)$ that $p, q \leq 2^{f(x)-1}$; from this it will follow that $2f(x) > 2f(x) - 2 \geq \log_2 p + \log_2 q = h_2(x)$, as desired.

First note that $x = 1$ is the only rational number with $f(x) = 1$, and in this case $p = q = 1 = 2^{f(x)-1}$. So suppose that n is a positive integer and that for any x with $f(x) \leq n$ written as $\frac{p}{q}$ with p, q positive integers with $\gcd(p, q) = 1$, we have $p, q \leq 2^{f(x)-1}$. Suppose that $f(x) = n + 1$. Then x can be written in one of the forms $x_1 + x_2$, $x_1 - x_2$, $x_1 \cdot x_2$, $\frac{x_1}{x_2}$ with x_1, x_2 positive rational numbers with $f(x_1) + f(x_2) = f(x) = n + 1$ (so that $f(x_1), f(x_2) \leq n$). Write $x_i = \frac{p_i}{q_i}$ where p_i and q_i are positive integers such that $\gcd(p_i, q_i) = 1$, for $i = 1, 2$.

If $x = x_1 + x_2$ or $x = x_1 - x_2$, then we find that $x = \frac{p_1 q_2 \pm p_2 q_1}{q_1 q_2}$, so $p, q \leq 2^{1+f(x_1)-1+f(x_2)-1} = 2^n = 2^{f(x)-1}$. If $x = x_1 \cdot x_2$, then we find that $x = \frac{p_1 p_2}{q_1 q_2}$, so $p, q \leq 2^{f(x_1)-1+f(x_2)-1} = 2^{n-1} < 2^{f(x)-1}$. The same argument shows that if $x = \frac{x_1}{x_2}$, that then $p, q < 2^{f(x)-1}$. Hence we always have $p, q \leq 2^{f(x)-1}$, and we are done.

Problem 2016-2/B (folklore)

Suppose that there are $N \geq 2$ players, labeled $1, 2, \dots, N$, and that each of them holds precisely $m \geq 1$ coins of value 1, m coins of (integer) value $n \geq 2$, m coins of value n^2 , et cetera. A *transaction* from player i to player j consists of player i giving a finite number of his coins to player j . We say that an N -tuple $(a_1, a_2, \dots, a_N)$ of integers is (m, n) -payable if $\sum_{i=1}^N a_i = 0$ and after a finite number of transactions, the i -th player has received (in value) a_i more than he has given away.

Show that for every N -tuple $(a_1, a_2, \dots, a_N)$ with $\sum_{i=1}^N a_i = 0$ to be (m, n) -payable, it is necessary and sufficient that $m > n - \frac{n}{N} - 1$.

Solution We received solutions from Pieter de Groen and Toshihiro Shimizu. The book token goes to Pieter de Groen. Both solutions shared the same idea, the following solution is based on that of Toshihiro Shimizu.

First observe that if an N -tuple $(a_1, a_2, \dots, a_N)$ is (m, n) -payable, the number of coins of value 1 that player i receives is a_i modulo n , since coins of higher value are of value divisible by n . Also observe that $m > n - \frac{n}{N} - 1$ is equivalent to $mN \geq (n-1)(N-1)$.

Note that if $m \leq n - \frac{n}{N} - 1$ (so $m < n$), or equivalently, $mN < (n-1)(N-1)$, then the tuple

$$(n-m-1, n-m-1, \dots, n-m-1, -(N-1)(n-m-1))$$

is not (m, n) -payable; every player up to player $N-1$ has to either receive at least $n-m-1$ coins of value 1, or give away at least $m+1$ coins of value 1. The latter is clearly impossible. This means that the last player must give away at least $(N-1)(n-m-1)$ coins of value 1. However, $(N-1)(n-m-1) = (n-1)(N-1) - m(N-1) > m$, so this is also impossible. Therefore the condition $m > n - \frac{n}{N} - 1$ is necessary.

Next, we show that the condition $m > n - \frac{n}{N} - 1$ is sufficient. Let $(a_1, \dots, a_N)$ be any N -tuple of integers with $\sum_i a_i = 0$. Assume that $m > n - \frac{n}{N} - 1$. We show that $(a_1, \dots, a_N)$ is (m, n) -payable, by induction on $\max_i |a_i|$.

If $\max_i |a_i| \leq 1$, then all a_i lie in $\{-1, 0, 1\}$, and as the sum of the a_i 's is zero, the tuple is (m, n) -payable (by having every player with negative a_i pay one coin of value 1, and every player with positive a_i receive one coin of value 1). So assume that $A > 1$, and that all tuples $(a_1, \dots, a_N)$ with zero sum and $\max_i |a_i| < A$ are (m, n) -payable.

Let $(a_1, \dots, a_N)$ be a tuple with $\max_i |a_i| = A$. Let r_i denote the remainder of a_i on division by n . We assume without loss of generality that $n > r_1 \geq r_2 \geq \dots \geq r_N \geq 0$. Note that $\sum_i r_i$ is a multiple of n , say $\sum_i r_i = kn$. We show that $n - r_1, \dots, n - r_k \leq m$, so that player i can pay $n - r_i$ coins of value 1 for $i = 1, 2, \dots, k$.

Note that

$$kn = \sum_i r_i = (r_1 + \dots + r_{k-1}) + (r_k + \dots + r_N) \leq (N-k+1)r_k + (k-1)n.$$

Therefore $r_k \geq \frac{n}{N-k+1} \geq \frac{n}{N}$, so $n - r_k = n - \frac{n}{N} < m + 1$, from which we deduce that $n - r_k \leq m$, and therefore also that $n - r_i \leq m$ for all $i = 1, 2, \dots, k$. So by having, for $i = 1, 2, \dots, k$,

player i pay $n - r_i$, and for all other i , player i receive r_i (which is possible by the above and since $\sum_i r_i = kn$), we see that the tuple $(a_1, \dots, a_N)$ is (m, n) -payable if $(a_1 + n - r_1, \dots, a_k + n - r_k, a_{k+1} - r_{k+1}, \dots, a_N - r_N)$ is (m, n) -payable using only coins of value n or higher, and therefore if the tuple

$$(a'_1, \dots, a'_N) = \left(\frac{1}{n}(a_1 + n - r_1), \dots, \frac{1}{n}(a_k + n - r_k), \frac{1}{n}(a_{k+1} - r_{k+1}), \dots, \frac{1}{n}(a_N - r_N)\right)$$

is (m, n) -payable.

We finish the induction by showing that $\max_i |a'_i| < A$, so that by the induction hypothesis, the tuple $(a'_1, \dots, a'_N)$ is indeed (m, n) -payable. Note that $a'_i = \left\lceil \frac{a_i}{n} \right\rceil$ or $a'_i = \left\lfloor \frac{a_i}{n} \right\rfloor$, so $|a'_i| \leq \left\lceil \frac{|a_i|}{n} \right\rceil$. Since $\left\lceil \frac{|a_i|}{n} \right\rceil \leq |a_i|$ with equality if and only if $|a_i| = 0$ or $|a_i| = 1$, it follows that $|a'_i| < |a_i|$ for all i with $|a_i| \geq 2$. Since $A \geq 2$, it follows that $\max_i |a'_i| < A$, and we are done.

Problem 2016-2/C (proposed by Wouter Zomervrucht)

For each integer $n \geq 1$ let c_n be the largest real number such that for any finite set of vectors $X \subset \mathbb{R}^n$ with $\sum_{v \in X} |v| \geq 1$ there exists a subset $Y \subseteq X$ with $|\sum_{v \in Y} v| \geq c_n$. Prove the recurrence relation

$$c_1 = \frac{1}{2}, \quad c_{n+1} = \frac{1}{2\pi n c_n}.$$

Solution We received solutions from Hendrik Reuvers and Toshihiro Shimizu. The book token is awarded to Hendrik Reuvers. Both solutions shared the same idea, the following solution is based on the one sent in by the proposer.

For $n \geq 0$, let $D^n \subset \mathbb{R}^n$ be the closed unit ball and $S^n \subset \mathbb{R}^{n+1}$ the unit sphere. Denote by v_n the volume of D^n and by s_n the surface area of S^n . We will show that $c_n = v_{n-1}/s_{n-1}$, then we are done by the relations $v_0 = 1$, $s_0 = 2$, $v_n = \frac{1}{n}s_{n-1}$, and $s_n = 2\pi v_{n-1}$.

First we make a computation. Let $n \geq 1$ and write $V_+ = \{x \in \mathbb{R}^n : x_n \geq 0\}$. For $r > 0$ we let rD^n be the closed radius r ball, then one has

$$\int_{rD^n \cap V_+} x_n dx = \int_0^r x_n (r^2 - x_n^2)^{\frac{n-1}{2}} v_{n-1} dx_n = \frac{v_{n-1}}{n+1} r^{n+1},$$

so

$$\int_{S^{n-1} \cap V_+} x_n dx = \frac{d}{dr} \left[\int_{rD^n \cap V_+} x_n dx \right]_{r=1} = v_{n-1}.$$

Now we turn to the problem. Take $n \geq 1$ and any collection $X \subset \mathbb{R}^n$ with $\sum_{v \in X} |v| \geq 1$. Let $Y \subseteq X$ be a subset for which the subsum $w = \sum_{v \in Y} v$ has maximal norm. Then Y must contain all $v \in X$ with $v \cdot w > 0$, and no $v \in X$ with $v \cdot w < 0$. In fact, $|w| = m(w/|w|)$, where for any $x \in S^{n-1}$ we define

$$m(x) = \sum_{v \in X \text{ with } v \cdot x \geq 0} v \cdot x.$$

It follows that $|w| = \max_{x \in S^{n-1}} m(x)$. For $v \in \mathbb{R}^n$ set $V_v = \{x \in \mathbb{R}^n : v \cdot x \geq 0\}$. (For instance, $V_+ = V_{(0, \dots, 0, 1)}$.) We compute

$$\int_{S^{n-1}} m(x) dx = \sum_{v \in X} \int_{S^{n-1} \cap V_v} v \cdot x dx = \sum_{v \in X} |v| \int_{S^{n-1} \cap V_v} x_n dx \geq v_{n-1}.$$

Thus there is $x \in S^{n-1}$ where $m(x) \geq v_{n-1}/s_{n-1}$, hence $c_n \geq v_{n-1}/s_{n-1}$.

Conversely, let X consist of k vectors with lengths $1/k$ and directions distributed homogeneously over S^{n-1} . (There are several ways of doing this; thanks to Toshihiro Shimizu for pointing out [1].) As $k \rightarrow \infty$, the associated function m converges uniformly to a constant function; by the computations above, its constant value is v_{n-1}/s_{n-1} . So also $c_n \leq v_{n-1}/s_{n-1}$.

Reference

¹ Eric W. Weisstein, Sphere Point Picking, <http://mathworld.wolfram.com/SpherePointPicking.html>.