

Inhoud | Contents

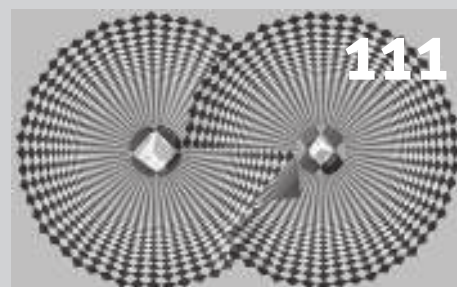
Artikelen | Features

- Onderwijs | Education**
 81 Wiskunde in model *Theo-Jan van de Pol, Lia Hemerik*
- Column | Column**
 86 Robuuste optimalisatie en brachytherapie
Bram Gorissen
- Interview | Interview**
 89 Wim Klein Haneveld en Jan Karel Lenstra: De geschiedenis herhaalt zich
Richard Boucherie, Johann Hurink
- Vakantiecursus | Summer School**
 94 Hoe bewijs je het priemtwelingvermoeden?
Frits Beukers
- Evenement | Event**
 103 BeNeLux 2016: Bringing together the BeNeLux mathematical community *Sonja Cox, Herman te Riele*
- Evenement | Event**
 105 Laudation for Marius Crainic *Henk Broer*
- Interview | Interview**
 107 Erelid Rien Kaashoek: Ruimer bereik in onderzoek en bestuur
Mark Veraar
- Interview | Interview**
 111 Erelid Henk van der Vorst: Wetenschap of kunst: je eigen wereld invullen
Joke Blom
- Maatschappij | Society**
 114 SWI 2015: Beeldreconstructie in MRI met compressed sensing
Tristan van Leeuwen, Alessandro Sbrizzi, Ian Zwaan
- Onderzoek | Research**
 119 Het universitaire wiskundeonderzoek beoordeeld
Michel Dekking
- Column | Column**
 121 Krommen tellen
Martijn Kool
- Evenement | Event**
 123 Cijfers, letters en regels
Ionica Smeets
- In Memoriam | Obituary**
 126 Eduard M. de Jager: Enthousiast ambassadeur van de wiskunde
Henk Pijls, Jan Wiegerinck
- Afscheidsrede | Valedictory Lecture**
 128 Alles beweegt, maar waarheen?
Henk Broer

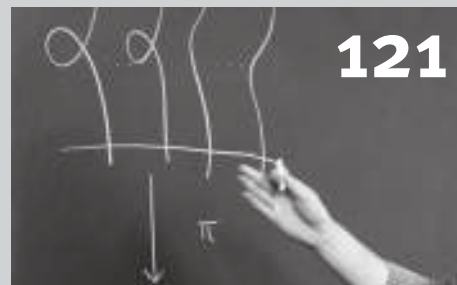
Rubrieken | Departments

- 75 Redactioneel *Richard Boucherie*
- 76 Agenda
- 78 Nieuws
- 101 Het keerpunt van Andreas Goetze
Jan Beuving
- 137 In de verdediging *Geertje Hek*
- 140 Boekbesprekingen
- 146 Problemen

Uitgelicht



KWG-erelid Henk van der Vorst is na zijn pensionering kunstenaar geworden.



Tenure-tracker Martijn Kool geeft een inkijkje in zijn onderzoek naar krommen.

Colofon

Het Nieuw Archief voor Wiskunde is een uitgave van het Koninklijk Wiskundig Genootschap en verschijnt vier maal per jaar. Het tijdschrift richt zich op eenieder die zich beroepsmatig met wiskunde bezighoudt, als academisch of industrieel onderzoeker, student, leraar, journalist of beleidsmaker. Het stelt zich ten doel te berichten over ontwikkelingen in de wiskunde in het algemeen en in de Nederlandse wiskunde in het bijzonder.

ISSN 0028-9825

Adres

Nieuw Archief voor Wiskunde
Centrum Wiskunde & Informatica
Postbus 94079
1090 GB Amsterdam
tel. 020-5924288
redactie@nieuwarchief.nl
www.nieuwarchief.nl

Hoofredactie

Richard Boucherie (r.j.boucherie@utwente.nl)
Jan van Neerven (j.m.a.m.vanneerven@tudelft.nl)

Eindredactie/Bladmanager

Fred Drissen (fred@nieuwarchief.nl)

Redactie

Hans Cuypers (TU/e), Jan Draisma (TU/e), Geertje Hek (UvA), Jan Hogendijk (UU), Teun Koetsier (VU), Sjoerd Rienstra (TU/e), Hans Sterk (TU/e), Mark Timmer (UT)

Problemenrubriek

Gabriele Dalla Torre (UL), Christophe Debry (KU Leuven), Jinbi Jin (UL), Marco Streng (UL), Wouter Zomervrucht (UL)

Bureau redactie

Lætitia Diemer

Illustraties

Ryu Tajiri, Amsterdam

Vormgeving

Susanne Laws (omslag, begeleiding binnenwerk)
Kitty Molenaar (ontwerp)

Druk

Drukkerij Ten Brink, Meppel

Advertenties

advertenties@nieuwarchief.nl

Koninklijk Wiskundig Genootschap

www.wiskgenoot.nl

Platform Wiskunde Nederland

www.platformwiskunde.nl

European Mathematical Society

www.euro-math-soc.eu

International Mathematical Union

www.mathunion.org

Koninklijk Wiskundig Genootschap

Het Koninklijk Wiskundig Genootschap (KWG) is een landelijke vereniging van beoefenaars van de wiskunde. In 1778 opgericht onder de zinspreuk: 'Een onvermoeide arbeid komt alles te boven' is het 's werelds oudste nationale wiskundegenootschap. Leden ontvangen het Nieuw Archief voor Wiskunde als onderdeel van hun lidmaatschap.

Bestuur

Erik van den Ban (UU, voorzitter), Joke Blom (CWI, penningmeester), Sonja Cox (UvA, secretaris), Fetsje Bijma (VU), Theo van den Bogaart (HU), Geurt Jongbloed (TUD), André Ran (VU), Herman te Riele (CWI), Mark Veraar (TUD)

Secretariaat

Joke Blom, CWI
Postbus 94079, 1090 GB Amsterdam
wiskgenoot@wiskgenoot.nl
www.wiskgenoot.nl

Ledenadministratie KWG / Abonnementen

Postbus 1064, 7940 KB Meppel
admin@wiskgenoot.nl, tel. 085-0160252

Contributie

De contributie voor gewone leden bedraagt in 2016 € 90 per jaar. Voor gepensioneerden en werklozen € 45. Voor studenten, aio's en oio's van een Nederlandse universiteit of hbo-opleiding € 35. Studenten en pas afgestudeerden kunnen een jaar lang gratis lid worden. Voor leden van de wiskundige vakverenigingen VvS+OR, NVvW en NVORWO geldt het gereduceerd tarief van € 70. Leden die het Nieuw Archief voor Wiskunde niet willen ontvangen, betalen slechts € 50 contributie. Losse nummers zijn te bestellen voor € 20.

Instituten in Nederland en buitenland kunnen zich abonneren op het Nieuw Archief voor Wiskunde voor € 100 (Nederland), € 110 (Europa) of € 112,50 (buiten Europa).

Members of foreign societies

Members of SIAM, the *Société Mathématique de France*, the *Gesellschaft für Angewandte Mathematik und Mechanik*, the *Deutsche Mathematiker-Vereinigung*, and of the *American, Australian, Belgian, Indian, London, Spanish, and South-African Mathematical Societies* living outside of the Netherlands pay € 70 instead of the full membership fee of € 90 a year. Conversely, these foreign societies, as well as the VvS+OR and the NVORWO, have reduced membership fees for KWG members. A postage charge of € 10 is added for members living abroad but in Europe, and a charge of € 12,50 for members living outside of Europe.

Exchange subscriptions

Koninklijk Wiskundig Genootschap Library
Centrum Wiskunde & Informatica
P.O. Box 94079, NL-1090 GB Amsterdam
KWG-exchange@cw.nl

Informatie voor auteurs

Kopij

Het Nieuw Archief voor Wiskunde is een geredigeerd tijdschrift. Kopij dient per e-mail te worden aangeboden aan de hoofdredactie. Uitgebreide informatie en auteursinstructies kunt u vinden op www.nieuwarchief.nl.

Volgende nummers

nummer	verschijningsdatum	deadline kopij
3	05-09-2016	verstreken
4	05-12-2016	01-08-2016
1	06-03-2017	01-11-2016
2	05-06-2017	01-02-2017

Instituutsleden

De publicaties van het Koninklijk Wiskundig Genootschap worden mede mogelijk gemaakt door de bijdragen van de volgende instituten.

	Centrum Wiskunde & Informatica
	Rijksuniversiteit Groningen
	Universiteit van Amsterdam
	Universiteit Leiden
	Vrije Universiteit
	Universiteit Utrecht
	Technische Universiteit Eindhoven
	Eurandom
	Technische Universiteit Delft
	Universiteit Twente
	Radboud Universiteit Nijmegen
	Freudenthal Instituut

Op het omslag

Veel koralen leven in symbiose met algen. Met wiskundige modellen kan het proces van algengroei op koraal beschreven worden. Over wiskundig modelleren in het onderwijs, lees het artikel van Theo-Jan van de Pol en Lia Hemerik op pagina 81. Foto: Micha Klootwijk, 123RF Stock Photo.

Wis en zeker

Het woord 'wiskunde' stamt af van 'wisconst' en is daarmee een unieke Nederlandse naam voor Mathematica. We hadden wellicht ook voor 'wiskunst' kunnen kiezen, om de relatie tussen ons vakgebied en kunst te benadrukken. Deze relatie komt sterk tot uiting in de expositie 'Imaginary', die georganiseerd door PWN vanaf september een rondreis zal maken langs verschillende Nederlandse universiteiten. Naast de mogelijkheid voor jong en oud, wiskundig of niet-wiskundig geschoold, om zelf met wiskundige modellen te spelen en schitterende figuren te laten ontstaan, tsunami's te bestuderen of gewoon uitleg te krijgen van prachtige wiskunde, biedt Imaginary ook een keur aan 3D-geprinte objecten als illustraties van deze modellen: kunstvoorwerpen die ook buiten de expositie in de belangstelling staan. Mis het niet!

Dit jaar eren we Brouwer, die op 2 december 1966 is overleden. Op initiatief van het KWG zijn verschillende activiteiten georganiseerd, waaronder het symposium 'L.E.J. Brouwer, fifty years later' op 9 december op Science Park in Amsterdam. De tweejaarlijkse N.G. de Bruijnprijs (voor de beste wiskundepublicatie van de afgelopen jaren geschreven door een aan Nederland gelieerde wiskundige) vernoemd naar een andere beroemde Nederlandse wiskundige is tijdens het BeNeLuxMC 2016 voor het eerst uitgereikt aan Marius Crainic. Jonge wiskundigen presenteren zich in dit nummer. Tenure-tracker Martijn Kool telt krommen en Bram Gorissen bespreekt zijn proefschrift waarvoor hij de Stieltjesprijs heeft gekregen.

Dit nummer van het *Nieuw Archief voor Wiskunde* balanceert tussen geschiedenis en toekomst. De geschiedenis rond de landelijke werkgemeenschappen en de start van 'graduate programmes' zoals die van het Landelijk Netwerk Mathematische Besliskunde (LNMB) lijkt zich te herhalen bij de discussie rond Mastermath als landelijke onderzoeksschool. De interviews met KWG-erleden Rien Kaashoek en Henk van der Vorst belichten het ontstaan van de wiskundeclusters die nu een prominente rol spelen in het 'Deltaplan voor de Nederlandse wiskunde', dat op 21 maart door de minister van Onderwijs Cultuur en Wetenschap Jet Bussemaker

in ontvangst is genomen. De belangrijke rol van wiskunde in wetenschap en maatschappij wordt herkend en erkend.

Onderzoek en onderwijs zijn binnen de wiskunde nauw verweven. Dit is zeer prominent in het 'Leraar in Onderzoek'-programma, zoals geïllustreerd door de bijdrage van Theo-Jan van de Pol en Lia Hemerik. Ook de 'Vakantiecursus' waar we in het Nieuw Archief geregeld aandacht aan besteden is een voorbeeld van deze verwevenheid. De discussie rond het ontstaan van het LNMB golft van samenwerking geïnspireerd door onderzoek naar samenwerking in een onderwijsprogramma en vervolgens naar een vergroting van de Nederlandse onderzoekssamenwerking. De vorming van Mastermath betrof eerst samenwerking in onderwijs en mondt nu uit in een landelijke onderzoeksschool. Veel van deze elementen kunt u ook vinden in de afscheidsrede van Henk Broer.

Wiskunde staat midden in de maatschappij. Getuige hiervan is de Kousbroeklezing door Ionica Smeets. Ook de rol van wiskunde in de gezondheidszorg groeit gestaag. Tristan van Leeuwen, Alessandro Sbrizzi en Ian Zwaan laten zien hoe MRI-scans versneld kunnen worden middels inzet van wiskundige modellen. Bram Gorissen legt uit hoe robuuste optimalisatie helpt bij plaatsing van stralingsbronnen bij brachytherapie. In 'Het keerpunt' kijkt basbariton Andreas Goetze onder andere terug op zijn scriptie over het intuïtionisme, hetgeen ons weer terugbrengt bij Brouwer.

Het aantal wiskundestudenten is sinds 2002 explosief gegroeid. De groeiende belangstelling voor de wiskundestudie heeft ook een keerzijde. Studenten verdienen goed onderwijs en daar is het aantal docenten nu niet op afgestemd. Wiskundeonderzoek en maatschappelijke bijdragen dreigen in de knel te raken. Michel Dekking, voorzitter van de onderzoeksvisitatiecommissie prijst in zijn verslag de kwaliteit van het Nederlandse wiskundeonderzoek. Actie is nodig om deze kwaliteit te bestendigen, dat is wis en zeker.

Richard Boucherie, hoofdredacteur
Afdeling Toegepaste Wiskunde, Universiteit Twente

Agenda

| Upcoming Events

juni 2016

10 juni 2016

□ Analysis Day in honour of Arnoud van Rooij

Speciale dag ter ere van de 80ste verjaardag van Arnoud van Rooij. Sprekers: Gerard Buskes (Mississippi), Onno van Gaans (LU), Erik Koelink (RU), Ben de Pagter (TUD), Wim Veldman (RU).

plaats Radboud Universiteit Nijmegen

info ru.nl/math/research/conferences

10 juni 2016

□ Bessensap 2016

Jaarlijks evenement dat journalisten, voorlichters en wetenschappers bij elkaar brengt. Centraal thema is dit jaar 'De wetenschapper als activist'.

plaats De Rode Hoed, Amsterdam

info www.nwo.nl/bessensap

12 juni 2016

□ De empathische machine

Paradisolezing van prof.dr. Max Welling, hoogleraar Machine Learning (UvA). Wanneer zullen machines ons echt begrijpen? En wat zijn de gevolgen daarvan?

plaats Paradiso, Amsterdam

info knew.nl

27 juni – 1 juli 2016

□ Search Games: Theory and Algorithms

Workshop mede georganiseerd door Herman Havorkort (TU/e).

plaats Lorentz Center@Oort, Leiden

info lorentzcenter.nl

juli 2016

4–5 juli 2016

□ NDNS+ workshop

Tweedaagse workshop van het NDNS+-cluster.

plaats Universiteit Twente

info ndns.nl

6–16 juli 2016

□ 57th International Mathematical Olympiad

Internationale finale van de wiskundeolympiade, dit jaar in Hong Kong.

plaats Hong Kong

info www.imo-official.org

25–29 juli 2016

□ Mathematical Biology of Tissue Mechanics

EMS-ESMTB Summer School mede georganiseerd door Roeland Merks (CWI).

plaats Lorentz Center@Oort, Leiden

info lorentzcenter.nl

25–29 juli 2016

□ Structure in Graphs and Matroids

Workshop georganiseerd door Stefan van Zwam (Louisiana State University) en Rudi Pendavingh (TU/e).

plaats TU Eindhoven

info www.eurandom.nl

augustus 2016

15–26 augustus 2016

□ Summer School on Geometry

Vakantie cursus over moderne meetkunde en zijn interactie met de aangrenzende gebieden, zoals logica, getaltheorie en natuurkunde.

plaats Universiteit Utrecht

info utrechtsummerschool.nl

15–26 augustus 2016

□ Summer School on Mathematics Education

Vakantie cursus over ontwikkelingen in het wiskundeonderwijs, voor leraren-in-opleiding, leraren, opleiders en leerplanontwikkelaars.

plaats Universiteit Utrecht

info utrechtsummerschool.nl

22–26 augustus 2016

□ Mathematical Structures for Cryptography

Workshop met als doel nieuwe manieren te vinden om wiskundige structuren te gebruiken voor cryptografische toepassingen.

plaats Lorentz Center@Oort, Leiden

info lorentzcenter.nl

26–27 augustus en 2–3 september 2016

□ Vakantiecursus 2016: Netwerken

Vakantiecursus georganiseerd door PWN, voor leraren in de exacte vakken, voor studenten van lerarenopleidingen en voor andere belangstellenden. Dit jaar is het thema ‘Netwerken’.

plaats CWI Amsterdam en TU Eindhoven

info platformwiskunde.nl

31 augustus–2 september 2016

□ 11th International Workshop on Retrial Queues and Related Topics (WRQ11)

Workshop over wachtrijproblemen en aanverwante onderwerpen.

plaats Tinbergen Instituut

info tinbergen.nl

september 2016

2 september 2016

□ L. E. J. Brouwer – Haarlems wiskundig wonderkind

Brouwer-lezingenmiddag met als sprekers onder anderen prof. dr. D. van Dalen en prof. dr. A. H. G. Rinnooy Kan.

plaats Hodshonhuis, Haarlem

info wiskgenoot.nl

12 september 2016

□ Extremes and Risks in Higher Dimensions

Workshop mede georganiseerd door Juan-Juan Cai (TUD) en Pasquale Cirillo (TUD).

plaats Lorentz Center@Oort

info lorentzcenter.nl

16 september 2016

□ Finale Nederlandse Wiskunde Olympiade

38 onderbouwleerlingen, 44 vierdeklassers en 40 vijfdeklassers zijn door naar de finale van de Nederlandse Wiskunde Olympiade 2016.

plaats TU Eindhoven

info wiskundeolympiade.nl

23 september 2016

□ 25ste wiskundetoernooi

Wiskundetoernooi voor teams van middelbare scholieren. Een team bestaat uit 4 of 5 leerlingen uit 5–6 vwo en een begeleider. Thema is dit jaar ‘Geodesie en Cartografie’.

plaats Radboud Universiteit Nijmegen

info ru.nl/wiskundetoernooi

oktober 2016

1 oktober 2016

□ Junior Wiskunde Olympiade

Jaarlijkse landelijke wiskundewedstrijd voor leerlingen uit de onderbouw van havo en vwo.

plaats Vrije Universiteit, Amsterdam

info few.vu.nl

5 oktober 2016

□ Dag van de Leraar

Jaarlijkse internationale Dag van de Leraar waarop tal van activiteiten voor leraren worden georganiseerd, waaronder de verkiezing van de Leraren van het Jaar.

plaats overal

info www.dagvandeleraar.nl

5–7 oktober 2016

□ Eenenvetigste Woudschotenconferentie

Jaarlijkse conferentie georganiseerd door de Nederlands/Vlaamse Werkgemeenschap Scientific Computing (WSC).

plaats Conferentiecentrum Woudschoten, Zeist

info wsc.project.cwi.nl/conferentieN.php

10–14 oktober 2016

□ Transformations in Statistical Mechanics: Pathologies and Remedies

Workshop georganiseerd door Henk Broer (RUG), Frank den Hollander (LU), Frank Redig (TUD) en Wioletta Ruszel (TUD).

plaats Lorentz Center@Snellius

info lorentzcenter.nl

24–26 oktober 2016

□ Workshop Data Driven Operation Management

Workshop van het STAR-cluster.

plaats Eurandom, Eindhoven

info www.eurandom.nl

24–28 oktober 2016

□ Logics, Decisions, and Interactions

Workshop mede georganiseerd door Elias Tsakas (UM) en Alessandra Palmigiano (TUD).

plaats Lorentz Center@Snellius

info lorentzcenter.nl

november 2016

5 november 2016

□ Jaarvergadering NVvW

Jaarlijkse vergadering en studiedag van de Nederlandse Vereniging van Wiskundeleraren.

plaats Ichthus College, Veenendaal

info nvvw.nl

7–9 november 2016

□ YEQT X workshop

Tiende editie van de Young European Queueing Theorists (YEQT) workshop.

plaats Eurandom, Eindhoven

info www.eurandom.nl

18 november 2016

□ Wiskunde B-dag 2016

Een eendaagse opdracht voor op school voor teams uit 5 havo en 5/6 vwo met wiskunde B in hun profiel.

plaats deelnemende scholen

info uu.nl/wisbdag

december 2016

9 december 2016

□ L. E. J. Brouwer, fifty years later

Symposium georganiseerd door het KWG ter ere van de 50ste sterfdag van L. E. J. Brouwer.

plaats Science Park, Amsterdam

info wiskgenoot.nl

12–16 december 2016

□ Guided Tour through Random Media

Workshop georganiseerd door Remco van der Hofstad (TU/e), Aernout van Enter (RUG) en Marek Biskup (UCLA Los Angeles).

plaats Eurandom, Eindhoven

info www.eurandom.nl

Nieuws

| News

Deze rubriek is een kroniek van wiskundige activiteiten in Nederland. Toekomstige activiteiten worden aangekondigd en van voorbije activiteiten wordt verslag gedaan. Wilt u uw aankondiging of verslag in deze rubriek geplaatst zien? Stuur ons dan uw bijdrage van ± 350 woorden, zo mogelijk met illustratie. De redactie behoudt zich het recht voor berichten te weigeren of in te korten.

nieuws@nieuwarchief.nl

Abelprijs voor Andrew Wiles

De Noorse Academie van Wetenschappen heeft De Abelprijs voor 2016 toegekend aan de Britse wiskundige Andrew Wiles (1953) voor zijn oplossing van de beroemde laatste stelling van Fermat. De wiskundehoogleraar aan de Universiteit van Oxford krijgt een bedrag van zes miljoen Noorse kronen (635.000 euro).

Wiles werd in 1993 wereldberoemd met zijn bewijs van 'Fermat'. De Laatste Stelling van Fermat, in 1637 geformuleerd door Pierre de Fermat, was eeuwenlang het meest beruchte open probleem in de getaltheorie. Fermat zegt dat derde (of hogere) machten van gehele getallen niet geschreven kunnen worden als de som van twee andere derde (of hogere) machten: $a^n + b^n = c^n$ kan niet waar zijn voor n groter dan twee (bij kwadraten lukt het wel: $3^2 + 4^2 = 5^2$). Al sinds 1637, toen Fermat in een kantlijn beweerde een 'werkelijk schitterend' bewijs te hebben gevonden — maar dat nooit waarmaakte — hadden wiskundigen zich over dit probleem het hoofd gebroken.

De feestelijke uitreiking van de prijs vond plaats op dinsdag 24 mei in Oslo, alwaar Wiles de prijs ontving uit handen van de Noorse kroonprins Haakon.

abelprize.no en nrc.nl



Foto: abelprize.no, Alain Goriely/Mathematical Institute, University of Oxford

Andrew Wiles

Deltaplan voor de Nederlandse wiskunde

Op 21 maart ontving de minister van Onderwijs, Cultuur en Wetenschap Jet Bussemaker het *Deltaplan voor de Nederlandse wiskunde* uit handen van professor Jacob Fokkema, voorzitter van de Commissie Deltaplan Wiskunde.NL. Het plan biedt een geïntegreerde aanpak voor onderzoek, onderwijs, lerarenopleiding, en innovatie. NWO stelt voor 2016 twee miljoen euro beschikbaar voor de uitvoering van het Deltaplan. Bij de uitreiking kondigde de minister de installatie van de Wiskunderaad aan die het plan gaat implementeren. Ook zegde zij de steun toe voor de uitbouw van Mastermath.

Het Deltaplan doet een voorstel voor een integraal pakket aan maatregelen: profilering van het wiskundeonderzoek via vier wiskundeclusters, verdere samenwerking in het universitaire onderwijs, vernieuwing van de lerarenopleiding, aandacht voor het innovatieve vermogen van de wiskunde en voor een sterke organisatie van de discipline. Deze integrale aanpak, in de vorm van een 'wiskundehuis', zal de Nederlandse wiskunde helpen om vragen uit de recentelijk gepubliceerde Nationale Wetenschapsagenda aan te pakken. Met het Deltaplan zal wiskunde ook een stevigere rol spelen in de publiek-private samenwerking met onder andere het bedrijfsleven.

www.platformwiskunde.nl

Ton Dieker ontvangt Presidential Early Career Award

De Nederlandse onderzoeker en wiskundige Ton Dieker ontving op 9 mei uit handen van president Obama de Presidential Early Career Award. Het is de hoogste onderscheiding van de Amerikaanse overheid voor excellente wetenschappers en ingenieurs die vroeg in hun carrière buitengewoon innovatief onderzoek hebben verricht en bijdragen aan het onderwijs.

De 36-jarige Dieker is hoofddocent in New York bij Columbia University aan de faculteit Industrial Engineering en Operations Research. Hij haalde zijn masterdiploma in 2002 aan de VU en hij promoveerde in 2006 aan de UvA. Zijn onderzoek heeft onder andere als doel om de efficiëntie van ziekenhuizen te verbeteren door middel van wiskundige modellen en algoritmen. Dieker is een expert in kansrekenen en computertechnieken die toekomstige gebeurtenissen helpen te voorspellen.

"Ik ben totaal verrast en zeer vereerd", reageert Dieker desgevraagd. "Er zijn verschillende manieren om deze prijs te krijgen, maar je weet zelf niet dat je genomineerd bent en er gaat flink wat tijd overheen. Verschillende overheidsinstanties doen aanbevelingen aan het Witte Huis. Die van mij is via de NSF gekomen. Dat is zoiets als de Nederlandse Organisatie voor Wetenschappelijk Onderzoek. Je kunt deze onderscheiding ontvangen als je US citizen bent of een green card hebt, dat laatste geldt voor mij." De selectie van de NSF is enorm streng. In totaal hebben 21 wetenschappers via deze instantie de prijs gekregen.

telegraaf.nl

Wiskundedatabank

Op 10 mei hebben wiskundigen uit twaalf landen een grote wiskundedatabank gelanceerd waarin meer dan een miljard wiskundige items zijn gecategoriseerd in zes terabytes aan gegevens. Dit project genaamd 'L-functions and Modular Forms Database' staat onder leiding van John Cremona van de University of Warwick. De verwachting is dat de database een waardevolle bron zal zijn voor zowel zuiver als toegepast wiskundigen.

www.lmfdb.org

Scholieres veroveren medailles op Europese Wiskunde Olympiade

Op de vijfde European Girls' Mathematical Olympiad heeft Mieke Wessel (17) uit Amstelveen een zilveren medaille behaald. Christel van Diepen (15) uit Malden en Esther Steenkamer (16) uit Roggel sleepten beiden een bronzen medaille in de wacht. Nooit eerder won het Nederlandse team zoveel medailles bij deze wiskundewedstrijd speciaal voor meisjes.

De European Girls' Mathematical Olympiad vond van 10 tot 16 april plaats in Busteni, Roemenië. Deze wedstrijd wordt jaarlijks georganiseerd om meisjes te stimuleren hun wiskundetalent te benutten. Het initiatief, opgezet door het Verenigd Koninkrijk, is zeer succesvol en beleefde dit jaar alweer zijn vijfde editie. De leerlingen kregen op elk van de twee wedstrijddagen drie zeer pittige wiskundeopgaven om op te lossen. Hiervoor kregen ze beide dagen vier en een half uur de tijd.

egmo.org

Medailleregen op Benelux Wiskunde Olympiade

Bij de Benelux Wiskunde Olympiade, die van 29 april–1 mei plaatsvond in Soest, hebben negen Nederlandse scholieren een medaille in de wacht gesleept. Het Nederlandse team won drie zilveren medailles (Levi van de Pol, Pim Spelier, Reinier Schmiermann) en zes bronzen medailles (Ludo Dekker, Michiel Versnel, Siebe Verheijen, Gabriel Visser, Wietze Koops, Matthijs van der Poel). Hiermee versloegen de Nederlandse wiskundetalenten de teams van België en Luxemburg, die respectievelijk zes en nul medailles behaalden.

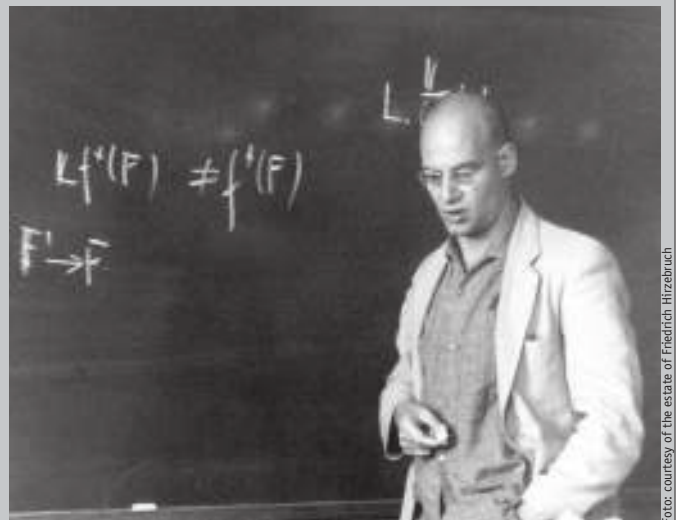
De Benelux Wiskunde Olympiade is een jaarlijkse wiskundewedstrijd voor middelbare scholieren uit België, Luxemburg en Nederland.

bxmo.nl

Rectificatie

In het maartnummer is bij het interview van Ulf Persson met Jacob Murre door een vergissing van de eindredactie een verkeerde foto geplaatst. Op de foto is niet Alexander Grothendieck te zien, maar Alain Connes. Verder kan het uitgelichte citaat op pagina 59 buiten zijn context ten onrechte de indruk wekken dat Grothendieck moeilijk toegankelijk was. Jacob Murre had echter volop de gelegenheid om met Grothendieck te praten tijdens zijn bezoeken aan IHES in de periode 1962–1969. Hij was daar zelfs steeds op uitnodiging van Grothendieck.

Tot onze spijt heeft de heer Murre van tevoren geen proef van het artikel gehad, zodat hij niet in de gelegenheid is geweest om ons op deze fouten te wijzen. De online-versie is inmiddels aangepast, en hieronder staat een correcte foto van Grothendieck.



Alexander Grothendieck omstreeks 1965

Foto: courtesy of the estate of Friedrich Hirzebruch

Brandweer beter in positie met wiskundig model

Hoe kan de brandweer zich nog beter positioneren in de regio? Als meerdere kazernes bijvoorbeeld bezig zijn met een brand, waar moeten de voertuigen van de overige kazernes dan heen voor een optimale dekking? Om antwoord te geven op deze — en vele andere — vragen heeft de brandweer de handen ineengeslagen met het Centrum Wiskunde & Informatica (CWI) in Amsterdam en de Technische Universiteit Delft.

Het resultaat van het wetenschappelijk onderzoek is een wiskundig model dat de brandweer in staat stelt zich optimaal te (her)positioneren. Hiervoor zijn allereerst de juiste gegevens nodig, zoals de gebieden waar risico op brand het grootst is, de plaats van een incident en het aantal voertuigen dat daarbij is ingezet. De onderzoekers hebben vervolgens een optimaliseringsmodel gemaakt waarmee kan worden uitgerekend hoe de optimale dekking kan worden bereikt. De brandweer maakt op basis van de uitkomst een keuze om te herpositioneren en hoe.



Het onderzoek bouwt voort op het REPRO-project, een onderzoeksproject van het CWI en de TU Delft, dat zich richt op het ontwikkelen van slimme voorspellings- en planningsmethoden voor ambulancediensten. Guido Legemaate van Brandweer Amsterdam-Amstelland: “We hebben de modellen toegepast op de situatie bij de brandweer en gekeken waar winst te behalen viel. Al snel bleek dat we het model konden gebruiken voor een goede herpositionering van voertuigen bij grootschalige incidenten zodat de dekking maximaal blijft. Ook bleek dat onze kazernes van oudsher op strategisch goede plaatsen staan.” Rob van der Mei, manager R&D van het CWI en hoogleraar aan de Vrije Universiteit, zegt: “Dit is een prachtig voorbeeld van hoe het gebruik van wiskundige modellen leidt tot verdere verbetering van de kwaliteit van eerste-hulpdiensten, waarmee mogelijk extra levens kunnen worden gered.”

Het model voor herpositionering bij grootschalige incidenten zal deze zomer in gebruik worden genomen bij Brandweer Amsterdam-Amstelland.

Annette Kik

Sofa door de gang schuiven op Wiskunde B-dag

Tijdens een verhuizing krijgt bijna iedereen te maken met de volgende situatie: hoe krijg je dat bankstel de hoek om? Of dat bed door het trapgat? Ook wiskundigen houden zich met dit soort problemen bezig. Wiskundigen houden zich in het bijzonder bezig met

de vereenvoudiging van het probleem: welke tweedimensionale meetkundige vormen (lijnstuk, rechthoek, cirkel, et cetera) kunnen verplaatst worden door een ‘platte’, één meter brede gang met een rechte hoek? De bepaling van de grootste vorm die op deze manier om een hoek kan worden geschoven, is nog steeds een onopgelost probleem.



In november 2015 waagden duizenden middelbare scholieren zich aan dit probleem tijdens de Wiskunde B-dag. Deze dag wordt al sinds 1999 georganiseerd door het Freudenthal Instituut en is een wedstrijd voor scholierenteams uit 5 havo en 5/6 vwo met wiskunde B in hun profiel.

Op vrijdag 18 maart werden in het Academiegebouw in Utrecht de tien landelijk best presterende teams in het zonnetje gezet. De winnaar was het Lorentz Casimir Lyceum uit Eindhoven. Volgens de jury leverden de leerlingen een wiskundig correct uitgewerkt en bijzonder goed toegelicht verslag met humor aan. In een eigen onderzoek onderzocht dit team een variant op de bekende sofa van Hammersley. Van deze zelfgekozen vorm berekenden ze het maximale formaat dat nog door de gang geschoven kan worden.

uu.nl/wisbdag

Koninklijk Wiskundig Genootschap

Wijzigingen bestuur

Op de Algemene Ledenvergadering van 22 maart is Erik van den Ban (UU) benoemd tot voorzitter van het KWG. Daarnaast hebben nog wat veranderingen van functie plaatsgevonden in het KWG-bestuur. Sonja Cox (UvA) is per 1 april 2016 secretaris. Zij neemt deze taak over van Joke Blom (CWI), die deze functie sinds de ALV van 2011 bekleedde. Joke Blom wordt per 1 juni penningmeester van het KWG, zij volgt daarmee Fetsje Bijma (VU) op. Fetsje Bijma heeft een baan aangeboden gekregen in het bedrijfsleven en heeft daarom minder tijd voor het KWG. Zij blijft voorlopig wel lid van het bestuur. Verder blijft Herman te Riele (CWI) inspecteur der boekerij.

Recent verschenen:

Indagationes Mathematicae (www.elsevier.com/locate/indag)

Special Issue ‘In memoriam J.G. van der Corput (1890–1975)’, Part 2, J. Korevaar, R. Tijdeman en J.J.O.O. Wiegerinck, Volume 27, Issue 2, 2016.

Epsilon Uitgaven (www.epsilon-uitgaven.nl)

83. Muzikale Computers, Aline K. Honingh, € 17, 2016.

Theo-Jan van de Pol

Ichthuscollege, Veenendaal
tjvdpol@ichthuscollege.nl

Lia Hemerik

Leerstoelgroep Wiskundige en Statistische Methoden
Wageningen UR
lia.hemerik@wur.nl

Onderwijs Een schoolvoorbeeld van alternatieve evenwichten

Wiskunde in model

Theo-Jan van de Pol heeft twee jaar lang gewerkt als Leraar in Onderzoek. In die periode werd één dag per week het lesgeven onderbroken door onderzoek, gefinancierd door NWO. Het onderzoek was gericht op wiskundige modellen die het proces van algengroei op koraal beschrijven en vond plaats bij de leerstoelgroep wiskundige en statistische methoden, onderdeel van Biometris aan de Wageningen Universiteit, onder begeleiding van Lia Hemerik. Tijdens het modelleren is steeds gekeken of en waar de uitkomsten van het onderzoek in het middelbaar onderwijs kunnen worden gebruikt. Te denken valt aan het domein 'dynamische modellen' binnen het vak wiskunde D, maar ook aan de wiskundige denkactiviteiten die in het nieuwe curriculum van het wiskundeonderwijs een grote plaats innemen. Dit artikel gaat met name in op de onderdelen van het onderzoek die voor het onderwijs relevant zijn. Daarbij wordt een aanzet gegeven voor diverse wiskundige denkactiviteiten in het kader van wiskundig modelleren.

Wiskundig modelleren is een moeilijke wiskundige vaardigheid. In het curriculum van het voortgezet onderwijs werd tot voor kort relatief weinig aandacht besteed aan deze vaardigheid. Dat is jammer, omdat modelleren bij uitstek de gelegenheid biedt om de opgedane kennis van analyse en algebra toe te passen op een breed scala van onderwerpen. Hiermee kun je de relevantie van de wiskunde voor andere wetenschappen en toepassingsgebieden illustreren.

In 2015 zijn de wiskundige denkactiviteiten deel gaan uitmaken van het curriculum van wiskunde op het voortgezet onderwijs (vo). Deze wiskundige denkactiviteiten worden onderverdeeld in verschillende kernaspecten, waarvan modelleren er één is [2,3]. Een van de bedoelingen van deze denkactiviteiten is het stimuleren

van leerlingen om de opgedane wiskundekennis zelf te kunnen toepassen in nieuwe contexten.

Dit artikel laat zien dat het mogelijk is om het modelleren een plaats te geven in de wiskundeles. De toepassing wordt hierbij gebruikt als vertrekpunt van het wiskundig modelleren. In deel 40 van de Zebra-reeks [4] is dit onderwerp verwerkt in direct inzetbaar leerlingmateriaal.

Aanleiding

In het kader van een lio-project (leraar in onderzoek) is onderzoek gedaan naar wiskundige modellen die de groei van algen op koraal beschrijven [6]. Achtergrond van het onderzoek is de wereldwijde bedreiging van koraal. Door diverse omstandigheden worden koraalriffen overwoekerd

door algen. Deze overwoekering zorgt er onder andere voor dat de koralen hun kleur verliezen: verbleking [1]. Om dit proces te begrijpen en te sturen, zijn we geïnteresseerd in een model voor de beschrijving van algengroei.

In dit artikel worden diverse parameters gebruikt. In Tabel 1 staat een overzicht met voor elke parameter een standaardwaarde. Als wordt afgeweken van deze standaardwaarde, dan wordt dit expliciet vermeld.

Algen op koraal, groei

Leerlingen leren dat een model een vereenvoudigde weergave is van de werkelijkheid. Laten we dus eenvoudig beginnen. Voor algengroei heb je algen nodig. De groeisnelheid is in de meest eenvoudige vorm alleen afhankelijk van de omvang van de dichtheid aan algen in biomassa per oppervlakte-eenheid (A in g m^{-2}) en wordt bepaald door de relatieve groeisnelheid r . Differentiaalvergelijking (1) (het groeimodel van Malthus), kan dienen als eerste uitgangspunt om met leerlingen over dit probleem na te denken:

$$\frac{dA}{dt} = rA. \quad (1)$$

In (1) is r de enige parameter. Uit (1) volgt ook direct dat de eenheid van r per dag is (dag^{-1}). Als we vervolgens aannemen

Parameter	Betekenis	Standaardwaarde	Eenheid
r	relatieve groeisnelheid	1,5	dag^{-1}
K	draagkracht van het systeem	20	g m^{-2}
c	consumptiesnelheid van algen	3,5	$\text{m}^{-2} \text{dag}^{-1}$
g_m	per capita consumptiesnelheid (per herbivoor)	1	$\text{dag}^{-1} \text{H}^{-1}$
h	halfverzadigings-constante: de concentratie algen waarbij de herbivoor de helft van zijn maximale consumptie haalt	1	g m^{-2}

Tabel 1 Gebruikte parameters in de diverse modellen.

dat $A(0) = 10 \text{ g m}^{-2}$, moeten leerlingen met hun vaardigheid in differentiëren en integreren de oplossingformule voor de ontwikkeling van de biomassa aan algen A door de tijd heen kunnen bepalen.

Al snel zullen leerlingen tegenwerpen dat zo'n groeimodel niet realistisch is. Een exponentieel en ongeremd groeiende algenpopulatie past niet bij (hun beeld van) de werkelijkheid. Nu komt het erop aan dat leerlingen inzicht in groei kunnen vertalen in wiskundige formules. Deze stap kan voor de leerlingen lastig zijn. De rol van de docent zou hier moeten bestaan uit het aan bod laten komen van de diverse groei-modellen met hun karakteristieken. Groei is in deze context immers niet onbeperkt, maar afhankelijk van bijvoorbeeld ruimte, voedsel en licht. De biomassa aan algen is gebonden aan de maximale draagkracht K (g m^{-2}) van het ecosysteem. Het model hierop aanpassen levert differentiaalvergelijking (2) op (het groeimodel van Verhulst, ook wel logistische groei genoemd):

$$\frac{dA}{dt} = r \cdot A \cdot \left(1 - \frac{A}{K}\right). \quad (2)$$

Afhankelijk van het niveau van de groep is het mogelijk om de differentiaalvergelijking via breuksplitsen op te lossen, gegeven r en K volgens Tabel 1 en $A(0) = 10 \text{ g m}^{-2}$. Dat is een goede oefening in algebraïsche vaardigheden.

De volgende stap is om dit model met leerlingen te analyseren. Vanuit de context is het interessant om te kijken of er evenwichten zijn en of deze stabiel of instabiel zijn. De begrippen evenwicht en stabiliteit worden door leerlingen nogal moeilijk gevonden. Een voor leerlingen bruikbare beschrijving van een evenwicht is: als je in deze toestand begint, blijf je ook in deze toestand. Met andere woorden: de hoeveelheid algen zal dan constant blijven. Een bruikbare omschrijving van een (lokaal) stabiel evenwicht is: als je in deze evenwichtstoestand bent en de toestand

verandert een beetje, dan kom je altijd weer in hetzelfde evenwicht terug. Er is sprake van een (lokaal) instabiel evenwicht als je bij een willekeurige, kleine verandering vanuit een evenwichtstoestand, niet meer in hetzelfde evenwicht terugkomt.

Welk effect hebben verandering van r of K op de groei van de biomassa aan algen A of op (de stabiliteit van) de evenwichten? In plaatjes in Excel en met de applets JODE [7,8,9] of InterEuler [10,11] kunnen leerlingen experimenteren met het variëren van parameters en daar zelf conclusies uit trekken.

Algen op koraal, consumptie

Ook nu ontbreekt er nog veel aan het model. Algen groeien niet alleen, maar ze worden ook opgegeten. Consumptie van algen vindt plaats door vissen en zee-egels (de zogenaamde herbivoren). Opnieuw een eenvoudige start. Leerlingen begrijpen dat voor consumptie van algen, algen nodig zijn. Hoe meer algen, hoe meer er geconsumeerd kan worden. Consumptie is dus afhankelijk van de dichtheid aan algen A . Gaan we uit van evenredigheid met c , de consumptiesnelheid (dag^{-1}), dan krijgen we $\text{Consumptie} = c \cdot A$ en omdat consumptie negatief werkt op de groei ontstaat differentiaalvergelijking (3a). Na enige herleiding ontstaat daaruit differentiaalvergelijking (3b).

$$\frac{dA}{dt} = r \cdot A \cdot \left(1 - \frac{A}{K}\right) - c \cdot A, \quad (3a)$$

$$\frac{dA}{dt} = (r - c)A - \frac{r}{K}A^2. \quad (3b)$$

Ook dit model onderzoeken we op evenwichten. Leerlingen vinden de evenwichten door het oplossen van $\frac{dA}{dt} = 0$, namelijk de twee oplossingen $A = 0$ en $A = (1 - \frac{c}{r})K$. Aan deze laatste oplossing is te zien dat er (natuurlijk) alleen een positieve evenwichtswaarde van de biomassa aan algen A optreedt voor $c < r$: een wiskundige

onderbouwing van het vermoeden dat de consumptiesnelheid kleiner moet zijn dan de relatieve groeisnelheid wil een populatie kunnen blijven bestaan.

De Monod-functie

De eerder aangenomen evenredigheid tussen A en c blijkt in de praktijk anders te liggen. Onderzoek naar wiskundige modellen die consumptie beschrijven, is onder anderen gedaan door Holling [5]. Onderzoek onder dieren heeft inderdaad uitgeezen dat een toename van voedsel ertoe leidt dat er meer wordt gegeten. Daarbij wordt echter ook waargenomen dat de consumptiesnelheid per herbivoor asymptotisch nadert tot een maximum (g_m) bij toenemende voedseldichtheid (A). Dit kan worden beschreven met de Monod-functie (ook wel Holling type II functionele respons genoemd):

$$\text{Consumptiesnelheid per herbivoor} = g_m \frac{A}{A + h}.$$

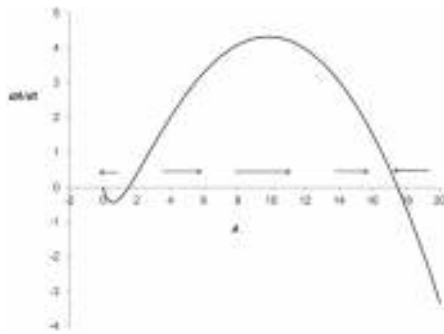
Dit is de consumptie per dier per dag. Hierin is h de biomassa aan algen waarbij de herbivoor de helft van zijn maximale consumptiesnelheid bereikt. Voor de totale consumptie moet nog worden vermenigvuldigd met de dichtheid aan herbivoren (H in aantal per m^2). Nemen we vervolgens $c = g_m H$ (c in aantal per m^2 per dag) dan wordt differentiaalvergelijking (4) ons volgende groeimodel.

$$\frac{dA}{dt} = r \cdot A \cdot \left(1 - \frac{A}{K}\right) - c \cdot \left(\frac{A}{A + h}\right). \quad (4)$$

Ook hier levert het oplossen van de vergelijking $\frac{dA}{dt} = 0$ weer de evenwichtswaarden van A uitgedrukt in de parameters van het model. Natuurlijk is er weer de oplossing $A = 0$. Daarnaast ontstaat de evenwichtsvergelijking

$$r - \frac{r}{K}A - \frac{c}{A + h} = 0.$$

Deze is te herschrijven tot de kwadratische



Figuur 1 dA/dt (vergelijking (4)) is verticaal uitgezet tegen A op de horizontale as. Er zijn drie nulpunten, waarbij de algenpopulatie in evenwicht is. De evenwichten bij $A=0$ en $A \approx 17,5$ zijn stabiel, die bij $A \approx 1,52$ instabiel. Vanuit dit laatste punt gezien zorgt een verhoging van A voor $dA/dt > 0$, dus A neemt verder toe, terwijl een verlaging van A zorgt voor $dA/dt < 0$. A neemt dan verder af. De pijllengte is een maat voor de snelheid waarmee A verandert in de richting van één van de stabiele evenwichten.

vergelijking

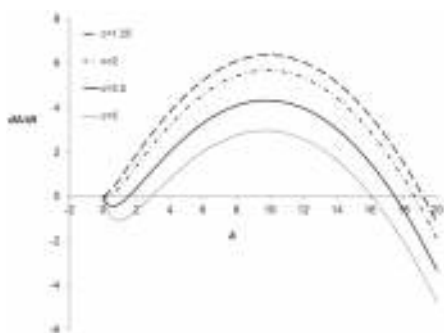
$$-\frac{r}{K}A^2 + \left(r - \frac{rh}{K}\right)A + rh - c = 0,$$

met als discriminant

$$\begin{aligned} D &= \left(r - \frac{rh}{K}\right)^2 + 4\frac{r}{K}(rh - c) \\ \Rightarrow D &= \left(r + \frac{rh}{K}\right)^2 - 4\frac{rc}{K} \\ &= r\left(1 + \frac{h}{K}\right)^2 r - 4\frac{rc}{K}. \end{aligned}$$

Hieruit is op te maken dat het aantal oplossingen (en dus het aantal evenwichten) opnieuw wordt bepaald door de ratio $c:r$. Als geldt dat

$$\frac{c}{r} < \frac{K}{4}\left(1 + \frac{h}{K}\right)^2,$$



Figuur 2 Opnieuw is dA/dt (vergelijking (4)) uitgezet tegen A . De relatieve groeisnelheid is constant gehouden ($r=1,5$), terwijl de consumptiesnelheid varieert. Een hoge consumptiefactor zorgt voor een lagere evenwichtswaarde aan de rechterzijde van de figuur. Ook is er een hogere startwaarde van A nodig om in deze hoge evenwichtstoestand te komen. Bij de laagste consumptiesnelheid ($c=1,25$) lijken er nog slechts twee evenwichten over te blijven. Een instabiele voor $A=0$, en een stabiele evenwichtssituatie voor $A \approx 19,2$. Vanuit het oogpunt van overwoekering door algen is dit een ongewenste situatie.

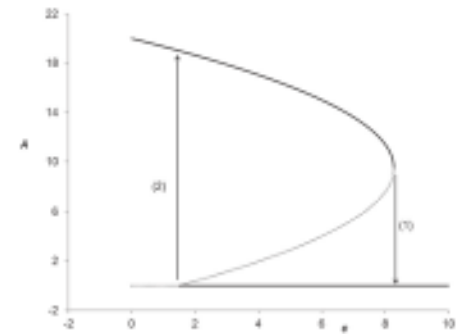
dan zijn er twee oplossingen, met een gelijkheidsteken is er één oplossing en anders zijn er geen oplossingen. Wanneer we model (4) als uitgangspunt nemen voor een verdere analyse, is het handig om met leerlingen eerst uit te gaan van een model met één variabele. Een afbeelding van differentiaalvergelijking (4), een zogenaamd groeiplaatje [4], is gemaakt in Excel, en gegeven in Figuur 1.

De evenwichtswaarden van A kunnen nu worden berekend. Met behulp van deze figuur kunnen leerlingen bovendien uitspraken doen over de stabiliteit van deze evenwichten. Als de waarde van het rechterlid van differentiaalvergelijking (4) positief is, groeit de populatie in aantal (pijlje naar rechts in Figuur 1) en bij negatieve waarden daalt de populatiegrootte (pijlje naar links in Figuur 1). Evenwichtspunten met pijltjes ernaartoe gericht zijn stabiel en die met de pijltjes ervanaf zijn instabiel. Dit zijn de enige biologisch relevante mogelijkheden.

Daarnaast kunnen leerlingen het model in bijvoorbeeld Excel invoeren en experimenteren met het variëren van parameters en daar conclusies uit trekken. Constant houden van de reproductiefactor en variatie van de consumptiefactor ($c = 1,25$, respectievelijk 2, 3,5 en 5) geeft een afbeelding zoals in Figuur 2.

Leerlingen krijgen zo een beeld van het effect van een hoge consumptiesnelheid op het aantal en de ligging van de evenwichten. Gezien de context is het interessant om te zien wat er gebeurt bij lage consumptie. Het instabiele evenwicht komt dicht bij $A = 0$ te liggen, zodat het systeem in de praktijk vrijwel altijd in de hoge evenwichtssituatie zal komen.

Leerlingen kunnen met de eerder gegeven discriminant onderzoeken, of er werkelijk twee evenwichten ontstaan of dat er altijd, dicht bij $A = 0$, een derde evenwicht blijft bestaan. Hiervoor kunnen ze in de evenwichtsvergelijking behorend bij model (4) c vrijmaken en vervolgens de evenwichten van A uitzetten tegen de waarde van de parameter c . Dit geeft Figuur 3, een zogenaamd bifurcatiediagram. De omslag van een hoog stabiel evenwicht naar een laag stabiel evenwicht (pad (1) in Figuur 3) vindt plaats bij een hogere consumptie dan de omslag van een laag stabiel evenwicht naar een hoog (pad (2) in Figuur 3). Dit verschijnsel heet *hysteresis*.



Figuur 3 Uit de evenwichtsvergelijking $r - \frac{rA}{K} - \frac{c}{A+h} = 0$ is c vrijgemaakt. Vervolgens is A uitgezet tegen c . De overige parameters zijn als in Tabel 1. Voor elke waarde van c is te zien wat het aantal en de mogelijke ligging is van de evenwichten van A . Ook is te zien dat bij een hoge consumptie (te berekenen op $c > 8,27$) alleen het evenwicht $A=0$ (horizontale lijn) overblijft. Het gestreepte deel van de curves stellen de instabiele evenwichten voor en de doorgetrokken lijnen de stabiele evenwichten. Bij verhoging van c vanuit het positieve evenwicht wordt pad (1) gevolgd. Pad (2) wordt gevolgd bij verlaging van c vanuit het lage stabiele evenwicht.

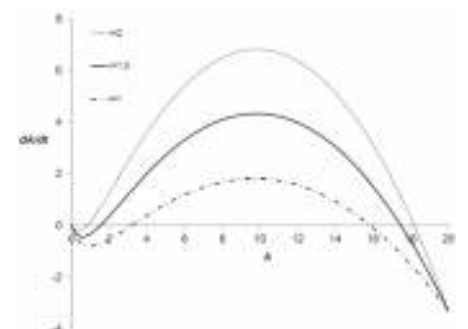
Een constante consumptiefactor en variatie van de reproductiefactor geeft een afbeelding zoals in Figuur 4.

De Hill-functie

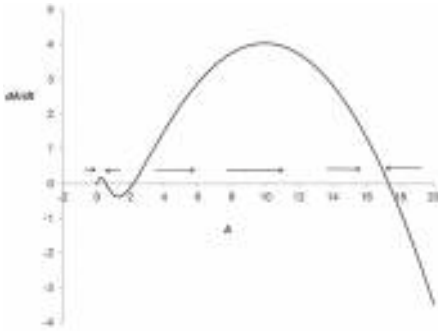
Wanneer herbivoren bij een lage algen-dichtheid (4) overgaan op ander voedsel of niet al het voedsel kan worden bereikt, kan de consumptie worden beschreven met de Hill-functie:

$$\text{Consumptiesnelheid per herbivoor} = g_m \frac{A^p}{A^p + h^p}.$$

De curve krijgt bij toenemende p een meer sigmoïdaal verloop tot het extreme geval bij grote p van een stapfunctie. In het geval van vissen en zee-egels die algen eten is er sprake van een Hill-functie met $p = 2$. Dit wordt in de biologie de sigmoïdale functionele respons of Holling type III functionele respons genoemd.



Figuur 4 dA/dt (vergelijking (4)) is uitgezet tegen A . De consumptiesnelheid is constant gehouden ($c=3,5$), terwijl de relatieve groeisnelheid varieert. Te zien is dat een hogere relatieve groeisnelheid zorgt voor een snellere groei, waardoor de evenwichtssituatie sneller wordt bereikt. Er blijven drie evenwichten bestaan, waarvan er twee stabiel zijn en één instabiel.



Figuur 5 De grafiek van dA/dt (vergelijking (5)) uitgezet tegen A . Leerlingen zien hierin de vier nulpunten en kunnen van hieruit verder onderzoeken wat de stabiliteit van deze evenwichten is.

Dit deel van het model zal door leerlingen waarschijnlijk niet zelf worden gevonden. Er is volgens ons echter niets op tegen om na een verkenning van de Monod- en de Hill-functie (onderzoek het verloop, wat gebeurt er bij erg grote p , bijvoorbeeld $p > 10$) dit deel van het model gewoon te geven.

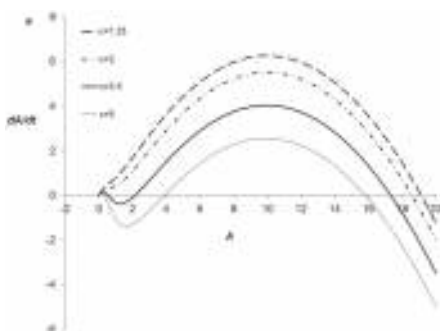
Begrazing wordt verder nog bepaald door het aantal herbivoren per m^2 (H). Kiezen we in de totale begrazing $c = g_m H$, dan wordt begrazing beschreven door:

$$\text{begrazing} = c \cdot \left(\frac{A^2}{A^2 + h^2} \right).$$

Wanneer ten slotte groei en begrazing in één model worden samengenomen, krijgen we het volgende (nog steeds sterk vereenvoudigde) model:

$$\frac{dA}{dt} = r \cdot A \cdot \left(1 - \frac{A}{K} \right) - c \cdot \left(\frac{A^2}{A^2 + h^2} \right). \quad (5)$$

Wanneer differentiaalvergelijking (5) met de standaardparameters wordt uitgezet tegen A krijgen we een groeiplaatje, zie Figuur 5. Hierin zien leerlingen dat de grafiek van $\frac{dA}{dt}$ vier nulpunten heeft, de evenwich-



Figuur 6 Opnieuw is dA/dt (vergelijking (5)) uitgezet tegen A . De relatieve groeisnelheid is constant gehouden ($r=1,5$), terwijl de consumptiesnelheid varieert. (a) Een hoge consumptiesnelheid zorgt voor een lagere evenwichtswaarde aan de rechterzijde van de figuur. Ook is er een hogere startwaarde van A nodig om in deze hoge evenwichtstoestand te komen. (b) is een uitvergroting van (a).

ten. Deze nulpunten kunnen de leerlingen ook zelf berekenen met behulp van de evenwichtsvergelijking

$$r \cdot A \cdot \left(1 - \frac{A}{K} \right) - c \cdot \left(\frac{A^2}{A^2 + h^2} \right) = 0.$$

Dit levert de triviale oplossing $A = 0$ en een derdegraadsvergelijking

$$-\frac{r}{K}A^3 + rA^2 - \left(\frac{rh^2}{K} + c \right)A + rh^2 = 0.$$

Invullen van de standaardparameters geeft:

$$-0,075A^3 + 1,5A^2 - 3,575A + 1,5 = 0,$$

met als oplossingen $A \approx 0,5376$, $A \approx 2,1488$ en $A \approx 17,3136$. We zijn opnieuw geïnteresseerd in de stabiliteit van deze evenwichten. Aan de hand van de grafiek is te beredeneren dat het triviale evenwicht ($A = 0$) instabiel is. De andere evenwichten zijn in oplopende grootte respectievelijk stabiel, instabiel en stabiel.

Ook nu is variatie van parameters mogelijk om leerlingen inzicht te geven in de betekenis van deze parameters voor het ecosysteem. Variatie van de consumptiesnelheid c levert Figuur 6a en 6b op. Ook variatie van de relatieve groeisnelheid r laat zien dat de populatie zowel lage als hoge stabiele evenwichten heeft.

Alternatieve evenwichten en bifurcatie

Wanneer we in de vergelijking

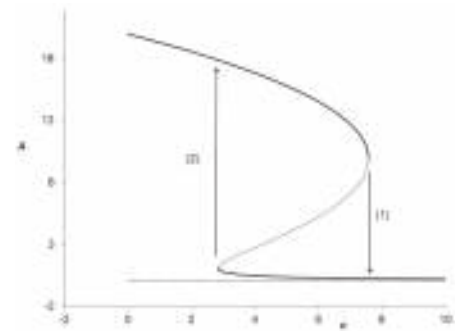
$$r \cdot \left(1 - \frac{A}{K} \right) - c \cdot \left(\frac{A^2}{A^2 + h^2} \right) = 0$$

de variabele c vrijmaken, krijgen we

$$c = \frac{r(K-A)(A^2 + h^2)}{AK}.$$

Met de ingevulde standaardwaarden ontstaat de vergelijking

$$c = -0,075A^2 + 1,5A - 0,075 + 1,5A^{-1}.$$



Figuur 7 Afbeelding van de vergelijking $c = -0,075A^2 + 1,5A - 0,075 + 1,5A^{-1}$, met de biomassa aan Algen A in $g\ m^{-2}$ uitgezet tegen de consumptiesnelheid c in dag^{-1} . Zie Figuur 3 voor de betekenis van de stijl van de lijn en de paden (1) en (2). In de figuur is ook het instabiele evenwicht $A=0$ getekend (de horizontale lijn).

De grafiek hiervan is getekend in Figuur 7, waarbij opnieuw A is uitgezet tegen c .

Voor de hele curve in Figuur 7 geldt $\frac{dA}{dt} = 0$. De grafiek geeft dus bij een gegeven consumptiesnelheid c de mogelijke evenwichtswaarden van A . Hiervan zijn, zoals we eerder zagen, sommige evenwichten stabiel en andere instabiel. Deze figuur laat zien dat er een plotselinge overgang van het ene evenwicht naar een ander kan plaatsvinden. Wanneer de consumptie toeneemt, van $c=2$ tot $c=7,5$ zal de evenwichtswaarde van A geleidelijk afnemen. Voor $c > 7,6$ is het systeem niet meer in staat om zich hieraan voldoende aan te passen. De evenwichtswaarde van A stort dan in (zie pijl 1 in Figuur 7). Het systeem kantelt dan van een situatie met een hoge stabiele evenwichtswaarde van A naar een situatie met een lage stabiele evenwichtswaarde van A . Voor de koralen betekent dat een overgang van een situatie met veel algen naar een situatie met weinig algen.

Wanneer vervolgens de consumptie wordt teruggebracht tot onder de 7,6 zorgt dat echter niet direct voor een herstel van de oude situatie. Een verlaging tot $c=2,85$ zorgt maar voor een heel geringe toename van de evenwichtswaarde van A . Bij een verdere verlaging van c , tot onder $c \approx 2,84$ zien we opnieuw een plotselinge omslag optreden (zie pijl 2 in Figuur 7). Consumptie van algen is daar op zo'n (laag) niveau gekomen dat de evenwichtswaarde van A plotseling veel hoger komt te liggen. Ook hier is dus sprake van een kantelpunt naar een ander evenwicht.

We zien hier dat de overgang van een hoog naar een laag stabiel evenwicht (het kantelpunt) op een andere plaats ligt dan

de overgang van een laag naar een hoog stabiel evenwicht. Dit kan verklaren waarom het herstel van een verstoord systeem vaak een forse ingreep vraagt.

Ervaringen

Inmiddels is het rekenen aan en bestuderen van kantelpunten enkele keren uitgeprobeerd in de wiskundelessen. De ervaring is enerzijds heel positief. Leerlingen in vwo 6 (wiskunde B) zijn positief verrast dat de wiskundige kennis die zij in enkele jaren hebben opgedaan, toepasbaar en bruikbaar is binnen hele diverse contexten. Anderzijds blijkt het voor leerlingen heel lastig om zonder sturing het beschikbare wiskundige gereedschap in te zetten binnen nieuwe contexten. Met name het vertalen van groeikarakteristieken naar wiskundige formules blijkt een flinke hobbel te zijn, maar ook het interpreteren van groeicurves in relatie tot de stabiliteit van evenwichten wordt niet eenvoudig gevon-

den. Hier zit ook een grote uitdaging voor de wiskundige denkactiviteiten.

Conclusie

In dit artikel hebben we geïllustreerd dat het mogelijk is om de leerlingen opgedane wiskundige vaardigheden te laten toepassen. Het vrijmaken van c , invullen van parameters en herleiden, zijn stappen die vallen onder algebraïsche vaardigheden, die door leerlingen uit de bovenbouw van het vwo zelfstandig moeten kunnen worden uitgevoerd. Hetzelfde geldt voor het zoeken van de waarden van c en A voor het kantelpunt, met behulp van de afgeleide van A naar c .

Ondertussen hebben we ze bij het modelleren aan de hand genomen om uit te leggen waarom er bepaalde stukjes van de vergelijkingen zijn toegevoegd. Tevens hebben we de leerlingen, als belangrijkste toegevoegde waarde, laten ontdekken hoe ze stabiele en instabiele evenwichten kun-

nen interpreteren. We doen dit door in het groeiplaatje te laten zien dat als je bij een stabiel evenwicht begint je daar blijft, terwijl beginnen bij een instabiel evenwicht ervoor zorgt dat je wegloopt naar een ander 'evenwicht'.

We hopen met dit voorbeeld een bijdrage te leveren aan het besef bij leerlingen van de brede toepasbaarheid van de wiskunde. Daarnaast leveren deze toepassingen uit de praktijk de docenten in het voortgezet onderwijs handvatten om aan de slag te gaan met wiskundige denkactiviteiten. We doen bij deze dan ook een oproep aan collega-wiskundigen aan andere universiteiten om meer van deze bruikbare toepassingen te leveren voor het wiskundeonderwijs op de scholen voor voortgezet onderwijs. In een periode waarin het tekort aan bètastudenten groot is, kunnen wellicht ook dit soort illustraties ingezet worden om vwo-leerlingen te interesseren voor een exacte studie. ☐

Referenties

- 1 D.R. Bellwood, T.P. Hughes, C. Folke en M. Nystrom, Confronting the coral reef crisis, *Nature* 429 (2004), 827–833.
- 2 cTWO, *Rijk aan betekenis, Visie op vernieuwd wiskundeonderwijs*, cTWO, Utrecht 2007.
- 3 P. Drijvers, Denken over wiskunde, onderwijs en ICT, Oratie, Freudenthal Instituut, Universiteit Utrecht, 2015.
- 4 L. Hemerik, E. van Nes en T.J. van de Pol, *Kantelpunten en alternatieve evenwichten*, Zebra 40, Epsilon Uitgaven, 2014.
- 5 C.S. Holling, Some characteristics of simple types of predation and parasitism, *Canadian Entomologist* 91 (1959), 385–398.
- 6 M. Scheffer, E.H. van Nes, M. Holmgren en T.P. Hughes, Pulse-driven loss of top-down control: The critical-rate hypothesis, *Ecosystems* 11 (2008), 226–237.
- 7 <http://jode.sourceforge.net/download.php>.
- 8 <http://sourceforge.net/projects/jode/files/>.
- 9 <http://www.math.rutgers.edu/~sontag/JODE/manual.html>.
- 10 <http://www.fisme.science.uu.nl/toepassingen/00122/>.
- 11 <http://www.fi.uu.nl/wisweb>.

Bram Gorissen*Faculteit FEW
Vrije Universiteit, Amsterdam
b.l.gorissen@vu.nl***Column Proefschrift**

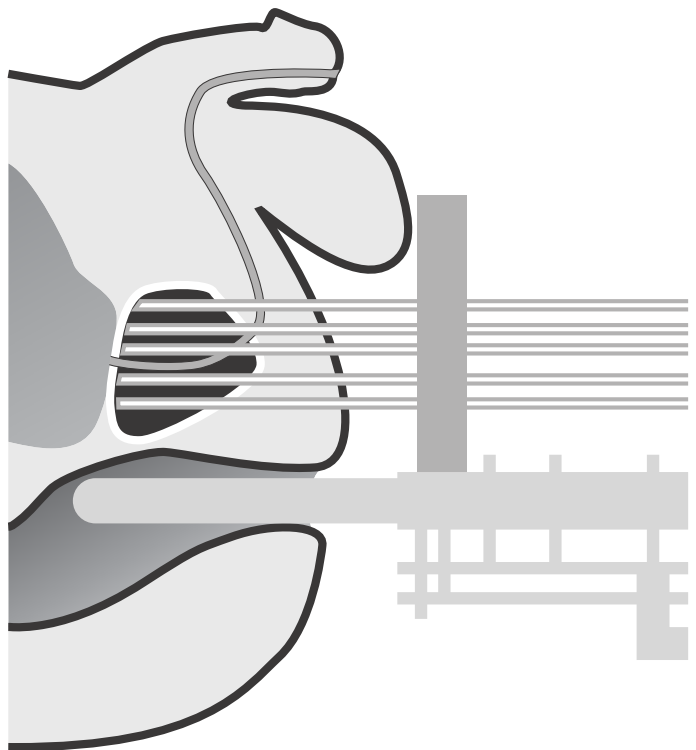
Robuuste optimalisatie en brachytherapie

Op 2 november 2015 ontvingen Ziyang Gao en Bram Gorissen afzonderlijk de Stieltjesprijs voor hun promotieonderzoek. In dit artikel bespreekt Bram zijn onderzoek op het gebied van robuuste optimalisatie en brachytherapie dat hij aan de Universiteit van Tilburg heeft verricht.

Bij het lezen van de titel werd uw aandacht wellicht getrokken door een onbekend woord. *Brachytherapie* is een vorm van radiotherapie waarbij een radioactieve bron in de buurt van de tumor wordt gebracht ('brachýs' is Grieks voor 'dichtbij'). Met wiskundige modellen wordt bepaald waar de bron geplaatst dient te worden en voor hoelang, opdat de tumor een zo hoog mogelijke dosis straling krijgt terwijl het omliggende weefsel gespaard blijft. Bij de behandeling zijn er veel onzekerheden die het resultaat van de behandeling nadelig beïnvloeden. Zo is het lastig om de radioactieve bron nauwkeurig te positioneren, en ligt de patiënt gedurende de behandeling niet compleet stil. Bij de aanvang van mijn promotieonderzoek was het de bedoeling om deze onzekerheden mee te nemen in het optimalisatieprobleem.

Brachytherapie

Ik heb me beperkt tot brachytherapie van de prostaat. Bij deze vorm van brachytherapie wordt de radioactieve bron met behulp van katheters (holle naalden) in de prostaat geleid (Figuur 1). De prostaat is met zwart weergegeven. De katheters worden met behulp van een template (de verticale rechthoek) gepositioneerd, en onder real-time visualisatie van een rectaal ingebracht echosonde in de prostaat gestoken. De katheters worden aangesloten op een zogeheten afterloader, die de radioactieve bron achtereenvolgens door elke katheter geleidt en op bepaalde posities (dwellposities) in de prostaat gedurende een in te stellen tijdsduur (dwelltijd) laat



Figuur 1 De behandeling.

stoppen. Bij elke patiënt worden er twee behandelplannen gemaakt: een pre-plan en een live-plan. Bij het pre-plan worden de katheterposities gekozen en worden bij die posities de dwelltijden geoptimaliseerd. Bij het live-plan worden alleen de dwelltijden geoptimaliseerd voor de gerealiseerde katheterposities.

Het wiskundig model

Ik beperk me hier tot het model voor het live-plan. Ik neem dus aan dat de dwellposities bekend zijn, en dat enkel de dweltijden t_j ($j \in J$) nog gekozen moeten worden. Ter evaluatie van het behandelplan worden de prostaat en de relevante omliggende organen gediscretiseerd in calculatiepunten $i \in I$. Voor elke dwellpositie j kan berekend worden hoeveel dosis per seconde elk calculatiepunt i ontvangt. Dit wordt de dose rate $\dot{d}_{ij}$ genoemd. De dosis in een calculatiepunt is lineair in t_j : $\sum_{j \in J} \dot{d}_{ij} t_j$. Een veelgebruikt optimalisatiemodel is het lineaire penaltymodel. Hierin krijgt elke dwellpositie een voorgeschreven onder- en bovengrens op de dosis (L_i en U_i) en een bijbehorende gewichtsfactor (α_i en β_i , respectievelijk). Voor elk calculatiepunt i is de doelfunctiebijdrage 0 wanneer de dosis tussen L_i en U_i ligt, α per Gy onderdosering, en β per Gy overdosering. Dit model kan als volgt worden geformuleerd:

$$\min_{t \geq 0} \sum_{i \in I} \max \left\{ 0, \alpha_i \left(L_i - \sum_{j \in J} \dot{d}_{ij} t_j \right), \beta_i \left(\sum_{j \in J} \dot{d}_{ij} t_j - U_i \right) \right\}.$$

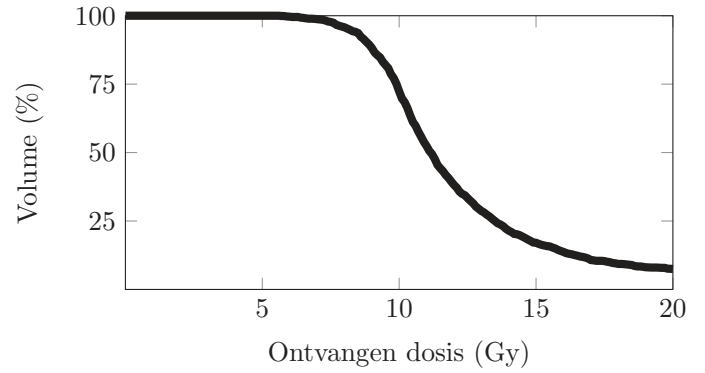
Dit model wordt klinisch veelvuldig gebruikt, waar het met heuristieken als simulated annealing wordt geoptimaliseerd. Het gebruik van heuristieken is opmerkelijk omdat het model als lineair optimalisatieprobleem (LO) kan worden geschreven en als zodanig efficiënt kan worden opgelost. Hoewel daarbij een betere doelfunctiewaarde wordt behaald dan met heuristieken, blijkt dat klinisch geen voordeel te bieden [1]. Er is derhalve geen monotoon verband tussen de doelfunctiewaarde in het lineaire penaltymodel en de kwaliteit van het plan.

De juiste doelfunctie

Bij het beoordelen van de kwaliteit van een behandelplan is het noodzakelijk om naar de 3D-dosisverdeling te kijken. Op de computer kan de dosis in elk deel van de tumor worden geïnspecteerd. Dit leent zich niet direct voor optimalisatie. De 3D-dosisverdeling kan worden samengevat in dosis-volumehistogrammen (DVH's, zie Figuur 2). In een DVH kun je aflezen welk deel van het volume welke hoeveelheid dosis ontvangt. Op basis van DVH's is een ruwe inschatting te maken van de kans op genezing of complicaties. Punten op de DVH zijn te modelleren met behulp van binaire variabelen. In plaats van het lineaire penaltymodel heb ik daarom een model opgesteld dat direct op DVH-punten optimaliseert. Zulke modellen zijn in het verleden met behulp van heuristieken opgelost omdat MIP-solvers zoals CPLEX te traag zouden zijn [3]. Met bepaalde instellingen heb ik uit CPLEX behandelplannen gekregen die weliswaar suboptimaal zijn, maar toch beter zijn dan de oplossingen die met heuristieken worden verkregen. Een wereldleider op het gebied van brachytherapie doet momenteel onderzoek om deze nieuwe technieken op te nemen in hun software.

Robuuste optimalisatie

Er zijn verschillende manieren om onzekerheden mee te nemen in een optimalisatieprobleem. Robuuste optimalisatie (RO) is zo'n methode, die populair is vanwege de eenvoud waarmee een robuust model kan worden verkregen, dat bovendien niet wezenlijk moeilijker is dan het oorspronkelijke probleem. De robuuste tegenhanger (RT) van een LO waarbij de onzekerheid met een polyeder wordt beschreven, is bijvoorbeeld ook een LO. In het algemeen



Figuur 2 Een dosis-volumehistogram. De voorgeschreven dosis van 8,5 Gy wordt door 94 procent van het volume ontvangen.

heeft een optimalisatieprobleem $\min_x \{f(a, x): f_k(a, x) \leq 0, k \in K\}$ met onzekere parameter a de volgende RT:

$$\min_x \sup_{a \in \mathcal{U}} f(a, x) \\ f_k(a, x) \leq 0 \quad \forall a \in \mathcal{U} \quad \forall k \in K,$$

waarbij $\mathcal{U}$ het onzekerheidsgebied modelleert. RO is dus een 'worst case' aanpak waarbij voorwaarden niet mogen worden overschreden en waarbij de slechtst mogelijke doelfunctiewaarde wordt geoptimaliseerd, zolang a in het onzekerheidsgebied valt. Deze keuze valt te verdedigen vanuit het standpunt van een patiënt die eenmalig een behandeling ondergaat.

Aanvankelijk was het mijn doel om het lineaire penaltymodel robuust te optimaliseren. De meeste onzekerheid komt tot uitdrukking in de parameters $\dot{d}_{ij}$. De doelfunctie is convex in deze parameters, terwijl in de theorie van RO vaak concaviteit wordt aangenomen. Dit heeft tot gevolg dat de RT niet meer efficiënt oplosbaar is. Veel optimalisatieproblemen hebben een soortgelijke structuur. Een som over uitdrukkingen met een $\max\{\cdot\}$ operator komt bijvoorbeeld voor bij voorraadproblemen, waarbij in elke tijdsperiode kosten zijn voor opslag of gemiste vraag. In de literatuur wordt bij zulke problemen vaak de RT genomen van de gebruikelijke herformulering van de max-operator:

$$\min_{t \geq 0, y \geq 0} \sum_{i \in I} y_i, \\ y_i \geq \alpha_i \left(L_i - \sum_{j \in J} \dot{d}_{ij} t_j \right) \quad \forall \dot{d} \in \mathcal{U}, \\ y_i \geq \beta_i \left(\sum_{j \in J} \dot{d}_{ij} t_j - U_i \right) \quad \forall \dot{d} \in \mathcal{U}. \quad (1)$$

Hierin bevat $\mathcal{U}$ de matrices $\dot{d}$ waartegen de oplossing robuust moet zijn. Zonder de ' $\forall$ ' herkent u hierin de LO-herformulering van het lineaire penaltymodel. In de literatuur werd veelal niet signaleerd dat (1) niet equivalent is aan de RT van het lineaire penaltymodel. De RT (1) is conservatief, wat betekent dat het toegelaten gebied een (stricte) deelverzameling is van dat van de exacte RT. De reden hiervoor is dat de oplossing bestaat uit één vector y , terwijl de optimale y van $\dot{d}$ afhangt.

In mijn proefschrift heb ik een systematisch overzicht gemaakt van exacte methoden en benaderingen om de RT op te lossen. De exacte methoden gebruiken bijvoorbeeld de observatie dat het maximum van een convexe functie wordt aangenomen in een extreem punt van het domein, of de observatie dat een ongelijk-

heid met een max-operator herschreven kan worden in een exponentieel aantal lineaire ongelijkheden. Hoewel deze methoden ogenschijnlijk verschillen, heb ik een verband blootgelegd door de $\max\{\cdot\}$ operator te schrijven als een RT met de standaardsimplex als onzekerheidsgebied. Bij benaderingen wordt y afhankelijk gemaakt van d , waarbij de afhankelijkheid omwille van de numerieke oplosbaarheid wordt beperkt tot een lineaire of kwadratische parameterisatie. De kwaliteit van de benadering kan worden vergroot door eerst groepjes van $\max\{\cdot\}$ termen te combineren. Ten slotte heb ik twee iteratieve methoden geïdentificeerd die gebruikmaken van snijvlakken. Op basis van numerieke resultaten heb ik geconcludeerd dat de effectiviteit van de verschillende methoden sterk afhankelijk is van het probleem. Geen enkele methode verdient duidelijk de voorkeur. De beste keuze hangt af van de grootte en de structuur van het probleem en de beschikbare rekentijd. Het combineren van $\max\{\cdot\}$ termen of het expliciet modelleren van de afhankelijkheid van y met een lineaire of kwadratische parameterisatie heeft niet altijd het gewenste effect. De doelfunctiewaarde wordt weliswaar beter, maar dit geldt niet noodzakelijkerwijs voor

de kwaliteit van de oplossing. Wanneer de oplossing wordt ingevuld in de doelfunctie van de exacte RT, kan een ogenschijnlijk betere oplossing toch slechter presteren.

Tot slot

Mijn onderzoek naar optimalisatie van brachytherapie werd gestuurd door de wens om dat robuust te doen. Daarom was het noodzakelijk om een betere doelfunctie te definiëren dan de tot dan toe gebruikelijke functie, en om te onderzoeken hoe functies die geschreven kunnen worden als de som van $\max\{\cdot\}$ operatoren robuust geoptimaliseerd kunnen worden. Ik heb hierin de eerste stappen gezet. Mijn onderzoek is voortgezet door promovenda Marleen Balvert. Zij heeft gekeken naar onnauwkeurigheden bij het intekenen van de tumor. Niet alleen is er variatie tussen artsen onderling, ook dezelfde arts blijkt een tumor niet tweemaal hetzelfde in te kunnen tekenen omdat het beeldmateriaal teveel ruis bevat. Marleen heeft een model ontwikkeld om behandelplannen te optimaliseren die robuust zijn tegen zulke intekenfouten, gebaseerd op DVH-punten [2].

Referenties

- 1 R. Alterovitz, E. Lessard, J. Pouliot, I.-C. Hsu, J. F. O'Brien en K. Goldberg, Optimization of HDR brachytherapy dose distributions using linear programming with penalty costs, *Medical Physics* 33(11) (2006), 4012–4019.
- 2 M. Balvert, D. den Hertog en A. Hoffmann, Robust optimization of dose-volume metrics for prostate HDR-brachytherapy incorporating target delineation uncertainties, *Optimization Online* (2015).
- 3 T. Siau, A. Cunha, A. Atamtürk, I.-C. Hsu, J. Pouliot en K. Goldberg, IPIP: A new approach to inverse planning for HDR brachytherapy by directly optimizing dosimetric indices, *Medical Physics* 38(7) (2011), 4045–4051.

Richard Boucherie

Afdeling Toegepaste Wiskunde
Universiteit Twente
r.j.boucherie@utwente.nl

Johann Hurink

Afdeling Toegepaste Wiskunde
Universiteit Twente
j.l.hurink@utwente.nl

Interview Wim Klein Haneveld en Jan Karel Lenstra

De geschiedenis herhaalt zich

Het veertigjarig jubileum van de ‘Lunteren Conference on the Mathematics of Operations Research’ vormt de aanleiding voor een interview met Wim Klein Haneveld en Jan Karel Lenstra, die nauw betrokken zijn geweest bij de ontwikkeling van landelijke samenwerking in de mathematische besliskunde. Naast de conferentie is ook het onderwijsprogramma dat wordt verzorgd door het Landelijk Netwerk Mathematische Besliskunde een belangrijk onderdeel van het succes van deze samenwerking. De afweging tussen lokale universitaire en nationale belangen bij het opzetten van dit programma dertig jaar geleden vertoont een grote overeenkomst met de huidige discussie rond Mastermath in het *Deltaplan voor de Nederlandse wiskunde*. Richard Boucherie en Johann Hurink spraken Wim Klein Haneveld en Jan Karel Lenstra op 29 januari 2016.

Welkom Wim (WKH) en Jan Karel (JKL). Jullie hebben allebei in een andere fase aan de basis gestaan van de samenwerking in de Nederlandse besliskunde en daarmee ook van de sterke positie van ons vakgebied in de wereld. Fijn dat jullie ons een kijkje willen geven in de rol van de verschillende spelers in dit proces.

Gijs de Leve wordt wel de architect genoemd van de samenwerking in de Nederlandse besliskunde. Hoe heeft hij die samenwerking tot stand gebracht?

JKL: “Het begon in 1975. Ik was toen medewerker op het Mathematisch Centrum (MC). Gijs de Leve was hoogleraar aan de UvA en voor één dag in de week chef van de afdeling Mathematische Besliskunde op het MC. Hij vroeg mij om mee te gaan naar een aantal universiteiten om zijn collega’s te spreken. We zijn achtereenvolgens op

bezoek geweest bij Benders en Wessels in Eindhoven, bij Kosten en Lootsma in Delft, bij Cohen in Utrecht, bij Kriens in Tilburg, bij Ponstein en Stam in Groningen, bij Cuninghame-Green in Twente en bij Van den Meerendonk in Rotterdam. Nationale samenwerking was De Leve’s visionaire bijdrage aan de mathematische besliskunde.”

Wat was het resultaat van deze ronde?

JKL: “Het heeft geleid tot vijf dingen.

1. Een vergadering van hoogleraren, die vanaf 1975 twee keer per jaar bij elkaar kwam. Dit was eigenlijk de basis van de latere landelijke werkgemeenschap. Er was vanaf het begin veel goede wil in het hooglerarenoverleg. Dat mag je op het conto van De Leve schrijven.
2. De conferenties in Lunteren, die gestart zijn in 1976 en een heel goed concept

bleken te zijn. Het was al snel in het buitenland een eer om voor Lunteren te worden uitgenodigd. We hadden er de beste sprekers. In 1978, in het derde jaar, kwam de systeemtheorie erbij.

3. Een newsletter, die eigenlijk een verzameling was van abstracts van Nederlandse besliskundepublicaties van het jaar daarvoor. Deze newsletter heeft een jaar of tien bestaan, tot de opkomst van het internet.
4. Een landelijke adviescommissie voor de afdeling mathematische besliskunde van het MC. Deze commissie heeft een aantal jaren bestaan en was heel nuttig voor de nationale betrokkenheid bij de besliskunde op het MC.
5. Discussies over een landelijke postdoctorale opleiding. Wij zagen hier kansen voor samenwerking in het graduate onderwijs en zelfs in het beroepsonderwijs, maar ook gevaren omdat landelijke samenwerking ingrijpt in het primaire proces. Onderwijs is in de eerste plaats een lokale aangelegenheid. Dezelfde spanning zie je nu terug in de discussie rond de landelijke onderzoeksschool voor de wiskunde.

Deze nationale samenwerking viel ongeveer samen met de doorbraak van de Nederlandse besliskunde op internationaal niveau.”



Wim Klein Haneveld en Jan Karel Lenstra

Wessels heeft een belangrijke rol gespeeld bij de verdere vormgeving van de nationale samenwerking. Wat was zijn bijdrage?

JKL: "In 1978 kwam er een signaal vanuit de overheid, die de beslissingen over financiering van het tweede-geldstroomonderzoek dichter bij de onderzoekers zelf wilde leggen. De overheid wilde dat doen via landelijke werkgemeenschappen. Er begon toen een soort massageproces om de hoogleraren bij elkaar te brengen in wat later de tweede fase ging heten. In januari 1979 werd de Landelijke Werkgemeenschap Mathematische Besliskunde & Systeemtheorie opgericht. Wessels werd voorzitter, ik werd secretaris. Wessels was een visionair iemand. Net als De Leve had hij oog voor strategie. De Leve heeft de nationale samenwerking van de grond gebracht, Wessels heeft die verder vormgegeven en veel lastige discussies geleid. Wessels en ook Cohen zagen dat samenwerking noodza-

kelijk was voor de ontwikkeling van het vak. Willems volgde Wessels in 1983 op als voorzitter van de werkgemeenschap, ik (JKL) werd voorzitter in 1985.

De werkgemeenschap was een koepel voor veel lopende activiteiten, zoals Lunteren en de newsletter. Het hooglerarenoverleg kreeg een formele status. In 1981 was er een doorbraak. NWO erkende toen landelijke werkgemeenschappen voor Discrete Wiskunde, Mathematische Besliskunde & Systeemtheorie, Numerieke Wiskunde en Stochastiek, en ook landelijke samenwerkingsverbanden voor Algebra & Meetkunde en Logica & Grondslagen. Daar zie je ook de aarzeling van de zuiver wiskundigen om zich te organiseren. Zij hielden het liever low profile."

Wat veranderde er door de erkenning van de werkgemeenschappen door NWO?

JKL: "De landelijke werkgemeenschappen

en ook de Stichting Mathematisch Centrum kregen een rol in de beoordeling van aanvragen voor tweede-geldstroomonderzoek. Er kwam een wetenschapscommissie met Van Zwet als voorzitter. Daarin zaten de voorzitters van de werkgemeenschappen en samenwerkingsverbanden plus twee medewerkers van het MC. De commissie beoordeelde alle tweede-geldstroomvoorstellen.

De werkgemeenschappen functioneerden een aantal jaren eigenlijk best goed. Aan het eind van dit verhaal was er een advies van een commissie onder leiding van Rinnooy Kan om die derde bestuurslaag weer op te heffen. Toen verdween de wetenschapscommissie en ging de beoordeling van de aanvragen weer terug naar de gebieden van NWO. Dat viel een beetje samen, in mijn herinnering, met het oprichten van het Landelijk Netwerk Mathematische Besliskunde."

Hieraan vooraf ging de discussie over de opzet van landelijke tweede-faseopleidingen. Een nationale onderwijscoördinatie neemt natuurlijk een deel van de autonomie weg van de lokale bestuurders. Hoe is deze transitie verlopen?

JKL: “In mei 1985 stuurde het bestuur van de werkgemeenschap een notitie over de vorming van een landelijke tweede-faseopleiding mathematische besliskunde en systeemtheorie naar de betrokken faculteiten, met zeer uiteenlopende reacties. Sommige faculteiten aarzelden sterk en wilden vasthouden aan het lokale proces. Wessels’ insteek was om hen hun gang te laten gaan: als ze er niet in zouden slagen een eigen tweede-faseopleiding van de grond te brengen, zouden ze wel meegaan. Dat typeert de politieke kracht van Wessels.

Ik herinner mij een bijeenkomst in de Holiday Inn in Utrecht. Er was een duidelijke scheiding van de geesten. Enerzijds was er een groep hoogleraren die het Amerikaanse model ook in Nederland wilde invoeren. Zij meenden dat onderwijs aan promovendi niet gaat ten koste van de kwaliteit van het proefschrift maar juist meer breedte en perspectief geeft en daardoor ook meer diepte. Anderen wilden vasthouden aan het bestaande model. Zij waren bang hun promovendi kwijt te raken en de diepte in het onderzoek te verliezen. De angst voor verandering zit ingebakken in de Nederlandse wiskunde. Cohen zei toen na afloop tegen mij: ‘Ach jongen, dit moet zijn tijd hebben. Het komt wel goed.’”

In 1986 werd in Lunteren een alternatief voorstel van een ad-hocwerkgroep besproken. Het voorstel was om niet in te zetten op een samenwerking van instellingen maar op een informele en pragmatische samenwerking van individuen. Dat was bepaald niet de institutionele samenwerking die de systeemtheorie voor ogen stond. Het voorstel was vlees noch vis en heeft het uiterste niet gehaald. Je kan het achteraf zien als stap om door te kunnen gaan op de weg die de systeemtheorie al was ingeslagen.

De systeemtheoretici hadden in augustus 1986 hun onderwijsprogramma rond. Zij waren zeer eensgezind. Zij wisten wat er moest gebeuren en gingen dat doen. In oktober besloten de systeemtheorie en de mathematische besliskunde ieder hun eigen weg te gaan. De systeemtheorie diende een subsidieaanvraag in bij het Ministerie van OCW. OCW was bezig hier geld voor klaar te zetten.

De mathematisch besliskundigen hielden een enquête onder de deelnemende instituten. Er was nog geen blijk van overeenstemming. De besliskundigen die aan een wiskundefaculteit verbonden waren hadden aarzelingen, degenen die aan een economische faculteit zaten wilden doorgaan met de ontwikkeling van de nationale samenwerking en hadden als voorbeeld het Netwerk Algemene en Kwantitatieve Economie (NAKE), dat stond onder leiding van Arie Kapteyn uit Tilburg. Het NAKE was enkele maanden later het eerste netwerk dat een subsidie binnenhaalde.”

In de beginjaren was er een nauwe samenwerking tussen de besliskunde en de systeemtheorie. Hoe was de relatie tussen deze twee gebieden?

JKL: “In 1979 hebben de mathematische besliskunde en de systeemtheorie samen de werkgemeenschap opgericht. Vanaf 1978 zaten we al samen in Lunteren. Er was een goede collegiale sfeer, maar het

“Ach jongen, dit moet zijn tijd hebben. Het komt wel goed.”

was een gearrangeerd huwelijk tussen twee disciplines met heel verschillende culturen. In 1982 kwam er een omslag. De systeemtheoretici besloten hun conferentie te gaan houden samen met hun Belgische collega's, afwisselend in België en in Lunteren. In Lunteren bestond de besliskunde- en systeemtheorieconferentie eigenlijk uit twee separate bijeenkomsten. Toen de systeemtheoretici hun eigen weg gingen met de tweede-faseopleiding, hebben zij dat ook met hun conferentie gedaan. Vanaf 1987 is Lunteren alleen met de besliskunde doorgegaan.”

Besliskunde en systeemtheorie zijn twee ogenschijnlijk gerelateerde vakgebieden, die tien jaar samen met elkaar opgetrokken zijn. Hoe kan het dat zij nu toch heel verschillend zijn ingebed in de wiskunde?

JKL: “Besliskunde en systeemtheorie lijken van een afstand een natuurlijke combinatie, maar als je naar de modellen, technieken en applicaties kijkt, zijn de verschillen groter dan de overeenkomsten. Er is binnen de werkgemeenschap weinig kruisbestuiving tussen beide gebieden geweest. Bij de technische universiteiten is

de afgelopen decennia de inbedding van de systeemtheorie binnen de wiskunde verzwakt, terwijl het vak tot grote bloei is gekomen binnen de technische faculteiten zoals werktuigbouw en elektrotechniek. Dit is ook in lijn met de positionering van de systeem- en regeltheorie in het *Deltaplan voor de Nederlandse wiskunde*.”

Heeft de samenwerking met de systeemtheorie ook positieve effecten gehad?

JKL: “De systeemtheorie is natuurlijk een voorbeeld geweest voor de besliskunde. Toen zij hun tweede fase rond hadden, hebben de besliskundigen het voorbeeld gevolgd. Ook het NAKE was een sterk voorbeeld. De economen en de systeemtheoretici hebben ons zeker geholpen.”

Het Landelijk Netwerk Mathematische Besliskunde (LNMB) was niet een los samenwerkingsverband, maar had ook een formele status, inclusief subsidie vanuit OCW. Hoe hebben jullie alle neuzen in dezelfde richting gekregen?

JKL: “In oktober 1986 is Wim gevraagd om het landelijk netwerk op te zetten. Wim was niet bezoedeld door politieke discussies. Hij ging het gewoon doen. Rinnooy Kan en ik zorgden voor de bestuurlijke afdekking. Wim trok het netwerk uit de klei en maakte een voorstel.”

WKH: “Ik vond zelf de fase die voorafging aan de start van het netwerk de leukste fase. Om iets te beginnen dat nog niet bestaat en waar veel scepsis over bestaat. Niemand zou bij de gekozen weg iets verliezen, waardoor niemand echt tegen was, maar er waren ook weinig mensen echt voor. Ik vond het leuk om dat van de grond te tillen. Gigantisch veel met iedereen op alle niveaus gebeld. Halverwege 1987 leek er voldoende draagvlak en heb ik een voorstel gemaakt en een heel concreet plan uitgewerkt. Alle colleges van bestuur heb ik erbij gelobbyd en ook alle faculteiten. Op iedere universiteit een contactpersoon en die maar benaderen, benaderen en benaderen om de zaak vlot te trekken. Die contactpersonen vormden later samen het algemeen bestuur van het LNMB.

Iedereen had zo zijn eigen belangen. Ik zat zelf in een economische faculteit die heel andere belangen had dan operations research. Besliskunde was verspreid over kleine groepjes, terwijl er landelijk gezien veel toppers waren. Wij zagen elkaar in

Lunteren, dat was leuk, en je zag elkaar in het buitenland. Voor de rest was er in Nederland niets. Het was een uitdaging om de mensen voor het LNMB bij elkaar in Utrecht te krijgen en ervoor te zorgen dat niemand erop verloor. Af en toe een keer naar Utrecht, dat was alles. Iedereen kon winnen door de samenwerking binnen het LNMB. De startsubsidie was een worst waarmee je mensen over de brug kon krijgen om in ieder geval niet tegen te stemmen. Dat is ook aardig gelukt.”

JKL: “Wij (Rinnooy Kan, WKH, JKL) waren op 26 augustus 1987 met een voorstel op OCW bij directeur-generaal Roel in 't Veld. Die had geld. Het was in de slipstream van NAK. Daar profiteerden we duidelijk van. Het ging toen vooral over het hoe en niet over het waarom van het opzetten van een landelijk netwerk. Het was duidelijk dat het ging gebeuren.”

WKH: “De eerste toezegging hadden we in 1987 vlot te pakken. In mei 1988, toen de aio-cursussen al liepen, heb ik ons voorstel nog aangepast en vijf aio-posities toegevoegd. De feitelijke subsidietoezegging kwam pas in het najaar van 1988. Daarvoor zijn we vanuit Groningen in een Volkswagenbusje met de rector magnificus en collega's die ook iets hadden aanvraagd naar Zoetermeer gereden. Tot verbazing van mijn rector kregen wij toen het volle bedrag dat we hadden gevraagd. De andere aanvragen werden gekort. Dat heb ik geïnterpreteerd als een honorering van de unieke landelijke samenwerking in de besliskunde.”

“Dat heb ik geïnterpreteerd als een honorering van de unieke landelijke samenwerking in de besliskunde.”

JKL: “Wim kreeg bij het hooglerarenoverleg in Lunteren in 1988 veel lof toegezaaid: hij had het allemaal voor elkaar gekregen. In februari 1988 begonnen wij met de colleges, een semester later dan de systeemtheoretici. Het interessante was dat het gesprek over ‘moet het nu wel of moet het nu niet’ was verdamp. Er is nooit een conclusie getrokken, het ging gewoon gebeuren. De derde bestuurslaag verdween, de colleges begonnen, en het LNMB werd het zwaartepunt van de samenwerking tussen besliskundigen.”

Het LNMB is een voorbeeld gebleken voor opzetten van onderwijs aan promovendi. Wat is de kracht van het LNMB?

JKL: “Alle ontwikkelingen rond de tweede-faseopleiding en voorwaardelijke financiering van onderzoek hebben maar één doel gehad: het opkrikken van het niveau door samenwerking. Het LNMB was de Universiteit van Nederland, en dat was kwaliteitsverhoging.”

“Het LNMB was de Universiteit van Nederland.”

WKH: “Het was een eer om aan de Universiteit van Nederland les te geven. Als je een slechte evaluatie had dan vloog je eruit. Docenten werden geïnformeerd of vervangen, vakken werden aangepast. Het is altijd een punt van aandacht geweest dat de aio's tevreden moesten zijn en er iets van leerden.

Het is veel mooier gelopen dan ik me had kunnen voorstellen. Nederland is klein dus iedereen kan om 10 uur 's ochtends in Utrecht zijn. Ik heb hier wel vaker met buitenlanders over gesproken. In Noorwegen zijn ze stinkend jaloers. Daar zitten ze met minder mensen en veel meer gespreid. Zij willen ook wel zoiets, maar het kan daar niet. Dan moet je alles concentreren in drie dagen. Oslo, Bergen en Trondheim liggen te ver uit elkaar. Men had in het buitenland snel door dat Nederland de juiste grootte heeft voor een landelijke graduate school.”

Het is wel bijzonder dat we nu dertig jaar later nog steeds de structuur hebben die jij hebt opgezet.

WKH: “Daar ben ik ook best wel trots op eigenlijk. Ik heb gisteren het voorstel dat ik heb ingebracht nog een keer doorgelezen. Het was heel concreet. Bijna alles is uitgekomen.”

“Daar ben ik ook best wel trots op eigenlijk.”

Welke rol speelde het LNMB verder nog in de ontwikkeling van de besliskunde in Nederland?

WKH: “Ik heb het steeds ervaren als definitie van een vakgebied, zonder het gebied al te sterk af te bakenen, met focus op

een combinatie van stochastiek, combinatoriek, optimalisering en speltheorie — het is helemaal niet logisch om dat als één vak te beschouwen. De beoefenaren zitten natuurlijk maar in één stukje van het gebied en niet in de andere. Het vakgebied breder neerzetten, inclusief toepassingen, zonder al te veel aandacht aan die definitie te besteden. Dat heeft gewerkt.”

JKL: “De ontwikkelingen van het vak in internationaal opzicht zie je totaal gereflecteerd in de ontwikkelingen in het LNMB. De algoritmisering van de speltheorie bijvoorbeeld en de integratie van continue en discrete optimalisering zie je terug in het netwerk.”

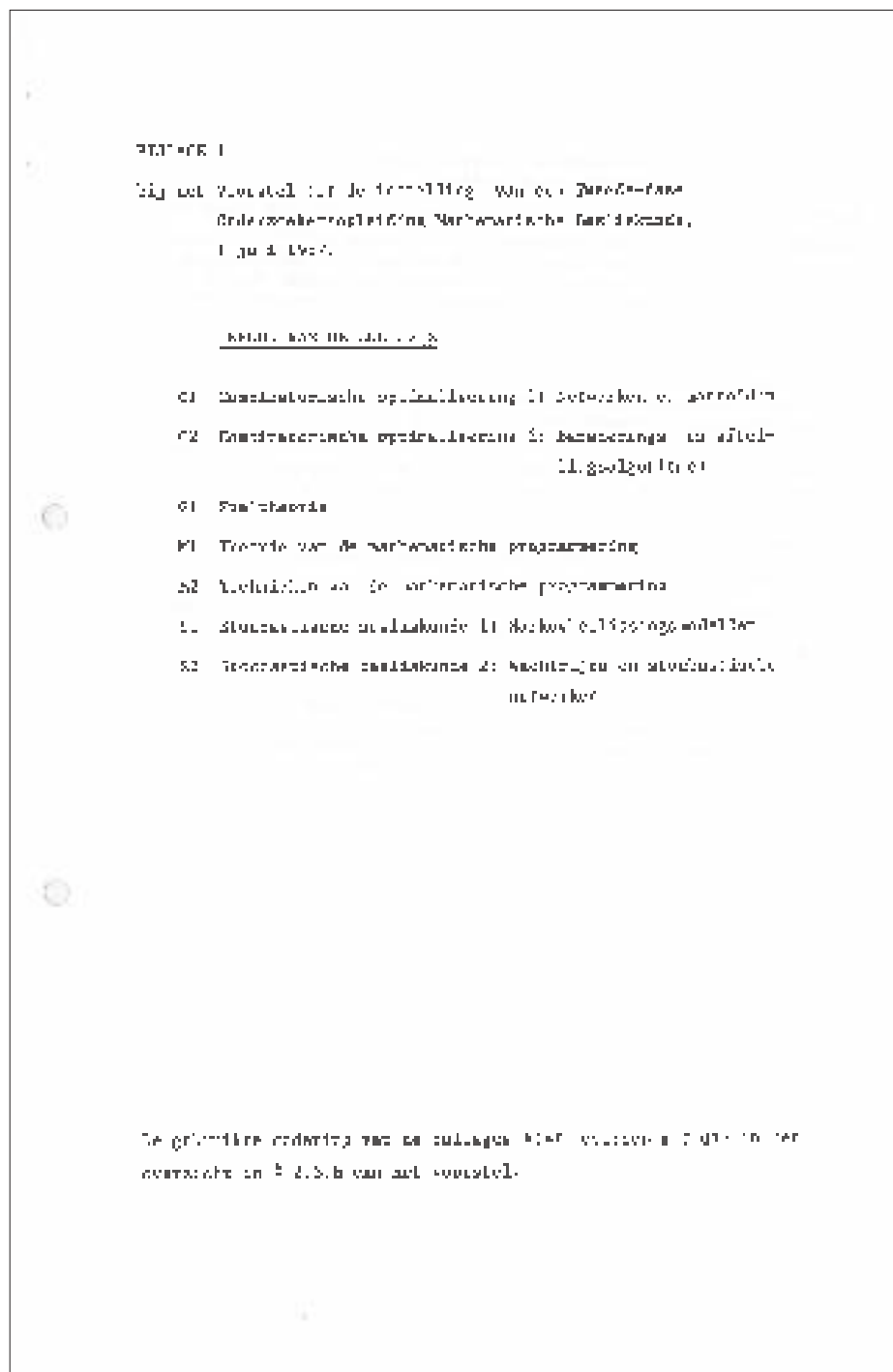
“De Leve heeft een enorme geest van samenwerking tot stand gebracht. Klein Haneveld heeft het netwerk uit de grond getrokken. In de tussenjaren is er door Wessels heel veel gemasseerd.” [JKL]

Naast het onderwijsprogramma is ook de Lunteren Conference on the Mathematics of Operations Research een uithangbord voor de Nederlandse besliskunde. Deze conferentie loopt al ruim veertig jaar en staat internationaal zeer goed bekend. Hoe komt dat?

JKL: “In de beginjaren waren er in Nederland toch een aantal gezichtsbepalende personen in het onderzoek. Vooral in de stochastische hoek met Cohen, Hordijk, Tijms en Wessels en aan de discrete kant met Schrijver, die een zuiver-wiskundige achtergrond had. Ook was er een aantal jonge pas gepromoveerde aanstormende talenten. Hierdoor hadden wij al snel een sterke reputatie, wat ertoe heeft geleid dat Lunteren direct op de kaart stond. Mensen zeiden niet gauw nee tegen een uitnodiging en vonden het een eer om in Lunteren te komen praten.”

Als je naar Lunteren kijkt, dan zie je wel dat steeds minder staf aanwezig is.

WKH: “Die klacht is er altijd al geweest. Sterker nog. In het voorstel stond dat we van plan waren in de zomer en de winter een aio-workshop te houden. De zomerse workshop bij een van de deelnemende instellingen, in belangrijke mate in te vullen door de lokale besliskundegroep. Die



Het oorspronkelijke curriculum vormt na dertig jaar nog altijd de basis voor het onderwijs van het LNMB.

in de winter zou geïntegreerd worden met Lunteren. Sommigen waren bang dat het niveau van de lezingen in Lunteren daarmee omlaag zou gaan. Mijn idee was dat het dubbelop zou zijn wanneer de sprekers een lezing voor de geleerden gaven en dan ook nog een workshop voor de aio's. Die kun je beter samenvoegen. Ook specialisten kunnen iets leren van een meer algemene lezing. Ik zag juist alleen maar voordelen van de integratie. De binding wordt

groter, de kennismaking wordt groter, je leert al die mensen kennen en ze leren jou kennen.”

Wanneer jullie terugkijken op de ontwikkelingen in de afgelopen veertig jaar, wat kunnen we meenemen in de huidige discussie rond het Deltaplan?

JKL: “De geschiedenis herhaalt zich. Het Deltaplan bevat het voorstel om Mastermath uit te bouwen tot een nationale on-

derzoekschool, inclusief onderwijs voor promovendi. Mastermath kwam begin deze eeuw voort uit nood: er waren te weinig masterstudenten in Nederland en we zetten ze bij elkaar in Utrecht. Nu zijn er veel studenten en weinig docenten. De nood is er dus nog steeds en vraagt nog steeds om een landelijke aanpak. Wij wilden het penvoerderschap van het nieuwe Mastermath bij het CWI leggen, maar de bètadecanen hebben daar — begrijpelijke — bezwaren tegen. Veertig jaar geleden wilden we hetzelfde voor het LNMB; toen mocht het niet van Roel in 't Veld. De decanen zien een spanning tussen de positie van hun lokale graduate schools en die van een nationale

“De lezingen vond ik prachtig. Ik was leergierig. Je eigen hoekje kende je wel, maar daarbuiten was nog veel meer te weten. Dat vond ik interessant.” [WKH]

onderzoekschool, maar wij zien juist complementariteit. De lokale graduate schools hebben ieder hun eigen regelingen, bevoegdheden en verantwoordelijkheden; daarnaast zorgt Mastermath voor inhoud, breedte en kwaliteit, en dat lukt alleen in een hechte nationale samenwerking. De gedachte is exact dezelfde als bij de oprichting van het LNMB.”

Zouden jullie afsluitend nog een of twee belangrijke dingen kunnen noemen om ervoor te zorgen dat over twintig jaar nog een goed LNMB bestaat?

WKH: “Wees niet bang voor wat nieuws, zolang je de kwaliteit weet te handhaven. De vorm is maar een middel. Dit netwerk in deze vorm heeft heel goed gewerkt en werkt nog steeds. Het gaat er niet om, om eerst macht te veroveren en daarna de baas te spelen. Het is meer goede ideeën hebben en daar een klankbord voor vinden en mensen meekrijgen, dan krijg je vanzelf invloed.”

JKL: “Geld is minder belangrijk dan mensen. Mensen die een visie delen, die het snappen zonder dat je het uitlegt, die kwaliteit als standaard hebben, die zichzelf organiseren en van daaruit opereren. Dat is de slag die wij toen hebben gemaakt en die de Nederlandse wiskunde nu maakt.”



Frits Beukers

Mathematisch Instituut
Universiteit Utrecht
f.beukers@uu.nl

Vakantiecursus

Hoe bewijs je het priemtwelingvermoeden?

In het voorjaar van 2013 overrompelde de Chinees-Amerikaanse wiskundige Yitang Zhang de wiskundige wereld met de aankondiging van het bewijs dat er een geheel getal A bestaat zó dat er oneindig veel paren gehele getallen $n, n + A$ bestaan die beide priem zijn. Als A gelijk aan 2 zou zijn geweest dan zou dit een bewijs voor het beruchte priemtwelingvermoeden zijn geweest. Dit vermoeden is waarschijnlijk even oud als de getaltheorie zelf. Uit het bewijs van Zhang volgt iets zwakkers, namelijk dat A kleiner is dan zeventig miljoen. Niettemin was het bewijs van Zhang uniek in zijn soort en tot dusver voor onmogelijk gehouden door andere experts in de analytische getaltheorie. In dit artikel geeft Frits Beukers een overzicht van een aantal feiten over priemtwelingen en de ontwikkelingen die leidden tot Zhangs ontdekking en het vervolg erop. Door inspanningen van veel wiskundigen is in de loop van 2013–15 de grens voor A teruggebracht tot 246. In dit artikel zal ook geprobeerd worden het idee van Zhangs bewijs over te brengen. Of dit lukt is nog onzeker, het bewijs is niet helemaal triviaal.

Een geheel getal > 1 dat alleen zichzelf en 1 als deler heeft noemen we een priemgetal. De rij priemgetallen begint als volgt:

2, 3, 5, 7, 11, 13, 17, 19, 23, 29, 31, 37, 41, 43, 47, 53, 59, 61, 67, 71, 73, 79, 83, 89, 97, 101, 103, 109, 113, 127, 131, 137, 139, 149, 151, 157, 163, 167, 173, 179, 181, 191, 193, 197, 199, 211, 223, 227, ...

Bij het opschrijven van deze rij komt meteen al een stel vragen naar voren. Bijvoorbeeld, gaat deze rij oneindig lang door? Waarschijnlijk wel, maar we moeten er wel een bewijs voor geven. Dat zullen we in dit artikel op twee manieren doen, namelijk een bewijs afkomstig van Euclides en een ander van Euler. Nog een vraag die rijst. Gegeven X , hoeveel priemgetallen $\leq X$ zijn er? Kun je daar een eenvoudige formule

voor geven? Dat is wat lastiger te beantwoorden, maar het is in elk geval mogelijk formules te geven die deze aantallen bij grove benadering geven. Dit wordt mogelijk gemaakt door de zogenaamde Priemgetalstelling uit 1899. Nog een vraag: zijn er oneindig veel priemgetallen die op een 1 eindigen? Of een 7? Het antwoord daarop is ‘ja’ en wordt gegeven door een stelling van Dirichlet uit 1825, die zegt dat elke rij van de vorm

$$a, a + q, a + 2q, a + 3q, a + 4q, \dots$$

met $a, q \in \mathbb{N}$ en $\text{ggd}(a, q) = 1$, inderdaad oneindig veel priemgetallen bevat. In het bijzonder geldt dit voor de rij $10n + 1$ met $n = 1, 2, 3, \dots$

Maar zoals iedereen weet zijn er ook onopgeloste problemen. Bijvoorbeeld het *Goldbachvermoeden* dat zegt dat elk ge-

heel even getal ≥ 4 te schrijven is als som van twee priemgetallen. In de novelle van Dioxias, *Uncle Petros and the Goldbach Conjecture*, kunnen we lezen hoe iemand tot wanhoop kan worden gedreven door de mislukte pogingen een dergelijk vermoeden aan te tonen. Empirisch bewijsmateriaal is er in overvloed. Het getal 100 is bijvoorbeeld op 6 manieren som van twee priemgetallen en het getal 10000 op 165 manieren. De kunst is echter aan te tonen dat elk even getal op minstens één manier een som van twee priemgetallen is. Dat is tot nog toe niemand gelukt.

Een ander notoir probleem is het *priemtwelingvermoeden*. Merk namelijk op dat

$$(5, 7), (11, 13), (17, 19), (29, 31), (41, 43), (59, 61), (71, 73), (101, 103), \dots$$

paren opeenvolgende oneven getallen zijn waarvan beide elementen priem zijn. De vraag is of er oneindig veel van bestaan. Waarschijnlijk wel, maar dat is tot dusver nog niet aangetoond. Men heeft wel heel grote priemtwelingen gevonden, bijvoorbeeld

$$3756801695685 \cdot 2^{666669} \pm 1.$$

De enig bekende technieken om dit soort problemen aan te pakken is via de analytische getaltheorie, in het bijzonder de *cirkelmethode* en *zeefmethoden*. Dit zijn lastige technieken die heel veel gebruik

maken van slimme afschattingen en resultaten uit de Fouriertheorie en complexe functietheorie. De vooruitgang in concrete resultaten is over het algemeen heel langzaam. Maar soms zijn er verrassingen. Zo lieten bijvoorbeeld Terence Tao en Ben Green in 2008 zien dat er in de rij priemgetallen eindige rekenkundige rijen kunnen voorkomen van elke gekozen lengte. De tot nu toe (februari 2015) langst bekende rekenkundige rij heeft lengte 26 en wordt gegeven door

$$161004359399459161 + 47715109 \cdot 223092870 \cdot n$$

voor $n = 0, 1, \dots, 25$.

Een andere spectaculaire ontwikkeling is nog recenter. In het voorjaar van 2013 kondigde de Chinees-Amerikaanse wiskunde Yitang Zhang aan dat er een getal A bestaat zó dat er oneindig veel paren priemgetallen van de vorm $n, n + A$ zijn. Als A gelijk zou zijn aan 2, zou dit een bewijs van het priemtwelingvermoeden hebben betekend. Zhang kon alleen maar aantonen dat $A < 70.000.000$. Maar zelfs dit resultaat is uniek in zijn soort en eigenlijk door niemand voorzien. Het artikel, dat Zhang bij het prestigieuze *Annals of Mathematics* indiende, werd al vrij snel door de referees goedgekeurd en gepubliceerd.

Het verhaal rond deze doorbraak is een bijzondere. Wiskundige onderzoekers worden geacht hun meest creatieve werk rond hun 30ste te produceren. Zhang was 58 jaar oud en bovendien had hij tot dan toe weinig gepubliceerd op wiskundegebied. Op Wikipedia vind je een uitgebreide beschrijving van de levensloop van Zhang. Een interview kun je vinden in een artikel uit de *New Yorker* [4].

De grens van 70 miljoen in Zhangs stelling is een gevolg van de methode die hij gebruikte. Het was toen al duidelijk dat met een wat voorzichtiger benadering deze waarde wel kleiner gemaakt zou kunnen worden. En dat is precies wat gebeurde. Een paar weken na Zhangs publicatie stelde Terence Tao een zogenaamd Polymath-project voor. Een publiek project via internet waar in principe iedereen aan kon bijdragen. Het eerste deel van het project werd afgesloten met een grens van 4680. Tijdens dit project kwam de jonge postdoc James Maynard met een iets andere aanpak die eenvoudiger bleek te zijn en ook nog eens betere grenzen opleverde. Dit werd deel twee van het project dat uiteindelijk afgesloten werd met een grens van

246. Voor een overzicht van deze historie en de huidige stand van zaken, zie [5].

Zoals het er nu naar uitziet zullen er nieuwe ideeën nodig zijn om de grens 2 van het priemtwelingvermoeden te bereiken.

Het nadeel van veel recente opzienbarende ontwikkelingen in de wiskunde is dat de details vaak te ingewikkeld en specialistisch zijn voor een breder publiek van niet-ingewijden. Het aantal wiskundigen dat bijvoorbeeld de details van het bewijs van de laatste stelling van Fermat kent is zeer beperkt. De reden is dat je eerst enkele jaren moet wijden aan het bestuderen van onderwerpen als modulaire vormen, galoisrepresentaties, et cetera, die de basis vormen van het bewijs. Het prettige van Maynards bewijs is dat, als je bereid bent een 'black box' uit 1965 te accepteren, de afleiding relatief weinig voorkennis vereist, maar wel een flinke portie technische vaardigheid en uithoudingsvermogen. In principe zou een goede derdejaars wiskundestudent het bewijs moeten kunnen volgen, met eventueel wat begeleiding. En dit is inderdaad wat er gebeurd is, Ilja Nelen, vorig jaar nog bachelorstudent, heeft Maynards bewijs als onderwerp voor zijn bachelorscriptie gehad.

Gesterkt door deze ervaring zal ik aan het eind van deze tekst heel kort een indruk geven van de ingrediënten van het bewijs van Maynards resultaat. Maar voor het zover is geven we een inleiding in wat we weten van priemtwelingen, hetgeen hopelijk wat lichtere kost vormt.

Priemgetallen tellen

In deze paragraaf kijken we naar de oneindigheid van de verzameling priemgetallen en hoe vaak ze voorkomen onder de natuurlijke getallen (dat zijn gehele getallen ≥ 1).

Stelling 1 (Euclides). *Bij elk natuurlijk getal N bestaat er een priemgetal p dat groter is dan N .*

Hieruit volgt meteen dat er oneindig veel priemgetallen zijn. Je kunt bijvoorbeeld voor N de getallen 10, 100, 1000, ... kiezen.

Bewijs. Kijk naar het getal $N! + 1$, waarin $N!$ staat voor het product van alle getallen van 1 tot en met N . Deze heeft een priemdelers. Noem deze p . Stel dat $p \leq N$.

Dan is p ook een deler van $N!$. Maar een priemgetal kan niet twee opeenvolgende getallen delen. Dus $p \leq N$ kan niet gelden. Conclusie: $p > N$. $\square$

Hier is een wat sterker resultaat.

Stelling 2 (Euler). *De oneindige reeks*

$$\sum_{p \text{ priem}} \frac{1}{p}$$

is divergent. Dat wil zeggen, als je de inverse priemgetallen $\frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{5}, \frac{1}{7}, \frac{1}{11}, \dots$ achtereenvolgens bij elkaar optelt, dan gaat de rij gevonden deelsommen naar oneindig toe.

Uiteraard volgt hieruit dat er oneindig veel priemgetallen bestaan. Het bewijs hiervan is wat lastiger. Het is misschien wel bekend dat de som van de inverse natuurlijke getallen divergent is. Dus

$$\frac{1}{1} + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \dots = \infty.$$

We noemen dit de harmonische reeks. Om de divergentie in te zien breken we de reeks op in stukjes waarbij de som van elk stukje $> \frac{1}{2}$ is, als volgt:

$$\begin{aligned} \frac{1}{3} + \frac{1}{4} &> 2 \times \frac{1}{4} = \frac{1}{2}, \\ \frac{1}{5} + \dots + \frac{1}{8} &> 4 \times \frac{1}{8} = \frac{1}{2}, \\ \frac{1}{9} + \dots + \frac{1}{16} &> 8 \times \frac{1}{16} = \frac{1}{2}, \end{aligned}$$

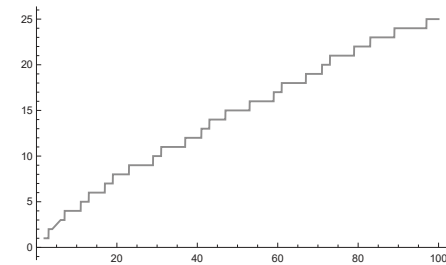
et cetera. De som van deze waarden $\frac{1}{2}$ gaat naar oneindig. Dit bewijs werd al in de veertiende eeuw gevonden door Nicole d'Oresme.

We bewijzen nu Eulers stelling.

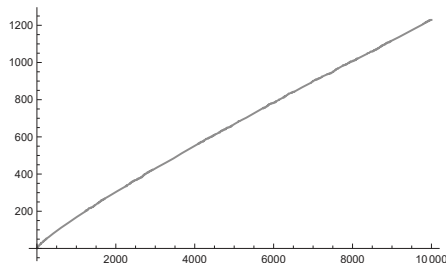
Bewijs. We kiezen N en merken allereerst op dat

$$\prod_{p \leq N} \left(1 + \frac{1}{p} + \frac{1}{p^2} + \dots\right) > \frac{1}{1} + \frac{1}{2} + \dots + \frac{1}{N}, \quad (1)$$

waarin het product over de priemgetallen $p \leq N$ loopt. Bij het wegwerken van de haakjes uit het product moet je uit elke factor een term nemen en vervolgens die termen vermenigvuldigen. Als je bijvoorbeeld de termen $\frac{1}{2}, \frac{1}{3}$ en 1 voor de andere factoren neemt, krijg je $\frac{1}{6}$. Dit wordt precies de term $\frac{1}{6}$ rechts. Op deze manier zie je dat het product links alle inversen van gehele getallen geeft, die samengesteld zijn met priemfactoren $\leq N$. Dat zijn in ieder geval 1 tot en met N . Vandaar het ongelijkheidsteken.



Figuur 1



Figuur 2

Beschouw nu de volgende ongelijkheid

$$\prod_{p \leq N} \left(1 + \frac{1}{p}\right)^2 > \prod_{p \leq N} \left(1 + \frac{1}{p} + \frac{1}{p^2} + \dots\right). \quad (2)$$

Deze volgt door in elke factor de ongelijkheid $(1+x)^2 > 1+x+x^2+x^3+\dots$ voor $x \leq \frac{1}{2}$ te gebruiken. Dit is een kleine opgave, die laat ik aan de lezer over. Nu nog een derde ongelijkheid,

$$\sum_{p \leq N} \frac{1}{p} > \sum_{p \leq N} \log\left(1 + \frac{1}{p}\right) = \log \prod_{p \leq N} \left(1 + \frac{1}{p}\right). \quad (3)$$

Deze volgt uit het feit dat we in elke term $x > \log(1+x)$ kunnen gebruiken voor $x > 0$ (NB: de log hier is de ln op school).

In de ongelijkheid (1) staat rechts de harmonische reeks. Die gaat naar oneindig als $N \rightarrow \infty$. Dus, de linkerzijde van ongelijkheid (1),

$$\prod_{p \leq N} \left(1 + \frac{1}{p} + \frac{1}{p^2} + \dots\right),$$

gaat ook naar oneindig als $N \rightarrow \infty$. Uit de ongelijkheid (2) concluderen we vervolgens dat $\prod_{p \leq N} \left(1 + \frac{1}{p}\right)$ naar oneindig gaat als $N \rightarrow \infty$. Tenslotte, met ongelijkheid (3) concluderen we dat $\sum_{p \leq N} \frac{1}{p}$ naar oneindig gaat als $N \rightarrow \infty$. $\square$

We gaan nu priemgetallen tellen en definiëren de zogenaamde priemtel functie

$$\pi(x) = \#\{p \leq x \mid p \text{ priem}\},$$

waarin we ‘aantal’ met het symbool # aan geven. Figuur 1 toont een grafiek van $\pi(x)$ voor $x \leq 100$. Hierin zien we duidelijk de

stapjes die gemaakt worden als we met x een priemgetal passeren. Deze onregelmatigheden verdwijnen (op het oog) als we een wat groter domein voor x kiezen, zie Figuur 2. De grafiek is nu een mooie vloeiende figuur geworden en men kan zich afvragen of er een eenvoudige formule bestaat om deze grafiek (bij benadering) te beschrijven. Hier is veel over gespeculeerd, maar het was Gauss die een duidelijk heuristisch argument gaf. Kies X heel groot en Δ klein ten opzichte daarvan. Het principe van Gauss zegt dat het aantal priemgetallen in het interval $[X, X + \Delta]$ ongeveer gelijk is aan $\Delta / \log X$. Met andere woorden, de gemiddelde dichtheid van de priemgetallen in de buurt van X is $1 / \log X$. Ter ondersteuning hiervan berekende Gauss een aantal tabellen zoals Tabel 1. Daarin is $\Delta = 10^5$ genomen en met $s(x)$ geven we het aantal priemgetallen in $[x, x + 10^5]$ aan. Merk op dat de getallen in de tweede en derde kolom meestal in hun eerste twee cijfers overeenkomen. Als we aannemen dat de dichtheid van de priemgetallen in de buurt van X gelijk is aan $1 / \log X$, dan is het aantal priemgetallen $\leq x$ gelijk aan de som van alle dichtheden van, zeg, 2 tot en met X en dus

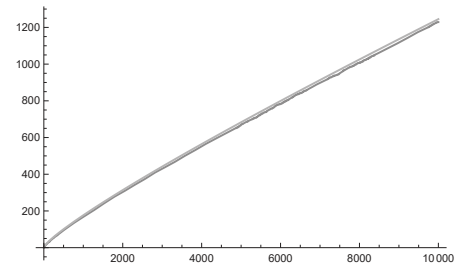
$$\text{li}(x) = \int_2^x \frac{dt}{\log t}.$$

In Figuur 3 wordt een plot getoond van de functies $\pi(x)$ en $\text{li}(x)$ samen. In deze plot geldt dat $\pi(x) < \text{li}(x)$, maar dat is niet altijd zo. Het blijkt namelijk dat $\pi(x) - \text{li}(x)$ oneindig vaak van teken wisselt. Voor welke x dat voor het eerst gebeurt weet men echter niet.

Dat $\pi(x)$ en $\text{li}(x)$ inderdaad dicht bij elkaar liggen wordt bevestigd door de *priemgetalstelling*:

x	$s(x)$	$10^5 / \log(x)$
10^8	5411	5428
10^9	4832	4825
10^{10}	4306	4342
10^{11}	4019	3948
10^{12}	3614	3619
10^{13}	3382	3340
10^{14}	3045	3102
10^{15}	2804	2895

Tabel 1



Figuur 3

Stelling 3 (Hadamard, De la Vallée-Poussin, 1899). *De verhouding van $\pi(x)$ en $\text{li}(x)$ gaat naar 1 als x naar oneindig gaat.*

Het blijkt dat $\text{li}(x)$ redelijk in de buurt ligt van $x / \log x$. Het is een kleine opgave om aan te tonen dat hun verhouding naar 1 gaat als $x \rightarrow \infty$.

Priemtwelingen tellen

We voeren nu een telfunctie voor priemtwelingen in:

$$\pi_2(x) := \#\{n \leq x \mid n \text{ en } n+2 \text{ priem}\}.$$

Het priemtwelingvermoeden komt dus neer op $\pi_2(x) \rightarrow \infty$ als $x \rightarrow \infty$.

Om een grof idee van $\pi_2(x)$ te krijgen herhalen we het idee van Gauss. Kies X heel groot en Δ iets kleiner. We vragen ons af hoeveel priemtwelingen er in het interval $[X, X + \Delta]$ voorkomen. We laten daartoe n van X tot $X + \Delta - 1$ lopen en bepalen de kans dat zowel n als $n+2$ priem zijn. Als deze kansen onafhankelijk zouden zijn is dat ongeveer $1/(\log X)^2$ waarmee het aantal priemparen op ongeveer $\Delta/(\log X)^2$ komt. Helaas is de kans dat $n+2$ priem is enigszins afhankelijk van de waarde van n . Als bijvoorbeeld toevallig n even is dan is $n+2$ zeker geen priem.

We kunnen dit omzeilen door alleen naar de oneven getallen in $[X, X + \Delta]$ te kijken. Het aantal priemgetallen in de verzameling is nog steeds ongeveer $\Delta / \log X$. Het aantal oneven getallen $\Delta/2$. De ‘kans’ dat een oneven getal in het interval priem is, is dus $2/\log X$. De ‘kans’ dat zowel n als $n+2$ voor oneven n priem zijn wordt $4/(\log X)^2$. Maal het aantal oneven getallen $\Delta/2$ geeft dit de verwachting van $2\Delta/(\log X)^2$ priemtwelingen in $[X, X + \Delta]$. Dit is tweemaal zo groot als wat we eerst hadden als verwachting. Een dergelijke correctie kunnen we voor alle kleine priemgetallen p uitvoeren en we vinden dat het verwachte aantal priemtwelingen tussen X en $X + \Delta$ gelijk is aan

$$C_2 \frac{\Delta}{(\log X)^2}$$

met

$$C_2 = 2 \times \prod_{\substack{p \text{ oneven} \\ \text{priem}}} \frac{(1-2/p)}{(1-1/p)^2} \approx 1.32.$$

Dit geeft aanleiding tot het volgende vermoeden.

Vermoeden 1 (Hardy, Littlewood, 1923),
Definieer

$$\text{li}_2(x) := C_2 \int_2^x \frac{dt}{(\log t)^2}.$$

Dan gaat de verhouding van $\text{li}_2(x)$ en $\pi_2(x)$ naar 1 als $x \rightarrow \infty$.

Om in te zien hoe goed deze benadering is geven we een tabel (zie Tabel 2). Hierin is $s_2(x)$ gelijk aan het aantal priemtwelingen in $x, x+10^5$. Dit lijkt goed te gaan. Helaas is er echter weinig bewezen. Met behulp van *zeefmethoden* heeft men bewezen dat er een constante $C > 0$ bestaat zó dat $\pi_2(x) < C \cdot \text{li}_2(x)$ geldt als x groot genoeg is. Een gevolg van deze bovengrens is de volgende stelling.

Stelling 4 (V. Brun, 1919). *De oneindige som*

$$\sum_{\substack{p \text{ en } p+2 \\ \text{priem}}} \frac{1}{p}$$

convergeert.

Dit is het eerste niet-triviale resultaat op het gebied van priemtwelingen. Voor we verder gaan noem ik nog een ander resultaat. Een getal n heet *bijna priem* als het ofwel priem is, ofwel een product van twee priemgetallen.

x	$s_2(x)$	$C_2 \times 10^5 / (\log x)^2$
10^8	377	389
10^9	341	307
10^{10}	262	249
10^{11}	182	205
10^{12}	171	172
10^{13}	142	147
10^{14}	123	127
10^{15}	117	110

Tabel 2



Links Viggo Brun (1885–1978) en rechts een postzegel ter ere van Jing-Run Chen (1933–1996)



Stelling 5 (Jing-Run Chen, 1973). *Er bestaan oneindig veel priemgetallen p zó dat $p+2$ een bijna priem is.*

Dit was destijds een opzienbarend resultaat en de Chinese posterijen hebben een postzegel aan het werk van Chen gewijd (zie Figuur 4).

Generalisaties

In plaats van priemtwelingen kunnen we ook naar andere paren kijken. Paren priemgetallen van de vorm

- $n, n+2$ heten priemtwelingen
- $n, n+4$ heten priemneven/nichten
- $n, n+6$ heten sexy paren, et cetera

Ook kunnen we drietallen nemen. Bijvoorbeeld $n, n+2, n+4$. Het is een eenvoudige oefening om te zien dat deze drie getallen alleen priem kunnen zijn als $n=3$. Voor $n > 3$ is minstens één van de drie getallen deelbaar door 3.

Kies nu een willekeurige rij van k gehele getallen $0 = a_1 < a_2 < \dots < a_k$. We beschouwen k -tupels $n+a_1, n+a_2, \dots, n+a_k$ en vragen ons af of er oneindig veel n bestaan zó dat elk van deze getallen priem is.

We noemen een priemgetal p een *obstructie* voor rijen van het type $n+a_1, \dots, n+a_k$ als voor elke gehele n minstens één van de getallen $n+a_1, n+a_2, \dots, n+a_k$ deelbaar is door p . We zagen net dat $p=3$ een obstructie is voor $n, n+2, n+4$. In het algemeen, als er een obstructie p is, dan moet gelden dat $p \leq a_k + 1 - a_1$.

We noemen de rij $a_1 < a_2 < \dots < a_k$ *toelaatbaar* als rijen van het type $n+a_1, \dots, n+a_k$ geen enkele obstructie hebben. Als bijvoorbeeld $p_1=2, p_2=3, \dots, p_k$ de eerste k priemgetallen zijn, dan is het niet lastig te zien dat $p_1, \dots, p_k$ een toelaatbare rij vormt. Er komen dus toelaatbare rijen van willekeurige lengte voor. Hier is een generalisatie van het priemtweeelingvermoeden:

Vermoeden 2. *Stel dat $a_1 < a_2 < \dots < a_k$ toelaatbaar is. Dan zijn er oneindig veel n zó dat $n+a_1, n+a_2, \dots, n+a_k$ allen priem zijn.*

Net als bij de priemtwelingen is er ook een vermoeden over de aantallen van dergelijke k -tupels onder een gegeven x , het zogenaamde k -tupel vermoeden van Hardy en Littlewood. En net als bij de priemtwelingen zijn we nog heel ver verwijderd van enige vorm van bewijs. Wel speelt het gebruik van toelaatbare rijen een belangrijke rol in het werk van Zhang en Maynard.

Gaten vullen

We gaan langzamerhand naar de vraag toe hoe klein de afstand tussen opeenvolgende priemgetallen kan zijn. Daartoe noteren we de rij priemgetallen met $p_1 < p_2 < p_3 < \dots < p_n < \dots$. In het bijzonder, $p_1=2, p_2=3$, et cetera.

Vraag: Kies $c > 0$. Kunnen we aantonen dat er oneindig veel n zijn zó dat

$$p_{n+1} - p_n < c \cdot \log p_n?$$

Om te illustreren hoe lastig deze vraag is, geven we een chronologisch overzicht van de bewezen resultaten op dit gebied.

1. Als $c > 1$ dan is het antwoord ‘ja’. Dit is een gevolg van de priemgetalstelling. Dit is een opgave voor de lezer.
2. Ja, een dergelijke c bestaat met $c \leq 1$ (Erdős, 1940). Dit is geen opgave voor de lezer meer, maar een diep resultaat.
3. Ja, voor elke $c \geq \frac{1}{2}$ (Bombieri–Davenport, 1966).
4. Ja, voor elke $c \geq \frac{1}{4}$ (Maier, 1988).
5. Ja, voor elke $c > 0$ (Goldston–Yildirim–Pintz, 2005).

We zien dat de ontwikkeling heel langzaam gaat. Het laatste resultaat van Goldston, Yildirim en Pintz uit 2005 was zelfs een onverwachte doorbraak. Er geldt nog iets meer.

Stelling 6 (GYP, 2005). *Voor elke $\epsilon > 0$ heeft de ongelijkheid*

$$p_{n+1} - p_n < (\log p_n)^{1/2+\epsilon}$$

oneindig veel oplossingen.

Na het bekend worden van deze stelling had men enige tijd hoop dat er een mogelijk bewijs richting priemtwelingen in zat. Helaas, na een aanvankelijk opti-



Yitang Zhang

misme werd het weer stil rond deze kwestie. Totdat in 2013 een volgende doorbraak plaatsvond.

Stelling 7 (Yitang Zhang, 2013). *Er zijn oneindig veel n zó dat*

$$p_{n+1} - p_n < 70.000.000.$$

Zoals in de inleiding gezegd, werd dit resultaat al snel vereenvoudigd en verbeterd door James Maynard. In de laatste paragraaf geven we een overzicht van de stappen van dit alternatieve bewijs.

Het bewijs van Maynard

De techniek is gebaseerd op telresultaten van priemgetallen in een rekenkundige rij. In de inleiding hebben we de stelling van Dirichlet genoemd, die zegt dat als $\text{ggd}(a, q) = 1$, dan bevat de rij $a, a + q, a + 2q, a + 3q, \dots$ oneindig veel priemgetallen. Het aantal priemgetallen $\leq x$ in deze rij geven we aan met $\pi(x, a, q)$. De verwachting is dat alle restklassen a modulo q die in aanmerking komen ongeveer evenveel priemgetallen zullen bevatten. Gegeven q , dan geven we het aantal getallen $0 < a \leq q$ met $\text{ggd}(a, q) = 1$ aan met $\phi(q)$, de Euler ϕ -functie. Bijvoorbeeld $\phi(4) = 2, \phi(5) = 4, \phi(6) = 2, \dots$ We verwachten dat voor gegeven q de $\phi(q)$ functies $\pi(x, a, q)$ allen ongeveer even snel met x zullen groeien. Dit werd voor het eerst kwantitatief gemaakt in de volgende stelling.

Stelling 8 (Siegel–Walfisz, 1936). *Bij elke $A > 1$ bestaat een $C > 0$ zó dat voor alle x ,*

$$\left| \pi(x, a, q) - \frac{\pi(x)}{\phi(q)} \right| < C \frac{x}{(\log x)^A}.$$

Omdat $\pi(x)$ ongeveer gelijk is aan $x/\log x$ zien we in het bijzonder dat de verhouding tussen $\pi(x, a, q)$ en $\pi(x)/\phi(q)$ naar 1 gaat als $x \rightarrow \infty$. Met andere woorden, de priemgetallen zijn ongeveer gelijk verdeeld over de restklassen $a \bmod q$.

Het blijkt dat voor het merendeel van de x -waarden het verschil tussen $\pi(x, a, q)$ en $\pi(x)/\phi(q)$ veel kleiner is dan dat gegeven door de stelling van Siegel–Walfisz. Dit wordt geaccentueerd door de volgende stelling die simpelweg een heleboel verschillen by elkaar optelt als we q over een groot bereik laten lopen.

Stelling 9 (Bombieri–Vinogradov, 1965). *Bij elke $A > 1$ en elke $\theta < \frac{1}{2}$ bestaat er een $C > 0$ zó dat voor elke x ,*

$$\sum_{q \leq x^\theta} \max_{\text{ggd}(a, q) = 1} \left| \pi(x, a, q) - \frac{\pi(x)}{\phi(q)} \right| < C \frac{x}{(\log x)^A}.$$

Dit is een stelling die met de zogenaamde *grote zeef* bewezen kan worden, zie bijvoorbeeld het boek van Friedlander en Iwaniec [1]. Het is het uitgangspunt voor het werk van Goldston, Yildirim en Pintz. Om hun werk te verbeteren richting priemtwelingen zou je eigenlijk een sterkere versie moeten hebben van Bombieri–

Vinogradov met een waarde van $\theta > \frac{1}{2}$. Ondanks alle pogingen in die richting is het nog niemand gelukt een dergelijk resultaat te bewijzen. De bijdrage van Zhang bestaat eruit dat hij een iets andere, verfijnde versie van Bombieri–Vinogradov ontwierp waarbij $\theta > \frac{1}{2}$ is. Dit was een onverwachte wending die niemand had voorzien. Het bewijs van Zhang is behoorlijk technisch en niet makkelijk uit te leggen. Het is daarom prettig dat Maynard met een heel ander idee kwam waarbij het gebruik van de stelling van Bombieri–Vinogradov volstaat. We kunnen deze stelling nu als een soort ‘black box’ gebruiken in de volgende schets van Maynards aanpak. Tussen haakjes, het bewijs van de stelling van Bombieri–Vinogradov is van dezelfde moeilijkheidsgraad als het vervolg van Maynard.

Met $\chi_{\mathbb{P}}(n)$ geven we de karakteristieke functie aan van de priemgetallen. Dat wil zeggen, $\chi_{\mathbb{P}}(n) = 1$ als n priem is en 0 indien niet. Zij $a_1, \dots, a_k$ een toelaatbare rij en kies $\rho > 1$. Stel dat we kunnen bewijzen dat

$$\sum_{N \leq n \leq 2N} \sum_{i=1}^k \chi_{\mathbb{P}}(n + a_i) > \rho N$$

voor grote N . Dat betekent dat er een $n \in [N, 2N]$ bestaat zó dat $\sum_{i=1}^k \chi_{\mathbb{P}}(n + a_i) > \rho$. En dus bevinden zich onder de getallen $n + a_1, \dots, n + a_k$ minstens $\lceil \rho + 1 \rceil$ priemgetallen. In het bijzonder, als $\rho > 1$ hebben we minstens twee priemgetallen in het interval $[n + a_1, \dots, n + a_k]$ te pakken. Door N steeds tweemaal zo groot te kiezen vinden we een oneindige rij van dergelijke n .

Helaas laat bovenstaande ongelijkheid zich lastig bewijzen. Gelukkig brengt de zeeftheorie hier uitkomst door gewogen sommen te nemen. Voor een geschikt gekozen gewichtsfunctie $w(n) \geq 0$ (later te kiezen) bekijken we de sommen,

$$S_1(N) = \sum_{N \leq n \leq 2N} w(n),$$

$$S_2(N) = \sum_{N \leq n \leq 2N} w(n) \sum_{i=1}^k \chi_{\mathbb{P}}(n + a_i).$$

Hierin is $S_1(N)$ de (positieve) som van de gewichten. Als we erin slagen om aan te tonen dat voor voldoende grote N geldt $S_2(N) > \rho S_1(N)$, dan zijn we om dezelfde reden als boven klaar.

We gaan nu geschikte gewichten $w(n)$ kiezen. Goldston, Yildirim en Pintz kozen $\delta > 0, R = N^{1/2-\delta}$ en vervolgens

$$w(n) = \left(\sum_{d \mid (n+a_1) \cdots (n+a_k), d \leq R} \lambda(d) \right)^2$$

waarin

$$\lambda(d) := \mu(d) \left(\frac{\log d}{\log R} \right)^{k+l}$$

voor een geschikte l . Hier is $\mu(d)$ de zogenaamde Möbius μ -functie die gedefinieerd wordt door $\mu(d) = (-1)^t$ als $d = p_1 \cdots p_t$ met alle p_i verschillend en 0 als d deelbaar is door een kwadraat > 1 .

Zoals we reeds gemeld hebben, leek deze keuze van $w(n)$ zeer effectief in 2005, maar niet effectief genoeg richting priemtwelingen. James Maynard bedacht een andere gewichtsfunctie, namelijk

$$w(n) = \left(\sum_{d_1 \mid (n+a_1), \dots, d_k \mid (n+a_k), d_1 \cdots d_k \leq R} \lambda(d_1, \dots, d_k) \right)^2$$

met $R = N^{1/2-\delta}$ en

$$\lambda(d_1, \dots, d_k) := \prod_{i=1}^k \mu(d_i) d_i \times \sum_{\substack{r_1, \dots, r_k \\ d_i \mid r_i}} \prod_{i=1}^k \frac{1}{\phi(r_i)} F\left(\frac{\log r_1}{\log R}, \dots, \frac{\log r_k}{\log R}\right)$$

voor een slim gekozen functie $F(x_1, \dots, x_k)$ op het domein in $\mathbb{R}^k$ gegeven door de ongelijkheden $x_i \geq 0$ voor $i = 1, \dots, k$ en $x_1 + \dots + x_k \leq 1$.

We willen nu graag een $\rho > 1$ vinden zó dat $S_1(N)/S_2(N) > \rho$ als N groot genoeg is. Door gebruik te maken van de gewichtsfunctie van Maynard en de stelling van Bombieri-Vinogradov kan men aantonen dat

$$\frac{S_1(N)}{S_2(N)} = \left(\frac{1}{2} - \delta + o(1) \right) \frac{\sum_{m=1}^k J_k^{(m)}(F)}{I_k(F)},$$

waarin

$$I_k(F) = \int_0^1 \cdots \int_0^1 F(t_1, \dots, t_k)^2 dt_1 \cdots dt_k$$

en

$$J_k^{(m)}(F) = \int_0^1 \cdots \int_0^1 \left(\int_0^1 F(t_1, \dots, t_k) dt_m \right)^2 dt_1 \cdots dt_{m-1} dt_{m+1} \cdots dt_k.$$

Met $o(1)$ bedoelen we een functie die naar 0 gaat als $N \rightarrow \infty$. Om het bewijs af te maken is het zaak een functie F te vinden zó dat

$$\frac{\sum_{m=1}^k J_k^{(m)}(F)}{I_k(F)} > 2.$$

Alleen dan kunnen we, door δ klein genoeg te kiezen, ervoor zorgen dat we een $\rho > 1$ vinden zó dat $S_1(N)/S_2(N) > \rho$ als N voldoende groot is. Het vinden van een geschikte F is een subtiel optimalisatieprobleem en het is bijzonder verrassend dat het inderdaad mogelijk is. We moeten daarvoor wel zoeken onder functies in minstens 105 variabelen. Dat wil zeggen, $k \geq 105$. Hier is een toelaatbare rij van lengte 105,

0, 10, 12, 24, 28, 30, 34, 42, 48, 52, 54, 64, 70, 72, 78, 82, 90, 94, 100, 112, 114, 118, 120, 124, 132, 138, 148, 154, 168, 174, 178, 180, 184, 190, 192, 202, 204, 208, 220, 222, 232, 234, 250, 252, 258, 262, 264, 268, 280, 288, 294, 300, 310, 322, 324, 328, 330, 334, 342, 352, 358, 360, 364, 372, 378, 384, 390, 394, 400, 402, 408, 412, 418, 420, 430, 432, 442, 444, 450, 454, 462, 468, 472, 478, 484, 490, 492, 498, 504, 510, 528, 532, 534, 538, 544, 558, 562, 570, 574, 580, 582, 588, 594, 598, 600.

Merk op dat $a_{105} - a_1 = 600$ en dat verklaart de grens in de volgende stelling.

Stelling 10 (James Maynard, 2014). *Er zijn oneindig veel n zó dat*

$$p_{n+1} - p_n \leq 600.$$



James Maynard

Latere verbeteringen hebben ervoor gezorgd dat de grens op 246 kwam. Door k nog groter te kiezen kunnen we

$$\frac{\sum_{m=1}^k J_k^{(m)}(F)}{I_k(F)},$$

en dus ρ , zo groot maken als we willen. Gevolg,

Stelling 11 (Maynard, 2014). *Stel $r \in \mathbb{N}$. Dan bestaat er een C_r zó dat*

$$p_{n+r} - p_n < C_r$$

voor oneindig veel n .

Met andere woorden, by elke $r \in \mathbb{N}$ bestaat een getal C_r zó dat er oneindig veel intervallen met lengte C_r zijn die minstens $r+1$ priemgetallen bevatten. $\square$

Referenties

- 1 J. Friedlander en H. Iwanies, Opera de Cribro, *AMS Colloquium Publications* 57 (2010), AMS.
- 2 J. Maynard, Small gaps between primes, *Annals of Math.* 181 (2015), 383–413.
- 3 Y. Zhang, Bounded gaps between primes, *Annals of Math.* 179 (2014), 1121–1174.
- 4 <http://www.newyorker.com/magazine/2015/02/02/pursuit-beauty>.
- 5 http://michaelnielsen.org/polymath1/index.php?title=Bounded_gaps_between_primes.

Jan Beuving

cabaretier, Zeist
janbeuving@gmail.com



Het keerpunt van Andreas Goetze

Als ik mijn scriptie nu teruglees, denk ik: heb ik dat geschreven?

Wie met Andreas Goetze praat, hoort meteen dat dit een man met een stem is. Hij studeerde wiskunde in Utrecht, maar koos daarna voor een conservatoriumopleiding. Nu verdient hij zijn brood als klassiek zanger. “Ik voel me bevoorrecht dat ik dit mag doen.”

Wat staat er momenteel op je muziekstandaard?

“De Hohe Messe van Johan Sebastian Bach. Ik mag de bassoli zingen bij het RUSKO, de reünistentak van het Utrechts Studenten Koor en Orkest. Verder ben ik een paar aria’s aan het instuderen die ik op wil nemen, zodat ik ze bij de aanmelding voor een auditie kan opsturen. Ik wil graag nog proberen om bij een operastudio binnen te komen. Dat is een studio verbonden aan een groot operahuis, die eigen stukken opvoert, en waar de leden ook af en toe kleine rolletjes in de grote producties mogen zingen.”

Ben je operaliefhebber?

“Ik ben het geworden. Ik ben er niet mee opgevoed, maar tijdens een invalbeurt bij de Dutch National Opera Academy — in *Le nozze di Figaro* — heb ik ontdekt dat het een muziekvorm is waarin je de volle breedte van je instrument in kunt zetten. De operahuizen kennen strenge leeftijds-grenzen voor toelating. Ik ben 32; als ik het nog wil, is het nu of nooit.”

Je bent niet met opera opgevoed, maar wel met klassieke muziek?

“Ja, ik kom uit een heel muzikaal gezin.

Er werd altijd gezongen aan tafel; mijn ouders zijn ook grote muzikliefhebbers. Ze zongen in hun studententijd al samen in het USKO. Tijdens het Festival Oude Muziek [jaarlijks in Utrecht, JB] bezochten ze soms wel drie concerten op een dag. Toen we oud genoeg waren, gingen wij als kinderen ook mee. En nog steeds mogen we ieder jaar uitzoeken wat we willen horen; dan bestellen zij kaarten voor ons.”



Andreas Goetze

Heb je ook op een koorschool gezeten?

“Nee. Hoewel er bij ons thuis veel werd gezongen, vond ik zingen als kind niet per se heel leuk. Ik ben vanaf mijn achtste jaar viool gaan spelen, en vanaf mijn elfde heb ik in jeugdorkesten gespeeld. Ik ging ook altijd naar de jeugdmuziekdagen van de Lutherse Werkgroep voor Kerkmuziek. Dat vond ik echt het einde. Daar was een kerkmusicus die voor iedereen die een instrument bespeelde, speciale partijen schreef. Ook als iemand alleen maar losse snaren op een cello kon strijken, schreef hij een partij. Daar werd overigens ook veel gezongen, dus dat hoorde er wel altijd bij.”

Heb je overwogen om conservatorium te gaan doen?

“Ik kende een aantal mensen die van de muziek hun beroep hadden gemaakt, en sommigen van hen vonden het op een gegeven moment niet meer zo leuk als voorheen. Ik wist ook niet of ik goed genoeg was. Maar ik ben vanuit een positieve gedachte wiskunde gaan studeren, hoor!”

Ja, want toen werd het dus wiskunde. Waarom?

“Mijn drie favoriete vakken op school waren Latijn, Grieks en wiskunde. Ik heb een studie klassieke talen overwogen, maar ik vond vooral het puzzelen aan zo’n ver-

taling leuk. De geschiedenis erachter interesseerde me iets minder. Omdat ik ook erg van bèta hield, heb ik diverse open dagen bezocht. Ik heb lang gedacht dat ik iets toegepast wilde doen. Maar bij de meeloopdagen op de technische universiteiten in Eindhoven en Delft merkte ik dat de studenten klaagden bij de harde wiskundevakken, terwijl ik dat juist leuk vond. In de practicumruimtes, met al die maquettes, voelde ik me minder thuis. Uiteindelijk heb ik gekozen voor een TWIN-studie wis-/natuurkunde in Utrecht. Ik heb in beide richtingen een propedeuse gehaald. Daarna heb ik voor wiskunde gekozen.”

Welke vakken vond je leuk?

“Vooral de theoretische vakken. Algebra, analyse, grondslagen... Ik was geen topstudent. Ik raakte regelmatig na een paar colleges de draad kwijt, en dan zat ik vlak voor het tentamen te proberen de stof van een half jaar in één week in mijn hoofd te proppen. Maar ik vond het wel heel boeiend.”

Ben je ook in die theoretische hoek afgestudeerd?

“Mijn eindschrijft had als titel *Intuitionistic Set Theory and Realizability*. Het intuitionisme is een stroming die rust op de ideeën van L.E.J. Brouwer. Bij *realizability* moet je denken aan een systeem dat aangeeft hoe degelijk een bepaalde wiskundige theorie is. Of ze deugt. Het kan zijn dat ik het niet helemaal goed uitleg hoor. Als ik mijn scriptie nu teruglees, kan ik nog wel de stappen volgen, maar ik denk vooral: heb ik dat geschreven?”

Wist je bij het schrijven al dat je van richting ging veranderen?

“Ja, ik was me in mijn laatste jaar aan het voorbereiden op audities voor het conservatorium. Zang, welteverstaan. Ik was steeds meer gaan zingen, en ik volgde vanaf mijn 20ste lessen bij Frans Huijts, die verbonden is aan het Rotterdams Conservatorium. Ik vroeg hem of ik een kans zou hebben. Hij dacht dat ik het muzikaal wel zou redden, maar dat ik het ellebogenwerkkarakter dat je als zanger moet hebben, zou missen. Toen heb ik twee weken nagedacht, en besloten om toch te auditeren. In Amsterdam, Den

Haag en Utrecht werd ik afgewezen. Maar in Rotterdam zagen ze wel genoeg potentie. Ik werd aangenomen en heb de opleiding afgerond.”

Je hebt dus tegen de vooroordelen op moeten zingen?

“Zo heb ik het niet ervaren. Ik heb nooit het gevoel gehad dat ik me moest bewijzen. Ik dacht gewoon: nu ga ik er keihard voor werken om mijn brood te verdienen als zanger. Want dat was wel het doel. De wiskunde als werkveld heb ik helemaal aan de kant durven zetten. Met dank ook aan Frans Huijts, die mij, toen ik in juni was aangenomen, het dringende advies gaf om in de zomer mijn scriptie af te ronden. Want dat zou me echt in de weg gaan staan. Dat was hard werken, maar het is gelukt. Ik gaf nog wel af en toe bijles in de wiskunde. Iets wat ik nog steeds graag doe. Het voordeel van wiskunde is dat het zwart-wit is. Een zanger krijgt soms te horen dat er nog een technische blokkade is, maar wat dat dan precies is... Dat heb je bij wiskunde nooit; daar is het vrijwel altijd helder wat het probleem is.”

Heb je nog iets gehad aan je wiskundevaardigheden tijdens je muziekopleiding?

“Vooral aan mijn wiskundig inzicht. Muziektheorie was voor veel studenten een noodzakelijk kwaad. Ik vond dat juist een van de leukste vakken. Het werd zelfs een hobby. Dan zat ik thuis voor mijn lol een sonate van Beethoven harmonisch te reduceren. Heerlijk. Ik geef ook al bijna zeven jaar les aan kinderen van het Nationaal Kinderkoor. Ik geef ze repertoires, maar ook solfège en theorie.”

Lukt het om als zanger aan de bak te komen?

“Ik heb steeds meer werk, en mijn inkomen vertoont een stijgende lijn. Maar het is geen vetpot. Met wiskunde had ik drie keer zo veel kunnen verdienen. In feite worden we als musici meestal gewoon slecht betaald, terwijl we meer dan voldoende werken. Ook ik haal de veertig uur per week met gemak.

Ik ben verbonden aan het Laurens Collegium in Rotterdam, en ik werk mee aan veel losse projecten als solist. Maar ik kom vanuit het koorzangen, en voel me

ook echt een koorzanger. Hoewel ik als solist het ver denk te kunnen schoppen, was het, als ik echt een stem had om als solist de wereldtop te bereiken, al wel ontdekt. Als koorzanger zit ik misschien wel dichterbij die top aan.”

Denk je nog weleens aan wiskunde als je zingt?

“Als ik echt aan het zingen ben, niet. Maar het komt wel van pas. Zeker in moderne muziek, als je bijvoorbeeld een driekwartsmaat in vier noten van gelijke lengte moet opdelen. Dan moet je gewoon elke tel in viertallen verdelen, en dan heb je twaalf eenheden. Dan kun je daarna vier groepjes van drie maken. Tellen is sowieso heel belangrijk in de muziek. De ritmes zijn soms complex, en wiskundig inzicht is dan wel een voordeel. Ik ben ook geneigd naar de structuur van de partituur te kijken, en zing precies wat er staat. In dat opzicht ben ik een analytische zanger. Maar dat kan je ook in de weg zitten.”

In welk opzicht?

“Op het conservatorium kreeg ik op een gegeven moment te horen dat ik technisch goed vooruit ging, maar dat het de mensen niet raakte. Alleen doen wat er staat is niet genoeg; je moet ook het gevoel toelaten. Dat heb ik echt moeten leren.”

Ooit was je bang dat je de muziek als beroep niet meer leuk zou vinden. Heb je die angst nu nog?

“Ik ben er niet bang voor. Soms heb je wel ‘moetjes’; dingen die je doet voor het geld. Maar ik doe genoeg wat me wel inspireert. Tachtig procent van wat ik doe is met heel veel plezier. Ik voel me bevoorrecht dat ik dit mag doen. Ik zie weleens zangers die in loondienst zijn bij een koor, die echt naar hun werk komen. Dat hoor je soms ook terug in hoe ze zingen. Dat wil ik nooit. Als het ooit zo wordt, ga ik alsnog met plezier in de wiskunde aan de slag.”

Goede suggesties voor een Nederlandse wiskundige met een keerpunt in zijn of haar carrière zijn welkom via keerpunt@nieuwarchief.nl.

Sonja Cox

Korteweg-de Vries Institute for Mathematics
University of Amsterdam
s.g.cox@uva.nl

Herman te Riele

Centrum Wiskunde & Informatica
Amsterdam
herman.te.riele@cwi.nl

Event BeNeLux Mathematical Congress (BeNeLuxMC 2016)

Bringing together the BeNeLux mathematical community

The BeNeLux Mathematical Congress 2016 took place in Amsterdam on March 22 and 23. It incorporated the yearly *Nederlands Mathematisch Congres* organized under auspices of the KWG. Sonja Cox and Herman te Riele of the Local organisation committee look back on this two-day congress.

This was not the first time a joint congress was organized: joint editions were also held in 1996 (Antwerpen), 2004 (Tilburg), 2005 (Gent) and 2008 (5ECM in Amsterdam). The motivation to host a congress together with Belgium and Luxembourg this year was to promote contacts within the BeNeLux mathematical community and to increase the number of participants — which was successful to some degree: there were many great speakers from Belgium and Luxembourg, but relatively few participants (31 of a total of 290).

The spirits at the conference were damped by the terrorist attacks in Brussels on March 22nd (this also caused some participants to cancel their participation). Nevertheless, it contained many highlights, such as the Beeger lecture by James Maynard, the first De Bruijn Prize awarded to Marius Crainic, the PhD Prize awarded to Geoffrey Janssens, and the public lectures by Ionica Smeets and Marcus du Sautoy in the grand hall of the Royal Tropical Institute. A more detailed description of various elements of the conference may be found below.

Altogether, the conference successfully brought together the BeNeLux mathematical community and offered an interesting and varied program. Therefore, we propose you all mark April 11 and 12, 2017, in your schedules, which is when the 53rd *Nederlands Mathematisch Congres* is to be held in Utrecht.

which was also the opening talk of the congress. This was a great success; James gave a talk on small gaps between primes that was truly interesting to mathematicians in all fields.

The Beeger lecture

The Beeger lecture is a biennial event established in 1992 by the Mathematical Centre (now CWI) to promote research and exchange of ideas in the field of algorithmic and computational number theory. The Beeger committee of 2016 (consisting of Jos Baeten, Frits Beukers, Jan Draisma, Serge Fehr and Hendrik Lenstra) had invited James Maynard (University of Oxford) to present the thirteenth Beeger lecture,

Plenary and semi-plenary talks

There were two plenary talks apart from the Beeger talk. On Wednesday morning, Ellen Baake (University of Bielefeld) spoke about ancestral selection graphs, and the closing lecture on Wednesday afternoon was given by Stefaan Vaes (KU Leuven) and concerned the classification of von Neumann algebras. In addition, there were four semi-plenary talks. On Tuesday morning,



James Maynard

Ivan Nourdin (University of Luxembourg) spoke on the Gaussian Product Conjecture and Mark Peletier (TU Eindhoven) gave a talk entitled 'From dislocations to plasticity: A mathematical upscaling challenge'. On Wednesday morning, Johannes Nicaise (Imperial College London) went 'From elementary number theory to string theory and back again', after which Marius Crainic spoke about Conn's linearization theorem, in honor of being awarded the first De Bruijn Prize.

De Bruijn Prize

The N.G. de Bruijn Prize was established in 2015 by KWG and is to be awarded in the years $y_n = 2016 + 2n$, $n \in \mathbb{N}_0$, for the best publication in the years $y_n - 3$ and $y_n - 2$ by a mathematician of Dutch origin or one working in the Netherlands. For the first award of the prize the award period 2013–2014 was extended with the two years 2011–2012. The prize is named after the Dutch mathematician N.G. de Bruijn (1918–2012) and is financed by Elsevier. Henk Broer (chair), Rob Tijdeman and Michel Dekking formed the jury for the first edition of the prize, which was awarded to Marius Crainic. De Bruijn's son and daughter attended the prize ceremony and presented the medal to the winner. The laudation by Henk Broer can be found elsewhere in this issue.

Public lectures and evening program

On Tuesday evening, Ionica Smeets (University of Leiden) and Marcus du Sautoy (University of Oxford) gave public lectures in the Royal Tropical Institute. These lectures were intended for all who have some interest in mathematics, and indeed attracted many mathematics students and even a couple of non-mathematicians. An audience of approximately 250 persons listened to Ionica Smeets explaining how (not) to manipulate data, and to Marcus du Sautoy giving examples of mathematics in the music, art and literature. The evening was concluded with a conference dinner in the splendid marble hall of the Royal Tropical Institute.

PhD Prize

Following the NMC tradition, a prize was presented to the PhD candidate who gave the best presentation of his/her research at the conference. The prize was financed by Peter and Ghica van Emde Boas of



The six candidates for the PhD Prize: Mihaela Mitici, Johan Commelin, Thomas Kleyntssens, Valentijn Karemaker, Emil Horobet, Geoffrey Janssens

Bronstee.com. Based on abstracts submitted in advance, the jury chose six candidates to present their work: Johan Commelin (Radboud University, Nijmegen), Geoffrey Janssens (Vrije Universiteit Brussel), Thomas Kleyntssens (Université de Liège), Valentijn Karemaker (Utrecht University), Emil Horobet (Eindhoven University of Technology) and Mihaela Mitici (University of Twente). The prize was won by Geoffrey Janssens, who spoke about identities of algebras and groups and their asymptotic behaviour. The jury consisted of Jan van Mill (chair), Arjeh Cohen, Jason Frank, Yvik Swan and Anton Thalmaier.

Parallel sessions

On Tuesday afternoon, four thematically grouped parallel sessions were held, each with three speakers. One session was devoted to mathematics for high-school teachers (see below), the other three concerned discrete mathematics, stochastics, and geometry. The themes of the Wednesday afternoon sessions were algebra, analysis and networks. The sessions corresponded roughly to the Dutch research clusters, with an additional session for networks.

Teacher's session

Derk Pik (UvA) and Willem Hoekstra (VU) organized a special session for high school teachers in mathematics. Three speakers were invited to share their ideas on the 'profielwerkstuk' in mathematics: Saskia van der Jagt (VU Amsterdam and Coorn-

hert Gymnasium, Gouda), Sven Aerts (4e Gymnasium, Amsterdam) and Marijke Mahieu (Stedelijk Gymnasium, Leiden). In addition, the high-school students Romy Rouwendaal and Fleur Piers (Kennemer College, Beverwijk), Rainier van Es (Zwijsen College, Veghel) and Eytan Cortissos (JSG Maimonides, Amsterdam) were invited to present their 'profielwerkstuk', thereby competing for the first Pythagoras Prize for the best 'profielwerkstuk' in mathematics. Eytan Cortissos was elected the winner of the prize.

Honorary members KWG

At the annual general member assembly of the KWG held on Tuesday, March 22nd, two new honorary members of the KWG were appointed: Rien Kaashoek and Henk van der Vorst. Interviews with both honorary members can be found elsewhere in this issue.

Organisation

Scientific committee: Lenny Taelman (chair, University of Amsterdam), Jan Bouwe van den Berg (VU Amsterdam), Karel Dekimpe (KU Leuven), Bas Edixhoven (Leiden University), Frank den Hollander (Leiden University), Erik Koelink (Radboud University), Martin Schlichenmaier (University of Luxembourg), Yvik Swan (Université Liège), Gabor Wiese (University of Luxembourg).

Local organisation: André Ran (chair, VU Amsterdam), Sonja Cox (University of Amsterdam), Herman te Riele (CWI). ◀

Henk Broer

Johann Bernoulli Institute for Mathematics and Computer Science
University of Groningen
h.w.broer@rug.nl

Event Award ceremony N.G. de Bruijn Prize

Laudation for Marius Crainic

At the BeNeLuxMC 2016, on 23 March, the N.G. de Bruijn Prize has been awarded to Professor M.N. (Marius) Crainic. At this event the chairman of the jury, Henk Broer, delivered this speech in which he gives a brief review of De Bruijn's life and work, describes the background of the prize and explains why Crainic is awarded this prize. Marius Crainic received the prize from Frans de Bruijn, son of N.G. de Bruijn.

Nicolaas Govert (Dick) de Bruijn 1918–2012 was a prominent and broad Dutch mathematician who was pioneering and leading in various directions, ranging from Analysis, Number Theory & Discrete Mathematics to Proof-Checking (in particular the Automath project), Logic & Computer Science. A Special issue

Jan Willem Klop, Rob Tijdeman and Jan Wiegerinck (eds.), *Indag. Math.* 24/4 (500 pages): *In Memory of N.G. (Dick) de Bruijn*

was published in 2013. This issue contains a biography authored by Klop, followed by an extensive bibliography.

Start of the career

I will now tell a few things from his life. Dick de Bruijn's career initially ran via acquiring a number of teacher certificates, a route that was quite common for Dutch mathematicians at the time (Kloosterman, Van Dantzig, Van der Waerden, Dijksterhuis).

Thesis

In 1943 De Bruijn's ceremonial PhD defence (cum laude) on the thesis *Over Modulaire Vormen van meer Veranderlijken* ('On Modular Forms of Several Variables') took place under Koksma (at the VU Amsterdam). The set-up had already been approved of by

Kloosterman at Leiden University, which at that time was closed down by the German occupiers.

Summary of De Bruijn's career

In De Bruijn's own words (on the TU/e website): "At the TU/e I always was a kind of outlier. When I was appointed here in 1960, I had already had gone through quite a career. I had been a professor in Delft for six years and after that in Amsterdam for eight years (at that time the Mecca of the Dutch mathematics). To everyone's astonishment, I left for a tiny 'TH', looked down upon by everyone. But I made the move anyway and I have greatly enjoyed it. I was more or less grabbed by Professor Jaap Seidel. He offered special facilities, although never written down. He promised that I would never have to teach elementary courses and also never would have to do any administration. In fact, nowadays such a position would be called *research professor*. I have had relatively few master students and only about ten PhD students, also not particularly much. In my position I could easily switch to other topics. This also has to do with the structure of my character. I have a relatively bad memory. Then one never can become a real scholar, in the sense that one controls an entire field and keeps track of all literature. I have done a lot of pioneering work and often have started on new subjects.

I then made a lot of progress and next dived into something else which interested me. This operating procedure did have some success."

The latter sentence I would definitely call an understatement. In addition to this, I mention here that De Bruijn was an active member of the Royal Netherlands Academy of Arts and Sciences (KNAW) and a honorary member of the Royal Dutch Mathematical Society (KWG). As he already said himself, he was a professor at the Technical University Delft, the University of Amsterdam and, for many years, at the Technical University of Eindhoven.

The prize

The biennial N.G. de Bruijn Prize was installed in 2015 by the Royal Dutch Mathematical Society (KWG). It has been made available by Elsevier to the Dutch mathematical community in the light of the successful Elsevier-KWG cooperation regarding the mathematics journal *Indagationes Mathematicæ*. I should mention that the KWG, as the owner of the journal, greatly benefits from the ensuing royalties. The prize is awarded for the first time at the BeNeLuxMC 2016.

I like to mention here that Dick de Bruijn himself has published a lot of his work in this journal during the 1940's–70's. For those who like to know more details on this subject, I refer to the paper

Jaap Korevaar and Rob Tijdeman, *De geschiedenis van Indagationes Mathematicæ*, *Nieuw Archief voor Wiskunde* 5/14, March 2013.

Candidates for the N.G. de Bruijn Prize should have the Dutch nationality, live in the Netherlands or be associated with a Dutch university. This, first, N.G. de Bruijn Prize is awarded to the author of the best mathematical work that appeared in refereed journals over the years 2011–2014. It consists of a certificate, a medal in remembrance of N.G. de Bruijn and a certain amount of money, which will be awarded after the lecture. The jury of the 2016 N.G. de Bruijn Prize consisted of Professors Rob Tijdeman, Michel Dekking and myself, installed by the KWG Board. Since I acted as the chairman I have to deliver this speech. We were fortunate to have four excellent candidates for this occasion.

Marius Crainic

Marius Crainic, born February 3, 1973 in Aiud, Romania, obtained his masters degree in mathematics in 1996 from the Radboud University, Nijmegen. He received a number of distinctions, among them the André Lichnerowicz Prize in Poisson Geometry in 2008. His research interests lie in the broad area of (differential) geometry and (algebraic) topology.

Further scientific information

From 1996–2000 Crainic was a PhD student at Utrecht University, under the direction of Ieke Moerdijk. The thesis was entitled *Cyclic Cohomology and Characteristic Classes for Foliations*. After that he held various positions, e.g. at the University of California at Berkeley and at the Institut Henri Poincaré in Paris. Between 2002–2007 Crainic was a Research Fellow of the Royal Netherlands Academy of Arts and Sciences (3 + 2 years), after which he became a permanent staff member at Utrecht University. Since 2012 Marius Crainic is professor at the Mathematics Department of Utrecht University, leading the Poisson Geometry Group that contains a lot of enthusiastic PhD students. He is a member of the NWO research cluster Geometry and Quantum Theory (GQT), of which he also is the acting director.

Awards

Moreover he obtained several awards, like both an NWO Vidi in 2007 and an NWO Vici grant. The latter was awarded in 2013 for the proposal entitled ‘Poisson Geometry Inside Out’. For the period 2011–2016 an ERC starting Grant was obtained and several NWO Vrije Competitie scholarships.



Prizewinner Marius Crainic flanked by N.G. de Bruijn's daughter J.A. Dool-de Bruijn and son F.W. de Bruijn

Special Issue *Indagationes Mathematicae*

I also like to mention the 2013 Special Issue

Marius Crainic and Ori Yudilevich (eds.), *Indag. Math.* 25/5 (300 pages): *Poisson Geometry in Mathematical Physics*,

which was linked to the conference and summer school ‘Poisson 2012’, where Crainic chaired the organizing committee.

Management

He moreover was the scientific organizer or co-organizer of various other national and international activities, like a 2007 Oberwolfach meeting ‘Poisson Geometry and Applications’, the meeting ‘Poisson 2010’, the workshop ‘Alan’s Day’ in honour of Alan Weinstein’s honorary doctorate at Utrecht University, a ‘Conference Geometry and Quantum Theory’, to mention a few.

I very well remember Marius as the inspiring co-ordinator of the *MRI master classes*, where I recall that in the past the Mathematical Research Institute was a co-operation of the Universities of Groningen, Nijmegen, Twente and Utrecht.

For more details see Marius’s CV.

Why the prize is given

All the above has nothing to do with obtaining the N.G. de Bruijn Prize. To explain what it has to do with I continue by quoting from the report from a referee, whose name obviously has to remain secret here, but who is a highly influential mathematician and mathematical physicist. I apologize that the text now becomes a bit more technical.

“Among the papers which were published in the period 2011–2014, I believe that the most influential has been, and will be,

A.C. Abad, M. Crainic, Representations up to homotopy of Lie groupoids, *J. Reine Angew. Math.* 663 (2012), 91–126,

along with the follow-up paper

A.C. Abad, M. Crainic, Representations up to homotopy and Bott’s spectral sequence for Lie groupoids, *Adv. Math.* 248 (2013), 416–452,

both of them joint work with Crainic’s (now former) student Camilo Arias Abad.

Representations up to homotopy have become *the* essential tool for understanding the deformation theory of Lie algebroids and Lie groupoids, objects of continually increasing interest in Poisson geometry, field theories in mathematical physics, and deformation theory itself.

The deformation theory of Lie *algebras* relies on cohomology with coefficients in the adjoint representation. There is no corresponding representation in the ordinary sense for Lie algebroids, because of the term involving the differential d_f in the formula for $[X, fY]$, where X and Y are sections of a Lie algebroid and f is a smooth function.

In a 2008 paper, Crainic and Moerdijk had found, by a rather special construction, a replacement for the adjoint representation which enabled them to begin a study of deformations of Lie algebroids. But it was not until the work of Abad and Crainic that this construction was put in its natural setting, that of representations up to homotopy, which may be seen as a natural extension of the notion of representation in which vector spaces are replaced by complexes. Thus, this work fits into the currently hot field of ‘infinity algebra’, where (sometimes infinite) complexes are used to understand the algebra of situations where basic identities like linearity or the Jacobi identity are satisfied only up to correction terms involving differentials.

The major conceptual advance given by the notion of representation of homotopy has resulted already in important progress in deformation theory, as well as in further work extending the notions of differential geometry (such as foliations) from the tangent bundle of a manifold to a general Lie algebroid. I expect this subject to continue and develop, with the work of Abad and Crainic at its heart.”

For me it is an honour and a pleasure to invite Marius Crainic now to deliver the 2016 N.G. de Bruijn lecture. ☼

Mark Veraar

bestuurslid KWG
Faculteit EWI, TU Delft
m.c.veraar@tudelft.nl

Interview Erelid Rien Kaashoek

Ruimer bereik in onderzoek en bestuur

Rien Kaashoek, geboren te Ridderkerk in 1937, is een van Nederlands bekendste wiskundigen in de operatorentheorie. Hij is onder andere (co-)auteur van ruim tweehonderd artikelen en negen boeken. Rien is gepromoveerd in Leiden en op jonge leeftijd hoogleraar geworden aan de Vrije Universiteit in Amsterdam. Inmiddels is hij al zo'n vijftien jaar met emeritaat en is nog volop actief in het onderzoek. Samen met Henk van der Vorst heeft hij de nota *Nieuwe dimensies, ruimer bereik* geschreven (zie NAW juni 2002), waarin de grondslag gelegd wordt voor de wiskundeclusters en voor Mastermath. Na drie jaar lobbyen resulteerde de nota in voldoende financiële middelen om de start van de eerste drie clusters — van de geplande zes — mogelijk te maken (zie NAW juni 2005). Rien en Henk zijn tijdens het afgelopen BeNeLux Mathematisch Congres op de Algemene Ledenvergadering benoemd tot ereleden van het Koninklijk Wiskundig Genootschap. Hieronder een interview met een nieuw erelid.

Rien Kaashoek bezocht in zijn jeugd meerdere scholen, onder andere in Ridderkerk, Vlaardingen en Boskoop. Zijn vader verbeterde zijn positie als hoofdonderwijzer geregeld door naar een andere plaats te verhuizen. Uiteindelijk bracht hij zijn middelbare schooltijd door aan de hbs in Alphen aan den Rijn. Hij groeide op in een gezin van zeven kinderen, vier meisjes en drie jongens, waarvan hij de op twee-na-jongste was. Na het afronden van de hbs ging hij wis- en natuurkunde studeren in Leiden. De schoonheid en helderheid van de vlakke meetkunde was een van de belangrijkste redenen voor deze keuze.

Wiskunde zit wel in de familie. Zijn vader had een LO-akte (Lager Onderwijsakte) wiskunde. Zijn jongere broer, ook een Leidse student, begon als wiskundeleraar op een middelbare school en promoveerde wat later in de wiskunde op de Erasmus Universiteit in 1988. Verre voorvaders in de zeventiende eeuw waren landmeters.

Kun je iets vertellen over je promotietijd?

"Ik studeerde af bij Adriaan Zaanen (1913–2003) in de functionaalanalyse. Wat te doen na het doctoraalexamen? Promoveren? Zal ik verder gaan in de functionaalanalyse of zal ik iets anders doen? Toen zei de hoogleraar Hendrik Kloosterman (1900–1968) tegen mij: 'Ga jij maar functionaalanalyse doen. Dat is een nog betrekkelijk nieuw vak, en er is nog een hoop te doen.'"



Rien Kaashoek met zijn promotor Adriaan Zaanen

Dus de keuze om bij Zaanen te promoveren was vooral vanwege het onderwerp?

"Ja, en vanwege zijn persoon. Ik kende Zaanen vanaf mijn tweede studiejaar. Hij was toen net vanuit Delft naar Leiden gekomen en gaf het college Analyse 2. Zijn colleges waren altijd glashelder en deden me denken aan mijn eerste jaar op de hbs, waar de meetkunde ook zo prachtig helder was. Zaanen was erg op research gericht. Dat kon je goed merken. Hij kende alle mensen in de functionaalanalyse die iets voorstelden heel erg goed."

Hoe lang duurde die promotietijd?

"Dat ging heel snel. Ik was ruim binnen de vier jaar gepromoveerd en nog wel cum laude ook. Het begon al heel mooi. Toen Zaanen mij had aangenomen zei hij: 'Ik ga eerst met sabbatsverlof.' Hij ging naar Caltech in Pasadena in Californië om samen te werken met zijn eerste promovendus Wim Luxemburg, die daar inmiddels hoogleraar was. Hij zei toen tegen me: 'Ja, ik ga dus weg, je moet het even alleen doen. Ik heb een artikel voor je waarvan ik denk dat het goed is als je het leest. Dan ga ik er ook van uit dat als ik terugkom je wel een probleem hebt gevonden.' Dat was een artikel van Tosio Kato en het ging over storingstheorie van wat we tegenwoordig Fredholm-operatoren noemen [5]. In mijn proefschrift heb ik een resultaat uit dit artikel verbeterd (zie [3, 4]). Ik kijk met veel genoegen terug op die tijd in Leiden. Zaanen heeft me op een goed wiskundig spoor gezet."

Heel erg opvallend in je carrière is je samenwerking met Israel Gohberg. Je hebt enorm veel met hem geschreven, onder andere de boeken 'Classes of Linear Operators' [1]. Ook heb je veel over hem geschreven. Zou je in een paar zinnen iets kunnen zeggen over hem en de samenwerking met hem?

"Het begint eigenlijk al bij mijn promotie. Ik vertelde je eerder over het artikel van Kato. Omstreeks diezelfde tijd verscheen een artikel van Gohberg en Krein waar dezelfde soort vragen werden gesteld, maar in een andere context en met totaal andere voorbeelden. Kato deed differentiaalvergelijkingen en de operatoren waren onbegrensd, en Gohberg en Krein ontwikkelden de storingstheorie voor begrensde operatoren en de voorbeelden betroffen: Wiener-Hopf-integraaloperatoren en Toeplitz-operatoren, et cetera. Ik was behoorlijk onder de indruk van dat artikel. Dat was mijn eerste (virtuele) contact met Gohberg. De tweede keer ontmoette ik Gohberg in persoon op een conferentie in Tihany, Hongarije, in 1970. Gohberg sprak geen Engels en ik sprak geen Russisch, dus de communicatie was niet erg succesvol. We hebben wel een en ander uitgewisseld. Hij had ook een hele vriendenkring om zich heen en ik kwam er niet zo gemakkelijk tussen. In januari 1975 ging ik voor een sabbatical naar de University of Maryland in College Park vlak bij Washington DC. Mijn gastheren waren David Lay en Seymour Goldberg. Seymour wist dat Gohberg geëmigreerd was naar Israël in mei 1974. Hij zou begin 1975 een kennismakingstour maken door de Verenigde Staten. Zijn eerste stop was in College Park en dus kwam ik hem geheel onverwacht en niet gepland weer tegen. Ik woonde met mijn gezin in een huis vlak bij de campus. Gohberg had een kamer bij iemand vlak bij mij in de buurt. Wij liepen vaak samen terug van de universiteit naar huis. Vanaf die tijd is hij geregeld bij ons op bezoek geweest. Hij at vaak mee of kwam 's avonds langs. Ook samen met David Lay. Gohberg gaf een serie lezingen in College Park en voor een klein gehoor, op de kamer van Seymour Goldberg, een 'problem session'. In die periode is het idee van linearisatie van operatorfuncties via extensie en equivalentie ontstaan [2]. Dat is het begin van onze samenwerking geworden. Twee maanden hebben we toen met elkaar gewerkt. Eind 1975 kwam hij op bezoek in Amsterdam

en logeerde bij ons thuis. Zo is een hele warme relatie ontstaan. Hij was een man met visie en van grote humor. Als hij bijvoorbeeld geweten had dat ik erelid van het KWG was geworden, dan zou zijn vraag ongetwijfeld geweest zijn: 'En wat krijg je daarvoor?' Vanaf 1975 hebben we elkaar eigenlijk ieder jaar gezien in Tel Aviv, Israël, of in Amsterdam. Later heeft hij aan de VU een aanstelling als deeltijds hoogleraar voor twee dagen in de week gekregen. Hij kwam dan steeds een paar maanden per jaar naar Amsterdam. In de operatorentheoriekring werden we de Amsterdamse maffia genoemd. In 2009 is Gohberg overleden. Hij heeft voor mij ongelooflijk veel betekend, als mens en als wiskundige. En wat het laatste betreft ook voor Nederland."

Je hebt heel veel plekken bezocht in de wereld. Welke plek is je het meeste bijgebleven?

"De Verenigde Staten heeft veel indruk op mij gemaakt. UCLA in Los Angeles vond ik fantastisch. Daar was ik een jaar in 1965–1966. Er was een enorme wiskundeafdeling met een stuk of tien hoogleraren in de functionaalanalyse. Ik heb er ook nog college gelopen over onderwerpen waar ik in Nederland niets over had gehoord. College Park had zo'n zelfde prachtige groep in de functionaalanalyse en operatorentheorie. Dat geeft een omgeving die buitengewoon inspirerend is. Het idee van een wekelijks seminarium op je eigen vakgebied met me-

dewerkers, gevorderde studenten en gasten heb ik in de Verenigde Staten geleerd en in Amsterdam in praktijk gebracht. Ik ben natuurlijk ook heel veel in Israël geweest bij Gohberg in Tel Aviv en Leonia Lerer op de Technion in Haifa. Ik leerde het land en de mensen kennen. En ook de Joodse religie."

In 1985 was je betrokken bij de organisatie van IWOTA (International Workshop on Operator Theory and its Applications). Je bent hier nog steeds bij betrokken. Je zit nog steeds in de board. Kun je daar iets over vertellen?

"IWOTA is ontstaan als een 'satelite conference' bij de MTNS-conferenties (MTNS staat voor Mathematical Theorie of Network and Systems). Vanaf het eerste begin was het de bedoeling wiskundigen op het gebied van de operatorentheorie en ingenieurs op het gebied van de mathematische systeem- en regeltheorie bij elkaar te brengen. In de jaren zeventig wordt het helder dat wat wij in de wiskunde een karakteristieke operatorfunctie noemen voor de ingenieurs in de systeemtheorie een overdrachtsfunctie is. De rol van de functie is in de twee gebieden heel verschillend. Bij systeemtheorie beschrijft de functie de transformatie van de input naar de output, terwijl in de wiskunde de functie wordt gebruikt om beter zicht te krijgen op de eigenschappen van wat de ingenieurs de 'state operator' noemen. Er waren heel veel andere dwarsverbanden en daaruit is



Het bestuur van het KWG in 1978. Van links naar rechts: Wil van Est, Rien Kaashoek, Herman Bavinck, Hans Freudenthal, Cor Baayen, Emile Bertin, Theo Korthagen, Willem Wesselijs, Joop Sparenberg.

de behoefte aan IWOTA ontstaan. Een van de initiatiefnemers was Bill Helton die in 1981 de eerste IWOTA organiseerde in Santa Monica, Californië. Israel Gohberg werd de drijvende kracht en president van de Steering Committee. De regels waren simpel: de Steering Committee kiest de locatie en de ‘chief organizer’ die dan in overleg met het dagelijks bestuur het programma bepaalt. IWOTA was vier keer in Nederland (Amsterdam 1985 en 2014, Rotterdam 1989 en Groningen 1998) en MTNS drie maal (Delft 1979, Amsterdam VU en CWI 1989, Groningen 2014). Nieuw is dat sinds 2003 ook IWOTA’s plaatsvinden zonder directe relatie met MTNS wat een verbreding van het spectrum van onderwerpen met zich meebracht. Na het overlijden van Gohberg, in 2009, werd ik voorzitter van het dagelijks bestuur van de Steering Committee. Heel veel werk kost het niet; ik hou me aan de simpele regels. Tussen haakjes, eind vorig jaar heeft IWOTA een mooie Wikipedia-pagina gekregen.”

Je bent in de honorary and advisory board van ‘Integral Equations and Operator Theory’. Wat heb je voor dit tijdschrift betekend?

“Dit is eigenlijk een vraag voor de Editor. Ik ben vanaf het begin in 1979 lid van de redactie geweest. Heb veel redactioneel werk voor IEOT gedaan en ook veel gepubliceerd in het tijdschrift. In 2008 ben ik met zeven anderen, ook redactieleden van het eerste uur, overgeplaatst naar de honorary and advisory board. Een nieuwe generatie nam het werk over in de redactie. Het kan niet beter.”

Ik zou het ook graag nog over de bestuurlijke taken hebben die je in Nederland hebt verricht. Welke rol heb je voor het KWG gespeeld?

“In de jaren 1980–1981 ben ik voorzitter geweest, met ons erelid Cor Baayen als mijn directe voorganger. In die periode heeft het bestuur de vierde serie van het *Nieuw Archief voor Wiskunde* ingevoerd. De derde serie was gewoon een klassiek wiskunde tijdschrift. Mijn idee toen was dat het tijdschrift van karakter moest veranderen, niet alleen ‘research papers’ maar meer een tijdschrift zoals het toenmalige *American Mathematical Monthly*. Met verschillende rubrieken, zoals expository papers, historical notes, recreational mathematics, papers of educational nature,



Het bestuur van het Thomas Stieltjes Instituut, 25 mei 1999. Voorste rij: Nico Temme, Rob Tijdeman, Willem van Zwet, Rien Kaashoek, Fred Bakker. Middelste rij: Gerrit van Dijk, Tom Koornwinder, Roel Stroecker, Jan Aarts, John Einmahl. Achterste rij: Peter van Stevenhagen, Michel Dekking.

industrial mathematics, en met daarbij, als van oudsher, natuurlijk ook een problem section. Dat moest besproken worden. Het bestuur organiseerde een overleg met plusminus twintig personen. Er was veel discussie, veel heen en weer gepraat, veel emoties. Ik vreesde dat we nooit tot een beslissing zouden komen, dat de vergadering in wanorde zou eindigen. Toen heb ik gezegd: ‘Nu is er lang genoeg gepraat. Dit is het voorstel.’ Het werd in één stemmingsronde aanvaard. Dat was een prettige verrassing voor alle aanwezigen, en ik dacht: zo doen we het nooit weer. De vierde serie heeft het een aantal jaren goed gedaan. Toen kwam de vijfde serie, en die ziet er natuurlijk ook fantastisch uit.

Ik heb het genoeg gehad in 1981 de Brouwermedaille te mogen uitreiken aan de hoogleraar Harry Kesten (Cornell University, waarschijnlijkheidsrekening). Dankzij hem ontdekte ik dat je toen in Amsterdam met een groot gezelschap alleen

maar kosjer kon eten in de eetzaal van het KLM-kantoor in Amstelveen.

Daarna heb ik een aantal jaren geen bestuurswerk gedaan. Dat veranderde in 1992 toen de onderzoeksscholen werden opgericht, vijf in totaal. Van 1992 tot 2002 was ik voorzitter van het Thomas Stieltjes Instituut. Er kwam geld om workshops te organiseren, buitenlandse gasten uit te nodigen en cursussen te organiseren voor promovendi. De onderzoeksscholen waren ten dele geografisch georganiseerd en voor een deel alleen gericht op een deelgebied, beide met voor- en nadelen. Stieltjes, MRI en EIDMA zijn inmiddels overgegaan in WONDER. DISC (the Dutch Institute for Systems and Control) bestaat nog steeds.”

Was je verrast toen je benoemd werd tot erelid van het KWG?

“Absoluut. Ik hoorde dat het iets te maken had met de nota *Nieuwe dimensies, ruimer bereik*. Het document is van 2002. In de jaren negentig heeft de Nederlandse wiskunde een moeilijke tijd gehad. De informatica was een zelfstandig wetenschapsgebied geworden, los van de wiskunde. Het aantal studenten ging omlaag met de gebruikelijke gevolgen voor de omvang van de staf. We weten nu dat 2002 een absoluut dieptepunt was. Het doel van de nota was — ik citeer — ‘beleidsmedewerkers bij de overheid, bestuurders van universitaire instellingen en het bedrijfsleden een leidraad te verschaffen met betrekking



Harry Kesten ontvangt uit handen van Rien Kaashoek de oorkonde behorende bij de Brouwermedaille.

tot het wiskunde onderzoek'. Henk van der Vorst en ik waren de auteurs, Henk als voorzitter van de NWO Adviescommissie Wiskunde en ik als voorzitter van het Overleg Onderzoeksscholen Wiskunde (OOW). Onze teamgenoten waren mevrouw Annejet Meijler, directeur van het NWO-gebied Exacte Wetenschappen (EW), Lex Zandee, beleidsmedewerker bij NWO-EW, en Chris Zaal die ons onder andere hielp bij de uiteindelijke vormgeving van de nota. De tijden waren veranderd, de positie van de wiskunde in het wetenschappelijk veld was anders dan in de jaren zeventig en tachtig. We kozen voor het thema 'Wiskunde op Raakvlakken'. Raakvlakken binnen de wiskunde, raakvlakken met exacte en technische wetenschappen en raakvlakken met het bedrijfsleven. Het thema viel goed bij de overheid. NWO was er ook voor. In de onderzoeksscholen hebben we er voldoende steun voor gekregen. Uiteindelijk heeft de nota ervoor gezorgd dat onderzoeksclusters werden opgericht en gefinancierd."

Waar kwam het idee van de clusters vandaan?

"In de nota is een cluster — ik citeer weer — 'een effectieve dynamisch onderzoeksgroep die wat kwaliteit en invloed betreft zich kan meten met vergelijkbare groepen in het buitenland'. Denk bijvoorbeeld aan de 'Sonderforschungsbereiche' in Duitsland. De keuze voor clusters was ook een gevolg van ervaringen opgedaan binnen de onderzoeksscholen, maar nu meer gericht op een nationale samenwerking dan op een regionale. De naamgeving heeft enige tijd gekost. We zochten een omschrijving van een samenwerkingsverband van mensen op gezamenlijke thema's met werk dat over grenzen heen gaat. Eerst dachten we aan 'landelijke zwaartepunten', een term die toen veel gebruikt

werd. Maar het woord 'zwaartepunt' heeft een negatieve kant voor diegenen die er niet onder vallen, soms zeer ten onrechte. In het woord 'cluster' gaat het om de groep en waar de groep voor gaat."

Was dit deels jouw idee?

"Nou ja, dat is in die commissie ontstaan. Het woord 'cluster' was inderdaad mijn idee. Het heeft het fantastisch gedaan."

Was het moeilijk om draagvlak te creëren?

"Niet moeilijk, maar we hebben er wel veel tijd aan besteed. Natuurlijk was er overleg met de NWO Adviescommissie Wiskunde en het OOW, onze directe opdrachtgevers. Maar ook met het bestuur van de toenmalige Akademie Raad voor de Wiskunde en met vertegenwoordigers van de Nederlandse wiskunde-instituten. Alles bij elkaar ruim dertig personen. Iedereen was gevoelig voor de teruglopende studenten-aantallen en de effecten op de formatie. Iedereen had ook wel enig idee van wat er allemaal met wiskunde wordt gedaan buiten de universitaire wiskunde-instituten, en hoe belangrijk het is om daar bij betrokken te zijn, om het niet geheel aan anderen over te laten. Als je je afsluit voor het nationale perspectief, dan is financiële steun van buiten ook erg onzeker. Daar was men eigenlijk allemaal wel van overtuigd. Er waren ook zorgen. Er zijn wiskundigen die niet aan hun trekken komen, omdat ze niet in een cluster vallen. Sommigen maakten zich ook zorgen over de aard van het onderzoek. Maar wij stonden voor fundamenteel onderzoek, grensoverschrijdend en aantrekkelijke raakvlakken met verwante vakken of toepassingsgebieden. Er werd een breed draagvlak verworven.

In dit verband noem ik ook Mastermath, een geweldig idee, dat ook een intensieve landelijke samenwerking vereist. In *Nieuwe*

dimensies, ruimer bereik is er een volledig hoofdstuk aan gewijd, vanuit de optiek dat onderzoek en onderwijs nauw verweven zijn. In de loop der jaren is het idee uitgewerkt met dank aan de onderwijsdirecteuren."

Wat vind je van de meest recente ontwikkelingen met het Visiedocument en Delta-plan?

"Ik heb er niet zo in detail naar gekeken, eigenlijk alleen maar geluisterd naar de presentatie van Jan Karel Lenstra op het BeNeLuxMC. Ik herkende veel van 'vroeger'. Ik heb ook de indruk dat er gewerkt wordt als een team en dat is erg belangrijk. Ik was verrast door de positie van 'Big Data' als één van de grote thema's. Het thema is ook al aanwezig in *Nieuwe dimensies, ruimer bereik*, maar nu staat het wel heel erg voorop. Het zal wel goed zijn. Het hoort bij de tijd waarschijnlijk. Het is in ieder geval een onderwerp dat door velen buiten de wiskunde direct wordt herkend. Een nieuwe naam voor WONDER lijkt me ook een goed idee, omdat je het woord 'wiskunde' er nu niet direct in terug ziet."

Wat doe je tegenwoordig nu je met pensioen bent?

"Mijn vrouw en ik hebben afgesproken dat in deze periode van ons leven, kinderen en kleinkinderen voorgaan. Het jongste kleinkind is nu 8 jaar en de oudste 18. Verder geniet ik van het feit dat je voor de beoefening van de wiskunde geen laboratorium nodig hebt of andere kostbare faciliteiten. Collega's dat is voldoende. Ik werk aan enkele onderzoeksprojecten met wiskundige vrienden uit binnen- en buitenland. Ik ben lid van de Protestantse Gemeente in Heemstede, en van een paar clubs in Kennemerland waarvoor ik af en toe een lezing hou over een wiskundig onderwerp."

Referenties

- 1 I. Gohberg, S. Goldberg en M.A. Kaashoek, *Classes of Linear Operators, Vol. I and II, Operator Theory: Advances and Applications*, Birkhäuser, Basel.
- 2 I. Gohberg, M.A. Kaashoek en D.C. Lay, Equivalence, Linearization and Decomposition of holomorphic operator functions, *J. Funct. Analysis* 28 (1978), 102–144.
- 3 M.A. Kaashoek, Closed linear operators on Banach spaces, *Nederl. Akad. Wetensch. Proc. Ser. A, Indag. Math.* 27 (1965), 405–414.
- 4 M.A. Kaashoek, Stability theorems for closed linear operators, *Nederl. Akad. Wetensch. Proc. Ser. A, Indag. Math.* 27 (1965) 452–466.
- 5 T. Kato, Perturbation theory for nullity, deficiency and other quantities of linear operators, *J. Analyse Math.* 6 (1958), 261–322.

Joke Blom

bestuurslid KWG
CWI, Amsterdam
joke.blom@cwi.nl

Interview Erelid Henk van der Vorst

Wetenschap of kunst: je eigen wereld invullen

Henk van der Vorst is met horten en stoten de wetenschappelijke wereld binnengekomen (Interview in NAW maart 2015). Eenmaal binnen ontpopte hij zich als een zeer invloedrijk wiskundige — drie artikelen en twee boeken met elk meer dan duizend citaties met een nog dagelijks groeiend maximum van 4713 — en bestuurder. In die laatste hoedanigheid heeft hij samen met Rien Kaashoek de nota *Nieuwe dimensies, ruimer bereik* geschreven (NAW juni 2002) waarin de grondslag gelegd wordt voor de wiskundeclusters en voor gezamenlijke masteropleidingen. Na drie jaar lobbyen resulteerde de nota in voldoende financiële middelen om de start van de eerste drie — van de geplande zes — mogelijk te maken (NAW juni 2005). Henk en Rien zijn tijdens het afgelopen BeNeLux Mathematisch Congres op de Algemene Ledenvergadering benoemd tot ereleden van het Koninklijk Wiskundig Genootschap. Hieronder een interview met een nieuwbakken erelid.

Hoe kijk je terug op de tijd van 'Nieuwe dimensies, ruimer bereik'?

“Zo’n twintig jaar geleden startte de KNAW een serie verkenningen van vakgebieden en ik werd gevraagd de toekomst van de wiskunde te schetsen. Op dat moment ging het slecht met de wiskunde in Nederland: weinig studenten, weinig geld, weinig hoogleraren (van 120 à 130 naar circa 70). Er was zelfs sprake van opheffing en samengaan van wiskundesubfaculteiten met als einddoel slechts op twee of drie plaatsen wiskundeonderzoek. De jaren daarvoor was om diverse redenen de geldstroom aanzienlijk afgenomen, de bèta-opslag (tonnen per jaar) werd afgeschaft voor wiskunde; door de ontvlechting van NWO, waarbij natuurkunde zelfstandig werd, kwam — onbedoeld — minder promotiegeld bij wiskunde en informatica terecht; en het van oudsher zeer lucratieve serviceonderwijs werd door de andere disciplines zelf overgenomen, al moet daarbij gezegd worden dat de wiskundigen ook niet altijd erg hun best deden om aan te sluiten bij de denkwereld van bijvoorbeeld sociologen.



Henk van der Vorst krijgt het erelidmaatschap uitgereikt door KWG-voorzitter Geurt Jongbloed. Op de achtergrond het andere nieuwe erelid Rien Kaashoek.

Via die Verkenning werd ik min of meer automatisch betrokken bij het schrijven van de Nota met Rien. Onze eerste vraag was: Wat is een logische grootte voor het wiskundeonderzoek in Nederland: waar zit wiskunde in; hoeveel actieve kennis hebben andere disciplines en bedrijven nodig voor inkoop, hoeveel is nodig voor service aan andere wetenschappen? Ons uitgangspunt daarbij was dat je niet louter service kon verlenen, je moet toch onderzoek blijven doen om bij te blijven. Onze conclusie was dat elke universiteitsstad een eigen

wiskundeopleiding moest hebben met onderzoek om de relatie met het vakgebied te behouden, maar overall alle onderdelen te behouden dat leek ons onverkoopbaar, vandaar de clustering.

Het schrijfproces zelf was heel plezierig. Rien Kaashoek is een zuiver wiskundige, een bijzonder helder denker en daarnaast zeer praktisch en plezierig in discussies, en Lex Zandee, de schrijver, en Chris Zaal boden het noodzakelijke tegenwicht als we al te enthousiast werden. Er is dan wel niet direct geld uit voortgekomen maar we hebben wel bereikt dat de wiskunde door de politiek als een serieuze gesprekspartner werd gezien. Wiskundigen waren toen — en misschien nog steeds — niet zo gewoon zich als groep te presenteren; in tegenstelling tot bijvoorbeeld fysici en sterrenkundigen, die gewend zijn naar buiten toe als eenheid op te treden, is wiskunde meer een individuele sport.”

Positieve reacties dus, maar nu het geld. Jullie bleven het trekken toch?

“Ja, maar we kregen ook veel hulp. Zo kwam bijvoorbeeld EZ op bezoek in Utrecht en de rector wist dat ik voor de wiskunde lobbyde en gaf me daarom de gelegenheid een presentatie te geven. Dus ik schets het belang van de wiskunde voor de economie en wat daar zoal voor nodig zou zijn. Later vertelde de rector me dat EZ onder de indruk was, dus hebben we een plan voorbereid. We zijn nog nooit zo dicht bij een klap geld geweest als toen. EZ zegde ettelijke miljoenen toe en OCW en NWO zouden volgen. De ondertekening moest nog even wachten tot Oosterwijk, de secretaris-

generaal van EZ, van vakantie terugkwam. Maar net in die tijd verhuisde het hele bureau naar OCW. Einde plan. Oosterwijk vond dat toch wel wat zuur en stelde circa 2 miljoen uit eigen begroting beschikbaar, Onderwijs vond wiskunde weliswaar niet zo belangrijk, maar vond toch ook nog een paar miljoen en NWO en de universiteiten volgden. In totaal konden we met 8 miljoen euro de eerste drie clusters realiseren. De hoop was dat dat uit zou groeien tot 10 à 12 miljoen en dat door de groei van het studentenaantal ook de financiering zou toenemen.”

Bestuurder of onderzoeker?

“Die organisatorische zaken kwamen op een gelukkig punt in mijn loopbaan. Hoe gek het ook klinkt, het grote succes van BiCGSTAB en Jacobi–Davidson maakte me onzeker: ‘dit kan ik nooit meer verbeteren’, ‘ik heb mijn hoogtepunt wel gehad’. Bovendien zag ik binnen mijn vakgebied geen hapklare brokken meer liggen en ik zag ertegen op om weer een nieuw vakgebied te betreden. Het probleem is dat als je aan iets nieuws begint, als je een zekere naam elders hebt, je van de kenners commentaar krijgt, van ‘Nou dan kunnen wij wel inpakken’ tot ‘He should hold his horses’ als je iets probeert te publiceren — het is achteraf trouwens grappig dat de drie meest geciteerde artikelen, ICCG, BiCGSTAB en Jacobi–Davidson in eerste instantie geweigerd zijn. Daarbij komt het erop neer dat je — met 14–15 mensen in je groep en promovendi, die enthousiast komen binnenlopen en waar je tijd voor wilt nemen — op dinsdag en donderdag een half uurtje aan je eigen probleem werkt en dan ga je niet echt meer de diepte in, dat werkt niet. Ik heb het besturen ook met veel plezier gedaan, ik vond het machtig interessant om te zien hoe een ministerie functioneert. Ik werd ook gevraagd voor het AcTI (Netherlands Academy of Technology and Innovation), waar de leiders van researchlabs als Natlab, Shell en FOM in zitten en dat levert nuttige contacten op, ook ten behoeve van de clusters: aanbevelingsbrieven schrijven, et cetera.”

Hoe kijk je terug op je onderzoeksperiode?

“Een onderzoeksgroep is een rare wereld: de successen worden onevenredig verdeeld. Ik heb samengewerkt met briljante mensen als Peter Sonneveld en Gerard Sleijpen, daar drijft een onderzoeksgroep

echt op. Maar de hoogleraar is het gezicht naar buiten en die krijgt de eer.”

Je moet dat ook wel willen. Ik herinner me een artikel ‘Hoe schrijf ik een veel geciteerd artikel’ (NAW maart 2003)?

“Ja, dat was wel grappig. BiCGSTAB heeft heel veel citaties, en daar heb ik wel het nodige aan bijgedragen. Vooropgesteld, het was geen beroerd artikel, maar ik heb er wel voor gezorgd dat het gezien werd. Zo kreeg ik als commentaar tijdens een overzichtsverhaal over Krylov-methoden dat ik dat eens zou moeten publiceren. Ik heb het toen als *Lecture Notes* op mijn website gezet en stelselmatig uitgebreid. Uiteraard krijgen de dingen die je zelf gedaan hebt dan meer aandacht. Later heeft dit geleid tot een veel geciteerd en gebruikt boek met Jack Dongarra en anderen, ‘Templates for the solution of linear systems: Building blocks for iterative methods’. Daarin hebben we alle BiCG-gerelateerde algoritmen dezelfde formulering gegeven waardoor je de algoritmen op een eerlijke manier kon vergelijken. Mede daardoor zijn GMRES en BiCGSTAB in Matlab gekomen. Achteraf gezien ben ik misschien wel het meest trots op het begrip van alle Krylov-methoden in hun onderlinge samenhang, meer nog dan op BiCGSTAB hoe gek dat ook klinkt.”

Na je pensionering heb je abrupt de wiskunde vervangen door de kunst?

“Na mijn pensionering wilde ik geen wiskunde meer doen. Om alsnog te proberen iets te bewijzen wat me tot dan niet gelukt was, had iets tragisch, vond ik. Bovendien werken mensen nu zo hard, dat ik ook daarom al niet meer langs ging op het instituut. In mijn tijd, en zeker in mijn meest inventieve periode, was er de tijd om te spelen en samen te puzzelen, die tijd ontbreekt nu een beetje.

Ik ben eigenlijk een beetje toevallig begonnen met linoleum snijden. Ik had een partijtje thuis liggen; huis-tuin-en-keuken-linoleum. Eigenlijk is dat veel te hard, waardoor ik met zoveel kracht moest snijden, dat mijn schouders overbelast raakten.”

En valt het resultaat nooit tegen?

“Ja, vaak. Je moet goed inkten en goed absorberend papier hebben. Het heeft me zeker twee à drie jaar gekost om goed te leren drukken. En toen vond ik het een beetje een zinloze activiteit, je kunt net zo

goed, nee beter, gaan tekenen als je een snede toch maar één keer gebruikt. Toen ben ik naar patronen gaan kijken, zoals in de islamitische kunst. Daar gebruiken ze symmetriegroepen met spiegelingen wat betekent dat je hetzelfde blok nog een keer maar dan in spiegelbeeld moet snijden. Dat leek me niets, dus toen ben ik met draaien vlakvullingen gaan maken. De grap is natuurlijk als de basistekening niet meteen de hele prent bevat, maar dat je bijvoorbeeld 16 keer moet drukken om het geheel te krijgen. Na een jaar of twee waren er een paar wel redelijk gelukt, maar had ik toch ook veel werk voor niks gedaan. Toen zei iemand: waarom doe je het niet met de computer? En dat doe ik nu ook: voorwerpen en gebouwen bekleeden met eigen ontwerpen. Mijn ambitie nu: als je kijkt naar bijvoorbeeld Vasarely, daar speelt oneindigheid een rol, vlakvulling, dingen die naar voren komen; maar Vasarely streeft naar zo onpersoonlijk mogelijk; ik wil het juist zeer persoonlijk vullen, niet computer-gegenereerd. Zelf je eigen wereld maken, eigenlijk net als in de wiskunde; je leert wat dingen, daarmee vul je een wereld met alle onbegrip en ontbrekende zaken erbij en daarmee ontwikkel je een denkframe. Ik wil nu met een basisvlakverdeling een wereld vullen met behulp van limietconstructies. Inmiddels heb ik een behoorlijke denktraining achter de rug voor de aansluitingen na het draaien en ik maak nu constructies met 256 tegels met de hand tot ‘oneindig’ met de computer. Maar ik zal je wat laten zien.” ☞

Doorlopende lijn (2015) Een pentekening 256 keer gebruikt, levert een lange doorlopende lijn op.

Two systems 5 (multiple linocut stamps, 2016) Tegels als ‘gereedschap’ en de effecten die je krijgt als je een aantal keren over elkaar heen drukt of niet volledig inkt.

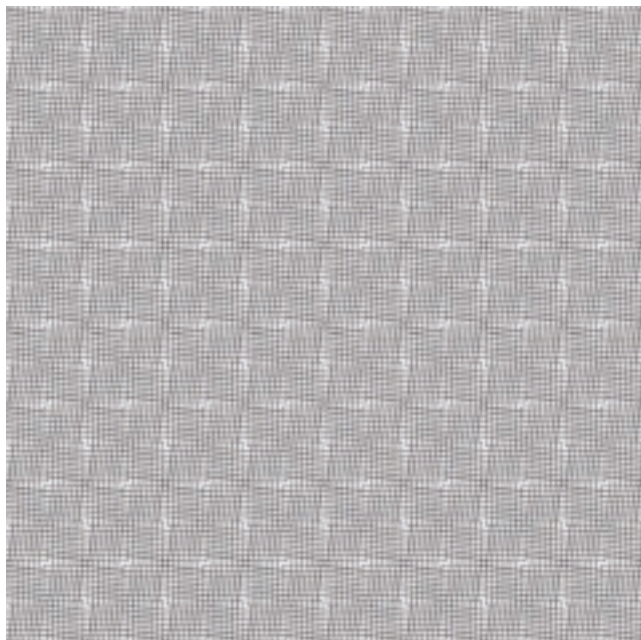
It was a rainy day yesterday (2014) Soms komen de constructies niet helemaal uit, maar door ze in elkaar te draaien zie je daar (bijna) niets meer van.

Fresh ideas in the Academy (Aquarel, 2009) In de blikjes zie ik door het leven gevormde individuen, de bierblikjes stellen de oudere Akademieleden voor, het colablikje staat voor een nieuw lid. Het Heineken dopje refereert aan de Heinekenprijzen die als een zonnetje de Akademie beschijnen.

Four Circles (2016) Limietconstructies vullen de randen van een spiegel op.

Frequent visitors for the ghost of Wotruba (2015) Een wereld opgebouwd uit een ‘bekleed gebouw’ en verschillende zich herhalende figuren.

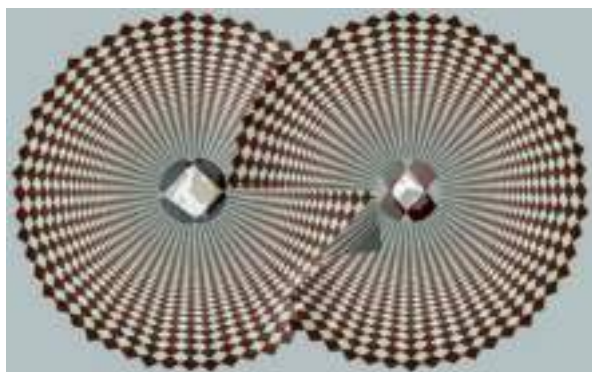
Meer over Henks werk is te vinden in ‘Een wiskunstenaar: portretten van wiskundigen en tegeltjes’, NAW juni 2012 en op zijn website www.henkvandervorst.nl.



Doorlopende lijn (2015)



Two systems 5 (multiple linocut stamps, 2016)



It was a rainy day yesterday (2014)



Fresh ideas in the Academy (Aquarel, 2009)



Four Circles (2016)



Frequent visitors for the ghost of Wotruba (2015)

Tristan van Leeuwen

Mathematisch Instituut
Universiteit Utrecht
t.vanleeuwen@uu.nl

Alessandro Sbrizzi

Center for Image Sciences
Universitair Medisch Centrum, Utrecht
a.sbrizzi@umcutrecht.nl

Ian Zwaan

Faculteit Wiskunde & Informatica
Technische Universiteit Eindhoven
i.n.zwaan@tue.nl

Maatschappij Studiegroep Wiskunde met de Industrie 2015

Beeldreconstructie in MRI met compressed sensing

Philips Healthcare is een van de grootste fabrikanten van MRI-scanners ter wereld en is geïnteresseerd in het gebruik van *compressed sensing*-technieken om MRI-scans te versnellen. Tijdens de Studieweek Wiskunde met de Industrie 2015 in Utrecht vroeg Philips of en hoe patiënt-specifieke informatie kan worden gebruikt om de compressed sensing-techniek optimaal toe te passen om MRI-scans te versnellen. In dit artikel geven Tristan van Leeuwen, Alessandro Sbrizzi en Ian Zwaan een kort overzicht van de wiskunde achter MRI-beeldvorming en compressed sensing en zetten uiteen hoe compressed sensing en MRI gecombineerd kunnen worden om reconstructie-algoritmen te ontwikkelen die eerder verworven patiënt-specifieke informatie gebruiken.

Magnetic resonance imaging (MRI) wordt gebruikt om een breed scala ziekten te diagnosticeren, waaronder multiple sclerose en kanker. Vergeleken met technieken die op röntgenstralen zijn gebaseerd, zoals een CT-scan, heeft MRI een aantal voordelen. Zo kan met MRI ook zacht weefsel goed in beeld worden gebracht en wordt de patiënt niet blootgesteld aan ioniserende straling. Helaas duurt een typische MRI-scan vaak meer dan dertig minuten, in vergelijking met een paar minuten voor een CT-scan. Er wordt dan ook veel onderzoek gedaan om de scantijd van een MRI te verkorten. Huidige beeldreconstructietechnieken zijn gebaseerd op het samplingtheorem van Nyquist-Shannon [5], hetgeen voor MRI grofweg inhoudt dat het aantal metingen omgekeerd evenredig is met de resolutie in het kwadraat voor een tweedimensionaal beeld. Willen we een beeld met een twee keer zo hoge resolutie, moeten we dus vier keer zoveel metingen doen ofwel vier keer zo lang scannen. Dit hangt samen met wat we weten van lineaire alge-

bra, als we $n_x \times n_y$ onbekenden (pixels in een tweedimensionaal beeld) willen bepalen, hebben we daarvoor minstens $n_x \times n_y$ metingen nodig.

Een vrij recente ontwikkeling op het gebied van signaalverwerking is *compressed sensing* (CS). Het idee is dat we n onbekenden kunnen bepalen uit slechts $C \log n$ metingen waarbij $C \ll n$ een constante die afhankelijk is van de structuur van het beeld. Zowel de oplossing als het meetproces moeten hiervoor aan bepaalde voorwaarden voldoen. In termen van lineaire algebra, vertelt CS dat we een onbepaald stelsel vergelijkingen *uniek* kunnen oplossen wanneer de bijbehorende matrix aan bepaalde voorwaarden voldoet en de oplossing een beperkt aantal niet-nullen bevat.

MRI-data-acquisitie en Fourier-reconstructie

Een MRI-scanner is feitelijk een grote magnetische spoel omringd met antennes, waarbinnen het magnetische en elektrische veld kunnen worden aangepast. Het

beeldvormingsproces is gebaseerd op de elektromagnetische spin van waterstofatomen. Door een sterk magnetisch veld (typisch 1,5–3 Tesla) aan te zetten richten alle waterstofatomen zich parallel aan de magnetische veldlijnen. Vervolgens worden de spins met behulp van een radiogolf uit hun evenwichtspositie gebracht. Als de spins weer terugvallen in hun oorspronkelijke positie wordt de overtollige energie uitgezonden. Door de sterkte van dit signaal op verschillende punten te meten krijgen we een beeld van de verdeling van waterstofatomen in het weefsel. Door extra magneetvelden aan te leggen — de zogenaamde *gradientvelden* — kan het proces worden gelokaliseerd zodat de spins in een bepaald gedeelte van het lichaam worden verstoord. Op die manier kunnen beelden van het gehele lichaam worden opgebouwd uit doorsneden. Een voorbeeld is te zien in Figuur 1. In dit artikel beperken we ons tot het reconstrueren van een enkele doorsnede in twee dimensies, $u(x, y)$ met $x, y \in [0, 1]$. In de praktijk is u een complexe functie, maar om de essentie van de methode te beschrijven kunnen we aannemen dat u een reële functie is. De transversale component u kan alleen indirect worden gemeten. Door de gradientvelden tijdens het scannen aan en uit te zetten, wordt feitelijk de Fourier-transformatie van u gemeten [6]. Omdat u gedefinieerd is op een eindig interval, kunnen we de metingen schrijven als de

discrete Fourier-coëfficiënten van u ,

$$\hat{u}_{kl} = \int_0^1 \int_0^1 dx dy u(x, y) e^{i2\pi(kx + ly)},$$

voor $k, l \in \mathbb{Z}$. Hierbij levert iedere meting één coëfficiënt $\hat{u}_{kl}$ op. Om u exact te reconstrueren hebben we dus oneindig veel metingen nodig. In de praktijk worden slechts de coëfficiënten binnen een bepaalde bandbreedte $-B < k, l < B$ gemeten (we kunnen immers niet oneindig lang blijven meten!), waardoor we slechts een $n_x \times n_y$ discrete representatie van de transversale magnetisatie $u_{ij} \equiv u(i/(n_x - 1), j/(n_y - 1))$ met $0 \leq i < n_x$ en $0 \leq j < n_y$ kunnen reconstrueren. De onderlinge afstand tussen de punten in het 2D-rooster wordt ook *resolutie* genoemd. In dit geval spreken we dus van een $\frac{1}{n_x - 1} \times \frac{1}{n_y - 1}$ -resolutie. Voor een gegeven n_x, n_y , bepaalt het Nyquist-criterium [12] de waarde van B waarvoor een nauwkeurige reconstructie van u uit de metingen $\hat{u}_{kl}$ mogelijk is.

We kunnen het beeldvormingsproces nu samenvatten als

$$\hat{\mathbf{u}} = F\mathbf{u}, \quad (1)$$

waarbij $\mathbf{u} \in \mathbb{R}^n$, met $n = n_x \times n_y$, $\hat{\mathbf{u}} \in \mathbb{C}^n$, respectievelijk het beeld en de metingen zijn en $F \in \mathbb{C}^{n \times n}$ de tweedimensionale discrete Fourier-transformatie is. Door middel van het *Fast Fourier Transform*-algoritme (FFT) [10] kan $\mathbf{u}$ heel efficiënt worden berekend.

Aangezien een MRI-scanner de Fourier-coëfficiënten slechts één voor één kan meten, schaalde de benodigde tijd kwadratisch met de vereiste resolutie. In de volgende paragraaf zullen we een alternatieve samplingstrategie bespreken die een gunstigere schaling belooft als $\mathbf{u}$ aan zekere voorwaarde voldoet.

Compressed sensing

In *compressed sensing* (CS) proberen we de oplossing van een onderbepaald stelsel vergelijkingen

$$A\mathbf{x} = \mathbf{b}, \quad (2)$$

met n onbekenden en $m < n$ vergelijkingen te vinden [9]. Het belangrijkste resultaat van CS is dat er een unieke oplossing gevonden kan worden als A aan bepaalde voorwaarden voldoet en $\mathbf{x}$ ijl is. Een vector $\mathbf{x}$ wordt k -ijl genoemd als er hooguit k elementen ongelijk aan 0 zijn.

Als we eisen dat iedere combinatie van $2k$ kolommen van A lineair onafhankelijk zijn, dan heeft het stelsel vergelijkingen een unieke k -ijle oplossing. Dit opmerkelijke resultaat is eenvoudig te bewijzen. Stel, we hebben een k -ijle oplossing $\mathbf{x}$. Voor elke andere k -ijle oplossingen $\mathbf{x}'$ geldt nu dat $\mathbf{z} = \mathbf{x} - \mathbf{x}'$ ten hoogste $2k$ niet-nullen heeft en dat $A\mathbf{z} = 0$. Omdat elke $2k$ kolommen van A lineair onafhankelijk zijn, moet nu gelden dat $\mathbf{z} = 0$. Als voorbeeld nemen

we de volgende matrix,

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix},$$

waarvan alle kolommen paarsgewijs lineair onafhankelijk zijn. Het bijbehorende stelsel vergelijkingen laat dus een unieke oplossing met één niet-nul toe.

Met bovenstaande kennis op zak lijkt het logisch om (2) in het algemeen op te lossen door de ijlst $\mathbf{x}$ te zoeken die aan de vergelijkingen voldoet. We kunnen dit formeel schrijven als een minimalisatieprobleem

$$\min_{\mathbf{x}} \|\mathbf{x}\|_0 \quad \text{zo dat} \quad A\mathbf{x} = \mathbf{b}, \quad (3)$$

waar $\|\mathbf{x}\|_0$ het aantal niet nullen telt van $\mathbf{x}$. In zekere zin is dit vergelijkbaar met de *pseudo-inverse* van A , die de oplossing geeft met de kleinste 2-norm.

Helaas is bovenstaand optimalisatieprobleem alleen op te lossen door alle mogelijkheden af te gaan en daardoor onbruikbaar voor de meeste praktische problemen. Bovendien zijn de oplossingen in de praktijk niet strikt ijl, maar laten zich vaak wel goed benaderen met een ijle oplossing. Daar komt nog bovenop dat de metingen doorgaans belast zijn met ruis en we de strikte eis dat $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$ dus liever willen loslaten.

Het is duidelijk dat compressed sensing in de praktijk iets anders aangepakt moet worden dan wat hierboven geschetst is. Allereerst hebben we een sterkere eis nodig voor A . Een matrix A voldoet aan de *k-restricted isometry property* (RIP) met constante δ_k als

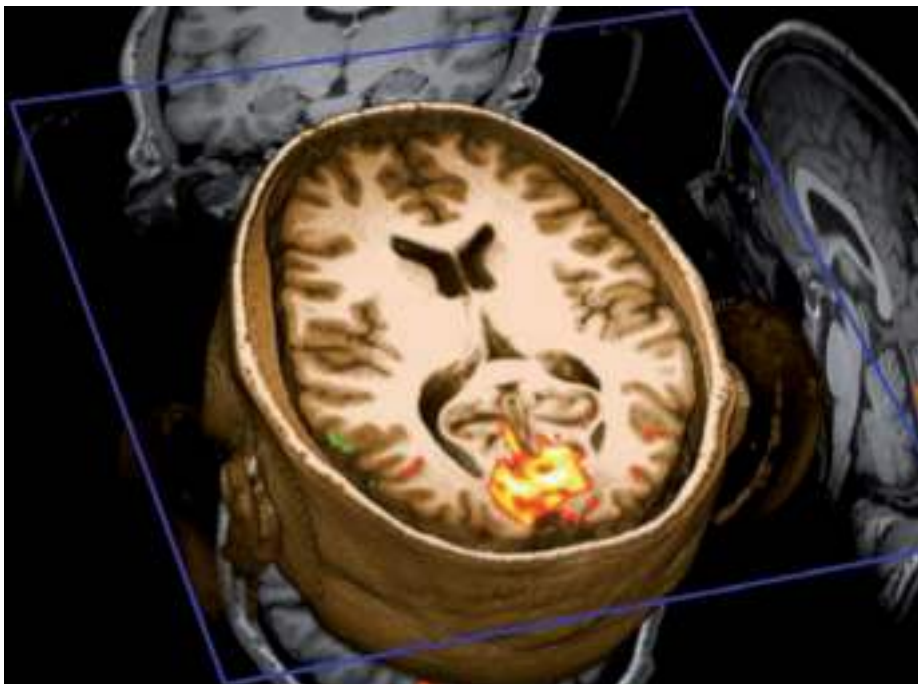
$$(1 - \delta_k) \|\mathbf{x}\|_2^2 \leq \|A\mathbf{x}\|_2^2 \leq (1 + \delta_k) \|\mathbf{x}\|_2^2,$$

voor elke k -ijle vector $\mathbf{x}$. In zekere zin meet δ_k het behoud van energie ofwel de afstand tot orthogonaliteit van elke verzameling van k of minder kolommen. Het is eenvoudig na te gaan dat elke $2k$ kolommen van A lineair onafhankelijk zijn als $\delta_{2k} < 1$.

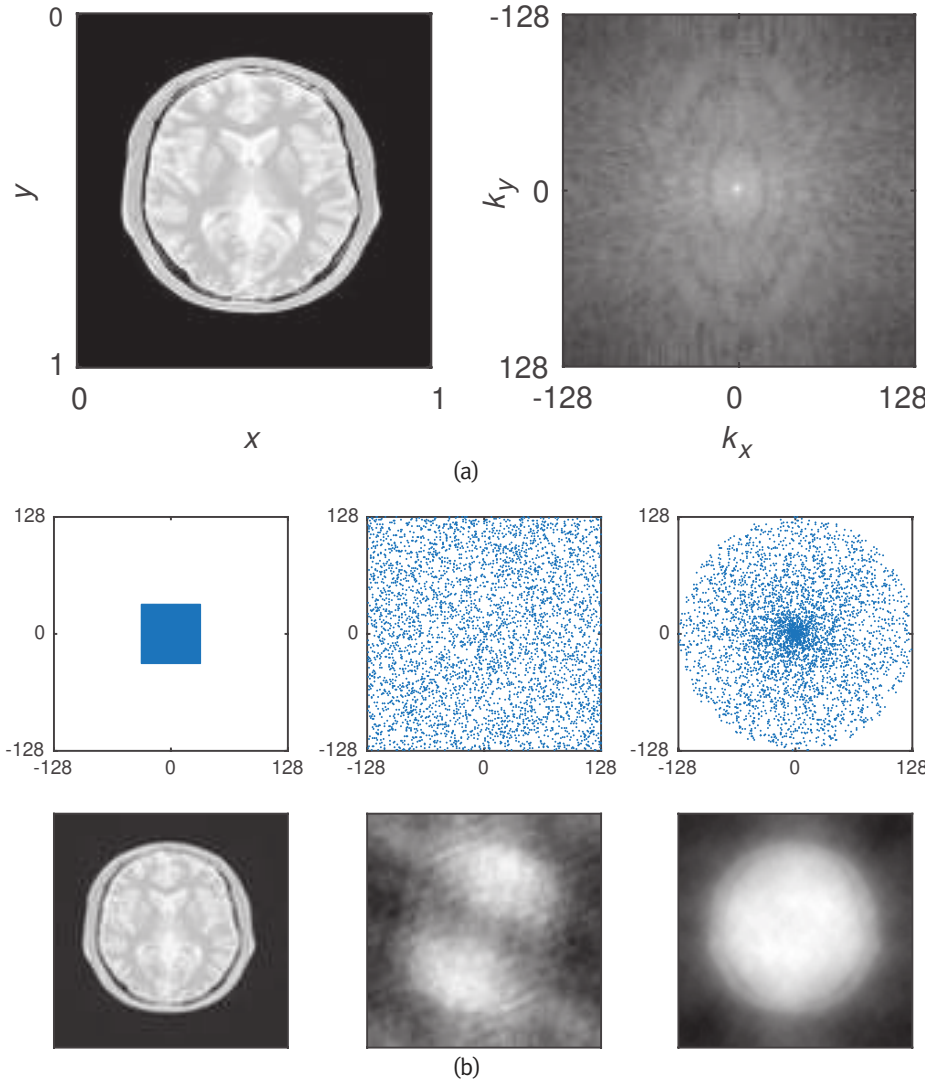
Ten tweede vervangen we het combinatorische optimalisatieprobleem door het convexe probleem

$$\min_{\mathbf{x}} \|\mathbf{x}\|_1 \quad \text{zo dat} \quad \|A\mathbf{x} - \mathbf{b}\|_2 \leq \epsilon, \quad (\text{BP}_\epsilon)$$

ook wel *basis pursuit denoising* genoemd. Omdat bovenstaand probleem convex is, zijn we niet langer beperkt tot het gebruik van combinatorische algoritmen en kunnen theorie en algoritmiek uit convexe optima-



Figuur 1 MRI-scan van het hoofd.



Figuur 2 (a) MRI-beeld en het Fourier-spectrum; (b) verschillende soorten sampling (boven) en bijbehorende Fourier-reconstructie (onder).

lisatie gebruikt worden. Het is echter niet evident dat het oplossen van (BP_ϵ) tot een ijle oplossing leidt. Hiervoor is de volgende stelling van belang [7].

Stelling 1. *Neem aan dat $\delta_{2k} < \sqrt{2} - 1$ en $\|Ax - b\|_2 \leq \epsilon$. De oplossing x_* van (BP_ϵ) voldoet aan*

$$\|x_* - x\|_2 \leq C_0 k^{-1/2} \|x - x_k\|_1 + C_1 \epsilon,$$

waar x_k een k -ijle vector is die de k grootste elementen van x bevat en C_0 en C_1 constanten afhankelijk van δ_{2k} zijn.

Hoewel C_0 en C_1 asymptotisch naar oneindig groeien wanneer δ_{2k} naar $\sqrt{2} - 1$ gaat, zijn ze normaal gesproken vrij klein. Als bijvoorbeeld $\delta_{2k} = 0,2$ dan $C_0 \approx 4,2$ en $C_1 \approx 8,5$ [7]. Dit betekent dat wanneer de echte oplossing daadwerkelijk

k -ijl is, we een benadering krijgen met $\|x_* - x\|_2 \leq C_1 \epsilon$.

Het blijkt dat bepaalde stochastische matrices met een grote kans voldoen aan de RIP als

$$m \geq Ck \log(n/k) \quad (4)$$

voor verschillende constanten C . Een voorbeeld is een matrix waarvan de elementen onafhankelijk verdeeld zijn volgens een standaard normale verdeling. In de praktijk is het echter lastig om een meetproces te ontwerpen dat hieraan voldoet. Daarnaast is het doorgaans niet haalbaar om te controleren of een gegeven matrix A voldoet aan de RIP. Hierdoor kijkt men in de praktijk vaak naar een andere maat, namelijk de *coherence* [8]. De coherence van een matrix is gedefinieerd als het maximale (genormaliseerde) inproduct van de kolommen van A , oftewel

$$\mu(A) = \max_{i \neq j} \frac{a_i^T a_j}{\|a_i\|_2 \|a_j\|_2},$$

waarbij a_i de i -de kolom van A is. In zeker zin geeft de coherence aan hoe goed $A^T A$ de identiteitsmatrix benadert; als $\mu = 0$ dan hebben we $A^T A = I$, als $\mu \ll 1$ dan is $A^T A$ diagonaal dominant.

De volgende stelling [11, Lemma 1.5] geeft inzicht in de relatie tussen de coherence en de RIP.

Stelling 2. *Als de kolommen van A eenheidsvectoren zijn en de coherence $\mu = \mu(A)$, dan voldoet A aan de RIP van orde k met $\delta_k = (k - 1)\mu$ voor alle $k < 1/\mu$.*

Voor ons MRI-probleem betekent dit in combinatie met (4) dat het aantal benodigde meetpunten niet langer bepaald wordt door de resolutie, maar door de ijlheid van het signaal en de coherence van matrix A .

Reconstructie

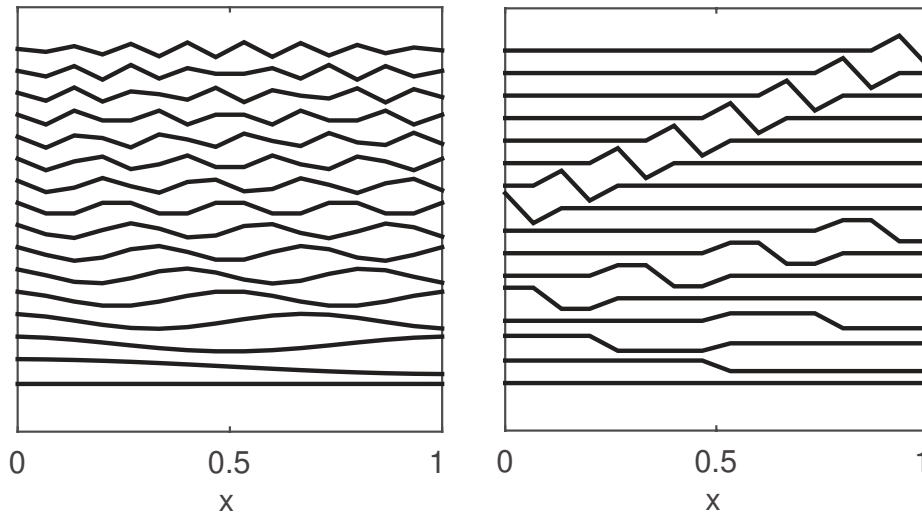
We hebben nu gezien dat het MRI-beeldvormingsproces kan worden gemodelleerd met een Fourier-transformatie (1). Om de scantijd te reduceren, doen we $m < n$ metingen. We kunnen dit modelleren als

$$\hat{u} = RFu, \quad (5)$$

waar $R \in \{0, 1\}^{m \times n}$ aangeeft welke samples in het Fourier-domein we meten. In Figuur 2 zien we een aantal mogelijke samplingstrategieën en de bijbehorende Fourier-reconstructie $\hat{u} = F^{-1}R^T \hat{u}$. Het is duidelijk dat elk soort subsampling ofwel de resolutie verlaagt of leidt tot artefacten in de reconstructie. Om gebruik te kunnen maken van de resultaten van CS hebben we twee dingen nodig; een basis waarin het beeld u kan worden weergegeven met relatief weinig niet-nullen en een meetproces (een matrix) die een kleine mutual coherence heeft.

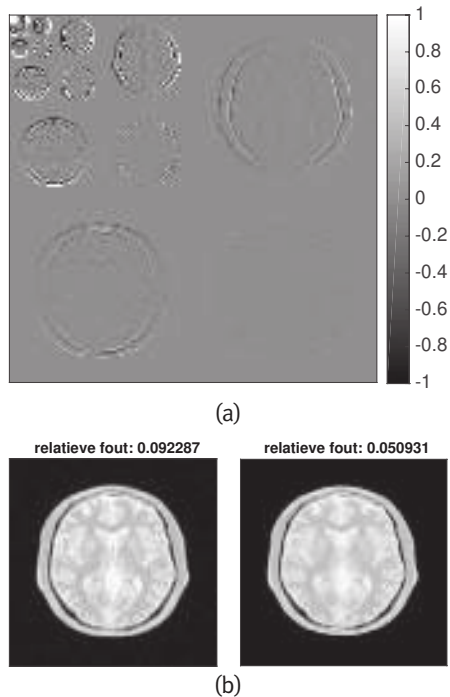
Wavelets

We kunnen niet verwachten dat een typisch MRI-beeld ijl is; de vraag is nu of we een basistransformatie kunnen vinden zodat het beeld in deze nieuwe basis wél ijl is. Als het beeld bijvoorbeeld continu is en langzaam varieert zouden we deze efficiënt kunnen weergeven met behulp van een discrete cosinustransformatie. Deze transformatie wordt gebruikt in de JPEG-standaard.



Figuur 3 Basisfuncties van de discrete cosinustransformatie (links) en de discrete Haar-wavelettransformatie (rechts) in één dimensie voor $n=16$.

Een meer geavanceerde optie is de *wavelettransformatie*, onder andere gebruikt in de JPEG 2000-standaard [14]. De basisfuncties zijn in dit geval geschaalde en verschoven versies van een *moeder-wavelet*. Het idee is dat de *wavelets* het beeld herhaaldelijk opdelen in details en een achtergrond op steeds fijnere schaal. Als voorbeeld zien we basisfuncties van de cosinustransformatie en een wavelettransformatie met Haar-wavelets in Figuur 3.



Figuur 4 (a) Wavelet-coëfficiënten van het MRI-beeld; (b) benadering van het MRI-beeld met 5 procent van de coëfficiënten in de cosinus- (links) en waveletbasis (rechts).

De benadering van het MRI-beeld met de k grootste coëfficiënten in zowel de cosinus- als waveletbasis is te zien in Figuur 4. Het is duidelijk dat wavelets een betere benadering geven voor een gelijk aantal coëfficiënten.

Coherentie en sampling

In plaats van $\mathbf{u}$ direct te reconstrueren, gaan we opzoek naar coëfficiënten, $\mathbf{x}$, in het waveletdomein. Het ℓ_1 -reconstructieprobleem (BP_ϵ) schrijven we nu als

$$\min_{\mathbf{x}} \|\mathbf{x}\|_1 \text{ zo dat } \|\mathbf{R}\mathbf{F}\mathbf{W}\mathbf{x} - \mathbf{b}\|_2 \leq \epsilon, \quad (6)$$

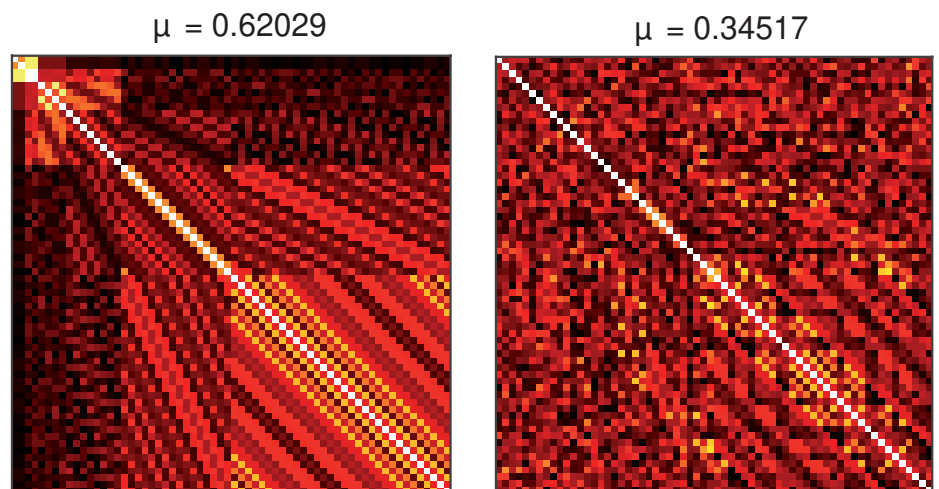
waarbij $\mathbf{W}$ de waveletbasis is. We verkrijgen het gereconstrueerde beeld door de oplossing terug te transformeren; $\mathbf{u} = \mathbf{W}\mathbf{x}$. Voor het oplossen van zulke optimalisatieproblemen is een groot aantal standaard algoritmen beschikbaar [3, 4, 15].

Om optimaal gebruik te maken van de mogelijkheden die CS ons biedt, willen we dat de matrix $\mathbf{R}\mathbf{F}\mathbf{W}$ een kleine coherence heeft en dat $\mathbf{x}$ zo ijl mogelijk is. In dit geval komt dat erop neer dat we willen dat de basis waarin we meten (Fourier-) ongecorreleerd is met de basis waarin het beeld ijl is (wavelets) [9]. Helaas zijn de Fourier- en waveletbasis sterk gecorreleerd voor lage frequenties. Een voorbeeld hiervan is te zien in Figuur 5. Een manier om deze coherentie te breken is door het meetproces aan te passen door een stochastische diagonaalmatrix $\mathbf{S}$ met waarden ± 1 op de diagonaal in te voeren: $\mathbf{A} = \mathbf{R}\mathbf{F}\mathbf{S}\mathbf{W}$. Dit idee kan worden teruggeleid naar [2]. Zoals te zien in Figuur 5 is de coherentie nu veel lager. In de praktijk komt zo'n modificatie van het meetproces neer op het (willekeurig) verstoren van de spins in de individuele voxels in de MRI-scanner; hetgeen niet haalbaar is.

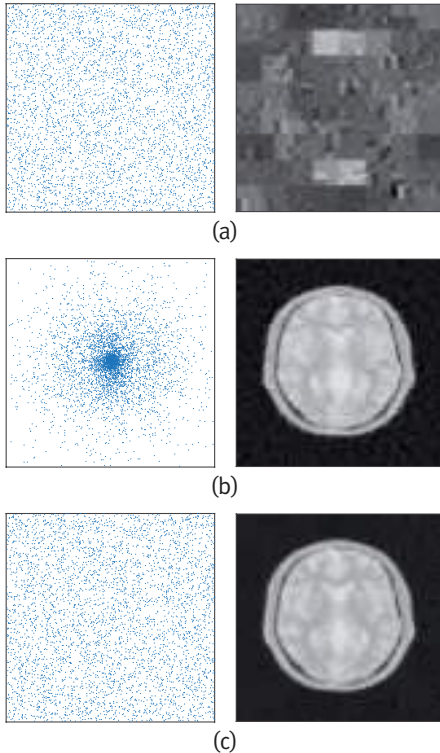
Wat we wél kunnen proberen is op zoek gaan naar een betere basistransformatie, $\bar{\mathbf{W}}$, en samplingmatrix, $\bar{\mathbf{R}}$, zodat $\bar{\mathbf{W}}^T \mathbf{u}$ zo ijl mogelijk is én $\bar{\mathbf{A}} = \bar{\mathbf{R}}\mathbf{F}\bar{\mathbf{W}}$ een zo klein mogelijke coherence heeft.

Een optimale basis en samplingstrategie

Het *ontwerpen* van de matrices $\bar{\mathbf{R}}$ en $\bar{\mathbf{W}}$ kan worden geformaliseerd als een optimalisatieprobleem. Uiteraard kunnen we niet meten hoe ijl het echte beeld is in de nieuwe basis, maar wellicht kunnen we een set representatieve beelden $\{\mathbf{u}_i\}_{i=0}^P$ gebruiken, bijvoorbeeld een eerdere scan van dezelfde patiënt of soortgelijke scans van andere patiënten. Formeel kunnen we het optimalisatieprobleem nu schrijven als



Figuur 5 Mutual coherence van de matrices $\mathbf{R}\mathbf{F}\mathbf{W}$ en $\mathbf{R}\mathbf{F}\mathbf{S}\mathbf{W}$.



Figuur 6 Reconstructies met verschillende sampling matrices en dictionaries: (a) standaard uniforme sampling in het Fourier-domein en reconstructie in de waveletbasis; (b) niet-uniforme sampling in het Fourier-domein en reconstructie in de waveletbasis; (c) uniforme sampling in het Fourier-domein en een dictionary bestaande uit een lage-resolutie-versie van het beeld en de waveletbasis.

$$\min_{\bar{R}, \bar{W}} \mu(\bar{R} \bar{F} \bar{W}) + \alpha \sum_{i=0}^p \|\bar{W}^T \mathbf{u}_i\|_1,$$

waarbij α een parameter is die de twee doelen tegen elkaar afweegt. Het voert te ver om hier te bespreken hoe dit optimalisatieprobleem kan worden opgelost, maar

met een paar voorbeelden kunnen we laten zien dat er wel degelijk $\bar{R}$ en $\bar{W}$ bestaan die het beter doen dan de standaard keus. Een reconstructie met de standaard sampling en waveletbasis is te zien in Figuur 6(a). Het beeld is 256×256 pixels groot (dus $n = 256^2$) en we doen $m = n/16$ metingen. Het optimalisatieprobleem lossen we op in Matlab met het `spgl1`-algoritme [4].

Allereerst bekijken we de samplingstrategie. Het is duidelijk dat het weinig zin heeft uniform te samplen in het Fourier-domein; de energie is namelijk geconcentreerd rond de lage frequenties (zie bijvoorbeeld Figuur 2). Om hiervoor te compenseren kunnen we bijvoorbeeld een niet-uniforme sampling doen. Een theoretische onderbouwing voor dit soort sampling met bijbehorende bovengrenzen voor het aantal benodigde metingen is beschreven in [13]. Als we een set testbeelden hebben, kunnen deze gebruiken om te leren welke gebieden in het Fourier-domein het belangrijkste zijn en deze dichter samplen. In dit voorbeeld kiezen we de samplingdichtheid evenredig met de energie van het spectrum van het echte beeld. Het resultaat is te zien in Figuur 6(b). De reconstructie is duidelijk beter dan wanneer we uniform samplen.

Het vinden van een optimale basis $\bar{W}$ voor een set beelden wordt ook wel *dictionary learning* genoemd. Een veelgebruikte techniek hier is *principal component analysis*, waar met behulp van bijvoorbeeld een singuliere-waarden-decompositie de gemeenschappelijke componenten van alle $\mathbf{u}_i$ worden bepaald [1]. In dit voor-

beeld maken we een dictionary van een lage-resolutie-versie van het echte beeld en de waveletbasis, $\bar{W} = [W, \mathbf{v}]$, waarbij $\mathbf{v}$ het genormaliseerde lage-resolutie-beeld is. We gebruiken hier standaard uniforme sampling. Het resultaat is te zien in Figuur 6(c). We zien dat dit resultaat bijna net zo goed is als het voorgaande resultaat met niet-uniforme sampling.

Het is te verwachten dat we nog betere resultaten kunnen krijgen als we de optimale basis combineren met een optimale sampling.

Conclusie

Het MRI-beeldreconstructieprobleem kan in essentie worden gemodelleerd als het terugvinden van een tweedimensionaal beeld uit een deelverzameling van de Fouriercoëfficiënten. Omdat de tijd die nodig is om een MRI-scan te doen evenredig is met het aantal metingen, willen we graag zo min mogelijk metingen doen en toch een bruikbaar beeld terugkrijgen. Gebruikmakend van recente resultaten op het gebied van compressed sensing kunnen we een onderbepaald stelsel vergelijkingen uniek oplossen als de bijbehorende matrix aan bepaalde eisen voldoet en wanneer de oplossing ijl is. Een manier om aan deze voorwaarden te voldoen is door een waveletbasis te gebruiken voor het beeld en de meetpunten in het Fourier-domein willekeurig te kiezen. Als we een set vergelijkbare beelden uit eerdere scans ter beschikking hebben, kunnen we zelfs een basis- en samplingstrategie ontwerpen die per patiënt in zekere zin optimaal is. ☺

Referenties

- 1 M. Aharon, M. Elad en A. Bruckstein, K-SVD: An algorithm for designing overcomplete dictionaries for sparse representation, *IEEE Transactions on Signal Processing* 54(11) (2006), 4311–4322.
- 2 Nir Ailon en Bernard Chazelle, The fast Johnson–Lindenstrauss transform and approximate nearest neighbors, *SIAM Journal on Computing* 39(1) (2009), 302–322.
- 3 Amir Beck en Marc Teboulle, A fast iterative shrinkage-thresholding algorithm for linear inverse problems, *SIAM Journal on Imaging Sciences* 2(1) (2009), 183–202.
- 4 Ewout van den Berg en Michael P. Friedlander, Probing the Pareto frontier for basis pursuit solutions, *SIAM Journal on Scientific Computing* 31(2) (2009), 890–912.
- 5 Ron Bracewell, *The Fourier Transform and its Applications*, McGraw-Hill, 1965.
- 6 Robert W. Brown, Y.-C. Norman Cheng, E. Mark Haacke, Michael R. Thompson en Ramesh Venkatesan, *Magnetic Resonance Imaging: Physical Principles and Sequence Design*, Wiley, 2014.
- 7 E.J. Candès, The restricted isometry property and its implications for compressed sensing, *Compte Rendus de l'Académie des Sciences* 346(1) (2008), 589–592.
- 8 E.J. Candès en J. Romberg, Sparsity and incoherence in compressive sampling, *Inverse Problems* 3 (2006), 969–985.
- 9 E.J. Candès en M. Wakin, An introduction to compressive sampling, *IEEE Signal Processing Magazine*, March 2008.
- 10 James W. Cooley en John W. Tukey, An algorithm for the machine calculation of complex fourier series, *Mathematics of Computation* 19(90) (1965), 297–301.
- 11 Mark A. Davenport, Marco F. Duarte, Yonina C. Eldar en Gitta Kutyniok, Introduction to compressed sensing, in *Compressed Sensing: Theory and Applications*, Chapter 1, Cambridge University Press, 2011.
- 12 Timothy G. Feeman, *Mathematics of Medical Imaging*. Springer, 2015.
- 13 Felix Krahmer en Rachel Ward, Stable and robust sampling strategies for compressive imaging, *IEEE Transactions on Image Processing* 23(2) (2014), 612–622.
- 14 Stéphane Mallat, *A Wavelet Tour of Signal Processing: The Sparse Way*, Academic Press, 3rd edition, 2008.
- 15 Joel A. Tropp en Stephen J. Wright, Computational methods for sparse solution of linear inverse problems, *Proceedings of the IEEE* 98(6) (2010), 948–958.

Michel Dekking

Delft Institute of Applied Mathematics

TU Delft

f.m.dekking@tudelft.nl

Onderzoek Onderzoeksvisitatie Wiskunde

Het universitaire wiskundeonderzoek beoordeeld

Dit project startte in de herfst van 2014 met overleg van de beoogde voorzitter met de Commissie Onderzoek van Platform Wiskunde Nederland. Het zou een groot project worden omdat deze keer de technische universiteiten tegelijk met de algemene universiteiten beoordeeld werden. Om de belasting van de commissieleden binnen de perken te houden werd er voor gekozen om niet een onderzoeksvisitatie in letterlijke zin uit te voeren, maar om afvaardigingen van de universiteiten door de commissie te laten ontvangen op een centrale locatie. Dit werd uiteindelijk Amersfoort, en de interviews konden net in één week ingeroosterd worden van 16 tot 20 november 2015. Michel Dekking, de voorzitter van de commissie, blikt terug en doet verslag.

De commissie werd samengesteld op basis van adviezen van de negen betrokken universiteiten, en bestond uit acht leden:

- R.S. Burachik, University of South Australia, Adelaide
- A.S. Cattaneo, Universität Zürich
- F.M. Dekking (voorzitter), TU Delft
- H.R. Künsch, ETH Zürich
- R.S. MacKay, University of Warwick
- V. Mehrmann, TU Berlin
- R.H. Möhring, TU Berlin
- D. Zagier, Max-Planck-Institut für Mathematik, Bonn

Coördinerende en secretariële ondersteuning werd gegeven door dr. M.J.V. Van Bogaert van de QANU (Quality Assurance Netherlands Universities).

Het Standaard Evaluatie Protocol

De visitatie vond plaats volgens de richtlijnen van het Standard Evaluation Protocol 2015–2021 (SEP). Dit protocol heeft ingrijpende wijzigingen ondergaan ten opzichte van het vorige SEP. Een gevolg hiervan is dat het vergelijken met de beoordelingen van de vorige visitatie (een van de

opdrachten in het protocol) bemoeilijkt wordt.

Strikt genomen zouden enkele wiskunde-instituten zelfs niet hebben mogen deelnemen aan de visitatie door een te kleine omvang (tenminste tien onderzoeks-fte). Commissielid Robert MacKay wees in dit verband op een artikel van Kenna en Berche dat een model voorstelt voor optimale omvang van onderzoeksgroepen (zie [2]). Deze auteurs komen uit op een omvang van 24 onderzoekers voor de discipline ‘Business and management’, een omvang van 12 voor natuurkunde, van 6 voor ‘Applied mathematics’ en van kleiner of gelijk aan 2 voor ‘Pure Mathematics’.

De beoordelingen

De beoordelingen zijn gebaseerd op de zelfevaluatie-rapporten van de negen betrokken wiskundeafdelingen en de interviews in Amersfoort. Volgens het protocol zijn beoordeeld: (1) academische kwaliteit,

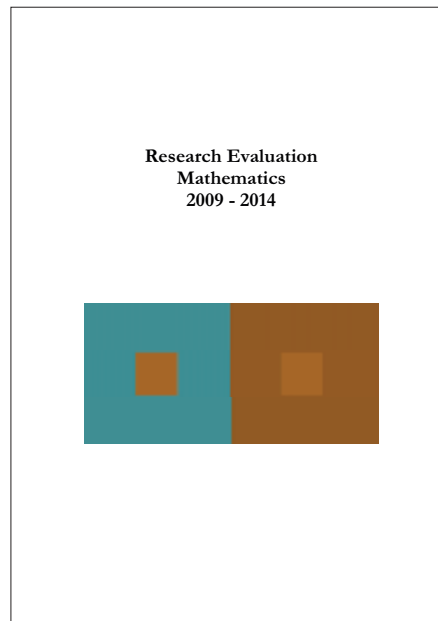
(2) maatschappelijke relevantie en (3) levensvatbaarheid van de groepen. Dit volgens internationale standaarden over een vierpuntsschaal (onvoldoende, voldoende, goed en uitstekend). Daarnaast moest de commissie een oordeel vellen over wetenschappelijke integriteit en over de kwaliteit van de promotie-opleidingen.

Kort samengevat zijn de uitkomsten dat praktisch al het onderzoek van hoge kwaliteit is, dat wiskunde een uitstekende bijdrage levert aan de maatschappij, en dat de groepen over het algemeen zeer levensvatbaar zijn.

Hier zijn een aantal kanttekeningen bij te maken. Een van de manieren om kwaliteit te beoordelen die in het SEP duidelijk naar voren komt, is om de verhouding tussen de verschillende geldstromen te bekijken. De commissie kwam er echter achter dat dit met name bij de wiskunde een onmogelijke zaak is. De oorzaak hiervan is dat de eerste geldstroom de financiering van het serviceonderwijs omvat, maar de omvang van het serviceonderwijs loopt nogal uiteen aan de verschillende universiteiten.

Bij de maatschappelijke relevantie speelt het gebruikelijke probleem dat wiskundeonderzoek meer van de lange adem

is, zodat bijvoorbeeld deelname aan het onderzoek in de Topsectoren lastig is. De commissie vond echter dat de Nederlandse wiskundigen zich positief moeten opstellen ten opzichte van dit type onderzoek, en toch moeten proberen een voet aan de grond te krijgen bij de Topsectoren. Wat hierbij kan helpen is professionalisering



Omslag van het rapport

van de acquisitie van beurzen en projecten, en de commissie constateert dat er universiteiten zijn die dit succesvol uitvoeren.

Ten slotte vond de commissie dat de Nederlandse wiskundigen zeer goed omgaan met hun promovendi. Onder andere was er veel waardering voor het Mastermath-programma, en het feit dat de meeste promotiecommissies een internationale samenstelling hebben.

Groeiende studentenaantallen

Doordat de groei van het aantal wiskunde-studenten van de laatste twaalf jaar niet gepaard gegaan is met een groei van de wiskundestaf aan de Nederlandse universiteiten, komt het wiskundeonderzoek in de knel. Dit is nog dramatischer bij wiskunde-afdelingen die serviceonderwijs geven, omdat ook bij andere disciplines sprake is van toegenomen studentenaantallen. De commissie noemt dit probleem cruciaal, en maakt zich grote zorgen over de gevolgen voor de toekomst van het Nederlandse wiskundeonderzoek. Er moet actie worden genomen op lokaal en nationaal niveau. In het bijzonder onderschrijft de commissie de adviezen in het *Deltaplan voor de Nederlandse wiskunde*. ☞

Referenties

- 1 Jacob Fokkema e.a., Een Deltaplan voor de Nederlandse wiskunde, *Nieuw Archief voor de Wiskunde* 5/16(4) (2015), 265–267.
- 2 R. Kenna en B. Berche, Critical mass and the dependency of research quality on group size, *Scientometrics* 86(2) (2011), 527–540.
- 3 QANU, *Research Evaluation Mathematics 2009–2014*, QANU, Utrecht, 2016.

Martijn Kool

Mathematisch Instituut
Universiteit Utrecht
m.kool1@uu.nl

Column Tenure-tracker

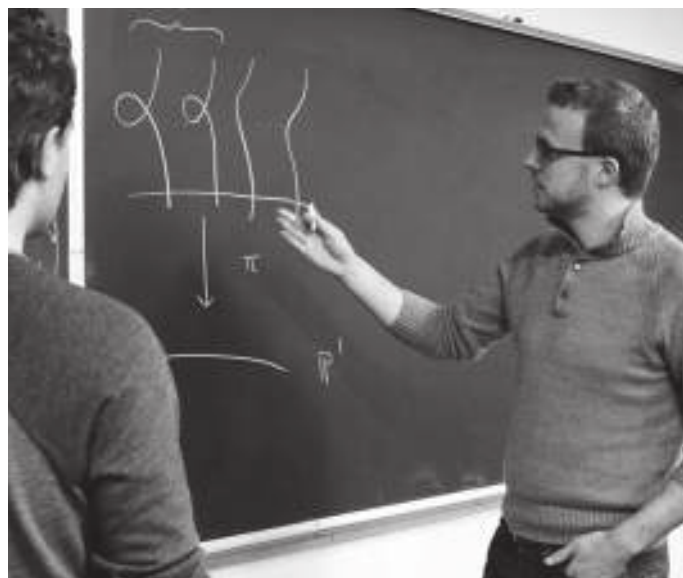
Krommen tellen

In deze rubriek stellen houders van een tenure track-positie zich voor. Om het wiskundig onderwijs en onderzoek op niveau te houden zijn in 2013 tenure track-posities gerealiseerd door de wiskundeclusters. Deze aanstellingen bieden jonge wiskundige onderzoekers kans op aanzienlijke groei in hun wetenschappelijke carrière. Martijn Kool heeft een tenure track-positie aan de Universiteit van Utrecht.

Aftellende meetkunde is één van de oudste takken van de wiskunde met wortels in de Oudheid. Een probleem in aftellende meetkunde vraagt naar het aantal meetkundige objecten van een bepaald type dat aan gegeven beperkingen voldoet. Bijvoorbeeld, het probleem van Apollonius van Perga (circa 262 v.Chr. — circa 190 v.Chr.) luidt: “Hoeveel cirkels raken drie gegeven cirkels in het vlak?” In de negentiende eeuw ontwikkelde de school van H. Schubert tal van methoden om problemen in de aftellende meetkunde op te lossen, bijvoorbeeld “Hoeveel lijnen snijden vier gegeven lijnen in de 3-dimensionale ruimte?” Hoewel aftellende meetkunde in de negentiende eeuw veel vooruitgang kende, waren er ook problemen die niet konden worden opgelost, bijvoorbeeld de bepaling van zogenaamde Severi-graden, die we dadelijk introduceren.

Een algebraïsche kromme C in het vlak $\mathbb{R}^2$ is de nulpuntenverzameling van een veelterm: $f(x, y) = 0$. In de aftellende meetkunde is het gebruikelijk om te werken in het ‘complexe vlak’ $\mathbb{C}^2$, zodat algebraïsche krommen ook daadwerkelijk niet-leeg zijn. Ook worden de vraagstukken veelal geformuleerd op projectieve ruimten. Het complexe projectieve vlak $\mathbb{CP}^2$ is het gewone vlak $\mathbb{C}^2$ met een (projectieve) lijn in het oneindige toegevoegd. Het projectieve vlak $\mathbb{CP}^2$ heeft als voordeel dat twee verschillende lijnen elkaar altijd snijden; ook als ze parallel zijn, namelijk in een punt op de lijn in het oneindige. We beschouwen vanaf nu dan ook algebraïsche krommen in $\mathbb{CP}^2$.

Veeltermen van graad d hebben $\binom{d+2}{2}$ coëfficiënten en worden dus geparametriseerd door een complexe vectorruimte van dimensie $\binom{d+2}{2}$. Wanneer we opmerken dat twee veeltermen die een multiplicatieve constante verschillen dezelfde kromme definiëren, vinden we dat de ruimte van krommen van graad d niets anders is dan de complexe projectieve ruimte van dimensie $\binom{d+2}{2} - 1$. Alle krommen die door een gegeven punt in het vlak gaan, liggen in een lineaire deelruimte van codimensie 1 in deze projectieve ruimte. Wanneer we ons vervolgens afvragen hoeveel krommen van graad d door $\binom{d+2}{2} - 1$ generieke punten gaan, doorsnijden we eigenlijk $\binom{d+2}{2} - 1$ hyperoppervlakken in een projectieve ruimte van dimensie $\binom{d+2}{2} - 1$. Aangezien zo’n doorsnede (generiek) precies één oplossing heeft, zien we dat het antwoord één is.



Bijvoorbeeld voor $d = 1$ concluderen we dat één lijn door twee punten gaat.

De situatie wordt aanzienlijk moeilijker wanneer de krommen ook singulariteiten hebben. De eenvoudigste singulariteit is de *knoop*: een singulariteit die er lokaal uitziet als de oplossing van de vergelijking $xy = 0$. De *Severi-graad* $N_{d,\delta}$ is het aantal krommen van graad d met δ knopen dat door

$$\binom{d+2}{2} - 1 - \delta$$

generieke punten gaat. Een eenvoudige opgave: ga na dat $N_{2,1} = 3$ dooreen plaatje te tekenen. In de negentiende eeuw waren alle Severi-graden met ten hoogste drie knopen bekend: $\delta = 1$ (J. Steiner, 1848), $\delta = 2$ (A. Cayley, 1863, en ook G. Salmon, 1865) en $\delta = 3$ (S. Roberts, 1875)

$$\begin{aligned} N_{d,1} &= 3(d-1)^2, \\ N_{d,2} &= \frac{3}{2}(d-1)(d-2)(3d^2-3d-11), \\ N_{d,3} &= \frac{9}{2}d^6 - 27d^5 + \frac{9}{2}d^4 + \frac{423}{2}d^3 - 229d^2 - \frac{829}{2}d + 525. \end{aligned}$$

Voor een gedetailleerd historisch overzicht verwijzen we naar S. Kleiman en R. Piene [4]. Het duurde echter meer dan een eeuw voordat alle Severi-graden $N_{d,\delta}$ werden bepaald door Z. Ran in 1989 [9] en L. Caporaso en J. Harris in 1996 [1].

Afgaande op bovenstaande lijst zou je kunnen vermoeden dat voor vaste δ het getal $N_{d,\delta}$ gegeven wordt door een veelterm in d . Dit blijkt alleen het geval te zijn wanneer $d \gg \delta$ ($d \geq \delta$ is voldoende). Als

$$\delta = \frac{d^2 - 3d}{2} + 1,$$

dan telt $N_{d,\delta}$ het aantal zogenaamde *rationale krommen* van graad d door $3d - 1$ punten. Het tellen van rationale krommen is opgelost door M. Kontsevich [5] en in dit geval worden de getallen $N_{d,\delta}$ in het algemeen *niet* door een veelterm gegeven.

Men kan ook krommen van gegeven graad d en aantal knopen δ tellen op andere oppervlakken S (en dus niet alleen op het projectieve vlak $\mathbb{CP}^2$). Bijvoorbeeld wanneer S gegeven wordt door de nulpuntenverzameling van een homogene veelterm op $\mathbb{CP}^3$. In 1997 formuleerde L. Göttsche het vermoeden dat voor iedere δ en $d \gg \delta$, de bijbehorende ‘gegeneraliseerde Severi-graad’ voor ieder oppervlak S door een universele veelterm in d (en drie andere

getallen) wordt gegeven. In het bijzonder zouden de gegeneraliseerde Severi-graden alleen van de *topologie* van S afhangen. Inmiddels bestaan er diverse bewijzen van dit vermoeden, zie onder andere [3, 6, 10].

Eén manier om het Göttsche-vermoeden op te lossen is door het oppervlak S in te bedden in een variëteit van één complexe dimensie hoger (een zogenaamde *complexe drievoud*). Krommen op complexe drievouden en hun moduli blijken aan heel bijzondere eigenschappen te voldoen. Rond de jaren negentig van de vorige eeuw werden allerlei interessante invarianten van complexe drievouden X ontdekt, waarvan de zogenaamde *Gromov–Witten*- en *Donaldson–Thomas-invarianten* het meest opmerkelijk zijn. GW-invarianten tellen krommen op X en DT-invarianten tellen zogenaamde schoven (denk: vectorbundels) op X . Een diep vermoeden van D. Maulik, N. Nekrasov, A. Okounkov en R. Pandharipande [7] claimt dat de genererende functies van GW- en DT-invarianten gelijk zijn (op een mysterieuze variabelensubstitutie na). Dit zogenaamde MNOP-vermoeden is inmiddels in veel gevallen bewezen, zie [8].

Terug naar Severi-graden: door S in te bedden in een drievoud X kan men gegeneraliseerde Severi-graden in termen van bepaalde GW-invarianten van X uitdrukken. Vanwege het MNOP-vermoeden kun je die GW-invarianten uitrekenen door middel van DT-invarianten en die blijken in deze specifieke context inderdaad door universele veeltermen te worden gegeven. Dit leidt tot een kort bewijs van het Göttsche-vermoeden [6].

Ik ben geïnteresseerd in het berekenen van genererende functies van GW/DT-invarianten voor specifieke families van complexe drievouden X . Afhankelijk van je keuze van X leidt dit tot verbanden met aftellende meetkunde, modulaire vormen, combinatoriek van partities, of theoretische natuurkunde (GW-invarianten zijn een topologische versie van padintegralen in de snaartheorie). Hier valt dus veel te beleven! $\dashv$

Biografie

Martijn Kool promoveerde in 2010 in Oxford onder begeleiding van D. Joyce. In 2010–2013 werkte hij als postdoc aan Imperial College en 2013–2014 als PIMS postdoc aan UBC. Hij is begonnen als tenure-tracker in Utrecht in januari 2015 en ontving een Marie Skłodowska-Curie-beurs in hetzelfde jaar.

Referenties

- 1 L. Caporaso en J. Harris, Counting plane curves of any genus, *Invent. Math.* 131 (1998), 345–392.
- 2 L. Göttsche, A conjectural generating function for numbers of curves on surfaces, *Comm. Math. Phys.* 196 (1998), 523–533.
- 3 M. Kazarian, Multisingularities, cobordisms, and enumerative geometry, *Russ. Math. Surv.* 58 (2003), 665–724.
- 4 S. Kleiman en R. Piene, Node polynomials for families: methods and applications, *Math. Nachr.* 27 (2004), 69–90.
- 5 M. Kontsevich, Enumeration of rational curves via torus actions, in *The Moduli Space of Curves*, Progress in Math. No. 129, Birkhäuser, 1995, pp. 335–368.
- 6 M. Kool, V. Shende en R. P. Thomas, A short proof of the Göttsche conjecture, *Geom. Topol.* 15 (2011), 397–406.
- 7 D. Maulik, N. Nekrasov, A. Okounkov en R. Pandharipande, Gromov–Witten theory and Donaldson–Thomas theory, I, *Compos. Math.* 142 (2006), 1263–1285.
- 8 R. Pandharipande en A. Pixton, Gromov–Witten/Pairs correspondence for the quintic 3-fold, arXiv:1206.5490.
- 9 Z. Ran, Enumerative geometry of singular plane curves, *Invent. Math.* 97 (1989), 447–469.
- 10 Y.-J. Tzeng, A proof of the Göttsche–Yau–Zaslow formula, *J. Diff. Geom.* 90 (2012), 439–472.

Ionica Smeets

Wetenschapscommunicatie
Universiteit Leiden
i.smeets@biology.leidenuniv.nl

Evenement Kousbroeklezing

Cijfers, letters en regels

Op 8 april hield Ionica Smeets, hoogleraar wetenschapscommunicatie aan de Universiteit Leiden, de zesde Kousbroeklezing in De Rode Hoed in Amsterdam. De Kousbroeklezing wordt sinds 2011 jaarlijks gehouden ter nagedachtenis van de in 2010 overleden schrijver Rudy Kousbroek. Wij drukken hierbij de tekst van de lezing af, met toestemming van literair tijdschrift *De Gids*, waarin de tekst eerder gepubliceerd is.

In 1961 publiceerde de Franse schrijver Raymond Queneau een bundel met honderdduizend miljard sonnetten. Het boek kreeg de toepasselijke titel *Cent Mille Millions de Poèmes*. De wiskundig aangelegden onder u zullen nu wat bedenkelijk kijken. Honderdduizend miljard? Dat is een één met veertien nullen. Als Queneau twintig gedichten per dag schreef, dan had hij bij het ontstaan van het heelal moeten beginnen om op tijd klaar te zijn met zijn collectie. En toch kon het. De literair aangelegden onder u weten dat een sonnet veertien regels telt, en wie zowel wiskundig als literair is aangelegd, vermoedt dat die veertien nullen geen toeval zijn.

Queneau verzoon een slimme vorm: hij schreef tien sonnetten, die allemaal dezelfde rijmklanken gebruiken. Elk gedicht kreeg een eigen pagina, maar elke dichtregel stond op een losse strook papier. Zo kon de lezer zelf een gedicht samenstellen door de stroken om te vouwen, als in de kartonnen kinderboeken waar je het hoofd van een beer op de buik van een giraffe kunt zetten. Veertien dichtregels met elk tien keuzemogelijkheden levert tien tot de veertiende, oftewel honderdduizend miljard, verschillende sonnetten op.

Bij het maken van zijn dichtbundel riep Queneau de hulp in van wiskundige François

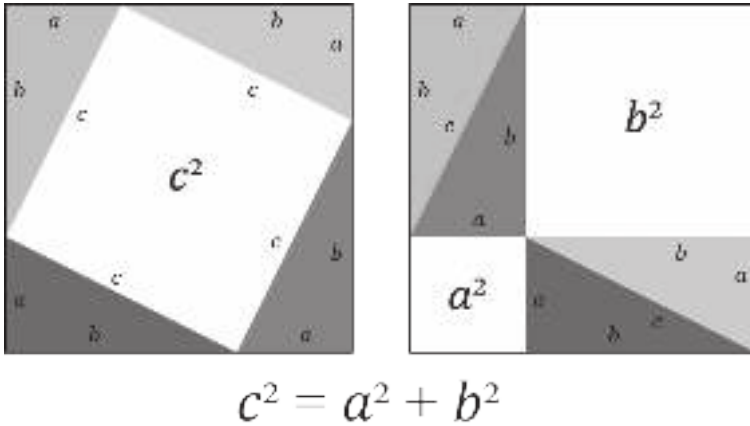
Le Lionnais en zo ontstond Oulipo: *Ouvroir de littérature potentielle* waarin (vooral Franstalige) schrijvers en wiskundigen samenkwamen. Ze wilden nieuwe structuren en patronen zoeken die schrijvers naar believen konden gebruiken in hun boeken. Hun experimenten leidden bijvoorbeeld tot *La Vie mode d'emploi* waarin George Perec zijn lezers meeneemt langs de bewoners

van een appartementencomplex waarbij de rondgang langs de kamers een paardensprong is, als in het schaakspel. Ook zeer wiskundig is *Qui a tué le Duc de Densmore?* van Claude Berge waarin Sherlock Holmes de moord op de graaf van Densmore oplost dankzij een resultaat uit de netwerktheorie.

Maar het meest Oulipiaanse werk is van Queneau zelf: *Exercices de style* waarin hij hetzelfde banale verhaaltje in 99 verschillende stijlen vertelt. Hij gebruikt onder andere een sonnet, flaptekst, bewijs en lipogram waarbij de letter e moet worden vermeden. Als wiskundestudent las ik dit



Figuur 1 Een samengesteld sonnet in *Cent Mille Millions de Poèmes* van Raymond Queneau.



Figuur 2 Het mooiste bewijs voor de stelling van Pythagoras.

boek in de fijne vertaling van Rudy Kousbroek. En geheel volgens de wetten van de serendipiteit, kreeg ik in dezelfde tijd het boek *The Pythagorean Proposition* waarin Elisha Loomis 367 (!) verschillende bewijzen verzamelt voor de stelling van Pythagoras. Zowel bij verhalen als bij wiskundige bewijzen zijn er talrijke manieren om hetzelfde op te schrijven en het is een kwestie van smaak welke stijl iemand het beste bevalt (al is het in Figuur 2 getoonde meetkundige bewijs voor de stelling van Pythagoras natuurlijk het aller mooiste).

Een ander fijn voorbeeld van serendipiteit was hoe wiskundige Tanya Khovanova en Rutger Kiezebrink van Onze Taal vorig jaar vlak na elkaar twee verwante vragen over rekenen en taal stelden. Kiezebrink verzamelde sommen waarbij het antwoord gelijk is aan het aantal letters van de som. Bijvoorbeeld “Zevenhonderdveertig ge-

deeld door twintig”, dat is zevenendertig gevangen in zevenendertig letters. Of nog mooier: “drie maal vier”, want dat zijn twaalf letters, ook nog eens in drie woorden van lengte vier. Of “Het kleinste getal dat netjes deelbaar is door twee, drie, vier, vijf en zes” en zo zou ik nog zeker zestig minuten kunnen doorgaan met voorbeelden. Khovanova had als variant: “Uit hoeveel letters bestaat het juiste antwoord op deze vraag?” Het eenvoudigste antwoord op haar vraag is “vier”, want dat heeft vier letters. Maar ook alle sommen van Kiezebrink waren stuk voor stuk een antwoord op de vraag van Khovanova. Dit is de logische voortzetting van Kousbroeks “Welke vraag heeft vierendertig letters?” en het is precies de soort vraag die zowel wiskundigen en taalkundigen verrukt.

Als kind zwijmelde ik boven *Opperlandse taal- & letterkunde* van Battus (een pseudoniem van Hugo Brandt Corstius) met al die uitzonderlijke vormen van woorden, keurig geordend per soort. Het is vast geen toeval dat de samensteller óók een wiskundige was. Eén van mijn favoriete lijsten in het boek was de opsomming van ‘driehonderdendrie prachtige keerwoorden’, met daarin het intrigerende *moorddroom*. Hoe zou je een soortgelijke vormverzameling met getallen in plaats van woorden moeten maken?

Woorden zijn de bouwstenen van onze verhalen, de betekenisvolle combinaties in een eindeloze oceaan van letters. Er zijn bijvoorbeeld 676 mogelijke combinaties van twee letters (26 maal 26), maar het Nederlands telt slechts negentig tweeletterige woorden. De ‘woorden’ van de getallen moeten net zo zeldzaam en betekenisvol zijn. Dat moeten dan de priemgetallen zijn: positieve, gehele getallen die alleen deel-

baar zijn door één en zichzelf, zoals 5, 19 of 37. Zij vormen de bouwstenen van alle getallen, elk getal is te schrijven als een unieke vermenigvuldiging van priemen. Daarnaast zijn ze minstens zo zeldzaam en kostbaar als woorden. In de honderd twee-cijferige getallen (met de nul aan het begin meegenomen) zitten slechts vijftientwintig priemen.

De tegenhanger van *moorddroom* moet dus een omkeerbaar priemgetal zijn, zoals 700.666.007. Dat is wel iets korter dan *moorddroom* met zijn tien letters. Sterker nog: er bestaat geen enkel palindroom-priem met exact tien cijfers, want een even getal dat omkeerbaar is, is altijd deelbaar door elf (wiskundigen zeggen op zo’n moment graag: het bewijzen hiervan is een huiswerkgave voor de lezer). Het enige palindroom-priemgetal met een even aantal cijfers is daardoor elf zelf. Priemgetallen hebben nét wat meer regels dan woorden.

Waar bij woorden dit soort speciale eigenschappen afhangen van de taal (een *murder dream* is geen palindroom, het is niet eens één woord), zo hangt de vorm van een priemgetal af van het gekozen getalstelsel. De voorbeelden hierboven werken alleen omdat wij onze getallen in het tientallig stelsel noteren. Als je 700.666.007 zoals een computer binair schrijft met enen en nullen, dan is het niet omkeerbaar. Al blijft het ondeelbaar, zoals de betekenis van moord in andere talen ook blijft behouden (al zijn er tussen talen dan weer veel meer nuanceverschillen dan tussen getalstelsels).

Tijdens mijn studie ontdekte ik dat wiskundigen ook lange lijsten maken van getallen die zij om de een of andere reden mooi vinden. Zo is 29.137 een bijzonder priemgetal: als je er vanaf links steeds een cijfer afhaalt, krijg je een heel rijtje getallen die stuk voor stuk priem zijn: 9.137, 137, 37 en 7. We noemen een getal met deze eigenschap een links-inkortbare-priem en we weten dat er exact 4.260 van dit soort getallen bestaan. Overigens telt deze tekst precies 1.997 woorden, ook dat is een links-inkortbare-priem. Net als het aantal woorden in deze alinea, telt u dat gerust even na. Je kunt als tegenhanger links-inkortbare-woorden zoeken. Bijvoorbeeld *droom* dat van *room* naar *oom* via *om* eindigt als *m* (volgens mij had *Opperlandse* nog geen term voor dit soort woorden).



Figuur 3 *Opperlandse taal- & letterkunde* van Battus.

Dit alles lijkt misschien nogal nutteloos, maar wiskundigen gaan er juist prat op dat hun werk geen praktische toepassingen heeft. Topwiskundige Hendrik Lenstra was eens te gast bij *De Wereld Draait Door* toen er een nieuw priemgetal was ontdekt. Matthijs van Nieuwkerk stelde de onvermijdelijke vraag “wat we daar nu aan hebben”. Lenstra antwoordde vrolijk: “Het is gewoon lol. Levensgeluk is ook een toepassing.” Zo’n zeventig jaar eerder betoogde de Britse wiskundige G.H. Hardy in zijn *A Mathematician’s Apology* dat de nutteloosheid van fundamentele wiskunde zelfs een pré is, daardoor kan het werk niet misbruikt worden voor oorlog of andere ellende. Bovendien is zuivere wiskunde een intellectuele exercitie, terwijl al het toepasbare in de wiskunde saai en elementair is.

Het is enigszins ironisch dat uitgerekend die priemgetallen, waarvan ook Hardy zeer hield, sinds de opkomst van de computer een overvloed aan toepassingen vonden. Kennis die eeuwenlang alleen interessant was voor wiskundigen, vormt nu de basis voor allerlei versleutelingen en veilig internetbankieren. Zelfs het tamelijk recente werk van Hendrik Lenstra kent inmiddels allerlei toepassingen, ook al bedacht hij

het allemaal puur voor zijn eigen plezier. Zo is het steeds gegaan. Ook al waren in de geschiedenis veel onderzoekers puur geïnteresseerd in de persoonlijke intellectuele bevrediging van hun werk, uiteindelijk hebben al hun nutteloze vragen geleid tot de huidige technologie en welvaart.

Ontdekkingen in de wiskunde zijn een kwestie van begrippen helder definiëren, basisaannames afspreken en daarna volgens de regels ware uitspraken afleiden. Euclides definieerde ruim tweeduizend jaar geleden bijvoorbeeld dingen als ‘de uiteinden van een lijnstuk zijn punten’, nam aan dat door twee punten één rechte lijn gaat en gebruikte regels als ‘als men gelijke dingen optelt bij gelijke dingen, dan zijn de totalen ook gelijk’. Met dit soort eenvoudig gereedschap kon hij bewijzen dat de som van de hoeken in een driehoek altijd 180 graden is of dat er slechts vijf regelmatige veelvlakken bestaan (voor de liefhebbers: dat zijn de tetraëder, kubus, octaëder, dodecaëder en icosaeëder).

Regels zijn prachtig en kunnen leiden tot grootse intellectuele prestaties. He-las hebben ze buiten de wiskunde een wat slecht imago. Regels zouden voor bureaucraten, frikken, kuddedieren of grijze muizen zijn. Terwijl het bedenken van een

nieuwe regel juist een zeer creatieve activiteit is. En zelfs het volgen van andermans regels kan zorgen voor een hele reeks nieuwe ideeën, juist omdat het aantal mogelijke denkrichtingen is ingeperkt doordat er een duidelijk kader is waarbinnen je kunt nadenken.

Kortom: maak zelf ook eens honderd-duizend miljard sonnetten of schrijf een thriller volgens wiskundige wetten. Zoek getallen die iets bijzonders hebben of verzamel woorden met een speciale eigenschap. Nóg veel beter is het om zelf nieuwe grenzen te bedenken waarbinnen u iets moois kunt creëren. Om te kijken wat er allemaal zou kunnen bestaan. Zoek net als Oulipo naar regels en patronen en gebruik die vervolgens hoe u maar wilt. Wie weet waar het toe leidt. En vergeet daarbij nooit dat levensgeluk ook een toepassing is.

Ten slotte, ter inspiratie: een eerbetoon aan Rudy Kousbroek die zelf weer een hommage bracht aan George Perec. Hierbij 37 versies van dezelfde, banale zin. Sommige varianten zijn beperkingen die de Oulipo bedacht, andere restricties zijn toegevoegd door Kousbroek in *De logologische ruimte* en vanzelfsprekend zijn er ook regels die ik verzonnen heb — u mag zelf raden welke dat zijn.

Eerbetoon aan Rudy Kousbroek

Oertekst: *De kat ligt in de zon.*

Meervoud: *De katten liggen in de zonnen.*

Vermeerdering: *De kat ligt in de zonwering.*

Anagram (vragend): *Zeg, Daniël: “Tikt Don?”*

Anagram (onthulling): *Ad ziet geld in kont.*

Anagram (Twitter): **Danklied toezigt**

Verzamelingenleer: $\{katten\} \cap \{dingen\} \neq \emptyset$

Palindroom: *De kat ligt in de zon, no, zed nit gil tak Ed.*

Ontkenning (1): *Er ligt geen kat in de zon.*

Ontkenning (2): *De kat ligt niet in de zon.*

Isovoocaal: *Ze had jicht, spinde Ron.*

Detective: *Zijn dat kattenharen op de vensterbank?*

Caesarcijfer: *Ij pfy qnly ns ij ets.*

Lipogram (in A): *De poes ligt in de zon.*

Lipogram (in E): *Kat ligt in zon.*

Lipogram (in I): *De kat rust onder de zonnestrallen.*

Lipogram (in O): *De kat ligt in het warme licht.*

Lipogram (in U): *De kat ligt in de zon.*

Andere opinie: *Ksst, ga eens ergens anders liggen!*

A met een aba: *Debe kabat ligbigt inbin debe zonbon.*

Passief: *Er wordt door de kat in de zon gelegen.*

Google zoeksuggestie: *De kat... uit de boom kijken.*

S+7: *De katalyse ligt in het zondaarsbankje.*

S-7: *Het kastpapier ligt in het zomerverblijf.*

Alfabetisch (1): *De de in kat ligt zon.*

Alfabetisch (2): *ADDEEGIIKLNNOTTZ.*

Andersomliner: *De zon. De kat ligt erin.*

Plat: *Dus ik zeg tegen mijn buurvrouw, buurvrouw zeg ik, weet je dat die kat daar gewoon in de zon leg te leggen?*

Isomorf: *De kat krabt de krullen van de trap.*

Homomorfisme: *Denkend aan Holland, zie ik katten in de zon liggen.*

Preciezer: *De Noorse boskat lag in de namiddagzon.*

Germanisme: *Mensch, die Katze ligt wie ein lapswans in die Sonne.*

Van Dale: *Het klein roofdier uit de familie van de katachtigen lag in de stralen van het centrale lichaam in het zonnestelsel waar de aarde deel van uitmaakt.*

Dubbelop: *De kat en de poes ligt en strekt zich uit in de zon en de stralen.*

Fibonacci: *O, o, de kat spint achterop vensterbankje.*

Oplopend: *O, de kat ligt naast zwarte schaduw.*

Ivo Niehe: *Het is unaniem een belachelijk groot succes hoe de kat in de zon ligt.*

Henk Pijls

Korteweg-de Vries Instituut
Universiteit van Amsterdam
h.g.j.pijls@uva.nl

Jan Wiegerinck

Korteweg-de Vries Instituut
Universiteit van Amsterdam
j.j.o.o.wiegerinck@uva.nl

In Memoriam Eduard M. de Jager (1927–2015)

Enthousiast ambassadeur van de wiskunde

Op 17 juli 2015 overleed Eduard de Jager te Baambrugge in de leeftijd van 88 jaar. Van 1968 tot 1992 was hij hoogleraar mathematische fysica aan de Universiteit van Amsterdam. Bij zijn emeritaat werd hij benoemd tot Ridder in de Orde van de Nederlandse Leeuw. Zijn oud-collega's Henk Pijls en Jan Wiegerinck herdenken hem.

Eduardus Marie de Jager werd geboren op 3 februari 1927 te Uitgeest. Na enige tijd verhuisde het gezin De Jager naar Leeuwarden, waar Eduard opgroeide. Zijn ouders waren beiden onderwijzer. Van 1939 tot 1944 bezocht hij als intern het Gymnasium Augustinianum te Eindhoven. In het schooljaar 1944–1945 (het laatste oorlogsjaar) ging hij naar het Stedelijk Gymnasium te Leeuwarden. Aan de Universiteit Groningen studeerde Eduard wiskunde van 1945 tot 1953. Na zijn studie trad hij in dienst van het Nationaal Luchtvaartlaboratorium te Amsterdam. Hij deed onderzoek op het gebied van de aerodynamica en werkte samen met E. van Spiegel, A.I. van de Vooren en W. Eckhaus.

Promotie

In 1960 kwam Eduard in dienst bij het Mathematisch Centrum (tegenwoordig CWI), waar hij zijn promotie voorbereidde. In het academisch jaar 1962–63 verbleef hij als docent/onderzoeker aan de Universiteit te Berkeley. Hij promoveerde in 1964 cum laude bij Hans Lauwerier op een proefschrift getiteld *Applications of Distributions in Mathematical Physics*. Het betrof toepassingen van Laurent Schwartz' distributietheorie in de aerodynamica en in de theoretische fysica, met name een afleiding van de Lorentz-invariante oplossingen van de

Klein–Gordon-vergelijking en een behandeling van divergente convolutie-integralen in de elektrodynamic.

Hoogleraar

In 1964 werd hij hoogleraar aan de pas opgerichte Universiteit Twente. Hij kon boeiend vertellen over zijn tijd aan de UT. Als jong hoogleraar ging hij dagelijks met de tram naar de campus. De conducteur begroette hem dan met een “Goede morgen, professor.” Hieraan kwam een eind toen de rector erachter kwam dat de hooggeleerde heer zich met het openbaar vervoer naar zijn werkplek verplaatste. Dat kon natuurlijk niet. Vanaf dat moment stond iedere ochtend een taxi voor hem klaar, of hij wilde of niet.

In 1968 volgde zijn benoeming aan de Universiteit van Amsterdam tot hoogleraar in de zuivere en toegepaste wiskunde. Zijn colleges distributietheorie en partiële differentiaalvergelijkingen waren inspirerend en werden door de studenten zeer gewaardeerd. Eduard was een bevoegen docent en wist zijn enthousiasme naar zijn publiek over te brengen.

Mathematische fysica

In 1980 zochten enkele theoretisch-fysici in Amsterdam contact met wiskundigen. De ijktheorie stond in de belangstelling

en zij hadden behoefte aan wiskundige ondersteuning. Eduard was onmiddellijk geïnteresseerd. Zo ontstond de samenwerking met Edy de Kerf en Gerard Bäuerle. Dit leidde tot het *Seminarium Mathematische Structuren van Veldentheorie*, dat maandelijks werd gehouden. Ter voorbereiding van het programma vond jaarlijks een bijeenkomst plaats in Twente. Inmiddels behoorden Ruud Martini uit Twente en Peter Bongaarts uit Leiden tot de organisatoren. Eduard echter was de bindende factor en inspirator. Het seminarium ondervond grote landelijke belangstelling en heeft vele jaren bestaan. Eduard heeft met deze activiteiten de grondslag gelegd voor het programma Mathematische Fysica aan de UvA, dat breed werd ingevuld. Toen is daadwerkelijk tussen de wiskunde en de natuurkunde weer een brug geslagen, die nog steeds in stand is gebleven.

Eduard nam het initiatief voor de tweejaarlijkse *Scheveningen Conferentie* op het gebied van differentiaalvergelijkingen en toepassingen. Ook was hij geruime tijd editor van de *North-Holland Studies in Mathematical Physics*. Met groot enthousiasme heeft hij zich ingezet voor de totstandkoming van het *Landelijk Samenwerkingsverband Mathematische Fysica*. Deze werkgemeenschap van FOM/SMC, waarvan hij lange tijd voorzitter was, financierde onderzoeksprojecten op landelijk niveau. In dat kader was hij voorzitter van het scientific committee van het symposium in Scheveningen (1990), dat aan driehonderd jaar Huygens' principe was gewijd.

Zuivere en toepaste wiskunde

Het onderzoek van Eduard heeft zich altijd bewogen tussen de zuivere en de toepaste wiskunde. Het bleek reeds uit zijn proefschrift. Tekenend zijn in dit verband ook de titels van zijn oratie en afscheidscollege. De titel van zijn oratie in 1965 luidde 'De kracht van de abstractie' en zijn afscheidscollege in 1992 was getiteld 'De macht van de concrete ervaring'. Daarin vertelt hij ook smakelijk over zijn ervaring met margarine. Toen hij op het Mathematisch Centrum werkzaam was werd hij geconsulteerd door ingenieurs van Unilever die geïnteresseerd waren in een model voor de smeerbaarheid van margarine en andere vetten. Het gaf Eduard veel vreugde dat zijn, in zijn ogen eenvoudige, berekeningen de smeerbaarheid precies voorspelden.

Zijn wiskundig onderzoek strekte zich uit van abstract tot concreet, van zuiver naar toegepast. Naast de distributietheorie en toepassingen daarvan was Eduard ook actief op het gebied van singuliere storingen. Samen met Wiktor Eckhaus publiceerde hij in 1966 een bekend artikel op dit gebied.

Na 1980 verschoof zijn interessegebied naar de integreerbare systemen. In dat jaar had Pierre Molino op uitnodiging van Wil van Est een aantal colleges gegeven over de Cartan-theorie van uitwendige differentiaalsystemen en de prolongatietheorie van Estabrook-Wahlquist met de Korteweg-de Vries-vergelijking als een van de typische voorbeelden. Eduards interesse was gewekt en hij verdiepte zich in de analytische en de differentiaalmeetkundige aspecten van integreerbare systemen. Dit onderzoek sloot naadloos aan bij de ijktheorie van de fysici. Het heeft geleid tot een aantal promoties.

Emeritaat

Na zijn pensionering in 1992 bleef Eduard wiskundig actief en publiceerde hij nog twee boeken. Allereerst voltooide hij samen met Brenny van Groesen een monografie over integreerbare systemen getiteld *Mathematical Structures in continuous dynamical systems*. Daarna verscheen het boek *The theory of Singular Perturbations*, met de Chinese wiskundige Jiang Furu als coauteur. Met hem had hij samengewerkt tijdens zijn bezoek aan Shanghai in 1986, waar hij enige tijd gasthoogleraar was.

In 1995 was het honderd jaar geleden dat het artikel verscheen van Korteweg en



Eduard de Jager

De Vries, waarin zij de naar hen genoemde vergelijking publiceerden. Ter gelegenheid hiervan werd in Amsterdam het symposium *KdV'95* georganiseerd. Eduard was voorzitter van het organisatiecomité. Korteweg was de eerste hoogleraar mathematische fysica aan de UvA; Eduard beschouwde zich als zijn opvolger. Voor Eduard was dit de aanleiding zich te verdiepen in de ontstaansgeschiedenis van de KdV-vergelijking en tevens in de figuur van Korteweg. Het historisch artikel over Korteweg en De Vries op de website van het Korteweg-de Vries Instituut is van zijn hand.

Eduard heeft negen promovendi gehad met proefschriften over uiteenlopende onderwerpen: distributietheorie, singuliere storingen, partiële differentiaalvergelijkingen, integreerbare systemen. Op het ge-

bied van de integreerbare systemen waren dat Ten Kroode, Van der Lende en Spanenburg. Zijn historische belangstelling blijkt verder uit zijn betrokkenheid bij het onderzoek van M.H. Sitters, die promoveerde op het meetkundig werk van de zeventiende-eeuwse rekenmeester Cardinael.

Een innemende persoonlijkheid

Eduard de Jager was een innemende persoonlijkheid, die van het leven genoot. Hij kon partijen bij elkaar brengen en werd hierom binnen het Mathematisch Instituut zeer gewaardeerd. Hij trad eenieder persoonlijk tegemoet. Daarbij toonde hij oprechte belangstelling en kon werkelijk verheugd zijn over het succes van collega's. Hij was een enthousiast ambassadeur van de wiskunde.

Henk Broer

Johann Bernoulli Instituut voor Wiskunde en Informatica
Rijksuniversiteit Groningen
h.w.broer@rug.nl

Afscheidsrede

Alles beweegt, maar

Op 20 november 2015 nam Henk Broer afscheid als *gewoon* hoogleraar aan de Rijksuniversiteit Groningen. Hij blijft echter nog enige tijd als *honorair* hoogleraar deelnemen aan onderwijs, onderzoek en congresbezoek. In zijn afscheidsrede blikt hij terug op zijn carrière.

bijzonder hoogleraar en in 2001 gewoon hoogleraar. Tijdens mijn aanstelling heb ik veel buitenlandse instellingen bezocht. Sedert 2008 ben ik tevens lid van de Ko-

“Vermöge der Musik genießen sich die
Leidenschaften selbst”

Jenseits van Gut und Böse
Friedrich Nietzsche 1886

Tijdens mijn schoolopleiding kregen wij wis-, natuur- en scheikunde op een zeer geïnspireerde manier, van leraren met een brede belangstelling, en regelmatig ook met een academische graad of een MO-B-akte. Wis- en natuurkunde gingen bij bepaalde onderwerpen mooi gelijk op, zoals *snelheid*, *versnelling* en *arbeid*, in verband met *differentiaal- en integraalrekening*. Beide leraren waren dubbel bevoegd en wisselden elkaars vakken en lesprogramma's tweejaarlijks om.

Daarna, bij de Rijksuniversiteit Groningen, volgde ik de richting *Wiskunde en Natuurkunde*, *met Sterrenkunde*, en na mijn kandidaatsexamen kon ik nog alle kanten op. De wiskunde was de meeste van deze drie door haar *strengheid* van redeneren, maar vooral door het feit dat de wiskunde aan de basis ligt van vrijwel alles. In het algemeen ervaar ik de natuurwetenschappen als een eenheid die deel uitmaakt van onze cultuur.

Sinds 1971 werk ik bij deze universiteit, waarvan ik, over het algemeen, zeer veel voldoening heb gehad. In 1991 werd ik



Figuur 1 Galileo Galilei (1564–1642).



Henk Broer

waarheen?

ninklijke Nederlandse Akademie van Wetenschappen.

In vogelvlucht neem ik u mee langs een aantal zaken uit de afgelopen 45 jaar. Mijn focus zal daarbij eerst inhoudelijk zijn, maar ik wil u ook enige opmerkingen van meer politieke aard niet onthouden. Deze laatste betreffen ontwikkelingen tussen het vwo en het wo: het *Voorbereidend Wetenschappelijk Onderwijs* en het *Wetenschappelijk Onderwijs*. En ook ontwikkelen van het onderzoeksklimaat aan de Nederlandse universiteiten.

Allereerst wil ik even stilstaan bij enige trends (of hypes) zoals men die in de wetenschappelijke wereld kent, mooie gelegenheden voor beleidsmakers om een sturende invloed op uit te oefenen. Binnen mijn eigen vakgebied ken ik er inmiddels een stuk of vier: *Catastrofetheorie*, *Chaos-theorie*, *Complexity* en *Big Data*, maar misschien tel ik niet goed. Ik moet zeggen dat mijn carrière in ruime mate heeft geprofiteerd van de eerste twee hiervan, en een klein beetje van de derde. Het vierde onderwerp laat ik graag aan mijn opvolgers over; Jos Roerdink, en velen met hem, wens ik in dezen succes.

Gedurende de jaren 1970–80 was daar de eerste trend, de *Catastrofetheorie*. Dat is een succesvolle theorie over niet-lineaire dynamica, waarbinnen plotselinge veranderingen (catastrofes) kwalitatief worden beschreven. In dit verband wil ik de namen René Thom en Christopher Zeeman noemen. De laatste hiervan gaf in de jaren negentig een *Johann Bernoulli-lezing* vanaf deze zelfde kathedraal.



Figuur 2 Botafumeiro (zie film op website auteur [37]).

Daarna, tussen 1980–90 bloeide de *Chaos-theorie*, tweede van de genoemde trends, een naam die — zover ik weet — door journalisten bedacht is. Het gaat erom dat veel niet-lineaire systemen, ondanks hun deterministische karakter, toch lijden aan een zekere onvoorspelbaarheid. Denkt u maar aan het weer.

Opmerking: Interessant is dat chaostheorie sterk van buitenaf geïnitieerd/gestimuleerd is. Belangrijke spelers zijn: Edward Lorenz (wiskundige–meteoroloog) en Robert May (bioloog), jaren 1960; Michel Hénon (astronoom) en Mitchell Feigenbaum (natuurkundige), jaren 1970–80.

Ik wil met u stilstaan bij enige culturele en maatschappelijke aspecten van wiskunde. Zelf ben ik geïnteresseerd in popularisering van de wiskunde. Dit blijkt onder meer uit mijn publicaties [5, 6, 8, 11, 13, 14]. Dit sluit aan bij mijn al eerder genoemde interesse in wiskunde als deel van een bredere natuurwetenschappelijke cultuur. Verder wil ik enige opmerkingen maken over

onderwijs en onderzoek, deels met als houvast het *Δ-plan voor de Nederlandse Wiskunde* [17], dat in mei 2015 openbaar werd. Meestal duidt een deltaplan erop dat er iets goed mis is, dus dat belooft nog wat. In alle gevallen is er sprake van ontwikkelingen, dus bewegingen. Ik zal steeds proberen aan te geven waarheen.

Onderzoekslijnen

Veel van mijn onderzoek heeft te maken met het begrip *resonantie*. U kent dat wel: uw borstkas trilt mee als u voluit zingt, of bij luide tromgeroffel. Soldaten moeten op een brug uit de pas lopen, omdat deze anders wel eens kan instorten. Vroeger stemde u uw radio af op de binnenkomende frequentie van Radio 4 (nu gebeurt dat meestal automatisch). De maan staat steeds met hetzelfde gezicht naar de aarde, haar omlooptijd om de aarde is gelijk aan die van de rotatie om haar as.

In mijn oratie van 1992 kwam resonantie ook al voor. Het begrip heeft als een soort rode draad door mijn werk gelopen.

Een aardig voorbeeld is de Botafumeiro in de kathedraal van Santiago de Compostela. Een groot wierookvat slingert aan een kabel die over een katrol loopt. Verschillende geestelijken trekken het vat op zodra het de grond nadert. Het systeem bevindt zich daarom in een 1:2-resonantie: de priesters moeten twee keer zo vaak op en neer bewegen als de slinger heen en weer.

Galileïsche dans

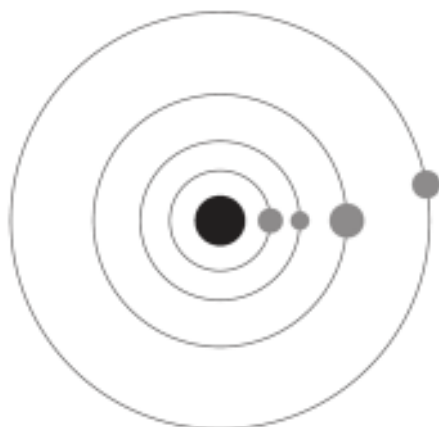
Recentelijk heb ik samen met een postdoc, Lei Zhao, gekeken naar de vier Galileïsche



Figuur 3 Zeus rooft Ganymedes volgens Rembrandt.

manen van Jupiter: *Io*, *Europa*, *Ganymedes* en *Callipso*. Dit onderzoek sluit aan bij zowel de eerste als de tweede hierboven genoemde trend. Bovendien vormt het een opstapje naar een centraal resultaat wat ik, in samenwerking met anderen, heb ontwikkeld. Het blijkt zometeen dat in deze Joviaanse dynamica een dubbele resonantie optreedt. Ik breng kort de geschiedenis in herinnering.

Allereerst: Waar komen die namen vandaan? Het zijn alle vier liefjes van Zeus = Jupiter. Op voorspraak van niemand minder dan Johannes Kepler geïntroduceerd door Simon Marius. Het is tekenend dat Galileo koppig I, II, III en IV bleef gebruiken. Rembrandt heeft de roof van het jongetje Ganymedes door Zeus (als adelaar), treffend verbeeld. Je kan je natuurlijk wel afvragen wat de commissie Deetman hierover te zeggen zou hebben.



Figuur 4 Simpele dans (zie film op website auteur [37]).

Galileo interpreteerde dit hele systeem als een miniatuur-zonnestelsel: het vormde een positieve aanwijzing voor het heliocentrische zonnestelsel. Zoals u waarschijnlijk weet, was dat toentertijd volop in discussie. Bekend hierover is zijn pamflet *Sidereus Nuncius* ('sterrenbode' of 'sterrenboodschapper') uit 1610. Het conflict dat hij hierover met de kerk heeft gekregen valt buiten ons huidige bestek.

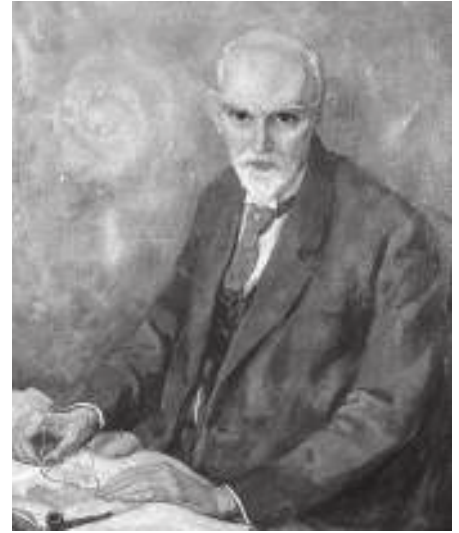
Rond 1900 ontdekte de Astronomer Royal sir David Gill vanuit de Kaapse sterrenwacht, een dubbele 1:2-resonantie in de bewegingen van de manen: Europa heeft (ongeveer) een tweemaal zo grote omlooptijd als Io en Ganymedes weer een tweemaal zo grote omlooptijd als Europa.

Willem de Sitter (*út Snits*) is op de wetenschappelijke achtergrond hiervan in 1901 bij Jacobus Cornelius Kapteyn gepromoveerd (voor de bestuurders: dit was een Groningse promotie). Zie de zeer leesbare biografie van de hand van Jan Guichelaar [18]. De Sitter [34, 35, 36] gebruikte werk van Poincaré [31, 32], *aartsvader* van de chaostheorie, overigens net als Kolmogorov.

Terug naar de Sitter. Deze laat in een Newtoniaans model zien hoe het Joviaanse 5-lichamen systeem een stabiele periodieke beweging kan doormaken. De verwachting is natuurlijk dat dit een benadering geeft van de 'echte' beweging. Wij hebben zijn verhaal eerst herteld, gebruikmakend van latere meetkundige inzichten. Daarnaast hebben wij het al aangeduide Gronings onderzoek toegepast om *libraties* van De Sitters periodieke beweging te vinden. Dat zou een nog betere benadering moeten opleveren van de *echte* beweging. Een libratie is een beweging met twee onafhankelijke perioden. We spreken wel van *multiperiodiek* (hier: $\text{multi} = 2$). Omwille van de zichtbaarheid nogal *overdreven* weergegeven.

Geparametriseerde KAM-theorie

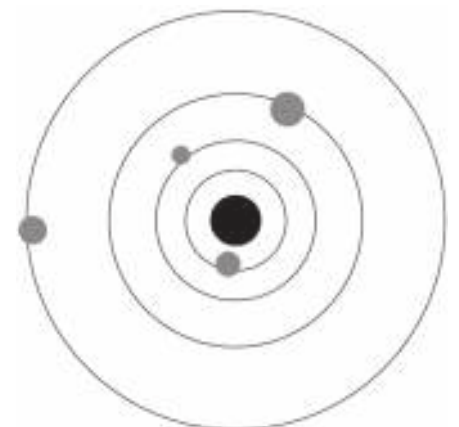
Laat mij deze gelegenheid aangrijpen om even stil te staan bij dat Gronings onderzoek. Dit betreft een *uitbreiding* van werk uit de jaren 1950–60 van Kolmogorov, Arnold en Moser (KAM) [2, 20, 21, 28] over multi- of quasi-periodiciteit. Onze uitbreiding is een theorie die rond 1990 begon met de promotie van George Huitema [4]. Naast KAM-theorie speelt hierin Catastrofe-theorie (of iets algemener *Singulariteiten-theorie*) een belangrijke rol. We spreken van *Geparametriseerde KAM-theorie*, pas-



Figuur 5 Willem de Sitter (1872–1934).

send in algemene theorieën over generieke families systemen. Later hebben ook de promovendi Heinz Hanßmann, Florian Wagener, Jun Hoo en Cristina Ciocci hieraan bijgedragen. Voor een overzicht zie [8].

Toepassing van deze theorie geeft een grote kans op libraties, die betere benadering vormen van het Joviaanse systeem. In al deze gevallen is het nog vrij duidelijk waarheen alles beweegt, zeg met de duidelijkheid van de paasdatum. Dit vereist mogelijk enige uitleg: zoals u vermoedelijk weet is Paaszondag de eerste zondag na de eerste volle maan na het begin van de lente. Merk op dat hier *drie draaibewegingen* bij betrokken zijn: het begin van de lente is een punt in de revolutie van de aarde om de zon. De volle maan idem dito in de revolutie van de maan om de aarde. De eerste zondag na volle maan telt rotaties van de aarde om haar as. Een algemeen vertrouwen is dat de perioden van



Figuur 6 Zwierige dans (zie film op website auteur [37]).

deze drie draaibewegingen, althans hun verhoudingen, niet teveel veranderen. Op internet zag ik in dit verband al een *eeuwigdurende* kalender.

Er is echter ook een kleine kans dat er op de zeer lange termijn hele andere dingen kunnen gebeuren. Zo kan ons zonnestelsel [24] op termijn van, zeg, een paar honderdduizend jaar een mooi apocalyptisch einde beleven. Iets dergelijks kan ook best gebeuren met de Galileïsche manen. Een ongeluk zit in een klein hoekje en dat is een belangrijk kenmerk van *chaos*.

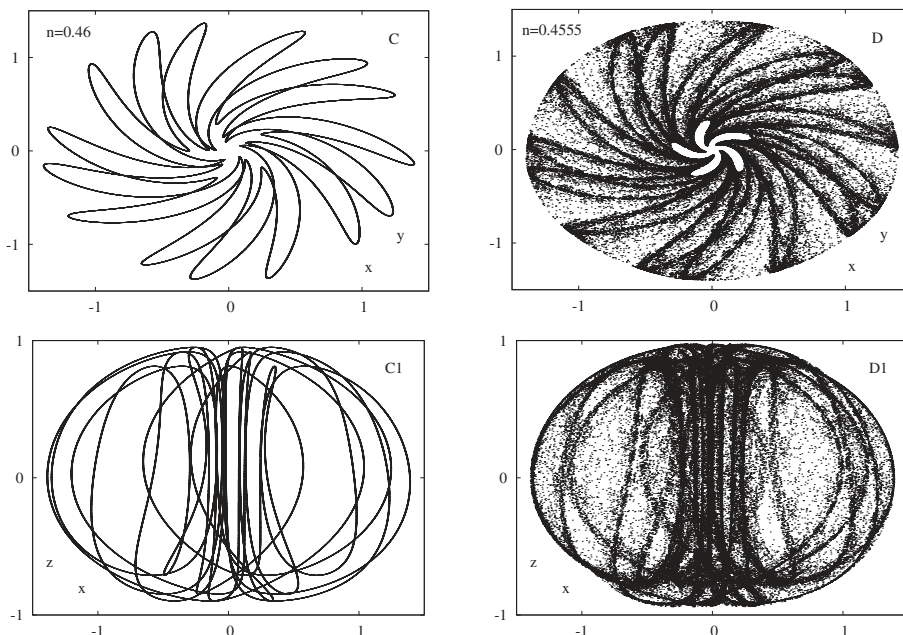
By the way, in 1995 schreef ik, samen met Ferdinand Verhulst en Jan van de Craats een populariserend werk over *chaos-theorie* [6].

Opmerkingen

- Tegenwoordig gaat de benadering van de Joviaanse beweging numeriek. In [22] wordt gewerkt met een relativistische correctie van De Sitter. De nauwkeurigheid is groots: 100 jaar heen en terug geeft een verschil van nog geen 8 m.
- De Sitter is beroemd geworden om zijn discussies met Einstein en om het heelal-model dat naar hem genoemd is: het *De Sitter Heelal*. Naar verluidt was hijzelf echter trotser op zijn werk aan de Galileïsche dans.

Begin van/Onset of turbulence: Een heel andere toepassing van de Geparametriseerde KAM-theorie neemt ons mee naar de natuurfilosofie. Deze theorie verzoent daar twee gezichtspunten over het ontstaan van turbulentie in vloeistoffen en gassen. Vraag is naar één wiskundige beschrijving van zowel de rustige laminaire stroming als de woelige turbulentie. Een vloeistof wordt langzamerhand turbulent door verhoging van een of andere parameter. Hoe kan dat? Er waren in dit verband twee stromingen:

- Voorstel Hopf, Landau, Lifschitz (circa 1950): de stroming wordt steeds complexer doordat er extra perioden bijkomen. Denk aan de Galileïsche dans, maar met steeds meer perioden. *Multiperiodiciteit* dus.
- Ruelle en de Groninger Takens schreven (circa 1970): ‘On the nature of turbulence’ [33], een enigszins zeventiende-eeuws aandoende titel. Hun voorstel is om naast multiperiodiciteit ook *chaos* te beschouwen als mogelijke kandidaat



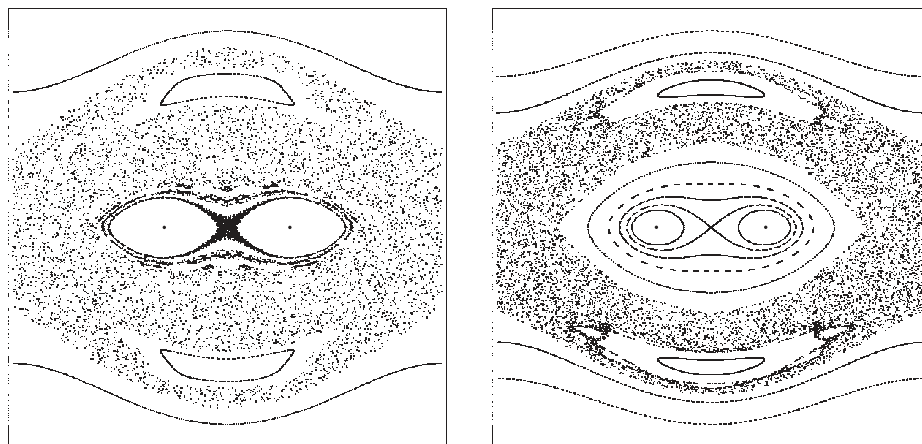
Figuur 7 Schematische weergave van co-existentie van multiperiodiciteit (boven) en chaos (beneden) gerelateerd aan een klimaatmodel. Het diagram zit in de gewone 3-dimensionale ruimte. Denkt u aan een bol waar u in de linker plaatjes bovenop kijkt. In de rechter plaatjes kijkt u van opzij naar de bol. Renato Vitolo en Alef Sterk waren als promovendi en later als collega's betrokken bij dit onderzoek en ook de Catalaan Carles Simó, een decennia-lange collega. Er is enig verschil in het waarheen van beide soorten dynamica: de multiperiodieke (gestippelde kromme — boven) is in hoge mate voorspelbaar (vergelijk de paasdatum), maar de chaotische (beneden), op iets langere termijn, niet.

voor het complexer worden van de stroming. Zij spreken van *strange attractor*.

Enige tijd leken deze twee benaderingen ‘multiperiodiek’ en ‘chaotisch’ met elkaar in strijd. Voor de liefhebbers: de controverse was een kwestie van topologie versus maattheorie, vergelijk Oxtoby [29], een aanrader. Met de *Geparametriseerde KAM-theorie* blijken ze echter broederlijk naast elkaar voor te komen, zie Figuur 7. Karakteristiek voor wiskunde is haar geligheid in allerlei verschillende contexten.

De natuurkundige Werner Heisenberg zou op zijn sterfbed het volgende gezegd hebben: “Als ik God ontmoet, zal ik hem twee vragen stellen: Waarom relativiteit? En waarom turbulentie? Ik geloof werkelijk dat Hij een antwoord zal hebben op de eerste vraag.” [Ook toegeschreven aan Horace Lamb.]

We zijn ondertussen de *rode draad* van de resonantie een beetje kwijtgeraakt. Nog even dan.



Figuur 8 Schematisch diagram van model achter de 1:2-resonante Botafumeiro. De twee ‘pupillen’ staan voor de dubbele periode van het slingerend vat. Te zien is gezamenlijk voorkomen van periodieke (lossen punten), multiperiodieke (gestippelde cirkels) en chaotische dynamica (puntenwolken). De wiskundige achtergrond komt uit de singulariteitentheorie en werd ontwikkeld samen met Gert Vegter, een zeer goede collega over de afgelopen decennia. Later heb ik hier ook samen met Mark Levi en Carles Simó aan gewerkt.

Rond 1900 en iets later, is een wijdverbreide theorie ontworpen door Cantor, L.E.J. Brouwer, Lebesgue, Hausdorff, Sierpinski en anderen rond begrippen als gebroken dimensies, fractale meetkunden, avant la lettre. Toentertijd waren het vooral zuiver wiskundige exercities om het begrip van wat zich zoal in en rondom oneindige verzamelingen, in het bijzonder het continuüm, kan afspeelen. Vanaf een jaar of zestig later wordt deze manier van denken gevaloriseerd in grote delen van het onderzoek in mijn vakgebied.

Opmerkingen

- De term ‘fractal’ is een trouvaille van B.B. Mandelbrot [26].
- Catchy namen zijn belangrijk: ‘catastrofe’, ‘strange attractor’, ‘chaos’,...

Voor de liefhebbers tot slot nog dit. Veel van het volledige Groninger onderzoeksprogramma, in relatie tot internationaal onderzoek, is terug te vinden in de overzichtspublicaties [7,9,10]. Hierin speelt mijn eerdere leermeester en latere collega Floris Takens ook een belangrijke rol. Verder kan de decennialange Russische collega Mikhail Sevryuk hier niet ongenoemd blijven.

Toekomst

Voorspellen is moeilijk, vooral als het de toekomst betreft. Veel resultaten in mijn vakgebied berusten, van oudsher, op het bestuderen van storingen van een bekend systeem, waarbij men eigenschappen van het bekende systeem poogt voort te zetten (of te continueren) naar de storing. Vergelijk de Galileïsche dans: de ‘echte’ beweging is gevonden als een kleine storing van de artificiële beweging in onze animatie. De systemen worden echter gaandeweg groter, complexer. Denk hierbij bijvoorbeeld aan: meteorologie (het klimaat) of biologie (onder meer hersenen). Hoe krijgen we hier met zijn allen vat op? Plaatjes als hiervoor zijn niet altijd een-twee-drie te maken. Computationale gereedschappen krijgen een wezenlijke rol, met computergegeneerde bewijzen, topologische methoden, inclusief geraffineerde visualisatie-technieken, et cetera.

Er zijn maar betrekkelijk weinig wiskundige methoden bekend die een globaler karakter hebben, zeg voor ‘in the middle of nowhere’. Soms helpen *coderingstheo-*



Figuur 9 Johann Bernoulli (1667–1748) en Christiaan Huygens (1629–1695).

rieën, die soms aansluiting vinden bij probabilistische methoden en, bijvoorbeeld, bij *statistische mechanica*.

Een anekdote. Een rollende dobbelsteen is een dermate gecompliceerd deterministisch systeem, dat men het meestal vervangt door het bekende toevalsmodel gebaseerd op de zijden waarop de steen kan landen. De nummers op de zijden geven hierbij de codering.

Dit alles vormt een interessant onderzoeksgebied, waarin op dit moment nog meer vragen zijn dan antwoorden. In de gedrukte versie vindt u meer... Het hele vakgebied is ondertussen allerwegen in beweging. Soms is het duidelijk waarheen, maar vaak ook niet.

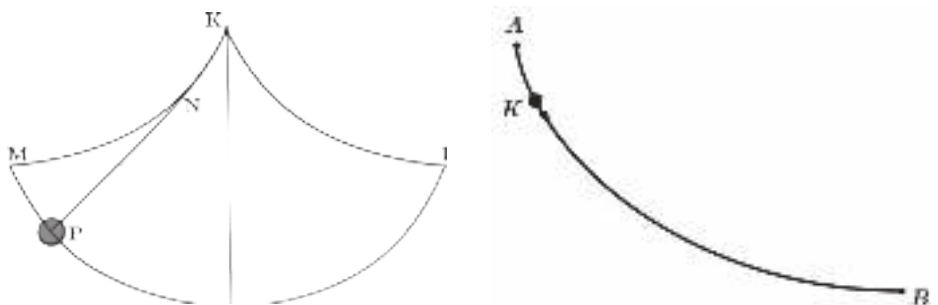
Culturele en maatschappelijke rol wiskunde

Zoals ik al aangaf ervaar ik de natuurwetenschappen als een eenheid die deel uitmaakt van onze cultuur. In mijn publicaties

geef ik uitdrukking aan deze verbondenheid met mechanica, optica, maar ook met biologie (populatie-dynamica, chronobiologie).

Inleiding

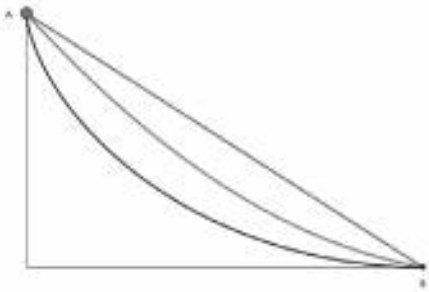
Deze verbondenheid breng ik ook tot uiting in popularisering. Verder zal ik aandacht besteden aan enige elementen uit het al genoemde *Δ-plan voor de Nederlandse wiskunde* [17]. De ondersteunende organisaties zijn de *Nederlandse Organisatie voor Wetenschappelijk Onderzoek* (NWO) en het *Platform Wiskunde Nederland* (PWN), waarvan ikzelf een der initiatoren ben. Zeer velen hebben bijdragen geleverd aan het plan. De aanbevelingen uit het *Δ-plan* ondersteun ik in het algemeen van harte, soms heb ik er nog het nodige aan toe te voegen. In het bijzonder zal ik het hebben over de aansluiting v(w)o en wo over het onderzoeksklimaat aangaande het vrije en ongebonden, meestal fundamente-



Figuur 10 Links: Christiaan Huygens' isochrone (en tautochrone) kromme is de cycloïde. Met behulp van de twee cycloïden kan een isochroon slingeruurwerk geconstrueerd worden. De cycloïde is de baan van het ventiel wanneer het fietswiel langs een rechte lijn rolt. Een lijn in het plafond. De linker figuur komt uit het *Horologium Oscillatorium* [19], voor een zeer recente Nederlandse vertaling zie Jan Aarts [1]. Rechts: Johann Bernoulli's brachistochrone probleem, Groningen 1696–97 [3]. Gevraagd wordt naar een draadprofiel, waarlangs de kraal K van A naar B glijdt in de kortst mogelijke tijd. Voor de liefhebbers: De wrijvingsloze beweging speelt zich af in een constant verticaal zwaartekrachtsveld. Ook hier duikt de cycloïde op.



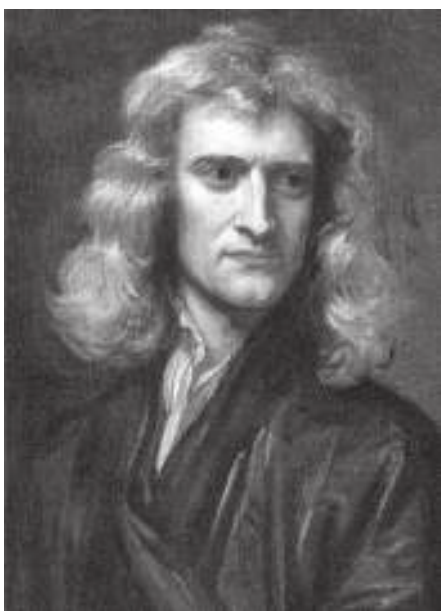
Figuur 11 De cycloïde als iso- en tautochrone kromme (zie film op website auteur [37]).



Figuur 12 De cycloïde als brachistochrone kromme (zie film op website auteur [37]).

le, onderzoek. De Shanghai-lijst komt bij dit laatste ook nog even ter sprake.

Algemene verzuchting: Geef ons minder management en laat de leraren, onderzoekers en artsen weer zelf dingen regelen. Dit geldt niet alleen voor scholen, universiteiten, ziekenhuizen maar bijvoorbeeld ook bij organisaties als het NWO, ministeries, et cetera. Veel van deze problematiek is ook regelmatig onderwerp in kranten als *NRC Handelsblad*, *Vrij Nederland* en de *Volkskrant* en in een televisieprogramma als *Buitenhof*. Ik wil hier kort over zijn, en mij beperken tot de volgende anekdote:



Figuur 13 Sir Isaac Newton (1642–1727), man of two millennia... Newton, Bernoulli en Huygens kenden elkaar alle drie, en waren lid van zo'n beetje alle Europese Academies. De Royal Society Londen, de Académie de Sciences Parijs, de academies van Bologna, Berlijn en Petersburg.

Ik citeer het NRC Handelsblad van 16 mei 2015, publicatie van Mathieu Wegeman: “In een of ander technisch project werd een hoofdingenieur vervangen door manager (bedrijfseconoom & regelneef). Gevolg: jaren later moet een commissie van experts uitzoeken wat er allemaal fout ging. In de tijd dat de Afsluitdijk werd aangelegd ging dat anders. Het brein hierachter was Ir. Cornelis Lely, die zelf ook enkele malen optrad als minister van Waterstaat, Handel en Nijverheid. Ik ben blij dat de Zuiderzeewerken niet in deze tijd hoeven te worden gerealiseerd...”

Cultuur, popularisering

In 1952 kreeg de wiskundeleraar Eduard Jan Dijksterhuis, de PC Hooftprijs voor zijn boek *De Mechanisering van het Wereldbeeld* [16]. Hij was wiskundeleraar, later KNAW-lid (afdeling letterkunde) en buitengewoon hoogleraar geschiedenis van de natuurwetenschappen. Zijn boek behandelt de ontwikkeling van de natuurwetenschappen van de oude Grieken tot en met Newton. By the way, Dijksterhuis promoveerde op het proefschrift *Bijdragen tot de kennis der meetkunde van het platte schroevenvlak* (Groningen, 1918; promotor was de meetkundige Johan Antony Barrau).

Een anekdote als toelichting: Een tiental jaren geleden was er op een plaatselijk gymnasium een bijeenkomst van ouders met enkele leraren, het geheel onder leiding van een lerares in een moderne taal. Het onderwerp van de bijeenkomst was cultuur. In de heersende opvatting bestond cultuur slechts uit klassieke en moderne literatuur en geschiedenis. Dat Euclides' Elementen ook een classic is, met een grotere afname dan de Bijbel, was niet van belang. Dat was wiskunde en hoorde bij techniek en zo... Zoals u zult begrijpen vind ik deze benadering van cultuur nogal bekrompen.

Verder heb ik ook een beschrijving gegeven van de wiskundige nalatenschap [12] van Henri Poincaré in het vakgebied dynamische systemen. Zoals gezegd was Poincaré hiervan een der aartsvaders. Naast al het gereken van de generaties voor hem, voegde hij belangrijke meetkundige elementen toe. In plaats van één particuliere beweging te berekenen (of benaderen),



Figuur 14 De aanleiding voor mijn boek *Hemelverschijnselen nabij de Horizon* [13] wordt gevormd door een sectie uit Minnaerts *De Natuurkunde van 't Vrije Veld* [27], namelijk over blinde (donkere) stroken in de ondergaande zon. Hierin passeert de cycloïde ook uitvoerig de revue en worden de iso-, tauto- en brachistochrone eigenschap met vwo-methoden bewezen. Binnenkort verschijnt ook de Amerikaanse versie *Near the Horizon – an invitation to geometric optics* [14].

beschouwde hij *alle mogelijke bewegingen* van een systeem en hun *meetkundige organisatie*. Dit geeft veel kwalitatieve informatie die onder meer ook de basis heeft gelegd voor het latere begrip chaos.

Tot het einde van de negentiende eeuw was er nog sprake van een grote eenheid tussen wis-, natuur- en sterrenkunde. In feite *ontplooid* de wiskunde zich, in de zestiende, zeventiende en achttiende eeuw, hand in hand met mechanica en optica. Hemelmechanica was een gerespecteerde tak van sport binnen *mathematische fysica*. Veel later zijn de disciplines verder uit elkaar gegroeid, met name in het *onderwijs*. Ik, en velen met mij, beschouw dit als een betreurenswaardige toestand. De moderne ontwikkelingen in mathematisch-fysisch *onderzoek* tonen echter aan dat de combinatie nog steeds erg vruchtbaar is, evenals in, bijvoorbeeld, de mathematische biologie.

Opmerkingen

- De namen van deze disciplines stammen van de Vlaming Stevin; *wiskunde* staat dan voor: wat wis en zeker is, begrijpelijk, transparant. By the way, Stevin, net als Minnaert 300 jaar later, was een asielzoeker — politieke vluchteling als je wilt —, en Minnaert had een

Belgisch vonnis van vijftien jaar gevangenschap, waaraan hij in Nederland wist te ontkomen. Het is de vraag wat de hedendaagse Nederlandse politici daarmee zouden aanvangen.

- De rol van wiskunde in het internationale data-verkeer (bijvoorbeeld de luchtvaart), in uw mobieltje en uw pace-maker, het Global Positioning System (GPS), in weersvoorspellingen, et cetera, is zeer groot, ook al is deze voor velen onzichtbaar. De wiskunde wordt ook vaak opzettelijk verborgen in presentaties, vooral wanneer men het over spannende dingen heeft als zwarte gaten, de oerknal, et cetera.

Onderwijs: link vwo–wo

Gedurende het eerste decennium van deze eeuw was ik lid van een tweetal ministeriele commissies (*commissie Toekomst Wiskunde Onderwijs* (cTWO) en *Natuur Leven & Technologie* (NLT)), voor een advies over het curriculum van het vo, in het bijzonder dus het vwo. Ook ben ik sinds het midden van de jaren negentig betrokken bij de drukbezochte *Nationale Wiskundedagen* (NWD). Dit is een door het Utrechtse *Freudenthal Instituut (for Science and Mathematics Education)* georganiseerde bijeenkomst van leraren (ruim 600) en waarin collega-leraren, kunstenaars of wetenschappers hun kennis en ervaringen delen middels voordrachten, workshops en dergelijke. Kortom, ik vind dat ik enig recht van spreken heb.

Een onmiskenbaar feit is dat veel ervaren vo-leraren en docenten aan de universiteit, zeg over de laatste vijftig jaar, een afkalking van het v(w)o ervaren. Vooral voor de ‘betere’ leerling. Er wordt voortdurend veel veranderd, en ook bezuinigd! Veel veranderingen liggen in de pedagogisch-didactische sfeer en minder in de vakinhoudelijkheid. Vaak zijn ze gericht op leerlingen die meer zorg nodig hebben. Een en ander ging ten koste van de ‘betere’ leerlingen: die redden zich immers wel. *U hoort het, ik spreek een groot woord gelaten uit.*

De adviezen van cTWO en NLT waren, althans voor een aantal leden van de commissie, onder meer bedoeld om hier het tij enigszins te keren. Maar een goede aansluiting v(w)o–wo is, ondanks alle hoopvolle adviezen, nog steeds geen groot succes. Goede leerlingen vormen weliswaar maar een kleine markt, maar hen koesteren is wel een noodzakelijke langetermij-

ninvestering in ‘Nederland Kennisland’. Het woord *markt* is gevallen: het is inmiddels gelukkig volop onderwerp van discussie hoe pervers het marktprincipe in zaken als het onderwijs werkt.

In onderwijsland zijn ondertussen diepe tegenstellingen ontstaan over de verhouding *vakinhoudelijkheid* versus *pedagogiek/didactiek*, bijvoorbeeld op de lerarenopleidingen. De discussies hierover zijn grotendeels verzand in railerende stukjes over en weer, met vele verdachtmakingen. Ook is er hier en daar sprake van een enigszins vermoeiende twitter-terreur met lange lappen hypertext. Gelukkig is het *Δ-plan voor de Nederlandse Wiskunde*, op een meer vreedzame manier tot stand gekomen. Deze initiatieven vormen duidelijk een stap in de goede richting. De samenstellers van dit document verdienen hiervoor complimenten! Ik geef een indruk van de inhoud, door mijzelf nog flink bijgekleurd.

- Nauwere betrokkenheid van het wo bij het v(w)o. Een voorbeeld waar dit niet goed gegaan is, is de *Rekenoets* (met getallen, letters, formules). Tijdens vergaderingen van de stuurgroep NLT werd mij dat vrijwel alle wiskunde die wij hier met z’n allen bedrijven, eigenlijk *ouderwets* is.
 - Ik wil graag hopen dat de nieuw in te stellen *Curriculumcommissie* (OCW–Platform Wiskunde Nederland) tegen dit alles een afdoende middel is. Dit geldt ook voor het initiatief *Mastermath voor Leraren*, voor de bij- en nascholing. Het bijbehorende curriculum zou op den duur vanuit alle universitaire vestigingen verspreid moeten worden. Graag merk ik op dat ik mede-oprichter ben van *Mastermath*.
 - Honoreer leraren salarieel voor geaccrediteerde vakinhoudelijke bijscholing (tentamenbriefjes). De hele onderwijswetgeving moet alleen al om deze reden heel nodig op de schop.
- De eerstegraads lerarenopleiding moet terug naar de universiteit (nu bevindt deze zich grotendeels op het hbo).
- Vakdidactici zijn tegenwoordig vaak opgenomen in de sociale faculteit. Het zou goed zijn ze (grotendeels) terug te halen naar de ‘eigen’ faculteiten – en hen te betrekken bij het reguliere onderwijs. Dan zien ze het met eigen ogen hoe de aansluiting verloopt.

Pièce de resistance voor de niet-ingewijden: Midden negentiende eeuw kwam de Riemannse meetkunde van gekromde ruimten op. Belangrijkste motivatie destijds was het vinden van concrete modellen waarin Euclides’ Parallelen-Postulaat niet geldt – maar wel diens overige postulaten. Na nog een zekere voorbereiding door Lorentz, Poincaré en Minkowski, lag deze theorie rond 1920 klaar op de plank voor Albert Einstein om zijn algemene relativiteitstheorie in te formuleren. Hij had hierbij hulp van de Zwitserse meetkundige Marcel Grossmann [30].

- Een van mijn stokpaardjes: Er zou meer interdisciplinaire samenwerking moeten komen op het v(w)o: wiskunde + natuurkunde, natuur + scheikunde, et cetera, ook op lerarenopleidingen.
- Breed opgeleide leraren zijn nu eenmaal veel *inspirerender*. Stimuleer en honoreer daarom dubbel-bevoegdheden salarieel. Een van de belangrijke conclusies van het rapport Lenstra [25], wat betreft didactiek van het rekenonderwijs, was immers dat alles staat of valt met de *kwaliteit en geïnspireerdheid* van de leraar. *Een van de centrale problemen in dit geheel is hoe je het beroep van v(w)o-leraar weer aantrekkelijk maakt, in zijn oude glorie hersteld, in het bijzonder ook voor universitair geschoolden.*
- Er is behoefte aan een interdisciplinaire uitbreiding van het *Δ-plan* (KNAW, VSNU). Dit is alleen al nodig om de eerstegraads lerarenopleidingen terug te krijgen naar de universiteiten.
- De hele geschiedenis overziend, kan je jezelf de vraag stellen of deze ontwikkelingen aan de hoopvolle verwachtingen zullen voldoen. In ieder geval was vroeger alles beter...



Figuur 15 Statler en Waldorf, twee betrouwbare getuigen. Binnenkort (inmiddels alweer) op TV.

Positie van het vrije, ongebonden en fundamentele onderzoek

Het onderzoek aan universiteiten wordt in belangrijke mate uitgevoerd door tijdelijk personeel, promovendi en postdocs, waarbij de hoogleraren een begeleidende rol hebben. In Duitsland is het zo geregeld, dat een leerstoel een *Grundaustattung* meekrijgt, bestaande uit een zekere hoeveelheid tijdelijk personeel, die steeds automatisch wordt aangevuld. Deze ideale situatie bestaat helaas niet in Nederland.

Enkele decennia geleden is deze (zogenaaamde eerste) geldstroom geheel in handen gegeven van NWO, de *Nederlandse Organisatie voor Wetenschappelijk Onderzoek*. Dit is een bestuursorgaan van het Ministerie van OCW, dat onderzoeksgelden distribueert volgens deze (zogenaaamd tweede) geldstroom. Zo ontstond de *Vernieuwingsimpuls*, waar getalenteerde wetenschappers persoonlijke subsidies kunnen verwerven. De onderzoeksvoorstellen worden op internationale schaal beoordeeld: er is competitie. Kling nie sleg: So far so good.

Iets soortgelijks geldt voor de ERC, de *European Research Council*.

Verder is het goed te weten dat de ministeriële financiering van de universiteiten afhangt van de *output*: aantallen uitgereikte diploma's, vooral bij promoties. Dit alles indachtig het al genoemde marktprincipe.

Er is tegengeluid. Inmiddels wordt *bildung* genoemd versus al dat getel en de verderfelijke marktwerking. Subtieler gebruik van indicatoren als *h*-indices, impact factoren, et cetera. Gedenkt in dit verband ook het recente KNAW-rapport (2015) *Ruimte voor Ongebonden Onderzoek, signalen uit de Nederlandse Wetenschap*. Dit alles dringt te langzaam door tot de ministeriële en universitaire beleids- en bestuursorganen.

- Echter: De laatste jaren is er in toeneemende mate veel te weinig geld voor vrij, ongebonden en fundamenteel (tijdelijk) onderzoek. En zonder fundamenteel onderzoek sterft uiteindelijk alle onderzoek uit, dan dooft het licht.
 - Bij NWO en ERC zijn de fondsen voor posities van promovendi en postdocs sterk afgenomen over laatste decennium.
 - Proposals indienen is dan ook vaak deelnemen aan een loterij met zeer lage slaagkans.

- Er gaat heel veel geld naar weinigen (indachtig Matheus 13:12), denk met name aan de NWO personal grant Vici en aan de ERC Advanced Grant.
- Wel is er veel buitenlands geld: promovendi komen met eigen fondsen naar Nederland om te promoveren. Helaas wordt dit niet als competitief verworven geld beschouwd en het telt niet mee voor de carrière!

Er is meer geld via allerlei thematisch onderzoek te verwerven: Ik noem de NWO Topsectoren of het ERC Horizon 2020, dit onderzoek moet een sterk maatschappelijk karakter dragen en het liefst medegefinancierd worden door het bedrijfsleven. Als u echter de lijst met geassocieerde thema's bekijkt, zult u dan ook maar weinig aanknopingspunten met fundamenteel onderzoek vinden. Ook hier wordt de slaagkans overigens steeds lager: vele varkens maken nu eenmaal de spoeling dun.

Toen Maxime Verhagen enkele jaren geleden op televisie het Topsectoren-beleid aankondigde, keek hij trouwhartig in de camera, zeggende dat deze ontwikkeling ook heel goed zou zijn voor het fundamenteel onderzoek in Nederland. Dit bleek echter wel degelijk de gotspe die velen toen al meteen doorzagen.

Collega Klaas Landsman heeft deze onderzoeksfinancieringssituatie heel prachtig beschreven en goede aanbevelingen gedaan voor een betere verdeling van de onderzoeksgelden [23].

- Dat er carrière-programma's voor tenure-trackers zijn is op zich een groot goed: men kan doorstromen naar hogere posities als men kwaliteit heeft.
- Een belangrijk criterium voor bevordering van *tenure-trackers* is het in voldoende mate 'competitief' geld binnen te halen voor promovendi; deze criteria zijn gedurende de laatste tien jaar echter niet bijgesteld. Dit botst met het eerste item, namelijk dat er nu te weinig geld is.
- Gevolg: belangrijke aanstellingen en bevorderingen gaan niet door, aantallen promoties nemen af en instituten met veel fundamenteel onderzoek lijden aan een leegloop van jong personeel. Ik bevind mij met deze klacht in het



Figuur 16 Hendrik Brugt Gerhard Casimir (1909–2000). Portret van Mathijs Röling, Trippenhuis Amsterdam (woonzaat van de KNAW).

goede gezelschap van onder meer de molecuulair oncoloog Piet Borst (zie *NRC Handelsblad*, 24 oktober 2015)). In Groningen betreft dit in het bijzonder het *Johann Bernoulli Instituut voor Wiskunde en Informatica*, het *Van Swinderen Instituut voor Deeltjes Natuurkunde en Zwaartekracht*, en het *Zernike Instituut voor Geavanceerde Materialen*. Laten de universiteiten hun personeelsbeleid dan bepalen door de geldschietters NWO en de ERC?

Ik citeer H.B.G. Casimir [15] (mathematisch fysicus, gepromoveerd bij Ehrenfest (1931), directeur Philips Natuurkundig Laboratorium, eerste president KNAW (1973–1978): “Hoedt u voor teveel sturing van wetenschap, er moet ook zekere anarchie zijn, deze schept voorwaarden voor serendipiteit. En ook moet er genoeg rechtszekerheid (= zielenrust) zijn voor de wetenschapper.”

Mijne dames en heren beleidsmakers en bestuurders: Dit alles vindt toch niet echt plaats aan de Rijksuniversiteit Groningen, met zijn prestigieuze positie in de Shanghai ranking, en in het bijzonder niet bij instituten met toenemende studenten-aantallen? In Groningen verspilt men toch geen talent en verzet men op tijd de bakens als het getij verloopt; in Groningen keert men toch liever ten halve? Ik groet u allen zeer.

Referenties

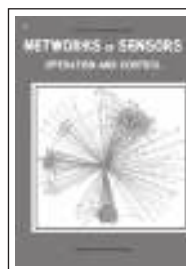
- 1 J.M. Aarts, *Christiaan Huygens: Het Slingeruurwerk – Een studie*, Epsilon Uitgaven, deel 80, 2015.
- 2 V.I. Arnold, Proof of a theorem by A.N. Kolmogorov on the persistence of conditionally periodic motions under a small change of the Hamilton function, *Russian Math. Surveys* 18(5) (1963), 9–36.
- 3 J. Bernoulli, *Opera Johannis Bernoulli*, G. Cramer, ed. (4 delen), Genève, 1742.
- 4 H.W. Broer, G.B. Huitema en F. Takens, Unfoldings of quasi-periodic tori, *Mem. AMS* 83(421) (1990), 1–82.
- 5 H.W. Broer, Huygens' isochrone slinger, *Euclydes* 70(4) (1995), 110–117.
- 6 H.W. Broer, J. van de Craats en F. Verhulst, *Chaostheorie – het einde van de voorspelbaarheid?* Aramith Uitgevers–Epsilon Uitgaven, deel 35, 1995.
- 7 H.W. Broer, G.B. Huitema en M.B. Sevryuk, *Quasi-periodic Motions in Families of Dynamical Systems*, Lecture Notes in Mathematics 1645, Springer, 1996.
- 8 H.W. Broer, KAM theory: the legacy of Kolmogorov's 1954 paper, *Bull. Amer. Math. Soc. (New Series)* 41(4) (2004), 507–521.
- 9 H.W. Broer, B. Hasselblatt en F. Takens, eds., *Handbook of Dynamical Systems*, volume 3, North-Holland, 2010.
- 10 H.W. Broer en F. Takens, *Dynamical Systems and Chaos*, Applied Mathematical Sciences 172, Springer, 2011.
- 11 H.W. Broer, Resonance and Fractal Geometry, *Acta Applicandæ Mathematicæ* 120(1) (2012), 61–86.
- 12 H.W. Broer, Perspectives on the legacy of Poincaré in the field of dynamical systems, *Nieuw Archief voor Wiskunde* 5/13(3) (2012), 201–208.
- 13 H.W. Broer, *Hemelschijnselen nabij de Horizon*, Epsilon Uitgaven, deel 77, 2013.
- 14 H.W. Broer, *Near the Horizon – an invitation to geometric optics*, MAA CARUS monograph, 2015.
- 15 H.B.G. Casimir, *Het Toeval van de Werkelijkheid. Een halve eeuw natuurkunde*, Meulenhoff Informatief, 1984.
- 16 E.J. Dijksterhuis, *De Mechanisering van het Wereldbeeld*, Meulenhof, 1ste druk 1950, 7de druk 1996.
- 17 J. Fokkema e.a., *Een Δ -plan voor de Nederlandse Wiskunde*, NWO en PWN, 2015.
- 18 J. Guichelaar, *De Sitter, een alternatief voor Einsteins heelalmodel*, Van Veen Magazines, 2009.
- 19 Chr. Huygens, *Horologium Oscillatorium*, in: *Œvres Complètes de Christiaan Huygens publiées par la Société Hollandaise des Sciences* 16, Martinus Nijhoff, 1929, Vol. 5, pp. 241–262; Vol. 17, pp. 156–189.
- 20 A.N. Kolmogorov, On the persistence of conditionally periodic motions under a small change of the Hamilton function, *Dokl. Akad. Nauk SSSR* 98 (1954), 527–530 (in Russian); in: G. Casati en J. Ford, eds., *Stochastic Behavior in Classical and Quantum Hamiltonian Systems. Volta Memorial Conference, 1977*, Lecture Notes in Phys. 93, Springer, 1979, pp. 51–56; reprinted in: Bai Lin Hao, ed., *Chaos*, World Scientific, 1984, pp. 81–86.
- 21 A.N. Kolmogorov, The general theory of dynamical systems and classical mechanics, in: J.C.H. Gerretsen and J. de Groot, eds., *Proceedings of the International Congress of Mathematicians 1, Amsterdam, 1954*, North-Holland, 1957, pp. 315–333 (in Russian); reprinted in: *International Mathematical Congress in Amsterdam, 1954 (Plenary Lectures)*, Fizmatgiz, 1961, pp. 187–208; reprinted as Appendix in: R.H. Abraham en J.E. Marsden, *Foundations of Mechanics*, Second Edition, Benjamin/Cummings, 1978, 741–757.
- 22 V. Lainey, L. Duriez en A. Vienne, New accurate ephemerides for the Galilean satellites of Jupiter I. Numerical integration of elaborated equations of motion, *Astronomy & Astrophysics* 420 (2004) 1171–1183.
- 23 Klaas Landsman, Wetenschap en welvaart: een paradoxaal krachtenveld, *Nieuw Archief voor Wiskunde* 5/15(2) (2014) 89–95.
- 24 J. Laskar en M. Gastineau, Existence of collisional trajectories of Mercury, Mars and Venus with the Earth, *Nature Letters* 459(11), June 2009, doi:10.1038/nature08096.
- 25 J.K. Lenstra e.a., *Rekenonderwijs op de basisschool – Analyse en sleutels tot verbetering*, KNAW, 2009.
- 26 B.B. Mandelbrot, *The Fractal Geometry of Nature*, Freeman, 1977.
- 27 M.G.J. Minnaert, *De Natuurkunde van 't Vrije Veld*, deel 1, ThiemeMeulenhoff, 5de editie, 1996; *The Nature of Light and Colour in the Open Air*, Dover, 1954 (1ste uitgave 1937–40).
- 28 J.K. Moser, Convergent series expansions for quasi-periodic motions, *Math. Ann.* 169 (1967), 136–176.
- 29 J.C. Oxtoby, *Measure and Category*, Springer, 1971.
- 30 A. Pais, *Subtle is the Lord*, Oxford University Press, 1982.
- 31 J.H. Poincaré, Thèse, 1879, in: *Œuvres I*, Gauthier-Villars, 1928, pp. LIX–CXXIX.
- 32 J.H. Poincaré, *Les méthodes nouvelles de la mécanique céleste I*, Gauthier-Villars, Paris, 1892.
- 33 D. Ruelle en F. Takens, On the nature of turbulence, *Comm. Math. Phys.* 20 (1971), 167–192; 23 (1971), 343–344.
- 34 W. de Sitter, On the periodic solutions of a particular case of the problem of four bodies, *KNAW Proceedings* 11 (1909), 682–698.
- 35 W. de Sitter, Outlines of a New Mathematical Theory of Jupiter's Satellites, *Ann. Sterrewacht Leiden* 12 (1925), 1–55.
- 36 W. de Sitter, Jupiter's Galilean satellites (George Darwin Lecture), *Monthly Notices of the Royal Astronomical Society* 91 (1931), 706–738.
- 37 www.math.rug.nl/~broer.

In de verdediging

| In defence

Pas gepromoveerden brengen hun werk onder de aandacht. Heeft u tips voor deze rubriek of bent u zelf pas gepromoveerd? Laat het weten aan onze redacteur.

Redacteur: Geertje Hek
la Voie-du-Coin 7
1218 Grand-Saconnex
Zwitserland
verdediging@nieuwarchief.nl



Network of Sensors, operations and control

Martijn Onderwater

Op 8 februari 2016 promoveerde Martijn Onderwater aan de Vrije Universiteit op zijn proefschrift *Network of Sensors, operations and control*, dat hij schreef onder begeleiding van prof. dr. Rob van der Mei en dr. Sandjai Bhulai. De dag van zijn promotie was de perfecte afsluiting van zijn oio-tijd: een goede verdediging, positieve reacties op zijn onderzoek en een geweldige dag met familie, vrienden en collega's. Ook over zijn verdere tijd als oio is Onderwater heel positief, hoewel hij de start van zijn onderzoek wel lastig vond. Drie maanden lang las hij alleen maar papers en hij raakte volledig verdwaald in alle mogelijke onderzoeksgebieden. "Deze vrijheid is in principe heerlijk om te hebben, maar ik had wat tijd nodig om me te realiseren hoe ik daar gebruik van kon maken."

Sensornetwerken

De afgelopen jaren is het gebruik van sensoren enorm toegenomen. Ze worden tegenwoordig in allerlei toepassingen gebruikt, zoals het meten van binnenklimaat (temperatuur, CO₂-gehalte), het volgen van containers, en het monitoren van de conditie van windmolens. Deze sensoren zijn vaak draadloos met elkaar verbonden, en vormen zo een netwerk waarover hun metingen verstuurd kunnen worden naar een verzamelpunt. Het eerste deel van Onderwaters proefschrift gaat over dit soort sensornetwerken.

Doorvoersnelheid

Net als bij een wifi-netwerk dat mensen kennen van thuis, is het ook in sensornetwerken interessant om te bekijken wat de snelheid van het netwerk is. Deze zogenaamde doorvoersnelheid geeft aan hoe snel een sensornetwerk in staat is om een meting te versturen. Het draadloze netwerk kan maar één meting tegelijk versturen, waardoor sensoren die een verzendpoging doen vaak in de wacht staan.

De snelheid wordt onder andere bepaald door het protocol dat de sensoren gebruiken om te communiceren op het netwerk. Meestal is dit het IEEE 802.15.4-protocol, wat aan de basis ligt van het veelgebruikte Zigbee-protocol. In het bijzonder is de snelheid afhankelijk van de instelling van enkele protocol-parameters. Het bepalen van een juiste waarde voor deze parameters kan lastig zijn, met name bij grote netwerken.

In een van de hoofdstukken in het eerste deel van zijn proefschrift beschrijft Onderwater een nieuw wiskundig model dat nauwkeurig inzicht biedt in de doorvoersnelheid van een sensornetwerk, en hoe deze snelheid afhangt van de protocolparameters. In de praktijk betekent dit dat men zonder dure experimenten kan bepalen welke parameterwaarden tot goede prestaties leiden en welke ongewenste effecten hebben.

Markov-beslismodellen

Het tweede deel van het proefschrift gaat over Markov-beslismodellen. Deze modellen zijn toepasbaar in een breed scala van toepassingen, waaronder die waar sensoren gebruikt worden. Een mooi voorbeeld, dat Onderwater ook in zijn lekenpraatje gebruikte, is het onderhoud van een windmolen. Vaak staan deze windmolens op ontoegankelijke plaatsen en als ze kapot gaan is het een hele klus om een reparatie te regelen. Er moet een monteur beschikbaar zijn, hij moet vervoerd worden naar de locatie, er zijn onderdelen nodig en de weersomstandigheden moeten gunstig zijn. Terwijl dit alles geregeld wordt staat de molen stil en genereert hij geen stroom en dus ook geen inkomsten.

Het zou beter zijn om de conditie van een windmolen te monitoren (met bijvoorbeeld sensoren), en een onderdeel van de molen preventief te vervangen zodra uit de metingen van de sensoren blijkt dat er iets mis dreigt te gaan. Denk hierbij bijvoorbeeld aan een versnellingsbak die steeds meer begint te trillen. Echter, in de praktijk is het 'aflezen' van een dreigend mankement uit sensormetingen niet gemakkelijk: een toename in trillingen in de versnellingsbak kan ook veroorzaakt worden door onstuimig weer. Bovendien hebben metingen van sensoren van nature ook een bepaalde (on)nauwkeurigheid, en kan er daarnaast ook incidenteel gewoon een foute meting worden gedaan. Deze onzekerheden zorgen ervoor dat de sensoren geen compleet beeld geven van de conditie van de molen, maar slechts een indicatie ervan. Om in dergelijke onzekere omstandigheden toch een goed preventief vangmoment te vinden, kan men gebruik maken van Markov-beslismodellen. Zo'n model beschrijft de situatie, de onzekerheden en de beslissingen die genomen kunnen worden.

Value Function Discovery

Het oplossen van deze modellen is vaak niet haalbaar met de bekende technieken, en daardoor is men aangewezen op zware numerieke procedures. Deze procedures hebben een groot nadeel: zodra de parameters van het model (welke zorgen voor een juiste afstemming op de praktijk) veranderen, moeten de procedures opnieuw uitgevoerd worden en dat kost veel tijd.

In zijn proefschrift beschrijft Onderwater een nieuwe techniek genaamd *Value Function Discovery* (VFD). Deze komt er in het kort op neer dat er, gebruikmakend van technieken uit de Kunstmatige Intelligentie, een benaderende oplossing voor het Markov-beslismodel geconstrueerd of 'geleerd' wordt. In deze benadering zijn ook de parameters van het beslismodel meegenomen. Die benaderende oplossing wordt vervolgens meegenomen in het model, waardoor dat veel makkelijker en goedkoper aangepast kan worden aan veranderende parameters.

Deze techniek is volgens Onderwater het belangrijkste resultaat in zijn proefschrift. Hij noemt het idee achter VFD zeer interessant, en de techniek heeft volgens hem de potentie om een vaste kracht te worden tussen de bestaande technieken voor Markov-beslismodellen.

Een toekomst als Data Scientist

Onderwater heeft een brede technische interesse en houdt ook van echt handwerk. In zijn vrije tijd probeert hij zoveel mogelijk hobby's te zoeken waar hij plezier in heeft en ook wat van kan leren. Zo bouwt hij graag houten modelschepen, om naast het denkwerk ook wat met zijn handen te doen. Deze schepen zijn complex om

in elkaar te zetten, en vergen veel geduld en nauwkeurig werk. Zijn laatste project (de Amerigo Vespucci) heeft tien jaar geduurd.

Hij kan iedereen het doen van promotie-onderzoek aanraden. Behalve het doen van onderzoek, heeft hij als oio ook veel andere dingen geleerd die nuttig zijn in de rest van zijn carrière: presenteren, uitleggen, lesgeven, zichzelf verkopen en een kritische en nieuwsgierige blik.

Qua werk hoopt hij de opgedane praktische en theoretische vaardigheden te combineren als Data Scientist in het bedrijfsleven. Hij werkt graag met data en wil meer leren over *data mining* en *machine learning* en de bijbehorende analyse en optimalisering. Op dit moment werkt hij bij ORTEC Consulting, waar hij zich tot Data Scientist ontwikkelt.

✎



Dangerous Connections:

The spread of infectious diseases on dynamic networks

KaYin Leung

KaYin Leung hield tijdens de Nationale Wiskunde Dagen 2014 een voordracht met de prikkelende titel 'Met een model kun je een soa krijgen'. Hoe beïnvloeden relatiestructuren, zoals het gelijktijdig onderhouden van meerdere relaties, de verspreiding van seksueel overdraagbare aandoeningen zoals hiv? Dat is wat Leung met behulp van wiskundige modellen beter probeert te begrijpen.

"Je zou denken dat er geen risico is om een soa (seksueel overdraagbare aandoening) op te lopen als jij en je partner beiden soa-vrij zijn. Maar je kunt natuurlijk nooit zeker weten hoe je partner zich gedraagt. Via een partner van je partner zou je toch besmet kunnen worden. Op deze manier kun je je, zonder je dit te realiseren, in een heel seksueel netwerk bevinden. Dit kan al snel erg ingewikkeld worden. Bovendien is het netwerk dynamisch; het verandert in de loop van de tijd omdat mensen relaties verbreken en nieuwe relaties aangaan. Hoe verspreidt een soa zich over zo'n netwerk?"

NWO Mozaieksubsidie

Tijdens haar masteropleiding ontdekte Leung de mathematische biologie. Na een seminarium wiskundige modellen in de infectieziektenepidemiologie wilde ze graag verder in die richting. De docent, prof.dr. Odo Diekmann, bracht haar in contact met prof.dr. Mirjam Kretzschmar (RIVM en Julius Centrum van het Utrechts Medisch Centrum). Zij had het idee om met behulp van een wiskundig model te onderzoeken hoe polygyny (een vorm van polygamie waar mannen meerdere vrouwen hebben maar vrouwen monogaam zijn) de verspreiding van hiv beïnvloedde. Van een masterscriptie groeide dit uit tot Leungs PhD-project waarvoor ze een NWO Mozaieksubsidie kreeg.

Onderzoek in twee delen

Leungs onderzoek bestond uit twee delen. In het eerste deel hield zij zich bezig met het ontwikkelen en analyseren van modellen voor dynamische seksuele netwerken en de verspreiding van infectieziekten. In het tweede deel bestudeerde ze epidemiologische vraagstukken met behulp van de modellen uit het eerste gedeelte.

De twee delen van het onderzoek kwamen elk met hun eigen uitdagingen. Aan de ene kant ging het om het vertalen van biologische processen naar wiskundige modellen, en vervolgens de wiskundige analyse en de vertaling van de wiskundige resultaten naar de biologie. Aan de andere kant was het net zo uitdagend om te bedenken hoe een gegeven epidemiologische vraag goed kan worden beantwoord met behulp van de modellen.

Markovketens gecombineerd met deterministische modellen

De gemodelleerde netwerken zijn dynamisch op twee manieren: (1) veranderingen in de relatiestructuren door scheiding en het aangaan van nieuwe relaties en (2) demografische veranderingen door mensen die seksueel actief of inactief worden. Bovenop de netwerkdynamica is er de verspreiding van een infectieziekte.

Modellen voor infectieziekten verdelen populaties veelal in groepen S, I en R van mensen die *susceptible*, *infectious* of *recovered* (en daarmee immuun) zijn. Ook de modellen van Leung zijn gebaseerd op deze verdeling. In tegenstelling tot traditionele modellen moet in Leungs werk ook rekening worden gehouden met de netwerkstructuur. Via 'gevaarlijke relaties' tussen vatbare en besmettelijke individuen kan de infectie zich verspreiden.

Het modelleren begint met een Markovketenbeschrijving op individuniveau. De toestand van een individu hangt af van de populatie via zogenaamde omgevingsvariabelen die op populatieniveau gedefinieerd zijn. Leung neemt aan dat een individu bestaat uit conditioneel onafhankelijke eenheden die ze bindingsplaatsen noemt. Via bindingsplaatsen kunnen twee individuen een relatie aangaan.

Op populatieniveau is het model deterministisch: door uit te gaan van een oneindig grote populatie en naar fracties van individuen in de mogelijke toestanden te kijken, kan het model op populatieniveau worden beschreven door een groot stelsel gewone differentiaalvergelijkingen. Zo beschreef Leung het model in haar eerdere werk. Het blijkt echter veel gemakkelijker om in plaats daarvan vergelijkingen voor de omgevingsvariabelen te bestuderen (en dit leverde dan ook het hoofdstuk op waar haar proefschrift haar titel aan ontleent). De omgevingsvariabelen worden beschreven door een stelsel *renewal*-vergelijkingen: de variabelen worden vastgelegd door de geschiedenis van diezelfde variabelen. De bindingsplaatsen spelen hierbij een belangrijke rol. De resulterende vergelijkingen leggen de dynamica vast op drie niveaus: bindingsplaatsen, individuen en de populatie.

Uit het stelsel van vergelijkingen voor de omgevingsvariabelen konden vrij gemakkelijk relevante epidemiologische grootheden worden gekarakteriseerd. Voorbeelden zijn het endemisch evenwicht en het reproductiegetal R_0 van de infectieziekte — een parameter die informatie geeft over de stabiliteit van de triviale (ziekte-vrije) toestand.

Veel van de wiskundige analyse werd geleid door de biologische interpretatie, een belangrijke reden waarom Leung dit vakgebied zo leuk vindt. Door het perspectief van een pas-geïnfecteerd individu in een volledig vatbare populatie aan te nemen, kan er

vaak een uitdrukking voor R_0 worden gevonden met behulp van de biologische interpretatie. Zo wordt R_0 dan ook vaak bepaald voor modellen in de infectieziektenepidemiologie. Door een net wat ander perspectief te gebruiken kon R_0 eenvoudig worden bepaald uit het stelsel vergelijkingen voor de omgevingsvariabelen: in plaats van het perspectief van een pas-geïnfecteerd individu keek Leung vanuit het perspectief van een 'gevaarlijke relatie' tussen een vatbaar en een geïnfecteerd individu.

Voor Leung hieraan ging werken bestond er maar weinig algemene theorie over de verspreiding van infectieziekten over dynamische netwerken. Haar werk heeft nuttig wiskundig gereedschap geleverd voor het modelleren van de verspreiding van infectieziekten. De ontwikkelde klasse van modellen biedt een systematische manier om de verspreiding van infectieziekten over dynamische netwerken te bestuderen. Enerzijds zijn ze wiskundig goed te bestuderen, maar anderzijds ook flexibel genoeg om gemakkelijk uit te breiden met meer realistische details.

Diversiteit

Tijdens haar aio-periode heeft Leung samen met kamergenote Valentijn Karmaker de Nederlandse tak van de European Women in Mathematics (EWM-NL) nieuw leven ingeblazen. Ze hecht erg aan diversiteit in de wetenschap en gelooft dat diversiteit leidt tot verschillende, waardevolle, wetenschappelijke perspectieven. Leung denkt dat het voor de diversiteit belangrijk is om een wiskundegemeenschap te hebben die daar belang aan hecht. Mensen die 'anders' zijn dan de 'standaard' moeten zich welkom voelen in de gemeenschap. Ze hoopt erg dat EWM kan bijdragen aan de nodige bewustwording. Een van de doelen van EWM is om meer zichtbaarheid te geven aan vrouwelijke wiskundigen. Dat dat belangrijk is blijkt: recent vertelde een deelnemer dat ze er via EWM achterkwam dat er überhaupt vrouwelijke wiskundehoogleraren zijn in Nederland.

Verder in het wetenschappelijk onderzoek

Het onderzoek was ontzettend leuk om te doen. Leung heeft genoten van het reizen naar het buitenland voor workshops, conferenties en zomerscholen en twee keer voor een langer verblijf om elders samen te werken. Niet alleen waren de reizen wetenschappelijk heel leerzaam en nuttig, ook de sociale aspecten ervan vindt Leung belangrijk. Ook geniet ze van het presenteren van haar onderzoek, of dat nou in artikelvorm, tijdens voordrachten of gewoon een-op-een is. Haar eerste voordracht op een grote conferentie voor mathematische biologie in Göteborg in de zomer van 2014 is haar echt bijgebleven. Door een lastminute zaalwijziging was dat opeens in de plenaire zaal wat nogal wat extra zenuwen opleverde, maar het ging erg goed en smaakte naar meer.

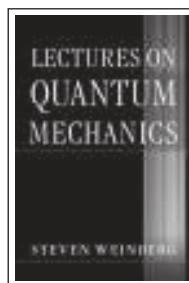
Op 27 juni zal Leung haar proefschrift *Dangerous Connections: The spread of infectious diseases on dynamic networks* verdedigen aan de Universiteit Utrecht; Diekmann en Kretzschmar zullen beiden optreden als promotor. In september gaat Leung beginnen aan een postdoc in Stockholm. De groep daar werkt ook aan netwerken en de verspreiding van infectieziekten, maar is vooral sterk met stochastische modellen, terwijl Leung uit de wereld van deterministische modellen komt. Het lijkt haar een spannende en leerzame ervaring. Het idee is om de verschillende technieken en perspectieven te combineren en hopelijk komen daar mooie dingen uit.

Boekbesprekingen

| Book Reviews

Redactie: Hans Cuypers en Hans Sterk

Review Editors NAW - MF 7.092
Faculteit Wiskunde & Informatica
Technische Universiteit Eindhoven
Postbus 513
5600 MB Eindhoven
reviews@nieuwarchief.nl
www.win.tue.nl/wgreview



Steven Weinberg

Lectures on Quantum Mechanics

Cambridge University Press, 2012
e-book, 360 p., prijs \$ 40.00
ISBN 9781139795166

Schrijver van deze recensie is (was?) een fervente belijder van het Aloude Geloof dat 'wiskunde' en 'fysica' iets met elkaar (te maken) hebben. Dit vurige geloof wordt in het hier te beschouwen leerboek voor beginners, geschreven door Steven Weinberg (Nobelprijs in 1979), flink onderuit gehaald. Dat komt vooral omdat Weinberg, meer nog dan de doorsnee-fysicus, strikt hecht aan de 'Tale der Vaad'ren'. Op zowat elke pagina duiken de woorden 'formalism', 'usual' en 'must exist' op. 'Wat zouden fysici daar toch mee bedoelen?', zo kan een mathematisch antropoloog zich menigmaal afvragen. Bij nadere beschouwing (b)lijkt het gebezigde 'formalisme' een soort 'typografisch basso continuo ritueel' te zijn. Dit ritueel bevat, in hoofdzaak, drie ingrediënten: (1) laat-achttiende-eeuws knutselen met infinitesimalen, (2) typografische bewerkingen die aan lineaire algebra doen denken, met daarin vaak Σ -tekens vervangen door $\int$ -tekens en δ_{mn} vervangen door $\delta(x-y)$, ('orthogonaliteit'), (3) rekenen met 'operatoren' via omgangsvormen die sterk doen denken aan de standaardmanipulaties met eindigdimensionale Hermitische en unitaire matrices. Bij dit alles is er geen enkele bekommernis om 'scherpslijperijen' als existentie, consistentie, en uniciteit. Een veelheid van operator-identiteiten wordt de facto bij decreet vastgesteld.

Het spannende is dat deze rituelen niet zelden mathematisch geïnterpreteerd kunnen worden, zie onder andere M. Reed en B. Simon, *Methods of Modern Mathematical Physics* (Academic Press, 1980), S.J.L. van Eijndhoven en J. de Graaf, *A Mathematical Interpretation of Dirac's Formalism* (North-Holland, 1986), W. Thirring, *Quantum Mechanical Physics* (Springer, 2002). Even vaak echter loop je tegen grove inconsistenties aan. Een 'formalisme' lijkt dan ook meer een wat vage filosofische leidraad, waar in concretere situaties een meer wiskundige invulling aan gegeven wordt. John von Neumann heeft daar tachtig jaar geleden al een stevig begin mee gemaakt, maar Weinberg trekt zich daar helemaal niks van aan. De overall resultaten van het 'formalisme' zijn echter wonderbaarlijk: er wordt een schitterend kunstwerk mee geschapen.

Zouden beginnende wiskundigen, die wat kwantummechanica willen leren, iets aan dit indrukwekkende 'beginnersboek' kunnen hebben? Het antwoord is zeker 'ja' als iemand de moeite zou nemen het onderhavige leerboek, *puur op didactische gronden*, consequent van wiskundig-duidende voetnoten (metaforen) te voorzien. Deze zouden dus niet zozeer 'scherpslijperijen' moeten betreffen, maar vooral 'klaarblijkelijke veronderstellingen', die vaak pas vele bladzijden verderop terloops aangeduid worden. Indien al!

Ik ga nu kort in op enkele spetterende eleganties en discrepanties in dit rijke boek. Het boek begint met een prachtige en zeer leesbare beschouwing over de onvermijdelijke opkomst van de kwantummechanica. Veel beter dan *Quantum Mechanics* van Landau en Lifshitz (Pergamon Press, Oxford, 1977) of Messiahs

Quantum Mechanics (2 volumes, North-Holland, 1961). Op pagina 4 (Rayleigh–Jeans–Planck) blijkt de ‘ultravioletcatastrofe’ te verdwijnen als je een integraal vervangt door een (oneigenlijke) Riemannsom met stapjes $\hbar$. De ultravioletcatastrofe in de formule wordt hierdoor bezworen. Kortom, de kwantummechanica begint met een discretisatie van een integraal! Voorts zijn er goede losse historische beschouwingen: experimentele interpretaties (3.7), elektronenspin (hoofdstuk 4), entanglement, Bell-ongelijkheden (hoofdstuk 12).

Hoofdstuk 3 begint met te melden dat ‘fysische toestanden’ kunnen worden voorgesteld als abstracte vectoren in een complexe vectorruimte waarin discrete en continue superposities mogelijk zijn. Weinberg specificeert deze ruimte niet, en voert er ook geen apart symbool voor in. Het is wel de bedoeling dat deze ruimte, die door Weinberg stevast ‘Hilbertruimte’ wordt genoemd, allerlei singuliere elementen bevat. Zoals Δ -functies, de Fouriergetransformeerden daarvan en, kortom, alle vrije toestanden van Hamilton-operatoren. Voor beginnende wiskundigen is dit, op zijn minst, erg verwarrend. Operatoren (observabelen) worden geacht te werken op ‘any vector’ van de ‘Hilbert space’ (p. 61). Gelukkig zijn de beschouwingen over unitaire operatoren goed lokaal leesbaar.

Het H-atoom en de harmonische oscillator worden expliciet doorgerekend. Wat betreft uitgewerkte rekenvoorbeelden is het boek van Landau en Lifshitz veel uitgebreider en aantrekkelijker. De sferische harmonischen worden, traditiegetrouw, wat moeizaam verkregen via bolcoördinaten en ‘geassocieerde Legendre-functies’.

Voor wat betreft de grondbeginselen van de kwantummechanica, uitgaande van de basispostulaten over observabelen (hermitische operatoren) en (unitaire) symmetrieën, wordt de plaatsoperator tevoorschijn getoerd en wordt buitengewoon elegant uitgelegd waar de canonieke commutatierelaties $X_i P_j - P_j X_i = i\delta_{ij}$ vandaan komen (p. 74). De rituelen rond de verwerving van de overige commutatierelaties in de hoofdstukken 3 en 4 zijn dan weer wat duister. Wat is een ‘vector’ eigenlijk?

De elektronenspin wordt in Hoofdstuk 4 elegant behandeld als een soort ‘restverschijnsel’, dat overblijft na ‘aftrek van het impulsmoment’. De representaties van $SO(3)$ in $SU(2)$ worden nergens expliciet gemaakt. De Pauli-matrices komen pas terloops tevoorschijn op p. 107.

Kwantummechanica is storingsrekening. De hoofdstukken 5–8 gaan daar over. Wat betreft de spectrale berekeningen is veel hiervan ook al in het boek van Landau en Lifshitz te vinden. Wat betreft verstrooiingstheorie duikt aan het begin van Hoofdstuk 7 de *Lippmann–Schwinger-vergelijking* op. Helaas zijn de rituelen er omheen voor buitenstaanders zo goed als ondoorgroendelijk. Zelfs de *kale formulering* van deze vergelijking wordt pas een heel eind verderop duidelijk, (7.2.3), (8.1.16), (8.1.22). Het lijkt alsof Weinberg hier zijn prullenbak heeft leeggeschud.

Ook bij de Feynman-padenintegraal treffen we weer een mix van buitengewone elegantie en ‘mystiek met oneindigheden en infinitesimalen’ aan. Met de auteur meeeinzend dat de berekeningen ‘gewoon matrices’ betreffen blijkt de volgende beschouwing cruciaal in Weinbergs verwerving van de Feynman-padenintegraal. Uitgaande van de eigenwaarde-identiteiten $Q\Psi_q = q\Psi_q$ en $P\Phi_p = p\Phi_p$, volgt op p. 291 de bewering,

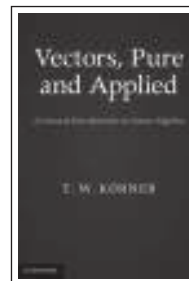
$$(\Psi_q, e^{-\varepsilon i H(P,Q)} \Phi_p) = e^{-\varepsilon i H(p,q)} (\Psi_q, \Phi_p) + o(\varepsilon^2).$$

Hier stelt $H(P,Q)$ de Hamiltonoperator voor en $H(p,q)$ de klassieke Hamiltonfunctie. Aan weerszijden staat een inproduct tussen twee niet-normeerbare distributies, zodat de term $o(\varepsilon^2)$ wat hilarisch aandoet. Maar hierover willen moppen is te oneerbiedig.

Als ik veronderstel dat $H(P,Q)$ een operator-polynoom is van de vorm $f_1(Q)g_1(P) + \dots + f_\ell(Q)g_\ell(P)$, dan is de uitdrukking correct in het matrixgeval! Weinberg meldt slechts dat je, wegens $QP - PQ = i\hbar$, alle gevallen hiertoe kunt herleiden. OK, probeer eens $H(P,Q) = PQP = QP^2 - i\hbar P$. De klassieke Hamiltoniaan luidt dan $H(p,q) = qp^2 - i\hbar p$. Hoe kom je van die tweede term af? Voor de asymptotiek $\hbar \downarrow 0$ maakt het niet uit, maar wél voor de zoektocht naar ‘ware quantisatie’!

Voor belangstellenden stelt de recensent graag zijn ‘kladblok’ met twaalf bladzijden detailcommentaar ter beschikking (j.d.graaf@tue.nl).

Jan de Graaf



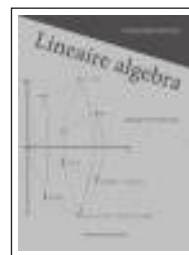
T.W. Körner

Vectors, Pure and Applied
A general introduction to linear algebra

Cambridge University Press, 2013

360 p., prijs £34.99

ISBN 9781107675223



Paul Igodt, Wim Veys

Lineaire Algebra
Tweede editie

Universitaire Pers Leuven, 2015

312 p., prijs € 36,00

ISBN 9789462700529

Deze twee uitstekend verzorgde boeken hebben het nodige gemeen: beide bieden een inleiding in de lineaire algebra, beide zijn gebaseerd op jarenlange ervaring, en beide verschillen aanzienlijk van de meeste Amerikaanse uitgaven. Toch zijn beide boeken absoluut niet uitwisselbaar. Het boek van Paul Igodt en Wim Veys doorloopt to-the-point en steeds goed onderbouwd in zo'n 300 overzichtelijk vormgegeven pagina's de standaardonderwerpen stelsels lineaire vergelijkingen en matrices, determinanten, vectorruimten (met axioma's), lineaire afbeeldingen en inproductruimten. Efficiënt geschreven en alles verantwoord met goed toegankelijke bewijzen. Af en toe is een paragraaf met toepassingen toegevoegd, bijvoorbeeld over Hammingcodes. De opgaven laten een uitgebalanceerde mix van rekenwerk en voorzichtig bewijswerk zien. Prima voor de beginnende student. Bij het boek hoort ook een digitale oefenomgeving, www.lineairealgebra.be, waar je op diverse manieren multiplechoicetoetsen kunt samenstellen (met af en toe behoorlijk pittige vragen). Het boek lijkt me goed bruikbaar bij de hardere universitaire bèta-opleidingen. Ook een geïnteresseerde middelbare scholier kan er mee aan de gang.

Körners boek is gebaseerd op eerstejaars en tweedejaars cursussen uit Cambridge waarin vectoren centraal staan (maar bevat geen vectoranalyse) en graaft vanaf het begin dieper: in het eerste deel, gebaseerd op stof voor het eerste jaar, komen ‘familiar vector spaces’ aan bod en dit deel eindigt met tensoren. In het tweede deel, bestemd voor het tweede jaar, staan ‘general vector spaces’ op het programma, zoals ruimten van lineaire afbeeldingen. In een persoonlijke stijl beoogt Körner de lezer in het ‘how and why’ van de lineaire algebra in te wijden. Als het niet in de inleiding had gestaan, zou je misschien niet eens goed kunnen zeggen voor wie het boek bedoeld is. Het oogt namelijk als een boek voor professionals en het legt de lat tamelijk hoog. De schrijver laat soms via kleine tussenzinnetjes, zoals “As the reader probably knows...” (p. 16), merken dat de lezer misschien toch al wat vectormeetkunde en lineaire algebra gezien zou moeten hebben. De gebruiker dient ook een dosis wiskundige ervaring mee te nemen, want voor beginnende studenten zijn de opgaven meteen ‘uitdagend’ (bijvoorbeeld het doorrekenen van inversie met vectoren). Geen rijen met standaardexercities, maar stevige (bewijs)opgaven. Het boek is daarmee wel meteen enigszins verslavend voor ingewijden. Kortom, dit boek zou in Nederland meer bij een ‘honors’ course thuis horen. Over de titel kun je twisten, want of die toepassingen er zo van komen, is de vraag.

Hans Sterk



Gerardo Soto y Koelemeijer

Wiskundigen mogen niet huilen

Amsterdam University Press, 2015

141 p., prijs € 17,95

ISBN 9789089649065

Nadat ik dit interessante boek, gelardeerd met veel Engelstalige citaten, had gelezen schreef ik geïnspireerd onmiddellijk het volgende op. We zouden de durf moeten hebben om vanaf de brugklas het wiskundeonderwijs totaal om te gooien. Weg met al die overzichten van kerndoelen en kennen- en kunnenlijstjes. En waarom dan? Hier volgt een voorbeeld. Sommige mensen noemen de *abc*-formule een suffe formule (Ionica Smeets in *de Volkskrant* van 6 februari 2016). Tja, als je die formule alleen uit je hoofd moet leren en vervolgens rijtjes vierkantsvergelijkingen moet oplossen kan ik mij zo'n gedachte wel voorstellen. De geschiedenis vertellen van het oplossen van vierkantsvergelijkingen is wel degelijk interessant maar we doen dat op school niet. De vraag is: wordt er op de middelbare school nog wel echte wiskunde gegeven? Waar zijn we eigenlijk mee bezig? Veel wiskundeboeken zijn veranderd in boeken met veel bekende recepten. Onwillekeurig moet ik even denken aan het kookboek *Kleine geschiedenis van de Nederlandse keuken* van Jacques Meerman. Die geschiedenis van de recepten maakt het boek zo leuk. Geschiedenis, daar gaat het ook om. Voor de brugklas zou je slechts één doelstelling moeten hebben: leren wat wiskunde is. Mijn oude professor Johan J. de longh zei ooit: “Wiskunde leer je door wiskunde te doen.” Maar wat is dat dan ‘wiskunde doen’? Dat is toch niet hetzelfde als steeds maar bereke-

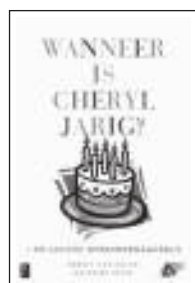
ningen maken en vierkantsvergelijkingen oplossen? Schaf het boek in de brugklas af. Geef de docent tijd om zijn les voor te bereiden en ideeën te ontwikkelen. Geef leerlingen de tijd om zich echt in een probleem te verdiepen. Maak van het wiskundelokaal ook echt een wiskundewerklokaal waar geknipt en geplakt kan worden, zo nodig gezaagd, waar samen een spel gespeeld kan worden. Waar ruimte en tijd is voor mislukkingen. Waar je leert om met frustratie om te gaan en waar gewerkt wordt aan het vergroten van je doorzettings- en oplossend vermogen.

Zo beste lezer, dat is eruit. Dat heeft het boek met mij gedaan. Ben ik nu een fantast of een surrealist? Dat is niet belangrijk. Wat wel belangrijk is: “Is het een goed boek?” “Ja!”, het heeft mij aan het denken gezet, wat u er ook van denkt. Jaren geleden las ik het boek *Het meten van de wereld*, geschreven door de Duitse schrijver Daniel Kehlmann. De hoofdrolspelers in het boek zijn ontdekkingsreiziger Alexander Von Humboldt en de wiskundige Carl Friedrich Gauss. Voor mij was dit boek een pageturner en dat had niet op de laatste plaats te maken met het afwisselende patroon van een hoofdstukje Gauss, een hoofdstukje Humboldt en ga zo maar door. Deze aanpak heeft Koelemeijer ook toegepast met zijn ‘Meesters van het spel’ schaker Bobby Fisher versus wiskundige Alexander Grothendieck. Het zijn nu geen hoofdstukken, maar paragrafen die elkaar afwisselen.

Hetzelfde gebeurt bij de beschrijving van het tweetal de voetballer Diego Maradona en de wiskundige Andrew John Wiles. Ik zou echter de auteur tekort doen om alleen hiermee de vraag ‘waarom het boek zo boeiend is’ te verklaren. Koelemeijer kan gewoon goed schrijven. Het zal wel te maken hebben gehad met het feit dat hij twee disciplines wist te combineren: literatuurwetenschap en wiskunde. En daar komt nog een mooi filosofisch laagje overheen. Want dat is toch de kernvraag in het boek — het begint en eindigt ermee — “Wat is wiskunde?” Natuurlijk krijgen we geen afgebakend antwoord. De auteur, denk aan zijn andere discipline, vergelijkt het met de vraag “Wat is literatuur?” We kunnen de vragen slechts beantwoorden door verschillende aspecten van de wiskunde of van de literatuur te laten zien. Aan de hand van de loopbanen van Wiles en Grothendieck wordt dat deels zichtbaar. Hoe kijken zij tegen de wiskunde aan? Het is ook interessant om te lezen hoe de auteur de verrassende parallellen blootlegt met grootheden uit de (denk)sportwereld. Het is niet alleen een kwestie van talent, maar een samenspel van intelligentie, kennis, inzicht en doorzettingsvermogen, schrijft de auteur. Ik had het daarom niet raar gevonden als de titel van het boek ‘Wat is wiskunde?’ was geweest. Toegegeven, ‘huilen of juist niet huilen’ is wel een aandachtstrekker. Op pagina 90 wordt beschreven — een aardige anekdote voor leerlingen — waarom wiskundigen niet mogen huilen. Het is leuk en leerzaam om meningen en vragen uit de klas op te schrijven en bekend te maken. De bekendste vragen zijn natuurlijk toch “Meneer, waarom moeten we dit leren?” en “Wat is het nut van wiskunde?” Het zijn wel vragen die na de invoering van wiskunde A en B veel minder gesteld worden. Leerlingen zijn nu veel beter op de hoogte van de wiskundige toepassingen in de sportwereld, op het gebied van de gezondheid, in de economie en in de industrie. Wordt wiskunde nu bedacht of ontdekt? Waar ligt de oorsprong van de wiskunde? Waar komt de noodzaak van het tellen vandaan? Wat is een getal? Wordt wiskunde aangeleerd of bestaat er in het brein van de mens bij de geboorte al een zekere aanleg? Hoe vergaat de cognitieve psychologische ontwik-

keling bij kinderen (Jean Piaget)? Zijn mensen de enige wezens die bekwaamheid kunnen hebben in numerieke aangelegenheden? Ik citeer de auteur: “Zelf raak ik enthousiaster wanneer ik een mooi verhaal vertel over Leibniz en Newton, dan wanneer ik de standaardafgeleiden op het bord schrijf die de leerlingen uit het hoofd moeten leren.” Dan volgt er een ijzersterk stuk over de oudste vorm van onderwijs: het vertellen van verhalen. Hier kan geen iPad of game tegen op. De auteur houdt een pleidooi om wiskunde te onderwijzen met behulp van verhalen. Zijn argumentatie vind ik heel overtuigend. Maar eerst: wat voor verhalen bedoelt de auteur? Het gaat om verhalen over wiskundigen, over de geschiedenis van de wiskunde, over de ontwikkeling van bepaalde concepten binnen de wiskunde, over de raakvlakken met andere disciplines, over de filosofie van de wiskunde, over de toepassingen van de wiskunde, over vergelijkingen tussen verschillende culturen, over wiskundendidactiek en nog veel meer.

Als u denkt “daar weet ik te weinig van” of “ik weet niet zoveel om aan mijn leerlingen of studenten te vertellen” of “wat is de bedoeling van die koffievlek op de omslag” dan moet u juist dit boek aanschaffen om uw kennis aan te vullen. Dat is echter niet de enige reden. Op sectie- of vakgroepsvergaderingen worden vragen gesteld of problemen voorgelegd die een stuk gemakkelijker te beantwoorden zijn als er in de sectie of vakgroep echt eens aandacht besteed wordt aan de vraag “Wat is wiskunde?” *Jacques Jansen*



Birgit van Dalen, Quintijn Puite

**Wanneer is Cheryl jarig?
+ 99 andere wiskunderaadsels**

Bertram+de Leeuw, 2015

214 p., prijs € 14,95

ISBN 9789461561961

Wanneer is Cheryl jarig? Dat was de vraag waar velen zich het hoofd over braken, nadat een logisch-wiskundig raadsel met deze titel het internet over ging in april 2015. De vraag was afkomstig uit de ‘Singapore and Asian Schools Math Olympiad’, een wedstrijd voor scholieren van het basis- en voortgezet onderwijs. Zelfs het televisieprogramma *De Wereld Draait Door* besteedde er uitgebreid aandacht aan. Raadsels zijn nou eenmaal leuk.

Het boek *Wanneer is Cheryl jarig? + 99 andere wiskunderaadsels* sluit aan bij deze populariteit door een honderdtal wiskundige raadsels te bespreken. Sommige zijn folklore, sommige zijn nieuw verzonden en een aantal is afkomstig uit de Nederlandse Wiskunde Olympiade en de Junior Wiskunde Olympiade. Ieder raadsel is voorzien van een hint en een volledige uitwerking. De lezer dient wel te beschikken over enige zelfbeheersing, aangezien de hint telkens op dezelfde bladzijde als het raadsel staat — de uitwerkingen zijn wel afgedrukt op de achterkant.

De raadsels zijn verdeeld over dertien categorieën, die betrekking hebben op de context van de vraagstelling: feesten en partijen, munten en dukaten, beestenboel, enzovoort. Persoonlijk had ik liever een opdeling naar moeilijkheid of wiskundig onderwerp gezien.

Er wordt geen kennis van specifieke wiskundige concepten vereist — een goede dosis gezond verstand en wat probleemoplossend vermogen zijn de belangrijkste ingrediënten om de raadsels op te lossen. In enkele gevallen herkent de wiskundig geschoolede lezer wellicht een bekende stelling. Zo wordt er op enig moment gevraagd of het mogelijk is dat je op een feestje met tien mensen de antwoorden 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 7 en 8 krijgt als je iedereen vraagt hoeveel handen hij of zij die avond geschud heeft. De hint stuurt in de richting van de observatie dat het aantal handdrukken altijd een even getal moet zijn, een direct gevolg van de bekende stelling uit de grafentheorie dat de som van de graden altijd het dubbele is van het aantal lijnen (als we iedere persoon als punt representeren en iedere handdruk als lijn). Aangezien het totaal aantal geregistreerde handdrukken in het gegeven raadsel op 43 uitkomt, moet iemand dus wel verkeerd geteld hebben. Via de hint om eerst te kijken wat het totaal zou zijn bij een enkele handdruk, vervolgens bij een tweetal handdrukken, enzovoorts, zou ook de lezer die minder in de grafentheorie is ingewijd tot de oplossing moeten kunnen komen.

Sommige raadsels zijn betrekkelijk eenvoudig: in een la liggen 10 blauwe, 14 rode, 20 gele en 30 zwarte sokken — hoeveel sokken moet je minimaal pakken om er zeker van te zijn dat je een paar sokken van gelijke kleur te pakken hebt? Andere zijn lastiger, zoals het raadsel van de 100 gevangenen die op een lange trap staan opgesteld, ieder met een zwarte of een witte hoed op zijn hoofd. Ze krijgen de opdracht om te raden wat de kleur van hun eigen hoed is (te beginnen bij de gevangene die bovenaan staat, en zo door naar beneden), maar kunnen alleen de hoeden van degenen voor hen zien. De vraag is om een strategie te verzinnen waardoor hooguit één van de gevangenen een verkeerd antwoord geeft.

Al met al zitten er raadsels bij voor ieder niveau. De hints zijn over het algemeen goed doordacht; genoeg sturing om tot het antwoord te komen, maar ook genoeg ruimte om toch nog het gevoel te hebben dat je het grotendeels zelf voor elkaar gekregen hebt. Voor de gevorderde wiskundige zullen de meeste raadsels wellicht wat aan de makkelijke kant zijn, maar met name voor docenten is het boek hartstikke leuk om zo nu en dan eens in de klas te gebruiken. Sommige raadsels kunnen al in de brugklas, terwijl andere zelfs in de zesde klas nog uitdagend zullen zijn.

Mark Timmer



Günther Frei, Franz Lemmermeyer,
Peter J. Roquette (eds.)

**Emil Artin and Helmut Hasse
The Correspondence 1923–1958**

Contributions in Mathematical and Computational Sciences, Vol. 5

Springer, 2014

xx + 484 p., prijs € 116,59

ISBN 9783034807142

Dit boek is verschenen als deel 5 in de reeks *Contributions in Mathematical and Computational Sciences*, welke is opgestart door MATCH, IWR en HGS (in het Engels vertaald respectievelijk als: The Mathematics Center Heidelberg, the Interdisciplinary Center for Scientific Computing and the Heidelberg School of

Mathematical and Computational Methods for the Sciences). De opzet van de reeks is om te berichten over ontwikkelingen van zekere onderdelen in de wiskunde die geschikt zijn om behandeld te worden in seminars, colleges, meetings, enzovoort. Ook het vakgebied zoals beschreven in het onderhavige boek valt hieronder en de inhoud ervan voldoet geheel aan bovenstaande intenties.

Het boek bevat onder meer de Engelse vertaling van alle Duitse tekst van een eerder verschenen boek uit 2008 over de Artin–Hasse Korrespondenz uit de jaren 1923–1934. Zie de recensie in het NAW, deel 5/14, nr. 4, december 2013. In de voorliggende Engelse versie is de literatuur sterk uitgebreid ten opzichte van die in de Duitse versie, en bijgewerkt tot en met het redactieslot in maart 2013. Een prettige verrassing is dat nieuwe, zeker niet algemeen bekende, foto's zijn opgenomen in de Engelse versie, waarop E. Artin, N. Artin-Brunswick, Hasse, Hecke, Hensel, E. Noether en Witt te zien zijn. De, voor zover bekend, volledige briefwisseling tussen Artin en Hasse uit de jaren 1937–1938 en 1953–1958 is toegevoegd alsmede een brief van Hasse aan Artin uit 1932 die afkomstig is uit de nalatenschap van Olga Tausski. Die brief gaat over Artins reciprociteitsstelling voor willekeurige klassenlichamen. Correspondentie van Artin aan Hasse en dito van Hasse aan Artin, beide uit de jaren 1935–1937 en 1939–1952 is nergens tot op heden teruggevonden. Uit de jaren 1923–1934 is alleen de correspondentie van Artin aan Hasse bekend (op die ene brief na dan in omgekeerde richting, zie hierboven), maar meestal valt wel op te maken uit de brieven van Artin aan Hasse wat voor onderwerpen in de richting Hasse aan Artin aan de orde kwamen. Alle correspondentie is in het hier gerecenseerde boek uitvoerig beschreven en commentariseerd. De inhoud van het boek uit 2008 is onder de loep genomen en, daar waar nodig en gewenst, gepreciseerd en in het Engels afgedrukt in het voorliggende boek.

Als belangrijke onderwerpen uit de jaren 1937–1938 komen zaken over Hasses 'blauwe' boek en de klassenlichamentheorie voor. Uit de jaren 1953–1958 vernemen we onder andere van de Artin–Tate Notes over klassenlichamentheorie, over aspecten rond het congres Tokio–Nikko 1955 en voorts over berichten betreffende personen, aanstellingen aan universiteiten mitsgaders wat persoonlijke dingen.

Wat commentaar betreft door de drie auteurs/redacteuren, let bijvoorbeeld eens op de nu toegevoegde opmerkingen over intrigerende begrippen als 'abelsche Durchkreuzung' en 'Zahlenknoten', beide afkomstig van A. Scholz in de jaren rond 1925, begrippen die gerelateerd zijn aan Chebotarevs reciprociteitsstelling. Uiteraard bevat de correspondentie wiskunde, soms wat aftastend maar meestal gedetailleerd en vrijwel altijd toentertijd nieuw, zeer doorwrocht en, naar we nu weten, behoorlijk belangrijk.

De wiskundige gemeenschap mag en kan zich gelukkig prijzen met alle research voor het boek zoals die door Frei, Lemmermeyer en Roquette is ondernomen. De inhoud van beide boeken (uit 2008 en 2014 dus) is onmisbaar bij het voorbereiden van colleges waar geschiedkundige en concrete wiskundige onderwerpen uit de getaltheorie en daarbuiten een rol spelen.

Beide boeken zijn zeer geschikt voor docenten en niet-eerstejaarsstudenten om hun blik te verbreden. Ook hier, net als bij het boek uit 2008, geef ik als judicium: vijf sterren, eenzame klasse.

Robert van der Waal



Frans Keune

Galoistheorie

Beginnelen van de theorie der veelterm-vergelijkingen in één onbekende

Epsilon Uitgaven, 2015

184 p., prijs € 24,00

ISBN 9789050411509

Een college Galoistheorie kan men op de gangbare moderne manier inrichten en baseren op het boek *Galoissche Theorie* van Emil Artin. Men kan de theorie ook laten aansluiten bij de oorspronkelijke ideeën van Galois, de historische manier, en baseren op een college dat Richard Dedekind verzorgde in de wintersemesters van 1856 en 1857 in Göttingen; waarschijnlijk het eerste universitaire college Galoistheorie. De notities van Dedekind zijn in 1981 gepubliceerd door Winfried Scharlau; een bewerking ervan vindt men in het tweedelige boek *Von Zahlen und Größen* van Heinz Lüneburg, deel 2, pp. 417–430.

Voor een moderne benadering van de Galoistheorie kan men in plaats van het boek van Emil Artin zeker het boek van Frans Keune gebruiken. Centraal staat immers de bestudering van de groep van automorfismen van een eindige lichaamsuitbreiding die het grondlichaam invariant laten. Het boek van Keune heeft een aantal voordelen. Het is rijkelijk voorzien van voorbeelden en opgaven. Er is weinig voorkennis nodig en de taal is Nederlands. Alle begrippen en stellingen relevant voor het begrijpen van de Galoistheorie, zijn zorgvuldig en compact beschreven. Een beheersing van het ruime begrippenapparaat maakt het tevens mogelijk andere moderne boeken over de Galoistheorie snel te begrijpen. Met meer inspanning lukt het klassieke boeken te begrijpen, bijvoorbeeld het boek *Kleines Lehrbuch der Algebra* van Heinrich Weber. De Galois-resolvente wordt door Keune niet behandeld.

Omstreeks 1980 volgde ik bij Keune de colleges Galoistheorie. Het Nijmeegse collegedictaat is steeds verbeterd en vormt de basis voor het nu verschenen boek. De passer- en liniaalconstructies opgenomen in hoofdstuk 2 maakten destijds veel indruk. De mogelijkheid van de constructie van een regelmatige zeventienhoek wordt in hoofdstuk 6 aangetoond met de Galois-correspondentie. Op het voorblad van het boek is deze hoofdstelling of Galois-correspondentie afgebeeld, uiteraard met de tegengestelde inclusies. Tijdens het verloop van de colleges was spectaculair dat mede door toepassing van die hoofdstelling, van worteluitbreidingen en oplosbaarheid van groepen, een invulling gegeven werd aan *Sur les conditions de résolubilité des équations par radicaux*, de titel van de beroemde mémoire van Évariste Galois die in 1846 gepubliceerd werd in de *Journal de Liouville*. Dit alles is terug te vinden in het boek.

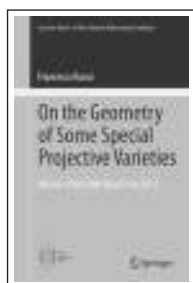
Een leeswijzer ontbreekt en zou zeker geholpen hebben om belangrijke en minder belangrijke delen te onderscheiden; de belangrijke stelling dat een Galoisuitbreiding gekarakteriseerd wordt als een splijtlichaam van een separabel polynoom, valt bijvoorbeeld niet op. Regelmatig schetste Keune in de colleges de grote lijnen van de theorie en verklaarde hij welke rol de vele begrippen en stellingen daarin speelden. Dit verhaal staat jammer genoeg niet in het boek. Het ontbreken van zo'n totaaloverzicht komt bij

meer boeken voor, zoals bij het reeds vermelde boek van E. Artin, het boek *Foundations of Galois Theory* van M.M. Postnikov en *A course in Galois Theory* van D.J.H. Garling.

Een Nederlandse representant van een historische benadering is het digitaal beschikbare Amsterdamse proefschrift uit 1900 van

Derk Coelingh met de titel *Inleiding tot de theorie van Galois en de theorie der substitutiegroepen* (te vinden via <https://archive.org>). Het boek van Frans Keune verschilt uiteraard van dit proefschrift; het is immers een uitstekende moderne benadering van de Galois-theorie.
Math Dicker

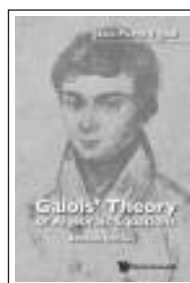
Recent verschenen publicaties. Als u een van deze boeken wilt bespreken of als u suggesties heeft voor andere boeken voor deze rubriek, laat dit dan per e-mail weten aan reviews@nieuwarchief.nl.



Francesco Russo

On the Geometry of Some Special Projective Varieties

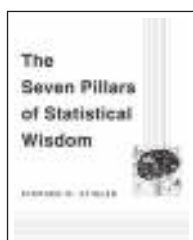
Springer, 2016
ISBN 9783319267647
www.springer.com/9783319267647



Jean-Pierre Tignol

**Galois' Theory of Algebraic Equations
2nd Edition**

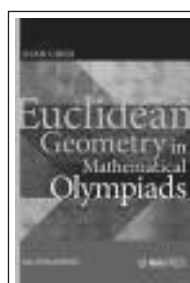
World Scientific, 2016
ISBN 9789814704694
www.worldscientific.com/worldscibooks/10.1142/9719



Stephen M. Stigler

The Seven Pillars of Statistical Wisdom

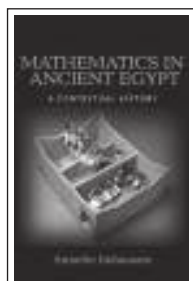
Harvard University Press, 2016
ISBN: 9780674088917
www.hup.harvard.edu/catalog.php?isbn=9780674088917



Evan Chen

Euclidean Geometry in Mathematical Olympiads

MAA Problem Books
MAA Press, 2016
ISBN 9780883858394
www.maa.org/press/books/euclidean-geometry-in-mathematical-olympiads



Annette Imhausen

**Mathematics in Ancient Egypt:
A Contextual History**

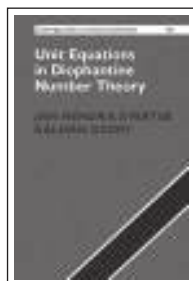
Princeton University Press, 2016
ISBN: 9780691117133
press.princeton.edu/titles/10648.html



Stephen Schecter, Herbert Gintis

**Game Theory in Action
An Introduction to Classical and Evolutionary Models**

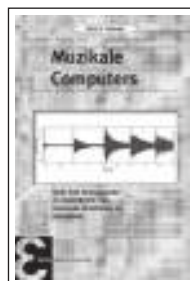
Princeton University Press, 2016
ISBN: 9780691167657
press.princeton.edu/titles/10739.html



Jan-Hendrik Evertse, Kálmán Györy

Unit Equations in Diophantine Number Theory

Cambridge Studies in Adv. Mathematics
Cambridge University Press, 2016
ISBN: 9781107097605
www.cambridge.org/9781107097605



Aline K. Honingh

Muzikale Computers

Over het formaliseren en modelleren van muzikale structuren en processen

Epsilon Uitgaven, 2016
ISBN 9789050411554
www.epsilon-uitgaven.nl/E83.php

Problemen

| Problem Section

This Problem Section is open to everyone; everybody is encouraged to send in solutions and propose problems. Group contributions are welcome.

For each problem, the most elegant correct solution will be rewarded with a book token worth €20. At times there will be a Star Problem, to which the proposer does not know any solution. For the first correct solution sent in within one year there is a prize of €100. When proposing a problem, please either include a complete solution or indicate that it is intended as a Star Problem.

Please send your submission by e-mail (LaTeX is preferred), including your name and address to problems@nieuwarchief.nl.

The deadline for solutions to the problems in this edition is 1 September 2016.

Problem A (folklore)

Denote for all positive rational numbers x by $f(x)$ the minimum number of 1's needed in a formula for x involving only ones, addition, subtraction, multiplication, division and parentheses. For example, $f(1) = 1$, and $f(\frac{1}{3}) = 4$, as $\frac{1}{3} = \frac{1}{1+1+1}$ and as no such formula exists with at most three 1's. Note that $f(11) \neq 2$ (concatenation of ones is not allowed). Moreover, denote for all positive rational numbers x by $h_2(x)$ the number $\log_2(p) + \log_2(q)$, where $\log_2$ denotes the base-2 logarithm, and where p, q are positive integers such that $x = \frac{p}{q}$ and $\gcd(p, q) = 1$.

Show that for all x , we have

$$f(x) > \frac{1}{2}h_2(x).$$

Problem B (folklore)

Suppose that there are $N \geq 2$ players, labeled $1, 2, \dots, N$, and that each of them holds precisely $m \geq 1$ coins of value 1, m coins of (integer) value $n \geq 2$, m coins of value n^2 , et cetera. A *transaction* from player i to player j consists of player i giving a finite number of his coins to player j . We say that an N -tuple $(a_1, a_2, \dots, a_N)$ of integers is (m, n) -payable if $\sum_{i=1}^N a_i = 0$ and after a finite number of transactions, the i -th player has received (in value) a_i more than he has given away.

Show that for every N -tuple $(a_1, a_2, \dots, a_N)$ with $\sum_{i=1}^N a_i = 0$ to be (m, n) -payable, it is necessary and sufficient that $m > n - \frac{n}{N} - 1$.

Problem C (proposed by Wouter Zomervrucht)

For each integer $n \geq 1$ let c_n be the largest real number such that for any finite set of vectors $X \subset \mathbb{R}^n$ with $\sum_{v \in X} |v| \geq 1$ there exists a subset $Y \subseteq X$ with $|\sum_{v \in Y} v| \geq c_n$. Prove the recurrence relation

$$c_1 = \frac{1}{2}, \quad c_{n+1} = \frac{1}{2\pi n c_n}.$$

Edition 2015-4 We received solutions from Johan Commelin and Raymond van Bommel, Alex Heinis, Pieter de Groen, Alex Heinis, Thijmen Krebs, Hendrik Reuvers and Martijn Weterings.

Problem 2015-4/A (folklore)

Let n be a positive integer. Given a $1 \times n$ -chessboard made out of paper, one is allowed to fold it along grid lines, and in such a way that the end result is a flat rectangle, say $1 \times m$. For example, the following figure shows side views of valid ways of folding a 1×7 -chessboard (gray lines depict white squares).



Redactie:

Gabriele Dalla Torre

Christophe Debry

Jinbi Jin

Marco Streng

Wouter Zomervrucht

Problemenrubriek NAW

Mathematisch Instituut

Universiteit Leiden

Postbus 9512

2300 RA Leiden

problems@nieuwarchief.nl

www.nieuwarchief.nl/problems

Let a_i for $i = 1, 2, \dots, m$ be the number of black squares under the i -th square of the resulting rectangle, and consider the tuple $(a_1, a_2, \dots, a_m)$. So in our examples, the respective corresponding tuples are $(1, 1, 1)$ and $(2, 1, 1)$.

Show that for any positive integer m the m -tuple $(a_1, a_2, \dots, a_m)$ of non-negative integers can be obtained via the above process if and only if for all $i, j \in \{1, 2, \dots, m\}$ such that $i + j$ is odd, we have $(a_i, a_j) \neq (0, 0)$.

Solution We received solutions from Pieter de Groen, Thijmen Krebs, Hendrik Reuvers and Martijn Weterings. The book token goes to Martijn Weterings, whose solution the following is based on.

We first show that any tuple $(a_1, a_2, \dots, a_m)$ obtained by the following process must satisfy $(a_i, a_j) \neq (0, 0)$ for all $i, j \in \{1, 2, \dots, m\}$ such that $i + j$ is odd.

Draw an arrow facing right on the bottom edge of each square of the $1 \times n$ -chessboard. For all $s \in \{1, 2, \dots, n\}$, define

$$\begin{aligned} b_s &= \begin{cases} 1 & \text{if the } s\text{-th square is white} \\ -1 & \text{if the } s\text{-th square is black} \end{cases} \\ c_s &= \begin{cases} 1 & \text{if the } s\text{-th square is on an even square of the resulting } 1 \times m\text{-rectangle} \\ -1 & \text{if the } s\text{-th square is on an odd square of the resulting } 1 \times m\text{-rectangle} \end{cases} \\ d_s &= \begin{cases} 1 & \text{if the arrow on the } s\text{-th square points to the right after folding} \\ -1 & \text{if the arrow on the } s\text{-th square points to the left after folding} \end{cases} \end{aligned}$$

Note that $b_s c_s d_s$ is independent of s , since $b_s b_{s+1}$ is always -1 , and exactly one of $c_s c_{s+1}$ and $d_s d_{s+1}$ is -1 , depending on whether there is a fold between the s -th square and the $(s+1)$ -th square or not.

As there is a connected strip of squares connecting the left edge and the right edge of the resulting $1 \times m$ -rectangle, it follows that there is a direction such that above each square of the $1 \times m$ -rectangle there is an arrow pointing in that direction. Now suppose for a contradiction that there exist $i, j \in \{1, 2, \dots, m\}$ such that $i + j$ is odd and $(a_i, a_j) = (0, 0)$. Then there are two white squares s, t above i, j , respectively, that have arrows pointing in the same direction. Hence $b_s = b_t = 1$ and $d_s = d_t$. Moreover, we have $c_s = -c_t$ as $i + j$ is odd. But this contradicts $b_s c_s d_s = b_t c_t d_t$. Hence for all $i, j \in \{1, 2, \dots, m\}$ such that $i + j$ is odd, we have $(a_i, a_j) \neq (0, 0)$.

Now it remains to show that if $(a_1, a_2, \dots, a_m)$ is such that for all $i, j \in \{1, 2, \dots, m\}$ such that $i + j$ is odd, it holds that $(a_i, a_j) \neq (0, 0)$, then it can be obtained via the process described in the problem. We only treat the case that all i with $a_i = 0$ are *even* and that the chessboard starts with a *black* square; the other three cases are similar.

In this case, we are done by the following greedy algorithm.

- Take $n = 2(\sum_{i=1}^m a_i) - 1$, and as before, draw an arrow pointing to the right on the bottom edge of each square.
- Place the first (black) square over the first square of the $1 \times m$ -rectangle with an arrow pointing to the right.
- Repeatedly fold until there are a_1 black squares lying over the first square, and there is a white square above the second square of the $1 \times m$ -rectangle. Note that this is possible as by assumption we have $a_1 \neq 0$. The arrow on the white square is pointing to the right.
- Repeatedly fold until there are a_2 black squares above the second square of the $1 \times m$ -rectangle, and there is a black square above the third square of the $1 \times m$ -rectangle. The arrow on this square is pointing to the right.
- Repeat the previous two steps alternatingly for the remainder of the squares.

Problem 2015-4/B (proposed by Jinbi Jin)

Let A be a commutative ring with unit, and let I be an ideal of A with $I \neq 0$ and $I^2 = 0$. Let B be the ring of which the elements are triples (a_1, a_2, a_3) where $a_1, a_2, a_3 \in A$ are such that $a_1 + I = a_2 + I = a_3 + I$, with coordinate-wise addition and multiplication. Show that there exist at least four distinct ring homomorphisms $B \rightarrow A$.

Solution We received solutions from Johan Commelin and Raymond van Bommel, Alex Heinis and Thijmen Krebs. The book token goes to Johan Commelin and Raymond van Bommel. All received solutions are similar, and the following is based on those. First note that for $i = 1, 2, 3$, we have the following ring homomorphism.

$$f_i: B \rightarrow A, (a_1, a_2, a_3) \mapsto a_i$$

Moreover, define

$$g: B \rightarrow A, (a_1, a_2, a_3) \mapsto a_1 - a_2 + a_3.$$

Note that g is a homomorphism as it is additive, $g(1, 1, 1) = 1$, and for all $(a_1, a_2, a_3), (b_1, b_2, b_3) \in B$ we have that, using that $I^2 = 0$,

$$\begin{aligned} g(a_1, a_2, a_3)g(b_1, b_2, b_3) &= (a_1 - a_2 + a_3)(b_1 - b_2 + b_3) \\ &= a_1b_1 - a_2b_2 + a_3b_3 - a_1b_2 - a_2b_1 + a_1b_3 + 2a_2b_2 + a_3b_1 - a_2b_3 - a_3b_2 \\ &= a_1b_1 - a_2b_2 + a_3b_3 + (a_2 - a_1)(b_2 - b_3) + (a_2 - a_3)(b_2 - b_1) \\ &= a_1b_1 - a_2b_2 + a_3b_3 \\ &= g(a_1b_1, a_2b_2, a_3b_3). \end{aligned}$$

Finally, note that these homomorphisms are all distinct, by considering the images of $(i, 0, 0)$, $(0, i, 0)$, $(0, 0, i)$ for any non-zero $i \in I$.

Problem 2015-4/C (proposed by Hendrik Lenstra)

Does there exist a non-trivial abelian group A that is isomorphic to its automorphism group?

Solution We received a solution from Alex Heinis. The book token goes to Alex Heinis, whose solution the following is based on.

Let $\mathbb{Z}_3$ denote the ring of 3-adic integers. We show that $A = (\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}) \oplus \mathbb{Z}_3$ is isomorphic to its automorphism group.

We will use the following well-known fact about $\mathbb{Z}_3$: the map $\exp: 3\mathbb{Z}_3 \rightarrow 1 + 3\mathbb{Z}_3$ defined by $x \mapsto \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} x^n$ is a group isomorphism (note that the target group is a subgroup of $\mathbb{Z}_3^*$).

We first show that $\text{Aut}(A)$ and $\text{Aut}(\mathbb{Z}_3)$ are isomorphic. Suppose that $\sigma \in \text{Aut}(A)$. As $\mathbb{Z}_3$ has trivial torsion, it follows that $(1, 0)$ is the only element in A of order 2. Therefore $\sigma(1, 0) = (1, 0)$. Moreover, note that 2 is invertible in $\mathbb{Z}_3$, so for all $x \in \mathbb{Z}_3$ we have $\sigma(0, x) = \sigma(0, 2 \cdot \frac{1}{2}x) = 2\sigma(0, \frac{1}{2}x)$, which is an element of $\{0\} \oplus \mathbb{Z}_3$. So any automorphism of A sends $\{0\} \oplus \mathbb{Z}_3$ to itself; this defines a homomorphism $\text{Aut}(A) \rightarrow \text{Aut}(\mathbb{Z}_3)$.

This map has an inverse which sends a $\sigma \in \text{Aut}(\mathbb{Z}_3)$ to the automorphism of A given by $(s, x) \mapsto (s, \sigma(x))$. It follows that $\text{Aut}(A)$ is isomorphic to $\text{Aut}(\mathbb{Z}_3)$.

Next, we show that $\text{Aut}(\mathbb{Z}_3)$ and $\mathbb{Z}_3^*$ are isomorphic. Let $\sigma \in \text{Aut}(\mathbb{Z}_3)$. Then first note that for all $x \in \mathbb{Z}$, we have $\sigma(x) = x\sigma(1)$. We claim that $\sigma(x) = x\sigma(1)$ holds for any $x \in \mathbb{Z}_3$.

Note that for any $x \in \mathbb{Z}_3$ and any $e \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$, we have $\sigma(3^e x) = 3^e \sigma(x)$ and $\sigma^{-1}(3^e x) = 3^e \sigma^{-1}x$. It follows that σ preserves the number of factors 3 that occur in elements of $\mathbb{Z}_3$, and therefore in particular that $\sigma(1)$ is invertible in $\mathbb{Z}_3$. So now suppose that $x \in \mathbb{Z}_3$, and write $x = x_0 + x_1 \cdot 3 + x_2 \cdot 3^2 + \dots$. Then for all $k \in \mathbb{Z}_{>0}$ we have

$$\begin{aligned} \sigma(x) &= \sigma\left(\sum_{i=0}^{k-1} x_i 3^i\right) + 3^k \sigma\left(\sum_{i=k+1}^{\infty} x_i 3^{i-k}\right) \\ &= \left(\sum_{i=0}^{k-1} x_i 3^i\right) \sigma(1) + 3^k \sigma\left(\sum_{i=k+1}^{\infty} x_i 3^{i-k}\right). \end{aligned}$$

It follows that $\sigma(x) = x\sigma(1)$ for all $x \in \mathbb{Z}_3$.

Hence we obtain a homomorphism $\text{Aut}(A) \rightarrow \mathbb{Z}_3^*$ sending σ to $\sigma(1)$; this map is an isomorphism with inverse sending $a \in \mathbb{Z}_3^*$ to the automorphism $x \mapsto ax$. Therefore $\text{Aut}(A)$ is isomorphic to $\mathbb{Z}_3^*$.

Now note that $\mathbb{Z}_3^*$ has subgroups $\{\pm 1\}$ and $1 + 3\mathbb{Z}_3$ such that every element $x \in \mathbb{Z}_3^*$ can be written uniquely as sy with $s = \pm 1$ and $y \in 1 + 3\mathbb{Z}_3$. Hence $\mathbb{Z}_3^*$ is isomorphic to $\{\pm 1\} \oplus (1 + 3\mathbb{Z}_3)$; the latter factor is isomorphic to $\mathbb{Z}_3$ via the map $\mathbb{Z}_3 \rightarrow 1 + 3\mathbb{Z}_3$, $x \mapsto \exp(3x)$, as desired.