

Inhoud | Contents

Artikelen | Features

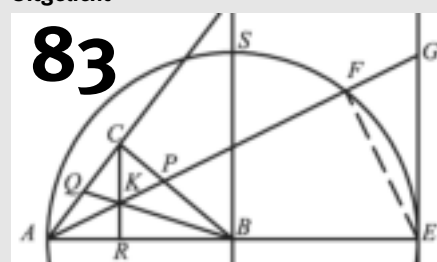
- Geschiedenis | History**
- 83 **F. van der Blij en de Kletter-driehoeken**
Jasbir Chahal, Jaap Top
- Onderwijs | Education**
- 88 **Dyscalculie?**
Mieke van Groenestijn
- Evenement | Event**
- 93 **NWD: Een Pi-shirt, beter laat dan nooit!**
Rob van Oord
- Onderzoek | Research**
- 97 **Menselijke keuzes begrijpen en beïnvloeden**
Arnoud den Boer
- In Memoriam | Obituary**
- 100 **Hugo Brandt Corstius: Vanitasstillevens**
Remko Scha
- Onderzoekschool | Research School**
- 106 **Het lustrum van WONDER**
Gunther Cornelissen
- Evenement | Event**
- 108 **Wiskunde voor de basisschool: speels, verrassend en uitdagend**
Jantine Bloemhof, Richard Boucherie
- Vakantiecursus | Summer School**
- 112 **Kettingbreuken, weefpatronen en de Kerststelling van Fermat**
Paul Levrie, Rudi Penne
- Onderzoek | Research**
- 123 **An inequality of Gauss**
Gerard Hooghiemstra, Piet Van Mieghem
- Evenement | Event**
- 130 **NMC nieuwe stijl**
Ronald van Luijk
- Interview | Interview**
- 133 **Martin Hairer: Intuition for mathematical concepts**
Sonja Cox
- Boekbespreking | Book Review**
- 135 **Optische verschijnselen in de atmosfeer**
Jan Guichelaar
- Evenement | Event**
- 138 **Networks & Big Data**
Nelly Litvak, Frank van der Meulen
- Maatschappij | Society**
- 140 **SWI 2013: De willekeurige discuswerper**
Ionica Smeets
- Maatschappij | Society**
- 142 **SWI 2013: Een hardnekkig probleem**
Ionica Smeets

Rubrieken | Departments

- 75 **Redactioneel**
Jan van Neerven
- 76 **Servicepagina**
- 77 **Agenda**
- 79 **Nieuws**
- 82 **Van het KWG**
- 121 **Het keerpunt van Maarten van der Weijden**
Jan Beuving
- 127 **In de verdediging**
Geertje Hek
- 144 **Boekbesprekingen**
- 149 **Problemen**

Uitgelicht

83



Door een lezing van Frederik van der Blij raakten Jasbir Chahal en Jaap Top geïnteresseerd in Kletter-driehoeken.

93



In dit nummer een verslag van de 21ste Nationale Wiskunde Dagen en een verslag van het 51ste Nederlands Mathematisch Congres.

Colofon

Het Nieuw Archief voor Wiskunde is een uitgave van het Koninklijk Wiskundig Genootschap en verschijnt vier maal per jaar. Het tijdschrift richt zich op een ieder die zich beroepsmatig met wiskunde bezighoudt, als academisch of industrieel onderzoeker, student, leraar, journalist of beleidsmaker. Het stelt zich ten doel te berichten over ontwikkelingen in de wiskunde in het algemeen en in de Nederlandse wiskunde in het bijzonder.

ISSN 0028-9825

Adres

Nieuw Archief voor Wiskunde
Centrum Wiskunde & Informatica
Postbus 94079
1090 GB Amsterdam
tel. 020-5924288
redactie@nieuwarchief.nl
www.nieuwarchief.nl

Hoofredactie

Richard Boucherie (r.j.boucherie@utwente.nl)
Jan van Neerven (j.m.a.m.vanneerven@tudelft.nl)

Eindredactie/Bladmanager

Fred Drissen (fred@nieuwarchief.nl)

Redactie

Hans Cuypers (TU/e), Geertje Hek (UvA), Jan Hogendijk (UU), Teun Koetsier (VU), Derk Pik (JSG Maimonides), Sjoerd Rienstra (TU/e), Hans Sterk (TU/e), Jan Ten Thije Boonkamp (TU/e), Mark Timmer (UT)

Problemenrubriek

Gabriele Dalla Torre (UL), Christophe Debry (KU Leuven), Jinbi Jin (UL), Marco Streng (UL), Wouter Zomervrucht (UL)

Bureauredactie

Gianni van den Braak, Lætitia Diemer

Illustraties

Ryu Tajiri, Amsterdam

Advertenties

advertenties@nieuwarchief.nl

Abonnementen/Subscriptions

Abonnementenservice NAW
Postbus 2238, 5600 CE Eindhoven
admin@wiskgenoot.nl, tel. 088-2265256

Abonnementsperiode/Subscription period

Een abonnement gaat in op de dag dat uw aanmelding ontvangen wordt. De opzegtermijn is twee maanden vóór het verstrijken van de abonnementsperiode.

The subscription starts on the day that your application is received. The term of notice is two months before the end of the current subscription period.

Exchange subscriptions

Koninklijk Wiskundig Genootschap Library
Centrum voor Wiskunde en Informatica
Postbus 94079, NL-1090 GB Amsterdam
KWG-exchange@cw.nl, fax +31 20 5924026

Vormgeving

Kitty Molenaar (ontwerp)
Susanne Laws (omslag, begeleiding binnenwerk)
Programmatuur (CONTEX)
Hans Hagen, PRAGMA-ADE, Hasselt (Overijssel)
Druk
Drukkerij Ten Brink, Meppel

Koninklijk Wiskundig Genootschap

Het Koninklijk Wiskundig Genootschap (KWG) is een landelijke vereniging van beoefenaren van de wiskunde. In 1778 opgericht onder de zinspreuk: 'Een onvermoeide arbeid komt alles te boven' is het 's werelds oudste nationale wiskundegenootschap. Leden ontvangen het Nieuw Archief voor Wiskunde als onderdeel van hun lidmaatschap.

De contributie voor gewone leden bedraagt in 2015 €90 per jaar. Voor gepensioneerden en werklozen €45. Voor studenten aio's en oio's van een Nederlandse universiteit of hbo-opleiding €35. Studenten en pas afgestudeerden kunnen een jaar lang gratis lid worden. Voor leden van de wiskundige vakverenigingen VvS+OR, NVvW en NVORWO geldt het gereduceerd tarief van €70. Leden die het Nieuw Archief voor Wiskunde niet willen ontvangen, betalen slechts €50 contributie. Losse nummers zijn te bestellen voor €20.

Members of SIAM, the *Société Mathématique de France*, the *Gesellschaft für Angewandte Mathematik und Mechanik*, the *Deutsche Mathematiker-Vereinigung*, and of the *American, Australian, Belgian, Indian, London, Spanish, and South-African Mathematical Societies* living outside of the Netherlands pay €70 instead of the full membership fee of €90 a year. Conversely, these foreign societies, as well as the VvS+OR and the NVORWO, have reduced membership fees for KWG-members. A postage charge of €10 is added for members living abroad but in Europe, and a charge of €12,50 for members living outside of Europe.

Instituten in Nederland en buitenland kunnen zich abonneren op het Nieuw Archief voor Wiskunde voor €100 (Nederland), €110 (Europa) of €112,50 (buiten Europa).

Website: www.wiskgenoot.nl

Ledenadministratie

Abonnementenservice NAW
Postbus 2238, 5600 CE Eindhoven
admin@wiskgenoot.nl, tel. 088-2265256

Bestuur (wiskgenoot@wiskgenoot.nl)

Geurt Jongbloed (TUD, voorzitter), Fetsje Bijma (VU, penningmeester), Joke Blom (CWI, secretaris), Erik van den Ban (UU), Theo van den Bogaart (HU), Sonja Cox (UvA), André Ran (VU), Herman te Riele (CWI), Mark Veraar (TUD)

Informatie voor auteurs

Kopij

Het Nieuw Archief voor Wiskunde is een geredigeerd tijdschrift. Kopij dient elektronisch te worden aangeboden aan de hoofdredactie. Uitgebreide informatie en auteursinstructies kunt u vinden op www.nieuwarchief.nl.

Reprints

Auteurs ontvangen een elektronische reprint in pdf-formaat.

Volgende nummers

nummer	verschijningsdatum	deadline kopij
3	07-09-2015	verstreken
4	07-12-2015	01-08-2015
1	07-03-2016	01-11-2015
2	06-06-2016	01-02-2016

Instituutsleden

De publicaties van het Koninklijk Wiskundig Genootschap worden mede mogelijk gemaakt door de bijdragen van de volgende instituten.



Centrum Wiskunde
& Informatica



Rijksuniversiteit Groningen



Universiteit van Amsterdam



Universiteit Leiden



Vrije Universiteit



Universiteit Utrecht



Technische Universiteit
Eindhoven



Eurandom



Technische Universiteit Delft



Universiteit Twente



Radboud Universiteit
Nijmegen



Freudenthal Instituut

Op het omslag

Met de invoering van de rekentoets groeit ook de aandacht voor leerlingen met dyscalculie: ernstige en hardnekkige rekenproblematiek die ondanks deskundige begeleiding blijft bestaan. Lees het achtergrondartikel van Mieke van Groenestijn op pagina 88.

Aan de man brengen

Er zijn van die dingen waarvan je weet dat ze kunnen gebeuren, maar ze overkomen altijd een ander. Onlangs was ik met enkele studenten in een discussie verwickeld toen de telefoon ging. Aan de lijn een theatermaker die mij uitnodigde voor deelname aan een wetenschapspodium met als thema 'Wiskunde en muziek'. Of ik ter introductie ook een mini-college zou willen voorbereiden over mijn eigen werk. Aangezien de voorstelling op 1 april zou plaatsvinden had ik nog even de hoop dat het een goede grap was, maar een kijkje op de website van het theater leerde beter. Dat was even schrikken, want hoe leg je in tien minuten de functionaalanalytische aspecten van stochastische partiële differentiaalvergelijkingen uit aan een publiek dat komt voor een leuk avondje uit? Interessant waren de reacties van collega's en vrienden: de meesten leek dit een leuke uitdaging, maar een enkeling zou zichzelf liever niet voor schut zetten.

Het onder de aandacht brengen van de wiskunde bij een breder publiek loopt als een rode draad door het nummer dat voor u ligt. Deze taak is niet altijd gemakkelijk: wiskundigen hebben geen tot de verbeelding sprekende missies en experimenten zoals de Hubble-telescoop en de Large Hadron Collider, we onderzoeken geen zwarte gaten, donkere materie en andere mysterieuze zaken die tot de verbeelding spreken, zelfs als je ze niet precies begrijpt. Niet dat wiskunde niet haar eigen intrigerende mysteries heeft, maar die zijn ongrijpbaarder en abstracter. Ook het maatschappelijk belang van de wiskunde, hoe enorm ook, is lastiger te verwoorden dan dat van belendende disciplines, omdat het veelal onzichtbaar is: het zit, zoals vaak gezegd wordt, 'onder de motorkap'. En misschien is het ook wel zo dat wiskundigen over het algemeen niet zo graag naar buiten treden.

Toch is de wiskunde al geruime tijd bezig met een brede imago-inhaalslag. Wiskundigen zijn met enige regelmaat te gast in talkshows en televisieprogramma's en overal vinden outreach-activiteiten plaats die de wiskunde onder de aandacht brengen bij een breder publiek. Jantine Bloemhof en Richard Boucherie bespreken in dit nummer een aantal voorbeelden, zoals de

NEMO-tentoonstelling 'Wereld van vormen' en het huidige palet wiskunde-activiteiten voor basisscholieren.

In de boekwinkel zien we aanstekelijke popularisering van de wiskunde, waaronder ook mooie parels van eigen bodem. Nieuw is het genre 'fascinatie-wiskunde': bekende wiskundigen die op autobiografische wijze hun passie voor het vak uitdragen, zoals Cédric Villani (*Birth of a Theorem*), Edward Frenkel (*Love and Math*) en Michael Harris (*Mathematics without Apologies*). Stuk voor stuk prachtige reclame voor een mooi vak.

Tegelijk is er veel aandacht voor ambassadeurswerk richting politiek Den Haag. De Nederlandse wiskunde heeft haar plannen en visie recentelijk krachtig verwoord in een aantal documenten. In het vervolg hierop wordt nu op verzoek van OCW aan een implementatieplan gewerkt, in de wandelgangen aangeduid als *Deltaplan Wiskunde.NL*. De eerste contouren van dit plan werden in april gepresenteerd op het Nederlands Mathematisch Congres. Te zijner tijd zullen we hierop uitvoeriger terugkomen. Een verslag van het NMC treft u aan in dit nummer, vergezeld van een interview met een van de hoofdsprekers, Fieldsmedaillist Martin Hairer.

Nu we het toch over wetenschap en politiek hebben, is de verleiding groot om eens te kijken wat de nationale ideeënbus voor de wetenschap voor ons heeft opgeleverd. Kijkt u even mee op <https://vragen.wetenschapsagenda.nl/kernwoord/wiskunde> en aanschouw de grenzen van de maakbare wetenschap. Kantel niet (van uw stoel)! Beatrijs Ritsema verzucht in *Vrij Nederland* terecht: "Dit is een GiGa-project (Garbage in, Garbage out)." Wetenschap breng je aan de man, maar de omkering geldt nu eenmaal niet.

En zie, de foyer was uitverkocht, allemaal mensen voor wie 'Wiskunde en muziek' inderdaad een leuk avondje uit oplevert. Voor het geval het u ook eens overkomt: zoals u weet is er sinds kort een leuk zelfhulpboekje voor noodgevalletjes Exact verhaal.

Jan van Neerven, hoofdredacteur

Delft Institute of Applied Mathematics, TU Delft

Servicepagina

| Service page

Koninklijk Wiskundig Genootschap

□ Secretariaat

Joke Blom, CWI
Postbus 94079, 1090 GB Amsterdam
wiskgenoot@wiskgenoot.nl
www.wiskgenoot.nl

□ Bestuurswisselingen

Sinds de ALV van 14 april is het bestuur gewijzigd. Jenneke Krüger, Arjen Sevenster en Onno van Gaans zijn uit het bestuur getreden. Zij zijn opgevolgd door Theo van den Boogaart, Erik van den Ban (ondervoorzitter) en Sonja Cox. Voor de huidige bestuurssamenstelling zie www.wiskgenoot.nl/watis/bestuur.html. Voor de ALV-stukken zie www.wiskgenoot.nl/watbiedt/Jaarverslagen/ALV2015/ (KWG-leden, K2003WG1778).

□ KWG Prijs voor promovendi

Tijdens het NMC 2015 hebben zes kandidaten een voordracht gegeven in de strijd om de eerste KWG Prijs, de opvolger van de Philips Wiskundeprijs. De prijs, een geldbedrag en een trofee, is toegekend aan Djordjo Milovic, promovendus aan de Universiteit Leiden, met de voordracht 'On the 2-part of class groups of $\mathbb{Z}[\sqrt{-2p}]$ for $p \equiv 3 \pmod{4}$ '.

□ NMC 2016

Het 52ste Nederlands Mathematisch Congres wordt onder auspiciën van het KWG en de Belgische en Luxemburgse zusterverenigingen op 22 en 23 maart 2016 op het Science Park in Amsterdam gehouden. De lokale organisatie is in handen van de VU, UvA en CWI.

Platform Wiskunde Nederland

□ Bureau PWN

Science Park 123, L013, 1098 XG Amsterdam
bureau@platformwiskunde.nl
pr@platformwiskunde.nl (publiciteit)
Tel: 020-5924006/06-51892525
www.platformwiskunde.nl

□ PWN Nieuwsbrief

PWN publiceert eens in de drie maanden een PWN Nieuwsbrief, die op de website te vinden is. Actuele PWN-informatie wordt verder zowel via de website als via Twitter gegeven.

European Mathematical Society

□ EMS website

www.euro-math-soc.eu

□ 25 jaar EMS

Ter gelegenheid van het 25-jarig bestaan van de EMS is er op 22 oktober 2015 een ééndaags symposium 'Challenges for the next 25 years' op Institut Henri Poincaré in Parijs. Sprekers zijn Hendrik Lenstra (UL), Laure Saint-Raymond (ENS Paris), László Lovász (Boedapest) en Andrew Stuart (Warwick).

□ Oproep voor nominaties EMS-prijzen

Elke vier jaar worden er tijdens het European Congress of Mathematics in totaal tien prijzen uitgereikt. Eenieder die op 30 juni 2016 nog geen 35 jaar is en de prijs niet eerder ontvangen heeft, kan genomineerd worden voor een EMS-prijs op het 7de ECM in Berlijn. De sluitingsdatum voor nominaties is 1 november 2015. www.euro-math-soc.eu/ems-prizes

□ EMS Newsletter

De elektronische versie van de meest recente uitgave van de EMS Newsletter is beschikbaar via www.ems-ph.org/publications.php.

International Mathematical Union

□ IMU website

www.mathunion.org

□ IMU Media Platform

IMU heeft een Media Platform gelanceerd. Leiden kunnen gratis foto's uploaden en downloaden. media-platform.mathunion.org

□ IMU Newsletter

De twee-maandelijkse IMU Newsletter is beschikbaar via www.mathunion.org/imu-net.

Recente publicaties van het KWG

□ **Indagationes Mathematicae** (www.elsevier.com/locate/indag, gratis toegang via 'View Articles')
Special issue 'Poisson 2012: Poisson Geometry in Mathematics and Physics', Marius Crainic, Ori Yudilevich (eds.), Volume 25, issue 5, 2014.

□ **Epsilon Uitgaven** (www.epsilon-uitgaven.nl)

78. *Een passie voor symmetrie*, Jan van de Craats, €20, 2014.

□ **Zebra-reeks** (Epsilon Uitgaven)

45. *Inversie*, Jacques Jansen, €10, 2015.

44. *Labyrinten en doolhoven*, Wim Kleijne, €10, 2015.

43. *De Strepen van de Zebra*, Geertje Hek, €10, 2015.

42. *Sangaku's*, Hans van Lint en Jeanne Breeman, €10, 2015.

Manuscripten voor Epsilon Uitgaven kunt u mailen naar redactie@epsilon-uitgaven.nl.

Agenda

| Upcoming Events

juni 2015

11 juni 2015

□ Opening Symposium DSSC

Symposium van het Centrum voor Data Science and Systems Complexity (DSSC), een onderzoekscluster van meer dan zestig onderzoekers in verschillende disciplines.

plaats Rijksuniversiteit Groningen

info rug.nl/research/fmns/themes/dssc

11–12 juni 2015

□ Algebraic Geometry Seminar: B-NL meets No-GAGS

Dit jaar worden het Belgian-Dutch Algebraic Geometry Seminar en het Northern German Algebraic Geometry Seminar gecombineerd.

plaats Radboud Universiteit Nijmegen

info ru.nl/math/research/conferences

12 juni 2015

□ Bessensap 2015

Jaarlijks evenement dat journalisten, voorlichters en onderzoekers bij elkaar brengt onder het motto 'Wetenschap ontmoet pers'.

plaats New Babylon, Den Haag

info www.nwo.nl/bessensap

15–19 juni 2015

□ Dynamics and Geometry

Workshop mede georganiseerd door Heinz Hanßmann (UU) en Igor Hoveijn, Gert Vegter en Holger Waalkens (RUG).

plaats Lorentz Center@Oort, Leiden

info lorentzcenter.nl

17–18 juni 2015

□ Workshop on Algebraic Combinatorics

Workshop over algebraïsche combinatoriek met Aart Blokhuis (TU/e), Sebastian Cioaba (Delaware), Miquel Àngel Fiol (Catalunya), Monique Laurent (CWI/TU) en Oriol Serra (Catalunya).

plaats Tilburg University

info websites.math.leidenuniv.nl/diamant

22–26 juni 2015

□ Clusters, Games and Axioms

Workshop over de clusteranalyse door middel van machine learning, speltheorie en socialekeuzetheorie.

plaats Lorentz Center@Oort, Leiden

info lorentzcenter.nl

24–27 juni 2015

□ ICTMT 12

12de internationale conferentie over het gebruik van technologie in wiskundeonderwijs.

plaats Faro, Portugal

info ictmt12

26 juni 2015

□ Vernieuwingsimpuls Infomatiebijeenkomst

Infomatiebijeenkomst voor onderzoekers die een Veni, Vidi of Vici willen aanvragen.

plaats NWO Java-gebouw, Den Haag

info nwo.nl

juli 2015

4–16 juli 2015

□ Internationale Wiskunde Olympiade

56ste editie van de Internationale Wiskunde Olympiade, dit jaar in Thailand.

plaats Chiang Mai, Thailand

info imo2015.org

6–10 juli 2015

□ European Meeting of Statisticians

Tweejaarlijkse Europese conferentie in statistiek en kansrekening, gesponsord door de European Regional Committee van de Bernoulli Society.

plaats Vrije Universiteit, Amsterdam

info ems2015.nl

augustus 2015

17–28 augustus 2015

□ Summer School on Mathematics Education

Vakantiecursus verzorgd door het Freudenthal Instituut in samenwerking met het onderzoeksprogramma Educational and Learning Sciences.

plaats Universiteit Utrecht

info utrechtsummerschool.nl

21–22 en 28–29 augustus 2015

☐ **Vakantiecursus 2015: Dit is triviaal**

Vakantiecursus georganiseerd door PWN, voor leraren in de exacte vakken aan havo, vwo en hbo, leerlingen en andere belangstellenden. Dit jaar is het thema ‘Dit is triviaal’.

plaats CWI Amsterdam en TU Eindhoven

info platformwiskunde.nl

31 augustus – 4 september 2015

☐ **Logic and Random Graphs**

Workshop georganiseerd door Ross Kang (RU), Tobias Müller (UU), Jaap van Oosten (UU), Oleg Pikhurko (Warwick) Anusch Taraz (TU Hamburg-Harburg).

plaats Lorentz Center@Oort, Leiden

info lorentzcenter.nl

31 augustus – 4 september 2015

☐ **17th EWM General Meeting**

Tweejaarlijkse bijeenkomst van de European Women in Mathematics.

plaats Cortona, Italië

info europeanwomeninmaths.org

september 2015

14–18 september 2015

☐ **Verification of Concurrent and Distributed Software**

Workshop georganiseerd door D. Gurov (Stockholm), M. Huisman (UT), J.J. Hunt (Karlsruhe) en A. Poetzsch-Heffter (Kaiserslautern).

plaats Lorentz Center@Oort, Leiden

info lorentzcenter.nl

18 september 2015

☐ **Finale Nederlandse Wiskunde Olympiade**

37 onderbouwleerlingen, 39 vierdeklassers en 47 vijfdeklassers zijn door naar de finale van de Nederlandse Wiskunde Olympiade 2015.

plaats TU Eindhoven

info wiskundeolympiade.nl

20 september 2015

☐ **Hoe snel zijn computers in de toekomst?**

Wakker Worden Kinderlezing waarin informaticus Harry Buhman vertelt over nieuwe technologieën en kwantumcomputers.

plaats NEMO, Amsterdam

info e-nemo.nl

25 september 2015

☐ **Wiskundetoernooi 2015**

Leerlingen van scholen uit het hele land buigen zich in teams van 4 of 5 over verschillende wiskundeopgaven. Het thema is dit jaar ‘Winkunde: geluk of strategie?’.

plaats Radboud Universiteit Nijmegen

info ru.nl/wiskundetoernooi

25 september 2015

☐ **Discovery Festival 2015**

Een avondje uit met stof tot nadenken: wetenschappelijke experimenten, muziek, kunst en inspirerende nieuwe ideeën.

plaats Amsterdam

info discoveryfestival.nl

oktober 2015

3 oktober 2015

☐ **Junior Wiskunde Olympiade**

Wiskundewedstrijd voor scholieren uit de onderbouw van havo en vwo.

plaats Vrije Universiteit, Amsterdam

info few.vu.nl

5 oktober 2015

☐ **Dag van de Leraar**

Internationale dag van de leraar, waarop de Leraren van het Jaar worden gekozen in de categorieën basisonderwijs, speciaal onderwijs, voortgezet onderwijs en middelbaar beroepsonderwijs.

plaats overal

info dagvandeleraar.nl

7–9 oktober 2015

☐ **Veertigste Woudschoten Conferentie**

Jaarlijks conferentie georganiseerd door de Nederlands/Vlaamse Werkgemeenschap Scientific Computing (WSC).

info wsc.project.cwi.nl/conferentieN.php

22 oktober 2015

☐ **Challenges for the next 25 years**

Symposium ter gelegenheid van het 25-jarig bestaan van de European Mathematical Society.

plaats Institut Henri Poincaré, Parijs

info euro-math-soc.eu

28–30 oktober 2015

☐ **Workshop on Automatic Sequences, Number Theory, and Aperiodic Order**

Workshop met ander anderen Boris Adamczewski (Marseille), Michael Baake (Bielefeld), Henk Bruin (Wenen) en Hendrik Lenstra (UL).

plaats TU Delft

info ewi.tudelft.nl

november 2015

8 november 2015

☐ **Waarom zijn er geen vierkante slakken?**

Wakker Worden Kinderlezing waarin wiskundige Han Peters vertelt over wiskundige patronen en vormen in de natuur.

plaats NEMO, Amsterdam

info e-nemo.nl

9–13 november 2015

☐ **Moduli Spaces and Arithmetic Geometry**

Workshop georganiseerd door Chai Ching-Li (Pennsylvania), Ben Moonen (RU) en Jaap Top (RUG).

plaats Lorentz Center@Oort, Leiden

info lorentzcenter.nl

13 november 2015

☐ **Wiskunde B-dag**

Leerlingen van 5 havo en 5/6 vwo met wiskunde B in hun profiel werken in teams van 3 of 4 aan een open wiskundig probleem.

plaats deelnemende scholen

info uu.nl/onderwijs/wiskunde-b-dag

december 2015

7–11 december 2015

☐ **Quantum Random Walks and Quantum Algorithms**

Workshop georganiseerd door Harry Buhman (CWI) en Frank den Hollander (LU).

plaats Lorentz Center@Snellius, Leiden

info lorentzcenter.nl

Nieuws

| News

Deze rubriek is een kroniek van wiskundige activiteiten in Nederland. Toekomstige activiteiten worden aangekondigd en van voorbije activiteiten wordt verslag gedaan. Wilt u uw aankondiging of verslag in deze rubriek geplaatst zien? Stuur ons dan uw bijdrage van ± 350 woorden, zo mogelijk met illustratie. De redactie behoudt zich het recht voor berichten te weigeren of in te korten.
nieuws@nieuwarchief.nl

Abelprijs voor John Nash en Louis Nirenberg / Nash overleden

De Noorse Academie van Wetenschappen heeft de Abelprijs voor 2015 toegekend aan John F. Nash, Jr. (Princeton University) en Louis Nirenberg (Courant Institute, New York University) "for striking and seminal contributions to the theory of nonlinear partial differential equations and its applications to geometric analysis", aldus het Abel-comité.

Hoewel Nash en Nirenberg nooit samen publiceerden, hebben zij elkaar in de jaren vijftig wel sterk beïnvloed. Hun bijdragen op het gebied van non-lineaire partiële differentiaalvergelijkingen zijn van grote invloed geweest op onderzoek naar abstracte geometrische vormen. Nash (1928–2015) is vooral bekend van zijn werk in de speltheorie, waarvoor hij in 1994 de Nobelprijs voor de Economie won. Nirenberg (1925) heeft een lange wiskundecarrière achter de rug, waarvoor hij in 2010 als eerste de Chernmedaille ontving.

De feestelijke uitreiking van de prijs op dinsdag 19 mei in Oslo kreeg een tragisch vervolg: op zaterdag 23 mei kwamen John Nash en zijn vrouw Alicia om bij een verkeersongeluk in New Jersey toen zij op hun terugreis met een taxi vanaf het vliegveld op weg naar huis waren.

abelprize.no en nj.com



Foto: abelprize.no, NTB/Scampix

John Nash bij de uitreiking van de Abelprijs op 19 mei 2015 in Oslo

New Horizons in Mathematics Prize

Op de website van de Breakthrough Prize is er naast de reeds bestaande *Breakthrough Prize in Mathematics* een nieuwe prijs in de wiskunde aangekondigd: de *New Horizons in Mathematics Prize*. De prijs bestaat uit drie onderscheidingen van elk 100.000 dollar voor jonge onderzoekers die al een belangrijke bijdrage hebben geleverd aan hun vakgebied.

breakthroughprize.org

Wiskunde B-dag niet uitsluitend voor wiskundebollebozen

De tien beste teams van Nederland waren op vrijdag 20 maart naar de Wiskunde B-dag op het Freudenthal Instituut gekomen om te horen op welke plaats ze waren geëindigd met hun werkstuk over het spel *Lights Out*. Het team van het Utrechts Stedelijk Gymnasium ging er met de eerste prijs vandoor. Anders dan bij olympiades is de Wiskunde B-dag niet exclusief voor getalenteerde en speciaal geselecteerde leerlingen, maar juist voor alle leerlingen van 5 havo en 5/6 vwo met wiskunde B in hun profiel, die eens op een andere manier met wiskunde bezig willen zijn.

Susanne Tak

Tweedeklasser wint zilver bij Benelux Wiskunde Olympiade

Bij de Benelux Wiskunde Olympiade, die 8–10 mei plaatsvond in Mersch, Luxemburg, heeft de dertienjarige Levi van de Pol uit Veenendaal een zilveren medaille gewonnen. De tweedeklasser versloeg al zijn landgenoten en maakt hiermee een grote kans deze zomer uit te mogen komen voor Nederland bij de Internationale Wiskunde Olympiade in Thailand, als jongste Nederlandse deelnemer ooit. Naast de zilveren medaille van Van de Pol nam het Nederlandse team bij de prijsuitreiking op 10 mei nog twee zilveren en vier bronzen medailles in ontvangst.

De Benelux Wiskunde Olympiade is een jaarlijkse wiskundewedstrijd voor middelbare scholieren uit België, Luxemburg en Nederland. Dit jaar nam ook een Frans team buiten mededinging deel. De wedstrijd bestaat uit vier uitdagende wiskundeopgaven waar de deelnemers vier en half uur de tijd voor hebben. De beste helft van de deelnemers krijgt een medaille (brons, zilver of goud).

Elk team bestaat uit tien leerlingen. Het Nederlandse team is via vier voorrondes geselecteerd uit ruim 9000 deelnemers, waarvan de meeste in 5 en 6 vwo zitten. Dat tweedeklasser Levi van de Pol zich niet alleen heeft geplaatst voor deze wedstrijd, maar dit weekend ook al zijn teamgenoten heeft verslagen, belooft veel voor komende internationale wedstrijden. Zijn talent werd onlangs ook opgemerkt bij *De Wereld Draait Door*, waar hij op 14 april aan tafel zat om een wiskundig raadsel uit te leggen.

wiskundeolympiade.nl



Levi van de Pol

HBO Bedrijfswiskunde wordt Toegepaste wiskunde

Vanaf 1 september 2015 verandert de naam van de HBO-opleiding 'Bedrijfswiskunde' in 'Toegepaste wiskunde'. De verandering geldt voor alle vijf betrokken hogescholen: Hogeschool van Amsterdam, Hogeschool InHolland (Diemen), NHL Hogeschool (Leeuwarden), De Haagse Hogeschool (Rijswijk) en Fontys Hogescholen (Tilburg). De inhoud van

de opleidingen verandert met deze naamswijziging niet meer of minder dan in andere jaren.

Klaas-Jan Wieringa

Jaarlijkse bijeenkomst EWM-NL

Op woensdag 4 maart vond de jaarlijkse bijeenkomst van *European Women in Mathematics – The Netherlands* (EWM-NL) plaats in het Academieggebouw in Utrecht. De bijeenkomst werd gesponsord door Platform Wiskunde Nederland.

De middag begon met vier uitstekende lezingen door vrouwelijke onderzoekers, die elk een van de vier wiskundecusters in Nederland vertegenwoordigden: Charlene Kalle (STAR, UL) legde uit hoe random kettingbreuken ontstaan op het snijvlak van ergodentheorie en getaltheorie; Miranda Cheng (GQT, UvA) introduceerde de opmerkelijke verbinding tussen monstergroepen en modulaire objecten; Martina Chirilus-Bruckner (NDNS+, UL) wierp enig licht op de wiskunde (partiële differentiaalvergelijkingen) achter optische vezels. Tot slot vertelde Karen Aardal (Diamant, TUD) ons hoe wiskundige algoritmen levens kunnen redden door het berekenen van de optimale positie en bewegingen van ambulances in Nederland.

Daarna reageerde Petra de Bont (NWO) op de deplorabele situatie van vrouwen in de wiskunde in Europa en in Nederland in het bijzonder. Ze nodigde vervolgens het publiek uit om deel te nemen aan een discussie. Dit leverde verschillende nuttige aanbevelingen op aan NWO en de wiskundeafdelingen, die kunnen helpen om deze situatie te verbeteren.

uu.nl/ewmnetherlands



Charlene Kalle

Foto: Universiteit Leiden

Bert Zwart wint Van Dantzigprijs

Onderzoeker Bert Zwart van het CWI heeft de Van Dantzigprijs gewonnen. Deze prijs geldt als de hoogste Nederlandse onderscheiding in de statistiek en besliskunde, en wordt eens in de vijf jaar uitgereikt. Zwart nam de prijs op 26 maart in ontvangst tijdens de Dag voor Statistiek en Besliskunde in de Jaarbeurs Utrecht.

Uit de zes genomineerden wees de jury unaniem Bert Zwart als winnaar aan. Volgens de jury heeft Zwart zich ontwikkeld tot een toonaangevend onderzoeker in het brede gebied van de mathematische besliskunde. "Het gaat daarbij niet om citaties of redactielidmaatschappen, maar om invloed, inspiratie en innovatie. Bert Zwart is een levend bewijs van de oude stelling dat doorbraken plaatsvinden op grensvlakken."

Bert Zwart is groepsleider en senior onderzoeker bij de Stochastics-groep op het CWI en deeltijdhoogleeraar aan de Technische Universiteit Eindhoven. Hij werkt op het grensvlak van verschillende wiskundige disciplines aan onder andere dynamic pricing, modellen voor opstop-

pingen op internet en op de weg, en betrouwbaarheid van energienetwerken.

De Van Dantzigprijs wordt elke vijf jaar uitgereikt door de Vereniging voor Statistiek en Operationele Research (VvS+OR) aan een wetenschapper niet ouder dan 40 jaar, die een belangrijke bijdrage heeft geleverd aan ontwikkelingen in de statistiek en/of besliskunde. *cwi.nl*

Math Master leert kinderen fruit hakken en rekenen

Fruit Ninja is een spelletje waarmee je stukken fruit in stukken moet hakken. Fabricant Halfbrick heeft nu een nieuwe app uitgebracht: 'Fruit Ninja Academy: Math Master'. Deze app is bedoeld om kinderen tussen 5 en 7 jaar beter te leren rekenen. De speler hakt fruit in verschillende omgevingen zoals jungles, tempels en eeuwenoude ruïnes en leert ondertussen optellen, aftrekken en vermenigvuldigen.

Kinderen gaan Katsuro en zijn vrienden helpen om de zoekgeraakte tabletten van Fruitasia te vinden. Tegelijk moeten ze Truffles het Varken proberen te bevrijden, terwijl ze zich een weg slaan door allerlei wiskundige opgaven. Vermenigvuldigen, goals vergelijken, vormen herkennen en rekenen met breuken: het zit er allemaal in. Kinderen verdienen een cijfer, zodat je als ouder ook de voortgang kunt bijhouden. De verhaallijn, awards en stickers moeten het leuk maken om de sommetjes uit te voeren. De app is kindvriendelijk, dus je zult geen in-app aankopen tegenkomen. De app zelf kost €4,99. *iculture.nl*



Foto: Domitrii, Flickr.com

Scholieres zestiende op Europese Wiskunde Olympiade

Op de vierde European Girls' Mathematical Olympiad heeft het Nederlandse team een gedeelde zestiende plaats behaald. Twee Nederlandse wiskundetalenten behaalden een eervolle vermelding. Eva van Ammers (17) uit Amsterdam en Elise Sängers (17) uit Baarn wisten beiden een van de zes moeilijke wiskundeopgaven op te lossen en lieten daarmee een grote groep deelnemers achter zich.

De European Girls' Mathematical Olympiad vond van 14–20 april plaats in Minsk, Wit-Rusland. Tijdens deze wedstrijd, die jaarlijks wordt georganiseerd om meisjes te stimuleren hun wiskundetalent te benutten, kregen de leerlingen op elk van de twee wedstrijddagen drie zeer pittige wiskundeopgaven om op te lossen. Hiervoor kregen ze beide dagen vier en een half uur de tijd. De twee Nederlandse topdames haalden 10 punten, waarmee zij maar net buiten de medailles vielen; voor een bronzen medaille waren 11 punten nodig. *wiskundeolympiade.nl*

Aantekenboek Turing brengt 1 miljoen dollar op

Een aantekenboek van de Britse wiskundige en computerpionier Alan Turing is op 13 april geveild bij het veilinghuis Bonhams in New York. Het document heeft meer dan 1 miljoen dollar opgebracht.

Turing maakte de aantekeningen vanaf 1942 bij zijn pogingen om geheime berichten van de Duitse krijgsmacht te decoderen. Dat lukte uiteindelijk en het decoderingsapparaat dat onder Turing's leiding

werd ontworpen heeft de geallieerden geholpen bij het verslaan van nazi-Duitsland.

Het 56 pagina's tellend schrift was ter veiling aangeboden door de erfgenamen van een vriend van Turing, Robin Gandy. Het veilinghuis heeft niet bekend gemaakt wie het aantekenboek heeft gekocht. De koper wil anoniem blijven. Voor zover bekend gaat het om het enige stuk handschrift dat van de codebreker uit de Tweede Wereldoorlog is overgebleven. *joodseomroep.nl*

Leerlingen uit Boxmeer winnen Wiskunde A-lympiade

Vier leerlingen van Elzendaalcollege Boxmeer hebben de finale van de Wiskunde A-lympiade gewonnen. Er deden 107 scholen uit diverse landen met ruim 1.700 teams mee aan deze jaarlijkse Europese wiskundewedstrijd. Het winnende team van het Elzendaalcollege bestaat uit Maud Korsten, Nadia Hermesen, Robin van Elst en Floor Vrijdag. De wedstrijd is bedoeld voor leerlingen uit 5 vwo met Wiskunde A in hun profiel, die in teams van vier leerlingen een uitdagend probleem aanpakken.

Tijdens de finale moest het team van het Elzendaalcollege het opnemen tegen de beste wiskunde A-leerlingen van Denemarken, Duitsland, Iran, Sint Maarten, Aruba en Nederland. De opdracht was om (tijdens een tweedaags verblijf in een bungalow op de Veluwe) een wiskundig systeem te ontwikkelen om een loting voor scholen zo eerlijk mogelijk te laten voorlopen. Een goede onderlinge taakverdeling en een effectieve strategie waren hierbij van groot belang. De leerlingen moesten daarbij een complete weg afleggen van probleemstelling via strategiebepaling, oplossing en argumentatie naar de presentatie van de gevonden oplossing. Het eindresultaat is een werkstuk waarin al deze aspecten terug te vinden zijn. *maasdriehoek.kliknieuws.nl*

Onvoldoende voor 'rekentoets' kost man huwelijk

Een Indiase bruid heeft haar bruidegom voor het altaar laten staan omdat hij een simpele rekensom niet kon oplossen. De bruid vroeg aan de bruidegom hoeveel 15 plus 6 was en hij antwoordde met 17. De bruid besloot daarop om weg te lopen.

Het incident vond plaats op 11 maart in Rasoolabad, India. De familie van de bruidegom probeerde haar nog om te praten, maar ze bleef bij haar beslissing. Ze zei dat haar verloofde haar misleid had over zijn opleiding. "De familie van de bruidegom heeft ons niks verteld over zijn slechte opleiding", aldus de vader van de bruid. "Zelfs een basisschoolleerling kan deze rekensom oplossen." De politie zorgde ervoor dat de cadeaus werden verdeeld over de families. *metronieuws.nl*



Foto: Tom Roelvelde, Flickr.com

Oproep voor nominaties voor de N.G. de Bruijnprijs

Met ingang van 2016 zal de N.G. de Bruijnprijs tweejaarlijks tijdens het Nederlands Mathematisch Congres worden uitgereikt. De prijs in 2016 wordt uitgereikt voor het beste wiskundig wetenschappelijke werk dat in gerefereerde tijdschriften verschenen is in de jaren 2011 tot en met 2014.

De prijs wordt beschikbaar gesteld door Elsevier vanwege de samenwerking met het KWG bij het publiceren van het tijdschrift *Indagationes Mathematicae*.

In aanmerking voor de prijs komen kandidaten die de Nederlandse nationaliteit hebben, in Nederland wonen of verbonden zijn aan een Nederlandse instelling. De laureaat ontvangt een erepenning, een oorkonde en een geldbedrag van 4000 euro. De laureaat houdt een plenaire voordracht op het NMC. Reis- en verblijfskosten worden vergoed. Voor het NAW wordt een interview gehouden met de laureaat of de laureaat biedt een breed toegankelijk artikel aan bij het NAW.

Kandidaten worden voorgedragen middels minimaal één aanbevelingsbrief die uiterlijk 1 oktober 2015 in het bezit van de jury moet zijn. Aanbevelingsbrieven dienen gericht te worden aan de voorzitter van de jury, dat is:

Prof.dr. H.W. Broer
Johann Bernoulli Instituut
Postbus 407
9700 AK Groningen
E-mail: h.w.broer@rug.nl

Iedereen wordt uitgenodigd om kandidaten voor te stellen.

Jasbir Chahal

Department of Mathematics
Brigham Young University, Provo, Utah
jasbir@mathematics.byu.edu

Jaap Top

Johann Bernoulli Instituut
Universiteit Groningen
j.top@rug.nl

Geschiedenis

F. van der Blij en de Kletter-driehoeken

Door een lezing van Frederik van der Blij op de jaarlijkse wiskundelerarendag in Groningen in 2003, raakten Jasbir Chahal en Jaap Top geïnteresseerd in de zogenaamde Kletter-driehoeken. In dit artikel gaan zij nader in op deze bijzondere driehoeken.

Met deze tekst hopen we u wat te leren over een merkwaardig soort driehoeken, namelijk waarbij een deellijn door een van de hoekpunten, de zwaartelijn door een tweede hoekpunt, en ten slotte de hoogtelijn uit het resterende hoekpunt, door één punt gaan. Zulke driehoeken, en met name voorbeelden waarbij de verhoudingen tussen de lengtes van de drie zijden rationaal zijn, blijken een interessante en volgens ons zeker ook amusante historie te hebben.

F. van der Blij, geboren in 1923, was van 1954 tot zijn emeritaat in 1988 als hoogleraar verbonden aan het Mathematisch Instituut van de (Rijks)universiteit Utrecht. Daarvoor was hij in 1947 in Leiden bij H.D. Kloosterman (1900–1968) gepromoveerd. Tien jaar geleden verscheen in het *Nieuw Archief voor Wiskunde* een interview [10]. Iets eerder in 2000 toonde het blad een prachtige foto van een imposante rij heren [15] waaronder Van der Blij: allemaal leerlingen van Kloosterman. De collectie ‘hooglerarenportretten’ van het Universiteitsmuseum Utrecht bevat een foto [20] van een jeugdige Van der Blij.

Op 16 december 2003 hield Van der Blij de slotlezing van de jaarlijkse wiskundelerarendag te Groningen, waarin de bovengenoemde driehoeken figureerden. Een summier verslag

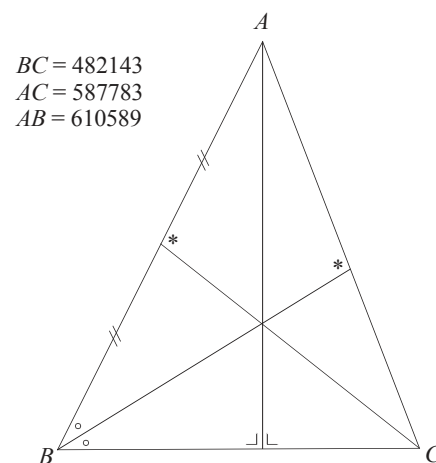
[3] hierover publiceerde hij in de *Nieuwe Wiskrant*. Vervolgens werkte hij het onderwerp van de merkwaardige driehoeken uit tot een lezing die hij gaf tijdens de Nederlandse Wiskunde Dagen (NWD) in Noordwijkerhout op vrijdag 4 februari 2005. Tussen beide voordrachten, en ook nog even erna, was er met een van ons uitgebreid contact over het onderwerp, en er waren plannen voor een gezamenlijk te schrijven artikelje.

Het is er niet van gekomen. Jaren na onze correspondentie ontdekten we dat het onderwerp veel ouder is dan we wisten. De oudere resultaten erover zijn evenwel minder volledig dan de ‘onze’. Bovendien was het intussen gelukt volledig elementaire argumenten voor alle gebruikte details te vinden, en dat leidde tot [2]. Een vervolg [5] hierop was aanleiding het hele verhaal op het Utrechtse stafcolloquium te vertellen, zie [17]. Tegelijk is gepoogd het aanvankelijke doel te realiseren: een tekst voor het NAW. Een eerste versie hiervan is samen met de pdf van de colloquiumvoordracht aan Van der Blij en aan zijn vroegere buurman Th.J. Kletter, die zoals we zullen zien een hoofdrol speelt in het onderwerp, toegestuurd. Daarbij zat onze uitdrukkelijke wens, de tekst voor NAW als gezamenlijk artikel aan te bieden. Helaas wilden bei-

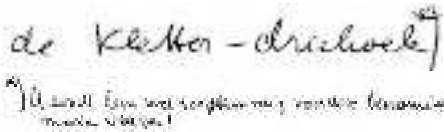
de heren niet ingaan op deze uitnodiging. We willen hen heel hartelijk danken voor de plezierige gesprekken en samenwerking!

Kletter-driehoeken

Definitie. Driehoek ABC heet een *Kletter-driehoek* als (op een permutatie van de hoekpunten na) de hoogtelijn uit A , een bisectrice uit B en de zwaartelijn uit C door één punt gaan. Een Kletter-driehoek heet *rationaal* als bovendien de lengtes $a = |BC|$, $b = |AC|$ en $c = |AB|$ rationale getallen zijn.



Figuur 1



Figuur 2

Het programmaboekje van de NWD in 2005 bevat een door Van der Blij aangeleverd voorbeeld, zie Figuur 1. De naamgeving is ontstaan in onze correspondentie. De eerste tekst vanuit Groningen naar Gorssel ging nog over *Van der Blij-driehoeken*, wat tot een verontrust en heel beslist telefoontje leidde dat deze naam de historie van het onderwerp geen recht doet. Zie Van der Blij's notitie in Figuur 2.

Over de 'oorsprong' van dit soort driehoeken meldt Van der Blij in de *Nieuwe Wiskrant* [3]: "In de Gorsselse serviceflat leerde ik de heer Kletter, een oud-wiskundedocent en schoolleider, kennen. Hij vertelde mij van een probleem uit zijn jeugd. Om te controleren of de leerlingen de begrippen hoogtelijn, zwaartelijn en bisectrice kenden, liet hij een driehoek tekenen met uit het hoekpunt A de hoogtelijn, uit het hoekpunt B de bisectrice en uit hoekpunt C de zwaartelijn, maar hij wilde de driehoek zo kiezen dat deze drie lijnen door één punt gaan. Daartoe zocht hij een driehoek met geheeltallige zijden. Hij had er geen kunnen vinden."

Th.J. (Theo) Kletter was van 1966 tot 1982 rector van het Mendelcollege in Haarlem, waar hij voor die tijd al als wiskundeleeraraar werkte. Onder zijn toenmalige leerlingen bevonden zich diverse bekende Nederlanders, zoals politicus Pim Fortuyn (Kletter komt meermalen aan het woord in Ornsteins boek [13]), journalist/presentator Paul Witteman en ook voetballer Ruud Gullit en schaatsster Yvonne van Gennip.

De Kletter-driehoeken vinden overigens hun oorsprong niet in het docentenbestaan van Theo Kletter. In 1937 stelde David L. MacKay (1887–1961), leraar aan de Evan-der Childs High School in New York, in de *American Mathematical Monthly* een vraag [11] over Kletter-driehoeken. Twee jaar later vroeg dezelfde MacKay [12] naar rationale Kletter-driehoeken. Een meer correcte benaming zou dus *MacKay-driehoek* of *MacKay-Kletter-driehoek* zijn. In onze Engelstalige teksten [2, 5] hanteren we de naam *albime*, afgeleid van de Engelse termen (*altitude*, *bisector*, *median*) voor hoogte-, deel- en zwaartelijn. Hier zullen we het in navolging van Van der Blij simpelweg bij Kletter-driehoek houden. In november 2014 werd (eindelijk!) Kletter voor

deze benaming om instemming gevraagd, die hij met plezier verleende.

In 1940 publiceerde de Amerikaan Charles W. Trigg (1898–1989) een 'bewijs' voor de bewering dat de enige rationale Kletter-driehoek de gelijkzijdige is. Trigg begon zijn loopbaan als chemicus waarbij hij zich vooral bezighield met de productie van oploskoffie, daarna ging hij lesgeven en schreef hij onder meer een boek vol elementaire wiskundige problemen. Zijn argument is fout, zoals blijkt uit de voorbeelden van Kletter en Van der Blij. Trigg was zich kennelijk niet bewust van zijn vergissing en mogelijk was hij zelfs trots op zijn argument, want in 1972 publiceerde hij het, in een ander tijdschrift en met een verwijzing naar zijn werk uit 1940, opnieuw. Tegelijk werd een alternatief en eveneens fout 'bewijs' voor dezelfde bewering gepubliceerd, afkomstig van Leon Bankoff (1908–1997), tandarts in Beverly Hills maar ook verzot op met name elementaire meetkunde problemen. Een interview met Bankoff staat in het in 2011 door Princeton University Press uitgebrachte boek *Fascinating Mathematical People* [1]. Een van de foto's bij die tekst is te zien in Figuur 3.

Met twee voorbeelden (MacKay en Kletter) waar een wiskundedocent vragen stelt die dan door anderen worden opgepikt, kan er nog wel een derde bij: John P. Hoyt (1907–2002) vroeg in de *Monthly* van april 1991 het bestaan van oneindig veel paarsgewijs niet gelijkvormige rationale Kletter-driehoeken te weerleggen of te bewijzen. Hij geeft drie niet-gelijkzijdige voorbeelden,



Figuur 3 Charles W. Trigg en Leon Bankoff.

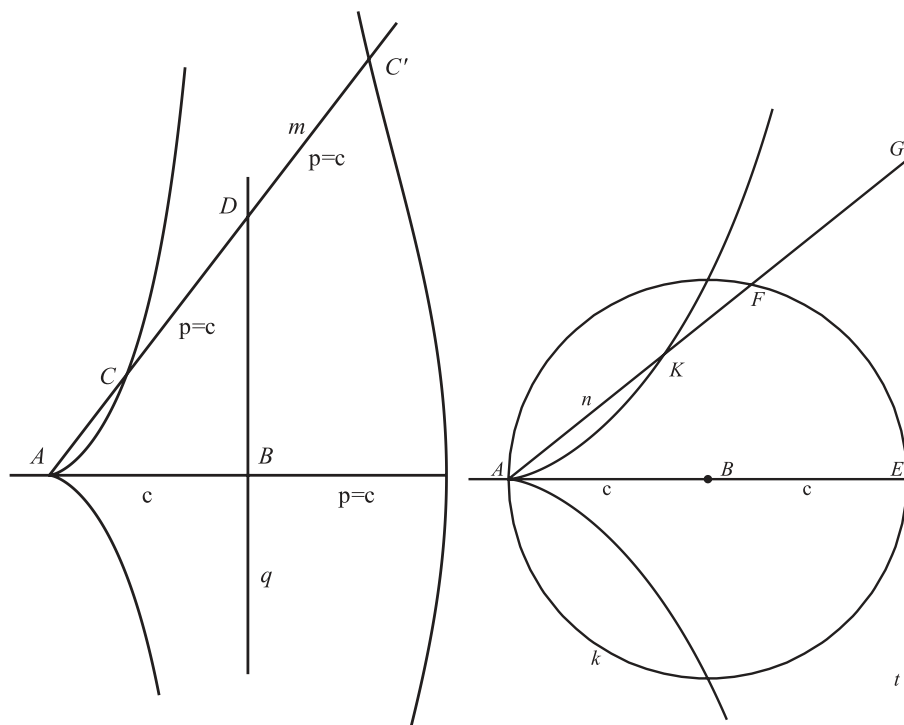
met zijden (12, 13, 15) en (35, 277, 308) en (26598, 26447, 3193). In de hand-out [4] van Van der Blij uit 2005 komen dezelfde voorbeelden opnieuw voor. In 1995 publiceerde Richard Guy een artikel [6] in de *Monthly* waarin hij vrijwel alle ingrediënten geeft die nodig zijn om Hoyts vraag te beantwoorden. Hij verzuimt echter om het antwoord ook expliciet te vermelden. Wel vermeldt hij een antwoord afkomstig van J.G. Mauldon gezien te hebben. Jim Mauldon (1920–2002) was een Engelse wiskundige (en bekend schaker en oorlogsveteraan) die een groot deel van zijn leven werkzaam was aan Amherst College in de Verenigde Staten. In november 2014 vroegen we Richard Guy naar het nooit gepubliceerde argument van Mauldon. Zijn antwoord (hij is op dat moment 98 jaar): "I'm afraid all trace of this is lost!".

Resultaten

De *hand-out* [4] die Van der Blij bij zijn voordracht op de NWD in 2005 maakte bevat geen bewijzen, maar wel enkele uitspraken over Kletter-driehoeken. Sommige daarvan zijn ontdekt door Kletter, die er bovendien fraaie synthetische bewijzen voor vond. Recent stuurde hij ons zijn tekst [9] hierover, die hij in 1957 schreef maar nooit publiceerde. De hier volgende resultaten, inclusief de hier gereproduceerde definities, notaties en bewijzen zijn afkomstig van hem. Zie ook Figuur 4.

De (keerpunts)conchoïde van Nicomedes. De Griekse wiskundige Nicomedes (derde eeuw v. Chr.) ontwierp deze kromme ten einde daarmee problemen als de kubusverdubbeling en de trisectie van een hoek op te lossen. Gegeven zijn een rechte q , een punt $A \notin q$ en een vaste lengte p . Zij B de loodrechte projectie van A op q en laat $|AB| = c$. Trek door A een rechte m en neem $D = q \cap m$. Neem C op lijnstuk DA zodat $|DC| = p$. Neem eveneens C' in het verlengde van lijnstuk AD , zodat $|DC'| = p$. Bij variabele m doorloopt C een kromme die aan dezelfde kant van q ligt als A , en C' een kromme aan de andere kant van q dan A . Deze krommen zijn de linker- en rechtertak van één kromme, die zijn naam *conchoïde* ('schelpvormige') ontleent aan het Griekse woord voor mosselschelp ($\kappaο\chi\chiος$, konchos). Hier beschouwen we alleen het geval $p = c$, de kromme noteren we in dit geval als (AB, q) en A blijkt dan een keerpunt te zijn.

De cissoïde van Diocles. De Griekse wiskundige Diocles (tweede eeuw v. Chr.) benutten zijn kromme voor de kubusverdubbeling. Kies op cirkel k met middelpunt B en straal c



Figuur 4 Links de keerpuntsconchoïde, rechts de cissoïde.

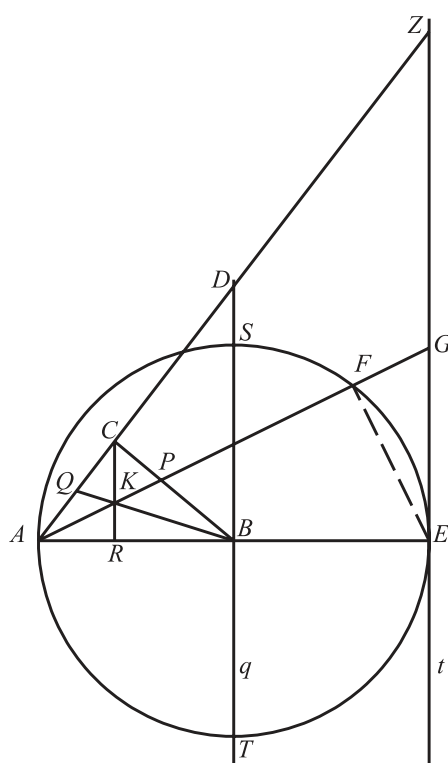
een vast punt A . De lijn door AB snijdt k ook in E en de raaklijn in E aan k noemen we t . Een rechte n door A snijdt k ook in F en snijdt t in G . Neem K op lijnstuk AG zodat $|AK| = |FG|$. Bij variabele n doorloopt K dan de door Diocles beschreven kromme, die we vanaf nu noemen als (AB, t) . De naam cissoïde wordt wel verklaard met de opmerking dat twee van de delen waarin de cirkelschijf door de kromme wordt opgedeeld, doen denken aan blaadjes van een klimplant ($\kappa\iota\omega\sigma\sigma\omicron\varsigma$, klimop).

Er blijkt een relatie te zijn tussen keerpuntsconchoïde en cissoïde, waarbij Kletterdriehoeken een rol spelen. Neem een lijnstuk AE met midden B en laat q en t de loodlijnen op AE door respectievelijk B en E zijn.

Stelling 1 (Th.J. Kletter, 1957). *Als de top C van $\triangle ABC$ de linkertak van de keerpuntsconchoïde (AB, q) doorloopt, dan gaan de binnendeellijn d_a door A , de zwaartelijn z_b door B en de hoogtelijn h_c door C door één punt K , en K doorloopt het binnen de basiscirkel gelegen deel van de cissoïde (AB, t) .*

Stelling 2 (Th.J. Kletter, 1957). *Als de top C van $\triangle ABC$ de rechterside van de keerpuntsconchoïde (AB, q) doorloopt, dan gaan de buitendeellijn d'_a door A , de zwaartelij z_b door B en de hoogtelijn h_c door C door één punt K , en K doorloopt het buiten de basiscirkel gelegen deel van de cissoïde (AB, t) .*

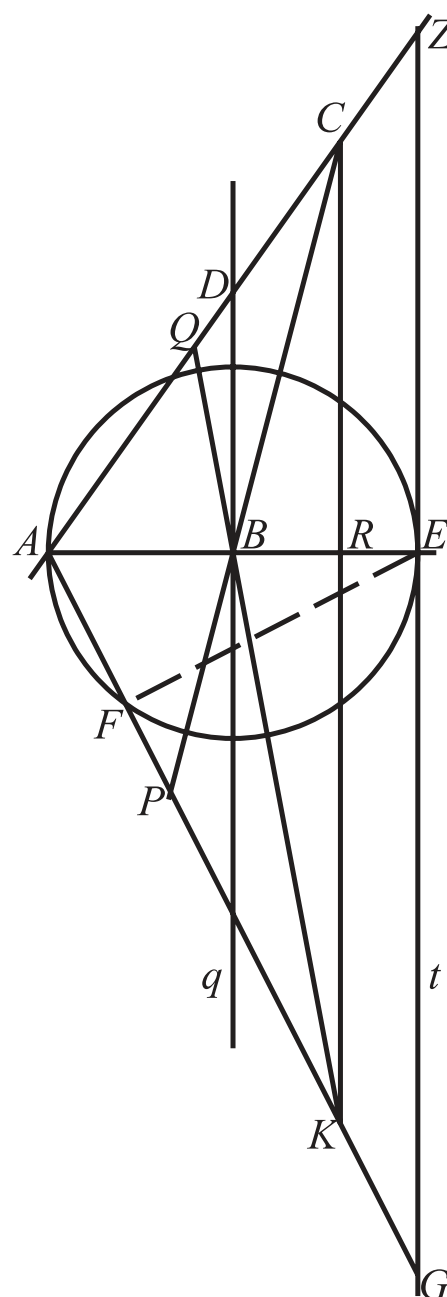
Het hier gegeven bewijs voor deze stellingen gebruikt dezelfde ingrediënten die al voorkomen in het antwoord [8] dat de Amerikaanse student J.W. Kitchens in 1937 gaf op de vraag van MacKay in de *Monthly*. Zie ook Figuur 5. Schrijf $a = |BC|$, $b = |AC|$, $c = |AB|$ en $D = q \cap$ lijn AC . Per definitie is $|CD| = c$



en dus $|AD| = b + c$. Schrijf $P = d_a \cap BC$, $Q = z_b \cap AC$ en $R = h_c \cap AB$. De al in de *Elementen* van Euclides bewezen deeltijinstelling geeft $|BP|/|PC| = c/b$. Ook is $|AR|/|RB| = |AC|/|CD| = b/c$ (immers, de driehoeken ARC en ABD zijn gelijkvormig). Omdat per definitie $|CQ| = |QA|$, volgt

$$(|BP|/|PC|) \cdot (|CQ|/|QA|) \cdot (|AR|/|RB|) = 1.$$

De stelling van Ceva (die, zoals Jan Hogendijk [7, p. 9–10] opmerkte, al eeuwen eerder door Al-Mu'taman ibn Hud in diens *Kitab al-Istikmāl* was bewezen), impliceert nu dat inderdaad d_a, z_b en h_c een gemeenschappelijk

**Figuur 5**

punt K hebben. We laten zien dat K op het binnen de basiscirkel (B, c) gelegen deel van de cissoïde (AB, t) ligt.

De cirkel (B, c) snijdt de lijn door AB in A en in een punt E . Schrijf $Z = (\text{lijn } AC) \cap t$, $F = d_a \cap (\text{cirkel } (B, c))$ en $G = d_a \cap t$. Gelijkvormigheid van ABD en AEZ levert $|AZ| = 2(b+c)$. De stelling van Pythagoras in AEZ geeft dan $|EZ|^2 = 4b(b+2c)$. Toepassen van de deellijnstelling op AZE met deellijn d_a leidt dan tot $|EG|^2 = 4bc^2/(b+2c)$. Verder is vanwege de stelling van Thales EF een hoogtelijn in driehoek AEG , waaruit met behulp van het bovenstaande volgt dat $|AG|/|FG| = 2(b+c)/b$. De gelijkvormigheid van de driehoeken AKC en AGZ laat zien dat diezelfde verhouding geldt voor $|AG|/|AK|$, en dus blijkt $|AK| = |FG|$, oftewel K ligt op de cissoïde (AB, t) . Het is evident dat dit punt binnen de gegeven cirkel ligt, waarmee Kletter zijn eerste stelling heeft aangetoond.

Voor het bewijs van de tweede stelling merken we op dat als C op de rechte tak van keerpuntsconchoïde (AB, q) ligt, dan volgt $|AD| = b - c$, en verder verloopt het bewijs analoog aan het bovenstaande.

De heer Kletter vond een aantal opmerkelijke eigenschappen van 'zijn' driehoeken, waarvan we er hier enkele noemen. De bewijzen zijn vrij eenvoudig ofwel uit bovenstaande argumenten te halen, ofwel gebruiken de omkeringen van Ceva's stelling en de deellijnstelling. We laten ze hier achterwege.

- Laat ABD een rechthoekige driehoek (met rechte hoek B) zijn, en kies C op de hypotenusa AD zodat $|DC| = |AB|$. Dan is ABC een Kletter-driehoek!
- Stel ABC is een Kletter-driehoek met concurrente binnendeellijn d_a en zwaartelijn z_b en hoogtelijn h_c . Laat $P = d_a \cap BC$ en $Q = z_b \cap AC$ en $R = h_c \cap AB$. Dan is $|AR| = |PR|$, en de volgende driehoeken hebben twee aan twee gelijke oppervlakte: KQA en KQC , KRA en KPC , KRB en KPB .

De vraag naar *rationale* Kletter-driehoeken is met vergelijkbare middelen aan te pakken. Daartoe kiezen we coördinaten zodat $A = (0, 0)$, $B = (c, 0)$ en $C = (x, y)$ een Kletter-driehoek definieert. De verticale hoogtelijn door C en de zwaartelijn door $B = (c, 0)$ en $(\frac{1}{2}x, \frac{1}{2}y)$ snijden in $(\xi, \eta) := (x, y(x-c)/(x-2c))$. Dit legt de deellijn door A vast, en met hulp van de deellijnstelling volgt $x/(c-x) = a/c$ en dus $x = ac/(a+c)$. Ook $(c-x)^2 + y^2 = a^2$ en $x^2 + y^2 = b^2$, dus na elimineren van y volgt $b^2 - a^2 = c(2x-c) = c^2(a-c)/(a+c)$. Deze relatie tussen de lengtes a, b, c werd in 1940 gevonden in [19] door de al eerder

genoemde Charles W. Trigg. Ook de omkering geldt: voldoen positieve getallen a, b, c aan de genoemde relatie, dan is de som van elk tweetal ervan groter dan het derde getal en dus bestaat een driehoek ABC met die drie zijden. Deze driehoek is dan een Kletter-driehoek.

Door alles met een geschikte positieve factor te vermenigvuldigen mag worden aangenomen $a + c = 2$, en kan dus c uit de gegeven relatie geëlimineerd worden. De keuze $a + c = 2$ maakt de resterende vergelijking heel fraai:

Stelling 3 (Trigg). *Een drietal positieve getallen (a, b, c) met $a + c = 2$ komt voor als de drie lengtes van de zijden in een Kletter-driehoek precies dan, als geldt*

$$b^2 = a^3 - 4a + 4,$$

en na eventueel schalen met een positieve factor levert dit alle Kletter-driehoeken.

Onbekend met Triggs werk en met het werk van Guy uit 1995 werd dit resultaat later door Van der Blij ook bewezen. Ook Guy in [6] wist kennelijk niet van ouder werk aan Kletter-driehoeken, en hij geeft eveneens het bovenstaande resultaat. De vergelijking $y^2 = x^3 - 4x + 4$ waar (a, b) aan dient te voldoen, definieert een zogeheten elliptische kromme. Een korte indruk van de fascinerende theorie hierover geeft [16]; een uitvoeriger elementaire inleiding gebaseerd op de zogeheten *Philips lectures* die John Tate op Haverford College in 1961 gaf, is [14]. De (reële) punten op onze elliptische kromme vormen een topologische commutatieve groep. Een belangrijke eigenschap is, dat als twee punten met rationale coördinaten in die groep worden opgeteld, dan resulteert dit in een punt dat ook weer rationale coördinaten heeft. Van der Blij

gebruikt dit als volgt. Begin met een 'gedegeneerde' Kletter-driehoek: eentje waarbij $c = 0$, dus waarbij de punten A en B samenvallen. Dat levert het punt $T = (2, 2)$ op de gegeven elliptische kromme. De door T voortgebrachte ondergroep blijkt oneindig veel elementen te hebben. Daaruit volgt, dat die ondergroep dicht ligt in de topologische groep van alle reële punten op de elliptische kromme. Gevolg: oneindig veel veelvouden (a, b) van T voldoen aan de eigenschap $0 < a < 2$. En dus bestaan er oneindig veel paarsgewijs niet gelijkvormige rationale Kletter-driehoeken!

Voorbeelden zijn al in de hand-out [4] te vinden: $-4T = (1, 1)$ levert de gelijkzijdige driehoek (die hier dus uit de gedegeneerde voortkomt!), $7T = (10/9, 26/27)$ wat, na herschalen, het geval $(a, b, c) = (15, 12, 13)$ levert, en voor de aankondiging van zijn voordracht in Noordwijkerhout gebruikte Van der Blij 15T. Meer voorbeelden zijn te vinden in [6] en [17].

Het argument waarmee te zien is dat er oneindig veel niet gelijkvormige rationale Kletter-driehoeken bestaan, kan nog verscherpt worden. Ten eerste is met meer theorie over elliptische krommen aan te tonen, dat de groep bestaande uit alle punten met rationale coördinaten op de gegeven elliptische kromme *gelijk* is aan de groep voortgebracht door $T = (2, 2)$. Dit was al begin jaren zestig uitgerekend door Bryan Birch en Peter Swinnerton-Dyer, in het kader van hun grote experiment dat leidde tot het beroemde vermoeden van Birch en Swinnerton-Dyer. Dus blijkt elke rationale Kletter-driehoek via de groepsbewerking op de elliptische kromme, afkomstig te zijn uit het al eerder genoemde gedegeneerde geval. Ten tweede kan een zogeheten gelijkverdelingsstelling (ook wel een ergodenstelling genoemd) worden toegepast, in 1909/1910 onafhankelijk van

Wanneer u uw artikel zoudt willen publiceren
Zoudt u mij een groot dienst bewijzen waarom dit
na februari 2005 zou gebeuren. Natuurlijk met de
juiste verwijzing naar de oorsprong bij de heer
Kletter. Maar wellicht is het ook goed om een
enkel element van de boven genoemde methode
en geschiedkundige elementen op te nemen.

Figuur 6

elkaar bewezen door Piers Bohl uit Letland, Wacław Sierpiński uit Polen en de Duitser Hermann Weyl. Hiermee kan bepaald worden welke fractie van alle rationale punten op de gegeven elliptische kromme, x -coördinaat tussen 0 en 2 heeft (en dus correspondeert met een rationale Kletter-driehoek). Meer details hierover zijn te vinden in [2], dat op zijn beurt een aanvulling is op het artikel [6] van Guy. Samengevat luidt het eindresultaat als volgt.

Stelling 4. (a) *Elke rationale Kletter-driehoek wordt, na vermenigvuldiging met een rationale factor, als volgt verkregen. Neem een rationaal punt (a, b) op de elliptische kromme*

E met vergelijking $y^2 = x^3 - 4x + 4$, zodat $0 < a < 2$. Dan is de driehoek met zijden $|AB| = 2 - a$ en $|AC| = |b|$ en $|BC| = a$ een Kletter-driehoek.

(b) *De groep G van alle punten op E met coördinaten in $\mathbb{Q}$ wordt voortgebracht door $T = (2, 2)$.*

(c) *De fractie*

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \frac{\#\{n : |n| \leq k \text{ \& } 0 < x(nT) < 2\}}{2k + 1}$$

van alle punten $Q \in G$ die x -coördinaat $x(Q)$ tussen 0 en 2 hebben, is gelijk aan

$$\frac{\int_0^\infty \frac{dt}{\sqrt{t^3 - 4t + 4}}}{\int_\alpha^\infty \frac{dt}{\sqrt{t^3 - 4t + 4}}} = 0,36 \dots$$

waarbij $\alpha = -2,38 \dots$ het reële nulpunt van $x^3 - 4x + 4$ is.

Voor zijn hand-out [4] had Van der Blij nT bepaald voor $1 \leq n \leq 13$, en dat leverde vier Kletter-driehoeken op, keurig in overeenstemming met bovenstaande stelling. In Figuur 6 is te lezen wat hij in 2004 over een artikel betreffende dit onderwerp schreef. We hopen dat bovenstaande tekst aan deze wens voldoet! 

Referenties

- Donald J. Albers en Gerald L. Alexanderson, *Fascinating Mathematical People: Interviews and memoirs*, Princeton University Press, 2011.
- Erika Bakker, Jasbir S. Chahal en Jaap Top, Albime triangles and Guy's favourite elliptic curve, te verschijnen in *Expos. Math.*, 2014, doi:10.1016/j.expmath.2014.12.005.
- F. van der Blij, Wiskunde moet uitdagender en spannender, *Nieuwe Wiskrant*, 23 (2004), 4–6.
- F. van der Blij, Van driehoek naar kubische kromme, Hand-out Nederlandse Wiskunde Dagen, 4 februari 2005.
- Jasbir S. Chahal en Jaap Top, Albime triangles over quadratic fields, te verschijnen in *Rocky Mountain J. Math.*, 2015.
- Richard K. Guy, My Favorite Elliptic Curve: A Tale of Two Types of Triangles, *The Amer. Math. Monthly*, 102 (1995), 771–781.
- Jan P. Hogendijk, Al-Mu'taman ibn Hūd, 11th Century King of Saragossa and Brilliant Mathematician, *Historia Math.*, 22 (1995), 1–18.
- J.W. Kitchens, Solution to Problem E 263, *The Amer. Math. Monthly* 44 (1937), 599–600.
- Theo Kletter, Een merkwaardige relatie tussen twee klassieke krommen, manuscript, 1957, 6 p.
- Hans van Lint en Rob de Jong, Het van der Blij-effect, interview met Frederik van der Blij, *Nieuw Archief voor Wiskunde* 5/5(2) (2004), 119–124.
- D.L. MacKay, Problem E 263, *The Amer. Math. Monthly* 44 (1937), 104.
- D.L. MacKay, Problem E 374, *The Amer. Math. Monthly* 46 (1939), 168.
- Leonard Ornstein, *De jonge Fortuyn. De wordingsgeschiedenis van een omstreden politicus*, De Bezige Bij, Amsterdam, 2012.
- J.H. Silverman en J.T. Tate, *Rational Points on Elliptic Curves*, Undergraduate Texts in Mathematics, Springer, New York, 1992.
- Hans Sterk, 7 april 2000: Kloosterman Centennial Celebration, *Nieuw Archief voor Wiskunde* 5/1(2) (2000), 125–126.
- Jaap Top, Het vermoeden van Birch en Swinnerton-Dyer, *Nieuw Archief voor Wiskunde* 5/14(4) (2013), 267–272.
- Jaap Top, Albime triangles, Colloquium lecture, Utrecht, 20 november 2014, www.math.rug.nl/~top/lectures/Utrechtalbime.pdf.
- J. Treur, *Door te veel dingen te willen, verzand je in oppervlakkigheid*, *Nieuw Archief voor Wiskunde* 5/12(3) (2011), 190–195.
- Charles W. Trigg, Solution to Problem E 374, *The Amer. Math. Monthly* 47 (1940), 176.
- www.universiteitsmuseum.nl/Collectie/Detail/0285-2943, Professor Dr. Frederik van der Blij.

Mieke van Groenestijn

Hogeschool Utrecht

mieke.vangroenestijn@kpnmail.nl

Onderwijs

Dyscalculie?

Hoewel dyslexie tegenwoordig een aanzienlijke bekendheid geniet, is dat in mindere mate het geval voor dyscalculie: ernstige en hardnekkige rekenproblematiek die ondanks deskundige begeleiding blijft bestaan. Echter, met de invoering van de rekentoets in het voortgezet onderwijs groeit gelukkig ook de aandacht voor rekenproblemen en dyscalculie. Mieke van Groenestijn — orthopedagoog, onderwijskundige, emeritus lector gecijferdheid bij de Hogeschool Utrecht en projectleider van de protocollen ‘Ernstige RekenWiskunde-problemen en Dyscalculie’ — beschrijft de achtergronden en zet haar visie uiteen.

Nu rekenen volop in de belangstelling staat vanwege de verplichte eindtoets in het vo en het centraal examen in het mbo, neemt de aandacht voor leerlingen met ernstige rekenproblemen toe. In de praktijk blijkt dat ongeveer tien tot vijftien procent van de leerlingen in meer of mindere mate problemen ervaart met rekenen, waarvan zo’n vijf procent ernstige problemen heeft. Al gauw valt daarbij ook de term *dyscalculie*. Iemand die niet of niet goed kan rekenen heeft vast ‘last van’ dyscalculie. Net zoals *dyslexie* synoniem is geworden voor leerlingen die lees- en/of schrijfproblemen ondervinden, zien we dyscalculie nu ook vaker voorkomen als synoniem voor ernstige rekenproblemen. Door onvoldoende bekendheid met het verschijnsel, soms ook bij deskundigen, wordt een dyscalculieverklaring, meestal met goede bedoelingen, soms onterecht afgegeven. Om in aanmerking te komen voor een aangepaste rekentoets op het vo of een aangepast examen op het mbo is geen dyscalculieverklaring nodig. De school moet aangeven welke inspanningen zij heeft verricht voor een optimale begeleiding van de leerling. Het College voor Toetsen en Examens heeft hiervoor richtlijnen opgesteld (zie [3]).

Achtergrond

Het begrip dyscalculie bestaat, evenals dyslexie, al sinds de jaren zestig van de vorige eeuw [6]. Over oorzaken en verschijnselen is echter nog steeds geen eenduidigheid. Ruijsenaars, Van Luit en Van Lieshout [21] definiëren dyscalculie als een beschrijvende term die aangeeft dat er ernstige rekenproblemen zijn, maar die niet verwijst naar de oorzaak ervan. Er gaat iets opvallend mis ten opzichte van de rest van het functioneren. Dyscalculie wordt volgens hen gekenmerkt door hardnekkige problemen met het vlot en accuraat oproepen of toepassen van rekenwiskundekennis (feiten en/of afspraken), die blijvend zijn, ook na gedegen onderwijs. De vraag is echter wat bedoeld wordt met *gedegen onderwijs*. Vaak wordt aangenomen dat als na zes maanden intensieve training (*remedial teaching*), nadat de problemen zijn vastgesteld, geen zichtbare vooruitgang is, er sprake is van dyscalculie. Van belang is dan wat die training inhoudt en wie die geeft. Daar zijn geen duidelijke richtlijnen voor. In de praktijk is de diagnose en de behandeling sterk afhankelijk van de deskundigheid en visie van de diagnosticus en de behan-

delaar. Van een behandelaar mag men verwachten dat hij of zij specifieke kennis heeft van de ontwikkeling van rekenen en zijn of haar didactisch handelen kan afstemmen op de ontwikkeling en de problematiek van de leerling. Hij of zij heeft minimaal een master SEN (Special Educational Needs) met reken-specialisatie of een gelijkwaardige opleiding. Een andere vraag is echter hoe gedegen het reguliere rekenonderwijs is. Hoe kunnen rekenproblemen tijdig worden gesignaleerd om grotere problemen te voorkomen? Vaak wordt pas actie ondernomen als een leerling een grote achterstand heeft opgebouwd, vastgelopen is of dreigt vast te lopen. De problemen worden geleidelijk aan steeds complexer en het wordt steeds moeilijker om te achterhalen of het om een ernstig rekenprobleem gaat of om een rekenstoornis.

Bij de traditionele visie op een leerstoornis wordt meestal uitgegaan van een vaste structuur in de hersenen en een afwijking daarbinnen. Dehaene [5] veronderstelt dat kinderen vanaf de geboorte een mentale getallenlijn hebben voor het ontwikkelen van getalbegrip. Wanneer deze mentale getallenlijn onvoldoende ontwikkeld is of ontbreekt, spreekt hij van ontwikkelingsdyscalculie. Het kan volgens hem dan voorkomen dat kinderen een onvermogen hebben om hoeveelheden aan getallen en aan symbolen te koppelen, bijvoorbeeld een hoeveelheid ‘drie’ kunnen benoemen als ‘drie’ en dat kunnen koppelen aan het symbool ‘3’. DeHaene noemt dat de ‘triple code’. Andere onderzoekers, onder an-

deren Kucian en Von Aster [16], Von Aster [23] en Van Loosbroek [17], sluiten daarbij aan. Conclusies worden echter voorzichtig geformuleerd omdat de onderzoeken vaak kleinschalig zijn.

Uit meer recent neurologisch onderzoek blijkt echter dat hersenen zich flexibel ontwikkelen [7, 13–14]. Jolles [13–14] vergelijkt de ontwikkeling van het brein met het aanleggen van een infrastructuur van wegen. Aanvankelijk ontwikkelt het netwerk in het brein zich via allerlei routes, maar geleidelijk aan ontstaan hoofdwegen en zijwegen en worden routes steeds meer vastgelegd. Hij geeft aan dat wanneer bepaalde hersendelen nog niet uitontwikkeld zijn, andere hersendelen de taken kunnen overnemen. Alle delen van de hersenen werken samen. Dit proces van ontwikkelen, aanpassen en verder ontwikkelen gaat altijd door, ongeacht de leeftijd. De routes in het brein ontwikkelen zich in wisselwerking met de informatie die wordt verkregen vanuit de omgeving. Als alle hersengebieden van jongs af aan voldoende worden geprikkeld, kunnen zij zich geleidelijk aan optimaal ontwikkelen. De vraag is wanneer er dan sprake kan zijn van een leerstoornis.

Butterworth [2] beschrijft in zijn boek *What counts* dat iedereen in principe is 'born to count'. Dat betekent dat iedereen kan tellen en gevoel voor getallen ontwikkelt (numerosity). Hij constateert echter dat wanneer bepaalde hersengebieden onderontwikkeld zijn of zich anders hebben ontwikkeld, problemen kunnen ontstaan bij het leren rekenen. De persoon is dan 'born not to count'. Dit benoemt hij als dyscalculie. Maar als neurowetenschapper gaat ook hij uit van plasticiteit van de hersenen. Bij een juiste begeleiding en positieve ervaringen met rekenen kunnen kinderen alsnog geleidelijk aan leren omgaan

met getallen en hoeveelheden (*virtuous circle*, zie rechter afbeelding in Figuur 1). Bij onvoldoende of een onjuiste begeleiding en negatieve ervaringen kan gebrek aan zelfvertrouwen en faalangst ontstaan (*vicious circle*, zie linker afbeelding in Figuur 1) en nemen de problemen toe.

De neurowetenschap is nog volop in ontwikkeling, maar biedt interessante perspectieven. Onderzoek van Upson [22] naar het aanleren van nieuwe bewegingen door personen met een fysieke handicap, bijvoorbeeld, laat zien dat en hoe neuronen in de hersenen, aangestuurd en geregistreerd door een computergestuurd implantaat in de hersenen, meebewegen met de gedachten van de persoon. Ook onderzoek van Greenfield [8] naar de invloed van digitale media op de ontwikkeling van de hersenen kan leiden tot nieuwe inzichten over leren. Zij vergelijkt het gedrag van neuronen in de hersenen met het gedrag van taxichauffeurs in Londen. De taxichauffeurs weten de weg, maar als straten of woonwijken veranderen of nieuwe wegen worden aangelegd, passen de chauffeurs hun routes aan. Iedere chauffeur kiest de routes zoals hij de omgeving kent. Door de ontwikkelingen in de digitale wereld kunnen wij ons op het scherm eindeloos bewegen in ruimte en tijd. Een goed voorbeeld hiervan is de ontwikkeling van games waarin personen een eigen leefwereld kunnen bouwen, zoals bijvoorbeeld bij Minecraft. De persoon creëert een eigen digitale leefwereld en kan die omgeving voortdurend afstemmen op zijn wensen, maar de persoon stemt zijn handelen ook af op de mogelijkheden van de gecreëerde omgeving. De neuronen in de hersenen sturen het gedrag van de persoon aan en veranderen eveneens hun routes als de omgeving verandert. Het brein wordt gevormd door de ervaringen van de

MIND CHANGE



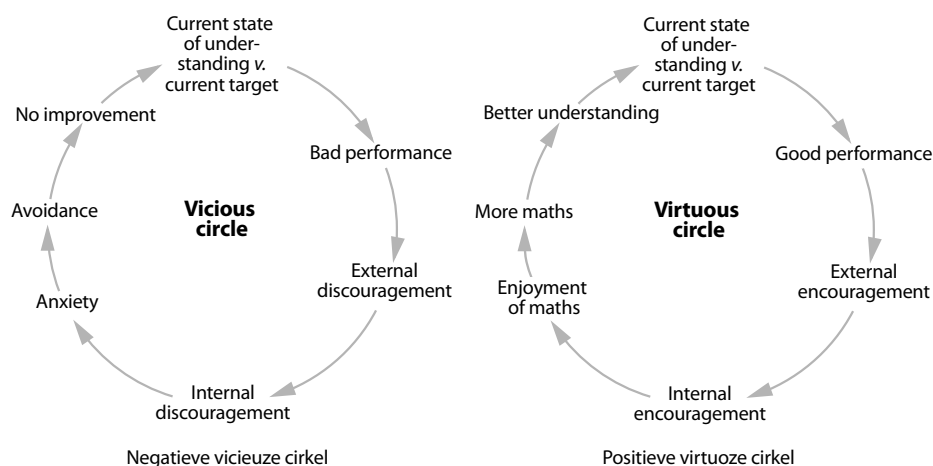
How digital technologies are leaving their mark on our brains

SUSAN GREENFIELD

Figuur 2 Omslag van *Mind change* van Susan Greenfield [8].

individuele persoon. De vraag is in hoeverre de ontwikkeling van de digitale technologie invloed heeft op de ontwikkeling van het brein en daarmee op de cognitieve en sociale ontwikkeling van de persoon. Wetenschappelijk onderzoek naar het leren en leerproblemen, maar ook naar bijvoorbeeld autisme, wordt daardoor steeds complexer. Ook de OECD (Organisation for Economic Co-operation and Development) is hier volop mee bezig [19–20].

Binnen de orthopedagogiek is huidig onderzoek naar rekenproblemen vooral gericht op de rol van het werkgeheugen en executieve functies. De eerste publicaties hierover dateren echter al vanaf de jaren zeventig [1]. Executieve functies sturen het handelen van de persoon aan en beïnvloeden het werkgeheugen. Hierbij spelen met name *inhibition* (uitschakelen van afleidende informatie), *shifting* (het wisselen tussen verschillende taken) en *updating* (het opslaan en bijwerken van informatie in het werkgeheugen) een rol. Kroesbergen e.a. [15] beschrijven dat inhibitie een beroep doet op het vermogen van de leerling om relevante informatie uit een opdracht te halen en afleidende informatie te negeren. Bij shifting moet de leerling eerst gebruikte informatie opslaan in het werkgeheugen en vervolgens relevante informatie uit het langetermijngeheugen oproepen. Bij updating moet de leerling tijdelijk informatie geordend opslaan en die vervolgens weer kunnen gebruiken. Inhibitie, shifting en updating zijn cruciaal bij het uitvoeren van complexe (reken)taken, bijvoorbeeld bij het vergelijken van aanbiedingen waarbij leerlingen te maken hebben met verpakkingen waarop



Figuur 1 De viciuze en virtueuze cirkel (Protocol ERWD) zoals beschreven door Butterworth [2].

verschillende maten, bedragen en percentages voor korting staan vermeld. Rekenproblemen kunnen ontstaan door overbelasting van het werkgeheugen, maar ook hiervan is nog onvoldoende resultaat van onderzoek beschikbaar om dyscalculie te kunnen verklaren. Wel is er al literatuur beschikbaar over het versterken van executieve functies waardoor leerproblemen kunnen afnemen (zie bijvoorbeeld [4]).

Onderwijs

Opvallend is dat bij deze onderzoeken wel gekeken wordt naar wat kinderen wel of niet kunnen bij rekenen en naar psychologische functies, zoals onder andere geheugenaspecten en executieve functies, maar dat er nauwelijks aandacht is voor de didactiek van het rekenen. Juist het onderwijs heeft een grote invloed op de ontwikkeling van rekenkundige concepten en vaardigheden. De wijze waarop kinderen vanaf groep 1 leren rekenen en het tempo waarin, zijn cruciaal voor zwakke rekenaars en voor leerlingen met potentiële problemen. Preventie van rekenproblemen begint met afstemming van het onderwijs op de ontwikkeling van de leerling. Alleen Jolles [13] benadrukt het belang van meer interdisciplinaire samenwerking tussen gedragswetenschappers, neurowetenschappers, onderwijswetenschappers en praktijkdeskundigen.

Het is dan ook moeilijk een harde definitie van dyscalculie als leerstoornis te geven, omdat het onderwijs een belangrijke rol speelt in de ontwikkeling van het kind. Bij een langzame of problematische ontwikkeling bij rekenen kunnen ook ernstige problemen ontstaan als het onderwijs niet goed wordt afgestemd op de ontwikkeling van jonge kinderen. De verschijnselen kunnen daarbij lijken op die van dyscalculie. Naarmate in het onderwijs langer wordt gewacht met onderzoek naar de oorzaak van de problematiek worden de problemen groter en wordt het verschil tussen ernstige rekenproblemen en dyscalculie kleiner. In het algemeen is er geen harde grens aan te geven tussen ernstige rekenproblemen en dyscalculie [9, 18]. Slechts bij hardnekkige rekenproblemen spreken we van dyscalculie. Dat komt voor bij ongeveer twee procent van de leerlingen. (Dit is uitvoerig beschreven in de protocollen Ernstige RekenWiskunde-problemen en Dyscalculie (ERWD) voor po, vo en mbo, zie [9–11].)

Rekenproblemen en motivatie

De meeste rekenproblemen ontstaan in de onderbouw van het basisonderwijs. Als het echt om een problematische ontwikkeling

gaat, is dit zelfs al in groep 1 en 2 zichtbaar. Kinderen die geen hoeveelheden tot 10 kunnen overzien en benoemen, blijven haperen met tellen, de basisbegrippen als ‘erbij’, ‘eraf’ en ‘evenveel’ niet beheersen, geen goed tijdsbesef ontwikkelen en/of de dagen van de week niet kunnen onthouden, lopen risico's. In groep 3 wordt meestal al duidelijk welke kinderen het tempo van de groep niet kunnen bijhouden. Daar moet al worden ingegrepen. Deze kinderen hebben direct extra ondersteuning nodig om problemen te voorkomen. Gebeurt dat niet, dan kan er een mismatch ontstaan tussen de ontwikkeling van het kind en het geboden onderwijs en worden de problemen geleidelijk aan steeds groter. De leerling loopt vast, er ontstaat onderwijsachterstand en de motivatie en het zelfvertrouwen van de leerling nemen af. Er kan faalangst en rekenangst ontstaan (zie Figuur 1). Dat betekent ook dat de weerstand tegen rekenen en daarmee de hardnekkigheid van de problemen toeneemt. Hoe langer men wacht, hoe groter de achterstand en hoe complexer de problemen kunnen worden. Uiteindelijk kan didactische resistentie ontstaan, óók voor remedial teaching. Tijdig en deskundig ingrijpen is noodzakelijk.

Rekenen in het basisonderwijs

Bovenstaande betekent dat kinderen verschillen in onderwijsbehoefte. Een school werkt over het algemeen met één rekenmethode waar alle kinderen les uit krijgen. Het is aan de leraar om verschillen in kinderen te observeren en daar rekening mee te houden. Hoe deskundiger de leraar, des te beter kan hij of zij het onderwijs op de leerling afstemmen. Bij een problematische ontwikkeling is het echter belangrijk altijd een interne rekenspecialist in te schakelen, zoals beschreven staat in de protocollen Ernstige RekenWiskunde-problemen en Dyscalculie (ERWD). In sommige situaties is diagnostisch onderzoek en intensieve ondersteuning noodzakelijk. Zelfs dan hoeft er nog geen sprake te zijn van dyscalculie. Bij een goede begeleiding kan het rekenen geleidelijk aan op gang komen en kunnen de meeste leerlingen zich alsnog goed ontwikkelen. In alle situaties geldt: hoe eerder de deskundige hulp op gang komt, hoe beter. Bij voorkeur al vanaf groep drie. Essentieel is het voorkomen van vastlopen en stagnatie in de ontwikkeling. Soms is daarvoor extern diagnostisch onderzoek noodzakelijk.

Rekenproblemen in het voortgezet onderwijs

Sommige leerlingen komen met een dyscal-



Figuur 3 Boekomslag van *Raamwerk scholing en nascholing rekendocent vo/mbo* [12].

culieverklaring binnen in het voortgezet onderwijs. Van belang is dan om vanaf het begin de begeleiding voort te zetten. Overleg met de basisschool is noodzakelijk om het onderwijs goed te kunnen afstemmen op de leerling. Deze leerlingen kunnen in alle leerroutes van het voortgezet onderwijs voorkomen, dus ook in havo/vwo.

Ook bij een gezonde en normale ontwikkeling stromen kinderen toch op verschillende niveaus uit naar het voortgezet onderwijs. Het ene kind is nou eenmaal sneller in zijn ontwikkeling dan het andere kind. Ook verschillen kinderen in analytisch en probleemoplossend vermogen. Aan het einde van groep acht kan het rekenniveau bij kinderen uiteenlopen van groep zes tot en met groep acht. Dat betekent dat het gestelde niveau 1F door sommige kinderen nog lang niet gehaald is. Dat wil niet zeggen dat zij het niet kunnen halen. Zij hebben alleen meer tijd nodig en dus goed rekenonderwijs in het voortgezet onderwijs, vooral in de onderbouw. Een bijkomend probleem is echter dat deze leerlingen, de zwakke rekenaars, vaak zelf ook al begrijpen dat zij langzamer zijn dan andere leerlingen en gaan denken dat zij niet kunnen rekenen. Dit bevordert niet de motivatie en het zelfvertrouwen van deze leerlingen (zie Figuur 1).

Bij zowel de zwakke rekenaars als bij de leerlingen met ernstige rekenproblemen, soms zelfs met een dyscalculieverklaring, zien we dat zij grote moeite kunnen hebben met de leerstof van de bovenbouw van het basisonderwijs: breuken, procenten, kommagetallen, metriek stelsel, complexe opgaven.

Dat maakt het voor de rekendocent in het voortgezet onderwijs niet eenvoudiger. Ook hier blijkt dat de leerstof van een rekenmethode vaak niet toereikend is. (Met de rekendocent bedoelen we zowel mannen als vrouwen.) Ook dan is de rekendocent de cruciale schakel tussen de leerling en de leerstof. Een goed opgeleide rekendocent kan differentiëren en kan het rekenonderwijs optimaal afstemmen op de leerlingen. Hierbij gaat het met name om een goede didactische aanpak en niet alleen om het inzetten van allerlei hulpprogramma's (zie hiervoor [12]).

Bij sommige leerlingen kan dan alsnog blijken dat problemen hardnekkig zijn. De vraag is dan of het komt door opgebouwde faalangst en weerstand of misschien toch door andere factoren in de leerling zelf. Een intern diagnostisch onderzoek door een rekenspecialist is dan gewenst om het onderwijs nog nauwkeuriger te kunnen afstemmen (zie hiervoor de protocollen ERWD2 (vo) en ERWD3 (mbo)). Lukt het dan nog niet, dan kan alsnog een extern diagnostisch onderzoek worden aangevraagd om eventueel een dyscalculieverklaring te verkrijgen of andere oorzaken vast te stellen.

Naarmate een leerling ouder wordt, heeft het echter steeds minder zin om een dyscalculieverklaring af te geven. Er komt steeds meer ruis vanuit het onderwijs bij, zowel vanuit de didactische aanpak als vanuit de leerling zelf. Hardnekkige rekenproblemen kunnen ook ontstaan door een mismatch tussen de leerling en de geboden didactische ondersteuning en tevens door groeiende rekenangst en weerstand vanuit de leerling. Dit kan een vertekend beeld geven van de oorzaken van de rekenproblemen, waardoor zuivere dyscalculie steeds moeilijker is vast te stellen. Een dyscalculieverklaring op zich helpt niet. Alleen deskundige begeleiding vanuit de school en/of externe ondersteuning kan helpen. Hierbij staat het werken aan zelfvertrouwen en motivatie, en het wegnemen van weerstand en rekenangst voorop. Tegelijkertijd is een zorgvuldige didactische aanpak voor het leren rekenen noodzakelijk: passend onderwijs. Een deskundige, enthousiaste rekendocent of remedial teacher is daarbij de sleutelfiguur.

De rekentoets

Ruis bij het diagnostisch onderzoek naar rekenproblemen en dyscalculie is dan ook de reden waarom het in de bovenbouw van het voortgezet onderwijs (en in het mbo) geen zin meer heeft een dyscalculieverklaring af te geven, ook niet voor de rekentoets. Een dyscal-

culieverklaring kan zelfs belemmerend werken voor de toekomstige beroepsopleiding van de leerling. Een leerling die in aanmerking komt voor de aangepaste rekentoets op het vo (de ER-toets) of het aangepaste rekenexamen in het mbo (het ER-examen), zoals beschreven door het College voor Toetsen en Examens (CvTE), heeft daarom geen dyscalculieverklaring nodig (zie [24]). De school moet aangeven welke inspanningen zij heeft verricht om de leerling optimaal te begeleiden.

Deskundigheid in de school

Rekenzwakke leerlingen zijn gebaat bij deskundige leraren. Zeker als een leerling in aanmerking komt voor extra ondersteuning is specifieke kennis van de rekendidactiek noodzakelijk. Het is dan ook gewenst om in elke school een rekenspecialist in huis te hebben, of, in een samenwerkingsverband, een bovenscholse rekenspecialist. Daarnaast is het van belang, zeker ook in het voortgezet onderwijs, dat rekendocenten een adequate (na)scholing hebben gehad.

Een goede rekendocent is op de hoogte van de referentieniveaus en is door en door vertrouwd met de vier rekendomeinen (getallen, verhoudingen, meten en meetkunde, verbanden) en de leerlijnen daarbinnen. Hij kan rekengesprekken voeren met de leerlingen en kan daardoor achterhalen wat leerlingen al weten en kunnen en waar zij nog behoefte hebben aan uitleg en oefening (bijvoorbeeld bij breuken, procenten en het metriek stelsel). Door boeiende en actuele onderwerpen te bespreken tijdens de rekengesprekken (ook al past dat soms niet in de methode), kunnen leerlingen weer gemotiveerd worden en plezier krijgen in rekenen. Ook activerende werkvormen en samenwerkend leren kunnen de motivatie van leerlingen bevorderen. Een goede, enthousiaste en deskundige rekendocent is belangrijker dan een goede rekenmethode.

Een goede rekendocent is geen slaaf van de rekenmethode of van computerprogramma's. Hij is vertrouwd met de vier hoofdfasen (zie hiervoor de protocollen ERWD2 (vo) en ERWD3 (mbo)) in de rekenkundige ontwikkeling (conceptontwikkeling, ontwikkeling van procedures, oefenen en toepassen) en kan, waar nodig, de leerstof aanpassen en afstemmen op de ontwikkeling van de leerlingen. Hij biedt voldoende visuele ondersteuning in de vorm van denkmodellen en kan op verschillende handelingsniveaus differentiëren. Ook kan hij rekensoftware op een juiste wijze inpassen in zijn lessen.

In specifieke situaties werkt de rekendocent samen met een rekenspecialist. Samen

stemmen zij op basis van een individueel ondersteuningsplan de leerstof en het tempo af op individuele leerlingen met ernstige rekenproblemen of dyscalculie. Deze leerlingen krijgen, waar mogelijk, (extra) individuele ondersteuning of les in kleine groepjes. De rekendocent en de rekenspecialist zijn beiden onmisbaar voor een optimale begeleiding van leerlingen met ernstige rekenproblemen en dyscalculie.

Over de auteur

Mieke van Groenestijn is orthopedagoog, onderwijskundige en emeritus lector gecijferdheid bij Hogeschool Utrecht. Zij is gepromoveerd op het onderwerp *Gecijferdheid van volwassenen in basiseducatie*. Zij heeft ruim dertig jaar gewerkt bij Hogeschool Utrecht en haar voorlopers, waaronder ruim twintig jaar als opleider bij het Seminarium voor Orthopedagogiek bij de opleidingen voor remedial teachers po en vo, met name voor rekenproblemen en dyscalculie. Haar interesse ligt vooral in de ontwikkeling van rekenen bij kinderen en jongeren en het ontstaan en voorkomen van rekenproblemen. Zij heeft veel onderzoek gedaan naar rekenkennis en rekenvaardigheid in vo, mbo en volwasseneneducatie. Zij is hoofdauteur van de rekenwiskundemethode *Wizwijs* (Uitgeverij Zwijsen), projectleider van de protocollen *Ernstige RekenWiskunde-problemen* en *Dyscalculie* (ERWD PO, VO en MBO) en projectleider van het *Raamwerk scholing en nascholing rekendocent vo/mbo*.



Mieke van Groenestijn

Referenties

- 1 A.D. Baddeley en G. Hitch, Working memory, in G.H. Bower (ed.), *The psychology of learning and motivation: Advances in research and theory*, Vol. 8, Academic Press, New York, 1974, pp. 47–89.
- 2 B. Butterworth, *What counts. How every brain is hardwired for math*, Free Press, New York, 1999.
- 3 College voor Toetsen en Examens, *Pilot dyscalculie/ernstige rekenproblemen – rekentoets VO 2014–2015*, www.examenblad.nl/document/voorlichtingsbrochure-pilot-2.
- 4 P. Dawson en R. Guare, *Slim maar... Help kinderen hun talenten benutten door hun executieve functies te versterken*, Hogrefe Uitgevers, Amsterdam, 2011.
- 5 S. Dehaene, *The number sense: How the mind creates mathematics*, Oxford University Press, 1997.
- 6 J.J. Dumont, *Leerstoornissen: Deel 1: Theorie en model*, Lemniscaat, Rotterdam, 1976.
- 7 U. Goswami, *Cognitive development: The learning brain*, Psychology Press, Hove, 2007.
- 8 S. Greenfield, *Mind change. How digital technologies are leaving their marks on our brains*, Rider, Ebury Publishing, London, 2014.
- 9 M. van Groenestijn, C. Borghouts en C. Janssen, *Protocol Ernstige RekenWiskunde-problemen en Dyscalculie (BAO, SBO, SO)*, Koninklijke Van Gorcum / NVORWO, Assen, 2010.
- 10 M. van Groenestijn, G. van Dijken en D. Janson, *Protocol Ernstige RekenWiskunde-problemen en Dyscalculie (2, VO)*, Koninklijke Van Gorcum / NVORWO, Assen, 2012.
- 11 M. van Groenestijn, G. van Dijken en D. Janson, *Protocol Ernstige RekenWiskunde-problemen en Dyscalculie (3, MBO)*, Koninklijke Van Gorcum / NVORWO, Assen, 2012.
- 12 M. van Groenestijn en V. Jonker (red.), *Raamwerk scholing en nascholing rekendocent vo/mbo. Bouwstenen voor deskundige rekenonderwijs*, ALL educatief, Woerden, 2014.
- 13 J. Jolles, *Ellis en het verbreinen: Over herseinen, gedrag en cognitie*, Neuropsych Publishers, Amsterdam, 2010.
- 14 J. Jolles, R. De Groot, J. Van Benthem, H. Dekkers, C. De Glopper, H. Uijlings en A. Wolff-Albers, *Leer het brein kennen: Over een 'New Learning Science' op het kruispunt van neurowetenschap, cognitiewetenschap en onderwijs-wetenschap: resultaat van een invitational conference georganiseerd door NWO op 5 februari 2004*, SWO, Den Haag, 2005.
- 15 E.H. Kroesbergen, S.H.G. van der Ven, M.E. Kolkman, J.E.H. van Luit en P.P.M. Leseman, Executieve functies en de ontwikkeling van (voorbereidende) rekenvaardigheid, *Pedagogische Studiën* 86(5) (2009), 334–349.
- 16 K. Kucian en M. Von Aster, Dem Gehirn beim Rechnen zuschauen: Ergebnisse der funktionellen Bildgebung, in M. von Aster en J.H. Lorenz (eds.), *Rechenstörungen bei Kindern: Neurowissenschaft, Psychologie, Pädagogik*, Vandenhoeck & Ruprecht, Göttingen, 2006, pp. 54–72.
- 17 E. van Loosbroek, De biologische basis van ontwikkelingsdyscalculie, in M. Dolk en M. van Groenestijn (red.), *Dyscalculie in discussie*, Van Gorcum, Assen, 2006, pp. 16–21.
- 18 J.E.H. van Luit, *Dyscalculie, een stoornis die telt* (Oratie, Universiteit Utrecht), Graviant Educatieve Uitgaven, Doetinchem, 2010.
- 19 OECD/CERI, *Understanding the Brain: towards a New Learning Science*, OECD, Parijs, 2002, www.oecd.org/edu/cei/31706603.pdf.
- 20 OECD/CERI, *Understanding the Brain: the birth of a Learning Science. New insights on learning through cognitive and brain science*, OECD, Parijs, 2007, www.oecd.org/site/educer21st/40554190.pdf.
- 21 A.J.J.M. Ruijsenaars, J.E.H. van Luit en E.C.D.M. van Lieshout, *Rekenproblemen en Dyscalculie. Theorie, onderzoek, diagnostiek en behandeling*, Lemniscaat, Rotterdam, 2004.
- 22 S. Upson, Worden wij cyborgs?, *Psyche en brein, tijdschrift voor psychologie, gezondheid, hersenonderzoek en opvoeding* 1 (2015), 72–77, www.eosmagazine.eu.
- 23 M. Von Aster, Wie kommen Zahlen in den Kopf? Ein modell der normalen und abweichenden Entwicklung zahlenverarbeitender Hirnfunktionen, in M. von Aster en J.H. Lorenz (red.), *Rechenstörungen bei Kindern: Neurowissenschaft, Psychologie, Pädagogik*, Vandenhoeck & Ruprecht, Göttingen, 2005, 13–33.
- 24 <http://www.examenblad.nl/onderwerp/pilot-dyscalculie-rekentoets-vo/2015#par3>.

Rob van Oord

Waddinxveen

robvanoord@tiscali.nl

Evenement 21ste Nationale Wiskunde Dagen

Een Pi-shirt, beter laat dan nooit!

Op vrijdag 30 januari en zaterdag 31 januari vonden in Noordwijkerhout voor de 21ste keer de Nationale Wiskunde Dagen plaats. Twee dagen waarop wiskundeleraren en andere belangstellenden naar wiskunde kijken en luisteren, maar er vooral ook zelf mee aan de slag gaan. Een persoonlijke impressie van Rob van Oord, afgezwaaide docent maar inmiddels weer actief als invalkracht.

Wat te doen als je met pensioen bent? Gewoon weer naar de NWD? Natuurlijk, want je treft er zoveel bevriende wiskundecollega's. Inspiratie opdoen voor je lessen die je gewoon nog geeft, of als invaller. Verdieping van je wiskundekennis, je laten verrassen door bijzondere aspecten van je favoriete vak, op de hoogte blijven van de rol van wiskundigen in de nieuwste ontwikkelingen in de maatschappij. Dat zijn de ingrediënten van de NWD en maken een bezoek aan dit tweedaagse evenement meer dan waard.

Vier plenaire lezingen en veertig workshops geven voldoende stof om gelukkig van te worden. In dit verslag komen slechts enkele workshops voor. Als deelnemer kun je er zelf maar vier bijwonen. Op de site van de NWD kun je hand-outs en presentaties van vrijwel alle lezingen en workshops vinden [1].

Cycloïde

Hoe bijzonder een cycloïde is werd door Michiel Doorman mooi geïllustreerd. Aan de hand van een ventielkromme, zijn muze, liet hij twintig jaar NWD de revue passeren. Om de kromme zichtbaar te maken bevestigde hij een lampje op het ventiel van de voorband van zijn fiets en nam in het schemerdonker (met een lange sluitertijd) een foto van de baan ervan. Zo krijg je goed zicht op de baan van het lampje. Je zou nu ook met speels gemak leerlingen met hun smartphone een foto

of een filmpje ervan kunnen laten maken. Is er een formule van de baan? Hoe lang is de baan bij een omwenteling van het wiel? Iets verder gezocht: hoe groot is de oppervlakte van het vlakdeel dat tussen de grond en een omwenteling wordt ingesloten? Met wat integraalrekening kun je dan voor de lengte van één periode van de cycloïde op 8 komen en voor de oppervlakte onder één periode tot 3π . Michiel liet met filmpjes zien dat de (halve, omgekeerde) cycloïde de brachistochroon is, de snelste glijbaan van een punt A boven de grond naar een punt B op de grond. Daarbij maakt het niet uit welk deel van de (halve) cycloïde je neemt. Vanaf elk willekeurig punt op de baan ben je even snel in het eindpunt. Een andere wereldvondst was die van Huygens bij een slingeruurwerk. Als je een massa

aan het eind van een draadje een uitwijking geeft en loslaat zodat hij gaat slingeren, dan is de slingertijd bij grotere uitwijkingen niet gelijk aan die bij kleinere uitwijkingen. Huygens construeerde zogenaamde wangen in het uurwerk waardoor de massa tijdens het slingeren precies op de baan van een cycloïde ligt, met als effect dat de slingertijd constant blijft [2]. Zie ook het artikel van Jan Aarts en Henk Broer [3].

Straling

Na deze terugblik op mooie wiskunde in de voorgaande twintig edities van de NWD en de conclusie dat wij zelf de muzen van de wiskunde zijn, kwam Fieke Dekkers. Zij is als wiskundige verbonden aan het RIVM en doet onderzoek naar de invloed van alledaagse straling op de gezondheid, op het risico om kanker te krijgen. De modellen die voor grote hoeveelheden straling zijn opgesteld voor het risico op kanker berusten op tellingen van kankergevallen bij kernrampen. De vraag is of deze lineaire modellen een-op-een kunnen wor-



Figuur 1 Swier Garst in zijn oloïde.



Figuur 2 Peter Kop in de oloïde.

den voortgezet naar risico's op kanker bij zeer kleine hoeveelheden straling, zoals bij het personeel in ziekenhuizen bij röntgenlabs. Ze maakte met een alcoholverstuiver de straling zichtbaar die in de zaal ook aanwezig is. Lopen we daarmee een hoger risico? Fieke liet in een duidelijk verhaal doorschemeren dat er eigenlijk nog geen zinnig woord gezegd kan worden over de risico's op kanker bij het blootstaan aan zeer kleine straling.

Oloïde

Na de lezing zag ik Swier Garst, de huidige voorzitter van de NVvW, in zijn oloïde rondraaien over de vloer van het Atrium. Een oloïde bestaat uit aaneengelaste stalen buizen die de contouren van twee dwars in elkaar geschoven bierviltjes vormen. Middenin zitten een paar buizen waartegen je de voeten kunt schrap zetten. Dan erin hangen en na een zetje rollend over de vloer bewegen. Ook Peter Kop, opleider van wiskundedocenten aan het ICLON, deed een poging maar de steuntjes zijn op Swiers maat (1,72 m) gemaakt en Peter is 1,96 m.

Archimedes

De lezing van Martin Kindt ging over methoden die Archimedes al gebruikte om de inhoud van een bol te bepalen. Rechts hangt de cilinder met zwaartepunt op afstand r rechts van het ophangpunt, en links hangen de bol met straal r en een kegel met straal bodem $2r$ en hoogte $2r$ op een afstand $2r$ van het ophangpunt, zie links in Figuur 3. In de rechterfiguur zie je een dwarsdoorsnede van de cilinder; in deze figuur zijn de bol en kegel tweemaal getekend. Hierin is te zien dat de horizontale doorsnede van de bol op afstand x van boven gelijk is aan $\pi \cdot y^2$ en dat tegelijkertijd de doorsnede van de ke-

gel op afstand x onder de top gelijk is aan $\pi \cdot x^2$. Het moment van deze twee schijfjes is $2r \cdot (\pi \cdot x^2 + \pi \cdot y^2)$.

In de rechthoek van de figuur doorsnijdt de bol het vlak van het papier in een cirkel met straal r . Uit de vergelijking van deze cirkel $y^2 + (r - x)^2 = r^2$ (ook voor $x > r$) volgt met enig rekenen $2r \cdot (\pi y^2 + \pi x^2) = x \cdot \pi \cdot (2r)^2$. Dit laatste is precies het moment van een cirkel met straal $2r$ op afstand x van het ophangpunt. Als je nu x van 0 tot $2r$ laat lopen dan hangen steeds een cirkel van de bol en een beetje van de kegel op afstand $2r$ beide op afstand x van boven, in evenwicht met een grote cirkel met straal $2r$ op afstand x (rechts). Hieruit concludeert Archimedes dat de hele bol en de hele kegel op afstand $2r$ in evenwicht hangen met de cilinder. Wegens symmetrie zit het zwaartepunt van de cilinder op afstand r rechts van het ophangpunt.

Archimedes concludeert hieruit dat

$$2r \cdot (\text{Inhoud bol} + \text{Inhoud kegel}) = r \cdot (\text{Inhoud cilinder}).$$

Er van uitgaande dat

$$\text{Inhoud kegel} = \frac{1}{3} \cdot \text{Inhoud cilinder},$$

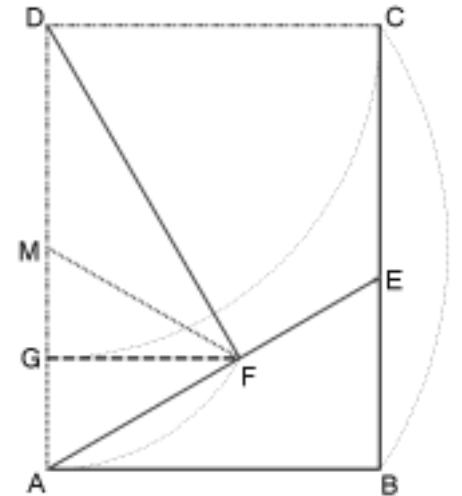
komt er

$$2 \cdot I_{\text{bol}} = \frac{1}{3} \cdot I_{\text{cilinder}} = \frac{1}{3} \pi \cdot 8r^3,$$

dus

$$I_{\text{bol}} = \frac{4}{3} \pi r^3. \quad \text{Q.E.D.}$$

Van Martin was een boekje te koop met een verzameling van al zijn 'Wat te bewijzen is...' uit de jaargangen van de *Nieuwe Wiskrant*. Wie wilde kon een gesigneerd exemplaar be-



Figuur 4 Rechthoek verdelen.

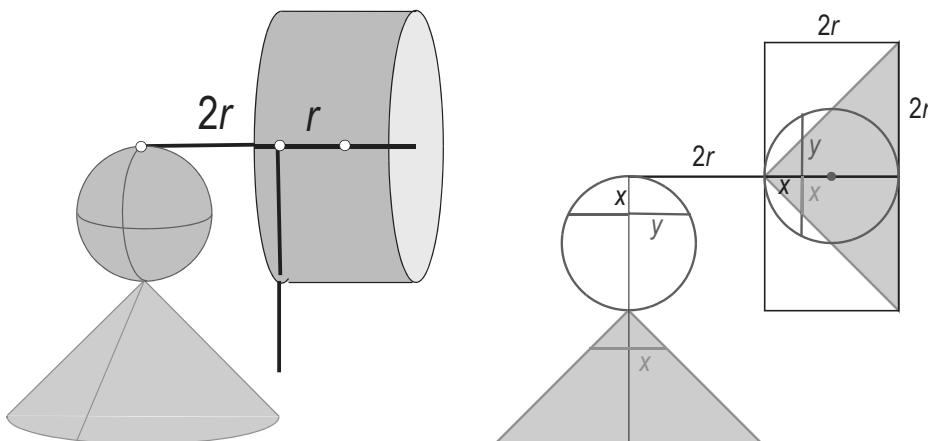
machtingen. In de pauze na de eerste lezing snel naar B15 om alles in gereedheid te brengen voor mijn eigen workshop.

Klassikaal vouwen

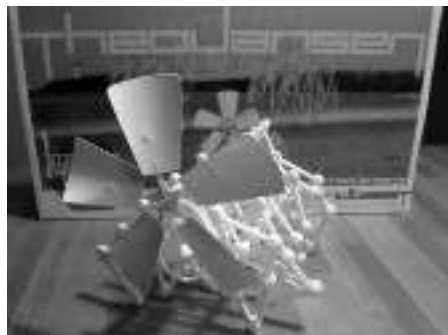
Samen met Marjan Botke moesten gekleurde papieren, kartonnen neusisstroken, geodriehoeken, linialen, markeerstiften, schaaftjes, werkbladen en een blad met voorkennis die nodig is, op de tafels worden gelegd. Na een korte introductie, waarbij iedereen op een of andere manier een gegeven hoek in drie gelijke hoeken moest delen, werd vervolgens met behulp van 'klassikaal' vouwen (een geodriehoek en een passer heeft een leerling doorgaans ook niet bij zich) stap voor stap naar twee lijnen in een rechthoekig stuk papier (een A4'tje) toegewerkt. De langs die lijnen in stukken geknipte delen van de rechthoek zouden na wat schuiven tot een vierkant gelegd kunnen worden. In een PowerPoint werden de mogelijke keuzes voor de deelnemers voorbereid. Daarna ging ieder in groepjes aan de slag met de trisectie van een hoek of verdelen van een rechthoek naar een vierkant of een vierkant naar een gelijkzijdige driehoek.

Er werd eerst een instructie gegeven die tot een bepaald resultaat leidde. Daarna moest er worden nagedacht of het wel exact klopte en over een betere methode. Daarna moest er gezocht worden naar een bewijs. In de rechthoek ABCD (met $AD > AB$) passen we $DG = AB$ af, en we construeren F als snijpunt van de loodlijn door G op AD en de cirkel met middellijn AD . Dan trekken we DF , en we verlengen AF tot hij BC in punt E doorsnijdt.

Met de drie stukken ABE , AFD en $FECD$ kan een vierkant gelegd worden; schuif ABE omhoog totdat AB op DC past en schuif ADF naar rechts zodat A op E terechtkomt en AD op EC en het verlengde daarvan. We dagen de



Figuur 3



Figuur 5 Mini-strandbeest.

lezer uit om te bewijzen dat je nu inderdaad een vierkant krijgt!

In de workshop waagden de deelnemers zich ook aan de neusismethode om een gegeven hoek in drie even grote hoeken te delen. Met het richten (het Griekse *neuein* betekent 'gericht zijn naar') van de strook vanuit het hoekpunt moet een vast lijnstukje worden afgepast tussen een cirkelboog en een lijn (die parallel loopt met een van de benen van de gegeven hoek). Voor het bewijs worden Z-hoeken, de hoekensom van een driehoek en gelijkbenige driehoeken (met twee stralen van de cirkel) gebruikt. Voor de constructie met de trisector was te weinig tijd. Wel waagden een aantal deelnemers zich aan de trisectie door origami. In bewijs daarvan wordt veelvuldig gebruik gemaakt van het feit dat een vouw eigenlijk een spiegeling is. Daarmee ontdek je allerlei eigenschappen van driehoeken, zoals gelijkbenigheid en bissec-

trices. Uiteindelijk kun je daarmee de trisectie bewijzen. Bij de stands van de NVvW en van Epsilon Uitgaven zag ik dat er ook een Zebra-boekje verschenen is over de driedeling van een hoek, deel 41, *Met passer, liniaal en neusislat* van Ad Meskens en Paul Tytgat.

Strandbeest

Het cadeau dat de sprekers dit jaar van de organisatie kregen was erg origineel. Een bouw pakket van een *mini*-strandbeest van Theo Jansen. Enkele jaren geleden kwam hij nog met zijn pvc-beesten op het dak van zijn auto ons vertellen hoe hij ze heeft ontworpen en liet ze ook door de zaal lopen. Na een avondje knutselen zat hij in elkaar. En hij doet het! Blazen tegen de propellers of draaien met de aandrijfas zorgt ervoor dat het beest gaat lopen. Dank voor dit stukje vernuft. Zie Figuur 5.

Het gat van Escher

De avondlezing over het gat in de prent van Escher, een galerij met een prentententoonstelling aan de haven van Malta, was spectaculair ondanks het feit dat Hendrik Lenstra hem naar zijn zeggen al enkele honderden malen gegeven had. Zie Figuur 6. Er werd uitgelegd hoe wiskundigen de transformatie van een normaal ruitjespapier kunnen overzetten in een golvend patroon. Zie Figuur 6 (rechts). Je ziet hoe de man die naar een prent staat te kijken in een gale-

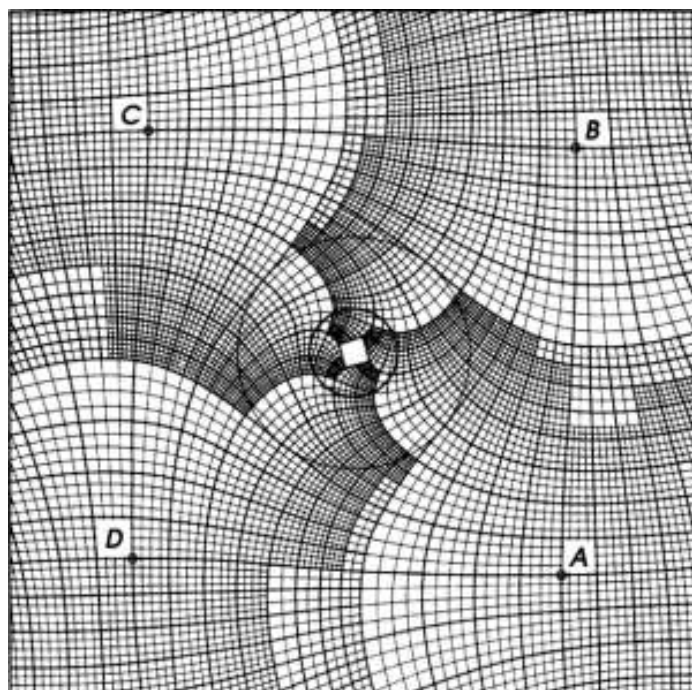
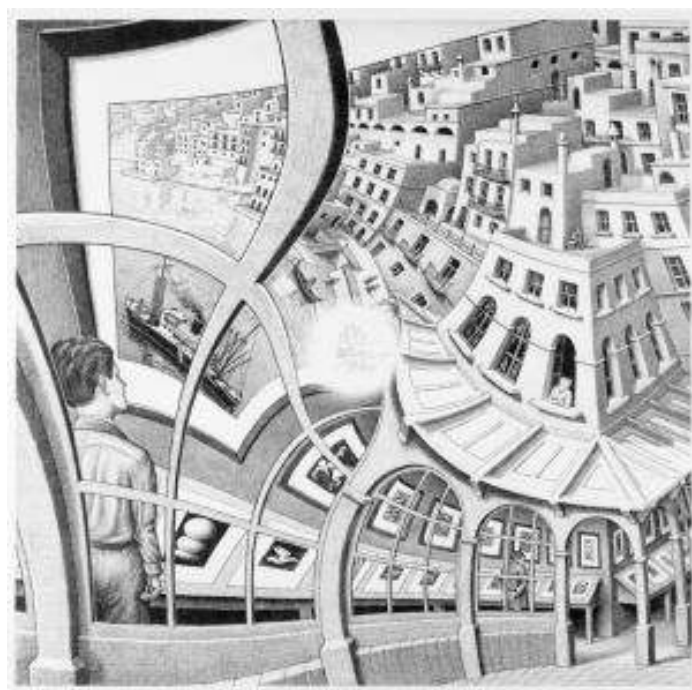
rij waar hij zelf op staat in feite een soort Droste-mannetje is dat bij inzoomen telkens weer terugkeert. Dit inzoomen werd in prachtige filmpjes gedemonstreerd. Leuk voor een familieavond om te laten zien. Het vierkant *ABCD* wordt gedraaid en sterk verkleind herhaald op het witte vierkantje. Daarin zit dan ook weer een nog kleiner wit vierkantje, enzovoorts.

Spelen, dansen en rennen

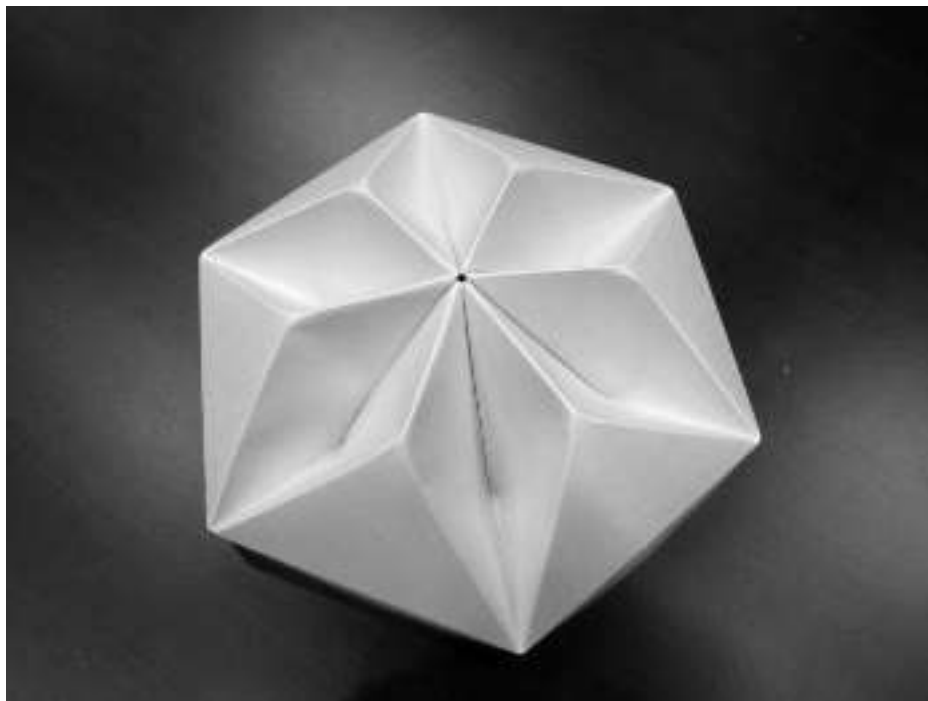
Na de lezing was het tijd voor spelletjes. Samen met Jörgen nam ik plaats aan een tafel met twee dames om met z'n vieren het spel RoboRama te spelen. Een ingewikkelde Halma-variant waarbij je jouw vier robots met door kaartjes bepaalde zetten naar de hoek diagonaal tegenover de starhoek moet delegeren. De dames gingen beter en eentje won. Een spel met meer levels. Maar voor mij op dat moment dus een Rob-o-Drama. Na de spelletjes tijd voor de dansvloer. De band 'De Buren' vond ik een succes. Lekker dansmuziek tot in de kleine uurtjes. Vroeg op voor de Funrun. Zes kilometer hardlopen in kou, wind en regen. Maar wat een deceptie toen bij de finish bleek dat er géén Pi-shirts waren. We hoorden dat het T-shirt in het teken van het π -jaar is bedrukt. Maar ze lagen nog in Utrecht.

Origami

Na het ontbijt ging ik naar een workshop over origami. Vorig jaar april las ik in het



Figuur 6 Links: Prentententoonstelling, rechts: Wiskundig patroon.



Figuur 7 Plafondkapje van Snowpuppe.

AD over een klein bedrijfje Snowpuppe in Den Haag dat origami in hun ontwerpen gebruikt. Toen ik informeerde of ze een workshop over hun werkwijze en producten wilden geven reageerden ze meteen erg enthousiast. Na overleg met de programmacommissie werd plaats gemaakt voor hun workshop op de NWD. Kenneth en zijn vrouw Nellianna zijn afgestudeerd in Delft op industriële vormgeving. Kenneth gaf ons een kijkje in zijn keuken. Hij liet zien hoe hij door de gulden snede geïnspireerd is. In zijn ontwerpen komt deze verhouding telkens terug. Hij showde zijn speciale paraplu, maar zijn bedrijf maakt vooral lampenkapjes (de 'Chestnut') en afdekkapjes tegen het plafond. De deelnemers gingen daarna onder hun leiding aan de slag met het vouwen van een plafondkapje uit een voorgeritst stuk karton. Het was een zeer geanimeerde bedrijvigheid. De in elkaar geflanste kapjes mochten mee naar huis genomen worden. Hij legde tot slot uit hoe hij zijn Chestnut-lampenkap had ontworpen door allerlei lijnen over een cirkelring te tekenen. Eerst acht middellijnen en dan diagonalen die steeds één punt verschillen met het diametraal punt. Het is mooi om te horen dat je van een dergelijk concept ook kunt leven.

Pi

Omdat dit jaar 14 maart geschreven kan worden als 3-14-15, ligt het voor de hand om 2015 internationaal uit te roepen tot 'Pi-jaar'. In dat licht gezien werd de slotlezing verzorgd door

Frits Beukers, auteur van het Zebra-boekje *Pi*, deel 6 uit de reeks.

De eerste benaderingen van π zijn gevonden door het benaderen van de omtrek via ingesloten en omgeschreven regelmatige veelhoeken bij een cirkel. Archimedes kwam op die manier al tot enkele decimalen van π . Ludolph van Ceulen was zo'n beetje de laatste die op die manier π nog (zonder rekenapparaat) in 35 decimalen wist te benaderen. Door het onderzoek aan reeksen in de zeventiende eeuw kwamen veel snellere methodes op de markt. De reeksontwikkeling

$$\arctan(x) = \frac{x}{1} - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} - \frac{x^7}{7} + \dots$$

geeft bij

$$\arctan(1) = \frac{\pi}{4}$$

echter nog een weinig snel convergerende reeks. De echte winst werd geboekt toen men met complexe getallen ging werken. Men gebruikt daarbij de regel dat het argument van het product van twee complexe getallen gelijk is aan de som van de argumenten van de twee getallen, eventueel + of -2π .

Machin vond dat $(1+i)(5-i)^4 \cdot (239+i)$ gelijk is aan het reële getal 228488, dus het heeft argument 0. Met de regel voor het argument van het product vinden we $\pi/4 - 4 \arctan(1/5) + \arctan(1/239) = 0$.

Dit levert de formule

$$\frac{\pi}{4} = 4 \arctan\left(\frac{1}{5}\right) - \arctan\left(\frac{1}{239}\right).$$

Hiermee kun je in weinig stappen relatief veel decimalen van π vinden.

De geniale Indiër Ramanujan vond

$$\pi \approx \frac{12}{\sqrt{190}} \log\left((2\sqrt{2} + \sqrt{10})(3 + \sqrt{10})\right).$$

Ik heb zijn benadering even op mijn GR ingetoetst en vond $\pi \approx 3,141592654$. Met de opkomst van de computer ging het snel met het aantal decimalen van π . Interessant is dat de Oekraïense broers Chudnovsky een computer bouwden die hun hele appartement in beslag nam. Er zijn filmpjes van hen op YouTube te vinden.

Koud en warm

De slotlezing van de NWD werd verzorgd door Peter Grünwald. Hij liet zien dat de wetenschap vervuild is met hypothesen die zogenaamd 'bewezen' zijn door statistische toetsen, en hoe we met eenvoudige statistiek zulke toetsen kunnen ontkrachten. Enigszins in verwarring verlaten we de zaal om de lunch te nuttigen. We praten nog wat na met deze en gene. Dan komen de collega's die met me zijn meegereden mij ophalen. Of ik ze weer veilig thuis wil brengen. Natuurlijk, maar pas nadat we onderweg de bekende drie bossen tulpen voor vijf euro hebben opgepikt voor onze 'vriendinnetjes'. Het waren ondanks het koude weer een paar warme dagen waaraan ik met plezier terugdenk.

Referenties

- 1 <http://www.fisme.science.uu.nl/nwd>.
- 2 K.P. Hart, De cycloïde, *Pythagoras* 39 (2000), 30–31.
- 3 J.M. Aarts en H.W. Broer, Schoolmeetkunde in het Horologium Oscillatorium van Christiaan Huygens, preprint, Rijksuniversiteit Groningen, 2010, www.math.rug.nl/~broer/pdf/aarts.

Arnoud den Boer

Afdeling Stochastische Operationele Research

Universiteit Twente

a.v.denboer@utwente.nl

Onderzoek Veni-project

Menselijke keuzes begrijpen en beïnvloeden

Aan Arnoud den Boer, tenure-tracker aan de Universiteit Twente, werd in 2014 een NWO Veni-beurs toegekend. In dit artikel beschrijft hij in het kort zijn onderzoek naar statistiek en optimalisatie van menselijke keuzes.

Discrete-keuzemodellen [1, 13] zijn wiskundige modellen die beschrijven hoe mensen kiezen uit een verzameling alternatieven met gegeven eigenschappen. Deze modellen worden in tal van toepassingsgebieden gebruikt om menselijk keuzegedrag te voorspellen en te bepalen hoe daar optimaal op gereageerd kan worden: marketing [7], landbouw [8], psychometrie [9], transportwetenschap [2], enzovoort. Vanwege de vele praktische toepassingen wordt er ook veel theoretisch onderzoek verricht naar schatten en optimaliseren met deze modellen. In 2000 ging zelfs de Nobelprijs voor Economie naar Daniel McFadden “for his development of theory and methods for analyzing discrete choice” (nobelprize.org).

Een veelgebruikt framework om menselijke keuzes te modelleren is het zogenaamde Random Utility Model (RUM) [10, 12]. Stel dat een persoon precies één item moet kiezen uit $n \in \mathbb{N}$ alternatieven, gelabeld $1, \dots, n$. De eigenschappen van elk alternatief i worden gemodelleerd door een vector $x_i \in \mathbb{R}^d$, voor een integer d . Volgens het RUM is de kans dat

alternatief i wordt gekozen dan gelijk aan

$$\mathbb{P}(U_i > U_j, \forall j \neq i), \quad (1)$$

waarbij $U_1, \dots, U_n$ stochastische variabelen

zijn die het nut (‘utility’) modelleren dat de persoon aan alternatieven $1, \dots, n$ toekent. De stochasten $U_1, \dots, U_n$ mogen onderling afhankelijk zijn, en hun verdeling hangt (uiteraard) ook af van de eigenschappen $x_1, \dots, x_n$. Men neemt ook aan dat hun verdelingen continu zijn, zodat er in (1) met kans één geen ‘tie’ voorkomt.

Het algemene RUM zoals hier geformuleerd blijkt in de praktijk nog te algemeen om



effectief statistiek en optimalisatie mee te bedrijven. Men neemt daarom vaak de toevlucht tot eenvoudigere modellen. Het meest populaire model is het zogenaamde *multinomial logit*-model (MNL-model) met lineaire nutsfuncties, dat veronderstelt dat

$$U_i = \beta^\top x_i + \epsilon_i, \quad i = 1, \dots, n. \quad (2)$$

Hier is $\beta \in \mathbb{R}^d$ een (onbekende) parameter, en zijn $\epsilon_1, \dots, \epsilon_n$ onderling onafhankelijke stochasten met Gumbel verdeling met gemiddelde nul. Door deze specifieke verdeling van ϵ_i aan te nemen krijgen de kansen (1) een elegante gesloten vorm:

$$\begin{aligned} \mathbb{P}(U_i > U_j, \forall j \neq i) &= \frac{e^{\mathbb{E}[U_i]}}{\sum_{j=1}^n e^{\mathbb{E}[U_j]}} \\ &= \frac{e^{\beta^\top x_i}}{\sum_{j=1}^n e^{\beta^\top x_j}}. \end{aligned} \quad (3)$$

De parameter β is eenvoudig te schatten uit data met behulp van ‘maximum-likelihood estimation’ (MLE), wat de populariteit van MNL deels verklaart.

Het MNL-model negeert mogelijke correlaties tussen de verschillende U_i . Dat dit onrealistisch kan zijn wordt geïllustreerd door de befaamde ‘red bus – blue bus paradox’. Stel dat er drie manieren zijn om van A naar B te reizen: (i) met de auto, (ii) met een blauwe bus, en (iii) met een rode bus. Zij U_1, U_2, U_3 de bijbehorende nutsvariabelen. De kleur van een bus is irrelevant voor de voorkeuren van reizigers, en dus is $U_2 = U_3$ met kans één. Als nu de rode bus ineens niet meer beschikbaar is verwacht je dat er niet meer of minder mensen met de auto gaan: ieder die eerst de rode bus nam kiest nu voor de blauwe bus. In het MNL-model verandert de kans dat iemand voor de auto kiest echter wél, namelijk van $\exp(\mathbb{E}[U_1]) / (\exp(\mathbb{E}[U_1]) + 2 \exp(\mathbb{E}[U_2]))$ naar $\exp(\mathbb{E}[U_1]) / (\exp(\mathbb{E}[U_1]) + \exp(\mathbb{E}[U_2]))$. Dit fenomeen maakt MNL in sommige situaties een onrealistisch model.

Het ‘mixed multinomial logit model’ (MMNL-model) is een uitbreiding van MNL die veronderstelt dat β in (3) zelf ook een stochastische variabele is. Deze multidimensionale stochast β modelleert mogelijke heterogeniteit van de populatie. Als F de cumulatieve verdelingsfunctie is van β , dan is de kans dat een persoon kiest voor optie i gelijk aan

$$\begin{aligned} \mathbb{P}(U_i > U_j, \forall j \neq i) &= \int_{\mathbb{R}^d} \frac{e^{\beta^\top x_i}}{\sum_{j=1}^n e^{\beta^\top x_j}} dF(\beta). \end{aligned} \quad (4)$$

Een van de resultaten van reeds genoemde

Nobelprijswinnaar McFadden is dat hij, samen met Kenneth Train, heeft laten zien dat ieder RUM arbitrair goed benaderd kan worden door een MMNL-model [11]. De klasse van MMNL-modellen is daarmee veel rijker dan de MNL-modellen, en doordat het correlaties tussen $U_1, \dots, U_n$ modelleert heeft het niet het hierboven beschreven nadeel van MNL. Het schatten van de verdeling van β kan numeriek erg uitdagend zijn, evenals optimalisatieproblemen die gebruikmaken van MMNL-modellen.

Multi-armed bandit-problemen

Multi-armed bandit-problemen (MAB-problemen) zijn dynamische beslissingsproblemen waarbij de te optimaliseren doelfunctie onbekend is, maar gaandeweg geleerd wordt uit binnenkomende data. Het cruciale verschil met statische problemen is dat de beschikbare dataset groeit, doordat genomen beslissingen nieuwe data genereren. Deze nieuwe data kan helpen om de doelfunctie beter te leren en in de toekomst betere beslissingen te nemen. Er ontstaat zo een wisselwerking tussen statistiek en optimalisatie: je zoekt naar beslissingen die niet alleen de verwachte kortetermijnopbrengst maximaliseren, maar ook bijdragen aan het zo goed en snel mogelijk leren van de doelfunctie. Deze twee doelen zijn meestal conflicterend: kortetermijnopbrengst maximaliseren zorgt er vaak voor dat beslissingen snel convergeren naar de beslissing die het beste lijkt op grond van de data, terwijl het leren van de doelfunctie juist sneller gaat als er *spreiding* in de beslissingen is. Het vinden van beslissingsregels die de juiste balans vinden in deze zogenaamde *exploration–exploitation trade-off* is een belangrijk terugkerend vraagstuk in MAB-problemen.

MAB-problemen zijn momenteel een *hot topic* in de operations research, en worden ook veelvuldig bestudeerd in de statistiek, econometrie en computer science. Dat komt door de vele maatschappelijke en commerciële toepassingen van MAB, maar ook door de wiskundige uitdagingen die het biedt (MABs zijn in de regel niet exact oplosbaar).

Veni-onderzoek: MABs met keuzemodellen

In mijn Veni-onderzoek verbind ik discrete-keuze modellen met multi-armed bandit-problemen.

Dit is gemotiveerd door dynamische beslissingsproblemen uit de praktijk die met menselijk keuzegedrag te maken hebben. Twee voorbeelden uit de (online) retail zijn assortimentsoptimalisatie (welke producten moet

een retailer in zijn schap zetten, of op zijn website tonen, om de verwachte opbrengst te maximaliseren) en prijssoptimalisatie (bij welke verkoopprijzen is de verwachte opbrengst het grootst). Dit zijn allebei MAB-problemen waarbij menselijk keuzegedrag een belangrijke rol speelt. Bij assortimentsoptimalisatie gaat het om het bepalen van de *alternatieven* waaruit personen kunnen kiezen, bij prijssoptimalisatie om het bepalen van *eigenschappen* van de alternatieven. Ik bekijk problemen waarbij zowel de alternatieven als hun eigenschappen geoptimaliseerd kunnen worden.

Formeel beschouw ik het volgende type MAB-probleem: aan $N \in \mathbb{N}$ achtereenvolgende personen $n = 1, \dots, N$ wordt een verzameling alternatieven $S(n) \in \mathcal{S}$ met eigenschappen $\mathbf{X}(n) \in \mathcal{X}$ ter keuze aangeboden. Hier is $\mathcal{S}$ een collectie niet-lege deelverzamelingen van alle $J \in \mathbb{N}$ alternatieven $\{1, \dots, J\}$ die aangeboden kunnen worden; $\mathbf{X}(n)$ is een $d \times J$ matrix waarvan de j -de kolom $\mathbf{X}_j(n)$ eigenschappen van alternatief j modelleert, en is $\mathcal{X} \subset \mathbb{R}^{d \times J}$ een collectie van toegestane eigenschapsmatrices.

Het keuzegedrag van personen wordt gemodelleerd met een MMNL-model: de kans dat een persoon kiest voor alternatief j uit beschikbare alternatieven S met eigenschappen $\mathbf{X}$ is gelijk aan

$$\int_{\mathbb{R}^d} \frac{e^{\mathbf{x}_j^\top \beta}}{\sum_{k \in S} e^{\mathbf{x}_k^\top \beta}} dF(\beta), \quad j \in S. \quad (5)$$

Hier is F de (onbekende) cumulatieve verdelingsfunctie van β . De keuze voor j geeft vervolgens een opbrengst $r(j, S, \mathbf{X})$, waar $r : \{1, \dots, J\} \times \mathcal{S} \times \mathcal{X} \rightarrow \mathbb{R}$ een bekende continue functie is.

Zij $j(n)$ de keuze van persoon n , en zij $\mathbf{F}$ een verzameling van verdelingsfuncties die de onbekende F bevat. Het doel nu is om een reeks $(S(n), \mathbf{X}(n))$ ($n = 1, \dots, N$) alternatieven en eigenschappen te vinden die de worst-case cumulatieve verwachte opbrengst

$$\min_{F \in \mathbf{F}} \mathbb{E} \left[\sum_{n=1}^N r(j(n), S(n), \mathbf{X}(n)) \right] \quad (6)$$

maximaliseert. Elk paar $S(n), \mathbf{X}(n)$ mag afhangen van observaties in het verleden (dat wil zeggen van $j(m), S(m), \mathbf{X}(m)$ voor $m < n$), maar niet van toekomstige observaties.

Dit is een technisch uitdagend probleem waarvoor in het algemeen geen exacte oplossing

sing bestaat. Om er toch grip op te krijgen onderzoek ik de volgende twee deelproblemen:

1. *Karakteriseer de kwaliteit van schatters van F in eindige samples.* Goede beslisregels in MAB-problemen hebben een goede balans tussen *exploration* en *exploitation*: zij nemen niet altijd de beslissing die het beste lijkt op grond van een schatting $\hat{F}_n$ van F , maar wijken daar soms van af om F sneller te leren. Om te bepalen hoeveel of hoe vaak je dit moet doen is een goed begrip nodig van de kwaliteit van $\hat{F}_n$; in het bijzonder begrip hoe de verwachte schattingsfout $\mathbb{E}[|\hat{F}_n - F|]$, voor een zorgvuldig gekozen norm, afhangt van de eerdere beslissingen $\{(S(m), \mathbf{X}(m)) \mid m < n\}$. Voor MLE in het MNL-model heb ik zulke resultaten afgeleid [5] en toegepast op dynamisch prijzen [3–4, 6]; voor het MMNL-model zijn zulke resultaten niet bekend.

2. *Ontwerp asymptotisch optimale beslisregels.* Omdat het niet mogelijk is een beslisregel te vinden die (6) maximaliseert, zoek ik een asymptotisch optimale benadering. In het bijzonder zoek ik een serie functies $\pi_n : (S \times \mathcal{X} \times \{1, \dots, J\})^{n-1} \rightarrow (S \times \mathcal{X})$, $n \in \mathbb{N}$, zodat, als $(S(n), \mathbf{X}(n)) = \pi(\{(S(m), \mathbf{X}(m), j(m)) \mid m < n\})$ voor alle n , dan de *groeisnelheid* van (6) in n zo laag mogelijk is. Om te bepalen of de gevonden beslisregel asymptotisch optimaal is, ga ik ook de laagst mogelijke groeisnelheid van (6) die een willekeurige beslisregel $(\pi_n)_{n \in \mathbb{N}}$ kan behalen, karakteriseren.

Het oplossen van deze twee uitdagingen zal de twee vakgebieden van discrete-keuzetheorie en multi-armed bandit-problemen met elkaar verbinden, en hopelijk tot veel nieuw boeiend en relevant onderzoek leiden. Daarnaast zal het voor heel concrete problemen uit de praktijk, zoals het assortimentsoptimalisatieprobleem, een belangrijke bijdrage leveren.

Biografie

Arnaud den Boer (1982) studeerde wiskunde aan de Universiteit Utrecht en deed vervolgens de post-master Mathematics for Industry aan het Stan Ackermans Instituut van de Technische Universiteit Eindhoven. Bij het Centrum Wiskunde & Informatica schreef hij zijn proefschrift *Dynamic Pricing and Learning*, in 2015 bekroond met de Gijs de Leve-prijs. Na postdoc-posities aan de Technische Universiteit Eindhoven en de Universiteit van Amsterdam is hij sinds november 2013 als tenure-tracker verbonden aan de Universiteit Twente, vakgroep Stochastic Operations Research. Zijn onderzoeksinteresses zijn multi-armed bandit-problemen, discrete-keuze modellen, statistische inferentie in wachttijdmodellen, en de interactie tussen modellering, statistiek en optimalisatie in stochastische beslissingsproblemen.

Referenties

- 1 M. Ben-Akiva en S. Lerman, *Discrete Choice Analysis. Theory and Application to Travel Demand*, The MIT Press, Cambridge, MA, 1985.
- 2 E. Ben-Elia en Y. Shiftan, Which road do I take? A learning-based model of route-choice behavior with real-time information, *Transportation Research Part A: Policy and Practice* 44(4) (2010), 249–264.
- 3 A.V. den Boer, Dynamic pricing with multiple products and partially specified demand distribution, *Mathematics of Operations Research* 39(3) (2014), 863–888.
- 4 A.V. den Boer en B. Zwart, Simultaneously learning and optimizing using controlled variance pricing, *Management Science* 60(3) (2014), 770–783.
- 5 A.V. den Boer en B. Zwart, Mean square convergence rates for maximum quasi-likelihood estimators, *Stochastic Systems* 4(2) (2014), 375–403.
- 6 A.V. den Boer en B. Zwart, Dynamic pricing and learning with finite inventories, te verschijnen in *Operations Research* (2015).
- 7 P.K. Chintagunta en J.P. Dubé, Estimating a stockkeeping-unit-level brand choice model that combines household panel data and store data, *Journal of Marketing Research* 42(3) (2005), 368–379.
- 8 S. Colombo, N. Hanley en J. Louviere, Modeling preference heterogeneity in stated choice data: an analysis for public goods generated by agriculture, *Agricultural Economics* 40(3) (2009), 307–322.
- 9 T.R. Johnson, Discrete choice models for ordinal response variables: a generalization of the stereotype model, *Psychometrika* 72(4) (2007), 489–504.
- 10 D. McFadden, Economic choices, *The American Economic Review* 91(3) (2001), 351–378.
- 11 D. McFadden en K. Train, Mixed MNL models for discrete response, *Journal of Applied Econometrics* 15(1) (2000), 447–470.
- 12 P. Suppes, D.H. Krantz, R.D. Luce en A. Tversky, *Foundations of Measurement*, Volume II, Academic Press, San Diego, CA, 1989.
- 13 K. Train, *Discrete Choice Methods with Simulation*, Cambridge University Press, second edition, 2009.

Remko Scha

*Institute for Logic, Language and Computation
Universiteit van Amsterdam
scha@uva.nl*

In Memoriam Hugo Brandt Corstius (1935–2014)

Vanitasstillevens

Op 28 februari 2014 overleed de schrijver Hugo Brandt Corstius te Amsterdam. Brandt Corstius was alom bekend vanwege zijn vervaarlijke politieke columns, uitdagende literaire essays, en inventieve taalspelen; maar hij was ook de wiskundige die in Nederland de taaltechnologie lanceerde en de mathematische linguïstiek op de kaart zette. Remko Scha (emeritus hoogleraar computerlinguïstiek aan de Universiteit van Amsterdam) beschouwt het leven en het oeuvre van deze briljante pionier.

Hugo Brandt Corstius wordt op 29 augustus 1935 te Eindhoven geboren als zoon van de leraar Nederlands dr. J.C. Brandt Corstius, die in 1946 medeoprichter was van het Humanistisch Verbond, en vanaf 1960 hoogleraar literatuurwetenschap in Utrecht. Nadat Hugo het Utrechts Stedelijk Gymnasium doorlopen heeft, gaat hij in 1953 wiskunde studeren aan de Universiteit van Amsterdam. Van 1957 tot 1959 is hij redacteur van het studentenblad *Propria Cures*.

Na zijn afstuderen krijgt Hugo in 1961 een promotieplaats bij Alfred Tarski in Berkeley. Maar hij gaat al spoedig terug naar Amsterdam, om te werken aan een promotieproject over computationele taalkunde aan het Mathematisch Centrum, onder supervisie van Adriaan van Wijngaarden. Dit leidt in 1970 tot het proefschrift *Exercises in Computational Linguistics* [10].

In deze periode wordt Brandt Corstius ook zichtbaar voor de literaire wereld. Zijn eerste artikelen verschijnen in het *Hollands Maandblad* van K.L. Poll [15]. Onder de naam Raoul Chapkis publiceert hij onder meer *De reizen van Pater Key* (een satirisch reisverhaal in de trant van Swift en Voltaire) [22]. In 1966 wint hij zijn eerste literaire prijs (de Anne Frank-prijs, voor *Ik sta op mijn hoofd* van Raoul Chapkis) [23].

Na zijn promotie in 1970 treedt Brandt Corstius in deeltijddienst bij de Faculteit der Let-

teren van de Universiteit van Amsterdam — aanvankelijk bij de vakgroep Neerlandistiek, vanaf 1974 bij de vakgroep Algemene Taalwetenschap van Simon Dik. “HBC bleek een ander persoon dan het ‘monster’, de columnist Piet Grijns. Hij was een vriendelijke, geduldige en geestige docent.” [29] In deze periode schrijft hij leerboeken over Chomsky’s mathematische linguïstiek en over de computertaalkunde; sommige van zijn vele tijdschrift-artikelen gaan daar ook over [5, 12–13]. Van 1974 tot 1982 is hij eveneens buitengewoon lector aan de Erasmus Universiteit te Rotterdam. In 1983 is hij gastdocent Nederlands in Minneapolis, en in 1984 is hij vanuit Rotterdam gedetacheerd in Leiden.

In de tweede helft van de tachtiger jaren heeft een subsidieronde van NWO tot gevolg dat veel letterenfakulteiten vakgroepen gaan oprichten die formele methodes en digitale technieken toepassen op letterenvakken (‘alfa-informatica’). Bij de meeste universiteiten, ook bij de UvA, wordt dit ingevuld als computerlinguïstiek; de eerste voltijds hoogleraren op dit gebied worden nu aangesteld. Maar Brandt Corstius bedankt voor deze eer. Wel blijft hij tot 1996 colleges mathematische linguïstiek geven bij ATW in Amsterdam, doceert hij (nadien) Nederlandse literatuur in Parijs, en vervult hij nog kortstondige gastdocentschappen in Tilburg en Delft. Maar zijn publicaties verschijnen in tijdschriften zonder

peer review, zoals *NRC handelsblad*, *Het Parool*, *de Volkskrant* en *Vrij Nederland*. In veel gevallen meet hij zich daarbij de identiteit aan van een fictief heerschap (zoals, bijvoorbeeld, Victor Baarn, Batticus, Battus, Dolf Cohen, Jan Eter, Piet Grijns, Peter Malenkov, Stoker of Talisman), en soms die van een fictieve dame (Drs. G. van Buren of Maaïke Helder). Veel van deze artikelen zijn gebundeld in een lange reeks boeken, meestal uitgegeven bij Em. Querido te Amsterdam.

In dit gedeelte van zijn oeuvre maakt Brandt Corstius met zichtbaar genoeg gebruik van de speelruimte die de afwezigheid van een academisch kader oplevert. Piet Grijns: “Wie mij leest moet zelf ook werk doen. Hij moet uitzoeken wat ik meen, wat ik niet meen, wat ik lieg en een enkele keer waarin ik me vergis.” [1, p. 132] Maar in de vorm en in de inhoud van al deze essays, columns en taalgappen herkennen we steeds de wiskundige en de computertaalkunstenaar.

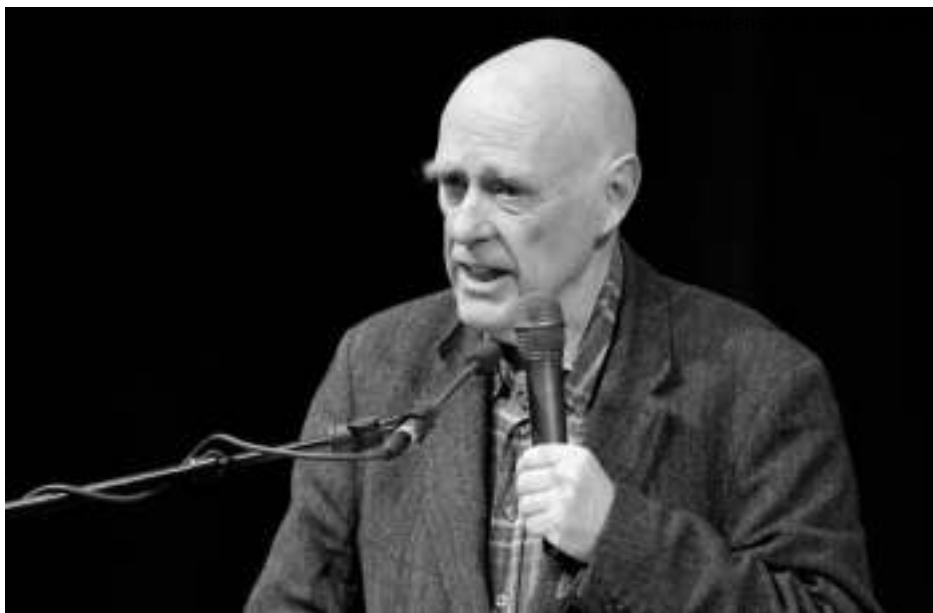
Informatica en topologie

Als gymnasiast was Hugo volgens eigen zeggen een “misdadig slechte leerling, in alle vakken behalve tekenen, hardlopen, Latijn en Nederlands.” [17, p. 46] Maar hij rapporteert ook dat hij in die tijd de computer al in het vizier kreeg. Hij las *Giant brains, or machines that think* van Edmund C. Berkeley — een tamelijk technisch boek, waarin onder meer de werking van de toen net uitgevonden digitale rekenmachines werd uitgelegd. En hij wou daar gelijk mee aan de slag. “De uitvinding om automatisch te rekenen berustte op elektrische schakelaars die elektrische schakelaars uit- en aan konden doen. Ik ging naar een elektriciteitswinkel op de Oudegracht in

Utrecht. Een schakelaar die dicht ging als er een stroompje overheen liep [...] kostte vierendertig gulden. Ik had er zo'n honderd nodig. Dus ik kon hem niet bouwen. Maar ik snapte wel hoe Berkeley het deed.”[17, p. 76]

In 1953, toen Hugo met zijn wiskundestudie begon, was er nog maar één computer in Nederland (bij het onderzoekslaboratorium van Shell). Informatica was geen zelfstandige studierichting, maar was onderdeel van de wiskunde. Eén van de toonaangevende hoogleraren was Adriaan van Wijngaarden, die later de baanbrekende programmeertalen *Algol 60* en *Algol 68* zou ontwerpen. Hugo kon zich dus degelijk bekwamen in de *state of the art* van de informatica, en hield zich daarnaast bezig met taalwetenschap en filosofie. Maar ook de reguliere wiskunde had zijn interesse. Zo was hij vier jaar lang studentassistent topologie. “Ik kwam binnen bij professor De Groot, die is nu dood, maar dat was een heel aardige man. En die had op zijn bord — het is een topoloog, en ik wist niets van topologie — een heel rare tekening met lettertjes en zo. En ik kwam binnen en zei daar moet nog een streep, van *a* naar *b* zal ik maar zeggen. En de Groot zei: ‘Ja! Geniaal!’ Ik dacht dat hij mij voor de gek hield. Maar later bleek dat die streep, dat dat het punt was waardoor de hele figuur kon draaien. Ik wist niets van topologie, maar hij nam me onmiddellijk aan als kandidaatsassistent. [...] Ik vond topologie ook wel een leuk vak hoor. Hij wilde dat ik bij hem ging promoveren. Maar ik zei ik snap niets van topologie. Dat is mij veel te moeilijk. Een prachtig vak, maar dat je geen getallen hebt, dat vind ik erg. De hoeken en de afstanden bestaan niet. Het gaat er alleen om of dingen verbonden zijn, en draaiing, honderd dimensies. Dat gaat mij echt veel te ver. Maar daardoor had ik vier jaar een baan. Dat was in 1956.” [18]

Hugo's bedenkingen bij de topologie gelden voor de wiskunde in het algemeen. In hetzelfde interview dat ik zojuist citeerde merkt hij op dat Noam Chomsky (de uitvinder van de mathematische taalkunde) geen groot wiskundige is, en vervolgt dan: “Ik ben ook geen groot wiskundige, maar ik had toch wel algebra gedaan in ieder geval. Dat is met al die vakken zo, als je er wat vanaf weet, dan begrijp je dat je er eigenlijk niets vanaf weet. Vooral in de wiskunde is dat zo. Daar moet je een genie zijn, wil je ermee doorgaan. Ik ben geen genie, dus ik hield ermee op.” [18] Als Hugo na zijn afstuderen een promotieonderzoek wil gaan doen, moet het dus niet over de zuivere wiskunde gaan. Hij kiest voor de computationele afslag.



Hugo Brandt Corstius in 2010

Foto:Haags Uitburo

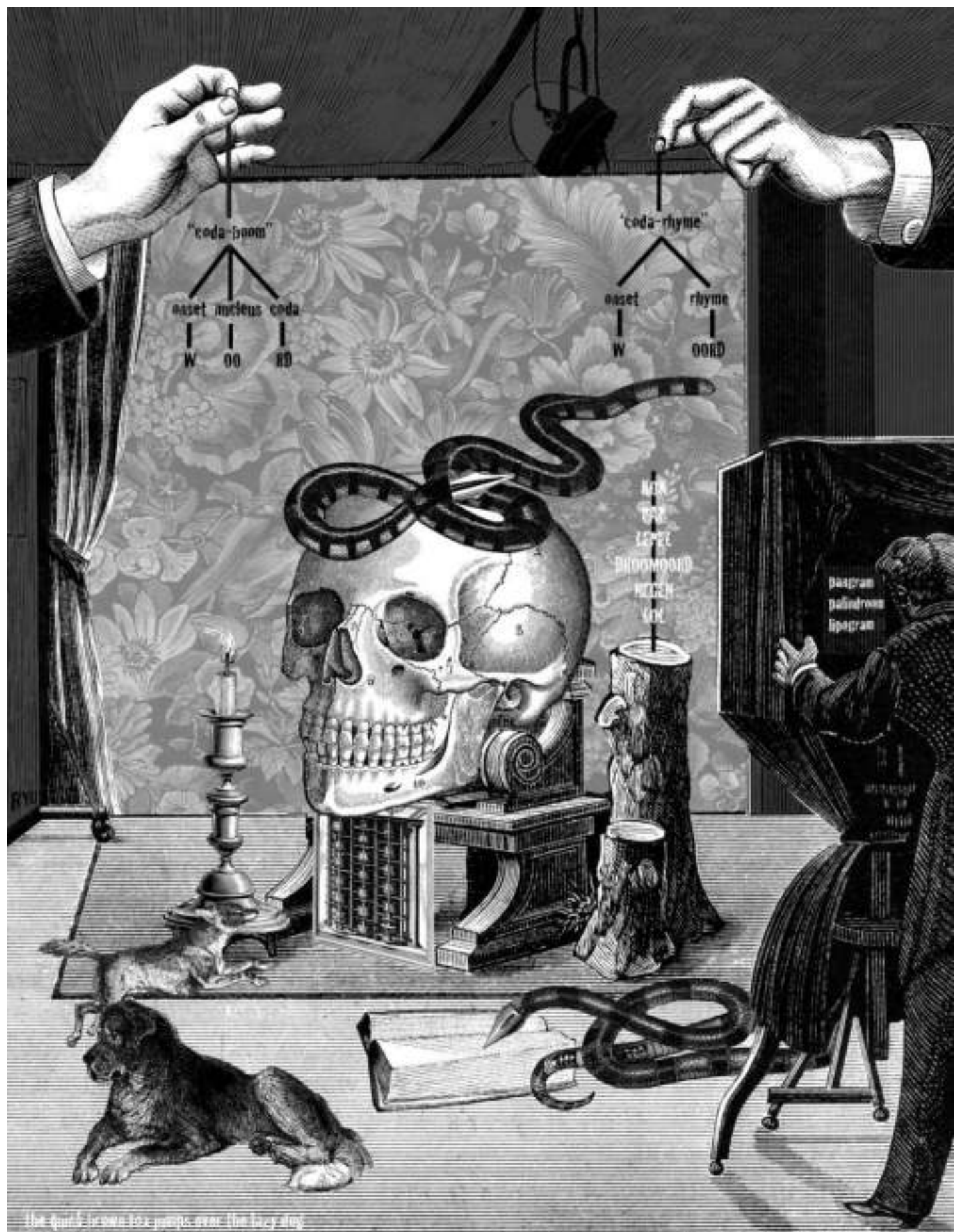
Op voorspraak van E.W. Beth krijgt hij in 1961 een promotieplaats bij de befaamde logicus Alfred Tarski in Berkeley. Maar de klus die Tarski voor hem in gedachten bleek te hebben, over de axiomatisering van de vlakke meetkunde, kon Hugo niet erg bekoren. En Hugo's tegenvoorstel, om *De Elementen* van Euclides te computeriseren, vond Tarski te moeilijk. Toen Adriaan van Wijngaarden een keer in Berkeley op bezoek was, ontstond daarom het idee voor een promotieonderzoek aan het Mathematisch Centrum in Amsterdam, over een leuker onderwerp: de *computertaalkunde*. Volgens Brandt Corstius zelf berustte dit idee op een misverstand, dat voortkomt uit een ambiguïteit in de Nederlandse woordstructuur: Van Wijngaarden dacht aan de wetenschap der computertalen — hij had toen net Algol 60 gelanceerd. Maar zijn nieuwe promovendus dacht aan linguïstiek met de computer. Gelukkig was Van Wijngaarden daar ook voor in, en zo begon Hugo aan het allereerste Nederlandse onderzoek in de computerlinguïstiek [6, p. 10]. (Bij zijn bezoek aan Berkeley werd Van Wijngaarden vergezeld door N.G. de Bruijn. Later heeft Brandt Corstius zich wel eens afgevraagd hoe het allemaal gelopen zou zijn als hij met De Bruijn gesproken zou hebben over zijn plannen met Euclides — die immers opvallende overeenkomsten vertonen met De Bruijn's latere *Automath*-project[19].)

Taaltechnologische oefeningen

Aan het begin van de zestiger jaren waren er inmiddels talrijke computers in ons land, die werden gebruikt voor administratieve bewer-

keningen. Toch hadden informatici meteen al fantasieën over allerlei diensten die via een elektronisch netwerk aan het grote publiek zouden kunnen worden aangeboden. Raoul Chapkis: “In mijn straat staan zeker honderd sets encyclopedieën, in heel Nederland wel over het miljoen. Een centrale computer kan de beste, meest up-to-date encyclopedie herbergen en iedere abonnee op het denknets kan op elk moment elke informatie krijgen die hij vraagt. Wat je nu per telefoon kan horen is tijd en weerbericht, en iets terugzeggen is er niet bij. Waarom niet het Turkse woord voor ‘voetbal’ en de uitkomst van 719037×426393 ?” [24, p. 6] Het belangrijkste verschil tussen deze plannen en het internet zoals we het nu kennen, is dat de toenmalige technologie suggereerde dat het zou moeten gaan om een klein aantal (grote, dure) centrale computers, met ‘domme’ terminals bij de mensen thuis.

Volautomatische vertaling tussen natuurlijke talen was misschien wel de belangrijkste niet-numerieke computertoepassing waarvan het maatschappelijk belang algemeen werd ingezien. (De Verenigde Staten leden nog onder het *Spoetnik-syndroom*. Massale vertaling van Russisch naar Engels leek de sleutel tot een Amerikaanse technologische inhaalslag.) Adriaan van Wijngaarden had het idee van automatisch vertalen al in zijn inaugurele rede van 1952 geopperd ([31] en [6, pp. 5–7]) en Brandt Corstius was daar enthousiast over: “Dat varkentje zou ik wel eens wassen.” [19, p. 2] Maar toen hij het promotieonderzoek over dit onderwerp ter hand had genomen, realiseerde hij zich al gauw dat automatisch vertalen heel moeilijk en misschien vooralsnog



onmogelijk zou zijn. Hij beperkte zich daarom tot bescheidenere taaltechnologische ‘oefeningen’: overzichtelijkere taken, die toch nuttig en interessant leken.

De vier hoofdstukken van het proefschrift overdekken een groot deel van het scala van linguïstische kwesties die voor de automatische taalverwerking van belang kunnen zijn. In volgorde van opklimmende moeilijkheid: de let-ter-greep-struc-tuur van woorden (syllabificatie), die nodig is voor automatische woordafbreking; de morfologische structuur van samengestelde woorden (zoals de Nederlandse hoofdtelwoorden: ‘tweehonderd-drieëntwintig’), die nodig is om hun betekenis (en hun vertaling) vast te stellen; de syntactische structuur van Nederlandse zinnen; de semantische interpretatie van Nederlandse teksten.

Over de problematiek van de woordafbreking had Brandt Corstius tijdens zijn wiskundestudie al nagedacht, en in Berkeley had hij zijn inzichten daadwerkelijk geïmplementeerd. Dat programma werd nu in Algol herschreven en getest [9]. Het foutpercentage was laag (0,5 procent), zeker als je in aanmerking neemt dat het programma niet beschikte over een lijst van Nederlandse woorden (dat kostte toen nog teveel geheugen); verreweg de meeste fouten waren daaraan te wijten (bijvoorbeeld ‘ko-plamp’ en ‘slach-toffer’) [10, pp. 31–33]. Het programma was meteen een succes. Het werd aangeschaft door veel Nederlandse kranten en uitgeverij. Brandt Corstius: “Dan las ik ’s avonds *Het Parool* en dacht ‘Goh, dat is verkeerd afgebroken.’ Want er waren natuurlijk altijd fouten.” [6, p. 121]

Belangrijker voor de agenda van het machinaal vertalen is de *morfologie*: de interne structuur die woorden kunnen hebben als gevolg van vervoeging en verbuiging, en/of omdat ze samengesteld zijn uit aan elkaar geplakte kleinere woorden. Een grote maar overzichtelijke klasse van samengestelde woorden wordt gevormd door de Nederlandse hoofdtelwoorden. Hierover gaat hoofdstuk 2 van *Exercises in Computational Linguistics*. Het beschrijft een programma dat voor Nederlands, Engels, Duits, Frans en Chinees de namen van positieve integers kan vertalen in hun decimale representatie — en andersom. Als de beide functies in serie geschakeld worden, kan het programma dus de getalsnamen tussen de genoemde vijf talen vertalen.

Hoofdstuk 3 van het proefschrift maakt een bescheiden stap in de richting van automatische syntactische analyse. Het beschrijft een programma dat in Nederlandse zinnen de on-

derdelen identificeert die rond een zelfstandig naamwoord geconstrueerd zijn (de *noun phrases*). Het programma gebruikt een contextvrije grammatica die niet linguïstisch adequaat hoeft te zijn: de grammaticaliteit van de input-zinnen wordt voorondersteld. De auteur merkt op dat het identificeren van *noun phrases* nuttig gebruikt kan worden bij “language statistics, computational stylistics, readability scores, information retrieval, et cetera.”

Het proefschrift culmineert in een *tour de force*: het vierde en laatste hoofdstuk bespreekt een programma dat Nederlandse input-taal ‘begrijpt’ — uiteraard binnen een strikt afgeperkt domein. Brandt Corstius (p. 163): “Het begrijpen is operationeel te definiëren wanneer de tekst een ingeklede vergelijking is: de juiste oplossing moet gevonden worden.” De tekstjes die het programma behandelt zijn vierkantsvergelijkingen, geformuleerd in termen van een gegeven vocabulaire van honderd woorden. Het kan gaan om een relatief eenvoudige zin (“Welk getal is het 9-voud van zijn omgekeerde?”), of een complexere zin (“Zoek een getal, waarvan de tweedemacht evenveel meer is dan 120, als het zelf minder is dan 120.”), of een korte zinssequentie (“Drie getallen verhouden zich als 1, 2 en 4. De som van de vierkanten der getallen is 525. Bereken die getallen.”) De uitdaging is om zo’n tekstje automatisch te vertalen naar een algebraïsche codering van het corresponderende sommetje (bijvoorbeeld “ $x = 9 \times 1/x$ ”, “ $x^2 - 120 = 120 - x$ ”, et cetera), zodat dat vervolgens opgelost kan worden. Om die vertaling op een degelijke manier voor elkaar te krijgen, is het onder meer nodig dat de syntactische structuur van elke zin goed geanalyseerd is, en dat de verwijzingen van de voornaamwoorden (‘hij’, ‘het’, ‘zijn’) en van de andere contextafhankelijke uitdrukkingen (‘het 9-voud’, ‘de tweedemacht’, ‘die getallen’, ‘de vierkanten’) correct zijn vastgesteld. Een algoritme wat dat met enige algemeenheid betrouwbaar doet is thans nog steeds *beyond the state of the art*. Toch ziet Brandt Corstius kans om door middel van een uitgekookte verzameling heuristieken een grote klasse van zulke puzzels te kraken. Voor een proefwerk dat door een onpartijdige wiskunde-leraar werd samengesteld haalt het programma het cijfer 7,5, wat indrukwekkend is. Maar hoe de algoritme generaliseert naar een grotere variëteit van invoerteksten is allerminst duidelijk. (Hier staat opzettelijk ‘de algoritme’ in tegenstelling tot het tegenwoordig gebruikelijke ‘het algoritme’. Toen computers nog zeldzaam waren en ‘algoritme’ nog niet in *Van Dale* stond, schijnt

het woord mannelijk geweest te zijn. Dat blijkt uit het volgende briefje, dat Adriaan van Wijn-gaarden schreef naar aanleiding van een van Hugo’s manuscripten: “Beste Hugo. Het is *de* algoritme. Hartelijke groet.” [Gerapporteerd door Brandt Corstius aan Kwee Tjoe Liong, circa. 1976.]) Ook beantwoordt de behavioristische notie van ‘begrijpen’ die Brandt Corstius hier hanteert, niet aan de methodologische maatstaven die hij bij andere gelegenheden aanlegt. Later distantieert hij zich dan ook van zijn programma: “[...] het slaat eigenlijk nergens op. [...] Ik doe akte van berouw.” [14]

Automatisch vertalen

Al in de begintijd van zijn promotieonderzoek is Brandt Corstius sceptisch geworden over de vooruitzichten van het automatisch vertalen. De algoritmische omzetting van een zin naar een anderstalig equivalent lijkt een formele analyse te vereisen van de structuur en betekenis van de input-zin. De theorieën die dat mogelijk zouden maken hebben we niet — maar zelfs als we ze wel zouden hebben, zou dat niet volstaan. Want de woorden, frases, zinnen en teksten die vertaald moeten worden, zijn veelvoudig ambigu. Oplossing van de ambiguïteit benodigt formele representaties van menselijke *common sense* en wereldkennis, waar we vooralsnog geen flauw idee van hebben.

In de stellingen bij het proefschrift wordt daarom slechts een bescheiden claim gemaakt: “Mechanische vertaling, ofschoon in de nabije toekomst niet te verwezenlijken, verschaft een nuttig gezichtspunt voor vele problemen in computational linguistics.” [6, p. 10] In de decennia na zijn promotie zal Brandt Corstius nog in vele voordrachten en artikelen het onbesuisde optimisme en de regelrechte oplichterij van minder gewetensvolle computerlinguïsten en AI-onderzoekers aan de kaak stellen.

De pessimistische voorspellingen over formele theorieën van taal en kennis zijn uitgekomen. Maar tegenwoordig is er een nieuwe golf van optimisme: men verwacht dat alles opgelost zal worden door de statistiek. (Want ook de onbegrepen semantische en pragmatische aspecten van taal correleren met oppervlakkige statistische eigenschappen van de woordsequenties.) Brandt Corstius was altijd al geïnteresseerd in de statistische eigenschappen van de taal, en in zijn boek *Algebraïsche Taalkunde* stelt hij: “Probabilistische grammatica’s, door Chomsky al in zijn eerste geschriften in de ban gedaan, zijn voor iedere concrete toepassing van een voortbrengen-de grammatica broodnodig.” Toch heeft hij in

diezelfde periode de statistische benadering van het vertaalprobleem categorisch verworpen: “Bepaalde ideeën zie je steeds weer opduiken. Zo de hoop dat de statistiek je kan helpen. Het blijkt van niet.” [3, p. 18] We zullen het zien.

Algebraïsche taalkunde

Uiteindelijk zag Brandt Corstius de taaltechnologische toepassingen dus vooral als een excuus voor de ontwikkeling van formele theorieën over taal: “Een computer is er niet zozeer om iets uit te rekenen (al doet-ie dat heel goed) als om de programmeur op allerstrengste wijze te dwingen zijn ideeën heel erg precies te doordenken en op te schrijven.” [25, p. 23] “De computer is het eindpunt van het formaliseren. Hij doet het werk als het werk gedaan is. Men misbruikt dus de computer als men hem gebruikt zonder dat er eerst goed geformaliseerd is.” [2, p. 27]

Als Brandt Corstius na zijn promotie bij de Universiteit van Amsterdam in dienst treedt, komt zijn wiskundige interesse weer duidelijker naar voren. Hij werkt dan in de context van de Algemene Taalwetenschap, en daar is dan net een revolutie aan de gang. Onder invloed van het werk van Noam Chomsky probeert men theorieën te ontwerpen die de syntactische structuren in een taal met formele precisie beschrijven — en men is daarbij vooral geïnteresseerd in de wiskundige eigenschappen van die theorieën, omdat die cruciale informatie zouden geven over de aard van het menselijk taalvermogen.

Chomsky ontwierp voor dit doel een nieuw stukje wiskunde, waarin de notie van een ‘taal’ op een tamelijk banale manier geformaliseerd wordt: als een (potentieel oneindige) verzameling zinnen, oftewel *strings van woorden*. Een *herschrijfgrammatica* is dan een recursieve definitie van zo’n verzameling, door middel van een stelsel van *herschrijfregels*. Een *herschrijfregel* $\alpha \rightarrow \beta$ (waarbij α en β strings van symbolen zijn) is een regel die toepasbaar is op elke string γ die α als substrings bevat; het resultaat is een kopie van γ waarin een voorkomen van α vervangen is door β .

Herschrijfregels waren eerder gebruikt door Axel Thue (in de combinatoriek) en Emil Post (om het idee van een ‘deductief systeem’ te formaliseren). Voor zijn linguïstische toepassing onderscheidt Chomsky twee soorten symbolen: *terminale* symbolen (de woorden van de taal) en *non-terminale* symbolen (woordsoorten en syntactische categorieën). De *herschrijfregels* van een *grammatica* corresponderen dan dus met een repertoire van mogelijke syntactische structuren.

De ‘taal’ die door een *herschrijfgrammatica* gedefinieerd wordt is de klasse van *eindige strings* van *terminale* symbolen die door herhaalde toepassing van de *herschrijfregels* vanuit een gedistingeerd beginsymbool gegeneerd kunnen worden.

Chomsky onderscheidt verschillende typen *herschrijfregels*, al naar gelang ze al of niet aan bepaalde formele beperkingen voldoen. Sommige verzamelingen strings kunnen al door eenvoudige regels gegeneerd worden, en voor andere verzamelingen zijn complexere regels nodig. Er is een hiërarchie van soorten *grammatica’s* die steeds complexere regels gebruiken: de *Chomsky-hiërarchie*. De linguïstische vraag is nu, op welk niveau in de hiërarchie de *grammatica* zit die de verzameling Engelse (of Nederlandse of Chinese) zinnen karakteriseert.

Deze Chomskyaanse wiskunde (bekend als de *Theorie der Formele Talen*) was in de loop van de zestiger jaren een belangrijk werktuig geworden voor de moderne linguïst. Brandt Corstius houdt zich ernstig bezig met deze theorie, onderwijst aanstaande linguïsten erover, en schrijft het eerste Nederlandstalige leerboek [12]. Zijn literaire inslag leidt tot didactische innovaties. Zo legt hij de *eindige-toestands-automaat* (Finite State Automaton) uit aan de hand van een stukje Amsterdamse stadsplattegrond [11].

En passant ontdekt Brandt Corstius de formele ontoereikendheid van enkele bewijzen die Chomsky en diens volgeling Postal hadden gegeven over de generatieve *grammatica’s* van het Engels en van de Noord-Amerikaanse taal Mohawk. Deze bewijzen trekken uit bepaalde syntactische verschijnselen de conclusie dat de eenvoudigere *grammaticatypes* uit Chomsky’s hiërarchie deze talen niet adequaat kunnen beschrijven. Brandt Corstius laat zien dat de bewijzen van Chomsky en Postal niet kloppen — en laat ook zien op welke manier je de door hen gewenste conclusies wel kunt vaststellen [12, pp. 74–75, 95–96].

Wetenschapsmethodologie

Door het hele oeuvre van Brandt Corstius loopt een filosofische lijn. Zijn eerste artikel in een landelijk tijdschrift, in 1962, was een Popperiaans manifest tegen het idee van natuurwetenschap als inductieproces, wat leidde tot een polemiek met Dick Hillenius over de biologie [7]. En in 1998 gaf hij aan de Universiteit van Tilburg nog gastcolleges over het bewustzijn [16].

Zijn kritische commentaren op andere wetenschappers moeten ook in een methodolo-

gisch kader gezien worden. Dat geldt bijvoorbeeld voor zijn scherpe analyses van het willekeurige geknutsel dat in de ‘kunstmatige intelligentie’ soms voor onderzoek door moest gaan. En de geruchtmakende Buikhuisen-rel is ook een *case in point* [26, 28]. Vanuit een methodologisch gezichtspunt kan zijn opzettelijk onheus geformuleerde kritiek op Wouter Buikhuisens onderzoeksplannen heel wel begrepen en gerechtvaardigd worden.

Toen Wouter Buikhuisen in 1978 op de nominatie stond voor een benoeming tot hoogleraar criminologie in Leiden, waren zijn onderzoeksplannen bijzonder vaag, maar hij had wel een visie: het moest gaan om ‘de biologische kenmerken van de delinquent’ [21]. Dat idee is fundamenteel onzinnig. Strafbaarheid is op de eerste plaats een kwestie van strafrecht. Wat in de ene samenleving verboden is, kan in de andere toegestaan of zelfs gewaardeerd worden. Iemand met een ‘aangeboren verminderde angst voor straf’ kan een boef worden of een held of een heilige, afhankelijk van de omstandigheden. Ook de Nederlandse strafwet is niet in psychologische termen geformuleerd; ‘gedragsstoornissen’ zijn niet onwettig. Zulke methodologische problemen met Buikhuisens voorstellen werden niet alleen door Piet Grijs gesignaleerd, maar ook door collega-criminologen [27, 30].

Maar alles goed en wel: was de ophef niet overdreven? Is het per se verwerpelijk om vroegtijdig te willen vaststellen of een kind een verhoogde kans heeft om later met de vigerende strafwetgeving in conflict te komen, zodat men het ‘tegen zichzelf in bescherming kan nemen’? Had Buikhuisen geen goede bedoelingen die hij slordig verwoordde? Het antwoord hierop is, dat in de wetenschap ‘goede bedoelingen’ niet erg tellen — en in de rechtspleging zo mogelijk nog minder. Buikhuisens plannen deden vermoeden dat hij het onderscheid tussen preventie en vervolging onvoldoende in de gaten hield. En de vaagheid van zijn formuleringen diskwalificeerde hem als wetenschappelijke gesprekspartner. Brandt Corstius kon hem slechts zien als een *mala fide* politieke tegenstander — een waarmee niet geargumenteed moet worden, maar gevochten. Daarom verwoordde hij zijn bezwaren op een steeds minder academische manier, en ging hij met steeds grover geschut op de man spelen.

Wiskunst en Opperlands

In een lezing die in 2003 afgedrukt werd in het *Nieuw Archief voor Wiskunde*, argumenteert Brandt Corstius dat je wiskunde

als kunst moet beschouwen: Wiskunst! “Mijn gelukservaringen bij het bewijs dat er geen grootste priem is en dat integreren het omgekeerde is van differentiëren zijn alleen te vergelijken met de grote esthetische ontroeringen die de schilderkunst, de muziek, en de literatuur je kunnen brengen. Er is geen verschil tussen die kunstzinnige ontroeringen en de rationele ontroeringen van de wiskunde. [...] De regering moet de wiskunst steunen zoals zij ballet, film, concertgebouwen, de vertaling van Nederlandse literatuur steunt.” [20] Dit standpunt is misschien ook de sleutel tot zijn waardering voor de mathematische linguïstiek. Chomsky’s herschrijfgrammatica’s bezitten een merkwaardige esthetische kwaliteit. Ze beschouwen de taal, los van betekenis en menselijke bedoelingen, als een combinatorisch systeem, dat volgens bepaalde patronen woorden naast elkaar plaatst. Je wordt verleid om te reflecteren op die combinatoriek. Heel abstracte kunst.

Een soortgelijke esthetiek ligt ten grondslag aan het meest bekende en minst controversiële werk van Brandt Corstius: zijn *Opplerlandse Taal- & Letterkunde* uit 1981 (in 2002 uitgebreid tot een editie van $26 \times 26 = 676$ pagina's onder de titel *Opplerlans! Taal- en Letterkunde*). Het gaat hier om een gigantische catalogus van formele curiositeiten uit de Nederlandse taal: omkeerbaar woorden ('parterreserretap') en zinnen ('Mooi, dit idoom!'), woorden met lettergreepherhalingen

(‘hottentottententententoonstelling’), verhalen waarin slechts één klinker gebruikt wordt (*A-saga*, *E-legende*), enzovoort, enzovoort. Al die vondsten worden volgens een streng systeem geordend. Battus: “Dat die theorie ook een parodie op gewone taalkunde is geworden, moet u maar op de koop toe nemen.” [4, p. 16] (Dit doet denken aan de *Patafysica* van Alfred Jarry: de wetenschap van de uitzonderingen.)

Het Opperlands is geen unieke uitvinding. Het is verwant aan de OULIPO (*Ouvroir de Littérature Potentielle*, oftewel ‘Werkplaats voor Potentiële Literatuur’), die in 1960 in Frankrijk opgericht werd als subcommissie van het Collège de Pataphysique. De bekendste leden waren Raymond Queneau en Georges Pérec; hoewel er professionele wetkundigen bij betrokken waren, was de context inderdaad de Literatuur. De formele begrippen stonden in dienst van een poëtisch maniërisme. Bescheidener was de Amerikaanse *Recreational Linguistics* die Dmitri Borgmann in 1965 lanceerde met zijn boek *Language on Vacation*. In vergelijking met deze parallellen, vertoont de Opperlandistiek een strenger karakter. Het is moderne kunst. Het gaat om formele operaties, waar de betekenis meestal geen rol in speelt — en ontleent daar juist een diepe betekenis aan. (Het is de taal zelf die spreekt. In de Inleiding van *Opperlandse Taal- & Letterkunde* wordt de Kabbala als voorloper genoemd.)

“Opplerlands is kunst. Het dient nergens toe. Je doet het omdat een geheime stem, die je wel eens vervloeken kunt, je daartoe roept. De schilder gebruikt verf, omdat verf te koop is. Maar het gaat hem niet om de verf. De Opplerlander gebruikt Nederlands, omdat hij die taal kent. Maar het gaat hem niet om het Nederlands.” [4, p. 12]

De Opperlandse taal- en letterkunde staat in de traditie van Mondriaan, die ons uitnodigde te reflecteren op de constituerende parameters van de visuele waarneming. Aan de hand van het Nederlands demonstreert de Opperlandicus elementaire eigenschappen van strings (herhaling, symmetrie) en relaties tussen strings (permutatie, substitutie). Maar de confrontatie tussen kurkdroog formalisme en de levende, betekenisvolle taal levert (helemaal vanzelf) ironische effecten op. Dan blijkt de Opperlandistiek verwant aan de Pop Art (waar Brandt Corstius eerder de aardigheid van inzag dan veel kunstcritici) [8].

Besluit

“Voor mij is de echte wiskunde de rubriek die Martin Gardner in de *Scientific American* had. De bewijzen van de vierkleurenstelling en de stelling van Fermat maken mij niet blijer dan de ontdekking dat aapjeskoop en spookaapje anagrammen zijn met plaatswisseling van klinkers en medeklinkers, of dat in het woord vanitasstilleven elke letter precies twee keer voorkomt.” [20]

References

- | | | | | | |
|----|---|----|--|----|---|
| 1 | Batticus, <i>Klein maar zijn</i> , Querido, Amsterdam, 2005. | 12 | H. Brandt Corstius, <i>Algebraische Taalkunde</i> , Oosthoek, Utrecht, 1974. | 22 | Raoul Chapkis, <i>De reizen van Pater Key</i> , Querido, Amsterdam, 1966. |
| 2 | Battus, De formalisering van het wereldbeeld, <i>Hollands Maandblad</i> 302 (1973), 26–29. | 13 | H. Brandt Corstius, <i>Computer-Taalkunde</i> , Coutinho, Muiderberg, 1978. | 23 | Raoul Chapkis, <i>Ik sta op m'n hoofd</i> , J.M. Meulenhoff, Amsterdam, 1966. |
| 3 | Battus, De vertaalmachine, <i>Hollands Maandblad</i> 304 (1973), 15–19. | 14 | Hugo Brandt Corstius, Weg met de computer! <i>Kennis en Methode</i> 5(1) (1981), geciteerd uit de herdruk in [5, p. 144]. | 24 | Raoul Chapkis, Nationalisatie van het denkvermogen. Bezit van computer behoort bij overheid, <i>Hollands Maandblad</i> 214 (1965), 3–7. |
| 4 | Battus, <i>Opperlandse taal- & letterkunde</i> , Querido, Amsterdam, 1981. | 15 | Hugo Brandt Corstius, De Stukkenvrager, <i>Hollands Maandblad</i> 517 (1990), 34–35. | 25 | Raoul Chapkis, COM en CAM, <i>Hollands Maandblad</i> 271/272 (1970), 23–25. |
| 5 | Hugo Battus, <i>Rekenen op Taal</i> , Querido, Amsterdam, 1983. | 16 | Hugo Brandt Corstius, <i>Het Bewustzijn</i> , Querido, Amsterdam, 1999. | 26 | Piet Grijs, Buikhuisen, <i>Dom én slecht</i> , Vrij Nederland, Amsterdam, 1978. |
| 6 | Leonoor van der Beek, <i>Van Rekenmachine tot Taalautomaat</i> (een geschiedenis van de Nederlandse en Vlaamse taal- en spraaktechnologie), Nederlandse Taalunie, 2010. | 17 | Hugo Brandt Corstius, <i>Mensenarm Dierenrijk</i> , Historische uitgeverij, Groningen, 2009. | 27 | Piet Grijs, <i>Vrij Nederland</i> , 6 mei 1978. |
| 7 | Hugo Brandt Corstius, Alcohol en longkanker, <i>Hollands Weekblad</i> 165 (1962), 5–7. | 18 | Hugo Brandt Corstius in een ongepubliceerd gesprek met Leonoor van der Beek, 1 december 2009. | 28 | Lucas Keijning, Buikhuisen had wel wat uit te leggen, Masterscriptie Science and Technology Studies, Universiteit van Amsterdam, Juli 2006. |
| 8 | Hugo Brandt Corstius, Culinaire realisme, <i>Hollands Weekblad</i> 165 (1962), 10. | 19 | Hugo Brandt Corstius, De desillusie van mijn leven of Remember November, in: Tanja Gaustad, red., <i>Computational Linguistics in the Netherlands 2002. Selected Papers from the Thirteenth CLIN Meeting</i> , Rodopi, Amsterdam, 2003, pp. 1–7. | 29 | Jan Lepeltak, Hugo Brandt Corstius als Docent. Herinneringen aan een bijzonder mens, 13 maart 2014, http://ictnieuws.nl/columns/column-hugo-brandt-corstius-als-docen . |
| 9 | Hugo Brandt Corstius, <i>Automatisch tellen en scheiden van Nederlandse lettergrepen</i> , MR 67, Mathematisch Centrum, Amsterdam, 1964. | 20 | Hugo Brandt Corstius, Wiskunst, <i>Nieuw Archief voor Wiskunde</i> 5/4(3) (2003), 238–239. | 30 | C.J.M. Schuyt, Veroordeeld tot criminaliteit? Een wetenschappelijk filosofische en ethische reflectie op het voorgenomen onderzoek van Prof. dr. W. Buikhuisen, <i>Nederlands Juristenblad</i> , 27 mei 1978. |
| 10 | Hugo Brandt Corstius, <i>Exercises in Computational Linguistics</i> , proefschrift, Mathematisch Centrum, Amsterdam, 1970. | 21 | Cees Brinkhuizen, Plannen voor hersenonderzoek bij delinquenten, <i>KRI maandblad reclasering</i> 3 (1978). | 31 | Adriaan van Wijngaarden, <i>Rekenen en vertalen</i> , Uitgeverij Waltman, Delft, 1952. |
| 11 | Hugo Brandt Corstius, Er is geen plattegrond voor het Nederlands, <i>Hollands Maandblad</i> 308/309 (1973), 21–24. | | | | |

Gunther Cornelissen

Mathematisch Instituut
Universiteit Utrecht
g.cornelissen@uu.nl

Onderzoekschool

Het lustrum van WONDER

Sinds 2010 bestaat de nationale onderzoeksschool wiskunde, WONDER. Reden om met de scheidende directeur, Gunther Cornelissen, terug te kijken naar de eerste vijf jaar van haar bestaan.

De jaren negentig waren de hoogtijdagen van de onderzoekscholen, die rechtstreekse extra financiering vanuit de overheid brachten voor promovendi, workshops en masterclasses. Binnen de wiskunde waren er twee dergelijke scholen: het *Mathematical Research Institute* (MRI) en het *Thomas Stieltjes Institute for Mathematics* (TSI). (Ook in andere nationale onderzoekscholen zijn wiskundigen vertegenwoordigd, met name in het Landelijk Netwerk Mathematische Besliskunde LNMB en het Dutch Institute for Systems and Control DISC, maar die zullen we hier buiten beschouwing laten.) Waarom er twee scholen waren was in 2010 niet meer duidelijk, dus werd er gekozen voor een fusie, waarbij meteen het *Euler Institute for Discrete Mathematics and its Applications* (EIDMA) werd meegenomen. Tegelijk werd dit een afslankingsoperatie, omdat de financiering gemengd werd met de hele eerstegeldstroom en omdat instituten hun bijdrage moesten of wilden verkleinen. Aldus ontstond WONDER, de Wiskunde-ONDERzoekschool, met als kerntaak het landelijk aanbieden van onderwijs voor promovendi. De *naam* (waarmee niet iedereen zo gelukkig was, onder andere omdat die bleek samen te vallen met de organisatie die rond 2010 de bevrijding van tuinkabouters bepleitte) werd bedacht door Hendrik Lenstra tijdens een diner in Groningen. In het eerste jaar moest de juiste organisatievorm nog gevonden worden. Na consultatie met de PWN-onderzoekcommissie en een goede inval van Rob Tijdeman werd het bestuur van WONDER gevormd door de instituutdirecteuren van de deelnemende universiteiten, die jaarlijks één keer bijeenkomen. Tegelijk is Mastermath bestuurlijk onder WONDER komen te vallen; handig omdat de financiering van Mastermath ook via deze instituutdirecteuren loopt. Het dagelijkse management is in



handen van de WONDER-directeur, nu Jason Frank van de Universiteit Utrecht. Het jaarlijks budget, circa 30,000 euro, wordt gelijkelijk betaald door de deelnemende instituten.

Hoe kan je met een dergelijk relatief klein budget de *hele* wiskunde overdekken en zichtbaar zijn? De enige weg voorwaarts leek mij het starten met een inhoudelijk programma voor promovendi. Tussen 2011 en 2014 werden meer dan 30 activiteiten (minicursussen en scholen) gesponsord of geïnitieerd, 12 geavanceerde vakken gegeven in mastermath (voor gevorderde masterstudenten en promovendi) en 180 proefschriften bekeken voor de Stieltjesprijs. Laat me een paar highlights noemen:

WONDER-minicursussen

De 'minicursus' is een concept dat WONDER heeft overgenomen van EIDMA, en gemengd met de 'onderwijsweek' van het TSI; de coördinator hiervoor is Jan Draisma. In een minicursus wordt een week lang intensief college en werkcollege gegeven voor promovendi over een 'hot topic'. Tot op heden hadden we er drie: 'Random Optimisation' aan de TU/e,

door Johan Wästlund (Chalmers); een speciale week in de Stochastic Activity Month op EURANDOM, en 'Berkovich Skeletons' aan de UU, door Johannes Nicaise (Leuven) en Sam Payne (Yale). De cursussen waren een groot succes, met 15–20 deelnemers. Er zijn twee keer lecture notes gemaakt, laatst via een github door de deelnemers zelf. WONDER betaalt de reis- en verblijfkosten van de docenten, eventueel de overnachting van de promovendi, en een paar sociale activiteiten. Er mogen gerust meer minicursussen komen; graag melden bij Jan Draisma.

Bij WONDER is er af en toe ruimte in de begroting voor een gasthoogleraar, wiens bezoek enige activiteiten voor promovendi brengt. Voorlopig hadden we er één: Regina Liu (Rutgers) bezocht Tilburg en verzorgde twee weken onderwijs voor promovendi.

Ondersteuning van scholen voor promovendi

Een aantal geëtablerde scholen krijgt ondersteuning van WONDER, zoals Applied Analysis, de Winter School Mathematical Finance, het Network in Stochastics. Door impuls van WONDER werkte het GQT-cluster een idee van Klaas Landsman en ondergetekende uit om een school op te zetten met iedere dag college en werkcollege over één concept uit meetkunde en mathematische fysica, en aansluitend een tweedaags colloquium met buitenlandse sprekers dat aansluit bij de behandelde thema's. Ondertussen heeft GQT meerdere dergelijke succesvolle colloquia gehad.

Stieltjesprijs en Abelprijslezingen

Een bijzonder ritueel is het jaarlijks verzamelen van alle proefschriften in de wiskunde (zonder nominatie of voorselectie) door de commissie voor de Stieltjesprijs, ondertussen financieel mogelijk gemaakt door de Stichting Compositio Mathematica. Een gezelschap onbevooroordeelde heren onder competente leiding van Fred Bakker gaat een aantal maanden aan de slag en leest proefschriften, haalt

aanbevelingen binnen, en hakt de ultieme knoop door op een vergadering annex diner in Utrecht. We hadden de volgende excellente winnaars: Peter Bruin, Jop Briët, Sonja Cox, Benjamin Sanderse en Pavel Zorin-Kranich.

De prijzen worden iedere herfst uitgereikt op de WONDER-middag, in combinatie met lezingen over de Abelprijswinnaars voor algemeen wiskundig publiek. Zo hadden we interessante middagen over Milnor in Utrecht, Szemerédi in Amsterdam, Deligne in Delft, en Sinai in Eindhoven.

Administratief coda

Formeel kan WONDER erts toekennen aan minicursussen, scholen, en geavanceerde vakken, die kunnen worden ingezet als studiepunten voor promovendi in de lokale graduate schools. Promovendi die hier gebruik van willen maken kunnen dit bij het secretariaat van WONDER navragen, maar dat is nog niet gebeurd. We vonden het erg belangrijk om een *inhoudelijk* aanbod te hebben, naast de *transferable skills* van de eigen universiteiten. WONDER is administratief nog te klein om de kwaliteitszorg van de promovendi landelijk over te nemen, zoals de onderzoeksschool astronomie doet. Sowieso is de administratie (inclusief het onderhoud van de website) nog te klein voor de grootte van de Nederlandse wiskunde.

Door de expansie en het succes van Mastermath zijn er nieuwe, vaak ook administratieve, uitdagingen; hier speelt WONDER bestuurlijk een belangrijke rol als buffer tussen lokale universitaire administraties op supradepartementeel niveau. Op inhoudelijk niveau lijkt er ruimte voor uitbreiding van de geavanceerde vakken, alhoewel uitbreiding ook in de minicursussen zou kunnen worden gezocht (ook voor masterstudenten). Mijn ervaring leert dat thematische scholen en minicursussen van grote meerwaarde zijn voor de promovendi; dit kan min of meer op het niveau van de clusters worden ingezet. Administratief lijkt het me handig als Mastermath een eigen Onderwijs- en Examenreglement heeft (in plaats van een aanvulling te hebben op de — vaak tegenstrijdige — lokale OER'en), die de lokale graduate schools overnemen via een gemeenschappelijke regeling.

WONDER is lid van de koepel van onderzoekscholen, SODOLA, die de afgelopen jaren met VSNU en regering onderhandelde over vaste financieringsregels voor onderzoekscholen binnen de universiteiten; hier ligt een mogelijkheid voor structurele financiering via de eerstegeldstroom, maar de strijd is niet gestreden en het is juridisch

nog niet zo makkelijk. Eerst zal een formele gemeenschappelijke regeling moeten worden getroffen.

Een paar keer is geprobeerd de enorm succesvolle en motiverende Masterclasses van het MRI een doorstart te geven. Zo'n Masterclass was een thematisch programma van een jaar, waarbij (erg selectief toegekende) beurzen van 8000 euro gegeven werden aan buitenlandse studenten voor verblijf in Nederland. Aan de Nederlandse universiteiten zit ondertussen menig docent en hoogleraar die ooit als masterclasser is begonnen. Maar helaas is het een taaie materie om beurzen te kunnen geven (na de hbo-fraude), universiteiten willen centraal geen waivers toekennen, en de IND was er steeds moeilijker van te overtuigen visa te geven. Laat ons dit op de agenda houden.

Ik denk dat de doorsnee Nederlandse masterscriptie in de wiskunde met kop en schouders boven het doorsnee essay in de Tripos in Cambridge uitsteekt, en wij studenten afle-

veren die veel meer klaar-voor-onderzoeken zijn dan die aan de overkant van het kanaal, maar deze reputatie hebben we nog niet in de wereld om ons heen, en WONDER kan hier een 'merk' worden.

Ten slotte: WONDER overdekt de hele wiskunde; daarom zie je altijd een fragment, en dat is noodzakelijkerwijze een klein stukje, maar eigenlijk is WONDER breed en groot, of, liever gezegd: worstelt om breed en groot te mogen en kunnen zijn. Ik hoop hier een indruk te hebben gegeven hoe we voor weinig geld best wel veel konden doen als graduate school; en dat we erg inhoudelijk bezig zijn. Ik hoop dat WONDER op brede steun kan rekenen vanuit het veld. Ik juich het nieuwe perspectief uit het Deltaplan toe, waarbinnen PWN de administratie van het nationale graduate-programma uitvoert, en er hopelijk centrale structurele steun komt voor het master- en promovendi-onderwijs, zelfs als de omstrede naam WONDER daarbij ondergaat.



Een markante poster van een WONDER minicursus

Jantine Bloemhof

Amstelveen

jantine.bloemhof@xs4all.nl

Richard Boucherie

Afdeling Toegepaste Wiskunde

Universiteit Twente

r.j.boucherie@utwente.nl

Evenement 'Wereld van vormen' en 'Het verhaal van de getallen'

Wiskunde voor de basisschool: speels, verrassend en uitdagend

Het afgelopen jaar waren er twee initiatieven om leerlingen van de basisschool op een vrolijke en ongedwongen manier met wiskunde bezig te laten zijn: de NEMO-tentoonstelling 'Wereld van vormen' en de theatervoorstelling 'Het verhaal van de getallen' van Maas theater en dans. We hebben het plezier gezien van jonge kinderen bij het werken met de opstellingen in de 'Wereld van vormen' en de vrolijke en originele manier waarop in 'Het verhaal van de getallen' allerhande wiskundige wetenswaardigheden werden gepresenteerd. Dit was voor Jantine Bloemhof en Richard Boucherie de aanleiding om eens op een rijtje te zetten welke mogelijkheden er op dit moment zijn voor leerlingen op de basisschool om op een aantrekkelijke manier met wiskunde bezig te zijn. Zij geven een korte impressie van de 'Wereld van vormen' en van 'Het verhaal van de getallen' om aan te geven waarom ze bij jong en oud zo goed vallen en een overzicht van een aantal andere initiatieven en mogelijkheden.

De 'Wereld van vormen' is een permanente tentoonstelling waar kinderen *en* hun ouders meetkunde kunnen beleven. Bij de tentoonstelling zijn voor groep 5/6 tevens speciale werkbladen, een handleiding voor de docent en workshops: 'Wereld van Wiskunde' (zie kader). In de grappig vormgegeven tentoonstelling is van alles te zien en te doen. Je kunt er *veelvlakken* vouwen en bouwen. Dat kan heel gemakkelijk met Polydron (www.polydron.co.uk, zie Figuur 1). Aan de druk bezette bouwtafel worden permanent door jong en oud veelhoeken aan elkaar geklikt en ontstaat soms spontaan een Platonisch of Archimedisches veelvlak. De *Ames-room* biedt een spectaculaire kennismaking met perspectief (zie Figuur 2). Plotsklaps lijkt je groter dan je vader! In een volgende opstelling kun je tussen twee *spiegels* die een hoek van 60 graden maken veelhoeken leggen die je dan zes keer ziet, een keer echt en vijf keer gespiegeld (zie Figuur 3). Door de spiegels ontstaan mooie symmetrische patronen. Er zijn voorbeelden om na te maken, waarbij sommige behoorlijk lastig blijken te zijn, en uiteraard kan ook een eigen figuur gelegd worden waarmee gespeeld kan worden om een

nog mooier patroon te maken. Voor velen erg verrassend zijn de *anamorfosen*: vervorm-

de plaatjes die je pas herkent wanneer je ze bekijkt in een spiegel (zie Figuur 4). *Het geheim van schoonheid* (een korte film die ook te zien is op de NEMO website) telt het aantal spiralen in bijvoorbeeld de zonnebloem, den-nenappel, rode kool en ananas, en ook het aantal bloemblaadjes van bekende bloemen. Wanneer deze getallen *uit de natuur* op een rij worden gezet zie je het verband met de *gulden snede*. Aan de hand van bekende schilderijen en bouwwerken waarin je de gulden snede terug kunt vinden wordt de vraag gesteld of de schilder of architect die verhouding met opzet heeft gebruikt of dat deze heel *toevallig*

Met de klas naar 'Wereld van vormen'

"Maak kennis met meetkunde en vouw veelvlakken, maak doorsnedes, schat inhoudsmaten, maak anamorfosen en ontdek de werking van perspectief en landmeten. Maak nieuwe vormen van driehoeken en vierkanten en ervaar waarom een symmetrisch gezicht als mooi wordt ervaren. NEMO maakt wiskunde hiermee een instrument dat je in de wereld om je heen overal kunt gebruiken." (NEMO-website bij de tentoonstelling, zie www.e-nemo.nl/nl/bezoek/tentoonstellingen/wereld-van-vormen)

Als groep 5/6 'Wereld van vormen' gaat bezoeken is een goede voorbereiding mogelijk dankzij een handleiding voor de leerkracht en werkbladen met vragen en opdrachten over vijf tentoonstellingsonderdelen die de leerlingen tijdens het bezoek kunnen maken. De werkbladen zorgen voor begrip en structuur. De antwoorden zijn te vinden in de handleiding voor de leerkracht. Helemaal leuk is het om ook mee te doen aan een (gratis) NEMO-workshop van drie kwartier met meer interessante en leuke wiskundewetjes: 'Wereld van wiskunde'. Ter voorbereiding in de klas is er een inleidende les 'Vormenspeurtocht'. Als afsluiting na het bezoek aan NEMO is er een verdiepende les 'Jij bent data'. 'Vormenspeurtocht' heeft een apart werkblad. Na de speurtocht kunnen de leerlingen vijftien verschillende vormen herkennen en benoemen. Erg leuk zijn een filmpje met opzienbarende optische illusies en een boeiende Klokhuis-aflevering over 3D-straatkunstenaar Leon Keer. In de afsluitende les 'Jij bent data' presenteren de leerlingen de resultaten van een onderzoek in tabellen en grafieken.

Handleidingen en werkbladen kunnen van de website van NEMO gedownload worden. 'Wereld van vormen' is een permanente tentoonstelling.



Foto: Science Center NEMO, Jantine Bloemhof

Figuur 1 Polydron.

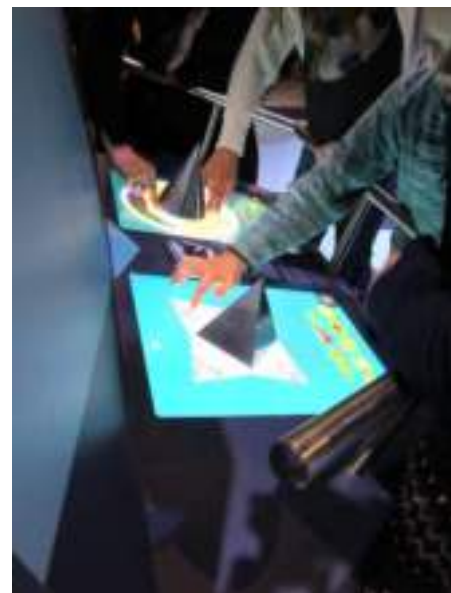


Foto: Science Center NEMO, Jantine Bloemhof

Figuur 4 Anamorfosen.



Foto: Science Center NEMO, Digitaal

Figuur 2 Ames-room.



Foto: Science Center NEMO, Digitaal

Figuur 3 Spiegels onder hoek van 60 graden.

is ontstaan. We zagen kinderen ademloos kijken; ze waren na $3\frac{1}{2}$ minuut een stuk wijzer. Er is nog zo veel meer te zien en te doen: een interessante film over *fractals*, een uitleg over de vervorming van de aarde die noodzakelijkerwijs optreedt bij projectie op een vlakke kaart. Op de tentoonstelling heerst grote bedrijvigheid. De bezoekers, veel gezinnen, zijn druk met uitproberen en spelen en genieten van de uitleg van de onderliggende wiskundige principes.

'Het verhaal van de getallen' in de Krakeling

Drie jonge, energieke en nieuwsgierige tooneelpersonages laten in 'Het verhaal van de getallen' van Maas theater en dans zien dat ook in het theater wiskunde prima over het voetlicht gebracht kan worden. Maas theater en dans maakt educatieve voorstellingen voor kinderen en volwassenen. 'Het verhaal van de getallen' lanceert in hoog tempo abstracte gedachten en ideeën ondersteund door verrassende animaties, bijzondere visuele effecten en humor. Op een intuïtieve manier maakt de voorstelling lastige wiskundige begrippen duidelijk. Wat kwam zoal aan de orde? Uiteraard getallen, waarbij zonder de onderliggende axioma's helder werd dat is afgesproken wat 1, 2, 3, enzovoort betekenen en wat 0 inhoudt. Abstracte begrippen als oneindig groot en oneindig klein werden heel toegankelijk uitgebeeld. De digitale wereld van de bits kwam aan de orde via de eenvoudige analogie met aan/uit. Interactief werd de zaal opgedeeld in meisjes en *niet-meisjes* en de vraag gesteld wie een rokje draagt. De verzameling niet-meisjes dat een rokje droeg bleek de *lege verzameling*

te zijn; een heel verhelderende kijk op dit lastige begrip! In een onderzoek waarbij het publiek vragen moest beantwoorden kwam de fundamentele vraag aan de orde: “Wat zijn goede vragen?” Er was meer. De rij van Fibonacci werd mooi geïllustreerd aan de hand van een boom en gekoppeld aan de snelheid van voortplanting van konijnen. De voorstelling ging in hoog tempo verder: het prisoner’s-dilemma, fractals, (on)meetbaar en kun je vriendschap meten? Wij zagen de voorstelling in Amsterdam in jeugdtheater de Krakeling in een uitverkochte zaal met een aandachtig en enthousiast publiek. Door

de afwisseling in onderwerpen en moeilijkheid bleef het boeiend. Kinderen en hun ouders genoten zichtbaar van de voorstelling. Op de website van Maas theater en dans (www.maastd.nl/voorstelling/getallen/) staat een overzicht van reacties. “Het is geweldig dat een voorstelling kinderen, en hun ouders, aan het denken zet over dit soort lastige vragen.” (Ionica Smeets, *De Volkskrant*, 8 november 2014).

In de klas voor alle leerlingen

Op de basisschool vinden de meeste kinderen rekenen leuk. Veel scholen hebben re-

kenspellen in de klas waarmee de leerlingen spelenderwijs en met veel plezier het rekenen kunnen oefenen. Er is een keur aan spellen waarbij wiskunde een rol speelt of logisch redeneren vereist is. *Set* en *Trio Vision* zijn in principe wiskundespellen, *Master Mind* en *Da Vinci Code* laten leerlingen logisch redeneren. Ook het aanbod van aantrekkelijk vormgegeven logische puzzels van bijvoorbeeld Thinkfun en Smart Games, waaronder *Rush-hour*, *Tip-over* en *Penguins On Ice* doet het goed bij kinderen. Met *Tangram* kunnen kinderen de relaties tussen de verschillende vormen en hun oppervlaktes ontdekken. Ondanks, of dankzij, de eenvoud van de puzzel leggen ze graag voorbeelden na of maken ze eigen figuren. *Blokus* wordt gespeeld met alle polyomino’s van monomino tot en met pentomino en is razend populair.

Voor leerlingen van groep 1 tot en met 8 wordt jaarlijks *De Grote Rekendag* georganiseerd (www.groterekendag.nl). Het doel van de dag is om kinderen te laten ervaren dat rekenen leuk en nuttig is. Elk jaar is er een ander thema: in 2015 ‘Meetkunde uit de kunst in de klas’ en in 2014 ‘Grafieken en verbanden’. In 2015 deden bijna 1200 basisscholen mee met meer dan 300.000 kinderen. Heeft uw kind deze dag gemist: op woensdag 23 maart 2016 is de volgende Grote Rekendag!

Voor leerlingen die zich graag uit laten dagen

Voor leerlingen die graag logische problemen het hoofd bieden is er de *W4Kangoeroe reken- en wiskundewedstrijd* die jaarlijks in maart in ruim 55 landen wordt gehouden. In ons land kunnen leerlingen van groep 3 van de basisschool tot en met de 6e klas van de middelbare school meedoen. Meestal doen de beste rekenaars, een paar kinderen per klas, mee. De wedstrijd bestaat uit zeer uiteenlopende vijfkeuzevragen en vijf moeilijkheidsniveaus van eenvoudig tot echt moeilijk. Een paar reacties van leerlingen die dit jaar meededen. Ruben uit groep 4 voelde zich eindelijk uitgedaagd. Tuur uit groep 5 vond de wedstrijd spannend omdat hij niet wist of zijn antwoorden goed waren. Klasgenoten vonden de vragen leuk en lastig, een mooie combinatie. *W4Kangoeroe* werkt samen met Museum Boerhaave en NEMO, waar de finales worden gespeeld.

Voor leerlingen die meer lesstof aankunnen dan in de klas wordt aangeboden bestaat een keur aan verrijkingsmateriaal, ook op het gebied van rekenen en logisch redeneren. Verschillende rekenmethoden hebben verrijkingsmateriaal of verwijzen er naar, zo-



Figuur 5 Oneindig, Maas theater en dans.

Foto: Maas theater en dans, Philé Deprez



Figuur 6 Fibonacci, Maas theater en dans.

Foto: Maas theater en dans, Philé Deprez



Foto: Jantine Bloemhof

Figuur 7 Blokus.

als *Kien* en *Rekentijger* die beschikbaar zijn voor groepen 3 tot en met 8. Vierkant voor Wiskunde geeft een serie *wisschriften* uit voor leerlingen van groep 6, 7 en 8 waarin diepgaand onderwerpen als magische figuren, veelvlakken, fractals en tegelpatronen behandeld worden. De *wisschriften* zijn zo geschreven dat leerlingen er zelfstandig mee aan de slag kunnen, alleen, maar liever in

een groepje om zo ook van elkaar te leren. Ze kunnen ook prima in plusklassen gebruikt worden (zie www.vierkantvoorwiskunde.nl/boeken/wisschriften). *Sikkepitlessen* zijn beschikbaar voor plusklassen van groepen 3 tot en met 8 en kennen een grote verscheidenheid aan onderwerpen waaronder logische puzzels als cijferpuzzels (nogram) en nurikabes. Leerlingen worden uitgedaagd om ook zelf dit soort puzzels te ontwerpen (zie www.vierkantvoorwiskunde.nl/sikkepit).

Wiskunde in de zomervakantie

Voor leerlingen vanaf 10 (en tot en met 18) jaar die ook in de zomervakantie aan de slag willen met boeiende wiskundige en logische problemen en plezier beleven aan het bedenken van creatieve oplossingen zijn er de vijfdaagse wiskundekampen van Vierkant voor Wiskunde. De kampen zijn niet alleen voor bollebozen. Naast de wiskunde zijn er sportieve en gezellige activiteiten en vrije tijd. Op de website van Vierkant voor

Wiskunde staan verslagen van de kampen van 2014 (zie www.vierkantvoorwiskunde.nl).

Er is nog zoveel meer

Dit artikel geeft een indruk van materiaal dat voor rekenen en wiskunde beschikbaar is voor basisschoolleerlingen. Er is nog zoveel meer, deels vrij toegankelijk via Internet, maar ook gewoon in de wereld van wiskunde om ons heen. Uiteraard stopt het (les)materiaal niet bij groep 8 van de basisschool. Een aantal van de genoemde activiteiten loopt door naar de middelbare school, zoals de W4Kangoeroe en de wiskundekampen. Speciaal voor de middelbare school zijn er activiteiten als de (Junior) Wiskunde Olympiade, de Twentse Wiskunde Estafette, het Wiskundetoernooi aan de Radboud Universiteit en Masterclasses aan verschillende universiteiten. Uiteraard spelen ook middelbare scholieren (bord)spellen waarin logisch redeneren een grote rol speelt. Met het grote aanbod van wiskunde in cultuur, school en spel is wiskunde voor leerlingen speels, verrassend en uitdagend! ➤



Foto: Vierkant voor Wiskunde

Figuur 8 Wiskundekampen.

Paul Levrie

Faculteit Toegepaste Ingenieurswetenschappen
Universiteit Antwerpen
paul.levrie@uantwerpen.be

Rudi Penne

Faculteit Toegepaste Ingenieurswetenschappen
Universiteit Antwerpen
rudi.penne@uantwerpen.be

Vakantiecursus

Kettingbreuken, weefpatronen en de Kerststelling van Fermat

Op de vakantiecursus 2014 van het Platform Wiskunde Nederland hielden Paul Levrie en Rudi Penne de voordracht 'Priem!', over een onderwerp dat sinds het bewijs van Yitang Zhang over priemparen weer volop in de belangstelling staat. Een onderwerp ook waarover Levrie en Penne onlangs een boek publiceerden: *De pracht van priemgetallen*. Voor de syllabus van de vakantiecursus schreven ze dit artikel, dat niet zo zeer een weergave van hun voordracht is, maar een voortborduurset op hun recente boek.

Toen ons gevraagd werd om voor de syllabus van deze vakantiecursus een bijdrage te leveren over een onderwerp waar we net een boek [5] over hadden geschreven, leek het ons onzinnig om dubbel werk te leveren. Daarom grijpen we liever de kans om een nieuw hoofdstuk te breien aan dit boek. Ons verhaal over de priemgetallen is een mix van wiskunde, geschiedenis en leuke weetjes. Omdat het doelpubliek anders is dan dat van het boek, mag het wat meer wiskundig zijn, al zullen we de lezer onderweg verrassen met een heuse snit-en-naad-toepassing. Het begint allemaal met dit:

Een priemgetal is een natuurlijk getal groter dan 1 dat enkel deelbaar is door 1 en door zichzelf.

En we gaan het hebben over een stelling die ons vertelt welke priemgetallen te schrijven zijn als een som van twee kwadraten. In het kader hiernaast vind je de geschiedenis van deze stelling.

Additieve getaltheorie en de stelling van Fermat

Dat getaltheorie verslavend kan zijn, kan je nu ook lezen in de laatste editie van het beroemde boek *An introduction to the theory of numbers*, van Hardy en Wright [3]. Je vindt er namelijk in de introductie:

Thus chs. XII–XV belong to the 'algebraic' theory of numbers, Chs. XIX–XXI to the 'addictive', and Ch. XXII to the 'analytic' theories; while Chs. III, XI, XXIII, and XXIV deal with matters usually classified under the headings of 'geometry of numbers' or 'Diophantine approximation'.

Bedoeld wordt natuurlijk 'additive'. De additieve getaltheorie behandelt eigenschappen van getallen waarbij men deze probeert te schrijven als som van andere speciale getallen. Een van de mooiste resultaten op dit gebied is de Kerststelling van Fermat, die in haar meest ruwe vorm zegt:

Elk priemgetal van de vorm $4n + 1$ is te schrijven als de som van twee kwadraten.

Iets meer verfijnd hebben we dit:

Een getal kan geschreven worden als de som van twee kwadraten als alle priemfactoren van de vorm $4n + 3$ in de priemfactorisatie van het gegeven getal voorkomen met een even macht.

Dat de stap van de ruwe naar de verfijnde versie niet zo groot is, volgt uit twee dingen. Eerst en vooral is het eenvoudig in te zien dat een priemgetal van de vorm $4n + 3$ niet te schrijven is als

1634 De minder bekende Franse wiskundige Albert Girard (1595–1632) schrijft een opmerking in de Franse vertaling van het werk van Simon Stevin:

ALB. GIR. *Determination d'un nombre qui se peut diviser en deux quarrés entiers.*
I. Tout nombre carré.
II. Tout nombre premier qui excède un nombre quaternaire de l'unité.
III. Le produit de ceux qui sont tels.
IV. Et le double d'un chacun d'eux.

1640 Pierre de Fermat (1601–1665) schrijft op kerstdag in een brief naar collega Marin Mersenne (1588–1648):

1^{re} Tout nombre premier, qui surpasse de l'unité un multiple de quaternaire, est une seule fois la somme de deux carrés, et une seule fois l'hypoténuse d'un triangle rectangle.

Fermat beweerde dat hij een onweerlegbaar bewijs had van deze stelling (zo kennen we hem).

1742 Leonhard Euler (1707–1783) schrijft op 30 juni in een brief aan Christian Goldbach:

seyn, welches aber nicht ist. Denn alle diese Zahlen sind in dieser formula $4n+1$ enthalten, welche so oft sie ein numerus primus ist, unfehlbar in duo quadrata, hocque unico modo, resolviret werden konen. So oft aber $4n+1$ kein

1749 Euler schrijft op 12 april naar Goldbach:

Namque habo ich endlich einen bündigen Beweis gefunden, dass ein jeglicher numerus primus von dieser Form $4n+1$ eine summa duor. quatr. ist. Es sey $\mathfrak{P}$ das Zeichen der

1754 Euler publiceert een *Demonstratio theorematiss Fermatiani omnem numerum primum formae $4n+1$ esse summam duorum quadratorum*.

1848 Charles Hermite (1822–1901) en Joseph-Alfred Serret (1819–1885) vinden tegelijkertijd een efficiënt algoritme om een priemgetal van de vorm $4n+1$ te schrijven als de som van twee kwadraten.

1855 Henry John Stephen Smith (1826–1883) geeft een eerste eenvoudig bewijs van de stelling.

1867 Édouard Lucas (1842–1891) ziet een toepassing van de stelling van Fermat, die ook wel eens Fermat's Kerstmis-stelling wordt genoemd, bij het weven van satijn.

1940 Godfrey Harold Hardy (1877–1947) schrijft in zijn *A Mathematician's Apology* dit:

Another famous and beautiful theorem is Fermat's 'two square' theorem. The primes may (if we ignore the special prime 2) be arranged in two classes; the primes
4, 13, 17, 29, 37, 41, ...
which leave remainder 1 when divided by 4, and the primes
3, 7, 11, 19, 23, 31, ...
which leave remainder 3. All the primes of the first class, and nine of the second, can be expressed as the sum of two integral squares: thus

$$3 = 1^2 + 2^2, \quad 13 = 2^2 + 3^2,$$

$$17 = 4^2 + 1^2, \quad 29 = 2^2 + 5^2,$$
but 3, 7, 11, and 19 are not expressible in this way (as the reader may check by trial). This is Fermat's theorem, which is ranked, very justly, as one of the finest of arithmetic. Unfortunately, there is no proof within the comprehension of anybody but a fairly expert mathematician.

Uit de laatste zin blijkt dat Hardy het bewijs van zijn landgenoot Smith, die evenals hijzelf de Savilian Chair of Geometry bekleedde in Oxford, niet kende.

1984 Roger Heath-Brown (1952) geeft een nieuw, kort bewijs van de stelling.

1990 Don Zagier (1951) publiceert zijn *A One-Sentence Proof That Every Prime $p \equiv 1 \pmod{4}$ Is a Sum of Two Squares*.

een som van twee kwadraten. Indien dit wel het geval zou zijn, dan moet het gaan om een kwadraat van een even getal en een kwadraat van een oneven getal. Een even getal kunnen we voorstellen door $2k$ bijvoorbeeld, en een oneven getal door $2m+1$. We hebben dan voor de som van de kwadraten:

$$(2k)^2 + (2m+1)^2 = 4k^2 + (4m^2 + 4m + 1) = 4(k^2 + m^2 + m) + 1,$$

en dit geeft dus steeds een viervoud plus 1, en nooit plus 3.

Verder kunnen we gebruik maken van de wonderbaarlijke eigenschap die ons toelaat een product van twee sommen van kwadraten te schrijven als een som van kwadraten:

$$(a^2 + b^2)(c^2 + d^2) = (ac - bd)^2 + (ad + bc)^2$$

(eenvoudig te zien door uitwerking).

Voor een willekeurig getal dat voldoet aan de voorwaarden van de verijnde stelling gaan we nu als volgt te werk:

- de factoren 2 schrijven we als $1^2 + 1^2$ en de priemfactoren van de vorm $4n+1$ schrijven we als som van twee kwadraten, en met de vorige eigenschap kunnen we dan het product van deze getallen voorstellen als som van twee kwadraten: $A^2 + B^2$;
- de andere factoren hebben een even macht, en zijn samen te herschrijven in de vorm C^2 , en die kunnen we dan gewoon op de volgende manier ‘binnenbrengen’:

$$(A^2 + B^2)C^2 = (AC)^2 + (BC)^2.$$

Onze bedoeling is om in de rest van dit artikel het bewijs te geven van Henry Smith uit 1855 voor de ruwe vorm van de stelling van Fermat. We volgen in essentie de lijnen van [1], hoewel Smith gebruik maakte van *continuanten*, dingen waarvan de meeste mensen nooit gehoord hebben. In plaats daarvan zullen wij werken met *kettingbreuken*, die we onder andere kennen van [4]. Kettingbreuken hebben te maken met lineaire recursiebetrekkingen, en hierover is er een inleiding te vinden in appendix A. Het verband met de kettingbreuken lees je dan weer in appendix B. Dus als je alle details wil weten, lees dan de appendices. Maar je kan het verhaal ook volgen zonder de details van de appendices.

Eerst vertellen we wat meer over kettingbreuken, en in de volgende paragraaf geven we dan onze eigen versie van het bewijs van Smith. Daarna gaan we op zoek naar de twee kwadraten, wiskundig, met de kettingbreuken, maar ook grafisch, via de toepassing beschreven door Édouard Lucas in 1867 (zie geschiedkundig overzicht).

Eindige kettingbreuken

Voor elk niet-geheel rationaal getal kan je wat men noemt een eindige kettingbreuk vinden. We laten dit zien aan de hand van het voorbeeld $\frac{39}{16}$. We bepalen het grootste geheel getal dat in de breuk in kwestie past, en schrijven

$$\frac{39}{16} = 2 + \frac{7}{16} = 2 + \frac{1}{\frac{16}{7}}.$$

Met de noemer van de tweede term in het rechterlid gaan we dan op dezelfde manier verder:

$$\frac{39}{16} = 2 + \frac{1}{\frac{16}{7}} = 2 + \frac{1}{2 + \frac{2}{7}} = 2 + \frac{1}{2 + \frac{1}{\frac{7}{2}}} = 2 + \frac{1}{2 + \frac{1}{3 + \frac{1}{2}}}.$$

Dit proces eindigt altijd en de laatste noemer is steeds een geheel getal ≥ 2 (waarom kan dit niet gelijk zijn aan 1?).

De kettingbreuk van een positief niet-geheel rationaal getal heeft dus de volgende vorm:

$$b_1 + \frac{1}{b_2 + \frac{1}{\ddots + \frac{1}{b_k}}} \quad (1)$$

waarbij alle b 's positieve gehele getallen zijn. We zullen de notatie T_{1-k} en N_{1-k} gebruiken voor de teller en de noemer van het rationaal getal dat we krijgen indien we deze kettingbreuk uitwerken:

$$b_1 + \frac{1}{b_2 + \frac{1}{\ddots + \frac{1}{b_{k-1} + \frac{1}{b_k}}}} = \frac{T_{1-k}}{N_{1-k}} \quad (2)$$

(dus $1 \rightarrow k$ betekent dat de b 's geordend zijn van b_1 tot b_k).

Elke stap in deze uitwerking is van de vorm

$$b_j + \frac{1}{N} = \frac{T}{N}$$

met T, N gehele getallen, waarbij T en N geen gemeenschappelijke factor kunnen hebben. In onze notatie veronderstellen we dus dat T_{1-k} en N_{1-k} onderling ondeelbaar zijn.

Indien we de b 's in de omgekeerde volgorde zetten, dan noteren we het resultaat zo:

$$b_k + \frac{1}{b_{k-1} + \frac{1}{\ddots + \frac{1}{b_2 + \frac{1}{b_1}}}} = \frac{T_{k-1}}{N_{k-1}}. \quad (3)$$

Merkwaardig genoeg is in beide gevallen de teller gelijk, dat wil zeggen $T_{1-k} = T_{k-1}$. We kijken even terug naar het voorbeeld aan het begin van deze paragraaf. Als we de volgorde van de b 's hierin omkeren, dan krijgen we dit:

$$2 + \frac{1}{3 + \frac{1}{2 + \frac{1}{2}}} = \frac{39}{17}$$

met inderdaad dezelfde teller. Deze eigenschap van kettingbreuken

blijkt essentieel te zijn, en is een gevolg van (13) en (14). Meer algemeen zullen we de notaties T_{i-j} en N_{i-j} gebruiken voor de teller en de noemer van de (uitgewerkte) kettingbreuk waarbij de b 's lopen van b_i tot b_j en waarbij T_{i-j} en N_{i-j} onderling ondeelbaar zijn.

Het bewijs van de stelling van Fermat

De stelling die we willen bewijzen zegt dit:

Elk priemgetal van de vorm $p = 4n + 1$ is te schrijven als de som van twee kwadraten.

De essentie van het bewijs is het feit dat de tellers in (2) en (3) aan elkaar gelijk zijn, in combinatie met de volgende merkwaardige formule:

$$T_{1-k} = T_{j-1} \cdot T_{j+1-k} + N_{j-1} \cdot N_{j+1-k}. \quad (4)$$

Dit is formule (17) uit Appendix B. We kunnen ze ook zo schrijven (als $j + 2 \leq k$):

$$T_{1-k} = T_{j-1} \cdot T_{j+1-k} + N_{j-1} \cdot T_{j+2-k}, \quad (5)$$

want we hebben natuurlijk dat

$$\frac{T_{j+1-k}}{N_{j+1-k}} = b_{j+1} + \frac{1}{b_{j+2} + \frac{1}{\ddots + \frac{1}{b_k}}} = b_{j+1} + \frac{1}{\frac{T_{j+2-k}}{N_{j+2-k}}},$$

en na uitwerking van het rechterlid volgt hieruit door het onderling ondeelbaar zijn van T en bijhorende N dat $N_{j+1-k} = T_{j+2-k}$.

We vertrekken van een priemgetal p dat één meer is dan een viervoud, en we stellen de kettingbreuk op voor breuken waarvan de teller gelijk is aan p . Stel dat zo'n kettingbreuk opgebouwd is met de getallen $b_1, b_2, \dots, b_k$, dan worden (4) en (5) dus:

$$\begin{aligned} p &= T_{j-1} \cdot T_{j+1-k} + N_{j-1} \cdot N_{j+1-k} \\ &= T_{j-1} \cdot T_{j+1-k} + N_{j-1} \cdot T_{j+2-k} \end{aligned}$$

We beperken ons hierbij tot het geval dat $b_1 \geq 2$, dat blijkt voldoende te zijn voor het bewijs. Een gevolg van deze veronderstelling is dat de beide breuken in het rechterlid van (2) en (3) een noemer hebben die ligt tussen 2 en $2n$ (herinner je dat $p = 4n + 1$). Inderdaad, we hebben dan dat

$$\frac{p}{\text{noemer}} > 2 \Rightarrow p = 4n + 1 > 2 \cdot \text{noemer}.$$

Noemer = 1 sluiten we overigens uit, want dan hebben we geen breuk.

We bekijken de verschillende breuken eens voor $p = 13$, dus $n = 3$. Het gaat dan om breuken met teller 13 en noemer respectievelijk 2, 3, 4, 5, 6. Dit zijn de bijhorende kettingbreuken:

$$\frac{13}{2} = 6 + \frac{1}{2}, \frac{13}{3} = 4 + \frac{1}{3}, \frac{13}{4} = 3 + \frac{1}{4}, \frac{13}{5} = 2 + \frac{1}{1 + \frac{1}{1 + \frac{1}{2}}}, \frac{13}{6} = 2 + \frac{1}{6}.$$

Let op het verband tussen de kettingbreuken die horen bij de breuken met noemers 2 en 6: de volgorde van de b 's is omgewisseld. Ook die met noemers 3 en 4 komen op deze wijze met elkaar overeen. De overblijvende breuk, met noemer 5, valt op door het feit dat als je de volgorde van de b 's in de kettingbreuk omkeert, dat deze niet verandert ten gevolge van een soort palindromisch effect.

Dit zal ook meer algemeen zo zijn: met elk getal uit $\{2, 3, 4, \dots, 2n\}$ (= de mogelijke noemers) kunnen we een ander getal uit deze verzameling associëren op deze manier. Neem als getal j , bepaal de kettingbreuk voor $\frac{p}{j}$, keer de volgorde van de b 's om zoals in (2) en (3), en dan is de noemer van de resulterende breuk opnieuw een getal uit $\{2, 3, 4, \dots, 2n\}$.

Omdat het aantal elementen in de verzameling $\{2, 3, 4, \dots, 2n\}$ gelijk is aan $2n - 1$, een oneven getal, en omdat we deze dus kunnen verdelen in groepjes van twee noemers die bij elkaar horen, zal er altijd één noemer overblijven, die dan ook deze palindromische eigenschap zal moeten hebben:

$$b_1 = b_k, b_2 = b_{k-1}, \dots$$

Hiermee werken we verder. We onderscheiden nu twee gevallen.

Ofwel is het aantal b 's voor deze ene speciale breuk even, stel dus $k = 2j$. Dan ziet de breuk er zo uit:

$$b_1 + \frac{1}{\ddots + \frac{1}{b_j + \frac{1}{b_{j+1} + \frac{1}{\ddots + \frac{1}{b_k}}}}} = b_1 + \frac{1}{\ddots + \frac{1}{b_j + \frac{1}{b_j + \frac{1}{\ddots + \frac{1}{b_1}}}}},$$

want inderdaad geldt

$$b_{j+1} + \frac{1}{\ddots + \frac{1}{b_k}} = b_j + \frac{1}{\ddots + \frac{1}{b_1}}.$$

Nu kunnen we dit zo schrijven:

$$\frac{T_{j+1-k}}{N_{j+1-k}} = \frac{T_{j-1}}{N_{j-1}}, \quad (6)$$

en hieruit volgt wegens het onderling ondeelbaar zijn van tellers en noemers dat $T_{j+1-k} = T_{j-1}$, noem dit geheel getal a , en ook $N_{j+1-k} = N_{j-1}$, noem dit b .

De eerste vergelijking in het kadertje wordt dan:

$$p = T_{j-1} \cdot T_{j+1-k} + N_{j-1} \cdot N_{j+1-k} = (T_{j-1})^2 + (N_{j-1})^2$$

of nog

$$p = a^2 + b^2.$$

In dit eerste geval is de zaak dus bewezen.

Ofwel is het aantal b 's voor de speciale breuk oneven, stel dus $k = 2j + 1$. Dan ziet de breuk er zo uit:

$$b_1 + \frac{1}{\ddots + \frac{1}{b_j + \frac{1}{b_{j+1} + \frac{1}{b_{j+2} + \frac{1}{\ddots + \frac{1}{b_k}}}}} = b_1 + \frac{1}{\ddots + \frac{1}{b_j + \frac{1}{b_{j+1} + \frac{1}{b_j + \frac{1}{\ddots + \frac{1}{b_1}}}}},$$

en dus geldt

$$b_{j+2} + \frac{1}{\ddots + \frac{1}{b_k}} = b_j + \frac{1}{\ddots + \frac{1}{b_1}}.$$

Dit laatste kunnen we nu zo schrijven:

$$\frac{T_{j+2-k}}{N_{j+2-k}} = \frac{T_{j-1}}{N_{j-1}},$$

en hieruit volgt dan onmiddellijk dat $T_{j+2-k} = T_{j-1}$. Uit het tweede deel van de vergelijking in het kadertje volgt dan:

$$p = T_{j-1} \cdot T_{j+1-k} + N_{j-1} T_{j+2-k} = T_{j-1} \cdot (T_{j+1-k} + N_{j-1}),$$

waarbij T_{j-1} niet gelijk kan zijn aan 1. Uit deze laatste uitdrukking volgt dat p niet priem is, wat in strijd is met het gestelde.

We zijn er dus nu zeker van dat p te schrijven is als de som van twee kwadraten, en dat k in dit geval even is. Hiermee is het bewijs klaar.

Op zoek naar de twee kwadraten

We willen natuurlijk ook graag weten van welke twee kwadraten het priemgetal $p = 4n+1$ de som is. Hiervoor proberen we meer te weten te komen over de noemer in de palindromische kettingbreuk, we stellen deze noemer voor door d . Hierbij gebruiken we de formule (16) uit Appendix B:

$$N_{1-k} \cdot T_{1-k-1} - T_{1-k} \cdot N_{1-k-1} = (-1)^{k-1} = -1, \quad (7)$$

die we hier toepassen met k even. Hierbij is $T_{1-k} = p$ en $N_{1-k} = d$. Uit (2):

$$\frac{p}{d} = \frac{T_{1-k}}{N_{1-k}} = b_1 + \frac{1}{b_2 + \frac{1}{\ddots + \frac{1}{b_{k-1} + \frac{1}{b_k}}}} = b_1 + \frac{1}{\frac{T_{2-k}}{N_{2-k}}},$$

en uit het onderling ondeelbaar zijn van T en bijhorende N volgt dat d de teller is van de volgende kettingbreuk:

$$\frac{T_{2-k}}{N_{2-k}} = b_2 + \frac{1}{b_3 + \frac{1}{\ddots + \frac{1}{b_{k-1} + \frac{1}{b_k}}}}.$$

Maar we hebben vroeger gezien dat de teller van zo'n kettingbreuk niet verandert als we de volgorde van de b 's omkeren. We krijgen dan de volgende kettingbreuk, die we anders kunnen schrijven door gebruik te maken van het palindromisch karakter van de b 's:

$$b_k + \frac{1}{b_{k-1} + \frac{1}{\ddots + \frac{1}{b_3 + \frac{1}{b_2}}}} = b_1 + \frac{1}{b_2 + \frac{1}{\ddots + \frac{1}{b_{k-2} + \frac{1}{b_{k-1}}}}},$$

vermits $b_k = b_1$, $b_{k-1} = b_2$, enzovoort. De teller van deze laatste kettingbreuk is dus ook gelijk aan d . Dit betekent dat $T_{1-k-1} = d$. De vergelijking (7) wordt dan:

$$d^2 - pN_{1-k-1} = -1 \Leftrightarrow d^2 + 1 = pN_{1-k-1} \\ \Rightarrow d^2 + 1 \text{ is deelbaar door } p.$$

Het is niet moeilijk om in te zien dat er maar één getal d kan zijn tussen 2 en $2n$ met deze eigenschap. Stel namelijk dat er zo twee zijn, d_1 en d_2 , met $d_1 > d_2$, met zowel $d_1^2 + 1$ als $d_2^2 + 1$ deelbaar door p . Dan volgt onmiddellijk dat ook het verschil $d_1^2 - d_2^2 = (d_1 + d_2)(d_1 - d_2)$ deelbaar zal zijn door het priemgetal p , maar beide factoren zijn kleiner dan p , dus dat kan niet.

Voor het bepalen van de unieke noemer d gaan we dan als volgt te werk: bepaal het kwadraat van de getallen $2, 3, \dots$ en tel er 1 bij op. Indien het resultaat deelbaar is door p , dan heb je d gevonden. Voor $p = 29$ vinden we voor die kwadraten plus 1 het volgende, op veelvouden van 29 na:

1	→	2		7	→	21
2	→	5		8	→	7
3	→	10		9	→	24
4	→	17		10	→	14
5	→	26		11	→	6
6	→	8		12	→	0

We besluiten dat $d = 12$. We bepalen nu de kettingbreuk voor $29/12$:

$$\frac{29}{12} = 2 + \frac{1}{2 + \frac{1}{2 + \frac{1}{2}}}$$

(palindromisch!) en we berekenen dit deel ervan:

$$2 + \frac{1}{2} = \frac{5}{2},$$

en met de teller en de noemer kunnen we 29 schrijven als een som van twee kwadraten:

$$29 = 2^2 + 5^2.$$

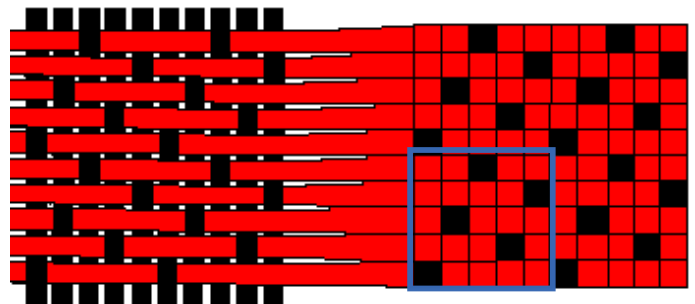
Dit laatste volgt uit (6), want we hebben bewezen dat teller en noemer van het rechterlid de twee getallen zijn die we zoeken.

De methode van Édouard Lucas

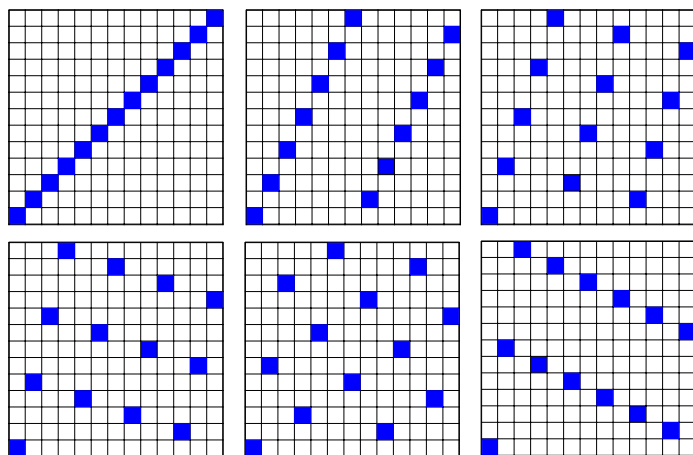
We kunnen de getallen a en b ook op een andere manier bepalen. Édouard Lucas bracht in 1867 de stelling van Fermat in verband met het weven van draden tot textiel. Hierbij worden verticale en horizontale draden met elkaar vervlochten, zoals aan de linkerkant van Figuur 1. Het gaat hier om een zogenaamde satijnbinding. Bij satijn kruisen wat men noemt de ketting- en de inslagdraden elkaar op een speciale manier. Als de zwarte kettingdraad op een bepaalde plaats boven ligt, dan ligt bij minstens vier van de volgende kruisingen de rode inslagdraad boven. Op de figuur zijn het er precies vier. Het patroon herhaalt zich, en kan daarom voorgesteld worden zoals rechts in de figuur, met wat in het blauwe vierkant te zien is, een vierkant opgebouwd uit 5×5 kleine vierkanten, waarvan er als volgt een aantal zwart gekleurd zijn: kleur het vierkantje linksonder in, ga dan één kolom opzij en twee rijen omhoog en kleur daar het vierkantje in, ga weer naar rechts en twee omhoog enzovoort. Kom je uit boven de 5 , dan tel je van onderen te beginnen verder.

Omdat de zijde van het vierkant een priemgetal is, zal het toepassen van deze methode er steeds voor zorgen dat er op elke rij en kolom precies één vierkant is ingekleurd, één per rij en één per kolom.

In Figuur 2 is een voorbeeld te zien in het geval we niet vier maar twaalf opeenvolgende kruisingen hebben met de inslagdraad boven, het gaat dan om een vierkant van 13×13 . Dit kan op verschillende manieren, zoals je kan zien op Figuur 2. In de verschillende delen van de figuur gaat men respectievelijk met stappen van $1, 2, 3, 4, 5$ en 6 naar boven, steeds startend linksonder in een vierkant. Zo ontstaan



Figuur 1



Figuur 2

patronen. Lucas merkte op dat het patroon in het midden onderaan het mooiste is omdat er allerlei vierkanten in te zien zijn. Bovendien is het het enige dat niet verandert als je het een kwartslag draait. Merk op dat we bij dit patroon stijgen in stappen van 5. En 5 was precies de noemer die hoorde bij het priemgetal 13 waarvan de kettingbreuk palindromisch was!

Lucas bewees ook dat een dergelijke symmetrie niet voorkomt indien het aantal vierkantjes per zijde een priemgetal is van de vorm $4n + 3$.

We doen het nog even opnieuw voor $p = 29$, en de bijhorende noemer 12. Kleur in een vierkant van 29×29 het vierkantje linksonder in, ga dan één kolom opzij en twaalf rijen omhoog en kleur daar het vierkantje in, ga weer naar rechts en twaalf omhoog, enzovoort (Figuur 3, links).

Opnieuw ontstaan er vierkanten, waarvan er één is aangeduid op de figuur. Het wordt duidelijker indien we de blauwe vierkantjes vervangen door roosterpunten in een rooster van 29×29 (Figuur 3, rechts). Via de stelling van Pythagoras vinden we dan dat het kwadraat van de zijde van het aangeduide vierkant te schrijven is als $5^2 + 2^2 = 29$.

Bijna 250 jaar na de eerste formulering van de stelling van Fermat door Girard, vond Lucas [6–7] er zo een echte praktische toepassing van! Voor Lucas werd het zelfs een heel nieuwe tak van de meetkunde, die hij *Géométrie plane des tissus* (Vlakke meetkunde van de stoffen) doopte. Hij vond hierbij navolging bij andere wiskundigen, waarvan de meest bekende Pafnuty Chebyshev (1821–1894) is, met zijn ongepubliceerd artikel ‘Sur la coupe des vêtements’ uit 1878 waarin hij berekent welke vorm je uit een stuk stof moet uitknippen om er een boloppervlak volledig mee te kunnen ‘aankleden’.

Voor de geïnteresseerde lezer, je doet het zoals in Figuur 4 wordt gedemonstreerd. Bovenaan zie je de vorm die je uit de stof moet snijden, onderaan het aankleden van de bol. (Met dank aan Étienne Ghys [2] voor de bovenste afbeelding, en aan Jos Leys voor de andere.)

Appendix A. Lineaire recursiebetrekkingen

Een lineaire recursiebetrekking (van de tweede orde) is een vergelijking die het verband geeft tussen drie opeenvolgende termen van een oneindige rij getallen $y_{-1}, y_0, y_1, \dots, y_n, \dots$. Zo’n vergelijking neemt de volgende vorm aan:

$$y_k = b_k \cdot y_{k-1} + a_k \cdot y_{k-2} \quad \text{voor } k = 1, 2, 3, \dots$$

De getallen $a_1, a_2, a_3, \dots$ en $b_1, b_2, b_3, \dots$ zijn hierbij gegeven.

Het bekendste voorbeeld van een lineaire recursiebetrekking is dit:

$$y_k = y_{k-1} + y_{k-2} \quad \text{voor } k = 1, 2, 3, \dots$$

waarbij alle a ’s en b ’s gelijk zijn aan 1.

In feite staan hier oneindig veel vergelijkingen, waarvan de eerste gegeven zijn door:

$$y_1 = y_0 + y_{-1}, \quad y_2 = y_1 + y_0, \quad y_3 = y_2 + y_1, \dots$$

Merk op dat je met deze vergelijkingen inderdaad een oneindige rij getallen genereert, op voorwaarde dat je de eerste twee getallen y_{-1} en y_0 vastlegt. Voor deze recursiebetrekking is de standaardkeuze $y_{-1} = y_0 = 1$ (we spreken van beginvoorwaarden). We krijgen dan de volgende rij getallen:

$$y_{-1} = 1, y_0 = 1, y_1 = 2, y_2 = 3, y_3 = 5, y_4 = 8, y_5 = 13, y_6 = 21, \dots$$

Deze rij is beroemd en wordt de rij van Fibonacci genoemd.

Als we andere beginvoorwaarden kiezen, dan krijgen we een andere rij getallen.

Een mooie eigenschap van dit soort recursiebetrekkingen is dat als je al twee oplossingen berekend hebt, dat alle andere oplossingen dan te vinden zijn uit die twee. Het is ideaal als je eerst deze twee specifieke oplossingen berekent:

$$\text{oplossing } A_k \text{ met } A_{-1} = 1, A_0 = 0,$$

$$\text{oplossing } B_k \text{ met } B_{-1} = 0, B_0 = 1,$$

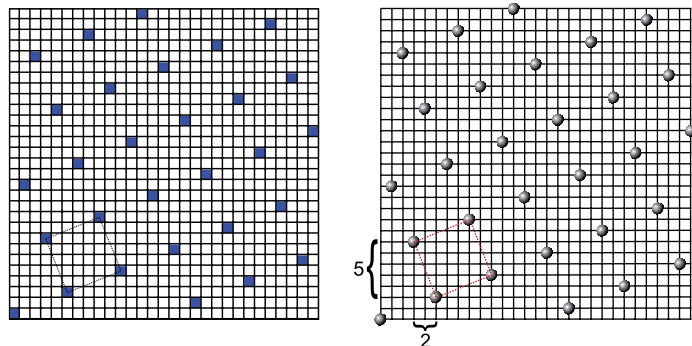
In Tabel 1 zie je de eerste paar termen van beide rijen. Door de speciale keuze van de beginvoorwaarden kunnen we nu elke andere oplossing y_k van de recursiebetrekking schrijven met behulp van deze twee. Je ziet in de tabel dat als je de oplossing A_k vermenigvuldigt met y_{-1} en daar B_k , vermenigvuldigt met y_0 , bij optelt, dat je dan de eerste 2 waarden van y_k krijgt.

Door de lineariteit van de recursiebetrekking is het dan eenvoudig in te zien dat voor elke k geldt:

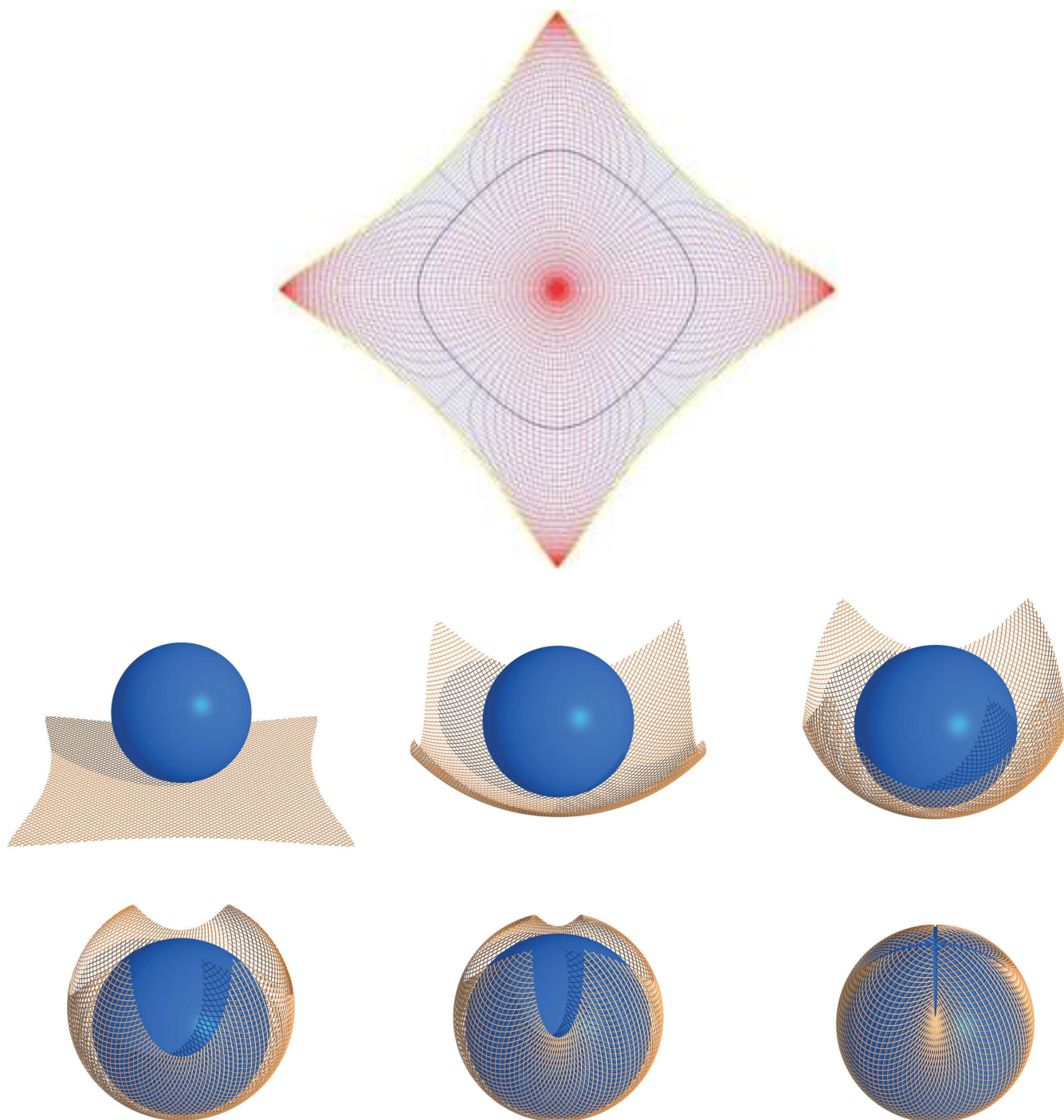
$$y_k = y_{-1}A_k + y_0B_k.$$

We hebben de volgende eigenschap nodig, eveneens een gevolg van de lineariteit:

$$A_k B_{k-1} - A_{k-1} B_k = (-1)^{k-1} \cdot a_1 \cdot a_2 \cdot \dots \cdot a_k. \quad (8)$$



Figuur 3



Figuur 4

Dit kunnen we bewijzen per inductie, en daarvoor gebruiken we eigenschappen van determinanten:

$$\begin{vmatrix} A_k & A_{k-1} \\ B_k & B_{k-1} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} b_k A_{k-1} + a_k A_{k-2} & A_{k-1} \\ b_k B_{k-1} + a_k B_{k-2} & B_{k-1} \end{vmatrix} = -a_k \cdot \begin{vmatrix} A_{k-1} & A_{k-2} \\ B_{k-1} & B_{k-2} \end{vmatrix}$$

met

$$\begin{vmatrix} A_0 & A_{-1} \\ B_0 & B_{-1} \end{vmatrix} = -1.$$

Vanaf nu zullen we enkel nog werken met recursiebetrekkingen waarbij $a_k = 1$ voor elke waarde van k :

$k :$	-1	0	1	2	...	n	...
$A_k :$	1	0	a_1	$b_2 a_1$	...	A_n	...
$B_k :$	0	1	b_1	$b_2 b_1 + a_2$	...	B_n	...
$\gamma_k :$	γ_{-1}	γ_0	γ_1	γ_2	...	γ_n	...

Tabel 1

$k :$	-1	0	1	2	...	$j-1$	j	$j+1$	...	n	...
$B_k^{(1)} :$	0	1	b_1	$B_2^{(1)}$	...	$B_{j-1}^{(1)}$	$B_j^{(1)}$	$B_{j+1}^{(1)}$	...	$B_n^{(1)}$	...
$B_k^{(2)} :$	1	0	1	b_2	...	$B_{j-1}^{(2)}$	$B_j^{(2)}$	$B_{j+1}^{(2)}$	...	$B_n^{(2)}$	...
$B_k^{(3)} :$		1	0	1	...	$B_{j-1}^{(3)}$	$B_j^{(3)}$	$B_{j+1}^{(3)}$	...	$B_n^{(3)}$	...
$\vdots$											
$B_k^{(j)} :$					...	1	b_j	$B_{j+1}^{(j)}$	...	$B_n^{(j)}$	...
$B_k^{(j+1)} :$					...	0	1	b_{j+1}	...	$B_n^{(j+1)}$	...
$B_k^{(j+2)} :$					...	1	0	1	...	$B_n^{(j+2)}$	...

Tabel 2

$$\mathcal{Y}_k = b_k \cdot \mathcal{Y}_{k-1} + \mathcal{Y}_{k-2} \quad \text{voor } k = 1, 2, 3, \dots$$

We definiëren een aantal basisoplossingen zoals in Tabel 2. De positie van de twee opeenvolgende waarden 0 en 1 karakteriseert de verschillende basisoplossingen waarvan je de naam kan lezen in de eerste kolom. Om te beginnen kan je opmerken dat $B_k^{(1)} = B_k$ en $B_k^{(2)} = A_k$, en dus wordt eigenschap (8):

$$B_k^{(2)} B_{k-1}^{(1)} - B_{k-1}^{(2)} B_k^{(1)} = (-1)^{k-1}. \quad (9)$$

Verder is er natuurlijk voor elke waarde van j voldaan aan de recursiebetrekking:

$$B_k^{(j)} = b_k B_{k-1}^{(j)} + B_{k-2}^{(j)}. \quad (10)$$

Uit deze tabel kunnen we twee interessante relaties tussen deze oplossingen aflezen. We baseren ons hiervoor op de waarden van $B_k^{(j+1)}$ en $B_k^{(j+2)}$ in de kleine rechthoek. Om te beginnen kijken we naar $B_k^{(1)}$, en je ziet dan dat deze oplossing de volgende lineaire combinatie is van de twee onderste oplossingen:

$$B_k^{(1)} = B_j^{(1)} B_k^{(j+1)} + B_{j-1}^{(1)} B_k^{(j+2)}. \quad (11)$$

Voor $B_n^{(j)}$ vinden we op dezelfde manier:

$$B_n^{(j)} = b_j B_n^{(j+1)} + B_n^{(j+2)}. \quad (12)$$

Deze recursiebetrekking verbindt drie onder elkaar staande getallen in de tabel, en heeft als onmiddellijk gevolg dat twee opeenvolgende elementen van een kolom geen gemeenschappelijke factor kunnen hebben. Hadden ze wel een gemeenschappelijke factor, dan volgt uit (12) dat deze factor de hele kolom deelt, wat niet mogelijk is door het voorkomen van het getal 1 in elke kolom.

Appendix B. Verband met kettingbreuken

Met de resultaten uit Appendix A kunnen we laten zien (zie verder) dat we het volgende resultaat hebben:

$$\frac{T_{1-k}}{N_{1-k}} = b_1 + \frac{1}{b_2 + \frac{1}{\ddots + \frac{1}{b_{k-1} + \frac{1}{b_k}}}} = \frac{B_k^{(1)}}{B_k^{(2)}}, \quad (13)$$

waarbij de b 's de coëfficiënten zijn in de recursiebetrekking in Appendix A.

Uit het feit dat beide breuken (links en rechts) niet te vereenvoudigen zijn, volgt dan dat $T_{1-k} = B_k^{(1)}$ en $N_{1-k} = B_k^{(2)}$.

Verder hebben we ook:

$$\frac{T_{k-1}}{N_{k-1}} = b_k + \frac{1}{b_{k-1} + \frac{1}{\ddots + \frac{1}{b_2 + \frac{1}{b_1}}}} = \frac{B_k^{(1)}}{B_{k-1}^{(1)}} \quad (14)$$

voor de kettingbreuk waarin de b 's in de omgekeerde volgorde staan.

Dus $T_{k-1} = B_k^{(1)}$ en $N_{k-1} = B_{k-1}^{(1)}$.

Formule (13) kunnen we veralgemenen tot:

$$\frac{T_{j+1-k}}{N_{j+1-k}} = b_{j+1} + \frac{1}{b_{j+2} + \frac{1}{\ddots + \frac{1}{b_k}}} = \frac{B_k^{(j+1)}}{B_k^{(j+2)}}. \quad (15)$$

De formules (13) en (15) volgen uit (12). We herschrijven deze vergelijking als volgt:

$$B_k^{(j)} = b_j B_k^{(j+1)} + B_k^{(j+2)} \Rightarrow \frac{B_k^{(j)}}{B_k^{(j+1)}} = b_j + \frac{1}{\frac{B_k^{(j+1)}}{B_k^{(j+2)}}}.$$

We starten nu met $j = 1$:

$$\begin{aligned} \frac{B_k^{(1)}}{B_k^{(2)}} &= b_1 + \frac{1}{\frac{B_k^{(2)}}{\frac{B_k^{(3)}}{\frac{B_k^{(4)}}{\ddots}}}}} = b_1 + \frac{1}{b_2 + \frac{1}{\frac{B_k^{(3)}}{\frac{B_k^{(4)}}{\ddots}}}}} \\ &= b_1 + \frac{1}{b_2 + \frac{1}{\ddots + \frac{1}{b_{k-1} + \frac{1}{\frac{B_k^{(k)}}{B_k^{(k+1)}}}}}}} = b_1 + \frac{1}{b_2 + \frac{1}{\ddots + \frac{1}{b_{k-1} + \frac{1}{b_k}}}}. \end{aligned}$$

De laatste stap volgt uit de beginvoorwaarden in combinatie met de recursiebetrekking. We hebben namelijk dat $B_k^{(k)} = b_k$ en $B_k^{(k+1)} = 1$.

Voor (14) vertrekken we van de vergelijking (10) met $j = 1$ en herschrijven deze als volgt:

$$B_k^{(1)} = b_k B_{k-1}^{(1)} + B_{k-2}^{(1)} \Rightarrow \frac{B_k^{(1)}}{B_{k-1}^{(1)}} = b_k + \frac{1}{\frac{B_{k-1}^{(1)}}{B_{k-2}^{(1)}}}.$$

We vervangen dan in de linkse vergelijking k door $k - 1$ en herhalen het procedé.

Formule (9) kunnen we nu herschrijven als

$$N_{1-k} \cdot T_{1-k-1} - T_{1-k} \cdot N_{1-k-1} = (-1)^{k-1}. \quad (16)$$

Formule (11) wordt

$$T_{1-k} = T_{j-1} \cdot T_{j+1-k} + N_{j-1} \cdot N_{j+1-k}. \quad (17)$$

←

Referenties

- 1 F.W. Clarke, W.N. Everitt, L.L. Littlejohn en S.J.R. Vorster, H.J.S. Smith and the Fermat two squares theorem, *Amer. Math. Monthly* 106(7) (1999), 652–665.
- 2 É. Ghys, Sur la coupe des vêtements: variation autour d'un théorème de Tchebychev [On the cutting of garments: variation on a theme of Chebyshev], *Enseign. Math. (2)* 57(1–2) (2011), 165–208.
- 3 G.H. Hardy en E.M. Wright, *An Introduction to the Theory of Numbers*, Roger Heath-Brown, Joseph Silverman en Andrew Wiles (red.), Oxford University Press, 2008.
- 4 M. Kindt en P. Lemmens, *Ontwikkelen met kettingbreuken*, Zebra-reeks, deel 33, Epsilon Uitgaven, Amsterdam, 2011.
- 5 P. Levrie en R. Penne, *De pracht van priemgetallen*, Prometheus, Amsterdam, 2014.
- 6 É. Lucas, *Application de l'arithmétique à la construction de l'armure des satins réguliers*, G. Retaux, Paris, 1867.
- 7 É. Lucas, Les principes fondamentaux de la géométrie des tissus, *Congrès de l'Association française pour l'avancement des sciences* 40(2) (1911), 72–88.

Jan Beuving

cabaretier, Zeist

janbeuving@gmail.com



Het keerpunt van Maarten van der Weijden

Alle topsport is een experiment

In een rubriek die 'het keerpunt' heet, mag een interview met oud-topzwemmer Maarten van der Weijden niet ontbreken. Maarten van der Weijden rondde in 2005 zijn studie wiskunde in Utrecht af. Een studie die ruw onderbroken werd door een acute vorm van leukemie die hem trof. Hij overleefde de ziekte, richtte zijn pijlen op een topsportcarrière en won in 2008 olympisch goud op de 10 kilometer open water. Tegenwoordig is hij werkzaam bij Unilever. Een gesprek over de parallellen tussen wiskunde en topsport. "Ik kan genieten van de rust tijdens een keerpunt."

Hoeveel keerpunten heb jij in je leven gezwommen, schat je?

"In het open water heb je natuurlijk geen keerpunten, even los van de boeien waar je omheen moet zwemmen, maar bijna alle trainingen voor de wedstrijd doe je in een zwembad. Ik heb wel eens uitgerekend dat ik in totaal ongeveer 50.000 kilometer gezwommen heb. Het overgrote deel daarvan was in een 25-meterbad, dus laten we zeggen dat ik gemiddeld elke 33 meter een keerpunt zwom. Dat betekent dat ik ongeveer anderhalf miljoen keerpunten heb gezwommen."

Een duizelingwekkend aantal.

"Ja. Het voordeel van een keerpunt is wel dat je twee seconden niets hoeft te doen. Ik zwom daarom graag in een 25-meterbad. Mijn keerpuntentechniek is niet geweldig, maar omdat mijn lichaam snel kon herstellen, rustte ik uit tijdens de keerpunten. Daardoor kon ik mee met de snellere zwimmers."

Iedereen die jouw olympische finale gezien heeft, weet dat wiskundig inzicht een be-

langrijke rol speelde in de laatste meters.

"Mijn twee overgebleven concurrenten zwommen eerst een stuk naar rechts, om vervolgens linksaf naar het finishbord te gaan. Maar de kortste weg tussen twee pun-

ten is een rechte lijn, dus ik sneed de hoek die zij maakten af."

Dacht je ook echt aan dat principe toen je daar zwom?

"Ja. Of althans: ik denk dat ik de enige was die logisch nadacht, in plaats van blind bij de anderen te blijven. Ik keek op en zag waar we naartoe moesten, en dus ging ik die kant op. De schuine zijde van de driehoek is immers korter dan de twee rechthoekszijden bij elkaar. Eigenlijk heb ik dankzij de stelling van Pythagoras olympisch goud gewonnen."



Maarten van der Weijden

De bookmakers hadden me overigens een kans van 1 op 40 gegeven om te winnen. Er deden maar 25 zwemmers mee, dus dat is geen hoge kans. Als we de race duizend keer gezwommen hadden, waren er anderen die veel vaker zouden hebben gewonnen dan ik. Ik leg daarom ook altijd uit dat er behalve heel hard trainen ook gewoon geluk bij komt kijken.”

Is die liefde voor berekenend redeneren ook de reden dat je wiskunde ging studeren?

“Mijn vader is altijd wiskundedocent geweest, en mijn zus studeerde ook wiskunde. Op de middelbare school haalde ik ook goede cijfers, dus het was vooral de makkelijkste keuze.”

Genoot je wel van je studie? Of had het zwemmen voorrang?

“In het begin ging het heel goed, maar naarmate het zwemmen belangrijker werd, daalden de cijfers. En toen had ik al heel snel het besef: als je niet heel goed bent, is het ook veel minder leuk.”

Zou je een goede wiskundige zijn geworden, als je niet gezwommen had?

“Ik denk dat ik ver had kunnen komen, maar niet aan de top. Toen ik wiskunde ging studeren had ik een heel romantisch idee, dat ik als professor in een hokje problemen op ging lossen, en dat ik daarvan zou genieten. In het eerste jaar kregen we die documentaire over Andrew Wiles te zien, die op zijn zolderkamer de stelling van Fermat bewijst. Dat vond ik helemaal geweldig. Hij liet er alles voor om de oplossing te vinden. Maar uiteindelijk zou ik dan toch het sociale misen in mijn werk.”

Maar heb je zelf niet als een soort Andrew Wiles geleefd in aanloop naar de olympische spelen?

“Ja. Maar het verschil is dat Wiles zeven jaar geïsoleerd leefde, terwijl mijn extreme periode veel korter duurde. Maar, toen ik de documentaire gezien had, dacht ik: dat wil ik ook. In de wiskunde. Mijn ouders vonden mijn studie ook belangrijker dan mijn zwemcarrière.”

Toch heb je uiteindelijk geen Fieldsmedaille maar een olympische medaille gehaald. Waar heeft die omslag plaatsgevonden?

“Daarin heeft mijn ziekte een heel grote rol gespeeld. Na alle behandelingen was het moeilijk om de wiskunde weer op te pakken. Ik had de eerste anderhalf jaar afge-

rond, maar ik was er lang uit geweest, en ik moest veel weer opnieuw doen. De wiskunde is een bouwwerk van kennis. Als je een jaar gestopt bent met bouwen, kun je niet verwachten dat je nog het hele bouwwerk begrijpt. In het zwemmen kon ik mijn vooruitgang veel beter meten. Bij mijn studie was dat veel lastiger. Ik kon niet al die vakken weer opnieuw gaan doen. Ik voelde me wel verplicht om het af te maken, maar de laatste jaren vond ik niet echt leuk. Ook omdat het zwemmen toen veel gaver was.

De tijd dat ik ziek was, was echt het keerpunt, in die zin dat ik daarna echt bewust voor het zwemmen koos. Ervoor ging mijn leven een beetje automatisch — zo was ik ook wiskunde gaan studeren — maar daarna nam ik echt het heft in eigen hand.”

Heb je — behalve in die laatste olympische meters — profijt van de wiskunde gehad bij het zwemmen?

“In de wiskunde accepteer je niet dat dingen gaan zoals ze gaan, je wilt het snappen. Zo heb ik kleine logische dingen veranderd. Ik heb een langere aangeefhengel geïntroduceerd, zodat ik buiten de groep kon drinken in het water. Ik moest de landencode op mijn hoofd zichtbaar hebben, maar een badmuts houdt warmte vast. Daarom schreef ik de code op mijn hoofd. Wiskunde heeft me geleerd om in oplossingen te denken. Het openwaterzwemmen voelde in die tijd als een wiskunde waar nog geen regels waren. Het was voor het eerst olympisch, dus er was niets vastgelegd. Je kon alles zelf definiëren.”

Je hebt ook maandenlang geslapen in een tentje met zuurstofregulatie.

“Ja. De eerste resultaten daarvan waren niet goed. Ik wilde alleen verder als er bewijs was dat het werkte. Toen zei mijn coach iets heel slims: “Maarten, jij vraagt om een wetenschap. Maar die is er niet. Er is geen steekproef van duizenden mensen die ziek zijn geweest en nu dit doen. Jij bent de enige. $n = 1$.” Ik was eigenlijk een experiment, zoals alle topsport een experiment is. Er zijn misschien wel vijftig variabelen die een rol spelen bij pieken op het juiste moment. Maar je krijgt maar een stuk of tien kansen in je carrière om uit te zoeken hoe je de variabelen moet afstemmen. En voor een olympische finale maar één.”

Was je doorgegaan voor een volgende kans als je niet gewonnen had?

“Nee. Ik had mezelf voorgenomen dat ik so-

wieso zou stoppen als ik het podium niet zou halen. Dan was het alle tijd blijkbaar niet waard.”

Maar je haalde wél het podium, en toch stopte je.

“Ik koos voor een nieuw keerpunt, ja. Het mooie van een keerpunt is dat je even stil staat en kunt bedenken: wie ben ik nou, waar wil ik heen, en hoe ga ik dat doen? In zo’n keerpunt kun je alles weer opnieuw inrichten. Ik kan echt genieten van de rust tijdens zo’n keerpunt. Het zijn de meest waardevolle momenten in mijn leven geweest. Ik vind het altijd lastig om mijn periode van ziek zijn als waardevol te bestempelen, maar ik heb in die tijd wel leren nadenken over wie ik zelf ben. Toen ik met zwemmen stopte, deed ik dat weer.”

Je werkt inmiddels voor Unilever. Wat doe je daar precies?

“Ik ben sales controller voor alle producten die Unilever aan Albert Heijn verkoopt. Ik ben financieel verantwoordelijk voor alle transacties.”

Komt daar veel wiskunde bij kijken?

“Nee, wel veel logisch nadenken. Unilever en Albert Heijn zijn complexe bedrijven, waarbij veel belangen spelen, en waarbij het van belang is om je kansen op succes in te schatten. Het is heel erg veel vooruitdenken, schaken haast. Een beetje hoe ik als zwemmer aan het schaken en inschatten was. Het is constant uitzoomen en inzoomen, zoals in een wiskundig bewijs. Eerst uitzoomen om te kijken waar je heen wilt, en vervolgens inzoomen om stap voor stap de goede richting op te gaan.”

Je houdt van keerpunten. Zie je jezelf in de toekomst weer eens radicaal omdraaien?

“Ik wil mezelf continu blijven uitdagen. Maar op een dag zal de uitdaging hier weg zijn, en komt er zeker een nieuw keerpunt. Maar het is anders dan vroeger. Toen ik wiskunde ging studeren, wist ik niet dat ik ziek zou worden. En toen ik zwom, had ik geen tijd om na te denken over wat er daarna zou komen. Nu kijk ik veel bewuster uit naar het volgende keerpunt. En terwijl ik uitkijk, ben ik tevreden met hoe het nu gaat, en ik weet dat ik tevreden blijf als ik blijf uitkijken.”

Wegens zwangerschapsverlof van Ionica Smeets wordt deze rubriek eenmalig verzorgd door Jan Beuving. Heeft u een goede suggestie voor een (Nederlandse) wiskundige met een bijzonder keerpunt in zijn of haar carrière? Stuur dan een e-mail naar i@ionica.nl.

Gerard Hooghiemstra

Delft Institute of Applied Mathematics
Delft University of Technology
g.hooghiemstra@tudelft.nl

Piet Van Mieghem

Network Architectures and Services
Delft University of Technology
p.f.a.vanmieghem@tudelft.nl

Research

An inequality of Gauss

In this article Gerard Hooghiemstra and Piet van Mieghem explain why the Gauss inequality is overshadowed by the Chebychev inequality. Furthermore, they present a proof of the Gauss inequality in modern notation.

In his general analysis on measurement errors [4], Gauss treats random errors in a probabilistic manner, which is, with respect to today's standards, surprisingly modern. Our interest here is a particularly general inequality involving probabilities, stated and proved by Gauss in [4], that does not seem to be well-known in the stochastic community. The Gauss inequality is, for instance, not mentioned in either of the two introductory volumes [2–3] written by William Feller. The main goal of this note is to explain why this inequality is overshadowed by the well-known Chebychev inequality and to present (a slightly modified) proof of the Gauss inequality.

We start by restating Gauss' inequality in modern notation. We consider a random variable X having a density f_X , which is symmetric around 0 (i.e., $f_X(-x) = f_X(x)$, $\forall x > 0$), and which is non-increasing for $x > 0$. Moreover, we assume a finite second moment $E[X^2] = \int_{-\infty}^{\infty} x^2 f_X(x) dx < \infty$. By symmetry, the first moment (also called the mean μ) satisfies $\mu = E[X] = \int_{-\infty}^{\infty} x f_X(x) dx = 0$, so that the variance of X satisfies:

$$\sigma^2 = \text{Var}[X] = E[(X - \mu)^2] = E[X^2].$$

Theorem 1 (Gauss [4]). *Consider a random variable X having a density f_X , which is symmetric around 0 (i.e., $f_X(-x) = f_X(x)$, $\forall x > 0$), and which is non-increasing for $x > 0$. Moreover, we assume that $\sigma^2 = E[X^2] = \int_{-\infty}^{\infty} x^2 f_X(x) dx < \infty$. Defining for $a > 0$*

$$m = \Pr[|X| \leq a\sigma],$$

it holds that

$$\text{if } m \leq \frac{2}{3} \text{ then } a \leq m\sqrt{3}, \quad (1)$$

$$\text{if } m > \frac{2}{3} \text{ then } a \leq \frac{2}{3\sqrt{1-m}}, \quad (2)$$

At first glance, the two inequalities (1) and (2) provide little insight. After rearranging, (1) and (2) can be rewritten as,

$$\text{if } m \leq \frac{2}{3} \text{ then } m \geq \frac{a}{\sqrt{3}}, \quad (3)$$

$$\text{if } m > \frac{2}{3} \text{ then } m \geq 1 - \frac{4}{9a^2}. \quad (4)$$

The conclusions in (3) and (4) are somewhat peculiar, since the magnitude of m ($m \leq \frac{2}{3}$ or $m > \frac{2}{3}$) is needed, before the respective statement gives a lower bound for m . The conclusion in (4) is

$$\Pr[|X| \leq a\sigma] \geq 1 - \frac{4}{9a^2}, \quad (5)$$

which is valid in the tail of the distribution, i.e., for a large enough such that $\Pr[|X| > a\sigma] < \frac{1}{3}$, very closely resembles the inequality of Chebychev given below. The inequality of Chebychev below involves the mean $\mu = E[X] = \int_{-\infty}^{\infty} x f_X(x) dx$ of X , which, in general, is unequal to 0.

Chebychev's inequality

We assume that X has a finite second moment. Let us denote the mean by $\mu = E[X] = \int_{-\infty}^{\infty} x f_X(x) dx$ and the variance by $\sigma^2 = \text{Var}[X] = E[(X - \mu)^2] = E[X^2] - \mu^2$. In 1867, Chebychev [6] has proved that

$$\Pr[|X - \mu| \leq a\sigma] \geq 1 - \frac{1}{a^2}, \quad a > 0. \quad (6)$$

The proof of Chebychev's inequality [3, p. 151] or [5, p. 103] needs a few lines only:

1. apply the Markov inequality to

$$Y = ((X - \mu)/\sigma)^2 \geq 0,$$

where

2. the Markov inequality is given by

$$\begin{aligned} E[Y] &= \int_0^\infty y f_Y(y) dy \\ &\geq \int_a^\infty y f_Y(y) dy \\ &\geq a \int_a^\infty f_Y(y) dy \\ &= a \Pr[Y > a]. \end{aligned}$$

Comparison of the two inequalities

Before we proceed with the comparison of the inequalities of Gauss and Chebychev, let us first treat some examples.

Example 1. Let X possess a uniform distribution on the interval $(-s, s)$, i.e.,

$$f_X(x) = \begin{cases} \frac{1}{2s}, & -s < x < s, \\ 0, & |x| \geq s. \end{cases}$$

The distribution function $F_X(x)$, defined by $F_X(x) = \Pr[X \leq x]$, for real numbers x , reads:

$$F_X(x) = \begin{cases} 0, & x \leq -s, \\ \int_{-s}^x \frac{1}{2s} dt = \frac{x+s}{2s}, & -s < x < s, \\ 1, & x \geq s. \end{cases} \quad (7)$$

In this example, $\mu = E[X] = 0$ and $\sigma^2 = \int_{-s}^s \frac{x^2}{2s} dx = s^2/3$, so that $\sigma = s/\sqrt{3}$. By straightforward calculation, we have

$$\begin{aligned} \Pr[|X| \leq a\sigma] &= F_X(\min\{s, a\sigma\}) - F_X(-\min\{s, a\sigma\}) \\ &= \min\{1, a/\sqrt{3}\}. \end{aligned}$$

Example 2. We perform the same computations for X , now having a normal distribution with parameters $\mu = 0$ and $\sigma^2 = E[X^2]$. The probability distribution function

$$F_X(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^x e^{-t^2/2\sigma} dt,$$

cannot be expressed in elementary functions, but the specific probabilities can be found from tables of the standard normal distribution. An accurate series for the inverse $F_X^{-1}(x)$ exists [5, p. 44]. Let Z have a standard normal distribution, i.e., a normal distribution with parameters $\mu = 0$ and $\sigma^2 = 1$, then

$$\begin{aligned} \Pr[|X| \leq a\sigma] &= \Pr[X \leq a\sigma] - \Pr[X \leq -a\sigma] \\ &= \Pr[Z \leq a] - \Pr[Z \leq -a] \\ &= 1 - 2\Pr[Z > a], \end{aligned}$$

where the probability $\Pr[Z > a]$ can be found in many places, for instance, in [1, Table B.1, p. 432].

Example 3. As a third example, we take a symmetric distribution with heavy tails. Roughly speaking, a distribution has a heavy tail, if the survival function $\Pr[|X| > t]$ decays polynomially in t . A well-known example is the Pareto distribution [1, p. 63]. A random variable X is said to have a Pareto distribution with parameter $\alpha > 0$, if its probability density $g_\alpha(x) = 0$ is, for $x < 1$, and equal to

$$g_\alpha(x) = \frac{\alpha}{x^{\alpha+1}}, \quad \text{for } x \geq 1.$$

To satisfy the conditions of Theorem 1, we make the density f_X symmetric by defining,

$$f_X(x) = \begin{cases} \frac{1}{2} g_\alpha(1+x), & x \geq 0, \\ \frac{1}{2} g_\alpha(1-x), & x \leq 0. \end{cases}$$

Rather than computing the distribution function F_X , we instead derive $\Pr[|X| \leq a\sigma]$ directly from the density f_X . By construction, $E[X] = 0$ and the second moment is

$$\begin{aligned} \sigma^2 = E[X^2] &= \int_{-\infty}^\infty x^2 f_X(x) dx \\ &= 2 \int_0^\infty x^2 \frac{1}{2} g_\alpha(1+x) dx \\ &= \int_1^\infty \frac{\alpha(x-1)^2}{x^{\alpha+1}} dx \\ &= \frac{2}{(\alpha-1)(\alpha-2)}, \end{aligned}$$

since $\int_1^\infty \frac{\alpha x^\beta}{x^{\alpha+1}} dx = \alpha/(\alpha-\beta)$ for $\alpha > \beta$. Hence, we need to require that $\alpha > 2$ in order to have a finite variance $E[X^2] < \infty$. We shall take $\alpha = 3$ (and hence $\sigma = 1$) and find by integration:

$$\begin{aligned} \Pr[|X| \leq a\sigma] &= 2 \int_0^a \frac{1}{2} g_3(1+x) dx \\ &= \int_0^a \frac{3}{(x+1)^4} dx \\ &= 1 - \frac{1}{(1+a)^3}. \end{aligned}$$

In Table 1, we present $\Pr[|X| \leq a\sigma]$ for the distributions of Examples 1, 2 and 3 and compare for various values of a the lower bounds of Gauss (5) and Chebychev (6), respectively. In the table, the abbreviation ‘n.r.’ stands for ‘not relevant’, since for the corresponding values of a in all three cases, we have $m > \frac{2}{3}$.

The lower bound (5) of Gauss is in all examples tighter than (6) of Chebychev. However, two remarks are in order: (i) the lower bound of Gauss is only valid under more stringent conditions, but more importantly (ii) we must know, whether $m = \Pr[|X| < a\sigma]$ is larger or smaller than $\frac{2}{3}$, which is not straightforward at all.

a	$\frac{1}{2}$	1	$\frac{3}{2}$	2	$\frac{5}{2}$	3
$\Pr[X < a\sigma]$ for Example 1.	0.289	0.577	0.866	1	1	1
$\Pr[X < a\sigma]$ for Example 2.	0.383	0.683	0.866	0.954	0.988	0.997
$\Pr[X < a\sigma]$ for Example 3.	0.704	0.875	0.936	0.963	0.977	0.984
Lower bound from Gauss ($m \leq \frac{2}{3}$) (cf. (3))	0.289	0.577	n.r.	n.r.	n.r.	n.r.
Lower bound from Gauss ($m > \frac{2}{3}$) (cf. (4))	-0.778	0.556	0.802	0.889	0.929	0.951
Lower bound from Chebychev (cf. (6))	-3	0	0.556	0.750	0.840	0.889

Table 1 Comparison table.

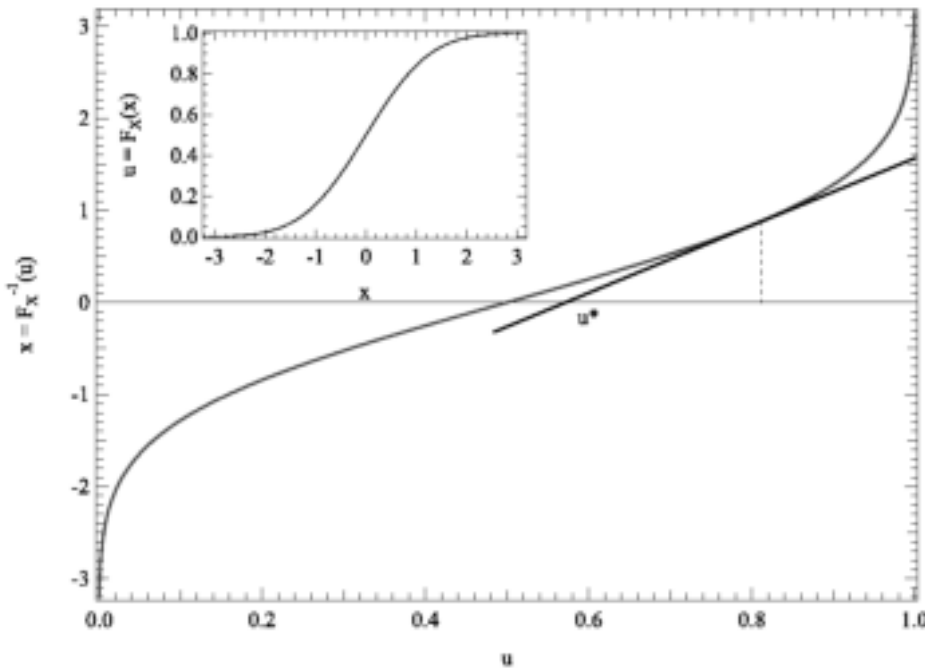


Figure 1 A distribution function $u = F_X(x)$ (in the inset) of a random variable X that is symmetric around $x=0$ and its inverse function $x = F_X^{-1}(u)$.

One might consider to approximate m by the lower bound, because we know that m falls in between the lower bound and 1. This approximation is rather crude, however in the tail ($m > \frac{2}{3}$), the lower bound of Gauss is definitely better than that of Chebychev. Also note that in case (i), the uniform distribution, the lower bound of Gauss gives the exact values for $m = \Pr(|X| < a\sigma)$, for $m < \frac{2}{3}$.

For the theoretical value of the lower bounds, we consider an important application, namely the weak law of large numbers [3, p. 234]. Informally, the weak law of large numbers states that the average of repetitive and independent measurements converges (in probability) to the mean of the distribution. Indeed, for a series of repetitive and independent measurements $X_1, X_2, \dots, X_n$ with density satisfying the conditions of Theorem 1, the mean of the underlying distribution is 0 and

$$\bar{X}_n = \frac{X_1 + X_2 + \dots + X_n}{n}$$

converges to 0, in the sense that for each $\varepsilon > 0$,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \Pr[|\bar{X}_n| > \varepsilon] = 0.$$

This follows directly from the inequality (5) of Gauss, since

$$\begin{aligned} \text{Var}[\bar{X}_n] &= \text{Var}\left[\frac{X_1 + X_2 + \dots + X_n}{n}\right] \\ &= \frac{1}{n^2} \text{Var}[X_1 + X_2 + \dots + X_n] \\ &= \frac{1}{n^2} \{\text{Var}[X_1] + \dots + \text{Var}[X_n]\} \\ &= \frac{1}{n^2} n\sigma^2 = \frac{\sigma^2}{n}. \end{aligned}$$

Indeed, we find that, for $n \rightarrow \infty$, and with $a = \varepsilon\sqrt{n}/\sigma$,

$$\begin{aligned} \Pr[|\bar{X}_n| > \varepsilon] &= 1 - \Pr[|\bar{X}_n| < \varepsilon] \\ &= 1 - \Pr\left[|\bar{X}_n| < \frac{\sigma}{\sqrt{n}} \varepsilon \sqrt{n}\right] \\ &\leq \frac{4\sigma^2}{9\varepsilon^2 n} \rightarrow 0. \end{aligned}$$

However, the same conclusion can be drawn by applying the Chebychev inequality (6), in which case the upper bound is replaced by

$$\frac{1}{\left(\varepsilon \frac{\sqrt{n}}{\sigma}\right)^2} = \frac{\sigma^2}{\varepsilon^2 n},$$

which also converges to 0. Hence, for theoretical purposes, the advantage of the factor $\frac{4}{9}$ in Gauss' inequality (5) compared to Chebychev's inequality (6) is unimportant and is washed out entirely by the fact that Chebychev's inequality holds under the single condition that X must have a finite second moment. We believe that this explains why Gauss' inequality (5) is barely known in the stochastic community.

Proof of the Gauss inequality

In this section we present a proof of the Gauss inequality in modern notation. In his proof [4] in Latin (translated to English in [5, pp. 111–112]), Gauss uses the inverse of the function h defined by $h(x) = F_X(x) - F_X(-x)$, $x \geq 0$. It is slightly easier to concentrate on the inverse function F_X^{-1} , which we define below. Since, in the framework of Theorem 1, we exclusively work with continuous distribution functions and since these functions are by definition non-decreasing, we can define

$$F_X^{-1}(u) = \inf\{x : F_X(x) = u\}, \quad 0 < u < 1,$$

and, on intervals where $f_X(x) = 0$, or similarly, where $F_X(x)$ is constant, we take the left-endpoint of that interval.

The general definition of the expectation of a function g of X is

$$E[g(X)] = \int_{-\infty}^{\infty} g(x) dF_X(x). \quad (8)$$

After the substitution $x = F_X^{-1}(u)$ or $u = F_X(x)$ and $du = dF_X(x) = f_X(x)dx$, we obtain

$$E[g(X)] = \int_0^1 g(F_X^{-1}(u)) du,$$

from which the mean

$$\mu = E[X] = \int_0^1 F_X^{-1}(u) du$$

and the second moment

$$E[X^2] = \int_0^1 (F_X^{-1}(u))^2 du$$

follows. A probabilistic way to obtain the same result is as follows. Let U be a uniform random variable on $(0, 1)$, then for all real numbers x ,

$$\{U \leq F_X(x)\} = \{F_X^{-1}(U) \leq x\}. \quad (9)$$

For a random variable with a uniform distribution on $(0, 1)$, we have

$$\Pr[U \leq u] = \int_0^u dx = u, \quad 0 < u < 1,$$

so that substitution of $u = F_X(x)$ yields

$$\Pr[U \leq F_X(x)] = F_X(x). \quad (10)$$

Combining (9) and (10) gives:

$$\Pr[F_X^{-1}(U) \leq x] = F_X(x),$$

so that X and $F_X^{-1}(U)$ are equal in distribution. Thus, also the expectations $E[g(X)]$ and $E[g(F_X^{-1}(U))]$ are equal, for any function g . Invoking the general definition (8), we find again

$$\begin{aligned} E[g(X)] &= \int_0^1 g(F_X^{-1}(u)) dF_U(u) \\ &= \int_0^1 g(F_X^{-1}(u)) du. \end{aligned}$$

After this preparation, we start with the proof. Since Gauss assumed that f_X is symmetric around 0 and that $f_X(x)$ is non-increasing for $x > 0$, the function $u = F_X(x)$ is concave for $x > 0$. As a consequence and also illustrated in Figure 1, the inverse function $x = F_X^{-1}(u)$ is convex for $u \in [\frac{1}{2}, 1]$.

The idea of the proof is that, for the uniform distribution on a symmetric interval around zero, the inequality (1) is sharp for $a \leq \sqrt{3}$, as was shown in Example 1, where we derived that $m = a/\sqrt{3}$ for $a \leq \sqrt{3}$. Since the uniform distribution function is a linear function on its support (see (7)), we will replace $F_X^{-1}(u)$ on a sub-interval of $[\frac{1}{2}, 1]$ by the tangent to the function $F_X^{-1}(u)$ in the point $u = F_X(a\sigma)$, where a is any positive real number (see Figure 1). From the basic identity $F_X^{-1}(F_X(y)) = y$, we find that $(F_X^{-1})'(F_X(y))f_X(y) = 1$. Hence, the equation of the tangent at $u = F_X(a\sigma)$ reads

$$x - a\sigma = \frac{1}{f_X(a\sigma)}(u - F_X(a\sigma)).$$

The intersection of the tangent to the function $F_X^{-1}(u)$ at $u = F_X(a\sigma)$ with the u -axis is given by $u^* = F_X(a\sigma) - a\sigma f_X(a\sigma)$.

Now, by symmetry of $f_X(x)$, the relation $F_X(x) = 1 - F_X(-x)$, $x > 0$, holds, so that $F_X^{-1}(\frac{1}{2} + u) = -F_X^{-1}(\frac{1}{2} - u)$, $\frac{1}{2} < u < 1$, and as a consequence

$$\begin{aligned} \sigma^2 &= E[X^2] = \int_0^1 (F_X^{-1}(u))^2 du \\ &= 2 \int_{\frac{1}{2}}^1 (F_X^{-1}(u))^2 du. \end{aligned} \quad (11)$$

Since F_X^{-1} is convex on $[\frac{1}{2}, 1]$, the tangent does not intersect the graph of $F_X^{-1}(u)$, and the intersection u^* of the tangent with the u -axis satisfies $u^* \geq \frac{1}{2}$, so that the following inequalities are satisfied (note that we first use that $u^* \geq \frac{1}{2}$ and secondly that $F_X^{-1}(u) \geq \frac{u-u^*}{f_X(a\sigma)}$; when the inequalities are performed the other way around, the reasoning is false),

$$\begin{aligned} 2 \int_{\frac{1}{2}}^1 (F_X^{-1}(u))^2 du &\geq 2 \int_{u^*}^1 (F_X^{-1}(u))^2 du \\ &\geq 2 \int_{u^*}^1 \left(\frac{u-u^*}{f_X(a\sigma)} \right)^2 du. \end{aligned} \quad (12)$$

A simple computation gives

$$\begin{aligned} 2 \int_{u^*}^1 \left(\frac{u-u^*}{f_X(a\sigma)} \right)^2 du &= \frac{2}{3(f_X(a\sigma))^2} \\ &\cdot [1 - F_X(a\sigma) + a\sigma f_X(a\sigma)]^3. \end{aligned} \quad (13)$$

After combining (11), (12) and (13), we end up with

$$\begin{aligned} \sigma^2 &\geq \frac{2}{3(f_X(a\sigma))^2} \\ &\cdot [1 - F_X(a\sigma) + a\sigma f_X(a\sigma)]^3. \end{aligned} \quad (14)$$

Let $z = u - u^* = a\sigma f_X(a\sigma)$ and recall that $m = F_X(a\sigma) - F_X(-a\sigma) = 2F_X(a\sigma) - 1$. Substitution in (14) yields

$$\frac{2a^2\sigma^2}{3z^2} \left[\frac{1-m}{2} + z \right]^3 \leq \sigma^2. \quad (15)$$

Define the function $G(z)$ by the left-hand side of (15). Obviously $z = u - u^* > 0$. On the other hand $z \leq m/2$, since by hypothesis f_X is non-increasing on $(0, \infty)$, so that for $x > 0$,

$$\begin{aligned} x f_X(x) &\leq \int_0^x f_X(y) dy \\ &= F_X(x) - F_X(0) \\ &= F_X(x) - \frac{1}{2} \quad (F_X(0) = \frac{1}{2}), \end{aligned}$$

and if we take $x = a\sigma$, we obtain: $a\sigma f_X(a\sigma) \leq F_X(a\sigma) - \frac{1}{2}$ or $z \leq m/2$.

In order to find the minimum value of $G(z)$ on the interval $(0, m/2]$, we compute the derivative

$$G'(z) = \frac{2a^2\sigma^2}{3z^2} \left[\frac{1-m}{2} + z \right]^2 \left[1 - \frac{1-m}{z} \right].$$

The minimum of G is attained at $z = 1 - m$, when $1 - m \leq m/2$, or equivalently for $m \geq \frac{2}{3}$, and in the point $z = m/2$, when $1 - m > m/2$ or $m < \frac{2}{3}$. Substitution of $z = 1 - m$, which corresponds to $m \geq \frac{2}{3}$, gives

$$\frac{9}{4}a^2(1-m) \leq 1 \quad \text{or} \quad a \leq \frac{2}{3\sqrt{1-m}}.$$

For $m < \frac{2}{3}$, we obtain

$$\frac{2a^2\sigma^2}{3(m/2)^2} \cdot \frac{1}{8} \leq \sigma^2 \quad \text{or} \quad a \leq m\sqrt{3}.$$

This yields (1) and (2), since for $m = \frac{2}{3}$ we have $m\sqrt{3} = \frac{2}{3\sqrt{1-m}} = \frac{2}{3}\sqrt{3}$. $\Leftarrow$

References

- 1 F.M. Dekking, C. Kraaikamp, H. P. Lopuhaä and L.E. Meester, *A Modern Introduction to Probability and Statistics*, Springer, London, 2005.
- 2 W. Feller, *An Introduction to Probability Theory and Its Applications*, Vol. 1, John Wiley & Sons, New York, 3rd edition, 1970.
- 3 W. Feller, *An Introduction to Probability Theory and Its Applications*, Vol. 2, John Wiley & Sons, New York, 2nd edition, 1971.
- 4 C.F. Gauss, Theoria combinationis observationum erroribus minimis obnoxiae (pars prior), *Gauss Werke* 4, Februari 1821, pp. 3–26.
- 5 P. Van Mieghem, *Performance Analysis of Complex Networks and Systems*, Cambridge University Press, Cambridge, 2014.
- 6 P. Tchebichef, Des valeurs moyennes, *Journal de mathématiques pures et appliquées*, 22(2) (1867), 177–184.

In de verdediging

| In defence

Pas gepromoveerden brengen hun werk onder de aandacht.
Heeft u tips voor deze rubriek of bent u zelf pas gepromoveerd?
Laat het weten aan onze redacteur.

Redacteur: Geertje Hek
la Voie-du-Coin 7
1218 Grand-Saconnex
Zwitserland
verdediging@nieuwarchief.nl



Formation control in the port-Hamiltonian framework

Ewoud Vos

Alle Nederlanders willen graag droge voeten houden, iets wat de ruim 17.000 km aan Nederlandse dijken moet garanderen. Over de samenstelling en staat van die dijken is echter weinig bekend. Menselijke inspecteurs zien veel, maar kunnen maar moeilijk bepalen of een dijk van binnen nog goed is. Robots met de juiste sensoren kunnen dat wel. Het proefschrift *Formation control in the port-Hamiltonian framework*, dat Ewoud Vos op 20 februari 2015 met succes verdedigde aan de Rijksuniversiteit Groningen, richt zich op het gebruik van een (groot) aantal robots die als team de samenstelling van dijken in kaart brengt. De ideeën zijn overigens vrij universeel; ze kunnen bijvoorbeeld ook gebruikt worden om satellieten in formatie te laten vliegen.

Onderzoekers aan de Universiteit Twente hielden zich bezig met het robotontwerp, terwijl Vos onder begeleiding van zijn promotoren prof.dr.ir. Jacquélien Scherpen en prof.dr. Arjan van der Schaft werkte aan nieuwe algoritmes om de robots samen te laten werken. Deze algoritmes zorgen ervoor dat de robots in het team op de juiste afstand van elkaar komen te staan, anders gezegd: dat de robots een *formatie* vormen. De algoritmes zijn gebaseerd op het idee om virtuele veren en dempers tussen de robots te plaatsen: wanneer robots te dicht bij elkaar staan, drukken veren ze uit elkaar; wanneer robots te ver uit elkaar staan, trekken veren ze naar elkaar toe. De virtuele dempers kunnen gebruikt worden om de bewegingen van de robots, of algemener *agenten*, gladder te laten verlopen. Deze ideeën zijn overigens vrij universeel; ze kunnen bijvoorbeeld ook gebruikt worden om satellieten in formatie te laten vliegen.

Zijn werk spreekt mensen aan, mits goed gebracht natuurlijk — “Good scientists do not make good teachers” is Vos’ favoriete stelling bij zijn proefschrift. Vos heeft heel goede herinneringen aan een presentatie die hij over zijn onderzoek mocht geven voor de Museum Jeugduniversiteit. Het publiek was een groep van meer dan honderd kinderen en de interactie en het enthousiasme waren ongekend.

Poortsystemen

De wiskunde zit hem hierbij in de modelbouw en de bijbehorende analyse. De dynamica van de agenten en virtuele veren wordt gemodelleerd door differentiaalvergelijkingen. Deze dynamica past in het zogenaamde *poort-Hamiltonse kader*, waarin klassieke Hamiltoniaanse dynamica, op poorten gebaseerd modelleren en systeem- en regeltechniek bij elkaar komen. Systeem- en regeltechniek richt zich op het gedrag van dynamische systemen en de controle of beïnvloeding van dit gedrag met behulp van regelaars (feedback, feedforward). Bekende voorbeelden van regeltechniek zijn cruise control en een thermostaat.

In de modellen van Vos wordt iedere robot gemodelleerd als een los Hamiltoniaans subsysteem, en zijn de componenten onderling verbonden via zogenaamde vermogenspoorten. De vermogenspoorten modelleren hoe energie wordt uitgewisseld tussen de verschillende

componenten, en worden tevens gebruikt voor de beïnvloeding van de robots. Ze bestaan uit twee poortvariabelen: een input-vector u en een output-vector y , waarvan het product $u^T y$ gelijk is aan het via de poort toegevoegde vermogen. Voor een individuele lopende robot bestaat de input-vector u bijvoorbeeld uit twee krachten op het massamiddelpunt en het koppel rond dat middelpunt en de output-vector y uit de bijbehorende resulterende snelheidscomponenten en de hoeksnelheid. De dynamica van zo'n robot wordt dan gegeven door

$$\begin{aligned}\frac{dq}{dt} &= \frac{\partial H}{\partial p}(p, q), \\ \frac{dp}{dt} &= -\frac{\partial H}{\partial q}(p, q) - D \frac{\partial H}{\partial p}(p, q) + u, \\ y &= \frac{\partial H}{\partial p}.\end{aligned}$$

Hierbij is $p \in \mathbb{R}^3$ de positie van het massamiddelpunt en $q \in \mathbb{R}^3$ de impuls. De term $-D \frac{\partial H}{\partial p}$ is een wrijvingsterm met een diagonale dissipatiematrix D met wrijvingscoëfficiënten op de diagonaal.

De Hamiltoniaan $H(p, q)$ is gelijk aan de totale energie die is opgeslagen in het systeem en het systeem blijkt hiermee zoals het hoort te voldoen aan de wet van behoud van energie:

$$\frac{dH}{dt} = -\frac{\partial^T H}{\partial p} D \frac{\partial H}{\partial p} + u^T y,$$

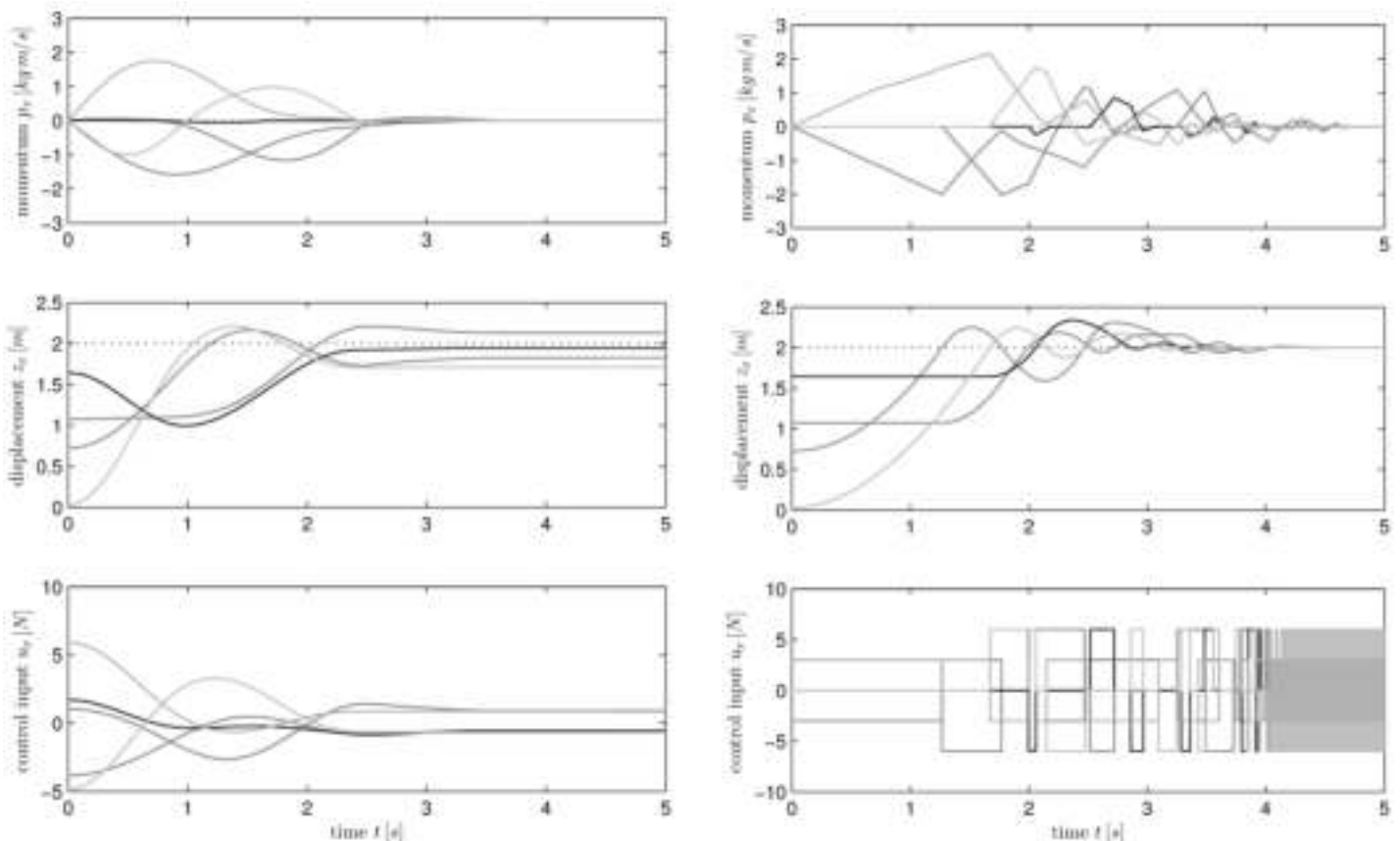
ofwel, de verandering in energie is gelijk aan het toegevoegde vermogen min het gedissipeerde vermogen. Voor de mechanische systemen waar Vos naar kijkt is de Hamiltoniaan altijd de som van de kinetische en de potentiële energie.

Als verschillende robots worden gegroepeerd en onderling op de juiste afstand worden gebracht of gehouden door middel van virtuele veertjes, wordt het model als volgt aangepast. Aan de Hamiltoniaan van iedere robot wordt een term toegevoegd die de (virtuele) veerenergie voorstelt en die de koppeling met buurrobots regelt. Bovendien wordt er gebruik gemaakt van een zogenaamde Dirac-structuur, die modelleert hoe de verschillende poorten met elkaar verbonden zijn. Uit de Dirac-structuur is de topologie van het gemodelleerde systeem af te leiden: hoe zijn de verschillende componenten verbonden? Een parallelle demper en veer hebben bijvoorbeeld een andere Dirac-structuur dan een demper en veer in serie.

De belangrijkste analyse richt zich op de stabiliteit van het netwerk, oftewel: convergeren de afstanden tussen de robots naar de gewenste afstand? Hierbij wordt gebruik gemaakt van de welbekende Lyapunovtheorie. In het voorbeeld van de lopende robot speelt de wrijvingsterm een cruciale rol in de stabiliteitsbewijzen. Wanneer die wrijving niet-lineair of niet-glad is, bijvoorbeeld bij Coulomb-wrijving zoals in de rechterkant van Figuur 1, ontstaan er uitdagingen en worden de stabiliteitsbewijzen lastig.

Interdisciplinair en internationaal

Vos had niet de meest voor de hand liggende vooropleiding voor hij aan zijn wiskundige onderzoek begon, namelijk technische bedrijfskunde. Volgens hem bepaalt de vooropleiding maar voor een (klein) deel het succes van promotieonderzoek. Veel belangrijker zijn een gezonde dosis motivatie en discipline. Vos: "Je hebt veel vrijheid om je interesses te volgen en krijgt de tijd om echt goed na te denken over problemen.



Figuur 1 Formatievorming met vijf agenten, die een onderlinge afstand van 2 meter moeten gaan aanhouden. In de linker figuur worden hiervoor continue virtuele veren gebruikt, in de rechter figuur discontinue virtuele veren.

Ik denk dat veel mensen geschikter zijn voor een promotieplek dan ze nu denken.” Hoewel hij dat nu zelf zegt, heeft ook hij last gehad van de typische promotiedip na twee jaar en daarbij zeker weleens getwijfeld of hij de eindstreep wel zou halen.

Vos' werk was erg interdisciplinair en hij was dan ook lid van twee vakgroepen, Discrete Technology & Production Automation (DTPA) en Systems, Control and Applied Analysis (SCAA), die deel uitmaken van twee verschillende onderzoeksinstituten. Vos roemt het internationale karakter van de groep waarin hij werkte, met collega's uit onder andere China, Iran, Noorwegen en Kroatië. Om meer cohesie in de groep te krijgen, heeft hij samen met een collega een wekelijkse groepsbespreking opgezet, waar naast een kleine wetenschappelijke presentatie ook ruimte was voor *social talk*.

Het mooiste resultaat

Vos' antwoord op de vraag “Wat is je mooiste resultaat?” bewijst dat het interdisciplinaire karakter van zijn werk belangrijk voor hem was. Het mooiste resultaat is volgens hem de modellering van formatievorming wanneer de agenten onderhevig zijn aan Coulomb wrijving. “De combinatie van een fysiek verschijnsel met duidelijke interpretatie en de rigoureuze wiskunde die we nodig hadden om de resultaten te bereiken spreken me erg aan. Daarnaast vind ik het een mooi resultaat omdat het is verkregen in samenwerking met nog weer een andere vakgroep, Smart Manufacturing Systems (SMS).” Bij viskeuze wrijving is de wrijvingskracht recht evenredig met de snelheid. Bij

Coulomb-wrijving is de wrijvingskracht echter constant en alleen afhankelijk van het teken van de snelheid. De wrijvingskracht is gegeven als $F_d = c \operatorname{sign}(v)$, met F_d de wrijvingskracht, c de wrijvingscoëfficiënt, v de snelheid en sign de Signum-functie. Gevolg hiervan is dat de agenten eerst een wrijvingsdrempel $\pm c$ moeten overwinnen voor ze in beweging komen.

Het effect hiervan op het vormen van formaties met virtuele veren is te zien in Figuur 1: bij gebruik van continue virtuele veren tussen de agenten is de veerkracht op een gegeven moment kleiner dan de Coulomb-wrijvingskracht. Dit betekent dat de agenten stil komen te staan, terwijl ze nog niet op de juiste afstand van elkaar staan. Zie de linker figuur. Daarom is in Vos' proefschrift een discontinue veer ontworpen die een constante veerkracht geeft die altijd iets groter is dan de Coulomb-wrijvingskracht. Dat kan natuurlijk makkelijk, omdat het om virtuele veren gaat. De veerkracht F_s is nu gegeven door $F_s = k \operatorname{sign}(z)$, met veerconstante k en relatieve afstand z tussen buurrobots. Daarmee wordt de formatie wel exact gevormd, al ontstaat er wel chattering (zeer snel schakelen tussen $+k$ en $-k$) bij de inputs; zie de rechter figuur.

De toekomst

Mooie resultaten, goede herinneringen, maar nu is het tijd voor wat anders. Vos is sinds 1 maart technisch professional bij DNV GL. De komende tijd gaat hij zich bezighouden met *smart energy*. Vast en zeker ook weer heel interdisciplinairwerk. 

Ronald van Luijk

Mathematisch Instituut
Universiteit Leiden
rvl@math.leidenuniv.nl

Evenement 51ste Nederlands Mathematisch Congres (NMC 2015)

NMC nieuwe stijl

Op 14 en 15 april 2015 vond het 51ste Nederlands Mathematisch Congres plaats op de Science Campus van Universiteit Leiden. Medeorganisator Ronald van Luijk blikt terug, met tekstbijdragen van Onno van Gaans, Markus Heydenreich, Marcel de Jeu, Geurt Jongbloed, Wouter van Joolingen en Marco Streng.

Het Nederlands Mathematisch Congres (NMC) is een ontmoetingsplek voor alle Nederlandse wiskundigen. Om dit aspect nog meer te stimuleren is er dit jaar voor gekozen om minder sessies tegelijk te houden dan voorgaande jaren. Hoewel de vervallen geschiedenissessie wel door sommigen werd gemist, leek dit nieuwe format, met meer publiek per voordracht, de aanwezigen goed te bevallen.

Het programma werd geopend door Geurt de Snoo, decaan van de Faculteit der Wiskunde en Natuurwetenschappen, waarna de toon van het congres werd gezet door een enerverende voordracht van Fieldsmedaillewinnaar Martin Hairer. Gedurende twee dagen konden de 236 deelnemers genieten van vele voordrachten, informatieve stands, een discussie over het Deltaplan Wiskunde.NL, een KWG-jaarvergadering, een docentendag en een KWG-competitie voor promovendi. Het geslaagde congres werd gesloten door Geurt Jongbloed, voorzitter van het KWG. Hij kondigde tevens het BeNeLuxMC'16 aan dat in Amsterdam plaats zal vinden.

Plenaire voordrachten

In de eerste plenaire voordracht sprak Martin Hairer over de KPZ-vergelijking (in 1986 geformuleerd door Kardar, Parisi en Zhang) voor de voortplanting van een eendimensionale interface. Als de onderkant van een vel papier wordt aangestoken, dan is de scheidingslijn tussen het verbrande en onverbrande papier zo'n interface. De KPZ-vergelijking

wordt vermoed universeel te zijn in de zin dat veel modellen voor de voortplanting van interfaces op voldoende grote schaal neerkomen op deze vergelijking. Bewijzen van het vermoeden waren tot nu toe beperkt tot situaties waarin de Cole–Hopf-transformatie gebruikt kan worden, die de niet-lineaire stochastische partiële KPZ-differentiaalvergelijking omzet in een Ito-vergelijking. Hairer legde uit hoe zijn 'regularity structures' gebruikt kunnen worden voor een bewijs voor een veel algemenere klasse van modellen.

Mikhail Katsnelson beschreef in zijn voordracht de bijzondere eigenschappen van grafeen. Dit materiaal is slechts één molecuul dik en daarmee tweedimensionaal in plaats van driedimensionaal. Dit geeft het zeer grote toepasbaarheid in de elektronica, waar transistoren zo klein mogelijk gemaakt worden. De specifieke manier waarop grafeen lading draagt maakt het bovendien mogelijk om experimenten te doen die zich laten beschrijven als 'CERN on the desk'. Katsnelson adverteerde sterk het belang van experimenten naast wiskundig denken.

Naar aanleiding van het *Visiedocument Wiskunde 2025* is op verzoek van het ministerie van OCW de Commissie Deltaplan Wiskunde.NL opgericht door het Platform Wiskunde Nederland (PWN) en het Algemeen Bestuur van NWO. Jacob Fokkema, voorzitter van de commissie, lichtte op het NMC de huidige stand van zaken toe, gevolgd door een discussie met de commissie en de zaal.

De eerste dag werd afgesloten door een plenaire voordracht van Michel Mandjes, die sprak over stochastische netwerken van afhankelijk opererende middelen (resources). Ondanks de vele toepassingen van zulke netwerken in het dagelijkse leven (bijvoorbeeld wegverkeer, internet, economische processen), blijken deze extreem lastig te analyseren. Dit is mede gelegen in het feit dat naast de dynamische processen die op zo'n netwerk gedefinieerd zijn, ook de structuur ervan doorgaans stochastisch van aard is. Mandjes demonstreerde niettemin dat nuttige limietresultaten voor dergelijke netwerken te verkrijgen zijn door het toepassen van de juiste parameterschalingen.

De tweede dag begon met een voordracht door Lenny Taelman. Hij begon met Eulers veelvlakkenformule $V - E + F = 2$ waarin V , E en F staan voor het aantal punten (vertices), kanten (edges) en zijvlakken (faces) van een veelvlak. Nadat hiervan een mooi bewijs was getoond, liet Taelman zien hoe de Eulerkarakteristiek uit de topologie (een generalisatie van het linkerlid van de veelvlakkenformule) een rol speelt in open problemen uit de logica en de meetkunde.

De slotvoordracht werd gegeven door Günter M. Ziegler van de Freie Universität Berlin. Centraal in zijn lezing stond het *topologische Tverberg-vermoeden*, een 'holy grail' uit de topologische combinatoriek: neem aan dat f een continue functie is van de simplex σ^m naar $\mathbb{R}^d$ met $m \geq (d+1)(r-1)$. Dan zijn er ten minste r paarsgewijs disjuncte zijvlakken wiens beelden een punt gemeen hebben. Het was eerder bekend dat dit vermoeden waar is zodra r een priemgetal is of een macht van een priemgetal. In recent



Eva Bayer van EPFL (Lausanne)

werk hebben Ziegler en coauteurs de zogenaamde *constraint method* ontwikkeld om dit vermoeden en een aantal gelijksoortige vermoedens te analyseren. Uiteindelijk is het Florian Frick, een promovendus uit Ziegler's groep in Berlijn, gelukt om de constraint method te verbinden met een generaliseerde Van Kampenstelling van Mabilard en Wagner. Frick laat zien dat het topologische Tverberg-vermoeden *fout* is voor natuurlijke getallen die geen macht van priemgetallen zijn!

Semiplenaire voordrachten

Tien inspirerende semiplenaire voordrachten werden gegeven door Eva Bayer, Sander Dahmen, Alessandro Di Bucchianico, Oliver Fabert, Robert Ghrist, Teun Koetsier, Júlia Komjáthy, Johan van Leeuwen, Viresh Patel en Martin Verlaan.

Docentendag

Op de docentendag, met als thema 'Wat is wiskunde voor jou?' traden vier sprekers op. Ferdinand Verhulst sprak over de vele gezichten van Wiskunde — waarin hij aandacht had voor de verschillende stijlen die wiskundigen hanteren, verschillende voorbeelden van wiskundegebruik besprak en tot slot inging op de esthetische kanten van wiskunde. Dat laatste lichtte hij toe met een aantal fraaie historische voorbeelden. De rol van geschiedenis in de wiskunde werd daarna mooi naar voren gebracht door Jeanine Daems. Zij liet zien hoe je wiskundeonderwijs kunt verrijken met voorbeelden uit de geschiedenis als inspiratie voor uitdagende vraagstukken. Zij gebruikte onder andere voorbeelden uit de Arabische en Chinese wiskunde. John Mason ging in op de aard van wiskundig denken. Met heel praktische voorbeelden daagde hij de zaal uit om de grenzen te verkennen waar wiskundig denken begint en ophoudt. Tot slot sprak Aldine Aaten over de

wiskundestudie door de ogen van de student. Ze ging daarbij in op de rol van motivatie en studiehouding en op de wijze waarop studenten wiskundeopgaven beschouwen en oplossen. De dag was goed bezocht, de zaal met een capaciteit van vijftig mensen zat bij alle lezingen vol. Goed was om te zien dat er naast docenten ook andere wiskundigen aanwezig waren en dat de lezingen aanleiding gaven tot levendige discussies. Dit is een mooi teken dat goed wiskundeonderwijs door de hele wiskundegemeenschap als belangrijk wordt gezien.

KWG-prijs

Op woensdagmiddag streden zes promovendi om de KWG-prijs: een wisseltrofee, eeuwige roem en een cheque van duizend euro. De jury, bestaande uit Hendrik Lenstra (voorzitter), Mark Peletier en Harry van Zanten, had uit de vooraanmeldingen de beste zes geselecteerd: Folkert Bleichrodt, Joep Evers, David de Laat, Bert Lindenhovius, Djordjo Milovic en Lotte Sewalt. Deze zes hadden allemaal

duidelijk veel tijd gestoken in de voorbereiding van hun prachtige voordrachten van vijftien minuten. Uiteindelijk is Djordjo Milovic uit Leiden tot winnaar uitgeroepen.

Jaarvergadering

In de lunchpauze op dinsdag vond de 238ste Algemene Ledenvergadering van het KWG plaats. Voorzitter Geurt Jongbloed stond kort stil bij het overlijden van Jan Turk, voorzitter van het managementteam van *Pythagoras*. Vervolgens waren er verschillende mededelingen. Zo zal het KWG dit jaar een nieuwe website krijgen en zal op 9 december 2016 op het Science Park in Amsterdam een symposium plaatsvinden ter ere van L.E.J. Brouwer, die in december 1966 overleed. Met financiële steun van Elsevier is verder een tweejaarlijkse N.G. de Bruijnpreis ingesteld voor de beste publicatie(s) in de afgelopen vijf jaar van wiskundigen met een binding met Nederland. Ook werd de vergadering geïnformeerd dat het succesvolle boek *De Pythagoras Code* momenteel in het Engels wordt vertaald voor de Amerikaanse markt en dat de KWG-prijs voor promovendi de komende jaren onder de naam van het KWG zal worden voortgezet. Nadat de verschillende jaarverslagen waren besproken, bedankte de voorzitter de aftredende bestuursleden Jenneke Krüger, Arjen Sevenster en Onno van Gaans voor hun werk voor het KWG. De benoeming van de voorgedragen nieuwe bestuursleden Theo van den Bogaart, Sonja Cox en Erik van den Ban werd unaniem met applaus bevestigd. Tot slot riep de voorzitter de aanwezigen nadrukkelijk op een abonnement te nemen op *Pythagoras* (dit kan eenvoudig via www.pyth.eu).



Hendrik Lenstra overhandigt een cheque aan prijswinnaar Djordjo Milovic

Foto: Pinar Kilger

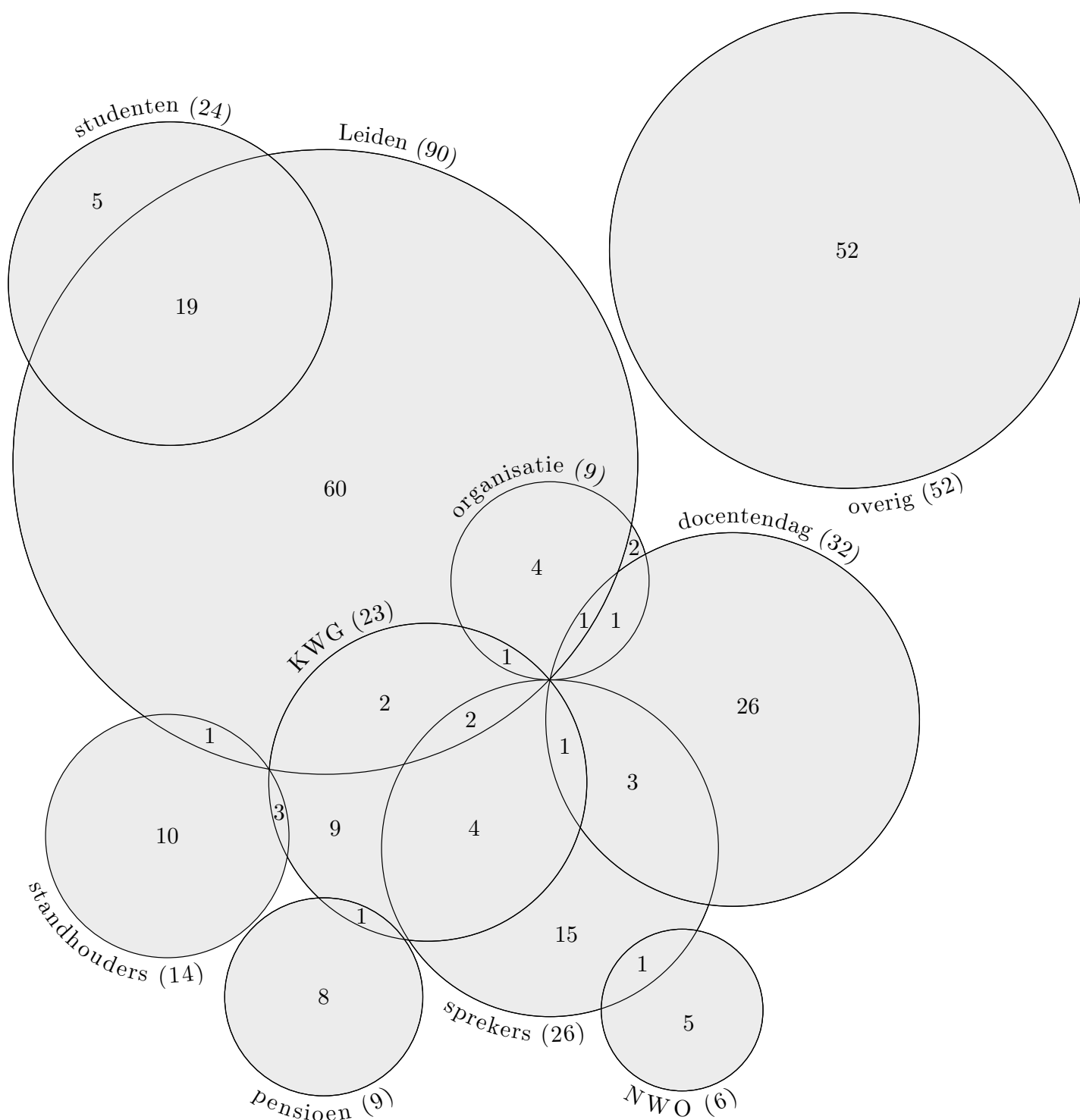
Foto: Pinar Kilger

Deelnemers

Aan het NMC 2015 hebben in totaal 236 mensen deelgenomen, exclusief de 15 mensen die zich wel hadden ingeschreven maar die niet zijn gekomen. In Figuur 1 staat in een Venndiagram informatie over hoe de deelnemers betrokken waren bij het NMC. De oppervlaktes van de cirkels verhouden zich als de aantallen die ze vertegenwoordigen; dat geldt niet

voor de doorsneden. Voor de eenvoud van het diagram bevat de cirkel 'pensioen' alleen diegenen die zich als gepensioneerd hebben ingeschreven en op basis daarvan tien euro inschrijfgeld hebben betaald. Hieronder vallen dus bijvoorbeeld niet de KWG-ereleden, die niet hoefden te betalen, en ook niet de gepensioneerden die het volledige inschrijfgeld hebben betaald. Onder 'KWG' zijn de be-

stuursleden en ereleden samengevoegd met de sprekers en juryleden voor de KWG-prijs. De cirkel 'NWO' bevat de mensen die zich via NWO voor de voordracht over de Commissie Deltaplan Wiskunde.NL hebben ingeschreven. Het losse gebied 'overig' betreft alle 52 mensen die in geen enkele van de andere cirkels vertegenwoordigd zijn. Daarvan waren er 20 op beide dagen.



Figuur 1 Deelnemers NMC 2015.

Sonja Cox

Korteweg-de Vries Institute for Mathematics
University of Amsterdam
s.g.cox@uva.nl

Interview Fields Medalist Martin Hairer

Intuition for mathematical concepts

On the Dutch Mathematical Congress of April 14 and 15 Fields Medalist Martin Hairer gave a plenary lecture. We took the opportunity to interview him for our magazine. Sonja Cox, researcher at the University of Amsterdam, spoke to him.

You just gave a plenary talk at the Dutch Mathematical Congress. Do you have any connections with the Netherlands?

"I attended a workshop at the Lorentz Center some years ago ('Coherent structures in evolutionary equations', July 2010), but otherwise I have never visited the Netherlands for work. I have been to Amsterdam a couple of times for holidays."

...and you had a Dutch post-doc.

"Yes, Jan Maas was my post-doc for a couple of months. And of course I know some people here, Frank den Hollander and Jan van Neerven for example."

You are often introduced as the son of the mathematician Ernst Hairer. But what did your mother do?

"She started off as a primary school teacher, but she stopped working when we were born. When we were grown up, she started doing a lot of volunteer work. She actually still works in a toys library, i.e., a place children can come and borrow toys."

So I assume your mother is not particularly interested in mathematics. Did your father talk to you about mathematics?

"He didn't try to push me into it, no, but he did try to answer my questions. Of course I saw his papers and wondered what it was about. I remember him trying to explain to me what a differential equation is when I was about ten or eleven. He did it graphically, showing how a formula can describe a vector field and how one can follow the lines to obtain solution paths."

You mentioned you had siblings, how many were you?

"Three, I have a younger brother and a younger sister."

Did they also study math?

"My sister also studied mathematics in Geneva. I was working on my PhD at the time that she was studying, so I heard all the gossip about how she was doing — I believe this discouraged her from continuing in mathematics, even though she was a good student. Now she has an administrative position at an eye surgery clinic in Geneva. My brother actually started off doing mathematics, too, but he switched to biology after two months. He got a degree in biology, but he really likes being outdoors, so in the end he became a sports teacher."

Did anyone inspire you mathematically when you were at school?

"Back then it was not clear that I would go into mathematics. Actually, I was much more interested in programming."

...but I guess you did not learn programming at school.

"No, but I got one of the first programmable graphic Casio pocket calculators for my 12th birthday. I think it could hold 422 characters, so you could only write very short programs. The most sophisticated program I made drew the Mandelbrot set, and you had to run it for a long time to get a very lousy picture. Then when I was 14 or so my parents bought a Mac, and I stuck with them ever since."

But you did not enroll for computer science when you went to university?

"Indeed, by then I had decided I knew enough about programming and I enrolled into physics. Actually, at that time in Geneva the first year of the mathematics curriculum was essentially a subset of the physics curriculum, and I continued to do more or less both programs. I did also continue to write some software alongside."

When you were at university, was there anybody whose lectures inspired you, made you feel like this was what you wanted to be doing?

"Generally I liked mathematics more than physics. Wait, that is not entirely true. I felt more comfortable doing mathematics because you can be sure if you do something and you prove it, then it is true."

But in your articles you use a lot of intuition.

"But in the end I also prove things. I have heard someone say that I am clearly not a true mathematician because in my articles I explain my main results in a non-rigorous fashion at first, leaving the rigorous statements and proofs for later sections. Luckily, I think most people *do* appreciate being given some intuition of what is going on before diving into the proofs."

I know I do. So there was no one in particular at university who inspired you to do mathematics?

"In Geneva at the time there was not really anybody doing analysis or stochastics in the mathematics department. Most people were working in algebra, geometry or knot



Foto: Peter van Ende Boas

theory, which I never quite got the hang of. In physics we had really nice classical and quantum mechanics courses, which I found a lot more interesting than most of the lectures given in the mathematics department. Another nice thing the physics department offered was something called *mathematical complements*, which was essentially a series of crash courses on various topics in mathematics. These courses provided the main results needed to apply the theory, e.g. Banach and Hilbert spaces or Schwartz distributions in two weeks, and then if you were interested you could go off and read the details and the proofs yourself. This allowed you to obtain an intuition for mathematical concepts without being burdened by having to build everything up step by step. Once you are interested and have a good idea of how things work, it is much easier to go back and understand how the theory is built up rigorously.”

As a student you already realised you preferred analysis and probability theory above discrete mathematics and geometry?

“I knew I preferred analysis, I was always more comfortable with continuum objects than with discrete objects. It is a bit ironic, after all, what makes the things I have been doing recently so powerful is precisely that I use non-trivial algebra together with analysis, and this is really interesting. However, I did not know any probability theory as it was not taught in Geneva at the time. As a student, I thought probability theory was limited to urn and card shuffling games and I had no idea of the analytical side of probability theory. This I only discovered during my PhD.”

Do you feel your taste for mathematics shifts?

“I think so, yes. You need motivation to get interested. Most areas are interesting, but you need some motivation to look at them. But taste does shift.”

Can you describe when a problem motivates you?

“I think it is a problem of which you feel on the one hand that you really *should* be able to understand it, but on the other hand... you don't. In other words, there is a dissonance between what you think you should understand and what you actually understand, and you think ‘It can't be that hard...’ but it is.”

Of all your work so far, what is your favorite?

[laughs] “Well, okay, so I think it's the regularity structures paper. First, it touches the

most different fields of mathematics; there is lots of analysis, some probability theory, and some algebra. But it also creates a new field. Probably my second favorite is the work with Jonathan Mattingly on the ergodicity of the stochastic Navier–Stokes equation.”

When did you start working on the regularity structures?

“It was gradual; I'd been thinking about these types of problems for some time. It really started with my work with Andrew Stuart on the problem of finding a stochastic partial differential equation (SPDE) the invariant measure of which is the solution to a given stochastic (ordinary) differential equation (SDE). If the SDE simply has additive noise and a gradient drift, then you get a reaction-diffusion type SPDE which is well understood. However, if the drift is not a gradient, you end up with an SPDE that is ill-posed. This is strange, as the SDE is perfectly well-posed. To me this was exactly one of those problems of which you feel you *should* be able to understand them, but you don't.”

What do you think are interesting developments in your field at the moment?

“In probability theory there are quite a few very interesting recent developments. I think one of the most interesting is what Scott Sheffield has been doing with Jason Miller. They have a series of papers in which they build a two-parameter family of processes that generalise Schramm–Loewner evolutions (SLEs) and that they call ‘quantum Loewner evolutions’ (QLEs). These processes are not random curves, but random increasing families of subsets of the complex plane with intricate fractal structures and beautiful mathematical properties, like conformal invariance. For one particular value of the parameters, this process is conjectured to describe the image, under a conformally uniformizing map, of the ball of radius t centred at some fixed point in the ‘Brownian map’ constructed recently by Miermont and Le Gall. For another value of the parameters, it is conjectured to describe the scaling limit of Diffusion-limited aggregation.”

Suppose you were allowed to do neither research nor teaching for a whole year, what would you do?

“I would probably go on some big trip around the world and see some jungles and mountain tracks and stuff like that, and take a few good books with me... I'm still allowed to read non-math books, right?”

Yes of course. You are also allowed to study chemistry, if you like. Just no mathematics.

“Oh, if I'm still allowed to actually study something, then... [long pause] yes, probably I'd rather take some sociology books or something like that. Something more toward human science, just to do something else.”

And you would prefer sociology above, say, psychology?

“Yes. Yes, I am just wondering whether there is something interesting to say there. It may well be that after two months of reading I would decide there isn't anything interesting for me. That's possible. But maybe not.”

Your wife Xue-Mei Li works as a mathematician in Warwick. Did you meet there?

“Yes, but at the time neither of us was working there. She is basically the reason I moved to Warwick. We met at a workshop in Warwick which was part of a semester program on SPDEs organised by David Elworthy. Xue-Mei is a former PhD student of David, and at that time she had a position in Nottingham.”

...and you got together at that workshop?

“Yes. I think that's a well-known secret by now.”

Do you talk a lot about math at home?

“Occasionally, but we try to talk about other things as well.”

Second-last question: what would be your advice to a student who wants to do a PhD in mathematics?

“Choose your PhD supervisor carefully. That is probably the most important thing. It is not necessarily important that the supervisor is a very famous person, but he should be doing something that you are actually interested in. When you choose your topic, you should think about what you are interested in and what you are comfortable with, instead of jumping onto the latest hype.”

Last question: is there anything you would ask yourself that has not been asked yet?

“Oh, I don't know about that one. I think you already have quite a big selection of questions. No, I am not sure I can think of anything.”

Well, thank you very much for the interview.



Jan Guichelaar

Amsterdam

j.guichelaar4@gmail.com

Boekbespreking Henk Broer: Hemelverschijnselen nabij de horizon

Optische verschijnselen in de atmosfeer

Henk Broer analyseert in zijn boek een aantal optische verschijnselen, zoals asfaltspiegelingen, fata morgana's en blinde stroken in de ondergaande zon. Hij heeft zich daarbij laten inspireren door *De natuurkunde van 't vrije veld, deel I: Licht en kleur in het landschap* van Marcel Minnaert. Jan Guichelaar, theoretisch fysicus en redacteur van *Pythagoras*, bespreekt het boek.

De Epsilon-serie is in de tachtiger jaren van de vorige eeuw gestart door de Utrechtse hoogleraar wiskunde Ferdinand Verhulst, naar het voorbeeld van de Franse serie *Que sais-je?*, die inmiddels duizenden boekjes bevat over een breed veld van wetenschappelijke onderwerpen en uitgegeven wordt door de Franse universitaire uitgeverij.

Henk W. Broer is hoogleraar dynamische systemen aan de faculteit van wiskunde en natuurwetenschappen van de Rijksuniversiteit Groningen (RUG) en heeft in de afgelopen jaren al enkele boeken geschreven in de Epsilon-serie. Hij heeft zich laten inspireren door Minnaerts *De natuurkunde van 't vrije veld, deel I: Licht en kleur in het landschap*. Marcel Minnaert, geboren in het Vlaamse Brugge, was van oorsprong bioloog. Na de Eerste Wereldoorlog vestigde hij zich in Nederland en werd astronoom. Zijn driedelige *De natuurkunde van 't vrije veld* van rond 1940 is een *Fundgrube* voor iedereen die zich verbaast over de dagelijkse verschijnselen in de natuur om zich heen en deze verschijnselen wil begrijpen.

In deze Epsilon-uitgave heeft Broer zich ten doel gesteld een aantal optische verschijnselen in de dampkring te analyseren en deze van een mathematisch-fysisch fundament te voorzien. In deze verschijnselen spelen temperatuurinversie en spiegelingen een voornaam rol. In het bijzonder wordt de zogeheten 'blinde strook' over de zon, die soms vlak

voor zonsondergang waargenomen kan worden, volledig verklaard. Bij deze analyses volgt Broer de historische ontwikkeling van de zich steeds verdiepende kennis over deze optische onderwerpen. Juist ook de wetenschapshistorische inkijkjes maken het boek bijzonder.

De analyses worden gegeven op meerdere wiskundige niveaus. In de eerste plaats op basis van de klassieke geometrische optica met behulp van de kaatsingswet van Hero van Alexandrië en de brekingswet van Snellius. Vervolgens wordt de analyse voortgezet op basis van het Principe van Fermat over paden van de kortste tijd. Hero introduceerde trouwens al het idee van de kortste weg. En uiteindelijk brengt Broer de analyse op het niveau van de variatierekening en de vergelijkingen van Euler-Lagrange en Hamilton-Jacobi.

Als gerelateerd probleem komt de brachistochroon, de baan van een over een gebogen metalen draad wrijvingsloos glijdende kraal met kortste glijtijd, aan de orde, die het Principe van Fermat in een mechanisch probleem toepast. De baan krijgt de vorm van een cycloïde. Een volgende stap is de isochroon, het heen en weer glijden van de kraal rond het laagste punt van de cycloïde met trillingstijd onafhankelijk van de uitwijking. Zo belandt Broer ook bij het door Huygens geconstrueerde slingeruurwerk met cycloïdaal gevormde wangen naast het ophangpunt van de slinger, die het gewicht in een cycloïde dwingen

en dus een constante amplitude onafhankelijk van de trillingstijd voor het uurwerk creëren. Huygens' bedoeling om hiermee de geografische lengte van schepen op zee te kunnen bepalen lukte niet vanwege de al te grote storingen op de slinger door stampen en rollen van het schip. Uiteindelijk werd dat probleem pas in de achttiende eeuw opgelost door klokkenmaker John Harrison, wiens levenslange strijd voor erkenning tegen de gevestigde Engelse astronomenkliek prachtig beschreven is in de biografie *Longitude* van Dava Sobel, opgenomen in Broers uitgebreide bibliografie. Zijn eerste klokken staan onder meer in het Londense Clockmaker's Museum.

In hoofdstuk 1, 'Inleiding en samenvatting', geeft Broer een overzicht van de rest van het boek dat uit twee delen bestaat: 'Deel I: Meetkunde van lichtstralen in de atmosfeer' en 'Deel II: Lichtstralen als geodeten'.

Een belangrijk verschijnsel waarop voortuitgelopen wordt is het ontstaan van een zogeheten Wegener-sector als gevolg van temperatuurinversie in een luchtlaag op zekere hoogte. Aan de grens kan bovenspiegeling optreden. Lichtstralen vanaf de zon die binnen deze sector binnenvallen kunnen het oog van de waarnemer niet bereiken, hetgeen aanleiding geeft tot een blinde strook of blinde zone, die een deel van de ondergaande zon aan het zicht onttrekt. Een belangrijk doel van het boek is ook de vervlechting van natuurkunde en wiskunde duidelijk te maken. Het zal in het algemeen niet goed mogelijk zijn om het brekingsindexprofiel ($n = n(y)$) in het geval van een platte aarde, met y de afstand boven de aarde, of $n = n(r)$ bij een ronde aarde, met r de afstand tot het middel-

punt van de aarde) te meten en dan van daaruit de verschijnselen te verklaren. Vaak zal het zo zijn dat uit de waarnemingen een bijpassend brekingsindexprofiel afgeleid moet worden, een invers probleem dus.

Meetkunde van lichtstralen in de atmosfeer

Deel I start met hoofdstuk 2 'Geometrische optica'. Kaatsings- en brekingswetten worden afgeleid uit het zwakke Principe van Fermat (tijd waarin een lichtstraal van A naar B gaat is een extremum). Voor de platte en de ronde aarde leidt dat tot de behouden grootheden $S = n(y)\sin\alpha$ en $C = rn(r)\sin\alpha$ (met α de hoek van inval of de inclinatie van de lichtstraal), waarbij zowel het geval van meerdere homogene lagen, waarbij n op elke grens verspringt, als het limietgeval van continue brekingsindexprofielen $n(y)$ en $n(r)$ doorge-rekend worden. De grootheden S en C liggen vast door het punt waar en de richting waarin de lichtstraal als eerste invalt. De door te rekenen integraal om de baan van de lichtstraal te vinden, is meestal niet in elementaire functies uit te drukken. In het Scholium komen twee wel-integreerbare brekingsindexprofielen aan de orde. In de eerste plaats dat voor het mechanische model om de brachistochroon te vinden. Behoud van mechanische energie ($\frac{1}{2}v^2 + gy = 0$) geeft $n(y) = 1/v(y) = 1/\sqrt{-2gy}$. Het probleem wordt in extenso uitgewerkt in hoofdstuk 4. In de tweede plaats het bijzondere brekingsindexprofiel $n(y) = 1/y$, dat lichtstralen levert die een cirkelvormige baan beschrijven.

Hoofdstuk 3, 'Atmosferische optica', analyseert in detail de verklaring van een aantal optische verschijnselen aan de horizon: blinde stroken of zones, fata morgana's, en de groene flits bij zonsondergang. Het is het kernhoofdstuk van het boek. De analyse wordt gedaan aan een vereenvoudigd model van de aarde met twee concentrische lagen, met een temperatuurinversie op hoogte H . De Wegener-sector (Alfred Wegener, 1880–1930, bekend vanwege de theorie der verschuiving van de continenten) speelt een centrale rol. De waarnemer ontvangt binnen een deel van zijn zichtveld slechts lichtstralen die via onder spiegeling aan de warmtelaag zijn oog bereiken. Daarbuiten ontvangt de waarnemer lichtstralen die vanuit de warmtelaag boven komen, dat kunnen stralen zijn onder de Wegener-sector van onder de horizon en stralen boven de Wegener-sector. Het begrip 'gezichtsstraal' is in deze theorie handig: een 'straal' vanuit het oog. Zo'n straal kan niet via de Wegener-sector in de warmtelaag komen vanwege de omkeerbaarheid van licht-

stralen. Het blijkt dat de Wegener-sector symmetrisch is rond de horizontale kijkrichting, waarbij hoek δ de kijkrichting bepaalt. Buiten de Wegener-sector is er dan de uittreerichting y , ook gemeten rond de horizontale richting. In een zogeheten 'transitiedigram' wordt y uitgezet als functie van δ , waarbij op de horizontale as er voor de δ 's binnen de Wegener-sector geen uittreestralen bestaan. Voor enkele reële waarden voor het brekingsindexprofiel blijkt de Wegener-sector ongeveer het interval $-0,1^\circ < \delta < 0,1^\circ$ te zijn. De breedte van $0,2^\circ$ is kleiner dan de hoek waaronder we de zon zien (ongeveer $0,5^\circ$). Dit geeft dus een verklaring van een blinde strook over de zon bij zonsondergang. Het kan ook zijn dat de onderste zichtstraal van de Wegener-sector de aarde 'treft'. Dan is er slechts sprake van een blinde zone.

Indien er ook nog onder spiegeling aan een dunne warme laag aan het aardoppervlak plaatsvindt, kunnen we zelfs delen van de zon in twee richtingen zien. Fata morgana's komen ook tot stand doordat stralen van achter de horizon via breking en/of kaatsing het oog bereiken. Bij meerdere brekingen staat het beeld afwisselend rechtop of omgekeerd, maar wordt steeds vervormder. Over het algemeen verlaten de gezichtsstralenbundels de atmosfeer niet, zodat alleen fa-

ta morgana's van voorwerpen achter de horizon dicht bij de aarde gezien kunnen worden. In heel bijzondere gevallen kunnen gezichtsstralen net buiten een Wegener-sector de atmosfeer wel verlaten en zo aanleiding geven tot een hemels fata morgana.

In het vervolg van hoofdstuk 3 beschrijft Broer modellen (ontwikkeld door Floris Takens, 1940–2010, hoogleraar wiskunde aan de RUG) met acht of negen lagen om een realistisch model door te rekenen. Daarin komt ook de groene flits aan de orde, ook al uitgebreid beschreven door Minnaert. Doordat blauw/violet licht flink verstrooid wordt in de atmosfeer, zien we van de ondergaande zon voornamelijk rode en groene stralen. De groene worden meer gebogen vanwege hun grotere brekingsindex en bereiken de waarnemer nog net wanneer de rode stralen dat niet meer kunnen, zo een laatste groene flits veroorzakend, die veelal maar enkele seconden duurt. Ten slotte wordt aan het eind van hoofdstuk 3 het continue geval van de ronde aarde geanalyseerd, op basis waarvan met behulp van de behoudswet $C = rn(r)\sin\alpha$ de Wegenersectoren worden berekend. Op basis van een niet-rotatiesymmetrisch brekingsindexprofiel kan dan het bijzondere effect van de waargenomen schijnbare conjunctie van de Maan en Jupiter over een bergrug heen, tijdens de

Figuur 1 Kwalitatieve verklaring voor een blinde strook in de zon in een model met één warme laag, die van onder begrensd wordt door een cirkel ter hoogte H . De waarnemer W kijkt ruwweg in de horizontale kijkrichting. Door de overgang tussen breking en weerkaatsing ontstaat een zogenaamde Wegener-sector, waarbinnen W alleen lichtstralen bereiken van onder de horizon. Dit kan aanleiding geven tot een blinde strook in de ondergaande zon.



Alfred Wegener (1880–1930)



Marcel Minnaert (1893–1970)

overwintering op Nova Zembla van 1596/97, beschreven en verklaard worden.

Hoofdstuk 4, 'De brachistochroon als lichtstraal', gebruikt het principe van Fermat, inhoudende dat de baan van een lichtstraal die is volgens welke in de kortste tijd van A naar B gegaan wordt, voor de bepaling van de brachistochroon: langs welke gekromde metalen draad glijdt onder invloed van de zwaartekracht een kraal wrijvingsloos van A naar B . De snelheid van de lichtstraal is gerelateerd aan de brekingsindex in de luchtlagen, die van de kraal aan de wet van behoud van mechanische energie in het zwaartekrachtveld. Het probleem van de brachistochroon speelde een rol in de ontwikkeling van de differentiaal- en integraalrekening aan het einde van de zeventiende eeuw en werd geformuleerd en opgelost door Johann Bernoulli, van 1695 tot 1705 hoogleraar in Gronin-

gen. De brachistochroon blijkt een cycloïde te zijn (de beweging van een ventiel van een fietsband), die met behulp van een parametrisering afgeleid wordt uit de behoudswetten $S = n(y)\sin\alpha$ en die voor de mechanische energie $M = \frac{1}{2}mv^2 + mgy$.

Hoofdstuk 5, 'De cycloïde als isochrone en tautochrone kromme', beschrijft eerst enkele voorbeelden van de harmonische oscillator (periode onafhankelijk van de amplitude) en de gewone slinger als anharmonische oscillator. De harmonische oscillator is isochroon, de periode is onafhankelijk van de amplitude. Voor de cycloïde wordt voor de parameter s , de afstand langs de curve vanaf zeker punt, de vergelijking van de harmonische oscillator afgeleid. De beweging van een kraal langs een cycloïdale metalen draad is dus isochroon. Daaruit volgt dat de beweging van deze kraal ook tautochroon is: vanaf een willekeurige hoogte arriveert de kraal in steeds dezelfde tijd in het onderste punt.

In een historisch uitstapje wordt Huygens' oplossing om van de anharmonische gewone slinger een isochrone slinger te maken uit de doeken gedaan. De door Huygens bedachte 'wangen' aan de bovenkant van de slinger maken de slinger isochroon. De wangen hebben ook de cycloïdale vorm, waarbij de wangen de evoluit zijn van de kromme waarlangs het slingergewicht beweegt.

Lichtstralen als geodeten

In deel II wordt de achterliggende theorie van de optische verschijnselen vanuit een wiskundig hoger standpunt bekeken. Voor de hoofdstukken in dit deel is bij de lezer kennis en inzicht nodig van de vergelijkingen van Euler-Lagrange en Hamilton-Jacobi, die via variatierekening en de Legendre-transformatie af te leiden zijn. Voor velen die geen masters natuurkunde op zak hebben, geven de meerdere keren door Broer aangehaalde *Feynman Lectures on Physics* een eerste begrijpelijke en prachtige inleiding op de variatierekening (deel II, hoofdstuk 19).

In de hoofdstukken 6, 'Principes van Fermat en Hamilton', en 7, 'Nogmaals de brachistochronen', worden op basis van een bij het probleem van de lichtstralen gekozen Langrangiaan (en vervolgens de Hamiltoniaan) opnieuw voor de platte en de ronde aarde de al eerder verschenen behoudswetten langs de lichtstralen afgeleid. Zo verschijnen opnieuw de wet van Hero-Snellius en de cycloïde van de brachistochroon ten tonele. Ten slotte komen in hoofdstuk 8 lichtstralen aan de orde als geodeten op omwentelingsoppervlakken.

Slotopmerkingen

Het boek is volgens de Epsilon-website geschreven voor leerlingen, studenten en anderen met belangstelling voor wiskunde en optica, met ingangsniveau vwo. Ik zou daar zeker aan willen toevoegen docenten wis- en natuurkunde van het vwo en de lerarenopleidingen. Het boek kan zeker een bron zijn voor profielwerkstukken over optische verschijnselen in de hoogste klassen van het vwo, hoewel deel II voor deze leerlingen te hoog gegrepen is. In het hbo en op de universiteit kunnen studenten en docenten ook inspiratie opdoen voor scripties of kleine onderzoeken over diverse optische onderwerpen. In het bijzonder zullen dan de vele bibliografische verwijzingen van pas kunnen komen. De bibliografie is een brede verzameling, van wetenschapshistorische werken tot klassiekers (boeken en artikelen) over wis- en natuurkunde, van de *Elementen* van Euclides en de *Feynman Lectures* tot het wiskundetijdschrift voor jongeren *Pythagoras*. Ook het scholium (samenvatting/nadere uitleg/verwijzingen) aan het einde van elk hoofdstuk zal voor iemand die verder wil een *mer à boire* voor nader onderzoek zijn. Hetzelfde geldt voor de vele opmerkingen, die vrijwel op elke bladzijde te vinden zijn. Overigens leiden deze opmerkingen wel eens af van het doorlopende verhaal. Wellicht ware een plaatsing als noot onder aan de bladzijde of aan het einde van het hoofdstuk te overwegen.



Henk Broer, *Hemelverschijnselen nabij de horizon*, Epsilon Uitgaven, deel 77, Amsterdam, 2013, 152 p., ISBN 9789050411363, prijs € 22,00.

Nelly Litvak

Department of Applied Mathematics
University of Twente
n.litvak@utwente.nl

Frank van der Meulen

Delft Institute of Applied Mathematics
Delft University of Technology
f.h.vandermeulen@tudelft.nl

Event STAR Outreach Day, 12 December 2014, Eurandom, Eindhoven

Networks & Big Data

Once a year, the NWO cluster Stochastics – Theoretical and Applied Research (STAR) organises a STAR Outreach Day, a one-day event around a theme that is of a broad interest to the stochastics community in the Netherlands. The last Outreach Day took place at Eurandom on 12 December 2014. The theme of the day was ‘Networks & Big Data’. The topic is very timely. The *Vision document 2025* of the Platform Wiskunde Nederland (PWN) mentions big data as one of the six “major societal and scientific trends that influence the mathematical sciences”. In 2014 a ten-year Gravitation programme ‘NETWORKS’ in mathematics was awarded by NWO. The STAR Outreach Day has presented an exciting opportunity to promote these topics and their numerous applications in life and science. Organisers Nelly Litvak and Frank van der Meulen look back on this event.

Networks are all around us, examples vary from neural networks in brains to Internet and social networks. Graphs provide a natural way to describe and study complex relationships within a network. As a first example, in social networks the vertices form the population that the social network models, while the edges indicate all the friendships in the social network. A second example is a graph in which nodes (vertices) represent diseases and symptoms. In this graph we then wish to infer causal relationships indicating which symptoms increase the probability of suffering from a certain disease. From a stochastic point of view, the problem amounts to estimating a dependence structure over a graph. The emergence of ‘big data’ often implies a huge number of nodes in the network, and computational feasibility of estimation procedures is achieved by imposing structure on the network.

Research on big data and networks is a new very active field of studies. The talks by six speakers at the STAR Outreach Day covered both applied and theoretically oriented research work. In this article we will briefly review these talks. Clearly, our summary is necessarily selective and may not do full justice to the presented research. However, we hope to give the reader an overview on the type of problems that were discussed during the day. Abstracts and further information is available at www.eurandom.tue.nl/STAR.

(i) ‘*Statistical Aspects of Tumour Heterogeneity*’ by Simon Tavaré. The first talk of the day was presented by professor Simon Tavaré, who is director of the Cancer Research UK Cambridge Institute and professor of Cancer Research (Bioinformatics) in the department of Oncology. His research focusses on cancer genomics. This field of research has seen a tremendous increase in acquisition of data which leads to many interesting new statistical problems.

In his talk professor Tavaré started with an explanation of the biological context for studies of cancer heterogeneity. From the associated statistical aspects that arise in its study we will elaborate a bit on one particular problem discussed by Tavaré (see also [2]). For this purpose we first explain a bit of terminology from systems biology. The complete inventory of all DNA that determines the identity of an organism is called its genome. The research in [2] deals with detection of mutations found in the genomes of tumour cells. Such mutations can be either ‘somatic’ or ‘germline’, where somatic indicates that the mutation cannot be transmitted to offspring. Discovering cancer-related somatic mutations is confounded by the presence of millions of germline mutations. Information consists of DNA sequence data from multiple spatially or temporally separated tumour samples from the same cancer patient. Interest lies in detecting somatic mutations from this information. Instead of per-

forming multiple pairwise analyses of a single tumour sample and a matched normal, the authors consider all available samples jointly. Setting up a suitable statistical model is a nontrivial problem, and professor Tavaré explained how this can be done. In addition he indicated some computational difficulties in estimation of parameters for these types of problems.

(ii) ‘*The Structure of Critical Random Graphs*’ by Sanchayan Sen. The second talk was given by Sanchayan Sen. He has received his PhD from New York University, and has recently joined TU/e as a postdoc under the NWO Gravitation program ‘NETWORKS’. The work of Dr. Sen is in the area of random graphs, which generates increasing interest in the Netherlands.

The topic of the talk was critical behaviour in random graphs. Consider the classical Erdős–Rényi (ER) model, where a graph has n vertices, and an edge between each pair of vertices is drawn with probability $p = \lambda/n$. A well-known phenomenon in such graphs is the *phase transition*: if $\lambda < 1$ then the graph will consist of small disconnected components; if $\lambda > 1$ then there will be a largest component of size $O(n)$. Both subcritical and supercritical regimes are well understood through the connection between random graphs and branching processes. Dr. Sen studies the *critical* regime, which is most challenging from a mathematical point of view. His approach is to view components of a random graph at criticality as metric spaces. Using this method, he has proved that a broad class of random graphs behaves similarly to the ER graphs.

Dr. Sen closed his talk with a list of open questions, among which the extension of his methods to ‘scale-free’ degree distributions with infinite third moments of degrees, that are often observed in real-life networks,

such as social networks or Internet. Although solving these problems will pose major challenges, it is obvious that the theory of random graphs has been developing very fast in the last years, and its power in explaining phenomena in real-life networks is ever increasing.

(iii) *'The Diffusion And Effectiveness of Cancer Awareness Campaigns on Twitter'* by Tijs van den Broek. The last talk in the morning session was given by Tijs van den Broek, a researcher at TNO and a PhD student of University of Twente. His research focuses on the use of social media by activists to persuade firms to adopt sustainable policy and practices. Van den Broek and his colleagues at the University of Twente have recently received a prestigious Twitter data grant to analyse the diffusion and effectiveness of cancer early detection campaigns. With the data grant, the research team has received an unlimited access to Twitter's unfiltered archival data for a time period of two years. The research has just started, and there are more questions than answers. What drivers and barriers influence the diffusion process of Cancer Awareness Campaigns? And to what extent and under what conditions do online opinions about Cancer Awareness Campaigns lead to offline behaviour? Even filtering relevant tweets is highly non-trivial. For example, most tweets on 'cancer' are actually about the zodiac constellation in horoscopes.

The speaker has mentioned several problems that call for deeper mathematical and statistical analysis. For example, to what extent network structures that arise during an online campaign, predict offline behaviour? Extracting the knowledge from the large Twitter data set, with its underlying networks of followers and retweets, presents interesting opportunities for mathematical and statistical analysis. This is an example of an application that naturally calls for a collaboration between mathematicians and social scientists.

(iv) *'In-Core Computation of Geometric Centralities with HyperBall: A Hundred Billion Nodes and Beyond'* by Sebastiano Vigna. The afternoon program opened with a talk by professor Sebastiano Vigna from the University of Milan. He is a renowned computer scien-

tist who has worked on a large variety of topics, including algorithms for large graphs and theoretical/experimental analysis of spectral rankings such as PageRank.

Most of us have heard of the famous experiment by Stanley Milgram in the Sixties. Milgram found that distances between people in a social graph were surprisingly small. This phenomenon is often referred to as the 'small world phenomenon' or 'six degrees of separation'. In 2011 professor Vigna collaborated on the computation of the distance distribution of the whole Facebook graph with ≈ 721 million users and ≈ 69 billion friendship links. It has been the world's largest Milgram-type experiment! Imagine that Facebook users are vertices and the friendships are edges. Assume that we start from a randomly chosen vertex in this graph, and we want to reach another randomly chosen vertex by traversing edges along the shortest possible path. How many vertices shall we typically visit on the way? The result of Vigna and co-authors says that, on average, we will visit only 3.74 intermediate vertices. In other words, on Facebook there are just 3.74 degrees of separation.

In his talk professor Vigna has explained mathematical techniques behind these enormous computations, reported in [1]. It is common for mathematicians to study properties of graphs (including graph distances), when the number of nodes goes to infinity. However, when the graph is actually extremely large, all standard exploration-based approaches, that are used in theoretical analysis, are infeasible either in time, or in memory, or both. Professor Vigna and his co-authors developed a hyperball technique that employs probabilistic counters. Roughly speaking, each counter provides a randomized approximation for sizes of expanding hyperballs around each node. When many such counters are used, the distribution of the distance between the nodes can be obtained with sufficient accuracy. This talk was an impressive example of modern mathematical methods that enable efficient computations on an unimaginably large scale.

(v) *'Modern Day Causal Discovery: Challenges and New Applications'* by Tom Claassen. The fifth talk of the day was presented by Tom Claassen, who is an assistant professor at the

Institute for Computing and Information Sciences at the Radboud University Nijmegen. His research focusses on causal discovery. In his talk he explained how current state-of-the-art methods are in principle able to infer causal relationships from observational data. However, in the 'big data' era existing implementations are often ill-suited to handle the correspondingly large, high-dimensional data sets. Also, in real-world data many of the standard assumptions like multivariate Gaussian, or independent, identically distributed data do not apply, and standard causal algorithms may yield unreliable results or fail to run altogether. In the second part of his talk dr. Claassen discussed how existing methods can be adapted to provide more robust, informative, and realistic estimates on underlying causal mechanisms, and how to combine information from multiple data sets.

(vi) *'Big Networks and Data'* by Ernst Wit. The final talk of the day was presented by Ernst Wit, a professor of Statistics and Probability at the University of Groningen. He discussed estimation of the structure of a sparse Gaussian graphical model. This is a popular mathematically tractable model for a big network, in which one expects only a small amount of nodes to be connected. Professor Wit discussed state-of-the-art methods for finding out which nodes are connected in the network. Instead of testing a large number of hypotheses (where each hypothesis asserts the presence or abundance of a connection), modern methods explicitly try to exploit sparsity. This has become a hot topic in statistics since the introduction of the 'Lasso' in regression analysis. Here, the basic idea is to estimate parameters by minimising a least squares objective function subject to a bound on the ℓ_1 -norm of the parameters. The graphical Lasso is an implementation of this idea for Gaussian graphical models. In his talk professor Wit explained a novel, different, approach to this problem using approximate cross-validation and pointed out some of its advantages.

Acknowledgement

We would like to thank the speakers for contributing to this day. Some formulations are taken from their submitted abstracts.

References

1 L. Backstrom, P. Boldi, M. Rosa, J. Ugander and S. Vigna, Four degrees of separation, in *Proceedings of the 4th Annual ACM Web Science Conference*, ACM, 2012, pp. 33–42.

2 M. Josephidou, A.G. Lynch and S. Tavaré, MultiSNV: a probabilistic approach for improving detection of somatic point mutations from mul-

tiplied related tumour samples, *Nucleic Acids Research* (2015) 1–9.

Ionica Smeets

wetenschapsjournalist, Leiden
i@ionica.nl

Maatschappij Studiegroep Wiskunde met de Industrie 2013

De willekeurige discusswerper

Een discusswerper gooit lukraak schijven op de grond. Hoeveel schijven moet hij gooien voordat de grond helemaal bedekt is? Dit probleem van Philips is misschien wel het meest wiskundige van de studiegroep en tegelijkertijd blijkt het in allerlei vakgebieden op te duiken. Communicatie in netwerken, parkeerproblemen en adsorptie op een oppervlak zijn allemaal varianten van deze discusswerper. Lukt het de wiskundigen om meer inzicht te krijgen in dit beruchte probleem?

Deelnemers van de studiegroep

Ted van der Aalst (LU)
Dee Denteneer (Philips)
Hanna Döring (RU, Bochum, Duitsland)
Manh Hong Duong (TU/e)
Ross J. Kang (UU)
Mike Keane (WU, Middletown, VS)
Janne Kool (UU)
Ivan Kryven (UvA)
Thomas Meyfroyt (TU/e)
Tobias Müller (UU)
Guus Regts (CWI)
Jakub Tomczyk (TU, Wrocław, Polen)

Philips Research staat bekend om zijn slimme verlichting. In hun lichtsystemen die zelf beslissen wanneer ze aan en uit moeten, zit een netwerk van sensoren. Binnen dat netwerk wordt regelmatig informatie doorgegeven. Een sensor die informatie zendt, doet dat in een cirkel om zich heen. Alle andere sensoren die binnen die cirkel zitten, krijgen de juiste informatie. Het zenden gaat net zo lang door tot het complete netwerk de informatie heeft ontvangen. Hoe lang duurt het voordat dit gelukt is?

Aan het begin van de studiegroep presenteert Philips hun vraag als een discusswerper die schijven in een rooster van punten gooit. Elke schijf landt midden op een nog onbedekt punt, zoals bijvoorbeeld in Figuur 1. De discusswerper blijft net zo lang gooien tot alle punten bedekt zijn door een schijf. Hoeveel schijven moet de discusswerper gemiddeld gooien voor hij het hele rooster heeft bedekt?

De punten in het rooster zijn te zien als de sensoren in het lichtstelsel. Een schijf gooien staat voor het verzenden van informatie vanuit het middelpunt. Maar het abstracte probleem van de discusswerper beschrijft ook vraagstukken uit allerlei andere vakgebieden. Scheikundigen zien het als een oppervlak waar willekeurig deeltjes op landen tot het oppervlak verzadigd is en geen nieuwe deeltjes meer opneemt. Wiskundigen kennen het als een abstracte vraag over het stapelen van kubussen in meer dimensies. De eenvoudigste variant hiervan is het *parkeerprobleem van Rényi*: hoeveel auto's passen er achter elkaar in een smalle straat als elke chauffeur zijn auto op een willekeurig lege plek neerzet?

Deze problemen hebben met elkaar gemeen dat ze lastig zijn. Dee Denteneer, hoofdonderzoeker bij Philips omschreef het zo tij-

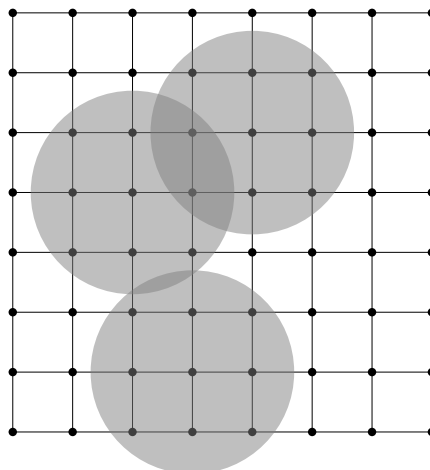
dens zijn presentatie op maandag: "We gebruiken nu vooral simulaties om dit soort problemen op te lossen. Daaruit krijgen we wel een berg getallen, maar is het erg lastig om te begrijpen wat er precies gebeurt. We hebben fundamentele kennis nodig over deze problemen, we willen het recept kennen. Daarom komen we naar de studiegroep."

Een nieuwe dimensie

Hun vraag spreekt de wiskundigen aan. Guus Regts, promovendus bij het CWI koos zonder twijfelen voor Team Philips: "Dit was het helderste, meest wiskundige probleem." De wiskundigen formuleren het probleem van de discusswerper zo algemeen mogelijk met een meerdimensionaal rooster. Hoeveel (ook al meerdimensionale) schijven moet je naar verwachting gooien om alle punten in dat rooster te bedekken? Of om precies te zijn, wat is de bedekkingsgraad: het aantal gegooide schijven gedeeld door het aantal roosterpunten?

Een variant van dit probleem is de vraag wat er gebeurt als je de schijven op elke plek mag gooien (dus niet per se netjes op een roosterpunt), maar niet toestaat dat schijven elkaar overlappen. Hoeveel procent van de ruimte is dan gemiddeld bezet op het moment dat er geen schijf meer bijpast? De eendimensionale versie hiervan is het *parkeerprobleem van Rényi*, genoemd naar de wiskundige die in 1958 bewees dat in dit geval de dichtheid 0,748 is, iets minder dan vijftien procent. Dus als je auto's in een smalle straat lukraak neerzet, dan houdt je een kwart van de ruimte over.

In twee dimensies is dit probleem om te schrijven naar het probleem van de discusswerper, waarbij de randverschijnselen moeten worden verwaarloosd. Gelukkig zijn die randverschijnselen daar in de praktijk klein genoeg voor. Helaas is het probleem voor twee (en hogere dimensies) nog onopgelost. In 1960 formuleerde wiskundige Palásti het vermoeden dat in dimensie d de dichtheid



Figuur 1 De discusswerper heeft drie schijven op het rooster gegooit.

gelijk is aan $0,748^d$. Maar simulaties laten zien dat dit vermoeden waarschijnlijk onjuist is voor elke dimensie groter dan één. En ruim vijftig jaar later heeft nog niemand een idee wat dan wél de juiste dichtheid is. Pas in 2001 bewees Matthew Penrose dat er in de limiet überhaupt een dichtheid bestaat. Dezelfde Penrose bracht meer eigenschappen van dit soort problemen in kaart, zo bewees hij dat het aantal benodigde schijven ongeveer normaal verdeeld is. Maar veel vragen zijn dus nog onbeantwoord.

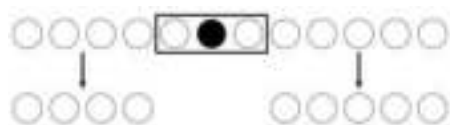
Een eendimensionale discusswerper

Om meer grip op het probleem te krijgen, besluiten de wiskundigen de eenvoudigste versie te bestuderen: een eendimensionale discusswerper. In dat geval is het rooster een lijn met punten en een schijf is een lijnstuk dat precies drie van die punten bedekt (zijn middelpunt en de twee buurpunten). De bedekkingsgraad zal nu tussen de 33 en 50 procent liggen. In het eerste geval zitten er steeds precies twee lege punten tussen de middelpunten van de schijven, in het laatste geval elke keer precies één. Als de schijven willekeurig gegooid worden, zal de bedekking daar ergens tussenin uit komen.

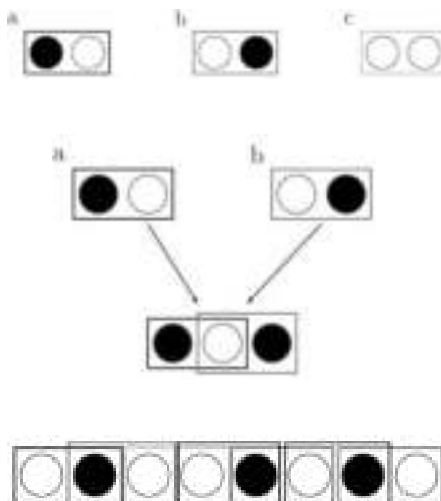
Het eerste dat opvalt is dat in deze versie het probleem na elke keer gooien splitst in twee kleine problemen. Door het splitsen te herhalen is er een elegante formule op te stellen voor de bedekkingsgraad. Met analytische technieken is vervolgens te berekenen dat bij een willekeurige discusswerper de bedekkingsgraad ongeveer 43,2 procent is.

Overgangen

Dat is niet de enige manier om naar het probleem te kijken. Een andere aanpak is om de toegestane eindsituaties te beschrijven. Maak de punten waar het middelpunt van een schijf ligt weer zwart. Dan mogen er aan de ene kant geen twee zwarte punten naast elkaar zijn, want een schijf landt nooit midden op een bedekt punt. Aan de andere kant mogen er geen drie witte punten naast elkaar zijn, want dan is het middelste punt onbedekt.



Figuur 2 We geven het middelpunt van een schijf aan met een zwart rondje. Zodra er een schijf is gegooid, zijn er drie punten op de lijn bedekt. Links en rechts daarvan blijven er twee kleinere lijnstukken over die los van elkaar geanalyseerd kunnen worden.



Figuur 3 Bovenaan: De drie blokken. Midden: Het combineren van twee blokken. Onderaan: Een mogelijke uitkomst.

Toegestane eindsituaties zijn te krijgen door een lijn te maken uit drie soorten blokken die als domino-stenen op elkaar moeten komen. Twee dezelfde zijkanten mogen samen gecombineerd worden tot één vakje. Met deze blokken is het proces te beschrijven als een Markov-keten. Hierover is veel theorie beschikbaar en de studiegroep besluit aan te nemen dat de entropie in het systeem zo groot mogelijk zal zijn. Dit betekent dat het systeem ongevoelig is voor kleine verstoringen.

Deze aanname leidt tot een schatting voor de bezettingsgraad van 41,1 procent, niet zo ver van de eerder berekende 43,2 procent. Eventueel is deze methode nog aan te scherpen door met grotere bouwblokken te werken.

Tellen maar

De derde en laatste aanpak die de studiegroep probeert voor het eendimensionale probleem is slim tellen van mogelijkheden. Voor het probleem van de discusswerper bestaat dit tellen uit twee stappen:

1. Bepaal alle mogelijke configuraties die het rooster bedekken.
2. Bepaal voor elke configuratie de kans dat je hem bereikt door schijven te gooien.

Bij het tellen zijn de configuraties te verdelen in soorten die erg op elkaar lijken. Bij een lijn met éénentwintig punten zijn er bijvoorbeeld elf verschillende soorten met in totaal 379 configuraties.

Omdat het uitrekenen van de kansen net zo lastig is als het probleem in één keer aanpakken, besluit de studiegroep om de kansen grof te schatten. De eerste schijven belanden op een lege lijn en zullen steeds drie punten bedekken. Daarna komen steeds vaker schijven aan één kant naast een andere schijf terecht en bedekken ze nog maar twee

nieuwe punten. Ten slotte zullen de laatste schijven landen op losse punten die nog bedekt moeten worden. Deze benadering levert voor het voorbeeld met eenentwintig punten op dat de bedekkingsgraad normaal verdeeld is met een gemiddelde van 9,07 en variantie van 0,24. Simulaties geven voor dit geval als 'correcte' antwoord een gemiddelde van 9,38 en een variantie van 0,44.

Het echte probleem

De wiskundigen zijn nu gewapend met drie verschillende methodes om het eendimensionale geval aan te pakken, maar Philips is natuurlijk vooral geïnteresseerd in oplossingen voor het tweedimensionale probleem. Maar het is niet zo makkelijk om de methoden te generaliseren.

Bij het splitsen van het probleem duiken er bijvoorbeeld problemen op bij de afhankelijkheden. Bij elke gelande schijf valt het rooster uit elkaar in een aantal kleinere stukken. Maar anders dan bij het eendimensionale geval, kunnen schijven uit verschillende gebieden elkaar in de weg liggen. Daardoor zijn de kleinere problemen niet zo makkelijk los van elkaar op te lossen. Guus Regts: "Je hebt te maken met langeafstandseffecten. Zelfs kleine problemen worden daardoor te groot om met de hand op te lossen."

Ook het tellen van alle configuraties is een stuk ingewikkelder bij het tweedimensionale geval. Als het rooster bijvoorbeeld dertig bij dertig is en schijven steeds vijftientwintig punten tegelijk bedekken, dan zijn er al tien tot de macht vijfennegentig mogelijke configuraties. Dat is royaal meer dan het aantal atomen in het complete heelal. De hoop voor de tweedimensionale discusswerper lijkt vooral te liggen in de richting van de Markov-ketens. Deze kunnen in meer dimensies worden uitgebreid naar Markov-netwerken. Maar dat is iets voor een vervolgstudie.

Dee Denteneer van Philips is vrijdag tevreden over de resultaten: "We hebben een hoop nieuwe aanknopingspunten. Dat open vermoeden kenden we bijvoorbeeld niet. Voor ons zijn dit soort wiskundige referenties lastig om te vinden, omdat we zo gericht zijn op toepassingen. We gaan hier mee verder, vooral de Markov-optie is erg interessant."

Dit is een verslag van de Studiegroep Wiskunde met de Industrie 2013, van 26 januari t/m 1 februari 2013 op het Lorentz Center in Leiden. Voor de bijbehorende wetenschappelijke publicatie, waarin de gebruikte wiskundige modellen en methoden uitvoerig staan beschreven, verwijzen we u naar websites.math.leidenuniv.nl/SWI-2013/.

Ionica Smeets

wetenschapsjournalist, Leiden
i@ionica.nl

Maatschappij Studiegroep Wiskunde met de Industrie 2013

Een hardnekkig probleem

Probeer eens voor je te zien wat er gebeurt als je aan rolletje klei trekt. Het rolletje rekt eerst langzaam uit, daarna ontstaat er ergens in het midden één plek die snel dunner wordt, tot het rolletje breekt. Een vergelijkbaar effect treedt op bij metalen die worden uitgerekt: ook daar kan alle spanning op één klein gebied samenballen, wat tot ernstige vervormingen leidt. TNO wil beter begrijpen wat er precies gebeurt bij deze vervorming. Het probleem is dat in dit geval de krachten in drie dimensies werken, maar dat de gebruikelijke modellen tweedimensionaal zijn. Kunnen de wiskundigen de analyse naar een hogere dimensie tillen?

Deelnemers van de studiegroep

Nicodemus Banagaaya (TU/e)
Johan Dubbeldam (TU Delft)
Bas van 't Hof (TU Delft)
Keith Myerscough (CWI)
Björn de Rijk (UL)
Lotte Sewalt (UL)

Het is voor allerlei toepassingen belangrijk om te begrijpen wat er gebeurt als metalen onder druk komen te staan. In oktober 2012 botste in Hong Kong bijvoorbeeld een veerboot tegen het schip Lamma IV. De waterdichte compartimenten van de Lamma IV scheurden open en vulden zich razendsnel met wa-



Figuur 1 De gehavende Lamma IV na de botsing.

ter. Het schip zonk zo snel dat passagiers niet eens tijd hadden om een reddingsvest aan te trekken en bijna veertig passagiers verdronken. Dit soort botsingen is moeilijk te voorkomen, maar TNO wil graag beter begrijpen hoe metaal reageert bij een botsing. Betere simulaties en begrip van het botsingsproces kunnen in de toekomst mensenlevens redden.

Verschillende vervormingen

Als er een kracht op een voorwerp wordt uitgeoefend, dan zal dat eerst elastisch vervormen. De naam elastisch zegt het al: als de kracht verdwijnt, keert het voorwerp weer terug naar zijn oorspronkelijk vorm. Net als een elastiekje. Maar als de kracht te groot is, dan raakt het voorwerp blijvend vervormd, als een elastiek dat te ver uitgerekt is. Zo'n vervorming die niet omkeerbaar is heet een *plastische deformatie*. Carey Walters van TNO legt aan het begin van de studiegroep uit dat hij werkt aan botsingen en explosies waarbij materialen onder extreme druk staan en daardoor vervormen.

Om precies te zijn gaat het probleem van TNO over *necking*, oftewel insnoering. Daarbij wordt een (metalen) voorwerp zover uitgerekt dat alle vervorming zich verplaatst naar één gebied. Als voorbeeld laat Carey een ronde buis zien waarbij het midden van de buis veranderd is in een heel smal stuk, een soort nek.



Figuur 2 Een metalen buis met een nek die ontstaan is doordat er teveel kracht op de buis stond.

Het doel van de studiegroep is het modelleren van wat er in die nek gebeurt. De plastische vervorming is te beschrijven met een tweedimensionaal model, omdat overal in de buis hetzelfde gebeurt. Zodra de nek ontstaat, raakt het proces volledig driedimensionaal. Bestaande modellen werken echter in twee dimensies en negeren dit effect. Daardoor zijn de simulaties niet altijd even betrouwbaar. Carey vertelt maandag tijdens zijn presentatie waar hij op hoopt: "Het liefste wil ik de tweedimensionale beperking verwijderen en wel de eenvoud van de bestaande modellen houden."

Spanning en relaties

Wiskundige Lotte Sewalt van de Universiteit Leiden legt uit waarom TNO kijkt naar buizen: "Die zijn in een laboratorium een stuk makkelijker te testen dan complete schepen. Bovendien is het al heel moeilijk om die buis helemaal te begrijpen. Je wilt uit het gedrag van de randen afleiden wat er in het midden bij de nek gebeurt." Het verslag van de studiegroep begint met een korte samenvatting van

continue mechanica. Zolang materiaal elastisch vervormt, is de relatie tussen de spanning en de vervorming lineair. Op het moment dat het materiaal meegedeft, wordt de situatie veel ingewikkelder. Aannemen dat het materiaal in alle richtingen dezelfde eigenschappen heeft én dat hydraulische druk geen invloed heeft op het moment dat de plastische vervorming begint, vereenvoudigt het proces enigszins. De Duitse wiskundige Richard von Mises stelde aan het begin van de twintigste eeuw voor om daarnaast aan te nemen dat het meegeven van het materiaal kwadratisch afhangt van de spanning in verschillende richtingen. Alles bij elkaar volgt hieruit dat de spanning zoals Von Mises hem formuleerde, samenhangt met de vervorming volgens een machtsverband. In het eendimensionale geval is de Von Mises-spanning een macht van de vervorming (keer een of andere constante). Om deze relatie om te zetten naar drie dimensies, zijn er verschillende aanpakken mogelijk.

Modellen

Het team van wiskundigen duikt in de literatuur en ontdekt dat er al een heleboel modellen bestaan voor *necking*. Sewalt: "Het blijkt enorm lastig om het model goed te formuleren. Welke waarden zijn relevant? Wat kun je weglaten? Sommige versimpelingen maken het probleem ineens triviaal." In het algemeen geven metingen alleen informatie over de gemiddelde spanning in de nek. Maar er is op voorhand niet bekend wat de precieze vorm van de nek zal zijn, wat het extreem moeilijk maakt om de verdeling van de spanning te berekenen. Elk model doet andere aannames over hoe de spanning verdeeld is over de nek, maar niet alle aannames zijn realistisch.

Het klassieke model komt van P.W. Bridgman en is meer dan vijftig jaar oud. Bridgman kreeg in 1946 de Nobelprijs voor de Natuurkunde voor zijn werk aan hoge druk. In zijn postuum gepubliceerde onderzoeksartikelen uit 1964 bespreekt hij hoe een nek ontstaat in een rekbare buis.

Bridgman neemt op basis van zijn eigen experimenten aan dat de spanning uniform verdeeld is bij het smalste punt van de nek. In dat geval is de spanning te berekenen vanaf dat punt en is de spanning op een punt van de buis evenredig met de afstand tot het midden van de buis.

In dit geval zijn er tamelijk elegante formules af te leiden voor het moment dat de nek zal gaan vormen en voor de uiteindelijke vervorming. Alleen zijn de modellen helaas

niet realistisch voor de vervorming van metalen buizen zoals TNO ze bestudeert.

In de jaren zeventig breidde M.A. Kaplan de analyse van Bridgman uit naar buizen van zacht metaal. De aanname is hier dat de vervorming in een symmetrische staaf zelf ook symmetrisch zal zijn ten opzichte van de as. Een tweede belangrijke aanname is dat de vervorming puur plastisch is, eventuele elastische vervorming wordt verwaarloosd. Dat laatste is overigens een zeer realistische aanname, omdat in de praktijk bij dit soort metalen de bijdrage van de elastische vorming ongeveer 1 procent is als het nekken begint, en daarna alleen maar kleiner wordt.

De analyse van Kaplan gebruikt dat de verhouding tussen de straal in het midden van de nek en straal aan de rand van de nek steeds hetzelfde blijft in het proces, iets dat al uit metingen van Bridgman bleek. Door de straal van de buis na de vervorming te meten, weet Kaplan de spanning af te leiden. De voordelen van Kaplans model zijn dat alle parameters makkelijk te meten zijn en dat het model beter met de praktijk van plastische vervormingen klopt dan Bridgmans werk. Het nadeel is dat het uiteindelijk niet de driedimensionale vervormingen beschrijft.

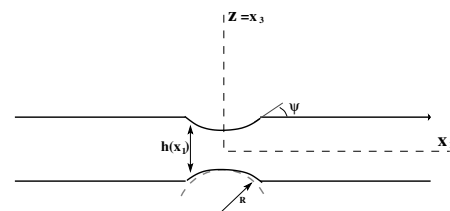
Drie dimensies

In een poging de modellen naar de derde dimensie te tillen, proberen de wiskundigen twee verschillende methoden. De eerste is om de vergelijking voor de Von Mises-spanning in het eendimensionale geval direct om te zetten naar drie dimensies. Daarvoor moet je alleen wel de effectieve spanning kennen.

Een andere generalisatie werd in de jaren zeventig door J. Hutchinson en co-auteurs voorgesteld, hier is de driedimensionale spanning een iets ingewikkeldere functie van de vervorming en constanten die bij het specifieke materiaal horen.

Om te begrijpen hoe het nekken verloopt, bestuderen de wiskundigen een dunne metalen plaat. De plaat begint in rust en daarna wordt er een gelijkmatige trekkracht op de uiteindes uitgevoerd. Met een redenering in de trant van het werk van Hutchinson leiden de wiskundigen een niet-lineaire differentiaalvergelijking af die beschrijft hoe de spanning in het vlak van de plaat zich in de loop der tijd ontwikkelt. Deze vergelijking is numeriek op te lossen. Omdat de tijd in de studiegroep beperkt is, kiezen de wiskundigen ervoor om die oplossing niet te zoeken, maar nog dieper in de theorie van het nekken te duiken.

Na een boel aannames en een hoop afleiden concluderen de wiskundigen dat de



Figuur 3 De vorm van de metalen plaat zoals de wiskundigen hem bestudeerden. Door een analyse van de verstoring te maken, kan bepaald worden hoe de nek er aan het begin uitziet zonder aannames over de kromming.

spanning in de nek alleen maar uniform is als de materiaalconstante strain hardening exponent precies 4 is. Helaas is die exponent voor staal eerder rond de 0,44. Verder ziet het team dat met de gemaakte aannames de vergelijkingen voor de spanning bij Hutchinson op één factor na gelijk zijn aan die van Bridgman.

Wordt vervolgd

Uiteindelijk moeten de wiskundigen concluderen dat het probleem van TNO verre van triviaal is en dat er helaas te weinig tijd was om een compleet driedimensionaal model te ontwikkelen. Bas van 't Hof van VORtech is trots op wat ze in korte tijd gevonden hebben, maar baalt dat de studieweek zo snel omvloog: "We hebben zoveel goede aanknopingspunten, maar allemaal nét niet wat we zoeken. Hadden we maar iets meer tijd." Het team adviseert TNO om de besproken modellen verder te onderzoeken, liefst zowel met pijpen in het lab als met numerieke simulaties, zodat gekeken kan worden welke aannames het beste overeenkomen met de praktijk.

Carey Walters zegt aan het eind van de week dat hij in het begin wel moest lachen om de reacties: "De wiskundigen leken te denken dat ik hen vroeg om het wiel uit te vinden, omdat er al zoveel over het probleem bekend was. Maar wat ik vroeg, stond echt niet in de literatuur. Deze week heb ik in veel discussies meegedaan. Door aan niet-ingenieurs uit te leggen wat precies mijn probleem is, heb ik veel geleerd over het fenomeen. De ideeën van de wiskundigen zijn zeker interessant en ze hebben ook een aantal artikelen opgedoken die ik nog niet kende. Maar de grootste toegevoegde waarde waren de discussies."

Dit is een verslag van de Studiegroep Wiskunde met de Industrie 2013, van 26 januari t/m 1 februari 2013 op het Lorentz Center in Leiden. Voor de bijbehorende wetenschappelijke publicatie, waarin de gebruikte wiskundige modellen en methoden uitvoerig staan beschreven, verwijzen we u naar websites.math.leidenuniv.nl/SWI-2013/.

Boekbesprekingen

| Book Reviews

Redactie: Hans Cuypers en Hans Sterk

Review Editors NAW - MF 7.092
Faculteit Wiskunde & Informatica
Technische Universiteit Eindhoven
Postbus 513
5600 MB Eindhoven
reviews@nieuwarchief.nl
www.win.tue.nl/wgreview



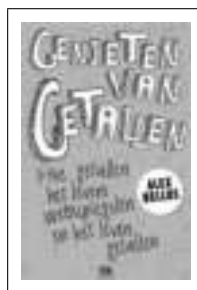
B. de Pagter, A.C.M. van Rooij
An Invitation to Functional Analysis
Epsilon Uitgaven, deel 75, 2013
vii + 180 p., prijs € 25,00
ISBN 9789050411349

In the introduction the authors start by explaining how this book is different from other books on the same topic. They have decided not to treat (for instance) topological vector spaces and Banach algebras. Furthermore, they abstain from topology and the axiom of choice. Normally, within functional analysis the axiom of choice is only used to prove the Hahn–Banach theorem. Without this axiom, the Hahn–Banach theorem can still be proved, but only on separable spaces. The authors call their choices the ‘light’ version of functional analysis. I think this qualification is misleading. First of all a student having only a background in analysis may confuse ‘light’ with easy and not relevant for applications. He will be very surprised when starting to work with the book. The results are deep and most of the functional analysis needed for applications is treated in the book. Secondly, ‘light’ may be confused with lack of rigor. Again this is not at all the case in this book. Proofs are written down in the right level of detail.

The chapters in this book, ‘Metric spaces,’ ‘Normed Vector spaces,’ ‘Linear Operators,’ ‘Banach Spaces’ and ‘Hilbert Spaces’ are in my opinion the right topics for a first course on functional analysis. The student learns the basics of functional analysis, and for a student not continuing in analysis this will be sufficient. If a student continues in analysis, then he has learned from this book the basics very well, and it will be no problem exploring other topics like general spectral theory, unbounded operators, topological vector spaces, et cetera.

It is quite an achievement that the authors are able to treat the above mentioned topics in only 180 pages. The proofs are all included, and there are exercises which help to understand the material. It is a book that could be studied independently. However, I think that a student less trained in reading mathematical proofs will need some guidance from time to time.

Hans Zwart



Alex Bellos
Genieten van getallen
Hoe getallen het leven weerspiegelen en het leven getallen
VBK Media, 2014
382 p., prijs € 15,00
ISBN 9789021549637

Walter Mebane, politicoloog aan de Universiteit van Michigan, beweerde dat de Iraanse presidentsverkiezingen van 2009 doorgestoken kaart waren. Mebane vermoedde dat er stemmen op kunstmatige manier waren toegevoegd voor de zittende president. Hij baseerde dit vermoeden op de Wet van Benford. In 1841 ontdekte de Duitse wiskundige Möbius dat de standaardparabool $y = x^2$ gebruikt kan worden als een vermenigvuldigingsmachine.

Zomaar twee aardige feitjes uit dit boek waar ik in mijn lessen zeker iets mee wil gaan doen. In de inleiding schrijft Bellos dat hij met dit

boek de lezer wil verrassen, hem of haar wil laten zien hoe zijn favoriete wiskundige concepten in het dagelijkse leven zijn terug te vinden en de schoonheid, het nut en de speelsheid van abstract denken wil leren waarderen. Daar is hij zeker in geslaagd. Hierbij komen achter-eenvolgens getallen en onze gevoelens voor getallen, de wetten van Benford en Zipf, goniometrie in driehoeken en in de analyse, kegelsneden, exponentiële groei, negatieve en complexe getallen, calculus en bewijsmethoden aan de orde, alvorens Bellos eindigt met de Game of Life als voorbeeld van cellulaire automaten. Bij het laatste vertelt hij nog dat het theoretisch mogelijk is dat Life met elke computer op de wereld kan ‘emuleren’ (naar de kroon steken, aldus Van Dale — bedoeld wordt iets als ‘wedijveren’).

Dit laatste woordgebruik laat volgens mij zien dat er niet altijd even handig is vertaald. Bellos schrijft vlot en onderhoudend, zijn boek is gericht op een groot en algemeen publiek: hij geeft geen tot nauwelijks bewijzen, als het wat technischer wordt dan verwijst hij naar een bijlage (acht stuks). De onhandige vertaling schijnt soms ook door in wiskundige termen. Zo wordt regelmatig het begrip ‘gradiënt’ genoemd. Ik denk dat 99 procent van de doelgroep nog nooit van dit begrip heeft gehoord. Het begrip wordt wel uitgelegd, maar waarom niet het beter van de middelbare school bekende ‘richtingscoëfficiënt’ gebruiken?

Eigenlijk is de onhandige vertaling het enige minpuntje dat ik in dit boek kan vinden. De Nederlandse titel van het boek — *Genieten van getallen* — is wat mij betreft uitstekend gekozen. Ik heb inderdaad van het boek genoten!

Ernst Lambeck



Joseph Mazur
Enlightening Symbols
A Short History of Mathematical
Notation and Its Hidden Powers

Princeton University Press, 2014

312 p., prijs \$ 29.95

ISBN 9780691154633

Iedere lezer kent nog wel het oude onderscheid tussen cijferend rekenen en zogenaamde redactievraagstukken. De laatste waren taalkundige, ‘ingeklede’ rekenkundige vraagstukken. Het bijzondere daaraan was wél dat zo’n vraagstuk vervolgens op een ‘retorische’ wijze opgelost moest worden, namelijk al redenerend zonder gebruik te maken van wiskundige symbolen. In feite stond een groot gedeelte van de rekenkunde bol van de retoriek. Wat te denken van de volgende volzin: “In een evenredigheid staat de eerste term tot de som van de eerste en de tweede als de derde tot de som van de derde en de vierde.” De onderwijzers werden tot in de jaren zestig van de vorige eeuw op deze wijze opgeleid. Rekenen onderscheidde zich daarmee van de rest van de wiskunde door het vermijden van symbolen en door het op ‘retorische’ wijze al redenerend toewerken naar de oplossing. Wellicht is dit de reden dat zelfs een minister van onderwijs nog in het begin van de 21ste eeuw stelling beweerde dat rekenen geen wiskunde is, maar echt iets anders (sic). Nu is de wiskunde bij uitstek het vak dat gebruik maakt van een overvloed aan tekens en symbolen. En het is inderdaad waar dat de wiskunde (inclusief het rekenen) zich ontwikkeld heeft vanuit de retoriek naar symboolmatig werken.

In het boek dat voor ons ligt schetst Joseph Mazur dit facet van de ontwikkeling van de wiskunde. Hij beschrijft op zorgvuldige wijze de tekens die oude volken hebben gebruikt om getallen aan te duiden. Hij gaat daarin verder dan de gebruikelijke historische beschouwingen:

naast de bekende voorbeelden als die van het spijkerschrift en van de hiërogliefen beschrijft hij de Hebreeuwse en de Griekse notaties, maar ook die van bijvoorbeeld de Azteken, de Maya’s, de Chinezen en de Japanners. En natuurlijk de verworvenheden vanuit India, het Sanskriet en de Arabische invloeden. De gedetailleerdheid van de beschrijving is voor hem geen doel op zich, maar heeft de functie om te laten zien dat er grote overeenkomsten bestaan tussen al deze systemen die verspreid over de wereld onafhankelijk van elkaar tot stand zijn gekomen.

De gebruikte notaties bestonden in feite allemaal uit tekens die nog geen symboolfunctie hadden. De meeste van deze tekens waren afkortingen van woorden. (Het retorische aspect.) Zo is het +-teken voor optellen waarschijnlijk ontstaan uit de ‘t’ van het Latijnse ‘et’ (‘en’). Het horizontale streepje iets lager en het boogje onderaan weg, geeft uiteindelijk de +. En zo is voor zeer veel tekens de relatie met de achterliggende woorden of figuren aan te geven. Mazur beschrijft en documenteert dit alles zeer zorgvuldig en waarheidsgetrouw. Intussen schrijft hij daarmee ook een stuk geschiedenis van de wiskunde. Natuurlijk leidt zijn betoog tevens naar negatieve getallen, die aanvankelijk niet als getallen, maar als een (financiële) schuld werden behandeld. En bij de ontwikkeling van de derde- en vierdegradsvergelijkingen naar de wortels uit negatieve getallen. Uitvoerig beschrijft hij de ontwikkeling van het wortelteken: van de R van Radix (wortel) na veel omzwervingen en pas laat in de ontwikkelingsgeschiedenis naar ons wortelteken en nog later de streep boven de vorm waaruit de wortel getrokken moest worden.

Part 1 (8 hoofdstukken) van het boek, ‘Numerals’, is vrijwel geheel gewijd aan de notaties en dat geldt ook voor een groot deel van Part 2 (11 hoofdstukken) ‘Algebra’. Maar tijdens de ontwikkeling van de algebra gebeurt er iets wezenlijks met de notaties en de tekens. Ze gaan meer betekenen dan alleen een afkorting, ze ontsluiten nieuwe werelden, kortom allengs transformeren ze tot symbolen. In het begin daarvan staat zelfs ‘onze’ Frans van Schooten, die de stap zette om de streep van het wortelteken door te trekken, waarmee hij echt iets toevoegde aan het wortelteken. De auteur citeert Tobias Dantzig: “It is this power of transformation that lifts algebra above the level of a convenient shorthand.” Het voorbeeld van het symbool i voor de wortel uit -1 is veelzeggend: “From the symbol i there emerged a new notion: that magnitude, direction, rotation may be embodied in the symbol itself.”

Part 3 (5 hoofdstukken), ‘The Power of Symbols’, behandelt een aantal theoretische achtergronden van symbolen, waarbij de auteur bewuste en onderbewuste psychologische effecten beschrijft die wiskundige symbolen gehad hebben op het wiskundig denken en wiskundig begrip. In vijf appendices komen nog enkele voorbeelden aan de orde (over de notatie van Leibniz, Newtons fluxies, een uitgevoerd experiment, complexe getallen en quaternionen) waaraan het voorgaande nog eens wordt geadstrueerd. Een behoorlijk uitgebreid notenapparaat en een register besluiten het boek.

De auteur toont overduidelijk aan dat de ontwikkeling van de wiskunde tot nu toe vrijwel niet mogelijk geweest zou zijn wanneer de oude retorische werkwijze zich niet had ontwikkeld tot symboolmatig werken. Ten overvloede maakt hij dat nog eens duidelijk aan de hand van een van de schitterende syllogismen die Lewis Carroll in zijn logicaboek heeft opgenomen: vrijwel onmogelijk op te lossen via de retorische werkwijze, een fluitje van een cent wanneer symbolen worden gebruikt.

Een erg mooi boek dat ik een ieder kan aanraden die geïnteresseerd is in de historische ontwikkeling van ons vak en in wijsgerige beschouwingen daarover. Slechts enkele onnauwkeurigheden ontsieren

de tekst, zoals op bladzijde 157 waar een polynoom zomaar vervangen wordt door een vergelijking en op bladzijde 172 waar een minteken als gelijktteken is afgedrukt. Het zijn slechts kleinigheden. Aanbevolen, ook voor lerarenopleidingen om toekomstige docenten er van te doordringen dat een goede notatie en een juist gebruik van symbolen van essentieel belang zijn. Leerlingen maken er nogal eens een rommeltje van, hetgeen door veel docenten ten onrechte door de vingers wordt gezien.

Wim Kleijne



Dirk Huylebrouck
België + wiskunde
Academia Press, 2013
243 p., prijs € 23,00
ISBN 9789038221496

Voor u, lezer, ligt een recensie van het derde boek van Dirk Huylebrouck, die onder meer bekend is als auteur van wiskundig georiënteerde artikelen in het blad *EOS* en als redacteur van de rubriek 'The Mathematical Tourist' in het tijdschrift *The Mathematical Intelligencer*. De auteur publiceerde eerder de boeken *Afrika + wiskunde* (VUB Press, 2004) en *De codes van da Vinci, Bach, pi & Co* (Academia Press, 2009). Het boek bevat een groot aantal bijdragen over verworvenheden in de wiskunde door Belgen volbracht en/of aangetroffen in België, en over in België opgeleide wiskundigen, dit alles verluchtigd met maar liefst 182 afbeeldingen, voornamelijk bestaande uit kleurenfoto's. Uitvoerige levensloopbeschrijvingen van de Fieldsmedaillewinnaars Jean Bourgain, Pierre Deligne en van de Abelprijswinnaar Jaques Tits, alsmede van de eerste vrouwelijke hoogleraar aan de Princeton Universiteit, Ingrid Daubechies, vinden we in het boek, hun verdiensten uitgemeten in 93 bladzijden en vergezeld van 60 foto's inclusief enkele figuren. In het bijzonder is nader ingegaan op het creatieve werk van Daubechies dat geleid heeft tot het verwezenlijken van het nu bekende beeldformaat JPEG en op haar werk bij het optimaliseren van digitalisaties in de schilderkunst via wavelets. Nergens ben ik zo'n boeiende beschrijving van hun leven en werk tegengekomen; ook niet dus in internationale periodieken of boekwerken.

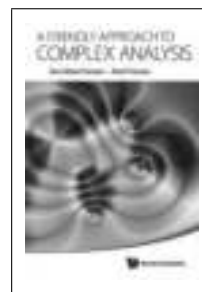
Vervolgens treffen we bijdragen aan over: de oudste vondsten van de wiskunde liggen in België (het Ishangobeen). De 'Mare Belgicum' op de maan (daar bevindt zich de maankrater Langrenus) vergezeld van een verhaal over de zeventiende eeuwse astronoom Michiel Florentinus Van Langren, die bekend zou worden in de Noordelijke en Zuidelijke Nederlanden. De Belgische stelling van Dandelin (als u in België een coupe ijs bestelt, vraag dan eens naar het Dandelin-ijsje (in Brussel de Coupe Dandelin)), dat wil zeggen een orthogonale kegel met de top naar beneden, bolletje ijs erin rakende rondom aan de kegelwand met daarop aangebracht schuin een plat koekje met daarop weer een bolletje ijs rustende, rakende rondom aan de kegelwand, dit alles overgoten met chocoladesaus en andere ingrediënten). Een verhaal over de 'Belgische' markies, de wiskundige Gasparo Michel-Marie Pagani de la Torre (negentiende eeuw).

Dan volgen onder meer vier zaken die betrekking hebben op eigenaardigheden die men in België aantreft vanwege hun wiskundige 'afwijkingen'. Als zodanig beschrijft Huylebrouck: de verkeerde nummering van landingsbanen op het vliegveld Zavetem; het Hellend vlak van Ronquieres dat weliswaar volgens plan helt, doch dat wiskundig

incorrect is gebouwd wat betreft de bijbehorende mechanica (voor details over het Hellend vlak van Ronquieres, kijk eens op Wikipedia); de ongelukkige ligging van de Belgische poolbasis op Antarctica; de ongeluksbolletjes van Brussels Airport. In de zogeheten 'E-pi-loog' staat een zelfkritiek op *België + wiskunde*, namelijk over kennis van samengestelde interest en wiskundige beginselen van economie bij het Belgisch koningshuis, Belgische politici, het Belgische leger alsmede ook een ding als 'wiskundige fastfood'.

Het boek is heel aantrekkelijk en boeiend geschreven en uitgevoerd, zowel voor wiskundigen als zeker ook voor een algemeen publiek geïnteresseerd in (opvallende) zaken rondom de wiskundebeoefening. Van Nederlandse bodem is zo'n type boek als dit mij niet bekend. Zeker het aanschaffen waard voor ontspannende leesuur, daarbij tegelijkertijd uw kennis vergrotende over wiskundezaken en -personen in België.

Robert van der Waall



Sara Maad Sasane, Amol Sasane
A Friendly Approach to Complex Analysis

World Scientific Publishing Co, 2014
xv + 272 p., prijs £28.00
ISBN 9789814578998

Dit boek is, volgens de titel, een vriendelijke toegang tot complexe analyse. De onderwerpen die behandeld worden (ik volg de inhoudsopgave) zijn: 1. Complex numbers and their geometry. 2. Complex differentiability. 3. Cauchy Integral Theorem and consequences. 4. Taylor and Laurent series. 5. Harmonic functions. Het is duidelijk dat deze selectie enigszins beperkt is (ik kom daarop terug). De uitleg is zorgvuldig en gedetailleerd, inderdaad 'vriendelijk' te noemen, maar wel gericht op een wat theoretisch publiek.

Het boek beoogt een inleidend leerboek te zijn voor een basiscurcus in complexe analyse, maar is daar naar mijn mening slechts ten dele in geslaagd. De presentatie en de zorgvuldigheid zijn prima. Veel plaatjes, voorbeelden, opgaven en laagdrempelig uitgewerkte bewijzen. De behandelde onderwerpen lopen ook uit in aardige doorkijkjes (Identiteitstelling, Casorati-Weierstrass, Maximumprincipe) die de goede student zullen fascineren en inspireren, maar zijn absoluut van bachelorniveau en geen zware kost. En toch zou ik het niet voor een college complexe analyse voor toegepaste wiskunde-, natuurkunde- of elektrotechniekstudenten gebruiken. En dat is omdat er een tweetal belangrijke onderwerpen ontbreekt.

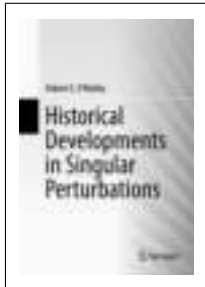
Ten eerste is de behandeling van de complexe logaritme en bijbehorende wortels en complexe machten onvoldoende. Alleen de hoofdwaaarde-log wordt behandeld. Een keer wordt terloops de mogelijkheid genoemd van een andere tak, maar nergens een andere vertakkingssnede. Aan de gebroken complexe macht wordt precies één zin gewijd, en dat de gewone wortel daaronder valt, moet je zelf concluderen. De subtiliteiten behorende bij de log van een analytische functie met meerdere nulpunten of polen blijven ongenoemd. Als de studenten Abramowitz & Stegun opslaan bij figuur 4.7 met de vertakkingssneden van de inverse hyperbolische functies, dan zullen ze niet weten wat daarmee aan te moeten. Ook het wonderlijke verschil in het tweede kwadrant tussen de Besselfuncties $H_n^{(1)}(iz)$ en $K_n(z)$ zal een mysterie blijven. Dit zijn geen onbelangrijke details die je later wel kunt bijbeunen. Studenten hebben er al moeite mee als het onderdeel

is van de stof, laat staan als ze het later zelf moeten uitzoeken.

Ten tweede ontbreken Fourier- en Laplace-integralen en hun inversen. Dit zijn in de toegepaste analyse, natuurkunde en elektrotechniek zulke belangrijke begrippen, dat ze als toepassing van complexe analyse niet mogen ontbreken.

Conclusie: een leuk, goed gepresenteerd en duidelijk boek, maar enigszins beperkt. Bekijk goed of alle onderwerpen erin staan die je per se wilt behandelen.

Sjoerd Rienstra



Robert E. O'Malley
Historical Developments in Singular Perturbations

Springer, 2014
256 p., prijs €52,99
ISBN 9783319119236

Er zijn boeken over geschiedenis van de wiskunde, wiskundeboeken met historische noten en dan dit boek als klasse apart: het geeft een uitvoerige schets van de ontwikkeling van de theorie van singuliere storingen, doorspekt met historische beschouwingen en anekdotes. Zoiets kan misschien alleen tot stand komen bij een auteur die zijn gehele werklevens met dit onderwerp is bezig geweest en waarbij de menselijke communicatie en de achtergronden van de betrokkenen niet uit het oog werden verloren. Bob O'Malley schreef een groot aantal artikelen op dit gebied en tevens een aantal waardevolle boeken; hij heeft veel internationale contacten en was president van SIAM.

Algebra verhoudt zich zo'n beetje tot analyse als theologie tot filosofie. De algebra kent een diepgaande, fraai gestructureerde theorie (en invloedrijke profeten), de analyse kent veel regels maar meer uitzonderingen in een overdaad van uiteenlopende theorieën. Als er een onderwerp is waar dit laatste tot uiting komt, dan is het de theorie van singuliere storingen. Voor algebraïci (als ze er ooit van hebben gehoord) lijkt het een groot pakket trucjes, voor de beoefenaars grenst het aan ballet en acrobatiek, maar dan met behulp van veel verschillende concrete en abstracte wiskundige hulpmiddelen. Een relatief eenvoudig voorbeeld voor degenen die niet bekend zijn met singuliere storingen is het volgende. Beschouw de gewone differentiaalvergelijking met kleine parameter ε en randvoorwaarden:

$$\varepsilon \frac{d^2 \phi}{dx^2} - \phi = 1 + x^2, \quad x \in (0, 1), \quad \phi(0) = 2, \quad \phi(1) = 0.$$

Bruutweg $\varepsilon = 0$ zetten levert als mogelijke benadering van de oplossing $\tilde{\phi}(x) = -(1 + x^2)$. Hoe kan dit een benadering van de oplossing zijn, $\tilde{\phi}(x) = -(1 + x^2)$ voldoet niet eens aan de randvoorwaarden. Het

antwoord is dat er inderdaad een gebied is waar $\tilde{\phi}(x)$ een benadering van de oplossing is terwijl er in grenslagen bij $x = 0$ en $x = 1$ aansluiting bij de randvoorwaarden wordt verkregen door middel van sterk variërende deeloplossingen.

Het verschijnsel singuliere storingen was voor 1900 hier en daar opgemerkt, maar het nam pas een grote vlucht door het werk van Ludwig Prandtl, beginnend met diens voordracht voor het Internationale Wiskunde Congres van 1904 in Heidelberg. Felix Klein bezorgde Prandtl een leerstoel in Göttingen en prees hem met: "zijn sterke intuïtie, grote originaliteit, de expertise van een ingenieur en de beheersing van het wiskundige apparaat." Prandtl's doorbraak betrof de stromingsleer, beschreven door niet-lineaire partiële differentiaalvergelijkingen in de gevallen zonder wrijving en met kleine wrijving. Om de voortbeweging van een vliegtuig te begrijpen was wrijving onmisbaar, de bijbehorende wiskunde echter onoverkomelijk moeilijk. Prandtl introduceerde het begrip grenslaag, een dunne laag rond de vliegtuigvleugels, waar de wrijving een geheel ander aanzien aan de wiskundige oplossingen geeft dan verder weg. Het idee om in verschillende gebieden in de ruimte verschillende types oplossingen te construeren en deze via speciale voorwaarden met elkaar te verbinden (gladde continuïteit door matching) bleek buitengewoon vruchtbaar. Dit inzicht dat de aard van oplossingen van differentiaalvergelijkingen in verschillende gebieden van ruimte en tijd kwalitatief zeer verschillend kan zijn heeft het onderzoek van gewone en partiële differentiaalvergelijkingen wezenlijk vooruit gebracht.

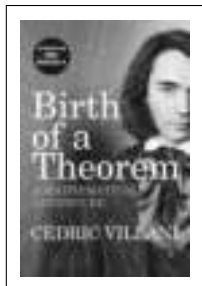
Veel onderzoekers op dit gebied waren Duits-Joodse wiskundigen die in nazi-Duitsland moesten uitwijken naar Engeland en de Verenigde Staten. In die landen kwam het vakgebied tot grote bloei mede onder invloed van G.I. Taylor, S. Goldstein en N. Levinson. In Nederland ontstond na de Tweede Wereldoorlog een invloedrijke school gesticht door Wiktor Eckhaus en Eduard de Jager; deze school krijgt in het boek ruim aandacht, onder anderen op de bladzijden 120–121.

De wiskundige stijl van het boek is didactisch, gericht op beginnende masterstudenten en, ondanks de vele technische details, meer beschrijvend en inleidend dan wiskundig rigoreus. Voor dat laatste verwijst de auteur naar de waardevolle lijst van 538 referenties. Voor de duidelijkheid moet worden gemeld dat naast de historische beschouwingen het boek zeer geschikt is voor een inleidend college singuliere storingen. Het begint met asymptotische, divergente reeksen en behandelt dan matching voor lineaire en niet-lineaire vergelijkingen. Dit doet al een stevig beroep op intuïtie, waarbij deels onopgeloste problemen en verschillende standpunten worden geformuleerd. Het is levende wiskunde. Latere hoofdstukken gaan over keerpunten (*turning points*), canards en meerschalenmethoden voor zowel oscillatorische als grenslaagproblemen.

Het boek is een geweldig geschenk voor de wereld van wiskundige analytici.

Ferdinand Verhulst

Recent verschenen publicaties. Als u een van deze boeken wilt bespreken of als u suggesties heeft voor andere boeken voor deze rubriek, laat dit dan per e-mail weten aan reviews@nieuwarchief.nl.



Cédric Villani
Birth of a Theorem
 Bodley Head
 ISBN 9781847922526
www.randomhouse.co.uk/editions/9781847922526



Richard P. Stanley
Catalan Numbers
 Cambridge University Press
 ISBN 9781107427747
www.cambridge.org/9781107427747



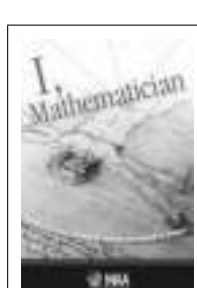
Michael Shearer, Rachel Levy
**Partial Differential Equations
 An Introduction to Theory and Applications**
 Princeton University Press
 ISBN 9780691161297
press.princeton.edu/titles/10528.html



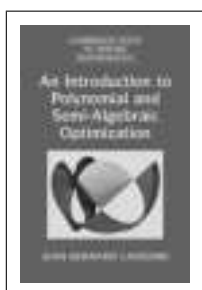
Della Dumbagh, Joachim Schwermer
Emil Artin and Beyond – Class Field Theory and L-Functions
 European Mathematical Society
 ISBN 9783037191460
<http://www.ems-ph.org/books/book.php?proj.nr=188>



Habib Ammari, Elie Bretin et al.
Mathematical Methods in Elasticity Imaging
 Princeton University Press
 ISBN 9780691165318
press.princeton.edu/titles/10530.html



Peter Casazza, Steven G. Krantz, Randi D. Ruden (eds.)
I, Mathematician
 Mathematical Association of America
 ISBN 9780883855850
<http://www.maa.org/publications/books/i-mathematician>



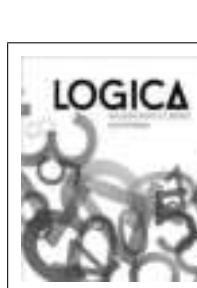
Jean Bernard Lasserre
An Introduction to Polynomial and Semi-algebraic Optimization
 Cambridge University Press
 ISBN 9781107630697
www.cambridge.org/9781107630697



Diane Maclagan, Bernd Sturmfels
Introduction to Tropical Geometry
 American Mathematical Society
 ISBN 9780821851982
<http://www.ams.org/bookstore?fn=20&ikey=GSM-161>



Simeon Ball
Finite Geometry and Combinatorial Applications
 Cambridge University Press
 ISBN 9781107518438
www.cambridge.org/9781107518438



Jean-Paul Delahaye
**Logica
 Een aansporing tot denken**
 Veen Media
 ISBN 9789085714606
<http://shop.newscientist.nl/shop/1407122542>

Problemen

Problem Section

This Problem Section is open to everyone; everybody is encouraged to send in solutions and propose problems. Group contributions are welcome.

For each problem, the most elegant correct solution will be rewarded with a book token worth €20. At times there will be a Star Problem, to which the proposer does not know any solution. For the first correct solution sent in within one year there is a prize of €100.

When proposing a problem, please either include a complete solution or indicate that it is intended as a Star Problem.

Please send your submission by e-mail (LaTeX is preferred), including your name and address to problems@nieuwarchief.nl.

The deadline for solutions to the problems in this edition is 1 September 2015.

Problem A (proposed by Gabriele dalla Torre)

Show that there are infinitely many primes that divide at least one integer of the form

$$2^{n^3+1} - 3^{n^2+1} + 5^{n+1}.$$

Problem B (proposed by Jinbi Jin)

Let n be a positive integer. Two players, Ann and Bill, play the following game. First, Ann distributes a number of balls over boxes numbered from 1 up to n . Then Bill chooses one of the boxes, and adds a ball to it. Finally, Ann attempts to empty all boxes, using only the following moves.

- Taking one ball from three consecutive boxes.
- Taking three balls from one box.

Ann wins if she succeeds in doing so, otherwise Bill wins.

1. Determine (as a function in n) the maximum number of losing moves Bill can have. What is the minimum number of balls Ann needs to attain this number?
2. Do the same as in point 1, if Ann in addition is allowed *only once* to remove two balls from one box.

Problem C (proposed by Hendrik Lenstra)

Let p be a prime number and let k be a positive integer. Prove that for every integer n there exist integers w, x, y, z such that

$$n \equiv w^p + x^p + y^p + z^p \pmod{p^k}.$$

Edition 2014-4 We received solutions from Raymond van Bommel and Julian Lyczak, Alex Heinis, Alexander van Hoorn, Jos van Kan, Thijmen Krebs, Gerard Renardel, Hendrik Reuvers and Kees Vugs.

Problem 2014-4/A (proposed by Jan Turk)

Let $k > 3$ be an integer. Determine the variance of the greatest common divisor of k positive integers. Here we mean the limit, as $n \rightarrow \infty$, of the variance of the greatest common divisor of k integers in $\{1, 2, \dots, n\}$ with respect to the uniform distribution on $\{1, \dots, n\}^k$.

Solution We received solutions from Raymond van Bommel and Julian Lyczak, Alex Heinis, Alexander van Hoorn, Thijmen Krebs and Hendrik Reuvers. The book token goes to Alex Heinis. This solution is based on that of Thijmen Krebs.

We show that the desired variance is

$$\frac{\zeta(k-2)\zeta(k) - \zeta(k-1)^2}{\zeta(k)^2},$$

where ζ denotes the Riemann zeta function.

Redactie:

Gabriele Dalla Torre

Christophe Debry

Jinbi Jin

Marco Streng

Wouter Zomervrucht

Problemenrubriek NAW

Mathematisch Instituut

Universiteit Leiden

Postbus 9512

2300 RA Leiden

problems@nieuwarchief.nl

www.nieuwarchief.nl/problems

Let r be a positive integer, and let $E_{k,r}$ denote the function sending a positive integer n to the expectation of the r -th power of the greatest common divisor of k integers in $\{1, \dots, n\}$. In other words, for all positive integers r and n , we have

$$n^k E_{k,r}(n) = \sum_{a \in \{1, \dots, n\}^k} \gcd(a)^r.$$

Let J_r denote the Jordan totient function, i.e. the function sending i to the number of elements $j \in \{1, \dots, i^r\}$ such that $\gcd(j, i^r)$ is r -th power free. We show that

$$n^k E_{k,r}(n) = \sum_{i=1}^n J_r(i) \lfloor \frac{n}{i} \rfloor^k.$$

We interpret the i -th term on the right hand side as counting the k -tuples divisible by i , each with a weight $J_r(i)$. Therefore on the right hand side, each k -tuple a is counted with a weight

$$\sum_{d | \gcd(a)} J_r(d).$$

So to prove our claim, it suffices to show that for all positive integers n , we have $\sum_{d|n} J_r(d) = n^r$. For this, note that for all positive integers m, n we have that $J_r(n)$ is also the number of elements $i \in \{1, \dots, m^r n^r\}$ such that $\gcd(i, m^r n^r)$ is m^r times an r -th power free integer. In particular, for all divisors d of n , we see that $J_r(d)$ is the number of elements $i \in \{1, \dots, n^r\}$ such that $\gcd(i, n^r)$ is $(\frac{n}{d})^r$ times an r -th power free integer. Hence we have

$$n^r = \sum_{d|n} J_r(d) \quad (1)$$

for all positive integers n , as desired.

Let $\iota_r(s)$ denote the Dirichlet series of J_r , i.e. $\iota_r(s) = \sum_{i=1}^{\infty} \frac{J_r(i)}{i^s}$. We show that if $k > r + 1$, then $E_{k,r}(n)$ converges to $\iota_r(k)$ as $n \rightarrow \infty$. Let n be any positive integer. Then we have

$$\begin{aligned} \left| \sum_{1 \leq y \leq n} \frac{J_r(y)}{y^k} - E_{r,k}(n) \right| &= n^{-k} \sum_{1 \leq y \leq n} J_r(y) \left(\left(\frac{n}{y} \right)^k - \lfloor \frac{n}{y} \rfloor^k \right) \\ &\leq n^{-k} \sum_{1 \leq y \leq n} y^r \left(\left(\frac{n}{y} \right)^k - \left(\frac{n}{y} - 1 \right)^k \right). \end{aligned}$$

As the function $\mathbb{R}_{>0} \rightarrow \mathbb{R}_{>0}$, $x \mapsto x^k$ is convex, we have $(x-1)^k > x^k - kx^{k-1}$ for all real numbers $x > 0$. Therefore we have

$$\begin{aligned} \left| \sum_{1 \leq y \leq n} \frac{J_r(y)}{y^k} - E_{r,k}(n) \right| &\leq n^{-k} \sum_{1 \leq y \leq n} \left(y^r k \left(\frac{n}{y} \right)^{k-1} \right) \\ &= kn^{-1} \sum_{1 \leq y \leq n} y^{r-k+1} \\ &\leq kn^{-1} \left(1 + \int_1^n y^{r-k+1} dy \right). \end{aligned}$$

In the last step, we use that $k > r + 1$, so $r - k + 1 < 0$, and that hence the integrand is decreasing. Moreover, as $r - k + 1 < 0$, we have

$$\int_1^n y^{r-k+1} dy = o(n),$$

so therefore $E_{r,k}(n)$ converges to $\iota_r(k)$ as $n \rightarrow \infty$.

Next, we compute $\iota_r(k)$ for $k > r + 1$. Note that by (1), we have

$$\zeta(k-r) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^r}{n^k} = \left(\sum_{n=1}^{\infty} \frac{J_r(n)}{n^k} \right) \left(\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^k} \right) = \iota_r(k) \zeta(k),$$

so $\iota_r(k) = \frac{\zeta(k-r)}{\zeta(k)}$.

In particular, the desired variance is, for $k > 3$,

$$\iota_2(k) - \iota_1(k)^2 = \frac{\zeta(k-2)\zeta(k) - \zeta(k-1)^2}{\zeta(k)^2}.$$

Problem 2014-4/B (folklore)

The evil Eve has locked Alice and Bob in a room without windows. Outside the room, there is a corridor with 64 doors. Eve puts a key behind one of the doors and a crocodile behind each of the others. Then she hangs up a light bulb above each of the doors, and for each light bulb, switches it on or off. Then Eve brings Alice into the corridor, tells her which door hides the key and tells her to choose one of the light bulbs and change the state of that chosen light bulb. After Alice leaves, Eve brings Bob to the corridor, and tells him to open a door of his own choice. Alice and Bob are allowed to discuss a strategy before Alice is shown where the key is, but not after.

- Give a strategy that guarantees Bob to find the key.
- For which positive integers n does such a strategy exist if there are n doors?

Solution We received solutions from Alex Heinis, Julian Lyczak and Raymond van Bommel, Thijmen Krebs, Gerard Renardel, Jos van Kan and Kees Vugs. The following solution is based on that of Julian Lyczak and Raymond van Bommel and they win the book token.

We show that there exists a strategy for Alice and Bob if and only if n is a power of 2. This solves both parts a and b.

First suppose that there exists a strategy for Alice and Bob for an n that is not a power of 2. Bob's part of the strategy is a map from the set of 2^n possible configurations of light bulbs to the set of n doors. By the pigeon hole principle, there is a door k that is reached by at most $\lfloor 2^n/n \rfloor$ light bulb configurations (here $\lfloor x \rfloor$ is x rounded down to an integer). As Alice has to choose between n light bulbs, she can reach these configurations from at most $n \lfloor 2^n/n \rfloor$ starting configurations. As n is not a divisor of 2^n , we have $n \lfloor 2^n/n \rfloor < 2^n$, so there is a starting configuration for which the strategy does not work.

Now suppose $n = 2^d$. We give the following strategy. Alice and Bob first agree on a numbering of the doors, each with a label in $\mathbb{F}_2^d$, where $\mathbb{F}_2 = \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$ (equivalently, each door gets a number from 0 to $n-1$ of which we take the binary representation). We take sums in $\mathbb{F}_2^d$ componentwise modulo 2, that is, the sum is the bit-wise xor.

When Alice enters the corridor, she computes the sum $s \in \mathbb{F}_2^d$ of the doors whose lights are on. Let $k \in \mathbb{F}_2^d$ be the door with the key. Then Alice changes the state of door $s+k$. After that change, the sum of the doors whose lights are on is $s + (s+k) = k$. When Bob arrives, he computes the sum of the doors whose lights are on and thus finds k , hence opens door k .

Problem 2014-4/C (folklore)

Let X_3 be the collection of three-element subsets of $\{1, 2, \dots, 8\}$, and let X_4 be the collection of four-element subsets of $\{1, 2, \dots, 11\}$. Does there exist an injective map $\phi: X_3 \rightarrow X_4$ with the following properties?

- For all subsets $V \subseteq X_3$, we have $\#(\bigcap_{v \in V} \phi(v)) \geq \#(\bigcap_{v \in V} v)$.
- For all $v, v' \in X_3$, if $v \cap v' = \emptyset$, then $\phi(v) \cap \phi(v') = \emptyset$.

Solution We received solutions from Raymond van Bommel and Julian Lyczak, Alex Heinis and Thijmen Krebs. The book token goes to Thijmen Krebs. The following solution is based on his. The answer to the question is "no". Suppose for a contradiction that there does exist such a map ϕ .

We first show that we may assume that $v \subset \phi(v)$ for all $v \in X_3$. Consider for $i \in \{1, 2, \dots, 8\}$ the set $V_i = \{v \in X_3 : i \in v\}$. By property 1, $\bigcap_{v \in V_i} \phi(v)$ is non-empty. Choose for every $i \in \{1, 2, \dots, 8\}$ an element $s(i)$ of $\bigcap_{v \in V_i} \phi(v)$. We claim that s is an injective map $\{1, 2, \dots, 8\} \rightarrow \{1, 2, \dots, 11\}$. Indeed, for any $i \neq i' \in \{1, 2, \dots, 8\}$, we can find disjoint $v, v' \in X_3$ with $i \in v$ and $i' \in v'$. By property 2, $\phi(v)$ and $\phi(v')$ are disjoint, so in particular distinct, from which we deduce that $s(i) \neq s(i')$, which proves our claim. Therefore we can extend s to a permutation σ of $\{1, 2, \dots, 11\}$. So, replacing ϕ by $v \mapsto \sigma^{-1}[\phi(v)]$ if necessary, we may indeed assume that for all $v \subset X_3$, we have $v \subset \phi(v)$.

Let us do so. Then we see that for all $v \in X_3$, we have $\phi(v) = v \cup \{i(v)\}$ for some $i(v) \in \{1, 2, \dots, 11\}$. We claim that for all $v \in X_3$, we in fact have $i(v) \in \{9, 10, 11\}$. Indeed, otherwise we can find disjoint $v, v' \in X_3$ such that $i(v) \in v'$, but then we have a contradiction with (2). Therefore we have a map $i: X_3 \rightarrow \{9, 10, 11\}$ satisfying the following properties.

1'. For all $v \in X_3$, we have $\phi(v) = v \cup \{i(v)\}$.

2'. For all disjoint $v, v' \in X_3$, we have $i(v) \neq i(v')$.

So now it suffices to show that no maps $i: X_3 \rightarrow \{9, 10, 11\}$ satisfying property 2' exist.

We do this by showing there exist four elements of X_3 which map to pairwise distinct elements. For any $w \subseteq \{1, 2, \dots, 8\}$, define $V_w = \{v \in X_3 : v \subseteq w\}$.

Lemma 1. Let $w, w' \subseteq \{1, 2, \dots, 8\}$ be two subsets defining a partition of $\{1, 2, \dots, 8\}$. Then i is constant on either V_w or $V_{w'}$.

Proof. For all $v \in V_w$ and $v' \in V_{w'}$, we see that v and v' are disjoint, so by (2'), we have $i(v) \neq i(v')$. Therefore $i[V_w]$ and $i[V_{w'}]$ are disjoint subsets of $\{9, 10, 11\}$, so i is constant on either V_w or $V_{w'}$. $\square$

Choose any collection W of four subsets $w \subseteq \{1, 2, \dots, 8\}$ such that $\#w = 4$ and such that for all distinct $w, w' \in W$, we have $\#(w \cap w') = 2$, so that $\#(w \cup w') = 6$. Such W exist, take for example

$$W = \{\{1, 2, 3, 4\}, \{1, 2, 5, 6\}, \{1, 3, 5, 7\}, \{1, 4, 5, 8\}\}.$$

Note that W retains this property if we replace any element w by its complement. Therefore by Lemma 1, we may assume, by replacing some of the elements $w \in W$ by their complement if necessary, that V_w is constant for all $w \in W$. So let us do so, and write $i(w)$ for the unique element of $i[V_w]$, for all $w \in W$.

Note that by construction, for all distinct $w, w' \in W$, we can find disjoint $v, v' \in X_3$ such that $v \in V_w$ and $v' \in V_{w'}$. Therefore $i(w) \neq i(w')$ for all distinct $w, w' \in W$, in other words, i defines an injection from a four-element set W to a three-element set $\{9, 10, 11\}$, which is impossible. Therefore no ϕ satisfying properties 1 and 2 can exist.

Rectifications

- i. In the solution of Problem 2014/3-C that appeared in March this year, the symbol l occurs twice without a subscript. The first one should be l_1 , and the second one should be l_2 .
- ii. We omitted by mistake some references, submitted to us by Rob van der Waall.
 - For the problems of the September issue of 2014, [1] and [2] are two books related to the subject of the problems.
 - Problem 2014/2-C appears as exercise 3.28 in [3]. Its solution also follows from Theorem VI.II of [4].

We apologise for the mistakes made.

References

1. T. Sundara Row, *Geometric Exercises in Paper Folding*, Dover Publications, New York, 1966 (original year of publication: 1893).
2. W. W. Beman and D. E. Smith, *New Plane and Solid Geometry*, Ginn and Co., Boston, 1899.
3. John D. Dixon, *Problems in Group Theory*, Dover Publ., 1967.
4. W. Burnside, *Theory of Groups of Finite Order*, second edition, Dover Publ., 1955.