

Inhoud | Contents

Artikelen | Features

- Oratie | Inaugural Lecture**
- 18 The nature of prediction (and the prediction of nature) *Jason Frank*
- In Memoriam | Obituary**
- 25 Frans Clauwens: Stille wateren hebben diepe gronden *Gert Heckman*
- Onderzoek | Research**
- 26 Kansrekening in forensisch DNA-onderzoek *Klaas-Jan Slooten*
- Onderwijs | Education**
- 37 Aansluitproblemen vo–wo *Henk van der Kooij e.a.*
- Geschiedenis | History**
- 45 Mathematics and its worldwide history *Kim Plofker*
- Interview | Interview**
- 54 David Orme Tall: Je zult eerst moeten ontdekken hoe leerlingen denken *Nellie Verhoeef*
- Maatschappij | Society**
- 59 SWI 2011: Kortste routes op een analoge chip *Bennie Mols*

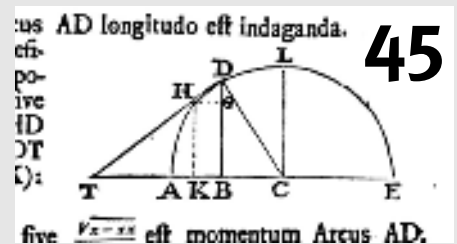
Rubrieken | Departments

- 2 Colofon
- 3 Redactioneel *Ferdinand Verhulst*
- 4 Servicepagina
- 5 Agenda *Martijn Zaal*
- 7 Nieuws *Martijn Zaal*
- 11 Voorwoord *Gert Vegter*
- 12 Van het KWG
- 34 In de verdediging *Geertje Hek*
- 43 Het keerpunt van Steven Engelsman *Ionica Smeets*
- 61 De derde wet *Ferdinand Verhulst*
- 64 Boekbesprekingen
- 70 Problemen

Uitgelicht



Toepassingen van kansrekening bij zoekacties in de DNA-databank in het artikel van Klaas Slooten op pagina 26.



De Brouwerlezing van Kim Plofker, waarin zij de wiskunde van Newton vergelijkt met die van Mādhava, op pagina 45.

Colofon

Het Nieuw Archief voor Wiskunde is een uitgave van het Koninklijk Wiskundig Genootschap en verschijnt vier maal per jaar. Het tijdschrift richt zich op een ieder die zich beroepsmatig met wiskunde bezighoudt, als academisch of industrieel onderzoeker, student, leraar, journalist of beleidsmaker. Het stelt zich ten doel te berichten over ontwikkelingen in de wiskunde in het algemeen en in de Nederlandse wiskunde in het bijzonder.

ISSN 0028-9825

Adres

Nieuw Archief voor Wiskunde
Mathematisch Instituut
Universiteit Leiden
Postbus 9512, 2300 RA Leiden
tel. 071-5277121
redactie@nieuwarchief.nl
www.nieuwarchief.nl

Hoofredactie

Ferdinand Verhulst (f.verhulst@uu.nl)

Eindredactie/Bladmanager

Fred Drissen (fred@nieuwarchief.nl)

Redactie

Gunther Cornelissen (g.cornelissen@uu.nl)
Nellie Verhoef (n.c.verhoef@gw.utwente.nl)
Steven Wepster (s.a.wepster@uu.nl)
Martijn Zaal (m.m.zaal@vu.nl)

Bureau redactie

Lætitia Diemer
Harm de Vries

Medewerkers

Gerard Alberts (UvA), Johan Bosman (IEM Essen), Hans Cuypers (TU/e), Gabriele Dalla Torre (UL), Geertje Hek (UvA), Jinbi Jin (UL), Teun Koetsier (VU), Ronald van Luijk (UL), Derk Pik (JSG Maimonides), Hans Sterk (TU/e), Lenny Taelman (UL), Wouter Zomervrucht (UL)

Illustraties

Ryu Tajiri, Amsterdam

Advertenties

advertenties@nieuwarchief.nl

Abonnementen/Subscriptions

Ten Brink abonnementenservice
Postbus 41, 7940 AA Meppel
admin@wiskgenoot.nl, tel. 088-2265256

Abonnementsperiode/Subscription period

Een abonnement gaat in op de dag dat uw aanmelding ontvangen wordt. De opzegtermijn is twee maanden vóór het verstrijken van de abonnementsperiode.

The subscription starts on the day that your application is received. The term of notice is two months before the end of the current subscription period.

Exchange subscriptions

Koninklijk Wiskundig Genootschap Library
Centrum voor Wiskunde en Informatica
Postbus 94079, NL-1090 GB Amsterdam
KWG-exchange@cw.nl, fax +31 20 5924026

Vormgeving

Kitty Molenaar (ontwerp)

Susanne Laws (omslag, begeleiding binnenwerk)

Programmatuur (CONTEX)

Hans Hagen, PRAGMA-ADE, Hasselt (Overijssel)

Druk

Drukkerij Ten Brink, Meppel

Koninklijk Wiskundig Genootschap

Het Koninklijk Wiskundig Genootschap (KWG) is een landelijke vereniging van beoefenaren van de wiskunde. In 1778 opgericht onder de zinspreuk: 'Een onvermoeide arbeid komt alles te boven' is het 's werelds oudste nationale wiskundegenootschap. Leden van het KWG ontvangen het Nieuw Archief voor Wiskunde als onderdeel van hun lidmaatschap.

De contributie voor leden van het KWG bedraagt €80 per jaar. Gepensioneerden en werklozen betalen €40. Studenten ingeschreven aan een Nederlandse universiteit of hbo-opleiding, aio's en oio's kunnen lid worden voor €30 per jaar. Studenten en pas afgestudeerden kunnen een jaar lang gratis lid worden van het KWG. Voor leden van de wiskundige vakverenigingen VVS, NVvW en NVORWO geldt het gereduceerd tarief van €60.

Members of *SIAM*, the *Société Mathématique de France*, the *Gesellschaft für Angewandte Mathematik und Mechanik*, the *Deutsche Mathematiker-Vereinigung*, and of the *American, Australian, Belgian, Indian, London, Spanish, and South-African Mathematical Societies* living outside of the Netherlands pay €60 instead of the full membership fee of €80 a year. Conversely, these foreign societies, as well as the VVS and the NVORWO, have reduced membership fees for KWG-members. A postage charge of €10 is added for members living abroad but in Europe, and a charge of €12,50 for members living outside of Europe. Instituten in Nederland en buitenland kunnen zich abonneren op het Nieuw Archief voor Wiskunde voor €100 (Nederland), €110 (Europa) of €112,50 (buiten Europa).

Website: www.wiskgenoot.nl

Ledenadministratie

Ten Brink abonnementenservice
Postbus 41, 7940 AA Meppel
admin@wiskgenoot.nl, tel. 088-2265256

Bestuur (wiskgenoot@wiskgenoot.nl)

Gert Vegter (RUG, voorzitter), André Ran (VU, ondervoorzitter), Joke Blom (CWI, secretaris), Onno van Gaans (UL, penningmeester), Wieb Bosma (RU), Henk Broer (RUG), Klaas Pieter Hart (TUD), Jenneke Krüger (SLO), Herman te Riele (CWI), Arjen Sevenster

Informatie voor auteurs

Kopij

Het Nieuw Archief voor Wiskunde is een geredigeerd tijdschrift. Kopij dient elektronisch te worden aangeboden aan de hoofdredactie. Uitgebreide informatie en auteursinstructies kunt u vinden op www.nieuwarchief.nl.

Reprints

Auteurs ontvangen een elektronische reprint in pdf-formaat.

Volgende nummers

nummer	verschijningsdatum	deadline kopij
2	04-06-2012	verstrekken
3	03-09-2012	23-04-2012
4	03-12-2012	23-07-2012
1	04-03-2013	22-10-2012

Instituutsleden

De publicaties van het Koninklijk Wiskundig Genootschap worden mede mogelijk gemaakt door de bijdragen van de volgende instituten.



Centrum Wiskunde
& Informatica



Rijksuniversiteit Groningen



Universiteit van Amsterdam



Universiteit Leiden



Vrije Universiteit



Universiteit Utrecht



Technische Universiteit
Eindhoven



Eurandom



Technische Universiteit Delft



Universiteit Twente



Radboud Universiteit
Nijmegen

Flsme

Freudenthal Instituut

Op het omslag

Klimaatveranderingen laten zich maar moeilijk voorspellen. Jason Frank werpt een wiskundige blik op de voorspelbaarheid van natuurlijke systemen. Lees zijn oratie op pagina 18.

(Foto: Tropische storm Claudette – Jeff Schmaltz, MODIS Rapid Response Team, NASA/GSFC.)

Creatief wiskunde organiseren

Het nummer dat voor u ligt begint met een nieuwe rubriek. Er is na het redactioneel een servicepagina van het KWG en het PWN ingevoegd met de bedoeling om de activiteiten van deze organisaties, zoals symposia, vergaderingen, rapporten en vakpublicaties, duidelijker onder uw aandacht te brengen. Hopelijk worden de lezers op deze manier nog meer betrokken bij het wiskundig gebeuren in Nederland. Het nummer is weer gevarieerd: de voorzitter van het KWG geeft zijn jaarlijkse bijdrage met enkele belangrijke adviezen. In de tekst van de oratie van Jason Frank komt het samenspel van analyse en computational mathematics tot zijn recht. Statisticus Klaas-Jan Slooten beschrijft forensische wiskunde. De aansluiting van vwo-wiskunde en hoger onderwijs is allang een punt van zorg; Henk van der Kooij en anderen rapporteren over de discussies en aanbevelingen die in dit verband tot stand zijn gekomen. Waarschijnlijk zal dat voor velen nieuws zijn. De tekst van de Brouwerlezing, vorig jaar gehouden door de medaillist Kim Plofker, gaat ver terug in de geschiedenis door de rol te belichten van de oude Indiase wiskunde.

Actieve wiskundigen zien organisatie en management vaak als een noodzakelijk kwaad. Natuurlijk hebben we allereerst vernieuwende onderzoekers nodig, maar er zijn boodschappers en organisatoren nodig om de vernieuwing door te laten breken. Daar komt in deze tijd nog bij dat de informatiestroom overweldigend is: meer dan 60.000 wiskundeartikelen per jaar, meer dan een miljoen scienceartikelen. Hoe wordt dat gestuurd en gecommuniceerd? Dat het neerzien op management niet juist is wil ik aan twee voorbeelden van lang geleden illustreren. Voorop gesteld wordt dat ik hierbij niet denk aan een soort ambtenaren of aan beroepsbestuurders, maar aan onderzoekers van boven gemiddeld niveau met communicatieve vaardigheden. Rond 1900 waren Felix Klein en Gösta Mittag Leffler zulke mensen.

Als jonge wiskundige formuleerde Klein het Erlangen-programma om meetkunde te ontwikkelen met de inzichten van de

groepentheorie. Ook zette hij het werk van Riemann voort door wiskundigen als Schwarz te stimuleren in het ontwikkelen van de complexe analyse. Toen hij in 1886 naar Göttingen verhuisde, bouwde hij zijn werkplek binnen enkele jaren uit tot de belangrijkste wiskundige onderzoeksinstelling van Duitsland, hij trok onder anderen David Hilbert aan. Klein ging ook op speelse wijze met de wiskunde om, getuige zijn drie delen *Elementarmathematik vom höheren Standpunkte aus*. En dat zijn nog maar zijn activiteiten in vogelvlucht.

Ook Mittag Leffler speelde een cruciale rol in de wiskunde rond 1900. Hij studeerde bij Weierstrass in Berlijn en bij Hermite in Parijs, waarbij hij zich na een tijd realiseerde dat de Duitsers niet op de hoogte waren van de wiskunde in Frankrijk en de Fransen niet op de hoogte van de Duitse wiskunde. Dit bracht hem er toe om het tijdschrift *Acta Mathematica* op te richten, een tijdschrift waarin alle Europeanen in hun eigen taal konden publiceren en waarin ook belangrijke artikelen in vertaling werden geplaatst, bijvoorbeeld vanuit het Duits in het Frans. Met zijn diplomatieke gaven beïnvloedde hij regeringen en wetenschappers, zoals in het Nobelcomité en in verschillende redacties. Ook over de activiteiten van Mittag Leffler zou nog veel te schrijven zijn.

Er zijn in Nederland nogal wat collega's die hun blik liever niet buiten hun bureaublad richten, maar gelukkig ook wiskundigen die creatieve managers zijn. Laten we zuinig zijn op degenen die op deze manier de Nederlandse en internationale wiskunde stimuleren, hopelijk is er onder de jongeren op dit gebied nieuw talent te vinden. Dat is wel nodig.

Ferdinand Verhulst, hoofdredacteur
Mathematisch Instituut, Universiteit van Utrecht

Koninklijk Wiskundig Genootschap

❑ **Secretariaat**

Joke Blom, CWI
Postbus 94079, 1090 GB Amsterdam
wiskgenoot@wiskgenoot.nl
www.wiskgenoot.nl

❑ **Ledenadministratie**

Ten Brink abonnementenservice
Postbus 41, 7940 AA Meppel
admin@wiskgenoot.nl, tel: 088-2265256

❑ **48ste Nederlands Mathematisch Congres**

donderdag 12 april, TU/e

Dit jaarlijks congres is bij uitstek de ontmoetingsplek van wiskundig Nederland. Het veelzijdige programma is interessant en toegankelijk voor een breed wiskundig publiek, en richt zich nadrukkelijk ook op masterstudenten, promovendi en vo-docenten. Naast twee plenaire voordrachten zijn er parallelle sessies over onderwerpen in de toegepaste en de zuivere wiskunde.

De Algemene Ledenvergadering van het Koninklijk Wiskundig Genootschap vindt tijdens het congres plaats. www.win.tue.nl/nmc2012

Platform Wiskunde Nederland

❑ **Bureau PWN**

Science Park 123, L013, 1098 XG Amsterdam
bureau@platformwiskunde.nl
pr@platformwiskunde.nl (publiciteit)
Tel: 020-5924006/06-51892525
www.platformwiskunde.nl

❑ **Samenwerking NWO-EW en PWN**

NWO Exacte Wetenschappen en Platform Wiskunde Nederland zijn een langdurige samenwerking aangegaan. Dat is op dinsdag 20 december 2011 bekrachtigd met de onderte-

kening van een convenant tussen beide partijen. Vanuit een gedeelde visie op het maatschappelijk en economisch belang van wiskunde voor Nederland, zullen zij zich gezamenlijk inzetten voor de wiskundige wetenschap.

❑ **PWN Afstudeerprijs voor Wiskunde**

In 2011 heeft het PWN voor het eerst een prijs ter beschikking gesteld voor de beste doctoraalscriptie wiskunde. Deze PWN Afstudeerprijs voor Wiskunde werd op 23 november uitgereikt aan Sander Kupers (Universiteit Utrecht). Hij werkte in zijn scriptie een nieuwe methode uit om meer grip te krijgen op ruimtelijke vormen. Vanaf 2012 zal deze afstudeerprijs door ASML worden uitgereikt.

European Mathematical Society

❑ **6th European Congress of Mathematics**

6ECM, 2–7 juli 2012, Krakau, Polen

Vierjaarlijks congres. Naast plenaire voordrachten en voordrachten op uitnodiging zijn er mini-symposia. Wiskundigen die belangstelling hebben om een mini-symposium te organiseren worden uitgenodigd om voorstellen daartoe in te dienen bij het Scientific Committee van 6ECM. Daarnaast zijn er poster sessies via welke men kan deelnemen aan het wetenschappelijk programma. Er wordt een prijs uitgereikt voor de beste onderzoeksposter. www.6ecm.pl

❑ **Council Meeting van de EMS**

30 juni en 1 juli 2012 Krakau, Polen

Voorafgaand aan 6ECM wordt de Council Meeting van de European Mathematical Society gehouden. Het KWG en PWN zullen vertegenwoordigd worden door Herman te Riele en Wil Schilders.

Recente publicaties van het KWG

❑ **Indagationes Mathematicae** (www.elsevier.com/locate/indag)

Special issue devoted to: Floris Takens (1940–2010); S. van Strien and H. Broer (eds.), Volume 22, issues 3–4 (gratis toegankelijk op www.sciencedirect.com).

❑ **Epsilon Uitgaven** (www.epsilon-uitgaven.nl)

71. *Kansrekening* – een introductie, A.J. van den Brandhof, €17,00, 2012.

70. *Wiskunde in Werking van A naar B*, M. de Gee, €34,00, 2011.

69. *De Riemann-hypothese* – een miljoenenprobleem, R. van der Veen en J. van de Craats, €19,00, 2011.

66. *Intuitionistische Analyse* – een constructief denkraam, D. van Dalen, €21,00, 2011.

65. *Getallen* – van natuurlijk naar imaginair, F. Keune, €37,00, 2011, 2e druk.

❑ **Zebra-reeks** (Epsilon Uitgaven)

34. *De Ster van de dag gaat op en onder* – rekenen aan zonsopkomst en zonsondergang, A. Goddijn, €10,00, 2012.

33. *Ontwikkelen met Kettingbreuken*, M. Kindt en P.W.H. Lemmens, €10,00, 2011.

Agenda

| Upcoming Events

maart 2012

14 maart 2012

W&T Academie

Studiedag voor leraren basisonderwijs en pabos-tudenten over wetenschap en techniek in het basisonderwijs

plaats Buys Ballot Laboratorium, Utrecht

info www.fisme.uu.nl/wtacademie/archief/2012

15 maart 2012

Kangoeroewedstrijd

Reken- en wiskundewedstrijd voor leerlingen vanaf groep 5

plaats Deelnemende scholen

info w4kangoeroe.nl

18 maart 2012

Paradisolezing: Robbert Dijkgraaf

Populair-wetenschappelijke lezing getiteld 'De Oerknal'

plaats Paradiso, Amsterdam

info www.knaw.nl/Pages/DEF/32/439.bGFuZz1OTA.html

19 maart – 23 maart 2012

Noncommutative Algebraic Geometry and its Applications to Physics

Workshop over de interactie tussen niet-commutatieve algebra en theoretische natuurkunde

plaats Lorentz Center, Leiden

info www.lorentzcenter.nl/lc/web/2012/485/info.php3?wsid=485

23 maart 2012

Tweede Ronde Nederlandse Wiskunde Olympiade

In de tweede, regionale, ronde worden de deelnemers aan de finale geselecteerd

plaats Diverse locaties

info www.wiskundeolympiade.nl

29 maart 2012

Nationale Rekendag

Conferentie voor leerkrachten basisonderwijs

plaats KNVB-hotel, Zeist

info www.rekenweb.nl/rekendagen

30 maart 2012

Masterclass 'IT is puzzling'

Masterclass over redeneren en logica binnen de IT voor leerlingen uit de bovenbouw van het vwo

plaats Buys Ballot Laboratorium, Utrecht

info www.betasteunpunt-utrecht.nl/?pid=202

april 2012

2 april 2012

Johann Bernoulli lezing 2012

De Johann Bernoulli lezing van 2012 zal worden gegeven door Richard Gill en heeft als titel 'Bernoulli Trials'

plaats Academiegebouw, Rijksuniversiteit Groningen

info bernoulli.math.rug.nl

10 – 16 april 2012

European Girls' Mathematical Olympiad 2012

Eerste editie van deze Europese Wiskunde Olympiade met als doel de deelname van meisjes aan wiskunde en wiskunde-wedstrijden te bevorderen

plaats Murray Edwards College, Cambridge

info www.egmo2012.org.uk

12 april 2012

NMC 2012

Jaarlijks congres voor de wiskundige gemeenschap van Nederland

plaats TU/e, Eindhoven

info www.win.tue.nl/nmc2012

13 april 2012

Leve de Wiskunde! 2012

Congres waarop vooraanstaande wetenschappers over hun bevindingen in en rondom de wiskunde vertellen

plaats CWI, Amsterdam

info www.science.uva.nl/levedewiskunde

18 april 2012

Grote Rekendag

Landelijke georganiseerde dag voor alle basisscholen waarop alles in het teken staat van rekenen, dit jaar met als thema 'Grote Rekendag, al tien jaar beestachtig leuk'

plaats Deelnemende scholen

info www.rekenweb.nl/groterekendag

Suggesties voor deze agenda zijn welkom.

Redacteur: Martijn Zaal

agenda@nieuwarchief.nl

20 – 22 april 2012

☐ **Benelux Mathematics Olympiad**

Wiskundeolympiade voor scholieren uit België, Nederland en Luxemburg

plaats België

info www.wiskundeolympiade.nl

22 april 2012

☐ **Paradisolezing: Hester Bijl**

Populair-wetenschappelijke lezing getiteld 'Ge-vleugelde wiskunde'

plaats Paradiso, Amsterdam

info www.knaw.nl/Pages/DEF/32/441.bGFuZz1OTA.html

23 – 27 april 2012

☐ **Acoustic Waves for the Control of Microfluidics Flows**

Workshop over het gedrag van golven in een vloeistoffilm

plaats Lorentz Center, Leiden

info www.lorentzcenter.nl/lc/web/2012/487/info.php3?wsid=487

mei 2012

1 mei – 4 juni 2012

☐ **Search and Rendezvous**

Workshop over speltheorie en rendezvous, gefocust op het modelleren van grote groepen individuen

plaats Lorentz Center, Leiden

info www.lorentzcenter.nl/lc/web/2012/506/info.php3?wsid=506

7 – 11 mei 2012

☐ **History of Machines and Mechanisms**

Vierde editie van dit symposium over de geschiedenis van het veld 'Machine and Mechanism Science'

plaats Vrije Universiteit Amsterdam

info hmm2012.few.vu.nl/home

11 – 12 mei 2012

☐ **Wiskunst in Gent**

Tentoonstelling en workshops over de raakvlakken van kunst en wiskunde

plaats Abdijgebouw Sint-Lucas, Gent

info etopia.sintlucas.be/3.14/Wiskunst

12 mei 2012

☐ **HKRWO Symposium**

Achttiende editie van het jaarlijkse symposium van de Historische Kring Reken- en Wiskunde Onderwijs

plaats Hogeschool Domstad, Utrecht

info www.fi.uu.nl/hkrwo

14 – 16 mei 2012

☐ **Particles in Turbulence**

Workshop over het gedrag van deeltjes in turbulentie, zowel theorie, toepassing als numerieke simulatie komen aan bod

plaats Lorentz Center, Leiden

info www.lorentzcenter.nl/lc/web/2012/488/info.php3?wsid=488

31 mei – 1 juni 2012

☐ **DIAMANT symposium**

Halfjaarlijks symposium van het onderzoekscluster DIAMANT, met sprekers Christiane Frougny (LIAFA, Jussieu, Parijs) en Sam Payne (Yale University)

plaats Nog te bepalen

info websites.math.leidenuniv.nl/diamant/index.php?pid=calendar&nid=176

juni 2012

4 juni 2012

☐ **Bessensap 2012**

Jaarlijks evenement waarbij wetenschap en pers elkaar ontmoeten

plaats Museon, Den Haag

info www.nwo.nl/bessensap

4 – 6 juni 2012

☐ **Parameter Estimation for Dynamical Systems**

Workshop over het schatten van parameters in stochastische en deterministische dynamische systemen

plaats Eurandom, Eindhoven

info www.eurandom.tue.nl/events/workshops/2012/PEDSII/index.html

15 juni 2012

☐ **Bèta onder de Dom 2012**

Workshops over de nieuwe curricula voor Natuurkunde, Scheikunde en Biologie, en de nieuwe NLT-modules

plaats Nog te bepalen

info www.betasteunpunt-utrecht.nl/?pid=11

juli–augustus 2012

4 – 16 juli 2012

☐ **IMO2012**

53ste editie van de internationale wiskunde olympiade, dit jaar in Argentinië

plaats Mar del Plata, Argentinië

info www.imo-official.org/year_info.aspx?year=2012

23 – 27 juli 2012

☐ **Summer School Poisson Geometry**

Jaarlijkse Summer School, dit jaar over Poisson Meetkunde

plaats Universiteit Utrecht

info www.projects.science.uu.nl/poisson2012/School.php

30 juli – 3 augustus 2012

☐ **Third Workshop on Graphs and Matroids**

Workshop voor onderzoekers (inclusief postdocs en studenten) met ruimte voor discussie

plaats The Maastricht University School of Business and Economics

info homepages.cwi.nl/~bgerards/workshops/2012

30 juli – 3 augustus 2012

☐ **From Conservative Dynamics to Symplectic and Contact Topology**

Workshop over symplectische en contactmeetkunde

plaats Lorentz Center, Leiden

info www.lorentzcenter.nl/lc/web/2012/494/info.php3?wsid=494

30 juli – 3 augustus 2012

☐ **Conferentie Poisson Geometry**

Conferentie voor onderzoekers en studenten over Poisson Meetkunde

plaats Utrecht

info www.projects.science.uu.nl/poisson2012/Conference.php

20 – 24 augustus 2012

☐ **Resonance and Synchronization**

Workshop met als doel wetenschappers die werken aan problemen gerelateerd aan resonantie en synchronisatie samen te brengen

plaats Lorentz Center, Leiden

info www.lorentzcenter.nl/lc/web/2012/501/info.php3?wsid=501

Nieuws

| News

Deze rubriek is een kroniek van wiskundige activiteiten in Nederland. Toekomstige activiteiten worden aangekondigd en van voorbije activiteiten wordt verslag gedaan. Wilt u uw aankondiging of verslag in deze rubriek geplaatst zien? Stuur ons dan uw bijdrage van ± 350 woorden, zo mogelijk met illustratie. De redactie behoudt zich het recht voor berichten te weigeren of in te korten.

Redacteur: Martijn Zaal

nieuws@nieuwarchief.nl

Succesformule voor fictieve moord

In het kader van de campagne 'meer succes met wiskunde', is in samenwerking met het NFI een wiskundeles ontwikkeld waarin leerlingen een fictieve moord oplossen. Op 16 november waren leerlingen van schoolengemeenschap De Populier bij het NFI in Den Haag te gast om als eersten deze les te volgen.

Tijdens de les berekenen leerlingen met behulp van bloedspatten of het 'slachtoffer' zat of stond toen hij gewond raakte. Deze informatie is vaak van belang om te bepalen of er sprake is van noodweer of moord.

De campagne 'meer succes met wiskunde' is een initiatief van de Stichting Internationale Wiskunde Olympiade. Het doel van deze campagne is om het maatschappelijke belang van wiskunde te onderstrepen.

www.succesformule.nu



Wiskunde van 4 tot 20

Irene van Stiphout en Geeke Bruin-Muurling zijn onlangs gestart met een nieuw reken-/wiskundeblog genaamd 'Wiskunde van 4 tot 20'. Tijdens hun promotie, aan de Eindhoven School of Education, kwamen Stiphout en Bruin-Muurling een aantal inspirerende ideeën tegen die niet in de praktijk worden gebracht.

Het doel van hun onderzoek, waaraan ook op het blog aandacht wordt besteed, is om de dieper liggende oorzaken van de problemen in het reken- en wiskundeonderwijs bloot te leggen. Het blijkt dat het vaak mogelijk is om met kleine aanpassingen veel te bereiken.

Bijzonder is dat de beide auteurs naast hun promotieonderzoek ook kunnen steunen op ervaring in het geven van onderwijs. Met hun blog willen ze proberen ideeën uit de wetenschap toegankelijk te maken voor docenten.

wiskundevan4tot20.blogspot.com

SLO publiceert toekomstverkenning reken- en wiskundeonderwijs

Expertisecentrum leerplanontwikkeling SLO heeft op initiatief van de Ververs Foundation een verkenning naar het toekomstige reken- en wiskundeonderwijs uitgevoerd. De centrale vraag was welke reken- en wiskundestof aangeboden moeten worden aan kinderen in de leeftijd van 4 tot 15 jaar.

De verwerking van informatie in de vorm van grafieken of tabellen blijkt een belangrijke vaardigheid te zijn. Behalve het lezen van de informatie, moet een leerling ook kunnen inschatten of bepaalde getallen kloppen. Daarnaast blijft vlot kunnen rekenen onverminderd belangrijk. Belangrijker dan eerder zijn nu ook het geven van context aan

getallen, globaal rekenen en het oplossen van problemen in het algemeen. Tot slot worden bredere vaardigheden als modelleren, omgaan met variabelen en statistiek genoemd als onderwerpen die aandacht vereisen.

De auteurs maken zich zorgen over het feit dat er in het onderwijs weinig terug te zien is van de veranderende eisen. Zij dringen aan op een brede discussie onder beleidsmakers, docenten, wetenschappers, ouders en vertegenwoordigers uit het bedrijfsleven. www.slo.nl

Sander Kupers wint nieuwe PWN Afstudeerprijs

De eerste PWN Afstudeerprijs is gewonnen door Sander Kupers. In zijn scriptie werkte hij aan een nieuwe methode om meer grip te krijgen op ruimtelijke vormen. Hij deed dit door te kijken naar manieren om lusjes en lijnen in verschillende ruimtes te leggen. De prijs werd op 23 november uitgereikt door prof.dr. W.H.A. Schilders, directeur van het Platform Wiskunde Nederland (PWN). De jurering was in handen van de Koninklijke Hollandsche Maatschappij der Wetenschappen te Haarlem. www.khmnw.nl

Boekenveiling Wereldwiskunde Fonds

De boekenveiling van het Wereldwiskunde Fonds (WwF) in oktober heeft 550 euro opgebracht. De volgende boekenveiling zal in mei plaatsvinden. Het doel van het WwF is om enerzijds wiskundedocenten in ontwikkelingslanden te steunen en anderzijds docenten in Nederland bewust te maken van de vragen en problemen die wiskundedocenten in ontwikkelingslanden bezighouden. Naast de periodieke boekenveiling verzorgt het WwF ook een permanent online aanbod van tweedehands boeken. www.wereldwiskundeboeken.nl

Win een bus vol wetenschappers

Ook in 2012 trekt de bus van De Jonge Akademie er weer op uit om scholen te bezoeken. Tijdens een bezoek van 'De Jonge Akademie on Wheels' volgen leerlingen uit de onderbouw van vmbo, havo en vwo een programma dat bestaat uit workshops, een estafette, experimenten en een blik in de wereld van de wetenschap.

Een bezoek van De Jonge Akademie is niet te boeken, maar alleen te winnen. De acht eerste of tweede klassen die voor het wetenschapspel 'Expeditie Moendoes', ook door De Jonge Akademie ontwikkeld, de interessantste onderzoeksvraag bedenken, krijgen De Jonge Akademie op hun schoolplein. dejongeakademieonwheels.nl



Overlijden van prof.dr. T.A. Springer

Op woensdag 7 december 2011 is prof.dr. T.A. Springer, op 85-jarige leeftijd, tijdens een wandeling overleden. Professor Springer was altijd zeer actief en regelmatig aanwezig bij seminaria en het stafcolloquium.

Het CWI verliest in hem een vriendelijke collega en een wetenschapper van wereldfaam in de algebra en in het bijzonder de algebraïsche groepen. Zijn werk heeft geleid tot fundamentele wiskundige begrippen die blijvend zijn naam dragen. Voor zijn leerlingen en collega's was hij altijd toegankelijk en een bron van kennis en inspiratie. Lange tijd werd het gezicht van het Mathematisch Instituut mede door hem bepaald.

Professor Springer is op vrijdag 9 december in kleine kring begraven. www.wiskundepersdienst.nl



Prof.dr. T.A. Springer

Wetenschappers bestuderen wiskunde-angst

Onderzoekers van de universiteit van Chicago hebben ontdekt hoe angst voor wiskunde de prestaties van studenten kan beïnvloeden. Met behulp van fMRI-scans kwamen de onderzoekers erachter dat alleen al bij de gedachte aan een wiskundig probleem bepaalde gebieden in de hersenen actief werden. Deze gebieden spelen een belangrijke rol bij de concentratie en het verwerken van negatieve gevoelens.

Volgens Sian Beilock, één van de onderzoekers, moeten studenten getraind worden om hun emoties te controleren alvorens een wiskundig probleem aan te pakken. Hiervoor zien de onderzoekers een rol voor het onderwijs weggelegd. Studenten met wiskunde-angst die er desondanks in slagen hun emoties onder controle te houden, bleken bijna net zo goed te presteren als studenten zonder angst voor wiskunde. Opvallend is dat de relatie alleen voor wiskundige problemen lijkt te gelden. www.sciencedaily.com

Wiskundestudenten winnen Jong Talent PWN Aanmoedigingsprijs

Op 23 november zijn negen Jong Talent Aanmoedigingsprijzen uitgereikt aan negen wiskundestudenten. De prijs wordt beschikbaar gesteld door het nieuwe Platform Wiskunde Nederland (PWN) en wordt uitgereikt om de studie in wiskunde te stimuleren.

De prijzen zijn gewonnen door: Johan Los (RUG), Mees de Vries (UvA), Peter Koymans (TUE), Emiel Lorst (TU Delft), David Kok (UL),

Abel Hanse (UT), Daan de Groot (VU), Merlijn Keune (RUN) en Tom Bannink (UU).

Naast de aanmoedigingsprijzen wiskunde zijn er ook prijzen uitgeleerd in andere exacte en technische disciplines. In totaal zijn er 43 aanmoedigingsprijzen uitgereikt. www.khmw.nl

Wiskunde helpt gas beter te stromen

Nederlandse en Duitse wiskundigen gaan samenwerken om het gasnetwerk in Europa te optimaliseren. Door de komst van nieuwe gastypes, bijvoorbeeld biogas of Liquid Natural Gas (LNG), en de liberalisering van de gasmarkt is het gasnetwerk complexer geworden. Ondertussen worden eisen gesteld aan de transportsnelheid, temperatuur, druk en prijs.

Als antwoord hierop gaat het 3TU Applied Mathematics Institute (3TU.AMI) een samenwerking aan met onder meer Matheon, een wiskundig instituut van drie Berlijnse Universiteiten en twee andere wiskundige instituten in Duitsland.

Onder andere door de bestaande gasleidingen en kleppen beter te gebruiken is het mogelijk de kosten te drukken en tegelijkertijd de kwaliteit en zekerheid van levering te verhogen. www.3TU.nl



Gas- en olieleidingen in Europa

NWO en PWN bundelen krachten

NWO Exacte Wetenschappen (NWO-EW) en Platform Wiskunde Nederland (PWN) gaan zich samen inzetten voor de wiskundige wetenschap in Nederland. Hiertoe hebben NWO en PWN op 20 december een convenant ondertekend.

Een belangrijk gezamenlijk doel is om ervoor te zorgen dat wetenschappers in staat blijven om excellent wiskundig onderzoek te doen. Daarnaast moet de rol van wiskundig onderzoek in internationale competities behouden blijven. Het streven is om het budget voor wiskundeonderzoek en het aantal wiskundige wetenschappers te laten toenemen. Daarnaast willen de partijen de samenwerking van wiskundigen met andere wetenschapsgebieden, het bedrijfsleven en maatschappelijke organisaties aanmoedigen. Tot slot is de verbetering van de

bekendheid en het imago van wiskundig onderzoek een gezamenlijk doel.

PWN zal het gebiedsbestuur Exacte Wetenschappen gaan adviseren over onder meer strategievorming, thematische ontwikkeling en prioritering van onderwerpen en de ontwikkeling van nieuwe en bestaande onderzoeksprogramma's. www.nwo.nl



Foto: NWO

Het convenant werd ondertekend door prof.dr.ir. C.J. van Duijn, voorzitter PWN (links), en dr. L.B.J. Vertegaal, directeur NWO Chemische & Exacte Wetenschappen

Vereniging BON publiceert 'De Onderwijsbubbel'

Onder redactie van bestuurslid Fenna Vergeer van de vereniging Beter Onderwijs Nederland (BON) zijn artikelen van verschillende BON-leden en -sympathisanten samengebracht die een beeld schetsen van de stand van zaken in het Nederlandse onderwijs.

De Onderwijsbubbel bestrijkt het middelbaar en hoger beroepsonderwijs en het wetenschappelijk onderwijs. Het boek, 36 artikelen van 14 verschillende auteurs en 278 bladzijden dik, eindigt met een verkorte versie van het BON Deltaplan.

Het boek is door Fenna Vergeer aan staatssecretaris Halbe Zijlstra aangeboden. *Bron: Beter Onderwijs Nederland*

Google steunt Platform Bèta Techniek

Google steunt de stichting Platform Bèta Techniek met een subsidie van ruim 500.000 euro, bedoeld om wiskunde en informatica op school een nieuwe impuls te geven. Pim van der Feltz, directeur Google Nederland: "Vanwege de toenemende rol van technologie in onze samenleving zal het aantal vacatures op het gebied van informatica, technologie en wiskunde blijven groeien. Er is voor Google een taak weggelegd om aan scholieren te laten zien welke kansen een bètatechniekopleiding biedt."

Het geld zal worden ingezet om meer interesse bij jongeren te wekken voor wiskunde en informatica. Extra aandacht zal gaan om de keuze voor deze richting te stimuleren bij talentvolle meisjes en allochtone jongeren. Ook zal het geld worden gebruikt om het aantal eerstegraads wiskundedocenten te verhogen. www.platformbetatechniek.nl

India viert geboortedag Ramanujan

De geboortedag van de Indiase wiskundige Ramanujan, 22 december, zal vanaf dit jaar in India bekend staan als 'National Mathematics Day'. Daarnaast is het jaar 2012 in India uitgeroepen tot jaar van de wiskunde.

Met de invoering van de jaarlijkse wiskundedag wil de regering de rijke historie van de wiskunde in India, en de bijdrage van Ramanujan in het bijzonder, onder de aandacht brengen. Daarnaast benadrukt premier Manmohan Singh de belangrijke rol die wiskunde speelt in andere wetenschappelijke disciplines. <http://www.thehindu.com>

Wiskundige Herman te Riele onderscheiden

Op 2 december 2011 is Herman te Riele, wiskundig onderzoeker bij het Centrum Wiskunde & Informatica (CWI), benoemd tot officier in de Orde van Oranje-Nassau. Hij kreeg het kruis uitgereikt door burgemeester Pieter Broertjes van Hilversum tijdens een symposium ter ere van zijn afscheid van het CWI.

Te Riele ontvangt de benoeming vanwege zijn loopbaan van ruim veertig jaar wetenschappelijk onderzoek naar priemgetallen en cryptografie. Een hoogtepunt uit zijn loopbaan was het kraken van de RSA-512-codering in 1999 door een team onder zijn leiding. De RSA-codering wordt onder meer door banken en effectenbeurzen gebruikt voor de beveiliging van transacties. Onder wiskundigen werd Te Riele bekend met het weerleggen van het vermoeden van Mertens. Dit vermoeden werd lange tijd beschouwd als een mogelijke oplossing voor de Riemann-hypothese, één van de zeven grote onopgeloste wiskundige problemen.

Burgemeester Broertjes noemde Te Riele in zijn toespraak een steunpilaar van de nationale en internationale wiskundige gemeenschap, vooral vanwege zijn inzet voor het Koninklijk Wiskundig Genootschap en het Europese wiskundig congres ECM.

Na 41 jaar aan het CWI verbonden te zijn geweest, is Herman te Riele per 1 januari 2012 met pensioen. www.cwi.nl



Herman te Riele

Doorbraak bereikt in Sudoku-wetenschap

Onlangs hebben Ierse wiskundigen een nieuwe voorwaarde gevonden waaraan een Sudoku moet voldoen om uniek oplosbaar te zijn. De bekende puzzel, waarbij de getallen 1 tot en met 9 moeten worden ingevuld in een rooster, mag in de beginsituatie niet minder dan 17 cijfers bevatten. Deze voorwaarde is echter geen garantie dat er ook een unieke oplossing bestaat: er zijn Sudoku's bekend die meer dan 17 cijfers nodig hebben om uniek oplosbaar te zijn.

Het bewijs is met behulp van een computerprogramma geleverd. Dit is niet zo eenvoudig als het klinkt, want het aantal geldige ingevulde Sudoku's is veel te groot om in zijn geheel door een computer te laten analyseren. Met behulp van grafentheorie en groepentheorie is het aantal mogelijkheden dat moest worden gecontroleerd flink vermindert. Eén van de gebruikte technieken is het zogenoemde 'hitting-set' algoritme, dat in een volledig ingevulde Sudoku zoekt naar verzamelingen vakjes waarvan er tenminste één ingevuld moet zijn. Het vinden van zo'n 'hitting set' is een NP-volledig probleem, maar wel de moeite waard: in ongeveer zeven miljoen processoruren zijn de resterende vijf miljard mogelijkheden binnen een jaar gecontroleerd. www.khmvw.nl



Hector de Pereda (Flickr.com, Idopereida)

Hoge scores bij Nederlandse Wiskunde Olympiade 2011

Op vrijdagmiddag 11 november is de uitslag van de finale van de Nederlandse Wiskunde Olympiade 2011 bekendgemaakt. Winnaar in klas 6 is Guus Berkelmans uit Amstelveen, die in de finale de perfecte score van 50 punten behaalde. Dit jaar is het vierde jaar op rij dat hij wint in zijn categorie, waarmee hij de prestatie van zijn broer Wouter evenaart. In klas 5 won Jeroen Huijben uit Goirle met 49 punten, in klas 4 scoorde Michelle Sweering uit Krimpen aan den IJssel met 42 punten het hoogst. De scores in klas 4 waren dit jaar opvallend hoog.

Uit de finalisten is een groep van 31 deelnemers geselecteerd voor het trainingsprogramma. Zij vertrokken direct voor het eerste trainingsweekend naar Valkenswaard. www.wiskundeolympiade.nl

Van de voorzitter van het KWG

Bij het scheiden van de markt

Dit voorwoord schrijf ik enkele maanden voor afloop van mijn termijn als KWG-voorzitter. Het zal mijn laatste voorwoord zijn, wat een goede gelegenheid is om een aantal activiteiten van het bestuur de revue te laten passeren.

Het KWG begint traditioneel elk kalenderjaar met het Wintersymposium op een van de eerste zaterdagdagen van januari, bestemd voor een breed in de wiskunde geïnteresseerd publiek. De belangstelling is doorgaans groot: ongeveer 130 deelnemers, vooral uit het middelbaar en hoger onderwijs. De organisatie begint negen maanden van tevoren daarvoor en berust traditioneel bij het bestuurslid belast met de contacten met leraren. Tijdens mijn bestuursperiode zijn Iris Gulikers en haar opvolgster Jenneke Krüger er in geslaagd aantrekkelijke programma's aan te bieden over thema's als 'Wiskunde en Kunst', 'Blik op Oneindig', 'Logica (in dagelijkse omstandigheden)' en 'Grootschalig Rekenen'.

In april wordt het jaarlijkse Nederlands Mathematisch Congres gehouden, tot dit jaar een tweedaags evenement onder auspiciën van het KWG en bij toerbeurt georganiseerd door wiskundigen van een van de Nederlandse universiteiten. Vast programma-onderdeel is de jaarlijkse algemene ledenvergadering van het KWG, waarin het bestuur rapporteert over de activiteiten en de stand van de financiën, en waarin nieuwe bestuursleden worden benoemd en vertrekkende gedechargeerd. Het bestuur realiseert zich dat de organisatie van dit congres een extra belasting vormt voor het instituut dat aan de beurt is. We bekijken daarom momenteel welke rol het Platform Wiskunde Nederland (PWN) kan spelen bij de organisatie van dit congres. Maar de inzet van elk universitair wiskunde-instituut, ongeveer eens per decennium, blijft onmisbaar bij het in stand houden van deze traditie.

De oprichting van de zojuist genoemde Stichting PWN vormde een belangrijke activiteit, waar een groot deel van wiskundig Nederland in diverse rollen bij betrokken was. PWN werd opgericht door de Nederlandse Vereniging van Wiskundeleraren (NVvW) en het KWG. Tijdens de ALV van april 2009 (NMC Groningen) is het plan voor de oprichting aangenomen. Er lag al een blauwdruk voor PWN van een voorbereidingscommissie, en een veel uitgebreider oprichtingsbestuur, onder voorzitterschap van Frank den Hollander, kreeg van de leden van het KWG (en de NVvW) een jaar de tijd om de plannen uit te werken. De voorzitters van beide oprichtende partijen namen zitting in het oprichtingsbestuur. Meebouwen aan PWN was dus een van de centrale activiteiten gedurende het eerste jaar van mijn termijn

als voorzitter. Het onder één koepel brengen van organisatorische activiteiten op landelijk niveau bleek soms lastig. Een grote zorg was de financiering van PWN, maar dankzij de steun van diverse partijen kreeg PWN een gezond financieel fundament. De Stichting PWN is in oktober 2010 opgericht. Hans van Duijn werd de eerste voorzitter en Wil Schilders de eerste directeur van het PWN-bureau. Een belangrijk doel is samenwerking van de heterogene wiskundige gemeenschap in Nederland op de terreinen Onderzoek, Onderwijs, Innovatie, Publiciteit en Publicaties te bevorderen. Het PWN-bestuur heeft op elk van deze terreinen commissies benoemd, die vaak al lopende activiteiten samenbrachten onder één paraplu.

We hopen dat PWN ook een platform wordt waarin de samenwerking tussen KWG en NVvW steeds meer gestalte krijgt, met name waar het de belangstelling en de belangen van onze leden betreft. Ik denk bijvoorbeeld aan de aansluitingsproblematiek, waaraan de PWN-commissie Onderwijs in het thema 'Schakelpunten' aandacht besteedt, of het verbeteren van de positie van de wiskunde in het primair en voortgezet onderwijs als een van de speerpuntactiviteiten van de commissie Publiciteit.

Verder lijken er mogelijkheden te zijn voor krachtenbundeling op het terrein van de wiskunde-publicaties, met name bij *Pythagoras* en Epsilon Uitgaven. En als we het toch over publicaties hebben: sinds januari 2011 is het KWG de trotse eigenaar van *Indagationes Mathematicae*. Het is u niet ontgaan dat we in het *Nieuw Archief voor Wiskunde* regelmatig aandacht besteden aan dit wetenschappelijke tijdschrift. De redactie werkt onder leiding van hoofdredacteur Henk Broer hard aan verbetering van de positie van *Indagationes Mathematicae*.

Het KWG-bestuur steunt en ontplooit promotiecampagnes van deze prachtige wiskunde-uitgaven van eigen bodem. Ik doe dan ook graag een beroep op u, NAW-lezer, om hieraan bij te dragen. Overweeg eens een abonnement te nemen op *Pythagoras*, uw volgende wetenschappelijke artikel in te dienen bij *Indagationes Mathematicae*, of uw potentiële bestseller aan te bieden bij Epsilon Uitgaven.

Rest mij iedereen te bedanken met wie ik de afgelopen jaren als KWG-voorzitter heb samengewerkt, zowel in als buiten het bestuur. Ik kreeg veel hulp, adviezen en medewerking. Er wordt veel werk verzet door ons allen. Ik hoop en verwacht dat we daaraan in de toekomst hoge prioriteit zullen blijven geven. ↵

Gert Vegter, voorzitter KWG

Van het KWG

| KWG activities

Algemene Ledenvergadering van het Koninklijk Wiskundig Genootschap

De 235ste Algemene Ledenvergadering van het Koninklijk Wiskundig Genootschap zal worden gehouden op donderdag 12 april 2012 tijdens het 48ste Nederlands Mathematisch Congres te Eindhoven.

1 Agenda

- 1 Opening
- 2 Verslag van de 234ste Algemene Ledenvergadering van het Koninklijk Wiskundig Genootschap, gehouden op 14 april 2011 in Enschede
- 3 Mededelingen
- 4 Besprekingen van de jaarverslagen over 2011. De hier ontbrekende verslagen worden ter vergadering uitgereikt.
 - a. Verslag van de Secretaris
 - b. Verslag van de Penningmeester
 - c. Verslag van de Kascommissie
 - d. Verslag van de Inspecteur der Boekerij
 - e. Verslag van de Archivaris
 - f. Verslag van de Stichting Platform Wiskunde Nederland
 - g. Verslag van de Commissie voor Persoonlijke Archieven van Wiskundigen
 - h. Verslag van de Stichting Epsilon
 - i. Verslag van het Nederlands Mathematisch Congres
- 5 Begroting 2012
- 6 Vaststellen contributie
- 7 Samenstelling Kascommissie 2012
- 8 Samenstelling van het Bestuur
 Prof.dr. H.W. Broer en dr. K.P. Hart (publicaties) treden statutair af als bestuurslid en prof.dr. G. Vegter als voorzitter. Het bestuur stelt prof.dr. A.C.M. Ran voor als opvolger van Vegter; Vegter wordt on-dervoorzitter.
 De overige leden van het bestuur zijn:
 - drs. J.G. Blom (CWI), secretaris
 - dr. W. Bosma (RU en CWI), webmaster
 - dr. O.W. van Gaans (UL), penningmeester
 - drs. J. Krüger (SLO Enschede), contact met leraren
 - dr. ir. H.J.J. te Riele (CWI), archivaris en Inspecteur der Boekerij
 - dr. A. Sevenster, PR en Stichting Epsilon
- 9 Rondvraag
- 10 Sluiting

2 Ad punt 2 van de Agenda

Hieronder volgen de notulen van de 234ste Algemene Ledenvergadering, tezamen met de bijbehorende verslagen (voor zover ze niet eerder in het Nieuw Archief voor Wiskunde gepubliceerd zijn): het financieel verslag over 2010 en de begroting 2011, en het verslag van de Kascommissie over 2009 en 2010. Het financieel verslag over 2011, de begroting van 2012 en het verslag van de Kascommissie over 2011 zullen tijdens de ALV van 12 april 2012 worden bekend gemaakt.

2.1 Concept notulen 234ste Algemene Ledenvergadering van het Koninklijk Wiskundig Genootschap, gehouden op 14 april 2011 te Enschede

Aanwezig namens het KWG-bestuur: Sandjai Bhulai (pm), Henk Broer, Herman te Riele, Wieb Bosma, Gert Vegter (vz), Klaas Pieter Hart en Rob van der Mei (secr)

Overige aanwezigen: Rob Tijdeman, Jan Karel Lenstra, Joke Blom, Nellie Verhoef, Gerard Jeurnink, Klaas Landsman, Erik van der Ban, Frits Beukers, Swier Garst, Teun Koetsier, Peter van Emde Boas en Tom Koornwinder

1. Opening

De voorzitter opent de vergadering om 13.15 uur en heet allen welkom.

2. Verslag van de 233ste ALV van 22 april 2010

Dit verslag wordt goedgekeurd.

Rubriek met mededelingen van het Koninklijk Wiskundig Genootschap. Tevens worden hier de notulen van de Algemene Ledenvergadering gepubliceerd.

ACTIVA	€	PASSIVA	€
Vlottende activa		Vreemd vermogen	
<i>Vorderingen:</i>		<i>Crediteuren:</i>	
Debiteuren	48.454,61	Crediteuren	48.703,33
<i>Liquide middelen:</i>			
ING	72.569,56		
ABN AMRO	9.638,55		
Vaste activa		Eigen vermogen	
<i>Financiële vaste activa</i>			
Aandelen	3.241,62		
ING Rentemeerrekening	40.886,28	Legaat Lekkerkerker	89.630,00
ABN AMRO Kapitaalmarktindex	78.998,79	Kapitaal eind 2009	115.456,08
	253.789,41		253.789,41

Tabel 1 Beginbalans

ACTIVA	€	PASSIVA	€
Vlottende activa		Vreemd vermogen	
<i>Vorderingen:</i>		<i>Crediteuren:</i>	
Debiteuren	38.243,08	Crediteuren	63.039,79
<i>Liquide middelen:</i>			
ING	102.531,72		
ABN AMRO	9.155,54		
Vaste activa		Eigen vermogen	
<i>Financiële vaste activa</i>			
Aandelen	3.945,23		
ING Rentemeerrekening	41.994,97	Legaat Lekkerkerker	72.987,00
ABN AMRO Kapitaalmarktindex	81.397,14	Kapitaal eind 2010	141.240,89
	277.267,68		277.267,681

Tabel 2 Eindbalans

3. Verslag van de extra ALV van 3 juni 2010

Het verslag wordt goedgekeurd.

4. Mededelingen

1. De voorzitter meldt dat het tijdschrift *Indagationes Mathematicae* eigendom is geworden van het KWG, en dat er wordt gewerkt aan het opstellen van een Publishing Agreement met Elsevier.

2. De voorzitter uit zijn zorg over het uitdunnen van het bestuurlijk kader, en doet een oproep aan de ALV om meer mensen te mobiliseren voor bestuursfuncties.

3. De voorzitter doet een oproep aan de ALV om kopij aan te leveren voor Epsilon.

5. Bespreking jaarverslagen

De jaarverslagen over 2010 worden goedgekeurd. Er zijn geen opmerkingen. 6. Financiën KWG

Het verslag van de Kascommissie over 2009 en 2010, het jaarverslag over 2010 en de begroting voor 2011 worden goedgekeurd.

7. Vaststelling contributie

De contributie voor 2011 blijft onveranderd. De ALV gaat hiermee akkoord.

8. Samenstelling Kascommissie 2011

De ALV gaat akkoord met het voorstel dat de Kascommissie voor 2011 zal bestaan uit Sandjai Bhulai en Luc Florack.

9. Samenstelling van het bestuur

Sandjai Bhulai (pm), Rob van der Mei (secr), Herman te Riele (boekrij en archivaris) en Gert Vegter (vz) treden statutair af. Het bestuur stelt voor de volgende personen te (her)benoemen: Gert Vegter (vz, voor een periode van 1 jaar), Joke Blom (secr), Onno van Gaans (pm), André Ran (ondervoorzitter), en Herman te Riele (boekrij en archivaris). De ALV gaat unaniem akkoord.

10. Platform Wiskunde Nederland (PWN)

De voorzitter meldt dat de officiële opening van PWN zal plaatsvinden op 14 mei 2011.

11. Rondvraag

Peter van Emde Boas maakt melding van twee activiteiten waar het KWG eventueel bij kan aanhaken: het wereldcongres van IFIP, en het eeuwfeest van Alan Turing.

12. Sluiting

De voorzitter sluit de vergadering rond 14.00 uur. *Prof.dr. R. van der Mei, secretaris*

2.2 Financieel verslag 2010 en begroting 2011

Het jaarverslag over 2010 is op dezelfde manier tot stand gekomen als dat over voorgaande jaren. Dit jaarverslag heeft betrekking op de financiën van het KWG. In het jaar 2010 heeft het KWG te maken gehad met de oprichting van het Platform Wiskunde Nederland (PWN). Mede hierdoor hebben de contributies van de instituutleden een positieve impuls gehad.

Balans begin 2010

De beginbalans 2010 (Tabel 1) is identiek aan de eindbalans 2009, zoals gepubliceerd in het financieel jaaroverzicht 2009.

Balans eind 2010

Tabel 2 geeft de balans eind 2010.

Resultatenrekening

Het eigen vermogen van het KWG is in 2010 met € 9.141,81 gestegen. Echter, er is een voorziening van € 16.500,00 getroffen voor het International Mathematical Olympiad 2011 (IMO 2011), gefinancierd door het Lekkerkerker legaat (Tabel 3). Hierdoor komt het Kapitaal van boekjaar 2010 uit op een stijging van € 25.784,81 (Tabel 4).

In het jaar 2009 werd de boekhouding van het KWG opgeschoond door niet inbare bedragen te saneren. Hierdoor kwam het resultaat op een positief bedrag van € 3.062,86. Deze positieve trend in het resultaat heeft zich door de gezonde financiële bedrijfsvoering doorgezet in het jaar 2010.

Toelichting bij de balanspost aandelen: De totale waarde van de aandelenportefeuille bedraagt per ultimo 2010 € 3.945,23, zie Tabel 5.

Begroting en kosten 2010 en begroting 2011

Tabel 6 toont de begrote en werkelijke kosten over het boekjaar 2010, en de begrote kosten voor 2011.

Toelichting:

- Ad 4125: In het boekjaar 2010 werden t.b.v. het NAW de volgende betaalde functies vervuld:
 - Eindredacteur NAW, 9 uur
 - Bureauredactie NAW, twee maal 8 uur
 - Bladmanager NAW, 8 uur
 De functies die vervuld werden t.b.v. Pythagoras betreffen:
 - Hoofdredacteur Pythagoras
 - Eindredacteur Pythagoras
 - Bladmanager Pythagoras
- Ad 4126: Het KWG heeft voor een deel van 2010 de PR-Taakgroep gefinancierd om de overbrugging naar het PWN mogelijk te maken.
- Ad 4151, 4153: De porti betreft hier het netto door het KWG aan portokosten bestede bedrag. Het CWI vergoedt de voor ruilabonnements gemaakte portokosten. In 2010 gaat het hierbij om ongeveer € 3.000,00.
- Ad 4158: Drukkerij Ten Brink heeft sinds 2005 niet meer gefactureerd voor de kosten van het beheer van de ledenadministratie. Vanaf 2010 stuurt Ten Brink weer facturen hiervoor.
- Ad 4160: Het aandeel NAW-gerelateerde kosten in deze post bedraagt € 1.500,00. Deze post herbergt ook kosten die voortkomen uit de nasleep van het faillissement van drukkerij Giethoorn-Ten Brink (€ 1.181,51); dit zijn nabetalings van lopende facturaties destijds.
- Ad 4164: In 2010 zijn er afspraken gemaakt met Pythagoras om tot een betere financiële huishouding te komen. Een deel van deze afspraken zijn in 2010 uitgevoerd middels prijsverhogingen van het blad. Inmiddels is er ook meer duidelijkheid over de precieze uitgaven omtrent druk-, porti-, ontwerp- en overige kosten van Pythagoras. Het plan om Pythagoras financieel zelfonderhoudend te maken wordt voortgezet in 2011.

	€
Legaat Lekkerkerker begin 2010	89.630,00
Voorziening IMO 2011	16.500,00
Grafonderhoud Lekkerkerker	143,00
Legaat Lekkerkerker eind 2010	72.987,00

Tabel 3 Legaat Lekkerkerker 2010

	€
Kapitaal begin 2010	115.456,08
Resultaat boekjaar 2010	25.784,81
Kapitaal eind 2010	141.240,89

Tabel 4 Resultatenrekening 2010

	€
Aandelen begin 2010	3.241,62
Bij: dividend en herwaardering	703,61
Aandelen eind 2009	3.945,23

Tabel 5 Mutaties aandelenportefeuille

7. Ad 4170: Het KWG heeft in 2010 de volgende sponsorbijdragen verstrekt:

- Studiegroep Wiskunde met Industrie (SWI2010): € 750
- A-Eskwadraat: € 250
- FMF Rubik: € 250
- LIMO 2010: € 250
- IMO 2011: € 16.500,00 (2de tranche van de voorziening)
- Subsidiegarantie FMF 2009: € –56,29
- Subsidiegarantie FMF Rubik: € –125

Het KWG heeft in 2010 de volgende activiteiten georganiseerd:

- Brouwerlezing: € 3.400,00 (2de tranche van de voorziening)
- NMC 2010: € 4.132,95
- Wintersymposium 2010: € 303,26

Het KWG sponsort het NMC met een garantiesubsidie van doorgaans € 3.000. Door tegenvallende bezoekersaantallen (en dus inschrijfgelden) is het NMC dit jaar niet kostendekkend geweest, waardoor er een extra financiering van € 1.132,95 heeft plaatsgevonden.

Baten 2010 en begroting 2011

Zie Tabel 7.

Toelichting:

- Ad 5150: De inkomsten uit contributies zijn hoger door prijsverhogingen van het KWG-lidmaatschap en het abonnement op het blad Pythagoras.
- Ad 5151: Aan het Lekkerkerker legaat zijn onderhoudskosten voor het graf verbonden.
- Ad 9090: De rente wordt geboekt in het jaar waarin deze binnenkomt, niet in het jaar waarop deze betrekking heeft.

Samenvatting en aanbevelingen

Het financieel overzicht over 2010 laat een positief resultaat zien. De positieve trend is mede door inspanningen van het KWG-bestuur samen met het PWN-bestuur om de instituutslidmaatschappen weer op gang te brengen. De begroting van het KWG is sluitend en de bedrijfsvoering van het KWG is financieel gezond. Het plan om Pythagoras kostendekkend te maken wordt gecontinueerd in 2011. Dit is noodzakelijk om financieel gezond te blijven en om met toekomstige prijsstijgingen om te gaan.

*Dr. S. Bhulai, penningmeester
Amsterdam, 31 januari 2011*

GrBk Nr.	Omschrijving	begroot 2010 (€)	werkelijk 2010 (€)	begroot 2011 (€)
4125	Salarissen NAW	40.000	42.678,02	43.000
4125	Salarissen Pythagoras	35.000	36.033,51	35.000
4126	PR-Taakgroep	–	3000,00	–
4151	Porti NAW	6.500	6.425,21	6.500
4152	Drukkosten NAW	20.000	18.538,04	20.000
4153	Ontwerpkosten NAW	4.500	5.051,55	5.000
4155	Vergaderkosten	3.500	4.087,14	4.000
4158	Ledenadministratie	–	1.908,00	1.500
4160	Overige kosten	4.000	2.305,51	3.000
4164	Pythagoras	11.000	–	–
	Overige kosten	–	1.562,52	2.000
	Drukkosten	–	21.889,60	22.000
	Portikosten	–	8.407,03	8.500
	Ontwerpkosten	–	6.650,88	6.700
4170	Sponsoring	2.000	1.318,71	2.000
4170	Sponsoring IMO2011	16.500	16.500,00	16.500
4170	Brouwerlezing	3.400	3.400,00	3.400
4170, 4729	KWG activiteiten	2.000	4.436,21	3.500
4200	Verzekering	400	403,12	400
4251	Afdracht EMS	2.500	2.318,00	2.500
4252	Afdracht IM	2.000	–	2.000
4253	Afdracht IMU	8.000	8.571,58	8.500
4980, 9152	Bankkosten	100	95,00	100
Totaal		161.400	195.579,63	196.100

Tabel 6 Resultatenrekening 2010 en begroting 2011: kosten

GrBk Nr.	Omschrijving	begroot 2010 (€)	werkelijk 2010 (€)	begroot 2011 (€)
5150, 5121,5251, 5252	Contributies KWG-leden	80.000	89.500,00	90.000
5150, 5121,5251, 5252	Contributies Pythagoras	40.000	67.402,40	67.500
5151	Legaat Lekkerkerker	–140	–143,00	–150
5153	Advertenties	2.000	6.955,00	5.000
5154,5155,5160	Overige baten	–	–	–
5156	Contributies inst. leden	40.000	37.500,00	35.000
5157	Contributies bedrijfsleden	–	–	–
9052, 9090	Rente	4.000	3.507,04	4.000
Totaal		165.860	204.721,44	201.350

Tabel 7 Resultatenrekening 2010 en begroting 2011: baten

2.3 Verslag van de Kascommissie over 2009

De kascommissie verklaart hierbij het financiële verslag van de penningmeester over het jaar 2009 te hebben gecontroleerd. Zij is van oordeel dat de in het verslag opgenomen jaarrekening een getrouw beeld geeft van de samenstelling van het vermogen van het Koninklijk Wiskundig Genootschap ultimo 2009 en van de resultaten over het boekjaar 2009.

In haar oordeel heeft de kascommissie de aanbevelingen van de commissie van goede diensten, bestaande uit Tom Koornwinder en Rob Tijdeman, aan het bestuur, namelijk om de balans op orde te brengen door vrijval van dubieuze debiteursposten, voor zover niet alsnog inbaar, als uitgangspunt genomen. Door accumulatie over vele jaren gaat het om een significant bedrag. De kascommissie is van mening dat de huidige penningmeester waardevol werk verricht heeft in het retrospectief verhelderen en opschonen van de boekhouding, maar is van mening dat de moeizaam opgedane ervaring geconsolideerd zou moeten worden met het oog op roulatie van penningmeesterschap en kascontrolewerkzaamheden. Zij

doet hiertoe de aanbeveling om een draaiboek op te stellen ter ondersteuning van het penningmeesterschap, aangevuld met een heldere toelichting op de specifiek op de situatie van het KWG geënte computerboekhoudingsprocedure.

Tot slot is de kascommissie van mening dat de opbouw van kosten en baten onder de verzamelpost 'Pythagoras' transparanter gemaakt zou moeten worden en doet de aanbeveling dit in toekomstige financiële verslagleggingen alsnog te bewerkstelligen.

Frits Beukers en Luc Florack (kascommissie)

Utrecht, 16 april 2010

2.4 Verslag van de Kascommissie over 2010

De kascommissie verklaart hierbij het financiële verslag van de penningmeester over het jaar 2010 te hebben gecontroleerd. Zij is van oordeel dat de in het verslag opgenomen jaarrekening een getrouw beeld geeft van de samenstelling van het vermogen van het Koninklijk Wiskundig Genootschap ultimo 2010 en de resultaten over het boekjaar 2010.

Tevens wil de kascommissie haar waardering uitspreken over de helderheid van de verslaggeving door de penningmeester.

*Frits Beukers en Luc Florack (kascommissie)
Utrecht, 7 februari 2011*

3 Ad punt 4 van de Agenda: de Jaarverslagen over 2011

3.1 Verslag van de Secretaris

3.1.1 Leden Het genootschap had op 1 januari 2012 acht ereleden (P.C. Baayen, F. van der Blij, N.G. de Bruijn, J. van de Craats, D. van Dalen, J. Korevaar, J.A.F. de Rijk en F. Verhulst) en 1232 leden, van wie 226 gebruik maakten van het tarief voor gepensioneerden, 162 van het reciprociteitstarief en 124 van het studenttarief. 44 leden waren tevens lid van de European Mathematical Society.

3.1.2 Verslag van het Wintersymposium Het Wintersymposium, georganiseerd door Jenneke Krüger, werd gehouden op 8 januari 2011 in het Academiegebouw bij de Dom in Utrecht. Het thema was 'Logica als we stemmen, communiceren of liegen'. Sprekers en hun onderwerpen waren:

- Jan van Eijck (CWI Amsterdam), *Redeneren over communicatie*
 - Eric Pacult (Universiteit Tilburg), *The logic behind voting*
 - Hans van Ditmarsch (Universiteit van Sevilla), *De logica van het liegen*
- Het aantal deelnemers bedroeg ongeveer 140.

3.1.3 Elektronische Mededelingen van het KWG Met ondersteuning van Minnie Middelberg van het Centrum Wiskunde & Informatica verschenen in 2011 21 uitgaven van de Elektronische Mededelingen van het KWG. Vaste rubrieken hierin zijn:

Agenda; Colleges, voordrachten en cursussen; Personalía; Promoties; Vacatures. Correspondenten van de wiskunde-instituten in Nederland leveren informatie aan voor de verschillende rubrieken. Incidenteel werden belangrijke mededelingen van het bestuur opgenomen (zoals over het Nederlands Mathematisch Congres, het 6th European Congress of Mathematics en activiteiten van de International Mathematical Union). Deze Mededelingen worden verstuurd naar alle leden voor zover zij ze willen ontvangen en beschikken over een email-adres. De redactie was in handen van Herman te Riele.

3.1.4 Wiskunde Persdienst De Wiskunde Persdienst (www.wiskundepersdienst.nl) is een initiatief uit 2002 van de Nederlandse Vereniging voor Wiskundeleraren en het KWG.

De WPD verzamelt en verspreidt wiskundig georiënteerd nieuws en publiceert een agenda van Wiskunde-activiteiten. Het KWG en Bauke Conijn (TU/e) verzorgen de website. Het beheer van de berichten is in handen van de TU/e, het Centrum Wiskunde & Informatica en leden van de Wiskunde Webmasters. Op dit moment worden nieuwsberichten gepubliceerd op de site van de Wiskunde Persdienst, op die van het KWG, de NVvW en Pythagoras, en op WisWeb (de website van het Freudenthal Instituut). In 2011 verschenen 56 nieuwsberichten.

3.1.5 PR-activiteiten Het Genootschap heeft bij verschillende gelegenheden PR-activiteiten ontplooid, zoals tijdens het 47ste Nederlands Mathematisch Congres in Twente, bij evenementen zoals de Nationale Wiskunde Dagen van de NVvW, het Wintersymposium van het KWG, en de vakantiecursussen van het CWI. Dit gebeurde veelal in samenwerking met de Epsilon Uitgeverij, het Nieuw Archief voor Wiskunde en Pythagoras. Ter ondersteuning van de PR-activiteiten werd promotiemateriaal gebruikt, bestaande uit de KWG-poster en een in 2009 vernieuwde KWG-folder.

3.2 Verslag van de Penningmeester over 2011

Wordt tijdens de Algemene Ledenvergadering op 12 april 2012 uitgereikt.

3.3 Verslag van de Kascommissie over 2011

Wordt tijdens de Algemene Ledenvergadering op 12 april 2012 uitgereikt.

3.4 Verslag van de Inspecteur der Boekerij

De Boekerij van het genootschap bestaat uit een collectie handschriften, boeken en tijdschriften en deze berust sinds 1880 als bruikleen bij de bibliotheek van de Universiteit van Amsterdam.

In de loop der jaren zijn er vijf catalogi van deze Boekerij uitgegeven en de laatste dateert uit 1907. Deze is samengesteld door G. Mannoury en bevat naast een overzicht van de boeken en tijdschriften die toen aan het WG toebehoorden een overzicht van de wiskundige werken die toen toebehoorden "aan de Universiteitsbibliotheek der Gemeente Amsterdam". Voor zover we hebben kunnen nagaan zijn alle in de catalogus van Mannoury genoemde werken toegankelijk via de huidige Universiteitsbibliotheek van de UvA. De catalogus van Mannoury kan worden geraadpleegd op www.wiskgenoot.nl/watis/SysCatBoekerijWG1907.pdf.

In 2011 is overleg gestart met de Afdeling Bijzondere Collecties van de Universiteitsbibliotheek van de UvA (UBA) over vernieuwing van het bruikleencontract tussen de UBA en het KWG, en over mogelijke digitalisering van (delen van) de Boekerij en van het Nieuw Archief voor Wiskunde.

In 2011 is een totaal van 9 nieuwe werken aan de boekencollectie toegevoegd, voornamelijk bestaande series monografieën en dissertaties. Deze werken werden als geschenk of in het kader van ruil ontvangen.

In toenemende mate zijn tijdschriften elektronisch beschikbaar. In dit jaar zijn om die reden de volgende ruilovereenkomsten beëindigd:

Boletim da Sociedade Paranaense de Matematica, was ruil met: Sociedade Paranaense de Matematica

Bulletin of the Iranian Mathematical Society, was ruil met: Iranian Mathematical Society

Journal of the Korean Mathematical Society, was ruil met: Korean Mathematical Society

Kragujevac Journal of Mathematics, was ruil met: University of Kragujevac

Nihonkai Mathematical Journal, was ruil met: Niigata University

Taiwanese Journal of Mathematics, was ruil met: National Taiwan University

Yugoslav Journal of Operations Research, was ruil met de redactie

Herman te Riele, Inspecteur der Boekerij

3.5 Verslag van de Archivaris

Het archief van het Koninklijk Wiskundig Genootschap was ook in 2011 in goede handen bij het Noord-Hollands Archief (voorheen het Rijksarchief in de Provincie Noord-Holland), Kleine Houtweg 18, 2012 CH Haarlem. Het archief is ontsloten via de uitgebreide "Inventaris van de archieven van het Wiskundig Genootschap onder de zinspreuk: 'Een onvermoeide arbeid komt alles te boven', opgericht te Amsterdam in 1778, (1782) 1798 - 1968 (1991)" door S. Neugebauer (Haarlem, 1995). Deze inventaris kan worden geraadpleegd op <http://www.wiskgenoot.nl/watis/geschiedenis.html>.

Met de Commissie voor Persoonlijke Archieven van Wiskundigen is overleg gestart over wat te doen met Elektronische Archieven van wiskundigen, zoals websites en email.

Herman te Riele, archivaris KWG

3.6 Verslag van de Stichting Platform Wiskunde Nederland

In het najaar van 2010 werd het Platform Wiskunde Nederland opgericht door het Koninklijk Wiskundig Genootschap (KWG) en de Nederlandse Vereniging van Wiskundeleraren (NVvW). In het eerste jaar is PWN als landelijke organisatie neergezet, en op 14 mei 2011 werd een succesvolle introductiebijeenkomst gehouden in Leiden, met Sir Roger Penrose als prominent openingsspreker. Hier werden ook de plannen van de commissies gepresenteerd, en vond discussie plaats met de achterban. Voor alle vijf PWN-commissies was een initiële agenda opgesteld van taken en aandachtspunten, welke zeer complex en divers zijn. In nauwe samenspraak met het bestuur is een planning gemaakt voor het aanpakken van deze taken, zodat deze uitgevoerd konden gaan worden. Een en ander is na te lezen in het Jaarverslag 2010/2011, alsmede het Jaarplan 2011/2012, welke recent zijn verschenen. Nadere informatie en details zijn te verkrijgen via de commissievoorzitters, dan wel via het Bureau PWN of op de website www.platformwiskunde.nl. Ook is in het decembernummer 2011 van de verenigingsbladen *Nieuw Archief voor Wiskunde* en *Euclides* een terug- en vooruitblik verschenen.

Wil Schilders, directeur Stichting PWN

3.7 Verslag van de Commissie voor Persoonlijke Archieven van Wiskundigen

3.7.1 Algemeen De volgende archieven onder beheer bij de CPAW zijn geplaatst bij het Noord-Hollands Archief te Haarlem:

1. H.B.A. Bockwinkel (1881–1960),
2. R. Lijdsman,
3. G. Röhrman,
4. W.H.J. van der Stok,
5. H. Nyon,
6. L.W. Nieland (1901–1945),
7. T. van Aardenne-Ehrenfest (1905–1984), C.C.J. de Ridder en P. Ehrenfest jr. (1880–1933),
8. D.N. van der Neut (1904–1985),
9. Een 60-tal foto's van wiskundigen,
10. C.G.G. van Herk (1900–1982),
11. J.H. Wansink (1894–1985),
12. H. Freudenthal (1905–1990),
13. D. van Dantzig (1900–1959),
14. N.H. Kuiper (1920–1994).

De volgende twee archieven worden ook beheerd door de CPAW:

15. Het archief van W. Kapteyn (1849–1927) berust bij de bibliotheek van het Museum Boerhaave in Leiden.
16. Het archief van M.J. van Uven (1878–1959) berust nog bij het CWI.
17. Het archief van N. G. de Bruijn is inmiddels ook overgebracht naar het Noord-Hollands Archief te Haarlem.

3.7.2 Activiteiten De commissie heeft in 2011 één keer vergaderd. Bij meerdere overleden wiskundigen is vastgesteld dat zij geen persoonlijk archief hebben nagelaten. De commissie is in gesprek over de lastige problematiek van de digitale archieven.

3.7.3 Samenstelling van de CPAW per 31 december 2011 T. Koetsier (VU) voorzitter, A. Kik (CWI) secretaris, G. Alberts (UVA), D. Beckers (VU), G.J.A.M. Bolten (Rijksarchief Noord-Holland, Haarlem), H.W. Lenstra, jr. (UL).

Teun Koetsier, voorzitter CPAW

3.8 Verslag van de Stichting Epsilon

Het bestuur van de Stichting Epsilon bestond in 2011 uit dr.ir. T. Koetsier (VU):

voorzitter, dr. S. Bhulai (VU): secretaris/penningmeester, tot 1 juli; dr. O. van Gaans (UL): secretaris/penningmeester, vanaf 1 juli; dr. K.P. Hart (TUD), drs. F.L.J.M. van den Heuvel (Meridiaan College 't Hooghe Landt en penningmeester Nederlandse Vereniging van Wiskundeleraren), dr. A. Sevenster (voorheen Elsevier, nu Atlantis Press). Voor de dagelijkse werkzaamheden in de uitgeverij is een 'managing director', in de persoon van drs. C. Boss-Reus, in dienst. De redactie van de wetenschappelijke reeks werd tot 1 juli voorgezeten door prof.dr. G. Vegter (RUG); vanaf 1 juli was prof. dr. F. Verhulst voorzitter a.i. De voorzitter van de Zebra-redactie is drs. P.M.G.M. Kop (ICLON).

De belangrijkste activiteit van Epsilon Uitgaven is natuurlijk het uitgeven en de verkoop van boeken. Naast zeven herdrukken zijn er in 2011 vier nieuwe titels verschenen. In de wetenschappelijke reeks waren er drie nieuwe boeken: *Intuitionistische Analyse, een constructief denkraam* van Dirk van Dalen, *De Riemann-Hypothese, een miljoenenprobleem* van Roland van der Veen en Jan van de Craats en *Wiskunde in Werking, van A naar B* van Maarten de Gee. De wetenschappelijke reeks telt nu 70 delen, waarvan er nog 60 verkrijgbaar zijn. In de Zebra-reeks is nummer 33 *Ontwikkelen met Kettingbreuken* van Martin Kindt en Piet Lemmens uitgekomen. Verder hebben twee andere manuscripten zo'n stadium bereikt dat die in januari 2012 verschijnen.

Epsilon wil graag het assortiment verbreden en is voortdurend op zoek naar nieuwe interessante manuscripten. Collegedictaten die er rijp voor zijn om als boek te verschijnen zijn ook zeer welkom. Auteurs worden uitgenodigd de website te bezoeken (www.epsilon-uitgaven.nl) en contact met de managing director op te nemen.

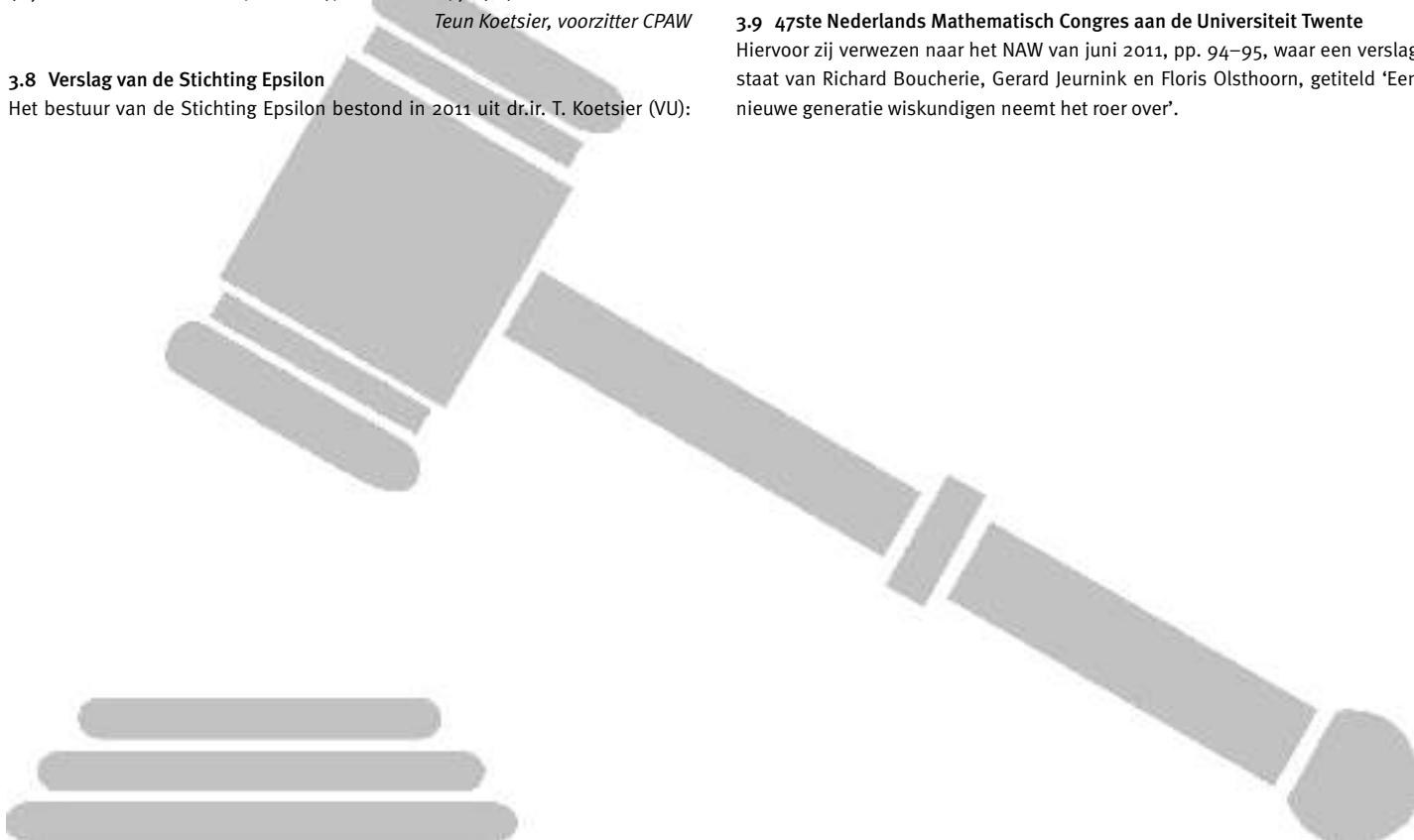
De dagelijkse werkzaamheden worden in anderhalve dag per week verricht door Carolien Boss. Zij werd tot 1 april ondersteund door Barbara Harzevoort op freelance basis, voor een halve tot een hele dag per week, afhankelijk van de hoeveelheid werk. Vanaf eind april heeft Sabine Oudt, studente wiskunde, de taken van Barbara overgenomen.

Een belangrijke gebeurtenis in 2011 was de verhuizing van Epsilon Uitgaven. Meer dan twintig jaar was Epsilon gevestigd in het huis van de oprichter, Ferdinand Verhulst, te Utrecht. Inmiddels heeft Epsilon een kantoorruimte elders in Utrecht betrokken.

Teun Koetsier

3.9 47ste Nederlands Mathematisch Congres aan de Universiteit Twente

Hiervoor zij verwezen naar het NAW van juni 2011, pp. 94–95, waar een verslag staat van Richard Boucherie, Gerard Jeurnink en Floris Olsthoorn, getiteld 'Een nieuwe generatie wiskundigen neemt het roer over'.



Jason Frank

Centrum Wiskunde & Informatica
Postbus 94079
1090 GB Amsterdam
j.e.frank@cwi.nl

Inaugural Lecture

The nature of prediction (and

Climate scenarios used by the climate panel IPCC reveal a possible future climate, which is not meant to be used as a climate prediction. However, such scenarios are misused frequently to determine policy and strategy, for instance infrastructure, water management and energy facilities. On 15 March 2010, Jason Frank, researcher at the Centrum Wiskunde & Informatica, was appointed full professor Dynamical Systems and Numerical Analysis at the University of Amsterdam. In his inaugural lecture, delivered on 21 April 2011, he gives a mathematical view on the predictability of natural systems, such as the climate system, and looks at the challenges, techniques and the role of computational methods.

“The IPCC climate simulations are far from being predictions.” That is the quote from this inaugural lecture that appeared on the University of Amsterdam web site along with the announcement of the lecture. I had been asked to provide a provocative quote for the announcement. The idea that the Intergovernmental Panel on Climate Change bases its findings on climate *projections*, and not climate *predictions*, is not original, but one that has been expressed by one of the world’s foremost climate scientists and lead writers of the IPCC reports, to whom we will return later in the lecture.

The quote above suggests a tone of skepticism, and the sensitive nature of this subject was immediately confirmed when, prompted by the quote on the UvA website, a concerned citizen sent me an angry e-mail, accusing me of having no conscience, and suggesting that the statements I was planning to make could be used by policymakers as an excuse for inaction in the face of impending climate change. (To be honest, I had, at that moment, written no more of this speech than the first line, and hence found it ironic that my correspondent seemed to know what statements I was planning to make.)

The IPCC has recently come under fire in the Netherlands, among other sources in the book *De staat van het klimaat: een koele blik in een verhit debat*, written by science journalist Marcel Crok [1]. At the end of his book, Crok argues that the proximity of science and politics in the climate issue is a detriment to objective science. Every scientific statement becomes politically loaded. My correspondent was concerned that any discussion of uncertainty in science would undermine science as a whole, increasing public mistrust of science. I wholeheartedly disagree. Misleading the public into thinking that science is free of uncertainty causes the public to mistrust science when its ‘predictions’ fail.

This lecture in no way calls into question the IPCC case on greenhouse gas forcing of climate. The IPCC case is based on broad evidence from a variety of sources, not just simulations. The simulations have a particular role, and the IPCC clearly communicates what that role is. Instead my goal here is to attempt to explain to you how mathematicians look at prediction, and to point out where challenges lie for scientists for improving climate prediction. A number of such challenges are already being taken up in the coming IPCC report.

How predictable is nature? On the NASA Eclipse website [9] one can see a table listing all solar eclipses that will occur until the year 3000. For example, according to the catalog, on New Years Eve 2996, at 12:58:17pm a total eclipse will occur at 33°S latitude and 6°E longitude, having a path width of 86 km. I expect it will be spectacular.

It may or may not surprise you that NASA is able to predict this eclipse so accurately. In this lecture I will explain how predictions of natural systems are made, and make some comments on the limitations of predictability. I will explain the *nature of prediction* in the context of the solar system (which is relatively simple), and then I will explain the *prediction of nature* in the context of the climate.

The nature of prediction ...

Historically, the attempt to understand the motion of planets and other heavenly bodies was one of the driving forces behind the

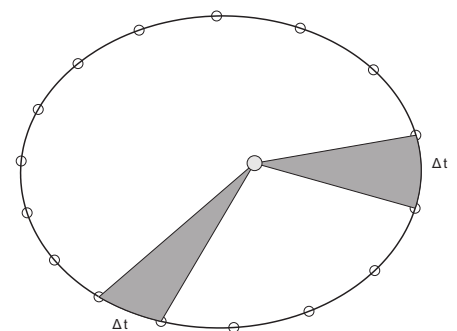


Figure 1 Kepler’s second law of planetary motion. The line between the sun and an orbiting planet sweeps out equal areas in equal time.



Jason Frank

the prediction of nature)

development of formal mathematics, along with commerce, surveying and architecture. Whereas the latter three were practical necessities, astronomy was a pure science in the sense that it was curiosity-driven and highly theoretical. It led to calculus and the branch of mathematics known as analysis. Johannes Kepler published the laws of planetary motion in 1609. By peering at the meticulous astronomical data of Brahe, Kepler had discovered that the planetary orbits were elliptical, and his second law, interpreted graphically in Figure 1, states that the line between a planet and the sun sweeps out an equal amount of area in equal periods of time: this implies that the planet speeds up when nearer the sun and slows down when farther away from it.

Kepler's observation that the planetary orbits were elliptical inspired Isaac Newton to devise the theory of gravitation. Newton proposed the laws of mechanics, which have three important consequences for the prediction of planetary motion: (1) a planet moves in a straight line unless acted upon by gravity, (2) the gravitational force effects a change in the velocity vector of a planet, (3) the gravitational force between any two bodies acts along the line between them and is inversely proportional to the square of their separation.

Differential equations, numerical integrators
In Figure 2 you see three computer simulations of the giant outer planets of the solar system — Jupiter, Saturn, Uranus and Neptune — and Pluto, which used to be a planet until astronomers demoted it in 2006. The

simulations were computed using three different numerical methods, A, B, and C, which I will describe in a moment. Just like the porridge in the English story of Goldilocks and the Three Bears, Method A is 'too hot', Method B is 'too cold', and Method C is 'just right'. For the hot Method A the planetary orbits gradually grow in time, and the planets leave the solar system. If one looks closely one will see that Jupiter and Saturn nearly collide at the beginning of this simulation, which also throws the orbits off considerably. For the cold Method B the planetary orbits gradually converge upon the sun. When they get too close, they are slingshot off into space. Meanwhile, for the just-right Method C, the orbits are nicely periodic, corresponding to what we might expect after centuries of observations.

The *prediction problem* for the solar system is the following: Given the mathematical laws (in this case, Newton's equations) describing the motion of the planets, and sufficient information about their current state, determine their state at some future time T . For a single planet, Newton's equations amount to six equations: three for the position in three-dimensional space, and three to specify its velocity vector. For the solar system, including the sun, this corresponds to sixty equations. And depending on what we want to know about the planets, we may have to throw in a moon or an asteroid or two, at a rate of six equations each. The solution to such a problem would be sixty-plus functions of time, that specify the positions and velocities of all bodies in the solar system for all time. But we do not know how to solve that

problem, nor does anyone believe it is possible. Fortunately, mathematics tells us that we can solve the equations approximately if the time T is very small. Since T is generally not small, we divide up the period of time between 0 and T into a large number N of tiny time periods $0, t_1, t_2, \dots, t_N = T$, and we denote by Δt the length of these tiny periods: $\Delta t = t_1 - t_0 = t_2 - t_1$, et cetera. Remember Δt , because we will mention it frequently in the discussion: Δt is the small amount of time for which we can solve the complicated mathematical equations, at least approximately. Now, all we have to do is solve Newton's equations on the tiny time interval Δt ... One may think that this is not much easier than solving them on T , but the beauty of mathematics is that it makes a big difference if we can assume that Δt is small.

Let us examine how this may be done for a single planetary orbit, for example that of the Earth. When we speak of the *system*, in this case, we mean the Sun, which we assume to be fixed in space, and the Earth, which is moving. The goal is to determine the motion of the Earth over a small time step Δt . The nature of prediction is that we need Newton's equations, which tell how the system changes

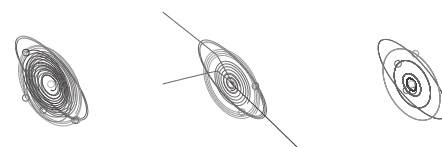


Figure 2 Simulations of the outer solar system: Euler's method (left), 'backward' Euler (middle), Newton's method (right). The circles indicate the locations of the planets at the end of the simulations.

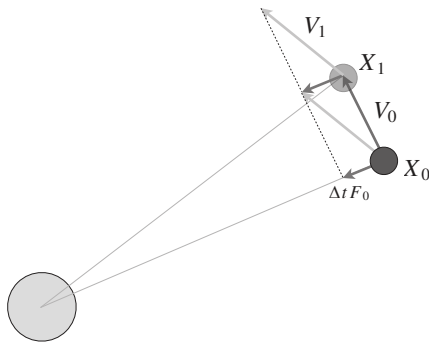


Figure 3 The method of Euler applied to the Earth orbit

from one time to the next, *plus* a precise description of the state of the system at some initial time. This precise description is called the *initial condition*. Remember this too. Even though it seems innocuous enough, it plays an important role at the end of the lecture. For a planet, it turns out that its *state* is fully described by: its *location* in space (relative to the sun in this case) and its *velocity* vector. Recall that a velocity vector tells which direction something is moving, and how fast. For this lecture, all the mathematics that is needed is that of vector arithmetic: A vector is illustrated graphically by an arrow: the direction the arrow points represents its direction, and its length represents its magnitude (how fast, in the case of a velocity vector). An important property of a vector is that we are free to move it around in space, as long as we don't rotate it or magnify it. A second property is that to add two vectors, we just attach the tail of one to the head of the other (the order doesn't matter), and then draw a new vector from the free tail to the free head.

We denote the initial location of the planet by X_0 and its initial velocity by V_0 . Together these constitute the initial condition for a planet. Stated another way, given the location and velocity of the planet at time t_0 , we want to determine its new location and new velocity at time t_1 , Δt units later. These states are like snapshots, or frames in a motion picture. In Frame 0, the planet is located at X_0 and has velocity V_0 . In Frame 1, it is located at X_1 and has velocity V_1 , and so forth. Our goal is to compute Frame 1 using the information in Frame 0.

There are hundreds if not thousands of methods for doing this. We will consider Methods A, B, and C above. Method A, the hot one, was first proposed by Leonhard Euler, a great Swiss mathematician. It proceeds as follows (Figure 3):

1. If there were no force acting on the planet, then it would move in a straight line in the direction of V_0 for a time Δt , and its new

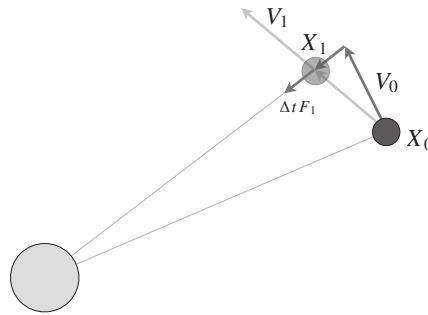


Figure 4 The 'backward' Euler method applied to the Earth orbit

position would be $X_1 = X_0 + \Delta t V_0$. Euler just uses this value for the new position.

2. If the planet were standing still, on the other hand, the force acting on it would be constant, inversely proportional to the square of its distance from the sun, and acting along the line between the planet and the sun. Denote the force by F_0 , as it is shown in the figure. The velocity is modified according to Newton's laws as follows: $V_1 = V_0 + \Delta t F_0$. Recall how to add vectors: match head to tail and draw an arrow. We take this as the new value of the velocity at time t_1 .

Method B is also attributed to Euler, but it is a bit more sophisticated (Figure 4). It is referred to as the 'backward' Euler method, for reasons I do not wish to go into. In this case we first *pretend* we know the position of the planet at time X_1 . Knowing it, we can compute the force F_1 there, and given the force we can compute the change in velocity variable using the formula $V_1 = V_0 + \Delta t F_1$. In other words, the velocity vector is updated using the force at time t_1 . Now, knowing the velocity we compute the position using the final velocity instead of the initial one to get $X_1 = X_0 + \Delta t V_1$. Of course, we didn't know X_1 to begin with, so these two equations have to be solved together. With a little luck one can proceed by guessing X_1 , computing V_1 , then computing a better estimate of X_1 , then a better estimate of V_1 and so on, until one is satisfied that repeating this won't improve the solution any more. We say that X_1 and V_1 are defined *implicitly*, and we also refer to method B as the *implicit* Euler method. It was really popularized by people like John Butcher, a New Zealand mathematician who just last February was awarded the Van Wijngaarden Prize in this very hall.

The just-right Method C was first used by Newton, see Figure 5. (These days, Method C is referred to as the 'symplectic Euler' method.) In this case, the position is updated assuming the Sun is absent, $X_1 = X_0 + \Delta t V_0$, and

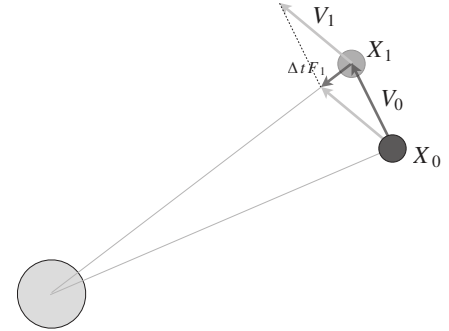


Figure 5 The method of Newton applied to the Earth orbit

then the velocity is updated assuming the planet is standing still *at its new location*: $V_1 = V_0 + \Delta t F_1$. Curiously, it turns out that this method satisfies Kepler's law that equal areas are swept out in equal times! And this fact is related to its just-right behavior. Newton's graphical proof of this fact is included in the *Principia*.

Once we know how to solve Newton's equations for a time step of size Δt , we can compute the locations of the planets at time t_1 . At this point we are back to our original problem: the governing equations have not changed, and we have a new initial condition. We then solve the equations again for another time Δt to get the locations of the planets at time t_2 , and so on, until we get to T . If the number of steps is very large (and we will see that it must be), this process could become rather tedious. Until the early 1950s, we paid a room full of people to do these computations; thereafter we developed the very first computers that put the very first people out of their jobs. The first computer in the Netherlands was built under the leadership of Adriaan van Wijngaarden who was one of my predecessors in the Professorial Chair of the *Stichting voor Hoger Onderwijs in de Toegepaste Wiskunde* [11]. Van Wijngaarden was the original head of the computing department at the *Mathematisch Centrum*, currently *Centrum Wiskunde & Informatica* and my employer. Later he served as director of the institute for many years.

Two limit cases

The astute reader may object: "But the force and velocity are changing continuously during the time step Δt , so your answer is wrong!" This is true, we *have* made an error, and error too is the nature of prediction. However, we expect the error to be smaller if the time step is smaller. We can test this by computing one period of Earth's orbit, 365 days. If we take 12 time steps of size Δt equal to one month, the errors stack up and the orbit rapidly spirals

away. This is successively improved using 52 time steps of one week and 365 time steps of one day. If we take time steps of size Δt equal to one hour, the orbit is nearly closed (to visual inspection), even using Euler's method. However, the more steps we take, the more work for the computer (or the people), and the longer we have to wait for our answer. In practice Δt is chosen as a compromise between our desire for accuracy and our patience in waiting for the answer.

Mathematical analysis is often concerned with limits: what happens when some quantity becomes very large or very small? Two limits are of interest to prediction methods. The first limit we have just illustrated: it is the limit in which the length of the time interval T is kept fixed (one year), while taking Δt smaller and smaller (at the same time taking more and more steps). I refer to this as the *approximation limit*, because the prediction becomes ever more precise, closer and closer to the exact solution. The approximation limit belongs to the realm of *Numerical Analysis*, the first half of the name of the Chair of Numerical Analysis and Dynamical Systems. Numerical analysts try to show how rapidly the error decreases as we take two times as many steps, half as large. Convergence is important, but in practice computations are often done with large time steps and on time intervals much too long for the approximation limit to apply. A meteorologist-colleague once said: "You can always recognize the mathematicians, because they explicitly state that Δt is a positive constant."

There is a second limit of interest to mathematicians, and that is the limit where Δt is kept fixed but the number of steps becomes large. For example, we think of repeating our calculation with Euler's method over and over to create an infinite sequence of snapshots of our solar system. We are interested in how the solution behaves in this limit, do the planets spiral away as with method A, crash into the sun as with method B, or follow nice ellipses as with Newton's method C? Questions of this nature refer to the *stability* of the method and belong more generally to the realm of mathematics called *Dynamical Systems*, the second half of the name of the Professorial Chair. For fixed Δt , the iterated numerical process defines a so-called *discrete dynamical system*. Questions pertaining to the stability of numerical prediction methods were studied in great detail by the previous two occupants of this Chair: Pieter van der Houwen and Jan Verwer. I had the very great pleasure of working with both of them. In fact,

at least two other occupants of the Chair also worked on discrete dynamical systems: Hans Lauwerier, who wrote a popular book on fractals [6], and Van Wijngaarden himself, who proposed a discrete computer calculus, which he suggested would be more appropriate for computational modeling than the continuum calculus used now [14].

... (and the prediction of nature)

At this point we have demonstrated the mechanical process of prediction. In most cases, however, there is a theoretical catch, and that is the question of predictability. To quote pioneering quantum physicist Niels Bohr: "Prediction is very difficult, especially if it is about the future."

It has been postulated that our fascination for weather stems from its unpredictability: if one attempts to make use of the daily weather report, one may occasionally be disappointed. If one follows the multiple day forecasts, it is even more likely that the inaccuracy draws one's attention. There seems to be a problem with weather prediction. After our foregoing discussion, one may ask, do meteorologists who compute the weather need to use a smaller time step? Are the governing equations wrong? Or is the initial condition wrong? In fact, all of these are sources of error: the models do not account for all physical influences, the initial condition cannot be measured everywhere in the atmosphere, and undoubtedly the step size could be smaller. However, there is something else involved that causes the above effects to be grossly amplified: the governing equations exhibit 'chaos', a subject of mathematics that has been studied since the 1960s and which gained widespread popular attention in the late 1980s with the publication of several popular books, such as *Chaos: Making a New Science* by James Gleick [4].

The essential idea of chaotic behavior is that while the motion of the system remains bounded, two different solutions, no matter how close originally, grow apart at an exponential rate. This means also that errors made in computing the solution will grow exponentially. The property holds generically for most natural systems. It was studied in meteorology by the mathematician Edward Lorenz. Among the general public, the popular example of the 'butterfly effect' is familiar, whereby it is suggested that a butterfly flapping its wings in Brazil can trigger a series of growing instabilities that eventually result in a tornado in Texas. Now, while this is probably rather exaggerated, the salient idea is that

small perturbations may lead to huge discrepancies. Lorenz first studied this phenomenon for the example of a system of equations describing circulating water in a heated box [7]. The warmed fluid rises, forcing the cooled fluid to descend, and a circular, overturning motion ensues. The state of the system is given by three variables — call them X , Y and Z — where X represents the intensity of the overturning, Y represents the temperature difference between the ascending and descending fluids and Z represents the non-linearity of the temperature profile.

Euler's method for the Lorenz system looks like this:

$$\begin{aligned} X_{n+1} &= X_n + \Delta t(sY_n - sX_n), \\ Y_{n+1} &= Y_n + \Delta t(rX_n - X_nZ_n - Y_n), \\ Z_{n+1} &= Z_n + \Delta t(X_nY_n - bZ_n). \end{aligned}$$

The numbers r , b and s are parameters: constant numbers chosen by Lorenz to be $r = 28$, $b = 8/3$, and $s = 10$. The variables X , Y and Z change in time. We can think of them as the coordinates of a point in three-dimensional space. In that case, our prediction for X , Y and Z is a sequence of such points, tracing out a curve, just like one of the planets but with a much more complex orbit. If we just examine how the variable Z varies in time, it seems unpredictable. Let us compare ten solutions of Lorenz's equations, each with a tiny error in the initial condition, say, less than one per mil. In Figure 6 (bottom) we initially observe no difference in the ten solutions; they look like a single solution. Suddenly, after a certain time has passed, they all diverge completely. The predictability is lost. This divergence occurs at an exponential rate, just like the growth of bacteria populations, bank savings, or radioactive decay. We can speak of the half-life of a prediction. How long the half-life is, actually depends on the current conditions — a large high-pressure weather pattern has a much longer half-life than a low-pressure pattern. The implication of chaos is that there is a limit or horizon to prediction — errors are always present and may grow at an exponential rate.

Earlier we looked at the solar system; it is easy to think of the solar system as being periodic. The orbits of the planets seem to be stationary. One might think we can predict the state of the solar system forever. After all, eclipses can be predicted down to the second for thousands of years. In fact, the motion of a *single* planet around the Sun would be highly predictable. However, even the plan-

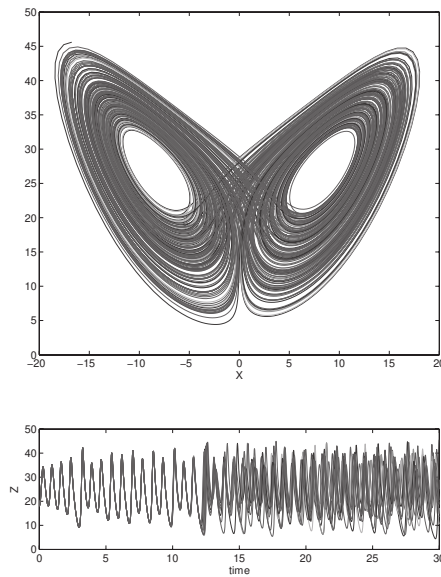


Figure 6 Chaotic divergence of trajectories of the Lorenz equations. Ten trajectories with small randomly perturbed initial condition: trajectories in phase space ($X-Z$) (top), time series for the variable Z , showing predictability up to around time $t = 12$ (bottom).

etary system is chaotic, as soon as there are three bodies involved. This was noted by Henri Poincaré in 1890 [10]. In a more recent paper appearing in *Nature*, simulations of the solar system on a time interval of five billion years were carried out [5]. Small errors in the solar system grow by a factor of ten every ten million years. This means that the horizon for solar system simulations is around 200 million years. As a result, these five billion year simulations were not predictions in the sense we have been talking about. On such long time scales, the orbits of the planets look anything but periodic, the orbital ellipses rock back and forth, the orbital radii grow and decay, sometimes the order of the planets as we know them changes. For example, the orbit of Venus becomes larger than that of Earth. This will, among other things, be devastating for mnemonics for remembering the order of the planets, like ‘My Very Educated Mother Just Served Us Nine Pizzas’ (already obsolete since the demotion of Pluto). Children five billion years from now will have to think of new ones.

As another example of chaos, let us look at the climate simulations, such as those shown in Figure 7, which were carried out by the Dutch weather service KNMI in 2005 as part of the Dutch Challenge Project [3]. In this study, the global climate was simulated over 140 years from 1940–2080. In total, 31 simulations are shown, each with a minuscule disturbance of the temperature in the initial condition — less than one per mil. Shown here are the results from the first month, January 1940, indicating

the predicted temperatures in de Bilt. There is a 10°C temperature spread by the end of the month!

Seeing this, one may wonder why anyone even bothers doing climate simulations in the presence of chaos. If we cannot trust the weather forecast two weeks ahead of time, what hope is there of predicting the whole climate 140 years in advance? The answer is, of course, that climate scientists are not interested in predicting the weather. That is, they are not interested in precisely predicting the temperature in Amsterdam on a Thursday in 2080, but in other quantities, such as for example the mean yearly temperature in Amsterdam in the period from 2070–2080, or the relative increase or decrease in rainfall for the summer months in the Netherlands between 2010 and 2080. Our premise is that such quantities are predictable, even if the precise state of the atmosphere on a given date cannot be specified.

Let us see how that might be. We return to the Lorenz system, and instead of showing the solution Z , let us just keep track of which values of Z are most likely to occur. We divide the interval from 0 to 60 up into 100 equal boxes, and with each time step of our Euler method we determine in which box the solution finds itself and count how many time steps fall within each of the 100 boxes. In this way we obtain a statistical distribution over all the values of Z , such as the one shown in Figure 8. The key point is that even though two solutions of Lorenz diverge exponentially, on a long interval and from a distance they all look more or less the same. In particular, for any initial condition this same statistical distribution will result. And now suppose the thing we want to know about the ‘climate’ of the Lorenz system depends only on the distribution of Z . For example, suppose we want to know the mean value and standard deviation of Z . Then even though the system is chaotic, this quantity is predictable. In this case, and for the Lorenz problem, it doesn’t even depend on the initial condition!

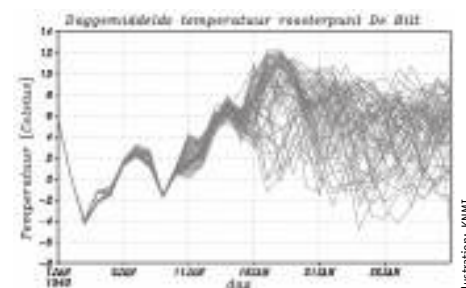


Figure 7 Ensemble climate simulation for the Dutch Challenge Project

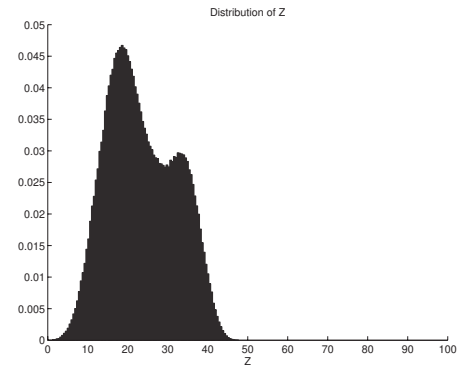


Figure 8 Despite the fact that the trajectories of the Lorenz equations (or the time series of Z) are unpredictable, the statistical distribution of Z over a long time simulation is independent of the initial condition.

Predictions of the first and second kind

So we see that there exist quantities that can and those that cannot be predicted, even for the simple Lorenz system. In between are quantities that can be predicted somewhat accurately for longer times than the weather. What about something as complex as the climate? In other work, Lorenz proposes two concepts of predictability in climate, which he refers to as climate predictions of the first and second kind [8].

Climate prediction of the first kind is similar to what we have already seen for the planets, except that one must determine which quantities are predictable on the time frame of interest, and then start from an initial condition that is consistent with the current climate. Probably multiple scenarios must be run, because the ‘current climate’ may correspond to many very different initial conditions.

Prediction of the second kind can be understood using the Lorenz example again. Suppose that instead of $r = 28$ we double this parameter and take $r = 56$ (for example, let us pretend that r represents the amount of CO_2 in the atmosphere — it doesn’t, but just pretend), and we are interested in how a doubling of CO_2 will change the climate. Then we can repeat the simulation, using $r = 56$ this time, and compare the distributions of the variable Z . As shown in Figure 9, the distribution is changed. In this way we can study how the climate adapts to a change in some parameter such as CO_2 level. This is Lorenz’s prediction of the second kind. With this approach we can predict how the statistics of climate — defined as the typical weather patterns — will change due to a change in parameters.

Climate sampling versus climate prediction
The Intergovernmental Panel on Climate

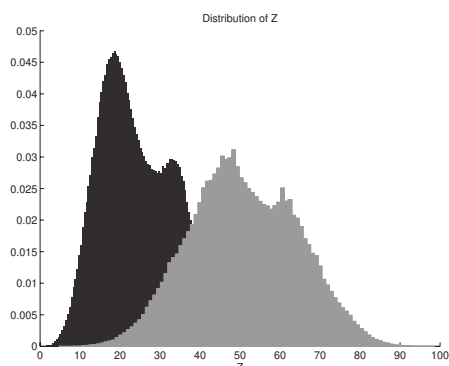


Figure 9 Comparison of the statistical distributions of the variable Z in the Lorenz equations, for $r = 28$ (dark) and $r = 56$ (light). This illustrates climate prediction of the second kind, specifically, how the ‘climate’ of the Lorenz attractor changes as the parameter r is doubled.

Change (the IPCC) has included in its reports climate simulations analogous to those just described in the simple situation of second kind prediction of Lorenz’s equation. Roughly speaking, the IPCC fixes a value of CO_2 consistent with currently observed values and performs a long simulation, just as we did with the Lorenz model, to reach statistics that are stationary (i.e., unchanging with longer simulation). Subsequently they double the value of CO_2 , and repeat the simulation to convergence of the statistics. Then these statistics are compared to make a prediction about the effects of CO_2 emissions. The differences between these statistical data are then used to extrapolate the present climate to a future one where CO_2 levels are doubled.

Kevin Trenberth is head of the climate analysis section of the National Center for Atmospheric Research in the USA and a lead author of the IPCC reports in 1995, 2001 and 2007. Trenberth submitted a letter to the weblog of *Nature* in 2007, which is very interesting in our context [12]. Just to make Trenberth’s opinion on CO_2 emissions clear, I start with the conclusion of his letter. He writes:

“A consensus has emerged that ‘warming of the climate system is unequivocal’ and the science is convincing that humans are the cause. Hence mitigation of the problem: stopping or slowing greenhouse gas emissions into the atmosphere is essential. The science is clear in this respect.”

And further:

“We will adapt to climate change. The question is whether it will be planned or not? How disruptive and how much loss of life will there be because we did not adequately plan for the climate changes that are already occurring?”

Nonetheless, Trenberth’s letter states:

“In fact there are no predictions by IPCC

at all. And there never have been. The IPCC instead proffers ‘what if’ projections of future climate that correspond to certain emissions scenarios ... They are intended to cover a range of possible self-consistent ‘story lines’ that then provide decision makers with information about which paths might be more desirable.

Even if there were, the projections are based on model results that provide differences of the future climate relative to that today. None of the models used by IPCC are initialized to the observed state and none of the climate states in the models correspond even remotely to the current observed climate. In particular, the state of the oceans, sea ice, and soil moisture has no relationship to the observed state at any recent time in any of the IPCC models. There is neither an El Niño sequence nor any Pacific Decadal Oscillation that replicates the recent past; yet these are critical modes of variability that affect Pacific rim countries and beyond ... I postulate that regional climate change is impossible to deal with properly unless the models are initialized.

The current projection method works to the extent it does because it utilizes differences from one time to another and the main model bias and systematic errors are thereby subtracted out. This assumes linearity ...”

Hence, climate simulations, as employed by the IPCC, should not be confused with climate predictions — certainly not those of the first kind as defined by Lorenz. But in fact, there is also an important tacit assumption that goes into the *second kind* climate prediction, which almost certainly does not hold for the real climate: that is, that the results of a long simulation do not depend on the initial condition chosen. Let us demonstrate this, again using the Lorenz system.

We have seen the statistical distribution for the variable Z for the original choice $r = 28$ of Lorenz. This distribution is absolutely independent of the initial condition — mathematically speaking the system has a global attractor. Now let us choose $r = 24.1$, about 15% smaller. In this case, the character of the solution changes considerably. Two solutions are shown in Figure 10. For most initial conditions the chaotic behavior persists, yet for another class of initial conditions (such as the light one shown in the figure), the behavior is highly predictable. For this value of r , the statistical distributions also depend on the initial condition!

The IPCC takes care not to refer to its climate simulations as predictions. They

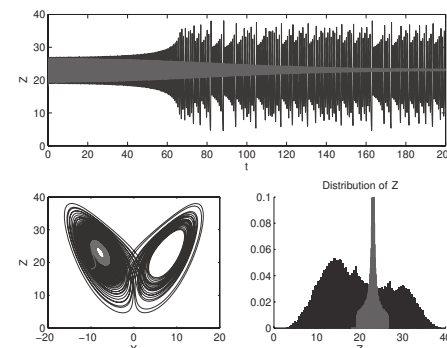


Figure 10 The statistics of trajectories of the Lorenz equations with $r = 24.1$ depends on the initial condition: time series for Z , showing chaotic and asymptotically stable solutions (top), the same trajectories in phase space (bottom left), probability distributions of Z (bottom right).

speak of projections or scenarios, ‘consistent and plausible’ realizations of future climates. Nonetheless the simulation results are frequently misused by others to justify decisions in the face of the current warming; for example, to determine the need for higher dikes in the Netherlands. Trenberth warns that the IPCC simulations should not be used to predict regional change. In other words he says that whereas the simulations may give a plausible indication of the degree of *global* annual mean temperature increase, whether, say, the Netherlands *regionally* will be warmer or cooler, wetter or dryer, can not be deduced from the IPCC simulations. Trenberth continues:

“However, the science is not done because we do not have reliable or regional predictions of climate. But we need them. Indeed it is an imperative! So the science is just beginning. Beginning, that is, to face up to the challenge of building a climate information system that tracks the current climate and the agents of change, that initializes models and makes predictions, and that provides useful climate information on many time scales regionally and tailored to many sectoral needs.

Of course one can initialize a climate model, but a biased model will immediately drift back to the model climate and the predicted trends will then be wrong. Therefore the problem of overcoming this shortcoming, and facing up to initializing climate models means not only obtaining sufficient reliable observations of all aspects of the climate system, but also overcoming model biases.”

As he notes here, one challenge is to overcome model biases. This brings us back to the examples of the Goldilocks Methods A, B and C for the solar system at the beginning of the lecture, and the relation of all this with the research of my group at CWI. There we saw that different methods behaved differently in the dynamical systems limit of fixed Δt and

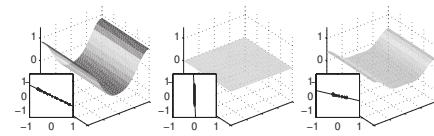


Figure 11 Mean stream functions and corresponding scatter plots of potential vorticity (inset) for long time simulations with discretizations due to Arakawa that conserve energy and enstrophy (left), energy only (middle) and enstrophy only (right). The ‘prevailing winds’, which blow along the contours of the stream function surfaces, strongly depend on the method used.

T tending to infinity. Overcoming model bias means that the methods have to be designed such that their statistics agree with those of the real solar system.

In the same way that the just-right Method C retained the equal areas property of Kepler, for an atmospheric model one can construct numerical methods that respect other natural laws like energy or something exotic like *enstrophy* — the mean variance of the rotational component of the wind. With PhD student Svetlana Dubinkina we compared three methods that were identical besides conserving energy, enstrophy or both [2]. Using these we computed the average wind field from long simulations, in other words, the ‘prevailing winds’. We found that the methods gave completely different results, as illustrated in Figure 11. The method that conserved energy predicted no prevailing wind at all — all fluctua-

tions were equally likely. The method that obeyed only the enstrophy conservation law predicted a weaker prevailing wind with no mean rotational component, and the method that conserved both gave stronger winds that were presumably more realistic.

Closing

From the first part of the lecture, there are three key elements to the nature of prediction: (1) given a mathematical rule that tells how the state of a system changes from one time to the next, and an initial condition describing the original state, we attempt to compute the state at a later time T ; (2) the prediction is an approximation, by definition it is in error; (3) chaotic growth of error effectively places a horizon on predictability.

Nonetheless, certain statistical quantities that are insensitive to this error growth are predictable on long times, but only using numerical methods that accurately reproduce the climate statistical distribution. To conclude, I would like to outline where it appears to me, based on the discussion presented here, that progress can be made in climate prediction.

For effective second kind climate prediction, two ingredients are necessary:

1. For the reference simulation, the parameters must be consistent with the current climate, and the model able to reproduce

the current climate, at least for some consistent class of initial conditions. This removes the assumption of linearity. In the words of Trenberth, the models must be initialized.

2. We must establish that the climate attractor is a global one such that initial conditions are irrelevant, or else explore and categorize the basins of attraction. Otherwise, the projected (future) climate cannot be initialized.

Alternatively, to predict climate in the first kind sense, which seems to me vastly preferable, a whole program of research must be carried out, including development of measures of accuracy of statistical quantities such as averages and time correlations, an analysis of which such quantities may be computed accurately on what time frames, an understanding of how that accuracy depends on the numerical discretization parameters, and the development of new computational techniques for statistically consistent parameterization of unresolved effects or other means of correction of statistical bias introduced by the numerics. There is much work to be done.

The nature of prediction is uncertainty, but the prediction of nature may well succumb to the efforts of science. Lao Tzu’s proverb ‘Those who have knowledge, don’t predict. Those who predict, don’t have knowledge’, holds only as a truism. ←

References

- 1 M. Crok, *De Staat van het Klimaat: een Koele Blik om een Verhit Debat*, FMB Uitgevers, Amsterdam, 2010.
- 2 S. Dubinkina and J. Frank, Statistical Mechanics of Arakawa’s Discretizations, *Journal of Computational Physics*, 227, pp. 1286–1305, 2007.
- 3 Dutch Challenge Project, KNMI, <http://www.knmi.nl/onderzk/CKO/Challenge.live/index.html>, 2003.
- 4 J. Gleick, *Chaos: Making a New Science*, Viking Penguin, 1987.
- 5 J. Laskar and M. Gastineau, Existence of collisional trajectories of Mercury, Mars and Venus with the Earth, *Nature*, 459, 08096, 2009.
- 6 H. Lauwerier, *Fractals: Endlessly Repeating Geometrical Figures*, Princeton University Press, 1991.
- 7 E.N. Lorenz, Deterministic Nonperiodic Flow, *Journal of the Atmospheric Sciences* 20, pp. 130–141, 1963.
- 8 E.N. Lorenz, Climatic Predictability, *GARP Publication Series*, pp. 132–136, 1975.
- 9 NASA Eclipse Website, <http://eclipse.gsfc.nasa.gov/solar.html>, 2011.
- 10 J.H. Poincaré, Sur le problème des trois corps et les équations de la dynamique. Divergence des séries de M. Lindstedt, *Acta Mathematica*, 13, pp. 1–270, 1890.
- 11 Stichting voor Hoger Onderwijs in de Toegepaste Wiskunde, <http://staff.science.uva.nl/~thk/SHOTW>, 2011.
- 12 K. Trenberth, Predictions of climate, Climate Feedback blog of Nature, blogs.nature.com/climatefeedback/2007/06/predictions.of.climate.html, 4 June, 2007.
- 13 Universiteit van Amsterdam, Oratiereeks, www.oratiereeks.nl/upload/pdf/PDF-1201weboratie_Jason_Frank.pdf, 21 April, 2011.
- 14 A. Van Wijngaarden, Numerical Analysis as an Independent Science, *BIT Numerical Mathematics*, 6, pp. 66–81, 1966.

Gert Heckman

IMAPP

Radboud Universiteit Nijmegen

Postbus 9010

6500 GL Nijmegen

g.heckman@math.ru.nl

In Memoriam Frans Clauwens (1950–2011)

Stille wateren hebben diepe gronden

Frans Clauwens, universitair hoofddocent meetkunde aan de Radboud Universiteit Nijmegen, overleed op 22 juli 2011 na een korte ziekte. Gert Heckman kijkt terug op het werk van zijn collega.

Franciscus Johannes-Baptist Jozef Clauwens werd geboren op 17 April 1950 te Oss. In het najaar van 2010 werd bij hem een darmtumor vastgesteld. Na een slopende ziekte van driekwart jaar overleed hij op 22 juli 2011 te Nijmegen in de leeftijd van 61 jaar.

Frans had al jong een uitzonderlijk talent voor wiskunde. In 1966 won hij als middelbare scholier de Nederlandse Wiskunde Olympiade met een bijna perfecte score van 138 uit 140. Het jaar erna, net 17 geworden, begon hij zijn studie wiskunde in Nijmegen, om het drie jaar later in september 1970 met een doctoralexamen cum laude af te sluiten. Na deze flitsende start kwam Frans in dienst als wetenschappelijk medewerker bij onze universiteit.

Door inspirerende colleges van zijn hoogleraar meetkunde Henry Varma besloot Frans promotieonderzoek te gaan doen op het gebied van de differentiaaltopologie. Na een eerste jaar literatuurstudie in Nijmegen ver trok Frans in zijn tweede jaar naar Liverpool om zich verder te bekwamen onder leiding van de vooraanstaande Britse wiskundige Terry Wall. In 1975 promoveerde hij in Nijmegen op het proefschrift *Equivariant cohomology operations and the non-simply-connected surgery obstructions*, met Henry Varma als promotor. Dit werk resulteerde in diverse publicaties, onder andere in toptijdschriften als *Comptes Rendues* en *Inventiones*.

Frans was een perfectionist, en het publiceren viel hem niet altijd gemakkelijk. Slechts met tussenpozen volgden zijn latere publicaties, meestal pas wanneer hij anderen moest begeleiden, zoals Paul Wolters, die in 1990 bij hem promoveerde, en recentelijk nog Jorik Mandemaker, die bij hem afstudeerde.

Na zijn aanvankelijke start in de chirurgie van topologische ruimten deed Frans lange tijd onderzoek op het gebied van de algebraïsche K-theorie en algebraïsche L-theorie. Hij onderzocht diepgaand de bijzonderheden van lambda-ringen met als doel deze te gebruiken voor het berekenen van K- en L-groepen in de niet eindige gevallen. De laatste jaren van zijn leven werkte hij aan knopentheorie. Zijn zwanenzang is het artikel 'The algebra of rack and quandle cohomology'. Kort voor zijn dood ontving hij van de hoofdredacteur van de *Journal of Knot Theory and its Ramifications* bericht dat zijn artikel van hoge kwaliteit was en met genoegen werd geaccepteerd.

Het onderwijs gaf Frans met veel plezier en veel toewijding. Zijn geliefde topologie heeft hij aan vele generaties studenten onderwezen. Hij gaf steeds aansluitend op een semester topologie een vervolgsemester college over knopen en groepen. Het basisobject van studie was wat Frans de 'fundamentele groep' noemde. Onze studenten leerden niet

alleen de definitie van deze groep, zoals vaak gebruikelijk, maar konden er met behulp van de stelling van Van Kampen ook mee rekenen, en de rol voor knopentheorie werd belicht. Hij was vele jaren lid van de examencommissie en de opleidingscommissie, en bij het maken van opgaven voor het Nijmeegs wiskundeternooi was Frans steeds actief betrokken.

We herinneren ons Frans Clauwens als een plezierige collega. Een beetje stille man, en enigszins teruggetrokken. Stille wateren hebben diepe gronden, en dat sloeg zeker op Frans Clauwens.



Klaas-Jan Slooten

Nederlands Forensisch Instituut

Postbus 24044

2490 AA Den Haag

k.slooten@nfi.minvenj.nl

Onderzoek

Kansrekening in forensisch DNA-onderzoek

DNA-onderzoek wordt op zeer grote schaal uitgevoerd om strafzaken mee op te helderen. Dit gebeurt onder andere door het aanleggen van een databank met DNA-profielen, waarin het (forensische) DNA-profiel van verdachten, veroordeelden en sporen wordt opgeslagen. Binnenkort gaat het DNA-onderzoek een nieuwe fase in: in bepaalde gevallen wordt het mogelijk een onbekende dader op te sporen door in de databank op zoek te gaan naar een familielid van de dader, wanneer deze zelf niet daarin aanwezig blijkt te zijn. Klaas Slooten is wiskundige en werkt bij de afdeling Humane Biologische Sporen van het Nederlands Forensisch Instituut (NFI). In dit artikel gaat hij in op enkele toepassingen van kansrekening die bij DNA-onderzoek komen kijken, met name bij zoekacties in de DNA-databank.

Sinds 1994 kent Nederland specifieke DNA-wetgeving die de mogelijkheden van DNA-onderzoek in strafzaken wettelijk vastlegt. De wetgeving houdt onder meer in dat wanneer een officier van justitie bevel geeft tot DNA-afname van een persoon, deze afname verplicht is. Oorspronkelijk betrof dit alleen zeden- en geweldsmisdrijven, inmiddels alle misdrijven die worden beschreven in artikel 67 van het wetboek voor strafverdring (misdrijven waarvoor voorlopige hechtenis is toegestaan). Als gevolg hiervan beschikt de overheid over steeds meer DNA-profielen van verdachten, veroordeelden en sporen. In 1997 is de DNA-databank voor strafzaken geopend. Inmiddels (februari 2012) telt deze databank ruim 130.000 DNA-profielen van verdachten en veroordeelden, en zo'n 50.000 DNA-profielen van sporen (voor actuele cijfers zie www.forensischinstituut.nl/dna-databank).

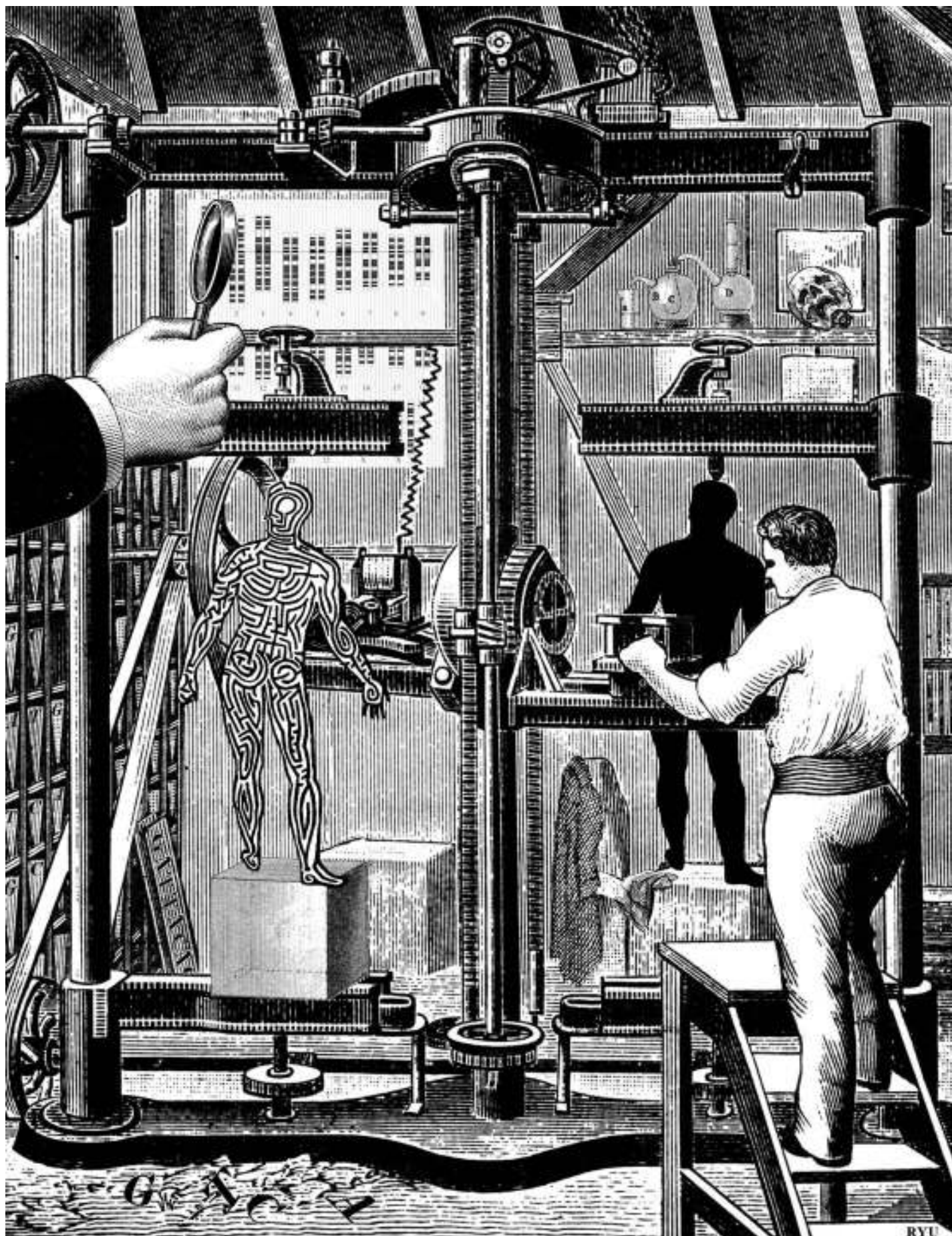
Zoals deze aantallen al aangeven is DNA-onderzoek uitgegroeid tot een op zeer grote schaal toegepast soort onderzoek: het NFI

heeft in de periode 1997–2010 ruim 500.000 DNA-analyses uitgevoerd. De grote meerderheid hiervan betreft DNA-onderzoek in strafzaken, maar DNA wordt ook gebruikt voor de identificatie van slachtoffers, het verifiëren van familierelaties in immigratiezaken, et cetera.

In dit artikel zal ik ingaan op enkele wiskundige facetten van DNA-onderzoek. Hierbij zal ik vooral verslag doen van wat bekend staat als de DNA-databankcontroversie, maar ook kort op enkele andere onderwerpen ingaan.

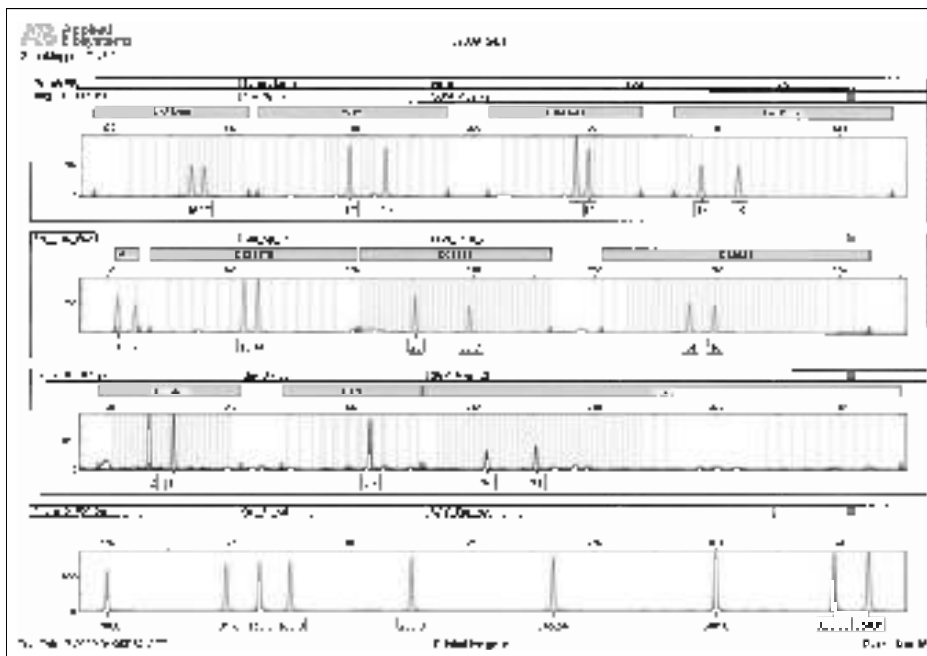
Eerst zal ik in een notendop samenvatten wat een forensisch DNA-profiel eigenlijk is. Het DNA is, zoals welbekend, onder meer opgeslagen in de celkern in de vorm van chromosomen. Er zijn 23 chromosomen, en van elk chromosoom hebben bijna alle lichaamscellen er twee: de ene is doorgegeven door de vader, de andere door de moeder. Er zijn enkele uitzonderingen, geslachtscellen bijvoorbeeld hebben van elk chromosoom er slechts een, en rode bloedcellen hebben helemaal

geen celkern, dus ook geen chromosomen. De geslachtschromosomen worden X en Y genoemd (mannen hebben XY en vrouwen XX), en alle 22 andere chromosomen heten autosomaal. Voor het bepalen van iemands forensische DNA-profiel wordt er, behalve naar het geslacht, gekeken naar een aantal locaties op het autosomale DNA (loci genoemd) waarvan bekend is dat zich daar een stuk van variabele lengte bevindt, bestaande uit een aantal herhalingen van hetzelfde woord, bijvoorbeeld ATCTATCTATCTATCT, vier herhalingen van ATCT. Zo'n aantal herhalingen dat zich voor kan doen wordt een allel genoemd, het allel met k herhalingen noemt men simpelweg allel k , in het bijzonder zou het zojuist genoemde voorbeeld allel 4 zijn. De forensische loci hebben doorgaans tien à twintig allelen en zijn daarmee sterk onderscheidend. Omdat iedereen van elk autosomaal chromosoom er twee heeft bestaat iemands DNA-profiel op elk locus uit twee getallen, de namen van de betreffende allelen. Een forensisch DNA-profiel op k autosomale loci is dus een rijtje van $2k$ getallen. Dit maakt zo'n profiel zeer geschikt voor opname in databanken en voor onderlinge vergelijking. In het tegenwoordige standaardonderzoek is $k = 15$, en wordt zoals gezegd ook het geslacht getypeerd. Het DNA-profiel wordt bepaald door het DNA in een chemische reactie (PCR genaamd) te vermenigvuldigen om er voldoende grote hoeveelheden van te verkrijgen. Hierbij wordt een aantal cycli doorlopen (29 in



RYU

Illustratie: Ryu Tajiri



Figuur 1 Het DNA-profiel van de auteur

het standaard onderzoek) waarin in principe telkens van elk allel een getrouwe kopie gemaakt wordt. Na afloop van de PCR wordt het DNA-profiel bepaald door de allelen erin op te nemen die voldoende vaak aanwezig zijn in het resulterende PCR-produkt. Een DNA-profiel wordt door de computer gegenereerd en grafisch gerepresenteerd als een piekenpatroon, waarbij de piekhoogte een maat is voor de hoeveelheid DNA, en de positie van de piek met een bepaald allel correspondeert. In Figuur 1 staat een voorbeeld van een DNA-profiel, namelijk dat van de auteur. Merk op dat op het locus TH01 slechts één allel (namelijk 9.3) is benoemd: op dit locus zijn de twee allelen op de verschillende chromosomen gelijk aan elkaar. Overigens betekent de benaming 9.3 dat er sprake is van negen volledige herhalingen en één gedeeltelijke waar maar drie (van de vier) letters aanwezig zijn. Het getoonde DNA-profiel is verouderd in de zin dat het is vervaardigd met de SGMPlus-kit die tien autosomale loci en het geslacht typeert. Tegenwoordig worden er zoals eerder vermeld vijftien autosomale loci getypeerd, waaronder de tien van SGMPlus. Dit gebeurt met de NGM-kit. Een overzicht van de ligging op de chromosomen van de loci in deze kit en het locus SE33 (dat alleen in speciale gevallen wordt onderzocht) wordt gegeven in Figuur 2.

De autosomale loci liggen in het DNA dat niet tot expressie komt (dat wil zeggen, niet codeert voor eiwitten), zodat er geen informatie over iemands gezondheid of uiterlijk wordt verkregen. Daarnaast worden de loci zo gekozen dat ze zo statistisch onafhankelijk moge-

lijk zijn. Dit kan men realiseren door de loci op verschillende chromosomen te kiezen, maar omdat er voorafgaand aan de vorming van geslachtscellen recombinatie optreedt, kunnen ook loci op hetzelfde chromosoom zich onafhankelijk gedragen.

Bewijswaarde

Een forensisch laboratorium wordt gevraagd om inzicht te geven in hoeverre bewijsmateriaal wijst op de waarheid van een of andere hypothese, bijvoorbeeld de hypothese dat een kogel uit een wapen komt, een vingerafdruk van een vinger, of in het geval van DNA, een spoor (mede) van een persoon.

Voor de opkomst van DNA-onderzoek gebeurde dat door het doen van (semi-)categorische uitspraken: de forensische expert concludeert bijvoorbeeld dat een vingerafdruk afkomstig is van een bepaalde vinger, met uitsluiting van alle andere; of juist dat een vingerafdruk niet afkomstig kan zijn van een bepaalde vinger. Een licht-variant is om met een zekerheid grenzende waarschijnlijkheid te concluderen. Tegenwoordig is het inzicht ontstaan dat dit soort uitspraken, zeker als het gaat om het concluderen dat een spoor alleen afkomstig kan zijn van een bepaalde bron met uitsluiting van alle andere (bekend of niet), doorgaans wetenschappelijk niet houdbaar zijn. Hierbij heeft de opkomst van DNA-onderzoek, dat van meet af aan een solide wetenschappelijke basis had, zeker een rol gespeeld. Er wordt nu door de meeste forensische disciplines overgestapt naar wat bij DNA-onderzoek de standaardma-

nier van rapporteren is, soms de Bayesiaanse methode genoemd. Volgens deze werkwijze worden twee hypothesen geformuleerd, die vaak als H_p (prosecution) en H_d (defense) worden aangeduid, en berekent men de likelihood ratio (LR)

$$\frac{P(E | H_p, I)}{P(E | H_d, I)}, \quad (1)$$

waarbij I achtergrondinformatie voorstelt. Het idee hierachter is dat de forensisch deskundige, door alleen de LR te berekenen, zich afzijdig houdt van conclusies over welke hypothese waar is, maar alleen de relatieve steun voor H_p berekent, vergeleken met die voor H_d . Het is dan aan de rechtbank om de berekening

$$\frac{P(H_p | E, I)}{P(H_d | E, I)} = \frac{P(E | H_p, I) P(H_p | I)}{P(E | H_d, I) P(H_d | I)} \quad (2)$$

uit te voeren. De rechter moet dus zelf, op grond van de achtergrondinformatie I de 'a priori' kansen $P(H_p | I)$ en $P(H_d | I)$ inschatten (dat wil zeggen, hoe kansrijk deze hypothesen zijn als het bewijs E niet bekend is), en door middel van de door de deskundige aangeleverde LR komen tot een nieuwe ('a posteriori') kansverhouding $P(H_p | E, I) / P(H_d | E, I)$ waarin het bewijs verdisconteerd is. Op die manier ontstaat er onderscheid tussen hoe sterk de 'zaak' is (gegeven door de a posteriori kansverhouding) en hoe sterk het bewijs E is (gemeten door de LR). In het bijzonder kan hetzelfde bewijs in verschillende zaken aanleiding geven tot andere overtuigingen van de rechter.

Complicaties

Wiskundig is er op het bovenstaande natuurlijk niets aan te merken, maar een natuurlijk kader voor de evaluatie van bewijs levert dit pas op als er telkens voor H_p , H_d , E en I een natuurlijke keuze is, want alleen dan is ook de bewijswaarde van E (dat wil zeggen de likelihood ratio (1), die al deze elementen bevat) ondubbelzinnig.

Dat is niet altijd zo, zoals ik dadelijk zal illustreren, en bijgevolg is er niet altijd zoiets als 'de' bewijswaarde van E . Andere misverstanden zijn dat de deskundige nooit de a priori kansen hoeft te kennen, en dat de rechter uit de a posteriori kansverhouding van H_p ten opzichte van H_d ook de a posteriori kans $P(H_p | E, I)$ kan berekenen. Dat laatste kan natuurlijk alleen als er geen andere hypothesen in het spel zijn.

Verder zijn er nog kwesties als hoe deze kansen eigenlijk geïnterpreteerd moeten wor-

den (frequentistisch?, als subjectieve kanssen?), en is het gebruik van de benodigde kansrekening in de rechtszaal, met name bij juryrechtspraak, niet overal zonder meer mogelijk. Hier zal ik niet verder op ingaan, maar het zijn eveneens heikele punten.

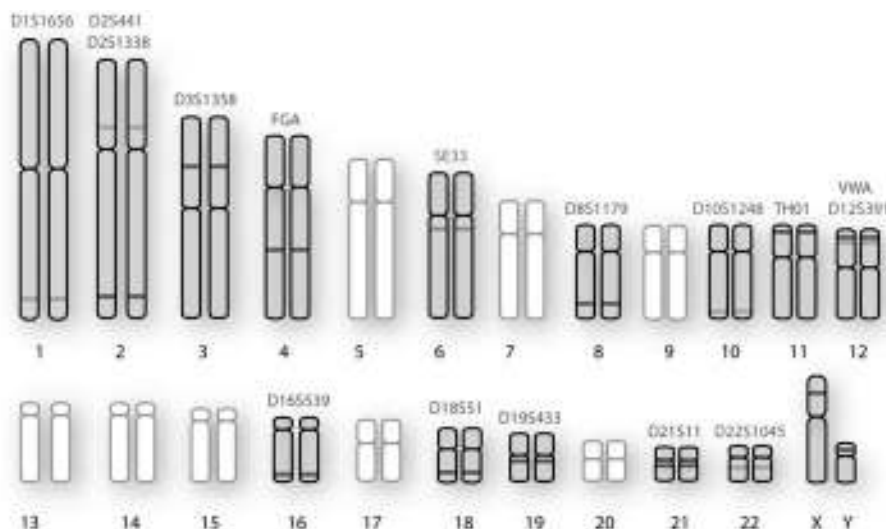
Keuze van hypotheses

Om een LR te kunnen berekenen moeten er hypotheses gekozen worden. Zowel voor H_p als H_d zijn soms meerdere zinvolle keuzes mogelijk. Het geval van een match met een DNA-profiel in de databank, dat ik zo dadelijk zal bespreken, is hier een berucht voorbeeld van, omdat deze keuzes tot zeer verschillende LR's leiden. In dit databankgeval kan je namelijk verschillende hypotheses voor H_p kiezen, waarop de kans even groot wordt wanneer er op E wordt geconditioneerd. Iets soortgelijks doet zich voor (zie bijvoorbeeld [15]) bij de keuze van H_p wanneer een verdachte matcht met één van verschillende sporen in dezelfde zaak, of met een DNA-mengprofiel.

Ook de keuze van H_d is niet altijd eenvoudig, nog afgezien van het feit dat je je kan afvragen of het formuleren hiervan niet op gespannen voet staat met het zwijgrecht: een verdachte hoeft niet uit te leggen hoe het bewijs volgens hem tot stand is gekomen. In een poging de zaak eenvoudig te houden kan men als alternatieve hypothese H_d simpelweg de ontkenning van H_p nemen. Dit vergt dan wel een model waarin $P(E | H_d)$ berekenbaar is, en zo'n model is meestal niet geformuleerd. Laten we weer het voorbeeld bekijken van een match tussen de DNA-profielen van een spoor en een verdachte, zeg Piet. Als Piet niet de werkelijke donor is van het spoor, hangt de kans dat hij per toeval dit DNA-profiel heeft af van zijn relatie tot die werkelijke donor: niet verwanten hebben een zeer kleine kans om per toeval hetzelfde profiel te hebben, broers hebben een veel grotere kans, en een eeuwig tweelingbroers hebben dat zeker. De kans $P(E | H_d)$ kan dus pas berekend worden, wanneer H_d beschrijft met welke kans de werkelijke donor van het spoor welke relatie tot Piet heeft. Dit is niet realistisch en in de praktijk wordt dan ook standaard als alternatieve hypothese genomen dat een aan de verdachte niet verwante persoon de donor van het spoor is. Waakzaamheid is dus geboden: de aldus berekende LR drukt uit hoe goed Piet kan worden onderscheiden van de algemene bevolking, maar niet van zijn verwanten.

Keuze van het bewijs

Een hieraan verwant probleem is wat men tot bewijs E en wat men tot achtergrondinformatie



Figuur 2 Locaties van de loci in de NGM-kit en locus SE33. De SGMPlus-loci zijn donkergrijs aangegeven.

tie I rekent. Ook hier volstaat de eenvoudige situatie van een DNA-match om het verschijnsel te illustreren. Stel dat verdachte S en het spoor, afkomstig van vader C , DNA-profiel g hebben, en we nemen als hypotheses $S = C$ en $S \neq C$. Wat is dan precies het bewijs? Is dat de hele collectie van feiten, dus (E_C) dat het spoor DNA-profiel g heeft, en (E_S) dat verdachte DNA-profiel g heeft? Of rekenen we E_C tot de achtergrondinformatie I en bestaat het bewijs alleen uit E_S ?

Als de bevolking bestaat uit meerdere subpopulaties die elk hun eigen frequentie hebben van dit profiel, zullen de likelihood ratios verschillen. De eerste is gegeven door

$$\frac{P(E_C, E_S | S = C)}{P(E_C, E_S | S \neq C)} = \frac{P(E_C | E_S, S = C)}{P(E_C | E_S, S \neq C)},$$

de tweede door

$$\frac{P(E_S | E_C, S = C)}{P(E_S | E_C, S \neq C)}.$$

Ze corresponderen met de twee verschillende vragen: Hoe groot is de kans dat het spoor DNA-profiel g heeft, als de verdachte het niet heeft achtergelaten? En: Hoe groot is de kans dat de verdachte dit DNA-profiel heeft, als hij het spoor niet heeft achtergelaten? Voor de laatste vraag hoeft je (verwantschap negerend) alleen de frequentie van het DNA-profiel in de subpopulatie van de verdachte te weten, maar voor de eerste moet je de kans π_i kennen dat het spoor is achtergelaten door iemand uit de i -de subpopulatie. In dit geval hangt de likelihood ratio van die a priori kansen π_i af!

Ook hier geldt dat de a posteriori kansverhouding niet van deze keuzes afhangt, die

alleen tot gevolg hebben dat er een factor uitgewisseld wordt tussen de likelihood ratio en de prior odds. In [19] hebben Ronald Meester en ik een uitgebreide studie gemaakt van dit verschijnsel, waarbij we ook onderzoeken wat de invloed is van onzekerheid over de bevolkingsfrequenties van de DNA-profielen, en over tot welke subpopulatie iemand behoort.

Databanken

Directe vergelijkingen

Eerst gaan we terug naar de discussie die in de jaren negentig werd gevoerd over de bewijswaarde van een match in de databank. De vraag rees hoe die zou verschillen van de bewijswaarde van een enkelvoudige spoor-persoonvergelijking, als gevolg van het grote aantal vergelijkingen dat was uitgevoerd. Laten we S de persoon noemen die als enige matcht in de databank $\mathcal{D}$, C de werkelijke donor van het spoor, en N de grootte van $\mathcal{D}$. Als we werken in een homogene populatie waarin p de frequentie van het betreffende profiel is, en we negeren verwantschap, dan doen de hierboven genoemde complicaties zich niet voor en is het eenvoudig in te zien dat de likelihood ratio voor de hypotheses $S = C$ versus $S \neq C$ geassocieerd met enkel de match tussen de twee profielen van S en C , gelijk is aan $1/p$. De vraag was nu hoe te verrekenen dat de match afkomstig was uit $\mathcal{D}$, dat wil zeggen dat er ook $N - 1$ vergelijkingen waren uitgevoerd waarin geen match was gevonden. Maakt dit de match nu sterker of zwakker? Aan de ene kant geldt natuurlijk nog steeds dat als S niet gelijk is aan C , hij een kans p heeft om met het spoor te matchen. Aan de andere kant werd er geredeneerd dat, omdat elke match tot een verdenking zou hebben geleid,

LR	$S = C$	$C \in \mathcal{D}$
$S \neq C$	$\frac{1}{p} \frac{1-\pi_1}{1-\pi_D}$	$\frac{1}{p} \frac{\pi_1(1-\pi_1)}{\pi_D(1-\pi_D)}$
$C \notin \mathcal{D}$	$\frac{1}{p}$	$\frac{1}{p} \frac{\pi_1}{\pi_D}$

Tabel 1 LR's voor een databankmatch

de relevante kans niet langer de kans is dat S bij toeval matcht, maar dat er iemand in de hele databank per toeval matcht. Die kans is $1 - (1 - p)^N$, hetgeen meestal zeer goed wordt benaderd door Np .

De Amerikaanse National Research Council gaf in haar rapport van 1992 (zie [6]) de aanbeveling om de geconstateerde match in de databank geheel als bewijs achterwege te laten, en in plaats daarvan voor zowel spoor als verdachte aanvullende DNA-profielen (op andere loci) te genereren. Als de match dan stand zou houden, zou de bewijswaarde alleen betrekking moeten hebben op deze loci. Nog afgezien van de theoretische bezwaren tegen dit wel heel conservatieve advies is er de praktische complicatie dat additionele loci typeren niet altijd mogelijk is, wat dan zou betekenen dat een match met zo'n spoor zonder gevolgen zou blijven.

De redenering die leidt tot het berekenen van de kans dat er iemand in de databank ten onrechte matcht, is gestoeld op principes van de frequentistische statistiek. Intussen ontstond zoals gezegd echter consensus dat de bewijswaarde gerepresenteerd zou moeten worden door een likelihood ratio. Daarmee was de discussie zeker niet beslecht. Hiervoor zijn immers meerdere mogelijkheden (zie hierboven): we kunnen als eerste hypothese $S = C$ of $C \in \mathcal{D}$ nemen, en als tweede kunnen we $S \neq C$ en $C \notin \mathcal{D}$ nemen. Dit levert vier verschillende likelihood ratios. De twee die aanleiding gaven tot de discussie waren de paren $S = C$ versus $S \neq C$ en $C \in \mathcal{D}$ versus $C \notin \mathcal{D}$.

Wie kiest voor $S = C$ versus $S \neq C$, concludeert [1–2, 8] dat de bewijswaarde van een DNA-databankmatch groter is dan $1/p$, omdat de $N - 1$ uitsluitingen de kans op $S = C$ alleen maar vergroten. Omdat $S = C$ ook is wat een rechtbank wil onderzoeken, werd dit door velen als een juiste weergave van de bewijswaarde gezien. Zoals Balding en Donnelly aanvoeren in [2] als bezwaar tegen de hypothesen $C \in \mathcal{D}$ versus $C \notin \mathcal{D}$: “A court is not concerned with the collective guilt or innocence of the database.”

Aan de andere kant maakten sommigen bezwaar (zie [20]) tegen het nemen van $S = C$ als hypothese omdat deze wordt geformuleerd nadat de match is gevonden, en dus een

data-afhankelijke hypothese zou zijn waardoor de bewijswaarde geflatteerd wordt. Immers, zo betogen zij, als $p = 1/N$, dan is de kans op een unieke match even groot wanneer $C \in \mathcal{D}$ als wanneer $C \notin \mathcal{D}$, en is dat te verenigen met eraan toekennen van een bewijswaarde van $1/p$ of meer? In plaats daarvan wordt voorgesteld om de hypothesen $C \in \mathcal{D}$ en $C \notin \mathcal{D}$ te nemen, hetgeen een likelihood ratio van $1/(Np)$ oplevert, wanneer de a priori kansen $P(C = d_i)$ gelijk zijn. Dit sluit aan bij het in 1996 door de Amerikaanse National Research Council (NRC) gepubliceerde rapport waarin werd aanbevolen om $1/(Np)$ te nemen “if one wishes to describe the impact of the DNA evidence under the hypothesis that the source of the evidence sample is someone in the database” [17].

Het probleem is wederom (zoals ook geconcludeerd in [15]) dat het concept bewijswaarde tot op zekere hoogte arbitrair is, en alleen de a posteriori kansverhouding goed gedefinieerd is. Tegenover het feit dat $S = C$ een data-afhankelijke hypothese is, staat dat *alle* hypothesen $C = d_i$ (voor $d_i \in \mathcal{D}$) voorafgaand aan de zoekactie gedefinieerd zijn, anders zouden we deze niet uitvoeren. Het is alleen zo dat na afloop de hypothese $S = C$ als enige nog mogelijk is.

Aan de andere kant is er tegen Balding en Donnelly in te brengen dat de rechtbank in het geval van een unieke match wel degelijk geïnteresseerd is in de collectieve kans op schuld of onschuld van de databank. Sterker nog, dat is precies de kans die de rechtbank wil berekenen: immers $P(C \in \mathcal{D} | E) = P(S = C | E)$.

Een overzicht van de likelihood ratios die in dit verband verkregen worden, is te zien in Tabel 1, met $\pi_1 = P(S = C)$ en $\pi_D = P(C \in \mathcal{D})$. Merk op dat al deze likelihood ratios, met uitzondering van die voor $S = C$ versus $C \notin \mathcal{D}$, van de a priori kansen afhangen. De a posteriori odds zijn steeds hetzelfde en gelijk aan $P(S = C | E)/P(S \neq C | E) = \pi_1/(p(1 - \pi_D))$. Het is dus simpelweg een kwestie van langs welke weg men de kans op schuld wil berekenen: een andere keuze leidt er alleen toe dat de likelihood ratio en de a priori odds een factor uitwisselen. Wie $S = C$ als eerste hypothese neemt, komt op een hogere bewijswaarde ($1/p$ of meer), en het risico is dat uit het oog wordt verloren hoe extreem klein de a priori kansen kunnen zijn. Immers, in een grote databank kunnen niet veel mensen een hoge a priori kans hebben om C te zijn, gemiddeld komt die hoogstens op $1/N$ uit.

Wie daarentegen $C \in \mathcal{D}$ neemt, komt op een kleinere bewijswaarde, die zelfs in het

nadeel van $C \in \mathcal{D}$ kan uitvallen. Bij uniforme prior en alternatief $C \notin \mathcal{D}$ gebeurt dit als $Np > 1$. Het risico is dat nu uit het oog wordt verloren dat, alhoewel de databank minder matches opleverde dan je zou verwachten als de dader erin zat, de kans op $S = C$ toch wel degelijk behoorlijk is toegenomen. Daarnaast moet voor deze aanpak $P(C \in \mathcal{D})$ worden berekend, hetgeen ook niet zonder complicaties is.

De discussie laait af en toe nog steeds op. Zo publiceerde de German Stain Commission (GSC) onlangs nog aanbevelingen [10] waarin een voorkeur voor $1/(Np)$ wordt uitgesproken als meest relevante statistiek. Dit standpunt werd onder vuur genomen in een reactie van Biedermann en Taroni [5, 21], maar de GSC bleef bij haar standpunt [13]. In de discussie kwamen de gebruikelijke, hierboven besproken, argumenten weer aan bod.

Er is, mijns inziens, echter nog een andere kans die interessant is om te bepalen: de kans dat, gegeven dat de databank een unieke match oplevert (maar zonder te weten met wie), dat die match met de juiste persoon is. We kunnen dit de effectiviteit van de databank noemen, want het beschrijft hoe ‘betrouwbaar’ de matches erin zijn. Laten we E_1 schrijven voor de gebeurtenis dat er een unieke match is, S voor de persoon waar dat mee is en p de populatiefrequentie van het profiel in kwestie. Dan geldt (zie [19]), ongeacht de a priori kansen voor de verdeling van C op $\mathcal{D}$, dat

$$\frac{P(S = C | E_1)}{P(S \neq C | E_1)} = \frac{1}{Np} \frac{P(C \in \mathcal{D})}{P(C \notin \mathcal{D})}, \quad (3)$$

Nu moeten we dus $P(C \in \mathcal{D})$ kennen. In de literatuur neemt men hiervoor doorgaans de fractie van de bevolking die in de databank zit. In dat geval is, als de bevolking grootte n heeft, (3) gelijk aan $1/(p(n - N))$ hetgeen toeneemt met toenemende N . Daaruit volgt dus dat hoe groter de databank is, hoe groter diens effectiviteit is. Echter, de aanname dat $P(C \in \mathcal{D})$ gelijk is aan de bevolkingsfractie is natuurlijk buitengewoon onrealistisch. Immers, in de Nederlandse databank heeft tot nu toe (zie [4]) zo'n 44% van de ooit opgenomen spoorprofielen een match met een persoon opgeleverd!

Stel dus dat we nu een andere uitdrukking voor $P(C \in \mathcal{D})$ nemen, bijvoorbeeld $P(C \in \mathcal{D}) = \sqrt{N/n}$; dan is dus bijvoorbeeld in een databank die 1% van de bevolking bevat, de kans op $C \in \mathcal{D}$ gelijk aan 10%. In dat geval kan je laten zien dat de kansverhouding (3) *daalt* wanneer N toeneemt van 1 naar

$n/4$, daar een minimum heeft en dan weer monotoon stijgt (naar oneindig als $N = n$). Het is dan dus niet zo dat een grotere databank effectiever is. Als de databank groeit, groeit ook de kans dat de dader erin wordt opgenomen, maar eveneens groeit de kans dat er per toeval iemand met hetzelfde profiel in terecht komt. Welk effect de overhand heeft, hangt van alle factoren in (3) af. Het model $P(C \in \mathcal{D}) = \sqrt{N/n}$ is natuurlijk ook niet realistisch, maar lijkt wel realistischer dan $P(C \in \mathcal{D}) = N/n$.

Tot slot van deze discussie nog even de vraag: valt deze exercitie onder de recreatieve kansrekening, of maakt het in de praktijk iets uit welke likelihood ratio men als uitgangspunt neemt? In principe natuurlijk niet, omdat een rechtbank over een schuldvraag zou moeten beslissen op basis van hoe sterk de zaak als geheel is, in plaats van alleen op basis van hoe sterk het bewijs is. In de praktijk kan de verleiding natuurlijk groot zijn om de overtuiging over hoe sterk de zaak is teveel, of zelfs geheel, te baseren op hoe sterk het bewijs is. Voor volledige DNA-profielen op 15 loci doet het er weinig toe: dan is de populatiefrequentie p in de orde van 10^{-20} , en zelfs met een databankgrootte N van enkele miljoenen, is Np nog extreem klein. Er is dus hoe dan ook sprake van zeer sterk bewijs.

Maar niet alle profielen zijn volledig, en niet alle landen typeren dezelfde loci. Tussen de Nederlandse en verschillende buitenlandse DNA-databanken worden sinds 2008 geautomatiseerd profielen uitgewisseld en vergeleken (in het kader van het zogenaamde verdrag van Prüm). De vergelijking met de Duitse DNA-databanken is bijzonder omdat dan doorgaans slechts zes of zeven loci kunnen worden vergeleken, aangezien beide landen andere verzamelingen loci in het standaard DNA-onderzoek toepassen. Voor een profiel van zes loci is p in de orde van 1 op enkele tientallen miljoenen, toch blijkt (zie [3]) uit nader onderzoek dat twee van de drie matches van zulke profielen per toeval zijn. Hier hebben we een voorbeeld van zeer kleine a priori kansen, die ondanks een forse bewijswaarde niet tot een grote a posteriori kans leiden. Daarom wordt er in geval van zo'n match standaard eerst een profiel uitgebreid zodat meer loci vergeleken kunnen worden.

Ook worden er DNA-mengprofielen opgenomen in de databank, die afkomstig zijn van meerdere personen. Deze kunnen zijn opgeslagen door alle getypeerde allelen op te nemen, zonder indicatie welke allelen van dezelfde donor zijn. In dat geval komt iemand in aanmerking als donor als die uitsluitend



Figuur 3 DNA-onderzoek bij het NFI

Foto: Beeldbank NFI

allelen heeft die in het mengsel voorkomen, en de kans p daarop is dusdanig dat $Np > 1$ zeker mogelijk is. In dat geval is een goed begrip van de discussie hierboven dus zeker belangrijk.

Het NFI neemt in het geval van een match die uit de databank wordt verkregen, in het rapport een kader op met als titel 'Aandachtspunt bij een DNA-databankmatch'. Hierin wordt de lezer van het rapport erop gewezen dat: "Naarmate het aantal DNA-profielen in de DNA-databank toeneemt, neemt ook de kans toe dat bij een zoekactie in de DNA-databank een match wordt verkregen met een persoon van wie het onderzochte sporenmateriaal niet afkomstig is. [...] Met deze mogelijkheid moet met name rekening worden gehouden wanneer het een DNA-databankmatch betreft met een spoor waarvan een onvolledig DNA-profiel of een DNA-mengprofiel is verkregen. [...]"

Familial searching

Natuurlijk levert de databank niet altijd een match op. Dat betekent vooralsnog dat de identiteit van de dader onbekend blijft na de zoekactie (er wordt natuurlijk nog wel gezocht tegen de profielen die later worden opgenomen), maar dat gaat zeer waarschijnlijk binnenkort veranderen. Immers, DNA erft over van ouder naar kind, en daarom lijken de DNA-profielen van naaste verwanten doorgaans meer op elkaar dan die van niet (of nauwelijks) verwante personen. Op basis hiervan is er momenteel een wetswijziging in voorbereiding (en reeds door Tweede en Eerste Kamer aangenomen) die het gebruik van

de databank drastisch zal verruimen: als de (vermeende) dader niet in de databank blijkt te zijn opgenomen, mag er in bepaalde gevallen ook worden gezocht naar mogelijke verwanten van hem (of haar) in de databank. Op die manier kan de identiteit van de dader wellicht alsnog worden achterhaald. Dit proces wordt *familial searching* genoemd. In het Verenigd Koninkrijk zijn met deze techniek sinds de invoering ervan in 2004 enkele tientallen zaken opgelost. Verder zijn er wereldwijd nog slechts enkele andere landen of staten die dit soort onderzoek uitvoeren.

Hoe gaat zo'n zoekactie in zijn werk? Stel dat de databank is $\mathcal{D} = (d_1, \dots, d_N)$, en het doelprofiel is C , en we kiezen een vorm van verwantschap (in de praktijk is alleen ouder/kind of broer/zus werkbaar). Het doelprofiel C wordt dan vergeleken met elk van de databankprofielen d_i . De genetische aanwijzing voor verwantschap van de gekozen vorm tussen C en d_i wordt gegeven door (alweer) een likelihood ratio die uitdrukt hoeveel waarschijnlijker het is deze twee profielen aan te treffen onder de hypothese van deze vorm van verwantschap dan onder de hypothese van niet-verwantschap. We verkrijgen dus de vector $\mathbf{r} = (r_1, \dots, r_N)$, met r_i de likelihood ratios tussen C en d_i die deze verwantschap afzetten tegen niet-verwantschap. De meeste r_i zijn klein omdat de meeste C en d_i heel weinig op verwanten van elkaar lijken, maar het is eveneens mogelijk dat een aantal r_i groot zijn omdat C en d_i per toeval veel op verwanten lijken.

Enkele elementen van de zojuist beschreven databankcontroversie zijn dus weer aan-

wezig: een groeiende databank bevat met steeds grotere kans een verwant van C , maar bevat ook met steeds grotere kans profielen die geheel toevallig op verwanten van C lijken. Daar staat tegenover dat er nu geen sprake is van geheel overeenkomende profielen maar van een gedeeltelijke overeenkomst, met een corresponderende likelihood ratio die zeer veel waarden aan kan nemen.

Wellicht omdat familial searching nog maar vrij kort wordt toegepast en het aantal landen dat het uitvoert beperkt is, is de literatuur erover niet heel uitgebreid. Het meeste gepubliceerde onderzoek is (al dan niet gesimuleerd) empirisch, waarbij wordt beschreven hoe hoog een verwant in een databank scoort indien die op likelihood ratio (of aantal gemeenschappelijke allelen) geordend wordt (zie [7, 9, 14, 16]). Daarnaast ontstaat weer, omdat het risico op toevalsmatches reëel is, discussie over de interpretatie van de zoekresultaten. In [18] wordt geadviseerd om de likelihood ratio r_i te delen door het aantal leden van de databank en pas verder onderzoek in te stellen als dit quotient r_i/N voldoende groot is, hetgeen sterk doet denken aan de reeds besproken discussie over de bewijswaarde van directe matches.

Het model van hierboven waarin de klassieke databank-controverse kan worden begrepen, hebben Ronald Meester en ik [11–12] onlangs uitgebreid naar deze meer algemene situatie. In ons model gaan we er van uit dat de databank ofwel geen, ofwel één verwant bevat van het gegeven type, die noemen we R . Dan kan je laten zien dat, indien $\pi_i = P(R = i)$ de a priori kans voorstelt dat de verwant databanklid i is,

$$P(R = i | \mathbf{r}) = \frac{r_i \pi_i}{\sum_{k=1}^N r_k \pi_k + P(R \notin \mathcal{D})}.$$

De corresponderende likelihood ratio, die ik in het vervolg databank-likelihood ratio zal noemen, is

$$\frac{P(\mathbf{r} | R = i)}{P(\mathbf{r} | R \neq i)} = \frac{r_i}{\sum_{k=1, k \neq i}^N r_k \frac{\pi_k}{1 - \pi_i} + \frac{P(R \notin \mathcal{D})}{1 - \pi_i}}. \quad (4)$$

Merk op dat deze een functie is van de a priori kansen π_k , en de individuele likelihood ratios r_k .

De databank likelihood ratio in het voordeel van $R \in \mathcal{D}$ wordt gegeven door

$$\frac{P(\mathbf{r} | R \in \mathcal{D})}{P(\mathbf{r} | R \notin \mathcal{D})} = \frac{\sum_{k=1}^N r_k \pi_k}{P(R \in \mathcal{D})}. \quad (5)$$

Als de verdeling van R op $\mathcal{D}$ uniform is, dat wil

zeggen $P(R = i) = P(R \in \mathcal{D})/N$, dan reduceert (5) tot

$$\frac{\sum_{k=1}^N r_k}{N},$$

hetgeen betekent dat de bewijswaarde van de gehele vector $\mathbf{r}$ van zoekresultaten in het voordeel van $R \in \mathcal{D}$, gelijk is aan de gemiddelde bewijswaarde voor $R = d_i$. Ook hier kan het weer gebeuren dat $\mathbf{r}$ als geheel de kans op $R \in \mathcal{D}$ verkleint, terwijl er toch voor sommige d_i zeer sterke aanwijzingen zijn dat $R = i$.

Het is niet moeilijk in te zien dat de verwachtingswaarde van r_i , als in werkelijkheid $R \neq i$, gelijk is aan 1. Dit betekent dat als $R \notin \mathcal{D}$, we verwachten dat $r_1 + \dots + r_N = N$. Met andere woorden, gegeven welke persoon dan ook is het te verwachten dat de databank een aantal leden telt die genetisch erg op verwanten van die persoon lijken. Maar pas als de totale likelihood ratio groter is dan het aantal leden van de databank is er sprake van een aanwijzing dat de databank daadwerkelijk een verwant bevat (voor uniforme prior).

Hieruit wordt ook duidelijk hoe je een zoekstrategie kan definiëren die de gezochte verwant (als die inderdaad in de databank zit) met een berekenbare kans oplevert: als $\mathcal{D}(k)$ correspondeert met de k grootste producten $r_i \pi_i$, en $\mathcal{D}^\alpha$ is de kleinste $\mathcal{D}(k)$ zodat $\sum_{j \in \mathcal{D}(k)} r_j \pi_j \geq \alpha \sum_{j=1}^N r_j \pi_j$, dan is $P(R \in \mathcal{D}^\alpha | R \in \mathcal{D}) \geq \alpha$.

Op die manier kan je bijvoorbeeld besluiten wanneer je met de zoekactie naar een verwant wilt stoppen als die tot dusverre niets heeft opgeleverd, of welke personen je moet onderzoeken om een vooraf bepaalde kans te hebben om de verwant te vinden indien die in de databank aanwezig is.

Ook andere zoekstrategieën zijn mogelijk, en niet alle vragen over familial searching zijn hiermee beantwoord. Recent hebben Ronald Meester en ik een NWO-subsidie toegekend gekregen voor verder onderzoek. Hierin gaan we onder meer kijken naar zoekstrategieën die van het daderprofiel afhangen, en het voordeel hebben dat er geen a priori kansen nodig zijn. Verder gaan we onder meer DNA-verwantschapsonderzoek in een grootschalig bevolkingsonderzoek modelleren. Zulke onderzoeken (met deelname op vrijwillige basis) worden door de nieuwe wetgeving ook mogelijk gemaakt: als familial searching in de databank geen resultaat heeft, kan zo'n onderzoek wellicht alsnog leiden naar de dader.

Tot slot

De databankdiscussie is feitelijk wel uitgekristalliseerd. Er zijn echter nog tal van andere gebieden in het DNA-onderzoek waar wiskun-

dig onderzoek nodig is. Op enkele daarvan zal ik tot besluit van dit artikel nog kort ingaan.

Onzekere DNA-profielen

Tot nu toe ben ik ervan uitgegaan dat er over de DNA-profielen zelf geen twijfel mogelijk is. Wat databanken betreft is dat niet zo onrealistisch omdat een profiel er pas in wordt opgenomen als de DNA-deskundige niet twijfelt aan de juistheid en volledigheid ervan. Het komt echter regelmatig voor, met name bij DNA-profielen van sporen die weinig DNA bevatten, dat het onzeker is of alle allelen aanwezig in de bemonstering gedetecteerd zijn en of alle gedetecteerde allelen ook echt in het DNA in de bemonstering zaten.

Dit komt omdat in werkelijkheid niet in elke cyclus van de PCR van elk allel een kopie wordt gemaakt: elk allel heeft een bepaalde kans (niet constant over alle cycli) om gekopieerd te worden. Daarnaast is de gemaakte kopie met een kleine kans niet gelijk aan het origineel. Een kopieerfout bestaat er meestal uit dat de kopie een herhaling minder bevat dan het origineel: de kopie van allel a is dan allel $a - 1$ (dat wil zeggen een herhaling minder van het woordje op dat locus). Bij voldoende uitgangsmateriaal levert dit in de praktijk geen problemen op, maar wanneer het uitgangsmateriaal zeer weinig DNA bevat, en er tijdens de PCR van een bepaald allel te weinig worden gekopieerd, kunnen er allelen die wel in de bemonstering zitten niet benoemd worden in het DNA-profiel. Dit wordt (allelische) drop-out genoemd. Ook kunnen kopieerfouten zodanig vaak voorkomen dat een allel ten onrechte in het DNA-profiel wordt opgenomen. Vrijwel altijd wordt dan allel $a - 1$ extra benoemd terwijl de bemonstering allel a bevat (dat ook is benoemd). Het lastige is natuurlijk dat aan het DNA-profiel niet altijd te zien is of alle erin benoemde allelen echt zijn, en of alle in de bemonstering aanwezige allelen benoemd zijn. In het bijzonder is het soms niet uit te sluiten dat een persoon met allelen (a, b) de donor is van een spoor waarin alleen allel a is aangetroffen. Ook het meermaals uitvoeren van een PCR op dezelfde bemonstering, het opvoeren van het aantal cycli of het inzetten van gevoeligere DNA-technologie dan het standaardonderzoek, leiden er niet altijd toe dat er een betrouwbaar DNA-profiel ontstaat. Momenteel wordt aan mogelijke matches met dit soort DNA-profielen dan ook geen getalsmatige bewijswaarde gekoppeld. Aan rekenmodellen om dit wel te kunnen doen wordt gewerkt, maar een allesomvattend model lijkt nog ver weg.

Mengsels

Wanneer het DNA van meerdere personen in een bemonstering aanwezig is, wordt het DNA-profiel een piekenpatroon met bij elk locus een wisselend aantal pieken met verschillende hoogtes. Vaak is niet te zien wat de genotypes van de verschillende donoren zijn, of zelfs maar hoeveel donoren er zijn. Dat komt omdat n personen op elk locus samen $2n$ allelen hebben, maar niet per se $2n$ verschillende allelen. Ook kan er weer drop-out voorkomen, als er van sommige van de donoren zeer weinig DNA in de bemonstering zit. Wat kunnen we nu zeggen over een match tussen een persoon S en een mengsel M , dat wil zeggen de constatering dat S uitsluitend allelen heeft die ook in M voorkomen? Voor zover er al wordt gerekend aan dergelijke mengprofielen, bestaat de berekening momenteel meestal uit het uitrekenen van deze inclusiekans: de kans dat een willekeurige persoon uitsluitend allelen heeft die ook in het mengsel voorkomen. Dit is echter een statistiek van het mengsel zelf, die niet direct de bewijswaarde geeft. Inderdaad is het zo dat van iedereen die niet is uitgesloten, er mensen zijn die veel meer als donor in aanmerking

komen op grond van hun genotype dan anderen, omdat de piekhoogtes in het DNA-profiel beter aansluiten bij donorschap of omdat ze de zeldzamere allelen in het mengsel verklaren. Het berekenen van een likelihood ratio zou voor veel forensische laboratoria de voorkeur hebben, maar er is geen consensus over hoe die eruit zou moeten zien. Ook hier zijn weer modellen nodig die piekhoogtes kunnen meenemen in de berekening. Daarnaast zal het resultaat ook afhangen van het aantal donoren dat elke hypothese veronderstelt: als een mengsel op een bepaald locus vier verschillende allelen $a_1, \dots, a_4$ heeft, en S heeft op dat locus genotype (a_1, a_1) , dan is S uitgesloten als donor als dit mengsel precies twee donoren heeft, maar niet als het er ook meer kunnen zijn.

Verder onderzoek

Het kunnen rekenen aan de onvolledige en mengprofielen is onder meer zo belangrijk omdat de sporen waarvan het technisch mogelijk is een DNA-profiel te vervaardigen steeds kleiner worden, tot aan enkele cellen aan toe. Dit soort sporen geeft echter veel vaker aanleiding tot de hierboven beschreven

problemen dan de 'traditionele' sporen waarin veel DNA aanwezig is. Daarnaast is het van deze sporen veel minder duidelijk wat hun relatie is tot het delict. Ook dit beïnvloedt natuurlijk hun bewijswaarde.

Ik heb het in dit artikel alleen gehad over het autosomale DNA, maar ook van het Y-chromosoom en van het mitochondriale DNA kunnen DNA-profielen worden verkregen. Van deze profielen zijn de frequenties in de bevolking echter veel lastiger te bepalen, omdat ze zich als een soort genetische achternaam gedragen en veel geografische verschillen in verspreiding vertonen. Dit maakt ze meer geschikt voor een exclusie dan als kwantificeerbaar bewijsmateriaal. Daarnaast is het typen van RNA in opkomst, omdat dit gebruikt kan worden om het type cel dat in de bemonstering is opgenomen te bepalen (is een minimaal spoor een bloedspoor?). Ook zijn er tests ontwikkeld om uiterlijk waarneembare kenmerken zoals oog- en haarkleur, leeftijd en lengte te voorspellen aan de hand van het genetische materiaal. Er zijn, kortom, in het forensische DNA-onderzoek nog volop terreinen waar wiskundigen een bijdrage kunnen leveren.

Referenties

- 1 D.J. Balding and P. Donnelly, Inference in Forensic Identification, *Journal of the Royal Statistical Society, Series A* **158** (1995), no. 1, 21–53.
- 2 D.J. Balding and P. Donnelly, Evaluating DNA profile evidence when the suspect is found through a database search, *J. For. Sc.* **41** (1996), 603–607.
- 3 C.P. van der Beek, Forensic DNA Profiles Crossing Borders in Europe (Implementation of the Treaty of Prüm), Profiles in DNA 2011, www.promega.com/resources/articles/profiles-in-dna/2011/forensic-dna-profiles-crossing-borders-in-europe
- 4 C.P. van der Beek, Jaarverslag 2010 Nederlandse DNA-databank voor Strafzaken, verkrijgbaar via www.forensischinstituut.nl/dna-databank
- 5 A. Biedermann, S. Gittelson, and F. Taroni, Recent misconceptions about the 'database search problem': a probabilistic analysis using Bayesian networks, *Forensic Science International* **212** (2011), 51–60.
- 6 National Research Council, DNA technology in forensic science, *Nat. Acad. Press*, Washington, 1992.
- 7 J.M. Curran and J.S. Buckleton, Effectiveness of familial searches, *Science and Justice* **84** (2008), 164–7.
- 8 A.P. Dawid and J. Mortera, Coherent Analysis of Forensic Identification Evidence, *Journal of the Royal Statistical Society. Series B (Methodological)* **58** (1996), no. 2, 425–443.
- 9 J. Ge, R. Chakraborty, A. Eisenberg, et al., Comparisons of Familial DNA Database Searching Strategies, *J. For. Sciences* **56** no. 6 (2011), 1448–1456.
- 10 P.M. Schneider et al., Allgemeine Empfehlungen der Spurenkommission zur statistischen Bewertung von DNA-Datenbank Treffern, *Rechtsmedizin* **20** (2010), 111–115.
- 11 K. Slooten and R. Meester, Statistical Aspects of Familial Searching, *Forensic Science International: Genetics Supplement Series* **3** (2011), e617–e619.
- 12 K. Slooten and R. Meester, Database likelihood ratios and familial DNA searching, submitted.
- 13 R. Fimmers et al., Erwiderung zum Brief von Taroni et al. zum Beitrag von Schneider et al. "allgemeine Empfehlungen der Spurenkommission zur statistischen Bewertung von DNA-Datenbank Treffern", *Rechtsmedizin* **21** (2011), 57–60.
- 14 T. Hicks, F. Taroni, J. Curran, et al., Use of DNA profiles for investigation using a simulated national DNA database: Part II. Statistical and ethical considerations on familial searching, *For. Sc. Int.:Genetics* **4** (2010), no. 5, 232–8.
- 15 R. Meester and M. Sjerps, The Evidential Value in the DNA Database Search Controversy and the Two-Stain Problem, *Biometrics* **59** (2003), 727–732.
- 16 S. Myers et al., Searching for first-degree familial relationships in California's offender DNA database: Validation of a likelihood ratio-based approach, *For. Sc. Int.: Gen.* **5** (2011), no. 5, 493–500.
- 17 National Research Council, The evaluation of forensic DNA evidence, *Nat. Acad. Press*, Washington, 1996.
- 18 Scientific Working Group on DNA Analysis Methods Ad Hoc Committee on Partial Matches, SWGDAM Recommendations to the FBI Director on the "Interim Plan for the Release of Information in the Event of a 'Partial Match' at NDIS", *For. Sc. Comm.* **11** (2009), no. 4.
- 19 K. Slooten and R. Meester, Forensic Identification: the Island Problem and its generalizations, *Stat. Neerl.* **65** (2011), 202–237.
- 20 A. Stockmarr, Likelihood ratios for evaluating DNA evidence when the suspect is found through a database search, *Biometrics* (1999), 671–677.
- 21 F. Taroni, A. Biedermann, R. Coquoz, T. Hicks, and C. Champod, Statistische Bewertung von DNA-Datenbank Treffern, *Rechtsmedizin* **21** (2011), 55–60.

In de verdediging

| In defence



Elliptic Delsarte Surfaces

Bas Heijne

Op 16 december 2011 verdedigde Bas Heijne zijn proefschrift *Elliptic Delsarte Surfaces* dat hij schreef onder begeleiding van prof.dr. Jaap Top. Zijn promotieonderzoek deed hij in een voor hem bekende omgeving, aangezien hij ook al aan de Rijksuniversiteit Groningen gestudeerd had. Hij noemt de overgang van studietijd naar promotietijd redelijk vloeiend en heeft geen echte tegenslag gehad tijdens zijn promotietraject. Misschien dat hij mede daardoor zulke goede herinneringen heeft aan zijn promotietijd en in het bijzonder aan de bijeenkomsten van W^4 ? Dit groepje studenten en promovendi komt geregeld bijeen om wiskundige onderwerpen te bespreken, in een volgens Heijne erg prettige en informele sfeer.

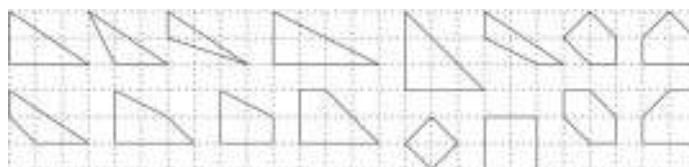
Elliptische oppervlakken

In die plezierige omgeving deed Heijne onderzoek aan elliptische oppervlakken. Deze zijn, zoals de naam suggereert, gelieerd aan elliptische krommen. Een elliptische kromme kan worden beschreven als een vlakke kromme met de eigenschap dat elke rechte lijn hem in precies drie punten snijdt. Op elliptische krommen kan een groepswet worden gedefinieerd door te zeggen dat ieder drietal punten dat op een rechte lijn ligt, optelt tot nul. De groep die je zo verkrijgt wordt de Mordell–Weil-groep genoemd.

Een elliptisch oppervlak is een oppervlak samen met een afbeelding naar een lijn, zodanig dat het inverse beeld van een punt op deze lijn bijna altijd een elliptische kromme is. Zulke elliptische oppervlakken corresponderen op een unieke manier met elliptische krommen over het functielichaam $k(t)$. Daardoor is het ook mogelijk om over de Mordell–Weil-groep van een elliptisch oppervlak te praten. Hierbij is k een algebraïsch afgesloten lichaam. In zijn proefschrift neemt Heijne (behalve in het laatste hoofdstuk) aan dat dit lichaam karakteristiek nul heeft, met als meest gebruikelijke voorbeeld de complexe getallen.

Een open probleem

De vraag hoe groot de rang (dimensie) van de Mordell–Weil-groep van een elliptisch oppervlak kan worden, is een open probleem. In de praktijk is het meestal lastig om deze rang expliciet uit te rekenen. Echter, in de jaren tachtig kwam Shioda voor een specifieke familie van elliptische oppervlakken, de zogenaamde Delsarte-oppervlakken, met een algoritme om de rang te bepalen. Een Delsarte-oppervlak is een op-



Figuur 1 Alle polygonen met precies één inwendig punt

Pas gepromoveerden brengen hun werk onder de aandacht.

Redacteur: Geertje Hek

la Voie-du-Coin 7

1218 Grand-Saconnex

Zwitserland

verdediging@nieuwarchief.nl

pervlak dat beschreven wordt door een vergelijking waarin precies vier monomen voorkomen. Een voorbeeld is $y^2 + x^3 + t^3x + t^4 = 0$.

Met zijn algoritme construeerde Shioda een elliptisch Delsarte-oppervlak dat Mordell–Weil-rang 68 heeft. Dit is de hoogste Mordell–Weil-rang van een elliptisch oppervlak over de complexe getallen die tot op heden gevonden is.

De maximale rang van een elliptisch Delsarte-oppervlak is 68

In zijn proefschrift maakte Heijne voor het eerst een classificatie van alle elliptische Delsarte-oppervlakken. Hierbij valt elk elliptische Delsarte-oppervlak in één van elf klassen. Voor elk van deze klassen is het hem vervolgens gelukt de maximale rang binnen die klasse uit te rekenen. Deze classificatie diende als basis voor Heijnes belangrijkste stelling: “De Mordell–Weil-rang van elliptische Delsarte-oppervlakken is begrensd door 68.”

De classificatie is gemaakt op basis van zogenaamde Newton-polygonen, een standaard hulpmiddel voor de studie van polynomen. Dit zijn polygonen op een rooster met in het geval van Heijne precies één inwendig roosterpunt, zie Figuur 1. In totaal bestaan er op equivalentie na zestien dergelijke polygonen: vijf driehoeken, zeven vierhoeken, drie vijfhoeken en één zeshoek. De vijfhoeken en zeshoeken corresponderen niet met elliptische oppervlakken. Bij elke vierhoek hoort precies één klasse oppervlakken, bij elke driehoek horen meerdere klassen. Op basis hiervan vond Heijne 42 klassen elliptische Delsarte-oppervlakken. Hierbij zaten echter wel veel dubbeltellingen, waardoor er uiteindelijk nog elf klassen overbleven.

Heijnes classificatie is niet perse de enige mogelijke classificatie van elliptische Delsarte-oppervlakken, maar het is wel een classificatie die goed lijkt te werken om dingen mee uit te rekenen. Zo heeft hij uit elke klasse van elliptische Delsarte-oppervlakken een representatief oppervlak gekozen en voor dat oppervlak in tien van de elf gevallen een maximaal aantal lineair onafhankelijke elementen gevonden. (Dat betekent dat hij op een eindige index na de voortbrengers van de Mordell–Weil-groep heeft gevonden.)

De vraag dringt zich dan natuurlijk op wat dat ene geval anders maakt dan de andere. Simpel gezegd hakte Heijne voor ieder canonic oppervlak het probleem in stukjes, waarbij hij makkelijke elliptische Delsarte-oppervlakken verkreeg. Van al deze stukjes heeft hij met behulp van de computer een maximale verzameling lineair onafhankelijke elementen gevonden, aannemend dat die elementen niet al te moeilijk zijn. In het geval dat hij niet heeft opgelost, kon hij wel alles in stukjes hakken, maar voor één van de stukjes geen elementen vinden. Blijkbaar zijn de elementen hier iets ingewikkelder dan in de andere gevallen, waardoor hij en zijn computer het probleem (nog) niet aan konden.

Vervolg in Hannover

Tijdens de vier jaar van zijn promotieonderzoek is er veel veranderd in Heijnes leven. Hij is in die tijd getrouwd en is vader geworden; dat alles heeft veel meer betekenis gehad dan zijn promotie. Met vrouw en zoon is hij inmiddels naar Hannover verhuisd om daar als post-doc te werken in de onderzoeksgroep van een van de leden van zijn leescommissie. Hij gaat daar wederom onderzoek doen naar algebraïsche oppervlakken, dus qua onderzoek verwacht hij geen grote veranderingen.

Als uitsmijter geeft Heijne nog een van de stellingen bij zijn proefschrift: “Het feit dat aanwezigheid bij een bepaald college verplicht wordt gesteld, is doorgaans veelzeggend over het nut van dit college.” Een mooie stelling voor het onderwijsdebat!



Use of ICT for acquiring, practicing and assessing algebraic expertise Christian Bokhove

Christian Bokhove is docent wiskunde aan het St. Michael College in Zaandam en heeft daarnaast de afgelopen vier jaar promotieonderzoek gedaan aan de Universiteit Utrecht. Hij voerde zijn onderzoek uit in het kader van het DUDOC-programma van het Platform Bèta Techniek, een programma waarbij eerstegraads docenten promotieonderzoek doen naar vernieuwingen in de bètavakken. En alsof die combinatie van lesgeven en promoveren nog niet genoeg was, is Bokhove daarnaast ook nog eens gelukkig getrouwd en heeft hij vijf kinderen, én zit hij namens de SP in de gemeenteraad van Enkhuizen.

Het is dus wellicht niet verwonderlijk dat hij gevraagd naar de favoriete stelling bij zijn proefschrift kiest voor de politiek-inhoudelijke: “‘Never waste a good crisis’ may be correct in the context of this research, but it is immoral with regard to the conduct of bankers and politicians.” Ten eerste omdat zijn onderzoek een pleidooi is voor ongewone, crisis-achtige opgaven: we leren veel van zaken die niet goed gaan. Bokhove citeert hierbij de Engelse dichter John Keats die zei: “Failure is the highway to success.” Ten tweede vanwege zijn politieke werkzaamheden: in de politiek worden crises volgens hem helaas ingezet om onnodige hervormingen door te voeren.

ICT en algebraïsche vaardigheden

Bokhoves onderzoek ging over de rol die ICT kan spelen bij het verwerven, oefenen en toetsen van algebraïsche *expertise*, waaronder Bokhove zowel vaardigheden als inzicht verstaat. Hij voerde zijn onderzoek uit aan het Freudenthal Instituut voor Didactiek van Wiskunde en Natuurwetenschappen (Flsme) onder begeleiding van prof.dr. Jan van Maanen en dr. Paul Drijvers en verdedigde op 12 december 2011 succesvol het resulterende proefschrift *Use of ICT for acquiring, practicing and assessing algebraic expertise*.

Bokhove combineerde twee recente ontwikkelingen in het wiskundeonderwijs: ten eerste de toenemende aandacht voor algebraïsche vaardigheden en ten tweede het toenemende gebruik van ICT. In de eerste fase van zijn onderzoek formuleerde hij criteria om bestaande software voor algebra tegen het licht te kunnen houden. Vervolgens selecteerde hij een tool en ontwierp hij een online, prototype lesmodule die hij testte in een reeks een-op-eenssessies met vijf leerlingen. Op basis van de bevindingen is het prototype bijgesteld en daarna eerst ingezet in twee klassen 6 vwo wiskunde B en tenslotte in vijftien klassen aan negen verschillende scholen. Die momenten waarop zijn materiaal daarwerkelijk in de les werd gebruikt, voelden echt als een soort eerste beloning voor Bokhove. Het was erg mooi om te zien hoe leerlingen ermee werkten.

Uitgangspunten bij het ontwerp

Het eerste uitgangspunt bij het onderzoek was communicatie tussen computer en leerlingen: de computer moet de leerling feedback kunnen

geven op de stappen die deze maakt. Als een leerling dan bijvoorbeeld thuis vastloopt met een opgave, kan hij dankzij gerichte feedback weer verder. In de ontworpen leeromgeving varieert de aard en de hoeveelheid feedback, afhankelijk van de invoer. Bovendien neemt de hoeveelheid feedback af naarmate de leerling verder is gevorderd, zodat die aan het eind hopelijk 'op eigen benen kan staan' en niet afhankelijk blijft van feedback.

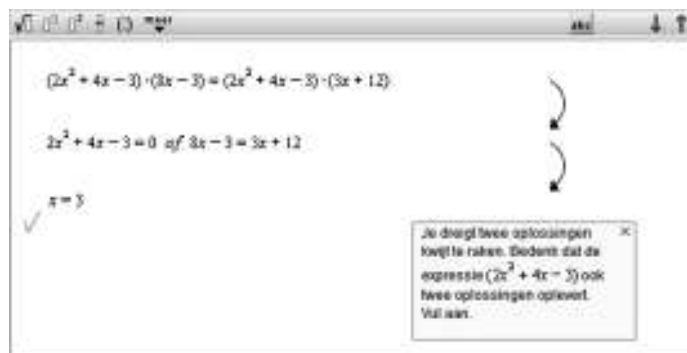
Een tweede uitgangspunt was dat de algebraopgaven — in dit onderzoek noodzakelijkerwijs slechts een klein deelgebied van de algebra — niet allemaal voorspelbaar waren. Een leerling die de module doorloopt, wordt op een gegeven moment geconfronteerd met een zogenaamde 'crisis'-opgave, een opgave die op de automatische piloot waarschijnlijk fout zou worden gemaakt. Na een dergelijke opgave volgt in de lesmodule extra uitleg in de vorm van feedback en films.

Resultaten

Leerlingen maakten voor aanvang van de lesmodule een pretoets en na afloop een posttoets. De resultaten van het onderzoek laten een significante verbetering zien van algebraïsche expertise. De factoren die een positievere score het meest voorspellen, zijn de voorkennis van de leerling, de aan testonderdelen van de module bestede tijd, en de algemene houding tegenover wiskunde. Bokhove zelf vindt een opvallende uitkomst van zijn onderzoek dat examenresultaten van de school, sekse van de leerling, de houding ten opzichte van computers en de hoeveelheid oefentijd thuis of op school geen voorspellende waarde voor de uitkomst van de posttoets hadden. Oftewel: het effect was significant, maar dit effect leek niet te zijn veroorzaakt door allerlei andere variabelen. Hij trekt daaruit voorzichtig de conclusie dat een school de module 'gewoon' kan inzetten, en zich daarbij minder hoeft druk te maken over allerlei invoeringsvoorschriften. Zie verder www.algebrametinzicht.nl.

Voortdurend schakelen

Als docent in een onderzoeksomgeving bevond Bokhove zich in een bijzondere positie, maar hij voelde zich zeker geen eenling. Hij was niet alleen onderdeel van het Flsme waar hij werd begeleid door zijn promotoren, maar ook van de groep DUDOC-docenten voor wie er geregeld bijeenkomsten werden georganiseerd. Het leven als promovendus vond hij erg leuk en enerverend, vooral omdat hij diep in een onderwerp kon duiken. Hij waardeerde de mogelijkheid om theorie en praktijk



Een oplossingsproces uit de lesmodule

te kunnen combineren, maar vond het vele 'schakelen' tussen zijn werk als onderzoeker, zijn werk als docent, zijn gezin en de politiek wel lastig.

Toch vond hij het nog moeilijker om steeds te moeten schakelen tussen de diverse promotiewerkzaamheden. Als voorbeeld noemt hij een moment waarop hij volop data aan het verzamelen was, maar zich opeens ook moest bezighouden met een artikel dat terugkwam van een reviewer.

Inmiddels is het onderzoek afgerond en het proefschrift verdedigd. Hij bewaart goede herinneringen aan de plechtigheid. Hij vond het vooral mooi om bij zijn binnenkomst met pedel, promotoren en hoogleraren op de eerste rij (een deel van) zijn gezin te zien zitten.

Het liefst blijft Bokhove theorie en praktijk combineren als docent-onderzoeker. Volgens hem moeten theorie (onderzoek) en praktijk (lesgeven) elkaar aanvullen en heeft hij op beide vlakken de expertise om het wiskundeonderwijs te kunnen verbeteren. Het is momenteel niet makkelijk wat te vinden, maar er lopen wat aanvragen voor vervolgonderzoek. Persoonlijk zou hij het jammer vinden als een deel van de DUDOC-onderzoekers datgene waarin ze het beste zijn — lesgeven — kwijtraken doordat ze bevorderd worden in een managementfunctie op school. Carrière maken binnen het onderwijs is nog steeds het management in gaan. Ook is hij er bang voor dat de DUDOC'ers binnen vijf jaar na hun promoveren worden binnengesloten in de kring van wetenschappers. Hij hoopt juist dat hij en zijn mede DUDOC'ers vooral in de praktijk kunnen laten voortleven wat ze hebben geleerd als onderzoeker, of als onderzoekers echt affiniteit houden met de praktijk. ←

Henk van der Kooij

*Freudenthal Instituut
Universiteit Utrecht
Postbus 85170
3508 AD Utrecht
H.vanderKooij@uu.nl*

Leendert van Gastel

*FNWI
Universiteit van Amsterdam
Postbus 94216
1090 GE Amsterdam
gastel@uva.nl*

André Heck

*Korteweg–de Vries Instituut
Universiteit van Amsterdam
Postbus 94248
1090 GE Amsterdam
A.J.P.Heck@uva.nl*

Dirk Tempelaar

*Department of Quantitative Economics
Universiteit Maastricht
Postbus 616
6200 MD Maastricht
D.Tempelaar@maastrichtuniversity.nl*

Hans Cuypers

*Faculteit Wiskunde & Informatica
Technische Universiteit Eindhoven
Postbus 513
5600 MB Eindhoven
hansc@win.tue.nl*

Onderwijs

Aansluitproblemen vo–wo

De aansluiting tussen voortgezet onderwijs en wetenschappelijk onderwijs laat vaak te wensen over. Een van de oorzaken is de onbekendheid van onderwijzenden met inhoud en doelstellingen van het onderwijs. Henk van der Kooij, André Heck, Leendert van Gastel, Dirk Tempelaar en Hans Cuypers richten zich op dit aspect aan de hand van vaardigheidstoetsen die ontwikkeld zijn binnen het project Nationale Kennisbank Basisvaardigheden Wiskunde.

Aansluitproblemen tussen opeenvolgende fasen in het onderwijs zijn niet nieuw. Er is altijd een spanningsveld geweest bij de overgang van primair onderwijs naar voortgezet onderwijs (vo) en van daar naar hoger onderwijs. Zelfs binnen het vo is er, sinds de invoering van de basisvorming, een spanningsveld tussen de onderbouw en de bovenbouw. Pas in 2007 heeft het ministerie van OC&W toegegeven dat de basisvorming, die werd ingevoerd in 1993 en waarbij alle leerlingen van vmbo tot vwo in de eerste twee of drie jaar van het vo een gemeenschappelijk programma moesten doorwerken, een politieke vergissing was. Maar de gevolgen voor de beheersing van met name algebra in de overgang van onderbouw naar bovenbouw havo en vwo werden al langer door de bovenbouwdocenten als bijzonder hinderlijk ervaren.

Deze spanningsvelden zijn enerzijds het gevolg van tamelijk snel opeenvolgende

koerswijzigingen in de politiek omtrent de richting van het onderwijs (zoals de eerder genoemde basisvorming, maar ook de tweede fase in 1998 en aanpassingen daarop in 2007), en anderzijds het gevolg van onbekendheid van onderwijzenden met inhoud en doelstellingen van het onderwijs dat wordt gegeven.

Omdat de politieke besluitvorming helaas erg slecht te beïnvloeden valt, richten we ons hiervoor op het probleem van de onbekendheid bij onderwijzenden en de manier waarop wij zelf, ondanks de niet-beheersbare invloeden van de politiek, iets kunnen doen om de problematiek van de aansluiting bespreekbaar te krijgen en samen naar mogelijke oplossingen te zoeken.

In het vervolg schetsen we opzet en resultaten van de SURF-projecten NKBW 1 en 2, die tussen december 2006 en september 2010 zijn uitgevoerd, en het in maart 2011 gestar-

te project ONBETWIST dat kan worden gezien als voortzetting van NKBW en enkele andere verwante projecten.

In de bespreking ligt de nadruk op toetsen waarmee de basale algebraïsche vaardigheden worden getoetst die leerlingen van vo dienen te beheersen om een succesvolle start in het wetenschappelijk onderwijs (wo) te kunnen maken. Deze toetsen werden in 2009 en 2010 zowel in het vo als het wo gebruikt. Ze zijn bedoeld als instrument om enerzijds leerlingen in 6 vwo een beeld te geven van de vaardigheden die zij zouden moeten beheersen en anderzijds de wo-docenten een beeld te geven van wat (en ook: wat niet) beginnen-de studenten worden geacht te beheersen op het gebied van algebraïsche vaardigheden.

Entree- en exittoetsen

In de roerige tijd van begin 2006 werd de politiek via de 'Lieve Maria'-studentenactie gewezen op de stevige korting op lesuren voor met name wiskunde B en de onvoldoende kennis van algebra bij beginnende studenten in het wo. De zogenaamde entreetoetsen (met name de 3TU toets) die in het wo werden gehanteerd speelden toen een belangrijke rol. Deze

Onderwerpen	Te bevragen vaardigheden
Breakvormen, wortelvormen, bijzondere producten, exponenten en logaritmen, goniometrie	Regels kennen en kunnen toepassen bij herleidingen
vergelijkingen en ongelijkheden	Diverse vormen die exact kunnen worden opgelost
Differentiëren en integreren	Concepten, regels en eenvoudige toepassingen

Tabel 1 Algebraïsche vaardigheden uit de syllabus van vwo wiskunde B

toetsen lieten zien dat beginnende studenten een aantal basale vaardigheden op het gebied van algebra niet beheersten.

In het vo bestond al langer onvrede over de vaardigheden-eisen voor de verschillende wiskundevakken, vanwege de al eerder genoemde effecten van de basisvorming en de tweede fase, maar ook door de beschikbaarheid van grafische rekenmachine en formulekaart. Per 2007 zijn in de syllabi voor de aangepaste examenprogramma's wiskunde van havo en vwo voor wiskunde A en B aparte hoofdstukken toegevoegd waarin de te beheersen algebraïsche vaardigheden vakspecifiek zijn beschreven [3]. Er wordt uitgelegd welke basisvaardigheden examenkandidaten moeten hebben zonder dat daarbij de formulekaart of de grafische rekenmachine wordt ingezet. De volledige syllabi zijn in te zien op www.examenblad.nl.

Op basis van deze aanscherpingen heeft de werkgroep bovenbouw havo-vwo van de Nederlandse Vereniging van Wiskundeleraren (NVvW) voor de vakken wiskunde B en A van vwo zogenaamde exittoetsen geformuleerd [2] om aan te geven welke beheersing van algebraïsche vaardigheden mag worden gevraagd van een vwo-leerling die een studie Natuur & Techniek (wiskunde B) of Economie (wiskunde A) in het wo ambieert.

De politiek reageerde in 2006 op de onrust met de instelling van een resonansgroep (voorzitter Jan van de Craats) die onder andere de opdracht kreeg om op zeer korte termijn een reactie te geven op de al vastgestelde in-

houd per 2007 van de wiskundevakken ten aanzien van hun doorstroomrelevantie. In de politiek wordt een geconstateerd probleem immers bij voorkeur via een snelle actie opgelost. Gelukkig waren er ook mensen die bedachten dat een dergelijk probleem meerdere oorzaken heeft, die zouden moeten worden geïnventariseerd en geanalyseerd alvorens mogelijke oplossingspaden te beschrijven voor de langere termijn. Het is de verdienste van Leendert van Gastel (UvA) dat er een project kwam waarin een aantal ho-instellingen samenwerkte om de problemen te benoemen en om te inventariseren hoe de verschillende ho-instellingen intern met deze problematieken omgaan. Het was echter een project met een looptijd van slechts één jaar. Maar SURF heeft ook een tweejarig vervolproject toegekend, waarbij ook expliciet de inbreng vanuit het vo werd toegestaan om daarmee de onderlinge afstemming te stimuleren.

De NKBW-projecten

In december 2006 startte het NKBW-project (Nationale Kennisbank Basisvaardigheden Wiskunde) met ambitieuze doelen: knelpunten in de aansluiting vo–ho inventariseren, bestaande 'good practices' op het gebied van aansluitonderwijs in het ho meer landelijk in kaart brengen, een start maken met het ontsluiten van en verwijzen naar wiskundig leermateriaal en de toetsing van algebraïsche vaardigheden in vo en ho onderling vergelijken op overeenkomsten en verschillen.

De toetsen van diverse ho-instellingen werden vergeleken met de exittoets van de NVvW en niet, zoals eerst de bedoeling was, met het eindexamen van vwo. Het eindexamen is immers veel breder gericht dan alleen op algebra. Bij de analyse van de toetsen bleek onder meer dat er verschillen bestonden in de wiskunde-onderwerpen die werden bevroegd, het taalgebruik bij de formulering van de vragen en het niveau van bevragen.

De geconstateerde verschillen in toetsing aan beide zijden van de scheidslijn waren aanleiding voor NKBW 2 om een werkpakket te definiëren voor het ontwerpen van toetsen die voor het vo een acceptabel eindniveau aan algebraïsche vaardigheden bevragen en die voor het ho een duidelijk startpunt voor het onderwijs in het eerste studiejaar aanduiden. Daarmee werd beoogd het gat in de aansluiting vo–ho voor studies in Natuurwetenschappen en Techniek (vwo B voor wo en havo B voor hbo) en Economie (vwo A voor wo) ter discussie te stellen en op termijn te komen tot een doorlopende leerlijn op het gebied van de algebraïsche vaardigheden. Omdat het NKBW 2-project een levensduur had van twee jaar (september 2008 – augustus 2010) was er voldoende ruimte om toetsen te ontwerpen en af te nemen in zowel het vo als het ho. Er zijn drie toetsen ontwikkeld voor elk van de drie trajecten havo – hbo Natuur & Techniek (wiskunde B), vwo – wo Economie (wiskunde A) en vwo – wo Natuur & Techniek (wiskunde B).

Op www.nkbw.nl is de eerste serie toetsen van 2009 te vinden (in werkpakket WP3) en ook beschrijvingen van onderwijstrajecten in de deelnemende ho-onderwijsinstellingen (WP1) en de eindrapportage over het gehele project NKBW 2 (WP5). In het vervolg worden de toetsen besproken voor het traject vwo – wo Natuur & Techniek. De andere toetsen worden uitgebreid besproken in de eindrapportage die is te vinden op genoemde NKBW-site.

De toetsen zijn opgesteld door een groep van vo- en wo-docenten met ruime ervaring met beide zijden van de overgang vo–wo [1].

Het raamwerk voor de toetsen

De kennisdomeinen

In Tabel 1 is een opsomming gegeven van specifieke en algemene algebraïsche vaardigheden zoals geformuleerd in de syllabus van vwo wiskunde B. De 'algemene vaardigheden' zoals ze in de syllabus zijn beschreven, worden bij NKBW ondergebracht bij de niveaus van bevraging.

Gebruiker	Leerlingen 6 vwo	Eerstejaars studenten N&T
toetsvariant	VB1	VB2
aantal deelnemers	502	1365
afnameperiode	maart 2009	september 2009
toetsvariant	VB3	VB3
aantal deelnemers	866	...
afnameperiode	februari 2010	oktober 2009

Tabel 2 Toetsen NKBW 2

Niveau en moeilijkheidsgraad

Er is besloten om voor het niveau van de NKBW-toetsvragen de internationaal breed geaccepteerde indeling van PISA (Program of International Student Assessment) van de OECD als uitgangspunt te kiezen [4]. In het Framework PISA 2003 worden de volgende drie niveaus onderscheiden:

- A *Reproductie*. Op dit niveau wordt kennis van veel geoefende strategieën in bekende situaties bevestigd: beheersing van de regels, definities en standaardalgoritmen. Voorbeeld: Los op $x^2 - 3x + 2 = 0$.
- B *Verbindingen*. Op dit niveau zijn (denk-)stappen nodig voordat de bekende aanpakken van niveau A kunnen worden toegepast: het gebruik van bekende strategieën in een minder bekende situatie. Voorbeeld: Los op $x - 3\sqrt{x} + 2 = 0$.
- C *Reflectie*. Op dit niveau is geen pasklare strategie voorhanden: het bepalen van een eigen strategie in een minder bekende situatie. Voorbeeld: Waarom heeft $x^8 + 2x^4 + x^2 + 2 = 0$ geen oplossingen? (Op het vwo-niveau zijn complexe oplossingen niet aan de orde.)

Het is duidelijk dat het gegeven voorbeeld bij B vereist dat de leerling/student ziet dat er in principe een kwadratische vergelijking in $\sqrt{x}$ is gegeven, om daarmee, na substitutie, het standaardalgoritme zoals bij A nodig is te kunnen toepassen. Ook kan de wortel worden geïsoleerd om daarna, via kwadrateren, uit te komen op de vergelijking $x^2 - 5x + 4 = 0$. Beide strategieën leiden tot dezelfde antwoorden, maar de moeilijkheidsgraad van de twee strategieën is niet gelijk. Nog een andere verschijningsvorm van dit type opgave heeft weer een andere moeilijkheidsgraad, omdat het onderwerp goniometrie nu eenmaal als moeilijk wordt ervaren: Los op in $[0, 2\pi]$: $\cos^2 x - 3 \cos x + 2 = 0$. Het is dus nodig om binnen een niveau van bevraging ook de moeilijkheidsgraad te benoemen.

Voor de toetsconstructie hebben wij gekozen om vanuit de toetsgroep een moeilijkheidsgraad vooraf vast te leggen en die ter commentaar voor te leggen aan de afnemende docenten. Daarmee wordt bereikt dat 'moeilijkheidsgraad' discussie oplevert en dientengevolge een in de tijd verankerbaar gegeven wordt, afhankelijk van de manier waarop dergelijke opgaven aandacht hebben of gaan krijgen in het onderwijs. De toetsen die binnen NKBW zijn ontwikkeld en afgenomen hebben een min of meer gelijke verdeling over de niveaus A en B. Opgaven op niveau C kunnen wel voorkomen, maar dan

1. De breuk $\frac{\frac{1}{2} + \frac{1}{3}}{\frac{1}{4} - \frac{1}{9}}$ is te schrijven als een geheel getal. Welk getal is dat?

2. De uitdrukking $\frac{\sqrt{a}}{2 \cdot \sqrt[3]{a}}$ is gelijk aan:

a. $2 \cdot \sqrt[3]{a}$ b. $\frac{\sqrt[6]{a}}{2}$ c. $2 \cdot \sqrt[3]{a^2}$ d. $\frac{\sqrt[3]{a^2}}{2}$

3. Werk $(a^2 - 2b)^2$ uit tot een uitdrukking zonder haakjes.

4. $\sqrt{1 + \frac{16}{9}}$ is gelijk aan

a. $1\frac{4}{9}$ b. $\frac{5}{3}$ c. $2\frac{1}{3}$ d. $1\frac{1}{3}$

5. $^{10}\log(4) + 2 \cdot ^{10}\log(5)$ is gelijk aan een geheel getal. Welk getal is dat?

6. Los op: $-1 + 2\sqrt{x} = x - 4$

7. Los op: $(x - 2)^5 = 32$

8. Los de volgende ongelijkheid op: $(x - 3)^2 \cdot (x + 1) > 0$

9. Bereken de coördinaten van de top van de grafiek van de functie $f(x) = x^4 + 4x^2 + 3$

10. Los op: $(x^2 - 3) \cdot (x + 2) = 2x \cdot (x + 2)$

11. Gegeven is de formule $y = \frac{1}{2}e^{2x+5}$.
Bepaal een waarde voor a , een waarde voor b en een waarde voor c waarmee deze formule is om te schrijven naar de vorm $x = a + b \cdot \ln(c \cdot y)$

12. In de uitdrukking $z = 4 \cdot x^2 \cdot y^{-\frac{1}{2}}$ is $x = 3$ en $z = 2$.
Bereken y .

13. Los op: $3 \cdot ^{-2}\log(4x - 5) = 6$

14. De functie $f(x) = \frac{4 \cdot e^x}{e^x + 1} + 1$ is stijgend.
De grafiek van f is hiernaast afgebeeld.
Bepaal het bereik van f .

15. Bepaal het domein van de functie $f(x) = \sqrt{2x - 1} + 4 \cdot \sqrt{3 - x}$

16. Bereken $\int_0^{\frac{1}{2}\pi} (\frac{1}{2} - \frac{1}{2} \cos(2x)) dx$

17. Bepaal een primitieve functie van $f(x) = \frac{6}{x^2} + 6x\sqrt{x}$

18. Gegeven is de functie $f(x) = \frac{3}{(4x - 1)^2}$. Bereken $f'(\frac{1}{2})$

19. Gegeven is de functie $f(x) = |x + 2| + |1 - x|$.
Welke van de onderstaande globale grafieken hoort bij de functie f ?

20. Voor welke waarden van x , met $0 \leq x \leq 2\pi$, geldt: $\cos^2(x) + \cos(x) = 0$?

Figuur 1 Toets VB3

vwo B (<i>n</i> = 866)	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20
procentuele score	79	55	88	56	40	27	76	17	62	43	40	57	63	13	25	33	51	44	43	32

Tabel 3 De scores van toets VB3

zeker niet meer dan twee per toets (zoals in de toets die in 2010 in het vo is gebruikt).

De toetsen

In de periode januari–september 2009 zijn drie toetsen ontwikkeld en afgenomen voor vwo B. De verschillende varianten duiden we aan met VB1, VB2 en VB3. In Tabel 2 wordt zichtbaar wanneer en door wie de diverse varianten zijn gebruikt.

Vanuit het vo zijn uitgebreide gegevens beschikbaar van docenten die hebben gereageerd na de afnames van 2009 en 2010. Voor het wo zijn voldoende gegevens bekend van de instaptoets (VB2), maar helaas is er alleen fragmentarische informatie beschikbaar over VB3 die als afsluitende toets na een scholingstraject is afgenomen. Dat is jammer omdat daarmee een interessante vergelijking met het vo, waar dezelfde toets in voorjaar 2010 is afgenomen, niet mogelijk is.

Afname, resultaten en commentaren

Deelname aan de toetsen in het vwo gebeurde op vrijwillige basis door docenten die meestal hun leerlingen daarop niet extra hadden voorbereid. Omdat de 6-vwo-leerlingen in 2010 de eerste lichting vormden die het aangepaste programma van 2007 hadden gevolgd, bekijken we alleen de resultaten en commentaren op de VB3 toets die in februari 2010 in het vo is afgenomen. Voor het ho geldt dat de instaptoets (versie VB2) breed genoeg is afgenomen om te kunnen analyseren. Omdat met name

de manier van afnemen en de doelgroepen nogal verschilden, wordt op deze aspecten ingezoomd.

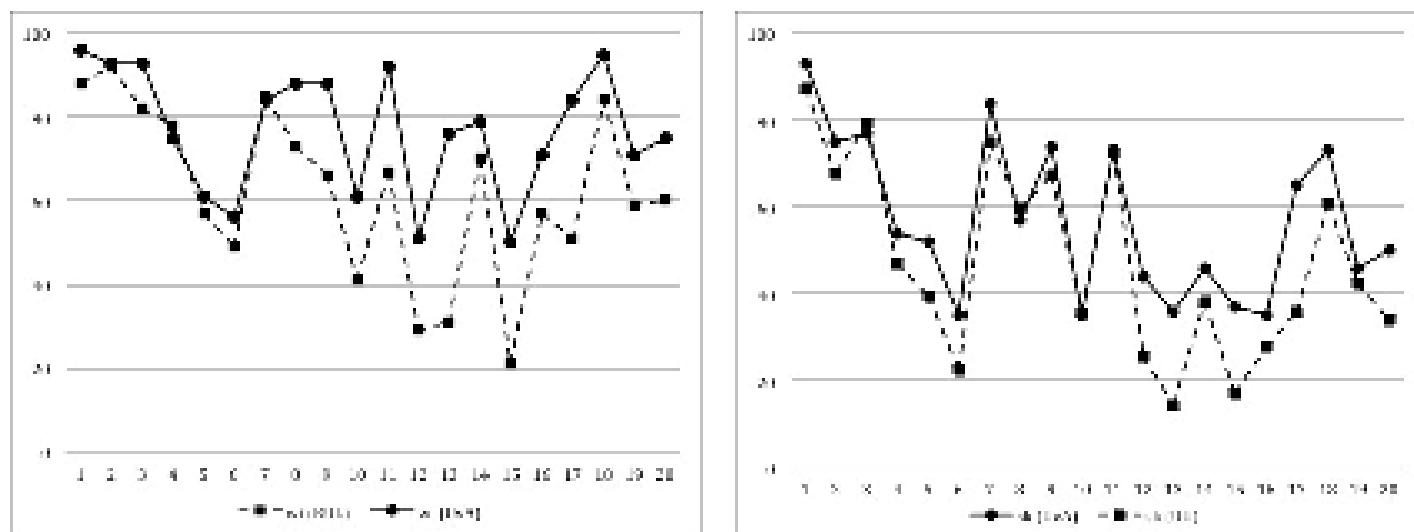
Toets VB3, vo 2010

In Figuur 1 zijn de twintig vragen van toets VB3 te zien. Aan alle deelnemende vo-docenten is gevraagd om in een Excelbestand twee bladen in te vullen. Op het eerste blad zijn de scores per vraag per leerling ingevuld; op het tweede blad werd gelegenheid geboden commentaar te geven bij onze inschatting van niveau en moeilijkheidsgraad en ook werd gevraagd of de toets voldoende dekkend was over de algebra-leerstof en of de docenten de toets als geheel maakbaar vonden voor hun leerlingen. In Tabel 3 zijn de scores van de toets te zien (het percentage van de leerlingen dat een vraag correct beantwoordde). Bij de arbitraire grens van ‘meer dan 55% is niet slecht’ blijken 13 van de 20 vragen lager te scoren. En dat lijkt behoorlijk zorgwekkend. Uiteraard moet daarbij worden aangekend dat de leerlingen (net als hun docenten) vrijwillig deelnamen en dat de uitslag van de toets geen gevolgen had voor hun eindcijfer voor wiskunde. Het is ook een feit dat slechts een deel van de wiskunde B-leerlingen kiest voor een vervolgopleiding in natuurwetenschappen, wiskunde of techniek. De echt lage scores zien we bij de opgaven 8 en 14. Opgave 8 is een redelijk eenvoudige ongelijkheid, waar overigens wel een kleine valstrik in zit: het uitsluiten van $x = 3$ in de op-

lossing. De overgrote meerderheid van de leerlingen gaat, volgens de docenten, hier echter ‘haakjes wegwerken’ en vervolgens proberen ze de derdegraadsvorm weer te ontbinden. En dat leidt tot niets. Bij degenen die wel vanuit de gegeven vorm werken leeft vaak de overtuiging dat $(x - 3)^2$ altijd positief is. Opmerkelijk, maar in het licht van de huidige onderwijscultuur begrijpelijk, zijn de uitspraken van verschillende docenten bij deze opgave: “dit kunnen ze niet zonder plot” (de vo terminologie die aangeeft dat je de grafiek van de bijbehorende functie laat tekenen door de grafische rekenmachine) en “tekenschema’s worden niet meer behandeld in het boek”. Dat opgave 14 slecht scoort is beter te begrijpen vanuit de huidige onderwijspraktijk. Leerlingen die ook wiskunde D volgen doen deze opgave beter. Citaat van een docent: “wiD-leerlingen maken deze opgave veel beter dan leerlingen die geen wiD hebben, waarschijnlijk doordat limieten daar uitgebreider behandeld zijn.” Wiskunde D is een niet-verplicht vak dat leerlingen kunnen kiezen als extra vak bovenop wiskunde B. Het is de ‘oplossing’ die de politiek heeft bedacht om tegemoet te komen aan de landelijke protesten tegen de overheidsbeslissing om wiskunde B drastisch te korten op beschikbare onderwijstijd. In die korting zijn onder andere fundamentele verkenningen van het begrip ‘limiet’ gesneuveld. Deze opgave is een typische niveau C-vraag binnen het huidige wiskunde B-programma. Een

Instelling	<i>n</i>	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20	gem
UU(wi) (MK)	128	93	88	75	61	42	68	87	86	60	45	72	73	43	80	43	50	47	73	48	62	64,8
UvA(wi)	55	96	93	93	75	61	56	84	88	88	61	92	51	76	79	50	71	84	95	71	75	77,0
UL(wi)	49	88	92	82	78	57	49	85	73	66	41	67	29	31	70	21	57	51	84	59	60	62,0
UvA(na)	76	96	91	89	79	58	51	84	77	81	53	90	42	66	70	41	43	72	91	63	66	69,21
UvA(sk)	51	93	75	77	54	52	35	84	57	74	35	73	44	36	46	37	35	65	73	46	50	57,0
UU(sk)	94	87	68	79	47	39	23	75	60	67	36	73	25	15	38	17	28	36	61	42	34	47,8
TUD (MK)	722	91	81	85	57	50	65	89	75	59	36	72	56	36	81	35	42	64	77	58	54	63,1
RUG	160	91	84	72	59	36	32	82	64	73	48	78	22	29	55	21	54	63	74	60	65	58,1
Radboud	85	94	87	81	68	53	69	94	81	9	65	72	58	42	89	41	48	60	71	60	69	65,6
VU (MK)	239	82	64	52	26	21	51	75	67	46	33	28	53	25	49	30	18	25	49	32	46	43,6

Tabel 4 De resultaten van toets VB2 (MK is meerkeuzetoets)



Figuur 2 Het effect van de opfriscursus van de UvA

strategie ligt niet vast, omdat dergelijke opgaven niet voorkomen in het onderwijsprogramma. De grafiek is er bewust bij geplaatst om aan te geven dat differentiëren hier niet helpt; ook de opmerking dat de functie stijgend is heeft die bedoeling. Zoals ook bij de toets van 2009 (VB1) is geconstateerd, roept het woord ‘bereik’ kennelijk toch bij veel leerlingen de behoefte op om naar extremen te gaan zoeken en er wordt dus gedifferentieerd. Maar bij dit probleem levert dat niets op. Opgave 15 scoort eveneens erg laag. Docenten geven ook hier aan dat leerlingen zoiets niet zonder plot kunnen; anderen noemen dat de leerlingen niet vertrouwd zijn met de combinatie van eisen die wordt opgelegd door twee voorwaarden (de wortelvormen).

Toets VB2, wo 2009

De toets VB2 is in het wo gebruikt bij de start van het collegejaar 2009/10. Afwijkend van het vo, waar alle docenten de papieren versie van de open vorm hebben afgenomen, zijn de toetsen in het wo op verschillende manieren ingezet. Alle instellingen hebben de toets ingezet in de week voorafgaand aan de eerste colleges of in de eerste collegeweek, met uitzondering van de UvA waar bij Natuurwetenschappen eerst een stoomcursus basisvaardigheden is gegeven die werd afgesloten met de instaptoets. Verder is bij de TUD, UU wiskunde en de VU de VB2-toets in meerkeuzevorm afgenomen. Deze verschillende manieren van omgaan met de toetsen zorgen er voor dat het minder zin lijkt te hebben om alle resultaten op één hoop te gooien. Mede omdat het binnen Natuurwetenschappen & Techniek om verschillende opleidingen gaat, heeft het wel zin om de verschillende opleidingen naast

elkaar te zetten. In Tabel 4 staan de resultaten per opleiding, met achtereenvolgens instelling, aantal studenten (n), procentuele score per opgave en de gemiddelde score over de totale toets.

Duidelijk zichtbaar is het, wellicht niet opzienbarende, verschil in scores tussen enerzijds de opleidingen wiskunde en natuurkunde en anderzijds scheikunde. Het blok TUD, RUG en Radboud betreft de hele breedte aan Natuurwetenschappen (& Techniek). Bewegingswetenschappen (VU) sluit de rij met een opmerkelijk naar beneden gerichte score. Eerstejaars studenten komen de universiteit binnen na een vakantie waarin veel van de opgedane kennis van het vo tijdelijk is weggespoeld. Het is daarom aardig om een vergelijking te maken tussen wo-opleidingen die de instaptoets aan het directe begin van het collegejaar hebben afgenomen en de UvA waar eerst een ‘opfriscursus basisvaardigheden’ werd gegeven alvorens de instaptoets aan te bieden. In Figuur 2 is het effect van zo’n korte opfriscursus duidelijk zichtbaar.

De resultaten van wiskunde UvA en Universiteit Leiden (links) en scheikunde UvA en UU (rechts) worden vergeleken. Duidelijk zichtbaar is dat de UvA op vrijwel alle vragen (hoewel verschillend voor wiskunde en scheikunde) beter scoort.

Discussie

In het voorgaande is beschreven hoe binnen NKBW 2 toetsen zijn geconstrueerd en hebben gefunctioneerd in zowel het vo als het wo. Opgemerkt kan worden dat er aan beide zijden van de aansluiting vo–ho binnen het project op een constructieve manier is gewerkt aan het doel om beter zicht te krijgen

op de aansluiting vo–ho. De reacties op de toetsen die zijn aangeboden en gebruikt, waren vrijwel unaniem positief. Wel bleken met name docenten van het vo min of meer geschokt door de lage scores die werden behaald door de eigen leerlingen (“nu begrijp ik de zorgen van het ho”, “ik weet nu wat ik nog moet doen voor het examen en mijn leerlingen beseffen dat ook”). Aan de andere kant (ho) groeide het besef van de bij NKBW betrokken docenten dat zij eigenlijk niet zo goed wisten wat er wel en niet is geleerd in het voortraject. Bij het samenstellen van de syllabi in 2007 voor de eindexamens vo zijn de algebraïsche vaardigheden per vak (A, B en C voor vwo en A en B voor havo) nader beschreven. Deze beschrijvingen zijn door de CEVO (nu CvE) voorgelegd aan docenten. Er bleek toen brede instemming te zijn met deze aanscherpingen. Maar er werd ook door de aanwezige docenten aangegeven dat het veel tijd zou vergen om dit in het onderwijs gestalte te geven. Daarbij werd een periode van tenminste vijf jaar genoemd. Tevens werd toen ook al de twijfel uitgesproken of de ambitie wel paste bij het beperkte aantal contacturen dat vanaf 2007 beschikbaar is. Opmerkelijk is ook dat docenten in het vo zich kennelijk in hun onderwijs zeer sterk laten leiden door de wiskundeboeken die zij gebruiken. Uitspraken als “dit kunnen ze niet zonder een plot” en “tekenschema’s worden niet meer gebruikt” lijken er op te duiden dat docenten de inhoud van hun onderwijs sterk laten bepalen door de boeken die zij gebruiken bij het onderwijs. Kennelijk hebben veel docenten niet de moed om nuttige technieken van het verleden zelf in te brengen in hun onderwijs. Daarmee wordt duidelijk dat ‘algemene



Afname van toets VB2 op de Radboud Universiteit

vaardigheden', die een beroep doen op verstandig kijken naar de gegeven vorm en op basis van die vorm een oplossingsstrategie te kiezen, zoals beschreven in de syllabi, nog niet systematisch zijn doorgedrongen in het onderwijs. Het kan nuttig zijn om de leerboeken te analyseren op het presenteren van deze algemene vaardigheden. En wellicht kunnen de auteurs van deze schoolboeken ook lering trekken uit de geconstateerde gebreken.

Basisvaardigheden

De keuze die is gemaakt voor de samenstelling van een toets, 50% A-vragen en 50% B-vragen en wellicht een enkele opgave op niveau C, roept meteen de vraag op wat nu eigenlijk basisvaardigheden zijn. Er is voor gekozen om niet alleen directe reproductie te bevragen, maar ook vragen op te nemen die een overweging (denkstep) vergen voordat er kan worden gerekend of gemanipuleerd. Daarmee wordt indirect aangegeven

dat ook vaardigheden op niveau B tot de basis behoren. Uiteraard is de grens tussen A- en B-vragen niet scherp. Afhankelijk van de aandacht die een docent besteedt aan een bepaald type opgaven, maar daarmee ook afhankelijk van het boek dat wordt gebruikt, zijn leerlingen goed (A-niveau) of minder goed (B-niveau) in staat om een oplossingsstrategie direct te herkennen en toe te passen.

Doorlopende leerlijnen

De toetsen die zijn geproduceerd en afgenomen binnen NKBW 2 hadden tot doel de aansluiting vo–ho te verbeteren door discussie op te roepen over wat wel en wat niet in het vo wordt geleerd. De resultaten laten zien dat die aansluiting zeker nog niet optimaal is, hetgeen ook was te verwachten. Aanpassing aan een nieuwe onderwijscultuur vergt nu eenmaal een aantal jaren voordat deze goed merkbaar wordt. Wel is bereikt dat met deze toetsen duidelijk wordt afgebakend wat leerlingen aan basisvaardigheden

moeten beheersen om mogelijk een goede start te kunnen maken in het vervolgonderwijs. De vo-docenten die hebben deelgenomen aan de afname zijn het eens met deze afbakening. In het wo is daarmee ook duidelijk wat het startniveau zou moeten zijn van het onderwijs in het eerste studiejaar. Op die manier zijn de NKBW-toetsen ook gebruikt in de verschillende onderwijstrajecten. Er is een beter besef ontstaan binnen de deelnemende instellingen van het wo dat beginnende studenten een betere kans wordt geboden op studiesucces als ze de gelegenheid krijgen hun basisvaardigheden op peil te krijgen. Dat gebeurt op verschillende manieren, zoals met zomercursussen of met starttrajecten in het eerste jaar die een duur hebben van een tot vier weken. Het mag duidelijk zijn dat er nog meer jaren van toetsing van en discussie over de basisvaardigheden nodig zijn om de aansluiting verder te verbeteren. Binnen het NKBW 2-project zijn drie series toetsen geproduceerd. De eerder genoemde periode van vijf jaar die tenminste nodig zou zijn om een en ander te laten indalen in de onderwijspraktijk wordt daarmee niet gehaald. Gelukkig financiert SURF nogmaals een project, nu in het kader van het SURF-programma 'Toetsing en toetsgestuurd leren'. In het project 'ON-BETWIST' werken TU/e (projectleiding), UM, OU, UvA en UU aan het opzetten van een database met oefenmateriaal en toetsitems op vier gebieden: vwo A en B, calculus, lineaire algebra en statistiek en kansrekening. Het eerste gebied is te zien als vervolg op NKBW 2, waarmee dus een continuering gewaarborgd is voor twee jaar. De drie andere gebieden bestrijken eerstejaarsvakken. Daarmee wordt de aandacht voor basisvaardigheden verbreed tot het hele eerste jaar van de universiteit. Het is uitdrukkelijk de bedoeling van SURF dat de opbrengsten van het project ten goede komen aan het hele land. Daar zullen we tot maart 2013 zeker aan werken, in de hoop dat de aansluiting vo–ho mede door deze inspanningen blijft verbeteren.

Referenties

- 1 CEVO (2008), Syllabi centraal examen 2010 Wiskunde A, Wiskunde B en Wiskunde C vwo, Utrecht.
- 2 Henk Rozenhart (2007), Instaptoetsen! Uitstaptoetsen?, *Euclides*, 83/2, pp. 92–93.
- 3 NKBW Consortium (2010), Aansluitmonitor Wiskunde vo–ho. Zicht op de cursusjaren 2008–2009 en 2009–2010, Amsterdam.
- 4 OECD (2003), The PISA 2003 Assessment Framework: Mathematics, Reading, Science

and Problem Solving Knowledge and Skills, Parijs, Frankrijk.

Ionica Smeets

Boerhaavelaan 114

2334 ET Leiden

ionica.smeets@gmail.com



Het keerpunt van Steven Engelsman

Ik had geen andere studie willen doen

Steven Engelsman (1949) was twintig jaar lang directeur van het Leidse Museum Volkenkunde. In mei vertrekt hij naar het Weense Museum für Völkerkunde. Engelsman begon zijn carrière echter als wiskundige. Het keerpunt kwam toen hij voor een tentoonstelling over de geschiedenis van de wiskunde bij Museum Boerhaave belandde. De museumwereld was leuk, heel leuk zelfs. En eigenlijk is volkenkunde voor hem precies hetzelfde als wiskunde.

Steven Engelsman was als kind bijzonder goed in wiskunde. Als de wiskundeleraar op zijn Duitse kostschool er niet was, dan nam hij de les over. Die wiskundeknobbel zat niet in de familie, zijn vader kwam uit een ondernemende textielfamilie, zijn opa van moederskant was een Zwitserse hoogleraar in de taalwetenschappen. Zijn drie broers snapten weinig van wiskunde. Toch twijfelde Engelsman geen seconde toen hij zijn studie moest kiezen. Wiskunde was zijn favoriete vak en hij kon er later heus wel een boterham mee verdienen. Hij koos voor Utrecht omdat hij dan bij zijn tante in Driebergen op kamers kon.

Hoe beviel wiskunde als studie?

“Sommige vakken vond ik geweldig, zoals analyse bij Van der Blij. Maar er waren ook dingen waar ik met mijn pet niet bij kon, zoals structuren van Freudenthal. Ik snapte niet waarom topologische groepen interes-

sant waren en wat ik ermee moest. Ik ben niet de enige die bij Freudenthal sneuvelde, het was echt een scheiding der geesten. Ik hoorde laatst dat Nobelprijswinnaar Veltman ook niets van die colleges snapte.”

Dat moet achteraf een fijne troost zijn, maar was het destijds niet een enorme klap?

“Zeker, ik zag het helemaal niet meer zitten. Henk Bos heeft me gered. Hij had een bezemklasje voor de kneusjes die structuren niet begrepen en deed daar ook geschiedenis van de wiskunde. Daardoor bloeide ik weer op. Ik haalde mijn kandidaats met de hakken over de sloot, maar ben uiteindelijk cum laude afgestudeerd. Toen had ik de lol weer te pakken.”

Wilde je daarom ook promoveren?

“Ik kreeg twee aanbiedingen, werken aan didactiek van de wiskunde bij Joop van Doormolen of promoveren in de geschiedenis

van de wiskunde. Didactiek vond ik interessant, maar een promotie vond ik bijzonderder. Mijn proefschrift ging over het begin van partiële differentiaalvergelijkingen. Wat mij fascineert in de geschiedenis van de wiskunde is hoe mensen omgaan met proble-



Steven Engelsman

men waarvan ze volstrekt niet weten hoe ze die moeten aanpakken. Hoe doen ze dat? Wat voor strategieën ontwikkelen ze om zo'n probleem te tackelen? Je volgt de gedachtegang van mensen die echt voor een groot probleem staan."

Hoe pakte jij zelf je promotieonderzoek aan?

"Na vier jaar had ik allerlei materiaal verzameld, maar het lukte me niet om iets op papier te krijgen. Ik mocht naar Engeland om twee voordrachten te geven en ik wist bij God niet hoe ik het verhaal moest vertellen. Op de boot, in de trein, ik bleef werken en ik kwam er niet uit. Anderhalf uur voor de voordracht vroeg mijn gastheer Jerry Ravetz wat ik wilde vertellen. Ik noemde allerlei dingen en liet een stapel materiaal zien. Hij bladerde er doorheen en liet in twintig minuten zien uit welke drie stappen mijn voordracht moest bestaan. Na jaren ploeteren zag ik ineens wat de lijn in mijn proefschrift was."

Toch duurde het nog een tijd voor je je proefschrift daadwerkelijk afmaakte.

"Klopt. Ik was bij Museum Boerhaave gaan werken en na een jaar vroegen mijn collega's hoe het met mijn promotie zat."

Hoe kwam je als wiskundige terecht bij een museum voor wetenschapsgeschiedenis?

"In 1978 vierde het Wiskundig Genootschap haar 200-jarig bestaan. Ik hielp toen mee bij het samenstellen van een tentoonstelling over de geschiedenis van de wiskunde. Jan van de Craats stelde voor dat we voor die tentoonstelling eens met Museum Boerhaave zouden gaan praten. Ik kwam in een ontzettend leuke wereld terecht, een club die aan wetenschapsgeschiedenis deed en daarnaast ook allerlei praktische dingen. Toen er bij Boerhaave een plek als conservator vrijkwam, vroegen ze of het iets voor mij was. Dat was het zeker, ik heb er tien jaar gewerkt."

Waardoor heb je uiteindelijk je proefschrift afgemaakt?

"Mijn collega's bij Boerhaave gaven me een trap onder mijn achterwerk. Ik mocht per maand vier dagen thuis aan mijn proefschrift werken, maar dan moest ik na een half jaar wel klaar zijn. Om mezelf te motiveren heb ik een weddenschap afgesloten met een vriend in Kopenhagen: hij kreeg elke maand twintig pagina's tekst van me. Als dat niet lukte, zou ik hem meenemen op een boottocht door Nederland. Als het wel lukte, dan kreeg ik van hem een zeiltocht door

Denemarken. Door die weddenschap werd mijn motto 'Don't get it right, get it written'. Toen ik in Utrecht zat, zag ik bij elke zin die ik opschreef het teleurgestelde gezicht van Henk Bos voor me. Steeds was ik bang dat de eerste zin niet goed genoeg was. Ik heb wel honderdduizend eerste zinnen geschreven, maar aan die tweede zin kwam ik nooit toe. Later besepte ik dat je altijd drie slagen nodig hebt om er iets goeds van te maken.

Dankzij die weddenschap had ik na zeven maanden een ruwe versie van mijn proefschrift. Daarna kreeg ik een heleboel commentaar van mijn promotoren en heb ik het in zes weken helemaal opnieuw geschreven. Toen ik eraan begon dacht ik 'Engelsman, dit wordt je waterland', maar een jaar later was ik cum laude gepromoveerd. Dat verschil van diep in de put zitten en daarna hoog met je hoofd in de wolken, dat zijn zulke sterke emoties, die vergeet je je hele leven niet meer."

Heb je nog overwogen om na je promotie terug te keren naar de universiteit?

"Er was niemand die me uitnodigde en het kwam niet bij me op om zelf te gaan zoeken. Het praktische werk bij het museum beviel me goed."

Waarom ging je dan na tien jaar weg bij Boerhaave?

"We waren negen jaar bezig met de restauratie van het Caeciliagasthuis en de verhuizing daar naartoe. In 1991 waren we klaar en toen werd het ongelooflijk saai. Ik was 41, adjunct-directeur en wist niet wat ik moest doen. Het inrichten van het museum was fantastisch werk, je zag het steeds mooier worden. Daarna moesten we weer gewoon een museum gaan draaien, voor educatieve programma's zorgen en marketing doen. Dat is niet mijn ding.

Op dat moment werd ik gevraagd of ik directeur wilde worden van Museum Volkenkunde. Het was daar toen een grote ellende. De collectie stond er slecht voor, de presentatie was belabberd en de organisatie beroerd. Geen enkel ander museum was er zo slecht aan toe. Toen Volkenkunde geen nieuwe directeur kon vinden, belden ze mij. Iedereen verklaarde me voorgek dat ik in die slangenkuil stapte. Maar mij leek het leuk om te doen. En dat was het ook."

Had je ook maar enige affiniteit met volkenkunde?

"Helemaal niks, maar dat had ik binnen vijf minuten gerationaliseerd. Bij volkenkunde

vond ik hetzelfde interessant als bij de geschiedenis van de wiskunde. Het gaat om mensen die de hele wereld verkenden en daarbij mensen tegenkwamen die zich compleet anders gedroegen. Hoe konden ze met die mensen in contact komen en begrijpen wat die anderen deden? Welke strategieën bedenken ze daarvoor? Dat is toch precies hetzelfde als een wiskundige die een moeilijk probleem moet oplossen?

Bij volkenkunde zie je allerlei idiote strategieën. Het kunstwerk van Andries Botha bij Museum Volkenkunde steekt de draak met de oude volkenkundigen die een cultuur documenteerden aan de hand van voorwerpen. Botha beschrijft Nederland met twintig voorwerpen. Hij neemt bijvoorbeeld KLM-huisjes, huisjes met drank erin die je krijgt in de business class. Botha schrijft dat de functie van die huisjes is om aan anderen te laten zien dat je sjiek vliegt en dat vermoed wordt dat de alcohol erin gedrogeerd is, zodat de passagiers in het vliegtuig niet te lastig zijn. Volstrekt belachelijk, daarin herken je Nederland totaal niet. Botha speelt de wijsneus-antropoloog die zomaar wat uit zijn duim zuigt, maar dat is precies hoe alle musea Volkenkunde vroeger waren. We hebben zonder enige toetsing bij de mensen zelf, de ene na de andere wijsneuzerij over anderen verteld."

Hielp jouw wiskundige achtergrond om dat niet te doen?

"Een voordeel van wiskunde is dat je je intellect ontwikkelt zonder dat je allerlei opvattingen over de wereld opdoet. Je krijgt niet allerlei vooroordelen mee bij je studie. Voor een wat naïef iemand als ik, is het een fantastische manier van werken. Ik had geen andere studie willen doen."

Je vertrekt binnenkort naar het Museum für Völkerkunde Wenen. Daar heb je zeker ook niet voor gesolliciteerd?

"Nee, ik werd gebeld. Dat kwam voor mij als een totale verrassing. Het is precies zoals twintig jaar geleden, het museum is al tien jaar gesloten, het is er een grote ellende en in de Oostenrijkse kranten staat dat ik in een slangenkuil terecht kom. Maar ik vind het juist leuk dat ze mij vragen! Als je het goed doet, dan verdwijnt de ellende. Hier in Leiden is de sfeer inmiddels geweldig." <-----

Heeft u een goede suggestie voor een (Nederlandse) wiskundige met een bijzonder keerpunt in zijn of haar carrière? Stuur dan een e-mail naar ionica.smeets@gmail.com.

Kim Plofker

Department of Mathematics

Union College

Schenectady, NY 12308

USA

plofkerk@union.edu

History

Mathematics and its worldwide history

Perhaps more than any other science, mathematics contains its own history, both as a field of study and as a professional discipline. Last year the Royal Dutch Mathematical Society (KWG) has selected the field of history of mathematics for the Brouwer Prize. During this tri-annual event Kim Plofker of the Union College in Schenectady, USA, received the Brouwer Medal. She is an expert in the history of science in Antiquity and in the Middle Ages, and in Sanskrit. This article is based on the Brouwer Lecture that she delivered on 14 April 2011 during the annual Dutch Mathematical Congress. She discusses changing aims and current priorities in the history of mathematics, with special reference to comparisons between ‘western’ and ‘non-western’ traditions of mathematical knowledge. Among her examples she offers some remarkable results from late-medieval Indian mathematics that illustrate the creative tension between mathematical experiment and proof.

Mathematics as practiced in the currently dominant tradition extending roughly from Euclid to contemporary research has seldom had to discard any of its earlier discoveries to make room for later ones, as physics has done with its theory of the four elements or medicine with its theory of the four humors. The arguments of earlier mathematicians working in this tradition may come to seem outdated or insufficiently rigorous, but are rarely rejected as actually false. (For more detailed historiographic discussions of evolution and ‘revolution’ in mathematical knowledge and methodology, see [11, 24].) Consequently, the modern study of mathematics retains closer links to its own history than most other quantitative sciences do. A specific problem may remain open, in more or less its original formula-

tion, for hundreds of years before attaining a definitive solution (as in the famous examples of Fermat’s Last Theorem and the Kepler conjecture), or may still await solution after more than a millennium (as do several conjectures about perfect numbers).

History as a mathematical subject

While it may be somewhat hyperbolic to claim that mathematics as an intellectual discipline actually contains its own history, it is undeniable that mathematics as a professional field for the most part contains its own historians. This sharply contrasts with, say, political or economic history or history of art, most of whose researchers have little or no formal training or professional experience as legislators or economists or artists. Even a field like history of science, requiring in many areas

a considerable amount of specialized technical knowledge, is professionally dominated by historians rather than by scientists. Research on the history of mathematics, on the other hand, is and has always been produced chiefly by people trained and/or professionally classified as mathematicians: simply put, few scholars outside mathematics have the requisite interest or technical background in the subject matter. This is especially true for the study of historical developments in advanced and recent mathematics, but even topics requiring no more than basic calculus or pre-calculus knowledge are often shunned by non-mathematicians. Analyses of the cultural and intellectual isolation of mathematics from other subjects are still often rooted in C.P. Snow’s ‘two cultures’ thesis [29] or Sartre’s earlier articulation of the ‘essential difference’ of mathematics [28]; for a more recent survey of some of the issues involved, see [24].

History of mathematics research is thus a body of knowledge largely created by mathematicians for mathematicians, reflecting mostly what mathematicians themselves have seen in mathematics. The remainder of this section sketches some of the reasons why they have chosen to do so: namely, what are the goals and incentives that have led mathematicians to adopt mathematics history for

all practical purposes as a subfield of mathematics?

The rediscovery of earlier mathematics

We may take it for granted that throughout the existence of mathematics as a literate discipline, many mathematicians have felt some degree of curiosity about its evolution and the origins of specific technical concepts and conventions. But during most of the western mathematical tradition, they did not systematically investigate earlier texts and record their reconstructions of how mathematical knowledge was shaped. (One notable exception, the classical Greek historiography of mathematics that flourished over two millennia ago, will not be discussed in detail here. A recent survey of classical doxographic and historical studies of science, including much material on mathematics and referencing many earlier studies, is [36].) When they did undertake such investigations, two motives in particular seem to have impelled them.

The first of these concerned the 'applied' side (stretching the modern concept of 'applied mathematics' to include exact sciences such as astronomy, which historically overlapped with mathematics as a disciplinary and professional category). Historical sources in this category, such as mathematical astronomy texts, were sometimes associated with useful records of observational data. For 'pure' mathematics researchers, on the other hand, ancient texts might contain lost esoteric or advanced theoretical knowledge.

A notable example of the first quest is the examination of Babylonian mathematical astronomy texts from before the common era, in search of recorded data that might lengthen the observational baseline over which models in celestial mechanics might be tested. Such efforts had begun already in classical antiquity, as the work of Hipparchus and Ptolemy shows [35, pp. 190–216]. Ancient data is still used in some contemporary research, e.g., [32]. The historical background of this 'applied historical astronomy' is discussed in [31].

Examples of the latter kind can be seen in the Renaissance rediscovery of classical Greek mathematics, which appeared to many practitioners far more sophisticated than more recent work. Understanding the ideas of 'the ancients' was thus perceived as more worthwhile than merely following in the track of their own immediate predecessors, 'the moderns' — an opinion often strengthened by xenophobic suspicion of 'Oriental' in-

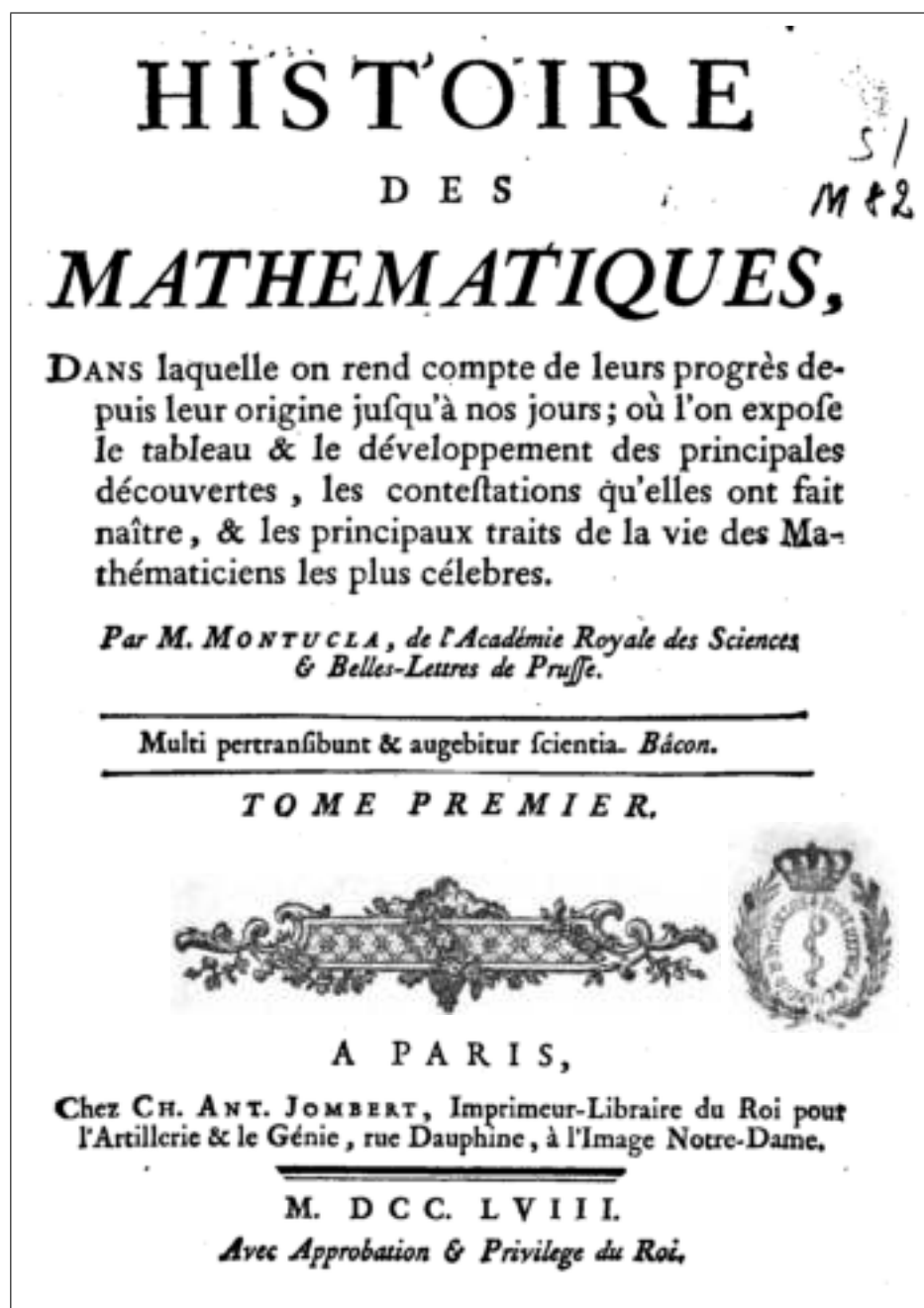


Figure 1 The title page of Montucla's seminal history

fluences in post-Greek thought. For instance, François Viète, one of the first developers of modern symbolic notation in algebra, was persuaded that he was merely rediscovering and re-formatting a solution technique that must have been familiar to ancients like Diophantus but was 'debased and polluted' by 'barbarians':

"...The art that I bring forth is new, but ultimately so ancient, and debased and polluted by barbarians... But underneath that which they extol and call the 'great art', Algebra or Almucabala, all mathematicians recognize the unmatched gold lies hidden; however, they have hardly found it... The way of

seeking the truth in mathematics is one that Plato is said to have first found, named by Theon Analysis..."

("...Ecce ars quam profero nova est, aut demum ita vetusta, & à barbaris defaedata & conspurcata... At sub suâ, quam predicabant, & magnam artem vocabant, Algebrâ vel Almucabalâ, incomparandum latere aurum omnes adgnoscebant Mathematici, inveniebant verò minimè... Est veritatis inquirendae via quaedam in Mathematicis, quam Plato primus invenisse dicitur, à Theone nominata Analysis..." [33, pp. 2–4])

While the ancient texts did not reveal all the secrets that their editors hoped for, they



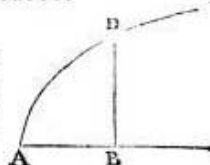
DE ANALYSI

Per Æquationes Numero Terminorum INFINITAS.

Methodum generalem, quam de Curvarum quantitate per Infinitam terminorum Seriem mensuranda, olim excogitaveram, in sequentibus breviter explicatam potius quam accuratè demonstratam habes.



ASI AB Curvæ alicujus AD, fit Applicata BD perpendicularis: Et vocetur AB = x, BD = y, & sint a, b, c, &c. Quantitates datæ, & m, n, Numeri Integri. Deinde,



Curvarum Simplicium Quadratura.

REGULA I.

Si $ax^a = y$; Erit $\frac{ax}{a+1} x^{\frac{a+1}{a}} = \text{Area ABD.}$

Res Exemplo patebit.

1. Si $x^2 (= 1x^{\frac{2}{1}}) = y$, hoc est, $a = 1 = n$, & $m = 2$; Erit $\frac{1}{3}x^3 = \text{ABD.}$
2. Si

Figure 2 The title page of Newton's *De analysi*

did inspire not only new research in mathematics but also an abiding interest in its chronological development.

Emergence in the eighteenth century

The history of mathematics as a subject distinct from mathematical research itself grew out of early modern mathematicians' efforts to piece together the widely scattered contributions to their rapidly expanding discipline. Like the field of physics in the mid-twentieth century or biology a few decades later, mathematics in the eighteenth century was adjusting to major breakthroughs that substantially increased its prominence

both among the sciences and in society as a whole.

Trying to devise classification schemes that would systematically incorporate all the proliferating branches of their subject and link them to contemporary grand projects for tracing the history of human thought as a whole, researchers turned their attention to the underlying structure of mathematics and sought to explain how it had been shaped [19, pp. 6–11]. Both the triumphalism inspired by technical advancement and the focus on identifying its historical genesis are evident in what is widely considered the first independent work on history of mathemat-

ics, Jean-Etienne Montucla's 1758 *Histoire des mathématiques* or *History of Mathematics* (Figure 1), whose title page proclaims that therein

"... its progress from its origin to our own day is accounted for [and] the outline and development of the principal discoveries, the disputes it has given rise to, and the principal features of the lives of the most celebrated mathematicians are explicated." [16]

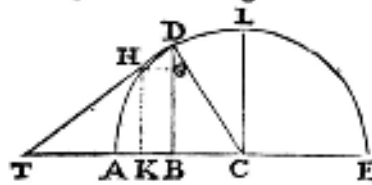
Montucla's book and many of its successors were primarily concerned with recording the technical details of the discoveries it chronicled, and establishing who was entitled to claim the credit for them — a natural preoccupation in light of some of the bitter priority disputes that convulsed seventeenth- and eighteenth-century mathematics. But as the nineteenth and twentieth centuries brought increased professionalization to this new field, with journals, university positions, conferences and congresses embracing or exclusively devoted to history of mathematics, more researchers began to grapple with the deeper challenges of being historians as well as mathematicians [7, *passim*].

New discoveries and corrections

Mathematicians and mathematics teachers accustomed to thinking of their work in terms of rigorous deductions concerning indisputable objective knowledge could sometimes be over-confident in their approach to historical inferences. The creation and subsequent debunking of various mathematical myths underlined the need for caution. Perhaps the best-known instances of such historical fallacies centered around the debate over the origin and transmission of the 'Arabic' or decimal place-value numerals. Although a few late medieval European texts, following statements in Arabic works, had already accurately described these 'ten ciphers' as borrowed by mathematicians in the Islamic world from Indian sources [20], some later researchers fell victim to more speculative hypotheses. The prolific nineteenth-century historian of mathematics Moritz Cantor, for example, suggested that the original versions of the decimal place-value numerals were the work of Greek Pythagoreans, supplemented by a zero borrowed from Indian arithmetic and conveyed into the Latin tradition via the work of Boethius in the sixth century. (See [7, p. 388; 3, pp. 231–250]. Historians of mathematics in the early twentieth century devoted considerable effort to unravelling various discredited speculations of this sort: [30; 2, pp. 64–68].)

Longitudines Curvarum invenire.

Sit ADLE circulus cujus arcus AD longitudo est indaganda. Ducto tangente DHT, & completo indefinito parvo rectangulo HGBK, & posito $AE = 1 = 2AC$. Erit ut BK five GH, momentum Basis AB(x), ad HD momentum Arcus AD :: BT : DT :: BD ($\sqrt{x-xx}$) : DC ($\frac{1}{x}$) :: 1 (BK) :



$\frac{1}{2\sqrt{x-xx}}$ (DH). Adeoque $\frac{1}{2\sqrt{x-xx}}$ five $\frac{\sqrt{x-xx}}{2x-2xx}$ est momentum Arcus AD.

Quod reductum fit $\frac{1}{2}x^{-\frac{1}{2}} + \frac{1}{4}x^{\frac{1}{2}} + \frac{1}{6}x^{\frac{3}{2}} + \frac{1}{8}x^{\frac{5}{2}} + \frac{1}{10}x^{\frac{7}{2}} + \frac{1}{12}x^{\frac{9}{2}}$ &c.

Quare, per regulam secundam, longitudo Arcus AD est

$x^{\frac{1}{2}} + \frac{1}{2}x^{\frac{3}{2}} + \frac{1}{24}x^{\frac{5}{2}} + \frac{1}{16}x^{\frac{7}{2}} + \frac{1}{160}x^{\frac{9}{2}} + \frac{1}{112}x^{\frac{11}{2}}$ &c.

five $x^{\frac{1}{2}}$ in $1 + \frac{1}{2}x + \frac{1}{24}x^3 + \frac{1}{16}x^5 + \frac{1}{160}x^7 + \frac{1}{112}x^9$, &c.

Non secus ponendo CB esse x, & radium CA esse 1, invenies Arcum LD esse $x + \frac{1}{6}x^3 + \frac{1}{120}x^5 + \frac{1}{5040}x^7$, &c.

Inventio Basis ex data Longitudine Curvae.

Si ex dato arcu AD Sinus AB desideratur; æquationis $x = x + \frac{1}{2}x^3 + \frac{1}{24}x^5 + \frac{1}{16}x^7$, &c. supra inventa, (posito nempe AB = x, AD = z, & Aa = 1,) radix extracta crit $x = z - \frac{1}{6}z^3 + \frac{1}{120}z^5 - \frac{1}{5040}z^7 + \frac{1}{362880}z^9$, &c.

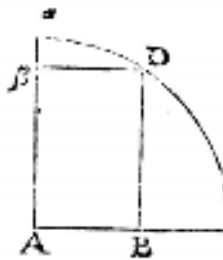


Figure 3 Newton's arcsine and sine series in the *De analysi*

The potential pitfalls of historical research, however, did not discourage most of its practitioners. Moreover, descriptions of interesting earlier developments not only satisfied historical curiosity but sometimes spurred significant new mathematical discoveries. For instance, in the mid-eighteenth century Abraham Kästner's study of medieval and Renaissance arguments concerning the parallel postulate sparked renewed interest in foundations of geometry that ultimately inspired development of non-Euclidean geometries [7, p. 113; 9, pp. 154–156]. Increased historical knowledge and greater historiographic sophistication eventually produced a broadly based consensus about expectations for serious scholarship in history of mathematics: researchers emphasized the need to investigate original sources, even in non-European languages, and take into account the historical and cultural contexts of their composition.

One concept, two histories

The parallel evolution of mathematical knowledge in separate cultural traditions complicates the task of chronicling the origins of particular concepts or techniques. Developments familiar to us under the name of a classical or modern mathematician may have emerged earlier in a different culture, leading to rather anachronistic-sounding statements like "Babylonian scribes in the second millennium BCE used the Pythagorean theorem" or "the Fibonacci sequence appears in medieval Indian combinatorics". The principle that mathematical knowledge is fundamentally universal underneath its different linguistic and methodological guises has important consequences for the overall narrative of its history.

The rest of this section comprises a case study examining such consequences as they relate to current historiographic debates about how to define and identify the event(s)

we know as 'the invention of calculus': specifically, the use of infinitesimal techniques to furnish a power series expression for the sine. Two different mathematicians in very different historical circumstances came up with what is indisputably the same result, which however has highly disputable implications for situating the origins of calculus within the history of mathematics.

Newton's sine power series

In early modern Europe, the development of 'new analysis' or infinitesimal calculus methods included the discovery of infinite series expressions for many transcendental functions, whose derivatives or integrals thus could likewise be expressed as infinite series. Among these results were the trigonometric power series published in 1711 in Isaac Newton's *De analysi per aequationes numero terminorum infinitas* ('Analysis by means of equations with an infinite number of terms', Figure 2) but worked out by Newton several decades earlier. Figure 3 shows the series expressions for the arcsine and sine expressions (titled 'To find the lengths of curves' and 'Finding the base [sine] from a given length of a curve' respectively) as Newton wrote them. Newton's diagrams are facsimiles from [18, pp. 15–17]; the simplified version in Figure 4 and the accompanying derivation are adapted from [8, pp. 5–19]. Following standard conventions of trigonometry before the eighteenth century, Newton interprets 'sine' as the length of a line segment rather than as the ratio of two lengths. In Newton's equations transcribed below, $\arcsin(x)$ represents the circular arc LD (with unit radius) corresponding to the sine CB in the first figure, while $x = \sin(z)$ is the sine AB of the arc αD in the second figure is:

$$\begin{aligned}\arcsin(x) &= x + \frac{1}{6}x^3 + \frac{3}{40}x^5 \\ &\quad + \frac{5}{112}x^7 + \dots \\ \sin(z) &= z - \frac{1}{6}z^3 + \frac{1}{120}z^5 \\ &\quad - \frac{1}{5040}z^7 + \frac{1}{362880}z^9 - \dots\end{aligned}$$

The determination of the arcsine series is more easily seen from the simpler diagram in Figure 4, where the sine of the arc z is the horizontal line segment x , which with the perpendicular segment y and the radius 1 forms a right triangle. An infinitesimally small 'moment' or increment of x is labeled dx (in a Leibnizian notation that the modern reader will probably find more familiar than New-

ton's), and the corresponding increment in the arc z is called dz , which can also stand for the rectilinear hypotenuse of the infinitesimal right triangle whose base is dx .

Since the tangent line containing the hypotenuse dz is perpendicular to the radius forming the larger triangle's hypotenuse, the two right triangles may be considered similar and consequently

$$\frac{dz}{1} = \frac{dx}{y} = \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}}.$$

Newton can then rewrite the square-root term as $(1 + (-x^2))^{-1/2}$ and apply his well-known algorithm for expanding a rational power of a binomial:

$$\begin{aligned} dz &= dx(1 + (-x^2))^{-1/2} \\ &= \left(1 + \frac{1}{2}x^2 + \frac{3}{8}x^4 + \frac{5}{16}x^6 + \dots\right) dx. \end{aligned}$$

The right side is easy to integrate term by term to give an infinite series for the desired arcsine z :

$$\begin{aligned} z &= \arcsin(x) \\ &= x + \frac{1}{6}x^3 + \frac{3}{40}x^5 + \frac{5}{112}x^7 + \dots \end{aligned}$$

To find the corresponding infinite series for the sine, on the other hand, involves no infinitesimal geometry but rather an algebraic algorithm for solving what Newton calls 'affected' equations: i.e., polynomials involving more than one power of the unknown. His algorithm allows him to invert the previous series expression and express x as a power series in z rather than vice versa, producing the familiar 'Newton power series' for the sine [6, 18]:

$$\begin{aligned} x &= \sin(z) \\ &= z - \frac{1}{6}z^3 + \frac{1}{120}z^5 - \frac{1}{5040}z^7 + \dots \end{aligned}$$

Mādhava's sine power series

Over two hundred and fifty years before Newton's work, a Hindu Brāhmaṇa astronomer named Mādhava in south-west India had begun investigating ways to represent trigonometric quantities using techniques known in traditional Sanskrit mathematics as *saṅkālita*: literally 'summation', meaning among other things the computation of successive sums, i.e., operations with series. This scholar left no surviving independent texts on his mathematical discoveries, but later generations of his followers carefully preserved and expounded a selection of Sanskrit verses containing trigonometric results attributed to him. The rest of this section treats the ex-

planation of one such result, a rule for computing the sine of a given arc, recorded by an author named Śaṅkara who wrote near the middle of the sixteenth century. (The exposition in these two sections is based on verses 348–436 of Śaṅkara's commentary on *Tantrasaṅgraha* 2 [26, pp. 109–117]. A fuller description of the reconstruction of the rationale is given in [21], and the base-text itself is translated in [23]. See [27] for a discussion of a similar rationale in a related text from Mādhava's school. The bibliographies of all the above works cite numerous other sources relating to these remarkable mathematical developments.)

The algorithm as Śaṅkara explains it makes use of a trigonometric circle whose radius is larger than unity (a standard feature in pre-modern Indian trigonometry). So in the discussion that follows we will capitalize the name of this quantity as the 'Radius' R , and the correspondingly scaled trigonometric function values as, e.g., $\text{Sin}(x) \equiv R \sin(x)$ for some given arc x . Śaṅkara first states the algorithm as follows:

"Having multiplied the arc and the results of each [multiplication] by the square of the arc, divide by the squares of the even [numbers] together with [their] roots, multiplied by the square of the Radius, in order. Having put down the arc and the results one below another, subtract going upwards. At the end is the Sine..."

This rather cryptic procedure should be interpreted as a recursive formula using squares of successive positive even integers and the square of R to produce coefficients for successive odd powers of x . The computation of the first three of these terms is as follows, shown in modern notation:

$$\begin{aligned} \frac{x^3}{R^2(2^2 + 2)} &= \frac{x^3}{R^2 \cdot 6}, \\ \frac{x^5}{R^4(2^2 + 2)(4^2 + 4)} &= \frac{x^5}{R^4 \cdot 120}, \\ \frac{x^7}{R^6(2^2 + 2)(4^2 + 4)(6^2 + 6)} &= \frac{x^7}{R^6 \cdot 5040}. \end{aligned}$$

When we 'subtract going upwards', i.e., starting with the last of these calculated terms and ending with the given arc x itself, we obtain to following series expression:

$$\text{Sin}(x) = x - \left(\frac{x^3}{R^2 \cdot 6} - \left(\frac{x^5}{R^4 \cdot 120} - \left(\frac{x^7}{R^6 \cdot 5040} - \dots \right) \right) \right).$$

Since the circular arc x is conventionally expressed in arcminutes of which there

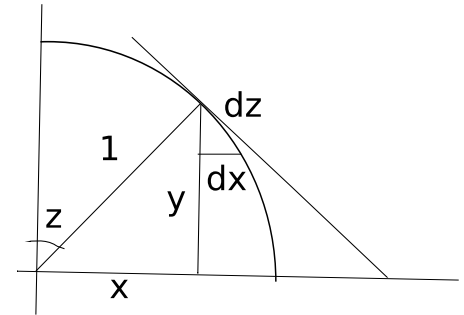


Figure 4 Line segments and their small 'moments' form 'similar' triangles

are 21600 in the circumference, and Mādhava's standard value of R is about 3438' or approximately equal to $21600/(2\pi)$, it is evident that dividing x by R essentially just converts x to radian measure. That is, this rule for the sine is exactly equivalent to the power series later found by Newton:

$$\sin(x) = x - \frac{x^3}{6} + \frac{x^5}{120} - \frac{x^7}{5040} + \dots$$

Recapitulating Mādhava's derivation

The rationales for this rule explained by Śaṅkara and other followers of the Mādhava school are based on the notion of dividing a quadrant into some integer number n of equal arcs, here denoted α , whose Chord is abbreviated to $\text{Cr}d(\alpha)$ or $\text{Cr}d$. We will represent Śaṅkara's exclusively verbal exposition symbolically by denoting the Sine and Cosine of each successive multiple $k\alpha$ ($k = 1$ to n) of the standard arc α by $\text{Sin}_k \equiv \text{Sin}(k\alpha)$ and $\text{Cos}_k \equiv \text{Cos}(k\alpha)$, respectively. His derivation also involves Sines and Cosines of arcs extending to the midpoint of each of the equal arcs α , that is, arcs equal to $(k\alpha + \alpha/2)$ for $k = 0$ to $(n - 1)$ and denoted by the subscript $k.5$:

$$\text{Sin}_{k.5} \equiv \text{Sin}(k\alpha + \alpha/2),$$

$$\text{Cos}_{k.5} \equiv \text{Cos}(k\alpha + \alpha/2).$$

The differences between function values for two successive arcs are defined as follows:

$$\Delta \text{Sin}_k \equiv \text{Sin}_k - \text{Sin}_{k-1},$$

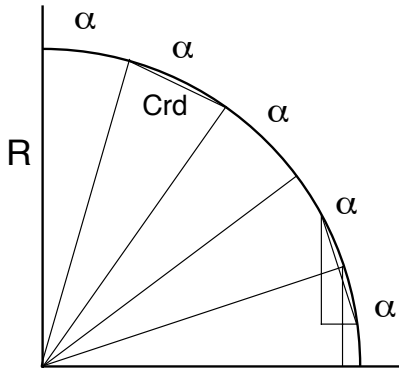
$$\Delta \text{Cos}_k \equiv \text{Cos}_k - \text{Cos}_{k-1},$$

$$\Delta \text{Sin}_{k.5} \equiv \text{Sin}_{k.5} - \text{Sin}_{k-1.5},$$

$$\Delta \text{Cos}_{k.5} \equiv \text{Cos}_{k.5} - \text{Cos}_{k-1.5}.$$

Figure 5 shows the quadrant divided into n equal arcs α and some of the line segments that represent differences between successive Sines and Cosines.

The similarity of the various right triangles composed of such line segments defines

Figure 5 Mādhava's quadrant divided into equal arcs α

the following relationships between these quantities:

$$\begin{aligned}\Delta \text{Sin}_{k.5} &= \text{Cos}_k \cdot \frac{\text{Crd}}{R}, \\ \Delta \text{Cos}_{k.5} &= \text{Sin}_k \cdot \frac{\text{Crd}}{R}, \\ \Delta \text{Sin}_{k+1} &= \text{Cos}_{k.5} \cdot \frac{\text{Crd}}{R}, \\ \Delta \text{Cos}_{k+1} &= \text{Sin}_{k.5} \cdot \frac{\text{Crd}}{R}.\end{aligned}$$

Note that up to now no arguments involving 'infinitesimal geometry' are employed: all these relations involving finite quantities are geometrically exact, with Cosines proportional to differences of Sines and vice versa.

Śaṅkara's next step is to reformulate key expressions in terms of sums of Sine- and Cosine-differences. For example, the k th Sine itself is trivially just the sum of k successive Sine-differences:

$$\text{Sin}_k = \Delta \text{Sin}_1 + \Delta \text{Sin}_2 + \dots + \Delta \text{Sin}_k.$$

From the previous similar-triangle equations, we derive the following expression for the differences of the successive Sine-differences themselves, or 'Sine second-differences':

$$\begin{aligned}\Delta \text{Sin}_k - \Delta \text{Sin}_{k+1} &= \text{Cos}_{k.5-1} \cdot \frac{\text{Crd}}{R} - \text{Cos}_{k.5} \cdot \frac{\text{Crd}}{R} \\ &= \Delta \text{Cos}_{k.5} \cdot \frac{\text{Crd}}{R} \\ &= \text{Sin}_k \cdot \frac{\text{Crd}^2}{R^2}.\end{aligned}$$

That is, the Sine second-difference is proportional to the corresponding Sine. This allows the desired Sine-difference to be rewritten tautologically as

$$\Delta \text{Sin}_{k+1} = \Delta \text{Sin}_k - (\Delta \text{Sin}_k - \Delta \text{Sin}_{k+1}).$$

Each of the previous Sine-differences can be rewritten in the same way, until the de-

sired Sine-difference is expressed as the first Sine-difference minus a sum of k second-differences or equivalent quantities, as follows:

$$\begin{aligned}\Delta \text{Sin}_{k+1} &= \Delta \text{Sin}_{k-1} - (\Delta \text{Sin}_{k-1} - \Delta \text{Sin}_k) \\ &\quad - (\Delta \text{Sin}_k - \Delta \text{Sin}_{k+1}) \\ &= \Delta \text{Sin}_1 - \dots - (\Delta \text{Sin}_k - \Delta \text{Sin}_{k+1}) \\ &= \Delta \text{Sin}_1 - \sum_{j=1}^k (\Delta \text{Sin}_j - \Delta \text{Sin}_{j+1}) \\ &= \Delta \text{Sin}_1 - \sum_{j=1}^k \text{Sin}_j \cdot \frac{\text{Crd}^2}{R^2} \\ &= \Delta \text{Sin}_1 - \sum_{j=1}^k \Delta \text{Cos}_{j.5} \cdot \frac{\text{Crd}}{R}.\end{aligned}$$

Given the above expression for each individual Sine-difference, one can sum up the sums to get an expression for the desired Sine:

$$\begin{aligned}\text{Sin}_k &= \Delta \text{Sin}_1 + \Delta \text{Sin}_2 + \dots + \Delta \text{Sin}_k \\ &= \Delta \text{Sin}_1 + \Delta \text{Sin}_1 - \sum_{j=1}^2 \text{Sin}_j \cdot \frac{\text{Crd}^2}{R^2} \\ &\quad + \dots + \Delta \text{Sin}_1 - \sum_{j=1}^{k-1} \text{Sin}_j \cdot \frac{\text{Crd}^2}{R^2} \\ &= k \Delta \text{Sin}_1 - \sum_{j=1}^{k-1} \sum_{g=1}^j \text{Sin}_g \cdot \frac{\text{Crd}^2}{R^2} \\ &= k \Delta \text{Sin}_1 - \sum_{j=1}^{k-1} \sum_{g=1}^j \Delta \text{Cos}_{g.5} \cdot \frac{\text{Crd}}{R}.\end{aligned}$$

That is, each Sine is represented by its index number k times the first Sine-difference, minus a double sum of either successive Sines or successive Cosine-differences.

At this point, the demonstration departs from geometric exactness by making some simplifying assumptions about the size of the quantities involved. These assumptions depend on letting the constant arc-increment α be very small, on the order of one arcminute. This allows us to take α approximately equal to its own Chord, and also to the first Sine-difference.

Likewise, we eliminate half-subscripts by ignoring the distinction between the end-points and midpoints of the successive arc-increments. Finally, we assume that the given arc whose Sine Sin_k is sought is approximately equal to k arcminutes, and ignore the difference of one arcminute between k and $k-1$. These assumptions allow us to rewrite the above expressions for Sin_k more concisely, as follows:

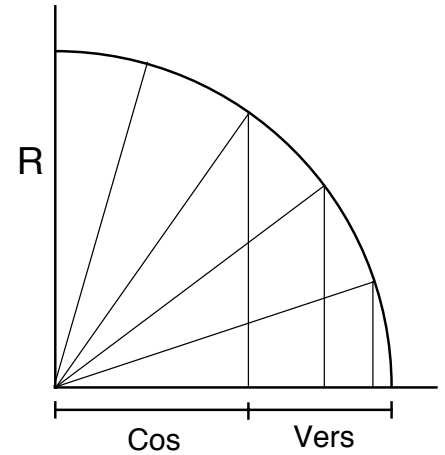


Figure 6 The Versine as a sum of Cosine-differences

$$\begin{aligned}\text{Sin}_k &\approx k - \sum_{j=1}^k \sum_{g=1}^j \text{Sin}_g \cdot \frac{1}{R^2} \\ &\approx k - \sum_{j=1}^k \sum_{g=1}^j \Delta \text{Cos}_g \cdot \frac{1}{R}.\end{aligned}$$

To understand Śaṅkara's next step, we have to employ a trigonometric identity that would have been obvious to him but has fallen into disuse in modern trigonometry. This is the relationship between the Cosine and the so-called 'versed sine' or Versine, defined as the difference between the Radius and the Cosine (see Figure 6). Consequently, the cumulative differences between all successive Cosines up to the k th Cosine add up to the k th Versine. This identity lets us transform the above double sum of Cosine-differences into a single sum of Versines:

$$\begin{aligned}\text{Sin}_k &\approx k - \sum_{j=1}^k \sum_{g=1}^j \text{Sin}_g \cdot \frac{1}{R^2} \\ &\approx k - \sum_{j=1}^k \sum_{g=1}^j \Delta \text{Cos}_g \cdot \frac{1}{R} \\ &\approx k - \sum_{j=1}^k \text{Vers}_j \cdot \frac{1}{R}.\end{aligned}$$

Pausing a moment to assess the status of this rationale — which, we recall, is supposed to justify the above-mentioned 'Mādhava–Newton power series' expression for the sine — we may feel that not much progress has been made. The unknown Sine is now expressed in terms of a sum of k unknown Versines, and we seem no closer to knowing how to compute it. Overcoming this difficulty will require a brief detour to infer a pattern in expressing partial sums of powers of successive integers.

Basic number theory formulas for, e.g., the sum of successive positive integers from 1 to some arbitrary k and the sum of their squares up to k^2 had been known in India for many centuries. Śaṅkara now assumes such a k sufficiently large to reduce all such formulas to the same general approximate form, as follows:

$$\begin{aligned}\sum_{j=1}^k j &= \frac{k(k+1)}{2} \approx \frac{k^2}{2}, \\ \sum_{j=1}^k j^2 &= \frac{k(k+1)(2k+1)}{6} \approx \frac{2k^3}{6} = \frac{k^3}{3}, \\ &\vdots \\ \sum_{j=1}^k j^n &\approx \frac{k^{n+1}}{n+1}.\end{aligned}$$

Then if each such sum of powers is itself summed, the resulting *saṅkalita* or sum-of-sums expressions can be represented in the form

$$\sum_{j=1}^k \frac{j^2}{2} \approx \frac{k^3}{6}, \quad \sum_{j=1}^k \frac{j^3}{6} \approx \frac{k^4}{24}, \quad \sum_{j=1}^k \frac{j^4}{24} \approx \frac{k^5}{120},$$

and so on.

These closed-form approximations for partial sums can be substituted for sums of trigonometric functions by making further simplifying assumptions. In the equation for the desired Sine, Śaṅkara considers each successive Sine Sin_g approximately equal to its corresponding arc, namely g arcminutes:

$$\begin{aligned}\text{Sin}_k &\approx k - \sum_{j=1}^k \text{Vers}_j \cdot \frac{1}{R} \\ &\approx k - \sum_{j=1}^k \sum_{g=1}^j \text{Sin}_g \cdot \frac{1}{R^2} \\ &\approx k - \sum_{j=1}^k \sum_{g=1}^j g \cdot \frac{1}{R^2}.\end{aligned}$$

Now by using the above general form for sums of sums of powers of integers, we can convert this equation to

$$\begin{aligned}\text{Sin}_k &\approx k - \sum_{j=1}^k \sum_{g=1}^j g \cdot \frac{1}{R^2} \\ &\approx k - \sum_{j=1}^k \frac{j^2}{2} \cdot \frac{1}{R^2} \\ &\approx k - \frac{k^3}{6R^2}.\end{aligned}$$

This is the key step in arriving at the desired power series. Since the Sine and Versine are

each defined in terms of a sum of the other, these *saṅkalita* terms can be recursively substituted for sums of trigonometric function values indefinitely. For instance, the previous approximation for the Sine allows us to rewrite the Versine as

$$\begin{aligned}\text{Vers}_j &\approx \sum_{j=1}^k \left(j - \frac{j^3}{6R^2} \right) \cdot \frac{1}{R} \\ &\approx \frac{k^2}{2R} - \frac{k^4}{24R^3}.\end{aligned}$$

And that expression for the Versine in turn may be plugged back in to the formula for the Sine:

$$\begin{aligned}\text{Sin}_k &\approx k - \sum_{j=1}^k \left(\frac{j^2}{2R} - \frac{j^4}{24R^3} \right) \cdot \frac{1}{R} \\ &\approx k - \frac{k^3}{6R^2} + \frac{k^5}{120R^4}.\end{aligned}$$

The same pattern of alternating substitution between Sine and Versine terms can be extended indefinitely. And the above computation of the first few terms for the Sine indicates how this pattern ultimately produces the infinite series expression that we originally undertook to justify.

Implications for the history of calculus

It is clear from comparing even these brief and over-simplified sketches of the two discoveries of the sine power series that they are very different in context and style, although there is considerable overlap in the concepts they use. Newton in the mid-seventeenth century was interested in finding the most general methods possible to perform quadratures of diverse curves using simple polynomial integration techniques. The power series for the sine (along with the one for the arcsine) was essentially a by-product of this quest for general solutions in the *De analysi*.

Mādhava around the turn of the fifteenth century, as noted above, did not pass down to the present day any text describing in detail the context of his work on infinite series for trigonometric functions, though it seems reasonable to assume that his successors followed his lead in the way they presented it. What is evident is that Mādhava saw this work as dealing specifically with the computation of Sines and arcs. The proportion linking Sines and Cosine-differences was not a particular application of a general concept like fluxions or derivatives to a function that happened to be trigonometric. Likewise, the relationship between positive integer powers of

successive integers and their sums was not an instance of a general integration power law or a tool for quadrature of arbitrary curves. Still less did these ideas form part of any investigation of series composed from higher derivatives of arbitrary functions, as in the modern Taylor series. This is further confirmed by later derivations, apparently due to Śaṅkara himself, that employ related techniques to infer a different sine power series that is in some ways inconsistent with the Mādhava–Newton one [22]. Rather, these algorithms in the work of Mādhava's school remained fundamentally embedded in the trigonometry of Sines and their associated Chords, Cosines and Versines.

However, the similarities in the results found by Mādhava and Newton, and also in the basic structure of some of the tools they used (geometric approximations based on infinitesimally small increments, recursive substitutions for terms of series, and so forth), are significant enough to warrant questioning some of our default classifications of historical developments in mathematics. Mathematicians and historians of mathematics generally take it for granted that 'calculus' refers to the infinitesimal analysis of derivatives and integrals that took shape in seventeenth-century Europe, most significantly in the work of Newton and Leibniz. If that is what 'calculus' means, then of course Mādhava cannot be assigned priority in discovering it. But if 'calculus' is used to connote a broader constellation of concepts involved in those discoveries, then it seems undeniable that Mādhava and his followers were in some sense doing calculus too. A strong version of the latter perspective appears in many discussions of the Mādhava school, e.g., in a foreword to a recent translation of one of its seminal treatises asserting 'The origin of calculus also can be traced to this school' [23, p. vii]. (Contrast a slightly earlier version of the former perspective that opens with the equally blunt assertion 'Calculus was not invented in India' [1, p. 131].) A more extreme approach argues for the possibility that the discoveries of the Mādhava school actually exerted crucial influence on early modern European calculus via transmission during the colonial period; e.g., [14, pp. 178–204].

Such unexpected overlaps between historically distinct mathematical traditions are valuable in correcting the automatic tendency of historians to essentialize certain developments or methodologies primarily because they happen to be familiar. Mādhava will probably not replace Newton and Leibniz in

most future histories of mathematics as the iconic ‘inventor of calculus’; but the fact that such a replacement might even be considered possible should provoke some salutary questioning about what exactly we mean when we speak of ‘inventing calculus’.

The history of mathematics now

The discipline of history of mathematics at present is expanding in terms of both its historical content and its professional role.

The acknowledged subject matter of history of mathematics now extends from the earliest identifiable records of human quantitative thought up to the achievements of mathematicians still living and working today. In particular, it is generally considered to embrace not only literate mathematical traditions from every place and time in the world’s history but also many quasi-mathematical cultural features such as ornamentation patterns and game strategies, often classified under the name ‘ethnomathematics’. More and more archival sources, linguistic traditions and scientific instruments are being examined for the evidence they may yield about contemporary mathematical developments. Texts in related sciences such as astronomy and physics (and related pseudo-sciences such as astrology) are read side by side with ‘pure’ mathematical ones in the effort to understand the mathematics of earlier periods as contemporary teachers and students saw it.

Professionally, growing numbers of mathematicians read and publish research in history of mathematics, and growing numbers of secondary schools, colleges and universities include it in their curricula. Readers, teachers and researchers are increasingly attentive to the interdisciplinary requirements of the field. Its practice now has to incorporate research skills in history and languages as well as analyzing the technical content of the mathematics and related subjects it investigates.

Focal points in current history of mathematics

Although research in history of mathematics nowadays involves an immense variety of subjects, sources and methodologies, there are certain common themes that unite many of them in general trends. Perhaps the most important of these is the issue of what is sometimes called ‘external history’, or contextualizing technical knowledge within a particular historical and cultural setting. Modern mathematical notations and classifications, although they are useful tools for interpreting earlier writings, cannot be automatically ac-

cepted as reliable equivalents for them; nor can technical treatises really be understood in linguistic or cultural isolation from their counterparts in other fields. Two scholars of the oldest known literate mathematical traditions have well described the recent shift in approaches to reading ancient mathematical texts: (see also the discussions of ancient source interpretation in [12]):

“The study of Egyptian mathematics is as fascinating as it can be frustrating. The preserved sources are enough to give us glimpses of a mathematical system that is both similar to some of our school mathematics, and yet in some respects completely different. It is partly this similarity that caused early scholars to interpret Egyptian mathematical texts as a lower level of Western mathematics and, subsequently, to ‘translate’ or rather transform the ancient text into a modern equivalent. This approach has now been widely recognized as unhistorical and mostly an obstacle to deeper insights. Current research attempts to follow a path that is sounder historically and methodologically. Furthermore, writers of new works can rely on progress that has been made in Egyptology (helping us understand the language and context of our texts) as well as in the history of mathematics.” [13, p. 7]

“It is tempting to think that, because it all happened such a long time ago, there is little new to say about mathematical developments in ancient Mesopotamia (southern Iraq and neighbouring areas). The standard histories of mathematics all tell much the same story... [F]amously the young Otto Neugebauer began his program of decipherment and publication in the late 1920s... Neugebauer’s interpretative paradigm remained paramount: analysis in mathematical terms only, highlighting features such as the use of the Pythagorean theorem that could be taken as an index of Babylonian progression toward modernity. Questions of authorship, context, and function were systematically overlooked; textuality and materiality played no part in the academic discourse of the mid-twentieth century... Mathematics is not created out of nothing — it is written by individuals operating within the social and intellectual norms and conventions of the societies in which they dwell. Thus coming to grips with another culture’s mathematics is not simply a matter of translating one notation into another. Instead we need to explore the personal, intellectual and social circumstances under which it was written.” [25, pp. 58–62]

A related trend is the growing emphasis among scholars on the importance of original source materials in historical research and the need for better access to them. Archives of publications by individual mathematicians and scientific academies are appearing at every level from nationally funded institutions to editions of collected works to small textbase projects maintained by individuals. Improved digital availability is rapidly accelerating the dissemination of historical sources, assisted by a steady stream of new translations produced by both researchers and students.

For example, the Euler Archive (www.eulerarchive.org) is a pioneering online archive collecting not only facsimile publications but new translations and bibliographies of Euler’s work, as well as other information about him. The Galileo Portal (portalegalileo.museogalileo.it) is an instance of a similarly structured but more ambitious repository based at the Florence Institute and Museum of the History of Science. A smaller-scale version of such an archive devoted to the mathematician Johann Lambert is being developed at www.kuttaka.org/JHL/Main.html. The various mathematical bibliographies and textbases available are too numerous to list; a sketch of relevant electronic resources, now nearly ten years old but still informative about several active projects, is [7, pp. 337–338].

These developments accompany, and in many cases are inspired by, the continued symbiosis between mathematics history and mathematics pedagogy: instructors and students alike are seeking source materials, research topics, presentation opportunities, and above all more sophisticated and detailed answers to historical questions than are found in long-established standard textbooks, whose surveys are often decades out of date in certain areas. The difficulty of finding accessible and accurate secondary sources on many historical topics has strengthened support for ‘do-it-yourself’ research on historical sources for both teachers and students. For example, a Special Interest Group of the Mathematical Association of America currently directs an annual student writing contest in the history of mathematics (www.homsigmaa.org); there are also various workshops and technical guides aimed at novices to the study of original sources, notably [34].

Finally, at the specialist research level, common ground is beginning to be negotiated on what might be called the historiography of ‘world mathematics’. As discussed in

the previous sections, the theoretical ideal of mathematics as universal knowledge, colliding with the varied ways that different cultures have defined and pursued it, can lead to confusion or controversy about how to identify and attribute discoveries (and re-discoveries) of important results. Researchers in diverse subfields are attempting to establish new demarcation lines (or in some cases to eradicate old ones) defining different linguistic/cultural traditions, time periods, and more abstract concepts like ‘proof’ or ‘exact sciences’. Thoughtful discussion is steadily supplanting the exaggerated inferences and mutual suspicions of cultural chauvinism that had sometimes hampered communication on such questions. Two such discussions treating the notion of proof in Indian mathematics are [17] and [27, Vol. I, pp. 267–310]. A similar exploration of proof modalities in Chinese mathematics is [5]; a collection of cross-cultural assessments of these issues will appear shortly [4].

Probable directions for the future

Astrology is no longer considered a subfield of mathematics, and consequently we do not ex-

pect mathematicians to show any more skill than the average when it comes to predicting the future. Yet it seems appropriate to close a wide-ranging survey of this sort by offering at least some tentative indications of what is likely to happen next in the history of mathematics, in addition to the continuance of the current general trends mentioned above. One of the most promising new avenues of research appears to be the investigation of mathematical corpora in cultural or linguistic minority populations, which tend to be overshadowed by the dominance of Latin, French, German, Italian and English among the Western languages, and Arabic, Chinese and (to a lesser extent) Sanskrit within Asia. Under-studied but potentially very rich fields include South Asian vernacular mathematics in the second millennium, Dutch mathematical sciences in the early modern period, and eastern European mathematics in the twentieth century.

History of mathematics will probably take a more prominent part in popular perceptions of mathematics, both in and outside classrooms. Several dramatic works in recent years have highlighted the significance

of mathematics in the life of the mind, as have new outreach efforts to encourage public interest in mathematics. The creation of the New York Museum of Mathematics (momath.org, opening in 2012) is a striking example of this growing attention to public awareness of mathematics. The role of history in all such programs of math popularization is likely to be crucial.

Without doubt, though, its greatest impact will continue to be felt in mathematics teaching. In fact, the chief danger now for mathematics and history of mathematics alike is not that the latter will be neglected by the former, but that it may be overloaded with pedagogical expectations to achieve what mathematics itself has not: namely, providing an easy solution to the challenges of teaching mathematical thinking to students for whom technology has largely replaced basic mathematical competence. Nonetheless, although the integration of mathematics with humanities and social sciences that the history of mathematics offers cannot eliminate all difficulty from learning or teaching mathematics, it remains an invaluable reminder of the importance of overcoming that difficulty. ◀

Referenties

- David Bressoud, Was calculus invented in India?, in M. Anderson et al., eds., *Sherlock Holmes in Babylon and Other Tales of Mathematical History*, Mathematical Association of America, Washington (DC), 2004, pp. 131–137.
- Florian Cajori, *A History of Mathematical Notations*, repr. Dover, Mineola (NY), 1993.
- Moritz Cantor, *Mathematische Beiträge zum Kulturleben der Völker*, Schmidt, Halle, 1863.
- Karine Chemla, ed., *The History of Proof in Ancient Traditions*, Cambridge University Press, Cambridge, 2012.
- Karine Chemla, Proof in the wording: two modalities from ancient Chinese, in G. Hanna et al., eds., *Explanation and Proof in Mathematics: Philosophical and Educational Perspectives*, Springer, Dordrecht, 2010, pp. 253–285.
- Chris Christensen, Newton’s method for resolving affected equations, *College Mathematics Journal* 27 (1996), 330–340.
- Joseph W. Dauben and Christoph J. Scriba, eds., *Writing the History of Mathematics: Its Historical Development*, Birkhäuser, Basel, 2002.
- William Dunham, *The Calculus Gallery: Masterpieces from Newton to Lebesgue*, Princeton University Press, Princeton, 2005.
- W. B. Ewald, *From Kant to Hilbert: A Source Book in the Foundations of Mathematics*, vol. 1, Oxford University Press, Oxford, 1996.
- Menso Folkerts, Christoph J. Scriba, and Hans Wussing, Germany, in [7], pp. 109–150.
- Donald Gillies, ed., *Revolutions in Mathematics*, Oxford University Press, New York, 1992.
- Jens Høyrup, *Lengths, Widths, Surfaces: A Portrait of Old Babylonian Algebra and Its Kin*, Springer Verlag, New York, 2002.
- Annette Imhausen, Egyptian mathematics, in [15], pp. 7–56.
- George Gheverghese Joseph, *A Passage to Infinity*, Sage Publications, New Delhi, 2009.
- Victor J. Katz, ed., *The Mathematics of Egypt, Mesopotamia, China, India and Islam: A Sourcebook*, Princeton University Press, Princeton, 2007.
- Jean-Etienne Montucla, *Histoire des mathématiques*, Jombert, Paris, 1758.
- Roddam Narasimha, Axiomatism and computational positivism, *Economic and Political Weekly* 37, 3650–3656.
- Isaac Newton, *Analysis per Quantitatum Series, Fluxiones, ac Differentias* (William Jones, ed.), Pearson, London, 1711.
- Jeanne Peiffer, France, in [7], pp. 3–43.
- Kim Plofker, ‘Indian’ rules, ‘Yavana’ rules: foreign identity and the transmission of mathematics, in Rajendra Bhatia et al., eds., *Proceedings of the International Congress of Mathematicians 2010*, World Scientific, Hackensack (NJ) 2011.
- Kim Plofker, *Mathematics in India*, Princeton University Press, Princeton, 2009.
- Kim Plofker, Śaṅkara’s extensions of the sine power series, forthcoming.
- K. Ramasubramanian and M. S. Sriram, *Tantrasaṅgraha of Nilakanṭha Somayājī*, Hindustan Book Agency, New Delhi, 2011.
- Joan L. Richards, The history of mathematics and *L’esprit humain*: a critical reappraisal, *Osiris* 10 (1995), 122–135.
- Eleanor Robson, Mesopotamian mathematics, in [15], pp. 57–186.
- K. V. Sarma, *Tantrasaṅgraha of Nilakanṭha Somayājī*, VVBIS&IS, Hoshiarpur, 1977.
- K. V. Sarma, K. Ramasubramanian et al., *Ganita-Yukti-Bhāṣā of Jyēṣṭhadeva*, 2 vols., Indian Institute of Advanced Study, Simla, 2008.
- George Sarton, *The Study of the History of Mathematics*, Harvard University Press, Cambridge (MA), 1936.
- C. P. Snow, *The Two Cultures and the Scientific Revolution*, Cambridge University Press, New York, 1959.
- David Eugene Smith and Louis Charles Karpinski, *The Hindu-Arabic Numerals*, Ginn & Co., Boston/London, 1911.
- J. M. Steele, Applied historical astronomy: an historical perspective, *Journal for the History of Astronomy* 35 (2004), 337–355.
- F. R. Stephenson and L. V. Morrison, Long-term fluctuations in the earth’s rotation: 700 BC to AD 1990, *Philosophical Transactions of the Royal Society of London, Ser. A* 351 (1995), 165–202.
- F. Vieta, *In artem analyticem isagoge*, Jamet Mettayer, Tours, 1591.
- Benjamin Wardhaugh, *How to Read Historical Mathematics*, Princeton University Press, Princeton, 2010.
- G. J. Toomer, *Ptolemy’s Almagest*, repr. Princeton University Press, Princeton NJ, 1998.
- Leonid Zhmud, *The Origin of the History of Science in Classical Antiquity* (trans. A. Chernoglazov), Walter de Gruyter, Berlin and New York, 2006.

Nellie Verhoef

Faculteit Gedragswetenschappen, instituut ELAN

Universiteit Twente

Postbus 217

7500 AE Enschede

n.c.verhoef@utwente.nl

Interview David Orme Tall

Je zult eerst moeten ontdekken hoe leerlingen denken

In de zomer van 2011 logeert Nellie Verhoef bij David Tall, emeritus hoogleraar in het wiskundig denken aan de Universiteit van Warwick. Het idee is dat ze oog in oog de resultaten betreffende de Nederlandse experimenten met 'Lesson Study' zullen kunnen bespreken. Nellie interviewt David bij gelegenheid. Tijdens het gesprek komt bij toeval Eddie Gray spontaan langs.

David, zou je kunnen vertellen wat je geschiedenis is, waar je vandaan komt?

Ik ben opgegroeid in Wellingborough, in North Hampshire, zo'n 75 kilometer hier vandaan. Tegenwoordig is het een marktplaatsje, maar vroeger was er een flinke schoenenindustrie. Ik heb daar zelf ook nog een tijdje gewerkt. Mijn vader werkte bij de plaatselijke ijzerindustrie. Zijn baan bestond uit het verwijderen van de slak, een afvalproduct dat bovenop het gesmolten ijzer drijft. Het ijzer zelf kon daarna pas tot allerlei producten gegoten worden.

Ik ging naar een klein schooltje in de buurt. Mijn moeder wilde natuurlijk voor al haar kinderen een goede opleiding, dus toen ik vijf jaar oud was besloot mijn moeder al dat ik aan de universiteit van Oxford moest gaan studeren. En dat heb ik uiteindelijk ook gedaan.

Als klein jongetje ging ik naar de lagere school in Wellingborough. Het was een geweldige school, helaas bestaat de school niet meer. Ik had een speciale band met mijn wiskundedocent, Johnny Bunder. Hij heeft mijn interesse in wiskunde gewekt. Niet alleen leerde hij mij verschillende facetten van de wiskunde kennen, hij was anders dan alle an-

dere docenten. Andere docenten verveelden me met hun complimenten als ik dingen goed deed, meneer Bunder was anders. Toen ik in groep zes zat heeft hij mijn eerste verslag beoordeeld met: "Als zijn inzet even sterk is als zijn enthousiasme, wordt hij een groot wiskundige." Dat heeft hij me destijds echter niet verteld. Toch ben ik daar trots op, want hij was de enige docent van de hele school met veel aanzien. Dat is waar mijn liefde voor de wiskunde vandaan komt.

Heb je broers en zussen?

Ik heb een jonger zusje en een jonger broertje. Mijn zusje, Rosemary, wist van jongs af aan al dat ze danseres wilde worden. Daar heeft ze toen ze jong was wel een aantal problemen mee gehad. Mijn moeder wilde haar laten meedoen aan de nationale danscompetitie. Dat zou echter betekenen dat ze niet elke dag naar school zou kunnen. De overheid was het daar helaas niet helemaal mee eens en vond dat ze in elk geval haar toetsen op school gewoon op de reguliere momenten moest maken. Het werd moeilijk toen ze een jaar lang niet naar school ging. Het belangrijkste voor haar is dat ze in die periode deed en tegenwoordig nog steeds doet waar ze zin in

heeft. Tegenwoordig woont ze in Las Vegas.

Mijn broer Graham is drie jaar jonger dan ik. Hij was het 'normale' jongetje binnen de familie en iedereen ging er eigenlijk van uit dat hij thuis zou blijven wonen om voor mijn moeder te zorgen. Maar ook hij ging naar de universiteit en kreeg zijn doctorstitel aan de universiteit van Birmingham.

Komen je ouders oorspronkelijk ook uit Engeland?

Ja, sterker nog, mijn familie heeft een lange geschiedenis in Engeland. Er leefde vroeger zelfs nog een andere familie 'Tall' in Engeland met een stamboom tot in de 5de eeuw na Christus. Helaas bestaat er geen link tussen deze familie en de mijne.

Waarom heb je vroeger de keuze gemaakt voor wiskunde, en niet voor scheikunde of natuurkunde?

Ik had op school een beperkte keuze voor



David Tall (links) en zijn broer Graham Tall (rechts)



De dirigent

mijn vakkenpakket. Je moest een keuze maken tussen biologie, natuurkunde, scheikunde en wiskunde. Ik heb toen gekozen voor wiskunde, maar dat betekende niet dat ik me niet met die andere wetenschappen bezighield. Ik wilde altijd overal goed in zijn, dus stopte ik heel veel moeite in de vakken waar ik slecht in was. Zodoende besteedde ik de helft van mijn tijd aan scheikunde en natuurkunde. Mijn wiskundeleraar ging zich op een gegeven moment zelfs zorgen maken, omdat hij dacht dat ik te weinig tijd aan wiskunde besteedde.

Later heb je gekozen voor onderwijs in wiskunde. Betekende dit dat je carrière een nieuwe weg insloeg?

Ik heb mijn hele leven muziek gemaakt. Ik weet dat dit als een raar antwoord klinkt op je vraag, maar als muzikant ben ik ook dirigent geweest. Ik kreeg altijd positieve reacties van de muzikanten die in het orkest speelden. Dat gaf me natuurlijk altijd een geweldig gevoel. Datzelfde gevoel krijg ik als ik studenten college geef.

Ik was altijd erg populair onder de studenten. Ik begon op mijn vijftiende met lesgeven, dus ik denk dat het kleine leeftijdsverschil daar toen aan heeft bijgedragen. Ik hield er altijd van om mijn colleges met wat humor te geven. Ik haalde allerlei grappen uit, die je tegenwoordig niet meer tegen zou komen. Ik heb mijn studenten ook vaak geplaagd. Ik heb ze wijs proberen te maken dat ze wel wetenschappers zijn, maar geen echte wiskundigen omdat ze de wiskunde niet goed genoeg begrepen. In de collegezaal waar ik vaak college gaf konden de borden elektrisch op en neer bewegen. Op een gegeven moment wilden ze nog wel omhoog, maar niet meer naar beneden. Toen had ik natuurlijk te weinig ruimte om mijn aantekeningen op te maken. De enige oplossing die ik zag was om naar boven te klimmen en zo op de bovenste borden te schrijven. De studenten vonden het hilarisch. Aan het einde van dat college bleef iedereen zitten, tot één van de studenten naar voren

liep, naar het bedieningspaneel van de borden ging en iets deed met een stukje karton. Toen hij na tien seconden klaar was, gingen de borden weer keurig op en neer. Hij draaide zich om en zei: "Dat is het probleem met jullie wiskundigen, jullie kunnen niet praktisch nadenken." Ik vond het geweldig en de studenten ook. Die manier van lesgeven zorgde er ook voor dat er voor elk college een lekker glas bier op me stond te wachten. Het was een geweldige tijd.

Ik heb altijd van wiskunde gehouden, voornamelijk van 'projectieve meetkunde'. Het is prachtig. De patronen, de punten en lijnen die na een verandering weer diezelfde punten en lijnen laten zien, dat heb ik altijd overweldigend gevonden. Ik ben echt van wiskunde gaan houden toen ik met een paar klasgenoten een calculusboek kreeg, waar we in twee jaar doorheen moesten werken. Het idee was dat we gewoon aan de slag moesten en indien nodig vragen konden stellen aan de docent. Ik heb hem nooit één vraag gesteld. Het probleem was dat als je eerder klaar was met de opgaven dan de rest, je meer van dezelfde opgaven kreeg van de docent. Daar had ik natuurlijk geen zin in, dus leerde ik mezelf aan om langzaam te werken. Langzaam genoeg om niet eerder klaar te zijn dan de rest. Dat bracht ook met zich mee dat ik altijd beter ben geweest in pure wiskunde dan toegepaste wiskunde, omdat ik natuurlijk veel tijd had genomen voor calculus. Onze docent zelf daagde ons nooit echt uit om ergens hard voor te werken. Het enige wat hij deed was namelijk orde houden in de klas.

Kun je iets vertellen over je ervaring als docent in het basisonderwijs en het voortgezet onderwijs?

Voordat ik naar de universiteit ging heb ik een baantje gehad op een school, waar ze een docent zochten voor scheikunde en natuurkunde. Er was een docent, maar die is destijds met Pasen bij die school weggegaan. Ik ben daar drie maanden geweest, tot aan de zomer. Het lesgeven was erg moeilijk in het begin. Ik was zelf natuurlijk nog erg jong en ineens had ik een baan als een volwassene. Ook de leerlingen merkten dat ik nog erg jong was en dat leidde tot moeilijkheden. Het werd me aangeraden om duidelijk te laten zien wie er de baas was, maar al na vijf minuten kwam ik erachter dat die aanpak voor mij niet zou werken. Ik vond mijn eigen manier om orde in de klas te houden. Humor.

Als een jongetje mij op de gang aansprak; "Goedemorgen meneer ...", reageerde ik bijvoorbeeld met "Goedemorgen mevrouw". Op de één of andere manier werkte dit, de span-

ning was uit de lucht en alle agressie verdween. Deze aanpak bleek goed te werken. Op een dag, toen ik de klas in kwam, keek een jongetje me uitdagend aan, met zijn vuist op tafel. Hoe pak je zo'n situatie aan?

Ik keek hem aan en zei tegen hem: "Jij bent wel tevreden met jezelf, of niet?" "Yup" was het antwoord. Ik zei: "Weet je, ik ben echt ontzettend van jou onder de indruk. Ik zou graag je handtekening willen, driehonderd keer." Iedereen in de klas schoot in de lach. De volgende morgen kwam diezelfde jongen naar me toe met driehonderd handtekeningen. Vanaf dat moment waren we vrienden. We hebben op een vreedzame manier een dreigende situatie opgelost en tegelijkertijd kregen we allebei een positief imago. Ik besepte dat ik goed les kon geven. Ik besepte dat ik iedereen van elke leeftijd en elke staat van ontwikkeling kon onderwijzen.

Pas toen ik veertig werd besloot ik dat ik me wilde richten op wiskundeonderwijs. Ik zal later vertellen waarom ik dat wilde. Ik vond echter wel dat ik om een goede wiskundeleraar moest zijn, maar dat ik ook wiskundig onderzoeker moest zijn. Toen heb ik twee belangrijke stappen genomen. Ik ging promoveren en ik ging naar school om ervaring in het lesgeven op te doen. Dat lesgeven heb ik toen opgebouwd. Ik begon rustig, met een dag per week, maar dit heb ik in de loop der tijd uitgebreid. Zodoende deed ik veel ervaring op in het lesgeven aan kinderen van verschillende leeftijden. Ik genoot het meest van lesgeven aan kinderen van elf jaar oud. Op die leeftijd zijn kinderen veel enthousiaster dan bijvoorbeeld kinderen van een jaar of vijf. Leerlingen van elf jaar oud ontwikkelen zich snel. Je merkt dat ze steeds volwassenere worden en ze kunnen ontzettend enthousiast zijn. Na een aantal jaar ben ik gestopt met werken en heb ik een jaar lang alleen maar lesgegeven. Het was een geweldig jaar. Ik realiseerde me echter dat je meer nodig hebt dan de theorie achter het lesgeven om een goede docent te zijn. Ik heb gevoel gekregen voor lesgeven, maar dat heeft even geduurd. Ik had in het begin voornamelijk moeite om orde te houden in de klas. Leerlingen aanspreken op slecht gedrag werkte vaak niet langer dan een paar minuten; niet veel later was het weer chaos en kon ik opnieuw proberen om het rustig te krijgen. Een vriend van me, Eddie Gray, heeft me daarbij geholpen. Hij is schoolhoofd geweest en had voldoende ervaring om mij tips te kunnen geven. Hij vertelde me: "Je hoeft niks te laten gebeuren. Je moet gewoon op tijd ingrijpen voordat er iets mis-



David Tall (rechts) met Eddie Gray (links)

gaat.” Ik vond het moeilijk om te begrijpen wat hij bedoelde en vroeg om verheldering. “Het is heel eenvoudig. Als je ziet dat een leerling moeilijkheden veroorzaakt, kijk je hem aan. Je draait je hoofd echter weg vóórdat hij de kans krijgt om te reageren. Vaak is dat al voldoende om de ongein te stoppen. Werkt dat echter niet goed genoeg, laat je hem bij je komen en spreek je hem met een bijna fluisterende stem toe. Dat werkt veel dreigender dan eenvoudig door de klas schreeuwen.” Het bleek een gouden tip. Het lukte me niet alleen om de klas onder controle te krijgen, zelfs mijn kinderen leerden mij te gehoorzamen. Orde houden in de klas is een goed voorbeeld van een aantal technieken die je als docent nodig hebt om een structuur te creëren waarbinnen je les kunt geven. Als dat eenmaal is gelukt, kun je de lessen interessant gaan maken. Je moet kunnen en gaan vertrouwen op je relatie met de klas, vervolgens kun je leukere en boeiendere lessen gaan geven.

Een techniek die ik heb geleerd is de regel van de drie F'en. Deze staan voor Firm, Fair en Friendly. Allereerst zul je in je klas 'Firm', streng moeten zijn. Als je zegt dat er iets moet gebeuren, moet je ook van je leerlingen verwachten dat ze luisteren. Als je de situatie hebt bereikt waarin dat lukt, kun je aan 'Fairness', eerlijkheid gaan werken. Het gaat er dan om dat alles wat er gebeurt eerlijk is voor iedereen. Je hebt geen tijd om eerlijkheid te bewerkstelligen als je nog bezig bent met streng zijn. Pas als je Firmness en Fairness, streng zijn en eerlijkheid hebt bereikt, kun je de stap maken om vriendelijk te worden. Je hebt dan een situatie gecreëerd waarin je controle hebt over de klas, waarbinnen de leerlingen weten hoe ze zich moeten gedragen en wat anders de consequenties zijn. Ze weten dan ook dat je eerlijk en vriendelijk tegen ze zult zijn als zij zich aan de regels houden.

Ik heb net beloofd om te vertellen waarom ik wiskundeonderwijs wilde geven, dus dat zal ik nu doen. Het vreemde is, het feit dat ik

wiskunde wilde onderwijzen kwam niet direct door een wens om les te geven. Toen ik in mijn laatste jaar van de universiteit zat, moest ik besluiten wat voor baan ik wilde hebben. Ik zag drie mogelijkheden. Ik kon natuurlijk op een leuke school docent worden. Een tweede mogelijkheid was om op de universiteit te blijven. Niet alleen zou ik dan onderzoek kunnen doen, ik zou me ook meer met muziek bezig kunnen houden. Een laatste mogelijkheid was om zo veel mogelijk geld te verdienen. Ik wist echter niet precies wat ik zocht in het leven. Daarom besloot ik om uit te zoeken of ik in mijn leven veel geld nodig had om gelukkig te kunnen zijn. Ik besloot om alle mogelijkheden die ik had tegen elkaar af te wegen en daarna pas een keuze te maken.

Zodoende heb ik op vier vacatures voor actuaris gesolliciteerd. Bij drie van deze bedrijven kon ik direct beginnen, de vierde vroeg me om nog een keer terug te komen op het moment dat ik klaar was op de universiteit. Ik besloot dat niet te doen, maar ontving toen opnieuw een brief. Ze vroegen me of ik voor ze wilde komen werken. Ik wees het aanbod af. Ik vertelde hen dat ik op de universiteit bleef om te promoveren en dat ik een wiskundeprijs had gewonnen. Toen vroegen ze me om contact op te nemen op het moment dat ik klaar was op de universiteit en dat ze dan gegarandeerd een baan voor me hadden. Je zult je misschien afvragen waarom ik gesolliciteerd heb, als ik toch elke baan die ik kon krijgen zou afwijzen. Ik deed dit om er achter te komen of ik überhaupt een baan kon krijgen waar ik veel geld kon verdienen. Ik wist dat ik, mocht ik die keuze maken, eenvoudig een baan zou kunnen krijgen.

Ik voelde dat ik een leven wilde waarbinnen ik elke dag kon doen waar ik zin in had. Als academicus heb je natuurlijk wel verplichtingen zoals lesgeven, maar je kunt het grootste gedeelte van je tijd zelf indelen. Ik ben naar de universiteit van Sussex gegaan om daar wiskundecolleges te geven. Ik bleek daar erg goed in te zijn. Uiteraard moest ik in het begin mijn draai zien te vinden, maar uiteindelijk heb ik zelfs college gegeven over complexe getallen aan tweedejaars studenten en over Galoistheorie aan derdejaars studenten. Niet lang daarna ben ik naar de universiteit van Warwick gegaan. Ik werkte daar onder toezicht van Michael Atiyah, de winnaar van de Fieldsmedaille in 1966. Het winnen van die prijs maakte hem natuurlijk erg gewild voor het geven van lezingen en colloquia. Uiteraard had ook hij zijn eigen agenda, dus als hij zelf niet kon komen werd ik als vervanger gestuurd.

Ik volgde bij zo'n lezing altijd een vaste procedure. Ik vroeg het publiek wat ze wilde horen. “Zal ik jullie een volledig gedetailleerd verhaal vertellen over mijn eigen doctoraat of willen jullie een algemene lezing, meer geschikt voor een colloquium?” Ik kreeg elke keer hetzelfde resultaat; telkens weer wilde het publiek de lezing aanhoren. Dus dat deed ik dan maar. Gedurende de eerste vijf minuten lukte het me vaak om een aantal personen in het publiek geïnteresseerd te houden. Maar al snel was ik de enige in de hele zaal die kon volgen waar de lezing over ging.

Waarom ben ik nou les gaan geven? Niet omdat ik studenten wilde helpen die moeite hadden met leren. Nee, ik wilde begrijpen waarom wiskundigen, waarvan werd verwacht dat ze slim waren en goed konden nadenken, op geen enkele manier konden begrijpen waar ik het bij mijn lezingen over had. Wiskundigen uit verschillende vakgebieden kunnen niet met elkaar praten, omdat ze een verschillende achtergrond hebben. Dat was mijn directe reden om les te gaan geven. Ik wilde onderzoeken hoe mensen denken, voordat ze naar school gaan tot aan het moment dat ze afstuderen.

Laten we het even over Nederland hebben. Heb je een speciale boodschap voor de Nederlandse wiskundedocenten?

Allereerst wil ik even kwijt hoeveel ik heb geleerd van het wiskundig onderwijs in Nederland. Dat kwam onder andere door een boekbespreking die ik moest schrijven. Ik leerde Freudenthal kennen toen ik nog een vrij jonge student was. Richard Skemp was op dat moment aan het promoveren. Hem werd gevraagd om een boek van Freudenthal te bespreken, *Mathematics as an educational task*. Richard heeft dit weer naar mij gedelegeerd. Ik vond het heel erg moeilijk om te doen. Ik had er moeite mee om het werk van zo een groots en belangrijk wiskundige als Freudenthal kritisch te beoordelen. Ik zocht hulp bij James Eels, destijds wiskundig afdelingshoofd. Ik wist dat hij Freudenthal kende en hoopte op goede raad. Wat Eels me vertelde had ik niet direct zien aankomen. Hij adviseerde me om zo eerlijk mogelijk te zijn. Om kritiek te geven waar ik verbeterpunten zag en daar geen doekjes om te winden.

Met dat advies schreef ik mijn boekbespreking. Ik maakte duidelijk wat ik sterk vond, maar heb ook kritiek geuit. Drie, misschien vier maanden later kreeg ik een kaartje: “Bedankt voor je boekbespreking, ik heb er van genoten. Vooral van je kritiek. Hans Freudenthal.” Sinds dat moment heb ik hem een beetje als een mentor gezien. Hij heeft vaak arti-

kelen voor me beoordeeld, zijn opmerkingen waren altijd helpend en respectvol.

Een ander persoon waar ik veel van geleerd heb is Van Hiele. Hij heeft gewerkt aan een beschrijving van verschillende niveaus van ontwikkeling, voornamelijk met betrekking tot meetkunde. Hij is echter wel van mening dat zijn ideeën ook toepasbaar zijn in de algebra. Hoewel ik veel ervaring heb met algebra, calculus en wiskundige analyse is juist de meetkunde het vakgebied waar ik weinig mee heb gewerkt. Ik heb van Van Hiele dus veel kunnen leren over niveaus van ontwikkeling in de meetkunde. Als je mijn artikelen leest zul je dan ook veel ideeën van Van Hiele kunnen herkennen.

Ik heb een vrij goed beeld gekregen van de verschillende ideeën die er heersen in Nederland betreffende onderwijs en wiskunde. Ik heb voornamelijk een beeld gekregen over het probleem dat vaak door universitaire wiskundigen en wetenschappers wordt aangekaart, betreffende het te lage niveau van nieuwe studenten. Vaak beschikken nieuwe studenten niet over de benodigde kennis die ze nodig hebben om goed aan hun studie te kunnen beginnen. Dit levert een interessant raadsel. Hoe kun je de studenten het beste helpen? Help je de studenten de wiskunde beter te begrijpen of help je de studenten beter met operationele wiskunde om te gaan, waardoor ze wat flexibeler worden en berekeningen efficiënter kunnen uitrekenen? Voor mij is het antwoord duidelijk, je zult beide moeten doen. Ook mijn supervisor zag hetzelfde onderscheid en benoemde deze. Relationeel begrip omvat de wiskunde waar het gaat om de vraag hoe relaties zich tot elkaar verhouden, bij instrumenteel begrip gaat het om het kunnen toepassen van procedures.

Mijn antwoord op dit raadsel is dat we aan beide zullen moeten werken. Ik heb mijn mening gebaseerd op de studie die ik heb ontwikkeld en welke op dit moment wordt gebruikt door jou [Nellie Verhoef] in jouw werk over calculus. Deze ideeën zijn te vergelijken met het feit dat mensen hun gedachten baseren op waarnemingen in het leven, daar begint de realistische wiskunde. Realistische wiskunde in realistische situaties. Dit is eigenlijk wat Van Hiele het eerste niveau van ontwikkeling noemt, het sensomotorische (waarneembare) niveau. Dit principe is specifiek herkenbaar bij kinderen tot twee jaar oud.

Uiteraard zal het begrip van het leven en de wiskunde zich vanaf dat punt uitbreiden.

Ik heb samen met Eddie Gray lang gewerkt aan het idee achter het woord 'procept'. Het idee is dat het wiskundige object '3' niet al-

leen een object is, maar ook voortkomt uit het tellen 1, 2, 3. De optelsom is naast een proces, tegelijkertijd gelijk aan zijn antwoord. Het nut van een 'procept' is dat je waarnemingen kunt transformeren naar wiskundige concepten zoals nummers of wiskunde-uitdrukkingen als $3 + 2x$. Vervolgens kun je dingen gaan optellen, vermenigvuldigen, enzovoorts. Je kunt dus situaties gaan behandelen zoals ze zijn, als concepten, maar ook als wiskundige processen. Een 'procept' is bijvoorbeeld het getal 6. '6' is een wiskundig object, maar binnen '6' vind je ook het proces van het tellen van 1 tot 6 en andere weergaven zoals $5 + 1$, $12/2$ en 2×3 .

Ik acht het noodzakelijk dat kinderen leren om de stap te kunnen maken van waarnemingen in de eigenlijke wereld naar de operationele symbolische wereld van tellen en rekenen. Rekenen omvat dan het kunnen werken met getallen als procepten, maar ook met bewerkingen die als 'procept' te beschouwen zijn. Denk bijvoorbeeld aan het beschouwen van een vermenigvuldiging als een vorm van het veelvoudig optellen van getallen.

Er zal op school dus moeten worden aangeleerd om de stap te kunnen zetten van ideeën naar rekenen en calculus.

Ik geef even een voorbeeld. Stel je twee vierkanten A en B voor met zijden a en b , waarbij a groter is dan b . Je kunt het verschil in oppervlakte berekenen met $a^2 - b^2$, of je kunt je het verschil in oppervlakte visualiseren. Je raakt echter in de problemen als we voor a en b negatieve getallen invullen, of wanneer b groter is dan a . Hoe ziet het plaatje in je hoofd er dan uit? Of hoe zou dat plaatje er uit zien als ik je vraag naar $a^4 - b^4$? Je snapt dat dit erg moeilijk wordt om te visualiseren, terwijl de wiskunde nog relatief eenvoudig is.

Feitelijk, als je gaat manipuleren met symbolen vind je nog meer methoden van 'embodying' (belichaming) die meer betekenis geven. Wat bedoelen we bijvoorbeeld met continuïteit? Het idee is uit te leggen aan de hand van het volgende voorbeeld. Je kunt met je vinger over een kromme gaan om de verschillende punten op die kromme langs te lopen. Als we onze gestrekte hand langs de kromme laten glijden zul je zien dat deze bestaat uit meer en minder steile gedeeltes. Als we proberen te meten hoe steil de kromme in een bepaald punt is, meten we de helling van de grafiek in dat punt, en dat is precies de afgeleide in dat punt.

Wat hebben we nou eigenlijk gedaan? We hebben voor een gekozen grafiek met onze hand geïllustreerd hoe steil deze grafiek is, hoe de helling verandert, en daarmee de afge-

leide van deze grafiek laten zien. We hebben dus wiskunde gebruikt op een manier die op verschillende manieren passend is. Het is in eerste instantie passend, als je kijkt naar de realistische wiskunde en haar toepassingen. Je bouwt dus voort op het idee van 'embodyment'. We begonnen met een gevoel voor continuïteit en een grafiek, dat hebben we vertaald naar symbolen en calculus. Als je die vertaling maakt zul je tegenkomen dat je het concept van een limiet moet gebruiken. Een kromme benaderen met een rechte lukt pas op het moment dat je erg ver inzoomt. Je versmalt dus het gebied waarbinnen je de wiskunde toepast en ook dit correspondeert weer met de visualisatie, het inzoomen op een klein stukje van de grafiek. Op dat punt kun je dus echt de sprong maken van de benadering in de vorm van een visualisatie tot de benadering in symbolen op een goed door-dachte, begrijpelijke manier.

Mijn antwoord hier is dat we ons bezig moeten houden met logische wiskunde. Wat bedoel ik daarmee? Ik doel op wiskunde die logisch op je overkomt. Dit begint bij logica zien in de fysieke wereld, bijvoorbeeld als je twee en drie bij elkaar optelt en vijf krijgt. Als je twee appels hebt in je ene hand en drie in je andere hand, heb je dus vijf appels. Als je vervolgens je handen van plaats verwisselt, heb je drie en twee appels, met hetzelfde resultaat. Je realiseert je dus dat er regels zijn die puur fysiek zijn, maar later leer je om deze regels puur operationeel te gebruiken. Ik vind dat dit de methode is waar we op moeten voortbouwen. Om dit te bewerkstelligen zal er een nieuwe manier van lesgeven moeten worden ontwikkeld. Om een dergelijke realistische aanpak van wiskunde te hanteren die leerlingen kunnen gebruiken, zul je eerst moeten ontdekken hoe leerlingen denken. Je zult dus moeten analyseren welk stappenplan leerlingen volgen voordat ze wiskunde begrijpen. En dat is precies waar het idee van 'Lesson Study' zijn intrede doet.

Dat is waar docenten proberen te bevat-



De familieman

ten op welke manier leerlingen wiskunde leren en hun lessen zo inrichten dat ze de leerlingen helpen precies die stappen te maken die ze nodig hebben om de wiskunde te begrijpen. Het gaat erom dat de leerlingen leren op welke manieren wiskunde moet worden geïnterpreteerd, om de stap te kunnen maken van realistische situaties tot operationele concepten. Dit kan alleen door deze twee verschillende dingen samen te voegen. Het los behandelen van de verschillende invalshoeken zal niet leiden tot begrip van de stap, de link, die er tussen de twee begrippen bestaat. Het gaat dus niet om de afweging tussen instrumenteel of relationeel, tussen conceptueel of procedureel, het gaat om het zien en het begrijpen van de vertaling van wiskunde uit de realiteit naar logische operationele wiskunde.

Heb je in je werk, in je leven, belemmering ondervonden van anderen?

Ik ben een volwassen man. Ik word wel eens belemmerd, maar over het algemeen kan ik daar prima mee omgaan. Mijn grootste zorg betreffende het wiskundeonderwijs is dat de meeste mensen werken vanuit hun eigen ervaringen. Daarbij komt dat theorieën die mensen ontwikkelen zijn gebaseerd op die ervaringen. Bijvoorbeeld Van Hiele's theorieën over de verschillende niveaus van ontwikkeling zullen goed kunnen kloppen voor meetkunde, maar zullen bijvoorbeeld bij rekenen minder goed toepasbaar zijn. De APOS-theorie (mentale ontwikkeling via Acties, Processen en Objecten, georganiseerd in Schema's) is passend in rekenkunde en algebra, maar vindt geen raakvlak in de meetkunde. Mijn antwoord op de vraag is dat elke theoreticus zijn of haar eigen manier heeft om naar dingen te kijken. Het is niet mijn taak om uit verschillende theorieën de beste stukjes te zoeken. Hoe ik het zie, is het mijn taak om de fundamentele van wiskundig denken te onderzoeken en een manier te vinden om te ontdekken op welke basisprincipes deze gebaseerd zijn. Van deze basisprincipes heb ik het idee dat zij de sensomotorische taal van de wiskunde zijn. Het is sensomotorisch aangezien het gaat om de manier waarop we zien, of op andere manieren waarnemen, hoe patronen in de wiskunde kunnen variëren. Vervolgens kunnen we tellen, vermenigvuldigen en meten. Dit zijn allemaal procedurele wiskundige operaties. Van Hiele beschreef een aanpak in termen als 'Gestalt' (totaalbeeld). In eerste instantie zul je de gehele situatie moeten observeren, vervolgens kun je eigenschappen beschrijven en ten derde kun je deze eigenschappen gebruiken om te definiëren

hoe een situatie in elkaar zit. Daarna kun je deze definities gebruiken om hieruit afleidingen te maken of eigenschappen met elkaar te verbinden.

Als ik een formule formuleer begin ik bij deze sensomotorische, deze fundamentele, taal van de wiskunde. Als iemand mij daarin vervolgens bekritiseert, is onderbouwde kritiek nodig waarin wordt beoordeeld of wat ik doe werkt, ondanks het feit dat mijn eigen ervaring mij zegt dat het werkt. Ik vind het belangrijk dat mensen niet blind aannemen wat ik zeg. Ik wil dat mensen uiteindelijk realiseren dat mijn blik op de wiskunde vruchtbaar is. Als ik vervolgens een wiskundig expert in een bepaald gebied tegenkom met zijn of haar eigen ideeën, die mij vertelt dat ik er naast zit, is dat niet mijn probleem. Het is namelijk mijn taak om uit te zoeken, om duidelijk te maken hoe wij wiskunde leren en ik ben daarbinnen blij met kritiek die mijn ideeën daarbinnen kunnen helpen. Ik heb echter geen baat bij dwaze persoonlijke visies die ik bijvoorbeeld soms lees in tijdschriften.

Mijn idee is dus dat wat er feitelijk toe doet, bestaat uit het zoeken naar de fundamentele principes onder wiskundig onderwijs.

Het probleem dat ik zie, bestaat vervolgens uit het feit dat het onderwijs tegenwoordig meer begint te lijken op een industrieterrein. Onderwijs wordt een industrie, waar ontelbare verschillende ideeën via conferenties, discussiegroepen en andere evenementen tot een leerzame les in een klaslokaal op een gewone school moeten leiden. Ik vraag mij daarbinnen af of we juist de kern van het belang in het wiskundig onderwijs niet vergeten.

Ik heb wel voorbeelden gezien waar dit soort systemen wel werken, bijvoorbeeld het gebruik van zelfreflectie door de docenten met als doel een manier van lesgeven te ontwikkelen die past bij de ontwikkeling van de leerlingen. Maar wat er bij wiskundeonderwijs moet gebeuren, is focussen op de basis die ten grondslag ligt aan de manier waarop kinderen wiskunde leren.

Kun je vertellen hoe het wiskundeonderwijs van de toekomst eruit ziet?

Dat is een interessante vraag. Je zult hier historisch naar moeten kijken. Je zult ongeveer twintig jaar terug moeten gaan in de tijd en bekijken wat er toen is voorspeld en die toetsen aan de huidige realiteit. Een bepaalde menselijke eigenschap is dat, op het moment dat we leren, we onze kennis structureren op een bepaalde manier. Dit bepaalt vervolgens hoe we filosoferen over de toekomst. Een leuk voorbeeld is de komst van de computer. Wat

vele mensen zich afvroegen was: "Hoe kan ik de ideeën die ik in mijn lessen probeer over te brengen, overzetten op een computer?" In de calculus, bijvoorbeeld, zou je het principe van een limiet willen overbrengen op een computer. Je raakt daar echter flink in de problemen, omdat het delen van een klein getal door een ander klein getal een enorme foutmelding kan geven. Wat daar dus in eerste instantie miste, is de mogelijkheid die de visualisatie van ideeën kan bieden; niet alleen het idee van een continue functie, maar het idee van een lokaal rechte lijn die pas als je er sterk op inzoomt een helling blijkt te bevatten.

Wat er in de toekomst dus zal gebeuren, hangt sterk af van de technologieën die we hebben. Het lijkt erop dat de technologieën die we hebben mijn argumenten voor de ideeën die ik heb versterken. Ik doel dan bijvoorbeeld op de menselijke belichaming van onze waarnemingen, wat we tegenwoordig op een iPad kunnen weergeven. We kunnen met onze vingers een lijn volgen, we kunnen dingen uitvergroten of verkleinen door onze vingers uit elkaar te bewegen of we kunnen dingen eenvoudig bovenop elkaar weergeven. We kunnen tegenwoordig dingen die we vroeger met boeken niet konden weergeven.

Bijvoorbeeld het verschil tussen dy/dx , de raaklijn aan een grafiek en de eigenlijke vorm van die grafiek. Door met bewegende beelden in te zoomen op zo'n grafiek zou dit het verschil duidelijk kunnen maken. Op die manier zullen vele nieuwe ideeën ontstaan over het ontdekken van een operationele vertaling van de 'embodied' wereld. Als je bijvoorbeeld gecompliceerde integralen moet oplossen, hoeft het niet zinvol te zijn om te weten met welke technieken je een bruikbaar antwoord kunt genereren. Als je een formule krijgt voor het antwoord en als je deze formule kunt manipuleren, dan kun je het initiële probleem koppelen aan een exacte beschrijving van het antwoord.

Als ik naar de toekomst kijk, denk ik niet dat de menselijkheid de komende honderd of duizend jaar veel zal veranderen. Als we echter kijken naar de manier waarop machines en computers de afgelopen halve eeuw, de afgelopen tien jaar of tien weken zijn veranderd en als we leren hoe we logisch over wiskunde moeten nadenken, zie ik een bloeiende toekomst.

Dankwoord

Thijs Weggemans hielp bij het uitwerken en vormgeven van het interview. Hij maakte er een leesbaar verhaal van.

Bennie Mols

Kijkduinstraat 121-2

1055 XW Amsterdam

benniemols@gmail.com

Maatschappij Studiegroep Wiskunde met de Industrie 2011

Kortste routes op een analoge chip

Het ontwerp van een analoge chip gebeurt door zijn complexiteit nog steeds deels handmatig. Halfgeleiderfabrikant NXP zoekt naar een wiskundige methode om het chipontwerp verder te automatiseren en legt daarom het ontwerpprobleem voor aan de Studiegroep Wiskunde met de Industrie.

Deelnemers van de studiegroep

Marjan van den Akker (UU)

Theo Beelen (NXP)

Rob H. Bisseling (UU)

Bas Fagginger Auer (UU)

Frederik von Heumann (TUD)

Tobias Müller (CWI)

Joost Rommes (NXP)

Elektronische chips zijn wonderen van compactheid. Een digitale chip bestaat uit regelmatige blokken die allemaal ongeveer dezelfde afmetingen en vorm hebben. Dat maakt het chipontwerp relatief eenvoudig en grotendeels automatiseerbaar. Anders wordt het bij analoge chips. Op analoge chips hebben de verschillende onderdelen (blokken met complexe samenstellingen van basiscomponenten zoals weerstanden, transistoren, spoelen en condensatoren) vaak verschillende vormen. Bovendien kunnen de onderdelen elkaar storen, zeker bij gebruik van hoge signaalfrequenties.

Door de complexiteit van de analoge chips zijn de bestaande automatische ontwerpprogramma's vaak niet goed toepasbaar. Daarom gebeurt het ontwerp van analoge chips nog steeds deels handmatig. De ontwerpers gebruiken hierbij de ervaring en intuïtie die ze tijdens eerdere productontwikkeling hebben opgedaan. Ze beschouwen zichzelf soms zelfs als kunstenaars.

"Kunnen we die intuïtie toch niet rationaliseren?", vroeg chipfabrikant NXP Semi-

conductors N.V. uit Eindhoven (in 2006 afgesplitst van Philips) zich af. NXP is zich de laatste jaren steeds meer gaan toeleggen op het ontwerp en de fabricage van analoge chips. Ze worden vooral gebruikt in toepassingen waarbij analoge signalen uit de omgeving moeten worden opgepikt. Het analoge signaal wordt vervolgens vertaald in een digitaal signaal. Analoge chips zitten bijvoorbeeld in mobiele telefoons, in auto's en in de ov-chipkaart.

Viaducten

Wiskundige Joost Rommes is onderzoeker bij NXP en projectleider ontwerpmethoden. Hij vertelt dat hij het ontwerpprobleem wel eens heeft aangepakt, maar al snel moest concluderen dat het erg ingewikkeld werd. "Omdat wij meteen aan onze ontwerpers moeten denken, kan de probleemaanpak al snel een tunnelvisie krijgen. Ik wilde het ontwerpprobleem aan de Studiegroep Wiskunde met de Industrie voorleggen omdat de wiskundigen onbevooroordeeld naar het probleem kunnen kijken. Zij hoeven in eerste instantie geen rekening met onze ontwerpers te houden."

Een ontwerper van een analoge chip staat voor de vraag hoe hij de verschillende componenten zodanig op de chiphouder moet plaatsen dat aan een aantal randvoorwaarden wordt voldaan. Die randvoorwaarden zijn bijvoorbeeld dat de gebruikte oppervlakte minimaal is, dat de totale lengte van de verbindingen tussen componenten minimaal is, dat de verbindingen zo weinig mogelijk bochten kennen, maar ook dat componenten elkaar niet storen en dus ook voldoende afstand

tot elkaar moeten houden. Bijkomende uitdaging is dat de randvoorwaarden per ontwerp (en per ontwerper) kunnen verschillen.

De analoge chip heeft een driedimensionaal karakter. Bovenop een siliciumsubstraat ligt een handvol metaallaagjes die in dikte variëren. De verbindingen tussen de componenten kunnen verschillende metaallagen gebruiken. Zo ontstaan bijvoorbeeld viaducten waar verbindingen over elkaar heen lopen. Rommes: "Onze specifieke vraag aan de studiegroep was als volgt: Wij geven jullie een invoerbestand met het aantal componenten, het aantal metaallagen, de aansluitpunten op de componenten en de eis welk aansluitpunt met welk ander aansluitpunt moet worden verbonden. Kunnen jullie ons dan een algemene methode leveren die in een uitvoerbestand aangeeft waar we de componenten moeten plaatsen en hoe de verbindingen op de chip moeten lopen, rekening houdend met de gespecificeerde randvoorwaarden?"

Dijkstra-algoritme

Een groep van zes wiskundigen boog zich in januari 2011 over dit probleem. "Het bleek te veel gevraagd om dit probleem binnen een week in zijn algemene vorm op te lossen", vertelt Bas Fagginger Auer, promovendus aan de Universiteit Utrecht. "Om het probleem te vereenvoudigen, hebben we besloten om de plaatsing van de componenten als gegeven te beschouwen en alleen de verbindingen als onbekenden."

De studiegroep ontwikkelde binnen een week twee oplossingsmethoden. Allereerst een heuristische oplossingsmethode gebaseerd op het bekende Dijkstra-algoritme, dat onder meer wordt toegepast in autonavigatiesystemen. En ten tweede een methode gebaseerd op geheeltallig lineair programmeren

(ILP). Voor beide methoden bekeken de wiskundigen ook nog een variant waarin meer dan twee blokken aan elkaar gekoppeld moeten worden. Hiervoor is het nodig om in plaats van paden Steiner-bomen te construeren, die de blokken onderling verbinden.

Bij de heuristische methode wordt de chip gediscrètiseerd tot een rooster. Het rooster wordt opgevat als een graaf en de roosterpunten die vallen binnen de aanwezige componenten worden verwijderd uit de graaf. Op de overgebleven graaf pasten de wiskundigen een variant van Dijkstra's algoritme toe om kortste paden te vinden tussen twee aansluitpunten die met elkaar verbonden moeten worden. "Het Dijkstra-algoritme zoekt zo kort mogelijke paden in een graaf", vertelt Fagginger Auer. "Het algoritme is wiskundig eenvoudig en gemakkelijk te implementeren. Wij hebben de notie van 'kort' echter vervangen door een algemene kostenfunctie, samengesteld uit de eisen die de ontwerper aan de bedrading stelt. Iedere eis heeft zijn eigen voorconstante, waardoor de ontwerper specifieke eisen zwaarder of minder zwaar kan laten wegen door deze constanten te variëren. Bijvoorbeeld, door de constante voor de totale lengte van de bedrading groot te maken, zal het algoritme zoeken naar paden die kort zijn, maar mogelijk veel hoeken bevatten. Als daarentegen de constante voor het aantal hoeken in de bedrading groot is, staat het algoritme paden met een grotere lengte toe, als dit ervoor zorgt dat paden rechter worden."

Verder wordt de A*-uitbreiding van het oorspronkelijke Dijkstra-algoritme gebruikt, wat ervoor zorgt dat de zoekrichting van het algoritme enigszins de goede kant op wordt gestuurd. Fagginger Auer: "Stel dat een aansluitpunt linksboven op de chip verbonden moet worden met een aansluitpunt rechtsonder, dan is de kans klein dat de kortste route via de rechter bovenhoek verloopt. Dan sturen we de zoekrichting automatisch al naar rechtsonder. Dat scheelt veel rekentijd voor het algoritme."

De wiskundigen implementeerden deze methode in een computerprogramma: het prototype. Dit prototype neemt een vijftal metaallagen aan waarin de verbindingen kunnen lopen, en gebruikt een rooster van duizend bij duizend punten. De oplossingstijd ligt in de orde van enkele seconden tot maximaal tien seconden. "Voor ons als wiskundigen valt lastig te zeggen hoe goed de oplossing van het programma is", zegt Fagginger Auer over het ontwikkelde prototype. "Dat komt omdat een objectieve maat ontbreekt voor wat precies een goede oplossing is."

Lineair programmeren

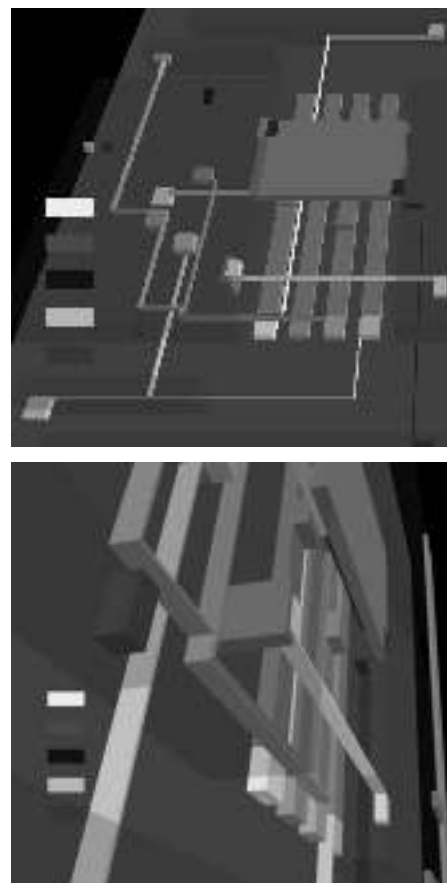
Voor de tweede oplossingsmethode is het ontwerpprobleem vertaald in de context van geheel-tallig lineair programmeren (ILP). Dat biedt twee voordelen ten opzichte van de heuristische oplosmethode, aldus Fagginger Auer. "Ten eerste geeft deze methode een schatting van hoe ver een bepaalde oplossing af zit van het optimum. Ten tweede loopt deze methode veel meer mogelijke paden af. De heuristische methode legt de kortste paden als eerste aan en daarna steeds langere paden. Je kunt je echter voorstellen dat het soms beter is om eerst een langer pad aan te leggen en daarna een korter pad. Dat kan met de ILP-methode omdat deze methode paden als het ware aan en uit kan zetten. De methode van de 'column generation' berekent dan welke paden de grootste toename van de kwaliteitsfunctie geven. Alleen die paden worden verder geanalyseerd."

De ILP-methode kost meer rekenwerk dan de heuristische methode, maar is ook preciezer. Of die precisie de moeite loont vergeleken met een toename van het rekenwerk, kan Fagginger Auer niet zeggen. "We hebben op papier een analyse gegeven van hoe ILP het chipontwerp kan uitrekenen, maar de studieweek was te kort om deze methode ook te implementeren in een computerprogramma, zoals we bij de heuristische methode wel hebben gedaan."

Prototype

"Mijn verwachtingen zijn ruimschoots overtroffen", zegt NXP-onderzoeker Joost Rommes over de resultaten van de studiegroep. "In de eerste plaats hebben de wiskundigen een mooi prototype gemaakt waarover ook onze ontwerpers enthousiast zijn. De ontwerpers kunnen het prototype niet meteen gebruiken — dat was ook niet het doel — maar het is wel een mooi startpunt om de automatisering van het chipontwerp verder te ontwikkelen. De methoden die de wiskundigen hebben ontwikkeld zijn algemeen. Bij een gegeven invoerbestand, berekenen ze een uitvoerbestand. In de tweede plaats kunnen we de analyse en het prototype gebruiken in onderhandelingen met verkopers van ontwerpsoftware. Met het prototype in de hand kunnen wij bijvoorbeeld aantonen wat minstens haalbaar is en daarmee onze eisen aan de softwarefabrikant hard maken."

NXP maakt van een product vaak meerder varianten, bijvoorbeeld omdat frequentiebanden in de praktijk nogal eens worden veranderd, waardoor een afnemer vraagt om een nieuwe chipvariant. Bij het ontwerp van die



Figuur 1 Screenshots met details uit het ontwerp van een analoge chip. Beide circuits bestaan uit vijf op elkaar gestapelde metaallagen waarin verbindingen mogen lopen. De blokjes in het ontwerp stellen de aansluitpunten op een component voor. De blokjes in de verticale rij aan de linkerkant geven de voorconstanten weer voor de kostenfunctie die de wiskundigen hebben gebruikt. In dit geval zijn de blokjes allemaal even lang, wat wil zeggen dat de voorconstanten allemaal even groot zijn gekozen. Zo kan een ontwerper in een oogopslag zien wat er verandert in het ontwerp wanneer een of meer voorconstanten veranderen.

varianten wil het bedrijf liefst een bepaalde ontwerpbasis hergebruiken. Dat levert namelijk minder werk. "De resultaten van de studiegroep zijn voor ons ook een aanzet om een zogeheten geparameteriseerd ontwerp te ontwikkelen", zegt Rommes. "Met 'geparameteriseerd' bedoelen we dat we bij het veranderen van het chipontwerp een aantal parameters aanpassen, bijvoorbeeld het aantal transistoren dat in een blok zit. Idealiter willen we een computerprogramma waarin we voor een nieuwe variant van eenzelfde product alleen een aantal parameters hoeven te veranderen, waarna het programma met een druk op de knop het nieuwe chipontwerp geeft. Zo kunnen we sneller inspelen op de vragen van onze klanten."

Dit is een verslag van de Studiegroep Wiskunde met de Industrie 2011, van 24–28 januari op de VU in Amsterdam. Voor de bijbehorende wetenschappelijke publicatie, waarin de gebruikte wiskundige modellen en methoden uitvoerig staan beschreven, verwijzen we u naar de website www.few.vu.nl/~swi2011.

De derde wet

| Solicited Comments

In deze rubriek worden lezers door de redactie uitgenodigd te reageren op recent in dit blad verschenen artikelen.

Redacteur: Ferdinand Verhulst
derdewet@nieuwarechief.nl

Het onderstaande is een reactie op het artikel 'Vierkant verkeerd' in de nieuwsrubriek van het NAW-juninummer van 2011.

Leonardo in de fout?

Onder de kop 'Homo universalis Da Vinci is ook maar een gewoon mens' verscheen in het *Algemeen Dagblad* (24-3-2011) een bericht van de heer Rinus Roelofs, die in een tekening van Leonardo een fout ontdekte. Het bericht is overgenomen door het Belgische tijdschrift *Eos* (april/mei), het *Nieuw Archief voor Wiskunde* (juni), de *Scientific American* (29-3-2011) en misschien nog door andere media.

Na grondige overweging en gezaghebbende consultaties, wijst Roelofs erop dat de onderste top van de Leonardo-tekening niet een viervlakstop, maar een drievlakstop van een tetraëder dient te zijn. Heeft hij gelijk? Twijfel is gerechtvaardigd.

De confrontatie

Zie Figuur 1. Een parabel moge de spraakverwarring illustreren. Een vermaard schilder, Leendert, had een ezel geschilderd, voortreffelijk, een trompe-l'œil, hij zou zo uit de lijst kunnen stappen. Een andere schilder, een scherpzinnig observeerder, Rijndert zei: "Jawel, mooi, maar fout, want een paard heeft niet zulke lange oren." En Leendert, schouderophalend: "Hij heeft blijkbaar nooit een ezel gezien."

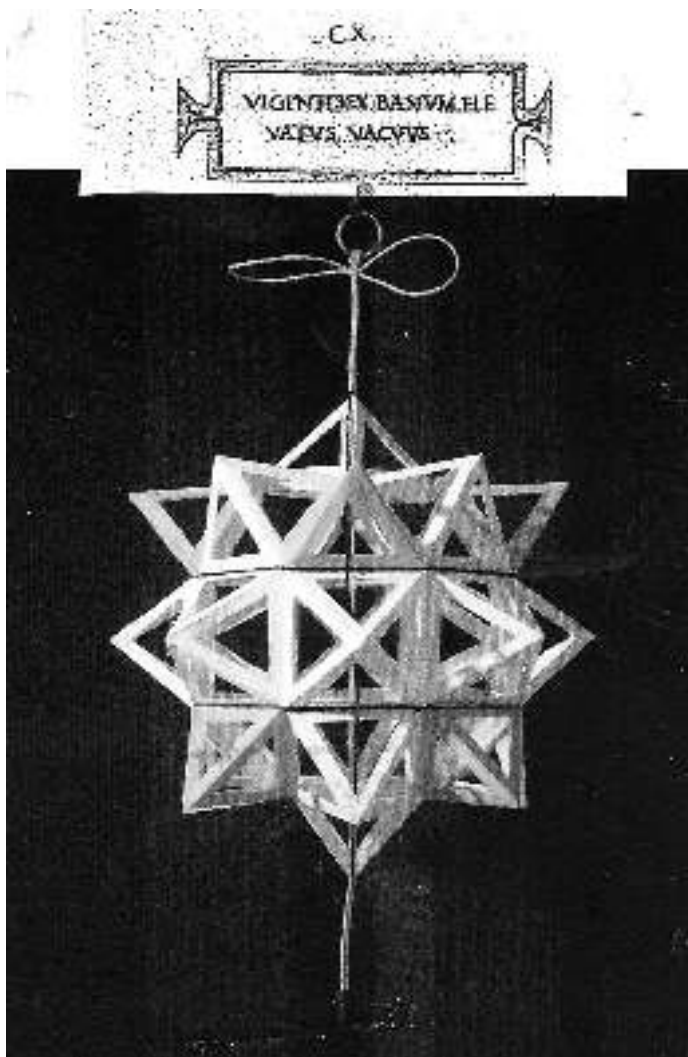
De klassieke basis van de ster is een tweemaal afgeknotte kubus, ofwel een rombokuboctaëder (Euler-formule: $26 + 24 - 48 = 2$), onbetwist uitgangspunt voor de beoogde stervormige rombokuboctaëder (Euler: $50 + 96 - 144 = 2$). Maar er bestaat een variant: de pseudo-rombokuboctaëder, waarvan gewag is gemaakt in het vermaarde boek *Polyhedron Models* van Magnus J. Wenninger (1971), zie Nr. 13, p. 27: de *Pseudo-Rhombicuboctahedron*. Deze 'pseudo' heeft precies dezelfde Eulerformule: $26 + 24 - 48 = 2$, en gelijke cijfercodes. Misschien zou *Para-Rhombicuboctahedron* een betere benaming kunnen zijn.

Nomenclatuur

Er is in het algemeen nog een aanzienlijke verscheidenheid van naamgevingen, welke tot spraakverwarring kan leiden: verkorte aanduidingen, beschrijvende definities, nummerycodes, soortnamen, sferisch, rombisch, semi-regulair, onvolledige kwalificaties, meerduidige typeringen en ten slotte al of niet een eigenaam, welke aan het onderhavige object vooralsnog ontbreekt. Ook ontbreekt er een uitputtende,



Figuur 1 Links de tekening (ets) die Leonardo maakte voor het boek van de monnik Luca Pacioli, *De Divina Proportione*. Het beknopte titelopschrift luidt 'Zesentwintig Basis Verhoogd Leeg'. Rechts de computerschets CAD van Rinus Roelofs, gecorrigeerd naar zijn zienswijze. Het titelopschrift is gehandhaafd, maar in moderne nomenclatuur mag het luiden: 'Stervormige Rombokuboctaëder'.



Figuur 2 Het papiermodel dat ondergetekende met plezier en toewijding heeft gemaakt om het reële bestaan van de Leonardoversie te bevestigen en waarbij geen stereometrische tegenspraak is ontmoet. De polyeder is verticaal een beetje omhoog gedraaid om de ophanging fysisch verantwoord weer te geven. De naam is steeds dezelfde als de voorgaanden, weliswaar een beetje ruim in de jas, hetgeen meerdere en hier onvermelde invullingen toestaat.

eenduidige en etymologisch verantwoorde definitie, die zoals gezegd ‘noodzakelijk en voldoende’ is, en recht geeft aan de stangenversie en de lege binnenruimte. Een naamvoorstel voor deze stervormige parakuboctaëder zou kunnen zijn ‘Il Poliedro Leonardesco’, in de hoop dat het KWG wil overwegen om deze titel officieel voor te dragen en te bevestigen. (Het model ‘Il Poliedro Leonardesco’ wordt bij deze aangeboden aan specifieke collecties.)

Overwegingen

Was het de opdracht om een ster te maken van de klassieke Archimedische kuboctaëder? Dat staat nergens expliciet zo gesteld en het schilderij van Luca Pacioli, waar een vage afbeelding van de polyeder is weergegeven is niet verplichtend, is zelfs verwarrend en maakt inderdaad de pseudo-interpretatie mogelijk.

Was de ‘pseudo-’ toentertijd bekend? Het schijnt pas veel later (17de eeuw?) geboekstaafd te zijn en de polemiek is nog steeds gaande of het de veertiende Archimedespolyeder genoemd zou mogen worden. Heeft Leonardo geweten waar hij mee bezig was of heeft hij werkelijk een vergissing gemaakt, die geen ‘fout’ bleek te zijn? Het zou niet het enige geval zijn waarbij een wetenschappelijke vergissing tot een

belangrijke ontdekking heeft geleid. En in dit geval was Leonardo dus een historische voorloper.

Is het niet aannemelijk dat Leonardo, uitvinder en ongetemd, ongeremd grensoverschrijder, nieuwe wegen onderzoekt? Reeds het feit dat hij een stangenfiguur biedt en de polyeder leeg maakt, toont dat hij steeds gebaande wegen vermijdt en *terra incognita* onderzoekt, in het geestelijk klimaat van het bruisende *quattrocento fiorentino*.

Akkoord: “Homo universalis is een gewoon mens” (het kleinerende ‘ook maar’ weggelaten), want in staat om fouten te maken, zoals in deze zelfde polyedertekening, namelijk: de as van de polyeder van de boventop naar de ‘foute’ benedentop ligt onder een hoek met het vlak van tekening, maar zou recht en verticaal onder de ophangspijker en in het verlengde van het koord moeten blijven. Desalniettemin: Ere wie ere toekomt!

Lieuwe Op’t Land, Ericeira, Portugal
(architect-ingenieur, kunstschilder en wiskundige)

Het onderstaande is een reactie op het artikel ‘Komt onvermoeide arbeid alles te boven?’ door Kees Roos uit het NAW-decembernummer van 2011.

Het is onzeker of een onvermoeide arbeid alles te boven komt

In zijn afscheidsrede geeft Kees Roos, naast een terugblik op zijn loopbaan aan de TU Delft, een beschouwing over de juistheid van de lijfspreuk van het Koninklijk Wiskundig Genootschap: ‘Een onvermoeide arbeid komt alles te boven’. De titel van het stuk van Roos stelt deze spreuk als een vraag: ‘Komt een onvermoeide arbeid alles te boven?’ Zijn artikel besloeg echter tien bladzijden, en uit nieuwsgierigheid kopte ik meteen door naar de laatste alinea. De conclusie daar luidt: “Vanwege de onuitputtelijkheid (of onvolledigheid) van de wiskunde kan onze arbeid niet alles te boven komen. Bovendien geldt dit niet alleen de wiskunde, maar alle wetenschappen, want alle wetenschappen lijden aan het euvel onvolledig te zijn.”

Deze conclusie was meer dan voldoende om het gehele artikel met plezier te lezen. In grote lijnen onderschrijf ik deze conclusie van Roos. Echter er is een nuancering te maken, want in feite zijn er twee min of meer los van elkaar staande vragen.

De eerste vraag is of ons kennen van de wetenschap onvolledig is en ook altijd zal blijven. Ondanks alle grote progressie, vroeger, nu en in de toekomst, zal de wetenschap nooit klaar en af zijn. Iemand die dat wel zou beweren is overmoedig en te zeer onder de indruk van het menselijk kunnen en weten. Met Roos ben ik van mening dat de wetenschap onuitputtelijk is, en ons kennen ervan onvolledig moet blijven. Binnen de wiskunde met haar strak afgebakende axioma’s volgt dit uit het werk van Gödel.

In hoeverre deze onvolledigheid van ons kennen evenzo voor andere wetenschappen, zoals bijvoorbeeld natuurkunde, sterrenkunde of psychologie, geldt lijkt een onbeslisbare vraag. Voor het zoeken naar een antwoord betreden we dan het terrein van de intuïtie. Mijn persoonlijke intuïtie in deze is gebaseerd op mijn joods-christelijke achtergrond. In Psalm 8 schrijft David: “U hebt hem (de mens) bijna een god gemaakt, hem bekroond met glans en glorie, hem toevertrouwd het werk van uw handen en alles aan zijn voeten gelegd.” Mijn intuïtie dat ons kennen onvolledig zal blijven is gebaseerd op dat woordje ‘bijna’. Zo ons kennen volledig zou zijn dan zou de mens aan God gelijk zijn. Maar dat laatste te menen is hoogmoed. Deze redenering is wat in de natuurkunde wel een heuristisch argument wordt genoemd. Geen absoluut bewijs maar wel plausibel. Het staat een ieder vrij om eenzelfde conclusie te trekken, gebaseerd op andere gronden, bijvoorbeeld vanuit de God van de islam of vanuit de God van Spinoza, of op humanistische gronden. Maar als men de conclusie onderschrijft dat ons kennen

onvolledig zal blijven, dan is het onderstaand antwoord op de tweede vraag duidelijk.

De tweede vraag is of dat deel van de wetenschap dat zich laat kennen dan misschien wel verkregen kan worden louter door een onvermoeide arbeid? Opnieuw binnen de wiskunde met haar strak afgebakende axioma's weten we door het werk van Turing dat voor oplosbare problemen we geen weet hebben hoelang we moeten doorzoeken voor een oplossing. Vanuit deze optiek is het binnen de wiskunde onzeker of een onvermoeide arbeid alles te boven komt.

Mijn tweede vraag betreft echter niet alleen de wiskunde maar is gesteld voor alle wetenschap. Het antwoord op deze tweede vraag is mijns inziens ontkennend. Het zijn de bekende woorden van Einstein, dat hij zijn werk kon doen door 99 procent transpiratie en 1 procent inspiratie. Transpiratie staat hierbij synoniem voor een onvermoeide arbeid. Inspiratie is een lijntje van boven, en iets dat je gratis en wel voor niets krijgt. Inspiratie komt van 'in spiritus', dat letterlijk betekent 'in de geest' zijn. Dat kun je ervaren als een geschenk van God, maar evenzo heeft inspiratie zin buiten de religieuze kaders. Hans Kramers verwoordde het als volgt: "Of human things our intellect can only ten percent detect. The rest our stupid heart may know when its mysterious sources glow."

Je kunt je erop laten voorstaan dat ook die 1 procent inspiratie louter het gevolg is van je 99 procent transpiratie, en dat je het dus allemaal dankzij je onvermoeide arbeid hebt verkregen. Maar opnieuw komt mij dat voor als hoogmoed. De werking van ons brein is nog goeddeels *terra incognita*, en hoe inspiratie werkt, hebben we nog niet echt door. Vanwege bovenstaand antwoord op de eerste vraag zal ons kennen van het begrip inspiratie onvolledig blijven, en daarmee zal het nooit zeker zijn dat een onvermoeide arbeid voor 100 procent alles te boven komt.

Gert Heckman

Dankwoord

De schijver van dit stukje is Henk Barendregt erkentelijk voor een stimulerende discussie naar aanleiding van bovenstaande tekst.

Reactie Ferdinand Verhulst, redacteur 'De Derde Wet'

Het is interessant om in te gaan op de vraag of een onvermoeide arbeid alles te boven komt. Het gaat hierbij over wetenschap, denk vooral aan de wiskunde en de natuurwetenschappen.

Natuurlijk zijn deze wetenschappen zeer verschillend van aard. Wiskunde is een geesteswetenschap, de verschillende natuurwetenschappen kun je ook niet over een kam scheren. De natuurkunde bijvoorbeeld is een gedurfd mengsel van experimentele ervaringen en theoretische (vooral wiskundige) constructies dat opmerkelijk goed materiële verschijnselen voorspelt.

Wat de wiskundige grondslagen betreft, doet Gödel ons de das om als het gaat om volledige bewijsbaarheid, maar ik heb nooit gemerkt dat dit de vloed van wiskundige artikelen, meer dan 60.000 per jaar, heeft ingedamd.

Bij wiskunde zal elk nieuw en consistent stelsel van conventies een nieuw gebied in de wiskunde opleveren; je hoeft geen theologische argumenten aan te halen om in te zien dat daar geen einde aan komt. Wel kunnen bepaalde gebieden overbekend raken, denk aan de klassieke analytische meetkunde, maar die worden dan bijgezet in het museum van de wiskunde. Daarnaast kunnen we van een enkele eeuwen oud gebied als lineaire partiële differentiaalvergelijkingen nog niet eens zeggen dat we de contouren van een algemene theorie zien.

Bij de natuurwetenschappen ligt dat anders. Hier liggen eeuwenoude vragen over de kenbaarheid van de werkelijkheid, en of zulke kennis-vragen zinvol zijn. Henri Poincaré zegt er in *La Valeur de la*

Science dit over: "Wetenschap is allereerst een classificatie, een manier om feiten te benaderen en te ordenen. Het is een systeem van relaties en deze relaties tussen feiten (of objecten) kunnen als objectief worden beschouwd. Men kan dan twee vragen stellen:

- Vertelt wetenschap ons de ware aard van de dingen?
- Vertelt wetenschap ons de ware aard van de relaties tussen de dingen?"

Over de eerste vraag zegt Poincaré dat niemand aarzelt om 'nee' te zeggen. Maar hij gaat nog verder: "Niet alleen kan de wetenschap ons niets vertellen over de aard van de dingen, niets is daar toe in staat en als een of andere god het wist, zou hij niet de woorden kunnen vinden om het uit te drukken. We zouden niet alleen het antwoord niet kunnen gissen, als iemand het ons zou geven zouden we niet in staat zijn om het te begrijpen."

Bij de tweede vraag merkt Poincaré op dat het voortgaande onderzoek onze natuurkundige theorieën steeds waarschijnlijker maakt.

Tenslotte, Gert, die inspiratie met een lijntje van boven, daar begrijp ik echt niets van. Zowel de psychologie als het hersenonderzoek laten zien hoe onze hersenen de bewuste hersenactiviteit en andere indrukken weten te verwerken om dan in een soort faseovergang tot een nieuw inzicht te komen. Het lijkt me dat je bij het veronderstellen van 'een lijntje van boven' met een romantische fantasie bezig bent.

Weerwoord Gert Heckman

De lijfspreuk van het KWG 'Een onvermoeide arbeid komt alles te boven' doet geen recht aan de essentiële rol die inspiratie speelt bij het vinden en ontdekken van nieuwe wiskundige resultaten, zo heb ik betoogd in mijn reactie. Kees Roos stelt dat een onvermoeide arbeid niet alles te boven komt op grond van de stelling van Gödel over de onvolledigheid van de wiskunde. Ik ben het met Ferdinand eens dat voor de alledaagse wiskundige dit laatste niet zo'n sterk argument is.

Daarentegen inspiratie, een lijntje van boven, een ingeving, het zijn allemaal synoniemen voor iets wat we denk ik nog niet zo goed begrijpen. Met het vierde synoniem, aangedragen door Ferdinand, door het als faseovergang in de hersenen te benoemen, kan ik niet zo veel. Etymologisch hebben de drie door mij gekozen synoniemen een duidelijk religieuze lading. Over welke geest gaat het, wie voedt dat lijntje van boven, en wie geeft wat in? Bij mijn weten zijn mijn drie synoniemen onderdeel van het alledaagse spraakgebruik met of zonder religieuze context: geen onvermoeide arbeid, maar een zoete inval.

Afgelopen najaar had ik een sabbatical in Beijing. Mijn slotweekend in Shanghai woonde ik Die Schöpfung van Joseph Haydn bij. Een prachtig muziekstuk over de schepping in drie delen: de scheiding, de schepping, en dan het mooiste deel over Adam en Eva in het paradijs. Mijn buurman in de concertzaal vertelde me dat Haydn het in een heel korte periode heeft gecomponeerd. Na de eerste uitvoering van het werk door Haydn ging de zaal helemaal uit zijn dak met een overweldigend applaus. De reactie van Haydn hierop was dat ze niet hem moesten bedanken, maar Hem, waarbij hij met zijn vinger naar boven wees, van wie hij de inspiratie had ontvangen. Ferdinand ziet dit als een reactie van een romantische fantast, en ik zie het als een bevestiging van het punt wat ik probeer te maken.



Boekbesprekingen

| Book Reviews

Redactie: Hans Cuypers en Hans Sterk

Review Editors NAW - HG 8.38
Faculteit Wiskunde & Informatica
Technische Universiteit Eindhoven
Postbus 513
5600 MB Eindhoven
reviews@nieuwarchief.nl
www.win.tue.nl/wgreview



Jonathan Borwein, Keith Devlin
The Computer as Crucible
An Introduction to Experimental Mathematics

A.K. Peters/CRC Press, 2008

200 p., prijs £15.99

ISBN 9781568813431

Met een titel die vrij vertaald 'De computer als vuurproef' betekent, vormt dit boek een lichtvoetige introductie tot 'experimental mathematics' (wat de auteurs precies onder experimentele wiskunde verstaan, wordt gelukkig in hoofdstuk 1 behandeld).

Jonathan Borwein heeft een achtergrond in de analyse en optimalisering, en is al bijna twintig jaar een pleitbezorger van experimentele wiskunde. Keith Devlin, met een achtergrond in de logica en verzamelingenleer, heeft zich de laatste jaren beziggehouden met de manier waarop het menselijk brein wiskunde bedrijft. Zoals ze zelf schrijven: "Borwein was on the inside looking out, and Devlin was on the outside looking in."

De jarenlange praktijkervaring van de beide auteurs laat zich duidelijk zien in de manier waarop ze een aantal problemen beschrijven en de manier waarop die met behulp van de computer zijn opgelost. Zo bieden ze ons inzicht in het vakgebied, inspiratie voor het gebruik van de computer bij wiskundige problemen en af en toe ook een korte geschiedenisles. Bovendien zijn ze erin geslaagd precies de juiste balans te vinden tussen wiskundige diepgang en toegankelijkheid voor een breed publiek.

Het resultaat is een gemakkelijk verteerbaar boek vol humor, voor iedereen met affiniteit voor wiskunde, en een feest van herkenning voor iedereen die ooit de computer gebruikte om een stelling te vinden of te bewijzen.

Dan Roozmond



Anne-Marie Vlasschaert (ed.)
Le Liber mahameleth: Édition critique et commentaires

Franz Steiner Verlag, 2010

Boethius Band 60

613 p., prijs € 74

ISBN 9783515092388

Het Boek Mahameleth is rond 1150 in de zuidelijke helft van Spanje geschreven door een christelijke wiskundige. Mahameleth is een Arabisch woord dat (handels)transacties betekent. De anonieme auteur is vermoedelijk in de leer geweest bij islamitische wiskundigen, die hem een groot deel van hun kennis op het gebied van rekenkunde hebben onderwezen. Hij legt deze stof helder uit in goed Latijn, en heeft daarmee een oorspronkelijk wiskundig werk geschreven in een periode waarin anderen zich vooral bezighielden met het vertalen van Arabische teksten in het Latijn.

Het is een interessante vraag wat precies de doelgroep was van het boek. Er staan onderwerpen in die interessant zijn voor een handelaar, zoals het omwisselen van valuta, en het rekenen met het decimale systeem en met een abacus. De meeste opgaven in het boek zijn 'recreational mathematics' en voor de handelspraktijk van geen belang. Een voorbeeld: Een arbeider verdient in 30 dagen een salaris van 30

plus een onbekend getal. In 10 dagen verdient hij het onbekende getal plus de wortel uit 30 plus het onbekende getal. De auteur vindt het onbekende getal (6) door het oplossen van een kwadratische vergelijking. Een ander voorbeeld: verdrijf de wortels uit de noemer van $\frac{10}{\sqrt{6}+\sqrt{7}+\sqrt{8}}$. De oplossing $\frac{10}{143}(\sqrt{200} + \sqrt{486} + \sqrt{343} - \sqrt{1344})$ wordt niet expliciet berekend maar de lezer krijgt alleen te horen hoe hij deze zelf in een aantal stappen kan vinden op basis van Boek 10 van de *Elementen* van Euclides, die als voorkennis bekend worden verondersteld. Deze opgaven waren van het soort waarmee rekenmeesters elkaar in de eeuwen daarna hebben uitgedaagd. *Het Boek Mahameleth* is vermoedelijk een van de oudste Europese handboeken voor rekenmeesters, dat wil zeggen degenen die rekenen onderwezen aan handelaars.

Pas in de jaren tachtig werd *Het Boek Mahameleth* bekend door het werk van de Zwitserse historicus van de wiskunde Jacques Sesiano. Anne-Marie Vlasschaert heeft *Le Liber Mahameleth* nu uitgegeven op basis van alle bewaarde middeleeuws Latijnse handschriften. De Latijnse tekst van 452 pagina's wordt voorafgegaan door een inleiding en een commentaar in het Frans. Op deze manier is *Het Boek Mahameleth* goed toegankelijk gemaakt voor lezers die zowel het Latijn als het Frans machtig zijn. Het werk is van zo grote historische waarde dat volgens het oordeel van uw recensent ook een Engelse vertaling zou moeten worden gepubliceerd.

Jan Hogendijk



Vincent van der Noort
Getallen zijn je beste vrienden
Ontboezemingen van een nerd

Athenaeum-Polak & Van Genneep, 2011

240 p., prijs €18,95

ISBN 9789025367770

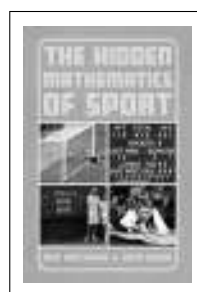
Dit is een alleraardigst boek waarin zo'n twintig wiskundige verhaaltjes staan beschreven. Het boek is vlot geschreven en is zeker toegankelijk vanaf de 4de klas havo, NT-profiel, maar het is eigenlijk prima leesbaar voor iedereen met belangstelling voor wiskunde en niet noodzakelijk met veel kennis van wiskunde. Het begint allemaal simpel, met drie-hoeksgetallen, kwadraten en Fibonacci-getallen. Maar naarmate het boek vordert, wordt het uitdagender: de symmetriegroepen van Lie, de quaternionen en het vierdimensionale simplex komen voorbij. Het verhaal culmineert in het laatste hoofdstuk, waarin alle elementen bij elkaar komen. De auteur heeft hiermee een voortreffelijke prestatie geleverd: de wiskunde die zeker niet gemakkelijk is, wordt op een heldere en zeer toegankelijke manier gepresenteerd. Van grote kwaliteit in dit boek zijn de figuren, die in al hun simpelheid buitengewoon inzichtelijk zijn. Terecht wordt de illustrator Tammo Jan Dijkema aan het einde van het boek bedankt. Maar het boek kent wel meer lagen. Zo heeft de auteur gekozen voor een opvallende nummering van de hoofdstukken: met hoofdstukken E1 tot en met E8 wordt het 'eigenlijke verhaal' verteld, waarna hij op basis van verschillende thema's uitweidt alsof het boek een kubus is, waarin de E-hoofdstukken de hoekpunten vormen. In die zin lijkt het wel op *The curious incident of the dog in the nighttime* van Mark Haddon, waarin autisme wordt beschreven.

Een laag die er niet is, en die door de titel wel wordt gesuggereerd, is de psychologie. Het begrip 'vriendschap' wordt niet verder beschreven dan de bevriende getallen, dat wil zeggen twee getallen waarvan wederzijds de som van de delers van het ene getal het andere getal oplevert. Ook de ondertitel moeten we maar heel vrij interpreteren als

"ik ben een nerd en dit is wat ik aan ontboezemingen heb". Zelf had ik verwacht dat dit allemaal vrijer zou zijn en meer het fenomeen 'wiskundige' zou verklaren — want een beetje een nerd zijn we tenslotte allemaal wel — en dat de vraag naar het 'waarom' van vriendschap naar (of liefde voor) getallen helderder zou worden. Maar dat ontbreekt en mijn psychologie studerende dochter was nauwelijks geïnteresseerd te krijgen. De enige echte ontboezeming vinden we op pagina 78 waarin de auteur beschrijft dat hij met een bepaald spelletje zijn latere vrouw meestal versloeg, die zelf een vriend van de auteur versloeg, die op zijn beurt de auteur weer versloeg. Opvallend is dat deze cirkelstructuur vaker terugkeert, onder andere ook bij Efrons dobbelstenen: een blauwe dobbelsteen met 4 vieren en 2 nullen, een gele dobbelsteen met 6 drieën, een rode dobbelsteen met 2 zessen en 4 tweeën en een groene dobbelsteen met 3 vijven en 3 enen. De eerste speler kiest het eerst een dobbelsteen, daarna de tweede speler. Vermakelijk is dat de tweede speler een dobbelsteen kan kiezen die de eerste speler met een kans 2/3 kan verslaan, welke dobbelsteen de eerste speler ook kiest.

De verdere keuze van de onderwerpen is uiteraard subjectief en richt zich naast de getallen vooral op aspecten van de algebra. Statistiek komt niet voor en ook moderne structuren zoals fractalen en wavelets worden niet besproken. Dat alles vermoedelijk om het boek beperkt, overzichtelijk en samenhangend te houden. Het zij zo, een tweede deel van dit boek is alleen maar wenselijk. De volgende stap zou zijn dat er wat meer formules in voor zouden komen. Hiermee zouden sommige aspecten wat doelmatiger beschreven kunnen worden en daarmee wat sneller toegankelijk worden. De keuze van de auteur om dat niet te doen kunnen we wel respecteren, vooral om het boek laagdrempelig te houden. Het boek bevat referenties die vooral een verbreding geven, maar niet zozeer zorgen voor verdieping. Maar wat is het een zegen om weer eens een oorspronkelijk in het Nederlands geschreven populair wiskundeboek te lezen. Er is uiteraard niets mis met goede vertalingen, maar op de een of andere manier kan een goed wiskundige toch het beste in zijn eigen taal vertellen. De subtiliteiten komen op deze manier verreweg het beste tot zijn recht en sluiten prima aan bij je eigen intuïtie. En ach, misschien is dat wel de sterkste psychologische boodschap.

Alfred Stein



Rob Eastaway, John Haigh
The Hidden Mathematics of Sport

Anova Books, 2011

208 p., prijs: £9.99

ISBN 9781907554223

This is a pleasant book to read for all who like sports. It combines amusing anecdotes with historic events. But do not expect to find profound mathematics. Yes, there are indeed mathematics in the book since almost all sporting events deal, one way or the other, with numbers, patterns and logic. The authors have included an occasional formula, elementary statistics or some basic probability theory, but any detail has either been moved to the appendix or, more often, banned from the book. That does not mean that the topics themselves are dull or uninteresting: it is proven easily with vectors that almost any try in rugby is off-side, all goalkeepers in football should use the concept of game theory when confronted with a penalty, and the shape of a ball is,

for good reasons, not round. The ways of assessment in jury sports do sometimes (but more often not) influence the final outcome, and the theory of where to hit a ball in snooker is quite different from practice, even when mathematics is taken into account. From these examples, it is also clear that the book has been written from the British perspective. Moreover, there is an overkill of references to sports like cricket or darts. And why not expand a little more on athletics: the difference in length between the staggered lanes in an athletic stadium is easily calculated, but why not show that a straight end of exactly 100 meters is the optimal use of the field? Nevertheless, it is most suitable for a few pleasant hours on a Sunday afternoon with the ears to the radio and the eyes on this book.

Kees Smit



Thomas Colignatus
Elegance with Substance

Dutch University Press, 2009

112 p., prijs €14,95

ISBN 9789036101387

vrij downloadbaar van www.dataweb.nl/~cool



Thomas Colignatus
Conquest of the Plane

Cool, T. (Consultancy & Econometrics), 2011

238 p., prijs €24,95

ISBN 9789080477469,

vrij downloadbaar van www.dataweb.nl/~cool

Elegance with Substance and *Conquest of the Plane* are two books by econometrician Thomas Colignatus, also known as Thomas Cool. In this review I shall refer to the books as EwS and CotP. Both are concerned with mathematics education (at high school level). EwS says that there is a whole lot wrong with how this is presently done, with itemization of fifteen notational disasters, five disasters in nomenclature and four in the standard line of development. The author has proposals for fixing most of these problems, but all in all, this book will come across as somewhat destructive. CotP is then a good antidote: here the author actually gives us a high school mathematics text book in which he attempts to rise to the challenges detailed in EwS. You could call it a 'proof of concept'.

Let me first report the author's claims about his works, and then proceed to discuss my findings on a fairly quick reading of the two books. First of all though I should tell you my conclusion: yes, these works are thought provoking. You will probably not agree with a lot of what the author says. However, teaching mathematics ought to be fun, and it ought to be thought provoking, both for students and teacher. When someone who is something of an outsider to the mathematics community comes up with a carefully and thoughtfully crafted alternative to all the old books and all the old methods, then whether or not the reader agrees with the author, I think he or she can expect to be both stimulated and entertained. I certainly was.

The author claims in EwS that "failure in mathematics and math education can be traced to a deep rooted tradition and culture in mathematics itself. Mathematicians are trained for abstract theory but when

they teach then they meet with real life pupils and students. Didactics requires a mindset that is sensitive to empirical observation which is not what mathematicians are basically trained for." And: "While school math should be clear and didactically effective, a closer look shows that it is cumbersome and illogical... What is called mathematics thus is not really mathematics. Pupils and students are psychologically tortured and withheld from proper mathematical insight and competence."

The reader of NAW may find these unfair caricatures. My own opinion is that mathematicians are quite properly trained in what one might disparagingly call 'abstract theory' but can equally well call 'fundamental structures and patterns'. I like very much the philosopher Imre Lakatos' picture of mathematics as driven by empirical research into the structures which we see in our minds, and which reflect what we see in the real world. There have to be some people around in advanced societies who understand logical structures and who are able to operate at a high level of abstraction. Didactics is indeed a different matter. I am fond of the old British saying "those who can, do; those who can't, teach; those who can do neither, teach teachers how to teach". Thus I do not lay failures in mathematics teachers with the training of mathematicians. In fact, in my personal experience, the school teachers who fired my enthusiasm so much that I later became a mathematician were also teachers whose teaching was highly respected by those of my fellow pupils who later went on to become artists or bankers.

Anyway, this review should not be about my own prejudices. I just make these quotes so that the reader is fore-warned: come to EwS and CotP with a sense of humour.

Let me turn to the more constructive, and in my opinion quite fascinating CotP. The author here works out in detail his ideas for reforming the teaching of elementary calculus, trigonometry and algebra. I will here pick out just calculus. Here is again a quote, now from the introduction to CotP. "Calculus can be developed with algebra and without the use of limits and infinitesimals. Define y/x as the outcome of division and $y//x$ as the procedure of division. Using $y//x$ with x possibly becoming zero will not be paradoxical when the paradoxical part has first been eliminated by algebraic simplification. The Weierstraß epsilon and delta and its Cauchy shorthand with limits are paradoxical since those exclude the zero values that are precisely the values of interest at the point where the limit is taken. Much of calculus might well do without the limit idea and it could be advantageous to see calculus as part of algebra rather than a separate subject. This is not just a didactic observation but an essential refoundation of calculus."

The idea is to define differentiation through algebraic manipulations. We start with a 'known function' f . 'Known' means, a function which we have seen before. At this stage of CotP we have seen polynomials and trigonometric functions, multiplication and division and composition, absolute value and sign function, but no exponentials or logarithms. Trigonometrical functions, by the way, are defined through plane geometry; we are supposed to have a prior intuitive understanding of circles, length, et cetera.

We are also at this stage of the book accustomed to various processes of simplification (reduction) of complicated functions. The author's proposal is to define differentiation by reduction of differential quotients $(f(x + \Delta x) - f(x))/\Delta x$ followed by substitution of $\Delta x = 0$. He insists that this is different both from the 'official' epsilon-delta definition and from an approach using infinitesimals. More importantly, he argues that this is a definition which you can give at high school level, thus giving a glimpse of the wholeness and beauty and logical rigour of

mathematics: contrast with the hand-waving stories of approximating tangent lines to curves!

This could indeed be a valid definition on the presently stated domain. It certainly reproduces the ‘usual’ derivative there, though already Cool needs more than just reduction and substitution in order to differentiate the trigonometric functions. In fact, he silently invokes a new principle to deal with them: if a given function is bounded from above and from below by two other functions, all three passing through the same point, and the two bounding functions have the same derivative at that point, then the given function has the same derivative at that point as the two bounding functions.

To pull off this trick on the trigonometrical functions he needs some more geometric insight as well as algebra.

Most high school pupils are not going to ask the two questions: (1) Will I have to go on inventing new tricks every time I meet some new class of functions? And, (2) Is there any guarantee that the result is going to be self-consistent? Most pupils trust their teachers and cannot conceive of functions different in nature from what they have seen so far: explicit recipes for piecewise smooth functions. They are living in the mid 19th century, even if their teachers have paid lip-service to late 19th and early 20th century set-theoretic concepts of function.

But readers of his book who are already professional mathematicians might well ask themselves those questions. On a little thought we will realise that we do know that the answers to questions (1) and (2) are essentially ‘No’ and ‘Yes’, respectively. But that is because we already know that so far Cool’s derivative coincides with the usual epsilon-delta derivative, where the latter exists. His sandwich trick now deals with all new functions, as long as they are twice differentiable at the point in question, using second order Taylor series to sandwich them locally, in the way which worked for differentiating the sine function. The same sandwich trick also shows that the result will always coincide with the usual derivative. I already mentioned that I suspect that as far as high school pupils are concerned, all functions (or all functions of interest) are piecewise smooth.

Later Cool defines the exponential function as being the unique function equal to its derivative (up to a constant factor), calling informally on Brouwer’s fixed-point theorem to justify its existence. However his presently available function space is already infinite dimensional, so the existence remains an intuitive matter only. The definition is amusing, but it makes me wonder if it is possible to reproduce all of standard high school calculus in a completely rigorous way without making use at all of epsilon-delta mathematics, just using algebra instead (perhaps together with some basic intuitive geometry). Has this been done before? If not, is it in principle possible?

Before set theory, which led to a ‘modern’ notion of function as being an abstract set of ordered pairs (the graph of the function), mathematicians thought of a function as being some kind of formula: a procedure or recipe. Just as the derivative might, in a parallel universe, have come to be officially defined through infinitesimals, if only our conceptualization of the number line had taken an alternative route, could not differentiation, in yet another parallel universe, have been defined through applying algebraic operations to a convenient class of ‘known functions’, and only extended to larger classes of functions later, if and when required? After all, we can add rational numbers before we learn to add real numbers. So, I do not have a principled objection to Cool’s approach. Whether or not it would work in the classroom is not for me to judge, but it seems to me that there is a lot of sense, in imitating the historical development of mathematics as one passes through subsequent phases of teaching mathematics to children and

young adults. I am reminded of philosopher and historian of mathematics Imre Lakatos’ studies of the history of the calculus, in which he argues that it is largely by historical coincidence that our present-day ‘official’ calculus took on the form it did. Some famous elementary mistakes by Cauchy and others were not mistakes if seen in the light of the then insufficiently formalized notions of number and function; they would have been correct theorems (according to Lakatos) if history had embraced non-standard calculus before standard, in other words, had formalized those notions differently. I have been brain-washed by my mathematics education to think that mathematics is about sets, but younger mathematicians tell me that this is limiting my imagination. It’s about categories. I wonder if present day barriers in mathematical physics to establishing some clearly fruitful structural categories (speaking loosely) are merely an indication that wanting to see everything as a set is starting to be a hindrance, not a help? We need a formalism which legitimizes the formal manipulations which give the right answers (in physics, we have nature as ultimate authority). We need freedom from contradictions and inclusion of existing formalisms.

Could history have managed — for quite a while longer — with restricting calculus to what can be got with algebra and geometry alone? That might only be a fantasy, but still I find it an interesting fantasy. One thing I do object to in standard high school mathematics education is its tendency to adhere slavishly to the dogma of the day, which leads to a conservatism and dogmatism concerning how mathematics has to be done on the part of cautious souls who need to feel safe, including the less gifted teachers of mathematics. ‘Die Wissenschaft von Heute ist das Irrtum von Morgen.’ Mathematicians tend to think their discipline is immune to this phenomenon. That, if anything, is the culture of mathematics which I think is wrong in high school teaching. In my experience we learn by mistakes, we need to learn to discard ideas as we grow out of them, in mathematics as elsewhere. And mathematics is wonderfully alive and growing dynamically today; it is not frozen and engraved on tablets of stone. This is what is wrong in present day school mathematics education: no sense of wonder, no amazement, no notion that mathematics is a living part of living science. Just a tool to calculate how many rolls of wallpaper to buy when furnishing a new apartment. A necessary nuisance for future entrepreneurs and managers in the ‘kennis, kunde, kassa’ society. (This is the present Dutch government’s sickening slogan on science policy: knowledge, skills, cash. No wonder the country is going through a crisis of identity.) Thomas’ book could give school children a bit of that wonder back again, through his own reinvention of elementary calculus.

Finally I turn to my only big complaint with CotP, and it is quite petty, namely the author’s choice of a Mathematica package as companion to his books. Surely, the Sage project (www.sagemath.org) has developed far enough to be able to support everything which Cool does. His ideas will only be taken on board when interested school teachers are able to try things out for themselves and their pupils. I doubt that most schools have a budget to allow all staff and students access to Mathematica. And what about the Third World? Now, Cool has worked a long time on developing Mathematica packages for teaching economics and clearly Mathematica has strongly influenced his thoughts on mathematics and teaching mathematics. And one can see this again as a ‘proof of concept’, namely to integrate teaching of mathematics with computer algebra, which again seems to me to be a sensible aim. In my own university teaching of probability and statistics (to mathematicians) I do my best to integrate the mathematics with the practice through use of professional but free computer tools (R, www.R-project.org).

So while talking about free software ('free', both as in free lunch and in free speech), wouldn't it be beautiful if Cool would also create a free web-based version of CotP so that other authors can more easily build on his attempts? Let us see half a dozen alternative CotP's. Take the writing and distribution of mathematics texts for schools back from the publishing houses, and give them back to the teachers and students themselves. I suspect the author is not going to do this, but maybe one of his readers will take this next step.

Richard Gill



Angel A. Juan, Maria A. Huertas, Sven Trenholm, Cristina Steegmann (eds.)
**Teaching Mathematics Online
 Emerging Technologies and Methodologies**

IGI Global, 2012

414 p., prijs \$ 195.00

ISBN 9781609608750

In this voluminous book, the editors bring together eighteen papers on e-learning of mathematics. They do so, for the following two main reasons. We quote: "to provide insight and understanding into practical pedagogical and methodological issues related to mathematics e-learning, and to provide insight and understanding into current and future trends regarding how mathematics instruction is being facilitated and leveraged with web-based and other emerging technologies."

The book contains a variety of papers, addressing many interesting developments within the area of technology enhanced learning of mathematics. It contains chapters discussing best practices regarding mathematics e-learning in higher education, chapters providing theoretical or applied pedagogical models in mathematics e-learning, chapters describing emerging technologies and mathematical software used in online teaching of mathematics, as well as chapters presenting up-to-date research on how mathematics education is changing by the use of online teaching methods.

The book starts with an introduction by the editors. They give an overview of the various chapters, which they have grouped into the following three sections: 'Blended Experiences in Mathematics e-Learning', 'Pure Online Experiences in Mathematics e-Learning' and 'Mathematics Software & Web Resources for Mathematics e-Learning'.

The chapters are equally divided over the three sections. We briefly summarize the content of the various sections and chapters.

The first section focuses on experiences in mathematical e-learning in which face-to-face teaching is mixed with distance or online instruction. It starts with a chapter by T.K. Miller describing a successful implementation of an asynchronous model for online discussions in

a mathematics course for mathematics teachers. The section continues with a chapter by B. Abramovitz et al. on a blended experience in calculus courses for undergraduate engineering students, in which online assessments are used to help students understand theoretical concepts and theorems, followed by a chapter by B. Loch in which she describes how screencasts of live lectures as well as screencasts of short snippets of theory or examples have been used within an Operations Research course to supply online students with just-in-time information. The chapters 4 (G. Albano), 5 (D.S. Perdue) and 6 (B. Divjak) discuss some experiences using general e-learning tools, ranging from LMS (Learning Management System), wikis and speaking avatars to video and social media, to enhance their face-to-face math courses.

The second section of the book is devoted to experiences with purely online e-learning of mathematics. It contains two chapters on the use of online communication and collaboration tools by M. Meletiou-Mavrotheris and by J. Silverman and E.L. Clay, both focusing on the education of math teachers, and two chapters on the use and impact of online teaching material in bridging courses in mathematics for the transition from high school to university, by D.T. Tempelaar et al. and by R. Biehler et al. The other two chapters, by D.H. Jarvis and by S. Trenholm et al. both identify, review and evaluate a number of models and methods of e-learning in mathematics.

The final section of the book is concerned with mathematical software and web resources for the e-learning of mathematics. It contains a chapter by B. Cherkas and R.M. Welder reviewing some popular websites, a chapter by J.G. Alcázar et al. describing experiences with the software packages WIRIS, GeoGebra, SAGE and Wolfram Alpha, and a chapter by M. Lokar et al. describing the NAUK.si initiative to create web-based learning blocks. M. Badger and C.J. Sangwin discuss the use of Gröbner basis techniques in the automatic grading of online exercises involving systems of equations. M. Misfeldt and A. Sanne discuss the problems that both students and teachers face when writing math formulas in a computer as well as some solutions to these problems. The last chapter by C. Mac an Bhaird and A. O'Shea reviews a number of general purpose software tools to be used in math classes, including podcast, screencasts and videos.

With this book the editors have indeed succeeded to reach their goals. They have brought together a great variety of interesting information about online web resources and their use in both blended and online teaching of mathematics. This collection of papers provides good insight into teaching methods, trends and possibilities offered by technology enhanced learning of mathematics. Math educators will certainly find both information and motivation in several chapters to improve their teaching through good use of technology and online resources.

Hans Cuypers

Recent verschenen publicaties. Als u een van deze boeken wilt bespreken of als u suggesties heeft voor andere boeken voor deze rubriek, laat dit dan per e-mail weten aan reviews@nieuwarchief.nl.



John MacCormick
**Nine Algorithms That Changed
 the Future: The Ingenious Ideas
 That Drive Today's Computers**

Princeton University Press, 2011

ISBN 9780691147147

press.princeton.edu/titles/9528.html

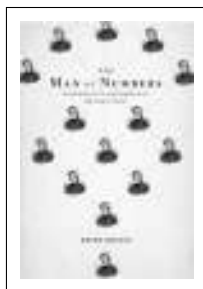


William J. Cook
**In Pursuit of the Traveling Salesman:
 Mathematics at the Limits of Computation**

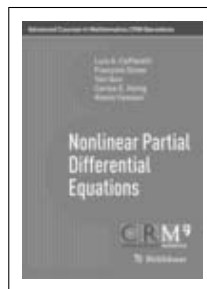
Princeton University Press, 2011

ISBN 9781400839599

press.princeton.edu/titles/9531.html



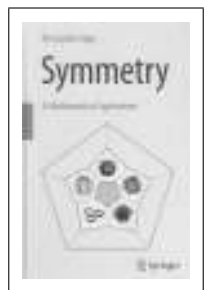
Keith Devlin
The Man of Numbers: Fibonacci's Arithmetic Revolution
 Bloomsbury Publishing, 2011
 ISBN 9781408815762
www.bloomsbury.com/Man-of-Numbers/trade/details/9781408815762



H. Dym, M.A. Kaashoek, P. Lancaster, H. Langer, L. Lerer (eds.)
A Panorama of Modern Operator Theory and Related Topics
 Springer, 2012
 ISBN 9783034802208
www.springer.com/978-3-0348-0220-8



Aad Goddijn
De ster van de dag gaat op en onder
 Epsilon Uitgaven, 2012
 ISBN 9789050411295
www.epsilon-uitgaven.nl/Z34.php



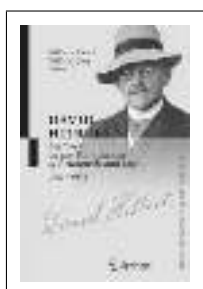
Kristopher Tapp
Symmetry
A Mathematical Exploration
 Springer, 2012
 ISBN 9781461402985
www.springer.com/978-1-4614-0298-5



René Descartes
Over de methode – Essays (Discours de la méthode; La dioptrique; Les météores; La géométrie)
 met een nawoord van Henk Bos
 Uitgeverij Boom, 2011
 ISBN 9789085066590
www.uitgeverijboom.nl/boeken/filosofie



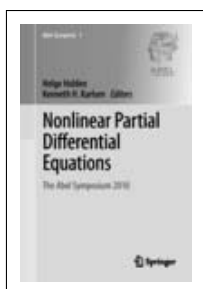
Anthony Tromba
A Theory of Branched Minimal Surfaces
 Springer, 2012
 ISBN 9783642256196
www.springer.com/978-3-642-25619-6



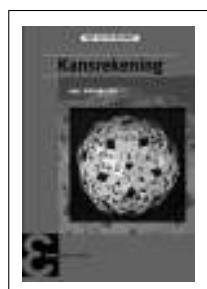
William Ewald, Wilfried Sieg (eds.)
David Hilbert's Lectures on the Foundations of Arithmetic and Logic 1917–1933
 Springer, 2012
 ISBN 9783540205784
www.springer.com/978-3-540-20578-4



András Némethi, Ágnes Szilárd
Milnor Fiber Boundary of a Non-isolated Surface Singularity
 Springer, 2012
 ISBN 9783642236464
www.springer.com/978-3-642-23646-4



Helge Holden, Kenneth H. Karlsen (eds.)
Nonlinear Partial Differential Equations
The Abel Symposium 2010
 Springer, 2012
 ISBN 9783642253607
www.springer.com/978-3-642-25360-7



A.J. van den Brandhof
Kansrekening – Een introductie
 Epsilon Uitgaven, 2012
 ISBN 9789050411288
www.epsilon-uitgaven.nl/E71.php

Problemen

| Problem Section

This Problem Section is open to everyone; everybody is encouraged to send in solutions and propose problems. Group contributions are welcome.

For each problem, the most elegant correct solution will be rewarded with a book token worth 20 Euro. At times there will be a Star Problem, to which the proposer does not know any solution. For the first correct solution sent in within one year there is a prize of 100 Euro.

When proposing a problem, please either include a complete solution or indicate that it is intended as a Star Problem. Electronic submissions of problems and solutions are preferred (problems@nieuwarchief.nl).

The deadline for solutions to the problems in this edition is June 1st, 2012.

Problem A (proposed by Hendrik Lenstra)

Let m and n be coprime positive integers. Let Γ be the graph that has the disjoint union $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z} \sqcup \mathbb{Z}/m\mathbb{Z}$ as vertex set and that has for every $1 \leq i \leq m+n-1$ an edge connecting $i \bmod n$ and $i \bmod m$. Show that Γ is a tree.

Problem B (proposed by Gabriele Dalla Torre)

Is it possible to partition a non-empty open interval in closed intervals of positive length? Let Δ be a triangle (including its interior) and let $P \in \Delta$ be an interior point. Is it possible to partition $\Delta - \{P\}$ in closed line segments of positive length?

Problem C (proposed by Tejaswi Navilarekallu)

A move on a pair (a, b) of integers consists of replacing it with either $(a+b, b)$ or $(a, a+b)$. Show that starting from any pair of coprime positive integers one can obtain a pair of squares in finitely many moves.

Edition 2011-3 We received solutions from Pieter de Groen (Brussel), Alex Heinis (Hoofddorp), Tejaswi Navilarekallu (Amsterdam), Hendrik Reuvers (Maastricht) and Albert Stadler (Herrliberg).

Problem 2011-3/A Fix a point P in the interior of a face of a regular tetrahedron Δ . Show that Δ can be partitioned in four congruent convex polyhedra such that P is a vertex of one of them.

Solution We received solutions from Pieter de Groen, Alex Heinis, Tejaswi Navilarekallu and Hendrik Reuvers. The book token goes to Hendrik Reuvers.

Let A, B, C and D be the vertices of Δ . Define $\sigma_1 = (AB)(CD)$ to be the rotation of Δ that interchanges A with B and C with D . Similarly write $\sigma_2 = (AC)(BD)$ and $\sigma_3 = (AD)(BC)$. Then $V_4 = \{\text{id}, \sigma_1, \sigma_2, \sigma_3\}$ is a subgroup of the symmetry group of Δ .

Let P_a, P_b, P_c and P_d be the images of P under V_4 in the faces BCD, CDA, DAB and ABC , respectively. (For example, if P lies in face ABC , then $P = P_d$.) Let Z be the orthocentre of Δ . Define Q_{ab} to be the intersection point of AB with the plane through Z, P_c and P_d , and analogously define $Q_{ac}, Q_{ad}, Q_{bc}, Q_{bd}$ and Q_{cd} .

Now the four polyhedra

$$\begin{aligned} &AP_bP_cP_dQ_{ab}Q_{ac}Q_{ad}Z, \\ &BP_cP_dP_aQ_{bc}Q_{bd}Q_{ab}Z, \\ &CP_dP_aP_bQ_{cd}Q_{ac}Q_{bc}Z, \\ &DP_aP_bP_cQ_{ad}Q_{bd}Q_{cd}Z \end{aligned}$$

cover Δ and are congruent, as they are mapped onto each other by the symmetries in V_4 . The polyhedra are convex since each of them is the intersection of six half-spaces, three of which are defined by a plane containing a face of Δ and three by a plane through Z .

Redactie:

Johan Bosman

Gabriele Dalla Torre

Jinbi Jin

Ronald van Luijk

Lenny Taelman

Wouter Zomervrucht

Problemenrubriek NAW

Mathematisch Instituut

Universiteit Leiden

Postbus 9512

2300 RA Leiden

problems@nieuwarchief.nl

www.nieuwarchief.nl/problems

Problem 2011-3/B Let n be a positive integer. Show that 3^n divides the numerator of

$$\sum_{k=1}^n \frac{4k-1}{2k(2k-1)} 9^k.$$

Solution We received solutions from Alex Heinis, Tejaswi Navilarekallu and Albert Stadler. The book token goes to Albert Stadler.

We use the fact that if $q \in \mathbb{Q}$ has denominator not divisible by 3, then q can be reduced modulo 3^k for all positive integers k .

Since $2 \log(1-3x) = \log(1-6x+9x^2)$ as complex functions, we have the following identity of power series:

$$2 \sum_{k=1}^{\infty} \frac{3^k x^k}{k} = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{3^k (2x-3x^2)^k}{k}. \quad (1)$$

The coefficients (in x) of these power series are rational numbers. Since for all $k \geq 1$ we have $k \leq 3^k$, it follows that the denominator of $3^k/k$ is not divisible by 3, and hence that none of the coefficients of these power series have denominator divisible by 3.

In particular, we can reduce these coefficients modulo 3^n . For all $k \geq 2n$ we have that 3^n divides the numerator of $3^k/k$, so we obtain from (1) the congruence

$$\sum_{k=1}^{2n} \frac{2 \cdot 3^k x^k}{k} \equiv \sum_{k=1}^{2n} \frac{3^k (2x-3x^2)^k}{k} \pmod{3^n}.$$

By substituting $x = 1$, we obtain the following identity modulo 3^n :

$$\begin{aligned} 0 &\equiv \sum_{k=1}^{2n} \frac{2 \cdot 3^k - (-3)^k}{k} \\ &\equiv \sum_{k=1}^n \frac{3^{2k}}{2k-1} + \sum_{k=1}^n \frac{3^{2k}}{2k} \\ &\equiv \sum_{k=1}^n \left(\frac{1}{2k-1} + \frac{1}{2k} \right) 9^k \\ &\equiv \sum_{k=1}^n \frac{4k-1}{2k(2k-1)} 9^k. \end{aligned}$$

Hence 3^n divides the numerator of

$$\sum_{k=1}^n \frac{4k-1}{2k(2k-1)} 9^k,$$

as desired.

One can also prove identity (2) for $x = 1$ by looking at the so-called *3-adic logarithms* of -2 and 4 on the *3-adic integers*, see for example the book *p-adic Numbers: An Introduction* by F.Q. Gouvea.

Problem 2011-3/C Let $n > 1$ be an integer. Show that there are no non-linear complex polynomials $f(X)$ such that

$$f^n(X) - X = (f \circ f \circ \dots \circ f)(X) - X$$

is divisible by $(f(X) - X)^2$.

Solution We received a solution from Alex Heinis, who wins the book token. Assume f satisfies the condition. Put $g(X) := f(X) - X$.

We claim that

$$f^n(X) - X \equiv g(X) (1 + f'(X) + \cdots + f'(X)^{n-1})$$

modulo $g(X)^2$ for all $n \geq 1$.

Clearly the claim holds for $n = 1$. Assume it holds for $n = N - 1$. Using that for all polynomials a we have

$$f(X + g(X)a) \equiv f(X) + g(X)af'(X) \pmod{g(X)^2},$$

we find

$$\begin{aligned} f^N(X) - X &\equiv f(f^{N-1}(X) - X + X) - X \\ &\equiv f(X + g(X)(1 + f'(X) + \cdots + f'(X)^{N-2})) - X \\ &\equiv g(X) + f'(X)g(X)(1 + f'(X) + \cdots + f'(X)^{N-2}) \\ &\equiv g(X)(1 + f'(X) + \cdots + f'(X)^{N-1}), \end{aligned}$$

which proves the claim.

Since $g(X)^2$ divides $f^n(X) - X$ we find that $g(X)$ divides

$$1 + f'(X) + \cdots + f'(X)^{n-1} = \frac{f'(X)^n - 1}{f'(X) - 1}.$$

Let $x \in \mathbb{C}$ be a root of $g(X)$. From the above equation we find that $f'(x)^n = 1$. We claim that $f'(x) \neq 1$, and in particular that x is a simple root of $g(X)$. To see this, assume that $f'(x) = 1$. Let k be the multiplicity of x as a root of $f'(X) - 1$. Then x must be a root of multiplicity $k + 1$ of $f'(X)^n - 1$, and hence a k -fold root of its derivative $n f'(X)^{n-1} f''(X)$. But since $f'(x) = 1$ it follows that the multiplicity of x as a root of $f''(X)$ is k , a contradiction.

Now assume that f is not linear. Clearly f cannot be constant, so the degree of f is at least 2, and hence also the degree of g is at least 2. But then the residue theorem gives

$$0 = \sum_{g(x)=0} \frac{1}{g'(x)} = \sum_{g(x)=0} \frac{1}{f'(x) - 1},$$

where the sums range over all roots x of $g(X)$. Since $f'(x)^n = 1$ for all such x , we have that all the $f'(x)$ lie on the unit circle. In particular, the real part of the right-hand side is strictly negative, a contradiction.

