

Inhoud | Contents

2	Colofon
3	Van de voorzitter <i>Henk Broer</i>
4	Agenda
6	Nieuws
11	Van het KWG

Oratie | Inaugural lecture

18	Random networking: between order and chaos <i>Remco van der Hofstad</i>
----	---

Onderzoek | Research

26	Reken mee met ABC <i>Gillien Geuze, Bart de Smit</i>
----	--

Cultuur | Culture

31	Die Vermessung des Unendlichen <i>Teun Koetsier</i>
----	---

Samenleving | Society

34	Manifold Destiny <i>Sylvia Nasar, David Gruber</i>
44	Manifold Destiny: Rechtvaardiging of heiligverklaring? <i>Jozef Steenbrink</i>

Onderwijs | Education

46	Interview met Robert Dijkgraaf <i>Ionica Smeets</i>
51	Blijf niet mokkend aan de kant staan <i>Klaas Landsman</i>
55	Onderwijzen of bijspijkeren? <i>Dirk Tempelaar</i>

Boeken | Books

60	Digitale nostalgie <i>Jan van de Craats</i>
62	Boekbesprekingen

Rubrieken | Departments

25	De stemming in Zürich <i>Sara van de Geer</i>
70	Problemen

Colofon

Het Nieuw Archief voor Wiskunde is een uitgave van het Koninklijk Wiskundig Genootschap en verschijnt vier maal per jaar. Het tijdschrift richt zich op een ieder die zich beroepsmatig met wiskunde bezighoudt, als academisch of industrieel onderzoeker, student, leraar, journalist of beleidsmaker. Het stelt zich ten doel te berichten over ontwikkelingen in de wiskunde in het algemeen en in de Nederlandse wiskunde in het bijzonder.

ISSN 0028-9825

Adres

Nieuw Archief voor Wiskunde
Mathematisch Instituut, Universiteit Leiden
Postbus 9512, 2300 RA Leiden
tel. 071-5277121, fax 071-5277101
<http://www.nieuwarchief.nl>

Hoofredactie

Jaap Molenaar (Jaap.Molenaar@wur.nl)
Jaap Top (top@math.rug.nl)

Eindredactie

Derk Pik (drpik@math.leidenuniv.nl)

Bladmanager/Advertenties

Reinie Ern  (erne@nieuwarchief.nl)
Mathematisch Instituut, Universiteit Leiden
Postbus 9512, 2300 RA Leiden
tel. 071-5277121, fax 071-5277101

Redactie

Gerard Alberts (G.Alberts@uva.nl)
Yves van Gennip (y.v.gennip@tue.nl)
Rainer Kaenders (r.kaenders@ils.kun.nl)
Patrick Oonincx (p.j.oonincx@kim.nl)

Bureau redactie

Wendy Ellens, Harm de Vries

Medewerkers

Danny Beckers (RU), Matthijs Coster (Min.Def.), Jan van de Craats (UvA), Hans Cuypers (TUE), Geertje Hek (UvA), Teun Koetsier (VU), Ger Koole (VU), Klaas Landsman (RU), Hans Sterk (TUE), Chris Zaal (UvA)

TeX-ondersteuning

Marko Boon (marko@win.tue.nl)
Klaas Pieter Hart (k.p.hart@ewi.tudelft.nl)

Abonnee-administratie/Subscription manager

Mirjam Worst (admin@wiskgenoot.nl)
Uitgeverij Ten Brink
Postbus 41, 7940 AA Meppel
tel. 0522-855175, fax 0522-855176

Abonnementsperiode/Subscription period

Een abonnement gaat in op de dag dat uw aanmelding ontvangen wordt. De opzegtermijn is twee maanden vóór het verstrijken van de abonnementsperiode. / The subscription starts on the day that your application is received. The term of notice is two months before the end of the current subscription period.

Exchange subscriptions

Koninklijk Wiskundig Genootschap Library
Centrum voor Wiskunde en Informatica
Postbus 94079, NL-1090 GB Amsterdam
KWG-exchange@cw.nl, fax +31 20 5924026

Vormgeving

Kitty Molenaar (ontwerp)
Susanne Laws (omslag, begeleiding binnenwerk)

Illustraties

Ryu Tajiri, Amsterdam

Programmatuur (CONTEXT)

Hans Hagen, PRAGMA-ADE, Hasselt (Overijssel)

Druk

Giethoorn ten Brink, Meppel

Koninklijk Wiskundig Genootschap

Het Koninklijk Wiskundig Genootschap (KWG) is een landelijke vereniging van beoefenaren van de wiskunde. In 1778 opgericht onder de zinspreuk: "Een onvermoeide arbeid komt alles te boven" is het 's werelds oudste nationale wiskundegenootschap. Leden van het KWG ontvangen het Nieuw Archief voor Wiskunde als onderdeel van hun lidmaatschap.

De contributie voor leden van het KWG bedraagt  70 per jaar. Gepensioneerden en werklozen betalen  35. Studenten ingeschreven aan een Nederlandse universiteit of hbo-opleiding, aio's en oio's kunnen lid worden voor  25 per jaar. Studenten en pas afgestudeerden kunnen een jaar lang gratis lid worden van het KWG. Voor leden van de wiskundige vakverenigingen VVS, NVvW en NVORWO geldt het gereduceerd tarief van  50.

Members of SIAM, the *Société Mathématique de France*, the *Gesellschaft für Angewandte Mathematik und Mechanik*, the *Deutsche Mathematiker-Vereinigung*, and of the *American, Australian, Belgian, Indian, London, Spanish, and South-African Mathematical Societies* living outside of the Netherlands pay  50 instead of the full membership fee of  70 a year. Conversely, these foreign societies, as well as the VVS and the NVORWO, have reduced membership fees for KWG-members.

A postage charge of  5 is added for members living abroad but in Europe, and a charge of  7,50 for members living outside of Europe. Instituten in Nederland en buitenland kunnen zich abonneren op het Nieuw Archief voor Wiskunde voor  90 respectievelijk  105.

Internetpagina: <http://www.wiskgenoot.nl>

Ledenadministratie

Mirjam Worst (admin@wiskgenoot.nl)
Uitgeverij Ten Brink
Postbus 41, 7940 AA Meppel
tel. 0522-855175, fax 0522-855176

Bestuur (wiskgenoot@wiskgenoot.nl)

Henk Broer (RUG, voorzitter), Jan van Mill (VU, ondervoorzitter), Herman te Riele (CWI, secretaris), Fieke Dekkers (RIVM, penningmeester), Wieb Bosma (RUN), Klaas Pieter Hart (TUD), Vivi Rottschäfer (UL), Iris van Gulik - Gulikers (VdCSG)

Informatie voor auteurs

Kopij

Het Nieuw Archief voor Wiskunde is een geredigeerd tijdschrift. Kopij dient elektronisch te worden aangeboden aan de hoofdredactie. Uitgebreide informatie en auteursinstructies kunt u vinden op internetpagina <http://www.nieuwarchief.nl>.

Reprints

Auteurs ontvangen een elektronische reprint in pdf-formaat.

Volgende nummers

nummer	verschijningsdatum	deadline kopij
1	08-06-2007	–
2	20-09-2007	30-04-2007
3	08-12-2007	30-07-2007
4	08-03-2008	30-10-2007

Instituutsleden

De publicaties van het Koninklijk Wiskundig Genootschap worden mede mogelijk gemaakt door de bijdragen van de volgende instituten.



Centrum voor Wiskunde
en Informatica



Rijksuniversiteit Groningen



Universiteit van Amsterdam



Universiteit Leiden



Vrije Universiteit



Universiteit Utrecht



Technische Universiteit
Eindhoven



Eurandom



Technische Universiteit Delft



Universiteit Twente



Radboud Universiteit
Nijmegen

Op het omslag

Research in biologie levert ingewikkelde interactieschema's op, zoals het afgebeelde schema van gistproteïnen. Lees in de oratie van Remco van der Hofstad over de bijbehorende nieuwe wiskunde. (Illustratie omslag: Jeong, S.P. Mason, A.-L. Barabasi and Z.N. Oltvai, 'Lethality and centrality in protein networks', *Nature* 411 41 (2001))

Nederland en de strijd om het talent

Tot en met de zestiger jaren van de vorige eeuw was er een redelijk contact tussen het voortgezet (toen nog middelbaar) onderwijs en het afnemend veld voor zover dat bestond uit de universiteiten en hogescholen. Ik denk aan het systeem van gecommiteerden bij de examens, die vaak gerecruteerd werden uit universitair personeel. Ook was er toen nog een redelijk deel van het leraren-corps universitair geschoold en zelfs gepromoveerd. Om allerlei redenen is hierin de afgelopen dertig jaar veel veranderd. Een reden is dat er 'hoger onderwijs voor velen' moest komen: het oude systeem werd als te elitair gezien. De studentenaantallen waren toen echter nog ongekend hoog en de zittende wetenschappers vonden het vaak wel best zo. Zo ontstond een situatie waarin de contacten tussen het voortgezet onderwijs en de universitaire wereld langzamerhand dunner en dunner werden. Veel wetenschappers kregen er alleen even een glimp van te zien als de eigen kinderen bepaalde schooltrajecten gingen volgen. Er werd wel wat eens gemopperd, maar voor de meesten bleef dit lange tijd slechts van incidenteel karakter. Reacties op het gemopper waren stevast dat dit van alle tijden is, eventueel met een verwijzing naar Socrates. De laatste paar jaar komt hierin geleidelijk een verandering door de steeds groeiende aansluitingsproblematiek vwo-wo en havo-hbo. Langzamerhand dringt de omvang van het probleem door tot de wetenschappelijke beroepsbevolking, voor wat wiskunde betreft onder meer vertegenwoordigd door het KWG. De schrik is dan vaak groot.

Kritiek is er op vele aspecten van het lesmateriaal (denk aan de verhaaltjes bij veel sommen), op het vigerend gebruik van de grafische rekenmachine (GRM), maar ook op de kwaliteit en houding van de abiturienten. Dit laatste geldt hun reken- en formulevaardigheid, maar ook het abstractievermogen. Ik blijf in de bètahoek en de econom(etr)ie, maar ook vanuit de alfarichtingen vallen soortgelijke geluiden te horen. Over de hele linie ontbreekt het (te) velen aan een intrinsieke en enthousiaste intellectuele nieuwgierigheid naar hoe de dingen in elkaar steken en het doorzettingsvermogen en de frustratietolerantie om hierin te investeren. De instroom van studenten in vrijwel alle klassieke disciplines is de laatste jaren sterk afgenomen tot een zorgelijk laag niveau. De universiteiten hebben zich moeite gegeven allerlei alternatieve en vaak multi-disciplinaire opleidingen aan te bieden, in de hoop de studentenbelangstelling toch vast te kunnen houden. Natuurlijk bestaan grote stukken van het bijbehorende curriculum toch uit disciplinair onderwijs (wiskunde, natuurkunde, scheikunde, biologie), hoewel er sterke tendensen

bestaan hiervan 'softe' deelpakketten samen te stellen waarin veel wiskunde wordt ondergebracht in software packages. Ook is er (te-) veel water in de wijn gedaan bij de toelatingseisen voor de exacte studies (denk aan de uitholling van het NT-profiel). Een aantal vakgenoten ziet deze ontwikkeling al geruime tijd met lede ogen aan, mede vanwege de maatschappelijk averechtse gevolgen voor 'Nederland-Kennisland'.

Deze problematiek wordt inmiddels uitvoerig besproken in de landelijke pers (ook in, bijvoorbeeld, het Nederlands Tijdschrift voor Natuurkunde) en er vindt allerlei onderzoek plaats naar de achtergronden ervan. Er is een aantal financiële aspecten (het markt-principe, financieringen van universiteiten en scholen, lerarensalarissen, etc.), maar ook, onder meer, het egalitaire beginsel dat iedere scholier gedurende lange tijd ongeveer hetzelfde aanbod krijgt (Basisvorming). Verder spelen vernieuwingen als het 'nieuwe leren' (denk aan het Studiehuis en de werkstukcultuur), 'realistische wiskunde' en principes als 'contexten en concepten' hierin een rol. Hoewel dit veelal goedbedoelde ideeën zijn, boteren ze in de praktijk niet altijd zo uit als voorzien. Daar komt bij dat het aantal contacturen op het vwo in de nabije toekomst nog flink zal afnemen. Het gezamenlijke effect van dit alles is zeker niet positief te noemen.

Een aantal van bovengenoemde vernieuwingen staat inmiddels flink ter discussie. Ook zijn er initiatieven gaande om de toekomstige situatie zo goed mogelijk in te vullen. Over de hele breedte van het bèta-onderwijs zijn profielcommissies en vernieuwingscommissies aan het werk, waar enthousiaste docenten van het voortgezet en hoger onderwijs bezig zijn met plannen voor de ontwikkeling van adequaat lesmateriaal, waarbij ook vaak naburige instellingen van hoger onderwijs betrokken zullen worden. De vernieuwingscommissie Wiskunde heet 'commissie Toekomst Wiskundeonderwijs' (cTWO), die onder voorzitterschap staat van Dirk Siersma (UU) en waarvan ikzelf ook lid ben (internetpagina: www.ctwo.nl). We zullen vanuit cTWO graag een beroep op jullie doen, bijvoorbeeld voor feedback. We hopen dat jullie daar positief op reageren, en aanmelden mag altijd. ↩

Henk Broer

Voorzitter van het Koninklijk Wiskundig Genootschap

Rijksuniversiteit Groningen, Faculteit der Wiskunde en Natuurwetenschappen

Afdeling Wiskunde, Postbus 800, 9700 AV Groningen

www.math.rug.nl/~broer

broer@math.rug.nl

Agenda

Upcoming Events

maart 2007

12 – 16 maart

□ Gibbs Sampling, Alternating Projections, and Orthogonal Polynomials

Vijfdaagse Eidma en Diamant minicursus gegeven door Persi Diaconis

plaats Technische Universiteit Eindhoven

info www.win.tue.nl/math/eidma

16 maart

□ Kangoeroe wiskundewedstrijd

Europese wiskundewedstrijd voor leerlingen in het voortgezet onderwijs

plaats Deelnemende scholen

info www.math.ru.nl/kangoeroe

16 – 17 maart

□ Finale Wiskunde A-lympiade

Finale van de wiskunde A-lympiade tussen de Duitse, Deense, Antilliaanse en Nederlandse deelnemers

plaats Tulip Inn, Garderen

info www.fi.uu.nl

19 – 21 maart

□ Mathematical Methodologies for Operational Risk

In het kader van het MATHFSS-project gehouden workshop. Organisator: Henry Wynn

plaats Eurandom, Eindhoven

info www.eurandom.tue.nl

19 – 23 maart

□ Two-dimensional Turbulence

Turbulentie in twee dimensies. Organisatoren: H.J.H. Clercx, G.J. van Heijst

plaats Lorentz Center, Leiden

info www.lc.leidenuniv.nl

19 – 23 maart

□ YEP IV (Young European Probabilists) 2007

Workshop over random grafen and complexe netwerken

plaats EURANDOM, Eindhoven

info www.eurandom.tue.nl

20 – 23 maart

□ Algorithmic Game Theory

Eidma en Diamant minicursus door Christos Papadimitriou en Marc Uetz

plaats Technische Universiteit Eindhoven

info www.win.tue.nl/wsk/eidma/courses/minicourses/papadimitriou/papadimitriou.html

22 – 23 maart

□ Nationale Rekendagen

Jaarlijkse conferentie voor leerkrachten in het gewoon en speciaal basisonderwijs georganiseerd door het Freudenthal Instituut

plaats Noordwijkerhout

info www.fi.uu.nl/rekenweb/rekendagen

april 2007

11 – 13 april

□ Linear Systems and Subschemes

Symposium met sprekers Ciro Ciliberto, Lawrence Ein, Brian Harbourne, Andreas Knutsen, Antonio Laface, Francesco Russo en Tomasz Szemberg

plaats Gent, België

info www.wiskengenoot.nl

12 – 13 april

□ 43ste Nederlands Mathematisch Congres

Sprekers onder andere: Mike Bennett, Hans Duistermaat, Hester Bijl, Thomas Bruss. Uitreiking Ostrowskiprijs aan Ben Green en Terence Tao, uitreiking Zaalbokaal, Philips Wiskundeprijs

plaats Gorlaeuscomplex, Leiden

info www.nmc2007.nl

13 april 2007

□ Leve de Wiskunde!

Vijfde editie van Leve de Wiskunde! Voordrachten voor breed publiek

plaats Centrum voor Wiskunde en Informatica, Amsterdam

info www.science.uva.nl

16 – 17 april

□ Mathematical Methodologies for Operational Risk

Workshop door de groep Queueing and Performance Analysis

plaats Eurandom, Eindhoven

info www.eurandom.tue.nl

Gelieve gegevens voor deze agenda door te geven aan onderstaand adres.

Please submit items for this calendar to the following address.

Nieuw Archief voor Wiskunde,
Mathematisch Instituut, Universiteit Leiden,
Postbus 9512, 2300 RA Leiden.
Email: agenda@nieuwarchief.nl

18 april

De Grote Rekendag

Basisschoolleerlingen ontdekken wiskunde op een andere manier dan gewoonlijk

plaats Scholen in Nederland en België

info www.fi.uu.nl/rekenweb/groterekendag

26 – 27 april

Dynamics of Patterns symposium

Symposium over niet-lineaire dynamica en patroonvorming

plaats Universiteit van Twente

info www.cwi.nl/events/regular/DoP-Days/index.html

mei–juni 2007

7 – 9 mei

Spring Meeting Stochastics 2007

Bijeenkomst voor kansrekenaars, georganiseerd door Ronald Meester

plaats Hilversum

info www.stieltjes.org/activities.html

7 – 16 mei

Solvability of Diophantine Equations

Stieltjes-Diamant onderwijsweek. Jonge getaltheoretici kunnen een week lang samenwerken met specialisten uit de Diophantische approximatie en arithmetische algebraïsche meetkunde.

plaats Lorentz Center, Leiden

info www.lc.leidenuniv.nl

12 mei

Nieuwe problematiek, oude oplossingen

Symposium XIII van de *Historische Kring Rekenen Wiskunde Onderwijs* behandelt actuele problemen van het reken- en wiskundeonderwijs in historisch perspectief

plaats Hogeschool Domstad, Utrecht

info www.fi.uu.nl/hkrwo

31 mei – 1 juni

DIAMANT/EIDMA Symposium

Computeralgebra, getaltheorie, discrete algebra, meetkunde en coderingstheorie

plaats Conferentiehotel Kapellerput, Heeze

info www.win.tue.nl/math/eidma

31 mei – 2 juni

Geometry Days

Conferentie ter ere van de zestigste verjaardag van Joseph Steenbrink

plaats Radboud Universiteit Nijmegen

info www.ru.nl/science/math/conference

11 – 15 juni

Nonlinear Collective Behaviour: Networks, Swarming and Reaction Diffusion Dynamics

Workshop over interdisciplinair onderzoek op het gebied van niet-lineair coöperatief gedrag in complexe systemen

plaats Lorentz Center, Leiden

info www.lc.leidenuniv.nl

18 – 22 juni

Random Polymers

Workshop over modellering van polymeren en het bijbehorende fundamenteel-wiskundige onderzoek van deze modellen

plaats EURANDOM, Eindhoven

info www.eurandom.tue.nl

25 – 29 juni

Algebraic Statistics

Eidma-Diamant minicursus over het gebruik van algebraïsche meetkunde en combinatoriek in statistiek door Seth Sullivant

plaats Technische Universiteit Eindhoven

info www.win.tue.nl/wsk/eidma/courses/minicourses/sullivant/sullivant.html

26 – 29 juni

Adults Learning Mathematics

Conferentie over wiskundeonderwijs voor volwassenen. Thema: 'The changing face of adults mathematics education; learning from the past: planning for the future'

plaats Limerick, Ierland

info www.alm-online.org

juli–augustus 2007

2 – 6 juli

XXVth Journées Arithmétiques

Sprekers: Enrico Bombieri, Régis de la Bretèche, Pierre Colmez, Andrew Granville, Mark van Hoeij, Kiran Kedlaya, Chandrashekar Khare, Mark Kisin, János Pint, Gaël Rémo, Joël Riva, Andrei Yafaev

plaats Edinburgh, Schotland

info icms.org.uk/event.php?id=43

9 – 11 juli

Applied Probability INFORMS Conference

Sprekers: Peter Glynn (Stanford University, USA), Frank Kelly (Cambridge University, UK), Alain-Sol Sznitman (ETH Zurich, Switzerland)

plaats Technische Universiteit Eindhoven en EURANDOM, Eindhoven

info appliedprob.society.informs.org

16 – 20 juli

ICIAM 07

Zesde internationale congres gewijd aan industriële en toegepaste wiskunde

plaats Zürich, Zwitserland

info www.iciam07.ch

19 – 24 juli

ESU 5

De vijfde editie van de *European Summer University* over de geschiedenis van en epistemologie in wiskundeonderwijs

plaats Charles University, Praag

info web.pedf.cuni.cz/kmdm/esu5

23 – 27 juli

Computational Complexity of Quantum Hamiltonian Systems

Workshop over complexiteitstheorie en quantummechanica. Welke berekeningen kunnen efficiënt worden uitgevoerd op een quantumcomputer?

plaats Lorentz Center, Leiden

info www.lc.leidenuniv.nl

6 – 17 augustus

19th European Summer School in Logic, Language and Information

Op het raakvlak tussen linguïstiek, logica en informatica. Hoofdstema's: *Language and Computation*, *Language and Logic* en *Logic and Computation*

plaats Dublin, Ierland

info www.illc.uva.nl

24 – 25 augustus

Vakantiecursus Wiskunde

Vakantiecursus Wiskunde voor leraren in de exacte vakken aan het vwo, havo, hbo en voor andere belangstellenden Thema: wiskunde in beweging

plaats Technische Universiteit Eindhoven

info www.illc.uva.nl

31 augustus – 1 september

Vakantiecursus Wiskunde

Vakantiecursus wiskunde, zie 24 – 25 augustus

plaats CWI, Amsterdam

info www.illc.uva.nl

Nieuws

| News

In Memoriam Philip Dwinger (1914–2006)

Op 2 november 2006 is in zijn huis overleden prof.dr. Philip Dwinger, hoogleraar aan de universiteit te Bandung (1953–1956), de Purdue University (1956–1962), de Technische Hogeschool Delft (1962–1965) en de University of Illinois, Chicago (1965–1985). Philip Dwinger werd geboren op 26 september 1914 in Den Haag. Hij studeerde wiskunde, natuurkunde en astronomie in Leiden, waar hij ook in 1938 promoveerde bij Willem van der Woude, op het proefschrift *Studies on the Differential Geometry of Line Systems*. Daarna kreeg hij een betrekking als wiskundeleraar in Wassenaar.

Als jood heeft hij gedurende de tweede wereldoorlog gevangen gezeten in verschillende concentratiekampen, waaronder het kamp Theresienstadt in Tsechoslowakije. In 1996 heeft hij over deze periode gedetailleerde memoires gepubliceerd met de titel *I remember 1940–1945*.

Na nog een korte periode als wiskundeleraar werd hij in 1953 benoemd tot hoogleraar in Bandung. Aan de University of Illinois, Chicago was hij vanaf 1975 hoofd van de wiskundesectie, en vanaf 1980 was hij 'Dean of the College of Liberal Arts and Sciences'.

Zijn wiskundig werk bevond zich op het gebied van de differentiaalmeetkunde en de algebra. Hij publiceerde verscheidene boeken waaronder een veelgebruikt leerboek over boolean algebras. Hij had vijf promovendi waarvan er een in Nederland promoveerde, aan de Universiteit van Amsterdam: de in 2003 bij een auto-ongeluk overleden Willem Blok, ook hoogleraar aan de University of Illinois.

Na zijn emeritaat pendelde hij heen en weer tussen Chicago en zijn appartement in Château d'Oex in Zwitserland. Daar had hij nog af en toe ontmoetingen met wiskundigen van vroeger, zoals met de in 2003 overleden, eveneens in Zwitserland woonachtige Adriaan Zaanen.

Derk Pik



Philip Dwinger in Château d'Oex

In Memoriam Bob van Rootselaar (1927–2006)

Te Amsterdam overleed op 10 oktober 2006 prof.dr. Bob van Rootselaar, emeritus-hoogleraar wiskunde aan Wageningen Universiteit. Van Rootselaar, geboren te Amsterdam op 7 mei 1927, promoveerde in 1954 bij Arend Heyting op een proefschrift getiteld *Generalization of the Brouwer integral*. Hij bewees daarin de stelling van Egoroff voor de Brouwer-integraal, een intuïtionistisch resultaat dat door Heyting in zijn *Intuitionism, an introduction* van 1956 werd opgenomen. Vóór zijn benoeming in 1962 tot gewoon hoogleraar in de wiskunde aan de toenmalige Landbouwhogeschool te Wageningen, werkte Van Rootselaar aan het Mathematisch Instituut van de Universiteit van Amster-

Deze rubriek is een kroniek van wiskundige activiteiten in Nederland. Toekomstige activiteiten worden aangekondigd en van voorbijgaande activiteiten wordt verslag gedaan.

Wilt u uw aankondiging of verslag in deze rubriek geplaatst zien?

Stuur dan uw bijdrage (± 350 woorden, zo mogelijk met illustratie) naar nieuws@nieuwarchief.nl. De redactie behoudt zich het recht voor berichten te weigeren of in te korten.

Redacteur: Yves van Gennip

dam, de afdeling Wiskunde van de Technische Hogeschool te Delft en het Mathematisch Instituut van de Rijksuniversiteit te Leiden. Terwijl zijn Wageningse intreedere, *Met wiskundige zekerheid*, nog uitblonk in abstractie, wist Van Rootselaar zich binnen korte tijd in te leven in de meer praktijkgerichte wiskunde zoals benodigd in het breed landbouwkundig onderzoek. Van Rootselaars wiskundecolleges, die werden gelardeerd met subtile, soms ietwat spottende humor, werden door de studenten massaal geloofd en geprezen. Daarnaast had ook de wiskundendidactiek Van Rootselaar's warme belangstelling, tot uitdrukking komend in wekelijkse werkzaamheden die hij gedurende vele jaren verrichtte voor de lerarenopleiding COCMA te Utrecht.

Van Rootselaar vervulde het ambt van hoogleraar tot 1988, waarna hij zich weer in Amsterdam vestigde. Van Rootselaar was een veelzijdig wiskundige, onder meer blijkend uit de vele en zeer gevarieerde bijdragen aan *Mathematical Reviews* en *Zentralblatt*. Naast zijn werk op het gebied van de logica, publiceerde Van Rootselaar ook een fundamentele bijdrage aan de theorie van de lineaire differentiaalvergelijkingen. Van Rootselaar heeft daarnaast de internationale wiskundige gemeenschap een onschatbare dienst bewezen door het minutieuze werk dat hij gedurende decennia verrichtte aan de *Bernard Bolzano-Gesamtausgabe*, een zeer ambitieus project waaraan Van Rootselaar tot in de laatste week van zijn leven heeft gewerkt. *Bram van Putten*



Bob van Rootselaar in zijn studeerkamer

Oprichting Journal of topology

Op 10 augustus 2006 is de hele wetenschappelijke staf van redacteurs van het tijdschrift *Topology* opgestapt. Aanleiding was het mislukken van een maandenlange onderhandeling over de prijs van het tijdschrift.

Topology kent een lange en illustere geschiedenis. Opgericht in het midden van de vorige eeuw door J.H.C. Whitehead werd het tijdschrift spoedig een van de belangrijkste op haar gebied. In 2007 zullen nog twee afleveringen van het tijdschrift verschijnen met reeds geaccepteerde artikelen.

De redacteurs hebben een nieuw tijdschrift *Journal of topology* opgericht, waarvan het eerste nummer in januari 2008 zal verschijnen. Het blad wordt uitgegeven door de London Mathematical Society. De redactie bestaat uit Michael Atiyah, Martin Bridson, Ralph Cohen, Simon Donaldson, Nigel Hitchin, Frances Kirwan, Marc Lackenby, Jean Lannes, Wolfgang Lück, John Roe, Graeme Segal en Ulrike Tillmann.

Informatie over het tijdschrift en de geschiedenis van het conflict www.lms.ac.uk/publications/jtop.html en de links op de wiki-pagina [en.wikipedia.org/wiki/Topology_\(journal\)](http://en.wikipedia.org/wiki/Topology_(journal))

Derk Pik

Reken mee met abc

Half januari is *Reken mee met abc* van start gegaan. Dit is een nieuw project dat draait om een van de belangrijkste open vragen uit de getaltheorie: het abc-vermoeden. Het doel van het project is om aan een algemeen publiek te laten zien dat wiskunde een spannende wetenschap is. Op de website is veel informatie te vinden over het abc-vermoeden en verwante onderwerpen, er zijn activiteiten voor scholieren en wedstrijden waar iedereen aan deel kan nemen.

Een belangrijk onderdeel van het project is het in kaart brengen van abc-drietallen, de objecten waar het abc-vermoeden over gaat. Aan de Universiteit Leiden is een nieuw algoritme ontwikkeld om systematisch alle abc-drietallen tot een bepaalde grootte te vinden. Via de website van *Reken mee met abc* wordt het rekenwerk dat hierbij komt kijken, verdeeld over de computers van alle deelnemers. Iedereen kan zich aanmelden om een stukje werk voor zijn rekening te nemen. Deze methode om duizenden computers mee te laten rekenen aan één probleem wordt bijvoorbeeld ook gebruikt bij de zoektocht naar Mersenne-priemgetallen. Met het nieuwe algoritme, dat veel sneller is dan andere algoritmes, en het gebruik van duizenden computers in Nederland en het buitenland, is het mogelijk om een veel groter gebied af te zoeken naar abc-drietallen dan tot nu toe gedaan is. De organisatoren van het project hopen dat dit nieuwe informatie zal opleveren over de verdeling van abc-drietallen. Wellicht komt een bewijs van het abc-vermoeden dan een stapje dichterbij. Verderop in dit nummer staat een artikel dat ingaat op de wiskundige achtergronden van het abc-vermoeden.

Bron: www.rekenmeemetabc.nl

Ik zie geen wiskunde

Beklagen wiskundigen zich nog wel eens dat er buiten het vakgebied niet genoeg oog is voor de hoeveelheid wiskunde die achter techniek schuilgaat, nu werken ze actief mee om ook de techniek verborgen te houden.

Eind vorig jaar wist een team natuurkundigen en ingenieurs van Duke University en het Imperial College in Londen een constructie te maken die de tot de verbeelding sprekende naam onzichtbaarheidsmantel (*invisibility cloak*) meekreeg. Wanneer een koperen schijf of staaf in dit omhulsel geplaatst wordt, zijn zowel het koper als de mantel zelf onzichtbaar voor microgolven, die om de mantel heenbuigen en achter de mantel weer terugbuigen, zodat er geen schaduw ontstaat. In het zichtbare deel van het lichtspectrum zijn het koper en de mantel gewoon te zien.

Alsof dit niet al spannend genoeg is, loopt de wiskunde nog een stukje voor op wat de praktijk tot nu toe heeft voortgebracht. Allan Greenleaf van de University of Rochester, Matti Lassas, tegenwoordig werkzaam aan de Helsinki University of Technology en Gunther Uhlmann van de University of Washington begonnen in 2001 te werken aan het wiskundige probleem van onzichtbaarheid in de context van de medische beeldverwerking. Zij vonden dat onder heel specifieke omstandigheden tumoren niet gedetecteerd kunnen worden met de *electrical impedance tomography* techniek en dus als het ware onzichtbaar zijn voor deze specifieke methode. De omstandigheden waaronder dit zich zou voordoen zijn werden echter te speciaal geacht om in de natuur voor te komen en dus was het belang voor de medische toepassing miniem.

Dezelfde wiskunde werd in 2006 echter weer gebruikt door Sir John Pendry van Imperial College, David Schurig en David Smith van Duke University en Ulf Leonhardt van St. Andrew's University om een the-

oretische beschrijving van de onzichtbaarheidsmantel te geven. Een beschrijving die al in oktober van hetzelfde jaar omgezet zou worden in een werkende mantel.

Schermt de huidige mantel alleen passieve staven en schijven af bij specifieke frequenties, inmiddels hebben Greenleaf, Lassas en Uhlmann, samen met Yaroslav Kurylev van Loughborough University een artikel aangekondigd waarin zij de wiskunde beschrijven die nodig is om onzichtbaarheid bij alle frequenties te bereiken en niet slechts voor passieve objecten, maar ook voor actieve voorwerpen die als bron of gat voor straling kunnen dienen, zoals bijvoorbeeld een uitzendende of ontvangende mobiele telefoon.

Het is afwachten of ook nu de praktische verwezenlijking de wiskunde snel zal opvolgen. We zullen wel zien.

Bron: www.seas.rochester.edu/~gresh/math/math.113006.html

Prijs voor communicatie

Steven H. Strogatz heeft dit jaar de *JPBM Communications Award* gewonnen, die jaarlijks uitgereikt wordt aan wiskundigen die hun ideeën goed weten over te brengen aan een niet-wiskundig publiek. Deze prijs werd in 1988 voor het eerst uitgereikt en komt tegenwoordig vergezeld van een geldbedrag van 1000 dollar.

Strogatz, tegenwoordig werkzaam aan Cornell University, heeft veel werk verricht op het gebied van mathematische biologie en de toepassingen van niet-lineaire dynamica en chaostheorie. Zo heeft hij onder andere onderzoek verricht naar de menselijke slaap, de biologische klok van mensen, gekoppelde oscillatoren, synchroon oplichten van vuurvlinders en het 'kleine wereld' fenomeen in sociale netwerken (ook wel bekend als 'six degrees of separation'). Met name zijn boek *Sync: The Emerging Science of Spontaneous Order* uit 2003 wordt geroemd om de stijl die erop wijst dat het bedoeld is voor een breed publiek. Iets dat wordt bevestigd door de verkoopcijfers.

De *Joint Policy Board for Mathematics* (JPBM) is een samenwerkingsverband van de *American Mathematical Society*, de *Mathematical Association of America*, de *Society for Industrial and Applied Mathematics* en de *American Statistical Association*.

Bron: www.ams.org/prizes/jpbm-comm-award.html



foto: Cornell University

Steven H. Strogatz

Een canon van niks

Wat zouden Nederlanders moeten weten van de natuurwetenschappen? Naar aanleiding van het publiceren van de *Canon van Nederland* (website: www.entoen.nu) afgelopen jaar, waarin Eise Eisinga de enige

vermelde bètawetenschapper is, is deze vraag de Nederlandse wetenschappelijke wereld binnengeslopen.

Zo was in het decembernummer van het *Nederlands Tijdschrift voor Natuurkunde* de *Canon van de Natuurwetenschappen* te vinden, geschreven door Theo Smits.

Een andere proponent voor een canon van de natuurwetenschappen is fysicus Robbert Dijkgraaf. Een commissie onder zijn leiding heeft een lijst van vijftig onderwerpen samengesteld die gedurende dit jaar in *De Volkskrant* gepubliceerd zal worden. Iedere week schrijft een jonge Nederlandse bètawetenschapper over een van de onderwerpen een tekst, geschikt voor een algemeen publiek. Deze tekst wordt als *wiki* op de website van de Volkskrant geplaatst en kan dus door iedereen aangepast worden. Een *wiki* is een website die gemakkelijk door de bezoekers aangepast kan worden.

De spits in deze serie van de Volkskrant werd op 2 januari van dit jaar afgebeten door wiskundige Vincent van der Noort die een artikel over het cijfer en het getal 'nul' schreef, onder de titel *Nul staat voor niets*. In een goed leesbaar verhaal worden de geschiedenis en het belang van nul kort uit de doeken gedaan. Het grote aantal reacties op dit verhaal, allemaal op de website te vinden, geeft aan dat deze opzet van de bètacanon bij een breed publiek kan aanslaan.

Bron: extra.volkskrant.nl/betacanon/index.php?id=2

Aanpassingen in plannen eindexamenprogramma's

Minister Maria van der Hoeven van Onderwijs, Cultuur en Wetenschappen heeft op 14 december jongstleden haar beslissingen bekend gemaakt omtrent de examenprogramma's wiskunde vwo en havo die gelden per 1 augustus van dit jaar als de aangepaste profielen vwo/havo ingevoerd zullen worden.

Op 1 augustus 2006 werd door de minister de *resonansgroep wiskunde* ingesteld en met de taak om te reageren op de inhoud van de wiskundevakken voor havo en vwo in de overgangperiode vanaf 2007 zoals vermeld in de 'definitieve concepten' van de syllabi voor wiskunde A, B en C, vervaardigd door de *Centrale Examencommissie Vaststelling Opgaven vwo, havo, vmbo* (CEVO) en te vinden op www.digischool.nl/wi/wiscom/examenprog-2007.htm.

Op 13 november van het afgelopen jaar bracht de resonansgroep haar visie naar buiten (www.resonansgroepwiskunde.nl), waarna de Nederlandse Vereniging van Wiskundeleraren (www.nvww.nl/page.php?id=1776) en het Freudenthal Instituut (www.fi.uu.nl/nl/nieuws) hun mening kenbaar gemaakt hebben.

Bron: www.minocw.nl/documenten/49528a.pdf

Codes, fondsen en genen in The New York Times

Ook *The New York Times* besteedt soms aandacht aan wiskunde. Op 12 december 2006 verscheen er in hun serie 'Scientist at Work' een artikel over Nick Patterson, die zich op het raakvlak van wiskunde en genetica beweegt: 'Nick Patterson; A Cold War Cryptologist Takes a Crack at Deciphering DNA's Deep Secrets'.

Patterson, die zo'n twintig jaar als cryptografie-expert voor zowel het Britse als Amerikaanse Ministerie van Defensie werkte en daarna zijn kennis inzette voor een *hedge fund* (hefboomfonds), maakte de overstap naar de genetica, waar data-analyse ook een zeer belangrijke rol speelt.

In *Nature* van 29 juni 2006 verscheen een artikel van Patterson in samenwerking met vier collega's met de titel 'Genetic evidence for complex speciation of humans and chimpanzees', waarin zij op grond

van de geanalyseerde data de hypothese opstellen dat mensen en chimpansees na een initiële evolutionaire afsplitsing nog genen uitwisseld hebben alvorens definitief te scheiden in twee verschillende soorten.

Data-analyse blijkt niet alleen nuttig te zijn voor cryptografie, financiële wiskunde en genetica, maar ook voor 'public relations'.

Bron: www.ams.org/mathmedia

Piet Hemker in de Orde van de Nederlandse Leeuw

Op 17 november 2006 werd Piet Hemker, onderzoeker aan het *Centrum voor Wiskunde en Informatica* (CWI) in Amsterdam benoemd tot Ridder in de Orde van de Nederlandse Leeuw. Hij ontving de koninklijke onderscheiding uit handen van de Amsterdamse wethouder Lodewijk Asscher.

Hemkers specialiteit is de ontwikkeling van numerieke wiskunde gericht op industriële toepassingen. Zo voerde hij bijvoorbeeld recentelijk berekeningen uit aan de storende invloeden van elektromagnetische golven van mobiele telefoons. Hij heeft belangrijke beschrijvingen gegeven van een multiroostermethode die gebruikt kan worden voor bijvoorbeeld luchtstroomberekeningen voor de vliegtuigindustrie en berekeningen voor golf- en wrijvingsweerstand voor schepen.

Na de val van de Berlijnse Muur heeft Hemker veel samengewerkt met wiskundigen uit Oost-Europa. In die samenwerking vervulde hij een voortrekkersrol.

Eind vorig jaar heeft Hemker zijn professionele wetenschappelijke carrière beëindigd, na 36 jaar aan het CWI gewerkt te hebben, maar hij heeft al aangegeven onbezoldigd door te willen gaan als onderzoeker, auteur en adviseur.

Bron: www.cwi.nl/pr/press-releases/2006/pb-PietHemker-zonovo6.html



Foto: Jan Schipper, CWI

Piet Hemker ontvangt de onderscheiding van wethouder Asscher

Roze plus roze plus zwart is paars

Adnane Mahendran, een elfjarige Sri Lankaanse jongen, haalde onlangs de kranten met zijn opmerkelijke rekengave. De jongen, die momenteel in de Marokkaanse stad Rabat woont, ziet naar eigen zeggen de cijfers van 0 tot en met 9 in kleur en kan daardoor gemakkelijker berekeningen uitvoeren. Roze staat voor drie, zwart voor één en paars voor zeven, meldde de rekenartiest geboren uit een Sri Lankaanse vader en Marokkaanse moeder. Op deze wijze wist hij de vermenigvuldiging van twee verschillende 15-cijferige getallen in 56 minuten uit te rekenen.

Volgens zijn vader kwam zijn affiniteit met getallen voor het eerst

aan het licht op driejarige leeftijd, toen hij al alle telefoonnummers onthield. Adnane heeft zich voorgenomen later wetenschapper te worden. Zal hij in de voetsporen treden van bekende wetenschappers met synesthesie zoals bijvoorbeeld Richard Feynman?

Bron: www.gva.be/nieuws/wetenschap/

Prijsuitreiking Nederlandse Wiskunde Olympiade 2006

In januari 2006 hebben 2192 leerlingen meegedaan aan de eerste ronde van de Nederlandse Wiskunde Olympiade. Ruim honderd leerlingen zijn vervolgens uitgenodigd voor de tweede ronde in september van dit jaar op de TU Eindhoven. De tien deelnemers met de hoogste score en dus de prijswinnaars van de Nederlandse Wiskunde Olympiade van dit jaar zijn, te beginnen bij de hoogste score: Wouter Berkelmans (*Barlaeus Gymnasium Amsterdam*), Milan Lopuhäa (*Gymnasium Felsenium Velsen-Zuid*), Raymond van Bommel (*College Hageveld Heemstede*), Kyndylan Nienhuis (*St. Ignatiusgymnasium Amsterdam*), Milo van Holsteijn (*RSG Pantarijn Wageningen*), Remy van Dobben de Bruyn (*Stedelijk Gymnasium Leiden*), Hilje Doekes (*RSG Pantarijn Wageningen*), Rogier Huurman (*Stedelijk Gymnasium Nijmegen*), Yvette Welling (*O.S.G. Erasmus Almelo*) en Wouter Zomervrucht (*Sted. Dalton Lyceum Dordrecht*). Onder belangstelling van ouders, familie, vrienden en andere genodigden kregen zij op vrijdag 10 november hun prijs uitgereikt op de TU Eindhoven. Na afloop van de prijsuitreiking en de borrel begon voor hen en voor zeven andere geselecteerde leerlingen al een trainingsweekend. Door middel van verschillende trainingsweekenden en lesbrieven worden deze leerlingen voorbereid op de 48e Internationale Wiskunde Olympiade, die gehouden zal worden van 23 tot 31 juli 2007 in Hanoi, Vietnam.

Melanie Steentjes, www.wiskundepersdienst.nl

Kiezen en delen

Feestmaand december heeft de wiskundige gemeenschap geïnspireerd zich eens over taarten te buigen. Elke Nederlander die na het kerstmaal op Eerste Kerstdag ook nog wat intellectuele vraagstukken kon verteren, heeft in de *Nationale Wetenschapsquiz* kunnen ontdekken hoe je het beste je taarten kan uitkiezen, als je je zinnen hebt gezet op de grootste uit een rij van zes taarten.

Stel iemand laat je zes taarten zien in een willekeurige volgorde. Je weet dat geen twee taarten even groot zijn, maar je hebt geen idee hoe groot de grootste of kleinste taart is. Na elke taart moet je beslissen of je die bewuste taart wilt houden, of dat je de volgende wilt zien, maar je mag maar één taart uitkiezen en afgewezen taarten komen niet meer terug. De vraag die in het VPRO-programma aan de kijker werd gesteld was nu met welke strategie je de meeste kans hebt de grootste taart te kiezen. Uit de aangeboden mogelijkheden bleek dit de optie te zijn waarbij je eerste twee taarten afwijst en vervolgens de eerste taart kiest die groter is dan de eerste twee. De kans op succes blijkt in dat geval 77/180 te zijn.

Maar wat nu als je eenmaal een taart gekozen hebt, hoe verdeel je die dan eerlijk? Steven Brams, Michael Jones en Christian Klamler hebben hier over nagedacht en het resultaat van hun inspanningen valt te lezen in het artikel *Better Ways to Cut a Cake* dat in december in de *Notices of the American Mathematical Society* verscheen.

De bekendste manier van taart verdelen tussen twee personen, kiezen of delen, dat wil zeggen, een persoon snijdt en daarna kiest de ander een van beide stukken, lijkt op het eerste gezicht een goede manier, maar bij nadere inspectie blijkt dat deze methode geen rekening

houdt met de subjectieve waarde die elke persoon aan een stuk toekent. Misschien zit er op de taart wel zo'n lekker chocolaatje en heeft een van beide personen dit zo graag dat hij bereid is er qua hoeveelheid taart voor in te leveren. Met dergelijke details in het achterhoofd bespreken de auteurs verscheidene verdeelmethoden voor twee of meer personen. *Bron: nwo.nl en www.ams.org/notices/200611/fea-brams.pdf*

Het gedrag van groepen

Een school vissen die als één organisme door het water glijdt; een groep vogels die als een geheel door de lucht zweeft of een mierenkolonie waarvan alle leden hun steentje bijdragen aan het werk van de kolonie: allemaal voorbeelden van groepsgegedrag in dieren. In het artikel 'Collective Memory and Spatial Sorting in Animal Groups' dat in 2002 in het *Journal of Theoretical Biology* verscheen, beschreef Iain Couzin van de University of Oxford en Princeton University samen met anderen dit gedrag in vissen wiskundig door middel van een Ising-achtig model.

'The Mind of the Swarm' van Erica Klarreich, een artikel over het wiskundig modelleren van groepsgegedrag in dieren verscheen in de editie van 25 november 2006 van *Science News*. Het onderzoek in dit vakgebied heeft de afgelopen jaren een enorme vlucht genomen met het beschikbaar komen van steeds sterkere computers. Drie belangrijke ingrediënten zijn telkens weer terug te vinden in de wiskundige beschrijvingen: niet-lineariteit, positieve terugkoppeling en faseovergangen. Snelle computers lenen zich goed voor het onderzoek aan modellen met dit gedrag en de combinatie van wiskunde en experimenten met levende dieren hebben al hun vruchten afgeworpen en zullen ook in de toekomst nog tot interessante onderzoeken leiden in het onderzoek naar groepsgegedrag. *Bron: www.sciencenews.org/articles/20061125/bob10.asp*

Vicijprijs voor Jan van Neerven en Ronald Cramer

In december 2006 zijn aan de analyticus Jan van Neerven en de cryptograaf Ronald Cramer twee vicij-beurzen toegekend. Jan van Neerven (Technische Universiteit Delft) werkt op het gebied van stochastische differentiaalvergelijkingen. Gebruikmakend van technieken uit de harmonische analyse zal hij nieuwe wiskundige methoden ontwikkelen om de kwalitatieve eigenschappen van zulke processen beter te begrijpen. Ronald Cramer van het Centrum voor Wiskunde en Informatica en van het Mathematisch Instituut van de Universiteit Leiden, zoekt nieuwe methoden om ondanks onderling wantrouwen toch wederzijds geheime data te verwerken waarbij een ieder controle heeft over dissipatie van zijn geheimen. Standaard cryptografie (encryptie) voldoet hier niet. Fascinerende nieuwe interacties met algebra en meetkunde geven aanleiding tot fundamentele, efficiëntere oplossingen. *Bron: NWO*

Wintersymposium KWG

Ruim honderdwintig deelnemers waren op 6 januari afgekomen op het jaarlijkse Wintersymposium van het KWG in het Academieggebouw van de Universiteit van Utrecht. Het thema was dit jaar *Wiskunde in 'Natuur, Leven en Technologie'*. Dat laatste is de naam van een nieuw bètavak, afgekort als NLT, op havo en vwo. Traditiegetrouw waren er drie sprekers die ieder een facet voor hun rekening namen.

Jurrien Bijhold van het Nederlands Forensisch Instituut presenteert een bloemlezing van *case studies* uit de praktijk van het strafrechtelijk onderzoek aan ongelukken en misdrijven waarbij wiskundige technieken gebruikt worden. Bijvoorbeeld het verbeteren en verscherpen van videobeelden van bewakingscamera's waarop de daders van een overval te zien zijn. Denk aan gezichtsherkenning, of aan de lengte en andere kenmerken van personen. Daar zit heel wat wiskunde achter: Fourieranalyse, maar ook projectieve meetkunde. Het NFI werkt op dit gebied onder andere samen met wiskundigen van de TU Delft.

De tweede lezing was meer gericht op de onderwijspraktijk. Elwin Savelsbergh van het Centrum voor Didactiek van Wiskunde en Natuurwetenschappen van de Universiteit Utrecht presenteerde een aantal projecten waarbij leerlingen in NLT met behulp van computersoftware verschijnselen uit de natuur modelleren. Een van die modellen betrof het ecosysteem van de gehele aardbol in verband met klimaatvoorspellingen. Er was na afloop flink wat discussie over de realiteitswaarde en de voorspellingsmogelijkheden van zulke modellen, denk aan chaotische systemen. Minder controversieel, maar voor ervaren wiskundelaren weinig verrassend waren modellen voor populatiegroei en radioactief verval.

De derde lezing, door Ben ten Voorde van het VU medisch centrum, ging over beeldgebruik en beeldbewerking in de geneeskunde. Dankzij moderne ICT-middelen zijn Röntgen-technieken, computertomografie, echografie, MRI-scans en PET-scans machtige hulpmiddelen geworden in de diagnostiek en de behandeling van de meest uiteenlopende ziektes en gebreken. Zonder geavanceerde, actuele en nog steeds in ontwikkeling zijnde wiskunde zouden die technieken ondenkbaar zijn. Ten Voorde voerde ons aan de hand van indrukwekkende beelden door dit uitgebreide toepassingsgebied, waarbij echter de gecompliceerde wiskunde achter al dit materiaal grotendeels verborgen moest blijven.

Het was een interessante dag voor de vele aanwezige wiskundedocenten, stafleden van hbo's en universiteiten en andere belangstellenden. In de pauzes werden de wandelgangen, met daarin weer talrijke informatiestands, gebruikt voor aangename en nuttige sociale contacten. Organisator Iris van Gulik kan terugzien op een zeer geslaagde dag. Van sommige leraren hoorde ik echter dat zij wat meer aansluiting van de onderwerpen bij de schoolpraktijk op prijs zouden hebben gesteld. Een suggestie voor volgend jaar om hier toch wat meer de nadruk op te leggen?

Jan van de Craats



Van het KWG

| KWG activities

Algemene Ledenvergadering van het KWG

De 230ste Algemene Ledenvergadering van het Koninklijk Wiskundig Genootschap zal worden gehouden op vrijdag 13 april 2007 tijdens het 43ste Nederlands Mathematisch Congres te Leiden.

1 Agenda

- 1 Opening
- 2 Verslag van de 229ste Algemene Ledenvergadering van het Koninklijk Wiskundig Genootschap
- 3 Mededelingen
- 4 Besprekingen van de jaarverslagen over 2006. De hier ontbrekende verslagen worden ter vergadering uitgereikt.
 - a. Verslag van de Secretaris
 - b. Verslag van de Penningmeester
 - c. Verslag van de Kascommissie
 - d. Verslag van de Stichting Epsilon
 - e. Verslag van het Nederlands Mathematisch Congres
 - f. Verslag van de Inspecteur der Boekerij
 - g. Verslag van de Publicatiecommissie
 - h. Verslag van de Nederlandse Onderwijscommissie voor Wiskunde
 - i. Verslag van de Archivaris
 - j. Verslag van de Commissie voor Persoonlijke Archieven van Wiskundigen
 - k. Verslag van de Sectie Industriële en Toegepaste Wiskunde
- 5 Begroting 2007
- 6 Vaststelling contributie voor 2008
- 7 Samenstelling Kascommissie 2007
- 8 Samenstelling van het Bestuur
Dr. S.A.J. Dekkers, prof.dr. J. van Mill, dr.ir. H.J.J. te Riele en dr. V. Rottschäfer treden statutair af. Te Riele is bereid om als Archivaris en Inspecteur der Boekerij in het bestuur te blijven. Het bestuur draagt dr. A. Sevenster (tot 1 december 2006 werkzaam bij Elsevier) voor als kandidaat voor een bestuursfunctie. De overige leden van het bestuur zijn:
 - dr. W. Bosma (RU), webmaster
 - prof.dr. H.W. Broer (RUG), voorzitter
 - dr. I. van Gulik-Gulikers (Van der Capellen Scholengemeenschap Zwolle en SLO Enschede), contacten met leraren
 - dr. K.P. Hart (TUD), publicaties
- 9 Professionalisering van het KWG
- 10 Rondvraag
- 11 Sluiting

2 Ad punt 2 van de Agenda

Hieronder volgen de notulen van de 229ste Algemene Ledenvergadering, tezamen met de bijbehorende verslagen die niet eerder gepubliceerd zijn: het financieel verslag over 2005 en de begroting 2006, het verslag van de kascommissie over 2005, en het verslag van de Archivaris over 2005.

2.1 Notulen van de 229ste Algemene Ledenvergadering van het Koninklijk Wiskundig Genootschap, gehouden tijdens het Nederlands Mathematisch Congres te Delft, op 28 maart 2006.

De vergadering werd bijgewoond door 16 leden.

1. *Opening.*
De voorzitter opent de vergadering om 12.10 uur en heet de aanwezigen welkom. De secretaris heeft bericht van verhindering ontvangen van het (uitgenodigde) erelid Korevaar, en van de leden Broer, Kamminga, en Barning.
2. *Verslag van de 228ste Algemene Ledenvergadering.*
Dit verslag wordt goedgekeurd.
3. *Mededelingen.*

Rubriek met mededelingen van het Koninklijk Wiskundig Genootschap. Tevens worden hier de notulen van de Algemene Ledenvergadering gepubliceerd.

Data NMC De voorzitter deelt mee dat NMC2007 in Leiden zal worden gehouden (in samenwerking met Delft). In 2008 zal het NMC, met de dan op het programma staande Brouwer- en Beegerlezingen, worden ondergebracht in het Fifth European Congress of Mathematics, dat van 13-18 juli 2008 in de RAI in Amsterdam zal worden gehouden.

4. *Bespreking van de jaarverslagen over 2005.*

De verslagen over 2005 worden besproken en goedgekeurd (de verslagen van de secretaris, van het 41ste NMC te Gent, van de Inspecteur der Boekerij, van de Publicatiecommissie, van de Nederlandse Onderwijscommissie voor Wiskunde, van de Commissie voor Persoonlijke Archieven van Wiskundigen en van de Sectie Industriële en Toegepaste Wiskunde zijn gepubliceerd in het Nieuw Archief voor Wiskunde, vijfde serie, jaargang 7, nummer 1, pp. 12–16; de verslagen van de archivaris, van de penningmeester en van de Kascommissie (de laatste twee tijdens de vergadering door de penningmeester besproken aan de hand van overhead sheets) zijn hieronder opgenomen. De secretaris zal deze drie verslagen ook toegankelijk maken via de website van het KWG). Van Emde Boas merkt bij de behandeling van het verslag van de Archivaris op dat hij vreest dat door de huidige ontwikkelingen met betrekking tot het archiveren van gegevens en exemplaren van wiskundige tijdschriften verloren zouden kunnen gaan. Hij adviseert het KWG daarom om eventueel van alle wiskundige tijdschriften 1 exemplaar te gaan bewaren.

Op verzoek van Steenbrink zal het KWG een aantal stukken van de Kamer Wiskunde van de VSNU (die Steenbrink in bewaring heeft gekregen) in zijn archief opbergen. Te zijner tijd zullen deze naar Het Noord-Hollands Archief in Haarlem worden gebracht.

5. *Begroting 2006.*

De begroting voor 2006 wordt goedgekeurd.

6. *Vaststelling contributie voor 2007.*

De contributie voor 2007 wordt als volgt vastgesteld:

gewone leden:	€ 70
gepensioneerde en werkloze leden:	€ 35
aio/oio's en studenten:	€ 25

KWG-leden die lid zijn van de European Mathematical Society betalen € 20 extra. Voor KWG-leden die buiten Nederland maar in Europa wonen wordt € 5 portokosten in rekening gebracht; zij die buiten Nederland en buiten Europa wonen betalen € 7,50 portokosten.

7. *Samenstelling Kascommissie 2006.*

De vergadering gaat akkoord met het voorstel van de penningmeester om oud-penningmeester prof.dr. F. Beukers tot opvolger van dr. M. Knaap in de kascommissie te benoemen. De samenstelling van de Kascommissie 2006 is nu als volgt: dr. L. Florack (UU) en prof.dr. F. Beukers (UU).

8. *Samenstelling van het Bestuur.*

Drs. Metha Kamminga treedt af als bestuurslid. Omdat zij verhinderd is zal het bestuur tijdens de komende bestuursvergadering van 19 april 2006 op gepaste wijze afscheid van haar nemen. Prof.dr. J. van Mill treedt af als voorzitter. Het bestuur draagt het bestuurslid prof.dr. H. Broer voor als nieuwe voorzitter voor de komende twee jaar. De vergadering bekrachtigt dit voorstel met een applaus. Van Mill wordt ondervoorzitter en neemt wegens afwezigheid van Broer de honneurs waar als voorzitter voor de rest van de vergadering. Als nieuw bestuurslid draagt het bestuur voor: Dr. Iris van Gulik-Gulikers, docente wiskunde aan de Van der Capellen Scholengemeenschap in Zwolle en werkzaam bij de Stichting Leerplanontwikkeling in Enschede. Dit voorstel wordt bij acclamatie aangenomen. Met de NVvW wordt nog overlegd of mevr. van Gulik-Gulikers de NVvW in het KWG-bestuur gaat vertegenwoordigen, maar ze gaat in ieder geval het Wintersymposium 2007 organiseren.

De samenstelling van het bestuur is nu als volgt:

dr. W. Bosma (RU), PR
 prof.dr. H.W. Broer (RUG), voorzitter
 dr. S.A.J. Dekkers (UU), penningmeester
 dr. I. van Gulik-Gulikers (Van der Capellen Scholengemeenschap Zwolle en SLO Enschede), contacten met leraren
 dr. K.P. Hart (TUD), publicaties

prof.dr. J. van Mill (VU), ondervoorzitter

dr. ir H.J.J. te Riele (CWI), secretaris, archivaris en Inspecteur der Boekerij

dr. V. Rottschäfer (UL), contacten met studenten

9. *Epsilon Uitgaven.*

De voorzitter memoreert de oprichting op 5 juli 2005, door het KWG en de NVvW, van de Stichting Epsilon. Deze stichting heeft op 26 januari 2006 tijdens een feestelijke bijeenkomst in het Academieggebouw van de UU de uitgeverij Epsilon Uitgaven overgenomen. Voornaamste doel hiervan is het voortbestaan van Epsilon in de toekomst te waarborgen. Voorzitter van de stichting is Geertje Hek. Op de vraag van Van Emde Boas naar de toekomstplannen van de nieuwe stichting antwoordt de voorzitter: zeker doorgaan op de ingeslagen weg. Geertje Hek geeft aan dat goede ideeën altijd welkom zijn.

10. *Digitaliseren.*

Wieb Bosma geeft aan dat de inspanningen van het bestuur om het Nieuw Archief voor Wiskunde te gaan digitaliseren nog niet tot resultaat hebben geleid, vooral door de hoge kosten die hieraan zijn verbonden. Als mogelijke bronnen van financiering worden genoemd: het Prins Bernardfonds, overheidssubsidie (in groter verband, zoals in Frankrijk het geval is), en eventueel legaten. De voorzitter vat de discussie samen dat de leden en het bestuur dit een interessant project vinden en dat het bestuur verdere mogelijkheden zal onderzoeken, waarbij goed ideeën van de leden welkom zijn!

11. *Rondvraag.*

Uitreiking Zaalbokaal

Jaap Top (een van de hoofdredacteurs van het NAW) deelt mee dat de Zaalbokaal voor het beste artikel in het NAW in 2005 door een jury, bestaande uit Dirk van Delft en Jos van de Broek, is toegewezen aan Jan van de Craats voor zijn artikel over Islamitische Ornamentiek in het maartnummer (pp. 40-46). Onder applaus overhandigt Jaap de Zaalbokaal aan Jan van de Craats.

Herman te Riele bedankt Jan van Mill. Namens het KWG wordt Jan van Mill bedankt door Herman te Riele voor zijn grote inzet gedurende de afgelopen twee jaar als voorzitter. Hij memoreert o.a. het vele avondwerk dat Jan heeft verzet voor het tot stand komen van de Stichting Epsilon en de overname van de uitgeverij Epsilon uitgaven. Al met al is dit welhaast een (O)megaproject geworden waarvan het resultaat tot tevredenheid mag stemmen. Als dank overhandigt Herman aan Jan een kistje met twee flessen goede wijn.

12. *Sluiting.*

De voorzitter sluit de vergadering om ca. 13.00 uur.

2.2 Financieel verslag 2005 en begroting 2006

Het jaarverslag over 2005 is op dezelfde manier tot stand gekomen als dat over 2004. Dit jaarverslag heeft betrekking op de financiën van het KWG en, daarin, het Nieuw Archief voor Wiskunde (NAW).

Balans begin 2005

De beginbalans 2005 is identiek aan de eindbalans 2004, zoals gepubliceerd in het financieel jaaroverzicht 2004.

Balans eind 2005

Tabel 2 geeft de balans over 2005. Het saldo van de Postbank kapitaalrekening is in 2005 overgeboekt naar een Postbank rentemeer rekening. Deze biedt een hoger rentepercentage dan de kapitaalrekening, terwijl het saldo vrij opneembaar blijft. De post debiteuren is relatief hoog, doordat op 1 januari een aanzienlijk deel van de door Uitgeverij Giethoorn ten Brink voor het KWG geïnde contributies (€16.805,35) nog niet was overgemaakt, en doordat over 2005 nog niet alle instituutslidmaatschappen zijn geïnd. Daarnaast stonden op 1 januari nog een aantal rekeningen aan adverteerders in het NAW open. Nog te betalen salarissen over 2005 maken een aanzienlijk deel van het aan crediteuren verschuldigde bedrag uit. Op de eindbalans 2005 zijn de posten 'algemene reserve' en 'kapitaal' samengevoegd.

Resultatenrekening

Het eigen vermogen van het KWG is in 2005 met € 855,88 afgenomen, zie tabel 3.

ACTIVA	€	PASSIVA	€
Vlottende activa		Vreemd vermogen	
<i>Vorderingen:</i>		<i>Crediteuren:</i>	
Pythagoras	6.474,51	Pythagoras	4.701,51
Debiteuren	12.004,45	Overige crediteuren totaal	55.086,85
Deelname Epsilon Uitgaven	6.762,17		
<i>Liquide middelen:</i>		Eigen vermogen	
Postbank	41.683,34	Algemene reserve	19.966,32
ABN AMRO	23.700,14		
Vaste activa			
<i>Financiële vaste activa</i>			
Aandelen	3.097,40		
Postbank Kapitaalrekening	88.467,79		
ABN AMRO Kapitaalmarktindex	66.586,07	Kapitaal eind 2004	169.021,19
	248.775,87		248.775,87

Tabel 1 Beginbalans 2005

ACTIVA	€	PASSIVA	€
Vlottende activa		Vreemd vermogen	
<i>Vorderingen:</i>		<i>Crediteuren:</i>	
Pythagoras	4.377,18	Pythagoras	9.495,09
Debiteuren	48.253,40	Overige crediteuren totaal	67.745,50
Deelname Epsilon Uitgaven	1.028,14		
<i>Liquide middelen:</i>		Eigen vermogen	
Postbank	2.829,79		
ABN AMRO	16.064,62		
Vaste activa			
<i>Financiële vaste activa:</i>			
Aandelen	4.128,96		
Postbank Rentemeer rekening	119.856,85		
ABN AMRO Kapitaalmarktindex	68.833,28	Kapitaal eind 2005	188.131,63
	265.372,22		265.372,22

Tabel 2 Eindbalans 2005

Na een aantal jaren met sterk positieve resultaten heeft het KWG in 2005 een beperkt verlies geleden. Gezien de grootte van het eigen vermogen is dit geen reden tot zorg. In de begroting voor 2005 was een positief resultaat voorzien van €9.500. Het verschil met het uiteindelijke resultaat is gedeeltelijk terug te voeren op eenmalige kosten, te weten de kosten van de Brouwerlezing in 2005 (€7.469,19), waarvoor onvoldoende begroot was, en afschrijving van een groot deel van het restant van de deelneming in Epsilon uitgaven (€5.154,94). De inkomsten uit contributies zijn in 2005 achtergebleven bij de begroting. Het bestuur onderneemt actie om met name onder jonge wiskundigen nieuwe leden te werven.

Toelichting bij de balansposten deelname Epsilon Uitgaven en aandelen.

1. Epsilon Uitgaven betaalde in 2005 €318,20 aan reguliere aflossing (en 10% daarvan, €31,80, aan rente), en loste daarnaast de overblijvende schuld over de delen 25, 34 en 40 à €260,89 in één keer af. De delen 7, 12 en 19 zijn uit de verkoop genomen. De resterende voorraad, met een waarde van hfl. 11.360 = €5.154,94 is in 2005 afgeschreven. Hierdoor is de deelname in Epsilon Uitgaven gedaald tot €1.028,14, zie tabel 4. Deze balanspost zal naar verwachting in 2006 verdwijnen.
2. De aandelenportefeuille is per ultimo 2005 samengesteld uit 173.9975 aandelen Rolinco à €23,75, met een totale waarde van €4.128,96, zie tabel 5.

Begroting en kosten 2005 en begroting 2006

Tabel 6 toont de begrote en werkelijke kosten over het boekjaar 2005, en de begrote kosten voor 2006.

Ad 4125: In het boekjaar 2005 werden ten behoeve van het NAW de volgende betaalde functies vervuld:

- Eindredacteur, 0,2 fte
- Bureauredactie, twee maal 0,2 fte
- Bladmanager, 0,3 fte

Ad 4151: Het betreft hier het netto door het KWG aan portokosten bestede bedrag. Het CWI vergoedt de voor ruilabonnementen gemaakte portokosten. In 2005 ging het hierbij om €2.547,45.

Ad 4154: Dit bedrag is besteed aan het opnieuw ontwerpen van de advertentiekaart, en voor een klein deel aan een nagekomen rekening voor het herontwerp van de poster in 2004.

Ad 4155: Dit betreft het netto aandeel van het KWG in de vergaderkosten. De UU vergoedt, als onderdeel van het instituutslidmaatschap, een deel van de vergaderkosten, te weten €340,00.

Ad 4160: Uitgaven ten behoeve van de Brouwerprijs 2005 zijn onder overige kosten geboekt. De totale kosten van de Brouwerlezing bedroegen €7.469,19. Ook de afschrijving van de deelneming in Epsilon Uitgaven (€5.154,94) is onder deze post geboekt. Voor 2006 zijn geen vergelijkbare kosten voorzien.

	€
Kapitaal eind 2004	188.987,51
Resultaat boekjaar 2005	-855,88
Kapitaal eind 2005	188.131,63

Tabel 3 Resultatenrekening 2005

	€
Deelname Epsilon Uitgaven begin 2005	6.762,17
Af: afgelost door Epsilon Uitgaven	579,09
Af: afschrijving deel 7,12,19	5.154,94
Deelname Epsilon Uitgaven eind 2005	1.028,14

Tabel 4 Mutaties deelname in Epsilon Uitgaven

	€
Aandelen begin 2005	3.097,40
Bij: dividend en herwaardering	1.031,56
Aandelen eind 2005	4.128,96

Tabel 5 Mutaties aandelenportefeuille

Ad 4162: Dit betreft bij de oprichting van de Stichting Epsilon gemaakte kosten. Stichting Epsilon, die per 1 januari Epsilon Uitgaven heeft overgenomen, krijgt van het KWG een startkapitaal van € 2.000, en zal daarna financieel onafhankelijk zijn.

Ad 4170, 4725, 4726: Het KWG heeft in 2005 de volgende sponsorbijdragen verstrekt:

- Stichting Vierkant: € 10.000
- NMC 2005: € 2.035,00
- Wintersymposium 2005: € 1.660,88
- Nationale PR-medewerker: € 755,83

Voor 2006 worden vergelijkbare uitgaven voorzien. Voor 2006 is aan Stichting Vierkant geen sponsoring toegezegd. De sponsoring voor Stichting Vierkant wordt gedekt door een tweetal instituutslidmaatschappen.

Baten 2005 en begroting 2006

Ad 5150: De inkomsten uit contributies vertonen een dalende trend. Het bestuur beraadt zich op mogelijkheden om het aantal leden te vergroten.

Ad 5151: Alleen de structurele inkomsten uit het structurele Godefroy legaat zijn begroot.

Ad 5153: De inkomsten uit advertenties zijn zeer sterk gedaald. Dit behoeft aandacht.

Ad 5156: Deze contributies werden in 2004 en 2005 aangewend voor sponsoring van stichting Vierkant. Contributies van instituutsliden die ten goede komen aan Pythagoras en bijdragen in natura komen op deze begroting niet voor. In 2005 waren instituutslid: het CWI, Eurandom, Technische Universiteit Delft, Rijksuniversiteit Groningen, Technische Universiteit Eindhoven, Universiteit van Amsterdam, Universiteit Leiden, Universiteit Utrecht, Vrije Universiteit, Katholieke Universiteit Nijmegen en Universiteit Twente.

Ad 9090: De rente wordt geboekt in het jaar waarin deze binnenkomt, niet in het jaar waarop deze betrekking heeft.

Samenvatting

Het financieel overzicht over 2005 laat een (zeer beperkt) negatief resultaat zien. Dit is terug te voeren op eenmalige kosten. Daarnaast heeft het KWG te maken met een lichte daling van het aantal leden. Voor 2006 wordt een positief resultaat voorzien. Er is op dit moment dan ook nog geen reden om de contributie te verhogen.

Utrecht, 23 maart 2006

Dr. S.A.J. Dekkers, penningmeester

2.3 Verslag van de Kascommissie 2005

De kascommissie verklaart hierbij het financiële verslag van de penningmeester over het boekjaar 2005 te hebben gecontroleerd. Na inzage van de boeken en verdieping in de gevoerde boekhouding kon worden geconstateerd dat het verslag een getrouw beeld geeft van de financiële situatie van het Koninklijk Wiskundig Genootschap.

Utrecht, 23 maart 2006

Namens de Kascommissie 2005, L.M.J. Florack

2.4 Verslag van de Archivaris over 2005

Het archief van het Koninklijk Wiskundig Genootschap was in 2005 in goede handen bij het Noord-Hollands Archief (voorheen het Rijksarchief in de Provincie Noord-Holland), Kleine Houtweg 18, 2012 CH Haarlem. Het archief is ontsloten via de uitgebreide *Inventaris van de archieven van het Wiskundig Genootschap onder de zinspreuk: 'Een onvermoeide arbeid komt alles te boven', opgericht te Amsterdam in 1778, (1782) 1798 - 1968 (1991)* door S. Neugebauer (Haarlem, 1995). Deze inventaris kan worden geraadpleegd op <http://www.wiskgenoot.nl/watis/geschiedenis.html>.

Herman te Riele, archivaris KWG

3 Ad punt 4 van de Agenda

3.1 Verslag van de Secretaris

3.1.1 Leden Het genootschap had op 1 januari 2007 vijf ereleden (P.C. Baayen, F. van der Blij, N.G. de Bruijn, J. Korevaar en J.A.C. de Rijk) en 1230 leden, van wie 168 gebruik maakten van het tarief voor gepensioneerden, 167 van het reciprociteitstarief en 106 van het studenttarief. Veertig leden waren lid van de European Mathematical Society.

3.1.2 Verslag van het Najaarssymposium Zie hiervoor het verslag van de Sectie Industriële en Toegepaste Wiskunde (Sectie **3.11.2**).

3.1.3 Verslag van de Kaleidoscoopdag De Kaleidoscoopdag vond plaats op 17 mei 2006 aan de Universiteit Utrecht en werd georganiseerd door de Beta-studievereniging "A-Eskwadraat". Het thema was: "One of a kind – Puzzels, Spelletjes en Speltheorie". Het programma zag er als volgt uit:

- Alexander Gnedin (UU), *The arcsine law of a simple random walk*
- Marc van Krefeld, *De Zoektocht naar een kubuspuzzel*
- Marieke Quant, *Hoe piraten een schat verdelen*
- Wilbert van der Kallen (UU), *Rubik's kubus, het verschil tussen slopen en oplossen*

Daarnaast werden er twee workshops verzorgd, over pokeren (door Jan Kuipers) en over bridge (door leden van de Studenten Bridge Vereniging Dombo).

3.1.4 Verslag van het Wintersymposium Het Wintersymposium, georganiseerd door Iris van Gulik-Gulikers, werd gehouden op 6 januari 2007 in het Academiegebouw bij de Dom in Utrecht. Het thema was Wiskunde in Natuur, Leven en Technologie. Sprekers waren:

- Jurrien Bijhold (Nederlands Forensisch Instituut, groep Beeldonderzoek en Biometrie), *Een bloemlezing van verhalen over het toepassen van wiskunde binnen het forensisch onderzoek*.
- Elwin Savelsbergh (Centrum voor Didactiek van Wiskunde en Natuurwetenschappen van de Universiteit Utrecht), *Modelleren: natuurwetenschap, wiskunde en computers in Wiskunde D en NL*.
- Ben ten Voorde (VU Medisch Centrum Amsterdam, afdeling Fysica en Medische Technologie), *Beelden in de geneeskunde: van thorax-foto tot virtuele colonoscopie*.

Het symposium trok een recordaantal van ongeveer 135 belangstellenden. Een met foto's geïllustreerd verslag is te vinden op de website van het KWG (www.wiskgenoot.nl/watbiedt).

3.1.5 Wiskunde Persdienst

De Wiskunde Persdienst (www.wiskundepersdienst.nl) is een initiatief uit 2002 van de Nederlandse Vereniging voor Wiskundeleraars en het KWG. De WPD verza-

Grootboek nr	Omschrijving	begroot 2005 (€)	werkelijk 2005 (€)	begroot 2006 (€)
4125	Salarissen	34.000	36.794,50	38.000
4151	Porti	6.000	5.913,99	6.000
4152	Drukkosten	21.500	19.491,24	20.000
4153	Ontwerpkosten	6.600	4.188,33	4.500
4154	PR/Reclame	1.000	606,99	500
4155	Vergaderkosten	1.500	947,11	1.000
4158	Ledenadministratie	2.500	1.971,50	2.000
4160	Overige kosten	4.500	18.383,67	7.500
4162	Stichting Epsilon	0	931,15	2000
4170, 4727	Sponsoring	20.000	14.451,71	15.000
4200	Verzekering	400	401,25	400
4251	Afdracht EMS	1.150	1.140,00	1.150
4252	Afdracht IM	1.700	1.791,40	1.800
4253	Afdracht IMU	750	750,00	750
4980, 9152	Bankkosten	100	52,64	100
	Totaal	101.700	107.815,48	100.700

Tabel 6 Resultatenrekening 2005 en begroting 2006: kosten

Grootboekrek. nr.	Omschrijving	begroot 2005 (€)	werkelijk 2005 (€)	begroot 2006 (€)
5150, 5121, 5251, 5252	Contributies KWG-leden	88.000	86.805,37	85.000
5151	Legaten en donaties	200	222,12	200
5153	Advertenties	7.500	3.780,10	4.500
5154, 5155, 5160	Overige baten	0	1.063,71	0
5156	Contributies instituutleden	10.000	10.000	10.000
5157	Contributies bedrijfsleden	1.000	1.00	1.000
9052, 9090	Rente	4.500	4.088,30	4.500
	Totaal	111.200	106.959,60	105.200

Tabel 7 Resultatenrekening 2005 en begroting 2006: baten

melt en verspreidt wiskundig georiënteerd nieuws. Het KWG en het Centrum voor Wiskunde en Informatica verzorgen samen de website. Het beheer van de berichten is in handen van Annette Kik (CWI) en Mark Peletier (TU/e). Op dit moment worden nieuwsberichten gepubliceerd op de site van de Wiskunde Persdienst, op die van het KWG, de NVvW en Pythagoras, en op WisWeb (de website van het Freudenthal Instituut). In 2006 verschenen 53 nieuwsberichten en 2 persberichten.

3.1.6 PR-activiteiten

Het Genootschap heeft bij verschillende gelegenheden PR-actiteiten ontplooid, zoals tijdens het 42ste Nederlands Mathematisch Congres te Delft (27–28 maart) en bij evenementen zoals de Jaarvergadering/Studiedag en de Nationale Wiskunde Dagen van de NVvW, het Wintersymposium van het KWG, de vakantiecur-sussen van het CWI, de Wetenschapsdag en de Kaleidoscoopdag. Dit gebeurde veelal in samenwerking met het Nieuw Archief voor Wiskunde en Pythagoras. Ter ondersteuning van de PR-activiteiten werd promotiemateriaal gebruikt bestaande uit de KWG-poster, WG-folder, en WG-ansichtkaarten.

3.1.7 Landelijke taakgroep wiskunde PR

Deze groep bestaat uit Jan van de Craats (OU en UvA), Vincent Jonker (Freudenthal Instituut, UU), Marian Kollenveld (NVvW), Tom Koornwinder (UvA), Klaas Landsman (vanaf okt. '06, RU), Mark Peletier (tot sept. '06, TUE) en Chris Zaal (UvA), en opereert onder auspiciën van het KWG. Adviserend lid is Carl Koppeschaar (hoofredacteur van Kennislink, www.kennislink.nl/web/show?id=134109). Tom Koornwinder fungeert als contactpersoon voor de taakgroep. De groep beschikt sinds 1 december 2004 over een parttime (0.2) PR-medewerker (Ionica Smeets)

die tot taak heeft actief nieuws te vergaren op het gebied van wiskunde en haar toepassingen, en dit nieuws te redigeren en onder te brengen bij de website van Kennislink, de Wiskunde Persdienst en andere nieuwskanalen (kranten, tijdschriften, media). Verder worden via de taakgroep de werkzaamheden voor Kennislink Wiskunde (www.kennislink.nl/web/show?id=100552) gesponsord van Alex van den Brandhof (redacteur van de vakpagina Wiskunde) en van Guido Schmeits (freelance redacteur voor de vakpagina Wiskunde). De genoemde activiteiten worden tenminste tot 1 december 2006 financieel mogelijk gemaakt door de onderzoekscholen Stieltjes en MRI, de Nederlands Vereniging van Wiskundeleraren, het Freudenthal Instituut, het STW-EW programma Wiskunde Toegepast, en het KWG. Vanaf 1 december 2006 heeft de Stichting Compositio een belangrijke bijdrage toegezegd.

3.2 Verslag van de Penningmeester

Wordt tijdens de Algemene Ledenvergadering op 13 april 2007 uitgereikt.

3.3 Verslag van de Kascommissie

Wordt tijdens de Algemene Ledenvergadering op 13 april 2007 uitgereikt.

3.4 Verslag van de Stichting Epsilon

Per 1 januari 2006 heeft de in 2005 opgerichte Stichting Epsilon de uitgeverij Epsilon Uitgaven overgenomen van prof.dr. F. Verhulst. Dit is onder toezicht oog van zo'n 30 belangstellenden bekrachtigd tijdens een feestelijke ceremonie op 26 januari in het Academieggebouw van de Universiteit Utrecht.

Het bestuur van de Stichting bestaat uit dr. G.M. Hek (UvA): voorzitter, dr. S.A.J. Dekkers (RIVM): penningmeester, dr. K.P. Hart (TUD), drs. S. Garst, prof.dr.

J. Oosterhoff (tot medio juli) en dr. A. Sevenster (vanaf medio juli). De eerstgenoemde drie personen vertegenwoordigen het KWG; drs. Garst vertegenwoordigt de NVvW en de twee laatst genoemde personen vertegenwoordigen *beide* verenigingen. Prof.dr. J. Oosterhoff, die veel voorwerk voor de overname had gedaan, is medio juli opgevolgd door dr. A. Sevenster, die grote ervaring in de uitgeverijwereld heeft. Voor de dagelijkse werkzaamheden in de uitgeverij heeft het bestuur een managing director aangesteld in de persoon van drs. C. Boss-Reus, die reeds in dienst was bij de uitgeverij.

De belangrijkste aandachtspunten voor het stichtingsbestuur waren in 2006 de toekomstige continuïteit van de uitgeverij en (het behoud van) de kwaliteit van de uitgegeven en toekomstig uit te geven boeken. Heldere structurering van de dagelijkse werkzaamheden, het moderniseren van de boekhouding en inpassen ervan in de boekhoudkundige structuur van het KWG en het maken van concrete (taken)afspraken met de redacties van de wetenschappelijke reeks en de Zebra-reeks waren de belangrijkste agendapunten in 2006. Dit alles natuurlijk om ook op de langere termijn te kunnen blijven voldoen aan de doelstellingen van de stichting: "het bevorderen van de belangstelling voor, en de beoefening van, de exacte wetenschappen, in het bijzonder de wiskunde en haar toepassingen", voornamelijk door middel van "het uitgeven van laaggeprijsde boeken, tijdschriften en andere publicaties als regel in de Nederlandse taal".

Eind 2006 heeft drs. M.P. Kollenveld, die sinds het begin voorzitter was van de Zebra-redactie, haar taken neergelegd. Zij is opgevolgd door drs. P.M.G.M. Kop (was reeds redactielid) en het nieuwe lid drs. M. Voorhoeve. Bovendien is dr. G.M. Hek in de redactie opgevolgd door dr. G.L.M. Cornelissen.

Geertje Hek, voorzitter Stichting Epsilon

3.5 Verslag van het 42^e Nederlands Mathematisch Congres

Een verslag van dit congres, van de hand van Teun Koetsier, is verschenen in de juni 2006-uitgave van het Nieuw Archief voor Wiskunde, pp. 81–82.

3.6 Verslag van de Inspecteur der Boekery

In 2006 is een totaal van 22 nieuwe werken aan de boekencollectie toegevoegd, voornamelijk bestaande series monografieën, dissertaties en rapporten. Deze werken werden als geschenk of in het kader van ruil ontvangen.

Tijdschrifttruilen die per 2006 gestart zijn:

- Scientia Magna *is ruil met*: University of New Mexico, Math. Dept
- Annals of the University of Craiova : series automation, computers, electronics and mechatronics *is ruil met*: University of Craiova
- International Journal of Applied Mathematics and Computer Science *is ruil met*: University of Zielona Gora

Tijdschrifttruilen die in 2006 gestopt zijn:

- Acta Mathematica Sinica - New series *was ruil met*: Academia Sinica
- Annals of the Institute of Statistical Mathematics *was ruil met*: Institute of Statistical Mathematics (Japan)
- Bulletin of Pure and Applied Sciences *was ruil met*: Bulletin of Pure and Applied Sciences
- East-West Journal of Mathematics *was ruil met*: Chiang Mai University, later Khon Kaen University
- Ganita Sandesh - Journal of Rajasthan Mathematical Society *was ruil met*: Rajasthan Ganita Parishad
- Izvestia Akademii Nauk - Seriya Matematicheskaya *was ruil met*: Rossiiskaya Akademiya Nauk (nog niet van NAW lijst: combi-ruil)
- Journal of M.A.C.T. *was ruil met*: Indian Statistical Institute
- Journal of the Chinese Statistical Association *was ruil met*: Chinese Statistical Association
- Mathematische Semesterberichte *was ruil met*: Westfälische Wilhelms Universität
- Memorie Lincei : Matematica e applicazioni *was ruil met*: Accademia Nazionale dei Lincei
- Monografia / Politechnika Krakowska im. Tadeusza Kościuszki *was ruil met*: Politechnika Krakowska
- Probability and Mathematical Statistics *was ruil met*: Institute of Mathematics, Polish Academy of Sciences

- Pure and Applied Mathematics Sciences *was ruil met*: Pure & Applied Mathematics Sciences

Tijdschriftmutaties:

- Kochi Journal of Mathematics *was*: Memoirs of the Faculty of Science Kochi University, Series A Mathematics

Herman te Riele, Inspecteur der Boekery

3.7 Verslag van de Publicatiecommissie

De publicatiecommissie werd in de herfst van 2000 ingesteld. Zij adviseert het bestuur inzake het publicatiebeleid en de aanstelling van hoofdredacties, en zij adviseert de hoofdredacties inzake alle organisatorische, financiële en technische aspecten betreffende de totstandkoming van de publicaties. De hoofdredacties zijn verantwoordelijk voor de inhoud van de publicaties; het bestuur draagt de algehele en in het bijzonder financiële verantwoordelijkheid.

De commissie bestond op 1 januari 2006 uit Fieke Dekkers, Klaas Pieter Hart (voorzitter), Jan van Mill, Rob Schrauwen en Chris Zaal. De commissie heeft haar werk voornamelijk via e-mail en telefoon afgehandeld.

Het instandhouden van de voorwaarden die nodig zijn voor het voortbestaan van het Nieuw Archief voor Wiskunde in de huidige opzet en van Pythagoras blijft een belangrijke en soms moeilijke taak van de commissie. Net als vorige jaren dragen diverse wiskunde-instituten in het land via instituutslidmaatschappen in natura bij aan de personele lasten en enkele andere grote kostenposten bij de productie en verzending van het Nieuw Archief voor Wiskunde en Pythagoras.

Een blijvend punt van zorg is dat we als KWG alles tot aan de druk en de verzending zelf (willen) doen en dat het hele proces leunt op een paar goede, enthousiaste krachten die dit ieder jaar weer op basis van een tijdelijk contract doen. Het bestuur onderzoekt andere manieren om de medewerkers in dienst te houden en te betalen.

Van het Nieuw Archief voor Wiskunde verscheen in 2006 deel 7 van de vijfde serie. De hoofdredactie bestaat uit Jaap Molenaar en Jaap Top; samen met de enthousiaste en bekwame eindredacteur Derk Pik en een zeer actieve bureauredactie en bladmanager heeft deze ook vorig jaar weer vier fraaie nummers van het Nieuw Archief voor Wiskunde weten uit te brengen. Een groot punt van zorg echter is de kwantiteit en (technische) kwaliteit van de kopij. Doordat er te weinig kwalitatief goede kopij op tijd bij de hoofdredactie binnenkomt, is de inhoud van een nummer pas aan het eind van de productieperiode compleet bij de bureau- en eindredactie; deze moet dan te veel in te weinig tijd doen, hetgeen een zware wissel op de medewerkers trekt. Hierbij dus een oproep aan allen om de redactie te overstelpen met artikelen opdat men gelijkmatig zonder stress aan het Nieuw Archief kan blijven werken.

Van Pythagoras verschenen in 2006 zes nummers, drie in de jaargang 45 en drie in de jaargang 46. Hoofdredacteur Marco Swaen en eindredacteur Alex van den Brandhof hebben samen met hun redactie een mooie jaargang met als thema *Open problemen* (gastredacteur: Jan van de Craats) afgesloten; jaargang 46 heeft als thema *Krommen*. Marco Swaen heeft het hoofdredacteurschap in september overgedragen aan Arnout Jaspers. Pythagoras is financieel gezond, mits derden bereid blijven in de vorm van instituutslidmaatschappen bij te dragen in de kosten van hoofd- en eindredactie.

K. P. Hart, voorzitter Publicatiecommissie

3.8 Verslag van de Nederlandse Onderwijscommissie voor Wiskunde

3.8.1 Samenstelling Commissie De samenstelling van de NOCW is in 2006 veranderd. De commissie bestaat uit de volgende leden (in alfabetische volgorde): F. Beukers, T. Goris, C.P. Hoogland, C.J. de Jonge, R. Kaenders, mevr. M. Kamminga, W. Kleijne, mevr. M. Kollenveld, J. van Maanen, D. Siersma (voorzitter), J. Steenbrink, mevr. M. Steentjes (secretaris), T. Verhoeff (per 1-5-2006 penningmeester), B. Zwaneveld.

3.8.2 Activiteiten in het algemeen De NOCW wil fungeren als platform voor alles wat met de rol van wiskunde in het onderwijs te maken heeft. Enkele leden van de NOCW hebben ook zitting in de vernieuwingscommissie Wiskunde Onderwijs (cTWO), die in overleg een gedetailleerde curriculumbeschrijving voor 2010 zal samenstellen. Ook zijn er leden van de NOCW actief binnen DeltaWis, een

samenwerkingsverband dat initiatieven op het gebied van rekenen en wiskunde wil genereren en coördineren.

3.8.3 Nederlandse Wiskunde Olympiade In 2006 hebben er 2192 leerlingen deelgenomen aan de Nederlandse Wiskunde Olympiade. Op 171 scholen hebben de leerlingen in januari meegespeeld aan de eerste ronde. Dit jaar waren de opgaven in de eerste ronde anders van opzet dan voorgaande jaren. Er waren acht A-opgaven in meerkeuzevorm en vier open B-opgaven. De reacties van zowel docenten als leerlingen op de nieuwe opzet waren positief. De scholenprijs is gewonnen door het Stedelijk Gymnasium Nijmegen. Ruim honderd leerlingen hebben meegedaan aan de tweede ronde die, zoals gebruikelijk, in september in Eindhoven is gespeeld. De prijsuitreiking heeft op 10 november plaatsgevonden in Eindhoven. Naast de betaling van de kosten van deelname aan de Internationale Wiskunde Olympiade door OC&W zijn er verder bijdragen geleverd door Cito, KWG, het tijdschrift Natuurwetenschap en Techniek, NVvW, Saen Options, Stichting Compositio Mathematica en TU Eindhoven.

3.8.4 Internationale Wiskunde Olympiade In 2006 zijn bij de Internationale Wiskunde Olympiade in Slovenië vijf eervolle vermeldingen behaald.

3.8.5 Wiskunde A-lympiade en Wiskunde-B-dag De voorronde van de 18e A-lympiade is op 24 november gehouden en de finale zal plaatsvinden op 16 en 17 maart 2007. De winnaar van de Internationale Wiskunde A-lympiade 2005/2006 is Westfalica (Duitsland) en de winnaar van de Nederlandse A-lympiade van die jaargang is het Milton Peters College (St. Maarten). In dezelfde geest als de A-lympiade is de wiskunde-B-dag opgezet: een wedstrijd tussen schoolteams door middel van Internet. Op 24 november is de achtste editie georganiseerd.

3.8.6 Kangoeroe Wedstrijd De Kangoeroewedstrijd wordt voor Nederland en Vlaanderen georganiseerd door de Stichting Wiskunde Kangoeroe, vanuit de Radboud Universiteit Nijmegen, onder auspiciën van het KWG. De wedstrijd is bestemd voor alle leerlingen vanaf groep 5 van het basisonderwijs en alle leerlingen in het voortgezet onderwijs. In 2006 deden ruim 70.000 leerlingen mee aan de Kangoeroewedstrijd. Er zijn vier verschillende versies: wizKID, wizSMART, wizBRAIN en wizPROF. Voor verdere informatie, zie: www.math.ru.nl/kangoeroe.

3.8.7 Vertegenwoordiging in ICMI Het KWG wordt door het NOCW-lid W.Kleijne vertegenwoordigd in de *International Commission on Mathematical Instruction* (ICMI).
M. Steentjes, secretaris NOCW

3.9 Verslag van de Archivaris

Dit verslag is gelijk aan dat over 2005; zie Ad punt 2 van de Agenda.

3.10 Verslag van de Commissie voor Persoonlijke Archieven van Wiskundigen

3.10.1 Algemeen De archieven onder beheer bij de CPAW, zijn, met uitzondering van Arch. 1 en Arch. 13, geplaatst bij het Rijksarchief in de Provincie Noord-Holland te Haarlem. Aldaar zijn zij voor onderzoek beschikbaar.

Het betreft de volgende archieven: Arch. 2 H.B.A. Bockwinkel (1881-1960); Arch. 3 R. Lijdsman; Arch. 4 G. Röhrman; Arch. 5 W.H.J. van der Stok; Arch. 6 H. Nyon; Arch. 7 L.W. Nieland (1901-1945); Arch. 8 T. van Aardenne-Ehrenfest (1905-1984), C.C.J. de Ridder en P. Ehrenfest jr. (1880-1933); Arch. 9 D.N. van der Neut (1904-1985); Arch. 10 een 60-tal foto's van wiskundigen; Arch. 11 C.G.G. van Herk (1900-1982); Arch. 12 J.H. Wansink (1894-1985); Arch. 14 H. Freudenthal (1905-1990); Arch. 15 D. van Dantzig (1900-1959); Arch. 16 N.H. Kuiper (1920-1994).

Arch. 1 W. Kapteyn (1849-1927) berust bij de bibliotheek van het Museum Boerhaave in Leiden (onder nr. Arch. 371).

Arch. 13 M.J. van Uven (1878-1959) berust nog bij het CWI.

3.10.2 Activiteiten

- Aanvulling van het archief Van Dantzig (arch. 15)
- Inspectie van andere archieven
- Verkenning van de mogelijkheden om een soortgelijke commissie voor infor-

matici op te richten, eventueel in samenwerking met het Nederlands Genootschap voor Informatica (NGI)

- De commissie is in het verslagjaar één keer bijeengewoest en wel op 17 mei.

3.10.3 Samenstelling van de CPAW per 31 december 2006 T. Koetsier (VU) voorzitter, M. Bakker (CWI) secretaris, G. Alberts (RU), D. Beckers (VU), G.J.A.M. Bolten (Rijksarchief Noord-Holland, Haarlem), H.W. Lenstra, jr. (UL)
Miente Bakker, secretaris CPAW

3.11 Verslag van de Sectie Industriële en Toegepaste Wiskunde (www.itw.nl)

3.11.1 Bestuur Het bestuur is als volgt samengesteld: prof.dr.ir. E.R. Fledderus (TNO ICT, TU/e) voorzitter, prof.dr. J.M. Schumacher (UvT), dr. C. Kraaikamp (TUD), dr. R.M.J. van Damme (UT), prof.dr. R.D. van der Mei (CWI, VU), dr. F.P.H. van Beckum (UT) secretaris en penningmeester. Contactpersoon vanuit het KWG-bestuur is dr. V. Rottschäfer.

3.11.2 Symposia ITW organiseert jaarlijks twee symposia. Een is het Najaars-symposium van het KWG, dit jaar gehouden op vrijdag 3 november onder de titel *Wiskunde in Telecommunicatie*. Gastheer was TNO ICT te Delft. Zes wiskundigen, allen werkzaam op het grensvlak tussen wiskunde en de toepassingen, vertelden van de wiskunde die zij toepassen en verder ontwikkelen om de immense en nog steeds toenemende datastromen in telecommunicatienetwerken te kunnen blijven beheersen: Rob Kooij (TNO, TUD), Maurits de Graaf (Thales, UT), George Huitema (TNO, RUG), Jean Paul Linnartz (Philips, TU/e), Benne de Weger (TU/e) en Remco Litjens (TNO). Het tweede symposium, tevens met het karakter van een bedrijfsbezoek, vond plaats aan het KNMI in De Bilt, op vrijdag 21 april. De deelnemers werd een rondleiding geboden langs de meetopstellingen. De voordrachten betroffen niet alleen het gedrag van de atmosfeer (KNMI), maar ook zeebewegingen en kustmorfologie (RIKZ, IMAU). Sprekers waren: Ben Wichers-Schreur (KNMI), Martin Verlaan (RIKZ, TUD), Jan Barkmeijer (KNMI), Henk van den Brink (KNMI), Huib de Swart (IMAU) en Rob van Dorland (KNMI).

3.11.3 ITW-Nieuws Het blad verschijnt thans weer regelmatig.

3.11.4 SWI De Studiegroep Wiskunde met de Industrie (de achtste in Nederland) werd dit jaar gehouden aan de Technische Universiteit Eindhoven, van 30 januari tot 3 februari, waar een aantrekkelijke verzameling vraagstukken werd gepresenteerd en onder handen genomen (www.win.tue.nl/swi2006). ITW is de wiskundigen van de TU/e erkentelijk voor de organisatie van deze geslaagde activiteit (die een recordaantal deelnemers trok), voor het uitbrengen van de rapportenbundel en voor de bijdrage die dit alles levert aan de beeldvorming van wiskunde in Nederland. In 2007, eveneens in week 5 (29 januari tot 2 februari), vindt de SWI plaats aan de Universiteit Utrecht (www.math.uu.nl/swi2007).
F.P.H. van Beckum, secretaris Sectie ITW

Van de KWG-ledenadministratie

Leden van het KWG die ook lid zijn van de Nederlandse Vereniging van Wiskundeleraren betalen een gereduceerde contributie van € 50 per jaar (in plaats van € 70). Indien u tot deze groep behoort, maar toch € 70 betaalt, wordt u verzocht dit door te geven aan Mirjam Worst (admin@wiskgenoot.nl), Uitgeverij Ten Brink, Postbus 41, 7940 AA Meppel, tel. 0522-855175.

Remco van der Hofstad

*Department of Mathematics and Computer Science
Eindhoven University of Technology, P.O. Box 513
5600 MB Eindhoven, The Netherlands.
rhofstad@win.tue.nl*

Inaugural Lecture

Random networking: between

With the arrival of the Internet, a good understanding of networks has become important for everyone. Network theory, which originated in the eighteenth century with Euler, and in the nineteenth century with Markov, has until recently concentrated its attention mainly on regular types of graphs. In his inaugural lecture, Remco van der Hofstad shows us a shift towards highly irregular graphs having vertices with extremely high degrees. He argues that this irregularity is a main characteristic of real life networks such as the Internet, social networks and networks describing biophysical phenomena. On January 1, 2005, Remco van der Hofstad was appointed full professor in Probability at the University of Eindhoven.

Who has not, at some point, exclaimed: isn't it a small-world? Others may have heard about 'six degrees of separation'. These phrases are all about the nature of social relations. The notion of six degrees of separation originated as the title of a John Guare play. In it, one of the main characters says:

"Everybody on this planet is separated only by six other people. Six degrees of separation. Between us and everybody else on this planet. The president of the United States. A gondolier in Venice. . . It's not just the big names. It's anyone. A native in the rain forest. [..] An Eskimo. I am bound to everyone on this planet by a trail of six people. It is a profound thought."

Similarly, it is claimed that each Dutch citizen is at most five handshakes away from the Dutch queen. To put these facts in a more mathematical framework, we reformulate social relations in terms of graphs. Its elements correspond to the people under

investigation, and two individuals are connected when they share a certain social relation, such as knowing each other on a first name basis or having shaken hands. The phrase six degrees of separation then means that any pair of individuals is connected by a chain of at most six intermediaries. This was first empirically observed by the sociologist Stanley Milgram [13].

Real Networks

In the last decade, real networks have drawn tremendous attention in scientific disciplines ranging from biology, telecommunications, economics, linguistics, to sociology. Examples are the World Wide Web (WWW), the Internet, networks describing e-mails in a population, but also protein interaction networks, food webs, and collaboration networks. The elements of the WWW are web pages, and there is a (directed) connection between two web pages when the first links

to the second. In a collaboration network, the elements are scientists, and two scientists are connected when they have a joint publication. In the Internet, the elements are computers or routers, and two computers are connected when there is a physical cable linking them. Thus, while the WWW is virtual, the Internet is physical. As you can see, these examples are very different in nature!

The study of networks has boomed in the period between 1995 and now, and this *must* have a reason. Of course, computer speed has dramatically increased in the past decade and network data sets have become publicly available on the Internet. This, however, cannot be the whole explanation of the rapid growth of interest. Large data sets are just huge collections of numbers, which are only of interest when one can uncover some of the structure behind them!

Many networks turn out to share two properties: they are small worlds and scale-free, as I will explain in more detail below. Both properties tell us something about the structure of the networks under consideration. The structure of networks is particularly important for processes living on these networks. For example, the spread of a virus is affected not only by the characteristics of its elements, but also by the structure of social networks, such as the traveling habits of individuals, as the

order and chaos



Remco van der Hofstad

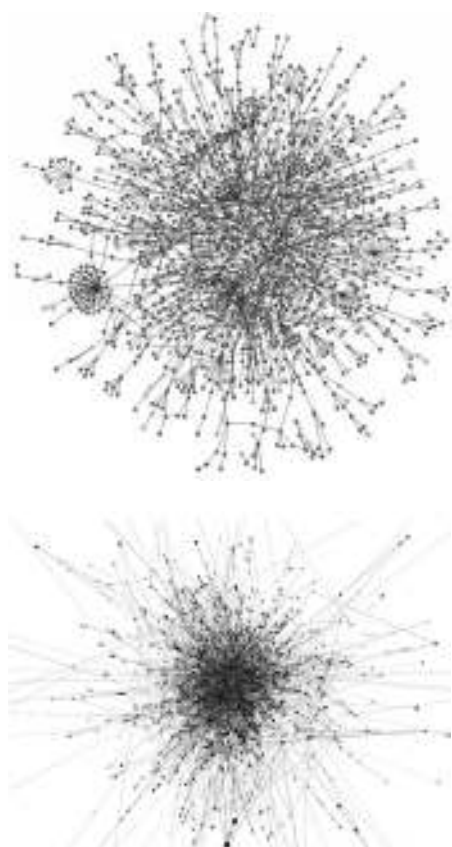


Figure 1 Yeast protein interaction network taken from [10], and the Internet topology in 2001 taken from www.fractalus.com/steve/stuff/ipmap, also reprinted on the front cover of this issue of the *Nieuw Archief voor Wiskunde*

recent SARS epidemic has shown. The spread of HIV depends sensitively upon properties of the network of sexual contacts. The ‘success’ of computer viruses and worms is influenced by how well they can be transmitted from one computer to the next, which, in turn, depends sensitively on the structure of the Internet and e-mail networks. We all know examples of successful computer viruses in the recent past. Their economical damage partly explains the interest in the study of the network structure, but there is more to it. Interestingly, networks turn out to be different from network models that have been studied over the past few decades, and the diverse networks above have many unexpected common features. For artist’s impressions of some networks see Figure 1.

Power laws and degrees

While many real networks appear to be highly chaotic, there is some hidden order in them: they tend to be small worlds and are scale-free. A network is a *small world* when distances in it are small. The phrase ‘scale-free networks’ cannot be understood so easily, and I will spend some time to explain it.

For an element of a network, its *degree* is the number of other elements it is connected to. Most networks have large fluctuations in the degrees of their elements. While most

elements have small degrees, there also exist elements with high, and even extremely high, degrees. For example, one cannot be surprised that in the sexual network of the eighteenth century, Casanova would appear as an element with an unprecedented degree!

The role of Casanova in the collaboration network in mathematics is played by Paul Erdős, who has the staggering amount of over five hundred co-authors. When studying graphs, one is bound to run into Erdős, and he will feature more prominently later on. Erdős was quite a special mathematician, and his deep love of mathematics has been recorded in popular books as well as a movie.

There are also other networks with such special elements. The protein p53 is believed to play a special role in protein interaction networks, and is even related to the occurrence of cancer. In social networks, there are these rare individuals who seem to know everybody. In the WWW, Google now attracts zillions of links!

The common fact about these unusual elements is that they are highly interconnected, that is, they have a high *degree*. These highly connected elements are sometimes called *hubs*. The hubs in networks are the Erdőses, the Googles, the Casanovas, or the other special elements that are present. While the hubs play a special role in networks, the fact that

networks have them turns out not to be special at all. Most networks do!

One can imagine that these elements are quite important in applications. If one wishes to attack the Internet, the impact of attacking a router with a gigantic degree is much larger than that of attacking my laptop. To spread a rumor quickly, one should tell it to a person who happens to know everyone! It is well-documented that the large number of AIDS victims in the west is to a large extent due to the high promiscuity of one of the first Westerners that was infected (see e.g. [2]).

In summary, many networks have highly connected elements or hubs playing a central role in their functionality. This points us to the study of degrees in networks. In many networks, the degrees are scale-free, meaning that they have no typical size. Not all properties are such. For example, for Dutch men, the average height is about 1.83, and while differences in height exist, almost all Dutch men are in between 1.40 and 2.10. Thus, we can think of 1.83 as being the *typical height*. Sometimes such a typical size does not exist. For example, when studying the wealth in populations, already Pareto observed a huge variability [12]. Most individuals do not earn so much, but there are these rare individuals that earn a substantial part of the total income. Pareto's Law was best known under the name '80/20 rule', indicating, for example, that 20 percent of the people earn 80 percent of the total income. This law appears to be true much more generally. For example, 20 percent of the people own 80 percent of the land, 20 percent of the employees earn 80 percent of the profit of large companies, and maybe even 20 percent of the scientists write 80 percent of the papers. In each of these cases, no typical size exists due to the high variability present, which explains why these properties are called scale-free.

A network is called *scale-free* when its degrees have no typical size. While many elements only have few connections, the hubs have extremely many connections. The above is a more informal description, but there is a beautiful mathematical description as well: scale-free networks have power-law degree sequences. This needs further explanation!

The *degree sequence* of a network is the vector consisting of the number of elements in the graph with some specified degree, for all of the possible degrees. Thus, the degree sequence $\{f(k)\}_{k=1}^{\infty}$ is such that $f(k)$ is the number of elements with degree equal to k . This explains the meaning of one part of the phrase power-law degree sequences. We now

turn to the other part, the power laws.

Mathematicians are always drawn to simple, yet fascinating, relations, as we believe they explain the rules that gave rise to them. A *power-law relation* between two variables means that one is proportional to a power of the other. In a formula, the variable k and the characteristic $f(k)$ are in a power-law relation when $f(k)$ is proportional to a power of k , that is, for some τ and C ,

$$f(k) = Ck^{-\tau}. \quad (1)$$

Intuitively, when an 80/20 rule holds, a power law is hidden in the background! Power-law relations are one-step extensions of linear relations. Conveniently, even when one does not understand the mathematical definition of a power law too well, one can still observe them in a simple way: in a log-log plot, power laws are turned into straight lines! Indeed, taking the log yields

$$\log f(k) = \log C - \tau \log k,$$

so that $\log f(k)$ is in a linear relationship with $\log k$, with slope equal to $-\tau$.

Power laws play a crucial role in mathematics as well as in many applications, and have a long history. Zipf [14] was one of the first to find one in the study of the frequencies of occurrence of words in large pieces of text. He observed that the number of occurrences of words is roughly inversely proportional to its rank in the frequency table of all words. This is called *Zipf's Law*.

Already in the twenties, several other examples of power laws were found. Lotka [11] investigated references in the Chemical Abstracts in the period 1901-1916, and found that with $f(k)$ denoting the number of scientists appearing in k entries, (1) holds, where τ now is close to 2. This is *Lotka's Law*.

In both examples, no typical size exists. For Zipf's Law, in most texts, there exist words (often 'the') that occur very often, while most of the words are only used a couple of times. Similarly, most scientists were only referred to once in Lotka's Law, but there exist scientists of whom many papers were cited.

Scale-free networks

A *scale-free network* is such that its degrees are scale-free. As a result, a large variability in degrees exists: there exist hubs with very high degrees.

More formally, with $f(k)$ equal to the number of elements with degree equal to k , we have that (1) holds, and the graph has a power-law degree sequence. For example,

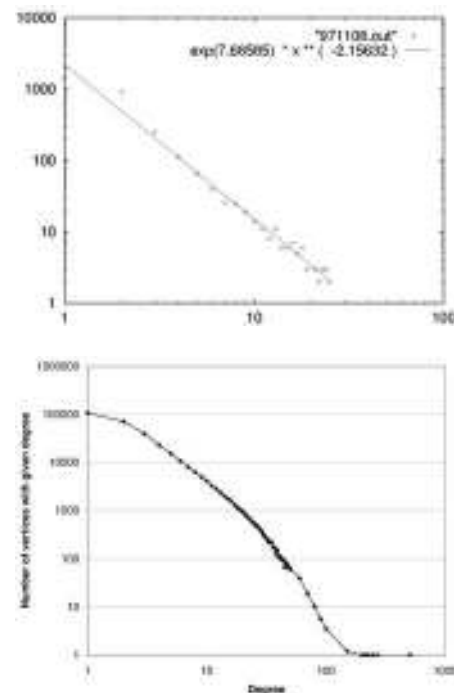


Figure 2 The degree sequence of the graph of Autonomous Systems in Internet in 1997 taken from [7] and of the collaboration graph among mathematicians taken from www.oakland.edu/enp

the degree sequences of the graph of autonomous systems in the Internet in 1997 and the collaboration graph of mathematicians are given in Figure 2, in log-log scale. While the log-log plots are not precisely equal to straight lines, they are quite close. For the collaboration graph, this means that the number of mathematicians with a given number of collaborators k is proportional to k to a certain power: we again find a power law in scientific productivity as Lotka did 80 years ago!

The first to realize that many networks are scale-free were Réka Albert and Albert-László Barabási, who dubbed such networks scale-free networks, igniting research in various disciplines, and, admittedly, causing a bit of a hype. For example, read the following quote about Barabási [5]: "What do the proteins in your body, the Internet, a cool collection of atoms and sexual networks have in common? One man thinks he has the answer, and it's going to transform the way we view the world ..." This may be a bit too much, but the realization that similar network phenomena occur in social sciences, telecommunications and biology raises many modeling questions. The proposed models, in turn, lead to interesting mathematics. This is an appealing combination!

Applications do sometimes make a mathematician's life easier. Indeed, when asked for what I do professionally, the response "I am a

mathematician” does not work so well. “Ah, I was always terrible at math in high school!” is the most frequent answer, and I keep on being surprised by the pride with which such a reply is uttered! Applications are a good way of explaining why we mathematicians do what we do. In truth, many mathematicians are guided by curiosity, by puzzles, yes, even by passion! Personally, I derive the most joy from a beautiful mathematical proof, an unexpected similarity between seemingly unrelated problems, or on finding a satisfactory explanation for a certain phenomenon. Such occasions are the icing on the cake!

Returning to the title of my speech, ‘Random networking: between order and chaos’, we have now seen many networks that are quite chaotic, yet share an intriguing order in being small worlds and scale-free. We now turn to randomness, which, as you may imagine, is inescapable for a probabilist such as me!

Modeling complexity by randomness

One cannot explicitly describe the structure of the network of all social relations on this planet with its size of about six billion people, or of the WWW, which has an estimated size of several billion web pages. Foremost, this is due to the fact that the data are not available, but also because the data are just too much to comprehend. This situation is well known in several disciplines, and most profoundly in particle systems. Most particle systems consist of around 10^{23} particles, and it is infeasible to describe the motions and locations of these particles explicitly. This fact has been realized a long time ago, and was resolved by introducing randomness, leading, in the case of interacting particles, to the theory of statistical mechanics. Boltzmann and Gibbs were the first to use this concept, which, at the time of Boltzmann, lead to serious opposition.

The main advantage of statistical mechanics is that one only needs to describe the local interactions between molecules, and these local rules enforce global behavior. Perhaps surprisingly, randomness does not seem to play any role when observing a glass of water. Indeed, in huge systems, random fluctuations are washed out, and only averages remain. Yet, a statistical mechanical model can predict global behavior, such as the existence of a phase transition separating the phases between water and ice. Thus, statistical mechanics is all about relating microscopic properties of molecules to the macroscopic properties of the material in question. In summary, we model complexity using ran-

domness. Since the world around is getting ever more complex, probability is bound to play an increasingly important role.

A similar approach can be taken for complex networks. Their size makes their complete description utterly impossible. Therefore, one could suffice by describing how many elements the network has, and by which probabilistic rules elements are connected to one another. This leads us to consider *random graphs* as models for real networks, and introduces *randomness* in network theory.

Erdős-Rényi random graphs

The field of random graphs was established in the late fifties and early sixties of the last century. While there were a few papers appearing around (and even before) that time, one paper is generally considered to have founded the field [6]. The authors Erdős and Rényi studied the simplest imaginable random graph, which is now named after them. Their graph has n elements, and each pair of elements is independently connected with a fixed probability. When we think of this graph as describing a social network, then the elements denote the individuals, while two individuals are connected when they know one another. The probability for elements to be connected is sometimes called the *edge probability*. In their seminal paper [6], Erdős and Rényi clearly showed their predictive powers: “It seems to us further that it would be worth while to consider besides graphs also more complex structures from the same point of view, i.e. to investigate the laws governing their evolution in a similar spirit. [...] In fact, the evolution of graphs can be seen as a rather simplified model of the evolution of certain communication nets ...” In [6], Erdős and Rényi investigate basic properties of their random graph when their size is large, for various values of the edge probability. It turns out that the Erdős-Rényi random graph exhibits a phase transition, similarly to the water-ice transition. Indeed, when the average number of neighbors per element is less than one, the connected components are tiny and scattered, even for large graphs. When it is larger than one, on the other hand, a giant component emerges containing a number of elements proportional to the size of the graph.

The phase transition for the random graph is clearly demonstrated in Figure 3. It shows realizations of an Erdős-Rényi random graph of size 100, with an average number of neighbors of $1/2$ and $3/2$, respectively below and above the critical value 1. The components are drawn in blue, ordered in size from dark

to light. While there is little difference in the relative sizes of the small components, the largest components are quite different indeed! In many systems, at the value of the phase transition peculiar behavior can be observed that is quite different from the behavior in either the sub- or the supercritical regimes. For example, in the water-ice transition, precisely at 0°C , water and ice can co-exist. On the critical Erdős-Rényi random graph, the largest component has approximate size $n^{2/3}$, i.e., the number of elements to the power $2/3$.

While the Erdős-Rényi random graph is a beautiful model displaying fascinating scaling behavior for large graphs and varying edge probabilities, its degrees are not scale-free, rendering it unrealistic as a network model. Indeed, its typical degree size is the average degree, and there is little variability in its degrees. In particular, no hubs exist. Therefore, to model networks more appropriately, we are on the hunt for scale-free random graph models! Remarkably, the fact that the Erdős-Rényi random graph is not a suitable network model

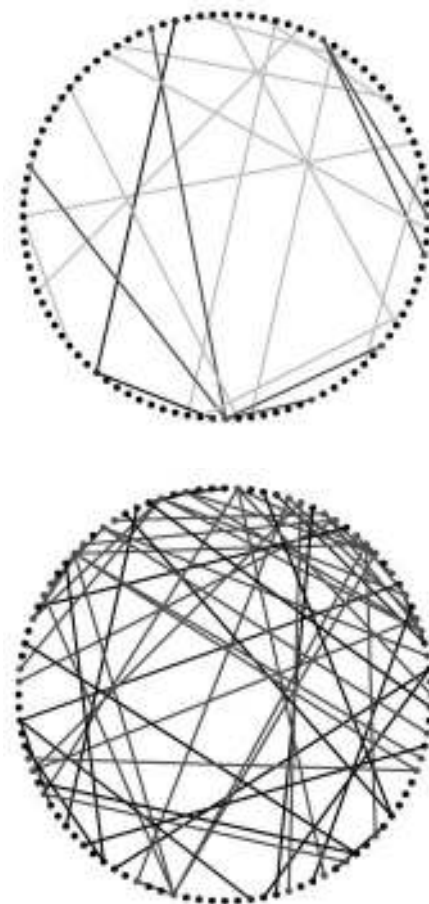


Figure 3 Two realizations of Erdős-Rényi random graphs with 100 elements and edge probabilities $1/200$, respectively $3/200$

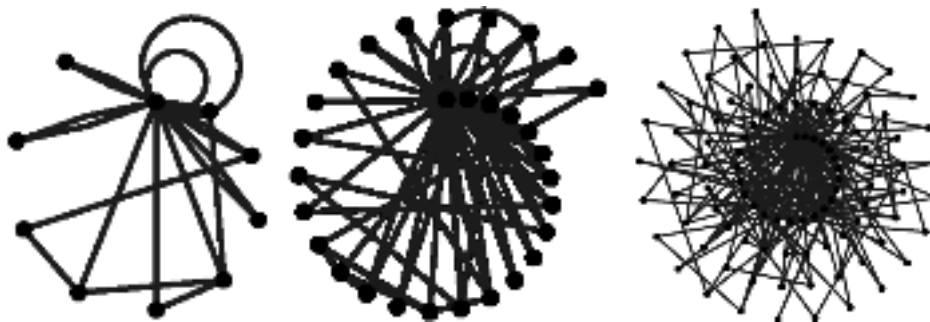


Figure 4 Preferential attachment random graphs of sizes 10, 30 and 100

was already foreseen by the masters themselves [16]: “Of course, if one aims at describing such a real situation, one should replace the hypothesis of equiprobability of all connections by some more realistic hypothesis.”

How do power laws arise then in networks, and what can we learn from that?

Preferential attachment

When it was realized that the Erdős-Rényi random graph is not an appropriate network model, several models were invented that adapt it in such a way that power-law degree sequences do arise. These models describe networks, in some sense, quite satisfactorily. However, they do not explain how the networks came to be as they are. A possible explanation for the occurrence of scale-free behavior was given by Albert-Barabási [3].

Most real networks grow. For example, the WWW has increased from a few web pages in 1990 to an estimated size of a few billion now. *Growth* is an aspect that is not taken into account in Erdős-Rényi random graphs, but it would not be hard to reformulate them as a growth process where elements are successively added, and connections are added and removed. Thus, growth by itself is not enough to explain the occurrence of power laws. However, viewing real networks as evolving in time does give us the possibility to investigate just how they grow.

So, how do real networks grow? Think of a social network describing a certain population in which a newcomer arrives, increasing it by one element. He or she will start to socialize with people in the population, and this process is responsible for the connections to the newly arrived person. In an Erdős-Rényi random graph, the connections to the newcomer will be spread uniformly over the population. Is this realistic? Is the newcomer not more likely to get to know people who are socially active, and, therefore, already have a larger degree? Probably so! We do not live in a perfectly egalitarian world.

Rather, we live in a self-reinforcing world, where people who are successful are more likely to become even more successful! Therefore, rather than equal probabilities for our newcomer to acquaint him- or herself to other individuals in the population, there is a bias towards individuals who already know many people. When we think of the degree of elements as describing the wealth of the individuals in the population, we live in a world where the rich get richer!

This phenomenon is now mostly called *preferential attachment*, and was first described informally by Albert and Barabási [3]. While the above explanation is for social networks, also in other examples some form of preferential attachment is likely to be present. For example, in the WWW, when a new web page is created, it is more likely to link to an already popular site, such as Google, than to my personal web page. For the Internet, it may be profitable for new routers to be connected to highly connected routers, since these give rise to short distances.

Phrased in a more mathematical way, preferential attachment models are such that new elements are more likely to attach to elements with high degree compared to elements with small degree.

For example, we can successively add new elements with a fixed amount of connections to the older elements equal to m , each connection to an older element with a probability which is proportional to the degree of the older element plus a constant δ . Interestingly, preferential attachment gives rise to scale-free random graphs, where the power-law degree exponent equals $\tau = 3 + \frac{\delta}{m}$ (see e.g., [4] for the case where $\delta = 0$).

Preferential attachment offers a convincing explanation as to why power-law degree sequences occur. As Barabási puts it [2]

“...the scale-free topology is evidence of organizing principles acting at each stage of the network formation. [...] No matter how large and complex a network becomes, as

long as preferential attachment and growth are present it will maintain its hub-dominated scale-free topology.”

On the other hand, preferential attachment cannot be the only mechanism describing network growth. For example, two people living in the same city are more likely to know each other than people living in a different continent. Thus, there is bound to be some dependence of real networks on geometry, which is not taken into account so far. A random network in which geometry plays a crucial role is percolation.

Percolation

Percolation can best be described as a random maze or labyrinth. Imagine a square in which an ant is trying to go from the left part where his nest is, to the right part where its food supply is. The labyrinth is made out of a collection of walls or obstacles, which the ant cannot pass through. Thus, its task is to walk past the walls from its nest to the food (and then back, naturally).

Depending on the locations of the walls, the nest and the food, the ant may be able to reach the food or not. Of course, there are instances where there are walls all around the nest or the food, and then the poor ants will die of starvation. This will particularly happen when there are many walls. On the other hand, it is possible that there is a passage way, and then the clever ant will always find it, see Figure 6.

We randomly position the walls, each possible location having a wall with some fixed probability p , and no walls with probability $1 - p$. Then, intuitively, when there are few walls, i.e., when p is small, the ant will be able to go to the food, while, when there are many walls, i.e., when p is large, the ant will likely not be able to. Now we make the task for the ant even more daunting by making the labyrinth very large. Then it turns out that there again is a phase transition. Indeed, when $p < 1/2$, with high probability, the ant will get to its food, while for $p > 1/2$, it will

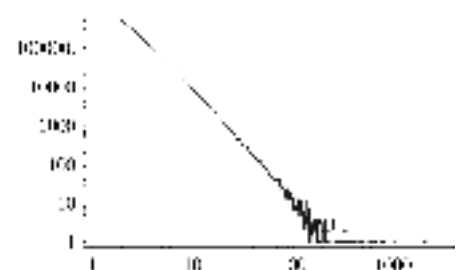


Figure 5 The degree sequences of a preferential attachment random graph of size 300,000 in log-log scale

not be able to. For $p > 1/2$, percolation occurs, in the sense that the collection of walls contains one dominant connected piece, which basically covers the entire square. For $p < 1/2$, on the other hand, the connected components of walls remain small, and do not obstruct the ant too much.

The most interesting phenomena occur close to this critical value. For example, for p slightly smaller than $1/2$ and a huge labyrinth, we can make the walls very small in such a way that the extent of the labyrinth remains fixed. In this case, the poor ant is having a harder and harder time to arrive at the food, even though we know that, with very high probability, it should be able to get there.

The above random labyrinth is an instance of percolation, a subject in probability theory and theoretical physics that has drawn enormous attention in the past decades due to the fact that the model is simple to state, while it is mathematically extremely rich. It is a model for porous media, where the materials consist of holes and substance. Think of a porous stone. When we pour water on it, will its center become wet?

While the above example of the ant in the labyrinth is intrinsically two-dimensional, the problem of wetting the core of a porous stone is clearly three-dimensional. There is no problem of posing the percolation problem in three dimensions. In this case, the walls are small square pieces of material, and ants cannot pass through these walls, while they can pass when a wall is absent (luckily, ants can climb walls). Again, we can think about an ant trying to work its way through this three-dimensional porous structure, such as a termite in a trunk. Many of the above properties, such as the existence of a critical percolation value for p , remain valid, even though, interestingly, it is not known exactly what this critical value is.

Realistic porous media are clearly restricted to two or three dimensions, but it is also possible to envision percolation in higher dimensions. Mathematically, considering higher dimensions does not cause any complications, and percolation can be, and has been, introduced and studied in general dimensions. It is believed that the qualitative behavior of percolation, particularly close to criticality, is quite different in different dimensions. For example, in high dimensions, the critical behavior of percolation on finite tori is similar to the one on the Erdős-Rényi random graph (see [9] and the references therein).

While percolation is a thoroughly investigated subject, many aspects of it are still ill

understood, and it is likely to remain a source of inspiration for years to come. An excellent mathematical source is the book by Grimmett [8], who quite successfully conveys his fascination for percolation, for example in his quote: "Percolation is sexy!"

The road ahead

While percolation is a beautiful example of a random network that naturally incorporates geometry, it is not a good network model. Indeed, percolation violates the two key phenomena that networks display, the small-world and the scale-free properties. Indeed, distances between far away elements are large, and the degrees are bounded by 4 in dimension 2 and 6 in dimension 3. How to deal with geometry in truthful scale-free network models remains a mystery to this day!

There are more riddles to be resolved though ... For example, networks tend to be clustered, which is just a difficult way of expressing that my friends tend to know one another. Clustering creates triangles in networks, and, even stronger, communities of individuals all connected to each other. How can we model these appropriately, and what is their relation to the scale-free nature of networks?

The preferential attachment models that are currently used predict that the elements with the largest degrees are the first ones present. While this may be true for some networks, in reality this is not always the case. Google is a late arrival on the WWW, but has become one of the most successful web site. How can we take the fitness of elements into account in the growth of networks?

The above research questions can be modeled in various ways. In fact, already for scale-free graphs there are numerous different models available, all of which are naturally caricatures of reality. How can we be sure that the conclusions drawn from these models have any predictive power for real networks? That is, if we change the model slightly, will the conclusions not change dramatically? It is here that the philosophy of statistical physics proves useful again. In this philosophy, universality plays a fundamental role. Universality states that independently of how we model a phenomenon locally, the global picture agrees, and is a well-established notion in theoretical physics, even though its mathematical foundations are often less clear. Models for real networks should be universal, being caricatures of reality in the first place! For example, for different network models having identical degrees, are the dis-

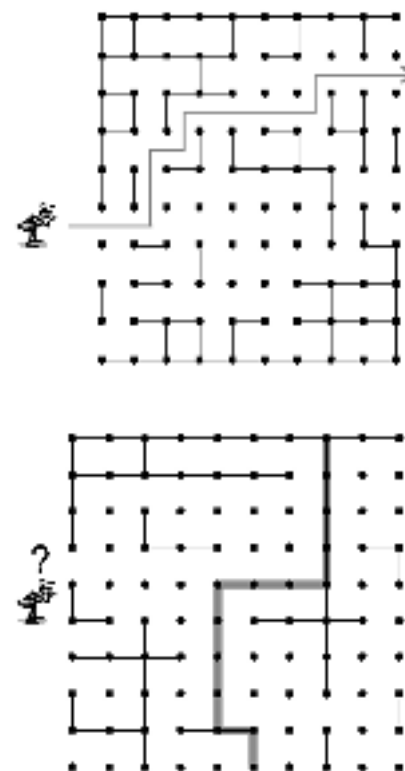


Figure 6 Two random labyrinths where an ant is trying to cross from the left to the right. It succeeds at the top, but not at the bottom.

tances between elements similarly behaved? The above are just a few examples of challenges that are currently being taken up, or will be so in the near future. One of the truly beautiful aspects of networking is its *interdisciplinary nature*. Duncan Watts, with Barabási one of the pioneers of networking, says about this [15]: "But in the world of networks, sociologists, economists, mathematicians, computer scientists, engineers and physicists all have something to offer each other, and much to learn." Different scientific disciplines often have a hard time talking to one another, so this clearly poses a challenge!

Foremost, I hope and expect that the study of networks will lead to interesting mathematics. Mathematics is a beautiful discipline leading to extremely challenging riddles or puzzles, to be resolved using logic only. Solving these puzzles requires considerable creativity. While mathematics has established itself as a useful science, many mathematicians also have a very clear idea of beauty. Some proofs, which Erdős used to call 'The proofs from the Book', are astonishingly pretty, and the prettiest have been collected in [1]. In this sense, math is all about creativity and beauty, and is thus not so different from the arts. Many mathematicians are truly passionate about their work, and strive for

the prettiest proof imaginable. Unfortunately, sometimes these are hard to find. In the past, the trend in science has to a large extent been towards applications, and recently even strongly towards valorization. While the economics of science are clearly important, I feel that we should not lose track of the more fundamental aspect of research, bearing in mind that what may seem to be fundamental now,

may have important applications in the (near?) future.

From the recent success of Sudoku, I think that many among us share a passion for puzzles and logic! I fear that the image of mathematics of the general audience is rather different from the one described in this article, which at least partly explains the lack of interest of students in this beautiful field. I

hope that, with a combined effort, the image of math can be improved and the interest in it revived! 

Acknowledgement This work was supported in part by Netherlands Organisation for Scientific Research (NWO). I thank Marko Boon for creating the figures, and Mark Holmes for useful comments on an earlier version.

References

- 1 M. Aigner and G.M. Ziegler, *Proofs from The Book*, Springer-Verlag, Berlin, third edition, 2004.
- 2 A.-L. Barabási, *Linked: The New Science of Networks*, Perseus Publishing, Cambridge, Massachusetts, 2002.
- 3 A.-L. Barabási and R. Albert, 'Emergence of scaling in random networks', *Science* **286**(5439) (1999), pp. 509–512.
- 4 B. Bollobás, O. Riordan, J. Spencer, and G. Tusnády, 'The degree sequence of a scale-free random graph process', *Random Structures Algorithms* **18**(3) (2001), pp. 279–290.
- 5 D. Cohen, 'All the world's a net', *New Scientist* **2338** (2002).
- 6 P. Erdős and A. Rényi, 'On the evolution of random graphs', *Magyar Tud. Akad. Mat. Kutató Int. Közl.*, **5** (1960), pp. 17–61.
- 7 C. Faloutsos, P. Faloutsos, and M. Faloutsos, 'On power-law relationships of the internet topology', *Computer Communications Rev.* **29** (1999), pp. 251–262.
- 8 G. Grimmett, *Percolation*, Springer, Berlin, 2nd edition, 1999.
- 9 M. Heydenreich and R. van der Hofstad, 'Random graph asymptotics on high-dimensional tori', To appear in *Commun. Math. Phys.*
- 10 H. Jeong, S.P. Mason, A.-L. Barabási, and Z.N. Oltvai, 'Lethality and centrality in protein networks', *Nature* **411**(6833) (2001), pp. 41–42.
- 11 A.J. Lotka, 'The frequency distribution of scientific productivity', *Journal of the Washington Academy of Sciences* **16**(12) (1926), pp 317–323.
- 12 V. Pareto, *Cours d'Economie Politique*, Droz, Geneva, Switzerland, 1896.
- 13 J. Travers and S. Milgram, 'An experimental study of the small world problem', *Sociometry* **32** (1969), pp 425–443.
- 14 G.K. Zipf, 'Relative frequency as a determinant of phonetic change', *Harvard Studies in Classical Philology* **15** (1929), pp 1–95.
- 15 D. Watts, *Six degrees. The science of a connected age*, W.W. Norton & Co. Inc., New York, 2003.
- 16 D. Watts, *Six degrees. The science of a connected age*, W.W. Norton & Co. Inc., New York, 2003.



Sara van de Geer

Seminar für Statistik, ETH Zürich

LEO D 2

8092 Zürich

Zwitserland

geer@stat.math.ethz.ch

Column Wiskundigen in den vreemde

De stemming in Zürich

Sara van de Geer verruilde na zes jaar haar hoogleraarschap aan de Universiteit Leiden voor eenzelfde positie aan de Eidgenössische Technische Hochschule Zürich (ETH). Na een lange carrière als statistisch onderzoeker bij diverse Nederlandse en buitenlandse instituten is ze met haar gezin naar Zwitserland vertrokken. Hoe is haar deze grote stap vergaan?

“Heel wiskundig Duitsland is de komende maanden uit de running, want iedereen is onderzoeksvoorstellen aan het schrijven.” Dit werd mij in Oberwolfach verzekerd door een vertwijfelde deelnemer aan de workshop. Na zo’n verzuchting vind ik dat ik erg geboft heb met mijn baan bij de ETH in Zürich. In Zwitserland loopt de situatie (nog) niet zo uit de hand. In het instituut waar ik werk heerst een als vanzelfsprekende onderzoekssfeer. De vraag waar het nu eigenlijk om gaat in de wetenschap lijkt niemand te verontrusten. Maar nee, helemaal kalm is het niet. De president van de ETH, nog maar net benoemd, is door zijn eigen benoemingscommissie al weer afgezet. Het departement D-Math houdt bijna wekelijks vergaderingen in verband met Zeer Belangrijke Nieuwe Ontwikkelingen. Er wordt gestemd of er gestemd zal worden, zelfs gestemd of een bepaalde kleinigheid in de notulen moet, en indien niet, of deze stemming dan wel in de notulen moet. We zitten midden in een veranderproces, en de democratie kraakt in zijn voegen.

Zo werden de Zwitsers afgelopen zondag weer eens naar de stembus geroepen. De vraag of beide talen Frans en Engels op de lagere school in het pakket mogen blijven, werd gelukkig met een volmondig ja beantwoord. Vroeg met buitenlandse talen beginnen levert zijn vruchten af. College gaf ik eerst in het Duits, maar bij nader onderzoek bleken mijn studenten unaniem voor het Engels te stemmen. Dat is een stuk gemakkelij-

ker! Bovendien komen we zo tegemoet aan een van de wensen van onze ex-president.

De studentenaantallen zijn geen reden tot zorg. Of studenten wiskunde ‘leuk’ vinden is net zoets als Gerard Reves vraag aan zijn lezers: ‘leuke’ gedichten, vindt U die leuk? Toen ik hier pas werkte, werd ik uitgenodigd voor een interview voor het mapje *Vrouwen aan de ETH*. Tot mijn schrik stelde de interviewer het kopje voor: ‘Es macht spass und lohnt die Mühe’. Misschien was ik nog teveel onder de invloed van het Nederlandse klimaat, want ik dacht: hoe kan je nou verkopen dat iets dat moeite kost leuk kan zijn?

Veel dingen zijn hier natuurlijk niet anders dan overal elders. Er is de gebruikelijke controverse tussen zuiver wiskundigen en toegepast wiskundigen. Langzaam begint het echter door te dringen dat we tot elkaar veroordeeld zijn (want het idee om in kleine stukjes gehakt bij andere ‘scholen’ ondergebracht te worden lokt niemand). De verhuizing van het *Seminar für Statistik* naar het hoofdgebouw (waar de rest van D-math zit) was gepland voor 2005. Ik pakte dus de dozen met *Annals of Statistics* nog maar niet uit. Verhuisd zijn we nog steeds niet, en de *Annals* verblijven prima in die dozen. Het nieuwe loonsysteem is geïntroduceerd bij de ETH, inclusief functioneringsgesprekken en prestatiebeoordelingen. En D-math heeft met algemene stemmen besloten iedereen een A (=hoogste beoordeling) te geven.

Collega-hoogleraren: kom naar Zürich! kopte het artikel van Jan van Mier in het NRC Handelsblad. Is het hier nou zo leuk? ’s Ochtends stap ik uit de *S-Bahn*, ontwijk een tiental trams en spring in de *Poly-Bahn*. Die brengt me dan binnen de minuut op de werkplek, met uitzicht over Zürcher See en besneeuwde Alpen. En dan ga ik gewoon aan het werk.



Gillien Geuze

Mathematisch Instituut
Universiteit Leiden
geuze@math.leidenuniv.nl

Bart de Smit

Mathematisch Instituut
Universiteit Leiden
desmit@math.leidenuniv.nl



Vakantiecursus

Reken mee met ABC

Voor de zestigste keer heeft het CWI de vakantiecursus voor wiskundeleraars georganiseerd. De cursus, die voor het eerst heeft plaatsgevonden op 29 en 31 oktober 1946 in Amsterdam, heeft steeds een bindend thema; in 2006 was dit 'Actuele wiskunde'. Twee lezingen waren gewijd aan het ABC-vermoeden: een van de grote problemen uit de hedendaagse getaltheorie. Het project 'Reken mee met ABC', is bedoeld voor scholieren en docenten. Het vermoeden, dat niet moeilijk te begrijpen is voor middelbare scholieren, is na het bewijs van de laatste stelling van Fermat de nieuwe heilige graal van de getaltheorie geworden. Scholieren worden uitgenodigd om mee te rekenen met programma's die zogenaamde ABC-drietallen zoeken en kunnen op een speciaal daartoe ingericht forum vragen stellen aan experts. Wat is het ABC-vermoeden en waar kan je het beste beginnen met het vinden van informatie?

Het ABC-vermoeden is een van de belangrijkste open problemen in de getaltheorie. De oorsprong van het vermoeden ligt in diepe vermoedens over elliptische krommen, die uiteindelijk ook hebben geleid tot het bewijs van de Laatste Stelling van Fermat. De formulering van het ABC-vermoeden is echter volkomen elementair en de lezer hoeft er niet meer voorkennis voor te hebben dan kennis van optellen van gehele getallen en de factorisatie van een getal in priemfactoren. De letters ABC verwijzen naar de eenvoudige vergelijking waar het vermoeden over gaat:

$$a + b = c.$$

Het ABC-vermoeden doet een uitspraak over hoe de priemfactorisaties van gehele getallen a , b , c die aan deze vergelijking voldoen met elkaar samenhangen. In januari 2007 is het project *Reken mee met ABC* gelanceerd door Kennislink en de Universiteit Leiden.

Het doel is tweeledig. Een breed publiek kan via dit project kennis maken met moderne wiskunde die volop in ontwikkeling is. Bovendien kan iedereen met een computer bijdragen aan het verzamelen van experimentele gegevens over het ABC vermoeden, die dit onderzoek weer verder kunnen helpen.

In dit artikel volgt een korte uiteenzetting over het vermoeden, de wiskundige achtergrond en geschiedenis, enige recente ontwikkelingen, met name van algoritmische soort, en een beschrijving van de activiteiten in het project *Reken mee met ABC*.

Het ABC-vermoeden

Om het vermoeden te kunnen formuleren moeten we eerst weten dat het *radicaal* $r(n)$ van een positief geheel getal n gedefinieerd is als het product van de priemdelers van n :

$$r(n) = \prod_{p|n \text{ priem}} p.$$

Bijvoorbeeld, als $n = 6000 = 2^4 \cdot 3 \cdot 5^3$, dan is $r(n) = 2 \cdot 3 \cdot 5 = 30$. We kunnen $r(n)$ ook definiëren zonder de priemfactorisatie van n te gebruiken: het is de grootste deler van n die zelf niet door een kwadraat groter dan 1 deelbaar is.

Stel nu dat a , b , en c positieve gehele getallen zijn waarvoor geldt $a + b = c$. We vragen ons nu af hoe klein het getal $r = r(abc)$ kan zijn in verhouding tot c . Om deze vraag preciezer te kunnen formuleren, definiëren we de *kwaliteit* $q(a, b, c)$ als het reële getal q met $c = r^q$. Met andere woorden: $q = \log(c) / \log(r)$.

De eerste observatie is enigszins flauw: als a , b en c een gemeenschappelijke factor hebben die een hoge macht is, dan kan de kwaliteit willekeurig hoog worden. Bijvoorbeeld, als $a = b =$

2^{99} , dan is $c = 2^{100}$, $r = 2$ en $q = 100$. We zullen ons daarom beperken tot het geval dat de getallen a , b en c geen gemeenschappelijke deler groter dan 1 hebben.

Met deze beperking is de hoogst bekende kwaliteit op dit moment het record uit 1987 van de Franse wiskundige Eric Reyssat:

$$2 + 3^{10} \cdot 109 = 23^5$$

$$q = \frac{5 \log(23)}{\log(2 \cdot 3 \cdot 109 \cdot 23)} = 1,62991168 \dots$$

Het ABC-vermoeden zegt dat deze kwaliteit nauwelijks boven de 1 komt, in de volgende zin:

ABC-vermoeden. Voor elk reëel getal $\epsilon > 0$ zijn er hoogstens eindig veel drietallen positieve gehele getallen a, b, c met

$$\begin{aligned} a + b &= c; \\ \text{ggd}(a, b, c) &= 1; \\ q(a, b, c) &> 1 + \epsilon. \end{aligned}$$

Van dit vermoeden verwachten de meeste deskundigen dat het waar is, en ook dat het bewijs ver buiten het bereik van bestaande wiskundige technieken ligt.

Het is daarentegen betrekkelijk eenvoudig om oneindig veel drietallen te maken waarbij de kwaliteit boven de 1 ligt. Zo'n drietal noemen we een ABC-drietal.

Definitie. Een ABC-drietal is een drietal positieve gehele getallen a, b, c waarvoor geldt

$$\begin{aligned} a + b &= c; \\ \text{ggd}(a, b, c) &= 1; \\ q(a, b, c) &> 1. \end{aligned}$$

De laatste van deze drie voorwaarden is equivalent met $r(abc) < c$. De ABC-drietallen die bestaan uit getallen onder de 100 zijn $1 + 8 = 9$, $5 + 27 = 32$, $1 + 48 = 49$, $32 + 49 = 81$, $1 + 63 = 64$ en $1 + 80 = 81$.

Stelling. Er zijn oneindig veel ABC-drietallen.

Bewijs. Voor elke $n \geq 1$ beschouwen we het drietal $a = 1$, $b = 9^n - 1$ en $c = 9^n$. Deze getallen voldoen duidelijk aan de eerste twee voorwaarden uit de definitie. Om te zien dat het radicaal



Figuur 1 Joseph Oesterlé



Figuur 2 David Masser

van abc klein genoeg is, merken we eerst op dat $r(abc) = 3r(b)$. Omdat 9 een 8-voud plus 1 is, is ook 9^n een 8-voud plus 1 en is b deelbaar door 8. Hieruit volgt dat 4 een deler is van $b/r(b)$ en dat $r(b) \leq b/4$. Er geldt dus $r(abc) = 3r(b) \leq \frac{3}{4}b < c$. $\square$

De laatste ongelijkheid uit het bewijs laat zich makkelijk vertalen in een ondergrens voor de kwaliteit:

$$q(1, 9^n - 1, 9^n) > 1 + \frac{\log(4/3)}{2n \log(3)} > 1 + \frac{1}{8n}.$$

Een bovengrens voor de kwaliteit van deze drietallen is niet eenvoudig te geven: we weten niet eens dat deze begrensd is als functie van n . Maar het ABC-vermoeden impliceert dat deze kwaliteit naar 1 convergeert als $n \rightarrow \infty$.

De laatste Stelling van Fermat

Het ABC-vermoeden is een zeer sterke uitspraak, waarvan niemand verwacht dat er een eenvoudig bewijs voor zal opduiken. De kracht van de uitspraak blijkt bijvoorbeeld uit de implicaties van het ABC-vermoeden voor de notoir moeilijke vergelijking van Fermat:

$$x^n + y^n = z^n.$$

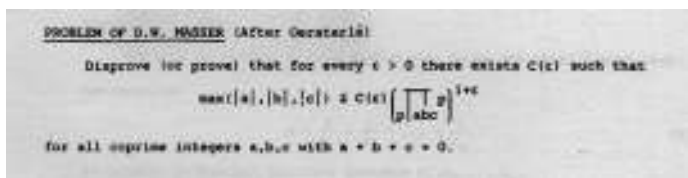
Voor elke $n \geq 3$ geeft een oplossing in positieve gehele onderling ondeelbare getallen x, y, z aanleiding tot een ABC-drietal $a = x^n$, $b = y^n$, $c = z^n$ met kwaliteit

$$\frac{\log c}{\log r(abc)} = \frac{n \log z}{\log r(xyz)} > \frac{n}{3} \geq 1.$$

Het ABC-vermoeden impliceert dus dat voor alle n vanaf een zekere grens de Fermatvergelijking geen oplossingen heeft.

Ontstaan van het vermoeden

De oorsprong van het ABC-vermoeden ligt bij de Franse wiskundige Joseph Oesterlé van het *Institut de Mathématiques de Jussieu* in Parijs. In de jaren tachtig brachten zijn pogingen om het zogenaamde Taniyama-Weilvermoeden te bewijzen voor bepaalde elliptische krommen hem tot ongelijkheden waar die elliptisch krom-



Figuur 3 Formulering probleem door David Masser

men aan zouden moeten voldoen: de *discriminant* van de kromme moest begrensd zijn door een macht van de *conductor*.

We doen hier geen poging om uit te leggen wat deze begrippen betekenen; dat hoort thuis in een gevorderd doctoraalcollege. Maar voor een drietal onderling ondeelbare gehele getallen a, b, c met $a + b + c = 0$ kan men een elliptische kromme maken waarvan de discriminant $(abc)^2$ is, en de conductor $r(abc)$. Oesterlé formuleerde zijn ongelijkheid in dit geval als volgt: er zijn constanten λ en C , zodat voor al zulke drietallen a, b, c geldt:

$$(abc)^2 \leq Cr(abc)^\lambda.$$

David Masser van de *Universität Basel* woonde in 1985 een lezing bij van Oesterlé aan het *Max-Planck-Institut für Mathematik* in Bonn. Hij begon over de ongelijkheid na te denken los van de context van elliptische krommen. Hij gaf deze equivalente formulering: er zijn constanten C' en λ' zodat voor alle onderling ondeelbare positieve gehele getallen a, b, c met $a + b = c$ geldt:

$$\max\{|a|, |b|, |c|\} \leq C'r(abc)^{\lambda'}.$$

Er is een bekende analogie tussen gehele getallen en polynomen over de complexe getallen, waarbij de graad van een polynoom de rol van absolute waarde van een getal speelt en het aantal nulpunten de rol van het radicaal. Het analogon van de laatste ongelijkheid luidt dan als volgt: er zijn getallen λ'', C'' , zodat voor alle polynomen f, g, h zonder gemeenschappelijke nulpunten met $f + g + h = 0$ geldt:

$$\max\{\text{graad}(f), \text{graad}(g), \text{graad}(h)\} \leq \lambda'' Z(fgh) + C'',$$

waarbij $Z(fgh)$ het aantal nulpunten van het polynoom fgh is (geteld zonder multipliciteiten). Vergeleken met de vorige ongelijkheid zijn de vermenigvuldigingen vervangen door optellingen omdat de graad van een product van twee polynomen de som van hun graden is, terwijl de absolute waarde van het product van

twee getallen het *product* van hun absolute waarden is.

Masser herinnerde zich een vergelijkbare *bewezen* ongelijkheid van Richard Mason, die gepubliceerd is in de *Proceedings* van de grote getaltheorieconferentie in Noordwijkerhout in 1983: als de polynomen niet constant zijn, dan geldt

$$\max\{\text{graad}(f), \text{graad}(g), \text{graad}(h)\} \leq Z(fgh) - 1.$$

Blijkbaar mogen we $\lambda'' = 1$ en $C'' = -1$ nemen. Masser vroeg zich af wat de 'correcte' waarde van λ' moest zijn. Hij wist dat de letterlijke terug-vertaling $\lambda' = 1$ teveel van het goede was, en hij vroeg zich af of elke $\lambda' > 1$ wel zou voldoen. Op een symposium aan het Imperial College in London in 1985 ter ere van de wiskundige K. F. Roth formuleerde hij het in de lijst 'open problemen' (zie figuur 3).

De bewering in Massers opgave is equivalent met onze formulering van het ABC-vermoeden. Uit de formulering blijkt dat hij eerder verwachtte dat dit weerlegd zou worden, dan bewezen. En hoewel het bewijs nog steeds mijlen ver weg lijkt te liggen, raken steeds meer experts ervan overtuigd dat het vermoeden waar is.

Takken van sport

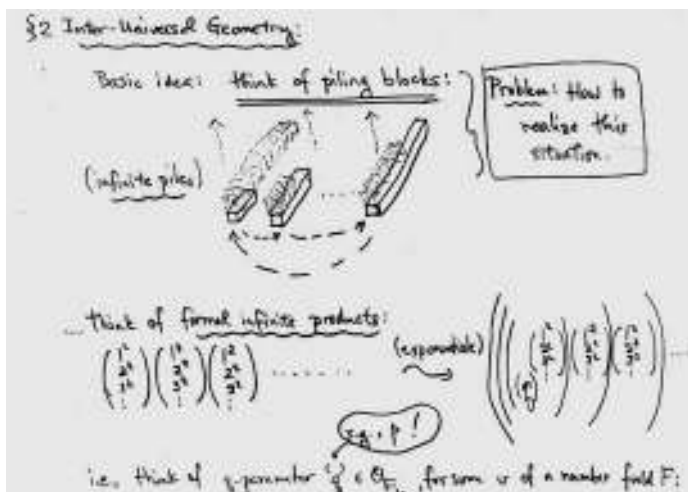
Het ABC-vermoeden heeft aanleiding gegeven tot diverse takken van sport. De kracht van het ABC-vermoeden maakt het buitengewoon geschikt om er allerlei mooie gevolgen uit af te leiden. Er zijn ook veel mogelijkheden om het vermoeden te formuleren in een algemenere context. Zie de webpagina (www.math.unicaen.fr/~nitaj/abc.html) van Abderrahmane Nitaj (Caen, Frankrijk), voor een uitgebreide opsomming. We lichten hier een paar andere ontwikkelingen uit.

Op weg naar een bewijs?

De Japanse wiskundige Shinichi Mochizuki van de universiteit van Kyoto is sinds 2000 bezig met een ambitieus programma dat tot doel heeft het ABC-vermoeden te bewijzen. Hiervoor ontwikkelt hij een buitengewoon abstracte theorie die hij 'inter-universele meetkunde' noemt (zie www.kurims.kyoto-u.ac.jp/~motizuki/research-english.html). Het idee is om het instrumentarium dat in Masons context van polynoomringen tot een bewijs leidt, over te planten naar de gehele getallen. Het is duidelijk dat dit niet zonder slag of stoot zal lukken. Maar als Mochizuki in zijn opzet slaagt, dan zal dat de wereld van de getaltheorie danig op zijn kop zetten.

Recordjacht.

Benne de Weger ontwikkelde in 1985 als bijproduct van zijn promotieonderzoek aan de *Universiteit Leiden* een methode om ABC-drietallen van hoge kwaliteit te maken. Hij ontdekte 14 ABC-drietallen met kwaliteit boven de 1.4. De grens van 1.4 heeft hij naar eigen zeggen uit zijn duim gezogen, maar desalniettemin staan ABC-drietallen met kwaliteit boven de 1.4 nu internationaal bekend als 'goede ABC-drietallen'. Er zijn er nu zo'n 200 bekend en op internet wordt de laatste stand van zaken bijgehouden op www.minet.uni-jena.de/~aros/abc.html. Nieuwe goede ABC-drietallen worden soms gevonden door verbeterde hardware en verbeterde implementaties van bekende zoekmethoden en soms door het ontdekken van geheel nieuwe methoden. Zo zijn er in 2003 enige tientallen gevonden door Tim Dokchitser met een methode die Jaap Top van de *Rijksuniversiteit Groningen* ook



Figuur 4 Schets op de webpagina van Mochizuki (2006)

a	b	c	q	ontdekker
2	$3^{10} \cdot 109$	23^5	1,630	Eric Reyssat
11^2	$3^2 \cdot 5^6 \cdot 7^3$	$2^{21} \cdot 23$	1,626	Benne de Weger
$19 \cdot 1307$	$7 \cdot 29^2 \cdot 31^8$	$2^8 \cdot 3^{22} \cdot 5^4$	1,623	Browkin Brzezinski
283	$5^{11} \cdot 13^2$	$2^8 \cdot 3^8 \cdot 17^3$	1,581	Browkin Brzezinski, Nitaj
1	$2 \cdot 3^7$	$5^4 \cdot 7$	1,568	Benne de Weger
7^3	3^{10}	$2^{11} \cdot 29$	1,547	Benne de Weger
$7^2 \cdot 41^2 \cdot 311^3$	$11^{16} \cdot 13^2 \cdot 79$	$2 \cdot 3^3 \cdot 5^{23} \cdot 953$	1,544	Nitaj
5^3	$2^9 \cdot 3^{17} \cdot 13^2$	$11^5 \cdot 17 \cdot 31^3 \cdot 137$	1,537	te Riele, Montgomery
$13 \cdot 19^6$	$2^{30} \cdot 5$	$3^{13} \cdot 11^2 \cdot 31$	1,527	Nitaj
$3^{18} \cdot 23 \cdot 2269$	$17^3 \cdot 29 \cdot 31^8$	$2^{10} \cdot 5^2 \cdot 7^{15}$	1,522	Nitaj

Tabel 1 De tien hoogst bekende kwaliteiten van ABC-drietalen

al eerder gebruikte. De top-tien van ABC-drietalen met de hoogst bekende kwaliteit wordt weergegeven in tabel 1. Als het ABC-vermoeden waar is, dan is er een ABC-drietal waarvoor geen enkel ander ABC-drietal een hogere kwaliteit heeft. Experts achten het niet onwaarschijnlijk dat Reyssat's drietal de absolute kampioen is.

Een betere maat voor kwaliteit?

Het ABC-vermoeden impliceert voor elke $q > 1$ dat er vanaf een zekere ondergrens op c geen ABC-drietalen zijn met kwaliteit minstens q . Van alle ABC-drietalen a, b, c met kwaliteit dicht bij q vinden we die met de grootste c daarom de 'beste'.

Dit wordt tot uitdrukking gebracht in een andere kwaliteitsmaat voor ABC-drietalen. We definiëren de *verdiens*te $m(a, b, c)$ van een ABC-drietal a, b, c als

$$m = m(a, b, c) = (q - 1)^2 (\log r) \log \log r,$$

waarbij $q = q(a, b, c)$ en $r = r(abc)$. Nu geldt

$$\frac{c}{r} = \exp \sqrt{m \frac{\log r}{\log \log r}}.$$

De aanleiding voor deze definitie is nog ongepubliceerd werk

van Cameron L. Stewart van de *University of Waterloo* in Canada en Gérald Tenenbaum van het *Institut Élie Cartan* in Nancy in Frankrijk. Zij hebben een verfijnd ABC-vermoeden geformuleerd, dat zegt dat er voor elke $m > 48$ maar eindig veel ABC-drietalen zijn met verdienste minstens m , en dat er een oneindige rij ABC-drietalen bestaat waarvan de verdienste convergeert naar 48. De hoogst bekende verdienste is van het drietal in tabel 1 met de grootste c :

$$m(7^2 \cdot 41^2 \cdot 311^3, 11^{16} \cdot 13^2 \cdot 79, 2 \cdot 3^3 \cdot 5^{23} \cdot 953) = 31,54 \dots$$

Het verfijnde ABC-vermoeden is gebaseerd op een subtiële heuristiek die zegt dat $r(a + b)$ zich onafhankelijk gedraagt van $r(a)$ en $r(b)$ als a en b onderling ondeelbaar zijn en op bewezen stellingen over het gedrag van de functie $n \mapsto r(n)$.

Deze heuristieken hebben meer interessante gevolgen. Gegeven een reëel getal $q > 1$ zegt het ABC-vermoeden dat er maar eindig veel ABC-drietalen zijn met kwaliteit minstens q . Maar hoe groot kan zo'n drietal dan maximaal zijn? Als we q van boven naar 1 laten naderen, dan voorspelt het verfijnde ABC-vermoeden hoe hard dit grootste ABC-drietal zal groeien.

ABC-drietalen tellen.

Voor elk getal X noteren we het aantal ABC-drietalen (a, b, c) met $a < b$ en $c < X$ als $N(X)$. We weten uit de eerder genoemde

X	$N(X)$				
10	1	$1 + 8 = 9$	$13 + 243 = 256$	$1 + 675 = 677$	
10^2	6	$5 + 27 = 32$	$81 + 175 = 256$	$1 + 728 = 729$	
10^3	31	$1 + 48 = 49$	$1 + 288 = 289$	$25 + 704 = 729$	
10^4	120	$1 + 63 = 64$	$100 + 243 = 343$	$104 + 625 = 729$	
10^5	418	$1 + 80 = 81$	$32 + 343 = 375$	$200 + 529 = 729$	
10^6	1268	$32 + 49 = 81$	$5 + 507 = 512$	$1 + 960 = 961$	
10^7	3499	$4 + 121 = 125$	$169 + 343 = 512$	$343 + 625 = 968$	
10^8	8987	$3 + 125 = 128$	$1 + 512 = 513$		
10^9	22316	$1 + 224 = 225$	$27 + 512 = 539$		
10^{10}	51677	$1 + 224 = 243$	$1 + 624 = 625$		
10^{11}	116978	$2 + 243 = 245$	$49 + 576 = 625$		
10^{12}	252856	$7 + 243 = 250$	$81 + 544 = 625$		

Tabel 2 Het aantal ABC-drietalen van hoogstens n cijfers voor $n \leq 12$ en de 31 abc-drietalen onder de duizend

a	b	c	kwaliteit
$2^7 \cdot 89^2$	$5^4 \cdot 7^6 \cdot 11^2 \cdot 71^4$	$3^{13} \cdot 19^3 \cdot 4547^2$	1.4342
$2^{32} \cdot 73^3$	$3^{14} \cdot 5^3 \cdot 11 \cdot 13^5 \cdot 557$	$7^{13} \cdot 23^2 \cdot 163^2$	1.4323
2^{39}	$3^8 \cdot 13^2 \cdot 23^5$	$5^8 \cdot 151^2 \cdot 863$	1.4210
$3^{17} \cdot 89^4$	$7^3 \cdot 61 \cdot 359^5$	$2^{13} \cdot 5 \cdot 19^8 \cdot 191$	1.4068
$2^{27} \cdot 17^2$	$7^{11} \cdot 3041^2$	$3 \cdot 5^3 \cdot 13^8 \cdot 23^2 \cdot 113$	1.4062
1	$3^7 \cdot 7^5 \cdot 13^5 \cdot 17 \cdot 1831$	$2^{30} \cdot 5^2 \cdot 127 \cdot 353^2$	1.4012

Tabel 3 Zes nieuwe ABC-drietallen met kwaliteit boven 1,4

stelling dat $N(X)$ naar oneindig gaat als X naar oneindig gaat. Maar hoe hard gaat $N(X)$ naar oneindig? Men kan het volgende bewijzen: Voor elke $\epsilon > 0$ zijn er $C, C' > 0$ zodat

$$C \exp((\log X)^{1/2-\epsilon}) \leq N(X) \leq C' X^{2/3+\epsilon}.$$

Het bewijs van deze stelling hoort thuis in de analytische getaltheorie en is vooralsnog niet gepubliceerd. De ondergrens is recent aangekondigd door Sander Dahmen, promovendus aan de Universiteit Utrecht en de bovengrens is gevonden naar aanleiding van de algoritmische inspanningen van het project *Reken mee met ABC*; zie hieronder.

Het ligt in de verwachting dat het daadwerkelijke asymptotische gedrag van $N(X)$ dichter bij de ondergrens dan bij de bovengrens zal liggen.

Een net door de zee.

Als onderdeel van het project *Reken mee met ABC* wordt een project voor gedistribueerd rekenen gestart dat tot doel heeft om alle ABC-drietallen tot een bepaalde grens te vinden. Het gaat hierbij dus niet om speciale methoden die speciaal wenselijke ABC-drietallen moeten produceren, maar om een methode die geen enkel ABC-drietel overslaat.

Hiervoor is een algoritme ontwikkeld dat op een efficiënte wijze het gebied van paren (a, b) met $a + b < X$ afzoekt. Experimenten van Jeroen Demeyer van de Universiteit Gent met dit algoritme hebben geleid tot de bovenstaande tabel met precieze waarden voor $N(X)$ en tot een zestal nieuwe 'goede' ABC-drietallen, met kwaliteit boven 1.4.

Om ABC-drietallen op een grotere schaal te kunnen zoeken worden de rekentaken gedistribueerd via de *Berkeley Open Infrastructure for Network Computing*, waarmee iedereen thuis op zijn computer ABC-drietallen kan vinden en toevoegen aan de statistieken.

Scholen

Het project *Reken mee met ABC* probeert scholieren en docenten op verschillende manieren te betrekken bij de moderne getaltheorie. Het poogt de indruk weg te nemen dat de wiskunde al af is door juist de open problemen te benadrukken. Op dit moment wordt gedacht aan de volgende activiteiten die vanuit de website gecoördineerd worden.

- Scholen kunnen meedoen met het zoeken naar nieuwe ABC-drietallen door rekentijd op PC's beschikbaar te stellen. De door scholen gevonden drietallen worden apart bijgehouden in het BOINC-project.
- Veel elementaire onderwerpen uit de wiskunde die in nauw verband staan met het ABC-vermoeden hebben een kleurrijke geschiedenis die doorloopt tot op de dag van vandaag. Deze zijn uitstekend geschikt om de cultuur van de wiskunde mee voor het voetlicht te brengen, zowel binnen het klaslokaal en daarbuiten. Daarom zullen deze onderwerpen in historische context op verschillende niveaus toegankelijk gemaakt worden op de website, onder meer in de vorm van korte lesbrieven.
- Er komt een forum op de website waar scholieren vragen kunnen stellen aan elkaar en aan een deskundige. Hier kunnen misverstanden opgehelderd worden en kunnen open vragen bekeken worden, zoals: "zijn er ABC-drietallen die uit Fibonaccigetallen bestaan?"
- Voor het schrijven van profielwerkstukken worden verschillende thema's en open problemen aangedragen en worden materiaal en links van het goede niveau verzameld. Dit wordt verder ondersteund door het forum en door de aangeboden lesbrieven.
- Er zullen wedstrijden worden uitgeschreven met prijzen voor bijvoorbeeld het mooiste nieuwe ABC-drietel, het beste profielwerkstuk, de beste forum-bijdrage of andere ABC-prestaties.

Voor uitgebreide informatie verwijzen we naar de webpagina van het project: www.rekenmeemetaabc.nl.



Teun Koetsier*Afdeling Wiskunde**Faculteit der Exacte Wetenschappen**Vrije Universiteit**De Boelelaan 1081**1081 HV Amsterdam**t.koetsier@few.vu.nl***Cultuur Surrealistische opera van Ingomar Grünauer**

Die Vermessung des Unendlichen

Op 10 november ging de opera 'Cantor, Die Vermessung des Unendlichen' in het Opernhaus in Halle in Duitsland in première. Speelt wiskunde überhaupt een rol in de opera, en zo ja wat is daarvan de functie? Of dient het alleen maar om de burgerbevolking te epateren? Teun Koetsier, universitair hoofddocent geschiedenis van de wiskunde aan de Vrije Universiteit was erbij.

Tien jaar geleden op 20 december 1996 ging in Felix Meritis in Amsterdam het aan L.E.J. Brouwer gewijde muziektheaterstuk *Zijdelings Afgesproken* in première. Componist Maarten Altena had de muziek gemaakt. Het libretto was van Frank Vande Veire. Negen muzikanten van het Maarten van Altena Ensemble en vijf spelers van Maatschappij Discordia presenteerden een mix van muziek, gezang en recitatie. De teksten waren alle afkomstig van Brouwer. Onder het publiek dat de totaal zes voorstellingen bezocht bevonden zich natuurlijk ook wiskundigen: zij waren niet allemaal onder de indruk. Ik denk dat ze te weinig van hun eigen visie op Brouwer herkenden. De kritiek in de pers was gematigd positief. Eerlijk gezegd vond ik het zelf geweldig en ik heb er volstrekt onkritisch van genoten. Het was een hele avond lang Brouwer, nu eens niet in wiskundige vorm of

in de vorm van een historisch verhaal: binnen een kunstwerk stond een keuze van zijn gedachten centraal. Er is wiskundige waarheid, er is historische waarheid en er is kunst. Voor een kunstwerk gelden andere normen. Een land heeft helden nodig. Brouwers topologie en intuïtionisme zijn zo bijzonder dat hij voor mij een Nederlandse held is en het feit alleen al dat men een muziektheaterstuk aan hem wijdde was voor mij goed nieuws.

Icarus van het oneindige

Op 10 november vorig jaar had ik een vergelijkbaar mooie avond. In het Opernhaus in het Pruisische stadje Halle, waar Georg Cantor, de grondlegger van de theorie der oneindige verzamelingen, van 1872 tot 1913 hoogleraar was, ging de opera *Cantor, Die Vermessung des Unendlichen* in première. De opera werd gemaakt in opdracht van het Opern-

haus ter gelegenheid van het twaalfhonderdjarig bestaan van de stad Halle. Zowel libretto als muziek zijn van de Oostenrijker Ingomar Grünauer. De dirigent was Roger Eppele, die inmiddels al acht jaar Generalmusikdirektor bij het Opernhaus is en in Duitsland een uitstekende naam heeft. Ik wist van tevoren dat ik een mooie avond ging hebben want ik ben wat Cantor betreft uiterst bevooroordeeld. De theorie van de oneindige verzamelingen is zo'n fantastische bijdrage aan de wiskunde dat alleen het feit dat men aan Cantor een opera wijdde mijn hart sneller deed kloppen. Ik ging naar de première met de gedachte dat ik zeker niets wijzer zou worden over verzamelingenleer of over het leven van Cantor, maar dat ik met een geheel nieuwe Cantor zou worden geconfronteerd.

En zo was het inderdaad. Nooit heb ik mij Cantor voorgesteld als een Icarus met brandende vleugels. Toch is dat het slot van de opera. Cantor staat in centrum van het toneel en wordt weerspiegeld in twee reusachtige glazen panelen achter hem. Het is een fraaie afsluiting van een opeenvolging van dertig scènes waarin Cantor, gespeeld door de coun-

tertenor Axel Köhler, neergezet wordt als een tragisch genie. Köhler doet het voortreffelijk, niet in de laatste plaats omdat hij in de opera niet alleen zingt maar ook solo viool speelt. In afwachting van het begin van de opera wordt op het doek de formule

$$2^{\aleph_0} = \aleph_1$$

geprojecteerd. In de eerste scènes zien wij een oude eenzame Cantor, wij horen de stemmen van tegenstanders die zijn wiskundige ideeën als onzinnige hersenspinsels beschouwen. Cantor zelf droomt van zijn jeugd in Sint Petersburg, en hij zingt een Russisch lied. Hij is moe van het vechten om erkenning en moe van zijn verblijven in de psychiatrische kliniek van dr. Mekus. Zijn vrouw Vally vreest dat hij zelfmoord zal plegen. Met die eerste scènes zijn de drie thema's van de opera gedefinieerd: Cantor en de wiskunde, het verzet in de wiskundige wereld en het privéleven van Cantor met de psychiatrische problemen. De wiskunde komt als volgt aan bod. In de vijfde scène is Cantor terug in de tijd waarin hij de ontdekking van zijn leven deed. In de opera is dat het funda-

mentele resultaat: "Twee tot de macht aleph nul is aleph een". Cantor schrijft met krijt de formule op de achterkant van zijn vioolkist. De wiskundige wereld reageert er echter met spot en verachting op. In het bijzonder de Berlijnse hoogleraar Kronecker en zijn drie vazallen verwerpen de resultaten van Cantor radicaal. Maar ook Cantors jeugdvriend Herman Amandus Schwartz valt hem af: Schwartz zingt dat Cantor gedoemd is om te falen. Eigenlijk vindt Cantor op dit punt alleen de vier Alephs aan zijn zijde, vier in mijn herinnering schaars geklede zangeressen die Cantor mentale steun verlenen. In de opera probeert Cantor voortdurend tevergeefs om zijn fundamentele resultaat te bewijzen. "Ich muß beweisen", zingt hij. In de eenentwintigste scène erkent Cantor zelfs zijn nederlaag: "Ich kann nicht beweisen". Daarop wordt hij door de wiskundige gemeenschap als een verloren zoon ontvangen. Zijn borstbeeld wordt bijgezet in de rij der waarlijk groten.

Cantor en muziek

Cantor komt echter snel terug op de erkenning van zijn nederlaag en daarmee zijn alle problemen weer terug. Als de druk te groot wordt

speelt hij viool en droomt hij ervan hoe mooi het geweest zou zijn als zijn vader hem violist had laten worden. Dit is overigens historisch; op eenenvijftigjarige leeftijd schreef Cantor aan Lemoine dat hij altijd violist had willen worden. In de opera vraagt Cantors dochter Else hem waarom ze niet ooit toen ze nog jong waren weggevologen zijn als Daedalus en Icarus. Kroneckers dood lost de problemen ook niet op. Cantor wordt definitief in de kliniek opgenomen, krijgt electroshocktherapie, wordt door zijn dochter bezocht en zit eindelijk alleen op het podium met brandende vleugels.

In vergelijking met Maarten Altena's *Zijdelings Afgesproten is Cantor, Die Vermessung des Unendlichen* een dure productie met een rijke encenering. In de orkestbak zit een deel van het orkest. Achter de twee grote glazen panelen op het podium zit de rest van het orkest en het koor en ook op het balkon in de zaal bevinden zich nog enkele strijkers en een deel van het koor. De beweeglijkheid van de glazen panelen maakt een grote variatie mogelijk. De muziek is modern, maar Ingomar Grünauer heeft niet een nadrukkelijke eigen stijl in de muziek gebracht. Grondthema is



Countertenor Axel Köhler als Cantor

het thema van de *b-klein fuga BWV 869* uit het eerste deel van Bachs *Wohltemperierte Klavier*. Gedurende bijna anderhalf uur ziet de toeschouwer op het podium in een overdadige encensering een lijdend mens. Terwijl op de wanden kardinaal- en ordinaalgetallen worden geprojecteerd is er ook hoop, maar meer vertwijfeling. De muziek, de zang en de teksten onderstrepen dat lijden slechts. In *Cantor, Die Vermessung des Unendlichen* vind je de wiskunde van Cantor slechts heel karikaturaal terug. Toch valt het nog wel te rechtvaardigen. In de opera is er eerst de ontdekking “Twee tot de macht aleph nul is aleph een” en vervolgens zijn er de vergeefse pogingen om daarvan de correctheid te bewijzen. Dat lijkt enigszins wonderlijk omdat Cantors grote ontdekking de ontdekking van de overaftelbaarheid van de verzameling der reële getallen was. Deze grote ontdekking is echter geen vermoeden, maar een stelling waarvan Cantor ook het bewijs leverde. Die stelling genereerde echter vervolgens wel een vermoeden, de continuümhypothese, dat Cantor jarenlang tevergeefs heeft getracht te bewijzen. In de opera wordt dit vermoeden — er zijn onder de deelverzamelingen van $\mathbb{R}$ slechts twee oneindigheden — weergegeven door middel van de formule ‘Twee tot de macht aleph nul is aleph een’ en als stelling gepresenteerd omdat Cantor vanaf het begin heeft gedacht

dat het waar moest zijn. De tweede formulering is strikt sterker dan Cantor’s vermoeden: hij is equivalent aan de conjunctie van de eerste en ‘ $\mathbb{R}$ kan welgeordend worden’. Het verzet van Kronecker tegen Cantors theorie was reëel. Grünauers wiskundig uitgangspunt is beperkt, maar niet incorrect en hetzelfde geldt voor de overige elementen uit het leven van Cantor die zijn benut. Cantor speelde viool in zijn jeugd. Zijn moeder was erg muzikaal en stamde ook uit een bekende zeer muzikale familie. Ook Cantors vrouw Vally was een voortreffelijke pianiste en zangeres. In huize Cantor speelde de muziek een grote rol.

Wiskunde als onderwerp van een opera

Cantor, Die Vermessung des Unendlichen werd zes keer uitgevoerd, overigens net als tien jaar geleden *Zijdelings Afgesproten*. Het zijn bijzondere kunstwerken, want er zijn weinig muziekproducties waarin essentiële elementen uit het werk en leven van een groot wiskundige centraal staan. De vraag is in hoeverre de gemiddelde concertgebouwbezoeker door dit soort werk wordt aangesproken. Het hermetische karakter dat de wiskunde voor de buitenwereld heeft is stellig bij dit soort ondernemingen een forse barrière. Buiten een kleine kring zijn Cantor en Brouwer volstrekt onbekend en de kring van degenen die iets

van hun werk begrijpen is nog kleiner. De portée van Cantors theorie of van Brouwers consequente constructivisme laat zich niet simpel uitleggen. Grünauer slaagt er niet in om het idee van het opmeten van het oneindige in de opera echt terug te laten komen. Het blijft allemaal kunst voor een kleine groep. Dat is ook zo als componisten met een grotere naam zich eraan wagen. Ik ken twee andere voorbeelden. In 1957 ging in München de opera *Die Harmonie der Welt* van Paul Hindemith in première, gewijd aan het leven en werk van Johannes Kepler. Hindemith had een heel eigen stijl en liefhebbers beschouwen die opera als een meesterwerk. In 2002 componeerde Glass de opera *Galileo Galilei* met een libretto van May Zimmermann. In tegenstelling tot *Einstein on the Beach*, eveneens van Glass, dat in 1976 in Avignon in première ging, waarin van Einsteins werk en leven helemaal niets terug te vinden is, is Galileo Galilei wel op leven en werk van Galilei gebaseerd. Wie heeft echter van Hindemiths opera gehoord? Vanwege de combinatie van zeer bekende componist met een zeer bekende geleerde maakt Glass’ *Galileo Galilei* nog de grootste kans op aandacht bij een breder publiek. 

Met dank aan Rüdiger Thiele (Leipzig), Alexander Odefey (Hamburg) en Klaas Pieter Hart (Delft)



Anke Berndt als Vally, de vrouw van Cantor, Axel Köhler als Cantor en Melanie Hirsch als hun dochter Else

Sylvia Nasar, David Gruber

The New Yorker

4 Times Square,

New York, NY 10036

www.newyorker.com

Manifold Destiny

A legendary problem and the battle over who solved it

In het tijdschrift 'The New Yorker' van 21 augustus 2006 is een uitgebreid verslag verschenen van de zoektocht naar het bewijs van het vermoeden van Poincaré. In dit vermoeden wordt gesteld dat een compacte variëteit homotoop is aan de eenheidssfeer dan en slechts dan als deze variëteit homeomorf is aan de eenheidssfeer. Tot 2003 was het vermoeden bewezen voor alle dimensies behalve dimensie drie. In deze heroïsche zoektocht spelen de wiskundigen Grigory Perelman en Shing-Tung Yau een hoofdrol. Perelman bewees uiteindelijk in 2003 het Thurston-geometrisatievermoeden. Hiervan is het Poincarévermoeden een speciaal geval. Hem werd een Fieldsmedal toegekend; een prijs die hij vervolgens niet accepteerde. Yau vond echter dat hij en niet Perelman het precies uitgewerkte bewijs had geleverd. Hoe zit het werkelijk in elkaar? Wat bewoog Perelman tot het weigeren van de meest prestigieuze prijs in de wiskunde? Sylvia Nasar, bekend van het boek 'A beautiful Mind' en David Gruber, wetenschap-sjournalist reisden naar China en naar Rusland om het werkelijke verhaal te achterhalen. Hun artikel gaf aanleiding tot nogal wat tumult: Yau voelde zich in zijn eer aangetast en dreigde de auteurs met een rechtszaak. Een gang naar de rechter is er echter nog niet van gekomen. Na dit artikel zal meetkundige Jozef Steenbrink kort ingaan op deze controverse.

On the evening of June 20th, several hundred physicists, including a Nobel laureate, assembled in an auditorium at the Friendship Hotel in Beijing for a lecture by the Chinese mathematician Shing-Tung Yau. In the late nineteen-seventies, when Yau was in his twenties, he had made a series of breakthroughs that helped launch the string-theory revolution in physics and earned him, in addition to a Fields Medal — the most coveted award in mathematics — a reputation in both disciplines as a thinker of unrivalled technical power.

Yau had since become a professor of mathematics at Harvard and the director of mathematics institutes in Beijing and Hong Kong, ship Hotel was part of an international con-dividing his time between the United States and China. His lecture at the Friend-

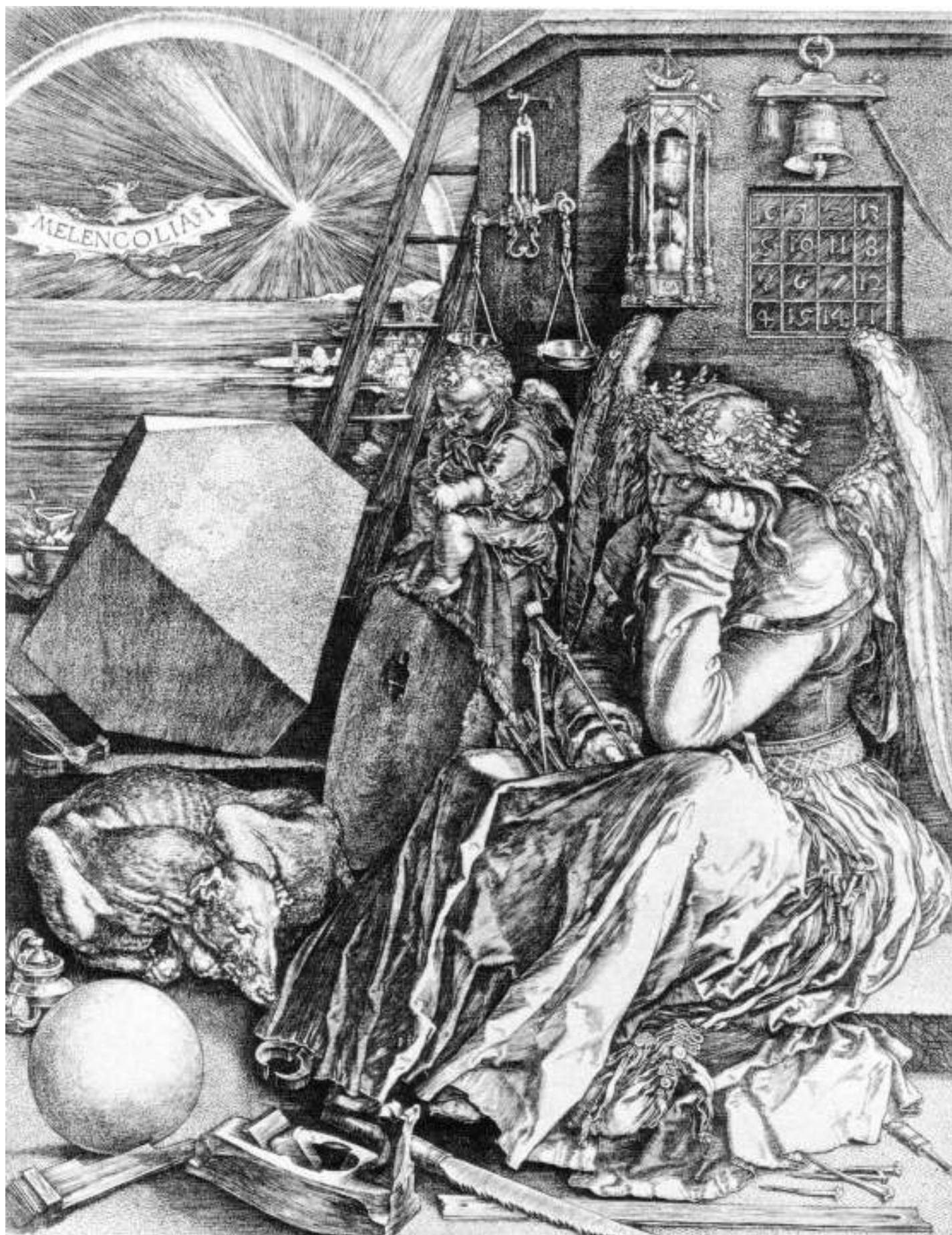
ference on string theory, which he had organized with the support of the Chinese government, in part to promote the country's recent advances in theoretical physics. (More than six thousand students attended the keynote address, which was delivered by Yau's close friend Stephen Hawking, in the Great Hall of the People.) The subject of Yau's talk was something that few in his audience knew much about: the Poincaré conjecture, a century-old conundrum about the characteristics of three-dimensional spheres, which, because it has important implications for mathematics and cosmology and because it has eluded all attempts at solution, is regarded by mathematicians as a holy grail.

Yau, a stocky man of fifty-seven, stood at a lectern in shirtsleeves and black-rimmed glasses and, with his hands in his pockets,

described how two of his students, Xi-Ping Zhu and Huai-Dong Cao, had completed a proof of the Poincaré conjecture a few weeks earlier. "I'm very positive about Zhu and Cao's work," Yau said. "Chinese mathematicians should have every reason to be proud of such a big success in completely solving the puzzle." He said that Zhu and Cao were indebted to his longtime American collaborator Richard Hamilton, who deserved most of the credit for solving the Poincaré. He also mentioned Grigory Perelman, a Russian mathematician who, he acknowledged, had made an important contribution. Nevertheless, Yau said, "in Perelman's work, spectacular as it is, many key ideas of the proofs are sketched or outlined, and complete details are often missing." He added, "We would like to get Perelman to make comments. But Perelman resides in St. Petersburg and refuses to communicate with other people."

For ninety minutes, Yau discussed some of the technical details of his students' proof. When he was finished, no one asked any questions. That night, however, a Brazilian physicist posted a report of the lecture on his blog. "Looks like China soon will take the lead also in mathematics," he wrote.

Grigory Perelman is indeed reclusive. He left his job as a researcher at the Steklov Institute of Mathematics, in St. Petersburg, last December; he has few friends; and he lives with his mother in an apartment on the outskirts of the city. Although he had never granted an interview before, he was cordial



Dürer: *Melencolia I*, kopergravure, 1514, The Metropolitan Museum of Art, New York

and frank when we visited him, in late June, shortly after Yau's conference in Beijing, taking us on a long walking tour of the city. "I'm looking for some friends, and they don't have to be mathematicians," he said. The week before the conference, Perelman had spent hours discussing the Poincaré conjecture with Sir John M. Ball, the fifty-eight-year-old president of the International Mathematical Union (IMU), the discipline's influential professional association. The meeting, which took place at a conference center in a stately mansion overlooking the Neva River, was highly unusual. At the end of May, a committee of nine prominent mathematicians had voted to award Perelman a Fields Medal for his work on the Poincaré, and Ball had gone to St. Petersburg to persuade him to accept the prize in a public ceremony at the IMU's quadrennial congress, in Madrid, on August 22nd.

The Fields Medal, like the Nobel Prize, grew, in part, out of a desire to elevate science above national animosities. German mathematicians were excluded from the first IMU congress, in 1924, and, though the ban was lifted before the next one, the trauma it caused led, in 1936, to the establishment of the Fields, a prize intended to be "as purely international and impersonal as possible."

However, the Fields Medal, which is awarded every four years, to between two and four mathematicians, is supposed not only to reward past achievements but also to stimulate future research; for this reason, it is given only to mathematicians aged forty and younger. In recent decades, as the number of professional mathematicians has grown, the Fields Medal has become increasingly prestigious. Only forty-four medals have been awarded in nearly seventy years — including three for work closely related to the Poincaré conjecture — and no mathematician has ever refused the prize. Nevertheless, Perelman told Ball that he had no intention of accepting it. "I refuse," he said simply.

Over a period of eight months, beginning in November, 2002, Perelman posted a proof of the Poincaré on the Internet in three installments. Like a sonnet or an aria, a mathematical proof has a distinct form and set of conventions. It begins with axioms, or accepted truths, and employs a series of logical statements to arrive at a conclusion. If the logic is deemed to be watertight, then the result is a theorem. Unlike proof in law or science, which is based on evidence and therefore subject to qualification and revision, a proof of a theorem is definitive. Judgments about the accuracy of a proof are mediated

by peer-reviewed journals; to insure fairness, reviewers are supposed to be carefully chosen by journal editors, and the identity of a scholar whose paper is under consideration is kept secret. Publication implies that a proof is complete, correct, and original.

By these standards, Perelman's proof was unorthodox. It was astonishingly brief for such an ambitious piece of work; logic sequences that could have been elaborated over many pages were often severely compressed. Moreover, the proof made no direct mention of the Poincaré and included many elegant results that were irrelevant to the central argument. But, four years later, at least two teams of experts had vetted the proof and had found no significant gaps or errors in it. A consensus was emerging in the math community: Perelman had solved the Poincaré. Even so, the proof's complexity — and Perelman's use of shorthand in making some of his most important claims — made it vulnerable to challenge. Few mathematicians had the expertise necessary to evaluate and defend it.

After giving a series of lectures on the proof in the United States in 2003, Perelman returned to St. Petersburg. Since then, although he had continued to answer queries about it by e-mail, he had had minimal contact with colleagues and, for reasons no one understood, had not tried to publish it. Still, there was little doubt that Perelman, who turned forty on June 13th, deserved a Fields Medal. As Ball planned the IMU's 2006 congress, he began to conceive of it as a historic event. More than three thousand mathematicians would be attending, and King Juan Carlos of Spain had agreed to preside over the awards ceremony. The IMU's newsletter predicted that the congress would be remembered as "the occasion when this conjecture became a theorem." Ball, determined to make sure that Perelman would be there, decided to go to St. Petersburg.

Ball wanted to keep his visit a secret — the names of Fields Medal recipients are announced officially at the awards ceremony — and the conference center where he met with Perelman was deserted. For ten hours over two days, he tried to persuade Perelman to agree to accept the prize. Perelman, a slender, balding man with a curly beard, bushy eyebrows, and blue-green eyes, listened politely. He had not spoken English for three years, but he fluently parried Ball's entreaties, at one point taking Ball on a long walk — one of Perelman's favorite activities. As he summed up the conversation two weeks lat-

er: "He proposed to me three alternatives: accept and come; accept and don't come, and we will send you the medal later; third, I don't accept the prize. From the very beginning, I told him I have chosen the third one." The Fields Medal held no interest for him, Perelman explained. "It was completely irrelevant for me," he said. "Everybody understood that if the proof is correct then no other recognition is needed."

Proofs of the Poincaré have been announced nearly every year since the conjecture was formulated, by Henri Poincaré, more than a hundred years ago. Poincaré was a cousin of Raymond Poincaré, the President of France during the First World War, and one of the most creative mathematicians of the nineteenth century. Slight, myopic, and notoriously absent-minded, he conceived his famous problem in 1904, eight years before he died, and tucked it as an offhand question into the end of a sixty-five-page paper.

Poincaré didn't make much progress on proving the conjecture. '*Cette question nous entraînerait trop loin*' ("This question would take us too far"), he wrote. He was a founder of topology, also known as 'rubber-sheet geometry', for its focus on the intrinsic properties of spaces. From a topologist's perspective, there is no difference between a bagel and a coffee cup with a handle. Each has a single hole and can be manipulated to resemble the other without being torn or cut. Poincaré used the term "manifold" to describe such an abstract topological space. The simplest possible two-dimensional manifold is the surface of a soccer ball, which, to a topologist, is a sphere — even when it is stomped on, stretched, or crumpled. The proof that an object is a so-called two-sphere, since it can take on any number of shapes, is that it is "simply connected," meaning that no holes puncture it. Unlike a soccer ball, a bagel is not a true sphere. If you tie a slipknot around a soccer ball, you can easily pull the slipknot closed by sliding it along the surface of the ball. But if you tie a slipknot around a bagel through the hole in its middle you cannot pull the slipknot closed without tearing the bagel.

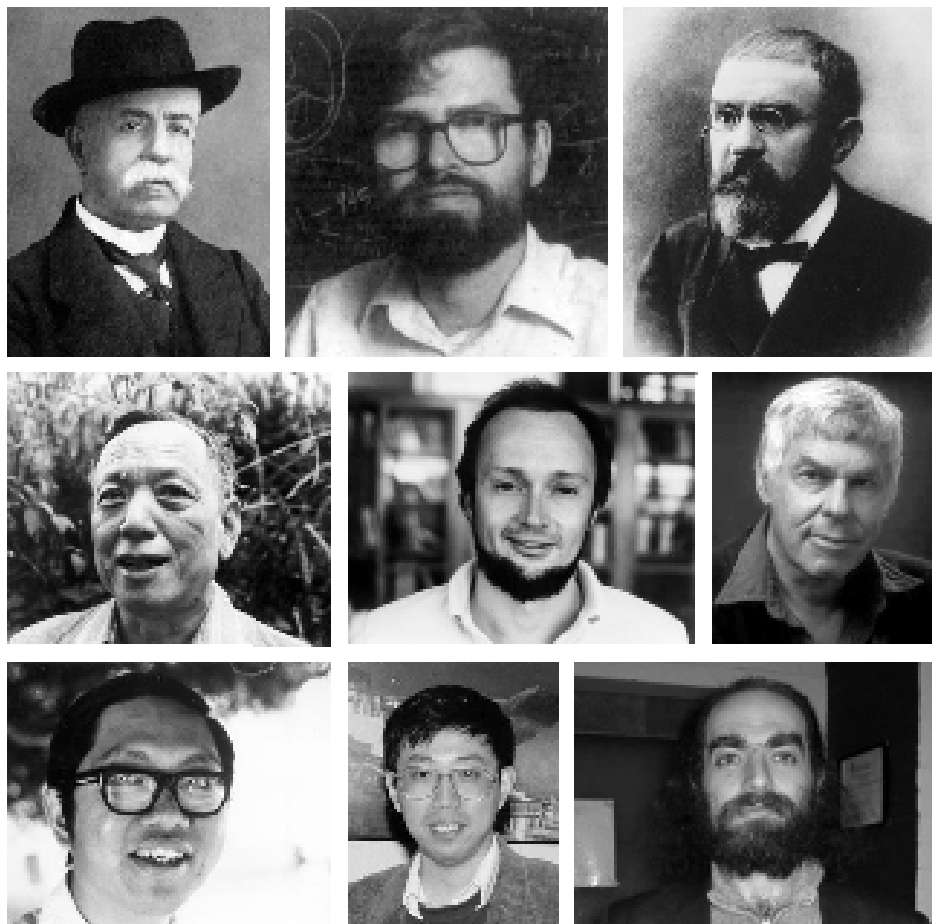
Two-dimensional manifolds were well understood by the mid-nineteenth century. But it remained unclear whether what was true for two dimensions was also true for three. Poincaré proposed that all closed, simply connected, three-dimensional manifolds — those which lack holes and are of finite extent — were spheres. The conjecture was potentially important for scientists studying the largest

known three-dimensional manifold: the universe. Proving it mathematically, however, was far from easy. Most attempts were merely embarrassing, but some led to important mathematical discoveries, including proofs of Dehn's Lemma, the Sphere Theorem, and the Loop Theorem, which are now fundamental concepts in topology.

By the nineteen-sixties, topology had become one of the most productive areas of mathematics, and young topologists were launching regular attacks on the Poincaré. To the astonishment of most mathematicians, it turned out that manifolds of the fourth, fifth, and higher dimensions were more tractable than those of the third dimension. By 1982, Poincaré's conjecture had been proved in all dimensions except the third. In 2000, the Clay Mathematics Institute, a private foundation that promotes mathematical research, named the Poincaré one of the seven most important outstanding problems in mathematics and offered a million dollars to anyone who could prove it.

"My whole life as a mathematician has been dominated by the Poincaré conjecture," John Morgan, the head of the mathematics department at Columbia University, said. "I never thought I'd see a solution. I thought nobody could touch it."

Grigori Perelman did not plan to become a mathematician. "There was never a decision point," he said when we met. We were outside the apartment building where he lives, in Kupchino, a neighborhood of drab high-rises. Perelman's father, who was an electrical engineer, encouraged his interest in math. "He gave me logical and other math problems to think about," Perelman said. "He got a lot of books for me to read. He taught me how to play chess. He was proud of me." Among the books his father gave him was a copy of "Physics for Entertainment," which had been a best-seller in the Soviet Union in the nineteen-thirties. In the foreword, the book's author describes the contents as "conundrums, brain-teasers, entertaining anecdotes, and unexpected comparisons," adding, "I have quoted extensively from Jules Verne, H. G. Wells, Mark Twain and other writers, because, besides providing entertainment, the fantastic experiments these writers describe may well serve as instructive illustrations at physics classes." The book's topics included how to jump from a moving car, and why, "according to the law of buoyancy, we would never drown in the Dead Sea." The notion that Russian society considered worthwhile what Perelman did for pleasure



Main characters, from left to right, first row: the geometer Gregorio Ricci-Curbastro (1853–1925), who created absolute differential calculus that became the foundation of tensor analysis; William Thurston (1946), who formulated the geometrization conjecture; Henri Poincaré (1854–1912), who stated the celebrated conjecture; second row: Shiing-Shen Chern (1911–2004), who linked curvature invariants to characteristic classes; Richard Hamilton (1943), the inventor of the Ricci flow; Fields medallist Stephen Smale (1930), who solved the Poincaré conjecture for all dimensions greater than 4; third row: Fields medallist Shing-Tung Yau, founder of the geometry behind string theory; Gang Tian, who worked out the Perelman proof in detail together with John Morgan; Grigori Perelman (1966) who proved Thurston's geometrization conjecture

Pictures 4, 5, 7: courtesy of Mathematisches Forschungsinstitut Oberwolfach/photographs by Prof. George M. Bergman

came as a surprise. By the time he was fourteen, he was the star performer of a local math club. In 1982, the year that Shing-Tung Yau won a Fields Medal, Perelman earned a perfect score and the gold medal at the International Mathematical Olympiad, in Budapest. He was friendly with his teammates but not close — "I had no close friends," he said. He was one of two or three Jews in his grade, and he had a passion for opera, which also set him apart from his peers. His mother, a math teacher at a technical college, played the violin and began taking him to the opera when he was six. By the time Perelman was fifteen, he was spending his pocket money on records. He was thrilled to own a recording of a famous 1946 performance of "La Traviata," featuring Licia Albanese as Violetta. "Her voice was very good," he said.

At Leningrad University, which Perelman entered in 1982, at the age of sixteen, he took advanced classes in geometry and solved a problem posed by Yuri Burago, a mathemati-

cian at the Steklov Institute, who later became his Ph.D. adviser. "There are a lot of students of high ability who speak before thinking," Burago said. "Grisha was different. He thought deeply. His answers were always correct. He always checked very, very carefully." Burago added, "He was not fast. Speed means nothing. Math doesn't depend on speed. It is about *deep*."

At the Steklov in the early nineties, Perelman became an expert on the geometry of Riemannian and Alexandrov spaces — extensions of traditional Euclidean geometry — and began to publish articles in the leading Russian and American mathematics journals. In 1992, Perelman was invited to spend a semester each at New York University and Stony Brook University. By the time he left for the United States, that fall, the Russian economy had collapsed. Dan Stroock, a mathematician at MIT, recalls smuggling wads of dollars into the country to deliver to a retired mathematician at the Steklov, who, like many

of his colleagues, had become destitute.

Perelman was pleased to be in the United States, the capital of the international mathematics community. He wore the same brown corduroy jacket every day and told friends at NYU that he lived on a diet of bread, cheese, and milk. He liked to walk to Brooklyn, where he had relatives and could buy traditional Russian brown bread. Some of his colleagues were taken aback by his fingernails, which were several inches long. "If they grow, why wouldn't I let them grow?" he would say when someone asked why he didn't cut them. Once a week, he and a young Chinese mathematician named Gang Tian drove to Princeton, to attend a seminar at the Institute for Advanced Study.

For several decades, the institute and nearby Princeton University had been centers of topological research. In the late seventies, William Thurston, a Princeton mathematician who liked to test out his ideas using scissors and construction paper, proposed a taxonomy for classifying manifolds of three dimensions. He argued that, while the manifolds could be made to take on many different shapes, they nonetheless had a 'preferred' geometry, just as a piece of silk draped over a dressmaker's mannequin takes on the mannequin's form.

Thurston proposed that every three-dimensional manifold could be broken down into one or more of eight types of component, including a spherical type. Thurston's theory — which became known as the geometrization conjecture — describes all possible three-dimensional manifolds and is thus a powerful generalization of the Poincaré. If it was confirmed, then Poincaré's conjecture would be, too. Proving Thurston and Poincaré "definitely swings open doors," Barry Mazur, a mathematician at Harvard, said. The implications of the conjectures for other disciplines may not be apparent for years, but for mathematicians the problems are fundamental. "This is a kind of twentieth-century Pythagorean theorem," Mazur added. "It changes the landscape."

In 1982, Thurston won a Fields Medal for his contributions to topology. That year, Richard Hamilton, a mathematician at Cornell, published a paper on an equation called the Ricci flow, which he suspected could be relevant for solving Thurston's conjecture and thus the Poincaré. Like a heat equation, which describes how heat distributes itself evenly through a substance — flowing from hotter to cooler parts of a metal sheet, for example — to create a more uniform temperature, the Ricci flow, by smoothing out irreg-

ularities, gives manifolds a more uniform geometry.

Hamilton, the son of a Cincinnati doctor, defied the math profession's nerdy stereotype. Brash and irreverent, he rode horses, windsurfed, and had a succession of girlfriends. He treated math as merely one of life's pleasures. At forty-nine, he was considered a brilliant lecturer, but he had published relatively little beyond a series of seminal articles on the Ricci flow, and he had few graduate students. Perelman had read Hamilton's papers and went to hear him give a talk at the Institute for Advanced Study. Afterward, Perelman shyly spoke to him.

"I really wanted to ask him something," Perelman recalled. "He was smiling, and he was quite patient. He actually told me a couple of things that he published a few years later. He did not hesitate to tell me. Hamilton's openness and generosity — it really attracted me. I can't say that most mathematicians act like that.

"I was working on different things, though occasionally I would think about the Ricci flow," Perelman added. "You didn't have to be a great mathematician to see that this would be useful for geometrization. I felt I didn't know very much. I kept asking questions."

Shing-Tung Yau was also asking Hamilton questions about the Ricci flow. Yau and Hamilton had met in the seventies, and had become close, despite considerable differences in temperament and background. A mathematician at the University of California at San Diego who knows both men called them "the mathematical loves of each other's lives."

Yau's family moved to Hong Kong from mainland China in 1949, when he was five months old, along with hundreds of thousands of other refugees fleeing Mao's armies. The previous year, his father, a relief worker for the United Nations, had lost most of the family's savings in a series of failed ventures. In Hong Kong, to support his wife and eight children, he tutored college students in classical Chinese literature and philosophy.

When Yau was fourteen, his father died of kidney cancer, leaving his mother dependent on handouts from Christian missionaries and whatever small sums she earned from selling handicrafts. Until then, Yau had been an indifferent student. But he began to devote himself to schoolwork, tutoring other students in math to make money. "Part of the thing that drives Yau is that he sees his own life as being his father's revenge," said Dan Stroock,

the MIT mathematician, who has known Yau for twenty years. "Yau's father was like the Talmudist whose children are starving."

Yau studied math at the Chinese University of Hong Kong, where he attracted the attention of Shiing-Shen Chern, the preëminent Chinese mathematician, who helped him win a scholarship to the University of California at Berkeley. Chern was the author of a famous theorem combining topology and geometry. He spent most of his career in the United States, at Berkeley. He made frequent visits to Hong Kong, Taiwan, and, later, China, where he was a revered symbol of Chinese intellectual achievement, to promote the study of math and science.

In 1969, Yau started graduate school at Berkeley, enrolling in seven graduate courses each term and auditing several others. He sent half of his scholarship money back to his mother in China and impressed his professors with his tenacity. He was obliged to share credit for his first major result when he learned that two other mathematicians were working on the same problem. In 1976, he proved a twenty-year-old conjecture pertaining to a type of manifold that is now crucial to string theory. A French mathematician had formulated a proof of the problem, which is known as Calabi's conjecture, but Yau's, because it was more general, was more powerful. (Physicists now refer to Calabi-Yau manifolds.) "He was not so much thinking up some original way of looking at a subject but solving extremely hard technical problems that at the time only he could solve, by sheer intellect and force of will," Phillip Griffiths, a geometer and a former director of the Institute for Advanced Study, said.

In 1980, when Yau was thirty, he became one of the youngest mathematicians ever to be appointed to the permanent faculty of the Institute for Advanced Study, and he began to attract talented students. He won a Fields Medal two years later, the first Chinese ever to do so. By this time, Chern was seventy years old and on the verge of retirement. According to a relative of Chern's, "Yau decided that he was going to be the next famous Chinese mathematician and that it was time for Chern to step down."

Harvard had been trying to recruit Yau, and when, in 1983, it was about to make him a second offer Phillip Griffiths told the dean of faculty a version of a story from 'The Romance of the Three Kingdoms,' a Chinese classic. In the third century A.D., a Chinese warlord dreamed of creating an empire, but the most brilliant general in China was working for a rival. Three

times, the warlord went to his enemy's kingdom to seek out the general. Impressed, the general agreed to join him, and together they succeeded in founding a dynasty. Taking the hint, the dean flew to Philadelphia, where Yau lived at the time, to make him an offer. Even so, Yau turned down the job. Finally, in 1987, he agreed to go to Harvard.

Yau's entrepreneurial drive extended to collaborations with colleagues and students, and, in addition to conducting his own research, he began organizing seminars. He frequently allied himself with brilliantly inventive mathematicians, including Richard Schoen and William Meeks. But Yau was especially impressed by Hamilton, as much for his swagger as for his imagination. "I can have fun with Hamilton," Yau told us during the string-theory conference in Beijing. "I can go swimming with him. I go out with him and his girlfriends and all that." Yau was convinced that Hamilton could use the Ricci-flow equation to solve the Poincaré and Thurston conjectures, and he urged him to focus on the problems. "Meeting Yau changed his mathematical life," a friend of both mathematicians said of Hamilton. "This was the first time he had been on to something extremely big. Talking to Yau gave him courage and direction."

Yau believed that if he could help solve the Poincaré it would be a victory not just for him but also for China. In the mid-nineties, Yau and several other Chinese scholars began meeting with President Jiang Zemin to discuss how to rebuild the country's scientific institutions, which had been largely destroyed during the Cultural Revolution. Chinese universities were in dire condition. According to Steve Smale, who won a Fields for proving the Poincaré in higher dimensions, and who, after retiring from Berkeley, taught in Hong Kong, Peking University had "halls filled with the smell of urine, one common room, one office for all the assistant professors," and paid its faculty wretchedly low salaries. Yau persuaded a Hong Kong real-estate mogul to help finance a mathematics institute at the Chinese Academy of Sciences, in Beijing, and to endow a Fields-style medal for Chinese mathematicians under the age of forty-five. On his trips to China, Yau touted Hamilton and their joint work on the Ricci flow and the Poincaré as a model for young Chinese mathematicians. As he put it in Beijing, "They always say that the whole country should learn from Mao or some big heroes. So I made a joke to them, but I was half serious. I said the whole country should learn from Hamilton."

Grigory Perelman was learning from Hamilton already. In 1993, he began a two-year fellowship at Berkeley. While he was there, Hamilton gave several talks on campus, and in one he mentioned that he was working on the Poincaré. Hamilton's Ricci flow strategy was extremely technical and tricky to execute. After one of his talks at Berkeley, he told Perelman about his biggest obstacle. As a space is smoothed under the Ricci flow, some regions deform into what mathematicians refer to as 'singularities.' Some regions, called 'necks,' become attenuated areas of infinite density. More troubling to Hamilton was a kind of singularity he called the 'cigar.' If cigars formed, Hamilton worried, it might be impossible to achieve uniform geometry. Perelman realized that a paper he had written on Alexandrov spaces might help Hamilton prove Thurston's conjecture — and the Poincaré — once Hamilton solved the cigar problem. "At some point, I asked Hamilton if he knew a certain collapsing result that I had proved but not published — which turned out to be very useful," Perelman said. "Later, I realized that he didn't understand what I was talking about." Dan Stroock, of MIT, said, "Perelman may have learned stuff from Yau and Hamilton, but, at the time, they were not learning from him."

By the end of his first year at Berkeley, Perelman had written several strikingly original papers. He was asked to give a lecture at the 1994 IMU congress, in Zurich, and invited to apply for jobs at Stanford, Princeton, the Institute for Advanced Study, and the University of Tel Aviv. Like Yau, Perelman was a formidable problem solver. Instead of spending years constructing an intricate theoretical framework, or defining new areas of research, he focused on obtaining particular results. According to Mikhail Gromov, a renowned Russian geometer who has collaborated with Perelman, he had been trying to overcome a technical difficulty relating to Alexandrov spaces and had apparently been stumped. "He couldn't do it," Gromov said. "It was hopeless."

Perelman told us that he liked to work on several problems at once. At Berkeley, however, he found himself returning again and again to Hamilton's Ricci flow equation and the problem that Hamilton thought he could solve with it. Some of Perelman's friends noticed that he was becoming more and more ascetic. Visitors from St. Petersburg who stayed in his apartment were struck by how sparsely furnished it was. Others worried that he seemed to want to reduce life to a set of rigid axioms. When a member of a hiring com-

mittee at Stanford asked him for a C.V. to include with requests for letters of recommendation, Perelman balked. "If they know my work, they don't need my C.V.," he said. "If they need my C.V., they don't know my work."

Ultimately, he received several job offers. But he declined them all, and in the summer of 1995 returned to St. Petersburg, to his old job at the Steklov Institute, where he was paid less than a hundred dollars a month. (He told a friend that he had saved enough money in the United States to live on for the rest of his life.) His father had moved to Israel two years earlier, and his younger sister was planning to join him there after she finished college. His mother, however, had decided to remain in St. Petersburg, and Perelman moved in with her. "I realize that in Russia I work better," he told colleagues at the Steklov.

At twenty-nine, Perelman was firmly established as a mathematician and yet largely unburdened by professional responsibilities. He was free to pursue whatever problems he wanted to, and he knew that his work, should he choose to publish it, would be shown serious consideration. Yakov Eliashberg, a mathematician at Stanford who knew Perelman at Berkeley, thinks that Perelman returned to Russia in order to work on the Poincaré. "Why not?" Perelman said when we asked whether Eliashberg's hunch was correct.

The Internet made it possible for Perelman to work alone while continuing to tap a common pool of knowledge. Perelman searched Hamilton's papers for clues to his thinking and gave several seminars on his work. "He didn't need any help," Gromov said. "He likes to be alone. He reminds me of Newton — this obsession with an idea, working by yourself, the disregard for other people's opinion. Newton was more obnoxious. Perelman is nicer, but very obsessed."

In 1995, Hamilton published a paper in which he discussed a few of his ideas for completing a proof of the Poincaré. Reading the paper, Perelman realized that Hamilton had made no progress on overcoming his obstacles — the necks and the cigars. "I hadn't seen any evidence of progress after early 1992," Perelman told us. "Maybe he got stuck even earlier." However, Perelman thought he saw a way around the impasse. In 1996, he wrote Hamilton a long letter outlining his notion, in the hope of collaborating. "He did not answer," Perelman said. "So I decided to work alone."

Yau had no idea that Hamilton's work on the Poincaré had stalled. He was increasingly anxious about his own standing in the

mathematics profession, particularly in China, where, he worried, a younger scholar could try to supplant him as Chern's heir. More than a decade had passed since Yau had proved his last major result, though he continued to publish prolifically. "Yau wants to be the king of geometry," Michael Anderson, a geometer at Stony Brook, said. "He believes that everything should issue from him, that he should have oversight. He doesn't like people encroaching on his territory." Determined to retain control over his field, Yau pushed his students to tackle big problems. At Harvard, he ran a notoriously tough seminar on differential geometry, which met for three hours at a time three times a week. Each student was assigned a recently published proof and asked to reconstruct it, fixing any errors and filling in gaps. Yau believed that a mathematician has an obligation to be explicit, and impressed on his students the importance of step-by-step rigor.

There are two ways to get credit for an original contribution in mathematics. The first is to produce an original proof. The second is to identify a significant gap in someone else's proof and supply the missing chunk. However, only true mathematical gaps — missing or mistaken arguments — can be the basis for a claim of originality. Filling in gaps in exposition — shortcuts and abbreviations used to make a proof more efficient — does not count. When, in 1993, Andrew Wiles revealed that a gap had been found in his proof of Fermat's last theorem, the problem became fair game for anyone, until, the following year, Wiles fixed the error. Most mathematicians would agree that, by contrast, if a proof's implicit steps can be made explicit by an expert, then the gap is merely one of exposition, and the proof should be considered complete and correct.

Occasionally, the difference between a mathematical gap and a gap in exposition can be hard to discern. On at least one occasion, Yau and his students have seemed to confuse the two, making claims of originality that other mathematicians believe are unwarranted. In 1996, a young geometer at Berkeley named Alexander Givental had proved a mathematical conjecture about mirror symmetry, a concept that is fundamental to string theory. Though other mathematicians found Givental's proof hard to follow, they were optimistic that he had solved the problem. As one geometer put it, "Nobody at the time said it was incomplete and incorrect."

In the fall of 1997, Kefeng Liu, a former student of Yau's who taught at Stanford, gave a

talk at Harvard on mirror symmetry. According to two geometers in the audience, Liu proceeded to present a proof strikingly similar to Givental's, describing it as a paper that he had co-authored with Yau and another student of Yau's. "Liu mentioned Givental but only as one of a long list of people who had contributed to the field," one of the geometers said. (Liu maintains that his proof was significantly different from Givental's.)

Around the same time, Givental received an e-mail signed by Yau and his collaborators, explaining that they had found his arguments impossible to follow and his notation baffling, and had come up with a proof of their own. They praised Givental for his "brilliant idea" and wrote, "In the final version of our paper your important contribution will be acknowledged."

A few weeks later, the paper, "Mirror Principle I," appeared in the *Asian Journal of Mathematics*, which is co-edited by Yau. In it, Yau and his coauthors describe their result as "the first complete proof" of the mirror conjecture. They mention Givental's work only in passing. "Unfortunately," they write, his proof, "which has been read by many prominent experts, is incomplete." However, they did not identify a specific mathematical gap.

Givental was taken aback. "I wanted to know what their objection was," he told us. "Not to expose them or defend myself." In March, 1998, he published a paper that included a three-page footnote in which he pointed out a number of similarities between Yau's proof and his own. Several months later, a young mathematician at the University of Chicago who was asked by senior colleagues to investigate the dispute concluded that Givental's proof was complete. Yau says that he had been working on the proof for years with his students and that they achieved their result independently of Givental. "We had our own ideas, and we wrote them up," he says.

Around this time, Yau had his first serious conflict with Chern and the Chinese mathematical establishment. For years, Chern had been hoping to bring the IMU's congress to Beijing. According to several mathematicians who were active in the IMU at the time, Yau made an eleventh-hour effort to have the congress take place in Hong Kong instead. But he failed to persuade a sufficient number of colleagues to go along with his proposal, and the IMU ultimately decided to hold the 2002 congress in Beijing. (Yau denies that he tried to bring the congress to Hong Kong.) Among the delegates the IMU appointed to

a group that would be choosing speakers for the congress was Yau's most successful student, Gang Tian, who had been at NYU with Perelman and was now a professor at MIT. The host committee in Beijing also asked Tian to give a plenary address.

Yau was caught by surprise. In March, 2000, he had published a survey of recent research in his field studded with glowing references to Tian and to their joint projects. He retaliated by organizing his first conference on string theory, which opened in Beijing a few days before the math congress began, in late August, 2002. He persuaded Stephen Hawking and several Nobel laureates to attend, and for days the Chinese newspapers were full of pictures of famous scientists. Yau even managed to arrange for his group to have an audience with Jiang Zemin. A mathematician who helped organize the math congress recalls that along the highway between Beijing and the airport there were "billboards with pictures of Stephen Hawking plastered everywhere."

That summer, Yau wasn't thinking much about the Poincaré. He had confidence in Hamilton, despite his slow pace. "Hamilton is a very good friend," Yau told us in Beijing. "He is more than a friend. He is a hero. He is so original. We were working to finish our proof. Hamilton worked on it for twenty-five years. You work, you get tired. He probably got a little tired — and you want to take a rest."

Then, on November 12, 2002, Yau received an e-mail message from a Russian mathematician whose name didn't immediately register. "May I bring to your attention my paper," the e-mail said.

On November 11th, Perelman had posted a thirty-nine-page paper entitled "The Entropy Formula for the Ricci Flow and Its Geometric Applications," on arXiv.org, a Web site used by mathematicians to post preprints — articles awaiting publication in refereed journals. He then e-mailed an abstract of his paper to a dozen mathematicians in the United States — including Hamilton, Tian, and Yau — none of whom had heard from him for years. In the abstract, he explained that he had written "a sketch of an eclectic proof" of the geometrization conjecture.

Perelman had not mentioned the proof or shown it to anyone. "I didn't have any friends with whom I could discuss this," he said in St. Petersburg. "I didn't want to discuss my work with someone I didn't trust." Andrew Wiles had also kept the fact that he was working on Fermat's last theorem a secret, but he had had a colleague vet the proof before mak-

ing it public. Perelman, by casually posting a proof on the Internet of one of the most famous problems in mathematics, was not just flouting academic convention but taking a considerable risk. If the proof was flawed, he would be publicly humiliated, and there would be no way to prevent another mathematician from fixing any errors and claiming victory. But Perelman said he was not particularly concerned. "My reasoning was: if I made an error and someone used my work to construct a correct proof I would be pleased," he said. "I never set out to be the sole solver of the Poincaré."

Gang Tian was in his office at MIT when he received Perelman's e-mail. He and Perelman had been friendly in 1992, when they were both at NYU and had attended the same weekly math seminar in Princeton. "I immediately realized its importance," Tian said of Perelman's paper. Tian began to read the paper and discuss it with colleagues, who were equally enthusiastic.

On November 19th, Vitali Kapovitch, a geometer, sent Perelman an e-mail:

Hi Grisha, Sorry to bother you but a lot of people are asking me about your preprint "The entropy formula for the Ricci..." Do I understand it correctly that while you cannot yet do all the steps in the Hamilton program you can do enough so that using some collapsing results you can prove geometrization? Vitali.

Perelman's response, the next day, was terse: "That's correct. Grisha."

In fact, what Perelman had posted on the Internet was only the first installment of his proof. But it was sufficient for mathematicians to see that he had figured out how to solve the Poincaré. Barry Mazur, the Harvard mathematician, uses the image of a dented fender to describe Perelman's achievement: "Suppose your car has a dented fender and you call a mechanic to ask how to smooth it out. The mechanic would have a hard time telling you what to do over the phone. You would have to bring the car into the garage for him to examine. Then he could tell you where to give it a few knocks. What Hamilton introduced and Perelman completed is a procedure that is independent of the particularities of the blemish. If you apply the Ricci flow to a 3-D space, it will begin to undent it and smooth it out. The mechanic would not need to even see the car — just apply the equation." Perelman proved that the 'cigars' that had troubled Hamilton could not actually occur, and he showed that the 'neck' problem could be solved by performing an intricate sequence of mathematical surg-

eries: cutting out singularities and patching up the raw edges. "Now we have a procedure to smooth things and, at crucial points, control the breaks," Mazur said.

Tian wrote to Perelman, asking him to lecture on his paper at MIT Colleagues at Princeton and Stony Brook extended similar invitations. Perelman accepted them all and was booked for a month of lectures beginning in April, 2003. "Why not?" he told us with a shrug. Speaking of mathematicians generally, Fedor Nazarov, a mathematician at Michigan State University, said, "After you've solved a problem, you have a great urge to talk about it."

Hamilton and Yau were stunned by Perelman's announcement. "We felt that nobody else would be able to discover the solution," Yau told us in Beijing. "But then, in 2002, Perelman said that he published something. He basically did a shortcut without doing all the detailed estimates that we did." Moreover, Yau complained, Perelman's proof "was written in such a messy way that we didn't understand."

Perelman's April lecture tour was treated by mathematicians and by the press as a major event. Among the audience at his talk at Princeton were John Ball, Andrew Wiles, John Forbes Nash, Jr., who had proved the Riemannian embedding theorem, and John Conway, the inventor of the cellular automaton game Life. To the astonishment of many in the audience, Perelman said nothing about the Poincaré. "Here is a guy who proved a world-famous theorem and didn't even mention it," Frank Quinn, a mathematician at Virginia Tech, said. "He stated some key points and special properties, and then answered questions. He was establishing credibility. If he had beaten his chest and said, 'I solved it,' he would have got a huge amount of resistance." He added, "People were expecting a strange sight. Perelman was much more normal than they expected."

To Perelman's disappointment, Hamilton did not attend that lecture or the next ones, at Stony Brook. "I'm a disciple of Hamilton's, though I haven't received his authorization," Perelman told us. But John Morgan, at Columbia, where Hamilton now taught, was in the audience at Stony Brook, and after a lecture he invited Perelman to speak at Columbia. Perelman, hoping to see Hamilton, agreed. The lecture took place on a Saturday morning. Hamilton showed up late and asked no questions during either the long discussion session that followed the talk or the lunch after that. "I had the impression he had

read only the first part of my paper," Perelman said.

In the April 18, 2003, issue of *Science*, Yau was featured in an article about Perelman's proof: "Many experts, although not all, seem convinced that Perelman has stubbed out the cigars and tamed the narrow necks. But they are less confident that he can control the number of surgeries. That could prove a fatal flaw, Yau warns, noting that many other attempted proofs of the Poincaré conjecture have stumbled over similar missing steps." Proofs should be treated with skepticism until mathematicians have had a chance to review them thoroughly, Yau told us. Until then, he said, "it's not math — it's religion."

By mid-July, Perelman had posted the final two installments of his proof on the Internet, and mathematicians had begun the work of formal explication, painstakingly retracing his steps. In the United States, at least two teams of experts had assigned themselves this task: Gang Tian (Yau's rival) and John Morgan; and a pair of researchers at the University of Michigan. Both projects were supported by the Clay Institute, which planned to publish Tian and Morgan's work as a book. The book, in addition to providing other mathematicians with a guide to Perelman's logic, would allow him to be considered for the Clay Institute's million-dollar prize for solving the Poincaré. (To be eligible, a proof must be published in a peer-reviewed venue and withstand two years of scrutiny by the mathematical community.)

On September 10, 2004, more than a year after Perelman returned to St. Petersburg, he received a long e-mail from Tian, who said that he had just attended a two-week workshop at Princeton devoted to Perelman's proof. "I think that we have understood the whole paper," Tian wrote. "It is all right."

Perelman did not write back. As he explained to us, "I didn't worry too much myself. This was a famous problem. Some people needed time to get accustomed to the fact that this is no longer a conjecture. I personally decided for myself that it was right for me to stay away from verification and not to participate in all these meetings. It is important for me that I don't influence this process."

In July of that year, the National Science Foundation had given nearly a million dollars in grants to Yau, Hamilton, and several students of Yau's to study and apply Perelman's "breakthrough." An entire branch of mathematics had grown up around efforts to solve the Poincaré, and now that branch appeared at risk of becoming obsolete. Michael Freedman, who won a Fields for proving the

Poincaré conjecture for the fourth dimension, told the *Times* that Perelman's proof was a "small sorrow for this particular branch of topology." Yuri Burago said, "It kills the field. After this is done, many mathematicians will move to other branches of mathematics."

Five months later, Chern died, and Yau's efforts to insure that he — not Tian — was recognized as his successor turned vicious. "It's all about their primacy in China and their leadership among the expatriate Chinese," Joseph Kohn, a former chairman of the Princeton mathematics department, said. "Yau's not jealous of Tian's mathematics, but he's jealous of his power back in China."

Though Yau had not spent more than a few months at a time on mainland China since he was an infant, he was convinced that his status as the only Chinese Fields Medal winner should make him Chern's successor. In a speech he gave at Zhejiang University, in Hangzhou, during the summer of 2004, Yau reminded his listeners of his Chinese roots. "When I stepped out from the airplane, I touched the soil of Beijing and felt great joy to be in my mother country," he said. "I am proud to say that when I was awarded the Fields Medal in mathematics, I held no passport of any country and should certainly be considered Chinese."

The following summer, Yau returned to China and, in a series of interviews with Chinese reporters, attacked Tian and the mathematicians at Peking University. In an article published in a Beijing science newspaper, which ran under the headline "SHING-TUNG YAU IS SLAMMING ACADEMIC CORRUPTION IN CHINA," Yau called Tian "a complete mess." He accused him of holding multiple professorships and of collecting a hundred and twenty-five thousand dollars for a few months' work at a Chinese university, while students were living on a hundred dollars a month. He also charged Tian with shoddy scholarship and plagiarism, and with intimidating his graduate students into letting him add his name to their papers. "Since I promoted him all the way to his academic fame today, I should also take responsibility for his improper behavior," Yau was quoted as saying to a reporter, explaining why he felt obliged to speak out.

In another interview, Yau described how the Fields committee had passed Tian over in 1988 and how he had lobbied on Tian's behalf with various prize committees, including one at the National Science Foundation, which awarded Tian five hundred thousand dollars in 1994.

Tian was appalled by Yau's attacks, but he

felt that, as Yau's former student, there was little he could do about them. "His accusations were baseless," Tian told us. But, he added, "I have deep roots in Chinese culture. A teacher is a teacher. There is respect. It is very hard for me to think of anything to do."

While Yau was in China, he visited Xi-Ping Zhu, a protégé of his who was now chairman of the mathematics department at Sun Yat-sen University. In the spring of 2003, after Perelman completed his lecture tour in the United States, Yau had recruited Zhu and another student, Huai-Dong Cao, a professor at Lehigh University, to undertake an explication of Perelman's proof. Zhu and Cao had studied the Ricci flow under Yau, who considered Zhu, in particular, to be a mathematician of exceptional promise. "We have to figure out whether Perelman's paper holds together," Yau told them. Yau arranged for Zhu to spend the 2005-06 academic year at Harvard, where he gave a seminar on Perelman's proof and continued to work on his paper with Cao.

On April 13th of this year, the thirty-one mathematicians on the editorial board of the *Asian Journal of Mathematics* (AJM) received a brief e-mail from Yau and the journal's co-editor informing them that they had three days to comment on a paper by Xi-Ping Zhu and Huai-Dong Cao titled "The Hamilton-Perelman Theory of Ricci Flow: The Poincaré and Geometrization Conjectures," which Yau planned to publish in the journal. The e-mail did not include a copy of the paper, reports from referees, or an abstract. At least one board member asked to see the paper but was told that it was not available. On April 16th, Cao received a message from Yau telling him that the paper had been accepted by the AJM, and an abstract was posted on the journal's Web site.

A month later, Yau had lunch in Cambridge with Jim Carlson, the president of the Clay Institute. He told Carlson that he wanted to trade a copy of Zhu and Cao's paper for a copy of Tian and Morgan's book manuscript. Yau told us he was worried that Tian would try to steal from Zhu and Cao's work, and he wanted to give each party simultaneous access to what the other had written. "I had a lunch with Carlson to request to exchange both manuscripts to make sure that nobody can copy the other," Yau said. Carlson demurred, explaining that the Clay Institute had not yet received Tian and Morgan's complete manuscript.

By the end of the following week, the title of Zhu and Cao's paper on the AJM's Web site had changed, to 'A Complete Proof

of the Poincaré and Geometrization Conjectures: Application of the Hamilton-Perelman Theory of the Ricci Flow.' The abstract had also been revised. A new sentence explained, "This proof should be considered as the crowning achievement of the Hamilton-Perelman theory of Ricci flow."

Zhu and Cao's paper was more than three hundred pages long and filled the AJM's entire June issue. The bulk of the paper is devoted to reconstructing many of Hamilton's Ricci flow results — including results that Perelman had made use of in his proof — and much of Perelman's proof of the Poincaré. In their introduction, Zhu and Cao credit Perelman with having "brought in fresh new ideas to figure out important steps to overcome the main obstacles that remained in the program of Hamilton." However, they write, they were obliged to "substitute several key arguments of Perelman by new approaches based on our study, because we were unable to comprehend these original arguments of Perelman which are essential to the completion of the geometrization program." Mathematicians familiar with Perelman's proof disputed the idea that Zhu and Cao had contributed significant new approaches to the Poincaré. "Perelman already did it and what he did was complete and correct," John Morgan said. "I don't see that they did anything different."

By early June, Yau had begun to promote the proof publicly. On June 3rd, at his mathematics institute in Beijing, he held a press conference. The acting director of the mathematics institute, attempting to explain the relative contributions of the different mathematicians who had worked on the Poincaré, said, "Hamilton contributed over fifty per cent; the Russian, Perelman, about twenty-five per cent; and the Chinese, Yau, Zhu, and Cao et al., about thirty per cent." (Evidently, simple addition can sometimes trip up even a mathematician.) Yau added, "Given the significance of the Poincaré, that Chinese mathematicians played a thirty-per-cent role is by no means easy. It is a very important contribution."

On June 12th, the week before Yau's conference on string theory opened in Beijing, the *South China Morning Post* reported, "Mainland mathematicians who helped crack a 'millennium math problem' will present the methodology and findings to physicist Stephen Hawking. . . Yau Shing-Tung, who organized Professor Hawking's visit and is also Professor Cao's teacher, said yesterday he would present the findings to Professor Hawking because he believed the knowledge would

help his research into the formation of black holes.”

On the morning of his lecture in Beijing, Yau told us, “We want our contribution understood. And this is also a strategy to encourage Zhu, who is in China and who has done really spectacular work. I mean, important work with a century-long problem, which will probably have another few century-long implications. If you can attach your name in any way, it is a contribution.”

E.T. Bell, the author of *Men of Mathematics*, a witty history of the discipline published in 1937, once lamented “the squabbles over priority which disfigure scientific history.” But in the days before e-mail, blogs, and Web sites, a certain decorum usually prevailed. In 1881, Poincaré, who was then at the University of Caen, had an altercation with a German mathematician in Leipzig named Felix Klein. Poincaré had published several papers in which he labelled certain functions ‘Fuchsian,’ after another mathematician. Klein wrote to Poincaré, pointing out that he and others had done significant work on these functions, too. An exchange of polite letters between Leipzig and Caen ensued. Poincaré’s last word on the subject was a quote from Goethe’s *Faust*: “Name ist Schall und Rauch.” Loosely translated, that corresponds to Shakespeare’s “What’s in a name?”

This, essentially, is what Yau’s friends are asking themselves. “I find myself getting annoyed with Yau that he seems to feel the need for more kudos,” Dan Stroock, of MIT, said. “This is a guy who did magnificent things, for which he was magnificently rewarded. He won every prize to be won. I find it a little mean of him to seem to be trying to get a share of this as well.” Stroock pointed out that, twenty-five years ago, Yau was in a situation very similar to the one Perelman is in today. His most famous result, on Calabi-Yau manifolds, was hugely important for theoretical physics. “Calabi outlined a program,” Stroock said. “In a real sense, Yau was Calabi’s Perelman. Now he’s on the other side. He’s had no compunction at all in taking the lion’s share of credit for Calabi-Yau. And now he seems to be resenting Perelman getting credit for completing Hamilton’s program. I don’t know if the analogy has ever occurred to him.”

Mathematics, more than many other fields, depends on collaboration. Most problems require the insights of several mathematicians in order to be solved, and the profession has evolved a standard for crediting

individual contributions that is as stringent as the rules governing math itself. As Perelman put it, “If everyone is honest, it is natural to share ideas.” Many mathematicians view Yau’s conduct over the Poincaré as a violation of this basic ethic, and worry about the damage it has caused the profession. “Politics, power, and control have no legitimate role in our community, and they threaten the integrity of our field,” Phillip Griffiths said.

Perelman likes to attend opera performances at the Mariinsky Theatre, in St. Petersburg. Sitting high up in the back of the house, he can’t make out the singers’ expressions or see the details of their costumes. But he cares only about the sound of their voices, and he says that the acoustics are better where he sits than anywhere else in the theatre. Perelman views the mathematics community — and much of the larger world — from a similar remove.

Before we arrived in St. Petersburg, on June 23rd, we had sent several messages to his e-mail address at the Steklov Institute, hoping to arrange a meeting, but he had not replied. We took a taxi to his apartment building and, reluctant to intrude on his privacy, left a book — a collection of John Nash’s papers — in his mailbox, along with a card saying that we would be sitting on a bench in a nearby playground the following afternoon. The next day, after Perelman failed to appear, we left a box of pearl tea and a note describing some of the questions we hoped to discuss with him. We repeated this ritual a third time. Finally, believing that Perelman was out of town, we pressed the buzzer for his apartment, hoping at least to speak with his mother. A woman answered and let us inside. Perelman met us in the dimly lit hallway of the apartment. It turned out that he had not checked his Steklov e-mail address for months, and had not looked in his mailbox all week. He had no idea who we were.

We arranged to meet at ten the following morning on Nevsky Prospekt. From there, Perelman, dressed in a sports coat and loafers, took us on a four-hour walking tour of the city, commenting on every building and vista. After that, we all went to a vocal competition at the St. Petersburg Conservatory, which lasted for five hours. Perelman repeatedly said that he had retired from the mathematics community and no longer considered himself a professional mathematician. He mentioned a dispute that he had had years earlier with a collaborator over how to credit the author of a particular proof, and said that he was dismayed by the discipline’s lax

ethics. “It is not people who break ethical standards who are regarded as aliens,” he said. “It is people like me who are isolated.” We asked him whether he had read Cao and Zhu’s paper. “It is not clear to me what new contribution did they make,” he said. “Apparently, Zhu did not quite understand the argument and reworked it.” As for Yau, Perelman said, “I can’t say I’m outraged. Other people do worse. Of course, there are many mathematicians who are more or less honest. But almost all of them are conformists. They are more or less honest, but they tolerate those who are not honest.”

The prospect of being awarded a Fields Medal had forced him to make a complete break with his profession. “As long as I was not conspicuous, I had a choice,” Perelman explained. “Either to make some ugly thing — a fuss about the math community’s lack of integrity — or, if I didn’t do this kind of thing, to be treated as a pet. Now, when I become a very conspicuous person, I cannot stay a pet and say nothing. That is why I had to quit.” We asked Perelman whether, by refusing the Fields and withdrawing from his profession, he was eliminating any possibility of influencing the discipline. “I am not a politician!” he replied, angrily. Perelman would not say whether his objection to awards extended to the Clay Institute’s million-dollar prize. “I’m not going to decide whether to accept the prize until it is offered,” he said.

Mikhail Gromov, the Russian geometer, said that he understood Perelman’s logic: “To do great work, you have to have a pure mind. You can think only about the mathematics. Everything else is human weakness. Accepting prizes is showing weakness.” Others might view Perelman’s refusal to accept a Fields as arrogant, Gromov said, but his principles are admirable. “The ideal scientist does science and cares about nothing else,” he said. “He wants to live this ideal. Now, I don’t think he really lives on this ideal plane. But he wants to.”

Accreditation ‘A Manifold Destiny’ © August 28, 2006 by Sylvia Nasar and David Gruber. This article originally appeared in *The New Yorker* Magazine. Reprinted by permission of the authors.

Jozef Steenbrink

Faculteit der Natuurwetenschappen, Wiskunde en Informatica

Radboud Universiteit Nijmegen

Toernooiveld 1

6525 ED Nijmegen

j.steenbrink@math.ru.nl

Manifold Destiny

Rechtvaardiging of heiligverklaring?

In het voorafgaand artikel van Nasar en Gruber wordt met veel flair een beeld geschilderd van de totstandkoming van het bewijs van het vermoeden van Poincaré. Ook kunnen we lezen over de strijd om het intellectuele eigendom van dit resultaat. Het verschijnen van het artikel heeft de wiskundewereld sterk in beroering gebracht; de zaken staan dusdanig op scherp dat er met rechtszaken is gedreigd. Hoe objectief zijn Nasar en Gruber geweest? Waarom dreigt Yau na plaatsing van hun artikel meteen met een rechtzaak? Is de aanval wellicht de beste verdediging? Jozef Steenbrink, algebraïsch meetkundige, sinds 1978 lector en hoogleraar meetkunde in Leiden en sinds 1988 hoogleraar meetkunde aan de Radboud Universiteit te Nijmegen, geeft zijn visie op het artikel.

De lezer die van het spannende relaas van Sylvia Nasar en David Gruber tot het einde toe kennis heeft genomen zal zich niet verbazen dat het veel stof heeft doen opwaaien. Allereerst bij Shing-Tung Yau zelf, die op 18 september fel protest aantekent via zijn advocaat (de 'Cooper letter'). De aantijgingen aan het adres van Yau worden daarin nog eens bondig samengevat:

- Yau wordt neergezet als een wiskundige die zijn beste tijd heeft gehad en de laatste tien jaar geen bijdrage van betekenis meer heeft geleverd.
- Yau wordt de reputatie toegeschreven ontwikkeld te raken in prioriteitskwesies met onterechte claims van zijn kant.
- Yau zou zijn studenten het werk laten doen en dan zelf met de eer gaan strijken.
- Yau zou zijn status in China hebben trach-

ten te verhogen door een deel van de oplossing van het Poincarévermoeden voor zich op te eisen.

In deze brief worden bovendien talrijke feiten betwist die in het artikel als argument gebruikt worden. Tevens worden de auteurs beticht van misleiding, omdat zij hun interviews onder valse voorwendsels hebben afgenomen. Op Yau's website [1] is een lijst te vinden van geïnterviewden die zich misleid weten en van anderen die protesteren tegen het van Yau geschetste beeld.

Waar gaat het eigenlijk allemaal over? In het geding zijn vooral ethische beginselen bij het bedrijven van wetenschap. Nasar en Gruber hebben ervoor gekozen daartoe twee personen met elkaar te contrasteren: Grigory Perelman, de onthechte kluizenaar die groten-deels in afzondering heeft gewerkt en voor

wie de correctheid van zijn bewijs reeds vol-doende erkenning is, en Shing-Tung Yau, neergezet als een imperiumbouwer met een gigantisch ego. Op geraffineerde wijze ping-pongt het artikel tussen deze beide tegenpo-len heen en weer, met als effect enerzijds de heiligverklaring van Perelman, nog versterkt door diens weigering de Fieldsmedaille te ac-cepteren, en de ontluistering van Yau, die wordt afgeschilderd als een hebbelijke boef die Perelman van zijn medaille dreigt te be-roven. Dit alles geïllustreerd door een spre-kende karikatuur. Schande: die Yau had toch al een Fieldsmedaille? Is hij dan nooit tevreden?

Nu schijnt Yau niet de gemakkelijkste per-soon te zijn om mee om te gaan. Hij schuwt de confrontatie niet, en veel personen heb-ben wel een of andere aanleiding om iets negatiefs over hem te berde te brengen. Het moet dan ook voor Nasar en Gruber niet lastig zijn geweest minpunten van Yau's karakter te ontlenuen aan hun interviews. Dennis Overbye schetste in de New York Times van 17 oktober een meer genuanceerd beeld met zijn artikel getiteld 'The Emperor of Math'[2] waarin diver-se collega's van Yau, zoals Richard Hamilton ("Yau liked to be in the center of things") en John Morgan ("His virtues are larger than life,

and his vices are larger than life”) reliëf geven aan Yau’s persoonlijkheid.

Bij tenminste één gelegenheid heeft Yau zelf de ethische maat van zijn collega’s gemeeten. Het gaat hierbij om de Tian-Yau [3] affaire, ook vermeld in het artikel in de *New Yorker*. De gang van zaken daarbij lijkt illustratief voor Yau’s werkwijze: snel de publiciteit zoeken met een frontale aanval.

Het is tegenwoordig niet ongebruikelijk dat via preprintservers voorlopige versies van bewijzen circuleren. Wanneer het gaat om een probleem van het formaat als het Poincarévermoeden met een belangrijke impact op het vakgebied dan ontstaat een ongemakkelijke situatie. Het kan geruime tijd duren alvorens duidelijk is of de aanpak in de preprint de juiste is, want veel details ontbreken. Bij het Poincarévermoeden ging het om een periode van ruim drie jaar. Zo’n situatie kan worden opgehelderd op verschillende manieren: via contact met de auteur die lezingen houdt over zijn aanpak, of via een seminarium waarin experts proberen de details in te vullen. In Nederland hadden we in 1996 zo’n seminarium naar aanleiding van Givental’s bewijs van de Mirror Conjecture, een onderwerp waar Yau zich destijds ook op heeft geworpen (zie zijn website voor een recente discussie over prioriteiten in deze kwestie). Naast de lezingen die Perelman in de US hield over zijn benadering van de singulariteiten van de Ricci Flow zijn op zijn minst twee teams aan de slag gegaan om de bewijzen uit te werken. Dat was nodig omdat Perelman zelf geen aanstalten maakte een gedetailleerd bewijs op te schrij-

ven.

Yau stimuleerde Huai-Dong Cao en Xi-Ping Zhu tot het bewerken van Perelmans bewijs. In hun artikel ‘A Complete Proof of the Poincaré and Geometrization Conjectures — Application of the Hamilton-Perelman Theory of the Ricci Flow’ wordt de rol van Perelman niet verzwegen maar ligt toch de nadruk op hun eigen bijdragen en nieuwe argumenten die onduidelijkheden (onbegrepen argumenten) in Perelmans werk moesten vervangen. De gang van zaken rond de publicatie van het artikel van Huai-Dong Cao en Xi-Ping Zhu in het *Asian Journal of Mathematics* roept veel vragen op. Bij de meeste tijdschriften die ik goed ken wordt een zorgvuldige procedure gehanteerd wanneer een redactielid een artikel aanbiedt van de hand van zijn studenten. De vaste regel is, dat de betreffende redacteur volledig buiten het beoordelingsproces van dat artikel wordt gehouden. Publicatie van een artikel van eigen studenten doordrukken als hoofdredacteur is een handelswijze die volstrekt moet worden verworpen, en strijdig is met het principe van peer review. Het is ook nadelig voor de auteurs van dat artikel, omdat de indruk ontstaat dat zij deze protectie nodig hadden.

John Morgan en Gang Tian zijn ook aan de slag gegaan, en hun arbeid leidde tot een eveneens zeer omvangrijk manuscript. Zij zijn tot de conclusie gekomen dat de aanpak van Perelman de juiste is. Morgan hield hierover een speciale voordracht op het International Congress of Mathematicians afgelopen zomer te Madrid. Hij concludeert: “Recently,

G. Perelman, following a program outlined by R. Hamilton, has given a complete solution to this problem.” (Overigens benadrukt Hamilton de belangrijke rol die Yau heeft gespeeld in de ontwikkeling van de theorie van de Ricci Flow). De strekking van Morgans voordracht was, de prestaties van Perelman duidelijk voor het voetlicht te halen. Op de website van het Clay Mathematics Institute [4] zijn links te vinden naar het boek van Morgan en Tian, alsmede naar vele andere bronnen zoals de artikelen van Perelman en het artikel van Huai-Dong Cao en Xi-Ping Zhu. Op zijn minst kan worden gesteld dat Morgan en Tian met meer respect zijn omgegaan met Perelmans werk en de nodige terughoudendheid hebben betracht met het naar buiten brengen van hun bijdrage.

Het is hier niet de plaats een oordeel over de controverse tussen Yau en de *New Yorker* uit te spreken. De lezer wordt uitgenodigd zich zelf een beeld te vormen van deze kwestie. Mijn persoonlijke indruk is dat de *New Yorker* wel een punt heeft, maar terwille van de duidelijkheid van de boodschap soms een te grove pennestreek heeft gehanteerd. ↵

Referenties

1. www.doctoryau.com
2. scientium.com/diagon.alley/commentary/bowden_essays/others/yau.htm
3. en.wikipedia.org/wiki/Tian-Yau_affair
4. www.claymath.org



Ionica Smeets

Mathematisch Instituut

Universiteit Leiden

Postbus 9512

2300 RA Leiden

smeets@math.leidenuniv.nl

Interview Robert Dijkgraaf over popularisering

Wiskundigen: de braafste kindjes van de klas

Robbert Dijkgraaf werkt als universiteitsprofessor (hij is niet verbonden aan een bepaalde faculteit) aan de Universiteit van Amsterdam op de grens van wiskunde en natuurkunde. Daarnaast is hij zeer actief als popularisator van wetenschap. In 2005 schoof hij als Zomergast aan bij Connie Palmen, op dit moment maakt hij zich hard voor een bètacanon. Hij schrijft regelmatig artikelen voor bijvoorbeeld NRC en De Groene Amsterdammer, is vast panellid bij Hoe?Zo! en betrokken bij tal van projecten. In dit interview vertelt hij over zijn ideeën over popularisering, waarom het zo belangrijk is om jonge kinderen enthousiast te maken voor wetenschap en over de wiskundigen als braafste kindje van de klas.

In 2003 won Robbert Dijkgraaf de Spinozapremie. Hij gebruikte, verrassend genoeg, een substantieel deel van het geld om websites met proefjes voor kinderen te ontwikkelen.

Waarom koos je die doelgroep? “Wetenschap speelt zich niet alleen af aan de universiteit, het gaat ook om het grote publiek, de middelbare scholen en de basisscholen. Juist de basisscholen doen bijna niets aan wetenschap. Er wordt natuurlijk wel veel gerekend, maar dat is nog geen wiskunde. Laatst zag ik in de krant een grafiekje van de hoeveelheid tijd die er in het basisonderwijs besteed wordt aan verschillende onderwerpen. Er werden verschillende landen met elkaar vergele-

ken. In de Nederlandse grafiek was de kleur voor wetenschap niet eens te zien, zo laag was het aantal uren.

Dat is jammer, want jonge kinderen zijn nog heel nieuwsgierig en ontdekken zelf vaak nieuwe dingen. Toen mijn kinderen net hadden leren tellen, ontdekten ze dat ze ook met stapjes van twee door de getallen konden gaan, of met stapjes van drie. Voor je het weet zijn ze spelenderwijs modulo p aan het rekenen. Daar moet je op inspelen.”

En waarom koos je voor websites? “Wetenschap in basisonderwijs was toen nog zo’n onontgonnen gebied dat het me moeilijk leek

om daar op korte termijn iets te veranderen. In plaats daarvan koos ik voor een guerillatactiek. Ik wilde beginnen met kleine prikkels en heb daarom samen met studenten twee websites voor kinderen gemaakt: proefjes.nl en kidzlab.nl.

De websites zijn grotendeels bedacht door de studenten. Ik werk graag met studenten bij outreach. Zij staan dicht bij de kinderen en zijn vaak net zo oud als de juf of meester voor de klas. Dat schept snel een goede sfeer als we bij een klas op bezoek gaan. Bovendien hebben studenten net bewust voor hun vak gekozen en ze zijn daardoor heel erg enthousiast. Ik kan met mijn naam deuren openen en voor financiële steun zorgen, maar zij hebben betere ideeën.

Het idee achter proefjes.nl is bijvoorbeeld dat alles wat voor de proefjes nodig is standaard in huis is, dus we gebruiken geen oscilloscopen en andere moeilijke dingen. Dat is belangrijk, want als een kind enthousiast is om een proefje te gaan proberen, dan moet het gelijk kunnen beginnen. Laatst deed ik

met mijn kinderen een proefje uit een boek. Daarvoor was speciaal waterafstotend folie nodig: dat schiet dus niet op.”

Wat is het idee achter die andere site? “Kidzlab is voor de iets oudere kinderen. Daarbij draait het om wetenschappelijk verantwoord knutselen. Ook daar zijn ontzettend leuke dingen verzonden door studenten. Een jongen had bedacht dat het leuk was om fractals te bouwen van lego. De rest van het Kidzlab-team vond dat een slecht idee, lego en wiskunde zouden nooit goed samengaan. Die jongen wilde het toch proberen en organiseerde een knutselmiddag. Mijn zoon ging daar met lichte tegenzin naartoe, maar zodra hij de lego zag was hij laaiend enthousiast. En alle kinderen vonden het geweldig! Na afloop rende mijn zoon met een vriendje naar zijn kamer om met zijn eigen lego een nog grotere fractal te bouwen. Ik moest daarvan een foto nemen, zodat hij zijn bouwwerk aan iedereen kon laten zien.”

Hebben die websites effect? “De sites worden goed bezocht en langzaam dringt nu algemeen het besef door dat we ook de basisscholen moet bereiken met wetenschap. Ik ben zeker niet de enige die dat belangrijk vind. Bij de laatste prinsjesdag is het budget voor wetenschap op basisschool verdubbeld. Dat betekent dat er 30 miljoen bijkomt. Dat geld is bedoeld voor projecten met bestaande leraren en PABO-studenten. Er komt nu dus structurele steun.

Vanuit de scholen zelf is er vraag naar meer contact met universiteiten. In de media lezen we steeds dat PABO-studenten niet kunnen rekenen, maar ook daar zitten mensen die juist dolgraag aan de slag willen met wetenschap voor de klas. Niet elke basisschoolleerling hoeft dat te doen: laat de mensen die enthousiast zijn de kar trekken.”

Is dit elders beter geregeld? “In Frankrijk hebben ze een heel goed systeem. Elke school heeft een aanspreekpunt voor dit soort dingen. Zo iemand houdt elke week een enthousiast verhaal van een uur voor de klas. De contactpersonen komen per regio bij elkaar en hebben ook goede contacten met de lokale universiteiten. Zo’n netwerk zou in Nederland ook kunnen ontstaan. Ik roep collega’s van universiteiten ook dringend op om daaraan mee te werken.”

Je gaat zelf naar basisscholen toe om een les over wiskunde of natuurkunde te geven. Wat werkt daar goed? “Er zijn veel dingen die

goed werken. Laatst heb ik met kinderen van een jaar of zeven die net konden rekenen over luchtdruk gepraat. We gingen uitrekenen hoeveel druk er op je lichaam staat. Uiteindelijk ontdekten we dat er eigenlijk twee olifanten op je lijf staan. Zoiets is heel aansprekend en kan in een uurtje.

Wat ook leuk was, was dat we een keer de getallen van 1 tot en met 100 in een grote vierkante tien bij tien matrix schreven en kinderen vroegen om de tafels in te kleuren. De klas ging zelf over de getallen nadenken. Een kind merkte op dat het een soort schaakbord werd. De tafel van 3 waren precies de vakjes die een loper kon langsgaan, de tafel van 4 was een paardensprong. Dat waren heel creatieve ideeën. Sommige kinderen vroegen zich ook af welke vakjes geen kleurtje kregen.

In zo’n experimentele les worden de normale rollen in de klas helemaal omgegooid. De stille kinderen hadden nu ineens een he-le-boel te zeggen en degene die normaal als eerste het antwoord wist, moest nu op een nieuwe manier nadenken.

Wat mij erg stoort in het onderwijs, is dat kinderen die goed zijn in vragen stellen worden genegeerd. Kinderen worden getest op cognitieve vaardigheden: kunnen ze rekenen, kunnen ze spellen? Dat is natuurlijk belangrijk, maar om een goede wetenschapper te worden heb je méér nodig. Ik wil juist die nieuwsgierige, vragende kinderen meer aandacht geven.”

Waarom moeten kinderen van een jaar of zeven überhaupt al bezig zijn met wetenschap?

“Als je wetenschappers spreekt, dan blijkt dat ze stuk voor stuk al op jonge leeftijd gegrepen werden. Ze herinneren zich altijd een eerste moment dat ze iets ontdekten dat ze leuk en spannend vonden. Je moet zorgen dat zo’n eerste fascinatie er voor kinderen komt. Op de middelbare school wordt wetenschap gekoppeld aan toetsen en cijfers, terwijl het op de basisschool alleen maar leuk mag zijn. Dat is een groot voordeel.”

Ben je zelf ook als kind gegrepen door een experiment? “Ik was op de basisschool al eindeloos aan het knutselen om van een telescoop een microscoop te maken en omgekeerd. Ik dacht altijd dat ik op een doorgewone basisschool had gezeten. Tot ik een paar jaar geleden op een reünie krantenknipsels uit de jaren zestig zag over deze experimentele basisschool. Zij hadden er bewust voor gekozen om er met de kinderen op uit te trekken en om een onderzoekende houding aan te



moedigen. Ik vond dat normaal en heb nooit iets van een strategie gemerkt.”

Doe je thuis ook proeffjes met je eigen kinderen? “Bijna alles wordt eerst thuis uitgeprobeerd en ik ga ook naar hun klassen toe. Nu vinden ze dat alledrie nog leuk. Mijn kinderen zijn nu 6, 8 en 10. Er komt waarschijnlijk een moment dat zich doodschamen voor hun vader, maar nu ben ik nog heel stoer.”

Iets heel anders, je schrijft regelmatig stukken voor NRC, hoe is dat begonnen? “Ik ben een keer zo brutaal geweest om een stuk over extra dimensies in te sturen en dat werd geplaatst. Dat is nu een jaar of zes geleden.”

Waarom vond je het belangrijk om dat te doen? “Het idee van hogere dimensies leefde erg sterk binnen mijn vakgebied, de snaartheorie. Ik zag er ook veel stukken over verschijnen, maar niet in de Nederlandse pers. Ik vond het belangrijk dat het goed in de krant zou staan. Journalisten zijn vaak meer geïnteresseerd in de menselijke kant van wetenschap: is er sprake van fraude of ruzie? Wetenschappers kunnen beter de balans vinden tussen hypes en wat echt belangrijk is. Dat is heel moeilijk om te doen als je niet zelf in het vakgebied zit.”

Wat zijn de krantenartikelen waar je echt trots op bent? “Waar ik het meeste plezier in heb, is als ik een stem kan laten klinken die nergens anders klinkt. Wetenschap staat soms loodrecht op de rest van de maatschappij. Bij sommige discussies hoor je steeds dezelfde argumenten. Het is fijn om dan iets verrassends te kunnen zeggen. Een stuk waar ik tevreden over ben, ging over de schaal van de Cito-toets. Ik legde uit dat het eigenlijk raar is dat de score tussen de 500 en 550 ligt. Waarom beginnen we niet gewoon bij 0? Het antwoord is dat niemand een kind wil vertellen dat het 0 punten heeft gescoord, daarom krijgt iedereen 500 bonuspunten. In zo’n artikel schrijf ik dan over getallen in een nieuwe, frisse context.”

Mogen wetenschappers ook meepraten over hun zaken buiten hun vakgebied? “Ik doe dat zelf niet snel, ik vind dat je goed over dingen moet hebben nagedacht voor je er iets over zegt. Je moet wel een meerwaarde hebben in een debat. Wetenschappers moeten ook niet te veel ruimte claimen. We zijn slechts de kruiden in de soep.”

Vind je ook dat het een morele plicht is om je als wetenschapper in maatschappelijke de-

batten te mengen? “Nee, het is geen morele plicht. De wetenschap moet de rol spelen die ze hoort te spelen, niet meer en niet minder.”

Wat is die rol? “Om in maatschappelijke kwesties nuances aan te geven, verder dan een stap vooruit te kijken en moeilijke redeneringen te gebruiken als dat nodig is. Wetenschappers kunnen goed werken op de lange termijn, dat is belangrijk in deze tijd waar veel zaken een houdbaarheid van vier jaar hebben, als de volgende verkiezingen komen. Wiskunde kan daarin zeker voorop lopen.

Er is een grote groep mensen die je niet hoort in nationale debatten. Er zijn natuurlijk heel veel zichtbare, luide groeperingen. Maar als je die groepen allemaal bij elkaar optelt, dan kom je lang niet aan de zestien miljoen inwoners van Nederland. Het complement van die schreeuwende groepen is ook een heel grote groep, die wel eens een genuanceerde mening wil horen. Mensen die langs dezelfde lijnen als wetenschappers denken en ons gedachtegoed delen.”

Na het verschijnen van de Nederlandse canon, schreef je een fel stuk over het gebrek aan bètawetenschappers daarin. Is het zo belangrijk dat wiskunde en natuurkunde in zo’n algemeen canon komen? “Hier spelen twee dingen. Het eerste is dat de rol van wetenschap niet verwaarloosbaar is. Ik vind dat wetenschap op een representatieve manier naar voren moet komen in de geschiedenis: niet meer en niet minder. Vaak weten buitenlanders meer over wat Nederlandse wetenschappers gedaan hebben, dan wij zelf. Landen als Engeland, Frankrijk en Duitsland gaan veel beter om met hun erfgoed. Terwijl wij ook genoeg namen hebben om trots op te zijn. We schatten de rol van wetenschap in de geschiedenis ook lager in dan ze is. Bij *Zomergasten* liet ik beelden zien van de begrafenis van Lorentz in 1928. Destijds lag het hele land plat omdat er een belangrijk natuurkundige was overleden. Veel mensen waren daar heel verbaasd over en konden zich dat nauwelijks voorstellen.

Het tweede punt is dat het belangrijk is om als exacte wetenschappen een lijst te maken van wat iedereen zou moeten weten. Iedere bèta hoort te weten wie Hugo de Groot was, maar wat zet je daar tegenover voor alfa’s? Moet iedereen de tweede wet van de thermodynamica kennen? Het is goed om daarover te discussiëren en een aparte bètacanon samen te stellen.

Laten we eens een concrete lijst maken. Het is daarbij belangrijk om knopen door te

hakken en keuzes te maken. Wetenschappers onderling hebben vaak de neiging om te zeggen dat iedereen alles moet weten van hun vakgebied. Dat is niet haalbaar, we moeten een concrete lijst maken met vijftig onderwerpen. Die onderwerpen moeten ergens aan opgehangen worden.

Ik snap de keuzes in de oorspronkelijke canon niet. Waarom wordt Eise Eisinga wel genoemd en Christiaan Huygens niet? Er staat in de canon zelfs een plaatje van een klok die door Huygens is uitgevonden, waarom wordt dat dan niet gezegd?”

Wat moet er uiteindelijk met die bètacanon gebeuren? “Als er een concrete lijst is gemaakt, dan moet die ook onderwezen worden. Koppel de onderwerpen terug naar de scholen en lesmaterialen. Kinderen krijgen nu natuurles uit een boek dat begint met hoofdstukken over de plantsoenendienst en over de zwamvlok. Wie wil er nu weten wat een zwamvlok is? Waarom beginnen ze niet met vragen over het heelal of de oerknal? Er is niet goed nagedacht over de aanpak van bèta-onderwijs en ik vind dat erg. Er zouden ook zoveel maatschappelijke raakvlakken en enorme toepassingen genoemd kunnen worden.”

Is het voor de popularisering van wetenschap belangrijker om nadruk te leggen op de toepassingen dan op de schoonheid van de redeneringen? “Dat is allebei belangrijk, het moet zowel over de diepte als de breedte gaan. Eigenlijk is het ook hetzelfde. Maxwell dacht na over volstrekt abstracte dingen en nu gebruikt iedereen elektriciteit. Dat is toch wonderlijk, dat de ideeën van een man de hele samenleving ingrijpend veranderen?”

Willen mensen wel horen dat wetenschap nuttig is? “Niet iedereen wil dat horen. Er zijn genoeg dingen die heel nuttig zijn, maar waar ik zelf geen interesse voor heb. Het is belangrijk om altijd verschillende aangrijpingspunten te bieden. Bij een lezing wordt de een gegrepen door de schoonheid van een formule, een ander door de fantastische toepassingen en de derde omdat het een uitdagende puzzel is. Bij populariseren schiet je eigenlijk met hagel — je wilt zo veel mogelijk mensen bereiken.

Soms moet je minder nadruk leggen op de toepassingen. Voor veel mensen is de weg van de wiskunde er een van fascinatie en zuiverheid. Wiskunde overstijgt het aardse, dat spreekt mensen op een bijna mystieke manier aan. Als je eerlijk bent, laat je al die facetten zien. Mijn eigen interesse heeft niets met toepassingen te maken. Onderzoek kan mij niet

zuiver genoeg zijn. Toch kan ik ook onder de indruk zijn van toepassingen.”

Wat vind je mooi daaraan? “Het feit dat biologie, wiskunde en natuurkunde zo dicht tegen elkaar aanliggen. Ze hebben echt een grootste gemene deler. De mentaliteit is hetzelfde, we spreken allemaal de taal van de wiskunde en we publiceren onze resultaten op dezelfde manier. Terwijl een econoom, een historicus en een Franse taalkundige niets gemeen hebben. Ik vind dat schokkend.”

Waarom ervaar je dat als schokkend? “Omdat we vaak denken dat alfa's en gamma's samen een eenheid zijn, maar dat is helemaal niet zo. Het is voor andere vakken zo moeilijk is om iets samen te doen, om elkaars ideeën te gebruiken. Voor bèta's is het veel gemakkelijker om een eenheid te vormen. Ik voel mezelf ook echt half wiskundige en half natuurkundige.”

Zie je vanuit jouw grenspositie ook verschillen in hoe natuurkundigen en wiskundigen naar buiten treden? “Wiskundigen zijn echt het braafste kindje van de klas. Ze zijn nauwelijks zichtbaar en heel bescheiden — zeker in Nederland. Natuurkundigen kunnen makkelijk praten over aansprekende onderwerpen als de oerknal of nanotechnologie. Maar wiskunde kan óók een groot publiek aanspreken. Wiskundigen treden in het algemeen niet genoeg naar buiten. Ik snap ook wel waar die bescheidenheid vandaan komt. Wiskundigen zijn heel eerlijk en willen zichzelf niet groter maken dan ze zijn. Het is als wiskundige ook makkelijk om tegen een verschrikkelijk moeilijk probleem aan te lopen. Dat zorgt voor een zekere bescheidenheid.

Ik zie de laatste tijd veel goede initiatieven, waarschijnlijk voelen wiskundigen de noodzaak om naar buiten te treden nu de studentenaantallen zo laag zijn. Maar de wiskunde als vak zou zich veel agressiever mogen opstellen. Trek ontwikkelingen naar je toe, maak mensen er bewust van hoe doordrongen alle vakgebieden zijn van wiskunde. Het grote publiek denkt bij wiskunde alleen aan klassieke wiskunde, niet aan de wiskunde die nodig is bij bijvoorbeeld cognitieve wetenschappen of biologie. Benadruk op hoeveel plekken wiskunde belangrijk is.

Wiskunde komt in het spel dat gespeeld wordt niet genoeg tot zijn recht. Veel mensen kunnen wel een paar beroemde natuurkundigen noemen, maar niemand kent een wiskundige. Natuurkunde heeft meer bravoure en een beter georganiseerde lobby. Dat



Figuur 1 De met geld van de Spinozapremie opgezette website kidzlab.nl

heeft deels met de organisatie te maken. Het *Fundamenteel Onderzoek der Materie* (FOM) is een natuurlijk aanspreekpunt. Maar het *Centrum voor Wiskunde en Informatica* (CWI) zou diezelfde rol binnen wiskunde kunnen spelen. De ruwe ingrediënten om als wiskunde goed naar buiten te treden zijn er, alleen gebeurt het niet. De wiskundesectie op middelbare scholen is heel sterk aanwezig, waarom vertaalt zich dat niet in grotere studentenaantallen?”

Dat is natuurlijk precies de vraag waar het om gaat. Waarom kiezen volgens jou zo weinig mensen voor een exacte studie? “Scholieren maken zich zorgen wat ze daarna moeten doen, ze hebben een te smal beeld van wat de toekomst brengt. Onze studies zijn ook te veel een trechter, iedere student moet door hetzelfde poortje. Er zijn veel mensen die interesse hebben in wiskunde en er ook goed in zouden zijn, maar die geen hoogleraar in de wiskunde willen worden. Dus gaan ze econo-

mie studeren.

Wiskunde, natuurkunde en biologie versmelten steeds meer. Waarom proberen we dat niet nog meer en ook met andere vakken? Ik denk dat dat de toekomst is. Omarm bijvoorbeeld de cognitieve wetenschappen. Geef andere faculteiten niet alleen service-onderwijs, maar biedt ze de volledige intellectuele uitdaging van wiskunde. Uit de biologie zou heel boeiende wiskunde kunnen ontstaan. Dat zie je vaker in de geschiedenis: als wiskunde op een nieuwe toepassing stuit, dan ontstaat daarna een heleboel nieuwe, interessante wiskunde.”

Zijn er wel meer bèta's nodig? “Zeker, maar dan met een goede definitie van bèta. We hebben niet per se meer theoretische fysici of mathematici nodig. Maar er zijn hele takken in de maatschappij waar kennis van wiskunde en de bijbehorende manier van denken nodig zijn. Het breidt zich uit als een olievlek, de financiële wereld en psychologie gaan meer en

meer wiskundige technieken gebruiken. Tegelijkertijd wordt onderzoek juist steeds gespecialiseerder en ingewikkelder. Om te kunnen differentiëren is er een grotere instroom nodig. Je wil zowel mensen opleiden voor de maatschappij als voor het onderzoek.”

Moeten de opleidingen dan niet heel erg veranderen? “De opleidingen zijn redelijk star. Bij iedere exacte studie valt vijftig procent van de studenten af. Een gedeelte van die studen-

ten zou behouden kunnen worden door bredere mengsels van vakken toe te staan. Zeker wiskunde zou alle terreinen terug moeten pakken die in de loop der tijd zijn afgepakt door andere vakgebieden. Denk aan dynamische systemen in natuurwetenschappen, bio-informatica en systeembioïogie. Wiskundigen zullen zelf hun begrip van wiskunde moeten oprekken.

Het is een lastige spagaat, je wilt de opleiding niet oppervlakkiger maken, maar wel

breder. We moeten tenslotte ook de nieuwe hoogleraren opleiden. Hoewel ik me daarover niet zoveel zorgen maak. Iemand die echt voor de wetenschap kiest, is makkelijk te stimuleren. Ik ging als student ook zelf al op zoek naar boeken over onderwerpen die ik interessant vond...”



Klaas Landsman

Institute for Mathematics, Astrophysics and Particle Physics (IMAPP)

Radboud Universiteit Nijmegen

Toernooiveld 1

6525 ED NIJMEGEN

landsman@math.ru.nl

De teloorgang van het wiskundeonderwijs

Blijf niet mokkend aan de kant staan!

De belangstelling voor wiskunde onder scholieren neemt al jaren af. Dit blijkt op niet mis te verstane wijze uit de dalende instroom in de universitaire wiskundeopleidingen: in 1976 waren er bijvoorbeeld rond de vierhonderd wiskundestudenten aan de toenmalige Katholieke Universiteit Nijmegen, nu zijn het er ongeveer vijftig aan de Radboud Universiteit. De percentuele daling aan andere universiteiten is navenant. In dit artikel schetst Klaas Landsman, hoogleraar Analyse, de oorzaken die volgens hem tot deze enorme achteruitgang hebben geleid. Tevens laat hij zien welke initiatieven mogelijk tot een oplossing kunnen leiden.

Soms is er even een kleine opleving, zoals in 2006. Maar ook dan blijft het totale aantal wiskundestudenten in Nederland vergeleken met buurlanden letterlijk lachwekkend: altijd raak met buitenlandse gasten!

Een meer anekdotische aanwijzing voor de dalende belangstelling komt uit persoonlijke contacten met scholieren op masterclasses en workshops. Hun typische verhaal kan kort worden samengevat: ze krijgen alsmatuur te horen dat de wiskunde zo belangrijk is en dat het een vereiste is voor veel vervolgonopleidingen, maar vinden zelf dat dit belang op school absoluut niet duidelijk wordt gemaakt. Wiskunde wordt in de onderbouw nog wel leuk gevonden, maar in de Tweede Fase valt het vak voor de meeste scholieren door de mand. Ook docenten klagen over de verhaaltjeswiskunde die ze momenteel gedwongen zijn te onderwijzen en waarin iedere uitdaging voor de leerling ontbreekt. Noch de onuitputtelijke schoonheid van de abstracte wiskunde, noch haar spectaculaire toepassingen in de natuurkunde en de maatschappij

(bijvoorbeeld in de economie, de informatica en de telecommunicatie) komen behoorlijk (of überhaupt) aan bod. De stemming onder de meer ambitieuze wiskundeleraars is er zelfs een van woede. Tijdens de lancering van het Universum-Programma van het Platform Bèta Techniek in Utrecht op 21 november 2005 (waar ondergetekende de eerste Universum-lezing uitsprak) brak bijvoorbeeld een openlijke opstand uit tegen de aanwezige minister Van der Hoeven. Zij koos onmiddellijk het huzenpad!

Met de belangstelling neemt ook de kennis af. De slechte rekenvaardigheid van pabostudenten is in 2006 veelvuldig in het nieuws geweest en daarnaast heeft vrijwel iedere universiteit en hogeschool de afgelopen jaren uit instaptoetsen en studieresultaten ervaren dat zowel wiskundig inzicht als formulevaardigheid van eerstejaars sterk te wensen over laten. Niet allen de 'harde' bètavakken, maar ook opleidingen als economie hebben hier last van. Een uniek moment in de geschiedenis van het onderwijs was de actie *Lie-*

ve Maria in januari 2006 [1], waarin dit keer geen knorrende hoogleraren maar de studenten zelf zich bij de minister beklagden dat ze "het universitair niveau eigenlijk niet aankunnen" omdat ze "merken dat ze te weinig wiskunde op de middelbare school hebben gehad."

Oorzaken in de maatschappij

Deze onbevredigende situatie heeft lange wortels, die zowel in het onderwijs als in de maatschappij gezocht moeten worden. Sommige pedagogische inzichten lijken zich vrijwel autonoom te hebben ontwikkeld, maar vaak zijn onderwijsvernieuwingen ook het directe gevolg van veranderende maatschappelijke inzichten. Daarbij kan bijvoorbeeld worden gedacht aan de sinds de jaren zeventig door de politiek drammerig doorgevoerde gelijkheidsideologie, die de wiskunde op school geen goed heeft gedaan [2–4]. Vooral het weghalen van de lerarenopleidingen van de 'elitaire' universiteiten heeft rampzalige gevolgen gehad. Momenteel krijgen ook vwo-leerlingen dikwijls wiskunde van docenten die op het hbo zijn opgeleid met een zeer beperkt wiskundepakket [5], terwijl experts het er over eens zijn dat juist elementaire wiskunde moet worden gedoceerd vanuit een 'hoger' standpunt, waarbij het noodzakelijk is dat de docent over diep inzicht in het vak beschikt [6].



Los hiervan is een nieuwe generatie middelbare scholieren opgestaan wier leven draait om MSN en *Civilization IV* [7]: waar wij boeken lezen in onze goed verlichte kamers en sportten in de buitenlucht, brengt de jeugd van tegenwoordig haar tijd zoek met *chatten* en *gamen* in duistere en slecht geventileerde kelders onder spelletjeswinkels. Een geluk bij een ongeluk is dat wiskunde niet bij voorbaat kansloos is onder deze jongeren: het moet alleen ‘gepimpt’ worden. Voor de oudere lezers van het NAW die dit woord wellicht niet kennen een voorbeeld: de vroegere loopbaan van boekhouder op kantoor kan men pimpen tot een *career* in *Finance* bij *Deloitte*. A propos: het valt op te merken dat het carrièreperspectief bij de huidige scholieren een steeds grote rol speelt in de profiel- en vervolgens de studiekeuze, terwijl het hen alerminst duidelijk wordt gemaakt welke fantastische mogelijkheden de wiskunde op dit vlak biedt [8].

Wat de generatiewisseling betreft moet mij tevens de opmerking van het hart dat met name veel van de zittende universitaire wiskundigen de hand in eigen boezem zouden moeten steken: zij zijn niet met hun tijd meegegaan en hebben daardoor een vrijwel onoverbrugbare kloof gecreëerd tussen zichzelf als introverte kamergeleerden en de scholieren die zij zo graag hun collegezalen zouden zien bevolken. De legendarische laatste woorden van Archimedes (*“Μη μου τους κύκλους τάραττε,”* ofwel “verstoor mijn cirkels niet,” alvorens hij werd gedood door een soldaat die eerst beleefd vroeg wie hij was en conform de opdracht van zijn commandant het leven van Archimedes zou hebben gespaard als die de moeite had genomen de vraag te beantwoorden) zijn hiertype-rend: de eigenzinnigheid waar veel wiskundigen zelfs trots op lijken te zijn heeft niet mijn

bewondering. Sterker nog, mijn sympathie gaat in dit geval eerder uit naar de soldaat dan naar zijn slachtoffer.

Oorzaken in het onderwijs

De ontwikkeling van het Nederlandse wiskundeonderwijs is te reconstrueren uit de verrukkelijke bundel *Honderd Jaar Wiskundeonderwijs* [9]. Deze ontwikkeling is van belang voor mijn onderwerp, omdat velen van mening zijn dat de onderwijsvernieuwingen van de afgelopen twintig jaar in de eerste plaats verantwoordelijk moeten worden gehouden voor zowel de dalende belangstelling als de kennis van de wiskunde onder scholieren. Mèt vele universitaire collega’s [10] (inclusief vakdidactici) en universitair opgeleide docenten vind ik dat zelf ook, maar deze mening is omstreden: op het Algemeen Pedagogisch Studiecentrum [11] denkt men — zo bleek uit een bezoek aan dit ‘toonaangevende onderwijsadviesbureau’ — dat het juist geweldig gaat, en ook het bestuur van de Nederlandse Vereniging van Wiskundeleraren staat achter de onderwijsvernieuwingen [12]. Zonder al te zeer te overdrijven beweer ik daarentegen het volgende: *De Nederlandse schoolwiskunde is teruggevallen naar de periode vóór Plato!*

Om dit oordeel op waarde te schatten volgt hier eerst een korte geschiedenis van de wiskunde. Uit historisch onderzoek in vooral de afgelopen vijftig jaar is duidelijk geworden dat het begrip wiskunde zoals wij dat nu hanteren in de eerste helft van de vierde eeuw voor Christus is ontstaan in het Athene van Plato [13]. In deze periode werd een praktische bezigheid die duizenden jaren eerder in de Egyptische en Babylonische beschavingen was ontwikkeld als hulpmiddel bij zaken als landmeetkunde, handel en belastinginning omgezet in een nieuwe wetenschap met een geheel eigen taal en methodiek. De wezenlij-

ke kenmerken van de moderne wiskunde, namelijk haar axiomatisch-deductieve opbouw (Aristoteles) en het abstracte karakter van wiskundige objecten (Plato), dateren uit het genoemde tijdvak. Euclides trof dit raamwerk voltooid aan. Vervolgens moest de mensheid echter ruim tweeduizend jaar wachten tot de abstracte wiskunde op diepzinnige wijze kon worden toegepast: dit was de prestatie van Newton. Sindsdien balanceert de wiskunde op een gezonde wijze tussen abstractie en toepassingen [14].

Helaas heeft dit duale karakter van de wiskunde zijn weg naar het middelbaar onderwijs nooit gevonden. Tot 1960 (hier gerekend als het laatste relevante eindexamenjaar) bestond het wiskundeonderwijs op Nederlandse scholen uit euclidische meetkunde, rekenen, goniometrie, trigonometrie, en enige algebra. Dit gaf weliswaar een uiterst beperkt beeld van de wiskunde, maar het was tenminste echte wiskunde — zij het gespeend van enige actuele toepassing. De in de *zeventiende eeuw* ontwikkelde differentiaal- en integraalrekening, die sinds Newton de basis vormt voor het leeuwendeel van zowel de zuivere als de toegepaste wiskunde, werd in 1961 op het programma gezet. Dit programma werd (onder invloed van de zogenaamde *New Math* beweging) in 1968 alweer herzien, waardoor de prille toepassingen van de calculus uit de boeken verdwenen en plaatsmaakten voor abstractie op een voor de meeste scholieren onbegrijpelijk niveau. Getalenteerde leerlingen kwamen daarbij nog wel aan hun trekken, maar de meeste scholieren uit die tijd hebben vermoedelijk nog steeds nachtmerries over het eindexamen wiskunde.

Uiteraard sloeg de slinger vervolgens naar de andere kant door: in 1987 werden de vakken Wiskunde 1 en 2 vervangen door Wiskunde A en B, waarin het zogenaamde ‘realis-



Fotograaf: Dick van Aalst, Radboud Universiteit Nijmegen

tische rekenen' voorop stond. Ondanks aanpassingen in 1999 (in verband met de invoering van de profielen) en in de toekomst ook in 2007 (herziening Tweede Fase) en 2010 (waarna er vier stabiele vakken genaamd Wiskunde A, B, C en D zullen zijn), staat dit didactische model sindsdien centraal - zij het onder wisselende namen als *concept-context* en 'betekenisrijke wiskunde'. De 'realistische contexten' stammen veelal uit het dagelijks leven, zo niet uit de onmiddellijke ervaringswereld van de scholieren, en leiden in de praktijk tot verhaaltjessommen waarin de leerlingen nog niet eens leren modelleren.

Mijn mening zal nu duidelijk zijn: uit gezond wiskunde-onderwijs zou het duale karakter van de wiskunde — i.e. abstractie én toepassingen — voortdurend en op ieder niveau moeten blijken: de abstractie komt uiteindelijk voort uit toepassingen, terwijl omgekeerd juist de meest opmerkelijke toepassingen pas mogelijk worden vanuit een hoger abstract gezichtspunt. Beide aspecten van de wiskunde moeten daarom in het onderwijs hand in hand gaan [15].

Oplossingen: lange termijn

Om het enthousiasme voor wiskunde onder leerlingen én docenten te herstellen is het duidelijk dat op de lange termijn een groot-scheepse hervorming van het wiskunde-onderwijs noodzakelijk is. Hierbij zou het bovengenoemde duale karakter van de wiskunde een sleutelrol moeten spelen, onder inachtneming van de specifieke handel en wandel van de huidige cohorten scholieren. Inspirende nascholingsactiviteiten voor docenten zouden deze ontwikkeling moeten flankeren.

Een dergelijke hervorming wordt momenteel tot op zekere hoogte voorbereid door de commissie Toekomst Wiskundeonderwijs (cTWO) [16]. (In een opmerkelijk manoeu-

vre van de Tweede Kamer is deze als enige van alle Vernieuwingscommissies in het bèta-onderwijs onder toezicht gesteld, en wel van de zogenaamde Resonansgroep Wiskunde van het ministerie van OCW [17].) Een belangrijke vernieuwing die cTWO begeleidt is de invoering van het nieuwe vak Wiskunde D, dat een soortgelijke doelgroep lijkt te hebben als het vroegere Wiskunde 2: het is een verrijksvak voor wiskundig getalenteerde leerlingen in het NT-profiel en (minder waarschijnlijk) het NG-profiel. Om de scholen op weg te helpen zijn inmiddels in Amsterdam [18], Delft, Eindhoven, Nijmegen en Twente Regionale Steunpunten voor wiskunde D opgezet. De laatste vier werken hierbij samen en hebben een uitgebreid scholingsprogramma "in zee met wiskunde D" voor docenten opgezet [19]. Ook het nieuwe bètavak Natuur, Leven en Technologie [20] biedt kansen om interessante toepassingen van wiskunde in het onderwijs te brengen.

Ofschoon nu al op vele scholen met wiskunde D wordt geëxperimenteerd, zullen de resultaten van de algehele onderwijshervorming pas ver na 2010 zichtbaar worden. In het verlengde daarvan zullen ook de programma's UNIVERSUM en SPRINT van het Platform Bèta Techniek [21] (die nu al lopen en in veel opzichten reeds effectief zijn), wat de wiskunde betreft naar mijn verwachting pas werkelijk gaan renderen als de broodnodige hervorming van het wiskundeonderwijs eenmaal is doorgevoerd. Ten slotte is het ketenplan van Deltawis [22] indrukwekkend en alomtvattend. Juist daarom zal het vermoedelijk pas na nog langere tijd vruchten afwerpen.

Oplossingen: korte termijn

Gezien deze lange adem van de op handen zijnde hervormingen is het zinvol om voor de korte termijn prikkelende initiatieven te ont-

wikkelen die:

1. Leerlingen laten zien hoe leuk én uitdagend wiskunde werkelijk is;
2. Het uitstekende carrièreperspectief van een wiskundige duidelijk maken.

In het oog springende initiatieven met de eerste doelstelling zijn bijvoorbeeld:

- Kangoeroe-wiskundewedstrijd [23];
- Wiskundetoernooi in Nijmegen [24];
- Begeleiding van profielwerkstukken [25];
- Masterclasses [26] en Webclasses [27];
- Junior College Utrecht [28];
- Zomerkampen [29];
- Wiskunde Olympiade [30] en A-lympiade [31];
- Nationale PR-medewerker wiskunde [32].

Het laatste project omvat ook de fantastische websites van de Wiskundemeisjes [33] en van Kennislink [34] (voor zover die over wiskunde gaat). Spaar me als ik iets over het hoofd heb gezien; mijn gezichtsvermogen is beperkt.

Wat de tweede doelstelling betreft zouden Jet-Net [35] en het Bèta 1 op 1 project van het Platform Bèta Techniek [36] genoemd kunnen worden, maar in beide programma's ligt de nadruk niet speciaal op de wiskunde (en daar zijn dan ook geen aparte middelen voor). Dat geldt wel voor de propaganda-film voor scholieren die momenteel met steun van het Platform Bèta Techniek gemaakt wordt. Deze film gaat op het wiskundetoernooi op 28 september 2007 in première en zal daarna gratis aan alle middelbare scholen met vwo worden gestuurd.

Een voorbeeld van een buitenlands initiatief dat beide doelstellingen op voortreffelijke wijze bereikt is het Engelse *Mathematics Millenium Project* [37]. Het gaat hier om het enthousiasmeren van kinderen van 5 tot 19 jaar voor wiskunde, en dit gebeurt door middel van een indrukwekkend scala van activiteiten, lopend van de ontwikkeling van verrij-

kingsmateriaal voor het basisonderwijs tot workshops over cryptografie voor de hogere klassen van het middelbaar onderwijs. Het *Mathematics Millenium Project* heeft een miljoenbegroting en geniet dan ook financiële ondersteuning uit brede kring (bijvoorbeeld Microsoft, Cambridge University Press, etc.). Een dergelijk geïntegreerd en goed gefinancierd wiskundeproject zou ook in Nederland niet misstaan; de noodzaak voor een dergelijke onderneming is in hier zelfs veel groter dan in Engeland! Zoals het Engelse voorbeeld leert is daar echter een breed palet van sponsors voor nodig.

Blijf niet mokkend aan de kant staan

Dit citaat van Karel Glastra van Loon indachtig ben ik momenteel medeoprichter van het Nijmeegse Regionale Steunpunt voor wiskunde D, lid van de Resonangroep Wiskunde van OCW, lid van de Taakgroep Landelijke wiskunde-PR, voorzitter van de PR-commissie wiskunde van de RU, medeorganisator van het wiskundetoernooi en regelmatig spreker voor docenten. Maar het meest houd ik van het werken met de scholieren zelf.

Mijn opzet daarbij is om hoogtepunten uit het onderzoek in de klas te brengen, en dan

bedoel ik ook echt hógtepunten: Newton en Einstein. De twee projecten waar ik momenteel bij betrokken ben begeven zich op het raakvlak van wiskunde en natuurkunde (met eventueel een filosofisch of historisch perspectief), wat uiteraard een goede basis biedt om het duale karakter van de wiskunde tot zijn recht te laten komen. Ze zijn bedoeld als onderwerp voor profielwerkstukken in het NT-profiel of als modules in wiskunde D en mogelijk ook Natuur, Leven en Technologie.

Het door NWO gefinancierde Leraar in Onderzoekproject *Newtons afleiding van de wetten van Kepler* gaat over het eerste moment in de geschiedenis waarin diepe en abstracte wiskunde met succes werd toegepast op de beschrijving en verklaring van de kosmos. Het project illustreert daarmee de interactie tussen de axiomatisch-deductieve opzet en de concrete toepasbaarheid wiskunde; in deze combinatie lag precies de kracht van Newtons aanpak. Aldus leidde hij uit de later naar hem genoemde drie bewegingswetten en zijn universele gravitatiewet de planeetbewegingen om de zon af, en gaf hij daarmee onder meer een wiskundige afleiding van de wetten van Kepler (die in eerste instantie op zuiver empirische basis waren gepostuleerd). De wis-

kundige technieken zijn beperkt tot de kegel-snedes en elementaire differentiaalrekening [38].

Bestaat Toeval? begint met een conceptuele en wiskundige analyse van het kansbegrip en gaat dan over tot de beantwoording van de vraag of zuiver toeval bestaat in de natuur [39]. Het project draait om de zogenaamde Bell-ongelijkheden en illustreert het beslissende ingrijpen van de wiskunde in een oorspronkelijk conceptueel-filosofische discussie: het werk van Bell beslechtte namelijk het beroemde debat tussen Bohr en Einstein over de grondslagen van de kwantummechanica. Ook hier zijn de wiskundige technieken beperkt: we gebruiken niet meer dan elementaire kansrekening en vlakke meetkunde.

Dat peilloos diepe gevolgtrekkingen als de vorm van de planeetbanen en het bestaan van zuiver toeval toegankelijk zijn op het wiskundig niveau van vwo-6 is een gevolg van wat Freudenthal [40] de 'geleide heruitvinding' noemde: het leerproces van de mensheid moet in de klas niet letterlijk herhaald worden, maar moet worden aangevuld met latere kennis. Ook van dit principe zijn beide projecten een illustratie. 

Referenties

- 1 www.lievemaria.nl
- 2 F. Furedi, *Waar Zijn de Intellectuelen? Persoonlijke ervaringen in de wereld van het filisterdom*, Meulenhoff, Amsterdam, 2006.
- 3 L. Prick, *Drammen Dreigen Draaien: Hoe het Onderwijs Twintig Jaar Lang Vernieuwd Werd*, Mets en Schilt, Amsterdam, 2006.
- 4 M.L.A. Rietdijk-Helmer (red.), *Steeds Minder Leren: De Tragedie van de Onderwijshervormingen*, Uitgeverij IJzer, Utrecht, 2005.
- 5 M. Peletier, 'Variatie doet weten', *Nieuw Archief voor Wiskunde* 5(7) (december 2006), pp. 234–241
- 6 H. Freudenthal, *Weeding and Sowing: Preface to a Science of Mathematical Education*, Reidel, 1978.
- 7 J. Bosma en I. Groen, *Generatie Einstein: Slimmer, Sneller en Socialer*, Pearson Prentice Hall NL, Amsterdam, 2006.
- 8 R. Kaenders en J. Top, 'Het zit hem in de derde klas', *Nieuw Archief voor Wiskunde* 5/4 (december 2004), pp. 302–303.
- 9 F. Goffree, M. van Hoon en B. Zwaneveld (red.), *Honderd Jaar Wiskundeonderwijs* (Nederlandse Vereniging van Wiskundeleraren), Leusden, 2000.
- 10 Zie bijvoorbeeld de oratie van Frans Keune, *Naar de knoppen*, te vinden op www.math.ru.nl/~keune/oratie/oratie.html
- 11 www.aps.nl
- 12 Zie de Bestuursreactie mbt Standpunt resonangroep, www.nvww.nl/page.php?id=1776
- 13 Zie bijvoorbeeld F. Lasserre, *The Birth of Mathematics in the Age of Plato* (Hutchinson, Londen, 1964), D.H. Fowler, *The Mathematics of Platos Academy*, Oxford University Press, Oxford, 1987 en R. Netz, *The Shaping of Deduction in Greek Mathematics*, Cambridge University Press, Cambridge, 1999.
- 14 M. Keestra (red.), *Een Cultuurgeschiedenis van de Wiskunde*, Nieuwezijds, Amsterdam, 2006.
- 15 Zie ook het op dit punt voortreffelijke *Visiedocument* van cTWO, www.fi.uu.nl/ctwo
- 16 www.fi.uu.nl/ctwo/
- 17 www.resonansgroepwiskunde.nl/
- 18 www.wiskunded.nl/amsterdam/
- 19 www.wiskundedsteun.nl
- 20 www.betavak-nlt.nl
- 21 www.platformbetatechniek.nl
- 22 www.fi.uu.nl/deltawis/
- 23 www.math.ru.nl/kangoeroe/
- 24 www.ru.nl/wiskundetoernooi/
- 25 www.betasteunpunt.nl/
- 26 Vrijwel alle universiteiten doen dit inmiddels, onder pakkende titels als *Kraak de code!*
- 27 Zie bijvoorbeeld wims.math.leidenuniv.nl/wims en staff.science.uva.nl/~craats/#webklas
- 28 <http://www.jcu.uu.nl/>
- 29 www.vierkantvoorwiskunde.nl/kampen/
- 30 olympiads.win.tue.nl/nwo/
- 31 www.fi.uu.nl/alympiade/
- 32 www.wiskgenoot.nl/watbiedt/natpr.html
- 33 www.wiskundemeisjes.nl
- 34 www.kennislink.nl/web/show?id=100552
- 35 www.jet-net.nl/start.html
- 36 www.beta10p1.nl/
- 37 mmp.maths.org/
- 38 De LiO is Maris van Haandel en ook Gert Heckman is een drijvende kracht achter dit project.
- 39 *Bestaat Toeval?* ontwikkel ik samen met Mirte Dekkers. De foto's bij dit artikel zijn afkomstig uit deze Masterclass. Zie K. Landsman, 'Bestaat toeval?', *Nieuwe Wiskrant* 26/1, september 2006, 21–26 voor een uitgebreide beschrijving.
- 40 H. Freudenthal, *Mathematik als pädagogische Aufgabe*, Klett, Stuttgart, 1973.

Dirk Tempelaar

Faculteit der Economische Wetenschappen en Bedrijfskunde

Departement Kwantitatieve Economie

Postbus 616

6200 MD Maastricht

d.tempelaar@ke.unimaas.nl

Onderwijs

Onderwijzen of bijspijkeren?

Een terugkerend thema in dit blad is de door velen gedeelde mening dat het rendement van het wiskundeonderwijs in de tweede fase van het vwo onvoldoende is. Dit komt ook tot uitdrukking in de al vele jaren ingestelde zogenaamde deficiëntiecurssussen op vele universiteiten. Wat betekent dit voor de dominante didactische benadering van het wiskundeonderwijs in Nederland: de contextuele wiskunde? Juist omdat de contextuele wiskunde een essentiële rol in de didactiek van het wiskundeonderwijs speelt, is het lastig een vergelijkende analyse op te zetten. In deze bijdrage wordt zo'n analyse gepresenteerd, waarin de vergelijking van het Nederlandse wiskundeonderwijs met buitenlandse systemen de grondslag vormt. De PISA 2003-studie [8] speelt daarin een belangrijke rol, maar ook een vergelijking van de prestaties en kenmerken van Nederlandse versus internationale studenten bij twee sterk internationaal gerichte studies van de Universiteit Maastricht. Beide studies suggereren het bestaan van aanzienlijke problemen, die ook een didactische inslag hebben. Dirk Tempelaar is verbonden aan de Universiteit Maastricht als docent wiskunde en statistiek en betrokken bij verschillende projecten van de organisatie SURF.

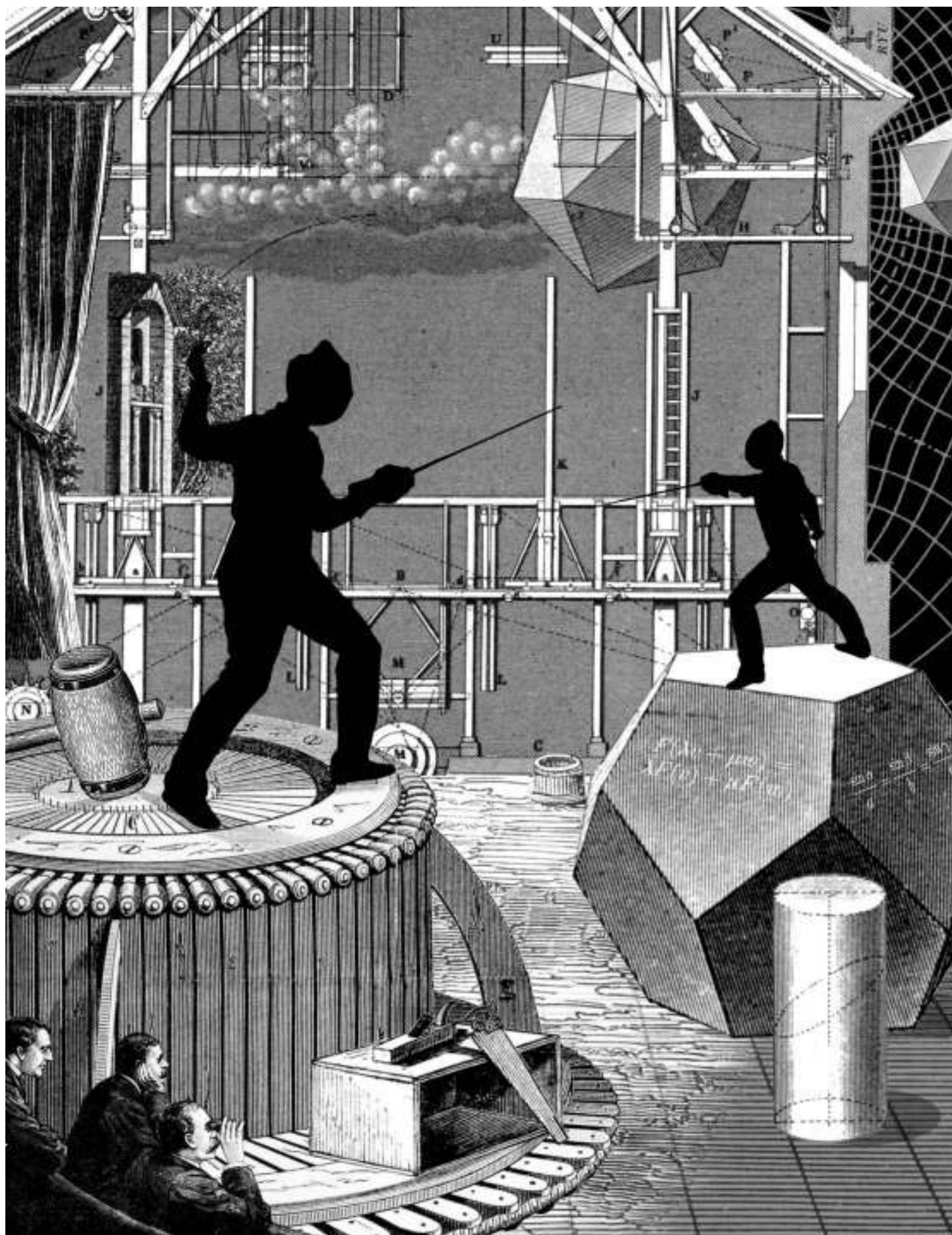
In maart 2006 vond een onder auspiciën van de samenwerkingsorganisatie van het hoger onderwijs op het gebied van netwerkdienstverlening en ICT (SURF) georganiseerde en naar Nederlandse maatstaven grote conferentie plaats over wiskundeonderwijs in het hoger onderwijs (ho). Op 1 november is een omvangrijk project onder de naam 'nationale kennisbank basisvaardigheden wiskunde' van start gegaan in het kader van het SURF 'Nationaal Actieplan e-learning'. Ogenscheinlijk twee initiatieven die niet per sé vermeldenswaardig zijn, ware niet dat de omvang (het SURF project is bijvoorbeeld een samenwerkingsproject van 15 instellingen van ho) en de specifieke focus opvallen: beide initiatieven betreffen remediërend onderwijs, en niet het reguliere onderwijs zelf. Natuurlijk een merkwaardige situatie, zoveel inzet gericht op het 'bijspijkeren' van middelbare scholieren afkomstig uit

de tweede fase van het vwo, daar waar die inzet ook had kunnen worden besteed aan de verbetering van de vwo-programma's. Het kiezen voor zo'n evidente omweg suggereert het bestaan van obstakels op de directe weg.

Hoe die obstakels eruit kunnen zien, is niet moeilijk te achterhalen wanneer we de inhoud van de plenaire lezing van Jan van de Craats op de SURF conferentie [1] confronteren met de analyse van Paul Drijvers van het schoolalgebra probleem in een recent nummer van NAW [2] (zie ook [3]). Beiden zijn gematigd optimistisch over de mogelijkheden om het reguliere wiskunde onderwijs te verbeteren, maar buiten die constatering ontbreekt iedere overeenkomst: de aangedragen oplossingen verschillen sterk. Drijvers benadrukt verschillende keren in zijn bijdrage dat 'goede, functionele en uitdagende contexten die betekenisvol zijn voor de leerlingen van het vwo' het vertrekpunt dienen te zijn voor de ontwik-

keling van het algebraonderwijs. Daar waar dat algebraonderwijs nu tekort schiet is dat te wijten aan het inadequaat zijn van de nu gebruikte contexten, die 'niet zelden te gekunsteld en irreëel' zijn, een oneigenlijke relatie met het dagelijkse leven leggen, of onvolledig zijn door het achterwege blijven van de afsluitende abstractiefase (zie [2], pp. 198–199). De sleutel naar onderwijsverbetering ligt eenvoudig in het opwaarderen van die deficiënte contexten, want 'een goede context nodigt uit tot abstractie en algebraïsche begripsontwikkeling' [2]. Hoe anders is de analyse van van de Craats. Hij put zijn optimisme uit het toegenomen besef dat juist die contexten het kernprobleem zijn, en de oplossing er uit zal bestaan "Alle zogenaamde 'realistische' contexten te schrappen. Ze hebben vrijwel nooit iets met echte realistische toepassingen van de wiskunde te maken. Het zijn haast altijd gekunstelde verhaaltjes die het aanleren van relevante wiskundige vaardigheden alleen maar belemmeren" [1]. Belemmeringen in de pogingen tot onderwijsverbeteringen ziet van de Craats ook, vandaar zijn getemperd optimisme. Daarbij doelt hij op: "belemmeringen bij noodzakelijke hervormingen: grote invloed van didactici die 'geloven' in 'realistisch wiskundeonderwijs', . . . — overtuiging bij deze didactici dat oefenen niet meer van deze tijd is en dat 'zelfontdekkend leren' van wiskundekennis een doelmatige en praktisch haalbare onderwijsvorm is. . ." [1].

Waar opinies zo uiteenlopen, is het raadzaam te bezien wat de empirie kan toevoegen. Er hebben verschillende analyses plaatsge-



vonden, waarvan de belangrijkste *Zeven jaar Tweede Fase, een balans* [4] is, maar de beperking in al dit type van jaargroepstudies is dat leerlingen van na de invoering van de vernieuwde tweede fase, worden vergeleken met leerlingen 'oude stijl'. Die leerlingen verschillen inderdaad wat betreft het onderwijs dat ze genoten hebben, maar ook in een groot aantal andere opzichten. Het ho is bijvoorbeeld sterk veranderd, onder andere door de invoering van de bachelor-masterstructuur, zodat aansluitingsproblemen zowel door veranderingen in het vwo, als die in het ho verklaard zouden kunnen worden. Dat probleem treedt niet op, wanneer de vergelijking zich niet richt op verschillende jaargroepen, maar op studenten met verschillende vooropleidingen binnen eenzelfde jaargroep; die benadering zal in deze studie worden gekozen.

Internationale studenten

Als onderdeel van het SURF-project *Web-spijkeren* [10], uitgevoerd in de periode 2004–2006, en de daarop volgende projecten *Web-spijkeren 2* [11], het SURF project *NAP* [12] en E-merge projecten *Math Learning Space* [13], zijn gedurende een aantal jaren analyses verricht van wiskunde-prestaties, wiskunde-voorkennis en -vooropleiding en een aantal leergerelateerde variabelen van eerstejaarsstudenten in de bacheloropleidingen bedrijfskunde en economie van de Universiteit Maastricht. Deze opleidingen vormen een aantrekkelijk studieobject omdat ze sterk internationaal georiënteerd zijn. In de beschouwde periode is het aandeel internationale studenten gestaag opgelopen van 48,5% in 99/00 tot 62,3% in 05/06. Naast internationaal zijn beide opleidingen echter ook regionaal: van de buitenlandse instroom komt de overgrote meerderheid uit het Roergebied, vlak over de grens. Maar omdat Duitse en Nederlandse onderwijssystemen sterk verschillen, niet in de laatste plaats in het wiskundeonderwijs, kunnen kleine geografische verschillen resulteren in grote scholingsverschillen, die zich kortweg laten typeren door een vrij traditioneel Duits systeem, in vergelijking met een hervormd Nederlands systeem. Wat het wiskundeonderwijs betreft: een conceptuele/curriculum oriëntatie in Duitsland, versus een contextuele oriëntatie in Nederland. Maar de verschillen gaan verder: zo vormt bijvoorbeeld het domein statistiek en kansrekening een belangrijk onderdeel van het Nederlandse wiskundeonderwijs, terwijl deze onderwerpen geen rol van betekenis spelen in het Duitse onderwijs.

Die grote verschillen in vooropleiding

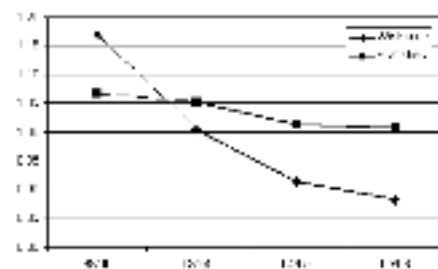
noodzaken beide eerstejaars programma's te starten met het vak *Kwantitatieve Methoden* (6,5 ECTS, 8 weken), dat in essentie het programma van Wiskunde A1 en A2 herhaalt. Met een aantal kenmerkende verschillen: de oriëntatie is puur conceptueel, niet contextueel, en er is een groot verschil in hulpmiddelen: de grafische rekenmachine mag niet worden gebruikt, maar in plaats daarvan wel de pc met generieke applicaties als Excel. Het aantal deelnemers aan het vak fluctueert rond de achthonderd per jaar, waarvan tweederde WiA1,2 als vooropleiding heeft (of het vergelijkbare Duitse 'Grundkurs' niveau), en een derde WiB (Duits: 'Leistungskurs') als vooropleiding heeft. Verschillen in niveau van vooropleiding zijn duidelijk herkenbaar in de prestaties in het eerstejaars methodenvak, maar zullen hier niet verder geanalyseerd worden, aangezien de verschillen zowel constant in de tijd, als constant per nationaliteit zijn (het verschil tussen Duitse 'Leistungskurs' en 'Grundkurs' studenten is analoog met het verschil tussen WiB en WiA1,2 studenten).

In een vergelijking tussen studenten met een vwo-diploma en studenten met een andere vooropleiding doen zich twee selectie-vertekeningen voor. De eerste vertekening betreft de keuze om in het buitenland te gaan studeren. Het lijkt aannemelijk dat de kenmerken van studenten die kiezen voor een buitenlandse studie, zullen afwijken van de kenmerken van studenten die in eigen land gaan studeren. Die zelfselectie zou ertoe kunnen leiden dat de Duitse studenten die in Maastricht gaan studeren, bijvoorbeeld beter gemotiveerde studenten zijn dan diegenen die in eigen land gaan studeren, en daardoor geen representatief beeld vormen voor alle Duitse studenten. De omvang van zo'n potentieel selectie-effect kan echter gerelativeerd worden door de omstandigheid dat de grote meerderheid van buitenlandse studenten tevens regionale studenten zijn; voor velen zal Maastricht de dichtstbijzijnde plaats zijn om economie of bedrijfskunde te studeren. Een tweede mogelijk selectie-effect werkt precies in de omgekeerde richting: bedrijfskunde, de grootste van de twee studies, is een numerus-fixusstudie, hetgeen voor studenten met een vwo-diploma selectie op basis van gemiddeld eindexamencijfer impliceert. Onder studenten met een niet-vwo-diploma vindt geen selectie op basis van gewogen loting plaats: zij worden allemaal in de categorie van het gemiddelde eindcijfer geplaatst, en loten mee met voor iedereen een gelijk gewicht. Op grond van dit verschil zal de studie bedrijfskunde bovengemiddelde vwo-

abituriënten aantrekken, doch gemiddelde niet-vwo-abituriënten. Omdat beide selectie-effecten, noch hun resultante te bepalen zijn, zal de analyse zich hier richten op veranderingen van prestatie-indicatoren in de tijd. Onder de veronderstelling dat in de tijd zich geen belangrijke wijzigingen in de omvang van potentiële selectie-effecten hebben voorgedaan, laten die verschuivingen zich wel interpreteren als ontwikkelingen in de scholing van middelbare scholieren.

Onderstaande figuur geeft inzicht in de ontwikkeling van de relatieve prestaties van vwo-ers ten opzichte van niet vwo-ers voor de twee deelscores van het vak Kwantitatieve Methoden: Wiskunde en Statistiek. Beide deelscores bestaan grotendeels uit de score op de schriftelijke eindtoets (20 van de 24 punten), aangevuld met scores op tussentijdse toetsjes (de quizzes: 4 van de 24 punten). De toetsstof is representatief voor de tweede fase eindtermen van het WiA1,2 programma, en hier uitgesplitst naar deelscores, omdat die een interessante internationale vergelijking toelaten.

De ratio's weergegeven in de grafiek betreffen de gemiddelde score van de vwo-student, gedeeld door de gemiddelde score van de niet-vwo-student. De jaren waarover data beschikbaar zijn, zijn de jaren waarin aan de verschillende genoemde aansluitingsprojecten is meegewerkt (vanaf 03/04), plus een incidentele meting daaraan voorafgaand (99/00). Om aan te geven dat over tussenliggende jaren geen gegevens beschikbaar zijn, is de ontwikkeltrend tussen de eerste meetjaren onderbroken weergegeven.



Figuur 1 De ontwikkeling van de wiskunde- en statistiekprestaties van VWO-ers versus niet VWO-ers van Nederlandse en internationale studenten, in de tijd.

In figuur 1 vallen een aantal uitkomsten op. Om met de positieve te beginnen: vwo-ers deden het goed in statistiek: de prestatieratio is steeds groter dan één, zij het dat hij snel terugloopt naar de waarde van ongeveer één. Het waarom van het verschil is eenvoudig aan te geven: samen met de Angelsaksische landen neemt Nederland een unieke plaats in wat betreft de prominente rol

van statistiek in het wiskunde-middelbare-schoolprogramma. In veel Europese landen ontbreekt statistiek geheel, en is er hoogstens een kleine rol voor waarschijnlijkheidsrekening weggelegd. Internationale studenten maken vaak voor het eerst kennis met statistiek in het kader van het vak Kwantitatieve Methoden. En slagen er kennelijk in om binnen 60 studie-uren met een in tijd beperkte docentbegeleiding toch nagenoeg het niveau te halen van de Nederlandse student die al het hele programma op het vwo heeft doorlopen. Voor wiskunde geldt zo'n verschil niet: daar hebben internationale studenten hun aandeel zeker in gehad. Aansluitingsproblemen zijn daar niet zo zeerte verklaren in de omvang van het wiskundeprogramma, maar in de keuze van onderwerpen: de Nederlandse eindtermen zijn geen Europees gemeengoed. De scores in 99/00 geven die aansluitingsproblemen goed weer: vwo-ers presteren duidelijk beter dan niet-vwo-ers. In de meer recente jaren is daar een drastische kentering in gekomen: ondanks dat buitenlandse studenten een vooropleiding hebben gevolgd die wat onderwerpkeuze minder goed aansluit dan de vooropleiding van Nederlandse studenten, overtreffen ze de Nederlandse studenten in hun prestaties, in het laatste jaar zelfs zeer aanzienlijk. De overheersende indruk die uit beide aspecten weergegeven in figuur 1 op te maken is, is er één van (scherp) dalende trends. Aangezien het ratio's betreft, kunnen zowel teller als noemer daar schuldig aan zijn. Internationale studies — zie de volgende sectie — geven weinig aanleiding te vermoeden dat internationaal het niveau van secundair wiskundeonderwijs plotseling is gestegen. Eerder lijken de dalende ratio's het vermoeden van een aanzienlijke achteruitgang van het niveau van het Nederlandse onderwijs [1–3] te bevestigen. Maar welk van de twee het ook is, of zelfs een combinatie: bezien vanuit een internationaal perspectief, zijn er evidente problemen met het huidige tweede fase wiskundeonderwijs.

Internationale studies

Recentelijk is met enig enthousiasme gereageerd op de uitkomsten van de PISA 2003 studie van de OECD, in het bijzonder de gunstige positie van Nederlandse middelbare scholieren op het gebied van de wiskunde: in de top, onmiddellijk achter Finland (zie bijvoorbeeld [5]). Tegelijkertijd zijn die ogenschijnlijk gunstige prestaties op verschillende wijzen gerelativeerd (zie [6] voor een uitvoerige analyse). De belangrijkste relativisering betreft hetgeen wat de PISA toets meet: dat

is niet wiskundekennis, zoals vaak gesuggered of korthedshalve aangeduid, maar wiskundige geletterdheid, of 'mathematical literacy'. Dat een wiskundeprogramma dat zich oriënteert op contexten relatief goed scoort op geletterdheid, mag weinig verbazing wekken. Niet voor niets constateert het rapport van het Freudenthal Instituut in zijn afsluitende opmerkingen: "Dat Nederland goed scoort bij Wiskunde kan deels verklaard worden uit het feit dat het curriculum in Nederland meer past bij de wiskundige geletterdheid uit PISA dan dat van veel andere landen" [6, p. 105]. Om bijna onmiddellijk te vervolgen met: "Het peil van de wiskundige geletterdheid in Nederland lijkt te dalen.". Tevens bespreekt het rapport scores die in de pers veel minder de aandacht hebben gekregen: die in het domein Probleemoplossen. "Opvallend is dat Nederland relatief achterblijft bij problemen die meer mathematisering vereisen en ook meer stappen vertonen in het oplossingsproces. Dit valt op te maken uit de resultaten van Nederland bij Probleemoplossen, en door die te relateren aan de deelresultaten bij Wiskunde. Met name middenmoter Duitsland zit Nederland hier dicht op de hielen." [6, p. 105]. Constatering die vervolgens uitmonden in het volgende globale oordeel: "Nederlandse leerlingen blinken uit in het lezen en interpreteren van grafieken en andere grafische voorstellingen. Ook het redeneren op basis van die gegevens gaat de leerlingen goed af. Nederlandse leerlingen blijven achter wanneer er formules gemaakt of geïnterpreteerd moesten worden of, in het algemeen, wanneer de benodigde wiskunde wat formeler wordt." [6, p. 106]. De aanbevelingen die op grond van dit oordeel tot stand komen bestaan, voor wat het vwo betreft, uit een drietal elementen: "Er dient meer aandacht te komen voor de meer formele en abstracte aspecten van de wiskunde, waarbij de stand van zaken in Vlaanderen — en niet in Finland — een voorbeeld kan zijn. ... Er dient meer aandacht te komen voor authentiek probleemoplossen ... Er dient nader onderzoek te komen naar het feit dat het niveau van het Nederlandse wiskundeonderwijs lijkt te dalen als we de gangbare internationale onderzoeken PISA en TIMSS als maatlat hanteren." [6, p. 106]. De nauwe correspondentie tussen de uitkomsten van het eigen empirische onderzoek en de besproken PISA uitkomsten, zowel in termen van relatieve sterkten en zwakten in programmaonderdelen van Nederlandse scholieren als de ontwikkelingen daarvan in de tijd, rechtvaardigen het gebruik van bovenstaande citaten. De interessantste referentie is ech-

ter die naar Vlaanderen, de officieuze winnaar van de PISA competitie (was Vlaanderen een land geweest, dan was het als eerste geëindigd). Vlaanderen en Nederland verschillen immers vergaand in de benadering van het secundair wiskundeonderwijs: Vlaanderen sterk concept/curriculum georiënteerd, Nederland sterk context georiënteerd.

De PISA studie levert een verdere aanwijzing voor de waardering van contextuele wiskunde. Naast Nederland heeft in de Verenigde Staten de introductie van contextuele wiskunde een belangrijke rol gespeeld in de hervormingen van het wiskundeonderwijs (met didactische ondersteuning door het Freudenthal Instituut). Maar juist de Verenigde Staten scoren uiterst mager in deze internationale vergelijking, en in dit land is al jaren een sterke tegenbeweging actief die hervormingen van het wiskundeonderwijs wil teruggedraaien en terug wil gaan naar een curriculum georiënteerd wiskunde onderwijs (zie 'The Math Wars', bijvoorbeeld in [7]).

Onderdeel van de PISA 2003 studie, maar merkwaardig genoeg weinig belicht in de discussies over de staat van ons wiskundeonderwijs, is een vergelijking van een aantal belangrijke, studentgerelateerde, determinanten van het leren van wiskunde: het zelfbeeld (self-concept) van studenten met betrekking tot het domein wiskunde, en het vertrouwen in eigen competenties (self-efficacy), wederom in relatie tot wiskundige vraagstukken. In de pedagogische opvattingen die de basis vormen van de hervormingen van het wiskundeonderwijs zijn deze studentkenmerken cruciaal voor de motivatie van studenten en de bereidheid tot inzet en doorzetten in het leren van wiskunde [8]. Omwille van die cruciale rol zou het aankweken van deze attitudes tot de belangrijkste doelen van het wiskundeonderwijs dienen te behoren. Echter, op dit vlak doet het Nederlandse onderwijs het echt beroerd: voor beide aspecten behoort Nederland bij de slechtste helft der deelnemers. Dat beeld komt wederom overeen met een vergelijkbare studie verricht onder de deelnemers van het methodenvak Kwantitatieve Methoden aan de UM. Dat onderzoek is recentelijk gepubliceerd [9], zodat we hier kunnen volstaan met het aangeven van de hoofdconclusies.

De belangrijkste conclusie is die dat niet vwo-ers, heel specifiek studenten met een Duitse middelbare school opleiding, de vwo-ers op alle onderdelen overtreffen. In aanvulling op het PISA onderzoek hebben we de bevraging van studenten naar motivaties, zelfbeeld en zelfvertrouwen gedifferentieerd:

van het generieke niveau (academische kennis en vaardigheden in de breedste zin), tot het specifieke niveau (kennis en vaardigheden binnen een concreet domein). Op dat generieke niveau doen vwo-ers het (significant) slechter dan niet vwo-ers, maar de verschillen zijn nog beperkt. Echter, hoe specifiek het domein waarop motivatie, zelfbeeld en zelfvertrouwen betrekking hebben, hoe groter het verschil, met de grootste verschillen binnen het domein van de wiskunde [9, pp. 44–45]. Een beeld dat op zich weinig verrassend is, omdat het spoort met andere evaluaties zoals [4] waarin geconstateerd wordt dat de vernieuwde tweede fase tot een relatieve opwaardering van algemene kennis en vaardigheden, ten koste van vakinhoudelijke kennis en vaardigheden, heeft geleid.

Conclusies

De vernieuwde tweede fase veroorzaakt deficiënties in cruciale aspecten van wiskundige kennis en vaardigheden; daarover zijn alle evaluaties eensluidend. Minder convergentie van opvattingen bestaat er inzake de oorzaak

van deze deficiënties, en de waardering van deze deficiënties in relatie tot andere doelen van het onderwijs. Wat het eerste betreft: is het de contextuele wiskunde zelf en de daaraan gerelateerde leermiddelen als bijvoorbeeld de grafische calculator die deze uitval veroorzaken, of is er sprake van een adequate didactische benadering waarvan slechts de afronding van een vervolmakingproces afgewacht hoeft te worden. Die laatste aanname zou overeenstemmen met het beeld van een geleidelijke toename van de wiskundige prestaties van vwo-abituriënten tot een stabiel niveau, in vergelijking met bijvoorbeeld internationale studenten. De studie waarvan deze bijdrage rapporteert laat een duidelijk ontwikkelproces zien, maar de richting ervan is echter precies tegengesteld. Maar misschien is dit wel de onvermijdelijke prijs die we moeten en ook zouden willen betalen in het behalen van een ander belangrijk onderwijsdoel: door de contextuele wiskunde zullen leerlingen meer geïnteresseerd raken in de wiskunde, meer zelfvertrouwen krijgen in het maken van wiskundige opdrachten, hun motiva-

tie vergroten voor de studie van het wiskundevak. Jammer genoeg lijkt ook deze aanname te worden gelogenstraft: de vernieuwde tweede fase lijkt niet enkel een verschuiving te bewerkstelligen in prestaties van specifieke vakinhouden, naar generieke kennis en vaardigheden, maar ook een gelijkgerichte verschuiving te veroorzaken in de attitudes van leerlingen: vakinhouden, waaronder in de eerste plaats wiskunde, worden steeds minder geapprecieerd en de weinige positieve attitudes die in een vergelijking met internationale studenten nog op te tekenen zijn, betreffen de meest algemene academische competenties. Hetgeen, wederom, eigenlijk niet verbazingwekkend is: uit veel internationaal onderzoek blijkt dat er een sterke positieve samenhang bestaat tussen attitudes voor een vak, en de academische prestaties daarin (zie bijvoorbeeld [8]). De deficiëntiecurssussen in het ho lijken om die reden niet alleen voor langere tijd noodzakelijk, maar lijken ook een dubbele agenda te moeten krijgen: zowel het bijspijkeren van kennis en vaardigheden, als het stimuleren van positieve vakattitudes. ←

Referenties

- 1 J. van de Craats, 'Over de voorkennis wiskunde nu', plenaire lezing SURF conferentie *Wiskunde voorkennis voor het hoger onderwijs*, 9 maart 2006, www.surf.nl/bijeenkomsten/index6.php?oid=192.
- 2 P. Drijvers, 'Context, abstractie en vaardigheid in schoolalgebra', *Nieuw Archief voor Wiskunde* 5/7 (3) (2006), pp. 198–203.
- 3 P. Drijvers (red), *Wat a is, dat kun je niet weten. Een pleidooi voor betekenisvolle algebra op school*, Universiteit Utrecht, Freudenthal Instituut, 2006.
- 4 *Tweede Fase Adviespunt, Zeven jaar Tweede Fase, een balans*, Tweede Fase Adviespunt Den Haag, (2005), www.tweedefase-loket.nl/doc/evaluatie/balans.pdf.
- 5 'Laat het onderwijs in Europa niet wegzakken', *NRC-Handelsblad*, 16 september 2006.
- 6 T. Dekker, K. Lagerwaard, J. de Lange, G. Limpens & M.M. Wijers. *Wiskundige geletterdheid volgens Pisa — Hoe staat de vlag erbij? 1. Analyse*, Freudenthal Instituut-Pisa/Citogroep, Utrecht/Arnhem, 2006.
- 7 D. Ross, *The Math Wars*, www.ios.org/showcontent.aspx?ct=245&h=53.
- 8 PISA, *Learning for Tomorrow's World — First Results from PISA 2003*, OECD, Parijs, 2004.
- 9 D. Tempelaar, B. Rienties & W. Gijselaers, 'Internationalisering: en de Nederlandse student? Maastrichtse ervaringen met Nederlandse en Duitse studenten', *Onderzoek van Onderwijs* 35(3) (2006).
- 10 *Web-spijkeren project: Remediërend Flexibel Onderwijs voor een Heterogene Instroom*, SURF project, projectleider N. Brouwer, www.web-spijkeren.nl.
- 11 *Web-spijkeren II, Opschalingsproject*, SURF project, projectleider B. Rienties, www.web-spijkeren.nl.
- 12 *NAP-project Nationale Kennisbank Wiskunde Basisvaardigheden*, SURF project, projectleider L. van Gastel.
- 13 *Math Learning Space en Uitwerking Math Learning Space*, E-merge projecten, projectleiders P. van der Zanden en D. Tempelaar, www.e-merge.nu.

Jan van de Craats

Korteweg-De Vries Instituut

Universiteit van Amsterdam

Plantage Muidergracht 24

1018 TV Amsterdam

craats@science.uva.nl

Boekbespreking

Digitale nostalgie

Het schrijven van een dictaat is eigenlijk zonde van de tijd, tenzij je het als boek kunt publiceren. Zo dacht men vroeger zeker niet over de met zorg uitgetypte dictaten, waarin de docent precies vastlegde wat er geleerd diende worden. Op de meeste universiteiten kan je in de bibliotheek nog wel oude dictaten vinden: dikwijls zijn dit wiskundeteksten op het scherpst van de snede, getoetst aan vele cohorten studenten. Soms wordt door middel van een dictaat zelfs een nieuwe kijk op een vakgebied gegeven en kan het op die manier als inleiding fungeren voor promovendi van de auteur.

In Eindhoven heeft men een hele serie oude dictaten op een cd-rom gebrand en ter verkoop aangeboden. Kunnen we hier nog iets mee? Jan van de Craats houdt de cd tegen het licht.

'Zal ik het hele zwikkie voor je op een cd-tje branden, Koos?' Zo herinner ik me het onderschrift van een cartoon van jaren geleden met daarop twee oudere heren in een studeerkamer helemaal volgeladen met boeken. Ik moest eraan denken toen ik de cd ter recensie kreeg waarop Jan de Graaf alle wiskundedictaten van de Technische Hogeschool Eindhoven (de latere Technische Universiteit Eindhoven) uit de periode 1956 tot en met 1982 heeft samengebracht. Met medewerking van de bibliotheek van de Technische Universiteit Eindhoven zijn alle dictaten ingescand en als pdf-files vastgelegd: 197 dictaten met als bonus daarbij het volledige leerboek *Algebra en Analyse* van Stan Ackermans en Jack van Lint. Alles bij elkaar ca. 25000 bladzijden!

Wat brengt iemand ertoe een dergelijk monnikenwerk te verrichten en wat heeft zo'n collectie de moderne wiskundige te bieden? Samensteller Jan de Graaf meldt daarover in het voorwoord: "Tijdens ontmoetingen met oudere afgestudeerden van de diverse 'Afde-

lingen' van de 'Technische Hogeschool Eindhoven' heb ik vaak, ongevraagd, te horen gekregen dat het door hen genoten wiskundeonderwijs tot het beste en aantrekkelijkste onderwijs behoorde dat ze in hun studententijd in Eindhoven meegekregen hadden." Op zichzelf al een goede reden voor een nostalgische terugblik.

Maar er moet natuurlijk meer zijn dan nostalgie. De in 1956 opgerichte Technische Hogeschool blaakte destijds van jong, bruisend enthousiasme, en hoogleraren als J.J. Seidel, J.H. van Lint en N.G. de Bruijn organiseerden modern en effectief hogeschoolbreed wiskundeonderwijs dat allerwegen bewondering afdwong. De cd laat zien dat deze reputatie terecht was. Nog steeds zijn veel van die 'antieke wiskundedictaten' (zoals De Graaf ze noemt) de moeite van het lezen waard, en dat zegt wel iets, want op elk terrein zijn natuurlijk moderne handboeken verkrijgbaar die volledig *up-to-date* zijn. Maar wiskunde is een merkwaardig vak: de presentatie is vaak min-

stens zo belangrijk als de inhoud en als je zelf onderwijs moet geven is het altijd de moeite waard om te kijken hoe goede docenten het hebben gedaan. Dat breidt de kring van mogelijk geïnteresseerden dus uit van vroegere studenten en -docenten tot alle docenten aan Nederlandse universiteiten en vergelijkbare instellingen.

Voordat ik begin met een globale inhoudsopgave eerst een paar woorden over het Eindhovense wiskundeonderwijs. Tot het begin van de jaren 70 was het basisonderwijs in de wiskunde in principe gelijk voor alle studenten van alle afdelingen (de huidige faculteiten). Er waren kleine afwijkingen, maar in grote lijnen besloeg het 5 semesters. Het eerste jaar 6 uur college en 2 middagen instructie per week, het tweede jaar 4 uur college en 1 middag instructie en in het vijfde semester 2 uur college en 1 middag instructie per week. Tentamens werden gehouden in januari en juni. Dat was alleen nog maar de basis. In de hogere jaren konden allerlei vervolgcourses worden gelopen. Na 1970 trad de Bouwkunde uit het uniforme wiskundebasisonderwijs. Nog weer veel later volgden steeds meer afdelingen die speciaal op hun eigen behoefte toegesneden wiskundeonderwijs verlangden. De cd beschrijft de geschiedenis echter tot en met 1982, toen die verbrokkeling nog maar zeer beperkt was ingezet.

Het is bij een bespreking als deze natuurlijk verleidelijk om een vergelijking te maken



Figuur 1 Van links naar rechts: Johan Jacob Seidel, Nicolaas Govert de Bruijn en Jan de Graaf

met de huidige situatie, vooral wanneer je zelf ook al flink wat grijze haren bezit. Ik zal daar niet aan toegeven; dat moet de toekomstige gebruiker van deze cd zelf maar doen. Wel stel ik met enige jaloezie vast dat er dus in Eindhoven al vanaf het begin uitstekende dictaten waren, terwijl wij als studenten in de jaren zestig in Leiden nog bij haast alle wiskunde-colleges functioneerden als een massale kopieermachine. Slechts weinigen verstonden de kunst om dictaat te maken en tegelijkertijd de gedachtengang van de docent te volgen. De huidige generatie is in veel opzichten te benijden!

Op naar de inhoud van de cd. Er zijn vier grote secties:

- I. Basisonderwijs Wiskunde jaren zestig
- II. Basisonderwijs Wiskunde jaren zeventig
- III. Voortgezet Wiskundeonderwijs
- IV. Een facsimile reproductie van de 2e druk van het boek *Algebra en Analyse* van Ackermans en Van Lint uit 1976.

De inhoud van de beide secties Basisonderwijs laten zich raden: analyse, lineaire algebra, differentiaalvergelijkingen, functietheorie, Fourier- en Laplacetransformaties, vector-analyse enzovoort, maar ook waarschijnlijkheidsrekening en statistiek. Wat de cd heel interessant maakt, zowel voor vergelijkend historisch onderzoek als voor modern gebruik, is de enorme collectie oefenvraagstukken en tentamenopgaven. Daaruit kun je zien wat de studenten destijds echt beheersten. Indrukwekkend!

Deel III, Voortgezet wiskundeonderwijs, is voor de moderne wiskundige nog interes-

santer. Er zijn 6 subsecties:

1. Analyse en toepassingen van de analyse
2. Mechanica en kinematica
3. Numerieke wiskunde
4. Kansrekening, Statistiek en Operations research,
5. Algebra, Meetkunde en Discrete Wiskunde
6. Logica en Informatica.

Dit is een ware schatkamer. Het is ondoenlijk om alle grote namen te noemen die hier met vaak meerdere dictaten ten tonele verschijnen. Ik heb zelf met veel plezier zitten grasduinen in de meest uiteenlopende dictaten, bijvoorbeeld van Seidel, Bouwkamp, Peremans, De Bruijn en Van Lint, maar ik doe anderen tekort door ze hier niet te noemen. Laat iedereen zelf zijn keuzemenu samenstellen! Mij persoonlijk trof het juweeltje dat Seidel, die altijd erg geïnteresseerd was in de lerarenopleiding, samenstelde onder de titel *Achtergronden van de Schoolwiskunde*. Daarin onderwerpen als projectieve meetkunde, niet-euclidische meetkunde, hogerdimensionale meetkunde, homotopie, topologie en homologie. Een van de bijlagen bij dat dictaat bestaat uit het prachtige in memoriam van Hans Freudenthal bij het overlijden van L.E.J. Brouwer in de *Groene Amsterdammer*.

Zoals gezegd, het vierde deel is het boek van Ackermans en Van Lint. Ik kan het niet laten om iets uit de handleiding (het nulde hoofdstuk) te citeren, mede in het licht van de thans op allerlei fronten gevoerde discussie over inzicht versus oefening en het nut van veel oefenopgaven maken. Ik citeer: "Een wiskundeboek, ook een leerboek, geeft vastge-

legde wiskundige kennis, de gebruiker moet zichzelf de beschreven inzichten eigen maken. De ervaring heeft geleerd dat het middel bij uitstek om dit te doen is het maken van vraagstukken, waarvan wij er vele honderden, verstrooid tussen de tekst en verzameld in aparte paragrafen, hebben opgenomen."

De cd biedt een overvloed aan nostalgisch, maar vooral ook erg inspirerend materiaal, zowel voor de praktiserend wiskundige als voor de historisch geïnteresseerde onderzoeker. Alle pdf-files zijn voorzien van een handige inhoudsopgave. Het geheel wordt gecompliceerd door een fraaie fotogalerij. De cd-rom is te bestellen via het internet.



Wiskunde-dictaten 1956-1982, cd-rom, gecompileerd door J. de Graaf, Technische Universiteit Eindhoven, 2006. Te bestellen bij Universiteitsfonds Eindhoven, www.ufeindhoven.nl, prijs €20,-.

Boekbesprekingen

| Book Reviews

Eindredactie: Hans Cuypers en Hans Sterk
 Redactieadres: Review Editors NAW - HG 9.93
 Dept. of Math. and Computer Science
 Technische Universiteit Eindhoven
 Postbus 513, 5600 MB Eindhoven
 Webpagina: www.win.tue.nl/wgreview
 e-mail: wgreview.win@tue.nl



C.J. Bradley
Challenges in Geometry for Mathematical Olympians Past and Present

Oxford University Press, 2005

205 p., prijs €34,50

ISBN 0-19-856692-1

De laatste jaren is een aantal boeken verschenen over probleemoplossen in de geest van de wiskundeolympiade. *Challenges in Geometry* is er een van. Dit boek vormt een klasse apart, het is enigszins excentriek. Laat me u er aan herinneren dat de wiskundeolympiade voor middelbare scholieren is.

De titel verwijst naar meetkunde, maar het boek gaat bijna uitsluitend over combinatorische en getaltheoretische problemen ingegeven door meetkundige configuraties. Bijvoorbeeld: karakteriseer alle driehoeken met geheeltallige zijdes en een hoek van 60° . Op grond van de cosinusregel komt dit neer op het oplossen van de diophantische vergelijking

$$c^2 = a^2 - ab + b^2.$$

Toch moet de lezer een flinke dosis klassieke (Euclidische) meetkunde paraat hebben. Stellingen van Apollonius, Ceva, de Moivre, Menelaus en Ptolemaeus worden toegepast zonder enige nadere uitleg. Maar ook modulair rekenen, (algebraïsche) lichamen, gehelen van Gauss, unimodulaire matrices, determinanten, partiële afgeleiden, complexe getallen, Taylorreeksen in 2 variabelen en dergelijke komen op de proppen als zijnde vanzelfsprekend. Dat is nou niet echt typische wiskundekennis van zelfs de betere middelbare scholieren in Nederland.

De formuledichtheid is werkelijk verbluffend; op veel plaatsen overstijgt het de prozadichtheid. Slechts tien pagina's bevatten geen enkele formule, waaronder het voorwoord (twee pagina's), de bibliografie (twee pagina's) en het register (drie pagina's). Gelukkig zijn er ook 63 figuren voor de meer visueel ingestelde lezer. Er is zelfs wat aandacht voor de historische achtergrond van problemen.

Een paar van de problemen die Bradley aanpakt genieten vermoedelijk algemenere bekendheid: het tellen van roosterpunten binnen roosterveelhoeken (de stelling van Pick) en het karakteriseren van 'Eulerbakstenen' (rechthoekige blokken waarvan alle ribben en zijvlakdiagonaal geheeltallige lengte hebben) en het gerelateerde — maar vooralsnog niet ontdekte — perfecte blok (dat bovendien een lichaamsdiagonaal met gehele lengte heeft).

De bewijsstijl is zeer compact. Daardoor kun je vlug lezen en is het makkelijk overzicht te houden. Maar in veel bewijzen worden zonder pardon konijnen uit de hoed getoverd, wat het goede begrip in de weg kan staan.

Het boek biedt vele oefenopgaven met oplossingen (vijftien pagina's). Het aanhangsel behandelt barycentrische coördinaten, een nuttig onderwerp dat vrijwel nooit in leerboeken aan bod komt. Dit alles maakt het boek een dankbare bron voor olympiadetrainers, maar het is niet ondenkbaar dat olympiadegangers in spe er juist door worden afgeschrikt. Aan de andere kant kunnen we hierdoor misschien wakkerschrikken van de achterstand die Nederland heeft als het gaat om de internationale wiskundeolympiade.

T. Verhoeff



G. Tourlakis
Lectures in Logic and Set Theory
Volume 1: Mathematical Logic, Volume 2: Set Theory

Cambridge Studies in Advanced Mathematics, Nos 82, 83, Cambridge University Press, 2003, Volume 1, 340 p., prijs £47.50, Volume 2, 592 p., prijs £65.00, ISBN 0-521-75373-2 (Vol. 1) en 0-521-75374-0 (Vol. 2)

Deze boeken zijn ontstaan uit colleges die de auteur heeft gegeven als hoogleraar aan de Universiteit van Toronto. Ze zijn in een goed leesbare en toegankelijke maar hier en daar wat rommelige stijl geschreven. De wat meer filosofische opmerkingen waartoe het onderwerp aanleiding geeft zijn niet altijd even nauwkeurig. Samen bieden de boeken een overzicht van enkele belangrijke onderwerpen uit het wiskundig grondslagenonderzoek. De auteur volgt grotendeels gebaande wegen. Het tweede deel, gewijd aan de verzamelingenleer, is bijna twee maal zo omvangrijk als het eerste, dat de auteur begon te schrijven als inleiding op het tweede. In het eerste deel behandelt hij enige begrippen uit de modellentheorie — hij veroorlooft zich onder andere een uitstapje naar de niet-standaard-analyse — en ook uit de recursietheorie. Hij geeft een uitvoerige en gedetailleerde uiteenzetting van de tweede onvolledigheidsstelling van Gödel. In het tweede deel introduceert hij de axioma's van Zermelo en Fränkel en laat hij zien dat ze plausibel zijn indien men uitgaat van het cumulatieve verzamelingsbegrip van Zermelo en Von Neumann. Direct na de introductie van het keuze-axioma schetst hij Gödels bewijs van de relatieve consistentie van dit axioma. Een stuk verderop in het boek maakt hij het bewijs precies. Hij beschrijft dan ook Gödels bewijs van de relatieve consistentie van de continuümhypothese. De laatste veertig bladzijden van het boek zijn gewijd aan *forceren*, de techniek die P. Cohen in de verzamelingenleer introduceerde en waarmee hij de relatieve consistentie van de ontkenning van de continuümhypothese wist aan te tonen.

Wim Veldman



G. N. Frederickson
Hinged Dissections
Swinging & Twisting

Cambridge University Press, 2002
 287 p., prijs £35.00
 ISBN 0-521-81192-9

Anyone interested in recreational mathematics, especially geometric puzzles, will enjoy this book.

In his previous book, *Dissections: plane and fancy*, Frederickson collects all sorts of plane dissections. His new book focuses on the special case of hinged dissections. These books complement each other, but are independent; the only background required is elementary high school geometry.

Given two equal area polygonal figures, or unions of polygonal figures, A and B , the dissection problem asks if there is a dissection of A into polygonal pieces which can be rearranged to form the figure B . That this is always possible was proved by Wal-

lace, Bolyai and Gerwien in 1831–33. For the hinged dissection problem, each piece of the dissection must be joined to another piece by a hinge, that is, each piece of the dissection must have a point in common with some other piece, and this point must remain a common point of the pieces as they are moved to transform from A to B . When unfolded, the pieces form a chain of polygons. A relatively simple example is the four piece hinged dissection transforming a triangle into a square.

Whether there is always a hinged dissection relating two figures of the same area is still an open problem, which this book does not attempt to tackle. Rather, it is organized into chapters on various classes of examples and methods of producing hinged dissections. For example, hinged dissections involving only squares and rectangles; hinged dissections constructed by superimposing tessellations; hinged dissections of regular polygons and stars.

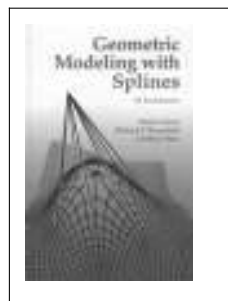
There are chapters on various generalizations, e.g., allowing flipping two pieces about a point in common. Related problems, such as colorings of hinged dissections, and the analogous three dimensional problem, are also discussed.

The book is richly illustrated, with several pictures on almost every page. There are a good number of puzzles throughout the text, with solutions at the end. Also many open problems are given.

The author has researched in detail the history of hinged dissection problems, and includes an extensive bibliography, making this an invaluable source book for anyone interested in dissection problems.

Physical models of hinged dissections can easily be constructed with paper, thread and tape, and teachers will be able to use these captivating geometrical puzzles to help their students understand and appreciate basic geometry.

Pictures and photographs relating to the book can be found at: www.cs.purdue.edu/homes/gnf/book2.html Helena Verrill



E. Cohen, R.F. Riesenfeld, G. Elber
Geometric Modeling with Splines
An Introduction

A.K. Peters, 2001
 638 p., prijs \$ 59.00
 ISBN 1-56881-137-3

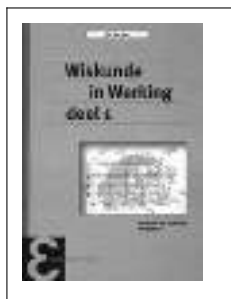
The book offers a comprehensive treatment of modeling curves and surfaces with emphasis on B-spline techniques. Those B-splines are piecewise polynomial functions on an interval defined by the following prescribed data: a *breakpoint sequence* of distinct real numbers in the interval, a *multiplicity vector* of positive integers, and the maximal degree κ of polynomial restrictions. The degree of continuity at a breakpoint is equal to κ minus the corresponding multiplicity. Spaces of B-splines are generated by *B-spline blending functions* which generalize Bernstein-Bezier polynomials. Working with B-splines retains such positive features as convex hull and variation diminishing properties. There are recursive 'de Casteljau' algorithms to compute and evaluate the blending functions. On the other hand, general B-spline blending

functions are locally supported and have low polynomial degree.

The book contains a sound basis of relevant mathematical machinery (in particular, differential geometry of curves and surfaces). Its importance to geometric modeling is well demonstrated by proposed design schemes, algorithms and examples. The basic constructive geometric method is *blending* representation, where a curve is expressed as a continuous convex combination of a few *control points*. This method is first introduced on the example of quadratic curves, and subsequently it is used to present Bezier splines and B-splines. The authors consider various types of interpolation and approximation problems with B-splines, subdivision and multiresolution techniques. Different mathematical formulations and design approaches are mentioned and compared. Chapters on surface modeling consider mainly tensor product B-spline surfaces, therefore many methods there rely on the similar curve algorithms. A linear operator approach is used to interpolate boundary curves. Advanced techniques include refinement and intersection algorithms, Boolean operations on models, subdivision surfaces, trivariate splines.

The book can be used as an excellent reference and as a textbook for a rigorous course on geometric modeling.

Raimundas Vidunas



M. de Gee
Wiskunde in Werking — deel 1
Vectoren en Matrices Toegepast

Utrecht : Epsilon uitgaven, nr. 48, 2001
276 p., prijs €22,- (4e druk, 2006)
ISBN 90-5041-063-4

Wiskunde in Werking - deel 1 van eindredacteur dr. Maarten de Gee is uitgave 48 van Epsilon uitgaven, Utrecht, en is een ander boek dan uitgave 28 van dezelfde uitgeverij, ook van de hand van De Gee en met bijna dezelfde naam, *Wiskunde in Werking*. Volgens het voorwoord is het grootste deel van deze uitgave daar ook op gebaseerd. Dit deel (nr. 48 dus) heeft als ondertitel 'vectoren en matrices toegepast' en is een inleiding in de lineaire algebra.

Zoals de titel en ondertitel al doen vermoeden wordt in dit boek een grote nadruk gelegd op de toepasbaarheid van de stof. Hierdoor is de volgorde waarin de stof wordt aangeboden anders dan in de meeste leerboeken over lineaire algebra. Zo wordt al direct de schoorsteenveegmethode voor het oplossen van stelsels lineaire vergelijkingen geïntroduceerd, nog voordat er überhaupt sprake is van vectoren of matrices.

Alle vijf de hoofdstukken houden een vaste volgorde aan: eerst een inleiding met daarin een vraagstelling die met behulp van de in dat hoofdstuk te behandelen stof opgelost kan worden; vervolgens een aantal groepen van steeds drie paragrafen, bestaande uit ten eerste nieuw 'wiskundig gereedschap', waarin een nieuwe methode of theorie wordt behandeld. Daarna volgt een paragraaf toepassingen, waarin de nieuwe stof wordt ingebed in voorbeelden uit de dagelijkse praktijk. Deze voorbeelden zijn uit een veelheid van wetenschaps- en toepassingsgebieden afkomstig (er worden er 27 genoemd) en een aantal ervan lopen als een rode draad door het boek doordat steeds nieuwe stof op het voor-

beeld wordt losgelaten. Ook worden er zo nu en dan opgaven bij de voorbeelden geformuleerd. Ten derde volgt een paragraaf met enkel opgaven. Deze zijn meestal 'puur wiskundig' van aard maar soms zijn er ook redactiesommen toegevoegd. Van bijna alle opgaven zijn achterin de antwoorden opgenomen; per hoofdstuk zo'n vijftig stuks. Ten slotte is er steeds een korte paragraaf toegevoegd met reflectie over de stof en wat historische noten.

De meeste belangrijke stof komt in dit boek wel aan bod: vectoren en vectorruimten, deelruimten, bases, matrices, stelsels lineaire vergelijkingen, determinanten, eigenwaarden en -vectoren, inproducten, projecties, hoeken, enzovoort. Dit wordt aangeboden in kleine, concrete porties van een of twee begrippen per keer, waarna er uitgebreid mee geoefend wordt. Toch ontbreken er nog een aantal belangrijke onderwerpen zoals bijvoorbeeld de Jordannormaalvorm; complexe getallen en daarbij behorende stof komen pas in het allerlaatste gedeelte aan bod. Verder is er niet of nauwelijks sprake van andere vectorruimten dan de $\mathbf{R}^n$.

Volgens de achterkaft is dit boek bedoeld voor studenten Hogeschool of universiteit en leraren wiskunde. Doordat het boek zo nadrukkelijk toepassingsgericht is en voorbeelden bevat uit wetenschapsgebieden uiteenlopend van toxicologie en sociologie tot economie en natuurkunde, zal het inderdaad voor een hoop studierichtingen bruikbaar zijn. Dit heeft echter wel tot gevolg dat het abstractieniveau niet al te hoog kan zijn. Dit komt de wiskundige precisie en diepgang niet ten goede: echte stellingen en bewijzen zijn niet te vinden. Belangrijke stellingen worden gegeven als eigenschappen, zonder te vermelden hoe men eraan komt. Dit maakt dit boek ongeschikt als leerboek voor wiskundestudenten. Het is meer een receptenboek voor gebruik bij andere studies waar wiskundige resultaten belangrijk zijn maar de bijbehorende afleidingen niet.

Jasper Stein



C. E. Gutiérrez
The Monge-Ampère Equation

Progress in Nonlinear Diff. Eq. and their Appl., vol. 44
Berlin: Birkhäuser, 2001
127 p., prijs €77,-
ISBN 0-8176-4177-7

De Monge-Ampèrevergelijking, $\det D^2u = f(x)$ in $\Omega \subseteq \mathbf{R}^n$, is een volledig niet-lineaire vergelijking die zijn oorsprong heeft in de differentiaalmeetkunde (in zekere zin is de Monge-Ampèrevergelijking een vereenvoudigde variant van de vergelijking voor (hyper)oppervlakken met voorgeschreven Gausskromming). Tegenwoordig treedt de vergelijking op in allerlei verschillende meetkundige contexten, maar bijvoorbeeld ook in optimaliseringsproblemen en in de stromingsleer.

Echter, dit niet al te dikke boek gaat niet in op de achtergrond of de meetkundige aspecten van de Monge-Ampèrevergelijking. De tekst is in zijn geheel gewijd aan het existentie- en regulariteitsprobleem voor zwakke oplossingen van de vergelijking. Dit is een relatief jong onderzoeksgebied, waarin met name de diepe bijdragen van L.A. Caffarelli aan de inwendige regulariteitstheorie een belangrijke rol spelen. Er is nog weinig fundamentele theorie voor volledig niet-lineaire vergelijkingen en juist daarom

is deze tekst een welkome aanvulling op de literatuur. De theorie wordt in zijn geheel vanaf de basis opgebouwd. Als u convex is, kan het D^2u in zwakke zin geïnterpreteerd worden als een maat op Ω . Het hierop volgende bewijs van het bestaan van zwakke (convexe) oplossingen $u \in C(\bar{\Omega})$ heeft een zeer natuurlijke opbouw en is helder opgeschreven. De aansluitende regulariteitstheorie, die uitmondt in Caffarelli's lokale $W^{2,p}$ -schattingen voor u , is minder direct toegankelijk, maar ook hiervoor geldt dat de schrijfstijl opvallend helder is.

De tekst is geschikt voor eenieder met een zekere basiskennis op dit gebied (bijvoorbeeld op het niveau van Gilbarg en Trudinger's *Elliptic Partial Differential Equations of Second Order*) en zou mede daarom zeker gebruikt kunnen worden als basistekst voor een (geavanceerd studenten-) seminarium.

A. Doelman



C.G. Gibson
Elementary geometry of differentiable curves
An Undergraduate Introduction

Cambridge University Press, 2001
216 p., prijs £22.99
ISBN 0-521-01107-8

As the title suggests, this volume is devoted to basic properties of plane curves. The book is by no means hard to read. In my view, the text is clearly presented. Definitions are illustrated by a lot of examples. The text contains fifteen chapters and about two hundred pages. Basic concepts treated in the book are parameterized curves, curvature, contact, envelope, etc. But subjects related to physical applications, like caustics and planar kinematics are discussed as well. Caustics are also discussed through the central concepts of evolute and orthotomic. The book forms a nice introduction to the differential geometry of planar curves. Agreeing with the author, I think this book is very suitable for first year students in mathematics or physics. The text assumes only fundamental knowledge of mathematics; students only need a handful of basic results from real analysis to read it.

J. Hoo



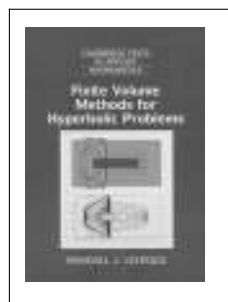
P.J. Haas
Stochastic Petri Nets
Modelling, Stability, Simulation
Springer Series in Operations Research and Financial Engineering
Berlin : Springer Verlag, 2002
509 p., prijs €85.55
ISBN 0-387-95445-7

Enige jaren geleden woonde ik regelmatig voordrachten over stochastische Petri-netten bij. Een vraag die mij toen bezighield en die ik tot voor kort niet heb kunnen beantwoorden is de volgende: Wat is het voordeel van het gebruik van Petri-netten ten opzichte van andere modelleringstechnieken?

Toen ik dit boek ter bespreking aangeboden kreeg heb ik dus niet geargeld: het antwoord op mijn vraag zou in dit boek te vin-

den moeten zijn. Eigenlijk staat het antwoord al op de kaft, in de ondertitel: "Modelling, Stability, Simulation". Dat Petri-netten zich er voor lenen om systemen op een handige grafische manier te modelleren weten we al sinds Petri. Het stochastische komt echter naar voren bij "Stability" en "Simulation". Beide hangen nauw samen: stabiliteit is een voorwaarde voor zinvolle lange-termijnsimulaties. Aan simuleren als de oplossingstechniek voor Petri-netten en dus ook aan stabiliteit wordt aan dit boek veel aandacht besteed. Zonder wiskundige details te schuwen wordt bijvoorbeeld uitgebreid ingegaan op vernieuwingsprocessen en verschillende simulatiemethodes. Ook is er veel ruimte gemaakt voor modelleringsaspecten en het aantonen van de equivalentie met zogenaamde Generalized semi-Markov processes. Het resultaat is een diepgaand boek dat mijns inziens de belangrijkste aspecten van Petri-netten uitstekend behandelt. Mijn vraag over het nut van Petri-netten is eindelijk beantwoord: ik zie in dat stochastische Petri-netten een voor de hand liggend raamwerk vormen voor *discrete event* simulatie. Een aanrader voor wiskunde- en informaticabibliotheken en onderzoekers op het gebied van simulatie en prestatieanalyse.

Ger Koole



R.J. LeVeque
Finite Volume Methods for Hyperbolic Problems

Cambridge Texts in Appl. Math., No. 31
Cambridge University Press, 2002
558 p., prijs £37.50
ISBN 0-521-00924-3

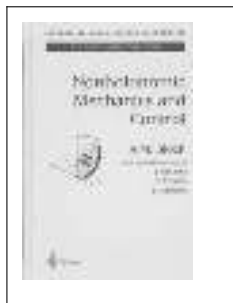
Dit werk is voortgekomen uit onderwijsactiviteiten van de auteur over de afgelopen vijftien jaar. De schrijver is een bekend expert in de numerieke analyse van hyperbolische systemen, en is Boeing Professor of Applied Mathematics aan de University of Washington te Seattle. Een vroege, veel beknoptere versie is in 1990 verschenen (R.J. LeVeque, *Numerical methods for conservation laws*, Birkhäuser, 1990). Dit eerdere boek heeft brede verspreiding gevonden en is goed ontvangen, en ik verwacht dat dit met het voorliggende werk eveneens het geval zal zijn.

Het materiaal wordt behandeld in laag tempo, begint op elementair niveau, en is helder geschreven. Het is daardoor zeer geschikt voor onderwijs en zelfstudie. Ik denk dat studenten in hun derde jaar er reeds wat aan kunnen hebben. Toepassingen zijn door het hele boek verspreid. Bijvoorbeeld, nadat lineaire hyperbolische stelsels zijn geïntroduceerd worden de vergelijkingen van de lineaire elasticiteitstheorie en het electromagnetisme behandeld, en de bijbehorende soorten golven besproken. Men komt de akoestiek tegen, de gasdynamica, de hydraulica, auto-verkeersmodellen. Steeds worden er goed gekozen voorbeelden behandeld. Het boek bevat een goede verzameling oefeningen. Er is een goede balans getroffen tussen wiskundige modellering, analyse en numerieke aspecten. De lezer wordt meegenomen in een opklimmende spiraal van eenvoudige naar meer geavanceerde beschouwingen. Ietwat ingewikkelde zaken, zoals hoge resolutie methoden en 'limiting', worden helder uiteengezet. In de laatste hoofdstukken komen gedeelten voor die grenzen aan het langdradige. Deze hoofdstukken betreffen hyperbolische stelsels

in meer dan één ruimtedimensie. De meeste interessante aspecten van hyperbolische systemen zijn dan reeds (terecht) uiteengezet in een ééndimensionale context. Deze aspecten betreffen de interessante eigenschappen van oplossingen van niet-lineaire hyperbolische behoudswetten (schokgolven, entropiecondities) en de voorwaarden die kunnen garanderen dat numerieke schema's naar de juiste oplossing convergeren. Het beroemde Lax-Wendroff theorema wordt bewezen, maar overigens gaat het boek niet diep in op de theorie, die trouwens moeilijk is, en hoofdzakelijk beperkt blijft tot het scalaire geval (slechts één onbekende).

Een sterk punt is dat een software pakket (CLAWPACK: conservation law package) vrijelijk kan worden opgehaald op www.amath.washington.edu/~claw/. Dit pakket is over de jaren heen ontwikkeld en is wijd verbreid. De student kan hiermee alle voorbeelden uit het boek zelf doorrekenen, en het uiteraard ook gebruiken voor zijn eigen problemen.

Het boek biedt een uitstekende inleiding tot meer geavanceerde literatuur en geeft niet minder dan 499 literatuurverwijzingen. Wat ontbreekt er? Het is jammer dat de methode die in de ingenieurspraktijk verreweg het meest gebruikt wordt, namelijk de methode van Jameson, niet aan bod komt. Hiermee wordt een kans gemist om numerieke analyse en toepassingen in de techniek, zoals de vormgeving van de producten van de firma waar naar de leerstoel van de schrijver is genoemd, bijeen te houden. Indien er goede gronden zijn om aan methoden van Godunov type de voorkeur te geven, dan is het de moeite waard die mee te delen. Evenmin komt een nieuwe ontwikkeling aan bod, die zich nu krachtig doorzet, namelijk de discontinue Galerkin methode. Maar dit zijn geen ernstige bezwaren. Een schrijver moet ergens een grens trekken. Slotconclusie: een prima boek. *P. Wesseling*



A.M. Bloch
Nonholonomic Mechanics and Control

Interdisciplinary Applied Mathematics, vol. 24
Berlijn : Springer Verlag, 2003
483 p., prijs €74,85
ISBN 0-387-95535-6

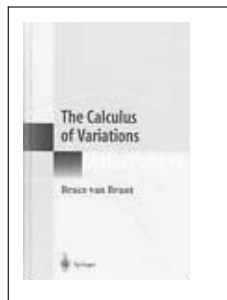
The goal of the book *Nonholonomic Mechanics and Control* is "...to explore some of the connections between control theory and geometric mechanics; we link control theory with a geometric view of classical mechanics in both its Lagrangian and Hamiltonian formulations and in particular with the theory of mechanical systems subject to motion constraints." The above citation from the preface of the book gives a good impression of the monograph.

The book consists of nine chapters. After an introductory chapter featuring a number of interesting mechanical systems, including the rattleback, the Chaplygin sleigh, and the rigid body, the text lays out, in Chapters 2 and 3, the prerequisites from differential manifolds and geometric mechanics in the style of Arnold or Abraham and Marsden. Chapter 4 presents in a nutshell some basic results from geometric control theory such as controllability, stabilization and Hamiltonian and Lagrangian control systems. Chapter 5 deals with nonholonomic mechanics, i.e., mechanical systems subject to velocity constraints that are not integrable, thus

which do not arise as constraints on the configuration variables only. Typically, nonholonomic mechanics is not variational in nature and so it is neither Lagrangian nor Hamiltonian in the usual sense. It is important to note that there is a close link between nonholonomic constraints and controllability of nonlinear control systems since in both settings non-integrable distributions (as subbundles of the tangent bundle) play a key role.

Chapter 6 deals with the control of mechanical and nonholonomic systems and, among others, shows that smooth stabilization in nonholonomic systems is in general not possible. Chapter 7 treats optimal control of nonholonomic systems, a subject which has close links to so-called sub-Riemannian geometry. The final two chapters again focus on the stabilization problem of nonholonomic resp. mechanical systems and exploits energy based methods for designing stabilizing feedback schemes. Throughout, various examples from the introduction are used to illustrate the theory.

The book *Nonholonomic Mechanics and Control* is very useful for those who are interested in the theoretic developments of this field; it is well written and contains very useful illustrative material. The work largely focuses on the author's and collaborators' (J. Baillieul, P. Crouch and J. Marsden) work, but regrettably is not very detailed in acknowledging contributions of others. The book is basically a research monograph but with a little help it can be used as an advanced textbook on the subject. *H. Nijmeijer*



B. van Brunt
The Calculus of Variations
Universitext
New York : Springer Verlag, 2004
290 p., prijs €64,15
ISBN 0-387-40247-0

Het boek geeft een elementaire inleiding tot de variatierekening voor functies van één onafhankelijke variabele, inclusief gevorderde onderwerpen als de Hamiltonse formulering, de stelling van Noether en voldoende optimaliteitsvoorwaarden. In verband met de beperking tot één onafhankelijke variabele wordt geen aandacht besteed aan kwesties zoals existentie van minimizers, convergentie van minimaliserende rijen enzovoort.

'Elementair' betekent hier dat calculus en gewone differentiaalvergelijkingen als voorkennis volstaan. De auteur kiest ervoor om geen gebruik te maken van functionaalanalyse of differentiaalmeetkunde. De stellingen en bewijzen zijn in het algemeen zorgvuldig en gedetailleerd uitgewerkt zodat de redeneringen ook door minder ervaren lezers goed te volgen zijn. De theorie wordt geïllustreerd door een groot aantal eveneens gedetailleerd uitgewerkte (standaard) voorbeelden (brachystochrone, kettinglijn, puntmechanica, slinger, buiging van een balk enzovoort). Hierbij wordt ook aandacht besteed aan verbanden met de theoretische mechanica.

Er moet echter ook een prijs voor de elementaire toegang betaald worden: centrale ideeën en structuren komen hierdoor — naar de mening van de recensent — soms wat minder duidelijk naar voren dan in een wat algemener en abstracter kader.

Een voorbeeld hiervan is het niet expliciet gebruiken van afgeleiden voor functionalen op oneindigdimensionale ruimten. Ook het ontbreken van de taal van de differentiaalmeetkunde resulteert op sommige punten in een verlies aan conceptuele helderheid.

Dit neemt niet weg dat het boek goed bruikbaar is voor een eerste kennismaking met de variatierekening, juist ook via zelfstudie. (De lezer dient echter op zijn hoede te zijn voor enkele fouten en onnauwkeurigheden waarvan te hopen is dat ze in een volgende druk verwijderd worden.)

Georg Prokert



J. Norbury, I. Roulstone (eds.)
Large-scale Atmosphere-Ocean Dynamics I
Analytical Methods and Numerical Models

Cambridge University Press, 2002
 400 p., prijs £65,-
 ISBN 0-521-80681-X

Voor het voorspellen van het dagelijkse weer en van lange termijn klimaatveranderingen worden numerieke oplossingen berekend van stelsels partiële differentiaalvergelijkingen. Deze vergelijkingen (ook wel primitieve vergelijkingen genoemd) representeren de behoudswetten van grootheden zoals massa, impuls en warmte. Omdat de fysische processen die het transport van deze grootheden veroorzaken zich op zoveel verschillende tijd- en ruimteschalen afspelen, zijn de numerieke berekeningen gigantisch en worden deze veelal op supercomputers uitgevoerd. Er blijft daarom het streven om naar mathematische formuleringen van de behoudswetten te zoeken die eenvoudiger zijn en waarvan de oplossingen een goede benadering zijn, bijvoorbeeld voor een eindig (maar bruikbaar) tijdsinterval, van de oplossingen van de primitieve vergelijkingen.

Daartoe zijn ideeën uit de dynamische systeemtheorie zeer nuttig gebleken, met name het onderzoek naar de geometrische structuren van de primitieve vergelijkingen met gebruik van het formalisme van Hamilton. Dit heeft geleid tot relatief eenvoudige zogenaamde gebalanceerde modellen, waarvan de oplossingen goede benaderingen zijn (met name op een langere tijdschaal) van de oplossingen van de primitieve vergelijkingen. Een typische toepassing is het filteren van snelle zwaartekrachtsgolven uit de primitieve vergelijkingen. Dit is gewenst omdat deze golven de tijdstap in numerieke berekeningen zeer beperken.

Dit boek is verschenen nadat aan het Isaac Newton Instituut (Cambridge, UK) binnen het thema *The Mathematics of Atmosphere and Ocean Dynamics*, in 1996 een groot aantal activiteiten is georganiseerd. Na een heldere inleiding (Hunt et al.) waarin de problematiek in context wordt gezet, bevat het boek zes artikelen van behoorlijk verschillend niveau wat betreft zowel de wiskunde als de achterliggende fysische theorie van meteorologische en oceanografische fenomenen.

In het eerste artikel (White) wordt een goed overzicht gegeven van de primitieve vergelijkingen en de reducties ervan, zoals de ondiepwatervergelijkingen, zoals die nu worden gebruikt in de meteorologie. Er wordt veel aandacht besteed aan de achterliggende fysica van de resulterende vergelijkingen en aan de

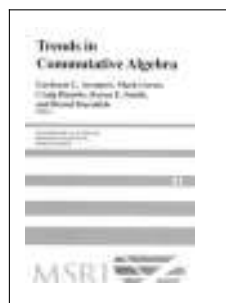
condities waaronder de gereduceerde modellen geldig zijn. Het is daarom een zeer goede introductie in het onderwerp 'modellen van de atmosfeercirculatie' voor wiskundigen.

Helaas sluiten de volgende twee artikelen (Allen et al., Babin et al.) helemaal niet aan bij het verhaal van White. In Allen et al. worden gebalanceerde modellen voor oceaanstromingen afgeleid en aan de hand van een voorbeeld (een instabiele zonale stroming) wordt de nauwkeurigheid van deze modellen bestudeerd. In Babin et al. wordt een aantal algemene resultaten bewezen betreffende de nauwkeurigheid van gebalanceerde modellen. Helaas, in beide verhalen is weinig moeite gedaan om achterliggende wiskundige begrippen uit te leggen, er wordt een niet-standaard notatie gebruikt (bijvoorbeeld D voor dichtheid) en er is totaal geen connectie met de fysische betekenis van de resultaten. Deze verhalen zijn daarom niet (gemakkelijk) toegankelijk voor oceanografen en meteorologen.

De volgende drie verhalen (Cullen, Douglas, Baigent en Norbury) sluiten wel mooi aan op het verhaal van White en er worden diverse interessante ideeën besproken over de relatie tussen eigenschappen van oplossingen van de primitieve vergelijkingen en deze van gebalanceerde modellen, en over de effecten van kleinschalige processen op de grote schaal stromingen. Daarnaast is er veel aandacht besteed aan de toepassing van deze methodiek in numerieke modellen met name in studies naar voorspelbaarheid. De oceaancirculatie krijgt alleen wel erg weinig aandacht (dit geldt trouwens voor het hele boek).

De lay-out van het boek is uitstekend; het is alleen jammer dat er van elk artikel geen inhoudsopgave per subsectie is gegeven. Ik kan me moeilijk voorstellen dat iemand geïnteresseerd is in alle artikelen in het boek. Het is daarom goed dat het boek in bibliotheken aanwezig is, maar ik kan niemand aanraden om het zelf te kopen.

H.A. Dijkstra



L.L. Avramov, M. Green, C. Huneke,
 K.E. Smith and B. Sturmfels (eds.)

Trends in Commutative Algebra

Mathematical Sciences Research Institute Publications (No. 51)

Cambridge University Press, 2004

254 p., prijs £35.00

ISBN 0-521-83195-4

Het vakgebied Commutatieve Algebra staat in Europa niet in hoog aanzien, met pensioen gaande beoefenaren worden meestal opgevolgd door collega's uit andere disciplines. Natuurlijk zijn er nog centra op hoog niveau, maar in zijn algemeenheid maken wij geen bloeiperiode mee.

Anders is het in de Verenigde Staten, waar een jonge aanwas van zich doet spreken, samenwerkingsverbanden aangaat, workshops en conferenties organiseert en zich snel ontwikkelt. Uit deze gezichtshoek heeft het MSRI, Berkeley, in 2002-2003 een jaarprogramma aan dit onderwerp gewijd, dat zeer succesvol is verlopen. Gedurende de openingsweek in september 2002 hebben vooraanstaande vakbroeders in een korte serie colleges een overzicht gegeven van belangrijke ontwikkelingen in hun richting. Jongere collega's verzorgden dan een werkcollege of toonden

voorbeelden ter ondersteuning. De uitwerkingen hiervan vindt men in de onderhavige bundel.

Benson en Iyengar laten zien hoe het vak belangrijke bijdragen levert aan de groepencohomologie, met name wanneer men concreet wil rekenen. Lazarsfeld en Blickle geven een informele inleiding tot 'multiplier ideals', een begrip dat in toenemende mate de aandacht trekt. Eisenbud/Sidman vertellen over meetkundige aspecten van syzygieën, gedeeltelijk voorproefje van Eisenbuds jongste boek. Haiman en Miller bespreken de commutatieve algebra die hoort bij n punten in een vlak. Hochster en Leuschke – hoe kan het ook anders – hebben het over 'tight closure', interessant genoeg verwant met multiplier ideals, en methoden in priem karakteristiek. Monomiale, binomiale en veeltermidealen worden behandeld door Teissier. Bravo tenslotte wijdt een korte bijdrage aan verschillende soorten bases in computer algebra.

De meeste van deze artikelen lezen niet zo maar lekker weg. Maar wie moeite wil doen zich in te werken in het betreffende gebied, vindt hier veel steun. De auteurs presenteren een eigen visie op het materiaal en geven uitgebreide verwijzingen. Precies wat nodig was toen het MSRI jaar van start ging. Maar wat evenzeer nog vele jaren zijn waarde zal behouden.

J.R. Strooker



G. Da Prato, J. Zabczyk
Second Order Partial Differential Equations in Hilbert Spaces

London Mathematical Society Lecture Note Series, 293

Cambridge University Press, 2002

379 p., prijs € 35,-

ISBN 0-521-77729-1

Uitgangspunt voor de auteurs zijn parabolische en elliptische vergelijkingen van de tweede orde op een oneindig dimensionale Hilbertruimte H . De oplossing van een dergelijke vergelijking is een functie $u : [0, T] \times H \rightarrow \mathbf{R}$. Als H eindig dimensionaal is, en de coëfficiënten continu en begrensd zijn, dan is er een ruime theorie voorradig die men kan aanwenden om uitspraken te doen over de existentie, eenduidigheid en het kwalitatieve gedrag van oplossingen.

De eerste pogingen om een theorie voor een algemene separebele Hilbertruimte H te ontwikkelen, waren van Gateaux en Levy rond 1920. Er zijn existentieresultaten van Ito, maar in het algemeen is de eenduidigheid van oplossingen al een probleem. In het onderhavige boek kiezen de auteurs voor een benadering, ontwikkeld door Gross, Daleckij en Fomin, gebaseerd op kansmaten in Hilbertruimten. Als specifiek voorbeeld van een parabolische vergelijking op een Hilbertruimte H , kan men denken aan de oneindig dimensionale warmtevergelijking die wordt gegeven door

$$D_t u(t, x) = \frac{1}{2} \text{Tr} [Q D^2 u(t, x)], \quad t > 0, x \in H,$$

waarbij Q een gegeven niet-negatieve symmetrische operator van spoorklasse is. Met de beginconditie $u(0, x) = \varphi(x)$, waarbij $\varphi : H \rightarrow \mathbf{R}$ een gegeven begrensde uniform continue functie is, wordt de oplossing van deze warmtevergelijking gegeven door de formule

$$u(t, x) = \int_H \varphi(x + y) N_{tQ}(dy), \quad t \geq 0, x \in H,$$

waarbij N_{tQ} de Gaussmaat aangeeft met gemiddelde 0 en covariantie tQ . Deze expliciete formule voor de oplossing van de oneindig dimensionale warmtevergelijking suggereert dat de theorie voor partiële differentiaalvergelijkingen op Hilbertruimten nauw verbonden is met de theorie van kansmaten en stochastische evolutievergelijkingen op Hilbertruimten.

Deze onderwerpen komen dan ook uitgebreid aan de orde en verklaren meteen ook de interesse van de auteurs, experts in de analyse van stochastische evolutievergelijkingen, voor partiële differentiaalvergelijkingen op oneindig dimensionale ruimten.

Het boek is helder geschreven, geeft duidelijke motivatie voor de te behandelen klassen van vergelijkingen en bevat een schat aan informatie niet alleen over stochastische evolutievergelijkingen, maar ook over halfgroepen van lineaire operatoren en interpolatieruimten.

S.M. Verduyn Lunel



J.P. Serre

Exposés de séminaires 1950-1999

Paris: Société Mathématique de France, 2001

259 p., prijs € 39,-

ISBN 2-85629-103-1

Zoals de titel al zegt, bevat dit boek teksten van seminariumvoordrachten van Jean-Pierre Serre uit de periode 1950–1999. Het betreft hier de seminaria Bourbaki, Cartan, Chevalley en Delange-Pisot-Poitou. Geen van de twintig hier gereproduceerde teksten komen voor in het verzameld werk van Serre dat tot op heden bij Springer-Verlag is verschenen.

De titels van de twintig exposés zijn: *Extensions de groupes localement compacts* (1950), *Applications algébriques de la cohomologie des groupes I et II* (1950, 1951), *Fonctions automorphes d'une variable: application du théorème de Riemann-Roch* (1953–1954), *Deux théorèmes sur les applications complètement continues* (1954), *Faisceaux analytiques sur l'espace projectif* (1954), *Fonctions automorphes* (1954), *Représentations linéaires et espaces homogènes kählériens des groupes de Lie compacts* (1954), *Les espaces $K(\Pi, n)$* (1954), *Groupes d'homotopie des bouquets de sphères* (1955), *Espace fibrés algébriques* (1958), *Morphismes universels et variétés d'Albanese* (1958–1959), *Morphisme universels et différentielles de troisième espèce* (1958–1959), *Rationalité des fonctions ζ des variétés algébriques* (1960), *Revêtements ramifiés du plan projectif* (1960), *Groupes finis à cohomologie périodique* (1960), *Dépendance d'exponentielles p -adiques* (1966), *Groupes p -divisibles* (1966), *Points rationnels des courbes modulaires $X_0(N)$* (1977), *Sous-groupes finis de groupes de Lie* (1999).

De teksten zijn opnieuw gezet in $\text{T}_{\text{E}}\text{X}$, door Colmez plus vrijwilligers. Serre heeft van deze gelegenheid geprofitteerd om correcties aan te brengen, het taalgebruik wat aan te passen (kenmerklijk bestonden 'injectief' en 'surjectief' nog niet in het Frans in de

jaren '50). Ook, zoals in de verzamelde werken, is er commentaar toegevoegd, met verwijzingen daarnaar in de kantlijn.

Het boek illustreert duidelijk Serre's prominente rol in de ontwikkeling van concepten en theorieën in de hedendaagse wiskunde, precies de reden waarom hij de Abelprijs heeft gekregen. Warm aanbevolen voor ieder die in minstens één van deze onderwerpen is geïnteresseerd!

S.J. Edixhoven



V. Prasolov and Y. Ilyashenko (eds.)
Surveys in Modern Mathematics

London Math. Soc. Lecture Note Series, 321

Cambridge University Press, 2005

348 p., prijs £40.00

ISBN 0-521-54793-8

De Independent University neemt in Moskou een aparte plaats in. De colleges vinden in de avond plaats en zijn van een indrukwekkend niveau. Overdag kun je dan naar een gewone universiteit. Dit boekje is de weerslag van de zogenaamde student sessions in de periode 1998–2000. De sprekers zijn geen studenten maar vermaarde wiskundigen. (Student betekent hier overigens ook promovendus.) De opdracht aan iedere spreker was om panorama's te bieden en nieuwe ideeën te beschrijven. Sommige teksten hebben de levendigheid van een voordracht goed behouden.

De bijdrage van Anosov is daarentegen een ellenlang overzichtsartikel over dynamische systemen. Tjokvol informatie, maar juist daarom niet geschikt voor buitenstaanders. Het past dus slecht in de bundel, maar wie in de dynamische systemen werkt heeft er wellicht wat aan.

Dit is geen boek om vaak te raadplegen, maar om af en toe een bijdrage uit te lezen. Er zitten pareltjes tussen. De veronderstelde kennis is natuurlijk heel wisselend.

Wat ook wisselt is de kwaliteit van de vertaling, maar de zinnen zijn nog wel goed te volgen. De namen van sommige wiskundigen hebben wonderlijke mutaties ondergaan.

Aan een instituut als de Independent University zou dit boek geschikt zijn voor de koffietafel. De flap belooft een overzicht over de huidige wiskunde. Dat geeft het boek natuurlijk niet. Maar je steekt er al gauw iets van op.

W. van der Kallen



H. Kesten (ed.)

Probability on Discrete Structures

Encyclopaedia of Mathematical Sciences, vol.

110

Berlijn : Springer Verlag, 2004

351 p., prijs €101,60

ISBN 3-540-00845-4

I cite from the back cover of the book: "Probability on discrete structures brings together five review papers on probabilistic subjects related to combinatorics, combinatorial optimization and statistical mechanics." The introduction is by Harry Kesten. I will

discuss briefly the three contributions that I personally preferred. Generally speaking, the reviews do not introduce much new material but are well written and could serve very well as an introduction to their subject or be used as a graduate capita-selecta-course in probability or mathematical statistical mechanics.

Grimmett's contribution deals with the random cluster model. This model, originally introduced by Fortuin and Kasteleyn, is a dependent percolation model of great importance in statistical mechanics. Properties of the Ising and Potts models are related to percolation properties of the random cluster model. In some limit the model is also related to uniform spanning trees.

Grimmett introduces the model without too much emphasis on its connection to statistical mechanics. The mathematically inclined reader will find here a complete and clear introduction, together with a brief discussion of recent developments such as stochastic Löwner equation, and a nice chapter on dynamics and coupling from the past.

Martinelli's contribution is about relaxation times of Markov chains, which are of great importance in Markov Monte Carlo sampling. It is mainly inspired by statistical mechanics, i.e., in the context of Glauber ('spin-flip') and Kawasaki (lattice diffusion) dynamics. The Poincaré inequality, and the logarithmic Sobolev inequality, its relation with spatial mixing properties of Gibbs measures and with temporal mixing properties of the dynamics are discussed.

Martinelli's paper is clearly written and very complete. Until Chapter 7 it is also nice to read (but there are ten chapters). From then on however, the evolution of the information density can be compared to Esher's picture the "circle limit". In particular the reading of the last two chapters leads inevitably to indigestion.

Laurent Saloff-Coste's contribution 'Random walks on finite groups' is inspired by questions like: how many shuffles are needed to reasonably mix up a deck of 52 cards? Bayer and Diaconis discovered that seven so-called riffle-shuffles are enough. This and related questions have led to a whole field of research called random walks on finite groups (in case of cards the symmetric group S_{52}). The basic problem is: how fast does a random walk on a group approach its stationary (uniform) distribution, and how is this related to the structure of the group. The paper gives a very good idea of the typical mix of different tools used in this field: probability, analysis, group and representation theory, and combinatorics.

Starting from Chapter 8, however, too many subjects are covered, too fast and too technically. Hint for the reader: stop after Chapter 6, and read some pages on representation theory. Otherwise, indigestion and fatigue will inevitably strike you. Why Heyer's book, one of the standard references on random walks on groups is not mentioned is an open question to me.

C. Douglas Howard's paper deals with First passage percolation (FPP), a lattice model of fluid flow in a porous medium. Inject (during some time T) a fluid at a particular point in a porous material and look at the (growing) set W_T of wetted material. Natural questions of FPP, covered in this paper are: how big is the set W_T , what is its shape after suitable rescaling, how is this shape fluctuating? The key-technique of this field, subadditivity, is discussed in detail. As new subjects, Euclidean FPP, a continuous variant of FPP is introduced, as well as a relation with semi-infinite geodesics and spanning trees. Finally, the most interesting part of this paper is a very complete list of open problems.

About Aldous and Steele's contribution: the assignment problem for a $n \times n$ cost matrix c_{ij} is the task of determining the permutation that minimizes the total cost of assigning one column to each row. The individual costs c_{ij} are independent random variables. A fascinating conjecture by Mézard and Parisi was (it is no longer a conjecture) that in the limit $n \rightarrow \infty$ the expected minimal cost approaches $\pi^2/6$.

Motivated by this problem and related combinatorial problems, the authors introduce what they call 'the objective method'. The philosophy is the following: one introduces an infinite probabilistic object whose local properties inform us about the limiting properties of a sequence of finite problems. A prototype of such an object is the limit of uniform random trees, the so-called 'infinite skeleton tree'. The authors introduce the notion of local weak convergence and give several ways to characterize the distribution of the limiting object in this metric. They give a large variety of examples in which remarkably exact asymptotic formulas, such as the one provided by the Mézard Parisi conjecture can be obtained from distributional properties of the local weak limit.

This is really a very good paper. It is hard to read, as it is written in a rather intuitive way and deals with complicated objects. However, it contains a wealth of new results and ideas and leaves the reader with a lot of motivation for further study. *F. Redig*



K. Tent (ed.)

Tits Buildings and the Model Theory of Groups

London Mathematical Society Lecture Note Series, 291

Cambridge University Press, 2002

298 p., prijs £35,-

ISBN 0-521-010632

Het is al lang bekend dat er een diepgaande samenhang bestaat tussen synthetische meetkunde en modeltheorie.

Dit boek bevat de proceedings van een bijeenkomst over synthetische meetkunde en modeltheorie van groepen in Würzburg, Duitsland, tijdens de zomer van 2000. De inhoud valt uiteen in twee delen. De eerste vijf artikelen geven een goede inleiding in de theorie van Titsgebouwen in het algemeen, met nadruk op generaliseerde veelhoeken en groepsacties op Tits-gebouwen. Ook komen daar zogenaamde twin buildings en twin graphs aan de orde. De resterende zeven artikelen gaan in op de modeltheorie, met name de modeltheorie van enkelvoudige groepen en groepen met een BN -paar van eindige Morley-rang, op het Zil'ber en het Cherlin-Zil'ber vermoeden en de constructies van Hrushovski om tegenvoorbeelden voor het Zil'ber vermoeden te vinden.

Hier is een korte beschrijving van de diverse artikelen. Theo Grundhöfer: 'Basics on buildings', een samenvatting van de basis-kennis over Titsgebouwen. Hendrik Van Maldeghem: 'An introduction to generalized polygons', een goede inleiding op gegeneraliseerde veelhoeken. Dit artikel bevat een schets van de classificatie van de Moufangveelhoeken en veel verwijzingen naar recente onderzoeksartikelen. Linus Kramer: 'Buildings and classical groups', een mooi overzicht over Titsgebouwen in relatie tot klassieke groepen; volgens mij de beste artikel van het hele boek met veel verwijzingen naar goede literatuur, maar helaas niet naar

onderzoeksartikelen. Bernhard Mühlherr: 'Twin buildings', een kort stukje over twin buildings en Kac-Moody-groepen. Er bestaat nog niet al te veel literatuur over twin buildings en dus is dit artikel zeer welkom. Mark Ronan: 'Twin trees and twin buildings', een goede aanvulling op bovengenoemd artikel. Tuna Atinel: 'Simple groups of finite Morley rank of even type', een overzicht over een modeltheoretische aanpak van de classificatie van de eindige enkelvoudige groepen. Katrin Tent: ' BN -pairs and groups of finite Morley rank', een overzicht over het recente onderzoek van de classificatie van de groepen met BN -paar van eindige Morley-rang. De motivatie is het Cherlin-Zil'ber vermoeden, waaruit volgt dat elke oneindige groep van eindige Morley-rang een BN -paar heeft. Andreas Baudisch: ' CM -trivial stable groups'. Dit artikel beschrijft de betekenis van CM -triviality voor het Zil'ber vermoeden (alle bekende tegenvoorbeelden zijn CM -triviaal). Bruno Poizat: 'Amalgames de Hrushovski: Une tentative de classification', een overzicht over een methode van Ehud Hrushovski, waarmee hij tegenvoorbeelden voor het vermoeden van Zil'ber heeft gevonden. John Baldwin: 'Rank and homogeneous structures', ook over de constructies van Hrushovski. Keith Johnson: 'Constructions of semilinear towers of Steiner systems'. Dit artikel gaat over Fraïssé-limieten van Steinersystemen en permutatiegroepen, gebaseerd op de methode van Hrushovski. Martin Ziegler: 'Introduction to the Lascar Group', een inleiding op Lascargroepen, Galoisgroepen van 'saturated models' C van een volledige theorie T van orde $|C| \geq 2^{|T|}$.

De artikelen in dit boek zijn goed geschreven. Het boek is zeker aan te raden aan eenieder die in meetkunde, modeltheorie van groepen, of beide onderwerpen geïnteresseerd is. Helaas ontbreekt een overzichtsartikel over de verbanden tussen de meetkunde en de modeltheorie, een gemiste kans. Desondanks heb ik mij tijdens het lezen erg vermaakt en kan ik dit boek van harte aanbevelen.

R. Gramlich

Problemen

| Problem Section

This Problem Section is open to everyone. For each problem the most elegant solution will be rewarded with a 20 Euro book token. The problems and results can also be found on the Problem Section website www.nieuwarchief.nl/ps.

Now and then there will be a Star Problem, of which the editors do not know any solution. Whoever first sends in a correct solution within one year will receive a prize of 100 Euro.

Both suggestions for problems and solutions can be sent to uwc@nieuwarechief.nl or to the address given below in the left-hand corner; submission by email (in $\text{\LaTeX}$) is preferred. When proposing a problem, please include a complete solution, relevant references, etc. Group contributions are welcome. Participants should repeat their name, address, university and year of study if applicable at the beginning of each problem/solution. If you discover a problem has already been solved in the literature, please let us know. The submission deadline for this edition is June 1, 2007.

The prizes for the Problem Section are sponsored by *Optiver Derivatives Trading*.



Problem A (Proposed by John Scholes)

Define the sequence $\{u_n\}$ by $u_1 = 1$, $u_{n+1} = 1 + (n/u_n)$. Prove or disprove that $u_n - 1 < \sqrt{n} \leq u_n$.

Problem B (Folklore)

Given a non-degenerate tetrahedron (whose vertices do not all lie in the same plane), which conditions have to be satisfied in order that the altitudes intersect at one point?

Problem C (Proposed by Jan Draisma)

Let e be a positive integer, and let d be an element of $\{0, 1, 2, \dots, 3e\}$. Show that the polynomial

$$P = \sum_{a \geq 0, b \geq 0, c \geq 0, a+b+c=d} \frac{d!}{a!b!c!} \binom{e}{a} \binom{e}{b} \binom{e}{c} x^a y^b z^c$$

in the three variables x , y , and z is not divisible by $x + y + z$ unless $d = 1$.

Problem * (Proposed by Farideh Firoozbakht)

For a positive integer n , $\sigma(n)$ is defined as the sum of the divisors of n , including n , and $\phi(n)$ is the Euler phi (or totient) function. Let $\psi(n) = \sigma(n)/\phi(n)$. For $n = 2, 3, 6, 12, 14$ and 15 , $\psi(n)$ is an integer (respectively $3, 2, 6, 7, 4$, and 3). Does there exist, for every integer k , an integer n such that $\psi(n) = k$.

As a reference, see: <http://www.research.att.com/~njas/sequences/A055234>

Edition 2006/3

For Edition 2006/3 we received submissions from N. Hekster, Jinbi Jin, C. Jonkers, R.A. Kortram, and Peter Vandendriessche. The solution of problem 2006/3-C will be published in the June issue.

Problem 2006/3-A Evaluate

$$\int_0^1 \frac{\log(x+1)}{x^2+1} dx.$$

Solution This problem was solved by Jinbi Jin, C. Jonkers, R.A. Kortram, and Peter Vandendriessche. The solution below is based on that of Peter Vandendriessche.

Substitute $x = \tan(t)$, then the integral can be written as

$$I = \int_0^1 \frac{\log(x+1)}{x^2+1} dx = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \log(1 + \tan t) dt.$$

Substitute $t = \frac{\pi}{4} - s$, then we get

$$I = \int_{\frac{\pi}{4}}^0 \log\left(1 + \frac{1 - \tan s}{1 + \tan s}\right) (-ds) = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \log\left(\frac{2}{1 + \tan s}\right) ds = \frac{\pi}{4} \log 2 - I,$$

hence $I = \frac{\pi \log(2)}{8}$.

C. Jonkers remarks that this exercise was also published in work of F. Frenet as well as in *Aufgabensammlung zur höheren Mathematik* of N. M. Günter and R. O. Kusmin, (ISBN 978-3-8171-1641-6).

Problem 2006/3-B

1. Find an integer n (as small as possible) and rational numbers $a_1, \dots, a_n$ such that

$$\sqrt{10 + 3\sqrt{11}} = \sum_{i=1}^n \sqrt{a_i}.$$

2. Find an integer n (as small as possible) and rational numbers $b_1, \dots, b_n$ such that

$$\sqrt[3]{\sqrt[3]{2} - 1} = \sum_{i=1}^n \sqrt[3]{b_i}.$$

Solution This problem was solved by R.A. Kortram and N. Hekster. The solution below is based on that of R.A. Kortram.

1. It is a simple matter to verify the identity $\sqrt{10 + 3\sqrt{11}} = \sqrt{\frac{9}{2}} + \sqrt{\frac{11}{2}}$. It is also clear that there is no rational number a such that $\sqrt{10 + 3\sqrt{11}} = \sqrt{a}$, because the existence of such a number a would imply that $10 + 3\sqrt{11} = a$, i.e. $\sqrt{11} \in \mathbf{Q}$; clearly a contradiction. Thus, the smallest possible integer n is 2.

2. From the trivial identity $(\sqrt[3]{2} + 1)^3(\sqrt[3]{2} - 1) = 3$, we derive that

$$(\sqrt[3]{2} + 1)^3(\sqrt[3]{2} - 1) = \sqrt[3]{3},$$

and after multiplying both sides by $\sqrt[3]{4} - \sqrt[3]{2} + 1$, we obtain

$$3\sqrt[3]{\sqrt[3]{2} - 1} = \sqrt[3]{3}(\sqrt[3]{4} - \sqrt[3]{2} + 1).$$

Thus, $\sqrt[3]{\sqrt[3]{2} - 1} = \sqrt[3]{\frac{1}{9}} + \sqrt[3]{-\frac{2}{9}} + \sqrt[3]{\frac{4}{9}}$.

Now assume that there exist rational numbers a and b such that

$$\sqrt[3]{\sqrt[3]{2} - 1} = \sqrt[3]{a} + \sqrt[3]{b}.$$

Raising both sides of this identity to the third power leads to

$$\sqrt[3]{2} - 1 = a + b + 3\sqrt[3]{ab}(\sqrt[3]{a} + \sqrt[3]{b}) = a + b + 3\sqrt[3]{ab}(\sqrt[3]{\sqrt[3]{2} - 1}).$$

This implies that $\sqrt[3]{2} - (a + b + 1) = 3\sqrt[3]{ab}(\sqrt[3]{\sqrt[3]{2} - 1})$. Raising both sides to the third power shows that $\sqrt[3]{2}$ satisfies an equation of degree 2 over $\mathbf{Q}$:

$$3(a + b + 1)(\sqrt[3]{2})^2 - (3(a + b + 1) - 27ab)\sqrt[3]{2} - 2 - 27ab + (a + b + 1)3 = 0.$$

Since $\sqrt[3]{2}$ has degree 3, all coefficients must be zero, i.e.

$$(a + b + 1) = 0 \quad 3(a + b + 1) - 27ab = 0 \quad (a + b + 1)3 - 27ab - 2 = 0,$$

which is clearly impossible.

