

Inhoud | Contents

2	Colofon
3	Van de voorzitter <i>J.K. Lenstra</i>
4	Agenda
6	Wereld Wiskundig Jaar 2000
8	Van het WG
13	In memoriam F.D. Veldkamp <i>T.A. Springer</i>
16	In memoriam J.J. de longh <i>W.H.M. Veldman</i>

Oratie | Inaugural Lecture

18	Patronen en golven <i>A. Doelman</i>
----	--------------------------------------

Onderzoek | Research

28	Laudatio for David Ruelle <i>F. Takens</i>
30	Mathematical platonism reconsidered <i>D. Ruelle</i>
34	The how and what of chaos <i>H.W. Broer</i>
44	Artin reciprocity and Mersenne primes <i>H.W. Lenstra, Jr., P. Stevenhagen</i>
55	A formula for $\pi(x)$ applied to a result of Koninck-Ivić <i>L. Panaitopol</i>
57	Inequalities for exponential functions and means, II <i>B. Mond, J. Pečarić</i>

Geschiedenis | History

59	De opkomst van het wiskundig modelleren <i>G. Alberts</i>
----	---

Onderwijs | Teaching

68	De boze buitenwereld <i>J. de Jonge</i>
71	Who will study math and for what purpose? <i>S. Tobias</i>

Problemen | Problem section

72	Problemen
73	Universitaire Wiskunde Competitie

Boeken | Books

74	Een eeuw wiskunde in boeken
77	De stelling van de papegaai <i>J.M. Aarts</i>
78	Interactieve algebra cd-rom <i>W. Bosma</i>
80	Boekbesprekingen

Recreatieve Wiskunde | Recreational Mathematics

104	The Dutch Cubist Club <i>F. Göbel</i>
-----	---------------------------------------

Colofon

Het Nieuw Archief voor Wiskunde is een uitgave van het Wiskundig Genootschap en verschijnt vier maal per jaar.

Het tijdschrift richt zich op een ieder die zich beroepsmatig met wiskunde bezighoudt, als academisch of industrieel onderzoeker, student, leraar, journalist of beleidsmaker. Het stelt zich ten doel te berichten over ontwikkelingen in de wiskunde in het algemeen en in de Nederlandse wiskunde in het bijzonder.

Adres

Nieuw Archief voor Wiskunde
Mathematisch Instituut
Universiteit Leiden
Postbus 9512
2300 RA Leiden
tel. 071-5277121, fax 071-5277101
naw@math.leidenuniv.nl
<http://www.math.leidenuniv.nl/~naw/>

Hoofredactie

J.A.C. Kolk (kolk@math.uu.nl)
C.G. Zaal (zaal@math.leidenuniv.nl)

Redactie

G. Alberts (G.Alberts@bw.kun.nl)
G.M. Koole (koole@cs.vu.nl)
A. Ran (ran@cs.vu.nl)
G. Zwaneveld (Bert.Zwaneveld@ou.nl)

Bureauredactie

A. Hafkenscheid (naw@math.leidenuniv.nl)

Medewerkers

J.A.W. van Casteren (vcaster@wins.uia.ac.be)
J. van de Craats (jcr@euronet.nl)
R.J. Fokkink (r.j.fokkink@its.tudelft.nl)
T. Koetsier (teun@cs.vu.nl)
J. van Neerven (J.vanNeerven@its.tudelft.nl)
R.J. Stroeker (stroeker@few.eur.nl)
J. Top (J.Top@math.rug.nl)

Redactieraad

F. Verhulst (verhulst@math.uu.nl)

Abonnementstarieven/Subscription rates

Nederland fl. 125,- (4 nummers)
Buitenland fl. 155,- (4 issues)

Abonnee-administratie/Subscription manager

C. van Os (wg-admin@math.uu.nl)
Mathematisch Instituut
Universiteit Utrecht
Postbus 80010
3508 TA Utrecht
tel. 030-2531430, fax 030-2518394

Advertenties

F.L.E. Ouwerkerk (ouwerkerk@math.leidenuniv.nl)
Mathematisch Instituut
Universiteit Leiden
Postbus 9512
2300 RA Leiden
tel. 071-5277121, fax 071-5277101

Vormgeving

Kitty Molenaar, Amsterdam

Zetwerk

Taco Hoekwater, Bittext, Dordrecht (ConT_EXt)

Druk

Giethoorn Ten Brink, Meppel

Informatie voor auteurs

Kopij

Kopij elektronisch aanleveren in T_EX of L^AT_EX, anders als platte tekst (ascii).

Email: naw@math.leidenuniv.nl

Wiskundige figuren aanleveren als eps-bestanden, voor illustraties gaarne originele foto's opsturen.

Reprints

Auteurs ontvangen een elektronische reprint van hun opgemaakte artikel in pdf-formaat.

Volgende nummers

<i>nummer</i>	<i>verschijningsdatum</i>	<i>uiterste inleverdatum kopij</i>
2	3-06-2000	15-04-2000
3	2-09-2000	30-06-2000
4	2-12-2000	30-11-2000

Wiskundig Genootschap

Leden van het Wiskundig Genootschap ontvangen het Nieuw Archief voor Wiskunde als onderdeel van hun lidmaatschap.

Het Wiskundig Genootschap is een landelijke vereniging van beoefenaren van de wiskunde. Het genootschap werd in 1778 opgericht onder de zinspreuk: "Een onvermoeide arbeid komt alles te boven". Het is 's werelds oudste nationale wiskunde-genootschap.

De contributie voor het Wiskundig Genootschap bedraagt fl. 120,- per jaar. Studenten ingeschreven aan een Nederlandse universiteit kunnen lid worden tegen het gereduceerde tarief van fl. 45,- per jaar. Ook AIO's en OIO's komen voor een gereduceerde contributie in aanmerking (fl. 75,- per jaar). Leden van andere wiskundige vakverenigingen (VVS, NVvW, NVORWO) kunnen eveneens aanspraak maken op een gereduceerd lidmaatschapstarief.

Ledenadministratie

C. van Os (wg-admin@math.uu.nl)
Mathematisch Instituut
Universiteit Utrecht
Postbus 80010
3508 TA Utrecht
tel. 030-2531430, fax 030-2518394

Lectori salutem

Waarde lezer, gegroet! Dit is het eerste nummer van de vijfde serie van het *Nieuw Archief voor Wiskunde* (NAW). Graag vraag ik uw aandacht voor de nieuwe gedaante van dit blad en voor enkele andere zaken waar het bestuur van het Wiskundig Genootschap (WG) mee bezig is.

Zolang ik lid ben van het WG heeft het NAW een hybride karakter gehad. Een deel van de inhoud deed denken aan een internationaal wetenschappelijk tijdschrift. Andere bijdragen dienden een nationale functie en waren gericht op de lering en het vermaak van de leden van het WG. Een jaar of vijf geleden onderkende het door Jan Willems voorgezeten bestuur dat het NAW op de internationale tijdschriftenmarkt een marginale positie innam, die bovendien de belangen van het WG en haar leden slechts in geringe mate diende. Er werd besloten het NAW om te vormen tot een informatief vakblad. Dit leidde tot succesvolle veranderingen in de opzet van het blad. Begin vorig jaar werd de transformatie met kracht doorgezet. Het resultaat ligt voor u.

De vijfde serie van het NAW moet dezelfde functie krijgen die de eerste serie lang geleden had: een vakblad voor de Nederlandse wiskunde. Het is bedoeld voor studenten, leraren, toepassers, onderzoekers, amateurs en iedereen die de wiskunde een warm hart toedraagt. De nadruk ligt op de actualiteit in onderwijs en onderzoek, in bedrijfsleven en industrie, en in het wetenschapsbeleid. Het is aan de redactie dit uit te werken en u de rubrieken te presenteren die u kunt verwachten. De meeste bijdragen zullen in het Nederlands geschreven zijn. Niet elke lezer zal elke bijdrage bij eerste lezing geheel kunnen doorgronden. Maar alles is in beginsel geschreven voor een breed wiskundig geïnteresseerd publiek, niet voor een beperkte groep specialisten.

Graag heet ik de nieuwe redactie welkom, die staat onder leiding van Joop Kolk en Chris Zaal. Tevens spreek ik mijn welgemeende dank uit aan de leden van de vorige redactie en aan de medewerkers van het CWI die het NAW tot nu toe produceerden. Twee personen noem ik met name: Joop Kolk, die de vorige redactie al leidde, en Wim van der Meiden, die sinds 1976 meer dan 5000 boekbesprekingen heeft doen verschijnen, eerst in de *Mededelingen* en daarna in het NAW. Tot mijn vreugde blijven beiden nog enige tijd bij de redactie van het nieuwe NAW betrokken.

Het bestuur van het Wiskundig Genootschap beraadt zich over meer zaken die, naar wij hopen, de beoefening van de wiskunde en de appreciatie daarvan in de maatschappij zullen bevorderen en die ertoe mogen bijdragen dat onze leden waar voor hun lidmaatschapsgeld krijgen. Wij willen het NAW

gebruiken om de banden met gelijkgezinde groeperingen aan te halen, zoals de Nederlandse Vereniging van Wiskundeleraars, de Stichting Industriële en Toegepaste Wiskunde, en het Nederlands Genootschap voor Besliskunde. Later dit jaar komt er een nieuwe web-site van het WG. En wij proberen in ruimere mate dan voorheen de publiciteit te zoeken. Tenslotte heeft de Unesco het jaar 2000 tot wiskunde-jaar uitgeroepen. In dit nummer kunt u meer lezen over *Pi in de Pieterskerk*, een project van het WG.

Aarzelt u niet om contact met mij op te nemen om mij uw mening over de koers van het WG te laten weten, om suggesties te doen voor bijdragen aan dit blad of voor andere activiteiten van het WG, of om uw hulp aan te bieden. Wij streven naar een bredere redactie van het NAW en naar een uitbreiding van de kring van wiskundigen die bereid zijn daadwerkelijk mee te werken aan alles wat er op onze agenda staat. U mag rekenen op onze onvermoeide arbeid. Wij rekenen op de uwe.

Jan Karel Lenstra

voorzitter van het Wiskundig Genootschap

Faculteit Wiskunde en Informatica, Technische Universiteit Eindhoven

Postbus 513, 5600 MB Eindhoven

jkl@win.tue.nl

Agenda

april 2000

tot 30 april

□ Nederlandse Computerpioniers 1945-1965

Deze tentoonstelling laat het rekenwerk in de eerste helft van de 20ste eeuw zien en toont het computer-pionierswerk. Te zien zijn de absolute topstukken op het gebied van computers in Nederland: de Testudo, de PASCAL, de ZEBRA, de X1 en de IBM 360. Voor het eerst bijeengebracht in één tentoonstelling.

plaats Techniek Museum Delft

info 015 - 2138311; museum@cmg.tudelft.nl
<http://www.museum.tudelft.nl>

3-14 april

□ Finite Geometry and its Applications

Second Socrates Intensive Course.

plaats Gent, België

info <http://cage.rug.ac.be>

7 april

□ Kloosterman Centennial Celebration

Lezingen door N.G. de Bruin (Eindhoven), D.R. Heath-Brown (Oxford), P. Sarnak (Princeton) en T.A. Springer (Utrecht)

plaats Lorentz Center, Leiden

info <http://www.math.leidenuniv.nl/~desmit/numth/kloos.shtml>

14 april

□ Wiskunde (in) bedrijven

Congres georganiseerd door de afdeling Bedrijfskunde en Informatica

plaats Noordelijke Hogeschool Leeuwarden

info <http://www.tem.nhl.nl/tem/exact/bwjsymp>

17 april

□ Statistische Dag 2000 (VVS)

Vijf sprekers laten hun licht schijnen over de geschiedenis en de toekomst van de statistiek en de operationele research. Tevens uitreiking Van Dantzigprijs.

plaats Jaarbeurs Utrecht

info <http://www.vvs-or.nl>

17-20 april

□ British Mathematical Colloquium (BMC)

The annual meeting of the pure mathematicians in the UK. We invite our Dutch colleagues to visit England to attend this meeting.

Main speaker: Sir Michael Atiyah (Edinburg).

plaats University of Leeds, Engeland

info h.d.macpherson@leeds.ac.uk

<http://www.amsta.leeds.ac.uk/bmc/>

27 en 28 april

□ 36ste Nederlands Mathematisch Congres

plaats Universiteit Maastricht

info Koos Vrieze, 043-3883469

Frank Thuijsman, 043-3883498

Marijke Verhey, 043-3883494

<http://www.Math.unimaas.nl/events/nmc2000/index.html>

□ Eendaagse cursussen CANDiensten

Algemene inleiding S-PLUS: di 4 april, di 2 mei, di 6 juni

Inleiding programmeren in S-PLUS: wo 5 april, wo 3 mei, wo 7 juni

Mathematica algemeen: di 11 april, wo 12 april

Maple algemeen: di 20 juni, wo 21 juni

info 020-5608400; cursus@candiensten.nl

mei 2000

9 mei

□ Johann Bernoulli lezing

Lezing door I. Grattan-Guinness (Middlesex University Londen): *Daniel Bernoulli (1700-1782) and the varieties of mechanics in the 18th century.*

De lezing wordt voorafgegaan door een inleiding van Jan van Maanen. Aanvang: 19.30 uur.

plaats Aula van het Academieggebouw, Groningen

info Jan van Maanen, 050-3637132

Gelieve gegevens voor deze agenda door te geven aan onderstaand adres.

Please submit items for this calendar to the following address.

Nieuw Archief voor Wiskunde,
Mathematisch Instituut, Universiteit Leiden,
Postbus 9512, 2300 RA Leiden.
Email: naw@math.leidenuniv.nl

27 mei

□ Honderd jaar wiskundeonderwijs

Een terugblik op de veranderingen van inhoud en didactiek van het wiskundeonderwijs van de twintigste eeuw. Symposium VI van de Historische Kring Reken- en Wiskunde Onderwijs

plaats Hogeschool Domstad, Utrecht

info E. de Moor, 020-6121382 of 030-2611611

juni 2000

7-9 juni

□ 5th International Conference on High Performance Optimization Techniques (HPOPT 2000)

The aim of the conference is to bring together some of the most active researchers working on the design and implementation of optimization algorithms. We aim to cover the latest algorithmic developments, complexity results and implementation aspects, including the required tools from numerical algebra.

plaats World Trade Center, Rotterdam

info <http://www.win.tue.nl/~hpopt>

15 juni

□ Nederlandstalige TeX Gebruikers-dag

Thema: TeXtremities.

plaats Universiteit Groningen

info mgelderman@econ.vu.nl

http://www.ntg.nl/bijeenkomsten.html

18-24 juni

□ Perspectives of Mathematics

This meeting is an ideal opportunity for younger mathematicians to meet and interact with a select group of top research mathematicians.

plaats Goslar, Duitsland

info <http://www-ifm.math.uni-hannover.de/info/perspectives.html>

23 juni

□ Symposium Stochastische Besliskunde, toen en nu

Afscheid prof.dr. J. Wessels

plaats TU Eindhoven

info <http://www.win.tue.nl/math/bs/symposiumWessels>

26-30 juni

□ Workshop Arithmetic Geometry

Organizers: Bas Edixhoven, Ben Moonen en Frans Oort.

plaats Universiteit Utrecht

info oort@math.uu.nl

http://www.math.uu.nl/people/oort

juli 2000

2-7 juli

□ 4th Algorithmic Number Theory Symposium (ANTS)

Organizers: Wieb Bosma, Herman te Riele, Bart de Smit, Peter Stevenhagen en Jaap Top.

plaats Universiteit Leiden

info <http://www.math.leidenuniv.nl/ants4>

6 juli

□ Pi in de Pieterskerk

Onthulling van een gedenkstee voor Ludolph van Ceulen.

plaats Pieterskerk, Leiden

info <http://www.math.rug.nl/~top/pi-dag/6juli.html>

10-14 juli

□ 3rd European Congress of Mathematics

Every four years, the EMS organizes a European Congress. The purpose of this major event is threefold: to present various new aspects of pure and applied mathematics to a wide audience; to be a forum for discussion of the relationship between mathematics and society in Europe; to enhance cooperation among mathematicians from all European countries.

plaats Barcelona, Spanje

info <http://www.iec.es/3ecm/>

augustus-november 2000

7-12 augustus

□ Mathematical Challenges of the 21st Century

plaats University of California, VS

info <http://www.ams.org/amsmtg/mathchall.html>

20-25 augustus

□ 14th European Conference on Artificial Intelligence

plaats Humboldt Universität, Berlijn

info <http://www.eca2000.hu-berlin.de>

22 september

□ Van Dantzig 2000 symposium

Sprekers: W.T. van Est, L. Bergmans, N.G. de Bruin, H.J. Smid, G. Alberts, W.R. van Zwet. Met een afsluitend forum over de hedendaagse maatschappelijke functie van wiskunde en statistiek met Van Dantzig-laureaten.

plaats Lutherse Kerk, Amsterdam

info Gerard Alberts, 020-5924231

17 en 18 november

□ Lustrumcongres Nederlandse Vereniging van Wiskundeleraren

plaats Educatorium, Utrecht

info <http://www.nvww.nl/>

MY2K

Op 6 mei 1992 verklaarde de International Mathematical Union in Rio de Janeiro het jaar 2000 tot Wereld Wiskundig Jaar. De verklaring van Rio stelde drie doelen: De grote uitdagingen van de 21ste eeuw, Wiskunde, sleutel tot ontwikkeling en Het beeld van de wiskunde. Hieronder meer informatie over de activiteiten die in dit kader in Nederland georganiseerd worden.

Pi in de Pieterskerk

Het Wiskundig Genootschap organiseert op donderdag 6 juli aanstaande een uniek evenement. Dit zal plaatsvinden in Leiden; 's middags in een van de zalen van de Gorlaeus laboratoria en 's avonds in de Pieterskerk. Hoogtepunt hierin zal de onthulling van een gedenksteen voor Ludolph van Ceulen in de kerk zijn. Een van de hoofdsprekers die dag is Peter Borwein (Simon Fraser University, Burnaby, Canada), bekend van onder meer boeken als *Pi and the AGM* en *Pi: a Source Book*.

Ludolph van Ceulen

Ludolph van Ceulen (1540–1610) werd in 1600 door Prins Maurits — op advies van Simon Stevin — benoemd tot hoogleraar aan de genie- en ingenieursschool te Leiden. Hij verwierf vooral bekendheid met zijn nauwkeurige onder- en bovengrenzen voor π . Om die reden wordt π in het Duits nog steeds wel aangeduid als 'die Ludolphsche Zahl'. Op zijn grafsteen in de Pieterskerk waren een ondergrens en een bovengrens voor π te vinden die slechts 10^{-35} van elkaar verschilden. Voor zover bekend is deze grafsteen het enige voorbeeld ter wereld van een nieuw wetenschappelijk resultaat dat via een grafsteen wereldkundig werd gemaakt. In de eerste helft van de negentiende eeuw is deze grafsteen verdwenen, hetgeen in de internationale literatuur geldt als een blamage voor Nederland.

Als onderdeel van het avondprogramma zal een gedenksteen met daarop een reconstructie van de oorspronkelijke tekst van Van Ceulens grafsteen worden onthuld. Er is al in dit vroege stadium veel belangstelling van onder meer de media voor dit evenement. We hopen op vele aanwezigen die dag, ook vanuit de Nederlandse wiskunde! Voor deelname aan dit evenement dient men zich vooraf in te schrijven.

Beeger-lezing

De voordrachten van Peter Borwein vormen samen de Beeger-lezing voor 2000. Om de twee jaar wordt, ter nagedachtenis aan N.G.W.H. Beeger, iemand met grote verdiensten op het gebied van de algoritmische getaltheorie uitgenodigd voor het geven van zo'n lezing. Eerdere

Beeger-sprekers waren Carl Pomerance, Hugh Williams, John Conway en Hendrik Lenstra. Dit is de eerste keer dat de lezing niet tijdens het Nederlands Mathematisch Congres wordt gehouden.

Programma

Pi in de Pieterskerk, 6 juli 2000.

Organisatie: het Wiskundig Genootschap.

Comité van aanbeveling: C. Boonstra, president van Koninklijke Philips; A.H.G. Rinnooy Kan, lid raad van bestuur ING; R.S. Reneman, president Koninklijke Nederlandse Akademie van Wetenschappen; W.A. Wagenaar, rector magnificus Universiteit Leiden.

Organiserend comité: Hendrik Lenstra, Jan Karel Lenstra, Jaap Top en Chris Zaal.

Het concept-programma bestaat uit twee gedeelten:

Middagprogramma, plaats: Gorlaeus Laboratoria, Universiteit Leiden. Dit is tevens onderdeel van het Algorithmic Number Theory Symposium dat van 2 tot 7 juli in Leiden plaatsvindt.

Bestemd voor een enigszins geschoold publiek (VWO wiskunde-niveau).

14:30–15:00 Ontvangst met koffie en thee.

15:00–15:50 Frits Beukers (Utrecht), *A rational approach to pi*

15:50–16:10 Pauze.

16:10–17:00 Peter Borwein (Burnaby, Canada, uitgenodigd als Beeger spreker 2000), *The 40 trillionth binary digit of pi is 0*

Avondprogramma, plaats: Pieterskerk te Leiden.

Bestemd voor iedereen met enige belangstelling voor wiskunde.

19:30–20:00 Ontvangst met koffie en thee.

20:00–20:05 Opening door dr. R.J. van Duinen, voorzitter van het Algemeen Bestuur van NWO.

20:05–20:35 Peter Borwein, *The amazing number pi*

20:35–20:45 Orgelspel door Jozef Steenbrink (Nijmegen)

20:45–21:15 Henk Bos (Utrecht), lezing over Ludolph van Ceulen

21:15–21:30 Onthulling van de gedenksteen voor Ludolph van Ceulen

21:30–22:30 Receptie (champagne)

De sprekers van het avondprogramma worden ingeleid door de voorzitter van het Wiskundig Genootschap, Jan Karel Lenstra.

Meer informatie over het programma, precieze titels van de voordrachten en instructies over inschrijving staan op:

<http://www.math.rug.nl/~top/pi-dag/6juli.html>



Ludolph van Ceulen

De Nationale Doorsnee

Via het grootschalige statistiekproject De Nationale Doorsnee — uit te voeren door leerlingen en leraren — wordt in de Wetenschap & TechniekWeek in oktober 2000 antwoord gegeven op de vraag: “Wie is de gemiddelde leerling van Nederland?”.

De deelnemers doen een voorspelling over een bepaald aantal kenmerken van de “gemiddelde leerling” van Nederland. Hieraan gekoppeld voeren ze een meting uit omtrent diezelfde kenmerken. Zo komen ze op een praktische en speelse wijze in aanraking met statistiek

volgens de principes van informeel leren: geïntegreerde wiskundige activiteit, bottom-up en het toepassen van vaardigheden.

Het project heeft de vorm van een wedstrijd: de leerlingen en mogelijk schoolklassen die de beste voorspelling doen, maken kans op prijzen.

De uitkomsten van de voorspelling en de meting worden op school in een softwareprogrammaatje ingevoerd en daarna via internet naar het CBS gestuurd. Daar worden de gegevens verwerkt en geanalyseerd en worden de winnaars bepaald.

Het is de bedoeling de landelijke uitkomst in newMetropolis te Amsterdam te presenteren. Het televisieprogramma Het Klokhuis is bezig met de voorbereiding van een uitzending over statistiek, waarin ook aan De Nationale Doorsnee aandacht zal worden besteed.

De Nationale Doorsnee is een project voor de ruim 400.000 leerlingen van klas 1 en 2 van het voortgezet onderwijs. Doel van De Nationale Doorsnee is om op een positieve en leuke manier statistiek onder de aandacht te brengen van niet alleen de leerlingen maar ook het grote publiek.

Rondom het project zullen lesprogramma's voor scholen worden gemaakt en aanvullende educatieve projecten worden ontwikkeld.

De Nationale Doorsnee is een Nederlandse bijdrage aan het World Mathematical Year. Het project is geïnitieerd door de Nederlandse Vereniging van Wiskundeleraars (NVvW), die dit jaar 75 jaar bestaat. Met steun van de Stichting Wetenschap en Techniek Nederland (WeTeN) en een aantal andere organisaties (onder andere CBS, APS en Fi) wordt deze manifestatie momenteel voorbereid.

Contactpersoon: Philip van Schaik (wo-do-vr), Freudenthal Instituut, 030-2611611, fax: 030-2660430, P.vanSchaik@fi.uu.nl.

Van Dantzig 2000

David van Dantzig kan worden beschouwd als de vader van de Nederlandse mathematische statistiek. Naar aanleiding van zijn 100ste geboortedag op 23 september 2000 wordt dit jaar een programma Van Dantzig 2000 georganiseerd. Het programma bestaat uit een symposium en een aantal publicaties.

Het symposium vindt plaats op 22 september 2000 in de Lutherse kerk te Amsterdam met aansluitend een forum over de hedendaagse maatschappelijke functie van de wiskunde en de mathematische statistiek met Van Dantzig-laureaten, onder wie A.H.G. Rinnooy Kan.

Sprekers:

- W.T. van Est (em. UvA), *Van Dantzigs topologische en differentiaalmeetkundige werk in de tijd geplaatst*
- L. Bergmans (Tours), *Unity of science in de jaren 1930*
- N.G. de Bruijn (em. TUE), *Een persoonlijke herinnering*
- H.J. Smid (TUD), *Van Dantzigs opvattingen over de didactiek van de wiskunde*
- G. Alberts (CWI/KUN), *Wiskundig modelleren en dienstbaarheid van de wiskunde volgens Van Dantzig*
- W.R. van Zwet (em. UL/EURANDOM), *Van Dantzigs betekenis voor de mathematische statistiek in Nederland*

Op diezelfde dag verschijnen een door Gerard Alberts geschreven biografie over Van Dantzig en een door Constance van Eeden samengestelde wetenschappelijke stamboom van Van Dantzig.

Contactpersoon: Gerard Alberts, g.alberts@cwi.nl, KUN 024-3615986 (ma), CWI 020-5924231.

Van het WG

| WG activiteiten

Verslag Wintersymposium

Het initiatief van het Wiskundig Genootschap om jaarlijks een wintersymposium te organiseren wordt door velen zeer gewaardeerd. De gymzaal van het gymnasium Johan van Oldenbarnevelt in Amersfoort was dan ook weer goed bezet met belangstellend publiek. Men was er weer in geslaagd een interessant thema te kiezen (discrete optimalisatieproblemen) en daarbij boeiende sprekers uit te nodigen.

J.K. Lenstra (TUE) beet het spits af met een voordracht over het handelsreizigersprobleem. Naast de klassieke versie liet hij zien dat ook problemen uit totaal andere contexten (bijvoorbeeld knippen van hangstroken) hiervan varianten zijn. Zonder in lastige details te treden en met de hem kenmerkende scherpe humor sprak hij over een typisch onderzoeksterrein in de discrete optimalisering: de niet bruikbare (te trage) algoritmes die het optimum vinden en de praktisch bruikbare (snelle) benaderingsmethoden.

In de tweede voordracht liet C. Hoede (UT) zien hoe je in een netwerk een maximale stroom kunt vinden en dat je toewijzingsproblemen kunt vertalen naar een maximale-stroomprobleem. Maar het belangrijkste deel was een verhandeling over optimalisatie van grafen: zoek in een klasse van grafen naar een optimale graaf (bijvoorbeeld met het kleinste aantal punten) die aan een speciale voorwaarde voldoen. Zomaar een stukje wiskunde om de wiskunde waar de enthousiaste spreker zelf ook een tijdje aan heeft zitten puzzelen.

Na de gezamenlijke lunch sprak W.H. Haemers (KUB) over volgordeproblemen in een productieproces. Aan de hand van twee cases liet hij het publiek kennismaken met het intrigerende probleem om de taken in een productieproces optimaal te roosteren. Bij veel van die problemen zijn geen snelle technieken voorhanden die een optimaal rooster vinden, alleen benaderingstechnieken. Maar in sommige gevallen hebben we geluk. Bij het roosteren van twee taken (zoals zagen en monteren bij het produceren van een aantal verschillende kasten in een timmerwerkplaats) blijkt je verrassend mooi te kunnen inzien dat de zaagvolgorde en montagevolgorde gelijk moeten zijn zodat het aantal mogelijke roosters drastisch kan worden beperkt.

De drie boeiende voordrachten van een uur, een gezellige lunch, een spelletjes- en postermarkt en een stand van Epsilon Uitgaven; het was een prima besteding van mijn zaterdag.

Herman Bloem (een zeer tevreden deelnemer)

NMC 2000

Het 36^e Nederlandse Mathematische Congres zal worden gehouden aan de Universiteit Maastricht op donderdag 27 en vrijdag 28 april 2000. Plaats: het Jezuïetenklooster, Faculteit der Economische Wetenschappen en Bedrijfskunde.

Het congres is opgebouwd als gebruikelijk. Een aantal hoofdsprekers, een aantal symposia met uitgenodigde sprekers en de nodige secties. De symposia zijn deze keer speciaal gekozen om zichtbaar te maken hoe de wiskunde fundamentele kennis en inzichten kan genereren in een aantal β - en γ - gebieden. De volgende symposia zijn voorzien:

- Mathematische fysica
- Wiskunde toegepast (auspiciën STW)
- Didactiek van de wiskunde
- Geschiedenis van de wiskunde
- Telecommunicatie (auspiciën KPN)
- Computerspelen
- Virtual reality

Deze rubriek is een kroniek van de activiteiten van het Wiskundig Genootschap. Van voorbije activiteiten wordt verslag gedaan en toekomstige activiteiten worden aankondigd.

- Sociale keuzetheorie
- Speltheorie
- Wiskunde en Maatschappij

Maakt u deze dagen vrij in uw agenda. Als u plannen hebt om een sessie te organiseren wilt u dan contact opnemen met de voorzitter van de congrescommissie Koos Vrieze (O.Vrieze@Math.Unimaas.NL).

Informatie over inschrijving vindt u bij:

<http://www.Math.unimaas.nl/events/nmc2000/index.html>

Telefonische inlichtingen: Koos Vrieze 043-3883496, Frank Thuijsman 043-3883489 of Marijke Verhey 043-3883494 (hotels).

Algemene Ledenvergadering

De 223^e Algemene Ledenvergadering van het Wiskundig Genootschap zal gehouden worden te Maastricht tijdens het Nederlands Mathematisch Congres 2000 op vrijdag 28 april van 13.10–14.00 uur.

1 Agenda

- 1 Opening
- 2 Verslag van de 222^e Algemene Ledenvergadering van het Wiskundig Genootschap
- 3 Mededelingen
- 4 Besprekingen van de jaarverslagen over 1999. De in dit nummer ontbrekende verslagen worden ter vergadering uitgereikt.
 - a. Verslag van de Secretaris
 - b. Verslag van de Penningmeester
 - c. Verslag van de Kascommissie
 - d. Verslag van de Inspecteur der Boekerij
 - e. Verslag van de Redactie van het Nieuw Archief voor Wiskunde
 - f. Verslag van de Redactie van de Mededelingen
 - g. Verslag van de Nederlandse Onderwijscommissie voor Wiskunde
 - h. Verslag van de Archivaris
 - i. Verslag van de Commissie voor Persoonlijke Archieven van Wiskundigen
 - j. Verslag van de Commissie Industriële en Toegepaste Wiskunde
- 5 Begroting 2000
- 6 Vaststelling contributie voor 2000. Het Bestuur stelt voor de contributiebedragen voor 2000 ongewijzigd vast te stellen (gewone leden fl 120, reciprociteitsleden fl 85, AIO/OIO's fl 75, en studenten en gepensioneerden fl 45).
- 7 Samenstelling Kascommissie 2000
- 8 Relatie met andere professionele verenigingen
- 9 Public Relations in verband met het Wiskundig Jaar 2000
- 10 Veranderingen in de opzet van de publicaties
- 11 Samenstelling van het Bestuur. Aftredend zijn dr. F. Beukers, drs. J. Schut en dr. H. P. Urbach. Het bestuur zal zo spoedig mogelijk berichten over de voorgestelde nieuwe bestuursleden.
- 12 Rondvraag
- 13 Sluiting

2 Ad punt 2 van de Agenda

Notulen van de 222^e Algemene Ledenvergadering van het Wiskundig Genootschap gehouden tijdens het NMC te Utrecht op 9 april 1999.

De vergadering werd bijgewoond door 30 leden.

- 1 De voorzitter opent de vergadering om 12.17 uur.
- 2 Het verslag van de 221^e Algemene Ledenvergadering wordt goedgekeurd. Naar aanleiding van de tekst is er een vraag over de coördinatie van het abonnementenbeleid van de wiskundebibliotheken in Nederland. In verband met bezuinigingen worden er abonnementen opgezegd. De voorzitter ant-

woordt dat er enige coördinatie is, met name in de regio Amsterdam, zodat niet alle bibliotheken dezelfde abonnementen opzeggen.

- 3 De voorzitter deelt mee dat het WG in oktober 1998 het tijdschrift Pythagoras heeft overgenomen. Het aantal abonnementen groeit gestaag en de voorzitter roept de leden van het WG op om een abonnement te nemen. Van Emde Boas stelt voor om het abonnement op Pythagoras op te nemen in het lidmaatschap van het WG. Binnen het Bestuur leeft de gedachte om alle abonnementen juist los te koppelen van het lidmaatschap van het WG. Voorlopig blijft de oude structuur nog bestaan en het is aan het nieuwe Bestuur om deze gedachte uit te werken. Het voorstel van Van Emde Boas wordt verworpen.

De voorzitter deelt verder mee dat het initiatief van Lions voor het wiskundejaar 2000 vooral weerklank vindt in Europa. In 2000 zal de EMS een groot congres organiseren in Barcelona. In Frankrijk verschijnt een serie postzegels. Dit initiatief is ook in Nederland genomen, maar het is nog niet duidelijk of de PTT een postzegel aan dit thema zal gaan wijden. Verder zal er een boek verschijnen met als titel *Mathematics after 2000*.

- 4 Vanuit de vergadering wordt verzocht om aan het verslag van de secretaris een lijst van de ereleden toe te voegen. Het Bestuur stemt hiermee in. Het verslag van de secretaris wordt goedgekeurd. De penningmeester geeft een korte toelichting: de bedragen voor Mededelingen en Nieuw Archief in de begroting voor 1999 zijn zeer onzeker als gevolg van de veranderingen in de structuur van de publicaties. In de balans 1998 is een bedrag opgenomen ter overbrugging van kosten voor Pythagoras; dit bedrag wordt weer terugbetaald. Er zijn vragen over de wijze waarop het vermogen van het WG is belegd. Na enige discussie stemt de vergadering in met het beleid van de penningmeester. Op een vraag naar het bedrag bestemd voor de problemenrubriek antwoordt de penningmeester dat dit geld is gebruikt voor de redactie van de boekrecensies. De vergadering geeft vervolgens haar goedkeuring aan het financieel verslag.

De verslagen van de Kascommissie en de Inspecteur van de Boekerij worden goedgekeurd.

De redacteur van het Nieuw Archief voor de Wiskunde J.A.C. Kolk geeft een mondeling verslag. Het NAW bevindt zich in een overgangsfase naar een nieuwe serie. Het tijdschrift verandert langzaam van karakter, er zijn rubrieken die verdwijnen (Problem section) en de boekbesprekingen zijn toegevoegd. Het Bestuur is van mening dat het NAW nieuwe stijl een blad moet zijn waarin wiskundigen kunnen lezen over de actualiteit van de Wiskunde-wereld in Nederland. C.G. Zaal is mede hoofdredacteur geworden. Het is de bedoeling dat de nieuwe productie start met ingang van 2000.

De verslagen van de Redacteur van de Mededelingen, de Nederlandse Onderwijscommissie voor Wiskunde en de Archivaris van het Wiskundig Genootschap worden goedgekeurd. Naar aanleiding van het verslag van de archivaris vraagt Van Emde Boas of er beleid is met betrekking tot het verwerven van archieven. De voorzitter antwoordt dat het een taak voor het nieuwe Bestuur is om beleid te ontwikkelen.

Het verslag van de Commissie Industriële en Toegepaste Wiskunde wordt goedgekeurd. Naar aanleiding van punt 3 in het verslag vindt er een discussie plaats over de manier waarop het WG een rol kan gaan spelen in bijvoorbeeld discussies over het wiskundeonderwijs op het VWO. In Eindhoven is in december een overleg geweest met een afvaardiging van de commissie ITW over bundeling en herstructurering van wiskundig Nederland. De resultaten van een peiling van de respons op deze ideeën moeten nog uitgewerkt worden. De Bruijn pleit voor het instellen van een evaluatiecommissie. Tijdeman zegt dat er ook initiatieven zijn van de NOCW. Van Beckum vindt dat het WG de activiteiten moet bundelen. De voorzitter pleit voor het verder ontwikkelen van de contacten via de β -federatie waarin ook de fysici, chemici en biologen vertegenwoordigd zijn.

- 5 Barning merkt op dat er een batig saldo is in de begroting voor 1999. De penningmeester bevestigt dat en stelt voor om dit saldo te gebruiken als

- beleidsruimte voor het nieuwe Bestuur. De begroting wordt aangenomen.
- 6 De nieuwe contributie wordt vastgesteld conform het bestuursvoorstel:
- Gewone leden: fl. 120,-
 - Reciprociteitsleden: fl. 85,-
 - AIO's/OIO's: fl. 75,-
 - Studenten, gepensioneerden: fl. 45,-
- 7 De vergadering benoemt Barning en Bruggeman tot lid van de kascommissie 1999.
- 8 Het bestuur stelt voor de contacten met de β -federatie te versterken om samen met de fysici, de chemici en de biologen tot een betere organisatie te komen.
- 9 Dit agendapunt is al in de mededelingen (agendapunt 3) besproken.
- 10 De vergadering stemt in met de samenstelling van het nieuwe bestuur dat nu bestaat uit
- drs. H. Bakker (RUG/HBO Friesland), contacten met leraren
 dr. F. Beukers (UU), penningmeester
 Prof. dr. J.K. Lenstra (TUE/CWI), voorzitter
 Prof. dr. E.J.N. Looijenga (UU), ondervoorzitter, contacten EMS en IMU
 dr. J. Molenaar (TUE), industriële wiskunde
 dr. M.A. Peletier (CWI), secretaris, archivaris en inspecteur der boekerij
 drs. J. Schut (UT), contacten met studenten
 dr. P. Stevenhagen (UvA), publicaties
 dr. H.P. Urbach (Philips), PR
- 11 In de rondvraag stelt Barning voor om de penningmeester officieel te dechargeren voor het gevoerde beleid in 1998. Van Emde Boas vraagt of de fout in de telling van de NMC's hersteld kan worden. Tijdeman vraagt naar initiatieven van het WG om video's te maken van interviews met belangrijke Nederlandse wiskundigen.
- 12 De vergadering wordt om 13.17 gesloten.

3 Ad punt 4 van de Agenda

3.1 Verslag van de Secretaris

3.1.1 Verslag van het Najaarssymposium

Op 10 december 1999 vond het najaarssymposium van het Wiskundig Genootschap plaats aan de TU Eindhoven. Traditioneel is dit gewijd aan onderwerpen binnen de toegepaste wiskunde. Dit jaar is gekozen voor het thema 'Toepassingen van wiskunde binnen de medische wetenschap'. Organisator van het symposium was de Stichting Industriële en Toegepaste Wiskunde (ITW).

De sprekers waren

- Prof. dr. F. Natterer (Universiteit Munster), "A unified view on medical imaging techniques"
- Dr. F.N. van de Vosse (Technische Universiteit Eindhoven), "Computational fluid-solid interaction models for the cardiovascular system"
- Dr. G. Peeren (Philips Medical Systems), "An inverse problem: determining optimal surface currents"
- Dr. B. Kappen (SNN, Universiteit Nijmegen), "Medical diagnostics using graphical probability models"
- Prof. dr. H. van Houwelingen (Universiteit Leiden)
- Dr. Th. Stijnen (Erasmus Universiteit), "Clinical trial"
- Dr. S.H. Heisterkamp (AMC, Universiteit van Amsterdam), "Observational statistics"

3.1.2 Verslag van de Kaleidoscoopdag

De Kaleidoscoopdag heeft dit jaar op 10 november plaatsgevonden in Utrecht, georganiseerd door de studievereniging A-Eskwadraat.

De sprekers waren

- Prof. dr. Siersma (Universiteit Utrecht), Inleiding

- Prof. dr. Hazewinkel (Centrum voor Wiskunde en Informatica), "Wiskundige basis"
- Prof. dr. Pleij, "Pseudoknots in RNA"
- Prof. dr. Dijkgraaf (Universiteit van Amsterdam), "Deeltjes en Knopen"
- dr. Stark, "Knopen in DNA"
- dr. Stienstra (Universiteit Utrecht), "Algemene Kijk"

3.1.3 Verslag van het Wintersymposium

Het Wintersymposium werd dit keer gewijd aan het thema Optimalisatie, theorie en praktijk.

De sprekers waren

- Prof. dr. J.K. Lenstra (Technische Universiteit Eindhoven) "Het Handelsreizigersprobleem"
- Prof. dr. C. Hoede (Universiteit Twente) "Grafen en Optimalisatie"
- Dr. ir. W.H. Haemers (Katholieke Universiteit Brabant) "Volgordeproblemen in een productieproces"

3.2 Verslag van de Penningmeester

3.3 Verslag van de Kascommissie

3.4 Verslag van de Inspecteur der Boekerij

In 1999 is een totaal van 60 nieuwe werken aan de boekencollectie toegevoegd, voornamelijk bestaande series monografieën, dissertaties en rapporten. Deze werken werden als geschenk of in het kader van ruil ontvangen.

Aan de tijdschriftencollectie zijn de volgende titels toegevoegd:

- 1 *Analele Universitatii de Vest din Timisoara, seria theoretical, mathematical and computational physics*
 Ruil met: Universitatea de Vest din Timisoara, Timisoara, Roemenië
- 2 *Bulletin of TICMI (Tbilisi International Centre of Mathematics and Informatics)*
 Ruil met: Tbilisi State University, Tbilisi, Georgië
- 3 *East-West journal of mathematics*
 Ruil met: Chang Mai University, Chiang Mai, Thailand
- 4 *Proceedings of the School of Science of Tokai University*
 Ruil met: Tokai University, Hiratsuka, Japan
- 5 *Webs and quasigroups*
 Ruil met: Tver State University, Tver, Rusland

Mark Peletier, Inspecteur der Boekerij

3.5 Verslag van de Redactie van het Nieuw Archief voor Wiskunde

Dit verslag zal tijdens de vergadering mondeling worden gegeven.

3.6 Verslag van de Redactie van de Mededelingen

Met ingang van 1999 werden de Mededelingen van het Wiskundig Genootschap een elektronisch tijdschrift, dat per e-mail aan de abonnees werd verstuurd; een gedrukte versie bleef evenwel ook bestaan. Van de bestaande rubrieken werden de Boekbesprekingen en de Advertenties verplaatst naar het Nieuw Archief voor Wiskunde. In het verslagjaar werden zeventien elektronische afleveringen verzorgd, met een frequentie van twee per maand. Maandelijks (negenmaal) werd aan ruim 500 adressen een papieren versie toegezonden, met een totale omvang van ca. 125 bladzijden. Alle leden (ruim 1100) ontvingen een exemplaar van het maantnummer, waarin waren opgenomen de verslagen ten behoeve van de Jaarvergadering, gehouden tijdens het Nederlands Mathematisch Congres te Utrecht. De elektronische versies van de Mededelingen werden tevens opgenomen op de WG-website <http://www.wiskgenoot.nl> Het Centrum voor Wiskunde en Informatica (CWI) fungeerde als verzameladres voor kopij en

verzorgde tevens de tekstverwerking, het drukken en de verzending van het blad.

H.G.J. Pijls, De redacteur

3.7 Verslag van de Nederlandse Onderwijscommissie voor Wiskunde

Overzicht van de activiteiten in 1999

- 1 *Samenstelling Commissie.* In december 1999 is de heer A.H. Hoekstra overleden. Hij is heel lang een zeer gewaardeerd lid van de NOCW geweest en de Commissie zal hem heel erg missen. Halverwege het jaar heeft de heer Tijdsman de Commissie verlaten. Zijn plaats als voorzitter is ingenomen door de heer Siersma. Eind 1999 is de samenstelling van de NOCW als volgt: R. van Asselt, R. Bosch (WG), F. Bosman (secretaris), J. van de Craats, J.G.M. Donkers, F. Goffree, T. Goris, C.P. Hoogland, W. Kleijne, J. van Lint, J.M. Notenboom (penningmeester), D. Siersma (voorzitter), H. Verhage. De Commissie heeft in 1999 twee maal rechtstreeks het Ministerie benaderd. In de eerste brief heeft de Commissie gewezen op de dalende belangstelling voor het vak wiskunde in het Middelbaar Onderwijs en de te verwachten negatieve gevolgen daarvan. De brief was een reactie op de afwijzing van het RATIO-project door de Stichting AXIS. In de tweede brief heeft de NOCW zijn bezorgdheid over het stijgende lerarentekort duidelijk gemaakt en enkele mogelijkheden voor een (gedeeltelijke) oplossing voorgesteld. Naar aanleiding van deze brief is er in juni overleg geweest tussen een delegatie van de Commissie en enkele ambtenaren.
- 2 *Werkgroep Recreative Wiskunde.* De werkgroep heeft in maart vergaderd. In de Werkgroep is van elk van de hieronder weergegeven activiteiten een vertegenwoordiger opgenomen. Tijdens de jaarlijkse vergadering wordt informatie uitgewisseld over die activiteiten en plannen voor vervolg gemaakt.
- 3 *Nederlandse Wiskunde Olympiade.* Het Ministerie van OC&W heeft ook dit jaar weer gezorgd voor de verspreiding van posters en brochures ter stimulering van de β -Olympiades. De bijdrage van OC&W ten behoeve van de β -Olympiades is dit jaar aanmerkelijk gestegen. De Aardrijkskunde Olympiade is tot het gezelschap toegetreden. Verder zijn er bijdragen geleverd door Akzo-Nobel, Educatieve Partners, Natuur en Techniek, Shell, het WG, de TUE en het Cito. Aan de eerste ronde van de Nederlandse Wiskunde Olympiade in 1999 hebben ruim 2300 leerlingen van bijna 200 scholen meegedaan. De scholenprijs is gewonnen door het Ommelander College in Appingedam. Ruim 100 leerlingen hebben meegedaan aan de tweede ronde die op 10 september in Eindhoven is gehouden. De prijsuitreiking aan de tien winnaars heeft op 12 november plaatsgevonden.
- 4 *Internationale Wiskunde Olympiade.* In 1999 zijn er vier bronzen medailles gewonnen bij de Internationale Wiskunde Olympiade in Roemenië. Aan elke medaillewinnaar is een prijs van fl. 500,- uitgereikt. De NOCW heeft een geldprijs voor elke winnaar van een medaille bij de Internationale Wiskunde Olympiade inmiddels tot traditie verheven.
- 5 *Wiskunde A-lympiade.* Het aantal deelnemers aan deze wedstrijd neemt nog steeds toe. Ook de belangstelling uit het buitenland blijft stijgen. Vermeldenswaard is dat ook de interactieve A-lympiade op Internet steeds meer belangstelling geniet.
- 6 *Kangoeroe Wedstrijd.* In 1999 is het aantal deelnemers wederom sterk gestegen. Er hebben zich ruim 35000 leerlingen ingeschreven voor de internationale Kangoeroe wedstrijd. De wedstrijd wordt georganiseerd voor de lagere klassen van het voortgezet onderwijs met drie verschillende versies opgaven. De logistieke organisatie en administratie is in handen van het Cito. De deelname van Vlaamse scholen neemt zodanig toe dat daar een aparte categorie van is gemaakt. Als die stijging doorgaat zal er in België een 'eigen' Kangoeroe organisatie moeten worden opgericht. Het is de bedoeling dat met ingang van het jaar 2001 ook de hoogste klassen van de Basisscholen in Nederland aan de Kangoeroe deel kunnen nemen. In Frankrijk bestaat voor de Kangoeroe op de Basisscholen zelfs een aparte organisatie. Dit initiatief wordt binnen de beroepsgroep breed ondersteund. In 2001 zal er dus ook een aparte categorie 'basisonderwijs' bijkomen. In overleg met de NVORWO worden voorbereidende activiteiten ontplooid.
- 7 *Nederlandse Universitaire Wiskunde Competitie.* De deelnemers aan deze competitie komen van universiteiten en hogescholen uit Nederland en Vlaanderen. De belangstelling is zodanig afgenomen dat de UWC is opgenomen in de ladderwedstrijd van het Nieuw Archief.
- 8 *Vierkant.* Ook in de zomer van 1999 zijn er weer Vierkant Zomerkampen georganiseerd. Het is moeilijk om begeleiders te vinden, anders was het aantal kampen nog groter geweest. Van de Vierkant kalender voor 2000 wordt een nog groter succes verwacht dan die van 1999.
- 9 *Nationale Wiskunde Dagen.* De dagen worden door het Freudenthal Instituut georganiseerd. In 1999 zijn er weer meer deelnemers geweest dan in 1998.
- 10 *Pythagoras.* Sinds de overname van het tijdschrift Pythagoras door het WG is de belangstelling stijgende. Dit is ook voor een niet gering deel te danken

Overzicht van inkomsten en uitgaven (J.M. Notenboom, penningmeester NOCW)

Saldi per 1-1-'99	7.407,63		
schuld aan het WG	– 500,00		
Inkomsten:		Uitgaven:	
Rente	37,13	Prijzen Universitaire Olympiade	650,00
Universiteit Utrecht	3.000,00	Project wiskunde 2000 NvVW	1000,00
Erasmus Universiteit Rotterdam	2.000,00	Redactie Pythagoras	2.000,00
		Prijzen voor medailles op de Int.Wisk.Olymp.	2.000,00
		Kosten NOCW	171,50
		Saldi per 31-12-'99	6.623,26
		Schuld aan het WG	– 500,00
Totaal	11.944,76	Totaal	11.944,76

aan de enthousiaste redactie. Oud-Olympiadewinnaars spelen daarin een belangrijke rol. Met ingang van het schooljaar 1999-2000 is een verdere verbetering doorgevoerd in formaat, lay-out en uitvoering, waardoor de kwaliteit nog verder verbeterd is.

F. Bosman, secretaris NOCW

3.8 Verslag van de Archivaris

Het archief van het Wiskundig Genootschap was in 1999 in goede handen bij het Rijksarchief in de Provincie Noord-Holland, Kleine Houtweg 18, 2012 CH Haarlem.

Het archief is ontsloten via de uitgebreide "Inventaris van de archieven van het Wiskundig Genootschap onder de zinspreuk: 'Een onvermoeide arbeid komt alles te boven', opgericht te Amsterdam in 1778, (1782) 1798 - 1968 (1991)" door S. Neugebauer (Haarlem, 1995).

M. A. Peletier, archivaris WG

3.9 Verslag van de Commissie voor Persoonlijke Archieven van Wiskundigen

De archieven onder beheer bij de CPAW, zijn, met uitzondering van Arch. 1 en Arch. 13, geplaatst bij het Rijksarchief in de Provincie Noord-Holland, Kleine Houtweg 18, 2012 CH Haarlem. Aldaar zijn zij voor onderzoek beschikbaar.

Het betreft de volgende archieven:

Arch. 2	H.B.A. Bockwinkel (1881-1960),
Arch. 3	R. Lijdsman,
Arch. 4	G. Röhrman,
Arch. 5	W.H.J. van der Stok,
Arch. 6	H. Nyon,
Arch. 7	L.W. Nieland (1901-1945),
Arch. 8	T. van Aardenne-Ehrenfest (1905-1984),
Arch. 8 (vervolg)	C.C.J. de Ridder en P. Ehrenfest jr. (1880-1933),
Arch. 9	D.N. van der Neut (1904-1985),
Arch.10	een 60-tal foto's van wiskundigen
Arch.11	C.G.G. van Herk (1900-1982),
Arch.12	J.H. Wansink (1894-1985),
Arch.14	H. Freudenthal (1905-1990),

Arch.1 W. Kapteyn (1849-1927), berust bij de bibliotheek van het Museum Boerhaave in Leiden (onder nr. Arch. 371).

Arch. 13 M.J. van Uven (1878-1959) berust nog bij het CWI.

Op 17 december 1999 werd door het Rijksarchief in Noord-Holland een "Symposium Wetenschapsarchieven" georganiseerd ter gelegenheid van de aanbidding van de inventaris van het archief van H. Freudenthal samengesteld door drs. P.J.M. Velthuys-Bechthold. Dit symposium vond plaats in het Rijksarchief te Haarlem.

De eerste exemplaren van de inventaris werden door drs. R.C. Hol, rijksarchivaris in Noord-Holland, uitgereikt aan prof. dr. A.W. Grootendorst, voorzitter van de CPAW, en aan dr. M. Freudenthal, dochter van prof. dr. H. Freudenthal. Beiden voerden het woord en betuigden dank aan allen, die aan de totstandkoming medewerkten. Daarnaast waren er in een breder kader ook voordrachten door

anderen.

In het verslagjaar heeft de commissie niet vergaderd. Per 1 januari 2000 zal dr. M. Bakker (CWI) de functie van secretaris van drs. F.A. Roos overnemen.

De samenstelling van de CPAW per 31 december 1999 was als volgt:

Prof. dr. F. van der Blij
Drs. G.J.A.M. Bolten
Prof. dr. H.J.M. Bos
Prof. dr. D. van Dalen
Prof. dr. A.W. Grootendorst, voorzitter
Drs. F.A. Roos, secretaris

F. A. Roos, secretaris CPAW

3.10 Verslag van de Commissie Industriële en Toegepaste Wiskunde

Voortbouwend op eerdere gedachtenvorming rond het dalende imago van wiskunde in de maatschappij (o.a. gesprek ITW-WG, december '98), heeft ITW het initiatief genomen tot contact met andere wiskundige groeperingen in Nederland, met als onderwerp:

- 1 wat kunnen we in dit tijdsgewricht voor elkaar betekenen?
- 2 willen jullie meedenken over een versterking/hergroepering/vernieuwing van het WG?

In dit kader heeft ITW gesprekken gehad met de Vereniging voor Statistiek en met de Nederlandse Vereniging van Wiskundeleraren, welke gesprekken in zeer positieve sfeer verliepen. De VVS was ook zelf al met de problematiek bezig. De NVvW nodigde ITW uit een bijdrage te leveren op de jaarvergadering/symposiumdag Praktische Wiskunde, waaraan ITW gevolg heeft kunnen geven, met dank aan Carel van de Giessen, Hajo Broersma en Guus Stelling.

Het WG-bestuur heeft na de wisseling in april '99 de discussie met ITW over de structuur van wiskundig Nederland versneld opgepikt, mede gedreven door de wens het NAW een nieuwe en levendige vorm te geven die alle wiskundige groeperingen zal aanspreken en aanzuigen. Er zijn constructieve voorstellen ontwikkeld over de positie van ITW (met haar vele buitenleden) ten opzichte van het WG, maar ITW heeft hierin nog geen besluiten genomen.

In 1999 liep de 9e jaargang van ITW-Nieuws ietwat uit fase, maar het streven naar vier edities per jaar bleef gehandhaafd. ITW-Nieuws werd gedragen door een onverminderd enthousiaste redactie.

ITW organiseerde op 19 maart het symposium "Computational Science", gehouden op het CWI, en op 10 december "Toepassingen van wiskunde binnen de medische wetenschap", tevens als najaarssymposium van het WG, gehouden aan de TUE.

De commissie bestond in 1999 uit Bob Mattheij (voorzitter), Arie Langeveld, Wil Schilders, Herbert Tulleken (penningmeester), Cor Kraaikamp en Frits van Beckum (secretaris).

Frits van Beckum, secretaris ITW



T.A. Springer

Universiteit Utrecht, Vakgroep Wiskunde

Postbus 80010, 3508 TA Utrecht

springer@math.uu.nl

In memoriam

F.D. Veldkamp (1931-1999)

Ferdinand Douwe Veldkamp werd geboren op 5 december 1931 te Tiel. Hij groeide daar op en kreeg er zijn schoolopleiding. In het onrustige oorlogsjaar 1944 kwam hij op het Tielse gymnasium. In 1949 deed hij staatsexamen gymnasium β , zonder de hoogste klasse te hebben gevolgd. Hij begon daarna de studie voor natuurkundig ingenieur aan de Technische Hogeschool te Delft, met de bedoeling een betrekking in de industrie te zoeken. Maar de nogal strak gereguleerde Delftse studie strookte niet goed met Veldkamps wens in de studie zijn eigen weg uit te zetten. Hij nam dan ook na twee jaar het besluit te verhuizen naar de Utrechtse universiteit, met de bedoeling er theoretische natuurkunde te gaan studeren. Maar toen hij zich in Utrecht verder in de wiskunde ging verdiepen, boei- de die hem zo dat hij besloot daarin verder te gaan, nog steeds met de bedoeling het later in de industrie te zoeken.

In Utrecht waren er in het begin van de jaren vijftig twee hoogleraren in de wiskunde, namelijk J. Popken (analyse) en H. Freudenthal (meetkunde). Freudenthal had in Utrecht bij zijn colleges practica ingevoerd, die onder zijn supervisie door practicumassistenten werden verzorgd. Kort na Veldkamps candidaatsexamen werd hij verrast door Freudenthals aanbod van een assistentsplaats, bij de eerste- en tweedejaars colleges projectieve meetkunde en lineaire algebra. Veldkamp zegt in zijn

afscheidscollege uit 1994 dat hij pas later beseft heeft dat de aanvaarding van dit aanbod van cruciale betekenis is geweest in zijn leven.

Veldkamp deed doctoraalexamen in 1955. In het studiejaar 1956-57 verbleef hij in Parijs, met een Franse studiebeurs. Hij volgde daar onder andere enkele “séminaires” die thans een legendarische naam hebben, zoals Chevalley’s “Séminaire sur la classification des groupes de Lie algébriques” en Grothendieck’s seminarium over homologische algebra. Veel van wat hij daar hoorde was helemaal nieuw voor hem, maar later heeft hij zich grondig daarin ingewerkt. Wanneer hij over deze Parijse tijd vertelde citeerde Veldkamp graag een uitspraak van Freudenthal: “Ik heb altijd het meeste geleerd van voordrachten die ik niet begreep”.

In de zomer van 1957 bleek Veldkamp longtuberculose te hebben. De in die tijd gebruikelijke therapie vereiste een langdurige kuur in een sanatorium. Hij verbleef dan ook tot het najaar van 1958 in het studentensanatorium te Laren. Daar kon hij na enige tijd de wiskunde weer opvatten. Hij begon er aan het werk voor zijn proefschrift. De promotie bij Freudenthal vond plaats eind 1959. Ik kom hieronder op het proefschrift terug.

Veldkamps loopbaan na zijn promotie ontwikkelde zich praktisch helemaal aan de Utrechtse Universiteit. In 1961 werd hij tot lector benoemd, met als leeropdracht de zuive-

re wiskunde. Op uitnodiging van N. Jacobson verbleef hij van 1963-1965 aan Yale University (New Haven, Conn., U.S.A.). Ook in 1975 verbleef hij voor langere tijd in de U.S.A., als gasthoogleraar aan Ohio State University (Columbus, Ohio), op uitnodiging van zijn vriend uit de Yale periode Joseph C. Ferrar.

In 1972 werd Veldkamp benoemd tot gewoon hoogleraar in de zuivere wiskunde. Hij bleef in functie tot begin 1994, toen hij vervroegd uittrad. Maar hij bleef nog actief. Hij was regelmatig aanwezig op het Utrechtse Mathematisch Instituut. In het voorjaar van 1998 werd hij getroffen door een hersenbloeding. Hoewel hij goed herstelde was hij de oude niet meer. Een tweede hersenbloeding in de zomer van 1999 was fataal; op 3 augustus van datzelfde jaar overleed hij.

Veldkamp was gedurende vele jaren, waarin wij aan de Nederlandse Universiteiten allerlei grotere en kleinere veranderingen meemaakten, een vast punt in het Utrechtse Mathematisch Instituut. Hij heeft met grote toewijding de activiteiten verricht die van een hoogleraar verwacht werden in onderwijs, bestuur en onderzoek.

Vele studenten hebben bij Veldkamp algebra-colleges gevolgd in hun eerste jaren, of een college Galoistheorie. Velen zijn bij hem afgestudeerd, in allerlei onderwerpen, en sommige afstudeerders zijn doorgegaan met een promotieonderzoek.

Hoewel niet direct aangetrokken door bestuurswerk heeft Veldkamp dat werk ook niet geschuwd. Van 1979-1985 was hij voorzitter van de (inmiddels opgeheven) Sectie Wiskunde van de Academische Raad. Van 1976-1979 was hij decaan van de Utrechtse Subfaculteit Wiskunde, en van 1991-1994 van de Faculteit Wiskunde en Informatica (waarin de Subfaculteit intussen was opgegaan). Hij toonde zich een verstandig bestuurder die goed leiding wist te geven. Maar hij was ook in staat op zijn tijd bestuurlijke gewichtigheid door een ironische bril te bekijken.

Hoewel Veldkamp veel bevrediging heeft gehad van zijn onderwijswerk (in het bijzonder bij het begeleiden van afstudeerders en promovendi) denk ik dat zijn hart toch vooral is uitgegaan naar het wiskundig onderzoek. Hij heeft daar dan ook zijn sporen achtergelaten. Veldkamp was dankbaar voor de inspirerende invloed van zijn promotor Freudenthal. Op diens instigatie heeft Veldkamp zich de technische finesses van de Lietheorie ("gewicht-heffen en worteltrekken") eigen gemaakt na zijn doctoraal examen, zoals blijkt uit zijn eerste publicatie [1]. In die tijd waren slechts weinig jonge Nederlandse wiskundigen met Lietheorie vertrouwd.

Ook Veldkamps promotiewerk ligt in de lijn van Freudenthals werk uit de jaren vijftig. Hij onderzocht toen de meetkundes geassocieerd met exceptionele Liegroepen, en was geïnteresseerd in de axiomatiek van zulke meetkundes. Het prototype van een meetkundige axiomatiek is die van de projectieve ruimten van dimensie ≥ 3 over een (al dan niet commutatief) lichaam. Tegenwoordig is dit soort axiomatiek geïncorporeerd in de theorie van de Titsgebouwen (die Tits in dezelfde tijd begon te ontwikkelen). De axiomatiek van projectieve ruimten is dan equivalent met de classificatie van irreducibele sferische Titsgebouwen van type A_n met $n \geq 4$. Veldkamp geeft in zijn proefschrift [2] een axiomatiek voor de verzameling van lineaire deelruimten van een projectieve ruimte die totaal isotroop zijn voor een polariteit van die projectieve ruimte (hij noemt zo'n verzameling een "polaire meetkunde", die naam is in zwang gebleven). In termen van Titsgebouwen: het proefschrift geeft de classificatie van irreducibele sferische Titsgebouwen van type C_n met $n \geq 4$ (in karakteristiek $\neq 2$). Het proefschrift geeft een wezenlijke bijdrage tot de projectieve meetkunde. Het is een knap stuk origineel werk.

Veel van Veldkamps late werk gaat ook over aspecten van projectieve meetkunde.



Ferdinand Douwe Veldkamp (1931–1999)

Freudenthals werk over de meetkunde van exceptionele groepen, en in het bijzonder zijn werk over octavenmeetkunde en exceptionele Jordanalgebras, had op het Utrechtse Mathematisch Instituut verschillende personen ertoe gebracht zich ook in deze zaken te verdiepen, waaronder Veldkamp en ik. Wij bleken overlappende resultaten gevonden te hebben, en dat leidde tot enkele gemeenschappelijke publicaties ([5] en [8]) over projectieve octavenmeetkunde. Ook tijdens zijn verblijf aan Yale University in 1963-65 werkte Veldkamp aan meetkundige aspecten van octaven en Jordanalgebras, die daar ook in de lucht waren (zie [6]).

In de jaren tachtig heeft Veldkamp weer de projectieve meetkunde opgenomen. Hij heeft zich intensief bezig gehouden met projectieve meetkunde over een associatieve ring R , die niet noodzakelijk een lichaam is. Men definieert dan de n -dimensionale projectieve ruimte $P_n(R)$ als de verzameling van de vrije directe summanden van het vrije rechtsmoduul R^{n+1} . Voor algemene R kan men daar niet veel mee beginnen. Maar discussies met de Utrechtse deskundige in de K-theorie W.L.J. van der Kallen brachten Veldkamp tot het inzicht dat candi-

daten voor ringen R met een goede axiomatische beschrijving van $P_n(R)$ de ringen zijn met stabiele rang 2. (Een ring R heeft stabiele rang 2 wanneer het volgende geldt: als $\alpha, \beta \in R$ en $R = R\alpha + R\beta$ dan is er $\gamma \in R$ zo dat $\alpha + \gamma\beta$ inverteerbaar is in R . Voorbeelden zijn alle locale ringen.) In verschillende publicaties (enkele samen met Ferrar) heeft Veldkamp de projectieve meetkunde onderzocht over zulke ringen, en laten zien dat er dan inderdaad zo'n axiomatische beschrijving is (een résumé is te vinden in het overzichtsartikel [33]).

In de jaren zeventig publiceerde Veldkamp over problemen over algebraïsche groepen en eindige Liegroepen (zie [11], [14], [15]). De artikelen [12] en [13] zijn vroege bijdragen tot de representatietheorie van Lie algebra's in karakteristiek p , een gebied waar in de afgelopen jaren veel interessants is gebeurd. In zijn laatste jaren werkten Veldkamp en ik aan een nieuwe uitgave (zie [34]) van een college-dictaat van mij uit Göttingen (1963). Het was Veldkamps idee hieraan te beginnen en hij heeft er verreweg het meeste werk aan verricht. Toen hij ziek werd was het manuscript bijna klaar. Maar hij heeft de voltooiing niet meer meegemaakt.

Bij Veldkamps wetenschappelijke activiteiten behoort ook genoemd te worden zijn werk als redacteur van het tijdschrift *Geometriae Dedicata*. Het werd op instigatie van Freudenthal opgericht in 1972, en door hem geredigeerd tot 1981. Daarna was Veldkamp één van de twee eindredacteurs. Hij heeft zich zeer ingezet voor het niveau en de bloei van het tijdschrift. Hij was een consciëntieuze en efficiënte tijdschriftredacteur.

Veldkamp trouwde in 1959 met S.F.A. Petry. Zij hadden vier kinderen. Het huwelijk werd ontbonden in 1977.

In 1990 hertrouwde Veldkamp met T.L. In 't Veld. Hij deelde met haar een interesse voor muziek, die zij ook samen beoefenden. Daarnaast was Veldkamp een groot natuurliefhebber, al sinds zijn jonge jaren. Hij was een zeer ervaren vogelkenner, die overal de gelegenheid vond vogels te observeren, of dat nu was

in Israel, of in Ohio, of in de Utrechtse Uithof. Hij hield er ook van in de vacaties trektochten te maken in eenzame gebieden in Noorwegen.

Aan dit actieve leven is –te vroeg– een einde gekomen. Maar Veldkamp zal in de herinnering van zijn vrienden blijven voortleven.



Publicaties

- 1 Note on the real forms of a simple Lie algebra. *Indag. Math.* 21 (1959), 300–303
- 2 Polar geometry I, II, III, IV, V. *Indag. Math.* 21 (1959), 512–551, 22(1959), 207–212
- 3 Embedding of a distributive lattice-like structure into a Boolean algebra. *Indag. Math.* 24 (1962), 100–117
- 4 An axiomatic treatment of polar geometry. In: *Algebraical and Topological Foundations of Geometry* (Proc. Colloq. Utrecht, 1959), p. 193–198. Pergamon, Oxford (1962)
- 5 (met T.A. Springer) Elliptic and hyperbolic octave planes I, II, III. *Indag. Math.* 25 (1963), 413–451
- 6 Isomorphisms of little and middle projective groups of octave planes. *Indag. Math.* 26 (1964), 280–289
- 7 Unitary groups in projective octave planes. *Compositio Math.* 19 (1968), 213–258
- 8 (met T.A. Springer) On Hjelmslev-Moufang planes. *Math. Z.* 107 (1968), 249–263
- 9 Collineation groups in Hjelmslev-Moufang planes. *Math. Z.* 108 (1968), 37–52
- 10 Unitary groups in Hjelmslev-Moufang planes. *Math. Z.* 108 (1968), 288–312
- 11 Representations of algebraic groups of type F_4 in characteristic 2. *J. Algebra* 16 (1970), 326–339
- 12 Families of representations of Lie algebras in characteristic p . *J. Pure Appl. Algebra* 2 (1972), 231–247
- 13 The center of the universal enveloping algebra of a Lie algebra in characteristic p . *Ann. Sci. École Norm. Sup.* (4) 5 (1972), 217–240
- 14 On the diagonal form of real symmetric matrices. *Indag. Math.* 35 (1973), 243–246
- 15 Roots and maximal tori in finite forms of semisimple algebraic groups. *Math. Ann.* 207 (1974), 301–314
- 16 Regular elements in anisotropic tori. *Contributions to Algebra* (collection of papers dedicated to Ellis Kolchin), p. 389–424. Academic Press, New York (1977)
- 17 (met M. Hazewinkel, W. Hesselink, D. Siersma) The ubiquity of Coxeter-Dynkin diagrams (an introduction to the $A - D - E$ problem). *Nieuw Arch. Wisk* (3) 25 (1977), 257–307
- 18 Regular characters and regular elements. *Comm. Algebra* 5 (1977), 1259–1273
- 19 A note on the Campbell-Hausdorff formula. *J. Algebra* 62 (1980), 477–478
- 20 Projective planes over rings of stable rank 2. *Geom. Dedicata* 11 (1981), 285–308
- 21 Projective ring planes: some special cases. *Proc. Conference on Combinatorial and Incidence Geometry* (La Mendola, 1982), p. 609–615. *Rend. Sem. Mat. Brescia* 7, Vita e Pensiero, Milano (1984)
- 22 (met J.C. Ferrar) Neighbor-preserving homomorphisms between projective ring planes. *Geom. Dedicata* 18 (1985), 11–33
- 23 In honor of Hans Freudenthal on his eightieth birthday. *Geom. Dedicata* 19 (1985), 2–5
- 24 Distance-preserving homomorphisms between projective ring planes. *Indag. Math.* 47 (1985), 443–453
- 25 Incidence-preserving mappings between ring planes. *Indag. Math.* 47 (1985), 455–459
- 26 Projective ring planes and their homomorphisms. *Rings and Geometry* (Istanbul, 1984), p. 289–350. *NATO Adv. Sci. Inst. Math. Phys. Sci.* 160, Reidel Dordrecht (1985)
- 27 (met J.C. Ferrar) Admissible subrings revisited. *Geom. Dedicata* 23 (1987), 229–236
- 28 Projective Barbilian spaces I, II. *Resultate Math.* 12 (1987), 222–240 en 434–449
- 29 (met G. Törner) Literature on geometry over rings. *J. Geom.* 42 (1991), 180–200
- 30 Freudenthal and the octonions. *Nieuw Arch. Wisk.* (4) 9 (1991), 145–162
- 31 Hans Freudenthal: 1905–1990. *Notices Amer. Math. Soc.* 38 (1991), 113–114
- 32 n -Barbilian domains. *Resultate Math.* 23 (1993), 177–200
- 33 Geometry over rings. *Handbook of Incidence Geometry*, p. 1033–1084. North-Holland, Amsterdam (1995)
- 34 (met T.A. Springer) “Octonions, Jordan Algebras and Exceptional Groups”. Verschijnt in de serie “Monographs in Mathematics” bij Springer-Verlag in 2000

Promoties bij F.D. Veldkamp

- J. Treur, A duality for skew field extensions (1976)
 G.M.D. Hogewij, Ideals and automorphisms of almost-classical Lie algebras (1978)
 J.W. van de Leur, Contragredient Lie superalgebras of finite growth (1986)

W.H.M. Veldman

*Katholieke Universiteit Nijmegen, Subfaculteit Wiskunde
Toernooiveld, 6525 ED Nijmegen
veldman@sci.kun.nl*

In memoriam

J.J. de Iongh (1915-1999)

Johan J. de Iongh studied mathematics, and a lot of other things, at the University of Amsterdam. He played an active rôle in Amsterdam student life and founded the students' union *Anakeion*. During the Nazi occupation of the Netherlands he spent some time in the notorious *Kamp Amersfoort*. He came under the spell of L.E.J. Brouwer and, discerning the soundness of the intuitionistic view of mathematics, he became Brouwer's associate and friend. Hearing G. Mannoury lecture on the philosophy of mathematics he developed a strong affinity for the latter's *significant* point of view. He discussed the foundations of physics and mathematics with D. van Dantzig. In 1952/53 he made careful notes of a course given by A. Heyting on intuitionistic mathematics. He had many conversations with S.C. Kleene when the latter visited Amsterdam in order to learn about intuitionistic mathematics.

From his early years as a student on he gave lectures on a wide variety of subjects, on all kinds of occasions. For some time, he was H. Freudenthal's assistant at the *Rijksuniversiteit Utrecht*, and, like him, he got involved with Mathematics Education, from the primary school to the University level.

In 1960, he became a Professor of Mathematics at the *Katholieke Universiteit Nijmegen*. He was the first Professor of Mathematics at this University, and founded the Department of Mathematics. While fulfilling this difficult task, he was inspired and actively supported by the Utrecht mathematicians H. Freudenthal and F. van der Blij. In the early years, he taught a meticulously thought out course on Mathematical Analysis. Later, the courses in Logic and the Foundations of Mathematics were his primary concern. He regularly treated the main subjects of the field, such as Recursive Function Theory, Axiomatic Set Theory, Introductory Model Theory and of course Intuitionistic Mathematics. He kept a watchful eye on the quality of the teaching at the Department as a whole and contributed courses on Problem Solving, School Mathematics from an Advanced Point of View, and the History and Philosophy of Mathematics. He always prepared his lectures with the utmost care. When delivering them, his notes in hand, he walked enormous distances, striding up and down before the blackboard, raising and lowering his voice, slowing down and accelerating his speech, according to the needs of the subject and a good theatrical performance. He advocated a broad view

and knowledge of mathematics and its applications and abhorred too narrow specialists. One of the goals he set himself and his Department was to rear excellent teachers of mathematics.

Johan de Iongh understood very well that students spend a decisive part of their lives at the university. A passionate teacher, driven by a Platonic paedagogical Eros, he wanted to know about their background and interests. He eagerly followed their attempts to organize themselves, having experienced, in his own student days, the importance of personal encounters and the possibility of making friends for life. Deeply serious about his catholic faith, he tried to create occasions where students could glimpse something of the greatness of the Christian tradition. His dreams were shattered when Paris 1968 evolved into Nijmegen 1973 and students occupied the Department for months. He felt hopeless, unable to deliver them from the false ideology in which he thought them caught. After these events, and also because of the ensuing change in the organization of the Universities directed towards "democratization", his rôle in the Department became a more modest one.

He was a man of great learning and wide interests and as much a philosopher as a mathematician. Steeped in Greek culture, he loved Plato and Euclid and advertized the *Elements*, in particular its first book, as exciting reading, also from the perspective of modern mathematics. He pointed out that the debate in the philosophy of mathematics between Platonists and Intuitionists is foreshadowed in the difference of opinion between Menaechmos and Speusippos, as reported by Proclus. (Speusippos succeeded Plato as the head of the Academy). He also quoted Cusanus in support of the intuitionistic point of view.

His own position in the philosophy of mathematics might be described as a platonically tinged intuitionistic one. He emphasized that a proof is never to be identified with the text in which it is expressed, and that truth is not the same as correctness. Mathematics cannot be given a foundation outside itself. It comes before logic and consists in carrying out constructions in one's own mind. Language has a rôle to play when one wants to report on one's mathematics, either to oneself or to someone else, but one is never sure that it will fulfil one's expectations. It must seem that such a view forces one into solipsism. But, as Plato explains in his Seventh



Johan J. de Iongh (1915–1999)

Letter, truth may show itself, unexpectedly and suddenly, as a spark of fire, by something like divine grace, where friends have been patiently seeking after it together, for a possibly very long time.

Johan shared Plato's hankering after such events.

He strived towards perfection and could be harsh in his judgment on other people and their work, expressing his discontent impetuously and vigorously. He was most critical of his own writings and published only a very few pages.

He retired in 1984. He had problems with his health from about 1980. Somewhat lonely, and given to self-doubt, he spent his later years in his apartment across the Nijmegen Railway Station, where his loyal housekeeper, Juffrouw Marie, kept him company. Of the same age as Johan himself, she took care of him for 37 years, and now survives him.

He died on June 9, 1999. Let us remember him thankfully and respectfully. 

A. Doelman*Korteweg-de Vries Instituut, Universiteit van Amsterdam**Plantage Muidergrecht 24, 1018 TV Amsterdam**doelman@wins.uva.nl***Inaugurele rede**

Patronen en

Op 27 oktober 1999 sprak Arjen Doelman zijn oratie uit bij de aanvaarding van het ambt van hoogleraar in de Wiskunde aan de Universiteit van Amsterdam. Hier volgt het inhoudelijke gedeelte van zijn oratie.

Wiskunde kan gezien worden als de wetenschap die ‘patronen’ en ‘structuren’ bestudeert.¹ Door het abstracte taalgebruik in de wiskunde is het voor de niet-ingewijde vaak bijna onmogelijk zich een beeld te vormen van de betekenis van deze ‘patronen’ of ‘structuren’. In wiskundige termen is het onderwerp waar ik vandaag over zal spreken het gedrag van een zeker type van deze ‘structuren’ genaamd ‘oplossingen van niet-lineaire partiële differentiaalvergelijkingen’.² Deze structuren worden, vooral buiten de wiskunde, ook wel met de Engelse term ‘patterns’ aangeduid, inderdaad patronen. De beste omschrijving, in algemene termen, van dit vakgebied is dan ook ‘pattern formation’: patroonvorming.

Pattern formation

Het bijzondere van dit onderzoeksgebied is, dat er verschillende disciplines in samenkomen en samenwerken. Het wiskundige begrip ‘oplossing van een differentiaalvergelijking’ kan hierdoor een zeer concrete betekenis hebben: het kan, in zekere zin, overall om ons heen worden waargenomen. Zelf vind ik het ontstaan van golfjes door een windvlaagje op een tot dat moment rimpelloos wateroppervlak, een regenplas of de Noordzee, één van de mooiste voorbeelden van het proces van ‘pattern formation’. Eenieder die hier naar kijkt en het proces probeert te begrijpen zal onder andere de volgende vragen kunnen stellen: Waarom ontstaan deze golfjes? Welke factoren hebben invloed op de golflengte, de vorm en de hoogte van deze golfjes?

Dit zijn uiterst moeilijk te beantwoorden vragen voor de natuurkundige of wiskundige die een serieuze studie van dit proces wil maken. Deze wetenschapper zal eerst aan de hand van de fundamentele wetten van de stromingsleer een acceptabel model moeten opstellen voor de interactie tussen wind en water, om zo het gedrag van de grenslaag, de waterspiegel, te beschrijven. Dit gebeurt met behulp van zo’n niet-lineaire partiële differentiaalvergelijking. Als we nu even aanne-

men dat deze vergelijking vanuit natuurkundig én wiskundig oogpunt ‘acceptabel’ is – in beide gevallen raakt dit aan absoluut niet-triviale kwesties – dan kunnen we zeggen dat onze windgolfjes corresponderen met oplossingen van deze differentiaalvergelijking.

Het ontstaan van de windgolfjes kan nu worden onderzocht aan de hand van een zogenaamde stabiliteitsanalyse van de ‘triviale’ oplossing: het volledig rimpelloze wateroppervlak met een daarover heen ‘strijkende’ gelijkmatige wind. Als alles meezit dan levert deze analyse een kritische windkracht op: waait de wind krachtiger dan deze kritische waarde, dan is het rimpelloze wateroppervlak instabiel. Als gevolg hiervan zullen er langzaam groeiende periodieke oplossingen ontstaan: de windgolfjes.³ Deze ‘lokale’ analyse geeft een mogelijk antwoord op de vraag naar het ontstaan van de golfjes en over de te verwachten golflengte. Echter, zodra men niet meer kan aannemen dat de golfjes ‘heel klein’ zijn, verliest deze aanpak zijn waarde, zie figuur 1. Het is niet de bedoeling dat ik hier verder inga op het gedrag van windgolven, dit was slechts een eerste ‘huis-tuin-en-keuken-voorbeeld’ van ‘pattern formation’. Mijn tweede voorbeeld bevindt zich ook dicht bij huis, tot ongenoegen van velen: de tuinslak. Weinigen van u zullen weleens de moeite hebben genomen om de patronen op het slakkenhuis te bestuderen. Vaak loopt er een aantal heel duidelijke gele strepen, afgewisseld door bruin/groene banden, over het slakkenhuis. Dit soort patronen zijn ook te vinden op schelpen. Hans Meinhardt laat in zijn boek *The Algorithmic Beauty of Sea Shells*⁴ een aantal prachtige voorbeelden zien van schelpen met bijvoorbeeld zeer regelmatige, in wiskundige woorden: periodieke, streppatronen, zie figuur 2.

Andere schelpen zijn eerder ‘geblokt’ of overdekt met elkaar overlappende ‘V-patronen’. Meinhardt modelleert de dynamica van de chemische stoffen die een rol spelen in het ‘kleuren’ van een schelp met, alweer, niet-lineaire partiële differentiaalvergelijkingen, dit keer van het reactie-diffusie-type. Computersimulaties van deze reactie-diffusievergelijkingen geven aan dat de oplossingen van deze vergelijkingen exact dezelfde patronen kunnen genereren als die men ziet op de schelp en de slak.



Arjen Doelman

foto: Philip Mechanicus

golven

Vanuit het oogpunt van de wiskunde is er weinig verschil tussen de windgolfjes en de gestreepte slakkenhuizen. Sterker nog, de zojuist genoemde 'lokale analyse' die het ontstaan van de windgolfjes verklaarde is in essentie dezelfde als de lineaire analyse waarmee de wiskundige Alan Turing rond 1950 het ontstaan van streep- en blokpatronen in 'biologische processen' meende te kunnen verklaren.⁵ Ik zeg hier met klem 'meende te kunnen verklaren' omdat het tot op de dag van vandaag niet duidelijk is hoe belangrijk deze door natuurkundige wetten gedreven chemische processen zijn in biologische 'pattern formation'. Met andere woorden, er bestaat nog geen wetenschappelijke consensus over het belang van de niet-lineaire wiskunde en natuurkunde als één van de drijvende krachten achter de ontwikkeling van bijvoorbeeld een gestreepte tuinslak uit een oorspronkelijk homogene bol cellen. Natuurlijk speelt

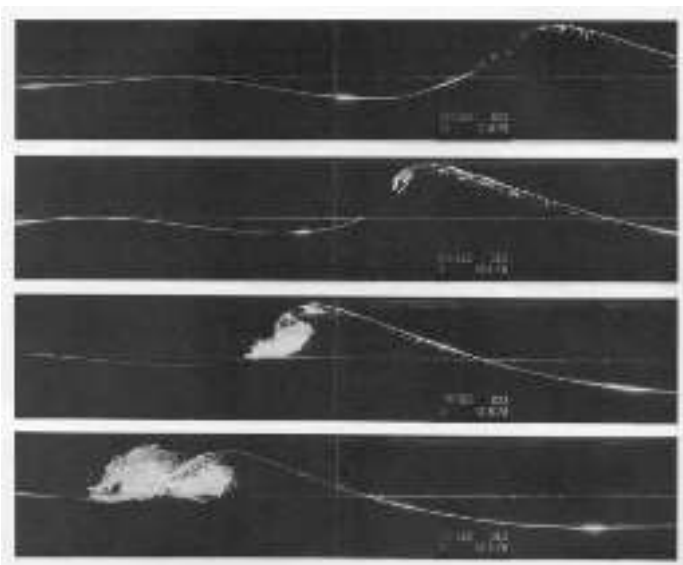
de sturende werking van de genen een hoofdrol in dit proces, maar er zijn veel aanwijzingen dat de natuur hierin ook op een subtiële wijze gebruik maakt van de eigenschappen van niet-lineaire systemen.⁶ Maar, ook dat is niet het onderwerp van vandaag. Deze twee voorbeelden dienden hoofdzakelijk om aan te geven dat vragen over volledig uiteenlopende 'patronen' uit het dagelijkse leven of in een wetenschappelijk experiment met behulp van die abstracte wiskundige 'taal' vaak terug te brengen zijn tot eenzelfde type probleemstelling. Dat geldt voor de windgolven, de slakkenhuizen maar bijvoorbeeld ook voor het ontstaan en de dynamica van zandbanken, zie figuur 3,4.^{7,8}

Alan Turing's 'morphogenesis'

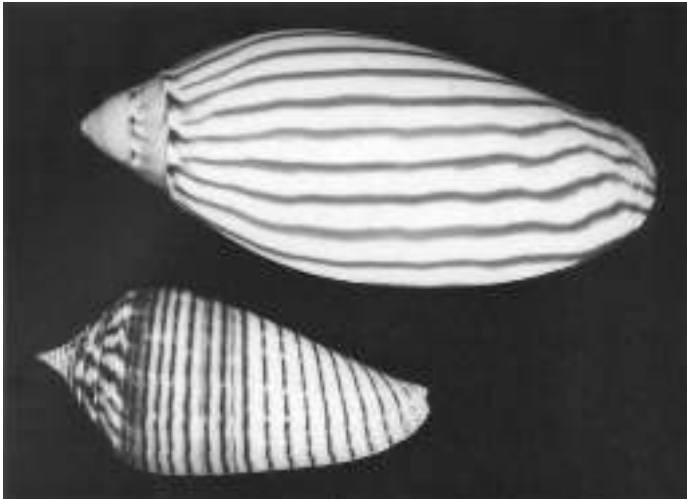
Om een indruk te krijgen van de wiskunde achter de zojuist getoonde patronen is het misschien het beste om een aantal opmerkingen over de geschiedenis van het vakgebied 'pattern formation' te maken.

Er is veel voor te zeggen om het artikel 'The chemical basis of morphogenesis' uit 1952 van de Engelse wiskundige Alan Turing⁹ te kiezen als startpunt voor het ontstaan van dit vakgebied. Een belangrijke reden hiervoor is dat Alan Turing als een van de eersten het biologische begrip morfogenese als wiskundig probleem bestudeerde. 'Morphogenese' betekent 'het ontstaan van vormen' ofwel 'pattern formation'. Turing's verhaal was een van de eerste wiskundige artikelen waarin het begrip 'pattern formation', weliswaar onder een andere naam, centraal stond. Hierbij dient wel te worden opgemerkt dat de door Turing bestudeerde structuren al ruim tien jaar voor Turing werden geanalyseerd door de mathematisch bioloog Nicolas Rashevsky.¹⁰ Een belangrijke reden om Turings artikel toch als startpunt voor het ontstaan van het vakgebied 'pattern formation' te kiezen is dat Turings analyse zeer dicht staat bij de tegenwoordige aanpak van dit soort problemen. Om deze reden is het wellicht goed om eens wat meer in te gaan op de inhoud van dit artikel.

Voor hierop in te gaan dient gezegd te worden dat Alan Turing natuurlijk niet bekend staat als wiskundig analyticus, laat staan als een toegepast analyticus. Turing is bekend om zijn fundamentele werk op het gebied van de wiskundige logica en als een van de belangrijkste krachten achter de ontwikkeling van wat wij tegenwoordig de computer



Figuur 1 Een watergolf waarvan de amplitude niet 'heel klein' is kan bijvoorbeeld breken. Wiskundig betekent dit dat de oplossing van de vergelijking niet langer differentieerbaar is.



Figuur 2 Twee voorbeelden van periodiek gestreepte schelpen.

noemen. Niet-wiskundigen kennen Alan Turing wellicht als de man die in de Tweede Wereldoorlog de Duitse 'Enigma-code' brak en hiermee een belangrijke bijdrage leverde aan de verdediging van het Verenigd Koninkrijk. Echter, het laatste artikel dat Turing voor zijn zelfmoord in 1954 publiceerde had weinig te maken met deze achtergrond, maar werd gemotiveerd door zijn levenslange fascinatie voor de 'patronen' die je kunt waarnemen in planten en dieren.¹¹ Overigens, dit 'pattern formation' artikel is vaker geciteerd dan het geheel van zijn overige wetenschappelijke werk tezamen.¹² Eerlijk gezegd betwijfel ik ten zeerste of dat ook betekent dat dit artikel beter gelezen wordt dan zijn andere werk.

Alan Turing poneerde in dit artikel het idee om 'pattern formation' in biochemische systemen te modelleren met behulp van, alweer, reactie-diffusievergelijkingen. Zo'n vergelijking beschrijft de evolutie van de concentraties van een aantal met elkaar reagerende chemische substanties die zich vrij door een zeker 'medium' kunnen verspreiden. Turing realiseerde zich dat de situatie waarin de reagerende stoffen homogeen verdeeld en in chemisch evenwicht zijn, instabiel kan zijn. Willekeurig kleine verstoringen kunnen dan gaan groeien, waardoor regelmatige patronen kunnen ontstaan. Deze patronen heten tegenwoordig 'Turing patterns'. Het ontstaan van deze regelmatige patronen gaat, in eerste instantie, tegen de intuïtie in. Turing toonde namelijk aan dat de instabiliteit, de drijvende kracht achter het ontstaan van de patronen, veroorzaakt wordt door de diffusie-effecten in de vergelijking. Je zou juist verwachten dat diffusie 'onregelmatigheden gladstrijkt' en dus patroonvorming tegenwerkt. Je kan hierbij denken aan een drupje melk in de thee. Onder invloed van diffusie verdeelt de melk zich op den duur geheel gelijkmatig oftewel homogeen door de thee. Hoe kan diffusie dan in Turings geval juist voor patroonvorming, en dus inhomogene verdelingen, zorgen? De sleutel hiertoe ligt in het feit dat Turing veronderstelde dat verschillende stoffen met verschillende snelheden kunnen diffunderen; hierdoor kunnen inhomogene verdelingen wel stabiel zijn en kunnen ze ook worden waargenomen in een experiment. Wel dient te worden opgemerkt dat hier een veertig jaar lange speurtocht op volgde: pas in 1990 is er een expliciete chemische reactie ontdekt waarin op een overtuigende manier Turing patterns konden worden waargenomen, zie figuur 5.¹³

Turings aanpak was modern in de zin dat hij inzag dat het wiskundige verschijnsel 'bifurcatie' de drijvende kracht achter het ontstaan van interessante patronen kan zijn. Een ander, zeer belangrijk modern aspect van Turing's werk is het feit dat hij de wiskundige analyse liet

volgen door wat wij nu 'numerieke simulaties' zouden noemen. Aan de hand van, zoals hij schreef, '*a few hours of manual computation*' liet hij zien hoe de patroonvorming tot stand kwam. In de afsluitende paragraaf van het artikel voorspelt hij het belang van het gebruik van de, toen nog nauwelijks bestaande, '*digital computers*' voor de ontwikkeling van het vakgebied 'morfogenese'.

Deze voorspelling is volledig uitgekomen: onderzoek aan pattern formation kan tegenwoordig eigenlijk niet meer worden gedaan zonder het gebruik van de computer. Echter, Turing besprak in diezelfde paragraaf ook nog iets anders: het belang van niet-lineaire processen. Hij zegt: '*one cannot hope to have any very embracing theory of such processes*'. In de meest absolute vorm is dat nog steeds waar, ook ik heb weinig hoop op een 'definitieve' niet-lineaire theorie van 'pattern formation'. Aan de andere kant is er juist de laatste jaren op dit gebied veel gebeurd. De zogenaamde 'weakly nonlinear stability theory' kan met recht een algemeen geldende theorie voor pattern formation worden genoemd, weliswaar één met heel sterke beperkingen, maar daar kom ik zo meteen op terug.

De 'weakly nonlinear stability theory'

Men kan zeggen dat Lev Landau, één van de grootste natuurkundigen van deze eeuw, als één van de eersten het belangrijkste idee achter deze 'zwak niet-lineaire theorie' verwoordde. Hij merkte op dat



Figuur 3 'Bijna perfecte' periodieke structuren langs het strand.



Figuur 4 Een zeer regelmatig (periodiek) meanderende rivier.

een vloeistofstroming instabiel kon worden ten opzichte van periodieke verstoringen, of golven, en dat je in principe een vergelijking kon opstellen voor de evolutie van de amplitude van deze golven, als je aan nam dat die amplitude 'klein genoeg' was.¹⁴ Inderdaad, ook Landaus golven zijn wiskundig weer in essentie hetzelfde als Turings patronen. Landau formuleerde dit idee rond 1944, dus ruim voor Turings artikel. Ter verdediging van Turing moet worden opgemerkt dat, alhoewel zijn analyse volledig lineair was, hij zeker inzag dat er iets als een zwak niet-lineaire aanpak mogelijk moest zijn. Ook hij schrijft een vergelijking op die de evolutie van de amplitude zou moeten bepalen en deze vergelijking komt exact overeen met die van Landau.

Landau besprak dit geval van 'pattern formation' in de context van een nog steeds grotendeels onbegrepen proces, dat van turbulentie, een verschijnsel dat zeker ook tot het vakgebied 'pattern formation' gerekend kan worden. Landau zag het ontstaan van de periodieke golf als eerste stap in een oneindig lange reeks van dit soort bifurcaties. Turbulentie zou het eindproduct hiervan zijn geweest. Dit idee werd in 1971 achterhaald door de inzichten van David Ruelle en Floris Takens.¹⁵ Echter, het belang van de eerste stap in Landaus cascade werd hierdoor niet ondermijnd.

Landau en Turing formuleerden beiden eenzelfde vergelijking, een gewone niet-lineaire differentiaalvergelijking, maar geen van beiden gaf aan hoe je deze vergelijking vanuit het onderliggende systeem zou



Figuur 5 Een 'bijna perfect' periodiek streep patroon in een chemische reactie. De concentratie van een van de reagerende stoffen is hoog in de lichte gebieden en laag in de donkere.

kunnen afleiden. Dat was een essentieel gemis, omdat het gedrag van de oplossingen van deze vergelijking, de periodieke golfjes, zeer sterk afhangt van de waarden van de coëfficiënten en deze worden bepaald door het onderliggende systeem.

Rond 1960 presenteerden de Britse toegepast wiskundigen Stuart en Watson als eersten een methode om deze vergelijking, tegenwoordig soms de Landau-Stuart-vergelijking genoemd, echt af te leiden uit het onderliggende systeem.¹⁶ Zij deden dit onder de aanname dat de golflengte van de periodieke golven vastgelegd werd door de bifurcatie. Dit is een enorm sterke aanname, maar impliciet was die ook gedaan door Landau en Turing. Overigens, tegenwoordig weten we dat de 'Landau-Turing-bifurcatie' onder deze aanname eigenlijk niets anders is dan de zogenaamde Hopf-bifurcatie. De Landau-Stuart-vergelijking is dan het leidende deel van de bij deze bifurcatie horende normaalvorm.¹⁷

Er is echter geen enkele reden om aan te nemen dat de golflengte echt vast ligt, al was dat maar omdat dit impliceert dat er geen interactie kan plaatsvinden tussen golven met verschillende golflengtes. Integendeel, Wiktor Eckhaus toonde rond 1962 aan dat golfjes met 'ongeveer, maar niet exact dezelfde' golflengte elkaar kunnen destabiliseren.¹⁸ Praktisch gesproken betekent dat dat niet alle golfjes die de Landau-Stuart-theorie beschrijft stabiel zijn en dus ook werkelijk kunnen worden waargenomen.

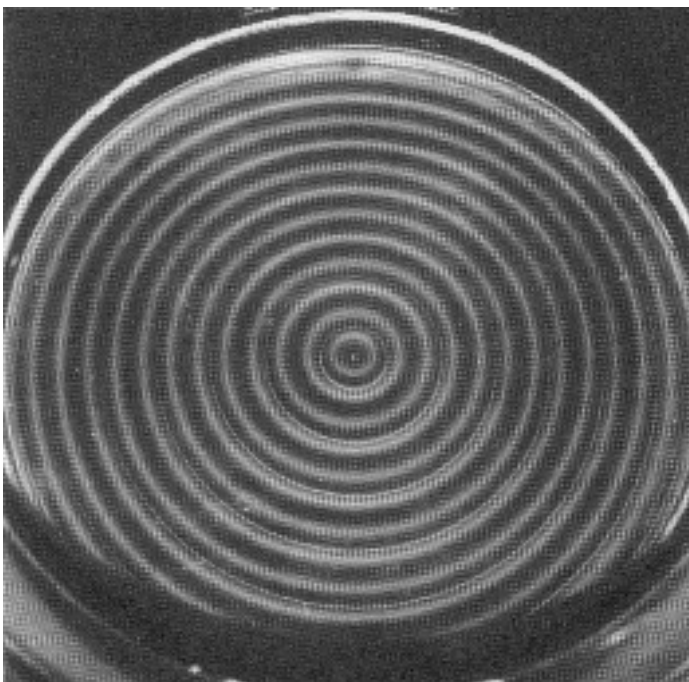
De Ginzburg-Landau-vergelijking

In de periode 1969-1971 verschenen er, onafhankelijk van elkaar, vier artikelen waarin de juiste generalisatie van de Landau-Stuart-vergelijking werd afgeleid.¹⁹ 'Generalisatie' in de zin dat nu ook de golflengte van de patronen niet langer 'kunstmatig' werd vastgehouden. Dit waren de auteurs, in alfabetische volgorde: DiPrima, Eckhaus, Newell, Segel, Stewartson, Stuart en Whitehead. De door hen afgeleide vergelijking, een niet-lineaire partiële differentiaalvergelijking voor een complexwaardige functie, de amplitude, heet tegenwoordig de Ginzburg-Landau-vergelijking. Overigens, net als bij Landau werd in deze artikelen het ontstaan van 'patronen' in vloeistofstromingen bestudeerd. Twee ervan²⁰ analyseerden het ontstaan van periodieke structuren in een convectieproces.²¹ Convectie treedt op als een laag vloeistof of gas van onderen af wordt verhit of aan de bovenzijde wordt

afgekoeld, zie figuur 6.

Nauwkeurige experimenten van convectieprocessen vormen nog steeds één van de belangrijkste bronnen voor de validatie en verdere ontwikkeling van een algemene theorie van 'pattern formation'.²² Daarnaast hebben deze processen een duidelijke 'praktische' relevantie: ze bepalen voor een belangrijk deel de dynamica van de atmosfeer en oceanen.²³

Het genoemde resultaat van Eckhaus over de stabiliteit van periodieke patronen of golven is vandaag de dag nog steeds een van de belangrijkste algemene resultaten over het gedrag van oplossingen van de Ginzburg-Landau-vergelijking.²⁴ Echter, Wiktor Eckhaus verkreeg dit resultaat dus zonder eerst de Ginzburg-Landau-vergelijking af te leiden, dat kwam pas zo'n vijf jaar later. Dit is zeker verwarrend en eigenlijk pas echt te begrijpen als je je verdiept in de details van deze theorie.²⁵ Er bestaan wel meer van dit soort ogenschijnlijke inconsequenties in de geschiedenis van de 'weakly nonlinear stability theory'.



Figuur 6 Periodieke rollen, of beter ringen, in een convectie-experiment. In de lichte ringen stijgt de relatief warme vloeistof, in de donkere ringen daalt de koelere vloeistof.

De naam Ginzburg-Landau-vergelijking is namelijk eigenlijk onjuist. Er bestaan ook nog eens meerdere, verschillende, Ginzburg-Landau-vergelijkingen. Zover ik weet heeft bijvoorbeeld Ginzburg zich nooit met 'niet-lineaire stabiliteit' beziggehouden. Waarom dan toch de naam Ginzburg-Landau? In 1950 schreef Landau samen met Ginzburg een artikel over een bepaald type supergeleiders.²⁶ Hierin poneerden zij een systeem van gekoppelde vergelijkingen waarmee deze supergeleiders konden worden beschreven. Deze inzichten vormen nog steeds een basis van de moderne natuurkunde van dit type supergeleiders, maar inhoudelijk hebben ze geen relatie met de bovenstaande geschiedenis. Echter, er is een onderdeel van dit systeem van vergelijkingen dat lijkt op 'onze' Ginzburg-Landau-vergelijking. Waarschijnlijk omdat er geen duidelijk alternatief was — DiPrima-Eckhaus-Newell-Segel-Stewartson-Stuart-Whitehead-vergelijking is wat lang — en omdat Landaus naam al verbonden was met deze theorie, heeft men, na enige tijd, voor deze naam gekozen. Ik zei zojuist 'onze' Ginzburg-Landau-vergelijking, omdat er een tweede, stationaire, Ginzburg-Landau-vergelijking bestaat waarvan de oorsprong wel direct terug te voeren is tot het artikel van

Ginzburg en Landau. Ook deze vergelijking staat de laatste jaren sterk in de aandacht van wiskundigen.²⁷

Het duurde even voordat het fundamentele belang van de Ginzburg-Landau-vergelijking volledig werd geapprecieerd. Voor wiskundigen was de afleiding onduidelijk, zij zagen niet in hoe deze vergelijking überhaupt 'valide' kon zijn. Wiskundig was het namelijk niet duidelijk of deze vergelijking ook werkelijk kon doen waar hij voor was afgeleid: het beschrijven van het gedrag van de 'patronen' dicht bij de bifurcatiewaarde. Experimenteel was dit ondertussen uitgebreid bevestigd,²⁸ maar de wiskundige verklaring hiervoor ontbrak aanvankelijk volledig. Het probleem zat hem hierbij in de afleidingsprocedure: net als de Landau-Stuart-vergelijking is de Ginzburg-Landau-vergelijking het eerste-orde-stuk van een grotere vergelijking. Echter, anders dan bij de Landau-Stuart-vergelijking, bevat deze grotere vergelijking uiterst singuliere termen. De wiskundige moet aantonen dat deze termen geen 'echte bijdrage' kunnen leveren.

Rond 1990 kwam de doorbraak met artikelen van Pierre Collet en Jean-Pierre Eckmann, en Aart van Harten²⁹: zij toonden voor versimpelde modelproblemen aan dat de Ginzburg-Landau-vergelijking een 'valide benadering' gaf.

Op dit moment, na bijna 10 jaar van actief onderzoek, is het validiteitsprobleem nog steeds niet in al zijn algemeenheid opgelost, maar je kan nu wel zeggen dat het hoe en het waarom van het succes van de Ginzburg-Landau-vergelijking grotendeels begrepen is.^{30,31}

De beperkingen van de Landau-Turing-theorie

De 'weakly nonlinear stability theory' of Landau-Turing-theorie is onder zeer algemene omstandigheden toepasbaar — in biologische, scheikundige en natuurkundige systemen —, is bevestigd door experimenten en heeft een solide wiskundig fundament. Toch is deze theorie maar zeer beperkt bruikbaar en kan ze zeker niet de plaats innemen van de 'embracing theory' van Turing. De reden hiervoor schuilt in het woordje 'weakly'. Dit refereert aan het feit dat deze theorie alleen geldig is in systemen waarin het 'triviale patroon' slechts een klein beetje instabiel is. Als we aan de windgolfjes denken: de windkracht mag maar een heel klein beetje groter zijn dan de kritieke waarde waaronder het wateroppervlak gewoon glad blijft. Zodra de wind iets harder blaast is deze aanpak niet langer toepasbaar.

Zelfs als we alleen aan zuiver periodieke patronen denken, bijvoorbeeld die op de schelp, dan is er geen wiskundige theorie die deze strepen kan verklaren — in de context van het reactie-diffusie-model — zodra het systeem niet meer 'bijna-kritisch' is.³²

Natuurlijk is dit bij een 'toepassing' pas een probleem als er ook andere 'patronen' worden waargenomen die niet 'geëxtrapoleerd' kunnen worden vanuit de Landau-Turing-limiet. Vanzelfsprekend is dit het geval: de zuiver periodieke patronen zijn uitzonderingen. Vandaag wil ik daarom aandacht besteden aan een zeer algemeen voorkomend verschijnsel, de zogenaamde 'defect patterns'. Ik merk hier wel bij op dat dit een keuze is: 'defect patterns' vormen maar een deel van het vakgebied 'pattern formation' en van mijn persoonlijke onderzoeksinteresses.

Een algemene theorie voor defect patterns?

In geïdealiseerde vorm zijn 'defects' singulariteiten in het onderliggende regelmatige patroon. Ook defects worden waargenomen in opmerkelijk veel verschillende contexten. In het algemeen kunnen ze niet met behulp van de Landau-Turing-theorie worden beschreven. Als we weer dicht bij huis beginnen: een prachtig voorbeeld van een defect pattern is de vingerafdruk. Het basispatroon bestaat uit parallelle maar gebo-

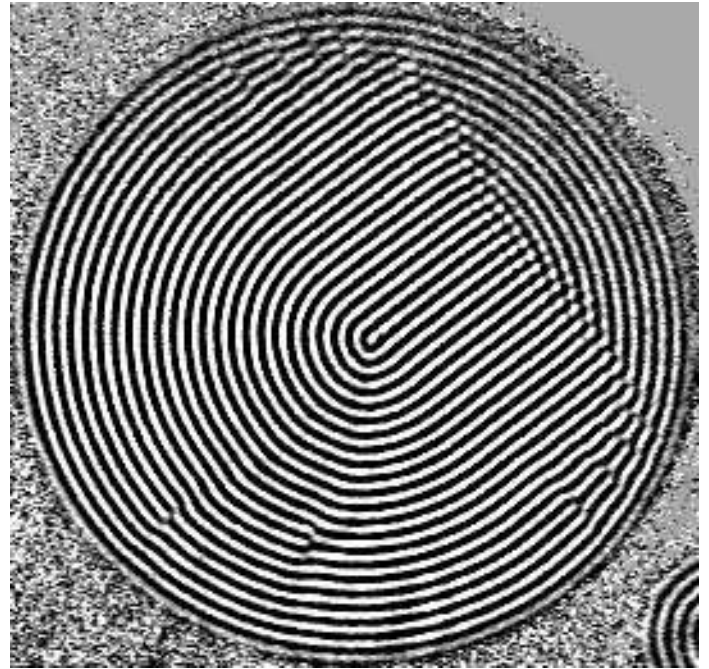
gen lijnen, de vingerafdruk krijgt zijn eigen, unieke, identiteit door de 'defects', de verstoringen van het basispatroon.^{33,34} 'Defect patterns' worden de laatste jaren in allerlei verschillende chemische reacties waargenomen, zie figuur 7.³⁵

Defects zijn bijna 'alomtegenwoordig' in de natuurkunde,³⁶ zie figuur 8. In dit kader mag het zeker niet onvermeld blijven dat er al jaren een goed ontwikkelde topologische theorie bestaat waarmee 'defects' in zogenaamde 'geordende systemen' beschreven en geclassificeerd kunnen worden.³⁷

Echter, er is op dit moment geen wiskundige theorie voor het ontstaan, de stabiliteit en de dynamica van 'defects' in continue systemen. Er bestaat wel een vooralsnog formele theorie, die van de 'phase diffusion equation', waarmee defects bestudeerd kunnen worden.³⁸ Deze theorie is nog onvolledig, bijvoorbeeld in de zin dat er nog geen inzicht is in het karakter van de hogere orde termen. Anders dan in de Landau-Turing-theorie spelen deze juist een cruciale rol, vooral in de omgeving van een defect. Met andere woorden: dezelfde soort 'uiterst singuliere' termen die de wiskundige zoveel problemen gaf in de Landau-Turing-context, moeten in het geval van de 'phase diffusion-aanpak' veel beter bestudeerd en begrepen worden, vooral omdat ze in de omgeving van een defect niet langer verwaarloosd, of meer wiskundig: afgeschat, kunnen worden.³⁹ Vooralsnog kunnen er ook alleen nog maar stationaire defects met deze 'phase diffusion-methode' worden geanalyseerd. De opzienbare observaties van zich verplaatsende defects door het patroon op de rug van de koraalvis *Pomacanthus imperator*,⁴⁰ kunnen dus wiskundig niet beschreven, laat staan geanalyseerd worden, terwijl hetzelfde gedrag kan worden waargenomen in een eenvoudig reactie-diffusie-model. Ook kan deze theorie nog niet worden toegepast op defect patterns in systemen met 'voorkeursrichtingen', terwijl dat bijvoorbeeld bijna altijd het geval is in een morfodynamische context, zie figuur 9.⁴¹

Desalniettemin is het duidelijk dat de 'phase diffusion equation' wel de potentie heeft om een fundamenteel rol, vergelijkbaar aan die van de Ginzburg-Landau-vergelijking, te gaan spelen in het onderzoeksgebied 'pattern formation', zie figuur 10.⁴²

Het is goed dat de 'phase diffusion-aanpak' deze mogelijkheden in zich heeft, want er bestaat een grote behoefte aan een wiskundig valide



Figuur 8 Een prachtig voorbeeld van een defect in een verder bijna geheel 'glad' streep patroon in een convectie-experiment. De 'kleur' geeft de relatieve temperatuur van de vloeistof aan. De gelijkenis met defect-structuren in vingerafdrukken is opvallend.

theorie die, net als de Landau-Turing-theorie, een tipje kan oplichten van de sluier die Turings *embracing theory* van niet-lineaire processen voor ons verborgen houdt. Turing had absoluut gelijk toen hij het grote belang van de *digital computer* voorspelde voor dit onderzoeksgebied. Maar, en hierbij onderschrijf ik de woorden van Philip Holmes en John Lumley in hun recente boek over turbulentie,⁴³ *'hoewel numerieke simulaties zeer nuttige benaderingen leveren, geven ze in het algemeen weinig fundamenteel inzicht'*. Juist nu er meer en meer mogelijk is met de computer wordt het duidelijk hoe belangrijk fundamenteel inzicht is: de dynamica van patronen kan zo ingewikkeld zijn dat simulaties slechts verwarren. Er is behoefte, zeker ook vanuit het gezichtspunt van de 'toepassingen', aan een nieuw 'ijkpunt' voor de numerieke simulaties en de daarop gebaseerde theorievorming. De wiskunde is bij uitstek geschikt om hier een fundamentele bijdrage aan te leveren.

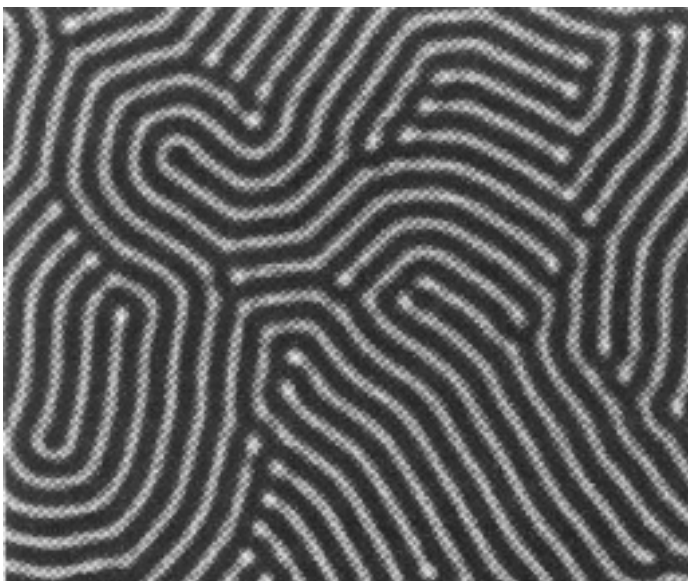
Ik zou dit hier natuurlijk niet met zoveel nadruk zeggen als ik er niet van overtuigd was dat er ontwikkelingen gaande zijn in de wiskunde die ik in staat acht zo'n nieuw 'tipje van de sluier' op te lichten. Ik verwacht dat het op termijn, bijvoorbeeld, mogelijk is fundamenteel inzicht te krijgen in de dynamica van defects in reactie-diffusie-systemen.

Ook dit zal weer een lokale theorie zijn, net als de Landau-Turing-theorie. Echter, zoals de Landau-Turing-theorie 'lokaal' is in de zin dat de patronen zich dicht bij een 'triviaal patroon' bevinden – het rimpelloze wateroppervlak in het windgolfjes-voorbeeld – zal deze nieuwe theorie patronen beschrijven die zich, in zekere zin, dicht bij een zogenaamde solitaire golf bevinden.

Solitaire golven

Ik zal u niet meer gaan vermoeien met een uitgebreide beschrijving van dit wellicht enigszins onverwachte andere deelgebied van het vakgebied 'pattern formation'. Maar iets wil ik er toch nog wel over kwijt.

Allereerst: wat is dat, een solitaire golf? Het woord zegt het al, anders dan de golven waarover we tot nu toe hebben gesproken is dit een 'gelokaliseerd' verschijnsel. Als we weer aan watergolven denken, dan is bijvoorbeeld de uit zichzelf doorlopende boeg golf van een



Figuur 7 Een defect pattern in een chemische reactie, waarbij de 'kleur' weer gerelateerd is aan een concentratie. Merk op dat er nog steeds een sterke neiging bestaat tot het vormen van periodieke strepen.



Figuur 9 De aanspoelende golven die verantwoordelijk zijn voor het ontstaan van zandribbeltjes op het strand geven het wiskundig model een duidelijke 'voorkeursrichting'.

schip een solitaire golf. Deze golven komen de laatste tijd zelfs in het nieuws: het lijkt erop dat de nieuwe 'ultra-snelle' veerboot van de Stena-lijn die tussen Hoek van Holland en Harwich vaart op deze manier een soort 'solitonen' kan genereren. Deze solitaire golven hebben al flinke schade aangericht aan de Engelse kust en zijn hoogstwaarschijnlijk verantwoordelijk voor het overlijden van een Engelse visser. Wiskundig zijn het, waarschijnlijk, oplossingen van de zogenaamde Korteweg-de Vries-vergelijking.⁴⁴ Inderdaad, dat is de vergelijking waar het onderzoeksinstituut wiskunde van deze universiteit zijn naam aan te danken heeft: Diederik Johannes Korteweg was de eerste hoogleraar wiskunde aan de Universiteit van Amsterdam, De Vries één van zijn promovendi.⁴⁵ Een bekend en belangrijk voorbeeld van een 'solitaire golf' in de biologie is het 'signaal' waarmee zenuwen bijvoorbeeld spieren aansturen. Dit proces kan gemodelleerd worden door middel van een stelsel van reactie-diffusievergelijkingen. Het signaal, een elektrische 'puls', wordt gerepresenteerd door een solitaire, lopende, golf-oplossing.⁴⁶

Deze 'gelokaliseerde structuren' zijn in zekere zin eenvoudiger te bestuderen dan de volledig periodieke en dus niet gelokaliseerde patronen. Ze corresponderen met zogenaamde homocliene of heterocliene oplossingen van gewone differentiaalvergelijkingen. Deze objecten zijn de laatste tientallen jaren uitvoerig bestudeerd en hoewel ook hier zeker geen definitieve *embracing theory* voor bestaat, zijn er een aantal zeer relevante situaties waarin de wiskunde een vrij goed beeld heeft

van het bestaan en het gedrag van een dynamisch systeem in 'een omgeving' van zo'n homocliene baan. Het woord 'omgeving' heeft hier dan zowel betrekking op de fase-ruimte als de parameter-ruimte.^{47,48,49}

Voordat je iets kan concluderen over de relevantie van zo'n homocliene baan als 'gelokaliseerd patroon' moet de stabiliteit van dit patroon als oplossing van de volledige niet-lineaire partiële differentiaalvergelijking bestudeerd worden. Immers, alleen stabiele patronen kunnen worden waargenomen in de 'praktijk', in een experiment of in een numerieke simulatie. Ook de stabiliteitsanalyse van solitaire golven is vaak 'eenvoudiger' dan die voor periodieke patronen.⁵⁰ Dit betekent overigens niet dat deze stabiliteitsanalyse echt simpel is, integendeel. Zelfs in het meest versimpelde model voor de geleiding door een zenuw, de FitzHugh-Nagumo-vergelijking, was het lange tijd niet mogelijk om te laten zien dat de homocliene baan die de elektrische puls beschrijft ook werkelijk stabiel kon zijn. Chris Jones slaagde daar in 1984 in.⁵¹ De soliton, de solitaire-golfoplossing van de Korteweg-de Vries-vergelijking, heeft zelfs bijna 100, om precies te zijn 99, jaar moeten wachten op het definitieve stabiliteitsresultaat van Robert Pego en Michael Weinstein in 1994.⁵² Deze, en andere, bewijzen waren constructief, in de zin dat de stabiliteitstheorie voor 'gelokaliseerde patronen' zich mede door deze resultaten de laatste 15 jaar zeer sterk heeft kunnen ontwikkelen. Dit leidde, bijvoorbeeld, tot ontwikkeling van de zogenaamde 'stability index', een topologisch begrip dat gebruikt kan worden in algemene klassen van stabiliteitsproblemen.⁵³ Ook deze stabiliteitstheorie heeft uitermate geprofiteerd van de interactie met vragen uit biologische, scheikundige en natuurkundige toepassingen over concrete systemen.⁵⁴

Solitaire golven, streppatronen en defects

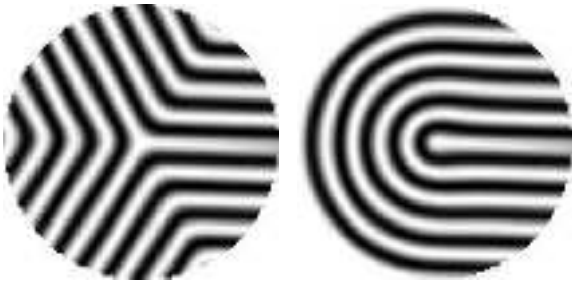
Maar wat hebben deze 'gelokaliseerde patronen' te maken met de voorgaande, duidelijk niet gelokaliseerde patronen?

Het antwoord op deze vraag is aan de ene kant heel simpel, aan de andere kant ga ik ervan uit dat ik daar, samen met anderen, de komende jaren nog aan zal werken.

Hier is het 'simpele' antwoord: vooral in reactie-diffusievergelijkingen hebben de streppatronen in de dwarsdoorsnede opvallend vaak een structuur die lijkt op die van een groot aantal 'kopieën' van een solitaire golf.⁵⁵ Dit betekent dat men gebruik kan maken van de zojuist genoemde inzichten in 'de omgeving' van een homocliene baan.⁵⁶ Met behulp van de zeer recente inzichten van Robert Gardner⁵⁷ kan ook het stabiliteitsprobleem voor het periodieke, bijna-homocliene, patroon gekoppeld worden aan dat van de solitaire golf. Op deze manier kan het zo noodzakelijke fundamentele inzicht in het bestaan, de stabiliteit en de dynamica van 'streppatronen' ontwikkeld worden. Op basis hiervan kunnen, aan de hand van de ideeën die ten grondslag liggen aan de phase diffusion-methode, de singulariteiten, ofwel: de defects, in de streppatronen worden geanalyseerd. Zo wordt het dus mogelijk om een wiskundige theorie voor al dan niet bewegende defect patterns vorm te geven.⁵⁸ Er is nog veel werk te doen, maar zoals gezegd, ik verwacht dat aan de hand van al deze recente ontwikkelingen een nieuw venster kan worden geopend waardoor men iets minder verbaasd, maar nog even gefascineerd, kan kijken naar de dynamische wereld van 'pattern formation'.

De interactie tussen wiskunde en andere vakgebieden

Ik hoop dat ik er met deze schets van een aspect van het onderzoeksgebied 'pattern formation' tevens in geslaagd ben u duidelijk te maken dat de wiskunde het niet alleen af kan binnen dit vakgebied. De voorbeelden die ik u heb laten zien kunnen niet gezien worden als 'toe-



Figuur 10 Twee 'geïdealiseerde' defecten in een numerieke simulatie van de zogenaamde geregulariseerde phase diffusion-vergelijking. Ook deze structuren zijn, in minder geïdealiseerde vorm, terug te vinden in vingerafdrukken.

passingen' van een bestaande, of wellicht nog in ontwikkeling zijnde, wiskundige theorie. Het is waarschijnlijk niet overdreven te stellen dat alle wiskunde waar ik het vandaag over heb gehad, niet zou hebben bestaan zonder de vragen die geformuleerd werden in bijvoorbeeld de biologische, of hydrodynamische context.

Ik sluit mij in dit kader volledig aan bij mijn collega Peter Sloot die in zijn rede dit voorjaar stelde: *'Het is juist een gezonde combinatie van theorie, experiment en simulatie die ons verder helpt de natuur te doorgronden'*.⁵⁹ Natuurlijk heb ik, bij het verhaal van zojuist, de wiskundige, theoretische, aspecten van het onderzoeksgebied benadrukt. Dat is, naar mijn mening, één van de belangrijkste 'functies' van de wiskunde binnen het vakgebied pattern formation, en misschien wel van toegepaste wiskunde in het algemeen: het 'distilleren' van relevante wiskundige vragen uit de veelheid van fenomenen die worden waargenomen, om aan de hand daarvan een theorie op te stellen die de oorspronkelijke motivatie overstijgt. Met 'overstijgen' bedoel ik dat er sprake zal zijn van een algemene geldigheid, zoals bijvoorbeeld duidelijk het geval is bij de Landau-Turing-theorie: deze theorie is toepasbaar ver buiten de oorspronkelijke probleemstellingen waar Landau en Turing aan dachten.

Echter, er schuilt hierin een gevaar, en ik haal hiervoor de woorden aan van Giovanni Seminara, in de inleiding van een overzichtsartikel over rivier-morfodynamica: *'The applied mathematician is then warned that it is dangerous to build skyscrapers on weak foundations'*.⁶⁰ En dat is inderdaad een reëel gevaar: zonder op z'n minst voor een gedeelte van de onderzoekstijd aan concrete 'toegepaste' vragen te werken loopt de wiskundige de kans dat hij of zij zich gaat bezighouden met het ontwikkelen van wiskundige bouwwerken die nauwelijks relevant zijn vanuit het standpunt van een 'toepassingsgebied'. Let wel, dit werk kan van zeer hoog wiskundig kaliber zijn en dus vanuit wiskundig oogpunt juist uiterst relevant zijn. Dit is vanzelfsprekend ook een subjectieve kwestie: van veel van de vandaag besproken wiskunde kan gezegd worden dat het in deze categorie thuishoort. Dat neemt niet weg dat het, naar mijn mening, van essentieel belang is voor een wiskundige die aan 'pattern formation' werkt om ook aan concrete 'toegepaste' projecten te werken: de wiskunde alleen geeft, over het algemeen, een te geïdealiseerd beeld van het vakgebied. Het is dan wel noodzakelijk dat de wiskundige nauw samenwerkt met één of meerdere collega's met andere specialisaties. In zo'n samenwerking kunnen theorie, simulatie en praktijk samenkomen om 'de natuur te doorgronden'. Deze samenwerking zal, zonder twijfel, ook nieuwe wiskundige inzichten opleveren, het komt in mijn ervaring hoogst zelden voor dat er gebruik gemaakt kan worden van 'pasklare' wiskunde.

Voor ik de overstap maak naar een ander onderwerp wil ik nog kort de veelgehoorde uitspraak *'de twintigste eeuw was de eeuw van de natuurkunde, de eenentwintigste eeuw wordt de eeuw van de biologie'*⁶¹ aanhalen. Ik ga liever niet in op de vraag of dit wel zo is, of, of je

überhaupt wel zo'n uitspraak kan doen. Ik hoop dat ik met het verhaal over 'patterns' heb aangetoond dat er voor de wiskunde, ook in dit licht, voldoende reden is om optimistisch te zijn over de toekomst: het belang van de wiskunde in de wetenschapsbeoefening zal de komende eeuw waarschijnlijk alleen maar groter worden.

De wiskunde in Nederland

Gewapend met dit optimisme kan ik de overstap maken naar de problemen rond de wiskunde, of meer in het algemeen de 'harde' bèta-wetenschappen, in Nederland. Er is sprake van een bijna paradoxale situatie. Aan de ene kant staat de schrikbarende lage instroom van wiskundestudenten aan de Nederlandse universiteiten. Dit is al enige jaren geen nieuws meer en het ziet er ook niet naar uit dat hier op de korte termijn verandering in zal komen.⁶² Aan de andere kant staat het zojuist geconstateerde, en alom geaccepteerde, groeiende belang van de wetenschap wiskunde als, op zijn minst, ondersteunende discipline in een toenemend aantal gebieden,⁶³ en laten we dat niet vergeten, de sterke ontwikkeling die de wiskunde zelf doormaakt. Tevens is daar het maatschappelijke probleem van het steeds nijpendere wordende tekort aan wiskunde-docenten op middelbare scholen.⁶⁴ Er is meer aan de hand: tegenover de dreiging van al of niet opgelegde reorganisaties of samenvoegingen van universitaire wiskunde-instituten⁶⁵ staat de constatering dat er de komende tien jaar zoveel vacatures zullen ontstaan aan deze instituten⁶⁶ dat het de vraag is of er wel voldoende capabele kandidaten zullen zijn om de opengevallen posities in te nemen. Het niet opvullen van een structureel gedeelte van deze posities is geen serieuze optie, al was het alleen maar omdat het aantal onderwijstaken de laatste jaren eerder toe- dan afgenomen is, en dat het onwaarschijnlijk is dat deze tendens zal omslaan in de komende tijd.

Er wordt door allerlei instanties nagedacht over de problematiek rond de 'harde' bèta-vakken. Zoals ik al zei: dit alles is al enige jaren geen nieuws meer. Maar, dat doet natuurlijk niets af aan de relevantie van deze uiterst gecompliceerde kwestie voor de wiskunde in Nederland. Ik wil hier alleen kort ingaan op één van de aspecten van deze kwestie, omdat ik denk dat het belang hiervan door velen sterk onderschat wordt. Ik hecht er ook persoonlijk veel waarde aan, zoals, naar ik hoop, deze rede al enigszins duidelijk heeft gemaakt. Ik doel hier op het universitaire wiskunde-onderwijs als service-onderwijs voor andere opleidingen, en kan hiervoor letterlijk een advies oplezen uit de recent verschenen verkenning *De toekomst van het wiskunde-onderzoek in Nederland* van de Koninklijke Nederlandse Academie van Wetenschappen: *'Het service-onderwijs wiskunde dient te worden gegeven door wiskundigen die bij het wiskunde-onderzoek betrokken zijn'*.⁶⁷

De verleiding bestaat om het hierbij te laten: duidelijker kan het niet gezegd worden. Ik hoop dat ik ook met deze rede ondersteuning heb gegeven voor één van de belangrijkste argumenten voor dit advies. Anders dan de meeste mensen denken is wiskunde een uiterst dynamisch vak,⁶⁸ dit geldt in het bijzonder voor de wiskunde die in contact staat met andere disciplines. Juist nu het belang van dit vak in allerlei vakgebieden zo sterk toeneemt, kan en mag je het, bij opleidingen op universitair niveau, niet in z'n geheel overlaten aan docenten die niet op de een of andere wijze een band hebben met deze onderzoeksdynamica. In dit kader is het dan ook bijvoorbeeld uiterst betreurenswaardig dat het nog steeds voorkomt aan Nederlandse universiteiten dat faculteiten op louter financiële gronden besluiten om zelf het wiskunde-onderwijs te gaan verzorgen.

Dames en heren studenten, degenen onder u die wiskunde studeren zal bij het lezen van de krant soms het gevoel bekruipen dat u tot een

uitstervend ras behoort. Zoals u zelf maar al te goed weet is daar natuurlijk absoluut geen sprake van. De zojuist genoemde problematiek wordt soms zo vervormd, dat het lijkt dat u per persoon zou moeten kunnen beschikken over u eigen privé-hoogleraar, of deze hoogstens met één of twee medestudenten moet delen.⁶⁹ Toch lijkt het er soms op dat u, net als de meeste studenten die wiskunde-colleges volgen,

uw mogelijke invloed op het door u genoten onderwijs onderschat. Dit is overigens niet iets van de laatste tijd. Lesgeven in de wiskunde is een van de mooiste aspecten van mijn aanstelling aan deze universiteit, meer directe interactie met u als 'afnemers' zal mijn en, naar ik verwacht, uw plezier alleen maar vergroten.

Noten

- Zie bijvoorbeeld de recente uitgave *Wiskunde. Wetenschap van patronen en structuren* van K. Devlin (Beek: Natuur en Techniek, 1998), vertaald door Jan van der Craats.
- Precieser: oplossingen van parabolische partiële differentiaalvergelijkingen die gedefinieerd zijn op onbegrensde, cilindervormige gebieden. 'Praktisch' betekent dit dat de grootte-orde van de patronen veel kleiner is dan die van het domein waarop deze 'patterns' worden waargenomen. Dit impliceert ook dat de randvoorwaarden geen beslissende invloed hebben op de structuur en stabiliteit van de 'patterns'.
- Deze aanpak van het 'windgolfjesprobleem' is gekozen in 'On the generation of waves by wind' van P.J. Blennerhassett, *Proc. Roy. Soc. London A*, **298**, pp. 451-494 (1980).
- H. Meinhardt baseerde dit op een algemeen lezerspubliek gerichte boek (Springer Verlag, 1995) op resultaten van zo'n twintig jaar onderzoek (van hem en vele anderen, onder wie A. Gierer) op het gebied van biologische 'pattern formation'.
- A. Turing, 'The chemical basis of morphogenesis', *Phil. Trans. Roy. Soc. London B*, **237**, pp. 37-72 (1952).
- Dat de wiskunde een belangrijke rol speelt in de biologie wordt op een zeer overtuigende wijze betoogd door Ian Stewart in *Life's Other Secret* (Penguin Press, 1998). De wisselwerking tussen de genen en natuurkundige/wiskundige processen wordt hierin ook uitgebreid bediscussieerd.
- Zie het proefschrift van Ralph Schielen, *Nonlinear Stability Analysis and Pattern Formation in Morphological Models* (Utrecht, 1995), voor de analyse van zandbanken in rivieren.
- Zandbanken in zeegaten worden bestudeerd in Henk Schuttelaars' proefschrift *Evolution and Stability Analysis of Bottom Patterns in Tidal Embayments* (Utrecht, 1997). Merk op dat het wiskundige karakter van dit probleem door de aanwezigheid van getij a priori heel anders is dan voor rivieren.
- Zie 5.
- Zie deel I van *Mathematical Biophysics. Physico-Mathematical Foundations of Biology* (2 delen) van N. Rasheski, eerste editie 1938, heruitgegeven in 1960 door Dover Publications.
- Zie de biografie *Alan Turing – The Enigma* van A. Hodges (Burnett Books, 1983).
- Zie de inleiding in deel IV van Turing's *Collected Works, Morphogenesis* (Elsevier, 1992) door P.T. Saunders.
- Zie V. Castets, E. Dulos, J. Boissonade en P. De Kepper, 'Experimental evidence of a sustained standing Turing-type nonequilibrium chemical pattern', *Phys. Rev. Lett.*, **64**, pp. 2953-2956 (1990), en voor meer achtergrondinformatie J. Boissonade, E. Dulos en P. De Kepper, 'Turing patterns: from myth to reality', pp. 221-268 in *Chemical Waves and Patterns*, R. Kapral en K. Showalter (eds) (Kluwer, 1995). Na deze ontdekking heeft het scheikundig onderzoek aan 'pattern formation' een grote vlucht genomen, zie bijvoorbeeld ook A. de Wit, 'Spatial patterns and spatiotemporal dynamics in chemical systems', *Adv. Chem. Phys.*, **109**, pp. 435-513 (1999).
- 'On the problem of turbulence', artikel 52 in *The Collected Papers of Landau*, D. ter Haar, editor (Pergamon, 1965), oorspronkelijk verschenen in *C. R. Acad. Sc. URSS*, **44**, 1944.
- D. Ruelle en F. Takens, 'On the nature of turbulence', *Comm. Math. Phys.*, **20**, pp. 167-192 (1971).
- In 2 bij elkaar horende artikelen:
– J.T. Stuart 'On the non-linear mechanics of wave disturbances in stable and unstable parallel flows. I: The basic behaviour in plane Poiseuille flow', *J. Fluid Dyn.*, **9**, pp. 353-370, (1960);
– J. Watson, 'On the non-linear mechanics of wave disturbances in stable and unstable parallel flows. II: The development of a solution for plane Poiseuille flow and for plane Couette flow', *J. Fluid Mech.*, **9**, pp. 371-389 (1960).
- Zie bijvoorbeeld J. E. Marsden en M. McCracken, *The Hopf Bifurcation and its Applications*, Applied Mathematical Sciences **19**, Springer (1976).
- Zie W. Eckhaus, *Studies in Non-Linear Stability Theory*, Springer Tracts in Natural Philosophy **6** (1965). De resultaten waren gebaseerd op drie artikelen:
– W. Eckhaus, 'Problèmes non linéaires dans la théorie de la stabilité', *J. Mécanique*, **1**, pp. 49-77 (1962);
– W. Eckhaus, 'Problèmes non linéaires de stabilité dans un espace à deux dimensions. I: Solutions périodiques', *J. Mécanique*, **1**, pp. 413-438 (1962);
– W. Eckhaus, 'Problèmes non linéaires de stabilité dans un espace à deux dimensions. II: Stabilité des solutions périodiques', *J. Mécanique*, **2**, pp. 153-172 (1963).
- L.A. Segel, 'Distant side-walls cause slow amplitude modulation of cellular convection', *J. Fluid Mech.*, **38**, pp. 203-224 (1969).
– A.C. Newell en J.A. Whitehead, 'Finite bandwidth, finite amplitude convection' *J. Fluid Mech.*, **38**, pp. 279-304 (1969);
– K. Stewartson en J.T. Stuart, 'A non-linear instability theory for a wave system in plane Poiseuille flow', *J. Fluid Mech.*, **48**, pp. 529-545 (1971);
– R.C. DiPrima, W. Eckhaus en L.A. Segel, 'Non-linear wave-number interaction in near-critical two-dimensional flows', *J. Fluid Mech.*, **49**, pp. 705-744 (1971).
- De artikelen van Segel, en Newell en Whitehead.
- Opgemerkt dient te worden dat deze artikelen het (zwak) niet-lineaire karakter van een convectieprobleem bestudeerden. Lord Rayleigh bestudeerde al in 1916 de lineaire aspecten van het ontstaan van convectie-patronen in 'On convective currents in a horizontal layer of fluid, when the higher temperature is on the under side', *Philos. Mag.*, **32**, pp. 529-546 (1916).
- Zie bijvoorbeeld P.G. Drazin en W.H. Reid, *Hydrodynamic Stability* (Cambridge University Press, 1981).
- Het is tevens een voorbeeld van een aan beide kanten opmerkelijk vruchtbare wisselwerking tussen de wiskunde en 'een toepassing'. De meteoroloog E.N. Lorenz leidde in 'Deterministic, non-periodic flow', *J. Atmos. Sc.*, **20**, pp. 130-141 (1963), een zeer grove benadering af van een volledig niet-lineair convectieproces: een drie-dimensionaal systeem dat nu bekend staat als het Lorenz-systeem. Lorenz laat hierin tevens, met behulp van computersimulaties, zien dat dit systeem een zogenaamde 'chaotische attractor' kan hebben. Dit is één van de eerste voorbeelden van een (continu) dynamisch systeem met 'chaotisch' gedrag en is daarom zeer belangrijk geweest voor de ontwikkeling van de theorie van dynamische systemen.
- Voor de Ginzburg-Landau-vergelijking als evolutievergelijking op een onbegrensd gebied, zie noot 27.
- In dit kader is het opvallend om te constateren dat de (zeer recente) rigoreuze bewijzen van het zogenaamde 'Eckhaus instability criterion' in algemene 'bijna-kritische' systemen ook weer geen expliciet gebruik maken van de Ginzburg-Landau benadering. Zie G. Schneider, 'Nonlinear stability of Taylor vortices in infinite cylinders', *Arch. Rat. Mech. Anal.*, **144**, pp. 121-200 (1998).
- 'On the theory of superconductivity' door V.L. Ginzburg en L.D. Landau, artikel 73 in *The Collected Papers of Landau*, zie noot 13, oorspronkelijk verschenen in *JETP*, **20**, 1950.
- Veel van hetgeen bekend is over de oplossingen van de stationaire (en dus elliptische) reële Ginzburg-Landau-vergelijking op begrensde gebieden is te vinden in *Ginzburg-Landau Vortices* van F. Bethuel, H. Brezis en F. Hélein (Birkhäuser, 1994). 'Reëel' refereert hier aan de coëfficiënten van de vergelijking. In dit geval heeft de vergelijking een variationele structuur. De Ginzburg-Landau-vergelijking die afgeleid wordt in de 'weakly nonlinear stability theory' heeft in het algemeen complexe coëfficiënten (en dus geen variationele structuur).
- Zie noot 22.
- P. Collet en J.-P. Eckmann, 'The time-dependent amplitude equation for the Swift-Hohenberg problem', *Comm. Math. Phys.*, **132**, pp. 139-153 (1990);
– A. van Harten, 'On the validity of the Ginzburg-Landau's equation', *J. Nonlinear Sc.*, **1**, pp. 397-422 (1991).
- Zie G. Schneider, 'Global existence via Ginzburg-Landau formalism and pseudo-orbits of the Ginzburg-Landau approximations', *Comm. Math. Phys.*, **164**, 159-179 (1994), en de referenties in dit artikel, om een indruk te krijgen van de aard en algemeenheid van de validiteitsresultaten.
- Daarentegen is er bijvoorbeeld nog onvoldoende inzicht in het karakter van de modulatievergelijking, en dus ook de validiteit, in de omgeving van co-dimensie 2 punten. Zie bijvoorbeeld het proefschrift *Co-dimension 2 Phenomena in Pattern Formation* (Utrecht, 1998) van Vivi Rottschäfer.
- Alleen al het wiskundige existentieprobleem vertaalt zich in het simpelste geval in het probleem van het vinden van een periodieke baan in een gewone differentiaalvergelijking, meestal van dimensie vier of meer. Zelfs voor twee-dimensionale systemen, waar het probleem topologisch gezien significant eenvoudiger is, is dit in z'n algemeenheid een onopgelost probleem. Als men zich wederom beperkt tot polynomiale vectorvelden is er veel bekend, maar is het zeker niet opgelost. Het staat in deze vorm bekend als nummer 16 van de 23 in het jaar 1900 door David Hilbert geformuleerde 'toekomstige problemen van de wiskunde'. In de gevallen dat er wel een existentieresultaat bestaat levert de stabiliteitsanalyse in het algemeen onoverkomelijke problemen op (behalve in een heel klein aantal modelproblemen, zoals de complexe Swift-Hohenberg vergelijking, zie de artikelen genoemd bij noot 38).

- 33 Zie Hoofdstuk 17 in *Mathematical Biology* van J.D. Murray, Springer Biomathematics Texts, **19** (1989), voor een 'mechano-chemisch mechanisme' dat het ontstaan van dit soort 'dermatoglyfische patronen' modelleert (de relevante bifurcatie is weer van het Landau-Turing-type).
- 34 De 'topologie' van defects in vingerafdrukpatronen wordt op een zeer leesbare manier beschreven door R. Penrose in 'The topology of ridge systems', *Ann. Hum. Genet., Lond*, **42**, pp. 435–444 (1979).
- 35 Zie de twee laatste artikelen in noot 13.
- 36 Zie bijvoorbeeld de volgende twee review-artikelen voor een opsomming:
– N. D. Mermin, 'The topological theory of defects in ordered media', *Rev. Modern Phys*, **51**, pp. 591–647 (1979);
– A.C. Newell, T. Passot en J. Lega, 'Order parameter equations for patterns', *Ann. Rev. Fluid Mech*, **25**, pp. 399–453 (1993).
- 37 Zie het artikel van Mermin bij noot 36.
- 38 Zie onder andere het artikel van Newell et al. bij noot 36 en:
– T. Passot, A.C. Newell, 'Towards a universal theory for natural patterns', *Physica D*, **74**, pp. 301–352 (1994);
– N. Ercolani, A.C. Newell, en T. Passot, 'The geometry of the phase diffusion equation', te verschijnen in *J. Nonlinear Sc* (1999).
- 39 De diffusie-coëfficiënt van de fase diffusie-vergelijking verandert van teken in de omgeving van een defect. Hogere, vierde orde, afgeleiden zijn dan noodzakelijk om het gedrag van de oplossingen in de omgeving van een defect te reguleren (deze termen zijn wel 'klein' buiten de directe omgeving van een defect). Echter, vooralsnog worden deze vierde orde afgeleiden 'met de hand' toegevoegd, i.e. ze worden niet afgeleid uit het onderliggende systeem. Verder is deze theorie bijvoorbeeld gebaseerd op het uitgangspunt dat men een volledig (kwalitatief en kwantitatief) inzicht heeft in het gelineariseerde stabiliteitsprobleem rond het periodieke basispatroon, hetgeen zeer zelden het geval is, zie noot 32. Juist om die reden is men er nog niet in geslaagd een goed inzicht in het gedrag van de hogere orde termen te krijgen.
- 40 Zie S. Kondo, R. Asai, 'A reaction-diffusion wave on the skin of the marine angelfish *Pomacanthus*', *Nature*, **376**, pp. 765–768 (1995).
- 41 De 'phase diffusion-aanpak' neemt aan dat het systeem invariant is onder translaties en orthogonale transformaties. Deze laatste symmetrie wordt bijvoorbeeld verbroken, zodra er sprake is van een 'netto-transport' in een zekere richting. In morfodynamische systemen wordt dit 'netto-transport' bijvoorbeeld veroorzaakt door de getijdestroom.
- 42 Zie het artikel van Ercolani et al. in noot 38.
- 43 P. Holmes, J.L. Lumley en G. Berkooz, *Turbulence, Coherent Structures, Dynamical Systems and Symmetry* (Cambridge University Press, 1996).
- 44 Zie het artikel 'Solitary killers', pp. 18–19 in de *New Scientist* van 28 augustus 1999. Er is nog geen solide basis voor het geponeerde soliton-karakter van deze golven, echter, het gedrag van deze golven lijkt sterk op dat van 'tsunami's', solitaire golven veroorzaakt door zeebevingen. Tsunami's kunnen gemodelleerd worden als soliton-oplossingen van een Korteweg-de Vries-vergelijking.
- 45 Zie de web-site 'http://turing.wins.uva.nl/~janwieg/korteweg/index.html' voor uitgebreide informatie over Korteweg en de Korteweg-de Vries-vergelijking.
- 46 Het meest eenvoudig model hiervoor is de FitzHugh-Nagumo-vergelijking, een simplificatie van de zogenaamde Hodgkin-Huxley-vergelijkingen, zie:
– R. FitzHugh, 'Impulses and physiological states in theoretical models of nerve membranes', *Biophys. J.*, **1**, pp. 445–466 (1961);
– J. Nagumo, S. Arimoto en S. Yoshizawa, 'An active pulse transmission line simulating nerve axons', *Proc IRL*, **50**, pp. 2061–2070 (1960).
- 47 Een standaard-, maar natuurlijk ondertussen enigszins verouderd tekstboek, waarin een aantal fundamentele voorbeelden van globale bifurcaties (i.e. het gedrag in de omgeving van een homocliene baan) aan de orde komen is *Nonlinear Oscillations, Dynamical Systems, and Bifurcations of Vector Fields*, Applied Mathematical Sciences **42** (Springer, 1983) van J. Guckenheimer en P. Holmes.
- 48 Vooral als het vectorveld een zogenaamde 'slow-fast-structuur' heeft is de 'geometric singular perturbation theory' een sterk 'gereedschap' waarmee homocliene en bijna-homocliene structuren kunnen worden bestudeerd, zie C.K.R.T. Jones, 'Geometric Singular Perturbation Theory', in *Dynamical systems, Montecatini Terme, 1994*, Lecture Notes in Mathematics **1609**, R. Johnson (ed.) (Springer, 1995). In combinatie met hoofdzakelijk topologische argumenten kan dan een zeer expliciet beeld van de enorme rijkdom aan dit soort structuren worden verkregen, zie bijvoorbeeld G. Hek, A. Doelman en P. Holmes, 'Homoclinic saddle-node bifurcations and subshifts in a three-dimensional flow', *Arch. Rat. Mech. Anal*, **145**, pp. 291–329 (1998).
- 49 Het is wellicht passend om hier op te merken dat in de weinige gevallen dat een verschijnsel als 'chaos' in een continu dynamisch systeem als wiskundig fenomeen kan worden begrepen dat bijna zonder uitzondering gaat in termen van (verstoorte) homocliene of heterocliene connecties, zie bijvoorbeeld het boek van Guckenheimer en Holmes bij noot 47.
- 50 Het gelineariseerde stabiliteitsprobleem reduceert tot een lineaire vergelijking met constante coëfficiënten op plus of min oneindig. Als gevolg hiervan valt het spectrum in parabolische systemen (onder zekere voorwaarden) uiteen in een eenvoudig te controleren 'continu' stuk en een eindig aantal discrete eigenwaarden. Zie bijvoorbeeld D. Henry, *Geometric Theory of Semilinear Parabolic Equations*, Lecture Notes in Mathematics **840** (Springer, 1981).
- 51 C.K.R.T. Jones, 'Stability of the travelling wave solution of the FitzHugh-Nagumo system', *Trans. AMS*, **286**, pp. 431–469 (1984).
- 52 R.L. Pego, M.I. Weinstein, 'Asymptotic stability of solitary waves', *Comm. Math. Phys*, **164**, pp. 305–349 (1994). Het artikel van D.J. Korteweg en G. de Vries, 'On the change of form of long waves advancing in a rectangular canal, and a new type of long stationary waves', verscheen in 1895 (in *Philos. Mag*, **39**, pp. 422–443).
- 53 J. Alexander, R. A. Gardner en C.K.R.T. Jones, 'A topological invariant arising in the stability of traveling waves', *J. Reine Angew. Math*, **410**, pp. 167–212 (1990).
- 54 Zie bijvoorbeeld:
– T. Kapitula en B. Sandstede, 'Stability of bright solitary-wave solutions to perturbed nonlinear Schrödinger equations', *Physica D* **124** pp. 58–103 (1998).
– A. Doelman, R.A. Gardner en T.J. Kaper, 'A stability index analysis of 1-D patterns of the Gray-Scott model' te verschijnen in *Memoirs AMS* (2000).
- 55 Zie bijvoorbeeld:
– A. Doelman, T.J. Kaper en P. Zegeling, 'Pattern formation in the one-dimensional Gray-Scott model', *Nonlinearity*, **10**, pp. 523–563 (1997);
– W.-M. Ni, 'Diffusion, cross-diffusion, and their spike-layer steady states', *Notices AMS*, **45**, pp. 9–18 (1998).
- 56 Een belangrijk voorbeeld is natuurlijk het bestaan van periodieke banen met een 'bijna-homocliene' structuur bij een Silnikov bifurcatie, zie noot 47. Als het systeem singulier gestoord is bestaan er ook vele andere periodieke banen van dit type, zie bijvoorbeeld het eerste artikel bij noot 55.
- 57 R. A. Gardner, 'Spectral analysis of long wavelength periodic waves and applications', *J. Reine Angew. Math*, **491** pp. 149–181 (1997).
- 58 Tot nu toe is de 'phase diffusion-aanpak' alleen toegepast op systemen met een variatiele structuur. Deze structuur wordt 'geërfd' door de phase diffusion-vergelijking. Als gevolg hiervan kan men aantonen dat de 'singulairiteiten' stationair moeten zijn. Een reactie-diffusie-vergelijking heeft in het algemeen geen variatiele structuur.
- 59 Peter Sloot in *De som der delen*, rede uitgesproken op 18 februari 1999 bij aanvaarding van het ambt van bijzonder hoogleraar in de Numerieke Natuurkunde aan de Universiteit van Amsterdam.
- 60 G. Seminara, 'Invitation to river morphodynamics', pp. 269–294 in *Nonlinear Dynamics and Pattern Formation in the Natural Environment*, A. Doelman, A. van Harten (eds), Pitman Research Notes in Mathematics **335** (1995).
- 61 Zie bijvoorbeeld 'An Interview with Professor Sir Christopher Zeeman' in *Newsletter Eur. Math. Soc*, **30**, pp. 14–19 (1998).
- 62 Zie *De toekomst van het wiskunde-onderzoek in Nederland*, Verkenningen, deel I, van de Koninklijke Nederlandse Academie van Wetenschappen (1999).
- 63 Zie *Vitaliteit en kritische massa. Strategie voor de natuur- en technische wetenschappen*, Adviesraad voor het Wetenschaps- en Technologiebeleid, **41** (1999).
- 64 Zie noot 63.
- 65 Zie noot 63.
- 66 Volgens bijlage 7 van het KNAW-rapport genoemd bij noot 62 zijn er in 1999 in totaal 86 gewoon hoogleraren wiskunde in Nederland, 47 hiervan zijn 56 jaar of ouder.
- 67 Advies B2 op pagina 30 van het KNAW-rapport genoemd bij noot 62.
- 68 Zie ook de dies-rede van Wiktor Eckhaus van 3 april 1989, *Wiskunde van de chaos*, Universiteit Utrecht.
- 69 Naar aanleiding van de in het AWT-rapport (noot 63) berekende verhoudingen tussen het aantal hoogleraren en de instroom van eerstejaarsstudenten.

Herkomst van de illustraties

Figuur 1 en 6: *An album of fluid motion*. Stanford, CA USA: The Parabolic Press, 1982.

Figuur 2: Hans Meinhardt, *The algorithmic beauty of sea shells*, 2nd edition. Berlin-Heidelberg: Springer-Verlag, 1998.

Figuur 3: Paul D. Komar, *Beach processes and sedimentation*. Upper Saddle River, NJ USA: Prentice Hall Inc, 1998.

Figuur 4: John R.L. Allen, *Sedimentary Structures. Their characters and physical basis*, volume II. Amsterdam: Elsevier Scientific Publishing Company, 1982.

Figuur 5 en 7: Raymond Kapral and Kenneth Showalter (Editors), *Chemical waves and patterns*. Dordrecht: Kluwer Academic Publishers, 1995.

Figuur 8: E. Bodenschatz and B. Plapp (private communication).

Figuur 9: The Oceanography Course Team, *Waves, tides and shallow-water processes*. Oxford, UK: Pergamon Press Inc, 1989.

Figuur 10: N.M. Ercolani, R. Indik, A.C. Newell and T. Passot, *The geometry of the phase diffusion equation*. Te verschijnen in: *Journal of Nonlinear Science*, Springer-Verlag.

F. Takens

Department of Mathematics and Computer Science, Groningen University

Postbus 800, 9700 AV Groningen

f.takens@math.rug.nl

Laudatio for David Ruelle

Op 20 april 1999 werd in de Aula van het Academieggebouw te Groningen de achtste Bernoulli-lezing gehouden. Spreker was de mathematisch fysicus David Ruelle uit het Institut des Hautes Etudes Scientifiques te Bures-sur-Yvette nabij Parijs. Ruelle is onder meer beroemd door het wiskundige formalisme dat hij voor de Thermodynamica gaf. Dit formalisme is ook van groot belang voor de theorie van Dynamische Systemen. Samen met Floris Takens schreef Ruelle in 1971 een baanbrekend artikel getiteld *On the nature of turbulence*, in de *Communications of Mathematical Physics*.

Hieronder staat de op 20 april door Floris Takens uitgesproken laudatio voor David Ruelle. Daarna volgt de tekst van Ruelle's Bernoulli-lezing. Op de dag van de lezing werd door Henk Broer een inleiding voor leraren gehouden over dynamische systemen en chaostheorie, het gebied waarop de banden tussen Ruelle en Groningen het nauwst zijn. Onder de titel *The how and what of chaos* is een uitwerking van deze inleiding opgenomen na Ruelle's lezing.

It is a pleasure for me to introduce to you David Ruelle who will give the Johann Bernoulli lecture for the academic year 1998 - 1999.

David Ruelle was born in Ghent (1935), he studied civil engineering in Bergen (Mons) and mathematics and physics in Brussels. He prepared his Ph.D. thesis under the supervision of professor Jost of the Eidgenössische Technische Hochschule (E.T.H.) in Zürich, leading to a doctorate in physics, on quantum field theory, in 1959 at the university of Brussels. After this he worked as a visiting researcher at the E.T.H. and was during two years a member of the Institute of Advanced Studies in Princeton. Since 1964 he is a professor at the Institut des Hautes Études Scientifiques in Bures-sur-Yvette (France).

This institution is not part of a university and is not devoted to industrial research: it is dedicated to the pursuit of pure science. This situation, which may now seem archaic to some, could be maintained through the extremely high quality and international recognition of the research at this institution.

The work of Ruelle belongs to the area often denoted as mathematical physics, and more in particular, statistical mechanics and-

non-linear dynamics (or chaos theory).

His work, in the sixties, was devoted to statistical mechanics. This is the theory which tries to explain the macroscopic properties, like the relation between temperature, pressure, and density, of materials on the basis of the interactions between the (many) molecules or atoms. So it analyses the collective properties of a big collections of equal components, of which we know the properties as well as the way in which they interact.

This relation between the properties of the individual components and the collective behaviour is often quite unexpected: one may think of the behaviour of a crowd of human beings.

Ruelle mainly contributed here to the general theory of equilibria and phase transitions of these (infinitely) large systems. He was especially concerned with the mathematical foundation of these concepts: the subtitle of his book on statistical mechanics in 1969 is 'Rigorous Results' (although it starts with a quotation by F. Kafka: 'Richtiges Auffassen einer Sache und Missverstehen der gleichen Sache schliessen einander nicht vollständig aus'). The condition for equilibrium in clas-

sical, as opposed to quantum, systems now carries the name of Dobrushin-Lanford-Ruelle condition.

Around 1970 his interests went in the direction of turbulence and the various explanations for this phenomenon. The standard theory, due to Hopf and Landau-Lifschitz, was that the seemingly unpredictable motion one observes in turbulence is due to the large number of effective degrees of freedom. In that period there was a strong progress in the geometric theory of dynamical systems, due mainly to S. Smale and his (former) students. Ruelle then realized that the new results might have relevance for the problem of turbulence: it became apparent that there was no logical necessity for a large number of degrees of freedom in order to get turbulent behaviour. This implied that other approaches to turbulence should at least be tried. These ideas were first received with scepticism.

At present there is solid experimental evidence that non-linear effects are responsible for seemingly unpredictable dynamics in a number of cases, including the onset of turbulence in the Couette-Taylor experiment, the chemical reaction studied by Belousov and Zhabotinskii, the motion of Hyperion, a satellite of Saturn, et cetera, et cetera.

The original scepticism changed into the opposite: under the name of Chaos theory these ideas became popular and even found their way to the general public. The key role of Ruelle in this development is well described in the book *Chaos: the making of a new science* by the American journalist James Gleick.

I should mention here that in this first period of making the connection between the mathematical theory of dynamical system

and the physical theory of turbulence I had the pleasure to cooperate with Ruelle. I have still very good memories of that period.

Apart from propagating non-linear and chaotic dynamics as a tool to understand certain experimental phenomena, Ruelle also contributed in a very important way to the mathematical theory of chaotic dynamics.

In a vague sense there is an analogy between the main problem in statistical mechanics: understanding the collective behaviour of a large (or infinite) collection of equal individuals and one of the main problems in dynamics: understanding the long term (statistical) properties of the motion obtained by iterating a fixed transformation very often. This may seem very vague but Ruelle (and Sinai) succeeded in making this idea useful and actually applied the methods of statistical mechanics to nonlinear dynamics, where we now have notions like the ‘thermodynamic formalism’ and the ‘Sinai-Ruelle-Bowen measures’.

Apart from these contributions, which are of a very technical nature, he also expressed his ideas about chaos and its relation to chance (or probability) in a non-technical exposition which was published by Penguin Books under the title *Chance and Chaos*. Here he does not restrict to mathematics and physics but touches upon subjects like: economy, boiling water and the gates of hell, the true meaning of sex, and others.

I want to conclude this introduction by mentioning that I had to be rather incomplete: the time is limited and also I had to avoid speaking of things I don’t know well enough. From his work on quantum field theory I just mention his contribution to what has become known as the Haag-Ruelle scattering theory and the, in view of his personality, somewhat inappropriately called ‘Rage Theorem’. I thereby completely passed over his recent work on non-equilibrium statistical mechanics. 

Acknowledgement

I wish to thank H.W. Broer and M. Winnink for useful comments.

References

- [G,1987] J. Gleick, *Chaos, the making of a new science*, Viking Press, New York, 1987.
- [R,1969] D. Ruelle, *Statistical mechanics*, Benjamin, 1969.
- [R,1991] D. Ruelle, *Chance and chaos*, Princeton Univ. Press 1991, Penguin Books 1993, translated as *De wetten van toeval en chaos*, Aramith Uitgevers’.



D. Ruelle

IHES. 91440 Bures sur Yvette, France

ruelle@ihes.fr

Johann Bernoulli lecture, Groningen, 20 April 1999

Mathematical platonism reconsidered

This paper discusses current challenges to the standard Platonist philosophy of mathematics. Evidence from neurophysiology and comparison with computers reveal that the human way of conceiving mathematics bears strong marks of the specific structure of our brain, and of its shortcomings. This does not fit well with a universalist view of the conceptual nature of mathematics. Another worry comes from discussing the physical status of information in the presence of quantum mechanics and general relativity. Again, this may not fit well with the very classical Platonist *Weltanschauung*.

Plato's dialogues present us with a world of pure ideas, to which the philosophers have access, and from which they can come back to teach the rest of mankind who remain locked up in a dark cavern. Nothing fits this description better than the world of mathematics, with its unchangeable truths, and its servants, the philosopher-mathematicians. Admittedly, the mathematician's ideas reside in a modest amount of jelly-like substance which constitutes the mathematician's brain, but this is irrelevant to the eternal truth that 7 is a prime number, or that there are infinitely many primes.

The Platonist view of mathematics is challenged now and then from different sides. There has been the crisis of the foundations at the beginning of this century, and Gödel's theorem. Many mathematicians think that these problems are well clarified, and need not bother us too much. There is however also the problem of the physical basis for mathematical thinking and computing, whether it is the mathematician's brain or a computing machine. This problem recurs in various

forms and is not likely to disappear readily. It was easy for the Greeks to imagine a world of pure ideas, which the philosophers shared with the Gods. The Gods have gone away, and we now converse with electronic computers which are more real and effective, but perhaps not as good company. What kind of company they are, and what they teach us about ourselves, is one of the things I would like to discuss. I shall adopt the point of view of a modern counterpart of the Greek philosopher, namely today's working mathematician, or more generally scientist. And I shall start with a very concrete example.

Computer-aided proofs

My colleague Oscar Lanford has spent time, among other things, on computer-aided proofs. What are these? Well, for some (interesting) mathematical theorems there is a relatively straightforward and natural way of obtaining a proof, which consists in making precise numerical checks. The calculations needed for the numerical check may be so extremely long that one cannot realistically perform them by hand. One then uses a computer, and obtains thus a computer-aided proof. I shall now briefly sketch the sort of problem analyzed by Lanford [8], to convince working mathematicians that his approach is indeed straightforward and natural. Non-mathematicians can skip over the few technical details that follow.

Lanford is currently working on an analogue of the Feigenbaum fixed point problem. Specifically, he wants to prove that a certain map F in some function space E has a fixed point x , i.e., $Fx = x$. There is convincing numerical evidence that the fixed point x does indeed exist

and that F is hyperbolic at x . Hyperbolicity, roughly speaking, means that near the fixed point x , F expands in a certain direction and contracts in a complementary direction. If x_0 is an approximate fixed point of F , i.e., Fx_0 is suitably close to x_0 , and if F is hyperbolic near x_0 , a general theorem asserts that F has a unique exact fixed point close to x_0 . But it is known that the hyperbolicity of F can be checked by calculations of finite precision. In brief, the theorem one wants to prove, namely the existence of a fixed point, can be obtained by calculations of finite precision. This does not mean that things are easy: one has to find a basis for the infinite dimensional space E , calculate with vectors which have a finite (but possibly large) number of components, and keep a strict record of the errors committed. The bookkeeping of errors is helped by so-called interval arithmetics, where each real number is replaced by an interval that contains it, and intervals are combined in the various operations on reals so that for each quantity one knows an explicit interval which certainly contains this quantity. Computers can do interval arithmetics, and I shall not discuss here the problem of making sure that the machine really does what it claims to do.

Having described the mathematical principle of Lanford's computer-aided proof, let me present some practical details. The computer program which will prove the theorem (when fed into the computer) is about 150 pages long, and written in a variant of the C language which allows a step by step explanation of what the program is doing. (Long programs tend to be quite impenetrable, and this is after all supposed to be a *proof*, which a human mathematician can check, even if the aid of a computer is also needed). You now load your program in the computer, push ENTER, and there comes a message on the screen saying "YEP! your theorem is proved" (or "NOPE! try again"). I think I have shown to you that use of a computer is a natural and reasonable way of proving certain types of theorems. It takes a couple of years of work, and that seems to be the end of the story, but it ain't...

At the end of the seminar where he presented his work, Lanford made some comments which I shall now relate, and which you may find deeply disturbing. "I am absolutely certain" says Lanford "that there are mistakes in my 150 page program." Now, isn't this deeply disturbing? You thought your theorem was proved, but reading the program once more you find a mistake, fix it, run the program again, and the answer now is "NOPE! try again". It would seem that this discredits the whole approach. But I suggest that you suspend your judgment until you hear the further comments of Lanford who is, by the way, an excellent mathematician and also, by all standards, an extremely cautious one. "I am absolutely certain" says Lanford "that the theorem is true." This is because of the extensive numerical checks that he made before embarking in his computer-aided proof. "And I am quite confident that any error that is found in my program can be fixed so that the proof works." This is all well and fine, but wouldn't you rather have an old style computer-less proof that you can really trust? This is debatable because, although our mathematical proofs should in principle be formalizable, they are in fact not formalized. Formalization would be a formidable task. It would entail a lot of explaining "abuses of language", filling gaping holes in the logics, translating into incomprehensible formal language, and debugging: as of today this is simply not done.

As Oscar Lanford points out¹, there are mechanical ways to flush out errors in computer programs, and these are lacking for traditional mathematics. On the other hand "mathematical proofs – precisely because they are intended to be understood by our organic, evolution-

conditioned brains – have a coherence and capacity for error-correction that programs lack". In conclusion, Lanford wants to avoid comparing the frequency of errors in programs and in standard mathematics, a question about which he says he has not made up his mind.

Idiosyncrasies of human mathematics

If human mathematics isn't really formal mathematics, what is it? I have been daydreaming about meeting a mathematician from outer space and comparing notes with him, or her, or it (see [10], [11]). I have eventually come to the conclusion that the mathematician from outer space had the form of a pleasant young woman. (If you prefer a Greek God, we can compromise on a Greek Goddess). Her name is Pallas, and she is doing research on human mathematics. Her theory is that human mathematics is rather peculiar as compared with the mathematics of other mathematically competent species of the Galaxy, and that our peculiarities are due to the idiosyncratic shortcomings of the human brain (see [11]).

Of course you may exclaim that Pallas is just a figment of my imagination, that we know no other mathematically competent species of the Galaxy, and that speculations on their mathematics is therefore unfounded and worthless. I agree with that only in part. Our electronic computers are not good mathematicians, but they have some mathematical competence, and there are certain mathematically useful things that they do much better than humans. (Remember that Gauss and Riemann did extensive numerical computations by hand, and that today's mathematicians often do the same using their computers). The conclusion is unescapable that there are some useful talents that we might possess but don't, and that the lack of these talents may have some deep effect on human mathematical achievements.

It happens to be feasible and fruitful to evaluate some of the abilities and shortcomings of the human mathematical brain, using neurophysiology and comparison with computers. In what follows we list and analyze our findings. The first discussion of this type can be found in J. von Neumann's book *The computer and the brain* [9]. There is by the way no reason to be outraged by the comparison between computer and brain: the two turn out to be rather different in their details, but they are both information processing machines, and have therefore things in common, like the need for memory. The comparison is thus enlightening, here it goes.

The architecture of the brain is highly parallel.

The number of neurons in the brain is huge ($> 10^{10}$), and their organization is highly parallel. Large number of components and parallelism may also be present in computers, but not to the same amount.

The brain is slow.

Because of the relative slowness of the nervous influx, characteristic times in the nervous systems are much larger than in computers. In agreement with this, computers typically perform repetitive calculations where each loop provides an updated input for the next loop. The brain by contrast often uses its high parallelism to treat information (for instance visual information) in a direct way, without using loops. When however we reflect upon some question, say mathematical, we probably use the same brain circuits repeatedly, as the word 'reflect'

¹ I am here quoting from an e-mail message sent by Lanford.

suggests, and it takes a lot of time.

Our memory is poor.

In particular our short term memory is typically limited to about seven items, which is catastrophic. This can be remedied to some extent by “memorizing”, *i.e.*, putting in long term memory. (There is much more room there, but memorizing takes time and effort).

Our mathematical thinking uses various systems of the brain: vision, language, etc.

For many people, language seems to be the very essence of thinking, but Einstein notes that in his case the main elements of thinking are “of visual and some muscular type”. Using the visual system is important for most mathematicians, and “geometrization” of a theory is considered a great achievement. Obviously we use, for doing mathematics, parts of the brain that were developed by evolution for other purposes. The result is not bad, but strongly bears the marks of its origins: it is expressed in an informal “natural” language, and makes strong appeal to the visual system.

We can focus our attention on a task, but in a limited way.

We like to point out that we differ from computers in having consciousness. Therefore, it is a bit disturbing that some mathematical work seems to be done unconsciously, as noted by Poincaré. In fact we are unable to define consciousness, but it is related to attention, which is a human ability to concentrate intellectual resources on some item at a certain time. (Because of the high parallelism of the brain, there are always many other things “running in the background”). Our attention span is limited, as is our short term memory, and this has consequences that we discuss as our next two items.

We like short formulations.

What we call mathematical elegance is the simplicity that underlies some very complicated problems. The simplicity may be in the formulation of a result (Fermat’s last theorem), or in the ideas behind a theory. One can understand the appeal of such simplicity to a human mind so limited in its attention span and its memory.

We are not good at formal logical manipulations.

While mathematical proofs are in principle formalizable, we stay away from formal mathematical texts, even though they could be checked mechanically to be correct. We are not good at such checks, because of our poor memory and attention span.

But we are quite good at finding regularities, or ‘meaning’.

After a long list of features for which the human brain is inferior to a stupid PC, here is finally something that we seem to do better. The human brain is untiring at “interpreting” the data it receives. This can border on the ridiculous when we look for arithmetic regularities in the digits of a telephone number that we remember with difficulty due to our poor memory. But our unflagging “search for meaning” is probably what underlies the mathematical ability of the human mind. Note that finding meaning and regularities has obvious survival value,

and has been encouraged by natural selection, while remembering telephone numbers has not been so favored. Note also that discovering regularities is not a very clearly defined task. If it were, we could program it on a computer, and the computer might get better at doing mathematics than we are.

How do we do mathematics?

We do not clearly understand how we function as mathematicians, otherwise we could write a computer program to do the same job. (I think that such a program will some day be written, leaving us out of business, and I am not looking forward to it). We can however give an impressionistic view of the working mathematical brain, compatible with the features we have discussed above.

For most of us scientists, the mother tongue is different from English, which is our professional language. Registering the activity of the mathematician’s brain would thus give phrases or bits of sentences in two languages with somewhat different roles (perhaps remarks and expletives in the mother tongue, and technical stuff in English). But the verbal output would be interspersed with nonverbal elements, visual for most of us (a glimpse of a triangular matrix, or of Poincaré’s bearded face). Because of poor memory and limited attention span, we use abbreviated verbal or nonverbal symbols and try to combine them into something useful. The creative work is thus of combinatorial nature, using analogy for guidance. To relieve our poor memory we often take a piece of paper and draw diagrams or scribble formulas: the piece of paper plays the role of an external memory and makes good use of our visual competence. Historically, the first high-level mathematical theory was Greek geometry where figures are fundamental, using visual intuition and serving as external memory in an incredibly effective manner. The next great intellectual explosion in mathematics was based on the manipulation of formulas, using again an external memory of visual nature, but with wider ranging applicability than the drawings of Greek geometry. Symbolic manipulation of formulas goes to the heart of what we consider mathematics, but is getting far from what our brain has been prepared for by natural evolution. We idealize mathematics as consisting of texts in formalized language, but we do not write such texts, and if they were written we would be unable to read them. Let us leave idealized formal texts and come back to human mathematics. After some time, the problem which we investigate has become familiar, *i.e.*, things have been put in long term memory, and we can do significant work without our piece of paper. In fact creative work can be done unconsciously, as noted by Poincaré. And then, more or less suddenly we are convinced that we have a good idea. But because of the way we function the idea is in terms of abbreviated symbols. Something like this: “*it works* because *there is* a fixed point and *if you look at it the right way* it is more or less clear that it is unique”. (A sentence of this sort is common towards the end of a seminar lecture and, depending on the case, makes everything clear or leaves you in the deepest fog). We have now to unpack the abbreviated symbols, hope that there won’t be a really bad surprise and write things out in sufficient details that colleagues will be convinced.

I hope that the above description of mathematical work has sounded sufficiently familiar and convincing (even though I have left out much, like the initial planning of a strategy). Does this all fit a Platonist view of mathematics? In a sense, yes, because the mathematician’s world is a world of ideas as envisioned by Plato. But what comes out of our discussion is that these ideas are very specifically human, depending on the very special organization of our brain, and in particular on its shortcomings. The truth value of specific statements is something that

we share with the Gods, but what we see as the deep underlying ideas “which make things work” may just be the invention of the mortals that we are. In other words, the high price that we put on *conceptual aspects* of mathematical theories may just reflect our specifically human limitations with regard to memory and attention span.

How is mathematical truth anchored in physical reality?

Doing mathematics consists in manipulating information. Specifically, formalized mathematics operates on strings of symbols. How seriously should one take the fact that information and its manipulation take place in the physical world? The Platonist view would be that this is not important. Plato might in fact have found nothing wrong with the Turing machine, and its infinite ribbon of paper. One may worry that, if our physical universe is finite, it cannot contain an infinite ribbon of paper. More generally, the proofs of certain theorems may be so cumbersome that they do not fit in our physical universe. The truth of such theorems would thus be inaccessible to us, which is annoying, but again does not threaten a Platonist view of mathematics: at least the Gods would know.

If one considers seriously the physical task of implementing algorithms, writing proofs or making calculations in the physical world of the 20-th century, one meets a number of problems. Here are a few that have been recognized.

- 1 Information has a physical basis, and the energy costs of making calculations needs to be discussed (see Landauer [7]).
- 2 Since information has a physical basis, one can ask how much can

be packed in a given ball. The answer is apparently not proportional to the volume of the ball, but to its surface (see Beckenstein [2], [3]). This is in agreement with the Beckenstein-Hawking formula that the entropy of a black hole is proportional to its surface (general relativity also indicates that if you put too much in a small region, you create a black hole).

- 3 Our world obeys the laws of quantum mechanics, and it makes sense to try to construct computers using quantum interference effects. While this is difficult to do in practice, it is known in principle that quantum computers could solve certain problems much more efficiently than classical computers. (For reviews see for instance Aharonov [1], Kitaev [6]). It appears however that our brain does not use quantum computing (see Hepp [4]).

The fundamental limitations put by physical law on computing, or doing mathematics, do not appear to be very well understood at this time. It is thus reasonable for me to stop here my discussion. It seems possible, however, that another crisis of foundations of mathematics may be awaiting us, and that collision with physical law could cause further damage to our Platonist conception of mathematics.

Acknowledgments

I am very thankful to Karine Chemla and Oscar Lanford for critical discussions of the manuscript, and to Thibault Damour and Klaus Hepp for useful references. I have also benefited from discussions with Piet Hut and Joe Traub, which went however a somewhat different direction [5].



References

- 1 D. Aharonov. *Quantum computation*. To appear in Annual Reviews of Computational Physics VI, World Scientific, Singapore, 1998.
- 2 J.D. Beckenstein. *Universal upper bound on the entropy-to-energy ratio for bounded systems*. Phys. Rev. **D23**, 287–298(1981).
- 3 J.D. Beckenstein. *Entropy bounds and black hole remnants*. Phys. Rev. **D49**, 1912–1921(1994).
- 4 K. Hepp. *Toward the demolition of a computational quantum brain*. Lecture Notes in Physics to appear.
- 5 P. Hut, D. Ruelle, and J. Traub. *Varieties of limits to scientific knowledge*. Complexity **3**:6,33–38(1998).
- 6 A. Kitaev. *Quantum computation: algorithms and error correction*. Uspekhi Mat. Nauk **52**:6, 53–112(1997) [English translation: Russian Math. Surveys **52**,1191-1249(1997)].
- 7 R. Landauer. *Information is physical*. Physics Today **44**:5, 23–29(1991).
- 8 O.E. Lanford. Seminar at IHES, December 1998.
- 9 J. von Neumann. *The computer and the brain*. Yale U.P., New Haven, 1958.
- 10 D. Ruelle. *Is our mathematics natural? The case of equilibrium statistical mechanics*. Bull. Amer. Math. Soc. **19**, 259–268(1988).
- 11 D. Ruelle. *Conversations on mathematics with a visitor from outer space*. Mathematics: Frontiers and Perspectives. ed. V. Arnold et al. AMS. 251–259(2000).

H.W. Broer

*Vakgroep Wiskunde en Informatica, Universiteit Groningen
Postbus 800, 9700 AV Groningen
broer@math.rug.nl*

The how and what

A review is given of the most well-known examples of dynamical systems with chaotic dynamics. After a phenomenological introduction, a definition of chaos is ‘deduced’. One of the examples concerns the Hénon-attractor, that has only been recently characterized as the closure of a coiling curve. It will be made plausible that this characterization also holds in a more realistic example from mechanics. Also some links between chaos and probability are indicated.

1 Determinism, chaos and chance

Chaos is one of the intriguing features of nonlinear deterministic dynamics. Dynamical systems in principle model anything that moves in time. Examples are as various as simple contraptions of springs and pendula or the whole solar system or the world economy or even the atmospheric circulation which produces the weather. In this context, the only important thing is that it is deterministic: there is some *state space*, or *phase space*, containing all possible states of the system and an evolution law that prescribes the whole future when the present state is given. Of course it is not completely clear that all these examples should be deterministic.

Anyway, it turns out that even in extremely simple deterministic dynamical systems, i.e., with a low dimensional state space, the phenomenon of chaos can occur. Apart from the fact that this gives rise to interesting geometries in the state space, it also leads to basic unpredictability of the future dynamics.

Setting of the problem

The first entry to the subject matter is phenomenological, we just study a few examples in low-dimensional phase spaces, or with ‘few degrees of freedom’. The interest is with the long-term, or asymptotic, dynamical behaviour, i.e., the regime where the initial and transient phenomena have disappeared.

As we shall see, there is a wide variety of possibilities. In the simplest cases the system is asymptotically at rest. We shall also encounter asymptotic periodic or multiperiodic behaviour. In

those cases, in the phase space a point or (multi-)periodic attractor exists, where nearby evolutions converge to. All of this is still reckoned to be orderly dynamics. A first, rough, definition classifies all remaining cases to be ‘chaotic’, where the attractors in phase space usually are called ‘strange’. After a while we shall arrive at a more sophisticated definition of chaos.

Unpredictable systems elsewhere often are described by probabilistic models. A good example are the dice, which by nature form a highly chaotic, deterministic system. The description in these terms is so complicated though, that we usually disguise our incompetence and ignorance by using statistics.

Outline

We start with a few classical examples, including the Logistic (or Quadratic) family, the Hénon family, the Baker transformation and the Tent map family. In these examples time is discrete and the dynamics mathematically amounts to the iteration of a map.

Next we present two examples with continuous time, generated by autonomous systems, of ordinary differential equations (ODE’s). In particular we show the Lorenz en Rossler systems. After this we arrive at a definition of chaos and at the characterization of the strange attractor of a 2-dimensional diffeomorphism like the Henon map.

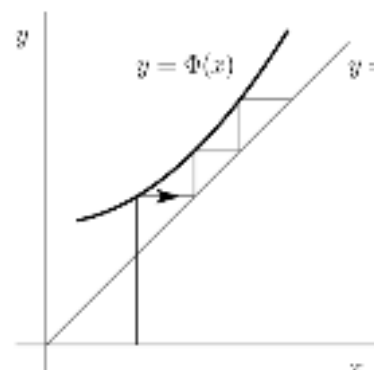


Figure 1 Graphical explanation of the iteration $x_{n+1} = \Phi(x_n)$.

of chaos

The second part of the paper focuses on periodically driven systems. We shall describe some of the background physics and consider the Poincarémap of such a system. It seems that the strange attractors of these maps have the same kind of characterization as the Hénon map. We conclude by explicitly introducing some probabilistic aspects by defining an invariant distribution, hinting in the direction of Ergodic Theory. A special case is occupied by the conservative case without friction. Here the chaotic phenomena are still largely unknown, although some interesting comments are in order. Also we briefly mention the case of fractal basin boundaries, where we return to the dice.

2 The Logistic family

The first example is the well-known Logistic or Quadratic family, e.g., see [10]. It is a discrete dynamical system, given by the iterations

$$x_{n+1} = \mu x_n(1 - x_n), \quad (1)$$

$x_n \in [0, 1]$, $n = 0, 1, 2, \dots$. Moreover $\mu \in [0, 4]$ is a parameter. The simplest interpretation of (1) is in terms of population dynamics. In that case an evolution $x_0, x_1, x_2, \dots$, of this system is interpreted as the (scaled) size of a certain population as a function of the time n . Let us discuss this in some detail.

The linear growth model

We begin considering the linear growth model

$$x_{n+1} = \mu x_n, \quad x_n \in \mathbb{R},$$

$n = 0, 1, 2, \dots$. The parameter μ in this model is the constant ratio between the sizes of successive generations, and can be interpreted as a netto growth rate of the population at hand. It is easily seen that in terms of the initial 'population' x_0 we have

$$x_1 = \mu x_0, \quad x_2 = \mu^2 x_0, \quad \dots, \quad x_n = \mu^n x_0, \quad \dots$$

$n = 0, 1, 2, \dots$, which clearly is an exponential behaviour. Regarding the parameter μ we distinguish between the case where $0 < \mu < 1$, corresponding to exponential decay, and the case where $1 < \mu$, which corresponds to exponential growth. There are not too many circumstances in which this linear model is realistic. The Logistic family can be seen as the simplest nonlinear modification of it.

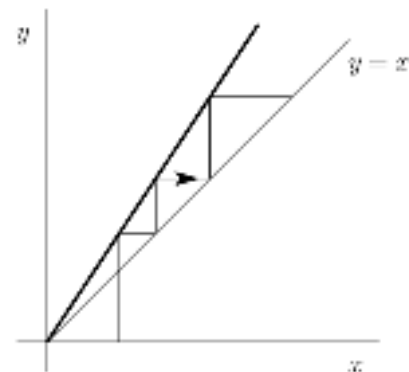


Figure 2 Graphical explanation of the linear growth model.

Graphical analysis

As an intermezzo we study the dynamics of more general iterations

$$x_{n+1} = \Phi(x_n),$$

$n = 0, 1, 2, \dots$, where $\Phi : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ is a smooth function. In figure 1 we sketched the graph of such a function as well as the graph of the identity map (i.e., of $y = \Phi(x)$ and $y = x$). It is easy to describe the iteration-step from x_n to x_{n+1} by use of this: indeed given x_n on the x -axis we read off the next iterate x_{n+1} on the y -axis. With help of the diagonal $y = x$ we next reflect the value x_{n+1} to the x -axis and we can repeat the process to obtain x_{n+2} . In figure 2 this idea has been applied to the linear growth model for $\mu > 1$. In this case we simply have $\Phi(x) = \mu x$.

Overpopulation

Let us now consider the dynamics of the Logistic family itself, which can be described as

$$x_{n+1} = \Phi_\mu(x_n) \quad \text{with } \Phi_\mu(x) = \mu x(1-x),$$

the Logistic map. First observe, that for small values of x_n the equation (1) is well-approximated by the linear growth model.

Next however, we observe that in the nonlinear model there is a maximal size of the population, namely $x_n = 1$. Indeed, if $x_n = 1$ it follows that $x_{n+1} = 0$, and so the next generation is extinct. This is one of the simplest ways to model the effect of overpopulation. Of course the maximal size 1 is artificial, but any other bound by an appropriate scaling may be brought to 1.

As before, we vary the parameter μ and consider the dynamics. To this end we perform the graphical analysis described in the previous subsection, see figure 3. As in the linear case, for $0 < \mu < 1$ the population gets extinct, where for larger values of n we almost are in the case of exponential decay. In a more geometrical language we say that $x = 0$ is a point, or equilibrium, attractor. This kind of dynamics is still quite uninteresting from the view point of population dynamics.

For $1 < \mu < 3$ we find a point attractor different from $x = 0$, indeed it is $x = p_\mu$, with

$$p_\mu := (\mu - 1)/\mu.$$

Observe that for $2 < \mu < 3$, the equilibrium p_μ is approached in a spiraling mode.



Figure 3 Dynamics of the Logistic family for different values of μ : a. $0 < \mu < 1$, b. $1 < \mu < 3$, c. $0 < \mu - 3 \leq 1$.

Then, for $3 < \mu$ none of the two equilibria 0 and p_μ is attracting, so where does the population size x_n go as $n \rightarrow \infty$? The answer for $0 < \mu - 3 \leq 1$ is given in figure 3c: the system now has a period-2 attractor. Intuitively such a situation can be described as follows. Suppose the generations with even n are smaller than the ones with odd n . Then each odd generation exhausts the natural resources so much that the next generation is smaller, which allows the next generation to be larger again, etc.

For increasing values of μ an interesting scenario arises, which is described often in literature, see figure 4. We refer to, e.g., [10, 12]. To obtain it, for each value of μ , about 200 iterations are considered of which only the latter 100 are plotted. In this way the transient phenomena are ignored and only the asymptotic dynamics is observed. The first thing to be seen is that for increasing μ the system doubles its period. So the period-2 attractor is replaced by a period-4 attractor, then period-8, etc. It has been shown that this process goes with geometric progression: to be precise, the corresponding sequence $\mu_1, \mu_2, \mu_3, \dots$ of parameter-values converges (almost) geometrically to a limit μ_∞ . Names like Feigenbaum and Tresser are related to these phenomena, compare

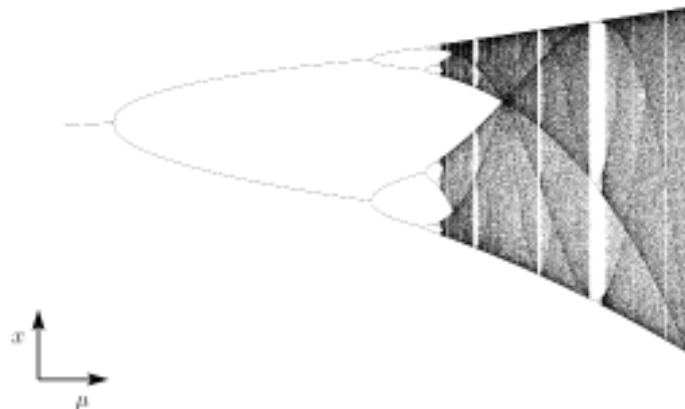


Figure 4 Bifurcation diagram of the Logistic family.

[9, 12]. For the parameter-value $\mu = \mu_\infty$ that limits this progression there is no longer any periodicity. For such aperiodic dynamics we shall use the adjective *chaotic*, but below we shall arrive at a more precise definition.

In the range $3 < \mu < 4$ many chaotic and periodic regimes can be distinguished and also many period doubling sequences.

Remarks

- One of the significant features of the present chaos is the stretching of the x -axis by the Logistic map $\Phi(x) = \mu x(1-x)$, except very near $x = 1/2$, for larger values of μ . By stretching alone the points all would leave the interval $[0, 1]$. However, the map also folds the interval over itself. It is this combination of stretching and folding that we shall see again when meeting other chaotic systems.
- The above (almost) geometric progression of the sequence μ_n can be expressed by saying

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\mu_{n-1} - \mu_{n-2}}{\mu_n - \mu_{n-1}} = \delta,$$

for a positive constant $\delta = 4.6692016091029 \dots$. This constant δ turns out to be *universal* in the sense that it also occurs for similar unimodal maps Φ , again see [9, 12].

- The arguments of this section have the same character as in the derivation of the Volterra–Lotka systems for population dynamics. Their aim is not so much to precisely model the evolution of a given population, but rather to give as transparent as possible systems with certain qualitative properties, compare [11, 13, 24]. In Mathematical Biology, however, often more realistic models are used, with similar qualitative properties as the Logistic family.

3 The Hénon family

This family of maps was introduced by Hénon in 1976, intended as a simple (polynomial) example of a planar diffeomorphism with a strange attractor. Only quite recently the structure of this family has been understood better, mathematically speaking. Compare [3, 9–10, 12].

Just iterating

Let us first describe what is the case. Given is the 2-dimensional map

$$\Phi_{a,b}(x, y) = (1 - ax^2 + y, bx),$$

with a and b real parameters. Iteration

$$(x_{n+1}, y_{n+1}) = \Phi_{a,b}(x_n, y_n),$$

$n = 0, 1, 2, \dots$, then produces 2-dimensional evolutions of the form

$$(x_0, y_0), (x_1, y_1), (x_2, y_2), \dots$$

In figure 5, one iteration has been plotted for parameter values $a = 1.4$ and $b = 0.3$. This is the celebrated Hénon attractor H , which attracts an open subset of initial points (x_0, y_0) in $\mathbb{R}^2$. The set H appears to be a fractal, the local geometry of which is the product of a curve and a Cantor set. Numerical estimates of a suitable fractal dimension (limit capacity, box counting dimension) of H give approximately 1.2. For background see [9], especially the chapters II and III. For general reference see also [12].

It is interesting to see what happens upon variation of the parameters (a, b) , see figure 6. Indeed, the strange attractor H is not persistent for small perturbations, since for nearby values of (a, b) periodic attractors turn up. As we shall argue now, the complexity of the bifurcation diagram in figure 4 also is to be expected here: windows with periodic attractors, period doubling sequences, strange attractors, etc.

Mathematical intermezzo

Let us make this a bit more precise. To begin with, notice that the following two versions exist of the Logistic family:

$$\begin{aligned} x_{n+1} &= \mu x_n(1 - x_n) \text{ and} \\ x_{n+1} &= 1 - ax_n^2. \end{aligned}$$

The former we already know, and the latter can be derived from this by the affine scaling of x from $[0, 1]$ to $[-1, +1]$ and by reparametrizing

$$\mu \in [0, 4] \longleftrightarrow a \in [0, 2] : a = \frac{1}{4}\mu(\mu - 2).$$

This gives rise to the following observation. Consider the Hénon family for $b = 0$:

$$\Phi_{a,0}(x, y) = (1 - ax^2 + y, 0).$$

Notice that this is no longer a diffeomorphism. Clearly the line $y = 0$, or the x -axis, is invariant¹ and the restriction $\Phi_{a,0}(x, 0) = (1 - ax^2, 0)$ is nothing but a newly begotten version of the Logistic family. A natural question now would be which aspects of the dynamics of the Logistic family are inherited by the Hénon family for small (nonzero) values of b .

At the level of periodic attractors a lot is known about this, see [22], also see [8]. Indeed, it turns out that the periodic windows of the Logistic family as shown in figure 4 can be continued for small values of b .

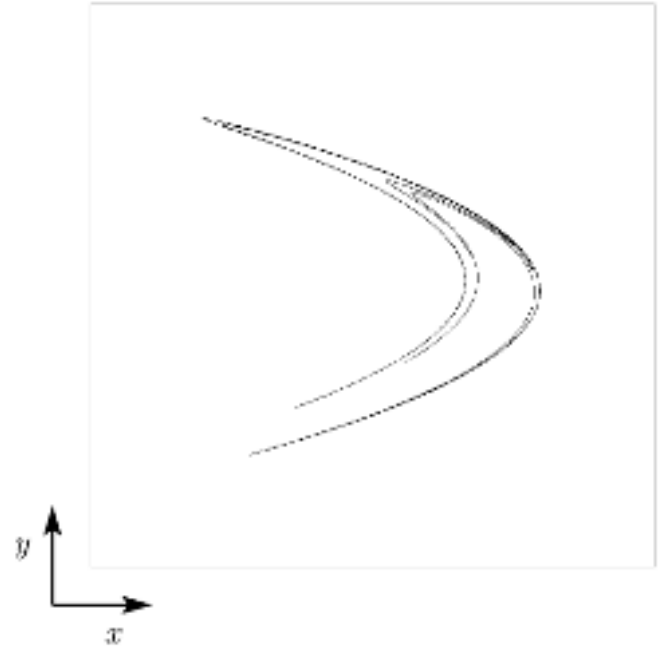


Figure 5 The Hénon attractor in the (x, y) -plane, for $a = 1.4$, $b = 0.3$.

The chaotic dynamics is a lot harder to continue. To understand what is going on here, we note that the Hénon map $\Phi_{a,b}$ has a saddle fixed point $p_{a,b}$. Such a point is unstable. Let us consider the set

$$W^u(p_{a,b}) = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid \lim_{n \rightarrow \infty} \Phi_{a,b}^{-1}(x, y) = p_{a,b}\},$$

i.e., all points that by backward iteration of $\Phi_{a,b}$ go to $p_{a,b}$. Clearly one has $p_{a,b} \in W^u(p_{a,b})$. It can be shown that $W^u(p_{a,b})$ (locally) is a smooth curve, called the unstable manifold of $p_{a,b}$.

Remarks

- Similarly the stable manifold $W^s(p_{a,b})$ exists, consisting of all points converging to $p_{a,b}$ by forward iteration of $\Phi_{a,b}$. Both curves in $p_{a,b}$ are tangent to the corresponding eigenspaces of the derivative map.
- In this particular case the inverse $\Phi_{a,b}^{-1}$ can be directly computed as

$$\Phi_{a,b}^{-1}(x, y) = \left(\frac{1}{b}y, x + \frac{a}{b^2}y^2 - 1\right).$$

One of the features of the Hénon family is its constant Jacobian determinant: $|\det D\Phi_{a,b}| \equiv b$, meaning that for $|b| < 1$ the map $\Phi_{a,b}$ contracts area. This property is also called *dissipative*. From this fact one easily derives that the attractor $H_{a,b}$ of $\Phi_{a,b}$ is contained in the closure $\overline{W^u(p_{a,b})}$. All this was already known in the beginning of the eighties, proven by Tangerman (unpublished).

The difficult part is the converse, namely to show that $H_{a,b} = \overline{W^u(p_{a,b})}$. In 1991 Benedicks & Carleson [3], also see [12], showed that this indeed holds true for a subset of the (a, b) -plane of positive area. The proof again is based on perturbation arguments. One remaining question is whether the ‘original’ Hénon attractor $H = H_{1.4,0.3}$ has this property or not. Looking at figure 5 makes this very believable. A definite answer, however, may never be found.

¹ In fact, $\Phi_{a,0}$ maps $\mathbb{R}^2$ onto the x -axis, and on the x -axis we have 1-dimensional dynamics as before.



Figure 6 Attractors in the Hénon family for various (a, b) , again depicted in the (x, y) -plane. The left case is a periodic attractor of period 7 and the right case a small scale strange attractor with 7 components.

4 The Baker transformation

One of the few ways to get entrance into chaos is that of symbolic dynamics. This can be best explained with help of a toy model called the Baker transformation. Indeed, this transformation is given by

$$x_{n+1} = 2x_n \pmod{1}, \quad (2)$$

again with $x_n \in [0, 1)$, $n = 0, 1, 2, \dots$. Clearly the map Φ in this example is given by $\Phi(x) = 2x \pmod{1}$, for a graph see figure 7. Note that here the interval $[0, 1)$ firstly is stretched by a factor 2 and secondly cut, after which $[0, 1)$ twice covers itself. This reminds of a form of dough kneading, which explains the name. In this form the transformation is discontinuous, but when $2\pi x$ is interpreted as an angle we can see the Baker transformation as the complex map

$$z \mapsto z^2,$$

restricted to the unit circle, in which case it is continuous.

Remark. The projection of this circle dynamics on the real axis gives rise to the Logistic map with $\mu = 4$, e.g., see [10].

Let us consider an evolution $x_0, x_1, x_2, \dots$, given by iteration of the Baker transformation, so with $x_{n+1} = 2x_n \pmod{1}$. In binary expansion the initial point x_0 has the form

$$x_0 = \sum_{j=1}^{\infty} a_j 2^{-j},$$

where $a_j \in \{0, 1\}$ for all $j = 1, 2, 3, \dots$. In the usual notation $x_0 = 0.a_1a_2a_3\dots$, the Baker transformation gets simple:

$$\begin{aligned} x_0 &= 0.a_1a_2a_3\dots, \\ x_1 &= 0.a_2a_3a_4\dots, \\ x_2 &= 0.a_3a_4a_5\dots, \\ x_n &= 0.a_{n+1}a_{n+2}a_{n+3}\dots, \end{aligned}$$

an operation named (Bernoulli-)shift. Observe that the above has the following geometric meaning. If $a_{n+1} = 0$ the n -th iterate x_n is in the left half interval $I_0 = [0, \frac{1}{2})$, while for $a_{n+1} = 1$ we have that $x_n \in I_1 = [\frac{1}{2}, 1)$, the right half interval. Conversely the positioning of the $x_0, x_1, x_2, \dots$ with respect to the intervals I_0 and I_1

determines² the binary expansion of the initial point x_0 . We now are in the realm of *symbolic dynamics*, a powerful tool for understanding chaotic dynamics.

One of the first surprising consequences of the above is the following. If the initial point x_0 is known only with finite precision, this precision decreases when iterating. After some time all precision even totally disappears! This is the heart of the unpredictability aspect of chaos, and it is of importance since in practice one is always dealing with finite precision.

A second direct consequence is the following. An initial condition $x_0 \in [0, 1]$ has a periodic evolution of period N , precisely if the binary expansion $x_0 = 0.a_1a_2a_3\dots a_Na_{N+1}\dots$ repeats with period N . We now can formulate

Theorem 1 (Denseness of periodic points). *The set of periodic points of the iterated Baker transformation is dense in $[0, 1)$.*

Proof. Let $p \in [0, 1)$ be an arbitrary number, with a binary expansion $p = 0.a_1a_2a_3\dots a_Na_{N+1}\dots$. Then consider the repeating binary expansion $q = 0.a_1a_2a_3\dots a_Na_1a_2a_3\dots a_Na_1\dots$. Clearly the point q is periodic with period N , where $|p - q| \leq 2^{-N}$. $\square$

All these periodic points are unstable: the system in practice will behave aperiodic. This can be seen by observing the graph of the Baker transformation and its iterates, compare figure 7.

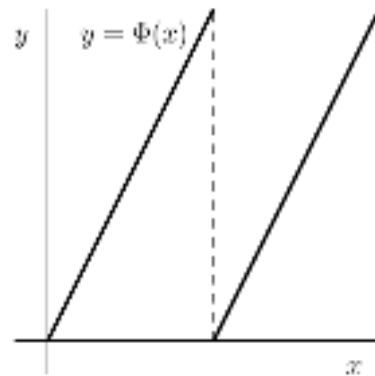


Figure 7 Graph $y = \Phi(x)$ of the Baker transformation.

Speaking of dense properties, in general a point $x_0 \in [0, 1]$ is called eventually periodic for the map Φ , if some finite iterate $\Phi^N(x_0)$ is a periodic point under Φ . In the present case, where Φ is the Baker transformation, the set of points that are eventually periodic with period 1, i.e., the eventual fixed points, also is dense in $[0, 1]$. Indeed, the eventual fixed points are exactly the finite binary expansions, which evidently fill the interval densely. The reader is invited to find other dense properties for him- or herself.

A less intuitive consequence of the binary expansions is the following

Theorem 2 (Existence of a dense orbit). *There exists a point $x_0 \in [0, 1)$ such that its orbit $\{x_0, x_1, x_2, \dots\}$ under iteration of the Baker transformation is dense in $[0, 1)$.*

² For the moment leaving alone ambiguities like $0.01111\dots = 0.10000\dots = \frac{1}{2}$.

Proof. Consider the binary expansion

$$\begin{aligned} x_0 &= 0.01 \\ &00\ 01\ 10\ 11 \\ &000\ 001\ 010\ 011\ 100\ 101\ 110\ 111 \\ &\dots \end{aligned}$$

where all possible truncated expansions are listed. By a similar argument as in the previous proof, this point comes arbitrarily close to any given point $p \in [0, 1]$. $\square$

The last theorem says that the ‘attractor’ $[0, 1]$ of the Baker transformation is connected: it cannot be decomposed in smaller sub-attractors.

Remarks

- Consider the family of Tent maps

$$\Phi_a(x) = \begin{cases} 2ax, & 0 \leq x \leq \frac{1}{2} \\ 2a(1-x), & \frac{1}{2} \leq x \leq 1, \end{cases}$$

where a is a real parameter. The Tent map Φ_1 , i.e., with $a = 1$ behaves strikingly similarly to the Baker transformation. In particular it has a strongly related symbolic dynamics. Moreover, Φ_1 has the same dynamics as the Logistic map for $\mu = 4$, i.e., of $\Phi_\mu(x) = 4x(1-x)$, see [10].

- In general the Tent maps Φ_a , as well as the Logistic maps Φ_μ can be attacked successfully with symbolic dynamics. Special care has to be taken with the orbit of the central point $x_0 = \frac{1}{2}$. Moreover, general symbolic dynamics is defined on Cantor sets, which is nicely illustrated by considering the Tent map family for $a > 1$, in which case the invariant set

$$\bigcap_{n=0}^{\infty} \Phi^{-n}([0, 1]),$$

consisting of the initial points, the orbits of which stay inside $[0, 1]$ for all time, is a Cantor set. Compare [9–10, 12, 18].

5 Mathematical intermezzo: Towards a definition of chaos

Summarizing, in the above we met dynamical systems with discrete time, generated by a map Φ by iteration $\vec{x}_{n+1} = \Phi(\vec{x}_n)$, $n = 0, 1, 2, \dots$. Here $\vec{x}$ varies over some finite dimensional state space. Let $\vec{x}_0, \vec{x}_1, \vec{x}_2, \dots$ be an evolution of this system, then

$$\begin{aligned} \vec{x}_1 &= \Phi(\vec{x}_0), \\ \vec{x}_2 &= \Phi(\vec{x}_1) \\ &= (\Phi \circ \Phi)(\vec{x}_0) = \Phi^2(\vec{x}_0) \\ &\dots \end{aligned}$$

The examples we saw are the Logistic family $\Phi_\mu(x) = \mu x(1-x)$, the Hénon family $\Phi_{a,b}(x, y) = (1 - ax^2 + y, bx)$ and the Baker transformation $\Phi(x) = 2x \pmod{1}$.

Until now we discussed chaos in a heuristic manner, saying that it is aperiodic, or just ‘weird’. Now we shall give a somewhat more rigid definition of a chaotic attractor, compare [10], although we shall not go all the way to Bourbaki. First we have to say what will be understood by an attractor.

Definition 3 (Attractor, [9]). A subset H of the phase space of the system generated by Φ is called an attractor iff

1. H is invariant, i.e., if $\vec{x}_0 \in H$, then also $\Phi(\vec{x}_0) \in H$;
2. There exists a neighbourhood U of H , such that for all initial states $\vec{x}_0 \in U$, for the corresponding evolutions $\vec{x}_0, \vec{x}_1, \vec{x}_2, \dots$ (with $x_n = \Phi^n(\vec{x}_0)$, $n = 0, 1, 2, \dots$), one has that $\vec{x}_n \rightarrow H$;
3. In H the iterated map Φ has a dense orbit.

We repeat that the existence of a dense orbit means that H is indecomposable, or that it is minimal with respect to the former two properties. We met this property before in the Baker transformation.

Next consider an evolution $\vec{x}_0, \vec{x}_1, \vec{x}_2, \dots$, with $\vec{x}_{n+1} = \Phi(\vec{x}_n)$, $n = 0, 1, 2, \dots$, inside the attractor H . For nearby initial points $\vec{y}_0 \in H$, we also consider the evolution $\vec{y}_0, \vec{y}_1, \vec{y}_2, \dots$, with $\vec{y}_{n+1} = \Phi(\vec{y}_n)$, $n = 0, 1, 2, \dots$.

Definition 4 (Sensitivity). The restriction $\Phi|_H$ has sensitive dependence on initial values iff there exists a positive constant δ , such that the following holds. For any initial value $\vec{x}_0 \in H$ and any (small) positive number ε , there exists an initial value $\vec{y}_0 \in H$, with $|\vec{y}_0 - \vec{x}_0| < \varepsilon$, and there exists a number $N \in \mathbb{N}$, such that $|\vec{y}_N - \vec{x}_N| > \delta$.

The property of sensitive dependence also holds for the Baker transformation, it has to do with the stretching that leads to loss of information in the practical case when working in finite precision, leading to unpredictability of the evolutions on a longer-term range. For further discussion of this notion and possible refinements, see [9], chapters I and III. Also see [7], chapter VI. For more background see [18]. Finally we have:

Definition 5 (Chaos). The attractor H of the dynamical system generated by the map Φ is chaotic iff the restriction $\Phi|_H$ has sensitive dependence on initial values.

It is mathematically more or less reassuring to have the above conditions available. However, we then carry the burden of proving that in the above examples these definitions play a significant role. In the case of the Baker transformation this can be done. (Hint: try $\delta = \frac{1}{4}$.) In the other cases this is not easy at all, and sometimes only vague statements are proven like ‘for a set of parameter values of positive measure the system has a chaotic attractor’. See above.

Remarks

- In the literature many variations exist on the above definitions. For example, an attractor does not necessarily have to attract a full neighbourhood, but a set of full (or just positive) measure will do. Also sometimes it is required that the periodic points should be dense in the attractor, again see the example of the Baker transformation.
- One reason is provided by the unwieldy examples, that look chaotic, but can only be forced to satisfy alternate definitions.
- Another reason is that there is at least one other entrance to chaotic dynamics, which uses probabilistic or measure theoretical methods. At the end we shall come back to this.

6 Two examples with continuous time

The scope of the above seems to be somewhat limited, although we shall see that the case of the Hénon family represents a large class of systems that occur in applications.

One of the icons of the theory is the Lorenz attractor, see figure 8. It is generated by the following autonomous system of ODE's in $\mathbb{R}^3$ in the same way as before: let the system run and omit all transient information. An evolution now simply is a solution or integral curve.

$$\begin{aligned}\dot{x} &= -\sigma x + \sigma y \\ \dot{y} &= Rx - y - xz \\ \dot{z} &= -Bz + xy,\end{aligned}$$

where $\sigma = 10$, $B = 8/3$ and $R = 28$. Here and elsewhere we use the notation $\dot{x}(t) = \frac{d}{dt}x(t)$. The example was published in 1963 in a meteorological journal, for details and background, e.g., see [12, 16]. We just mention here that the system has to do with long term behaviour of the atmospheric circulation and indicates that even at the level of simplified climate models chaos may occur. Again chaos is related to unpredictability.



Figure 8 The Lorenz attractor projected on a plane.

This attractor has been a challenge for mathematicians for a long time, only quite recently it has been shown to be chaotic according to the definitions, see [23].

The unwieldiness of the Lorenz system was one reason for Rössler to introduce a simpler system in 1976 with similar properties as the Lorenz system:

$$\begin{aligned}\dot{x} &= -(y + z) \\ \dot{y} &= x + \frac{1}{5}y \\ \dot{z} &= \frac{1}{5} + z(x - \mu).\end{aligned}$$

For $\mu = 4.9$ the attractor is given in figure 9. In the present case it is easier to extract mathematical information.

In both cases the attractor locally seems to be the product a surface and a Cantor set. Numerically estimated fractal dimensions are between 2 and 3. For background see [9, 12, 16, 21].

7 Hénon everywhere

The examples of dynamical systems we met until now all had a somewhat artificial character. In this section we introduce a simple mechanical context, around the swing, in which we shall produce Hénon-like attractors of 2-dimensional diffeomorphisms. We aim to illustrate that the theorem of Benedicks and Carleson regarding strange attractors for such maps,

$$H = \overline{W^u(p)},$$

seems to be quite a universal characterization. Also see [19–20] for extensions. Here p is an appropriate saddle point and $W^u(p)$ is its unstable manifold, see above. It has to be added here that the mathematics of the matter is not so far yet that these illustrations also can be made precise.



Figure 9 The Rössler attractor projected on a plane.

Mechanical background

As a starting point we take the planar pendulum without friction, as it occurs in almost all Mechanics textbooks, also see [4–5]. Consider a mathematical pendulum of length ℓ with mass m that moves in a vertical plane, under the influence of gravitation with acceleration g . Let x be the deviation from the downward vertical equilibrium position, measured in radians. As before $\dot{x}$ and $\ddot{x}$ denote the derivatives with respect to the time t , in this case called velocity and acceleration, respectively. The equation of motion then reads

$$\ddot{x} = -\omega^2 \sin x, \quad (3)$$

where $\omega^2 = g/\ell$. This is a direct consequence of Newton's second law $F = m \times \ell \ddot{x}$, where $F = F(x)$ is the component of the gravitational force in the direction of motion. We note the established fact that this equation of motion is independent of the mass m , which was known experimentally already to Galileo.

The above considerations hold in the *conservative* case without friction. However, it is easy to introduce some friction or damping in the equation of motion as follows

$$\ddot{x} = -\omega^2 \sin x - c\dot{x}, \quad (4)$$

where $c > 0$ is a positive damping coefficient.

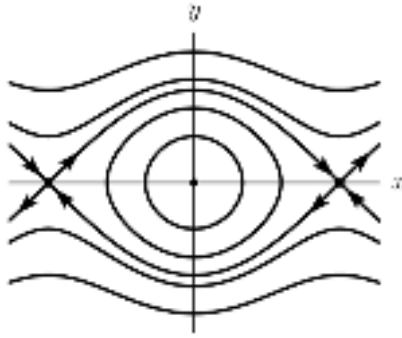


Figure 10 Phase portrait of the undamped pendulum.

The phase plane

One tool when dealing with nonlinear systems like the pendulum, is the phase plane. Indeed, introducing $y = \dot{x}$ as an independent variable we consider the Cartesian (x, y) -plane. The equations of motion (3) and (4) then turn into a system of ODE's

$$\begin{aligned}\dot{x} &= y \\ \dot{y} &= -\omega^2 \sin x,\end{aligned}\quad (5)$$

and

$$\begin{aligned}\dot{x} &= y \\ \dot{y} &= -\omega^2 \sin x - cy,\end{aligned}\quad (6)$$

compare the 3-dimensional systems from the previous section. These vector fields give rise to integral curves, the projection of which to the x -axis corresponds to the physical dynamics within these models. In figures 10 and 11 we depicted the corresponding phase portraits respectively. In the latter, damped, case almost all evolutions end in the lower equilibrium point $(x, y) = (0, 0)$, which is the attractor in that case.

The Poincaré map

In the damped case generally all energy dissipates away and the pendulum comes to complete rest. Now what happens if we introduce energy to the system, e.g., by also varying the pendulum-length periodically in time? Just consider the equation of motion

$$\ddot{x} + c\dot{x} + (\omega^2 + \varepsilon \sin(\Omega t)) \sin x = 0 \quad (7)$$

which leads to the 3-dimensional vector field

$$\begin{aligned}\dot{x} &= y \\ \dot{y} &= -(\omega^2 + \varepsilon \sin(\Omega t)) \sin x - cy \\ \dot{t} &= 1,\end{aligned}\quad (8)$$

which is $2\pi/\Omega$ -periodic in t . Let $(x(t), y(t), t)$ be an integral curve of the system (8) and consider instants $t_n = 2\pi n/\Omega$, $n = 0, 1, 2, \dots$. We call $(x(t_n), y(t_n))_{n=0}^\infty$ a *stroboscopic sequence*. From the theory of ordinary differential equations, e.g., see [11, 13, 24], it follows that there exists a map $(x, y) \mapsto \Phi(x, y)$ such that a stroboscopic sequence is formed by iterations under Φ . We call Φ the stroboscopic map or Poincarémap of the time periodic vector field (8).

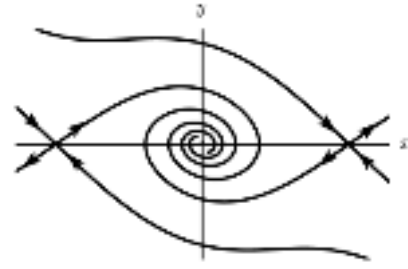


Figure 11 Phase portrait of the damped pendulum.

In figure 12 we depicted the attractor H for a certain value of c, ω, Ω and ε . In the particular case we are in, a strong resonance is taking place in the sense that $\omega : \Omega \approx 1 : 2$, in which case $(x, y) = (0, 0)$ is a saddle-point of the Poincarémap Φ . This means that the downward 'equilibrium' of the pendulum has been destabilized by the resonant excitation. It is easy to guess now that the $H = \overline{W^u((0, 0))}$, compare the Hénon case, although at the moment it won't be easy to prove. Locally the geometry also resembles the Hénon case: as before it 'is' the product of curve and Cantor set. For a more extensive discussion, see [4–6, 19–20].

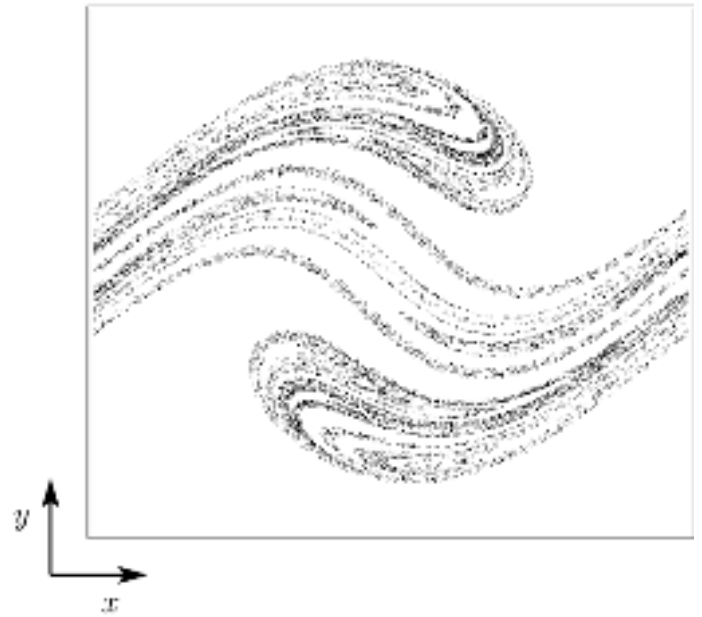


Figure 12 Hénon-like strange attractor in the Poincarémap of a forced pendulum: the damped case.

Remarks

- The mathematical conjecture behind all this goes much further, namely that in families of 2-dimensional dissipative diffeomorphisms strange attractors are characterized by $H = \overline{W^u(p)}$, for a suitable periodic saddle-point p .
- The Poincarémap also has a nice geometric meaning. Indeed, consider the vector field (8) in the 3-dimensional (x, y, t) -space. By periodicity in t , the whole 'block' of dynamics between $t = 0$ and $t = 2\pi/\Omega$ repeats itself periodically.

The Poincarémap now follows the integral curves from the section $t = 0$ to $t = 2\pi/\Omega$, thus defining the smooth planar map Φ , compare [11, 13, 24].

Without friction

The undamped case with $c = 0$ also is interesting. In that case the system is *conservative* and the Poincarémap Φ can be shown to preserve area, see [1, 7]. In figure 13 several evolutions (or orbits) have been plotted. Here regular and irregular, or chaotic, behaviour occur for the same parameter values. However, the ‘chaotic cloud’ here consists of only one orbit.

Its structure is not yet well-understood. The general conjecture is that the chaotic evolution densely fills a set with *positive* area (the so-called chaotic sea) and that the dynamics on this sea is sufficiently ‘mixing’. This problem was raised in the sixties of the 20-th century, see [2], and to this day remains unsolved. For an elementary discussion also see [6]. Recently however, in a simpler case of the so-called area preserving standard map, a result in this direction was proven [15].

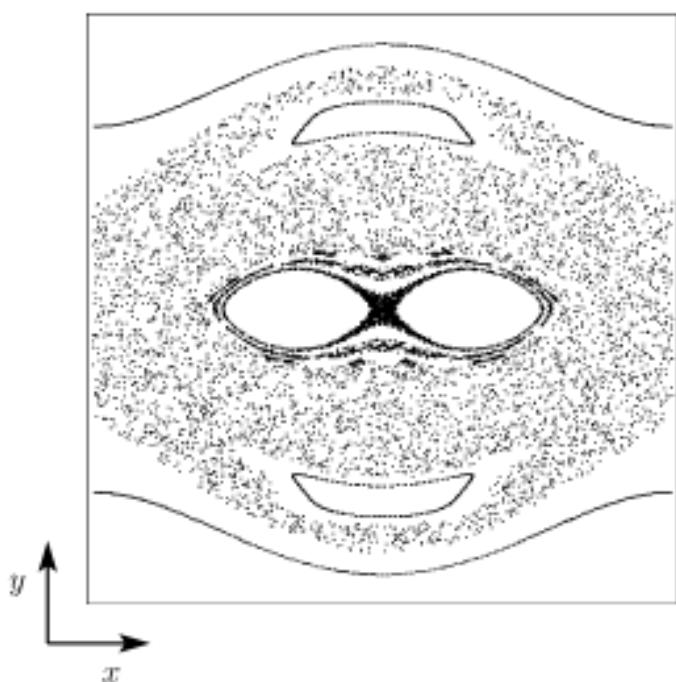


Figure 13 Hénon-like strange attractor in the Poincarémap of a forced pendulum: the undamped case.

Remark. In figure 13, due to the 1:2-resonance, the origin $(x, y) = (0, 0)$ is unstable: it is a saddle fixed point of the map Φ . Its unstable manifold approximately forms a figure 8 loop. Inside there exists a stable period-2 evolution. The motion of the incense container in the church of Santiago de Compostela can be explained in this way. See [5].

8 Random aspects

In this section we indicate some connections of the above with Probability Theory. Compare [1–2, 12].

The dynamical distribution

Let H be a (strange) attractor of the discrete dynamical system $x_{n+1} = \Phi(x_n)$, with initial state x_0 . This leads to the Φ -evolution $x_0, x_1, x_2, \dots$. For any (reasonable) subset $A \subseteq H$ consider the probability

$$P(A) := \lim_{N \rightarrow \infty} \frac{\#\{n \mid 0 \leq n \leq N \text{ \& } x_n \in A\}}{N+1},$$

which is nothing but the relative visiting frequency of the evolution to A . In many cases $P(A)$ is independent of the initial state x_0 . Assuming this independence, we obtain a probability distribution on H , usually called the *dynamical* (or *physical*) *distribution*. It is easy to see that the distribution is dynamically invariant, in the sense that $P(\Phi^{-1}(A)) = P(A)$, for (reasonable) subsets $A \subseteq H$. This invariant distribution allows an important connection with Ergodic Theory, a subdiscipline of Probability Theory, see [14, 17]. The remark in section 7 about ‘mixing’ belongs to this theory.

For the Baker transformation the dynamical distribution is just the uniform distribution on $[0, 1]$, while for the Logistic map with $\mu = 4$ the density is given by the Bèta-function

$$\frac{1}{\pi \sqrt{x(1-x)}}.$$

For the Hénon attractor such a simple formula cannot be given, nevertheless it is worthwhile to think in this way. The strange attractor H , as depicted in figure 5 can be seen as the support of the invariant distribution. The sensitivity means that a small cloud of initial states is smeared out over the whole attractor H . Again, more precise statements can be made with help of Ergodic Theory.

In the general chaotic setting one can say that the sensitivity of definition 4 means that iterates $\Phi^N(\vec{x}_0)$ and $\Phi^M(\vec{x}_0)$ are almost uncorrelated for large values of $N - M$. This seems to imply that for individual evolutions (orbits) only the short term future allows for deterministic predictions and that for the longer term future statistical methods have to be applied. Also see [21].

Final remarks

Another way to deal with uncertainty is by the so-called fractal basin-boundaries. Suppose a discrete dynamical system $x_{n+1} = \Phi(x_n)$ is given, with initial state x_0 . It may occur that the system has a finite number of point attractors, but that the basins of attraction have strange boundaries. Indeed, in the case of three attractors the boundaries may have the following property: as soon as two of the boundaries meet, also the third is joining in. In that case, the total boundary certainly is a fractal set. This kind of subsets of the plane was studied extensively by L.E.J. Brouwer.

An example of this phenomena can be found in [12], where the computer experiment is presented of a magnetic spherical pendulum that is attracted by three different magnets.

Such a fractal basin boundary often is a strange repeller. A class of examples can be found when iterating complex analytic maps: the so-called Julia set belongs to this kind. See, e.g., [9, 12].

With some good will, also the good old die can be seen in this perspective. Indeed, we can view this system to have six different point attractors with complicated basin boundaries. As we said before, in such a case ‘randomness’ seems to be only introduced for the sake of convenience.

All this leads to a well-known philosophical question [25], namely whether the latter is not always the case: that randomness is a convenient short-cut in deterministic dynamics that are just too complicated to deal with in another way. In this respect one may think of systems like the atmospheric circulation (producing the

weather). Another example comes from Statistical Physics and concerns the hard spheres approximation model for a gas, which has sensitive dependence on initial states.

On the other hand it seems that Quantum Mechanics takes care of 'true' randomness at very small precision. $\Leftarrow$

Acknowledgements

The author thanks Aernout van Enter, Igor Hoveijn and Floris Takens for their help in preparing this paper.

References

- 1 V.I. Arnol'd: *Mathematical Methods of Classical Mechanics*. Springer-Verlag 1980.
- 2 V.I. Arnol'd, A. Avez: *Ergodic Problems of Classical Mechanics*. Benjamin Inc. 1968.
- 3 M. Benedicks, L. Carleson: *The dynamics of the Hénon map*. Ann. Math. **133** (1991) 73–169.
- 4 H.W. Broer: *Huygens' isochrone slinger*, Euclides **70**(4) (1995) 110–117.
- 5 H.W. Broer: *De chaotische schommel*, Pythagoras **35**(5) (1997) 11–15.
- 6 H.W. Broer, J. vd Craats, F. Verhulst: *Het einde van de voorspelbaarheid? Chaostheorie, ideeën en toepassingen*. (Aramith Uitgevers &) Epsilon Uitgaven **35** 1995.
- 7 H.W. Broer, F. Dumortier, S.J. van Strien, F. Takens: *Structures in Dynamics*. Studies in Mathematical Physics 2, North-Holland 1991.
- 8 H.W. Broer, C. Simó, J.C. Tatjer: *Towards global models near homoclinic tangencies of dissipative diffeomorphisms*. Nonlinearity **11** (1998) 667–770.
- 9 H.W. Broer, F. Verhulst (eds.): *Dynamische Systemen en Chaos, een revolutie vanuit de wiskunde*. Epsilon Uitgaven **14** 1990.
- 10 R.L. Devaney: *An Introduction to Chaotic Dynamical Systems*. (2nd edition), Addison-Wesley (1986), 1989.
- 11 J.J. Duistermaat, W. Eckhaus: *Analyse van Gewone Differentiaalvergelijkingen*. Epsilon Uitgaven **33** 1995.
- 12 H.-O. Peitgen, H. Jürgens, D. Saupe: *Chaos and Fractals, New Frontiers of Science*. Springer-Verlag 1992.
- 13 M.W. Hirsch, S. Smale: *Differential Equations, Dynamical Systems, and Linear Algebra*. Academic Press 1974.
- 14 A. Katok, B. Hasselblatt: *Introduction to the Modern Theory of Dynamical Systems*. Encyclopedia of Mathematics and its Applications **54**. Cambridge University Press 1995.
- 15 O. Knill: *Positive Kolmogorov-Sinai entropy for the standard map*. Preprint 00–203 at mp.arc, available at www.ma.utexas.edu/mp.arc/c/99/99-293.ps.gz.
- 16 E.N. Lorenz: *The Essence of Chaos*. University of Washington / University College London Press 1993.
- 17 R. Mañé: *Ergodic Theory and Differentiable Dynamics*. Ergebnisse der Mathematik und ihre Grenzgebiete **8**, Springer-Verlag 1987.
- 18 W.C. de Melo, S.J. van Strien: *One-Dimensional Dynamics*. Ergebnisse der Mathematik und ihre Grenzgebiete **3**(25), Springer-Verlag 1993.
- 19 L. Mora, M. Viana: *Abundance of strange attractors*. Acta Math **171** (1993) 1–71.
- 20 J. Palis, F. Takens: *Hyperbolicity & Sensitive Chaotic Dynamics at Homoclinic Bifurcations*. Cambridge Studies in Advanced Mathematics **35**, Cambridge University Press 1993.
- 21 D. Ruelle: *De Wetten van Toeval en Chaos*. Aramith Uitgevers 1991.
- 22 J.C. Tatjer: *Invariant manifolds and bifurcations for one and two dimensional maps*. PhD Thesis, Universitat de Barcelona, 1991.
- 23 W. Tucker: *The Lorenz attractor exists*. PhD Thesis, Uppsala Universitet, 1999. Preprint at <http://www.math.uu.se/~warwick/papers.html>.
- 24 F. Verhulst: *Nonlinear Differential Equations and Dynamical Systems* (2nd ed). Universitext, Springer-Verlag 2000.
- 25 D. Wick: *The Infamous Boundary, Seven Decades of Controversy in Quantum Physics*. Birkhäuser 1995.

H.W. Lenstra, Jr.

Department of Mathematics # 3840, University of California, Berkeley, CA 94720–3840, U.S.A.
 Mathematisch Instituut, Universiteit Leiden,
 Postbus 9512, 2300 RA Leiden, The Netherlands
 hwl@math.berkeley.edu, hwl@math.leidenuniv.nl

P. Stevenhagen

Mathematisch Instituut, Universiteit Leiden,
 Postbus 9512, 2300 RA Leiden, The Netherlands
 psh@math.leidenuniv.nl

Artin reciprocity and

Emil Artin was born on March 3, 1898 in Vienna, as the son of an art dealer and an opera singer, and he died on December 20, 1962 in Hamburg. He was one of the founding fathers of modern algebra. Van der Waerden acknowledged his debt to Artin and to Emmy Noether (1882–1935) on the title page of his *Moderne Algebra* (1930–31), which indeed was originally conceived to be jointly written with Artin. The single volume that contains Artin's collected papers, published in 1965 [1], is one of the other classics of twentieth century mathematics.

Artin's two greatest accomplishments are to be found in algebraic number theory. Here he introduced the *Artin L-functions* (1923) [2], which are still the subject of a major open problem, and he formulated (1923) [2] and proved (1927) [3] *Artin's reciprocity law*, to which the present paper is devoted.

Artin's reciprocity law is one of the cornerstones of *class field theory*. This branch of algebraic number theory was during the pre-war years just as forbidding to the mathematical public as modern algebraic geometry was to be in later years. It is still not the case that the essential simplicity of class field theory is known to "any arithmetician from the street" [16]. There is indeed no royal road to class field theory, but, as we shall show, a complete and rigorous statement of Artin's reciprocity law is not beyond the scope of a first introduction to the subject. To illustrate its usefulness in elementary number theory, we shall apply it to prove a recently observed property of Mersenne primes.

The Frobenius map

The identity

$$(a + b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$$

can be appreciated by anybody who can add and multiply. Thus, the modern mathematician may be inclined to view it as belonging to the discipline that studies addition and multiplication—that is, to *ring theory*. In this paper, we suppose all rings to be *commutative* and to have a unit element 1. With this convention, the identity above is a simple consequence of the ring axioms, if

the factor 2 in $2ab$ is interpreted as $1 + 1$. It takes an especially simple form if the term $2ab$ drops out:

$$(a + b)^2 = a^2 + b^2 \quad \text{if } 2 = 0.$$

Likewise, the general ring-theoretic identity

$$(a + b)^3 = a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3$$

(where $3 = 1 + 1 + 1$) assumes the simple form

$$(a + b)^3 = a^3 + b^3 \quad \text{if } 3 = 0.$$

One may now wonder: if n is *any* positive integer, does one have

$$(a + b)^n = a^n + b^n \quad \text{if } n = 0?$$

This fails already for the very next value of n : in the ring $\mathbf{Z}/4\mathbf{Z}$ of integers modulo 4, in which 4 equals 0, one has $(1 + 1)^4 = 16 = 0$ but $1^4 + 1^4 = 2 \neq 0$. One can show that it actually fails for *any* $n > 1$ that is composite. However, if n is *prime* then the statement is correct. To prove it, one observes that for any prime number n and any positive integer $i < n$ the number $i!(n-i)!\binom{n}{i} = n!$ is divisible by n , while $i!(n-i)!$ is not, so that $\binom{n}{i}$ must be divisible by n ; hence in a ring with $n = 0$ the only terms in the expansion $(a + b)^n = \sum_{i=0}^n \binom{n}{i} a^i b^{n-i}$ that remain are those with $i = 0$ or $i = n$.

The result just proved admits an attractive algebraic reformulation. Write p instead of n , in order to emphasize that we restrict to prime numbers. Let R be a ring in which one has $p = 0$, and define the p th power map $F: R \rightarrow R$ by $F(x) = x^p$. We just proved the identity

$$F(a + b) = F(a) + F(b),$$

that is, F "respects addition". Since the commutative law implies $(ab)^p = a^p b^p$, it respects multiplication as well. Finally, it respects the unit element: $F(1) = 1$. These three properties constitute

Mersenne primes

ARTIN RECIPROCITY CELEBRATION

Dinsdag 3 maart 1998
Universiteit van Amsterdam

10.00

Opening door T. H. Koornwinder

10.00-11.00

H. W. Lenstra, Jr.,
RTI Leiden/UC Berkeley

Quadratic reciprocity and Artin reciprocity

11.30-12.30

P. Stevenhagen

Universiteit van Amsterdam

Class field theory in practice

14.00-15.00

J. T. Tate

University of Texas at Austin

Artin and L-functions

15.30-16.30

J. Tits

Collège de France, Paris

Buildings

Receptie na afloop van de laatste voordracht

Op 3 maart 1998 is het honderd jaar geleden dat Emil Artin (1898-1962) werd geboren in Wenen, als zoon van een kunsthandelaar en een operazangeres. Vele wiskundigen kennen zijn naam aan de titelpagina van Van der Waerden's *Algebra*. In de getaltheorie leeft zijn naam voort in de reciprociteitswet van Artin.

In Nederland wordt Artin's honderdste geboortedag gevierd met vier zich tot een algemeen wiskundig gehoor richtende voordrachten over onderwerpen die hem na aan het hart lagen.

H. W. Lenstra, Jr.
(hw@wins.uva.nl)
P. Stevenhagen
(ps@wins.uva.nl)

Zaal P227

Gebouw Euclides

Plantage Muidergracht 24

1018 TV Amsterdam



the definition of a *ring homomorphism*, which leads to the following reformulation.

Theorem 1. *Let p be a prime number and R a ring in which we have $p = 0$. Then the p th power map $R \rightarrow R$ is a ring homomorphism from R to itself.*

The map in the theorem is called the *Frobenius map*, after Georg Ferdinand Frobenius (1849–1917), who realized its importance in algebraic number theory in 1880 (see [10, 15]).

Many “reciprocity laws”, including Artin’s, help answering the question: *which* ring homomorphism $R \rightarrow R$ is F ? That is, does F have a more direct description than through p th powering? We give two examples in which this can be done. Throughout, we let p be a prime number.

The simplest non-zero ring with $p = 0$ is the field $\mathbf{F}_p = \mathbf{Z}/p\mathbf{Z}$ of integers modulo p . Since any element of $\mathbf{F}_p$ can be written as $1 + 1 + \dots + 1$, the only ring homomorphism $\mathbf{F}_p \rightarrow \mathbf{F}_p$ is the identity. In particular, the Frobenius map $F: \mathbf{F}_p \rightarrow \mathbf{F}_p$ is the identity. Looking at the definition of F , we see that we proved *Fermat’s little theorem*: for any integer a , one has $a^p \equiv a \pmod{p}$.

Next we consider quadratic extensions of $\mathbf{F}_p$. Let d be a non-zero integer, and let p be a prime number not dividing $2d$. We consider the ring $\mathbf{F}_p[\sqrt{d}]$, the elements of which are by definition the formal expressions $u + v\sqrt{d}$, with u and v ranging over $\mathbf{F}_p$. No two of these expressions are considered equal, so the number of elements of the ring equals p^2 . The ring operations are the obvious ones suggested by the notation; that is, one defines

$$\begin{aligned}(u + v\sqrt{d}) + (u' + v'\sqrt{d}) &= (u + u') + (v + v')\sqrt{d}, \\ (u + v\sqrt{d}) \cdot (u' + v'\sqrt{d}) &= (uu' + vv'd) + (uv' + vu')\sqrt{d},\end{aligned}$$

where d in $vv'd$ is interpreted to be the element $(d \bmod p)$ of $\mathbf{F}_p$. It is straightforward to show that with these operations $\mathbf{F}_p[\sqrt{d}]$ is indeed a ring with $p = 0$.

Let us now apply the Frobenius map F to a typical element $u + v\sqrt{d}$. Using, in succession, the definition of F , the fact that it is a ring homomorphism, Fermat’s little theorem, the defining relation $(\sqrt{d})^2 = d$, and the fact that p is odd, we find

$$F(u + v\sqrt{d}) = (u + v\sqrt{d})^p = u^p + v^p(\sqrt{d})^p = u + v d^{(p-1)/2} \sqrt{d}.$$

This leads us to investigate the value of $d^{(p-1)/2}$ in $\mathbf{F}_p$. Again from Fermat’s little theorem, we have

$$0 = d^p - d = d \cdot (d^{(p-1)/2} - 1) \cdot (d^{(p-1)/2} + 1).$$

Since $\mathbf{F}_p$ is a field, one of the three factors d , $d^{(p-1)/2} - 1$, $d^{(p-1)/2} + 1$ must vanish. As p does not divide $2d$, it is exactly one of the last two. The *quadratic residue symbol* $(\frac{d}{p})$ distinguishes between the two cases: for $d^{(p-1)/2} = +1$ in $\mathbf{F}_p$ we put $(\frac{d}{p}) = +1$, and for $d^{(p-1)/2} = -1$ we put $(\frac{d}{p}) = -1$. The conclusion is that the Frobenius map is one of the two “obvious” automorphisms of $\mathbf{F}_p[\sqrt{d}]$: for $(\frac{d}{p}) = +1$ it is the identity, and for $(\frac{d}{p}) = -1$ it is the map sending $u + v\sqrt{d}$ to $u - v\sqrt{d}$.

The assignment $u + v\sqrt{d} \mapsto u - v\sqrt{d}$ is clearly reminiscent of complex conjugation, and it defines an automorphism in more general circumstances involving square roots. For example, define a ring $\mathbf{Q}[\sqrt{d}]$ by simply replacing $\mathbf{F}_p$ with the field $\mathbf{Q}$ of rational numbers in the above. The ring $\mathbf{Q}[\sqrt{d}]$ is a field when d is not

a perfect square; but whether or not it is a field, it has an identity automorphism as well as an automorphism of order 2 that maps $u + v\sqrt{d}$ to $u - v\sqrt{d}$. If we restrict to integral u and v , and reduce modulo p , then one of these two automorphisms gives rise to the Frobenius map of $\mathbf{F}_p[\sqrt{d}]$.

The Artin symbol

We next consider higher degree extensions. Instead of $X^2 - d$, we take any polynomial $f \in \mathbf{Z}[X]$ of positive degree n and with leading coefficient 1. Instead of $d \neq 0$, we require that f not have repeated factors or, equivalently, that its discriminant $\Delta(f)$ be non-zero. Instead of $\mathbf{F}_p[\sqrt{d}]$, for a prime number p , we consider the ring $\mathbf{F}_p[\alpha]$ consisting of all p^n formal expressions

$$u_0 + u_1\alpha + u_2\alpha^2 + \dots + u_{n-1}\alpha^{n-1}$$

with coefficients $u_i \in \mathbf{F}_p$, the ring operations being the natural ones with $f(\alpha) = 0$. Here the coefficients of f , which are integers, are interpreted in $\mathbf{F}_p$, as before. (Formally, one may define $\mathbf{F}_p[\alpha]$ to be the quotient ring $\mathbf{F}_p[Y]/f(Y)\mathbf{F}_p[Y]$.) In the same manner, replacing $\mathbf{F}_p$ with $\mathbf{Q}$, we define the ring $\mathbf{Q}[\alpha]$. It is a field if and only if f is irreducible, but there is no reason to assume that this is the case.

Note that we use the same symbol α for elements of different rings. This is similar to the use of the symbols $0, 1, 2 = 1 + 1$ for elements of different rings, and just as harmless.

We now need to make an important assumption, which is automatic for $n \leq 2$ but not for $n \geq 3$. Namely, instead of two automorphisms, we assume that a finite *abelian* group G of ring automorphisms of $\mathbf{Q}[\alpha]$ is given such that we have an equality

$$f = \prod_{\sigma \in G} (X - \sigma(\alpha))$$

of polynomials with coefficients in $\mathbf{Q}[\alpha]$; in particular, the order of G should be n . The existence of G is a strong assumption. For example, in the important case that f is irreducible it is equivalent to $\mathbf{Q}[\alpha]$ being a Galois extension of $\mathbf{Q}$ with an abelian Galois group.

Just as in the quadratic case, the Frobenius map of $\mathbf{F}_p[\alpha]$ is for almost all p induced by a unique element of the group G . The precise statement is as follows.

Theorem 2. *Let the notation and hypotheses be as above, and let p be a prime number not dividing $\Delta(f)$. Then there is a unique element $\varphi_p \in G$ such that the Frobenius map of the ring $\mathbf{F}_p[\alpha]$ is the “reduction” of φ_p modulo p , in the following sense: in the ring $\mathbf{Q}[\alpha]$, one has*

$$\alpha^p = \varphi_p(\alpha) + p \cdot (q_0 + q_1\alpha + \dots + q_{n-1}\alpha^{n-1})$$

for certain rational numbers $q_0, \dots, q_{n-1}$ of which the denominators are not divisible by p .

In all our examples, the condition on the denominators of the q_i is satisfied simply because the q_i are integers, in which case α^p and $\varphi_p(\alpha)$ are visibly “congruent modulo p ”. However, there are cases in which the coefficients of $\varphi_p(\alpha)$ have a true denominator, so that the q_i will have denominators as well. Requiring the latter to not be divisible by p prevents us from picking *any* $\varphi_p \in G$ and just *defining* the q_i by the equation in the theorem.

The proof of the theorem is a mildly technical exercise in ring theory, and we suppress it here. It involves no number-theoretic

subtleties of any kind, and one should not think of the theorem as a deep one. The assumption that G be abelian cannot be omitted.

The element φ_p of G is referred to as the *Artin symbol* of p . In the case $n = 2$ it is virtually identical to the quadratic symbol $(\frac{\Delta(f)}{p})$. Note that for $f = X^2 - d$ we have $\Delta(f) = 4d$, so the condition that p not divide $\Delta(f)$ is in this case equivalent to p not dividing $2d$.

We can now say that, for the rings $\mathbf{F}_p[\alpha]$ occurring in Theorem 2, knowing the Frobenius map is equivalent to knowing the Artin symbol φ_p in the group G . The Artin reciprocity law imposes strong restrictions on how φ_p varies over G as p ranges over all prime numbers not dividing $\Delta(f)$, and in this way it helps in determining the Frobenius map. Let us consider an example.

Take $f = X^3 + X^2 - 2X - 1$, an irreducible polynomial with discriminant $\Delta(f) = 49 = 7^2$. Since the discriminant is a square, Galois theory predicts that we are able to find a group G as in the theorem. Indeed, our ring $\mathbf{Q}[\alpha]$ —a field, actually—turns out to have an automorphism σ with

$$\sigma(\alpha) = \alpha^2 - 2,$$

and an automorphism $\tau = \sigma^2$ with

$$\tau(\alpha) = \sigma(\sigma(\alpha)) = (\alpha^2 - 2)^2 - 2 = -\alpha^2 - \alpha + 1;$$

here we used the defining relation $f(\alpha) = 0$, that is, $\alpha^3 = -\alpha^2 + 2\alpha + 1$. One checks that σ and τ constitute, together with the identity automorphism 1, a group of order 3 that satisfies the condition $f = (X - \alpha)(X - \sigma(\alpha))(X - \tau(\alpha))$ stated before Theorem 2.

Let us compute some of the Artin symbols φ_p for primes $p \neq 7$. We have

$$\alpha^2 \equiv \alpha^2 - 2 = \sigma(\alpha) \pmod{2},$$

so $\varphi_2 = \sigma$. Likewise,

$$\alpha^3 \equiv -\alpha^2 + 2\alpha + 1 \equiv -\alpha^2 - \alpha + 1 = \tau(\alpha) \pmod{3},$$

so $\varphi_3 = \tau$. A small computation yields

$$\alpha^5 \equiv -4\alpha^2 - 5\alpha + 3 \equiv \alpha^2 - 2 = \sigma(\alpha) \pmod{5},$$

so $\varphi_5 = \sigma$. Continuing in this way, one can list the value of φ_p for a few small p .

p	2	3	5	11	13	17	19	23
φ_p	σ	τ	σ	τ	1	τ	σ	σ
p	29	31	37	41	43	47	53	59
φ_p	1	τ	σ	1	1	σ	τ	τ
p	61	67	71	73	79	83	89	97
φ_p	σ	τ	1	τ	σ	1	σ	1

This table can easily be made with a computer, but that is not what we did. Instead, we applied Artin's reciprocity law. There is an easy pattern in the table, which the reader may enjoy finding before reading on.

Artin symbols are worth knowing because they control much of the arithmetic of $\mathbf{Q}[\alpha]$. They tell us in which way the polynomial f with $f(\alpha) = 0$ factors modulo the prime numbers coprime

to $\Delta(f)$. This gives strong information about the prime ideals of the ring $\mathbf{Z}[\alpha]$, which for $\mathbf{Z}[\alpha]$ are just as important as the prime numbers themselves are for $\mathbf{Z}$. Here are two illustrative results. Let the situation again be as in the theorem.

Result 1. *The degree of each irreducible factor of the polynomial $(f \bmod p)$ in $\mathbf{F}_p[X]$ is equal to the order of φ_p in the group G . In particular, one has $\varphi_p = 1$ in G if and only if $(f \bmod p)$ splits into n linear factors in $\mathbf{F}_p[X]$.*

It is, for $n > 2$, quite striking that all irreducible factors of $(f \bmod p)$ have the *same* degree. This exemplifies the strength of our assumptions. In the case $n = 2$, Result 1 implies that one has $(\frac{d}{p}) = 1$ if and only if d is congruent to a square modulo p , a criterion that is due to Euler (1755).

Result 2. *The polynomial f is irreducible in $\mathbf{Z}[X]$ if and only if G is generated by the elements φ_p , as p ranges over all prime numbers not dividing $\Delta(f)$.*

The first result is “local” in the sense that it considers a single prime number p , but the second one is global: it views the totality of all p . Result 1 and the ‘if’-part of Result 2 belong to algebra and are fairly straightforward. The ‘only if’-part of Result 2 is harder: it is number theory. For example, Result 2 implies that an integer d is not a square if and only if there exists a prime number p with $(\frac{d}{p}) = -1$.

Amusingly, there is also an Artin symbol that “imitates” complex conjugation just as φ_p imitates the Frobenius map. We denote it by φ_{-1} ; it is the unique element of G with the property that every ring homomorphism λ from $\mathbf{Q}[\alpha]$ to the field of complex numbers maps $\varphi_{-1}(\alpha)$ to the complex conjugate of $\lambda(\alpha)$. As in Result 1, the degree of each irreducible factor of f over the field $\mathbf{R}$ of real numbers equals the order of φ_{-1} in G , which is 1 or 2. The case $f = X^2 - d$ again provides a good illustration: just as φ_p is essentially the same as $(\frac{d}{p})$, so is φ_{-1} essentially the same as the sign $\text{sign}(d)$ of d .

Quadratic reciprocity

To explain Artin's reciprocity law, we return to the quadratic ring $\mathbf{Q}[\sqrt{d}]$. In that case knowing φ_p is tantamount to knowing $(\frac{d}{p})$, and Artin's reciprocity law is just a disguised version of the *quadratic reciprocity law*. The latter states that for any two distinct odd prime numbers p and q one has

$$\left(\frac{q}{p}\right) = \begin{cases} \left(\frac{p}{q}\right) & \text{if } p \equiv 1 \pmod{4}, \\ \left(\frac{-p}{q}\right) & \text{if } p \equiv -1 \pmod{4}. \end{cases}$$

At first sight, this is hardly believable: $(\frac{q}{p})$ is defined by a congruence modulo p , and $(\frac{p}{q})$ by a congruence modulo q ; what can these have to do with each other, when p and q are coprime? Nevertheless, the law is a theorem: it is the *theorema fondamentale* from Gauss's *Disquisitiones arithmeticae* (1801). Gauss also proved the *supplementary laws*

$$\left(\frac{-1}{p}\right) = \begin{cases} 1 & \text{if } p \equiv 1 \pmod{4}, \\ -1 & \text{if } p \equiv -1 \pmod{4}, \end{cases}$$

$$\left(\frac{2}{p}\right) = \begin{cases} 1 & \text{if } p \equiv \pm 1 \pmod{8}, \\ -1 & \text{if } p \equiv \pm 3 \pmod{8}, \end{cases}$$

the first of which is in fact immediate from the definition of $\left(\frac{d}{p}\right)$.

For our purposes it is convenient to use a different formulation of the quadratic reciprocity law. It goes back to Euler, who empirically discovered the law in the 1740's but was unable to prove it; we refer to the books by Weil [17] and Lemmermeyer [13] for the historical details.

Euler's quadratic reciprocity law. *Let d be an integer, and let p and q be prime numbers not dividing $2d$. Then we have*

$$\begin{aligned} p \equiv q \pmod{4d} &\implies \left(\frac{d}{p}\right) = \left(\frac{d}{q}\right), \\ p \equiv -q \pmod{4d} &\implies \left(\frac{d}{p}\right) = \text{sign}(d) \cdot \left(\frac{d}{q}\right). \end{aligned}$$

To derive this from Gauss's results, one first notes that $\left(\frac{d}{p}\right)$ is clearly periodic in d with period p , when p is fixed. Thus, if we can put the symbol "upside down"—as Gauss's fundamental theorem allows us to do, when d is an odd prime—then one may expect that $\left(\frac{d}{p}\right)$ is also a periodic function of p when d is fixed. In this way one can deduce Euler's quadratic reciprocity law from Gauss's version, at least when d is an odd prime number. The cases $d = -1$ and $d = 2$ are immediately clear from the supplementary laws, and the case of general d is now obtained from the rule $\left(\frac{d_1}{p}\right)\left(\frac{d_2}{p}\right) = \left(\frac{d_1 d_2}{p}\right)$.

Conversely, one can use Euler's formulation to deduce Gauss's version, simply by choosing $d = (q \pm p)/4$, the sign being such that d is an integer (see [8, Chap. III, Sec. 5]); and the supplementary laws are even easier. Thus, Euler's and Gauss's quadratic reciprocity laws carry substantially the same information.

Not only did Euler observe that the value of the quadratic symbol $\left(\frac{d}{p}\right)$ depends only on $p \pmod{4d}$, he also noticed that $\left(\frac{d}{p}\right)$ exhibits multiplicative properties "as a function of p ". For example, if p, q, r are primes satisfying $p \equiv qr \pmod{4d}$, then we have $\left(\frac{d}{p}\right) = \left(\frac{d}{q}\right)\left(\frac{d}{r}\right)$. Formulated in modern language, this leads to a special case of Artin reciprocity. Denote, for a non-zero integer m , by $(\mathbf{Z}/m\mathbf{Z})^*$ the multiplicative group of invertible elements of the ring $\mathbf{Z}/m\mathbf{Z}$. Let d again be any non-zero integer.

Artin's quadratic reciprocity law. *There exists a group homomorphism*

$$(\mathbf{Z}/4d\mathbf{Z})^* \longrightarrow \{\pm 1\}$$

with

$$(p \pmod{4d}) \longmapsto \left(\frac{d}{p}\right)$$

for any prime p not dividing $4d$.

The law implies, for example, that for prime numbers $p_1, p_2, \dots, p_t$ satisfying $p_1 p_2 \cdots p_t \equiv 1 \pmod{4d}$ one has $\left(\frac{d}{p_1}\right) \cdot \left(\frac{d}{p_2}\right) \cdots \left(\frac{d}{p_t}\right) = 1$.

To prove this multiplicative property, one first defines $\left(\frac{d}{n}\right)$ for any positive integer n that is coprime to $2d$, by starting from the prime case and using the rule $\left(\frac{d}{n_1 n_2}\right) = \left(\frac{d}{n_1}\right) \cdot \left(\frac{d}{n_2}\right)$. Next one shows, again starting from the prime case, that Gauss's results remain valid in this generality whenever they make sense, and one concludes that Euler's version carries over too. The symbol is now by

definition multiplicative in its lower argument, so it is automatic that one obtains a group homomorphism. It maps $(-1 \pmod{4d})$ to $\text{sign}(d)$.

Artin reciprocity over $\mathbf{Q}$

If we wish to generalize Artin's quadratic reciprocity law to the situation of Theorem 2, it is natural to guess that $4d$ is to be replaced by $\Delta(f)$, and $\left(\frac{d}{p}\right)$ by φ_p . This guess is correct. Let the polynomial f , the ring $\mathbf{Q}[\alpha]$, the abelian group G , and the Artin symbols φ_p for p not dividing $\Delta(f)$ be as in Theorem 2.

Artin reciprocity over $\mathbf{Q}$. *There exists a group homomorphism*

$$(\mathbf{Z}/\Delta(f)\mathbf{Z})^* \longrightarrow G$$

with

$$(p \pmod{\Delta(f)}) \longmapsto \varphi_p$$

for any prime number p not dividing $\Delta(f)$. It is surjective if and only if f is irreducible.

The map is called the *Artin map* or the *reciprocity map*. It sends, appropriately enough, $(-1 \pmod{\Delta(f)})$ to φ_{-1} . The assertion about its surjectivity is obtained from Result 2.

Artin's reciprocity law does not exhibit any symmetry that would justify the term "reciprocity". The name derives from the fact that it extends the quadratic reciprocity law, and that its generalization to number fields extends similar "higher power" reciprocity laws. Still, something can be saved: from Result 1 we know that φ_p determines the splitting behavior of the polynomial f modulo p , so Artin reciprocity yields a relation between $(f \pmod{p})$ and $(p \pmod{\Delta(f)})$ (cf. [18]).

In our cubic example $f = X^3 + X^2 - 2X - 1$ we have $\Delta(f) = 49$, and G is of order 3. Thus, the reciprocity law implies that the table of Artin symbols that we gave for f is periodic with period dividing 49. Better still: the period can be no more than 7, since it is not hard to show that any group homomorphism from $(\mathbf{Z}/49\mathbf{Z})^*$ to a group of order 3 factors through the natural map $(\mathbf{Z}/49\mathbf{Z})^* \rightarrow (\mathbf{Z}/7\mathbf{Z})^*$. This is what the reader may have perceived: one has $\varphi_p = 1, \sigma$, or τ according as $p \equiv \pm 1, \pm 2$, or $\pm 3 \pmod{7}$. It is a general phenomenon for higher degree extensions that the number $\Delta(f)$ in our formulation of the reciprocity law can be replaced by a fairly small divisor.

Cyclotomic extensions

Artin's reciprocity law over $\mathbf{Q}$ generalizes the quadratic reciprocity law, and it may be thought that its mysteries lie deeper. Quite the opposite is true: the added generality is the first step on the way to a natural proof. It depends on the study of *cyclotomic extensions*.

Let m be a positive integer, and define the m -th cyclotomic polynomial $\Phi_m \in \mathbf{Z}[X]$ to be the product of those irreducible factors of $X^m - 1$ in $\mathbf{Z}[X]$ with leading coefficient 1 that do not divide $X^d - 1$ for any divisor $d < m$ of m . One readily proves the identity

$$\prod_d \Phi_d = X^m - 1,$$

where the product ranges over all divisors d of m . From this one can derive that the degree of Φ_m equals $\varphi(m) =$

$\#(\mathbf{Z}/m\mathbf{Z})^*$. The discriminant $\Delta(\Phi_m)$ divides the discriminant of $\Delta(X^m - 1)$, which equals $\pm m^m$. For example, the discriminant of $\Phi_8 = (X^8 - 1)/(X^4 - 1) = X^4 + 1$, which equals 2^8 , divides $\Delta(X^8 - 1) = -2^{24}$.

Denoting by ζ_m a “formal” zero of Φ_m , we obtain a ring $\mathbf{Q}[\zeta_m]$ that has vector space dimension $\varphi(m)$ over $\mathbf{Q}$. We have $\zeta_m^m = 1$, but $\zeta_m^d \neq 1$ when $d < m$ divides m , so the multiplicative order of ζ_m equals m . In the polynomial ring over $\mathbf{Q}[\zeta_m]$, the identity

$$\Phi_m = \prod_{a \in (\mathbf{Z}/m\mathbf{Z})^*} (X - \zeta_m^a)$$

is valid. One deduces that for each $a \in (\mathbf{Z}/m\mathbf{Z})^*$, the ring $\mathbf{Q}[\zeta_m]$ has an automorphism ϕ_a that maps ζ_m to ζ_m^a , and that $G = \{\phi_a : a \in (\mathbf{Z}/m\mathbf{Z})^*\}$ is a group isomorphic to $(\mathbf{Z}/m\mathbf{Z})^*$; in particular, it is abelian. This places us in the situation of Theorem 2, with $f = \Phi_m$ and $\alpha = \zeta_m$. Applying the theorem, we find $\varphi_p = \phi_p$ for all primes p not dividing m : all q_i in the theorem vanish! Artin’s reciprocity law is now almost a tautology: if we identify G with $(\mathbf{Z}/m\mathbf{Z})^*$, the Artin map

$$(\mathbf{Z}/\Delta(\Phi_m)\mathbf{Z})^* \rightarrow (\mathbf{Z}/m\mathbf{Z})^*$$

is simply the map sending $(a \bmod \Delta(\Phi_m))$ to $(a \bmod m)$ whenever a is coprime to m . This map is clearly surjective, so we recover the well-known fact that Φ_m is irreducible in $\mathbf{Z}[X]$. Thus, our cyclotomic ring is actually a field.

We conclude that for cyclotomic extensions, Artin’s reciprocity

law can be proved by means of a plain verification. One can now attempt to prove Artin’s reciprocity law in other cases by reduction to the cyclotomic case. For example, the supplementary law that gives the value of $(\frac{2}{p})$ is a consequence of the fact that $\zeta_8 + \zeta_8^{-1}$ is a square root of 2. Namely, one has

$$\varphi_p(\sqrt{2}) = \varphi_p(\zeta_8 + \zeta_8^{-1}) \equiv (\zeta_8 + \zeta_8^{-1})^p \equiv \zeta_8^p + \zeta_8^{-p} \pmod{p};$$

for $p \equiv \pm 1 \pmod{8}$, this equals

$$\zeta_8 + \zeta_8^{-1} = \sqrt{2},$$

and for $p \equiv \pm 3 \pmod{8}$ it is

$$\zeta_8^3 + \zeta_8^{-3} = \zeta_8^4 \cdot (\zeta_8 + \zeta_8^{-1}) = -\sqrt{2}.$$

This confirms that in the two respective cases one has $(\frac{2}{p}) = 1$ and $(\frac{2}{p}) = -1$.

The reader may enjoy checking that our example $f = X^3 + X^2 - 2X - 1$ can also be reduced to the cyclotomic case: if ζ_7 is a zero of $\Phi_7 = (X^7 - 1)/(X - 1) = \sum_{i=0}^6 X^i$, then $\alpha = \zeta_7 + \zeta_7^{-1}$ is a zero of f , and one finds

$$\begin{aligned} \varphi_p(\alpha) &= \zeta_7^p + \zeta_7^{-p} \\ &= \begin{cases} \zeta_7 + \zeta_7^{-1} = \alpha & \text{for } p \equiv \pm 1 \pmod{7}, \\ \zeta_7^2 + \zeta_7^{-2} = \alpha^2 - 2 = \sigma(\alpha) & \text{for } p \equiv \pm 2 \pmod{7}, \\ \zeta_7^3 + \zeta_7^{-3} = \alpha^3 - 3\alpha = \tau(\alpha) & \text{for } p \equiv \pm 3 \pmod{7}. \end{cases} \end{aligned}$$



This proves our observation on the pattern underlying the table of Artin symbols.

The theorem of Kronecker-Weber (1887) implies that the reduction to cyclotomic extensions will always be successful. This theorem, which depends on a fair amount of algebraic number theory, asserts that every Galois extension of $\mathbf{Q}$ with an abelian Galois group can be embedded in a cyclotomic extension (see [14, Chap. 6]). That takes care of the case in which f is irreducible, from which the general case follows easily. In particular, to prove the quadratic reciprocity law it suffices to express square roots of integers in terms of roots of unity, as we just did with $\sqrt{2}$. Such expressions form the basis of one of Gauss's many proofs for his fundamental theorem.

Algebraic number theory

A *number field* is an extension field K of $\mathbf{Q}$ that is of finite dimension as a vector space over $\mathbf{Q}$. We saw already many of them in the preceding sections, but now their role will be different: they will replace $\mathbf{Q}$ as the *base field* in Artin's reciprocity law. Formulating the latter requires the analogue for K of several concepts that are taken for granted in the case of $\mathbf{Q}$, such as the subring $\mathbf{Z}$ of $\mathbf{Q}$ and the notion of a prime number. The facts that we need are easy enough to state, but their proofs take up most of a first course in algebraic number theory.

An element of a number field K is called an *algebraic integer* if it is a zero of a polynomial in $\mathbf{Z}[X]$ with leading coefficient 1. The set $\mathbf{Z}_K$ of algebraic integers in K is a subring of K that has K as its field of fractions. For $K = \mathbf{Q}$ it is $\mathbf{Z}$.

The theorem of unique prime factorization is not generally valid in $\mathbf{Z}_K$, and ideals have been invented in order to remedy this regrettable situation. We recall that a subset of a ring R is called an *ideal* if it is the kernel of a ring homomorphism that is defined on R or, equivalently, if it is an additive subgroup of R that is closed under multiplication by elements of R . An ideal is *prime* if it is the kernel of a ring homomorphism from R to some *field*. The *product* $\mathfrak{a}\mathfrak{b}$ of two ideals $\mathfrak{a}, \mathfrak{b}$ is the ideal consisting of all sums $\mu_1\nu_1 + \mu_2\nu_2 + \cdots + \mu_t\nu_t$ with $\mu_i \in \mathfrak{a}, \nu_i \in \mathfrak{b}$. For example, the ideals of the ring $\mathbf{Z}$ are the subsets of the form $m\mathbf{Z}$, where m is a non-negative integer; $m\mathbf{Z}$ is a prime ideal if and only if m is a prime number or 0, and multiplying two ideals comes down to multiplying the corresponding m 's.

In the ring $\mathbf{Z}_K$, the theorem of unique prime ideal factorization is valid: each non-zero ideal $\mathfrak{a}$ can be written as a product $\mathfrak{a} = \mathfrak{p}_1\mathfrak{p}_2 \cdots \mathfrak{p}_t$ of non-zero prime ideals $\mathfrak{p}_i$, and this representation is unique up to order. Several basic relations between ideals can be read from their prime ideal factorizations. For example, one ideal contains another if and only if it "divides" it in an obvious sense; and two non-zero ideals $\mathfrak{a}$ and $\mathfrak{b}$ have no prime ideal in common in their factorizations if and only if they are "coprime" in the sense that $\mu + \nu = 1$ for some $\mu \in \mathfrak{a}, \nu \in \mathfrak{b}$. One recognizes familiar properties of positive integers.

Instead of "non-zero prime ideal of $\mathbf{Z}_K$ ", we shall also say "prime of K ". More correctly, we should say "*finite* prime of K ", since a full appreciation of the arithmetic of number fields requires the consideration of so-called "infinite primes" as well. For example, $K = \mathbf{Q}$ has just one infinite prime, and it gave rise to the "exotic" Artin symbol φ_{-1} . For our purposes we can afford to disregard infinite primes for general K , at the expense of one

more definition: an element $\nu \in K$ is called *totally positive* if each field embedding $K \rightarrow \mathbf{R}$ maps ν to a positive real number and (in case there are no such embeddings) $\nu \neq 0$; notation: $\nu \gg 0$. For example, in the case $K = \mathbf{Q}$ one has $\nu \gg 0$ if and only if $\nu > 0$; and if K contains a square root of a negative integer, then one has $-1 \gg 0$.

Primes in a quadratic field

We illustrate the results of the preceding section with the field $K = \mathbf{Q}[\sqrt{-7}]$. The element $\omega = (1 + \sqrt{-7})/2$ of K belongs to $\mathbf{Z}_K$, since it is a zero of the polynomial $X^2 - X + 2$. One has in fact $\mathbf{Z}_K = \mathbf{Z} + \mathbf{Z} \cdot \omega$. The unique non-trivial automorphism of K is denoted by an overhead bar; thus, one has $\bar{\omega} = 1 - \omega$.

Finding a ring homomorphism from $\mathbf{Z}_K$ to another ring is equivalent to finding a zero of $X^2 - X + 2$ in that ring. For example, the element $-2 \in \mathbf{Z}/8\mathbf{Z}$ satisfies $(-2)^2 - (-2) + 2 = 8 = 0$, so there is a ring homomorphism

$$\begin{aligned} \mathbf{Z}_K &\longrightarrow \mathbf{Z}/8\mathbf{Z}, \\ a + b \cdot \omega &\longmapsto (a - 2b \bmod 8). \end{aligned}$$

Since this map is "defined" by putting $8 = 0$ and $\omega = -2$, its kernel $\mathfrak{a}$ is generated by 8 and $\omega + 2$. The easily verified equality $8 = (\omega + 2)(\bar{\omega} + 2) \in (\omega + 2)\mathbf{Z}_K$ shows that a single generator suffices: $\mathfrak{a} = (\omega + 2)\mathbf{Z}_K$.

Standard computational techniques from algebraic number theory show that in our example *every* ideal of $\mathbf{Z}_K$ has the form $\mu\mathbf{Z}_K$, with $\mu \in \mathbf{Z}_K$. One may think that this is an exceptional property of K ; indeed, it implies unique factorization for elements rather than just for ideals, which is known to fail for infinitely many (non-isomorphic) number fields. However, recent computational results and heuristic arguments [6] suggest that this property is actually very common, especially among number fields of "high" dimension over $\mathbf{Q}$. This feeling is not supported by any known theorem.

For $K = \mathbf{Q}[\sqrt{-7}]$, it is also true that the generator $\mu \in \mathbf{Z}_K$ of an ideal $\mu\mathbf{Z}_K$ is unique up to multiplication by ± 1 . Just as for $\mathfrak{a} = (\omega + 2)\mathbf{Z}[\omega]$ above, the ring $\mathbf{Z}[\omega]/\mu\mathbf{Z}[\omega]$ is finite of cardinality $\mu\bar{\mu}$ for every $\mu \neq 0$.

Let us now look into the *primes* of K . Finding these comes down to finding zeroes of $X^2 - X + 2$ in *finite fields*. A central role is played by the finite fields of the form $\mathbf{F}_p$, for p prime. Over the field $\mathbf{F}_2$, one has $X^2 - X + 2 = X(X - 1)$, which gives rise to two ring homomorphisms $\mathbf{Z}_K \rightarrow \mathbf{F}_2$: one that maps ω to $0 \in \mathbf{F}_2$, and one that maps ω to $1 \in \mathbf{F}_2$. Their kernels are two prime ideals of index 2 of $\mathbf{Z}_K$, with respective generators ω and $\bar{\omega}$. Note that we have $\omega\bar{\omega} = 2$. The identity $\omega + 2 = -\omega^3$ shows that the ideal $\mathfrak{a}$ considered above factors as the cube of the prime $\omega\mathbf{Z}_K$.

Similarly, let p be an odd prime number with $(\frac{-7}{p}) = 1$; by the quadratic reciprocity law, the latter condition is equivalent to $(\frac{p}{7}) = 1$, i.e., to $p \equiv 1, 2$, or $4 \bmod 7$. Then -7 has a square root in $\mathbf{F}_p$, and since $X^2 - X + 2$ has discriminant -7 , it has two different zeroes in $\mathbf{F}_p$. As before, these give rise to two prime ideals $\pi\mathbf{Z}_K$ and $\bar{\pi}\mathbf{Z}_K$ of index $\pi\bar{\pi} = p$ in $\mathbf{Z}_K$.

Modulo 7, the polynomial $X^2 - X + 2$ has a double zero at 4, which leads to the prime ideal $\sqrt{-7}\mathbf{Z}_K$ of index 7. Generally, finding zeroes of $X^2 - X + 2$ in finite fields containing $\mathbf{F}_p$ amounts to factoring $X^2 - X + 2$ in $\mathbf{F}_p[X]$, which explains the relevance of Result 1 for the purpose of finding prime ideals. In fact, the

present considerations could have been made to depend on the Artin symbol for the extension $K = \mathbf{Q}[\omega]$ of $\mathbf{Q}$. Let, for example, p be one of the remaining prime numbers; so $p \equiv 3, 5$, or $6 \pmod{7}$. Then the Artin symbol equals -1 , the polynomial $X^2 - X + 2$ is irreducible in $\mathbf{F}_p[X]$, and $p\mathbf{Z}_K$ is a prime ideal for which $\mathbf{Z}_K/p\mathbf{Z}_K$ is a finite field of cardinality p^2 . These prime ideals are of lesser importance for us. They complete the enumeration of primes of K .

Discovering the laws of arithmetic in a specific number field, as we just did for $\mathbf{Q}[\sqrt{-7}]$, is not only an agreeable enterprise in its own right, it also has applications to the solution of equations in ordinary integers. The following theorem provides a classical illustration.

Theorem. *Let p be an odd prime number congruent to 1, 2, or 4 mod 7. Then p can be written as*

$$p = x^2 + 7y^2$$

for certain integers x and y ; moreover, x and y are uniquely determined up to sign.

To prove this, let $p = \pi\bar{\pi}$ as above, with $\pi \in \mathbf{Z}_K$. Writing $\pi = a + b\omega$, with $a, b \in \mathbf{Z}$, one obtains

$$p = \pi\bar{\pi} = (a + b\omega)(a + b\bar{\omega}) = a^2 + ab + 7b^2.$$

Clearly, $a(a + b)$ is odd, so a is odd and b is even; writing $b = 2y$ and $a + y = x$ we obtain the desired representation. Uniqueness is a consequence of unique prime ideal factorization.

Number theorists of all persuasions have been fascinated by prime numbers of the form $2^l - 1$ ever since Euclid (~300 B.C.) used them for the construction of *perfect numbers*. In modern times they are named after Marin Mersenne (1588–1648). The *Mersenne number* $M_l = 2^l - 1$ can be prime only if l is itself prime; M_l is indeed prime for $l = 2, 3, 5, 7, 13, 17, 19, 31$, and conjecturally infinitely many other values of l , whereas it is composite for $l = 11, 23, 29, 37, 41, 43, 47, 53$, and conjecturally infinitely many other prime values of l . One readily shows that a Mersenne prime M_l is 1, 2, or 4 mod 7 if and only if $l \equiv 1 \pmod{3}$, in which case one actually has $M_l \equiv 1 \pmod{7}$. Here are the first few such Mersenne primes, as well as their representations as $x^2 + 7y^2$:

$$M_7 = 127 = 8^2 + 7 \cdot 3^2,$$

$$M_{13} = 8191 = 48^2 + 7 \cdot 29^2,$$

$$M_{19} = 524287 = 720^2 + 7 \cdot 29^2,$$

$$M_{31} = 2147483647 = 43968^2 + 7 \cdot 5533^2,$$

$$M_{61} = 2305843009213693951 = 910810592^2 + 7 \cdot 459233379^2.$$

This table was made by Franz Lemmermeyer. He observed that in each case x is divisible by 8, a phenomenon that persisted when larger Mersenne primes were tried. A small computation modulo 8 shows that x is necessarily divisible by 4. Modulo higher powers of 2 one finds that y is $\pm 3 \pmod{8}$, but one learns nothing new about x . Maybe the divisibility by 8 is just an accident?

Abelian extensions

In order to formulate the analogue of Theorem 2 over an arbitrary number field K , we need to extend the notion of Frobenius map. For a prime $\mathfrak{p}$ of K , we write $k(\mathfrak{p}) = \mathbf{Z}_K/\mathfrak{p}$; this is a finite field,

and its cardinality is called the *norm* $\mathfrak{N}\mathfrak{p}$ of $\mathfrak{p}$. Instead of rings with “ $p = 0$ ” for some prime number p , we consider rings R that come equipped with a ring homomorphism $k(\mathfrak{p}) \rightarrow R$ for some prime $\mathfrak{p}$ of K . The *Frobenius map* F (relative to $\mathfrak{p}$) of such a ring is the map $R \rightarrow R$ defined by $F(x) = x^{\mathfrak{N}\mathfrak{p}}$. It is a ring homomorphism. Galois proved in 1830 that the Frobenius map of the finite field $k(\mathfrak{p})$ itself is the identity map. This generalizes Fermat’s little theorem.

Next we “lift” Frobenius maps to Artin symbols. To give a succinct description of the situation in which this can be done, we borrow a definition from *Galois theory for rings*. Let L be a ring that contains K , such that the dimension n of L as a vector space over K is finite. We assume that we are given an abelian group G of n automorphisms of L that are the identity on K , such that for some K -basis $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \dots, \varepsilon_n$ of L the matrix $A = (\sigma\varepsilon_i)_{1 \leq i \leq n, \sigma \in G}$ is invertible as a matrix over L . In this situation one says that L is an abelian (ring) extension of K with group G . The abelian ring extensions of $K = \mathbf{Q}$ are exactly the rings $\mathbf{Q}[\alpha]$ encountered in Theorem 2; but the present definition avoids reference to a specific defining polynomial f .

With L and G as above, one defines the subring $\mathbf{Z}_L$ of L in the same way as we did for $L = K$ in the previous section, and one defines the discriminant $\Delta(L/K)$ to be the $\mathbf{Z}_K$ -ideal generated by the numbers $(\det A)^2$, as A ranges over all matrices as above that are obtained from elements $\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_n$ of $\mathbf{Z}_L$; all these numbers lie in $\mathbf{Z}_K$. In the case $K = \mathbf{Q}$, this discriminant divides the discriminant $\Delta(f)$ considered earlier. We can now state the analogue of Theorem 2.

Theorem 3. *Let K be a number field, and let L be an abelian extension of K with group G . Then for every prime $\mathfrak{p}$ of K that does not divide $\Delta(L/K)$, there is a unique element $\varphi_{\mathfrak{p}} \in G$ with the property that the automorphism of $\mathbf{Z}_L/\mathfrak{p}\mathbf{Z}_L$ induced by $\varphi_{\mathfrak{p}}$ is the Frobenius map of $\mathbf{Z}_L/\mathfrak{p}\mathbf{Z}_L$ relative to $\mathfrak{p}$.*

Here we write $\mathfrak{p}\mathbf{Z}_L$ for the $\mathbf{Z}_L$ -ideal generated by $\mathfrak{p}$; the inclusion map $\mathbf{Z}_K \rightarrow \mathbf{Z}_L$ induces a ring homomorphism $k(\mathfrak{p}) \rightarrow \mathbf{Z}_L/\mathfrak{p}\mathbf{Z}_L$, so that the latter ring has indeed a well-defined Frobenius map relative to $\mathfrak{p}$. The element $\varphi_{\mathfrak{p}} \in G$ is again called the *Artin symbol* of $\mathfrak{p}$. What we said about the proof of Theorem 2 applies here as well.

To give an example, we return to $K = \mathbf{Q}[\sqrt{-7}] = \mathbf{Q}[\omega]$, with $\omega^2 - \omega + 2 = 0$, and we take $L = K[\beta]$, where β is a zero of $X^2 - \omega X - 1$. Since the discriminant $\omega^2 + 4 = \omega + 2$ of the latter polynomial is non-zero, and L has dimension 2 over K , it is automatic that L is abelian over K with a group G of order 2; the non-identity element ρ of G satisfies $\rho(\beta) = \omega - \beta = -1/\beta$. One can show that $\mathbf{Z}_L$ equals $\mathbf{Z}_K + \mathbf{Z}_K \cdot \beta$, and that this in turn implies that $\Delta(L/K)$ is the $\mathbf{Z}_K$ -ideal generated by the polynomial discriminant $\omega + 2$; it is the ideal $\mathfrak{a} = (\omega\mathbf{Z}_K)^3$ from the previous section.

Let us compute $\varphi_{\mathfrak{p}}$ for the prime $\mathfrak{p} = \sqrt{-7}\mathbf{Z}_K$ of norm 7 in this example. In the field $k(\mathfrak{p}) = \mathbf{F}_7$ we have $2\omega - 1 = \sqrt{-7} = 0$, and therefore $\omega = 4$. The ring $\mathbf{Z}_L/\mathfrak{p}\mathbf{Z}_L$ is the quadratic extension $\mathbf{F}_7[\beta]$ of $\mathbf{F}_7$ defined by $\beta^2 = \omega\beta + 1 = 4\beta + 1$. An easy computation shows that in that ring one has $\beta^{\mathfrak{N}\mathfrak{p}} = \beta^7 = 4 - \beta$. This is the same as the image of $\rho(\beta) = \omega - \beta$ in $\mathbf{Z}_L/\mathfrak{p}\mathbf{Z}_L$, so we have $\varphi_{\mathfrak{p}} = \rho$. The computationally oriented reader is invited to check in a similar way that each of the two primes $(8 \pm 3\sqrt{-7})\mathbf{Z}_K$ of norm $M_7 = 127$ has Artin symbol 1.

Artin's reciprocity law

Artin's reciprocity law in its general formulation is one of the main results of *class field theory*. As we remarked in the introduction, there is no royal road to this subject, but the most convenient one surely starts from the observation that the theorems of class field theory are, in their formulation, the simplest ones that have a chance of being true; indeed, the simplest ones that are *meaningful*. Artin's reciprocity law provides an apt illustration.

Let us place ourselves in the situation of Theorem 3, and ask what a generalization of Artin's reciprocity law to K might look like. Superficially, this seems to be an easy question, since every ingredient of the law for $\mathbf{Q}$ has a meaningful analogue over K . In particular, the natural replacement for the group $(\mathbf{Z}/m\mathbf{Z})^*$, which we defined for any non-zero integer m , is the group of invertible elements $(\mathbf{Z}_K/\mathfrak{m})^*$ of the finite ring $\mathbf{Z}_K/\mathfrak{m}$, for a non-zero $\mathbf{Z}_K$ -ideal $\mathfrak{m}$. However, closer inspection reveals a difficulty: if $\mathfrak{p}$ is a prime of K coprime to $\Delta(L/K)$, there is no way to give a meaningful interpretation to " $\mathfrak{p} \bmod \Delta(L/K)$ " as an element of $(\mathbf{Z}_K/\Delta(L/K))^*$.

This is the only problem we need to resolve: defining, for a non-zero ideal $\mathfrak{m}$ of $\mathbf{Z}_K$, a suitable "multiplicative" group "modulo $\mathfrak{m}$ " that contains an element " $\mathfrak{p} \bmod \mathfrak{m}$ " for each $\mathfrak{p}$ coprime to $\mathfrak{m}$, and that generalizes $(\mathbf{Z}/m\mathbf{Z})^*$. The desired group is called the *ray class group modulo $\mathfrak{m}$* , and we shall denote it by $\text{Cl}_{\mathfrak{m}}$. Anybody who has assimilated its definition is ready to appreciate class field theory.

Here is a description of $\text{Cl}_{\mathfrak{m}}$ by means of generators and relations: one generator $[\mathfrak{p}]$ for each prime $\mathfrak{p}$ of $\mathbf{Z}_K$ coprime to $\mathfrak{m}$, and one relation $[\mathfrak{p}_1] \cdot [\mathfrak{p}_2] \cdots [\mathfrak{p}_t] = 1$ for every sequence $\mathfrak{p}_1, \mathfrak{p}_2, \dots, \mathfrak{p}_t$ of prime ideals for which there exists $\nu \in \mathbf{Z}_K$ satisfying

$$\mathfrak{p}_1 \mathfrak{p}_2 \cdots \mathfrak{p}_t = \nu \mathbf{Z}_K, \quad \nu \equiv 1 \bmod \mathfrak{m}, \quad \nu \gg 0.$$

One can show that this definition has all the desired properties, and that $\text{Cl}_{\mathfrak{m}}$ is a finite abelian group. Using unique prime ideal factorization, one can reformulate the definition by saying that $\text{Cl}_{\mathfrak{m}}$ is the multiplicative group of equivalence classes of non-zero ideals $\mathfrak{a}$ of $\mathbf{Z}_K$ that are coprime to $\mathfrak{m}$, where $\mathfrak{a}_1$ belongs to the same class as $\mathfrak{a}_2$ if and only if there exist $\nu_1, \nu_2 \in \mathbf{Z}_K$ with

$$\nu_1 \mathfrak{a}_1 = \nu_2 \mathfrak{a}_2, \quad \nu_1 \equiv \nu_2 \equiv 1 \bmod \mathfrak{m}, \quad \nu_1 \gg 0, \quad \nu_2 \gg 0.$$

The reader who wishes to ponder this definition may show that it does generalize $(\mathbf{Z}/m\mathbf{Z})^*$, which it would not without the total positivity conditions. More generally, there is a group homomorphism from our "first guess" $(\mathbf{Z}_K/\mathfrak{m})^*$ to $\text{Cl}_{\mathfrak{m}}$ that sends $(\nu \bmod \mathfrak{m})$ to the class of $\nu \mathbf{Z}_K$ whenever $\nu \gg 0$; and although in general it is neither injective nor surjective, it is both for $K = \mathbf{Q}$.

We have reached the high point of the journey. Let the situation be as in Theorem 3.

Artin's reciprocity law. *There is a group homomorphism*

$$\text{Cl}_{\Delta(L/K)} \longrightarrow G$$

with

$$[\mathfrak{p}] \longmapsto \varphi_{\mathfrak{p}}$$

for every prime $\mathfrak{p}$ of K coprime to $\Delta(L/K)$. It is surjective if and only if L is a field.

We shall again call this map the *Artin map*. By definition of $\text{Cl}_{\Delta(L/K)}$, the theorem asserts that we have

$$\varphi_{\mathfrak{p}_1} \cdot \varphi_{\mathfrak{p}_2} \cdots \varphi_{\mathfrak{p}_t} = 1$$

whenever $\mathfrak{p}_1, \mathfrak{p}_2, \dots, \mathfrak{p}_t$ satisfy $\mathfrak{p}_1 \mathfrak{p}_2 \cdots \mathfrak{p}_t = \nu \mathbf{Z}_K$ for some $\nu \equiv 1 \bmod \Delta(L/K)$ with $\nu \gg 0$. This is just as unreasonable as the quadratic reciprocity law: the Artin symbols $\varphi_{\mathfrak{p}}$ are defined locally at the prime ideals $\mathfrak{p}$, and appear to be completely independent for different primes; how is it that they can "see" a global relationship satisfied by these primes?

In the case $K = \mathbf{Q}$ the Kronecker-Weber theorem may be felt to provide an adequate explanation of "why" the reciprocity law is true. For $K \neq \mathbf{Q}$, the immediate generalization of the Kronecker-Weber theorem is false. Finding a usable substitute is the content of Hilbert's twelfth problem, which is still outstanding.

When Artin formulated his reciprocity law in 1923, he could do no more than postulate its validity. It was only four years later that he was able to provide a proof, borrowing the essential idea from the Russian mathematician Nikolai Grigor'evich Chebotarëv. He was just in time, since Chebotarëv was in the process of constructing a proof himself [15]. Curiously, Chebotarëv's idea *also* reduces the proof to the cyclotomic case, but the reduction is not nearly as direct as it is over $\mathbf{Q}$.

Mersenne primes

Let us examine what Artin reciprocity comes down to in the example

$$\begin{aligned} K &= \mathbf{Q}[\sqrt{-7}] = \mathbf{Q}[\omega], & \omega^2 - \omega + 2 &= 0, \\ L &= K[\beta], & \beta^2 - \omega\beta - 1 &= 0 \end{aligned}$$

considered earlier. We know already that $\Delta(L/K) = \mathfrak{a}$ is the kernel of the map $\mathbf{Z}_K \rightarrow \mathbf{Z}/8\mathbf{Z}$ sending ω to -2 , and that it is the cube of the prime $\omega \mathbf{Z}_K$ of norm 2.

First we need to compute $\text{Cl}_{\mathfrak{a}}$. The reader who did give some thought to ray class groups will have no trouble verifying that the map $(\mathbf{Z}/8\mathbf{Z})^* \cong (\mathbf{Z}_K/\mathfrak{a})^* \rightarrow \text{Cl}_{\mathfrak{a}}$ defined in the previous section is surjective, and that its kernel is $\{\pm 1\}$. Hence we may identify $\text{Cl}_{\mathfrak{a}}$ with the group $(\mathbf{Z}/8\mathbf{Z})^*/\{\pm 1\}$ of order 2.

Consider next the Artin map $\text{Cl}_{\mathfrak{a}} \rightarrow G = \{1, \rho\}$. It can't be the trivial map, since the Artin symbol of the prime $\sqrt{-7}\mathbf{Z}_K$ is ρ ; hence it is an isomorphism, and, by the theorem, L is a field. In other words, the discriminant $\omega + 2 = -\omega^3$ of the polynomial defining L is not a square in K , which can also be seen directly. We have $L = K[\sqrt{-\omega}]$.

Unravelling the various maps, we arrive at the following simple recipe for computing Artin symbols in L :

if $\mathfrak{p} = \pi \mathbf{Z}_K$ is a prime of K different from $\omega \mathbf{Z}_K$, then $\varphi_{\mathfrak{p}}$ equals 1 or ρ according as π maps to ± 1 or to ± 3 under the map $\mathbf{Z}_K \rightarrow \mathbf{Z}/8\mathbf{Z}$ that sends ω to -2 .

For example, $\sqrt{-7} = 2\omega - 1$ maps to 3, confirming what we know about its Artin symbol. The numbers $8 \pm 3\sqrt{-7}$ map to $\pm 3 \cdot 3 = \pm 1$, so even the reader who is *not* computationally oriented can now conclude that both primes of norm 127 have Artin symbol equal to 1.

More generally, consider any Mersenne prime M_l with $l \equiv 1 \bmod 3$, and write $M_l = x^2 + 7y^2$, with $x, y \in \mathbf{Z}$. Then $x + y\sqrt{-7}$ generates a prime of norm M_l of K . Our recipe tells us that its Artin symbol equals 1 if $x + 3y$ is $\pm 1 \bmod 8$, and ρ otherwise.

Since we know $x \equiv 0 \pmod{4}$ and $y \equiv \pm 3 \pmod{8}$, the Artin symbol is 1 if and only if x is divisible by 8. In other words, the property of Mersenne primes observed by Lemmermeyer is equivalent to the assertion that any prime of $K = \mathbf{Q}[\sqrt{-7}]$ of norm M_l has trivial Artin symbol in the quadratic extension $L = K[\sqrt{-\omega}]$.

Surprisingly, we can use this reformulation to obtain a proof of Lemmermeyer's observation. Waving the magic wand of Galois theory we shall transform the base field $\mathbf{Q}[\sqrt{-7}]$ into $\mathbf{Q}[\sqrt{2}]$. Moving back and forth via the Artin symbol, we find that the alleged property of primes of norm M_l in the first field translates into a similar property of primes of norm M_l in the second field. As one may expect, the field $\mathbf{Q}[\sqrt{2}]$ has a natural affinity for the numbers $2^l - 1$, which leads to a rapid conclusion of the argument.

Theorem. *Let $M_l = 2^l - 1$ be a Mersenne prime with $l \equiv 1 \pmod{3}$, and write $M_l = x^2 + 7y^2$ with $x, y \in \mathbf{Z}$. Then x is divisible by 8.*

The proof operates in the extension $N = K[\sqrt{-\omega}, \sqrt{-\bar{\omega}}]$ of K that is "composed" of the quadratic extension $L = K[\sqrt{-\omega}]$ and its conjugate $K[\sqrt{-\bar{\omega}}]$. The dimension of N over K is 4, a basis consisting of $1, \sqrt{-\omega}, \sqrt{-\bar{\omega}}$, and $\sqrt{-\omega}\sqrt{-\bar{\omega}} = \sqrt{2}$. It suffices to prove the congruence

$$\xi^{M_l} \equiv \xi \pmod{M_l \mathbf{Z}_N} \quad \text{for all } \xi \in \mathbf{Z}_N,$$

since it implies that the Artin symbols of both primes of norm M_l of K in the subextension L of N are trivial.

If an extension can be written, just like N , as the composition of a "twofold" quadratic extension of $\mathbf{Q}$ with its conjugate, then there is a *second* way to write it in that manner. This is a generality from Galois theory; it is due to the dihedral group of order 8 possessing an outer automorphism.

In plain terms, N contains $\sqrt{2}$, and may be viewed as an extension of dimension 4 of the field $E = \mathbf{Q}[\sqrt{2}]$. From the identity

$$(\sqrt{-\omega} \pm \sqrt{-\bar{\omega}})^2 = -(\omega + \bar{\omega}) \pm 2\sqrt{-\omega}\sqrt{-\bar{\omega}} = -1 \pm 2\sqrt{2}$$

one deduces that N is the composition of two conjugate quadratic extensions of E , namely those obtained by adjoining square roots of $-1 + 2\sqrt{2}$ and $-1 - 2\sqrt{2}$. (The product of those square roots is a square root of -7 .) It follows that N is an *abelian* extension of E .

In the new base field E , we can explicitly factor M_l :

$$M_l = 2^l - 1 = \frac{\sqrt{2}^l - 1}{\sqrt{2} - 1} \cdot \frac{\sqrt{2}^l + 1}{\sqrt{2} + 1}.$$

Denote by ν_l and $\bar{\nu}_l$ the two factors on the right. They belong to $\mathbf{Z}_E = \mathbf{Z} + \mathbf{Z} \cdot \sqrt{2}$, and they are conjugate in E . Just as in the case of K , they generate two primes of E of norm M_l . As ν_l and $\bar{\nu}_l$ are coprime with product M_l , the congruence to be proved



is equivalent to

$$\begin{aligned}\xi^{M_l} &\equiv \xi \pmod{\nu_l \mathbf{Z}_N} \quad \text{and} \\ \xi^{M_l} &\equiv \xi \pmod{\tilde{\nu}_l \mathbf{Z}_N} \quad \text{for all } \xi \in \mathbf{Z}_N.\end{aligned}$$

In other words: it suffices to show that the Artin symbols of $\nu_l \mathbf{Z}_E$ and $\tilde{\nu}_l \mathbf{Z}_E$ in the abelian extension N of E are both the identity.

We write $N = E[\gamma, \delta]$, where γ and δ are zeroes of the quadratic polynomials $X^2 - (1 + \sqrt{2})X + 1$ and $X^2 - (1 - \sqrt{2})X + 1$ of discriminants $-1 + 2\sqrt{2}$ and $-1 - 2\sqrt{2}$, respectively. An automorphism of N is the identity as soon as it is the identity on both $E[\gamma]$ and $E[\delta]$. Thus it is enough to show that the Artin symbols of $\nu_l \mathbf{Z}_E$ and $\tilde{\nu}_l \mathbf{Z}_E$ for the extensions $E[\gamma]$ and $E[\delta]$ are trivial. For this we invoke Artin reciprocity. The discriminant of each of these extensions divides $(-1 + 2\sqrt{2})(-1 - 2\sqrt{2})\mathbf{Z}_E = 7\mathbf{Z}_E$. From $l \equiv 1 \pmod{6}$ and $\sqrt{2}^6 = 8 \equiv 1 \pmod{7}$ one sees $\sqrt{2}^l \equiv \sqrt{2} \pmod{7}$, so the generators ν_l and $\tilde{\nu}_l$ of our primes are both $1 \pmod{7\mathbf{Z}_E}$. Also, they are readily seen to be totally positive. Hence, the Artin

reciprocity law implies that their Artin symbols are trivial, as required.

The reader who dislikes the explicit manipulations in our argument will be reassured to learn that class field theory has theorems other than Artin's reciprocity law. Using these, one can establish the existence of the desired extensions without writing them down. This allows one, for example, to contemplate the possibility of formulating and proving a similar theorem that is not special to any particular number like 7.

In our proof, Artin's reciprocity law functioned as a bridge between ray class groups of two different number fields. It is actually possible to relate these ray class groups in a more elementary manner, by means of *genus theory*. There are also applications of Artin reciprocity to conjectured properties of Mersenne primes that do not appear to allow for similar simplifications [11]. $\Leftarrow$

Acknowledgments

The photographs of Emil Artin were kindly provided by Michael Artin. The first author was supported by NSF under grant No. DMS 92-24205.

References

For a description of Artin's life and his personality Richard Brauer's obituary [4] is particularly recommended. An elaborate introduction into class field theory and its historical background is found in Cox's book [7]. The best modern account of the proofs is in Lang's textbook [12]. Indispensable for the would-be specialist is the Brighton proceedings volume edited by Cassels and Fröhlich [5].

- 1 E. Artin, *Collected papers*, Addison-Wesley, Reading, Mass., 1965.
- 2 E. Artin, *Über eine neue Art von L-Reihen*, Abh. Math. Sem. Univ. Hamburg, **3** (1923/1924), no. 1 (1923), 89–108; [1], pp. 105–124.
- 3 E. Artin, *Beweis des allgemeinen Reziprozitätsgesetzes*, Abh. Math. Sem. Univ. Hamburg **5** (1926/1927), no. 4 (1927), 353–363; [1], pp. 131–141.
- 4 R. Brauer, *Emil Artin*, Bull. Amer. Math. Soc. **73** (1967), 27–43.
- 5 J. W. S. Cassels, A. Fröhlich, *Algebraic number theory*, Academic Press, London, 1967.
- 6 H. Cohen, H. W. Lenstra, Jr., *Heuristics on class groups of number fields*, H. Jager (ed.), *Number theory, Noordwijkerhout 1983*, Lecture Notes in Math. **1068**, Springer-Verlag, Heidelberg, 1984, pp. 33–62.
- 7 D. A. Cox, *Primes of the form $x^2 + ny^2$* , Wiley, New York, 1989.
- 8 H. Davenport, *The higher arithmetic*, Hutchinson University Library, London, 1952.
- 9 G. Frei, *Die Briefe von E. Artin an H. Hasse (1923–1953)*, Université Laval, Québec, and Forschungsinstitut für Mathematik, ETH, Zürich, 1981.
- 10 F. G. Frobenius, *Über Beziehungen zwischen den Primidealen eines algebraischen Körpers und den Substitutionen seiner Gruppe*, Sitzungsberichte der Königlich Preussischen Akademie der Wissenschaften zu Berlin (1896), 689–703; *Gesammelte Abhandlungen*, vol. II, Springer-Verlag, Berlin, 1968, pp. 719–733.
- 11 S. Y. Gebre-Egziabher, Ph. D. thesis, UC Berkeley (in preparation).
- 12 S. Lang, *Algebraic number theory*, second edition, Springer-Verlag, New York, 1994.
- 13 F. Lemmermeyer, *Reciprocity laws: their evolution from Euler to Artin*, Springer-Verlag, Berlin, to appear.
- 14 R. L. Long, *Algebraic number theory*, Marcel Dekker, New York, 1977.
- 15 P. Stevenhagen, H. W. Lenstra, Jr., *Chebotarev and his density theorem*, Math. Intelligencer, **18** (1996), No. 2, pp. 26–37.
- 16 P. Tannery, C. Henry (eds), *Œuvres de Fermat*, vol. II, Gauthiers-Villars, Paris, 1894, p. 342; vol. III, *ibid.*, 1896, p. 431; see also: R. Rashed, Ch. Houzel, G. Christol (intr., comm.), *Œuvres de Pierre Fermat I, La théorie des nombres*, Albert Blanchard, Paris, 1999, pp. 264, 286.
- 17 A. Weil, *Number theory, an approach through history*, Birkhäuser, Basel, 1983.
- 18 B. F. Wyman, *What is a reciprocity law?*, Amer. Math. Monthly **79** (1972), 571–586; correction, *ibid.* **80** (1973), 281.

L. Panaitopol

Facultatea de Matematică, Universitatea București
Str. Academiei nr.14, RO-70109 Bucharest 1, Romania
pan@al.math.unibuc.ro

A formula for $\pi(x)$ applied to a result of Koninck-Ivić

We are going to give an approximate formula for $\pi(x)$ which is better than the well known $\pi(x) \sim \frac{x}{\log x}$, or than the more precise formula from [2]: $\pi(x) \sim \frac{x}{\log x - 1}$, meaning that $\pi(x) = \frac{x}{\log x - \alpha(x)}$, where $\lim_{x \rightarrow \infty} \alpha(x) = 1$. We will prove

Theorem 1.

$$\pi(x) = \frac{x}{\log x - 1 - \frac{k_1}{\log x} - \frac{k_2}{\log^2 x} - \dots - \frac{k_n(1+\alpha_n(x))}{\log^n x}},$$

where $k_1, k_2, \dots, k_n$ are given by the recurrence relation

$$k_n + 1!k_{n-1} + 2!k_{n-2} + \dots + (n-1)!k_1 = n \cdot n!, \quad n = 1, 2, 3, \dots$$

and $\lim_{x \rightarrow \infty} \alpha_n(x) = 0$.

Proof. The following asymptotic formula

$$\pi(x) = \text{Li}(x) + O(x \exp(-a \log x)^\alpha),$$

where a and α are positive constants and $\alpha < \frac{3}{5}$ is well known [3]. Integrating by parts and taking into account that

$$x \exp(-a \log x)^\alpha = o\left(\frac{x}{\log^{n+2} x}\right),$$

where $n \geq 1$, it follows that

$$\pi(x) = x \left(\frac{1}{\log x} + \frac{1!}{\log^2 x} + \dots + \frac{n!}{\log^{n+1} x} \right) + O\left(\frac{x}{\log^{n+2} x}\right) \quad (1)$$

We define the constants $k_1, k_2, \dots, k_n$ by the recurrence

$$k_m + 1!k_{m-1} + 2!k_{m-2} + \dots + (m-1)!k_1 = (m+1)! - m!,$$

for $m = 1, 2, \dots, n$. For $y > 0$ we consider

$$f(y) = \left(\sum_{i=0}^n \frac{i!}{y^{i+1}} \right) (y - 1 - \sum_{i=1}^n \frac{k_i}{y^i}),$$

and we have

$$f(y) = 1 + \frac{2! - 1! - k_1}{y^2} + \frac{3! - 2! - 1!k_1 - k_2}{y^3} + \dots + \frac{n! - (n-1)! - k_1(n-2)! - \dots - k_{n-1}}{y^n} + O\left(\frac{1}{y^{n+1}}\right)$$

for $y \rightarrow \infty$. It follows that $f(y) = 1 + O(\frac{1}{y^{n+1}})$, i.e.

$$\sum_{i=0}^n \frac{i!}{y^{i+1}} = \frac{1 + O(\frac{1}{y^{n+1}})}{y - 1 - \sum_{i=1}^n \frac{k_i}{y^i}} = \frac{1}{y - 1 - \sum_{i=1}^n \frac{k_i}{y^i}} + O\left(\frac{1}{y^{n+2}}\right).$$

We denote $y = \log x$, and using the relations of type (1) it follows that

$$\pi(x) = \frac{x}{\log x - 1 - \sum_{i=1}^n \frac{k_i}{(\log x)^i}} + O\left(\frac{x}{\log^{n+2}(x)}\right) \quad (2)$$

Consider

$$\pi(x) = \frac{x}{\log x - 1 - \frac{k_1}{\log x} - \frac{k_2}{\log^2 x} - \dots - \frac{k_n(1+\alpha_n(x))}{\log^n x}}.$$

Combining this formula with (2) yields $k_n \alpha_n(x) = O(\frac{1}{\log x})$, from which it follows that $\lim_{x \rightarrow \infty} \alpha_n(x) = 0$. $\square$

Remark 2. It can be shown immediately that $k_1 = 1$, $k_2 = 3$, $k_3 = 13$, $k_4 = 71$.

We give now a formula for k_m (although not suitable for a direct computation).

Theorem 3. *The coefficient k_m is given by the relation:*

$$k_m = \det \begin{pmatrix} m \cdot m! & 1! & 2! & \cdots & (m-1)! \\ (m-1) \cdot (m-1)! & 0! & 1! & \cdots & (m-2)! \\ \vdots & \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ 2 \cdot 2! & 0 & 0 & \cdots & 1! \\ 1 \cdot 1! & 0 & 0 & \cdots & 0! \end{pmatrix}$$

Proof. The recurrence relations giving the coefficients k_m are:

$$\begin{aligned} k_m + k_{m-1}1! + \dots + k_1(m-1)! &= m \cdot m! \\ k_{m-1} + \dots + k_1(m-2)! &= (m-1) \cdot (m-1)! \\ &\dots \\ k_2 + k_11! &= 2 \cdot 2! \\ k_1 &= 1 \cdot 1! \end{aligned}$$

The determinant of this linear system is 1 and the result follows by Cramer's rule. $\square$

As an application of the above results we are going to improve the following approximation, due to J.-M. de Koninck and A. Ivić, [1]:

$$\sum_{n=2}^{[x]} \frac{1}{\pi(n)} = \frac{1}{2} \log^2 x + O(\log x).$$

Using Theorem 1 we are going to prove

Theorem 4.

$$\sum_{n=2}^{[x]} \frac{1}{\pi(n)} = \frac{1}{2} \log^2 x - \log x - \log \log x + O(1).$$

Proof. It is enough to take

$$\pi(x) = \frac{x}{\log x - 1 - \frac{1}{\log x} - \frac{k(x)}{\log^2 x}},$$

where $\lim_{x \rightarrow \infty} k(x) = 3$, and it follows that

$$\frac{1}{\pi(n)} = \frac{\log n}{n} - \frac{1}{n} - \frac{1}{n \log n} - \frac{k(n)}{n \log^2 n},$$

for $n \geq 2$. Therefore we get that

$$\sum_{n=2}^{[x]} \frac{1}{\pi(n)} = \sum_{n=2}^{[x]} \frac{\log n}{n} - \sum_{n=2}^{[x]} \frac{1}{n} - \sum_{n=2}^{[x]} \frac{1}{n \log n} - \sum_{n=2}^{[x]} \frac{k(n)}{n \log^2 n}.$$

For $x \geq e$, $f(x) = \frac{\log x}{x}$ is decreasing and thus

$$\frac{\log(k+1)}{k+1} \leq \int_k^{k+1} \frac{\log t}{t} dt \leq \frac{\log k}{k},$$

for $k \geq 3$. It follows immediately that

$$\sum_{n=3}^{[x]} \frac{\log n}{n} = \int_{n=3}^{[x]} \frac{\log t}{t} dt + O\left(\frac{\log x}{x}\right),$$

and so

$$\sum_{n=2}^{[x]} \frac{\log n}{n} = \frac{1}{2} \log^2 x + O(1).$$

Similar arguments lead us to the relations

$$\sum_{n=2}^{[x]} \frac{1}{n} = \log x + O(1),$$

and

$$\sum_{n=2}^{[x]} \frac{1}{n \log n} = \log \log x + O(1).$$

As there exists $M > 0$ with $|k(x)| \leq M$, and $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n \log^2 n}$ is convergent, it follows that $\sum_{n=2}^{[x]} \frac{k(n)}{n \log^2 n} = O(1)$, and the proof is complete. $\square$

References

- 1 J.-M. de Koninck, A. Ivić, *Topics in arithmetical functions*, North-Holland, Amsterdam, New York, Oxford, 1980.
- 2 J. B. Rosser, L. Schoenfeld, *Approximate formulas for some functions of prime numbers*, Illinois J. Math., **6** (1962), 64-94.
- 3 I. M. Vinogradov, *A new estimate for $\zeta(1+it)$* , Izv. Akad. Nauk. SSSR, Ser. Mat. **22** (1958).

B. Mond

*Department of Mathematics, La Trobe University,
Bundoora, Vic. 3083, Australia
B.Mond@latrobe.edu.au*

J. Pečarić

*Faculty of Textile Technology,
University of Zagreb, Zagreb, Croatia
Applied Mathematics Department, University of Adelaide,
Adelaide, South Australia, 5005, Australia
jpecaric@maths.adelaide.edu.au*

Inequalities for exponential functions and means, II

An inequality involving exponential functions was used to establish corresponding inequalities for means for both real numbers and matrices. Here we give an extension and simpler proof of this inequality.

The following bounds for the difference between the weighted arithmetic and geometric means was given by Alzer [1] (see also [2, p.38]):

$$0 \leq Ae^{-G/A} - Ge^{-A/G} \leq \frac{3}{e}(A - G). \quad (1)$$

In [3], it was noted that the improved result

$$0 \leq C - D \leq Ce^{-D/C} - De^{-C/D} \leq \frac{3}{e}(C - D) \quad (2)$$

holds for arbitrary positive real numbers C and D such that $C \leq D$ (not necessarily the weighted arithmetic and geometric means). Thus, (1) and (2) are essentially exponential results rather than results for means, which are special cases. In particular, instead of the arithmetic and geometric means, we can use arbitrary comparable means [4].

In [3], means of matrices were also considered, i.e., it was noted that (2) holds for Hermitian positive definite matrices C and D such that $C \geq D$ where $C \geq D$ means that $C - D$ is positive semi-definite.

In the proof of (2) (as well as in the proof of the matrix case) the

main result used was a corresponding inequality for real numbers, that is, if $x \in [0, 1]$, then

$$1 - x \leq e^{-x} - xe^{-1/x} \leq \frac{3}{e}(1 - x). \quad (3)$$

The values $3/e$ on the right and 1 on the left cannot be replaced by a smaller number on the right or a larger number on the left. Equalities hold in (3) if and only if $x = 1$.

The following extension of (3) holds:

Theorem. *If $x, y \in (0, 1)$ with $x < y$, then*

$$1 < \frac{e^{-x} - xe^{-1/x}}{1 - x} < \frac{e^{-y} - ye^{-1/y}}{1 - y} < \frac{3}{e}. \quad (4)$$

Proof. The second inequality shows us that the function

$$f(x) = \frac{e^{-x} - xe^{-1/x}}{1 - x}, \quad x \in (0, 1)$$

is an increasing function. Indeed, we have

$$f'(x) = \frac{g(x)}{x(1 - x)^2}, \quad (5)$$

where

$$g(x) = x^2 e^{-x} - e^{-1/x}.$$

Let us note that the function

$$h(x) = 2 \ln x - x + 1/x$$

has the same sign as $g(x)$. Further, we have $h(1) = 0$ and

$$h'(x) = -\frac{(x-1)^2}{x^2}.$$

Thus, it is obvious that $h'(x) < 0$ and so h is a decreasing function on $(0, 1)$. Hence h is positive on the same interval and therefore g is positive. Now from (5), we have that $f(x)$ is an increasing function.

The first and third inequalities in (4) now follow from the following result given in [3]:

$$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{e^{-x} - x e^{-1/x}}{1-x} = \frac{3}{e} \quad \text{and} \quad \lim_{x \rightarrow 0+} \frac{e^{-x} - x e^{-1/x}}{1-x} = 1.$$

□

Remark. It is clear that (3) is a special case of (4). Moreover, note that the above proof is simpler than that given in [2].

Corollary 1. Let A and G be weighted arithmetic and geometric means of real numbers $x_i (i = 1, \dots, n)$ such that $x_i \in (0, 1)$, $i = 1, \dots, n$. Then

$$1 < \frac{e^{-G} - G e^{-1/G}}{1-G} \leq \frac{e^{-A} - A e^{-1/A}}{1-A} < \frac{3}{e}.$$

Proof. It is clear that $0 < G \leq A < 1$ so that the Theorem is applicable. □

Corollary 2. If A, B, C, D are positive numbers such that $A/B < C/D < 1$, then

$$1 < \frac{B e^{-A/B} - A e^{-B/A}}{B-A} < \frac{D e^{-C/D} - C e^{-D/C}}{D-C} < \frac{3}{e}. \quad (6)$$

Proof. The result is a simple consequence of the Theorem for $x = A/B$, $y = C/D$. □

Corollary 3. If $0 < x_i \leq \frac{1}{2}$ for $i = 1, 2, \dots, n$, not all x_i equal, then (6) still holds with either

$$(i) \quad A = \prod_{i=1}^n x_i, \quad B = \prod_{i=1}^n (1-x_i), \\ C = \left(\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n x_i \right)^n, \quad D = \left[\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n (1-x_i) \right]^n,$$

or

$$(ii) \quad A = \prod_{i=1}^n x_i, \quad B = \left(\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n x_i \right)^n, \\ C = \prod_{i=1}^n (1-x_i), \quad D = \left[\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n (1-x_i) \right]^n.$$

Proof. Both results are simple consequences of Corollary 2, the arithmetic-geometric mean inequality, and the well-known Ky Fan inequality ([5; p.5]):

$$\frac{\prod_{i=1}^n x_i}{\left(\sum_{i=1}^n x_i \right)^n} \leq \frac{\prod_{i=1}^n (1-x_i)}{\left[\sum_{i=1}^n (1-x_i) \right]^n} \quad (7)$$

with equality in (7) holding only if all x_i are equal. □

Remark. Of course, if we write (7) in means form

$$\frac{\left(\prod_{i=1}^n x_i \right)^{1/n}}{\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n x_i} \leq \frac{\left(\prod_{i=1}^n (1-x_i) \right)^{1/n}}{\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n (1-x_i)}, \quad (7')$$

we can give some further related results as applications of (6) and (7').

◀

References

- 1 H. Alzer, *A lower bound for the difference between the arithmetic and geometric means*, Nieuw Archief voor Wiskunde, **8** (1990), 195–197.
- 2 D.S. Mitrinović, J.E. Pečarić and A.M. Fink, *Classical and New Inequalities in Analysis*, Kluwer Academic Publishers, Norwell, MA, 1993.
- 3 M. Alić, B. Mond, J. Pečarić and V. Volenec, *Bounds for the differences of matrix means*, SIAM J. Matrix Anal. Appl., **18** (1997), 119–123.
- 4 M. Alić, B. Mond, J. Pečarić and V. Volenec, *Inequalities for exponential functions and means*, Nieuw Archief voor Wiskunde, **14** (1996), 343–348.
- 5 E.F. Beckenbach and R. Bellman, *Inequalities*, Springer-Verlag, New York, 1965.

G. Alberts

Interfacultaire werkgroep Wetenschap en Samenleving

Katholieke Universiteit Nijmegen

Centrum voor Wiskunde en Informatica,

Postbus 94079, 1090 GB Amsterdam

g.alberts@cw.nl

Een eeuw wiskunde en werkelijkheid

De opkomst van het wiskundig modelleren

De manier van bruikbaar maken van wiskunde is tussen het begin en het eind van de twintigste eeuw radicaal veranderd. Meer nog dan de wiskunde op zichzelf, veranderde de relatie tussen wiskunde en werkelijkheid. Dat wil zeggen, wiskundigen keken anders tegen deze relatie aan en ze gingen in de loop van de eeuw anders om met toepassen. In het bijzonder vestigde zich de praktijk van wiskundig modelleren.

In een reeks van vier artikelen zullen de veranderingen in de twintigste eeuw in het toepassen van wiskunde, en meer in het algemeen van de verhouding wiskunde–werkelijkheid, de revue passeren. Hieronder volgt een algemeen overzicht van de opkomst van het wiskundig modelleren. In de volgende bijdragen wordt dit voor twee deelgebieden nader uitgewerkt en in het vierde artikel staat de wiskunde zelf centraal.

Het thema van deze reeks artikelen is de relatie tussen wiskundig denken en werkelijkheid. Volgens Mannoury zijn er twee nooit geheel opgeloste filosofische vraagstukken rond de wiskunde, haar schoonheid en haar toepasbaarheid. Het tweede vraagstuk nemen we hier als onderwerp van historisch overzicht. Wat zijn de lotgevallen van de toepasbaarheid van de wiskunde in de twintigste eeuw? We zijn er dus niet op uit het vraagstuk van de toepasbaarheid filosofisch te kraken, maar te signaleren hoe er in de loop van de tijd over gedacht werd en hoe het bruikbaar maken in de praktijk is gebracht. De nadruk ligt op de Nederlandse geschiedenis. Het is de eeuw die wordt ingeleid door Kortewegs oratie *Wiskunde als hulpwetenschap* (1881) en Brouwers “vermogen tot het wiskundig bekijken van de wereld” (1907) en afgesloten wordt met controverses rond modelgebruik door het RIVM.

In 1936 publiceerde Jan Tinbergen een *Prae-advies voor de Vereeniging voor de Staathuishoudkunde en de Statistiek* dat bekend is geworden als het eerste macro-economisch model, de eerste simulatie van de economie van een land. Het was een doorbraak voor “de ingenieurswetenschap der econometrie”. Het betekende evenzeer een doorbraak in de wijze waarop wiskunde ten nutte gemaakt kon worden. Om dit laatste aspect is het hier te doen.

Begrip en praktijk van het wiskundig mo-

delleren zijn nog jong, Tinbergen was een van de eersten die ermee kwam. Anderen binnen het Nederlandse taalgebied waren Jan Burgers en David van Dantzig. Aan deze laatste danken we bovendien de notie dat het niet zozeer om een object gaat, maar om een handeling: wiskundig modelleren. Het wiskundig modelleren was een algemener begrip en het dekte een pragmatischer werkwijze dan het oude “toegepaste wiskunde”.

Deze introductie van het wiskundig modelleren concentreert zich vooral op de Neder-

landse ideeëngeschiedenis. De ontwikkeling loopt van Korteweg tot Van Dantzig en staat niet los van de internationale geschiedenis. Men kan vergelijkbare ontwikkelingslijnen reconstrueren die van Hertz tot Wiener of van Borel tot Destouches lopen. De Nederlandse ontwikkelingen liepen daar zeker niet bij ten achter.

Wiskunde op drift

Midden in de negentiende eeuw raakte de wiskunde in haar rol van voertuig van de waarheid juist in natuurkunde op drift. De ene reactie was die van algehele scepsis ten aanzien van kennis, de andere die van zorgvuldiger nadenken over de rol van de wiskunde.

Aan de hand van auteurs als Lagrange had de wiskunde zich rond 1800 geëmancipeerd uit de mêlée van mathematische wetenschappen. Aan het eind van de Verlichting kwam een autonome en zelfgenoegzame wetenschap naar voren, zuivere wiskunde, losgemaakt uit de vermenging met empirie en bevrijd van theologische bemoeienis met het oneindige. Tot die zuivere wetenschap wiskunde behoorde ook een toegepaste wiskunde, maar de notie van toepassen was bij Lagrange en zijn navolgers zeer beperkt. Het toonbeeld van toepassen was de relatie tussen wiskunde en de rationele mechanica. Dat was het grote voorbeeld dat Lagrange in de nadagen van zijn carrière had uitgewerkt in leerboeken, nadat hij Berlijn en de Akademie

van Frederik de Grote achter zich had gelaten en in Parijs nieuw, revolutionair, elan opdeed. Invloedrijk was ook de hemelmechanica van Laplace. In deze voorbeelden doet men alsof de fysieke werkelijkheid in wezen mathematisch is. De beste weergave van de werkelijkheid is volgens dit denkpatroon een volkomen wiskundig geformuleerde theorie. Het droevig lot van de mensheid, volgens een dergelijke rationalistische optiek, is dat we te maken hebben met een empirie die bedroevend slordig, eventueel “gecompliceerd” is, een empirie die vanuit de theorie benaderd dient te worden. Het benaderen werd letterlijk genomen als wiskundige approximatie. De toegepaste wiskundigen waren dan ook geneigd zich te beperken tot de als wezenlijk mathematisch beschouwde werkelijkheid, namelijk die van de fysica. Zij hielden zich verre van die andere erfenissen van de mathematische wetenschappen van de achttiende eeuw, verre van zulke negentiende-eeuwse kwantificeerders als de beoefenaars van de politieke rekenkunde of de statistiek.

Binnen zo’n rationalistische opvatting van wetenschap had de wiskunde een duidelijke plaats. Eenmaal wiskundig geformuleerd zou een theorie vanzelf samenvallen met de wezenstrekken van de betreffende werkelijkheid en dus waar zijn. Wiskunde bood bij uitstek toegang tot de waarheid.

Natuurlijk accepteerde niet iedereen deze visie. Ook voor die negentiende-eeuwse wetenschappers die wel een dergelijk wetenschapsbeeld koesterden, was er iets aan de hand met de formulering van de kinetische gastheorie (Krönig, Clausius) in de jaren 1850 en de vergelijkingen van Maxwell voor het elektromagnetisme in de jaren 1870. In het eerste geval lag er nog een metafoor van botsende biljartballen, in het tweede geval was er geen duidelijk beeld; in beide gevallen waren de theorieën wiskundig geformuleerd, met een overduidelijk verhelderend effect, maar in beide gevallen claimden de auteurs niet de waarheid te hebben weergegeven, slechts een handige, beknopte formulering. Dat riep natuurlijk onontkoombaar de vraag op naar de aard van natuurkundige theorieën en — voor ons het belangrijkste punt — naar de status van de wiskunde daarin.

De situatie in de natuurkunde was illustratief voor de onzekerheid omtrent de rol van de wiskunde in het denken en kennen. De reacties liepen uiteen van scepsis over het menselijk kenvermogen tot pogingen de rol van de wiskunde te verhelderen. Wellicht de bekend-

ste reactie was de scepsis van Ernst Mach, die uit deze toestand de conclusie trok dat al ons kennen op analogieën berust. In dat verhaal was voor de wiskunde verder geen plaats — men zou kunnen zeggen dat de rol van de wiskunde in dat verband is om de structuur te leveren die de verbinding vormt tussen twee zaken die in een structurele analogie met elkaar staan, maar dat is een precisering die in de traditie van Mach niet werd gemaakt. Ook sceptisch, maar qua levenshouding bepaald tegengesteld aan Mach was Emil du Bois-Reymond, de fysioloog — niet de logicus Paul du Bois-Reymond —, met zijn oproep in 1880 om de beperktheid van ons kennen onder ogen te zien: “ignorabimus” (wij zullen niet weten). Felix Klein, de invloedrijkste wiskundige van het eind van de negentiende eeuw, was in de tijd dat hij toepasbare wiskunde nog bij uitstek zag als de wiskunde van de benaderingen, Approximationsmathematik, geneigd tot een soortgelijke zelfbeperking: “Onze uitspraken over de aard der dingen zullen echter bescheidener worden”.

Er was een stroming van meer pragmatisch ingestelde wetenschappers die stelden dat wetenschap hypothesen formuleerde, bij voorkeur in wiskundige taal, en toetste. Poincaré is internationaal de bekendste vertegenwoordiger van dit standpunt. In Nederland werd het verwoord door D.J. Korteweg in zijn oratie *De wiskunde als hulpwetenschap* uit 1881. Wiskunde hielp volgens hem om hypothesen te formuleren uit empirische gegevens en om uit hypothesen consequenties af te leiden — die dan getoetst konden worden.

Een derde type reactie, naast de sceptici en de pragmatici, kwam van geleerden die groot belang hechtten aan het ophelderen van de rol van de wiskunde. Onder de fysici waren dit degenen die bij alle wiskundig instrumentarium uit waren op natuurkundig inzicht en in dat kader een scherp onderscheid handhaafden tussen fysische en wiskundige uitspraken. Von Helmholtz, Hertz, Boltzmann en Ehrenfest stonden in een traditie waarin dit onderscheid belangrijk was. Heinrich Hertz had het nodige bijgedragen aan de elektriciteitsleer en leer van radiogolven en wilde nog iets zeggen over de mechanica. Wat Maxwell voor de elektriciteitsleer had gedaan, “handig opschrijven” en zo tot een gemakkelijk hanteerbare en herkenbare formulering komen, meende Hertz ook voor de traditonele theorie van de mechanica te kunnen doen. Het “handig opschrijven” leverde een indrukwekkende, maar voor velen moeilijk herkenbare formulering op. In het voorwoord van *Die Prin-*



D.J. Korteweg

zipien der Mechanik – in neuem Zusammenhang dargestellt uit 1894 legde hij uit hoe dat volgens hem denkbaar was, dit vrijelijk gebruik maken van wiskunde. Hertz zette het idee van enkelvoudige toepassing van wiskunde op losse schroeven door een drietal logisch-mathematische “Bilder” van de mechanica tegen elkaar af te wegen op hun *geschiktheid* om de fysische inzichten weer te geven. Er was dus meer in het spel dan streven naar waarheid.

“De procedure (das Verfahren) waarvan we ons steeds bedienen wanneer we uit vroegere gebeurtenissen toekomstige willen afleiden en zo een beoogd doel willen bereiken, is de volgende: we vormen innerlijke schijnbeelden (Scheinbilder) of symbolen van voorwerpen buiten ons, en wel zodanige beelden dat de logische gevolgen van de beelden (denknotwendigen Folgen der Bilder) telkens ook weer beelden zijn van natuurnoodzakelijke gevolgen van de afgebeelde voorwerpen.” [1]

De procedure is dus dat wij ons beelden maken. Hertz tekende hierbij nog aan dat, zou er aan de hier geformuleerde eis voldaan kunnen worden, er op voorhand zekere overeenstemming tussen de natuur en ons denken (unserem Geiste) zou moeten bestaan, maar liet het daar verder bij. De ervaring leerde hem dat dit het geval was. De “beelden” hoefden overigens slechts op dit ene wezenlijke punt met de dingen overeen te stemmen: dat de logische (denknoodzakelijke) gevolgen van de beelden weer beeld zouden

zijn van de natuurnoodzakelijke gevolgen van de afgebeelde voorwerpen. Verdere overeenkomst tussen onze voorstelling en de dingen was voor het doel niet nodig, stelde hij, en zouden we ook niet kunnen kennen.

“Is het ons eenmaal gelukt om uit de ervaring die we tot nu toe hebben opgedaan beelden met de verlangde eigenschappen af te leiden, dan kunnen we met behulp van deze beelden, zoals we dat met modellen doen, in korte trekken de gevolgen laten zien, die zich in de buitenwereld pas na lange tijd of als gevolg van ons eigen ingrijpen zullen voordoen.” [2]

Hertz hield het duidelijk bij “zoals”, “wie an Modellen”. Modellen en systemen waren materieel; zo niet fysiek, dan toch fysisch gedacht.

“De overeenstemming tussen ons denken en de natuur is dus te vergelijken met de overeenstemming tussen twee systemen, die model van elkaar zijn. We kunnen deze overeenstemming zelfs verantwoorden als we willen aannemen dat ons denken in staat zou zijn werkelijke dynamische modellen van de dingen te vormen en daarmee te werken.” [3]

Zo vergeleek Hertz “Bild” en “Modell”, maar ondanks deze inspiratie hield hij het wat de rol van wiskunde en axioma's betreft bij Bild. De rol van de wiskunde was op drift geraakt en de geschiedenis van het preciseren van deze rol is hiermee dus niet afgerond, ze begint eigenlijk pas.

De blokkade van Boltzmann

In de tijd van Hertz, eind negentiende eeuw, was de productie van wiskundige modellen een bescheiden discipline. Uitgevers en ondernemende professoren legden zich toe op het vervaardigen van modellen in draad, gips en karton. Hoogtijdagen waren de grote tentoonstellingen in Kensington Park, Londen 1872, en in München 1893. Men treft in de meeste universiteiten nog restanten aan van de destijds met liefde aangelegde modellenverzamelingen.

Veraanschouwelijking van wiskundige samenhangen was het nut van zulke objecten en dat was indertijd speciaal relevant, omdat de theoretische ontwikkeling van de analyse de behandeling van hogeregraads oppervlakken binnen bereik had gebracht. En zelfs voor de bijziende Ludwig Boltzmann betekende de aanblik van zo'n model meer — en stimuleerde de wiskundige creativiteit meer — dan bladzijden vol formules. Boltzmann werd

door de gipsmodellen geblokkeerd in zijn filosofische creativiteit. Hij beschikte over alle elementen en over de visie om het hedendaagse begrip wiskundig model te formuleren en weigerde met zoveel woorden. Een model moest *tastbaar* zijn, zo schreef hij zowel in een artikel in de catalogus van de Münchense tentoonstelling als in het lemma ‘Model’ in de *Encyclopaedia Britannica*. Hij signaleerde scherp dat Hertz, Mach en Planck anders omgingen met de wiskunde in de fysica dan tot dan toe gebruikelijk was, dat ze hun waarheidsoordeel opschortten en zich lieten leiden door overwegingen van denkeconomie, dat mechanische modellen een belangrijke functie hadden in die nieuwe ontwikkeling — en daar hield het op. De blokkade van Boltzmann was tweeledig. De term wiskundig model was bezet en het was voor hem ondenkbaar om wiskunde te zien als een materie waarin men iets kon uitdrukken. De term wiskundig model was in gebruik voor tastbare, buitenwiskundige objecten waarin een wiskundig verband uitgebeeld werd: gips, draad of karton. En abstracte modellen waren wel toegestaan in de natuurkunde, maar Boltzmann kon er niet toe besluiten de wiskundige structuren die dergelijke objecten beschreven zelf een soort quasi-stoffelijkheid toe te kennen. Wiskunde kon in zijn ogen niet dienen als “materie” om iets anders in uit te drukken.

Zonneklaar was intussen dat er iets aan de hand was met de rol van de wiskunde. De plaats van de wiskunde was verschoven en de claim dat wiskundige formulering zonder meer in de richting van de waarheid zou voeren was gerelativeerd, maar echt opgehelderd was de zaak rond 1900 bepaald niet. Verschillende wiskundigen suggereerden termen als systeem, schema, hypothese etc. waar Hertz “Bild” had gezegd, maar deze suggesties losten de vraag niet op. Ook Nederlanders waren actief in deze discussie.

Zo verwoordde Brouwer in zijn proefschrift in 1907 het algemeen vermogen dat de mensen is gegeven tot het “wiskundig bekijken van hun leven”. Gerrit Mannoury, de significus, had het in zijn inaugurale rede *De sociale beteekenis van de wiskundige denkvorm* (1917) over de ballisticus die met betrekking tot kogelbanen de “parabool-illusie” hanteert. J.A. Schouten sprak in ‘Meetkunde en ervaringsstructuur’ (1939) van “schema” en “structuurschema”. Diverse auteurs gebruikten het woord “systeem”, zowel met betrekking tot de beschreven werkelijkheid als tot een axiomastelsel. David van Dantzig voegde daaraan toe, dat een fundering van, bijvoorbeeld, de waarschijnlijkheidsrekening

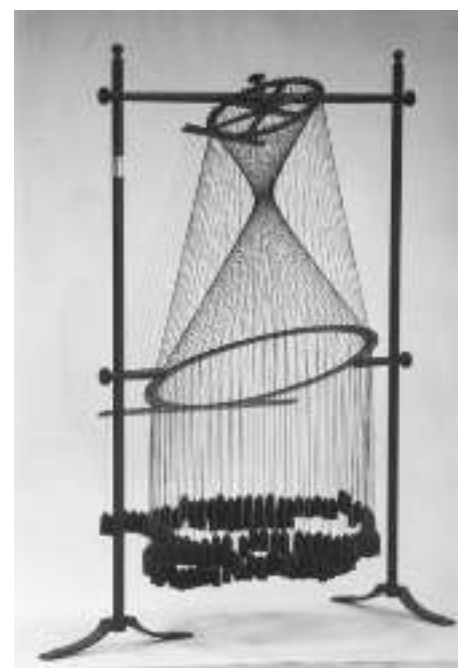
niet slechts een “formalistisch systeem” behoefde, maar ook een “geregulariseerd model” van de werkelijkheid (1940).

Ehrenfest

Het was niet ongebruikelijk om dan maar helemaal niets meer te claimen wat betreft de status en het werkelijkheidsgehalte van de theorie. Binnen de natuurkunde was Willard Gibbs een van degenen die zich tot woordvoerder maakten van de pragmatische, zo men wil sceptische, richting. In het voorwoord van zijn leerboek over statistische mechanica, juist het terrein waarop Krönig en Clausius de zaak aan het rollen hadden gebracht, schreef hij met betrekking tot het werkelijkheidsgehalte van zijn theorie:

“Difficulties of this kind have deterred the author from attempting to explain the mysteries of nature and have forced him to be contented with the more modest aim of deducing some of the more obvious propositions relating to the statistical branch of mechanics. Here, there can be no mistake in regard to the agreement of the hypotheses with the facts of nature, for nothing is assumed in that respect.” [4]

Een dergelijke scepsis wees Paul Ehrenfest, leerling van Boltzmann, scherp af. In het overzichtsartikel dat hij in 1911 met zijn vrouw Tatjana Ehrenfest-Affanasjewa schreef over de ontwikkelingen van dit gebied werd Gibbs' houding veroordeeld. Als verklaren niet meer zou zijn dan beschrijven en als hypothesen zo prag-



Ceci n'est pas un modèle mathématique



L.E.J. Brouwer

matisch gekozen konden worden, dan waren we overgeleverd aan de willekeur, want dan:

“De kinetische “verklaringen” worden *afbeeldingen* en dan worden ook deze beide groepen van “hypotheses” *willekeurige bepalingen over de structuur van het afbeeldende schema*; bepalingen namelijk
1) over de structuur van het gasmodel
2) over de keuze van de waaier van bewegingen.” [5]

Het was de Ehrenfests nog immer te doen om fysisch inzicht. De rol van de wiskunde moest derhalve dienend zijn en niet iedere natuurkundige waarheidsaanspraak onderuit halen. Juist het vasthouden aan het natuurkundige van de natuurkunde maakte dat zij een scherp oog hadden voor de rol van de wiskunde.

Paul Ehrenfest werd in 1911 in Leiden benoemd tot opvolger van Lorentz. Met zijn persoonlijkheid en zijn uitgesproken visie was hij een invloedrijk leermeester. Onder zijn leerlingen waren vooraanstaande natuurkundigen, technici en wiskundigen [6]. Het vooropstellen van natuurkundig inzicht, en in het verlengde daarvan de aandacht voor de rol van de wiskunde, was een hoofdelement uit de traditie van Von Helmholtz, Hertz en Boltzmann, dat hij doorgaf aan zijn leerlingen. We zullen hierna in het bijzonder de bijdragen van Tinbergen en Burgers bespreken.

“Model” kwam intussen in de theoretische fysica wel voor, maar dan als gedachtenmodel, met dezelfde status als een gedachtenexperiment. Het bovenstaande citaat van Ehren-

fest illustreert dat. Het kinetisch gasmodel, in feite een biljartballenmetafoor, en het atoommodel waren de belangrijkste voorbeelden. Ernst Mach, Boltzmanns tegenstrever op filosofisch terrein en inspirator van de Wiener Kreis, doordacht het gebruik van metaforen en het denken in analogieën en ontleende hieraan de nodige scepsis ten aanzien van de werkelijkheidswaarde van wetenschappelijke theorieën. Noch de Wiener Kreisleden, echter, noch Von Mises, met zijn *Kleines Lehrbuch des Positivismus*, zetten de stap van analogie naar “wiskundig model”.

Het “Bild” van Hertz was ook iets anders dan de bekende vormen van analogie, het was de verzelfstandiging van de middelterm van een analogie: de structuur die het gemeenschappelijke was aan twee analoge fysische toedrachten kreeg een eigen status en kon als wiskundige structuur een zelfstandige entiteit vormen.

Pas Wittgenstein pakte de draad van Hertz weer op en wist de blokkade van Boltzmann te overwinnen. In zijn *Tractatus logico-philosophicus* stelde hij:

- 2.1 We vormen ons beelden van de feiten
- 2.11 Het beeld presenteert de situatie in de logische ruimte, het bestaan en niet bestaan van toedrachten
- 2.12 Het beeld is een model van de werkelijkheid [7]

De zoekende wiskundigen en natuurkundigen zijn niet rechtstreeks merkbaar door Wittgenstein beïnvloed. De plaats waar de wiskunde haar nieuwe rol speelde was wel duidelijk, maar de begrippen ervoor bleven vaag.

Burgers

Het waren twee leerlingen van Ehrenfest die bijna terloops het begrip poneerden waarmee de zoektocht tot rust zou komen. Zowel Jan Burgers in de stromingsleer als Jan Tinbergen in de econometrie kwamen met de notie van wiskundig model.

Jan Burgers werd in 1918 direct na zijn promotie bij Ehrenfest benoemd tot hoogleraar Aero- en Hydrodynamica aan de Technische Hoogeschool in Delft. Hij zou zijn hele loopbaan wijden aan de theorie van turbulentie, speciaal grenslaagproblemen. Zijn grote streven was inzicht te verwerven in het ontstaan van wervelingen. Het leidde tot de Burgersvergelijking [8], een van zijn hoofdresultaten. Hij kon dankzij zijn wetenschapsideaal in 1955 bij de terugblik op zijn Delftse tijd zonder veel pijn toegeven in technisch-praktisch opzicht door anderen te zijn voorbijgestreefd:

“Langs die weg is veel bereikt dat ik met



Gerrit Mannoury

mijn model niet kon: doch wat niet bereikt is, is een om zo te zeggen “absolute theorie”, die, uitgaande van de grondgegevens, tot de werkelijke sterkte van de turbulentie met haar verschillende aspecten voert. De theorie van de zg. “isotrope homogene turbulentie” kan laten zien hoe een eenmaal gegeven turbulentie zich ontwikkelt, doch hierbij wordt van een hypothetische formule gebruik gemaakt, die vele vraagstukken openlaat. Ik geloof te mogen zeggen dat ik voor mijn vereenvoudigd model meer principiële dingen kan bereiken.” [9]

Dit gedreven vasthouden aan theorievorming als uiteindelijk doel was traditioneel, om niet te zeggen ouderwets voor de tijd waarin Burgers functioneerde. Het gaf hem een voorgrond in het nadenken over een kwestie die andere natuurkundigen en ingenieurs verontachtzaamd hadden, de rol van de wiskunde. Zijn theorie was niet af. Burgers nam slechts genoegen met de wiskundige verwoording ervan als iets voorlopigs, als een partiële uitbeelding. De conceptuele ontwikkelingsgang laat zich aflezen uit de opeenvolging van titels van publicaties over het onderwerp (zie inzet op pagina 63).

Deze opeenvolging zegt eigenlijk al genoeg: “Wiskundige voorbeelden ter illustratie ...”; “Een model systeem ter illustratie” en “...de behandeling van enige wiskundige modelsystemen en later “Een wiskundig model ter illustratie ...” en in 1955 tenslotte gewoon “een wiskundig model voor ...”. Burgers was te secuur om de later gangbare uitdrukking “wiskundig model van” te gebrui-

ken. Hij bracht hiermee een belangrijke karaktertrek van wiskundige modellen tot uitdrukking, namelijk dat er iets wordt uitgebeeld in wiskundige stof. Voorzover het om de term gaat, gebruikte Burgers waarschijnlijk in 1940 voor het eerst de woordcombinatie in de zin van “systemen van vergelijkingen [...] die de rol van een mathematisch “model” kunnen spelen” [10]. Het model betekende bij Burgers niet “partiële theorie”, maar in de lijn van Hertz en Ehrenfest partiële uitbeelding van theorie in de quasirealiteit van de wiskunde. Burgers’ notie van wiskundig model werd in eerste instantie betrekkelijk snel aanvaard in de wetenschappelijke ingenieurswereld, in tweede instantie overgenomen in de natuurkunde en andere klassieke toepassingsgebieden. Een typisch research-rapport uit Delft of van het Nationaal Luchtvaartlaboratorium in de jaren 1940 gaf na de verbale omschrijving een stelsel vergelijkingen onder het kopje “de theorie” of simpelweg voorafgegaan door het zinnetje “dit kan geschreven worden als ...”. In de loop van de jaren vijftig werd het de gewoonte zo’n stelsel te benoemen als “het model” of “het wiskundig model”.

Tinbergen

Jan Tinbergen, ook een leerling van Ehrenfest, besprak in een artikel uit 1938 over conjunctuurgolven een model, een zeer elementair voorbeeld van zijn economische modellen — alsof het de gewoonste zaak van de wereld was (zie inzet op pagina 64). Twee jaar eerder echter had hij hard gewerkt om dit te mogen doen, in het beroemde Prae-advies voor de Vereeniging voor de Staathuishoudkunde en de Statistiek over de vragen:

“Kan hier te lande, al dan niet na overheidsingrijpen, een verbetering van de binnenlandse conjunctuur intreden, ook zonder verbetering van onze exportpositie?”

Welke leering kan te aanzien van dit vraagstuk worden getrokken uit de ervaringen van andere landen?” [12]

Het gaat, zei Tinbergen, bij deze vragen om repercussies van de ene economische grootte op de andere, macro-economisch te beschouwen, maar:

“De kwalitatieve stylering, d.w.z. indeling van mensen, goederen enz. in grote groepen is nog niet voldoende. Er moet met *getallen* gewerkt worden; kwantitatief gestyleerd worden. [...]”

“Ik concludeer dus tot de noodzakelijkheid van de *kwantitatieve stylering van het economisch proces*”.

Nadat de beschouwde grootheden waren geïntroduceerd, werd de lezer een stap verder gevoerd:

“[...] het ‘model’ dat in het volgende gegeven wordt van het Nederlands economisch leven [...]”.

En op het punt waar tenslotte de 24 basisvergelijkingen waren gegeven, heette het geruststellend dat er geen principieel onderscheid was tussen de hier gevolgde methode en de gebruikelijke economische redeneringen:

“de relaties [...] worden nu in de mathematische machine geworpen en het resultaat komt er min of meer pasklaar uit. [...] het economische model [...]”.

Hij had er welbewust naar toe gewerkt het begrip model te poneren en zonder aanhalingstekens te mogen gebruiken in de “ingenieurswetenschap der econometrie” [13].

In de geschiedenis van de economische wetenschap is het belang van dit Prae-advies dat er voor het eerst een “macro-economisch model” wordt opgesteld. Voor de huidige beschouwing ligt het belang in het feit dat voor



Paul Ehrenfest (portret door Heike Kamerlingh Onnes, Stedelijk Museum Amsterdam)

het eerst een stelsel wiskundige vergelijkingen, een mathematische machine, werd gepresenteerd als model. In 1933 sprak Tinbergen bijvoorbeeld nog van “(verklarend) mechanisme” [14].

Tinbergens werk was exemplarisch voor wat er gebeurde in het veld van statistiek en politieke rekenkunde dat na 1800 buiten de zuivere en toegepaste wiskunde was komen te staan. Het vond daar ook navolging, allereerst in de econometrie zelf en vervolgens in de statistiek, de demografie, de bedrijfsleer en zovoorts.

Het cruciale aspect van het opstellen van een wiskundig model was, dat de overheersende intentie hier niet zonder meer werkelijkheidsapproximatie was, maar sturing van de beschreven werkelijkheid. Bij Tinbergen was deze intentie het motief om zich überhaupt met conjunctuurverschijnselen bezig te houden: crisisbestrijding. “We komen nu tot de vraag die tenslotte de stoot heeft gegeven tot al onze voorafgaande studies: kan het conjunctuurverschijnsel bestreden worden? Dat de bestrijding wenselijk is, staat voor ons vast.”

Hoofdeis was wel “dat de gang van zaken in het mechanisme met de werkelijke gang van zaken overeenstemt”, maar men hoefde van Tinbergen strikt genomen niet de oorzaken te kennen, slechts “de opeenvolging der gebeurtenissen en hun samenhang te beschrijven; ‘slechts’ de *gevolgen* van *maatregelen* die men neemt”.

Hertz had de mogelijkheid van uiterlijke beschrijving ook wel geopperd, maar doelmatigheid was toch allereerst begripsmatige zuinigheid. Bij Tinbergen ging het om adequaatheid aan een gegeven doel; waarheid blootleggen of de werkelijkheid benaderen waren vanuit zijn perspectief mogelijke doelen, naast andere. Voorop stond het instru-

Een selectie van Burgers’ publicaties over turbulentie

[Burgers 1939] ‘Mathematical Examples Illustrating Relations Occurring in the Theory of Turbulent Fluid Motion’ /J.M. Burgers. In: *Verh. KNAW Eerste Sectie* **17** - 2 (1939), pp. 1–53.

[Burgers 1940a] ‘Application of a Model System to Illustrate Some Points of the Statistical Theory of Free Turbulence’ /J.M. Burgers. In: *Proceedings KNAW* **43** (1940), pp. 2–12.

[Burgers 1940b] ‘On the Application of Statistical Mechanics to the Theory of Turbulent Fluid Motion. - A Hypothesis Which can Serve as a Basis for a Statistical Treatment of Some Mathematical Model Systems’ /J.M. Burgers. In: *Proceedings KNAW* **43** (1940), pp. 936–945, pp. 1153–1159.

[Burgers 1948] ‘A Mathematical Model Illustrating the Theory of Turbulence’/J.M. Burgers. In: *Advances in Applied Mechanics* **1** (1948), pp. 171–199.

[Burgers 1955b] ‘A Model for One-Dimensional Compressible Turbulence with Two Sets of Characteristics’ /J.M. Burgers. In: *Proceedings KNAW* **B58** (1955), pp. 1–18.

mentele perspectief met “het mechanisme” en “de mathematische machine”.

Aanvankelijk was het voor Tinbergen, geheel in de lijn van Ehrenfest, de aspiratie om zijn sociaal engagement invulling te geven met een absolute mathematische theorie van de economische bewegingsleer. In die sfeer had hij ook in zijn proefschrift minimumproblemen van een bepaald type wiskundige vergelijkingen behandeld met appendices waarin de resultaten werden toegepast op natuurkunde en economie [15]. Zo’n algemene theorie kwam er niet uit en zelfs de partiële theorieën hadden niet de eigenschap dat de systematische bewegingen, dat wil zeggen de dynamiek inherent aan het stelsel vergelijkingen, overeenstemden met de conjuncturele bewegingen in de door Tinbergen onderzochte economische sectoren [16]. Hier liet

een zeker kengebied en daaruit voortvloeiend een scherp oog voor de rol van de wiskunde, die ingaf zo lang mogelijk voort te gaan binnen het paradigma van de toegepaste wiskunde. Op basis hiervan waren zij beiden zich zozeer bewust van de manier waarop zij gebruik maakten van wiskunde dat zij konden komen tot de formulering van het begrip wiskundig model. Met dat ze dit expliciteerden kwam een nieuwe manier van doen tot stand, een nieuwe praktijk.

Tinbergen had aanvankelijk als dienstweigeraar, later als gewoon medewerker, zijn denkbeelden uitgewerkt bij het *Bureau voor conjunctuuronderzoek* van het Centraal Bureau voor de Statistiek.

De succesvolle presentatie van het economisch model in 1936 trok internationaal de aandacht. De Volkenbond haalde hem naar

veerd bij zijn studievriend Van der Waerden, maar was in alle opzichten een leerling en adept van Gerrit Mannoury. Mannoury belichaamde hoogstpersoonlijk de significa, de leer der verstandhouding. Mannoury had hem overgehaald wiskunde te studeren en het was op de significa dat Van Dantzig zijn denken over wiskunde en over wiskundig modelleren in het bijzonder baseerde.

Tegen de conjunctuur in maakte Van Dantzig in de jaren 1930 carrière aan de Technische Hoogeschool te Delft, van assistent van J.A. Schouten tot hoogleraar. Hij ontwikkelde niet alleen de ambitie om de wiskunde maatschappelijk dienstbaar te maken, een ambitie die na de Tweede Wereldoorlog tot volle bloei kwam in het Mathematisch Centrum, hij dacht over die dienstbaarheid van het vak ook na. In 1939 en 1940 sprak en schreef hij op terloopse wijze van wiskundig model, formalistisch systeem en geregulariseerd model, in dezelfde stijl als Tinbergen en Burgers dat in diezelfde jaren deden. In 1940 traden Burgers en Van Dantzig op dezelfde studiedag van de Nederlandsche Natuurkundige Vereeniging over Waarschijnlijkeitsrekening en Statistische Methoden [17] en beiden bezigden de notie “mathematisch ‘model’”. De combinatie van deze aanzet met een poging voorbeelden te verzamelen van het gebruik van statistische methoden en zijn signifiante denkbeelden brachten Van Dantzig tot een ommekeer. In 1945 kwam hij op de verhouding wiskunde–werkelijkheid terug, maar als hoofdonderwerp. Nu was een wiskundig model niet een afbeelding of illustratie van iets anders meer, maar een eigen object. Het ging bovendien niet meer om dit object, maar om de activiteit van het *wiskundig modelleren*. Met een uitdrukking van Mannoury karakteriseerde hij dit ook als “inschakelen en uitschakelen van het formalisme”.

De activiteit van het wiskundig modelleren, de procedure, de werkwijze, gaf Van Dantzig in verschillende publicaties weer in schematisch overzicht (zie figuur 1). Hij behandelde de werkwijze en begrip ter inleiding van zijn colleges statistiek en waarschijnlijkheidsrekening. Hij gaf er een afzonderlijke collegecyclus over in Delft, *Wiskunde, logica, ervaringswetenschappen*. Zijn bewustzijn dat hij een algemene manier van doen op het spoor was, bracht hij het duidelijkst tot uiting in de titel van het artikel ‘General procedures of empirical science’ [18].

Van Dantzig was intussen hoogleraar mathematische statistiek aan de Universiteit van Amsterdam en van daaruit kon hij zijn visie op deze manier van bruikbaar maken van wis-

Een model van Tinbergen uit [11]

Een voorbeeld van een mechanisme dat vertragsingsgolven vertoont is het volgende model. De volgende economische grootheden worden beschouwd:

L het arbeidersinkomen,

Z het niet-arbeidersinkomen, kortweg ‘winst’ te noemen,

U de waarde der verkochte consumptiegoederen,

V de waarde der verkochte investeringsgoederen,

De volgende betrekkingen worden aangenomen tussen deze grootheden, welke alle worden gemeten als afwijkingen van een bewegend evenwicht.

(1) De winstvergelijking [...]

$$Z = U + V - L$$

(2) [...] een vertraging aangenomen van één tijdseenheid [...]

$$V_t = \beta Z_{t-1}$$

(3) [...] de uitgaven voor consumptiegoederen [...]

$$U_t = L_t + \epsilon_1 Z_{t-1} + \epsilon_2 (Z_{t-1} - Z_{t-2})$$

Men vindt op eenvoudige wijze dat voor bijvoorbeeld Z de bewegingsvergelijking geldt:

$$Z_t - (\beta + \epsilon_1 + \epsilon_2)Z_{t-1} + \epsilon_2 Z_{t-2} = 0.$$

hij zijn praktisch-politieke doelstellingen de doorslag geven en stelde hij zich tevreden met modellen als illustratie bij politieke voorstellen tot planning. In het licht van de criteria van Ehrenfest, vasthouden aan streven naar inzicht in de economie, had Tinbergen dus gefaald. Maar juist door tot het uiterste vast te houden aan deze criteria en pas op het laatste moment een pragmatische wending te nemen, faalde hij zo groots dat het resultaat niet zomaar een illustratie was, maar een nieuwe wetenschap, de econometrie. Tinbergen was ook in internationaal perspectief een van de grondleggers van deze “ingenieurswetenschap”.

Net als in het geval van Burgers was het de vorming bij Ehrenfest, streven naar inzicht in

Genève om een economisch model van de Verenigde Staten op te stellen. Na de Tweede Wereldoorlog richtte de Nederlandse regering het Centraal Planbureau op, met Tinbergen als eerste directeur. Het modelleren in dienst van beleid had in het Planbureau zijn eerste toonbeeld. Zowel binnen Nederland op andere beleidsterreinen, zoals het Sociaal-cultureel Planbureau, als in economische adviesbureaus in andere landen vond het navolging. Het is maatschappelijk wellicht de invloedrijkste vorm van wiskundig modelleren geworden.

Van Dantzig

David van Dantzig was een generatiegenoot van Burgers en Tinbergen. Hij was gepromo-



Jan Tinbergen (zittend midden) met het Bureau van conjunctuuronderzoek (1936). Staand tweede van links S. de Wolff (zie [11]).

kunde verbreiden: via onderwijs, via cursussen voor de Vereniging voor Statistiek, door advieswerk vanuit het Mathematisch Centrum en door collega's in empirische wetenschappen die de boodschap rechtstreeks bij Van Dantzig haalden.

1. Experience	Forgetting
2. Recollection	Simplification
3. Observation	Elipsis
4. Description	Regulation
5. Model	Switching on
6. Formalisation	Absolutising
7. Induction	Arranging
8. Axiomatisation	Deduction
9. Extension	Switching off
10. Interpretation	Inductive behaviour
11. Expectation	Volition
12. Action	

Figuur 1 De empirische cyclus: Van Dantzig's schema van in- en uitschakelen van het formalisme. Uit [Dantzig 1947], zie [18].

Procedure

Met Van Dantzig's "general procedures" kregen ook de geciteerde woorden van Hertz terug, het *Verfahren*, de werkwijze. De procedure is er een van uitbeelden, veeleer dan van afbeelden.

Voorzover een model als beeld voor iets wil dienen, moet het als beeld correct zijn — de structuur van het beeld moet overeenstemmen met een structuur van de werkelijkheid;

consistent, doelmatig en zuinig. Hertz gaf deze criteria weer. Het waren de gebruikelijke eisen aan wetenschappelijke theorievorming in relatie tot empirie, met dien verstande dat uitdrukkelijk vermeld was dat de correctheid, of waarheid, een partiële afbeelding betrof en verschillende beelden kon toelaten. De keuzevrijheid was een toevoeging van Hertz. Het beste beeld was het meest terzake; ten eerste het zuinigste — zonder overbodige elementen, ten tweede het makkelijkste voor berekening of andere doelen. Wat het beste beeld was, hing dus af van het doel; het doel van wetenschap had tot dan toe eenzinnig vastgelegen, namelijk de essentie van de betrokken werkelijkheid weer te geven, "waarheid" in hogere zin.

Was hiermee een niet mis te verstane relativisering gegeven van het ideaal van wetenschappelijkheid, de variatie in doelstellingen liet daarenboven heel andere oriëntaties toe. Het doel waarvan de geschiktheid van de wiskundige structuur afhing, kon niet alleen partiële of voorlopige waarheid zijn en zo een bescheidenheid ten opzichte van het wetenschapsideaal betekenen; het doel kon van alles zijn, met name een praktisch of maatschappelijk doel. We zagen aan het voorbeeld van Tinbergens modelvorming ten volle hoeveel conceptuele ruimte hier verworven is. De vierde, nieuwe eis aan een model is dus dat het geschikt moet zijn, adequaat aan een doel.

Zowel bij Tinbergen als bij Van Dantzig kwam naar voren dat niet de werkelijkheid op zich vertrekpunt is van modelvorming: vooraf gaat een kwantitatieve stylering, een geregulariseerd model van de empirie, met andere woorden een kwantificering of mathematisering. Eerst daarna volgt de opstelling van het wiskundig model, de inschakeling en uitschakeling van het formalisme, met andere woorden de mathematisch abstractie. We komen dus niet zomaar bij de wiskunde uit, daar moeten eerst de geëigende stappen voor gezet worden. Het denkbeeld dat de wiskunde zich zou lenen om zich in uit te drukken, als een ideale materie, moest eerst nog veroverd worden. Historisch was het misschien de kortzichtigheid van Boltzmann dat hij deze stap niet wist te zetten; begripsmatig was hier werkelijk een blokkade te overwinnen, moest een nieuwe visie op wiskunde ontwikkeld worden. Het idee moest geaccepteerd worden dat wiskunde als een "stof" zou kunnen dienen waarin men zich uitdrukt.

Samengevat reikt het historisch overzicht van de speurtocht, die tot rust kwam bij de notie van wiskundig model, de volgende systematische elementen aan.

Wiskundig modelleren is het in wiskunde uitdrukken van wat men ergens van denkt. Uitdrukken in wiskunde legt de beperking dat het in kwantiteiten of wiskundige structuren gezegd wordt. Wat men ergens van denkt kan wel de vorm hebben van een axiomastelsel, maar dat hoeft helemaal niet. De omweg via de logica is niet verplicht. Het kan zijn, zoals bij Burgers, dat de gedachte de vorm heeft van een natuurkundige theorie die men met wiskundige objecten wil illustreren. Een gangbare vorm van een wiskundig model is een stelsel vergelijkingen. Een model moet consistent zijn, correct en zuinig en daarenboven adequaat. Adequaats wil zeggen geschikt voor het gesteld doel. Om succesvol te modelleren moet men zich dus een doel gesteld hebben, anders is niet uit te maken welk model adequaat is. Waarheidsvinding is maar een van de mogelijke doelen.

Verbreiding

Niet alleen in de Nederlandse, ook in de internationale literatuur, is het in de loop van de jaren zestig en zeventig in alle empirische wetenschappen volstrekt gebruikelijk geworden te spreken van wiskundig modelleren. Er zijn wetenschappen als econometrie, bedrijfskunde, bestuurskunde of de informatica die zonder het modelleren dat eraan ten grondslag ligt niet zouden bestaan, of niet de



David van Dantzig

status van wetenschap zou hebben. Wiskundigen en logici als Norbert Wiener, John Tukey, John G. Kemeny hebben de notie van wiskundig model verbreed. Kemeny identificeerde in *A philosopher looks at science* (1958) zelfs in het algemeen "scientific method" als wiskundig modelleren.

De introductie van het begrip "wiskundig model" bij Tinbergen en Burgers heb ik terloops genoemd omdat ze er geen hoofdthema van maakten. Toch waren ze zich, getuige de aanhalingstekens bij eerste gebruik, zeer wel bewust van de terminologische vernieuwing die ze pleegden. Van Dantzig is in het Nederlandse taalgebied degene geweest die er conceptueel een punt van heeft gemaakt. Hij was ook degene die vasthield aan modelleren als handeling of als procedure.

Van Dantzig maakte school. Baarda in de geodesie, Engelfriet in de verzekeringswiskunde en Sittig in de toegepaste statistiek beriepen zich rechtstreeks op hem. A.D. de Groot in de psychologie, R. Mokken in de politicologie en Chr. Rümke in de medische research waren veeleer geestverwanten dan leerlingen. Via colleges, cursussen van de VVS en statistische consultatie van het Mathematisch Centrum verbreidde zich de boodschap van wiskundig modelleren. R. Timman richtte in 1955 de wiskundig-ingenieursopleiding op. Dit was de wiskundig modelleeropleiding bij uitstek. Eerst rond 1970 zouden de instellingen deze opleiding ook zo formuleren.

Burgers was een van de geleerden dankzij wie het begrip wiskundig modelleren in

de jaren vijftig voorhanden was in de technisch wetenschappelijke research. Er is geen duidelijk spoor van receptie te reconstrueren. De term was er eenvoudig en vond zijn weg. Vanaf 1960 wordt hij overal gebezigd.

Tinbergens geschriften en optreden hebben wel navolging gekregen. Men is algemeen gaan spreken van macro-economische modellen. Het Centraal Planbureau was het voorbeeld voor de zusterinstellingen en diende als toonbeeld voor andere bureau's. Begrip en praktijk van wiskundig modelleren verbreidden zich op deze manier, ze zijn geïnstitutionaliseerd.

De wetenschap econometrie dankt zijn bestaan wel heel direct aan wiskundig modelleren. De invloed reikt hier echter vele malen verder dan het opleiden van studenten in het vak [19]. Bedrijfseconometrie, bedrijfskunde, ontwikkelingsprogrammering, bestuurskunde, en zoveel andere technische en toegepast sociaalwetenschappelijke disciplines steunen op noties van wiskundig modelleren.

De werkelijke culturele invloed van het wiskundig modelleren reikt nog een hele stap verder. Het hele beeld van de wetenschap is met de opkomst van het wiskundig modelleren verschoven. Het zou overdreven zijn die over de hele linie een gevolg van het wiskundig modelleren te noemen, maar de gelijktijdigheid is geen toeval. Te beginnen met econometrie en bedrijfskunde (management science, operations research) hebben zich vanaf de jaren vijftig een reeks van kundes gevestigd die er van meet af aan slechts een betrekkelijk waarheidsstreven op na durfden te houden. Hun gerichtheid op partiële kennis of op het nastreven van buitenwetenschappelijke doelen (wiskundig ingenieursopleiding, geneeskunde, milieukunde) diskwalificeerde hen niet als wetenschappen, integendeel. Ook van de traditionele wetenschappen is het waarheidsstreven sinds de jaren zestig gedeconstrueerd. Claims op eenduidige kennis zijn ontmaskerd als ouderwets positivistisch. Wat men hiervan ook denken mag, een feit is dat ons complete ideaalbeeld van wetenschap sinds 1900 radicaal op de helling is gegaan. De opkomst van het wiskundig modelleren stond aan de wieg van deze ontwikkeling. Wat begon met econometrie als een uitzondering is nu de norm geworden. Het vak had beperkte waarheidsaspiraties en grote handelingspretenties. Niet voor niets sprak Tinbergen van de "ingenieurswetenschap der econometrie".

Dat het opschorten van de aspiraties waar-

heid te bieden nu de norm geworden is, is voor de bruikbaarheid van de wiskunde niet negatief. Van de binnenkant gezien heeft het wiskundig denken inderdaad in het wiskundig modelleren een vorm van bruikbaarheid gevonden die zeer breed inzetbaar is. Het is veel flexibeler dan het vroegere idee van toegepaste wiskunde. Van buitenaf gezien is het aantal wetenschappen dat een beroep doet op wiskunde alleen maar toegenomen. Van taalkunde tot metaalkunde regent het proefschriften waarin wiskundige modellen voor bepaalde probleemgebieden worden ontwikkeld. Of ze van de hand van wiskundigen zijn is de vraag.

Actualiteit

Bernard de Fontenelle, de vader van de Verlichting, heeft ruimschoots zijn zin gekregen. Het is altijd nuttig, vond hij, helder te denken, zelfs over nutteloze zaken. En:

"Het wiskundig denken (*Esprit Géométrique*) zit niet zo vast aan de wiskunde, dat het er niet van kan worden losgemaakt en overgebracht op andere gebieden van kennis. Een werk op het terrein van de ethiek, van de politiek, van de tekstkritiek, en wellicht zelfs op het gebied van de welsprekendheid wordt er onder overigens gelijke omstandigheden mooier op, wanneer het van de hand van een wiskundige is. De orde, de helderheid, de beknoptheid en de nauwgezetheid die sinds enige tijd in de betere boeken waar te nemen zijn, konden wel eens hun oorsprong vinden in dit wiskundig denken, dat zich meer dan ooit verbreidt, en dat op een of andere manier zelfs op die mensen geleidelijk aan overgedragen wordt die van de wiskunde geen weet hebben"(1702).

Wat De Fontenelle schetst is allemaal gebeurd. Het wiskundig modelleren, soms gepresenteerd onder de noemer "de wetenschappelijke methode", functioneerde in de jaren vijftig inderdaad als teken van moderniteit, van vooruitgang in wetenschappelijke en in maatschappelijke zin.

Nu het Centraal Planbureau en het RIVM inderdaad met mathematische modellen werken en adviezen geven komt de kritiek. De waarheid zou in het gedrang komen, de onzekerheden zouden te groot zijn. Maar was dat nu niet de quintessens van het wiskundig modelleren ten opzichte van vroegere wetenschapsidealen? In de modellerende wetenschappen is het waarheidsstreven gerelativeerd. Een model is niet "waar" en een goed model dient een doel.

Van Hertz tot Van Dantzig is met grote inzet nagedacht over de verhouding wiskunde-werkelijkheid en de aanspraken op waarheid zijn hier opgeschort. De ideeën en de manieren van doen hebben zich ontwikkeld van

“Bild” in 1894 tot “wiskundig modelleren” in 1945. Wat wij vinden over de werkelijkheid kunnen we met succes uitdrukken in wiskunde. In het besef dat noch wat wij vinden, noch de wiskundige uitdrukking daarvan, samen-

valt met de werkelijkheid, kunnen we met succes wiskundige modellen opstellen.



Verantwoording

Delen van dit artikel zijn ontleend aan hoofdstuk 2 ‘Anderhalve eeuw toegepaste wiskunde’ van mijn boek *Jaren van berekening; toepassings-gerichte initiatieven in de Nederlandse wiskunde-beoefening 1945-1960*, Amsterdam (1998)

Referenties en noten

- 1 “Das Verfahren aber, dessen wir uns zur Ableitung des Zukünftigen aus dem Vergangenen und damit zur Erlangung der erstrebten Voraussicht stets bedienen ist dieses: wir machen uns innere Scheinbilder oder Symbole der äußeren Gegenstände, und zwar machen wir sie von solcher Art, daß die denotwendigen Folgen der Bilder stets wieder die Bilder seien von den naturnotwendigen Folgen der abgebildeten Gegenstände.” [Hertz 1894 p. 1] *Die Prinzipien der Mechanik in neuem Zusammenhang dargestellt* /Heinrich Hertz. Hrsg. von Ph. Leonard; mit einem Vorworte von H. von Helmholtz. Leipzig: J.A. Barth, 1894 (*Gesammelte Werke von Heinrich Hertz*, Band III). Dit boek van Heinrich Hertz (1857-1894) verscheen in 1894 postuum, nog wel op zijn aanwijzingen, meteen als deel 3 van zijn verzameld werk, hetgeen voldoende zegt over zijn roem. Zijn leermeester H. von Helmholtz (1821-1894) overleefde hem net.
- 2 “Ist es uns einmal geglückt, aus der angesammelten bisherigen Erfahrung Bilder von der verlangten Beschaffenheit abzuleiten, so können wir an ihnen, wie an Modellen, in kurzer Zeit die Folgen entwickeln, welche in der äusseren Welt erst in längerer Zeit oder als Folgen unseres eigenen Eingreifen auftreten werden; [...]” [Hertz 1894 pp. 1, 2].
- 3 “Die Übereinstimmung Geist und Natur lässt sich also vergleichen mit der Übereinstimmung zwischen zwei Systemen, welche Modellen von einander sind, und wir können uns sogar Rechenschaft ablegen von jener Übereinstimmung, wenn wir annehmen wollen, dass der Geist die Fähigkeit habe, wirkliche dynamische Modelle der Dinge zu bilden und mit ihnen zu arbeiten” [Hertz 1894 p. 199 (#428)]. “System” is bij Hertz steeds fysiek gedacht.
- 4 [Gibbs 1902] *Elementary principles in statistical mechanics; Developed with especial reference to the rational foundation of thermodynamics* /J. Willard Gibbs. New York: Charles Scribner's Sons /London: Edward Arnold, 1902 (Yale Bicentennial Publications).
- 5 “Die kinetische “Erklärungen” werden zu Abbildungen und dementsprechend jene beiden Gruppen von “Hypothesen” zu willkürlichen Festsetzungen über den Aufbau des abbildenden Schemas; nämlich zu Festsetzungen 1) über die Struktur des Gasmodelles 2) über die Auswahl der Bewegungsschar.” [Ehrenfest 1911 p. 52] ‘Begriffliche Grundlagen der statistischen Auffassung in der Mechanik’ /P. und T. Ehrenfest. In: [Encyklopädie 1898 IV.32 (IV-4 Heft 6)] *Encyklopädie der Mathematischen Wissenschaften mit Einschluss ihrer Anwendungen* /Hrsg. Walther Dyck e.a.. Leipzig/Berlin: Teubner, 1898-1935. (Band IV Mechanik in 4 Teilbänden Hrsg. von F. Klein und C.H. Müller. Ehrenfest's bijdrage, Heft 6 van Teilband 4, verscheen 12-12-1911). Curs. in origineel.
- 6 Onder meer Kramers, Casimir, Burgers, Tinbergen en Struik. Over Ehrenfest, zie [Klein 1970] *Paul Ehrenfest* /Martin J. Klein. Amsterdam: North Holland, 1970. Over Ehrenfests invloed op Struik, Burgers en Tinbergen [Alberts 1994b] ‘On Connecting Socialism and Mathematics: Dirk Struik, Jan Burgers, and Jan Tinbergen’ /G. Alberts. In: *Historia Mathematica* 21 (1994), pp. 280–305.
- 7 2.1 Wir machen uns Bilder der Tatsachen 2.11 Das Bild stellt die Sachlage im logischen Raum, das Bestehen und Nicht-bestehen von Sachverhalten da 2.12 Das Bild ist ein Modell der Wirklichkeit [Wittgenstein 1921] ‘Logisch-philosophische Abhandlung’, Ludwig Wittgenstein. *Annalen der Naturphilosophie* 14 (1921) 185-262. Afzonderlijk gepubliceerd als *Tractatus logico-philosophicus*, 1922.
- 8 [Burgers 1974] *The nonlinear diffusion equation; asymptotic solutions and statistical problems* /J.M. Burgers. Dordrecht/Boston: Reidel, 1974.
- 9 [Burgers 1955a p. 15] *Terugblik op de hydrodynamica* /J.M. Burgers (afscheidscollege). Delft: TH Afd.Werkb., 1955. N.B. het woord “model” is van 1955, aanvankelijk gebruikte hij “mathematical examples”, na 1940 “wiskundig model”.
- 10 [Burgers 1941 p. 11–12] ‘Beschouwingen over de statistische theorie der turbulente strooming’ /J.M. Burgers. In: *Waarschijnlijkheidsrekening en statistische methoden; Nederlands Tijdschrift voor Natuurkunde* 8-1, 2 (1941), pp. 5–18.
- 11 [Tinbergen 1938] ‘Vertragsingolven en levensduurgolven’ /J. Tinbergen. In: [Strijdenskracht 1938 pp. 143–150] *Strijdenskracht door Wetensmacht; Opstellen aangeboden aan S. de Wolff ter gelegenheid van zijn 60e verjaardag* /J. v.d. Wijk e.a. (red.). Amsterdam: Arbeiderspers, 1938, pp. 145–146.
- 12 [Tinbergen 1936] ‘Prae-advies van Prof.dr. J. Tinbergen’ /J. Tinbergen. In: [Prae-adviezen 1936 pp. 62–108] *Prae-adviezen over ...* /H.A. Kaag e.a.; Vereeniging voor de Staathuishoudkunde en de Statistiek. 's Gravenhage: Mart. Nijhoff, 1936.
- 13 Tinbergen bevestigde deze interpretatie desgevraagd in een gesprek op 2 december 1987. Hij herhaalt met nadruk dat de inzet van mathematische methoden geen principieel onderscheid maakt “zoals sommige Duitse filosofen intertijd beweerden”. Vergelijk [Kleerekoper 1938] *Over het gebruik van de wiskunde in de economie* /S. Kleerekoper (diss. U.v.A.). Groningen: Noordhoff, 1938.
- 14 [Tinbergen 1933 p. 74] *De Konjunktuur* /J. Tinbergen. Amsterdam: De Arbeiderspers, 1933.
- 15 Die opbouw met economie, en dan ook natuurkunde, in de appendix was een compromis met promotor Ehrenfest. [Tinbergen 1929] *Minimumproblemen in de natuurkunde en in de economie* /Jan Tinbergen. Amsterdam: Paris, 1929.
- 16 [Boumans 1992] *A case of limited physics transfer: Jan Tinbergen's resources for reshaping economics* /Marcel Boumans. Amsterdam: Thesis Publishers, 1992.
- 17 [Dantzig 1941 p. 78] ‘Mathematische en empiristische grondslagen der waarschijnlijkheidsrekening’ /D. van Dantzig. In: *Waarschijnlijkheidsrekening en statistische methoden; Nederlands Tijdschrift voor Natuurkunde* 8 (1941) pp. 70–93.
- 18 [Dantzig 1946a p. 5] ‘Wiskunde, Logica en Ervaringswetenschappen’ (syllabus college Logica, TH Delft, 1945/46) /D. van Dantzig. S.l., s.a. [Delft: Studium Generale TH Delft, 1946]. [Dantzig 1947] ‘General procedures of empirical science’ /D. van Dantzig. In: *Synthese* 5 (1947) pp. 441–445. [Dantzig 1946b] ‘Syllabus Waarschijnlijkheidsrekening en Mathematische Statistiek’ /D. van Dantzig. Amsterdam: Mathematisch Centrum, 1946/47 [syllabus van kadercursus VVS 1946/47 en college UvA 1947-1950. Gestencild 27+415 pag.].
- 19 [Klamer/Dalen 1996] *De telgen van Tinbergen*, Arjo Klamer en Harrie van Dalen. Amsterdam: Balans, 1996.

J. de Jonge

*Gymnasium Felisenum, Van Hogendorpstraat 2
1981 EE Velsen-Zuid*

Visie op wiskundeonderwijs

De boze buitenwereld

In een serie artikelen geven wiskundeleraren en -leraressen hun persoonlijke visie op hun beroep. In deze aflevering is Jaap de Jonge aan het woord, die onder andere ingaat op de relatie tussen wiskunde en lerarenopleiding.

Werken in kleine heterogene groepjes... Het is alweer vijf jaar geleden dat ik de eerstegraads lerarenopleiding aan het Instituut voor de Lerarenopleiding in Amsterdam mocht doen, maar tot aan mijn pensionering zal veel ervan me nog vaak aan het lachen brengen. Ik kon gebruik maken van de een of andere regeling die erop neerkwam dat ik voor een aanstelling van veertien lesuren (toen nog een halve baan) betaald werd als voor een volledige baan. Riant! Het enige dat ik ervoor hoefde te doen, was een jaar lang die lerarenopleiding volgen en af en toe wat opdrachtjes maken. Jammer was wel dat ik daardoor klas 1a, die ik het jaar daarvoor met zoveel plezier — zij het onbevoegd — had lesgegeven, kwijt was geraakt. Bovendien had ik nu geen vijfde of zesde klas.

In 1990 was ik aan de Universiteit van Amsterdam afgestudeerd in wiskunde, een half jaar later, op 21 maart, in filosofie. Op 25 maart gaf ik mijn eerste les wiskunde aan een MAVO-2 klas, als vervanger aan een categoriale school voor MAVO in Krommenie, voor zeventien lessen per week. Ik vond het leuk en het kostte me niet veel moeite. In september van dat jaar begon ik als gewetensbezwaarde aan de UvA als toegevoegd do-

cent. Ik gaf werkcolleges analyse en lineaire algebra aan eerste- en tweedejaarsstudenten van verschillende exacte richtingen. Toen mijn vervangende dienstplicht erop zat, kon ik nog een half jaar blijven als gewoon toegevoegd docent, maar toen moest ik wat anders zoeken, omdat men alleen nog gepromoveerden college wilde laten geven. Ik solliciteerde bij mijn huidige school, het Gymnasium Felisenum in Velsen-Zuid, en werd uitverkoren uit een groep van vijftig gegadigden voor vierentwintig lessen per week. Hoewel tijdens het sollicitatiegesprek duidelijk werd dat ik geen onderwijsbevoegdheid had, waren mijn enthousiasme en het feit dat ik filosofie gestudeerd had kennelijk interessant genoeg. Ik moest wel beloven dat ik te zijner tijd toch mijn bevoegdheid zou halen, 'omdat dat nu eenmaal moet'. Door de manier waarop over deze verplichting werd gesproken, voelde ik me meteen thuis op de school. Nog steeds geloof ik dat van een leraar, ook een beginnende, niet veel zinnigs méér kan worden gevraagd dan kennis van zijn vak en plezier in het overdragen van zijn kennis aan zijn leerlingen.

Ik had een fantastisch eerste jaar. Wat een leuke kinderen! Ruimtemeetkunde in de vijfde klas was nieuw voor me. 's Zondags maakte ik me met veel plezier de stof eigen. Het was leuk te merken hoe eenvoudig dat door mijn degelijke wiskundestudie voor me was. Aan het eind van het jaar protesteerde de vijfde klas bij de schoolleiding dat ik ze in de

zesde klas geen les meer zou geven. Ik voelde me gevlod, maar er was niets aan te doen: ik moest mijn onderwijsbevoegdheid halen!

De eerstegraads lerarenopleiding... Een jaar lang Monty Python en Jiskefet door elkaar, maar dan niet grappig bedoeld. Een jaar lang jargon ondergaan als 'micro, meso en macro' (wie kent ze nog?), 'intervisie', 'leren leren leren' en 'protocolleren'. Vaak dacht ik dat jaar aan een van mijn redenen om juist wiskunde te gaan studeren, namelijk dat het een echt vak is. Wat miste ik dat gevoel nu! Wel werd er heel veel gepraat en gereflecteerd en aan het begin moest iedereen zijn buurman interviewen om die aan het eind van de bijeenkomst aan de rest van de groep voor te stellen, weetjewel... O ja, en er waren 'colleges' logopedie met een syllabus met de potsierlijke titel 'Kennis is alleen nuttig als je het kunt gebruiken'. (Toen ik het afgelopen jaar last van mijn stem kreeg, ben ik alsnog naar een echte logopedist gegaan die me goed heeft geholpen.) Vakdidactiek spande de kroon. 'Werken in kleine heterogene groepjes aan contextrijke wiskunde', te lezen als 'vooral niet praten over hoe je bijvoorbeeld tweedegraadsvergelijkingen zou kunnen onderwijzen'. Dertien bijeenkomsten lang werd er volstrekt vrijblijvend gebabbeld over een politiek idee, over sociologie, over een opvatting van de maatschappij, maar nauwelijks over enige didactiek van de wiskunde. Ik vroeg welke rol het abstraheren van een context — eventueel een wiskundige — kon hebben in contextrijke wis-

kunde. Dat was flauw, vond de docent — en verder babbelden we. Laat ik het eens als protocol opschrijven:

Pim: Dus dat je, ehh, dat dan de een...

Miep: Ja, en die slimme, dat meisje dus, dat die dus dat uitlegt...

Pim: Ja, en dat, ehh, dat ze dus allebei er wat van opsteken, die jongen dus, omdat die...

Miep: Ja! Want dat meisje, die leert er dus van, want die moet het aan hem uitleggen.

Er waren studenten die de opleiding in het begin nog wel interessant vonden. Meestal veranderde dat als ze een stageschool vonden en les gingen geven. Hoe banaal zijn ze, de problemen van een beginnende leraar! Hoe irrelevant voor hen onderwijskunde en moderne didactiek, zoals ik ook na het halen van mijn bevoegdheid van steeds weer nieuwe slachtoffers hoorde...

Nu is er de Tweede Fase. Met Vaardigheden. Op het moment dat ik dit schrijf heeft 'het onderwijsveld' nog ruim een week om te reageren op de nieuwste plannen van staatssecretaris Adelmund. Ik ben inmiddels decaan op mijn school en wil medio januari informatiebrochures over de profielkeuze uitdelen aan derdeklassers. Dat zal krap worden, nu verschillende zaken met betrekking tot vakken en uren in de Tweede Fase (weer) op losse schroeven staan. Maar ik ben niet boos noch verontwaardigd en ik voel ook nauwelijks enige druk als gevolg van het gerommel met de Tweede Fase. 't Is af en toe een beetje lastig, maar zolang je alle plannen bij voorbaat al niet erg serieus neemt, is de kans op frustratie niet zo groot. Tuurlijk, Frans, Duits en wiskunde voor iedereen verplicht, want al die misgelopen contracten met Frankrijk en Duitsland en al die wetenschappelijke artikelen in het Frans en het Duits en al die wiskunde in al die gamma- en alfawetenschappen! Welja, algemene natuurwetenschappen en klassieke culturele vorming erbij. Niet meer zo diep, niet meer zo abstract, maar wel lekker breed en veel, heel veel. Praktische opdrachten, want je moet er wat mee kunnen, met je kennis, je moet het kunnen gebruiken (zie boven) en je moet (je) kunnen presenteren, want al die mensen die wel veel weten maar niet kunnen communiceren daar hep niemand wat aan.

Ik weet niet goed waarom ik onderwijsvernieuingsplannen bij voorbaat al niet erg serieus neem, maar ik merk domweg dat plannenmakers aan de rand van het onderwijs (politici, didactici en tal van soorten kundigen) vooral mijn lachlust opwekken. Wie her-

innert zich niet de discussies over het effect van verkleining van klassen op het onderwijsniveau? Met plezier denk ik ook terug aan het gat van drie jaar tussen de Basisvorming en de Tweede Fase tussen '96 en '99, waardoor op de meeste scholen leerlingen wel al veel contextrijke wiskunde kregen in de onderbouw (met heel veel plaatjes, kleurtjes, verhaaltjes en praktische onderwerpen als de boxplot), maar nog examen moesten doen in de oude examenstof. In eerste instantie geloofde ik niet dat zoiets mogelijk was. Waarom in vredesnaam dan zo snel die Basisvorming ingevoerd? Was er sprake van een noodsituatie, een glijden in een afgrond, een dreigende oorlog? Welnee... Maar dit schandaal lijkt al bijna weer vergeten! Een ander voorbeeld, dat veel kleiner lijkt, maar belangrijk is omdat ik uit zoveel soortgelijken kon kiezen, is het volgende citaat uit een artikel over 'zelfstandig leren' in De Nieuwe Wiskrant van een aantal jaren geleden:

"Zelfstandig leren is een begrip dat steeds terugkomt in de discussies, de literatuur, de conferenties en de nota's over de Tweede Fase. Er worden heel veel verschillende definities van zelfstandig leren gehanteerd. In dit artikel wil ik de volgende definitie gebruiken: Zelfstandig leren is een visie op het hele schoolgebeuren waarbij de leerling op allerlei manieren gestimuleerd wordt om zelfstandig tot de gewenste leerprestaties te komen en bovendien leert zelf te leren."

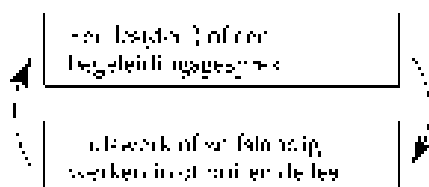
Let vooral op die laatste zes woorden! Ik kan alleen maar hopen dat het Gerard Reve, bedenker van titels als 'Zelf schrijver worden' en 'Zelf kamperen', onder ogen komt. Wat ik soms beangstigend vind, is dat er kennelijk veel mensen zijn die volstrekt serieus dingen schrijven als 'zelfverantwoordelijk leren' en 'leren leren'. Eng, omdat veel van die mensen hun geld verdienen met dergelijke onzin en er dus belang bij hebben dat ze die kunnen blijven slijten. Het eind is nog lang niet in zicht met een staatssecretaris als Karin Adelmund die het herhaaldelijk heeft over een gemiddelde werkweek van voorheen dertig uur waar ze nu veertig uur van zou hebben gemaakt. Waar haalt ze het vandaan? Maar het mag allemaal maar (van de politie).

Het is pijnlijk om te merken hoe zacht en voor mijn gevoel weinig frequent de geluiden zijn van wiskundedocenten die zich zorgen maken over het wiskundeonderwijs. Vermoedelijk komt dat omdat ze zo redelijk zijn en zich daarom zo voorzichtig maar precies uitdrukken, waardoor ze voor de mensen die



eens naar ze zouden moeten luisteren waarschijnlijk onbegrijpelijk zijn. Wat bereikt hen van de bezorgdheid van Frans Keune die in *Euclides* 8, jaargang '98-'99, schrijft: "Met methoden als *Moderne Wiskunde* leert men geen wiskunde maar zoals dat heet 'praktische wiskunde'." Als voorbeeld noemt hij de introductie van de cirkel in een paragraaf met als titel 'De passer'. In die opvallend kritische aflevering van *Euclides* staat ook een interview met Wim Doeve, die zegt: "Met de terugkeer van de nadrukkelijke benadering vanuit de intuïtie wordt een geleidelijke ontwikkeling van ruim 2500 jaar, vanaf Thales en Pythagoras, in systematisch logisch deductief denken als de wezenlijke grondslag van het vak opeens ontkend. Dat begrijp ik niet." Hij waarschuwt: "Een wiskundeboek is geen roman. De praktijk tot op heden met zelfstandig werken, en vooral verwerken, stemt mij niet optimistisch. Een abstracter vak leent zich daar op school misschien ook wel minder voor."

Ik denk dat de meeste wiskundeleraren veel herkennen in zijn woorden. Desondanks zitten we met opdrachten als: "Zoek contact met iemand die op een wetenschappelijke manier topsporters begeleidt. Onderzoek uit welke aspecten het werk van zo'n begeleider bestaat." (*Getal en Ruimte*, CM/EM 1). Zou het komen doordat wiskundeleraren zich te veel met wiskunde bezig (willen) houden en te weinig 'presentatievaardigheden' hebben om hun nood te klagen? Ik ben bang van wel. Wat immers te denken van een artikel in, nota bene, een *Euclides* eerder van Bram Lagerwerf en Fred Korthagen? Ze presenteren hun 'VAARDIG onderwijsmodel' en wie het stuk leest kan haast niet anders dan denken dat het een grap is. Volgens mij kan niemand een stuk serieus nemen met daarin fragmenten als 'Dit is voorts geen eenmalig gebeuren maar een steeds terugkerend patroon. Het is een cyclus:



Of: 'Het VAARDIG-model is dus geen receptuur, maar meer een professioneel geweten'. En wat te denken van de lachwekkende constructie van het woord VAARDIG?: "Enerzijds geeft het een fasering van een les(deel) of een begeleidingsgesprek in drie fasen: *Voortgang bespreken*, *Aansluiten* en *Afspraken maken*. Anderzijds is er een viertal onderwijskundige

principes: *Reflectie bevorderen*, *Dubbele doelen nastreven*, *Individueel benaderen* en *de Groep gebruiken*."

Ik ben niet pessimistisch. Het lijkt mij een vooruitgang dat leerlingen in de eerste klas niet meer geconfronteerd worden met uitdrukkingen als ' $x \in \emptyset$ '. Een voorbeeld-examen Wiskunde B VWO van het Cito voor in de Tweede Fase zag er leuk uit; jammer genoeg is de ruimtemeetkunde verdwenen, maar er zijn aardige onderwerpen voor in de plaats gekomen en het obligate functieonderzoek is eindelijk weg. Gelukkig staan er regelmatig interessante artikelen in, bijvoorbeeld, *De Nieuwe Wiskrant* en *Euclides*, zoals laatst een soort vergelijkend warenonderzoek tussen twee wiskundemethoden. Ik vind de omgang met mijn leerlingen plezieriger dan ooit en verheug me over een eerste en een negende plaats van twee van mijn leerlingen bij de Nederlandse Wiskunde Olympiade van dit jaar. Ik ben lang geen perfecte leraar. Ik weet dat ik wat moet doen aan mijn geringe interesse voor computers en Internet en zou meer tijd kunnen besteden aan de ontwikkelingen van de wiskunde buiten de context van mijn school... Maar ik vind het een voorrecht om leraar wiskunde te zijn. Het enige dat me soms nog een beetje stress en frustratie kan geven zijn de op het onderwijs gerichte producten van de 'buitenwereld', die ik gelukkig steeds makkelijker als weliswaar vermoeiend maar verder vooral vermakelijk kan afdoen. Ik hoop dat ik niet de enige ben.



S. Tobias

724 N.Campbell Avenue, Tucson, AZ 85719, U.S.A.

Who will study math and for what purpose?

The reasons for studying mathematics over the centuries have ranged from its raw utility to disinterested curiosity. For Plato and the educators who followed, mathematics is the consummate discipline for training the mind; for Pythagoras and those who followed him, a mystical, indeed, an almost spiritual endeavor.

In an ever more technical economy, however, the study of mathematics at university is no longer (if it ever was) appropriate only for those who will contribute new knowledge to the field. It has become the foundation for a whole range of professional options from 'computational science' to management. But university professors of mathematics (with some exceptions) continue to view their students from a more narrow perspective: either as future research mathematicians or as not worth encouraging if they do not have the interest, the 'talent,' or the temperament for research.

Faced with declining enrollments in university mathematics in the 1970s, math educators in the U.S. and Britain began to critically examine the curriculum, the pedagogy, the 'nerd' image, and (eventually) the competitive 'classroom culture' in university mathematics in an effort to attract a wider range of students to the study of mathematics.

The terms 'math anxiety' and 'math avoidance' were coined in that period to account for negative attitudes toward mathematics by otherwise able and ambitious university students. My books, *Overcoming Math Anxiety* (1978, and revised, 1995), *Succeed with Math* (1987), and *They're Not Dumb, They're Different* (1990) were all part of that campaign.

Today, in the U.S., the campaign is entering a second phase. No one doubts that university graduates with highly developed quantitative skills are going to be in demand in every sector of the economy, and not just in

research. The financial, health-care, bio-tech, environmental, and consulting communities have already discovered the value of mathematics (and/or physics) trained professionals who are capable of employing quantitative methods to define and manage risk. ('Physicists Graduate from Wall. St.', *The Industrial Physicist*, Dec. 1999). Ever-more sophisticated applications for computers require mathematics trained professionals as well.

In response to these developments, a number of U.S. universities are trying to aggressively reclaim the mathematically able student who is not bound for a research career by providing post-baccalaureate degree options that build on mathematics in new ways. SIAM (The Society for Industrial and Applied Mathematics) is formally encouraging the establishment of *new* master's degrees in applied, industrial, and financial mathematics. These programs, which require two additional years of study after the bachelor's (including an internship) are intended to provide *professional* in contrast to *academic* training, and to launch students into a wide variety of interesting, intellectually challenging, and well-paid careers.

There are at present between thirty and forty new professional master's programs in mathematics, many of them in leading U.S. universities, such as NYU, Chicago, Columbia, Carnegie Mellon, and Georgia Institute of Technology. In addition, the Alfred P. Sloan Foundation of New York has announced a grants initiative for new professional M.S. degree programs in computational molecular biology (bioinformatics) for which mathematics B.S. graduates willing to learn to apply their mathematics training to problems in molecular genetics are being recruited. Other professional M.S. programs in mathematics-based emerging fields (such as computational chemistry), are just now being launched.

(For a list of science or mathematics based new professional M.S. degree programs in the U.S., see www.ScienceMasters.com)

The hope in the U.S. is that by supplying the non-academic workplace with mathematics professionals, three goals will be accomplished: 1) an increase in the number of students willing to enroll in mathematics; 2) an increase in appreciation for mathematics training among managers and policy-makers; and 3) an increase in funding for mathematics research. But first, academic mathematicians have to be persuaded to incorporate real-world problems in their teaching, and to encourage non-academically oriented students to pursue the mathematics degree.

In The Netherlands, the solution to the problems of underenrollment and undervaluing of mathematics training will inevitably take different forms. The doctoraal degree represents a higher level of attainment than the U.S. bachelor's, and the Anglo-American master's degree hardly exists. The possibility of a *minor* in mathematics at the University of Amsterdam, and the development of a customized beta-management program at Leiden University offer some new possibilities for students. But the implementation of these new programs (as has been the case in the U.S.) will involve a radical shift in the *values* and the *culture* within the mathematics community. Whether the professoriat is ready for that shift may determine *who* studies mathematics and for what *purpose*. Students, inevitably, have their eyes on the future. All too often their professors are nostalgic for the past. ←

Sheila Tobias is a U.S. based author and educator. She is 'Outreach and Diffusion Coordinator' for the Alfred P. Sloan Foundation's new professional M.S. degree program initiative.

Problemen

| Problem Section

Problem 1

The first problem in the new millenium is an old one, solved by H.A. Lorentz in the first issue of Nieuw Archief in 1875:

Op een horizontaal vlak ligt een massieve cirkelvormige cylinder. Zoo nu het zwaartepunt van dien cylinder zich ergens buiten de as van het lichaam, en ook op eenig oogenblik niet verticaal onder die as bevindt, moet door de werking der zwaartekracht de cylinder eene rollend schommelende beweging aannemen. Bijaldien ondersteld wordt, dat deze schommelingen oneindig klein zijn, en dat er geen rollende wrijving bestaat, is de vraag: den tijd te bepalen waarin elke schommeling volbracht wordt.

[A solid cylinder is placed on a horizontal plane. Suppose that the barycentre is not on the central axis, nor vertically below this axis, so that gravity forces the cylinder into oscillation. Moreover, suppose that the oscillations are infinitesimal and that rolling is frictionless. Then what is the period of the oscillation?]

Problem 2

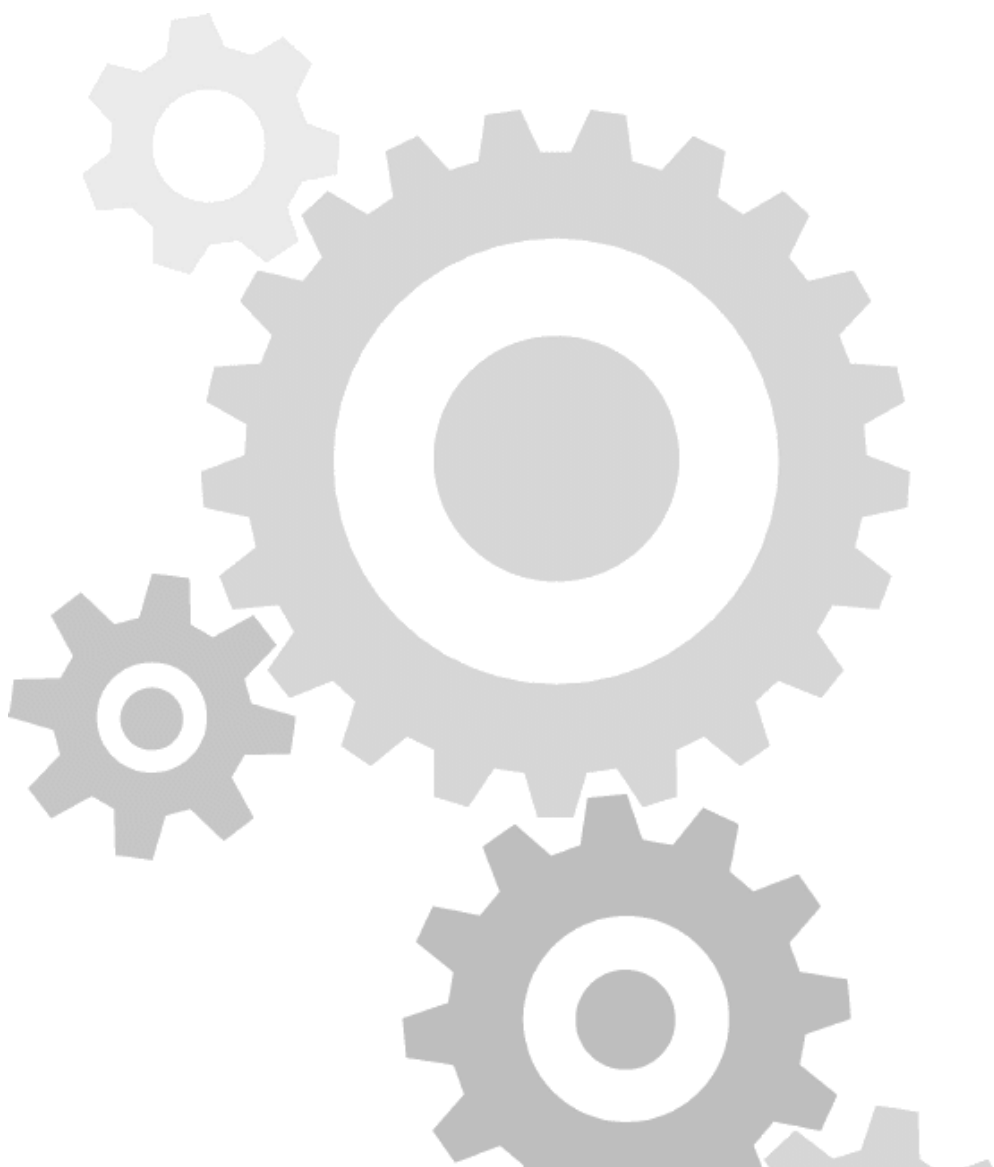
One quickly verifies that the plane cannot be partitioned in two sets, such that points of distance 1 are in opposite sets. A point in the plane is called *rational* if both its coordinates are rational. Is it possible to partition the rational points in two sets, such that points of distance 1 are in opposite sets?

Problem 3

The sequence $a_1, a_2, \dots$ is defined by $\sum_{d|n} a_d = 2^n$ for all $n \geq 1$. Show that $n|a_n$ for all n .

Solutions to the problems in this section can be sent to the editor — preferably by e-mail. The most elegant solutions will be published in a later issue. Readers are invited to submit general mathematical problems. Unless the problem is still open, a valid solution should be included.

Editor:
R.J. Fokkink
Technische Universiteit Delft
Faculteit Wiskunde
P.O. Box 5036
2600 GA Delft
The Netherlands
r.j.fokkink@its.tudelft.nl



Universitaire Wiskunde Competitie

De Universitaire Wiskunde Competitie (UWC) is een ladderwedstrijd voor studenten, georganiseerd in samenwerking met de Vlaamse Wiskunde Olympiade. De opgaven worden tevens gepubliceerd op de internetpagina <http://academics.its.tudelft.nl/uwc>

Ieder nummer bevat de ladderopgaven A, B, en C waarvoor respectievelijk 30, 40 en 50 punten kunnen worden behaald. Daarnaast zijn er respectievelijk 6, 8 en 10 extra punten te winnen voor elegantie en generalisatie. Per nummer worden twee prijzen van 100 Euro toegekend: één aan de aanvoerder van de ladder (die daarna weer onderaan begint), en één aan de inzender van de oplossing die de meeste punten behaald heeft (die dan geen punten voor de ladder krijgt). Daarnaast is er een ster-opgave waarvan de redactie geen oplossing bekend is. Voor de eerst ontvangen correcte oplossing van deze ster-opgave wordt eveneens 100 Euro toegekend.

Groepsinzendingen zijn toegestaan. Electronische inzending in $\text{\LaTeX}$ wordt op prijs gesteld. De inzendtermijn voor de oplossingen sluit op 15 mei 2000.

Eindredactie: Jan van Neerven
Redactieadres: Universitaire Wiskunde Competitie
Vakgroep Toegepaste Wiskundige Analyse
Technische Universiteit Delft
Postbus 5031, 2600 GA Delft
j.vanneerven@its.tudelft.nl

Opgave A

Zij $f : [0, 1] \rightarrow [0, 1]$ een functie met de volgende eigenschappen:

- (i) f is differentieerbaar op $(0, 1)$;
- (ii) f is continu in de punten 0 en 1 ;
- (iii) $f(0) = 0$;
- (iv) $0 \leq f'(x) \leq f(f(x))$ voor alle $x \in (0, 1)$.

Toon aan dat f dan constant ($\equiv 0$) is.

Opgave B

Een rechthoekige driehoek wordt verdeeld in twee nieuwe (gelijkvormige) rechthoekige driehoeken door het neerlaten van de loodlijn uit de rechte hoek op de hypothenusa (stap 1). We doen hetzelfde met elk van de twee verkregen rechthoekige driehoeken, waardoor er dus vier rechthoekige driehoeken zijn ontstaan (stap 2). In elke nieuwe rechthoekige driehoek blijven we dit procédé toepassen, tot we in totaal tien maal een stel nieuwe driehoeken hebben gevormd (stap 10). Hoe groot is het totale aantal driehoeken waarvan de rand geen enkel punt gemeen heeft met de rand van de oorspronkelijke driehoek, dat in het verloop van de tien stappen is geconstrueerd?

Opgave C

Laat p een priemgetal zijn en laat $v \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$. Veronderstel dat $x, y, z \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$ voldoen aan:

$$\frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{1}{z} = \frac{1}{p}$$

en

$$x + y + z = 2vp,$$

waarbij noch $x - p$, noch $y - p$, noch $z - p$ deelbaar is door p^3 .

Bepaal alle drietallen (x, y, z) .

Ster-opgave

Laat $a(n)$ het aantal manieren zijn om een n bij n matrix te vullen met nullen en enen zó, dat er nergens twee enen naast of boven elkaar staan. Dus $a(1) = 2$, $a(2) = 7$, $a(3) = 63$, enzovoort.

(i) Toon aan dat

$$\lim_{n \rightarrow \infty} (a(n))^{1/n^2}$$

bestaat.

(ii) Vind zo goed mogelijke ondergrenzen en bovengrenzen voor deze limiet.

Een eeuw wiskunde in boeken

In het kader van het Wereld Wiskundig Jaar 2000 besteedt het Nieuw Archief aandacht aan de 'oogst' van een eeuw wiskundeboeken. Verschillende wiskundigen werd de volgende vraag voorgelegd: "Welk wiskundeboek heeft in uw leven op u de meeste indruk gemaakt?" Hieronder staan de eerste zes bijdragen. Lezers van het Nieuw Archief worden uitgenodigd een bijdrage te leveren aan de volgende nummers. Uw favoriete boek kan een wetenschappelijk werk zijn, maar ook een studieboek of populair boekwerk dat u als buitengewoon stimulerend hebt ervaren. Stuur uw tekst (ongeveer 350 woorden) naar: naw@math.leidenuniv.nl

Een combinatie van stijl en resultaten

J. van de Craats J.vd.Craats@mindef.nl

Een boek dat me al meer dan dertig jaar blijft achtervolgen, is de in 1933 verschenen monografie *Inversive Geometry* van Frank Morley en zijn zoon F.V. Morley. Frank Morley was een Amerikaanse meetkundige van Engelse afkomst, die rond 1900 de stelling ontdekte dat zekere drietallen snijpunten van de trisectrices van een driehoek *gelijkzijdige* driehoeken vormen. De 'elementaire' verificatie van die stelling, waar nadien nog heel wat andere wiskundigen energie in hebben gestoken, vond hij een triviale zaak. Op bladzijde 244 van zijn boek staat de bekende figuur van de binnentrisectrices van een driehoek en de gelijkzijdige Morley-driehoek. Daaronder vindt de lezer de formulering van het resultaat, en dan: *Exercise 10 – Verify this by trigonometry*. Waar het Morley echter om ging, was de op de voorafgaande bladzijden beschreven algebraïsch-meetkundige achtergrond van de stelling, die te maken heeft met de verzameling van alle cardioiden die de zijden van een gegeven driehoek raken. In de complete configuratie is er dan sprake van niet minder dan 27 snijpunten van pa-

ren trisectrices die, in de juiste combinaties genomen, 18 verschillende gelijkzijdige 'Morley-driehoeken' vormen. Wat Morley's boek zo intrigerend maakt, is de combinatie van stijl en resultaten. Het gaat over vlakke meetkunde; je zou kunnen zeggen over algebraïsche krommen in het vlak, maar dan helemaal behandeld met complexe getallen. Het vlak is meestal het met één punt uitgebreide reële, euclidische vlak, dat wil zeggen de Riemann-sfeer, en de transformatiegroep is de groep die

voortgebracht wordt door de inversies in cirkels. Daarmee is de titel van het boek verklaard. De stijl is voor een wiskundeboek ongebruikelijk: nergens definities, nergens stellingen, nergens bewijzen, maar een lopende tekst waarin geen woord te veel staat, en veel aan de zelfwerkzaamheid van de lezer wordt overgelaten. Het is dus geen gemakkelijke kost, ook al zullen de auteurs de moeilijkheden die de lezer ondervindt, niet bedoeld hebben. Maar wat je van de tekst begrepen hebt, blijft in je herinnering gegrift. Ik denk dat ik in de loop der jaren driekwart van het boek onder de knie heb gekregen; de rest staat nog op het programma. Het inmiddels aardig versleten rode bandje (ik heb de Chelsea herdruk uit 1954) zal ik nog vaak van de boekenplank halen. Laat ik besluiten met een citaat uit het voorwoord: "We believe that the tradition that simple geometric and mechanical questions are to be handled only as Euclid or Descartes might have handled them is very hampering; that the ideas of Riemann, Poincaré, Klein and others have pleasant reverberations in the investigation of elementary questions by students of proper maturity and leasure."

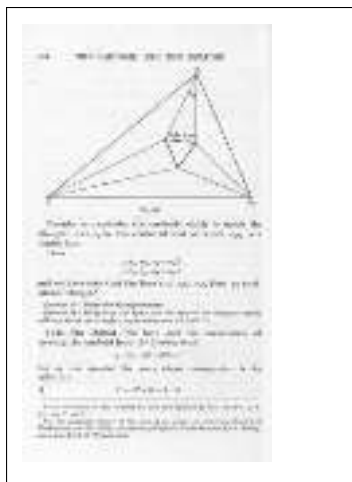
Frank Morley and F.V. Morley, *Inversive Geometry*, Ginn, Boston, 1933, heruitgave Chelsea Publishing Company, New York, 1954.

Eléments de Géométrie Algébrique

B. Edixhoven edix@maths.univ-rennes1.fr

De *Eléments de Géométrie Algébrique* zijn geschreven door Alexander Grothendieck, met medewerking van Jean Dieudonné. Het gaat om een serie van acht boeken, verschenen in de Publications Mathématiques van het IHES tussen 1960 en 1967 (het eerste deel is later ook door Springer-Verlag uitgegeven). Ik was niet alleen zeer onder de indruk van de resultaten die in deze boeken staan, maar ook van de fantastische methode waarmee ze worden bewezen: problemen

worden in stukken gehakt, van alle onnodige context ontdaan, en vervolgens gegeneraliseerd tot ze werkelijk triviaal worden, dit alles natuurlijk een aantal keer geïtereerd. Indrukwekkend is eveneens het overzicht dat al in het eerste deel wordt gegeven van de vele delen van de serie die nooit het daglicht hebben gezien. Ook zonder enige kennis van zaken kan men zien waarom het is misgegaan: de delen I en II bestaan elk uit één boek, deel III uit twee boeken, en deel IV uit vier boeken. De



delen V tot en met XII zijn er nooit gekomen. (De kladversie is er wel, in de series *Fondements de la Géométrie Algébrique* en *Séminaire de Géométrie Algébrique*.) Het geheel getuigt van een uitzonderlijk groot werk, verricht door slechts twee personen, en daardoor bijzonder coherent. Laat ik preciseren dat deze boeken niet de boeken zijn waaruit ik het meest heb geleerd, of waaraan ik de meeste tijd heb besteed. Dan zou mijn antwoord anders zijn geweest. De gestelde vraag is welk boek de meeste indruk heeft gemaakt. Ik raad niemand aan om uitsluitend uit deze serie algebraïsche meetkunde te gaan leren, maar als voorbeeld hoe men problemen op kan lossen is deze serie zeer nuttig. En natuurlijk ook als naslagwerk.

Alexander Grothendieck, met medewerking van Jean Dieudonné, *Eléments de Géométrie Algébrique*, Publications Mathématiques de l'IHES tussen 1960 en 1967, het eerste deel is later ook door Springer-Verlag uitgegeven.

Van atoom tot heelal

T.H. Koornwinder *thk@wins.uva.nl*

Hoewel ik veel wiskundeboeken bezit en er nog veel meer onder ogen heb gehad, ben ik met geen enkel van deze boeken helemaal tevreden. Eigenlijk is het wiskundeboek dat de meeste indruk op me heeft gemaakt het boek dat ik zelf zou moeten schrijven maar tot nu toe niet geschreven heb. Als ik met een wiskundeboek bezig ben, of het nu is voor zelfstudie, een seminar of onderwijs, zijn er altijd vele plekken waar ik het óf anders wil doen óf waar ik het zelf nader wil invullen. De meest stimulerende boeken zijn voor mij die welke veel aan de lezer overlaten om uit te zoeken. Ook bij onderwijs is het mijn ideaal dat de student veel zelf gaat invullen en uitwerken, maar het succes hiervan hangt natuurlijk af van de fase van de studie en van niveau en aard van de student. Als ik met een nieuw stuk onderwijs begin, dan neem ik bij voorkeur een boek als uitgangspunt, maar als ik het vak een of twee jaar gegeven heb, heb ik er doorgaans een aanvullende syllabus bij geschreven die het boek vrijwel overbodig maakt. Laat ik toch drie boeken noemen, die mij in verschillende fases van mijn leven beïnvloed hebben:

1. In mijn middelbare schooltijd: het Prismaboekje (no. 262) *Van atoom tot heelal* van G. O. Jones, J. Rotblat en G. J. Whitrow. In mijn (niet-academisch) milieu werd ik er mee geplaagd dat ik een boek van drie professoren las. Het is weliswaar geen wiskundeboek, maar het stimuleerde me om natuurkunde te gaan studeren. Later zwaaide ik om naar wiskunde.

2. In de tijd dat ik promovendus was: de delen 1 en 2 van *Higher transcendental functions* door A. Erdélyi e.a., McGraw-Hill, 1953. Deze staan vol met formules voor speciale functies. Wat me er aan fascineerde was dat de lezer achter veel van die formules een hele wereld van interpretaties kan ontdekken, bijvoorbeeld in harmonische analyse, groepentheorie en combinatoriek.

3. In de eerste helft van de jaren '80: het boek *Groups and geometric analysis* van S. Helgason (Academic Press, 1984). Een hoogtepunt van dit boek is



het bewijs van de expliciete Plancherel-formule voor de sferische Fourier-transformatie op een niet-compacte reële halfenkelvoudige Lie-groep. Ik had dit materiaal eerder in ander verband gehoord en gelezen, maar dit boek (of eigenlijk het manuscript er van dat Helgason me had toegezonden) bracht me er toe om mijn eigen weg vanaf de basisbegrippen tot aan het eindresultaat van de Plancherel-formule uit te werken en te vertellen in een reeks seminariumvoordrachten op het CWI.

Primzahlen

H.J.J. te Riele *herman@cwi.nl*

In mijn boekenkast staat een zes centimeter dik donkerblauw boek met de volgende goudkleurige opdruk op de zijkant: *Primzahlen, Landau, 2 Vols. in 1, Chelsea*. Dit boek is een herdruk uit 1953 van Edmund Landau's beroemde tweedelige *Handbuch der Lehre von der Verteilung der Primzahlen*, dat in 1909 bij Teubner in Leipzig is verschenen. Dit boek heb ik in april 1969 aangeschaft nadat professor Sikkema het tijdens een college Functionaalanalyse in Delft warm had aanbevolen.

Het boek begint met een *Historische Übersicht über die Entwicklung des Primzahlproblems*, waarin de bijdragen van Euclides, Legendre, Dirichlet, Tschebyschef, Riemann, Gauss, Hadamard, Von Mangoldt, De la Vallée Poussin en Landau zelf aan de Theorie der Priemgetallen worden beschreven. Dan volgen zes "Bücher", waarvan het eerste gewijd is aan de belangrijkste stelling uit de Theorie der Priemgetallen, namelijk de in 1896 zowel door De la Vallée Poussin als Hadamard bewezen 'Primzahlsatz':

$$\pi(x) \sim \frac{x}{\log x},$$

waarbij $\pi(x)$ het aantal priemgetallen $\leq x$ aanduidt. De historische inleiding geeft een goed beeld van hoezeer de voorgangers van De la Vallée Poussin en Hadamard met het probleem hebben geworsteld, alvorens eindelijk Het Bewijs kon worden geleverd. Het tweede 'Buch' behandelt het probleem van priemgetallen in rekenkundige rijen van de vorm $a, a+b, a+2b, \dots$ met $\text{ggd}(a, b) = 1$. De beroemde stelling van Dirichlet dat iedere dergelijke rij oneindig veel priemgetallen bevat wordt bewezen, alsmede het resultaat dat iedere dergelijke rij asymptotisch precies zoveel priemgetallen bevat als je zou verwachten, dat wil zeggen

$$\Pi(x) \sim \frac{1}{\phi(b)} \frac{x}{\log x},$$

waarbij $\Pi(x)$ het aantal priemgetallen $\leq x$ in die rij aanduidt en $\phi(b)$ het aantal getallen tussen 1 en b dat onderling ondeelbaar is met b .

In Boek Drie worden de getaltheoretische functies $\mu(n)$ (de functie van Möbius) en $\lambda(n)$ (de functie van Liouville) behandeld. Boek Vier doet hetzelfde voor de getallen in een rekenkundige rij. Boek Vijf bevat toepassingen van het voorgaande op enkele problemen uit de Theorie der Priemgetallen en in Boek Zes, tenslotte, worden eigenschappen van speciale Dirichletrijen van de vorm



$\sum_{n=1}^{\infty} a_n/n^s$ en van het algemenere type $\sum_{n=1}^{\infty} a_n e^{-\lambda_n s}$ bestudeerd, waarbij λ_n een willekeurige rij van monotoon stijgende reële getallen is. Een uitvoerig Appendix van de hand van Paul T. Bateman is in de Chelsea-editie van 1953 opgenomen, en beschrijft de ontwikkelingen van 1909 tot 1953, in het bijzonder de in 1949 door Selberg en Erdős (onafhankelijk van elkaar) gevonden “elementaire bewijzen” van de “Primzahlssatz”.

Dit boek mag wat mij betreft tot ‘wiskundeboek van de eeuw’ verkozen worden. Dat het belangrijkste onbewezen vermoeden in de wiskunde, de Riemann hypothese, een cruciale rol speelt in de theorie van de verdeling van de priemgetallen (in het bijzonder in de grootte van de fout die we maken als we $\pi(x)$ benaderen door de veel gemakkelijker te berekenen functie $\text{li}(x) = \int_2^x dt/\log t$) is geen verdienste van Landau, maar heeft wel bijgedragen tot mijn affiniteit met dit boek.

Edmund Landau, *Handbuch der Lehre von der Verteilung der Primzahlen*, Teubner, Leipzig, 1909, heruitgave *Primzahlen*, Chelsea, 1953.

Voorjaar 1941

J. Korevaar korevaar@wins.uva.nl

In het ‘Kloosterman-jaar 2000’ wil ik graag spreken over het ‘boek’ dat de meeste invloed gehad heeft op mijn wiskundige loopbaan. Het was eigenlijk een collegedictaat: *Analyse*, naar het college van H.D. Kloosterman. Om nog preciezer te zijn, een copie van het dictaat dat een zekere M.J. Steenland in 1937-38 gemaakt had, en dat ik, toen velen van ons in de oorlog niet meer aan de universiteit konden studeren, in de winter 1940-41 netjes heb overgeschreven.

Het zij een oude man vergeven dat hij nog iets verder teruggaat. Op de lagere school was ik goed in rekenen, en ik mocht van mijn vader, de bovenmeester, ver vooruitwerken. Op de H.B.S. in Dordrecht had ik het geluk in klassen twee, drie en vier een zeer stimulerende wiskundeleraar te treffen: Cornelis Visser (later hoogleraar geworden). Hij liet me veel leuke dingen zien. De vijfde klas, het eindexamenjaar 1939-40, was wiskundig niet interessant; Visser was in militaire dienst en zijn vervanger liet ons alleen eindexamensommen maken. Maar mijn keuze voor de wiskunde was gemaakt en half tegen het advies van Visser, die in Utrecht gestudeerd had, ging ik naar Leiden. Het feit dat Kloosterman daar was heeft hem met mijn keuze verzoend.

Het begon goed: ik ging heel veel colleges lopen. Behalve de differentiaal- en integraalrekening (niet op de H.B.S. onderwezen!) volgde ik bij Kloosterman het college getaltheorie voor ouderejaars. Zijn zorgvuldige, heldere en droog-uitdagende manier van college geven maakte grote indruk. Maar de vreugde duurde niet lang. Al na twee maanden, eind november 1940, werd Leiden door de bezetter gesloten, na de protestrede van Cleveringa tegen het ontslag van de Joodse hoogleraren. Achteraf ben ik onder de indruk hoe snel er door de studenten, die voorlopig van universitaire studie waren uitgesloten, iets geregeld werd. Boeken gebruikte men nauwelijks, maar er circuleerden goede collegedictaten van ouderejaars. Ik kon voor enige maanden een dictaat *Analyse* lenen. Bedoeld voor het eerste jaar na Kerstmis en voor het tweede jaar, bevatte het college veel en heel respectabele stof.

Ik doe een greep. Reële getallen, een continue nergens differentieerbare functie, subtiële convergentiekenmerken voor reeksen, dubbelreeksen, uniforme convergentie, machtreeksen in het complexe vlak (complexe logaritme, hoofdstelling van de algebra), oneindige producten, Gammafunctie, impliciete-functiestellingen, enkele partiële differentiaalvergelijkingen van de tweede orde, Riemann-integraal, meer-voudige integralen, Fourier-reeksen. Dankzij het goede dictaat en enig

studeren in Konrad Knopp’s boek *Unendliche Reihen* kon ik in juli 1941 bij Kloosterman het tentamen *Analyse* afleggen.

In het voorjaar van 1941 had ik intussen weer contact gekregen met mijn vroegere leraar Visser die ook onder de indruk was van Kloostermans *Analyse*. In het dictaat was bij machtreeksen de Tauberstelling van Hardy en Littlewood voor Abel-sommeerbaarheid geformuleerd, met de aantekening: “Bewijs is lastig”. Daar vroeg ik Visser dus naar. Als antwoord gaf hij mij als sommetje om de (eenvoudigere) corresponderende Tauberstelling voor Cesàro-sommeerbaarheid te bewijzen, zonder er bij te zeggen dat dit een stelling was van Hardy (en Landau) uit 1909-10:

$$\frac{a_1 + a_2 + \dots + a_n}{n} \rightarrow A \quad \text{en} \quad na_n \geq -K \Rightarrow s_n = \sum_{k=1}^n a_k \rightarrow A.$$

Ik kon dat resultaat bewijzen en heb later vele malen over Tauberstellingen gepubliceerd.

Een zwarte kft met roodgouden opdruk

P. Moree moree@math.leidenuniv.nl

Rond mijn veertiende jaar las ik veel populair wetenschappelijke boeken over allerlei onderwerpen. Na veelvuldig zinsnedes tegengekomen te zijn als ‘men kan bewijzen dat ...’, waagde ik me, nieuwsgierig geworden, aan het bestuderen van echte wetenschappelijke boeken. In die boeken werd een voor mij tot op dat moment nieuwe (gedachten)wereld op heldere en voor beginners toegankelijke wijze uiteengezet. Dat maakte een diepe indruk, meer dan enig lesuur of leraar. Eén van die boeken was *An introduction to the theory of numbers* van I. Niven en H. Zuckerman. De zwarte kft met roodgouden opdruk zie ik nog duidelijk voor me.

Bij natuurkundeboeken zat ik altijd met vragen als ‘wat is een elektron nu eigenlijk’. In dit boek ging het over getallen. Concreter kon haast niet. Erg indrukwekkend vond ik de zorgvuldigheid waarmee dit boek geschreven is. De redeneringen zijn erg fraai en transparant en uiterst helder opgeschreven. Nergens wordt gepoogd te imponeren. De materie wordt op een glasheldere manier voor het voetlicht gebracht. Het is zeker niet zo dat ik door dit boek uiteindelijk getaltheorie ben gaan doen, wel gaf het mij het idee dat wiskunde een tak van wetenschap is waarin ik zaken op een voor mij bevredigend niveau zou kunnen begrijpen (een gevoel dat ik niet had met quantumfysica-boeken). Dat het boek van Niven en Zuckerman een succes is, blijkt ook wel

uit het feit dat er inmiddels een vijfde editie is (met Hugh Montgomery als derde auteur), Wiley & Sons, 1991. Ter vergelijking, het veel bekendere en qua inhoud vergelijkbare boek *An introduction in the theory of numbers* van Hardy en Wright is ook in zijn vijfde editie.

I. Niven en H. Zuckerman, *An introduction to the theory of numbers*, Wiley & Sons, 1991.



J.M. Aarts

Technische Universiteit Delft, Vakgroep Algemene Wiskunde

Mekelweg 4, 2628 CD Delft

j.m.aarts@twi.tudelft.nl

De stelling van de papegaai

Dit is een boek over de geschiedenis van de wiskunde in de vorm van een detective. Het is heel onderhoudend geschreven en het kan zonder voorkennis van wiskunde gelezen worden.

De eigenaar van de boekhandel 'Duizend-en-Eén Bladjes' is de 84-jarige Pierre Ruche; de zaken worden waargenomen door Perrette, die met haar drie kinderen bij hem inwoont. Wanneer het verhaal begint, heeft Max, de jongste van de drie kinderen, een papegaai mee naar huis gebracht die hij op de vlooiemarkt heeft bevrijd uit de handen van twee kerels in pak. De papegaai krijgt de naam Nofuture. Diezelfde dag heeft Meneer Ruche net een brief ontvangen van zijn oude vriend Elgar Grosrouvre, een studiegenoot van wie hij in meer dan vijftig jaar niets gehoord heeft. Elgar woont in de tropische regenwouden van Brazilië. Hij schrijft dat hij zijn hele wiskunde-bibliotheek, de meest complete privé-collectie van wiskundige werken, heeft verscheept naar zijn vriend Pierre Ruche in de verwachting dat die er goed voor zal zorgen. Wanneer Nofuture geacclimatiseerd is, praat hij honderd uit over wiskunde. Dat is nogal ongewoon. Nog vreemder wordt het als Grosrouvre onder verdachte omstandigheden om het leven komt. In een afscheidsbrief aan zijn vriend πR schrijft hij dat hij zich bedreigd voelt. Hij heeft in de jaren van eenzaamheid in het tropisch regenwoud de Stelling van Fermat bewezen en ook het Vermoeden van Goldbach. Er zijn louche figuren die hem de bewijzen willen ontfutselen, maar hij is niet van plan ook maar iets uit handen te geven.

Om het raadsel rond de dood van zijn vriend op te lossen moet Pierre, bijgestaan door zijn huisgenoten, zich weer aan de studie van de wiskunde zetten. Zo ontstaan er twee boeken in één: een speurdersroman en een boek over wiskunde. De gegevens van de roman bieden alle mogelijkheden om te verhalen over wiskunde; gezien de omvang van het boek gebeurt dat uitbundig. Het is bijzonder boeiend om te zien hoe de geschiedenis van de wiskunde is vervlochten met de ontwikkeling van de detectiveroman en hoe de schrijver er telkens in slaagt beide verhaallijnen aan elkaar te knopen. De schrijver paart een grote kennis van zaken aan een bijzonder rijke fantasie. De wiskundige onderwerpen die aan bod komen zijn te veel om op te noemen. De schrijver geeft een breed overzicht van de wiskunde. Hij vertelt niet alleen over de ontwikkeling van het getalbegrip en Diophantische vergelijkingen, maar besteedt ook ruim aandacht aan, onder andere, de algemene theorie van de vergelijkingen, de Euclidische meetkunde, de kegelsneden, de drie grote problemen van de Griekse wiskunde, de differentiaalrekening en de complexe getallen.

Het doel van het boek is om voor lekenpubliek een uiteenzetting te geven over verscheidene onderwerpen uit de wiskunde. Om de lezer

bij de les te houden, is er een onderhoudende speurdersroman aan vastgeknoopt. Zo'n opzet van een dubbelboek is niet nieuw. Qua opzet en uitvoering lijkt het boek sterk op Jostein Gaarder's *De wereld van Sofie, Een roman over de geschiedenis van de filosofie*, in Nederland uitgegeven door Houtekiet/Fontein. Ik moet zeggen dat Gaarder's boek beter en met meer raffinement in elkaar gestoken is dan het boek van Guedj. Maar misschien wordt mijn oordeel mede ingegeven door mijn gebrek aan kennis van de filosofie.

Ik kan *De stelling van de papegaai* van harte aanbevelen. Ik weet niet of het boek didactisch wel helemaal verantwoord is, maar boeiend is het wel. In de epilooft gaat het over een vogelconferentie. De papegaai Nofuture vertelt aan zijn collega's over het bewijs van de stelling van Fermat. Door boeken als dit van Guedj komt het misschien nog eens zo ver dat we mensen over wiskunde horen praten.

Een laatste opmerking voordat iemand opmerkt dat ik het niet opgemerkt zou hebben: de vertaling van het boek doet heel aangenaam aan, maar zij is niet geheel conventioneel wat de wiskunde-termen betreft.

Denis Guedj, *De stelling van de papegaai, Roman over de geschiedenis van de wiskunde*.

Ambo, 1999, 558 p., prijs f 49,50. ISBN 90 263 16046.

Nederlandse vertaling: Joris Vermeulen. Oorspronkelijke titel: *Le théorème du perroquet*, Éditions Seuil, 1998, FF 145.



W. Bosma

Katholieke Universiteit Nijmegen, Subfaculteit Wiskunde
Toernooiveld, 6525 ED Nijmegen
bosma@sci.kun.nl

Interactieve algebra cd-rom

Het elektronische wiskundeboek is er!

Nu zal dat U wellicht evenzeer opwinden als de aankondiging dat de zomerkoninkjes er weer zijn, maar dat is niet helemaal terecht. Met 'elektronisch boek' bedoel ik hier niet een elektronische versie van een gewoon boek — dat zou immers weinig opmerkelijk zijn langzamerhand — maar een ingewikkeld elektronisch document (geleverd op cd-rom) dat met zijn extra *features* de pretentie heeft het boek overbodig te maken. Weliswaar wordt de cd verpakt in een hard stuk karton dat tevens de voorkant van een ouderwets boek is dat de dezelfde tekst bevat, maar dat is slechts een tijdelijke maatregel zolang cd's nog detoneren in de Documentwinkel. Laten we ons ook niet direct verliezen in sombere overpeinzingen dat in het *fin de siècle* boeken nog slechts verpakkingsmateriaal voor cd's zijn.

Bij de mild kritische opmerkingen die ik me ga veroorloven moet U natuurlijk bedenken dat in elke recensent een gemankeerd auteur schuilgaat. *Mild* kritisch vanwege kwaliteit en karakter van het experiment, en omdat de recensent natuurlijk nog wel *door één deur moet kunnen* met de auteurs. Die moderne beeldspraak schiet met drie auteurs wat tekort, maar het brengt ons wel direct op de juiste populaire toon. Want de inleiding in de algebra waar we het hier over hebben, wordt aangekondigd als *Algebra Interactive!*, en met *Learning Algebra in an Exciting Way*. Na opening van het document met een moderne *browser* op PC of workstation krijgen we een scherm te zien met een snel logo — interactive document **A**lgebra met de **e** (van elektronisch?) daartussen gefrommeld om **idea** te spellen — en handige *buttons*, waarvan vooral degene met het label *cool* intrigeert. Daarmee kun je *applets* aanklikken, die de algebra moeten illustreren. Ik doe hier mijn

best elementen van het *popi* taalgebruik te laten zien die de verpakking van dit document *appeal* voor de Jonge Gebruiker moeten verschaffen. Helaas roept dat bij mij altijd het beeld op van de net iets te vlotte Oudere Jongere die wanhopig probeert door zijn toffe woordkeus aansluiting te krijgen bij de jeugd.

Maar laat ik er direct bij zeggen dat ik hiermee zo ongeveer uitputtend ben geweest in het geven van dergelijke voorbeelden, omdat die slechts aan de oppervlakte (en dan nog spaarzaam) te vinden zijn. Bekijken we om te beginnen de tekst van het document (door ouderwets in het boek te lezen) dan valt ons weinig bijzonders op: het is een vlot geschreven boek met een redelijke keuze van onderwerpen (in 8 hoofdstukken: Arithmetic, Modular Arithmetic, Polynomials, Modular Arithmetic for Polynomials, Permutations, Monoids and Groups, Rings and Fields, Permutation Groups), en een aardige keuze van toepassingen (RSA, radar detection, error-correcting codes). Daar gaat het natuurlijk niet om; wel om de vraag: wat voegt de cd-rom toe aan het boek? Aan de tekst zelf weinig (al is het aardig de kleine stukjes op te sporen die in het boek niet gereproduceerd zijn — verbeeld ik het me, of zijn daar nou net de stilistisch mindere passages te vinden?). Integendeel zelfs, zou je kunnen zeggen: omdat met de huidige generatie HTML nog geen fraai ogende wiskundetekst te produceren valt, is de typografie op het scherm inferieur (zelfs voor het $\geq$ teken wordt een gif-plaatje gebruikt); bovendien is de vormgeving (anders dan die in het boek) die van het bekende Amerikaanse tekstboek met Stellingen in grote gele blokken. Een menu onder in zo'n blok verschaft toegang tot een nieuw venster met daarin Bewijs, Voorbeeld, Illustratie of wat dies meer zij. Het valt verder op dat er zo heel erg *weinig*

tekst op een beeldscherm past. En hoe weinig geschikt een tamelijk lineaire wiskundetekst als deze eigenlijk is voor het heen en weer springen met de hyperlinks die gegeven worden (bovendien raak je daar soms ergerlijk de draad door kwijt wanneer je in het opgeroepen venster niet terug kunt klikken).

De werkelijk toegevoegde waarde zit hem in de *coole* applets bij elk hoofdstukje en de *gapplets* die op vrijwel elke pagina te vinden zijn. Een applet is een klein in Java geschreven programmaatje waarmee je via muisklikken kunt communiceren: typisch is het resultaat van zo'n klik een kleine animatie — een driehoek draait en verandert daarbij van kleur. Een 'gapplet' verschaft hier toegang tot het meegeleverde computeralgebra pakket GAP (voor Groups, Algorithms and Programs), zij dient voor het uitvoeren van zeer specifieke opdrachten, zoals het in factoren ontbinden van een geheel getal dat in een venstertje kan worden ingetypt.

Enkele applets zien er bijzonder fraai uit en illustreren concepten heel helder. Zo kun je met muisklikken een graaf maken, en vragen of een bepaalde permutatie van de punten aanleiding geeft tot een automorfisme; het antwoord wordt gegeven door beide versies van de graph in een animatie over elkaar te schuiven en te laten zien of dat precies 'past' of niet.

De 'gapplets' vond ik in het algemeen wat minder bevredigend. Hinderlijk vond ik (na het opvallend gemakkelijk installeren van de cd, zowel in Windows- als in UNIX-omgeving) het relatief grote aantal fouten dat ik tegenkwam: binnen een kwartier kreeg ik enkele malen een internal error met onbegrijpelijke GAP-fouten over het scherm, alsook diverse malen de mededeling GAP OUTPUT doesn't make sense. En dat zonder mezelf

uit te leven in de favoriete sport om zulke fouten uit te lokken aan de randen van het toelaatbare! De begrijpelijke restricties op de invoer, die er voor zorgen dat je geen nieuwe taal hoeft te leren, nemen soms kolderieke vormen aan: zo is 100 een bovengrens op de getallen waarvan een kleinste gemene veelvoud bepaald kan worden. Maar mijn voor naamste bezwaar is dat de gebruiker helemaal geen realistisch beeld verschaft wordt van wat makkelijk en wat moeilijk is voor een pakket als GAP: 2^{35} kan evenmin ontbonden worden als een product van 35-cijferige priemgetallen. En dat raakt de kern van een ander punt dat me bijzonder opviel. Hoewel het Preface rept van *emphasis on computational and algorithmic aspects*, lijkt het hele gebruik van GAP dat van de 'zwarte doos': vrijwel nergens wordt een verband gelegd tussen de theorie en wat er gebeurt wanneer een voorbeeld wordt uitgerekend. Zo worden er twee gaplets gegeven voor het berekenen van grootste gemene delers: in de ene wordt in de doorsnijding van verzamelingen delers van twee getallen het grootste element gezocht, in de andere wordt (de uitgebreide versie van) het algoritme van Euclides toegepast (neem ik aan!). Maar het lijkt mij niet ondenkbaar dat het de argeloze Jongeling ontgaat dat alleen dat laatste algoritme ook heel goed toepasbaar is op hele grote voorbeelden — toegang daartoe heeft hij immers niet!

Is dit de toekomst van het wiskundeboek? Ik denk dat deze vraag een gedifferentieerd antwoord behoeft: de tijd lijkt nog vrij ver weg dat je even comfortabel een elektronische tekst leest als een conventioneel boek. Voor een deel heeft dat met bladergemak te maken, met snelheid van het verversen van pagina's, met ongemakkelijke apparaten waarmee je niet prettig op de bank gaat zitten, voor een deel ook met uiterst gebrekkige typografie. Ik zie daar, met betere software (MathML?), snellere chips en hopelijk geheel nieuwe handzame lees-devices, op termijn wel verbetering in komen — maar er is nog een lange weg te gaan. Als lezer ben ik voorlopig sceptisch. Als (voorlopig gemankeerd) auteur van een dergelijk project zou ik opzien tegen de enorme extra inspanning die de illustraties vergen, vooral nu er nog zo weinig hulpmiddelen voorhanden zijn. Uitgevers zijn kennelijk dol op *nieuwe media* en zien wel brood in een nieuwe generatie geïntegreerde documenten. De eerste berichten over de verkoop lijken ook zeer bemoedigend. Sommige opleidingen zijn eveneens snel in het uitproberen van deze nieuwe vormen — waarbij ik trouwens ook al geluiden opving dat toch vooral

het *boek* door de studenten wordt gebruikt. Dat reflecteert wellicht de overdreven hooggespannen verwachtingen die sommigen koesteren omtrent de aantrekkingskracht op jongeren van alles wat met computers, internet en applets te maken heeft. Wanneer niet om *intrinsieke* redenen gebruik gemaakt wordt van de computer — bijvoorbeeld omdat je sommige concepten heel treffend kunt animeren — maar slechts om de vorm, omdat het aansluit bij de cultuur, is een dergelijke toepassing even zinloos en misplaatst als het draaien van popmuziek tijdens een college. Wanneer je kunt laten zien dat een computer-algebrapakket je in staat stelt sneller en verder te rekenen dan je ooit met de hand zou kunnen, en dat er *wiskunde* voor nodig is om dat efficiënt te kunnen, dan helpt dat je verder. Maar als het je slechts in staat stelt op ondoorzichtige wijze speelgoedvragen te beantwoorden doet het misschien meer kwaad dan goed.

Ik heb boven al proberen aan te geven in hoeverre deze overwegingen van toepassing zijn op *Algebra Interactive*: sommige goede bedoelingen worden door de technologie geïmplementeerd, sommige illustraties zijn zeer treffend, en soms staan programma en tekst te ver

van elkaar. Begon ik met de pretentie te formuleren dat dit product het ouderwetse boek overbodig wil maken, ik wil eindigen met een opmerking over de plaats van *Algebra Interactive* in een groter verband. Het product is geboren uit een ambitieuze poging om in OpenMath een geïntegreerd document te schrijven dat bestaat uit verscheidene componenten: *tekst* met hyperlinks die in een browser bekeken en doorlopen kan worden; activeerbare *applets* alsmede voor een computeralgebrapakket uitvoerbare opdrachten voor berekeningen die voor verwerking naar het favoriete pakket van de lezer verzonden kunnen worden. Er wordt hard gewerkt aan een standaard die er voor moet zorgen dat met alle bekende pakketten gecommuniceerd kan worden, zodat ongemerkt GAP ook vervangen kan worden door Maple of Mathematica. Zover is het nog niet; maar misschien draagt dit perspectief bij aan het ontzag voor het pionierswerk dat de auteurs met dit project hebben verricht. Ik raad iedereen van harte aan daarvan ook zelf kennis te nemen. 

Arjeh M. Cohen, Hans Cuypers, Hans Sterk, *Algebra Interactive!*, Berlin, Heidelberg, Springer-Verlag 1999.

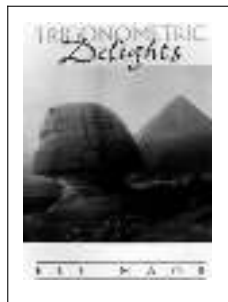


Boekbesprekingen

Book Reviews

Een lijst met ter recensie aangeboden congresverslagen is te vinden op Internet via:
<http://www.math.rug.nl/revwg/>
 Indien lezers er prijs op stellen een van deze verslagen te bespreken, dient men dit binnen een maand na verschijnen van dit nummer (bij voorkeur per e-mail) te melden bij de redactie van deze rubriek.

Eindredactie: Jaap Top
 Redactieadres: Boekbesprekingen WG
 Instituut voor wiskunde en informatica
 Postbus 800, 9700 AV Groningen
revwg@math.rug.nl



E. Maor

Trigonometric delights

Princeton: Princeton University Press, 1998.

236p., prijs £24,95.

ISBN 0-691-05754-0

Trigonometrie is tegenwoordig voor velen een nauwelijks bekend gebied, bij anderen roept dit woord nostalgische gevoelens op. Naar mijn mening biedt het hier te bespreken boek voor beide groepen boeiende literatuur. Het is geen leerboek van de trigonometrie, noch een systematische geschiedenis van dit vak, maar een verzameling van vijftien kleinere opstellen waarin een aantal facetten van het vak op boeiende wijze wordt belicht. In feite is het een interessante herschikking en samenvatting van wat elders verspreid ligt, maar dan wel aangevuld met vaak verrassende doorkijkjes en inzichten. In het voorwoord formuleert de auteur zijn motivatie voor het schrijven van dit boek en grijpt deze gelegenheid aan om stoom af te blazen waar het gaat om de 'New Math'; daarbij rangschikt hij de trigonometrie onder casualties van deze 'New Math'. De vijftien onderwerpen zijn gekozen uit een ruime periode van de geschiedenis van de wiskunde, te beginnen met de Papyrus Rhind (circa 1700 voor Christus) en eindigend met de bijdragen van Fourier (1768-1830). Met veel enthousiasme wijst de schrijver op de schoonheid en de symmetrie van veel formules en op de toepassingsmogelijkheden. Met betrekking tot deze laatste moet vooral het hoofdstuk genoemd worden waarin op zeer heldere wijze de Mercatorprojectie uiteengezet wordt. De stijl van behandelen is uitermate plezierig: geen overdreven strengheid, wel plausibele redeneringen, maar dan ook met de vermelding van wat nader bewijs behoeft. In de noten aan het einde van ieder hoofdstuk vindt de lezer dan de literatuur die het ontbrekende aanvult. Dat men de trigonometrie ook anders en strikt formeel kan benaderen, laat de auteur zien in het hoofdstuk *Landau the Master Rigorist*. Hierin wordt een pagina afgedrukt uit *Grundlagen der Analysis*, die wel kenmerkend is voor de Landau stijl, maar waarvan weinig wervende kracht voor de jeugd zal uitgaan. Het is bekend dat Landau alle meetkundige aspecten van de wiskunde verafschuwde als 'Schmieröl'. Als illustratie geeft Maor dan Landaus bewijs van de goniometrische versie van de stelling van Pythagoras: $1 = \cos 0 = \cos(x - x) = \cos x \cdot \cos(-x) - \sin x \cdot \sin(-x) = \cos^2 x + \sin^2 x$, voilà! Hierbij zijn $\sin x$ en $\cos x$ gedefinieerd als de bekende oneindige reeksen. Zonder ergens banaal te worden, schuwt de schrijver *Petite histoire* ook niet. Een voorbeeld: op een zekere dag constateerde De Moivre dat hij iedere dag 20 minuten méér slaap nodig had, hetgeen hem zijn exacte sterfdatum deed berekenen! De berekening die Maor geeft, kan echter niet kloppen, aangezien De Moivre vóór die bewuste dag nooit geslapen zou hebben. Het bijzonder fraai uitgevoerde boek wordt afgesloten met vier korte appendices, een literatuurlijst van 44 titels en een index. Zoals reeds gezegd, is het boek aan te bevelen voor ingewijden en niet-ingewijden. In het bijzonder denk ik aan docenten die hun lessen wat meer kleur en achtergrond willen geven, maar ook aan aankomende studenten en leerlingen van de hogere klassen bij het vwo. Het boek verdient zeker een plaats in de schoolbibliotheek, aange-

zien geïnteresseerde leerlingen er met enige inspanning zelfstandig hun weg in zullen kunnen vinden.

A.W. Grootendorst



J. Mansfeld

Pappus, mathematicus en een beetje filosoof

Amsterdam: Koninklijke Nederlandse Akademie van Wetenschappen, 1998.

20p., prijs f20,- (Mededelingen van de Afdeling Letterkunde, Nieuwe Reeks; 61 #6).

ISBN 90-6984-220-3

Het gaat hier om de gedrukte tekst van een rede die de auteur uitsprak voor de Afdeling Letterkunde van de KNAW en door hem omschreven als een case study op het terrein van de traditiesgeschiedenis van het platonisme. De bedoeling was met enkele voorbeelden aan te geven hoe in de Klassieke Oudheid literaire genres elkaar beïnvloed hebben, in concreto: enkele voorbeelden te geven van de wijze waarop, uit de wiskundige tijdschriften, kennis geput kan worden met betrekking tot de filosofische denkwijze van een *mathematische auteur*. Voor deze laatste viel de keuze op Pappus van Alexandrië (1e helft van de vierde eeuw na Christus). De fragmenten die hierbij aan de orde gesteld zijn gekozen uit de *Sunagogè* (3 plaatsen) en uit Pappus' commentaar op boek X van de *Elementen* van Euclides (1 plaats). Op heldere wijze zet de auteur uiteen hoe men uit deze, toch wiskundige, geschriften een kijk op het Platonisme krijgt die de 'kanonieke' literatuur niet verschaft, onder andere het inzicht dat gedurende lange tijd vormen van platonisme naast elkaar hebben bestaan die men geneigd zou zijn diachroon te ordenen. Vooral de bespreking van Pappus' commentaar op boek X van de *Elementen* doet Pappus naar voren komen als een wiskundige met wel degelijk filosofische interesse. Het betoog dwingt respect af door de grote eruditie die eruit spreekt. Vermeldenswaard is ook de lof die de schrijver toebrengt aan de historici van de wiskunde, die hij karakteriseert als 'benijdenswaardig knappe onderzoekers'. Toch roept het betoog enkele kritische opmerkingen op, speciaal waar het gaat om de wiskundige passages. Allereerst deze: op pagina 9 wordt een plaats uit de *Sunagogè* vertaald: "... dat de bol van alle driedimensionale lichamen die dezelfde omtrek (waarom niet 'oppervlakte', awg) hebben, de bol de grootste inhoud heeft ...". Dat is correct. Wanneer dan drie regels verder wordt gezegd dat "... de bol groter is dan de andere (*ingeschreven*) figuren ...", dan is de opmerking tussen haakjes voor de rekening van de vertaler. Hier wordt de lezer op het verkeerde been gezet. Natuurlijk is deze bewering waar, maar daarom gaat het hier niet: het gaat om lichamen met gelijke oppervlakte, c.q. krommen met gelijke omtrek. Op pagina 10 herhaalt de auteur deze gedachte door te zeggen dat "... van alle onregelmatige figuren in het platte vlak ... met dezelfde omtrek de *omgeschreven* cirkel de grootste is." Overigens is ook het woord 'regelmatig' hier misplaatst. Op pagina 17 komt het probleem van de incommensurabiliteit aan de orde; wij lezen daar (het gaat over de Pythagoreërs): '... zij kwamen volgens de overlevering in moeilijkheden toen bleek dat de hypothenusa (sic!) van een rechthoekige driehoek incommensureabel is met de rechten, dat wil zeggen niet met dezelfde eenheidsmaat te meten'. Met 'de rechten' kunen moeilijk de rechthoekzij-

den bedoeld zijn. Denk maar aan een rechthoekige driehoek met zijden 3, 4 en 5. Uiteraard is hier in eerste instantie een *gelijkbenige* rechthoekige driehoek bedoeld. Duidelijker zou zijn, als geweest was op de incommensurabiliteit van diagonaal en zijde van een vierkant. Zo zijn er meer kanttekeningen te plaatsen, onder andere waar het gaat om het losse gebruik van de term 'regelmatige' lichamen, waarmee in een aantal gevallen 'halfregelmatige lichamen' bedoeld wordt. Ook de voetnoot op pagina 15, waar het harmonische gemiddelde wordt besproken aan de hand van een enkel voorbeeld, zal voor de gemiddelde lezer niet voldoende inzicht geven in dit gemiddelde. Deze opmerkingen doen echter geen afbreuk aan de waardering voor dit — zoals reeds opgemerkt — erudiete artikel, waarmee tevens aan fraaie bijdrage geleverd is aan het leggen van contact tussen de alpha- en de bètawereld. Hopelijk zal de in het uitzicht gestelde gedetailleerde bespreking van Pappus' commentaar op boek X van de *Elementen* van Euclides niet lang op zich laten wachten.

A.W. Grootendorst



P.J. Nahin

An imaginary tale The story of $\sqrt{-1}$

Princeton: Princeton University Press, 1998.

257p., prijs \$ 25,95.

ISBN 0-691-02795-1

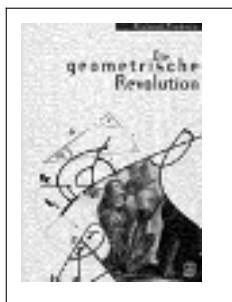
Er zijn veel redenen te bedenken om $\sqrt{-1}$ een onmogelijk, een absurd, een betekenisloos getal te noemen. In *An imaginary tale* passeren talloze de revue, in de loop der eeuwen door uiteenlopende denkers naar voren gebracht. Van Diophantus die in zijn *Arithmetica* de vergelijking $172x = 336x^2 + 24$ 'onmogelijk' noemde vanwege de uitkomst, tot aan 'royal astronoom' Airy toe, die nog halverwege de negentiende eeuw verklaarde niet het minste vertrouwen te hebben in een resultaat dat met imaginaire symbolen tot stand is gekomen. Aan Nahin de taak te laten zien dat dergelijke symbolen weliswaar imaginair zijn, maar geenszins betekenisloos. Aan die taak zet hij zich met een enthousiasme waaraan de lezer moeilijk ontsnapt. In de eerste drie hoofdstukken laat hij zien hoe wiskundigen in de loop van zo'n 2000 jaar tegen imaginaire getallen aanliepen en in de meeste gevallen zo snel mogelijk doorliepen. Cardano, Descartes riepen 'onherleidbaar' of 'onmogelijk' en zelfs Euler deed dat waar het ging om de meetkundige betekenis van het getal dat hij *i* noemde. Een enkeling — Cardano's leerling Bombelli, Wallis — schrikt er niet voor terug denkbeeldig te rekenen of tekenen en Nahin zelf laat zien hoe je complexe wortels in een uiterst reële grafiek kunt construeren. De eer voor degene die als eerste het complexe vlak definieerde gaat naar de landmeter Caspar Wessel, die echter in het Deens schreef, zodat Argand (en Buë) het tien jaar later nogmaals over konden doen. Geschiedenis is echter niet het doel in deze hoofdstukken, maar een middel om de puzzel van het imaginaire tot leven te brengen door te laten zien bij welke gelegenheden $\sqrt{-1}$ opduikt en hoe daar mee om te gaan. Daarin slaagt de auteur uitstekend, hoewel hij in zijn enthousiasme af en toe nalaat aan te geven waar hij precies naar toe wil. De laatste vier hoofdstukken draaien om eigenschappen en toepassingen van complexe getallen. Hoewel

Nahin elektrotechnisch ingenieur is, betreffen die laatste voornamelijk wiskundige toepassingen. Wat hij de fysische betekenis van i noemt, is vooral de meetkundige, en de fysische toepassingen beperken zich tot een afleiding van de Keplerwetten en het doorrekenen van een elektrotechnisch vraagstuk. Zijn ware hartstocht lijkt te liggen bij afleidingen met, dankzij de complexe getallen, onverwachte en elegante uitkomsten. Hoe fraai die resultaten kunnen zijn, weet eenieder die een college complexe functietheorie heeft gevolgd. Het laatste hoofdstuk gaat over die theorie en is misschien wel het meest geslaagde: aan de hand van de ontwikkeling van Cauchy's contourintegratie, geeft Nahin hier in feite een uitstekende inleiding op de theorie. De lezer wordt terecht gewaarschuwd dat *An imaginary tale* geen wiskundig lichtgewicht is. De gemiddelde vwo-er zal zeker moeite hebben met het gemak waarmee algebraïsch gemanipuleerd wordt. Wie daar plezier aan beleeft, vindt hier een schat aan puzzels waarin het mysterie van $\sqrt{-1}$ van alle kanten belicht wordt.

F.J. Dijksterhuis

dige/logische denkwijzen en denkachtergronden ontwikkelt, is magistraal. Dit gehele bouwwerk plaatst de schrijver bovendien nog in een, weliswaar enigszins speculatief, wijsgerig kader met betrekking tot begrippen als 'waarheid' en 'kenbaarheid', namelijk in en van de werkelijkheid. Naar mijn mening dient ieder, die zich op enig niveau wenst te bekwamen in ons vak, zich tevens intensief te verdiepen in stof zoals die in dit boek behandeld wordt. Het hangt van de diepgang en de omvang van de opleiding af of de totale inhoud voor ieder aan de orde moet komen. Het maakt natuurlijk enig verschil of men opgeleid wordt tot 2e-graads leraar, tot 1e-graads leraar, of tot beroepswiskundige al of niet ten behoeve van een specifieke richting. Maar zonder (enige) kennis van het hier gebodene mag niemand zich wiskundige, of wiskundeleraar noemen. Het boek van Trudeau is hiervoor een eminente gids. Het is bovendien schitterend uitgevoerd, voorzien van vele opgaven en geschreven in glasheldere taal. Kortom, dit boek betekent een feest voor ieder die zich er in verdiept.

W. Kleijne



R.J. Trudeau
Die geometrische Revolution
Basel: Birkhäuser Verlag, 1998.
312 p., prijs DM 68,-.
ISBN 3-7643-5914-5

Oorspronkelijk is dit boek in 1987 verschenen onder de titel *The Non-Euclidian Revolution*. In 1995 verscheen hiervan de verbeterde en bijgewerkte tweede druk, waarvan het voorliggende werk de Duitse vertaling is. Dit in feite dus al zo'n 12 jaar bestaande boek is dan ook in brede kring langzamerhand een oude en goede bekende. Als tamelijk elementair werk biedt het bovendien, wetenschappelijk wiskundig gezien althans, geen nieuws. Desondanks is en blijft het naar mijn mening een zeer opmerkelijk boek. Speciaal voor de huidige generatie in opleiding zijnde wiskundigen geeft het boek een uniek overzicht van een aantal facetten van de meetkunde. Maar niet alleen zuiver meetkundige zaken, ook meer algemene beschouwingen komen ruim aan bod, waardoor de meetkunde, en meer algemeen de wiskunde, in een bredere context geplaatst wordt. Het boek is dus in de eerste plaats een meetkundeboek, waarbij de euclidische meetkunde in historisch perspectief behandeld wordt, gevolgd door een, eveneens in historische context geplaatste, behandeling van de hyperbolische meetkunde. Het bijzondere van het boek is evenwel dat gedurende de gehele behandeling zeer veel aandacht geschonken wordt aan de logische denkwijze die aan de meetkunde ten grondslag ligt en aan de logische achtergronden van de meetkunde. Het ligt natuurlijk voor de hand dat het aangrijpingspunt hiervoor in het vijfde postulaat van Euclides genomen is. De historische ontwikkeling, culminerend in de ontwikkelingen in de 19e eeuw op het gebied van de niet-euclidische meetkunde, verklaren de term 'revolutie' in de titel van het boek. Inderdaad is hier sprake van een revolutie, even zwaar wegend als die tengevolge van het denken van bijvoorbeeld Copernicus, Newton en Darwin. De wijze waarop de schrijver de meetkundige beschouwingen, in samenhang met de in de loop van de tijd zich ontwikkelende wiskun-



D. Cieslik
Steiner minimal trees
Dordrecht: Kluwer 1998. 319p., prijs f 260,-
(Nonconvex optimization and its applications; 23). ISBN 0-7923-4983-0

The problem 'For which point the sum of the distances to three given points in the plane is minimal?' was posed by Fermat and solved by Torricelli. It can be generalised in numerous ways: take more than three points, take a higher dimensional space, a metric other than the Euclidian one, ask for the shortest network connecting N given points. This last question, posed for finite N , in a finite dimensional normed real linear space (called a Banach-Minkowski space by the author, below BaMi space), and in particular in a plane, is the main topic of this book. The solution is a tree having as vertices the given points and (mostly) some extra, so called Steiner points. It is generally called a Steiner Minimal Tree (SMT), giving, the author argues, a bit to much credit to Steiner. The problem becomes easier if the number of Steiner points allowed is restricted to a fixed k (k -SMT). If $k = 0$ we have the well-known problem of the Minimum Spanning Tree (MST, unfortunately), and in fact operate in a discrete space. In a general metric space an SMT need not exist, in a BaMi space however it does, although it may not be unique. It then has a most $N - 2$ Steiner points and their degree is at most one larger than the dimension of the space. The infimum (taken over all finite sets) of the ratio of the length of the SMT and that of the MST is the Steiner ratio of the space; it is at least $\frac{1}{2}$. For many normed spaces to find an SMT is known to be NP-hard or NP-complete, the latter even in Hakimi's problem where the space is the set of points of a graph with a length function on the edges. The book treats many special cases for many types of normed spaces; Euclidian or Manhattan distance, discrete spaces, L_p -norm, planes, strictly convex unit balls, et cetera, emphasising the algorithmic and complexity aspects of finding an SMT or an approximation of it, often invoking one of the more than 400, often recent, references, and thus

gives a broad view of the subject. The first two chapters introduce the problem and basic like spaces, metrics, norms and unit balls, convexity and complexity. Of the others we give the subject and, to get the flavour, an interesting result or two. Chapter 3 treats the(?) Torricelli point of N points; it is unique if the unit ball is strictly convex and the points are not collinear. If the space has dimension > 2 and every triple or quadruple of points has a Torricelli point in its affine hull, then the metric is derived from an inner product. Chapter 4 discusses the degrees of the points in a (k) -SMT. They never exceed the 'kissing number' of the unit ball. This is the best possible general bound, but for SMT's in a plane with L_p -norm the maximum degree is 3 if $1 < p < \infty$, and 4 if $p = 1$ or $p = \infty$ (Manhattan norm and maximum norm, respectively). For k -SMT's the maximum degree is independent of k ; in a L_1 or L_∞ plane it is 8, but 5 for the Steiner points. In Chapter 5 it is shown that the existence of an upper bound for the degree of the Steiner point(s) guarantees that a k -SMT can be found in a polynomial time if $k = 1$ and also, if the space fulfills an extra condition, for $k > 1$. Note that a k -SMT can serve as an approximation of an SMT. Chapter 6 (the largest one) treats constructions and algorithms to find SMT's in general or particular BaMi spaces. We find applications of Delaunay triangulations and Voronoi diagrams. In a Euclidean space any SMT lies in the convex hull of the given points; for other metrics with strictly convex unit ball the same only holds for planes. For a BaMi plane an arbitrarily good approximation of an SMT can be found by reducing the problem to that on a graph; the algorithm then is still exponential. Chapter 7 is about upper and lower bounds for the Steiner ratio. Even in the Euclidean case the exact value is only known for the plane: $\frac{1}{2}\sqrt{3}$. The conjecture for dimension 3 is too intriguing not to be repeated here:

$$\sqrt{\frac{283}{700} - \frac{3\sqrt{21}}{700} + \frac{9\sqrt{11 - \sqrt{21}}\sqrt{2}}{140}}.$$

Chapter 8 mentions a number of ways to even further generalize the problem. These are some minor flaws. The English is not always correct: 'are', 'following', 'bases on' instead of 'is', 'followed', 'is based on', and 'It is $x > 4$ ' (Es ist?). There are unnecessary repetitions (' x is the convex hull of N , more formally $x \in \text{conv}(N)$ '). The definition of linear order (page 58), Dijkstra's algorithm (page 70) and the example of a bisector (page 184) are incorrect. From page 175 on probably all pagenumbers in the index should be raised by 2. The book has an encyclopedic character, contains lots of information and seems a must for those interested in the subject.

R.H. Jeurissen

W.T. Tutte

Graph theory as I have known it

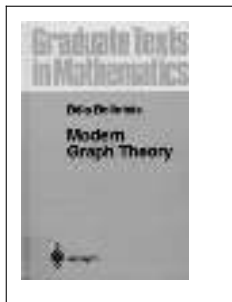
Oxford: Clarendon Press, 1998. 156p., prijs £27,50

(Oxford lecture series in mathematics and its applications; 11).

ISBN 0-19-850251-6

Paul Erdős en Bill Tutte zijn voor mij de twee *Grand old men* van de Discrete Wiskunde. Het was daarom een genoegen dit boek te lezen, waarin Tutte aan de hand van een aantal thema's vertelt hoe hij tot de grafentheorie kwam, en met betrekking tot die thema's, wat zijn eigen bijdragen waren. Ik wil mij beperken tot

enige reacties hier en daar. Als er één boek op het gebied van de grafentheorie is dat ik wil aanbevelen, dan is het dit boek, een heerlijk boek. Hoofdstuk 1 gaat over perfecte vierkanten en heet *Squaring the Square*. Tutte begon in Cambridge met de studie van scheikunde en is via vrienden van de Trinity Mathematical Society in de wiskunde terecht gekomen. Het probleem van het opdelen van rechthoeken in kleinere vierkanten van verschillende grootten werd ontleend aan een boek *The Canterbury puzzles*. Aan de hand van dit probleem ontwikkelden de studenten hun eigen grafentheorie. Ze ontdekten de link met de wetten van Kirchhoff, een bekende bron voor grafentheorie. Het eind van het verhaal is het vinden van het kleinste *perfect squared square* van orde 21 door onze landgenoot Duijvestijn. In de index vinden we verder de Nederlanders Bouwkamp en Kasteleijn. Het bekende paardensprongprobleem op het schaakbord leidde Tutte tot zijn werk aan Hamiltoncykels, zijn bekende tegenvoorbeeld voor het vermoeden van Tait, dat iedere planaire kubische graaf een hamiltongraaf is (dit zou de 4-kleurenstelling inhouden) en zijn stelling betreffende 4-samenhangende planaire grafen. Via het vermoeden van Tait komt men al snel op lijnkleuringen van kubische grafen en de stelling van Petersen uit 1891 dat een brugloze kubische graaf een 1-factor heeft. Tutte's 1-factor stelling komt direct voort uit dit resultaat, maar interessant is vooral dat Tutte het begrip Pfaffiaan uit de oudere literatuur heeft opgeduid en in verband heeft gebracht met 1-factoren. Voor kwadratische roosters zijn dit *dimeerbeleggingen* en dat is waar Kasteleijn bekend mee is geworden in 1963. Na een hoofdstuk over elektrische netwerken komt in hoofdstuk 5, *Algebra in graph theory*, de wel voornaamste bijdrage van Tutte aan de orde. Ik wil hier een zin aanhalen: "I soon perceived that the familiar 4-colourings of planar maps, the Tait colourings of cubic graphs, and the congruences mod 3 with which P.J. Heawood was still attacking the Four Colour Problem were special cases of the ' n -chains' and ' n -cycles' of 'combinatorial topology'. Een en ander leidde tot het bekende 5-flow vermoeden, naast andere nog openstaande vermoedens over flows, tot Tutte-polynomen, en natuurlijk ook tot Tutte's bekende artikelenreeks over matroiden. Dit onderwerp komt aan de orde in hoofdstuk 8, *The cats of Cheshire*, de diersoort die in lucht oplost maar waarvan de grijns overblijft. Dit is een aardige manier om over niet-grafische matroiden te spreken. In de hoofdstukken 6 en 7, over symmetrie respectievelijk grafen op oppervlakken worden interessante onderwerpen als kooien en minors besproken, maar ik heb gekozen voor de zin "In my thesis (van 1948) I made a search for such correspondences, trying to present as much as I could of graph theory in an algebraic form". Zoals voor veel onderzoekers is ook voor Tutte het onderwerp van het proefschrift bepalend voor de rode draad in het verdere werk. Ik noem nog hoofdstuk 9, *Reconstruction*, waarin chromatische polynomen, hoofdstuk 10, *Planar enumeration*, waarin genererende functies, en hoofdstuk 11, *The chromatic eigenvalues*, waarin eigenwaarden van chromatische polynomen aan de orde komen. In de bibliografie telde ik 53 artikelen van Tutte en 1 van Blanche Descartes, de schrijfster, of is het schrijver, van gedichten. Afgezien van de artikelen met zijn jeugdvrienden heeft Tutte haast geen co-auteurs gehad. Zijn Erdős-nummer is niet 1 en misschien zelfs niet 2, tenzij Berman, Brook, Smith of Stone co-auteurs van Erdős zijn geweest. Je hoeft dus geen laag Erdős-nummer te hebben om een waar pionier van de grafentheorie te zijn geweest. C. Hoede



B. Bollobás

Modern graph theory

Berlin, etc: Springer Verlag, 1998.

394 p., prijs DM 66,-

(Graduate texts in mathematics; 184).

ISBN 0-387-96488-7

Bollobás heeft twintig jaar geleden een boek over grafentheorie geschreven. Wij hebben toen eens geprobeerd dat te gebruiken voor tweedejaarsstudenten. Het werd een fiasco. De compacte stijl van schrijven maakte het boek ongeschikt voor zelfstudie. De vraagstukken waren duidelijk te lastig voor tweedejaars en we hebben toen maar zelf een dictaat geschreven, mede omdat het materiaal te overvloedig was. Nu ligt er een boek *Modern graph theory* en is het interessant te vergelijken. Wat direct opvalt, is de verbetering van de didactiek. De studenten hebben voor een zeer heilzame terugkoppeling gezorgd. De bewijzen zijn wat meer uitgeschreven en er zijn meer maakbare opgaven. Ook is het aantal voorbeelden duidelijk toegenomen. De hoofdstukken I, II en III zouden goed voor een eerste cursus Grafentheorie gebruikt kunnen worden, maar dan zijn er nog zo'n 300 bladzijden met materiaal dat duidelijk alleen in een cursus voortgezette grafentheorie bruikbaar is, als men al de stofkeuze deelt. Bollobás is Hongaar en dus komen al in hoofdstuk IV problemen aan de orde met resultaten van Szemerédi en Erdős. Je moet er van houden. Kleuringsproblemen, hoofdstuk V, zijn natuurlijk standaard. Het boek is echt *modern*, omdat lijstkleuringen besproken worden, toch echt een recent onderwerp. Voor een hoogleraar in Cambridge is Ramseytheorie natuurlijk een must. Hierna blijkt weer de invloed van Erdős in een ruim hoofdstuk over random graphs. Hierin komt interessant genoeg het concept fasenovergang voor grafen aan de orde. Ik citeer: "Vaguely speaking, before time $n/2$ (er wordt per tijdstap random een lijn toegevoegd tussen twee van de n punten) every component has $O(\log n)$ vertices, but after time $n/2$ there is a unique largest component of order n (i.e., containing a constant proportion of the vertices). Even more, all other components are still of order $\log n$; in fact, as t increases, they are getting smaller." Door mijn achtergrond vind ik dit interessant, maar ik weet niet of ik dit nou in een voorgezet college zou opnemen. In hoofdstuk VIII komt de relatie tussen grafen, groepen en matrices aan de orde en in hoofdstuk IX random walks op grafen. Hoofdstuk VIII zou ik wel behandelen in een voortgezet college, hoofdstuk IX niet. Hoofdstuk X over Tuttepolynomen vind ik zelf weer erg interessant omdat het q -state Pottsmodel uit de statistische mechanica aan de orde komt, maar de zuivere wiskundige zal vooral kijken naar de behandeling van knopentheorie, Reide-meistertransformaties en Jonespolynomen, die zeer actueel zijn. Hier blijkt wederom dat de schrijver de meest recente ontwikkelingen mee wenste te nemen. Daarom kan men dit boek ook gebruiken voor een caput-college. Als men een dergelijk tripel: Inleiding, Voortzetting, Caputcollege, in het onderwijsprogramma kan opnemen, is dit een ideaal boek om te gebruiken. Zo niet, dan beveel ik aan het toch in elk geval aan te schaffen voor de bibliotheek in verband met de nieuwe ontwikkelingen die aan de orde komen.

C. Hoede

Ian Anderson

Combinatorial designs and tournaments

Oxford: Clarendon Press, 1997. 237 p., prijs £32,50

(Oxford lecture series in mathematics and its applications; 6).

ISBN 0-19-850019-7

Dit is een sterk herziene versie van een eerder boek *Combinatorial designs; construction methods*. Zoals de nieuwe titel suggereert, wordt er in de nieuwe versie extra veel aandacht besteed aan schema's voor tournooien, zoals bijvoorbeeld een bridgetournooi of een voetbalcompetitie. De toevoeging 'constructiemethoden' uit de oude titel is evenwel nog onverminderd van toepassing. Het boek is gericht op het maken van praktisch toepasbare structuren met behulp van combinatorische middelen. Theoretische aspecten, zoals automorfismen, karakterisering, en non-existentie, worden niet of nauwelijks behandeld. Constructies met behulp van computers komen evenmin aan de orde. In plaats hiervan worden er veel constructiemethoden van veel soorten combinatorische designs behandeld. Dit maakt het boek waardevol als aanvulling op andere boeken over designs. De namen van hoofdstukken geven een goede indicatie van wat er aan de orde komt: 1. Introduction to basics; 2. Difference methods; 3. Symmetric designs; 4. Orthogonal Latin squares; 5. Self-orthogonal Latin squares; 6. Steiner systems; 7. Kirkman triple systems; 8. League schedules; 9. Room squares and bridge tournaments; 10. Balanced tournament designs; 11. Whist tournaments.

Het boek leest prettig en bevat vele interessante historische opmerkingen. Veel wiskundige voorkennis is niet nodig. Eindige lichamen vormen het belangrijkste wiskundige gereedschap, maar die worden in het eerste hoofdstuk geïntroduceerd. Het boek is daardoor toegankelijk voor een breed publiek. Bovendien bevat het vele oefenopgaven, waardoor het boek geschikt is als leerboek. Toch zou ik het, juist vanwege het gebrek aan theoretische vorming, niet willen aanraden voor een inleidende cursus in designtheorie voor wiskundigen.

W. H. Haemers

E.S. Ljapin

The theory of partial algebraic operations

Dordrecht: Kluwer, 1997. 235 p., prijs f248,-

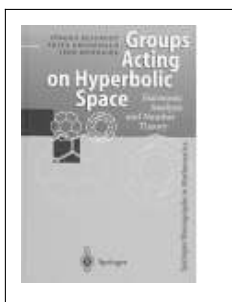
(Mathematics and its applications; 414). ISBN 0-7923-4609-2

There is no getting around partial functions. Not in practice: the function that combines two stacks of dishes into one, as every dishwasher knows, is sadly partial. And neither in mathematics: take any algebra (in the sense of a universe with total operations), take out part of the universe, and for all you know you are left with a partial algebra. However, 'political correctness' is not enough to make something a popular, or even a sensible, subject of investigation. The importance of partial algebras was already evident in the characterization of congruence lattices by Gratzer and Schmidt (1963), but for decades the subject did not advance much beyond the complaint that the branching degree of important concepts was three on average. Roughly speaking, there are three kinds of homomorphisms, and three kinds of subalgebras, they interact in nine ways, and so on. A natural response to an overwhelming topic is specialization. In the case at hand, two sorts of directions may be distinguished. One of course is the pursuit of applications: the partial functions that one meets in

practice may be of particular kinds, and some conceptual choices may be more natural for them than others. A good deal of such research is going on in computer science. The other sort begins with a possibly more arbitrary theoretical simplification. This is the approach of the book under discussion: instead of considering structures of several partial operations, the authors restrict themselves to one partial binary operation at the time. These partial groupoids, or pargoids for short, need not be intrinsically easier than the general case after all, any algebra may be embedded in a group (Bergman, 1995) and in any case will still lead to a generalization of the theory of small categories; but we may presumably hope to be guided by the connection to semigroup theory. It seems (I will explain presently why I am so noncommittal) that Ljapin and Evseev have written a thorough monograph, which moreover is very easy reading. After an introductory chapter and a chapter on homomorphisms, the authors treat divisibility and ideal theory; a form of associativity that characterizes the pargoids derived (by taking subsets and homomorphic images) from groups; completing a pargoid to a semigroup; transformation pargoids; and questions of factorisation (in particular, representation of a pargoid as a direct product). Little motivation is given, which is all right as far as I am concerned, after all, why should people write about a side of their subject which does not interest them?

Nonetheless, let me finish with two critical remarks. (1) The title is misleading. The book is about partial groupoids, and it should be left to the prospective purchaser to judge whether it will teach him something about partial (algebraic?) operations in general. (2) The translation is so clumsy as to make the book unreadable to those who would really benefit from such a leisurely exposition. As it stands it contains a good deal of nonsense; because of my severe limitations, of time and Russian literacy, I cannot quite guess how much of it is due to the authors; but their methodological considerations, what there is of them, must have been somewhat ponderous to begin with.

P.H. Rodenburg

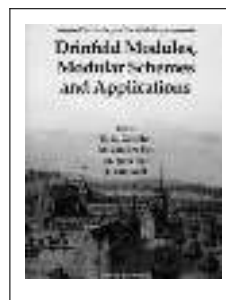


J. Elstrodt, F. Grunewald et al.
Groups acting on hyperbolic space
 Berlin, etc.: Springer-Verlag, 1998.
 524 p., prijs DM 149,-
 (Springer monographs in mathematics).
 ISBN 3-540-62745-6

De in de titel genoemde hyperbolic space is de *drie-dimensionale* hyperbolische ruimte. De werkwijze is klassiek: alles wordt expliciet beschreven in de coördinaten van de 3-dimensionale halfruimte H , er wordt geen representatietheorie gebruikt, automorfe functies zijn functies op H , nooit op $SL(2, \mathbb{C})$. De stijl is helder, de formulering is zeer nauwkeurig. Enige bekendheid van de lezer met de hyperbolische meetkunde is wel gewenst. Soms wordt voor een bewijs naar de literatuur verwezen. Ook worden veel verwijzingen gegeven betreffende niet behandelde zaken. Een kort overzicht van de inhoud. Hoofdstuk 1, 2: Elementaire zaken betreffende de drie-dimensionale hyperbolische ruimte en discontinue groepen Γ van bewegingen daarvan (discrete ondergroepen van $PSL(2, \mathbb{C})$). Ook, bijvoorbeeld, een onder-

grens voor $vol(H/\Gamma)$. Hoofdstuk 3 tot en met 6: Poincaréreeksen, Eisensteinreeksen, Fourierontwikkelingen, Maass-Selbergrelaties. Spectraaltheorie van de Laplace-operator in $L^2(H/\Gamma)$, voor H/Γ compact en voor H/Γ met eindig volume. In het compacte geval, de spoorformule voor het product van twee resolventen met als toepassing de afleiding van de eigenschappen van de zeta-functie van Selberg. Deze zeta-functie wordt op zijn beurt gebruikt onder andere bij de asymptotiek van het spectrum. In het niet-compacte geval, meromorfe voortzetting van de Eisensteinreeksen, spectraaldecompositie van $L^2(H/\Gamma)$, expliciete vorm van de spoorformule. Op bladzijde 310 eindigt de behandeling van de algemene theorie. Daarna worden drie hoofdstukken waarin $\Gamma = PSL(2, O)$ met $O =$ ring van de gehele van een imaginair kwadratisch lichaam. Hierin vindt men onder meer veel concrete resultaten over Eisensteinreeksen. De eigenschappen van de Eisensteinreeksen worden hier overigens opnieuw bewezen; de meromorfe voortzetting bijvoorbeeld, door de Fourierontwikkeling te berekenen. Ook wordt bewezen dat de kleinste groep positieve eigenwaarden van $-\Delta$, voor een congruentieondergroep van $PSL(2, O)$, $\geq \frac{3}{4}$ is. Hoofdstuk 9 is een studie van de binaire vormen met coëfficiënten in O . In hoofdstuk 10 worden verschillende voorbeelden van discontinue groepen besproken.

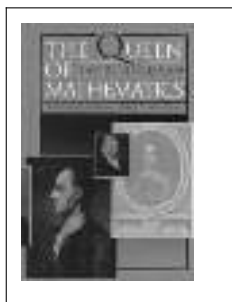
J.G.M. Mars



E.-U. Gekeler et al. (eds.)
Drinfeld modules, modular schemes and applications
 Singapore: World Scientific, 1997.
 356 p., prijs £54,-.
 ISBN 981-02-3067-2

Drinfeldmodulen of, zoals Drinfeld ze zelf noemde, elliptische modulen, werden in 1974 door Drinfeld geïntroduceerd. Hij zag in dat met een dergelijk concept de manier waarmee volgens Langlands Galoisuitbreidingen van allerlei lichamen te beschrijven zouden moeten zijn, heel fraai te realiseren was in een speciaal geval. Namelijk, het geval van functielichamen in karakteristiek > 0 , en groep $GL(2)$. Hij gebruikte daarbij de moduli van rang 2 Drinfeldmodulen. De modulen zelf werden in de jaren daarna (en een beetje ook ervoor, want in termen van Drinfelds werk bleek David Hayes al jarenlang rang 1 Drinfeldmodulen te bestuderen) pas echt bekeken. Goss, Gekeler en Deligne & Husemöller schreven diverse overzichtsartikelen en een Springer Lecture Note (LNM 1231, 1986), in 1992 gaf Henri Carayol een Bourbaki-voordracht waarin hij laat zien hoe het oorspronkelijke werk van Drinfeld door onder meer Laumon, Rapoport en Stuhler verder is ontwikkeld. In de jaren '90 verschijnen vervolgens heel wat boeken over het onderwerp. Zo hebben we *The arithmetic of function fields* van Goss et al. (eds) uit 1992, *Basic structures of function field arithmetic* uit 1996 opnieuw van David Goss, twee nogal technische boeken *Cohomology of Drinfeld modular varieties I en II* van G. Laumon uit respectievelijk 1996 en 1997, en verder is veel te vinden in LNM 1649 (1997), getiteld *Vector bundles on curves – new directions*. Het hier gerecenseerde boek probeert de theorie van Drinfeldmodulen en hun moduli vanaf de grond op te bouwen. Daarbij komen zowel (rigide) analytische als alge-

braïsche kanten aan bod. Varianten en uitbreidingen op de theorie, zoals t -motieven en F -schoven of Shtuka's komen in het boek nergens aan de orde. Wel wordt een serieuze (en naar mijn heelaas wat bevooroordeelde smaak, geslaagde) poging gedaan om de heel moeilijke resultaten van Drinfeld in detail uit te leggen. Met name hoofdstuk 11 van het boek, over automorfe vormen en Drinfelds reciprociteitswet, is daarbij het vermelden waard. Wie alleen maar een vluchtige kennismaking met het onderwerp wil, zou ik eerder de *Survey of Drinfeld modules* van Deligne en Husemöller (Contemp. Math., 67 (1987)) aanbevelen. Maar voor een diepere studie lijkt dit boek momenteel de beste ingang. J. Top



J.R. Goldman
The Queen of Mathematics
A historically motivated guide to
number theory

Wellesley: A K Peters, 1998.

525 p., prijs \$ 59.95.

ISBN 1-56881-006-7

Dit boek is niet het eerste, en vermoedelijk ook niet het laatste met de titel *The Queen of Mathematics*, de omschrijving die Gauss aan de getaltheorie gaf. Wat opzet betreft, is er nogal wat verschil tussen dergelijke boeken op te merken. In sommige boeken wordt heel ver in de geschiedenis terug gegaan. Het onderhavige boek beschrijft wat de auteur 'modern number theory' noemt. Daarmee bedoelt hij de periode vanaf Fermat. Uit het voorwoord valt af te leiden dat het boek ontstaan is uit een cursus getaltheorie vanuit historisch perspectief. Het niveau waarop gemikt wordt, is dat van 'graduate students'. Als voorkennis wordt verondersteld wat abstracte algebra (begrippen zoals groep, ring, lichaam) en enige kennis van calculus van functies van één en twee variabelen. Voor wat bewijzen van stellingen betreft, wordt regelmatig naar andere bronnen verwezen. Het boek is opgesplitst in vijf delen: 1. From Fermat to Legendre; 2. Gauss and the Disquisitiones Arithmeticae; 3. Algebraic number theory; 4. Arithmetic on curves; 5. Miscellaneous topics. Het eerste deel is historisch en geeft beschrijvingen van het werk van achtereenvolgens Fermat, Euler, Lagrange en Legendre. In deel twee wordt een aantal basisbegrippen uit de getaltheorie geïntroduceerd, waarbij de lijn van de Disquisitiones min of meer gevolgd wordt. De delen 3, 4 en 5 zijn onafhankelijk van elkaar, en behandelen een aantal aspecten van de getaltheorie, voortbordurend op de inhoud van de eerste twee delen. In het laatste deel komen daarbij onder andere transcendenten getallen en p -adische getallen aan bod. In elk hoofdstuk worden veel voorbeelden gegeven, waardoor het geheel zeer leesbaar wordt. In de tekst staat hier en daar een opgave, maar die zijn meer als ondersteuning van het gelezene bedoeld dan als systematische oefening in getaltheoretische vraagstukken. Het boek is netjes uitgevoerd, degelijk gebonden, en voor wat het biedt niet duur. Een mooi boek om te hebben!

A.G. van Asch



V.V. Ishkhanov, B.B. Lur'e et al.
The embedding problem in Galois
theory

Providence, RI: American Mathematical Society, 1997. 182p., prijs \$65,-
 (Translation of mathematical monographs;
 165). ISBN 0-8218-4592-6

Dit boek is een vertaling vanuit het Russisch door N.B. Lebedinskaya; het origineel verscheen in 1990 onder gelijke titel. Een centraal probleem in moderne Galoistheorie behelst het zogeheten 'omkeerprobleem', als volgt. Gegeven een lichaam K en een groep G , construeer een uitbreiding L/K met Galoisgroep (isomorf met) G . Het 'inbeddingsprobleem' voor lichamen is een veralgemenisering van het omkeerprobleem, en bestaat uit het vinden van voorwaarden, waaronder men een lichaam L normaal over K , met een groep G kan construeren zodanig, dat L een gegeven normale uitbreiding M/K uitbreidt met Galoisgroep G/A . Bovendien, de vereisten over L worden gewoonlijk verzwakt: L dient een Galoisalgebra over K te zijn, niet zozeer een lichaam. Op deze manier ontstaat een rijk onderzoeksgebied. Het boek in kwestie geeft een groot scala aan (technisch) onderzoek en de vorderingen erin weer. Het is systematisch van opbouw. Een eerste indruk is dat het voorziet in een behoefte om dit onderzoek dat essentieel in 1920 startte en dat tot heden voortduurt, in boekvorm te presenteren. Een goed doch technisch boek bestemd voor een ieder die in Galois-omkeer-problematiek is geïnteresseerd. R.W. van der Waall



Helmut Völklein
Groups as Galois groups
An introduction

Cambridge: Cambridge University Press, 1996.
 248 p., prijs £35
 (Cambridge studies in advanced mathematics; 53). ISBN 0-521-56280-5

Ondertitels zoals 'an introduction' en varianten daarop lezen we zo regelmatig en (naar mijn smaak) zo vaak onterecht op wiskundeboeken, dat er wel eens wat kritischer mee mag worden omgegaan. Dit boek gaat over de vraag of je, gegeven een eindige groep G en een lichaam K , een eindige lichaamsuitbreiding van K kan maken die Galois is over K met groep G . De woorden in bovenstaande zin behoren niet tot de 'introduction' die het boek geeft. Voor zulke voorkennis kan je, weet de auteur, bij 'most introductory algebra books' wel terecht. Het onderwerp is dus het realiseren van eindige groepen als Galoisgroepen. Hierover bestaan wel meer teksten, zoals een heel fraaie Bourbaki-voordracht van J-P. Serre (1987/88), het boek *Topics in Galois theory* (1992) ook van Serre, de Springer Lecture Notes *Konstruktive Galoistheorie* (1987) van B.H. Matzat, en het al vele jaren aangekondigde boek van Malle en Matzat met als titel *Inverse Galois theory*, waarvan sinds 1993 enige hoofdstukken als IWR-preprints in Heidelberg verschenen zijn. Je kan denk ik met recht zeggen dat het huidige boek zeker een introductie levert tot een belangrijk

deel van de in bovenstaande boeken behandelde onderwerpen. Toch zou ik als kennismaking met het onderwerp eerder Serre's Bourbaki-voordracht aanbevelen, of de beschikbare stukjes van wat het Malle & Matzat-boek moet worden. De moderne strategie die het meest algemeen wordt gebruikt bij het realiseren van Galoisgroepen kan je in al deze teksten beschreven vinden. Het hier gerecenseerde boek probeert daarbij alle argumenten zo compleet mogelijk te geven. Concepten en resultaten uit diverse delen van de wiskunde worden daarbij zorgvuldig ingevoerd, beschreven en in de meeste gevallen zelfs keurig bewezen. De spreekwoordelijke Duitse grondigheid is Helmut Völklein bepaald niet vreemd. Persoonlijk heb ik wel enige moeite met zijn stijl, om maar niet meteen ronduit te zeggen dat het me op allerlei plekken in het boek ronduit tegenstaat. Zo is er de gewoonte van de auteur, vaak ellenlange proposities te formuleren met als onderdeel ervan dan ook nog terloops wat nieuwe notaties en begrippen. Sommige niet algemeen gangbare afkortingen en conventies verwekken een lichte hoofdpijn: zo staart vanaf vele pagina's het begrip 'FG-extension', of als u deze liever heeft, 'RET' u tegemoet. Dat betekent dan respectievelijk 'finite Galois extension' en 'Riemann existence theorem'. Toch denk ik dat het schitterende onderwerp van dit boek, ondanks de wat stijve manier waarop het hier verpakt wordt, wel uit de tekst te halen valt. Het boek staat in zeker opzicht heel aardig tegenover dat van Serre: deze stipt heel summier de hoofdlijnen van de theorie aan en geeft aansprekende voorbeelden. Bij Serre krijg je de indruk dat je weliswaar heel wat voorkennis mist, maar de grote lijn blijft duidelijk en minstens zo duidelijk is de fraaiheid van de theorie. Bij Völklein kan je veel van dezelfde voorbeelden na enig zoeken ook wel vinden. Verpakt tussen bergen soms wat taaie notatie en stukjes uitleg die zo uitvoerig zijn dat de kans reëel is dat je door de bomen het bos niet meer ziet. Maar al die details staan er tenminste, en dat heeft toch ook wel z'n voordelen.

Iets meer over de inhoud: de eerste helft van het boek beschrijft de strategie waarmee groepen gerealiseerd worden. Eerst doe je dat topologisch, als groep van dektransformaties van een overdekking van het boloppervlak minus eindig veel punten. Vervolgens wordt dit eerst topologisch afgesloten, en daarna krijgen de ruimten de structuur van Riemann-oppervlakken. Een lichaamsuitbreiding met de gevraagde Galoisgroep heb je dan door naar de bijbehorende uitbreiding van de lichamen van meromorfe functies te kijken. Tenslotte zijn er criteria in termen van de gegeven overdekking (helemaal te beschrijven in termen van de eindige groep) die garanderen dat de gevonden lichaamsuitbreiding verkregen is door uitbreiding van constanten uit iets als $\mathbb{Q}(x)$. En hebben we daarvan een uitbreiding met gegeven Galoisgroep, dan vertelt Hilberts irreducibiliteitsstelling dat een uitbreiding met dezelfde groep verkregen wordt door voor x een geschikt gekozen getal in te vullen. Dit boeiende mengsel van algebra en groepentheorie, topologie, complexe functietheorie, Riemann-oppervlakken en zelfs een beetje functionaalanalyse vormt in heel veel detail de eerste helft van het boek. Vervolgens stipt de auteur wat minder uitvoerig een aantal verdere richtingen in dit gebied aan: vlechtgroepen, Hurwitz-ruimten (kennelijk is de auteur niet op de hoogte van heel fraai werk van Michel Emsalem (1995) hierover), embedding problems, en tenslotte zelfs enige rigide analytische methoden, in de richting van recent werk van Harbater en van Raynaud. Al met al, ondanks de manier van presenteren, een boek waar iemand die zich serieus in deze materie wil inwerken

niet omheen kan.

J. Top

W. Bruns, J. Herzog
Cohen-Macaulay rings

(Revised edition).

Cambridge: Cambridge University Press, 1998. 453 p., prijs £24.95 (pb)

(Cambridge studies in advanced mathematics; 39). ISBN 0-521-56674-6

De eerste gebonden uitgave van dit boek werd besproken in Mededelingen 39 (1996 #4 pagina B77). In deze paperback-editie zijn natuurlijk foutjes en onnauwkeurigheden grotendeels herzien, maar er zijn vooral drie nuttige tot belangrijke toevoegingen. In paragraaf 4.3 worden dikwijls gebruikte stellingen van Gotzmann behandeld over Hilbertpolynomen van factorringen van een polynoomring over een lichaam. Deze hangen samen met de zogenaamde Castelnuovo-Mumford-regulariteit. In paragraaf 5.5 wordt een berekening van Hochster voor de Bettigetallen van een Stanley-Reisnerring nu ook werkelijk uitgevoerd. De gewichtigste noviteit is echter een nieuw hoofdstuk 10 over 'tight closure'. Dit is een subtiële verfijning van gehele afsluiting die in positieve karakteristiek leeft dank zij het Frobenius-endorfisme. In een lange rij van artikelen is de theorie hiervan ontwikkeld door Hochster en Huneke mitsgaders hun leerlingen en medewerkers. Voor het eerst in een monografie, poogt dit hoofdstuk een inleiding tot deze materie te bieden. De theorie is hierom van belang, omdat zij in staat stelt soms simpeler bewijzen te geven van bestaande resultaten in karakteristiek p , soms scherpere stellingen te verkrijgen of geheel nieuwe inzichten. Een deel van dit moois vindt weerklank in ongemengde karakteristiek 0 dank zij algemene technieken van 'reductie tot positieve karakteristiek'. Helaas, in gemengde karakteristiek lijkt 'tight closure' nog niets te bieden. Het nieuwe hoofdstuk, dat tot plaatselijke herziening in belendende tekst noopte, is een duidelijke aanwinst, want het leidt kort in tot de denkwereld van H-H, die nu ook buiten hun kring weerklank begint te vinden. Voeg hier aan toe dat deze herziene editie bijna de helft goedkoper is dan de oorspronkelijke gebonden uitgave, en men begint medelijden te krijgen met de arme sloebbers die zo nodig er als eersten bij wensten te zijn. J.R. Strooker

G. Laumon

Cohomology of Drinfeld modular varieties

Cambridge: Cambridge University Press, 1996-'97.

Part 1: Geometry, counting of points and local harmonic analysis.

Part 2: Automorfix forms, trace formulas and Langlands correspondence.

344p., 366p. prijs £40.-, £40.- (Cambridge studies in advanced mathematics; 41, 56). ISBN 0-521-47060-9, 61-7

Classical modular curves, and generalizations to Shimura varieties are connected to reductive groups and several other data. These objects give varieties over number fields. Several central ideas in classical and modern mathematics are connected with these concepts. Cohomology of Shimura varieties is related with automorphic forms over number fields. Trace formulas, the Langlands programme and many other aspects are in the centre of nowadays mathematics. In 1973 Drinfeld discovered an analogy of these concepts. The Drinfeld modular varieties depend on several data, one of which is a function field in one variable in positive charac-

teristic. The resulting variety is defined over a finite field, fibered over a curve. Once these concepts are born, we can try to carry further the analogy (both cases 'living' over a global field), and we can try to see how far we can get. This is of interest in order to see how much of the 'classical' programme can be carried out in this way (and thus obtaining more insight in possible developments); also this opens a completely new, independent point of view and lends itself to various applications. These books give a beautiful and systematic approach to this topic. We see old concepts in a new disguise; modular varieties are constructed (in this case following Drinfeld), Hecke operators appear, cuspidal functions, and trace formulas are studied, cohomology with compact supports is one of the main goals of the second volume. In a short review it is not possible to give sufficient information for a reasonable description of the contents of these books. In both volumes the author give an excellent preface in which the contents is very well described, and we advice the interested reader to consult those pages. Every chapter ends with a section 'Comments and references'. I found this aspect of these books very helpful. The author acknowledges to which extent material is taken from other sources. Appendices describing some methods used are precise and informative. I found these books very well written. This is the way to document a broad field. The author indicates the relation to other aspects, descriptions (of this highly technical field) are nice. Anyone taking the trouble to read this non-easy material will be rewarded. Highly recommended!

F. Oort

L. Schneps, P. Lochak (eds.)

Geometric Galois actionsVol. 1: *Around Grothendieck's esquisse d'un programme.*Vol. 2: *The inverse Galois problem, moduli spaces and mapping class groups.* Cambridge: Cambridge University Press, 1997.

293, 347 p., prijs £24.95, £24.95

(LMS lecture notes series; 242, 243). ISBN 0-521-59642-4, 41-6

Deze beide delen komen voort uit een reeks fascinerende vermoedens, stellingen en ontwikkelingen op gang gebracht door manuscripten die Grothendieck schreef nadat hij zich uit het circuit van officiële publicaties had teruggetrokken. Wie had 'lang geleden' kunnen denken dat de volgende onderwerpen nauw met elkaar verbonden zijn? 1. Overdekkingen van algebraïsche krommen; 2. Kindertekeningen op een Riemann oppervlak; 3. Het omkeerprobleem van de Galois theorie: *Voor elke eindige uitbreiding $\mathbb{Q} \subset K$ en voor elke eindige groep G is er een surjectief homomorfisme $\text{Gal}(\mathbb{Q}^a, K) \rightarrow G$?* We schrijven $\mathbb{Q}^a$ voor een algebraïsche afsluiting van $\mathbb{Q}$; 4. Teichmüller theorie.

Een van de fundamentele resultaten die deze ontwikkelingen op gang bracht, was een stelling van G. V. Belyi in 1980: *Een Riemannoppervlak S hoort bij een algebraïsche kromme X gedefiniëerd over een getallenlichaam, d.w.z. $S = X(\mathbb{C})$, dan en slechts dan als er een overdekking $S \rightarrow \mathbb{P}^1(\mathbb{C})$ naar de Riemannscheer bestaat die in hooguit 3 punten van $\mathbb{P}^1(\mathbb{C})$ vertakt.* Grothendieck, die na 1970 minder dan daarvoor de last ervoer van 'tâches interminables' (zie *Esquisse* pagina 51) begon na te denken over de aritmetische consequenties van dit onverwachte verband. 1. In een tekst *Esquisse d'un programme* (1984, 57 pagina's) beschrijft Grothendieck zijn 'réflexions' over deze onderwerpen. Nog steeds vormt die tekst een grote bron van inspiratie! De tekst van *Esquisse d'un programme*

wordt (voor het eerst) als gedrukte tekst in deel 1 van deze bundels gepubliceerd. 2. In een brief (1983, 8 pagina's) aan Faltings ontvouwde Grothendieck zijn 'anabelse vermoedens': probeer in te zien of uit het feit dat twee variëteiten isomorfe fundamenteelgroepen hebben, geconcludeerd kan worden dat die variëteiten isomorf zijn (zie ook *Esquisse*, paragraaf 3). Dit vermoeden inspireerde al heel wat wiskundigen. Voor algebraïsche krommen is dit verband aangetoond (A. Tamagawa en Mochizuki); voor variëteiten van hogere dimensie is het onderzoek in volle gang (F. Pop en vele anderen). De tekst van deze brief aan Faltings verschijnt in gedrukte vorm in het eerste deel van deze bundels. 3. In zijn handgeschreven versie van *La longue marche à travers la théorie de Galois* (1981, 1600 pagina's) begint Grothendieck aan het ontvouwen van zijn indrukwekkende gedachten, die onder andere de Grothendieck-Teichmüller theorie omvatten: *Construeer een groep die GT wordt genoemd, die blijkt $\text{Gal}(\mathbb{Q}^a/\mathbb{Q})$ als ondergroep te bevatten, en wat zou het mooi zijn als die twee groepen gelijk zouden blijken te zijn?!* In dat geval zouden we over een zuiver meetkundige beschrijving van $\text{Gal}(\mathbb{Q}^a/\mathbb{Q})$ beschikken. Deze twee delen verzamelen een aantal artikelen die ontwikkelingen rond deze thema's beschrijven. In het eerste deel wordt de tekst van Grothendieck van *Esquisse d'un programme* uitgegeven; een vertaling ervan in het Engels wordt gegeven; de tekst van de brief uit 1983 van Grothendieck aan Faltings wordt gepubliceerd. In het tweede deel worden teksten samengebracht die geschreven zijn naar aanleiding van een conferentie in Luminy, 1995, over het thema 'Geometry and arithmetic of moduli spaces'. In het korte bestek van een boekbespreking is het niet mogelijk de wetenschappelijke omvang van dit werk van Grothendieck te beschrijven, evenmin als dat mogelijk is wat betreft de inhoud van de 24 artikelen die hier samengebracht zijn. Het lijkt wel of alle auteurs van deze artikelen aangestoken zijn door: "Plutôt que de suivre (comme prévu) un ordre thématique rigoureux, je me suis laissé emporter par ma prédilection pour un thème particulièrement riche et brûlant ..." (Grothendieck in paragraaf 3 van *Esquisse*). We zien een rijke mengeling van stukken tekst die de onderliggende gedachte van een fundament voorzien ('basic setup'), van beschrijving van werk wat er recent aan deze onderwerpen gedaan is, vaak met uitvoerige verwijzingen, en van artikelen die speculaties bevatten hoe deze gedachten zich verder zouden kunnen ontwikkelen. Zeer aanbevolen!

De editors: "We dedicate all our efforts to Alexandre Grothendieck, with warmest sincerity and affection." Waar ik me graag bij aansluit.

F. Oort



D. Cox, J. Little et al.

Using algebraic geometry

Berlin, etc.: Springer-Verlag, 1998.

499 p., prijs DM 78,- (pb)

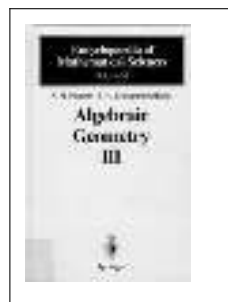
(Graduate texts in mathematics; 185).

ISBN 0-387-98492-5

Polynomen staan aan de basis van de algebraïsche meetkunde. De ontwikkelingen op het gebied van algoritmen voor polynomen en verwante objecten uit de laatste decennia alsmede de implemen-

tatie van vele algoritmen in diverse computeralgebrapakketten, hebben de algebraïsche meetkunde een nieuwe stimulans gegeven en eveneens voor nieuwe toepassingen gezorgd. De auteurs beogen met het boek de relevante technieken en de toepassingen te beschrijven voor de niet-specialist. Als voorkennis worden standaardzaken uit de algebra verwacht (groepen, ringen, lichamen). Het boek sluit goed aan bij het eerdere boek *Ideals, Varieties and Algorithms* van de auteurs, al is de stijl van schrijven wat compacter en wat meer gericht op de beter ingevoerde wiskundige/wiskundestudent, en al is er enige overlap. Aan de orde komen Gröbnerbases, resultanten (inclusief verbanden met torische variëteiten), diverse zaken uit de commutatieve algebra (lokale ringen, syzygieën, resoluties), en toepassingen in de gebieden integer programming, combinatoriek, splines en coderingstheorie. Om diverse algoritmische zaken te illustreren, zijn Maple-routines in de tekst opgenomen. Het boek is zo opgezet dat er op meerdere manieren een cursus uit samengesteld kan worden. Zo kan na de onontbeerlijke inleiding over Gröbnerbases en systemen van vergelijkingen (hoofdstuk 1 en 2) elk van de drie boven genoemde gebieden (resultanten, commutatieve algebra, toepassingen) min of meer onafhankelijk van elkaar aan de orde komen. Samen met de vele opgaven zijn diverse stukken ook goed te gebruiken als, of om te vormen tot, (tentamen-)projecten bij een al bestaande cursus op het gebied van effectieve methoden in de algebra of algebraïsche meetkunde. In hoofdstuk 1 wordt de algoritmische kijk op het rekenen met polynomen uiteengezet culminerend in het Buchberger-algoritme voor het bepalen van een Gröbnerbasis voor een ideaal in een polynoomring. Daarnaast is er enige aandacht voor het verband tussen idealen en affiene variëteiten. Het tweede hoofdstuk gaat in op het oplossen van stelsels polynomiale vergelijkingen en legt het verband met algebra's. Eindigdimensionale algebra's en methoden uit de lineaire algebra krijgen daarbij speciale nadruk. Het klassieke onderwerp 'resultanten' staat centraal in hoofdstuk 3: eigenschappen en de rol van resultanten bij het oplossen van vergelijkingen. In hoofdstuk 4 worden computationele aspecten van lokale ringen bestudeerd (bijvoorbeeld multipliciteiten) en analoga van Gröbnerbases in de context van lokale ringen. De volgende twee hoofdstukken behandelen modulen (Gröbnerbases voor modulen, presentaties, resoluties, syzygieën, Hilbertpolynomen). Een interessant verband tussen geheeltallige en combinatorische problemen enerzijds en polynomen anderzijds ontstaat door de geheeltallige coëfficiënten uit zo'n probleem als exponenten in polynomen op te nemen. Dit verband wordt in de hoofdstuk 7 en 8 uitgediept in verschillende richtingen. In hoofdstuk 7 komt de klasse van torische variëteiten aan de orde. Torische variëteiten worden gemaakt uit (systemen van) polytopen. De constructie verbindt daarmee combinatorische en algebraïsch meetkundige objecten. Ook bespreken de auteurs de stelling van Bernstein over een verband tussen aantallen oplossingen van een stelsel vergelijkingen en de meetkunde van polytopen. Hoofdstuk 8 gaat in op het herformuleren van integer programming problemen in termen van polynomen en het nut van Gröbnerbasistechnieken bij het oplossen van zulke problemen. De laatste paragraaf bespreekt een relatief recente toepassing van Gröbnerbasistechnieken: de constructie van splines op polyhedrale onderverdelingen van gebieden in $\mathbb{R}^n$. Het laatste hoofdstuk is gewijd aan coderingstheorie. Behandeld worden de constructie van codes, al dan niet met behulp van algebraïsche meetkunde, en de rol van Gröbnerbases bij de bestudering van co-

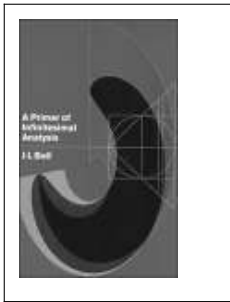
des, bijvoorbeeld bij het decoderen. Het boek is een nuttige aanwinst om bij of naast een college te gebruiken. Voor gebruikers van het boek onderhouden de auteurs een website. *H. Sterk*



A.N. Parshin et al.
Algebraic geometry III
Complex algebraic Varieties
Algebraic curves and their Jacobians
 Berlin, etc.: Springer Verlag, 1998.
 270 p., prijs DM 158
 (Encyclopaedia of mathematical sciences; 36).
 ISBN 3-540-54681-2

This volume of the Encyclopaedia of mathematical sciences gives in 1998 translations of two Russian manuscripts from 1989. Reading this material I wonder why Springer-Verlag, and the editors of the Encyclopaedia have chosen to publish this material. These are highly interesting topics. And we would welcome good textbooks on them. However these texts do not fall into that classification. Clearly publishing a book almost ten years after the manuscripts were finished, has the outcome that results and references are not up-to-date. Why not try to find a new author for these topics, or ask the present authors to update and revise their manuscripts? However, things are worse. Not only are references after 1989 lacking, but also important earlier results and crucial references are missing. From the manuscript it is clear that the authors at the time or writing were not informed about many 'new' developments. Several central results are not present. Or, results are mentioned without a proper reference, even if the material appeared long before 1989; e.g. on page 235 we find the 'Connectedness theorem' by Fulton and Lazarsfeld, why not give the reference to their paper which appeared in 1981? We all know that a book with such lacunas is not of much use. We could hope that at least the classical theory is well-recorded. However, also that is not the case. For example, 2.5.4 'Moduli spaces' is a text which is vague, full of dubious statements, missing crucial points. When applying these, the arguments are incomplete; e.g. on page 101: "Thus, the coarse moduli space M for elliptic curves is nothing else but the affine line $\mathbb{A}^1 = \mathbb{C}$ " (their arguments do not show this, 'thus' is not justified), or arguments and conclusions are plainly wrong, e.g. on page 105: "This is related to the observation that the neighborhood of the point $[X]$ in the moduli space M_g is analytically isomorphic to the quotient of S by an action of an involution...". The translation is not satisfactory ('curves of degree 2' meaning curves of genus 2, see page 212). Misprints in the list of references make life difficult, e.g. the reference Serre (1950), page 216, should be Serre (1956). This book reviews classical literature and results, for example on periods of integrals and on the Schottky problem. Those parts are nicely written and as such the present book has its merits. However on the whole I think care should have been taken to avoid the publication of texts with lacunes and mistakes as in this volume. This seems far below the usual level of this publishing company.

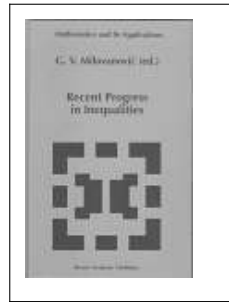
F. Oort



J.L. Bell
A primer of unfinished calculus
 Cambridge: Cambridge University Press,
 1998. 122p., prijs £19,50.
 ISBN 0-521-62401-0

In a set-theoretical context, a continuum is viewed as a collection of points without gaps, and because of the discrete nature of these entities, there can be no continuum within the framework of set theory. In one way or another this objection to the set-theoretical foundation of mathematics has been frequently heard, in this century notably from L.E.J. Brouwer and René Thom. It is thought that the continuum of real numbers derives its 'continuity' not merely from the absence of gaps, but from certain features of additional structures (order-theoretic, topological) that are imposed on it. It is here that infinitesimals have an essential part to play. The infinitesimals of this book should not be confused with those introduced by A. Robinson in the sixties in the context of nonstandard analysis. In the present book the infinitesimals are part of a theory, created in the seventies as the byproduct of a development in the category theory, of a smoothly continuous world. This is essentially a theory of zero-square infinitesimals, quantities that can be thought of as being so small that their squares and higher powers can be neglected. Since all functions in $\mathbb{S}$ are continuous, it follows that the law of excluded middle is bound to fail. In particular, the statement 'for all real numbers x , either $x = 0$ or *not* $x = 0$ ' is false in $\mathbb{S}$. On this basis the book develops the usual elements of the differential and integral calculus of a single variable and of several variables. Naturally, this approach is characterized by the complete absence of the concept of limit, theorems are derived by purely algebraic means. The description of the derivative of a function given below serves to illustrate the nature of $\mathbb{S}$. First, let R be the smooth real line, and denote Δ the part of R consisting of all ε for which $\varepsilon^2 = 0$ (the infinitesimals or micro quantities). Now let f be any given function $f : R \rightarrow R$. For fixed $x \in R$, define $g_x : \Delta \rightarrow R$ by $g_x(\varepsilon) = f(x + \varepsilon)$. then, by the so-called principle of Microaffineness – which says that the graph of any map g with domain Δ is a unique line passing through $(0, g(0))$ – we have $g_x(\varepsilon) = g_x(0) + b_x \varepsilon$, so that $f(x + \varepsilon) = f(x) + b_x \varepsilon$. Then varying x and writing $f'(x) = b_x$ yields the derivative f' of f . Observe that in $\mathbb{S}$ every map $F : R \rightarrow R$ has a unique derivative. Apart from the basic elements of calculus, the book also gives many applications of differential calculus (to physics for instance), it gives a brief introduction to synthetic differential geometry and it closes with a chapter on $\mathbb{S}$ as an axiomatic system. In an appendix the construction of models for smooth infinitesimal analysis is sketched. Here the reader should be familiar with the basics of category theory. It was a real pleasure to read this book, not in the least because of the abundance of well-chosen, often historical examples. Finally, anyone with a basic acknowledge of calculus won't have many difficulties. The book should be of interest to most mathematicians, especially to those with a taste for the philosophy of mathematics.

R.J. Stroeker



G.V. Milovanović (ed.)
Recent progress in inequalities
 Dordrecht Kluwer, 1998.
 519p., prijs f395,-
 (Mathematics and its applications; 430).
 ISBN 0-7923-4845-1

This volume is a collection of papers presented at an International Memorial Conference dedicated to the late Dragoslav S. Mitrinović (1908-1995). It was held at the Faculty of Electronic Engineering, University of Nis, Yugoslavia, from June 20-22, 1996. D.S. Mitrinović, who dedicated much of his mathematical life to his great passion, the study of inequalities of all kinds and shapes, is probably best known from his monograph, *Analytic Inequalities* with P.M. Vasić, published by Springer-Verlag in 1970. The memorial conference was split up into three sections: *Recent progress in inequalities*, *Advances in mathematical analysis*, and *Topics in mathematics and applications*. Only a selection of papers on inequalities found its way into this volume. The book is divided into three sections as well: an *Introduction* to the life and scientific work of D.S. Mitrinović, *Invited papers* (a total of 19) and *Contributed papers* (15 in all). The first part starts with an essay on Mitrinović's life, followed by an seemingly complete overview of his scientific publications (over 300 papers, 16 monographs and 35 textbooks). The papers of the next two sections are listed alphabetically by author and apparently no effort has been made to try and group them into some sort of natural order. Understandably so, I think, because the variety of topics would probably prevent a successful subdivision into groups of more than one anyway. Almost all papers have an analytical flavour. Some provide lists of related inequalities attributed to Vietoris, Hardy, Marcinkiewicz-Zygmund, Shapiro, Bernstein, Wirtinger, Ostrowski, Fan-Todd, Cauchy, Landau, and others, and I found classical polynomial inequalities in Elliptic boundary value problems, Help-type integral and series inequalities, inequalities in circular arithmetic, error inequalities for Hermite and Spline interpolation, and many more. For those with an interest in analytical inequalities, this is a valuable addition to the already vast literature, to be consulted in a public library. Indeed, the exorbitant price will probably prevent most individuals from ordering this volume for their private libraries.

R.J. Stroeker

H.A. Priestly
Introduction to integration

Oxford: Clarendon Press, 1997. 306 p., prijs £40,-
 (Oxford science publications). ISBN 0-19-850124

'Integration' in the title denotes the Daniell version of the Lebesgue integral. This is not uncommon in textbooks since Riesz and Nagy's *Leçons d'analyse fonctionnelle* (1952), even when Riemann's integral stays dominating the Calculus. In the Daniell version the integral is a linear functional on a suitably constructed space of functions, their integral obviously being an area. By repeated extensions of this set of functions as well as of the functional at last the Lebesgue integral and the space of integrable

functions are reached. The author of the present book develops this construct, pauses at several stages to look at practical details of integration that have then come within reach of the reader and thus combines the reader's growing understanding with improving his skill in integration technique. The book is divided into 34 rather short chapters, again facilitating the interplay between growth and skill. Only two of these chapters are devoted to measure (apart from null sets) and so the book is 'not a book for aficionados of measure theory', as the preface admits. The first twelve chapters give the construction already mentioned, then follow the main theorems on convergence, Fubini, connections with derivatives, and so on; in the last seven chapters are what you might call applications: L^p -spaces, Fourier series and transforms, Hilbert space, probability. The book is well written, in a catching style, with appropriate warnings in difficult places and numerous well-chosen examples and exercises. A modest bibliography gives 19 titles for further study. There are some silly misprints and also a few errors, most of them easily recognizable. The book is at once an attractive textbook for students of analysis and an accessible source of information for the analyst. It will not conquer the Riemann integral but certainly may contribute to the appreciation of Lebesgue's integral.

W. van der Meiden

theory. The problem now is to minimize the weighted energy

$$I_w(\mu) = \int \int \log \frac{1}{|z - \zeta| w(z) w(\zeta)} d\mu(z) d\mu(\zeta) = I(\mu) + 2 \int Q d\mu$$

for probability measures μ on E , where $w = e^{-Q}$. Depending on Q , the set E may even be unbounded. It is shown that there is still a unique extremal measure μ_w , but in contrast to the unweighted problem, its support S_w need not coincide with the outer boundary of E . The properties of extremal measures take up an important chapter in the book. Other chapters deal with the recovery of measures from their potential and potential theory for signed measures. There is an appendix on the Dirichlet problem and an appendix by Thomas Bloom on weighted approximation in $\mathbb{C}^N$. The external field problem provides a *unified approach* to many seemingly unrelated problems of approximation which are discussed in detail. They include the asymptotic analysis of orthogonal polynomials on an unbounded interval, the study of so-called fast decreasing polynomials:

$$p_n(0) = 1, \quad |p_n(x)| \leq \exp(-n\phi(x)), \quad -1 \leq x \leq 1$$

for suitable $\phi \geq 0$, the study of incomplete polynomials $\sum_{k=\theta n}^n a_k x^k$ where $0 < \theta < 1$, the asymptotic behavior of ray sequences of Padé approximants, rates of convergence of best approximating rational functions, numerical conformal mapping, random matrices and much more. The monograph is self-contained and carefully written; it should be accessible to students with a standard background in classical and functional analysis. Finally, in this review for a Dutch journal it is appropriate to mention that the book describes several of the contributions by Arno Kuijlaars for which he received the 1998 Popov Prize in Approximation Theory.

J. Korevaar



E.B. Saff, V. Totik

Logarithmic potentials with external fields

Berlin, etc.: Springer-Verlag, 1997.

505 p., prijs DM 158

(*Grundlehren der mathematischen Wissenschaften*; 316). ISBN 3-540-57078-0

In recent years there has been important interaction between planar potential theory and approximation theory. Most of the new results involve the case where there is an external field present. The present monograph first develops this 'weighted' potential theory in analogy with Frostman's theory for the classical case. Somewhat more than half of the book is devoted to applications. Many of the results are due to the authors and have not appeared in book form before. To describe the 'problem area' it is convenient to use the language of two-dimensional electrostatics. One studies the equilibrium distribution of a unit charge μ on a (compact) conductor E in the complex plane $\mathbb{C}$. In the absence of an external field, equilibrium will be reached when the total energy

$$I(\mu) = \int \int \log \frac{1}{|z - \zeta|} d\mu(z) d\mu(\zeta), \quad \mu \text{ prob. meas. on } E$$

is minimal. There is a unique minimizing distribution μ_E ; it is supported by the outer boundary of E and its potential

$$U^{\mu_E}(z) = \int \log \frac{1}{|z - \zeta|} d\mu(\zeta)$$

is essentially constant on E . The distribution μ_E arises in a number of problems of classical analysis. For example, μ_E gives information on the limiting zero distribution for important classes of orthogonal polynomials on E . The introduction of an *external field* $Q(z)$ in the electrostatic problem gives a much wider scope to the



S. Kobayashi

Hyperbolic complex spaces

Berlin, etc.: Springer-Verlag, 1998.

471 p., prijs DM 168,-.

(*Grundlehren der mathematischen Wissenschaften*; 318).

ISBN 3-540-63534-3

Een Riemannoppervlak wordt elliptisch, parabolisch of hyperbolisch genoemd naargelang de universele overdekkingsruimte de Riemann-sfeer, het vlak $\mathbb{C}$ of de eenheidsschijf D in $\mathbb{C}$ is. Differentiaalmeetkundig betekent dit dat de kromming respectievelijk $+1$, 0 of -1 is voor de natuurlijke metriek. Het begrip hyperboliciteit, dat hier gedefinieerd is, kan op verschillende manieren uitgebreid worden naar hogere dimensies. De uitbreiding die we te danken hebben aan de auteur van dit boek is gebaseerd op het bestaan van een intrinsieke afstand die oorspronkelijk werd ingevoerd om het lemma van Schwarz te veralgemenen. Dit lemma betoogt dat elke holomorfe afbeelding van de schijf D in zichzelf contraheerend is ten opzichte van de Poincaré-afstand. In 1967 voerde S. Kobayashi een nieuwe pseudo-afstand in. Stel X een complexe variëteit en (p, q) twee punten gelegen in X . Neem vervolgens een keten van holomorfe schijven van p naar q , m.a.w. kies een rij

van punten (p_i) , $(i = 0, \dots, k)$, in X zodat $p = p_0$ en $q = p_k$, kies puntenparen (a_i, b_i) , $(i = 1, \dots, k)$, in D en holomorfe afbeeldingen f_i , $(i = 1, \dots, k)$, van D in X zodat $p = f_1(a_1)$, $q = f_k(b_k)$ en $p_i = f_i(b_i) = f_{i+1}(a_{i+1})$ voor $0 < i < k$. De afstand wordt bepaald door $d_X = \inf \sum_i d(a_i, b_i)$, waarbij het infimum genomen wordt over alle mogelijke ketens die p met q op deze manier verbinden. Indien X een compact Riemann-oppervlak is met genus ≤ 2 dan valt d_X samen met de natuurlijke metriek met kromming -1 . De auteur noemt een complexe ruimte hyperbolisch indien de pseudo afstand d_X een afstand is. Sinds de invoering van de pseudo-afstand door Kobayashi is er heel wat onderzoek verricht in dit domein. Mathematical Reviews besteedt hieraan twee secties, namelijk 'invariant metrics and pseudo distances' en 'hyperbolic complex spaces'. Interessant is het om het boek van S. Lang, *Introduction to complex hyperbolic spaces*, 1987, naast het hiervoor liggend boek te nemen om de geweldige vooruitgang te zien in dit domein.

Kobayashi geeft vrijwel alles van wat recentelijk verricht is aan onderzoek in dit domein. In hoofdstuk 1 bevindt zich alles wat men dient te weten over wat men afstands-meetkunde zou kunnen noemen. In hoofdstuk 2 wordt Ahlfors' veralgemening van het Schwarz-Pick lemma gegeven. Hoofdstuk 3 is zowat het hart van het boek. Het concept van hyperbolische inbedding is gebruikt om de grote Picard-stelling te veralgemenen. De auteur is een gereputeerd meetkundige en besteedt als dusdanig hier uitvoerig aandacht aan geometrische benaderingen. Het krachtigste criterium om hyperboliciteit te bewijzen is door gebruik te maken het criterium van Brody. Een complexe variëteit, X , wordt Brody-hyperbolisch genoemd indien er geen niet-constante holomorfe afbeeldingen bestaan van $\mathbb{C}$ in X . Hieruit volgt onmiddellijk dat elke hyperbolische complexe ruimte Brody-hyperbolisch is. De stelling van Brody zegt dan dat elke compacte hyperbolische complexe ruimte Brody-hyperbolisch is. Het criterium van Brody gecombineerd met de Nevanlinna-Cartantheorie van 'value-distributions' lijkt de beste benadering te zijn in dit domein. Het gedeelte van de Nevanlinna-Cartantheorie nodig voor het hyperboliciteitscriterium is samengevat in een zeer leesbaar appendix. De hieropvolgende hoofdstukken behandelen holomorfe afbeeldingen in hyperbolische ruimten, extensies en eindigheidsstellingen, maat-hyperbolische ruimten van algemeen type en waarde-distributies. Het boek bevat een zeer uitvoerige bibliografie en is derhalve zowel een goede en aangenaam leesbare inleiding in dit zeer uitgebreid onderzoeksdomein als een standaard werk bestemd voor onderzoekers die een up to date overzicht krijgen in het huidige lopende onderzoek.

P. Dehooghe

R. W. Easton

Geometric methods for discrete dynamical systems

Oxford: Oxford University Press, 1998. 158 p., prijs £50,-

Oxford Engineering Science Series; 50. ISBN 0-19-508545-0

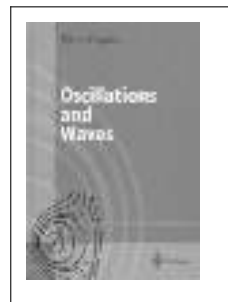
There are now quit a number of books on dynamical systems and any author should worry about the question which niche to fill. In the case of this book it is quite clear: a concise and rigorous introduction to the theory, plunging right into the basic abstract concepts. The prerequisites are linear algebra and functions of several variables and the audience is meant to be students of engineering, science and mathematics, or so the author tells us. This

is far too optimistic, the book is accessible for high-level mathematics students with an advanced background in analysis and some related subjects. There are examples and a lucid treatment of qualitative ideas but no applications or extensive discussion of quantitative methods.

The contents: The first chapter has many examples, very briefly discussed. Chapter 2 contains basic concepts like invariant set, attraction (introduced rather counter-intuitively) and questions like partitioning or orbit spaces into classes or orbit spaces into classes with the Conley decomposition theorem. Chapter 3 describes hyperbolicity with the stable-unstable manifold theorem, shadowing, the horseshoe map, resonance zones. In chapter 4 isolated invariant sets are discussed which touches upon bifurcation theory, in chapter 5 the author studies the Convey index, in chapter 6 symplectic maps as arising from discrete variational principles including a one and a half page discussion of symplectic integrators (engineers will like a reduction to their main interest to this size!). A number of appendices and various guides to the literature complete the text. There are a few typos and errors but not too disturbing. As I noted earlier, this book does not reach intended audience and it presupposes much more than the author mentions in the introduction.

But do get me wrong: this is a very fine book, clearly written with a lot of basic subjects thoroughly discussed. What I am missing most is an extensive treatment of bifurcation theory but I admit there are quite a few books on that topic. The book is useful as background material for all of us and it is very suitable for a seminar on dynamical systems theory with a lot of details to be worked out by the participants under guidance of an expert.

F. Verhulst



F.K. Kneubühl

Oscillations and waves

Berlin: Springer-Verlag, 1997.

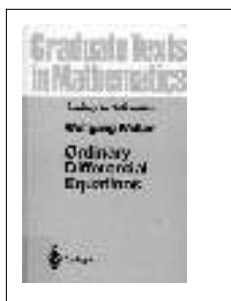
523 p., prijs DM 98,- (hc).

ISBN 3-540-62001-X

De fysicus Kneubühl heeft met een boek een gedegen samenvatting gegeven van het brede vakgebied van lineaire en niet-lineaire trillingen. Om een indruk te geven van de onderwerpen die door dit boek worden bestreken, noem ik kort de titels van de hoofdstukken: 'Free oscillations', 'Forced oscillations', 'Kinematics of systems', 'Transfer systems', 'Instability and chaos', 'Linear waves', 'Nonlinear waves' and 'Standing waves'. Het boek beoogt een samenvattende inleiding te geven van de verschillende mathematische aspecten van trillingen en golven gericht op gebruik door fysici en ingenieurs. Dat betekent dat de auteur nergens diep op in kan gaan, maar hij geeft wel steeds een begrijpelijke schets van het betreffende onderwerp plus een aantal relevante literatuurverwijzingen. Door het brede karakter van het boek is het een fraai encyclopedisch overzicht geworden van dit vakgebied. Het is natuurlijk niet bestemd voor specialisten (het hoofdstuk over chaotische gedrag bijvoorbeeld is slechts 30 pagina's groot), maar zij kunnen wel snel geïnformeerd worden over andere dan hun ei-

gen kennisgebieden. Zo verwacht ik dat dit boek zeer geschikt zal zijn om te dienen als bronmateriaal voor een inleidend maar ook een meer dieper gravend college (er is bijvoorbeeld een volledige classificatie van twee-dimensionale kwadratische autonome systemen opgenomen). Als recensent ga je in zo'n boek al gauw zoeken of de auteur jouw eigen favouriete onderwerpen en referenties vermeldt, en dan blijkt dat dit boek natuurlijk niet echt alles geeft. Dat kan natuurlijk ook niet in zo'n 500 pagina's, maar niettemin levert het boek een schat aan gecondenseerde fraaie informatie. Zo trof ik een aantal expliciete analytische oplossingen aan voor niet-lineaire problemen (bijvoorbeeld de elliptische excitatie van de inhomogene Duffingvergelijking in hoofdstuk 3.4.2 en nuttige informatie over niet-lineaire golven zonder en met diffusie in de hoofdstuk 8.2 en 8.3). In het uitgebreide overzicht 'Modulated linear oscillators' is het vakgebied van de auteur (infraroodfysica) prominent aanwezig.

E.J.M. Veling



W. Walter
Ordinary differential equations
 Berlin, etc.: Springer-Verlag, 1998.
 380 p., prijs DM 98,-
 (Graduate texts in mathematics; 182).
 ISBN 0-387-98459-3

Ter bespreking ligt een nieuwe versie van een leerboek over gewone differentiaalvergelijkingen van Wolfgang Walter: qua inhoud grotendeels de 6de druk van *Gewöhnliche Differentialgleichungen*, nu uitgebreid en in het Engels vertaald door Russell Thompson. Ter zijde: De eerste druk van de Duitstalige versie – toen nog een handzaam 'Heidelberger Taschenbuch' – is van 1972.

De gepresenteerde stof biedt wellicht weinig verrassingen. Een degelijke behandeling van gewone differentiaalvergelijkingen wordt gegeven; de gekozen voorbeelden spreken mij erg aan. Bij vergelijking van vorige uitgaven (in het Duits) met het voorliggende Engelstalige boek viel mij onder meer op dat in hoofdstuk II bij het construeren van boven- en onder-grenzen voor oplossingen van een DV via differentiaalONgelijkheden nu ook het begrip separatrix wordt behandeld. Het aldus traceren van mogelijke separatrices is nieuw: ik vind de introductie zowel nuttig als origineel. Opmerkelijk is nog de mijns inziens wat kunstmatige introductie van een 'nieuw' woord: *ansatz* dat in het boek herhaaldelijk wordt gebruikt (volgens een voetnoot in de inleiding bestond nog geen geschikt woord in de Engelse taal om aan te geven dat een kandidaat-oplossing voor een DV wordt getest). Ik heb nauwelijks drukfouten in de text aangetroffen. Het boek staat, met de appendices, geheel op zichzelf. Het bevat vele opgaven met soms aanwijzingen. Gezien de didactisch verantwoorde opbouw is dit boek van harte aan te bevelen als leerboek.

W.A.K. Maas



A. Pankov
G-Convergence and homogenization of nonlinear partial differential operators

Dordrecht: Kluwer, 1997.
 249 p., prijs f 210,-
 (Mathematics and its applications; 422).
 ISBN 0-7923-4720-X

This book has been written for specialists in the field of homogenization (or averaging) techniques for nonlinear elliptic or parabolic operators. The author introduces in chapter 1 the concept of G-convergence for some abstract operators. Special attention is paid to monotone operators and parabolic operators. In chapter 2 strong G-convergence for nonlinear elliptic operators is considered in detail. Homogenization problems for random, homogeneous elliptic operators, and for (almost) periodic elliptic operators are studied thoroughly in chapter 3. In chapter 4 the strong G-convergence and homogenization problems for nonlinear parabolic operators are considered. The same problems for nonlinear difference operators are discussed shortly in appendix A. A list of eighteen interesting open problems is given in appendix B. An index and an up-to-date bibliography with 269 references conclude this book.

W.T. van Horssen

D. Przeworska – Rolewicz
Logarithms and antilogarithms.
An algebraic analysis approach

Dordrecht: Kluwer, 1998. 348 p., prijs f 295,-
 (Mathematics and its applications). ISBN 0-7923-4974-1

Een groot deel van de resultaten uit de calculus kan afgeleid worden uit eigenschappen van de differentiatie-operator. In de zogenaamde algebraïsche analyse wordt dit veralgemeend door in plaats van de differentiatie-operator een willekeurige rechts-inverteerbare operator werkend op een lineaire ruimte te beschouwen en daar analoge resultaten voor af te leiden. Hierbij is het niet nodig het bestaan van een convolutieproduct aan te nemen zoals bijvoorbeeld in de Mikusinski-calculus. Het onderhavige boek zet een theorie op van logaritmen gebaseerd op een rechts-inverteerbare operator in een Banachruimte. Logaritmen worden dan gedefinieerd als multifuncties die aan een vergelijking voldoen die de gewone logaritmische afgeleide imiteert. De auteur heeft in dit boek ongetwijfeld een goede setting gevonden voor een abstracte behandeling van logaritmen.

Helaas is het boek zo geschreven dat het niet prettig leest. Er is een overvloed aan resultaten, die gewoonlijk kort bewezen kunnen worden, maar veel notatie vereisen. Jammer genoeg zijn expliciete voorbeelden schaars. Verder ontbreekt een overzicht van hoogtepunten en is het Engels nogal houterig. Gezien de prijs van dit boek is het onbegrijpelijk dat de uitgever niet de moeite heeft genomen de tekst te laten bijschaven. Het boek bevat ook een appendix van ruim 60 bladzijden geschreven door Binderman, een voormalig student van de auteur. Deze appendix bevat werk van Binderman betreffende zogenaamde functionele translatie-operatoren. Hoewel dit onderwerp ook abstract van aard is, bevat de appendix een redelijk aantal expliciete toepas-

singen, meestal veralgemeningen van de formule van Taylor. Het boek bevat een redelijk aantal referenties. Helaas wordt er in de tekst nauwelijks verwezen naar referenties met betrekking tot andere abstracte operatormethoden. Zo zijn er bijvoorbeeld wel referenties naar artikelen over de umbrale calculus van Rota, maar deze artikelen worden in de tekst jammer genoeg niet genoemd. Dit is merkwaardig, aangezien er duidelijke aanknopingspunten zijn (en zelfs gedeeltelijk overlapt met het werk van Binderman). Immers, de umbrale calculus kan gezien worden als een theorie van Taylorontwikkelingen met veel expliciete voorbeelden. Gezien het bovenstaande kan ik dit boek alleen aanbevelen aan diegenen die sterk geïnteresseerd zijn in abstracte operatormethoden.

A. Di Bucchianico

W. Freeden, T. Gervens, M. Schreiner

**Constructive approximation on the sphere,
with applications to geomathematics**

Oxford: Clarendon Press, 1998. 427 p., prijs £65

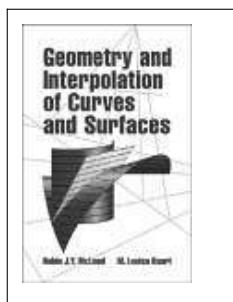
(Numerical mathematics and scientific computation). ISBN 0-19-853682-8

De serie 'Numerical mathematics and scientific computation'-serie begint wat mij betreft een uitstekende naam te krijgen voor naslagwerken. In de aankondiging wordt het boek aanbevolen aan studenten in het laatste deel van hun studie, waarbij elementaire lineaire algebra, functionaalanalyse en numerieke wiskunde als bekend verondersteld worden. Dat laatste klopt, maar de eerste doelstelling is, denk ik, lichtelijk hooggegrepen (de doelgroepstudenten zijn geofysici en geo-engineers, maar het lijkt me voor studenten in vrijwel *elke* afstudeerrichting nogal zware kost). Er zijn voldoende boeken op het gebied van speciale functies (en dus ook over sferische harmonische functies) en er zijn ook veel boeken op het gebied van constructieve approximatie – die laatste boeken handelen echter bijna alle over benaderingsmethoden voor functies gedefinieerd op (een deel van) Euclidische ruimten. Daarom levert deze verhandeling een zinnige bijdrage aan de wetenschap: naast de gebruikelijke en al genoemde sferische harmonische functies, is er ook aandacht voor sferische splines (ik mis daar echter de naam van Schumaker), er is een leuk hoofdstuk over numerieke integratie op de bol, en voorts worden wavelets zeer uitvoerig beschreven. Kortom een goed boek, dat ook prettig leest, maar zeker gezien de doelgroep nogal zwaar aangezet. Ik zou de toevoeging aan de titel 'with applications to Geomathematics' weggelaten hebben, want daar heb ik niets van terug kunnen vinden. Zuivere wiskunde, in die categorie valt dit boek.

R. van Damme

tion and approximation problems. Their approach is intuitive and step by step: problems to be dealt with are motivated and introduced, a large number of worked examples is presented and then the associated body of theoretical results is developed, often again illustrated by examples. Geometry is the unifying theme. Furthermore, emphasis is clearly on one-dimensional interpolation methods; only the final chapter deals with local interpolation in two dimensions in some detail. We proceed by giving a short sketch of the contents of the various chapters. In chapter 1 simple polynomial (Lagrange as well as Hermite) and rational interpolation problems are discussed. Various kinds of cubic splines are also dealt with. The aspect of unisolvence is treated and within this context Haar's theorem is proved, this being the main theoretical result of chapter 1. A sizable part of the book is spent on conic sections, this because of their importance in engineering drawing and in the finite element method. Through examples, specific properties of these curves are treated, e.g. conics through a given number of points, the conic touching five lines, conics with specified curvature, osculating conics, et cetera. Since in most applications these curves are defined piecewise, piecewise conics with various degrees of continuity are also briefly discussed. The text continues with a short introduction to synthetic geometry. This approach, as opposed to the analytical one, directly discusses the geometrical entities involved, viz. lines, planes, spheres, curves and so on (whereas in the analytical way these entities are expressed by equations, and their properties derived by the use of algebra and analysis). As an example of synthetic reasoning, a proof of a special case of the well-known Desargues theorem is given. Algebraic projective geometry is the subject of chapter 4. The authors begin with introducing homogeneous coordinates for the real projective plane, because these enable one to use algebraic methods to study algebraic curves in the sequel of the book. A proof is given of the so-called fundamental theorem of projective geometry. The remainder of the chapter is devoted to a discussion of some particular projective transformations, i.e. central projections, affine projections, similarity and Euclidean transformations.

Algebraic curves are the topic of chapter 5. Based on the material of the preceding chapter, general properties of these curves are studied as well as particular properties of curves allowing a rational parametrization. It is pointed out how the multiplicity of curve intersections should be counted and how to handle singularities of curves using specific transformations. This general characterization should suffice. However, to lend a bit of colour to the description of this chapter, the following three observations are added: (1) in dealing with curve intersections, one encounters non-linear equations; a technique known as dialytic elimination, due to Sylvester (1814 - 1897), to solve such equations is sketched; (2) a proof of the Maclaurin - Bézout theorem is given. This theorem, fundamental for the study of algebraic curves, reads as follows: two plane algebraic curves of precise orders m and n respectively, and having no common nonconstant component, have mn intersections; (3) Colin Maclaurin (1698 - 1746), of whom the authors remark (cf. page 217-218): "He entered Glasgow University at the tender age of eleven and graduated in 1714, aged sixteen. Although he is most often remembered because of the series which bears his name, most of his work has a strong geometrical flavour. At the age of twenty-one he became a Fellow of the Royal Society, and the following year published his Geometria



R.J.Y. McLeod, M.L. Baart

**Geometry and interpolation of curves
and surfaces**

Cambridge: Cambridge University Press,

1998. 414 p., prijs £50,-.

ISBN 0-521-32153-0

The authors describe, with applications and practical problems in mind, the role of algebraic curves and surfaces in interpola-

Organica, which extended Newton's geometrical studies."

Chapter 6 deals with examples and applications. Among other things, different ways of constructing parametrizations of curves with zero deficiency are considered. Furthermore, a number of interpolation and approximation methods based upon the parabola are treated, leading to a general discussion of the closeness of curves as a geometrical property (the Hausdorff distance metric comes to mind). Finally, brief attention is given to the role of geometrical interpolation, in the derivation of difference methods for the solution of differential equations. Interpolation with surfaces is dealt with in chapter 7. The basic theory as developed in the preceding chapters is applied to the construction of finite element basis functions and surface interpolants over nonregular shapes. Moreover, the so-called Steiner surface, the cubic surface (a proof is given that there are twenty-seven lines upon its surface) and the quartic surface are briefly discussed. I conclude with a few general remarks. At the end of each chapter a number of exercises (forty on average) are included. The exercises are preceded by a short section entitled 'bibliographical notes' in which a few references on the subjects dealt with are given; no separate list of references is included at the end of the book. What is striking here is that, apart from a tiny few, all these citations refer to literature published before 1980, i.e. (almost) no references to recently appeared books and papers on interpolation and approximation methods are included, a part of analysis which clearly is very much alive nowadays. In view of this observation and taking into account the nature of the problems dealt with in the book, one is tempted to conclude that the text of McLeod and Baart is somewhat beside the mainstream of the subject of interpolation and approximation. However, a positive feature of the book definitively is that it contains so many examples; as such, it is very well suited for self-tuition.

F. Schurer

and $W^r H^{\omega_\alpha}(\mathbb{R})$, where $\omega_\alpha = t^\alpha$ ($0 < \alpha < 1$). It would lead too far afield to try to describe in more detail the nature of the results arrived at in the book. Instead, we restrict ourselves to a few general remarks. The introductory section is very well documented and sketches the historical framework of the monograph's content. It gives an impressive account of what has been accomplished thus far in this area of analysis and surely wets the appetite for the author's subject. All chapters are carefully written and, clearly, great attention has been given to a precise formulation of the concepts, the definitions and the (proofs of the) theorems, most of them being of a highly technical character. The bibliography is up-to-date and contains ninety-three well-chosen references, eight of which are due to the author. The subject index is rather meagre. Bagdasarov's monograph, excellently produced by Birkhäuser, is a welcome addition to the literature and can be warmly recommended to specialists in theoretical approximation theory.

F. Schurer



R. Tolimieri, M. An
Time-frequency representations

Boston: Birkhäuser, 1998.

284 p., prijs DM 138,-

(Applied and numerical harmonic analysis).

ISBN 0-8176-3918-7

Dit boek is verschenen in de reeks toegepaste en numerieke harmonische analyse, en het behandelt signalen als functies op een eindige abelse groep. De tijd wordt gelabeld door een eindige abelse groep A en de frequentie door A^* , de groep van (unitaire) karakters van A . Het boek valt uiteen in vier delen. In het eerste deel, hoofdstukken 1-4, wordt de benodigde voorkennis over eindige groepen gegeven. In het bijzonder worden de discrete Fouriertransformatie en de Poissonsommatieformule besproken. Het tweede deel, hoofdstukken 5-15, vormt de hoofdmoot van het boek en hierin wordt de discrete versie van de 'windowed' Fouriertransformatie besproken. In het derde deel, hoofdstuk 16 en 17, worden 'multirate' filters behandeld. Het laatste deel is hoofdstuk 18 over toepassingen op tijdreeksen van financiële markten. Dit hoofdstuk is geschreven door S. Adak en A. Sarkar.

In de hoofdmoot worden de Weyl-Heisenbergssystemen bestudeerd als analogon van de 'windowed' Fouriertransformatie. De invoer bestaat uit een vensterfunctie g op A en een ondergroep Δ van $A \times A^*$. Voor een element $x = (x, x^*) \in \Delta$ wordt de getransleerde functie g_x op A gedefinieerd als $g_x(a) = g(a - x)x^*(a)$. De ruimte $L(g, \Delta)$ opgespannen door alle getransleerde vensterfuncties g_x met $x \in \Delta$ is het onderwerp van studie. De volgende vragen worden onder andere beantwoord; wat is een karakterisatie van $L(g, \Delta)$, wanneer vormen de getransleerde functies een orthonormale basis voor $L(g, \Delta)$ of een 'tight frame' zoals in de theorie van wavelets. In eerste instantie worden deze vragen beantwoord voor $\Delta = B \times B_*$, een kritieke 'sampling' ondergroep, met B een ondergroep van A en $B_* \subset A^*$ de ondergroep van alle karakters van A die triviaal zijn op B . Vervolgens worden de 'oversampling' ondergroepen, d.w.z. dat Δ een kritieke sam-



S. Bagdasarov
Chebyshev splines and Kolmogorov inequalities

Birkhäuser Verlag, 1998. 205 p., prijs DM

178,- (Operator theory: advances and ap-

plications; 105). ISBN 0-8176-5984-6; ISBN

3-7643-5984-6

This monograph, consisting of a preface, an introductory section, seventeen chapters, two appendices, a bibliography and a subject index, describes advances in the theory of extremal problems in classes of functions defined by a majorizing concave modulus of continuity $\omega := \omega(t)$. According to the preface, the three main goals pursued in the book are: (1) to introduce the notion of and give the formulae for the perfect ω -splines in the Sobolev classes $W^r H^\omega$; (2) to describe various extremal properties of perfect ω -splines by emphasizing the new phenomena and the old features inherited from polynomial perfect splines; and (3) to show applications of the general theory of perfect splines in examples related to the computation of N -widths of classes $W^r H^\omega$ and the author's solution to one of the most celebrated problems in real analysis: the Kolmogorov problem of sharp inequalities for intermediate derivatives in the so-called Hölder classes $W^r H^{\omega_\alpha}(\mathbb{R}_+)$

pling ondergroep bevat, behandeld door middel van een verdeel-en-heersalgoritme waarmee reductie naar het kritieke geval kan worden verkregen. Een essentieel onderdeel hierin is de Zaktransformatie, de discrete-Fouriertransformatie over een ondergroep van de getransleerde functie. Het is onduidelijk of dit boek bedoeld is voor wiskundigen met belangstelling voor signaalanalyse of voor signaalanalysten met belangstelling voor wiskunde. De wiskunde wordt in een voetgangerstempo ontwikkeld. Voor een introductie van de Fouriertransformatie op eindige groepen en haar toepassingen kan men beter het recente boek *Fourier analysis on finite groups and applications* van Audrey Terras (London Math. Soc. Student Texts 43, Cambridge Univ. Press, 1999) raadplegen. Het is onhandig dat het boek geen index van notatie heeft, terwijl de hoofdstukken beginnen met de mededeling dat de notatie is als in de voorgaande hoofdstukken. Omdat elke formule als 'Theorem' wordt gepresenteerd, is het moeilijker het kaf van het koren te scheiden. De redenen voor het opnemen van het laatste hoofdstuk zijn volstrekt onduidelijk.

H.T. Koelink

D. O'Regan, M. Meehan

Existence theory for nonlinear integral and integrodifferential equations

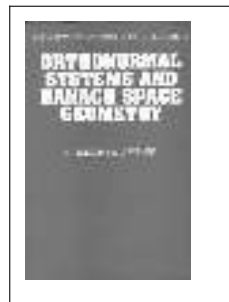
Dordrecht: Kluwer, 1998. 218 p., prijs f190,-
(Mathematics and its applications; 445). ISBN 0-7923-5089-8

Dit boek is een neerslag van de specifieke belangstelling van de auteurs. Hierbij is geen rekening gehouden met lezers uit andere (wiskundige en niet-wiskundige) disciplines. Het komt op mij over als een uitgebreid proefschrift. Met andere woorden, het is geschreven voor een kleine groep specialisten. Het eerste deel van het boek houdt zich bezig met existentieprincipes en resultaten voor niet-lineaire, Fredholm- en Volterra- integraal- en integro-differentiaalvergelijkingen op compacte en half-open intervallen. Zo worden bijvoorbeeld in hoofdstuk 5 existentieprincipes voor de Fredholmintegraalvergelijking

$$y(t) = h(t) + \mu \int_0^\infty k(t,s)g(s,y(s)) ds, \quad t \in [0, \infty),$$

waarbij $\mu \geq 0$, en de niet-lineariteit g sub-lineaire of superlineaire groei heeft, behandeld en worden er condities gegeven voor de oplossingen $y \in C[0, \infty)$, waarvoor $\lim_{t \rightarrow \infty} y(t)$ bestaat. Daarna wordt aandacht besteed aan de Voltteravergelijking waarbij de bovengrens van de integraal $t \in [0, T)$ met $0 \leq T \leq \infty$ is, tevens wordt aandacht besteed aan het geval $\mu = -1$. In het tweede deel komt een aantal onderwerpen aan de orde, waar de auteurs speciale belangstelling voor hebben, zoals niet-resonante en resonante problemen, vergelijkingen in Banach-ruimten, inclusies en stochastische vergelijkingen. Zoals gezegd een boek voor specialisten. Men kan zich afvragen waar het woord *applications* in de naam van de serie op slaat. In dit boek vindt men in ieder geval geen antwoord op deze vraag.

A. J. Hermans



A. Pietsch, J. Wenzel

Orthonormal systems and Banach space geometry

Cambridge: Cambridge University Press, 1998.
553 p., prijs £55,- (Encyclopedia of Mathematics and its Applications). ISBN 0-521-62462-2

This book essentially deals with providing tools to classify Banach spaces, these tools being ideal norms associated with orthonormal systems. The (abstract) framework is set up in chapter 3: Let $T : X \rightarrow Y$ be a continuous linear operator, X and Y being Banach spaces and let for $n \in \mathbb{N}$, A_n and B_n be orthonormal systems (of length n) in $L_2(M, \mu) \cap L_u(M, \mu)$ and $L_2(N, \nu) \cap L_v(N, \nu)$ with $1 \leq u, v < +\infty$. Then the associated Riemann-ideal norm $\rho_u^{(v)}(T|B_n, A_n)$ and Dirichlet-ideal norm $\delta_u^{(v)}(T|B_n, A_n)$ of T are considered. Special attention is paid to orthonormal systems obtained as characters on compact Abelian groups, such as the Fourier and Walsh systems. Substituting the sequences A_n and B_n by appropriate orthonormal systems then gives rise to sequences of numerical parameters which yield much insight into a lot of concepts from Banach space theory introduced in the last decades such as type and co-type of Banach spaces, B -convexity, super-reflexivity, et cetera. This basic philosophy is worked out successively in the case of Rademacher functions and the Gauss system (chapter 4), trigonometric functions (chapter 5), Walsh functions (chapter 6) and the Haar functions (chapter 7).

Comparison of the sequences of ideal norms thus constructed – in the sense of uniform equivalence – is one of the main features dealt with. Deep theorems from Banach space geometry are thus derived such as Kwapién's theorem (4.10.7), Pisier's theorem (4.14.10), the Maurey-Pisier theorem (4.16.5), Bourgain's theorem (5.6.29), James's theorem (7.8.12). Chapter 2 goes back to the origins of the theory, namely the isomorphic characterization of Hilbertian Banach spaces by S. Kwapién in 1972. Notice also that in section 5.4 and 5.8 respectively, the problem is discussed of defining vector-valued analogues of the Hilbert and Fourier transforms, leading to some important Banach ideals. The book ends up with ideal norms related to concepts like unconditionality (chapter 8), interpolation, ... (chapter 9). Among others, the Burkholder-Bourgain theorem is stated (without proof) (8.8.1) and a selection is given of open problems concerning ideal norms associated with orthogonal polynomials. The latter illustrates extremely well one of the main objectives of the book: to get young researchers interested in this exciting field. The authors have done an enormous effort to achieve this goal: each notion – classical or not – is introduced carefully; combinatorial results from real analysis are worked out in full detail; a lot of examples and counterexamples – mostly put into table form – illustrate the limits of the techniques used; many open problems are formulated. This is a beautiful book, not only covering the highlights of Banach space geometry, but also appealing young enthusiasts to enter this field and for whom it will provide an excellent preparation.

R. Delanghe

J. Jost, X. Li-Jost

Calculus of variations

Cambridge: Cambridge University Press, 1998. 323 p. prijs £3750
(Cambridge Studies in Advanced Mathematics; 64).

ISBN 0-521-64203-5

In hun voorwoord zeggen de auteurs dat zij trachten enkele van de vele aspecten van variatierekening te laten zien. Dat is ook wat er gebeurt. Dezelfde titel laat bij andere auteurs (cf. Giaquinta-Hildebrandt) andere aspecten aan de orde komen. Waar Giaquinta en Hildebrandt de klassieke variatierekening beschrijven ligt het zwaartepunt bij Jost en Li-Jost in de moderne theorie. Het boek bevat de delen *One-dimensional variational problems* en *Multiple integrals in the calculus of variations*.

De keuze van de auteurs voor de behandelde onderwerpen is zeer persoonlijk en hangt voor een deel nauw samen met hun recente onderzoek. Daarnaast worden een aantal klassiek te noemen resultaten behandeld en is ook de voorbereiding en behandeling van de 'direct methods' zeer volledig, zij het bondig. Ondanks dit hinken op twee benen is het boek, mede door zijn zorgvuldige en heldere stijl, zeker de moeite waard. Als hernieuwde kennismaking met de (moderne) variatierekening kan ik het zeer aanbevelen.

G.H. Sweers



S. Dragomir, L. Ornea
Locally conformal Kähler geometry

Boston: Birkhäuser Verlag, 1998.

327 p., prijs DM 178,-

(Progress in Mathematics; 155).

ISBN 3-7643-4020-7

Lokaal conforme Kähler variëteiten (l.c.K. ruimten) zijn Hermite-ruimten (M, g, J) waarvan de Hermite metriek g in de omgeving van elk punt conform is met een (lokale) Kählermetriek. De l.c.K.-ruimten vormen een interessante veralgemening van de Kähler-ruimten, die de belangrijkste studieobjecten uit de hedendaagse complexe meetkunde zijn. Het blijkt namelijk dat een aantal meetkundig interessante complexe ruimten (zoals de complexe Hopf-ruimten), waarop geen Kählermetrieken kunnen worden geconstrueerd, wel l.c.K.-metrieken toelaten. Dit boek geeft, op zeer systematische en gedetailleerde wijze, een overzicht van een groot aantal resultaten uit de studie van l.c.K.-ruimten. In een eerste deel van het boek wordt de differentiaalmeetkunde van l.c.K.-ruimten bestudeerd. Hierbij wordt ondermeer nagegaan onder welke voorwaarden een l.c.K.-ruimte ook een (globaal gedefiniëerde) Kählermetriek toelaat. In het bijzonder worden hierbij de *Vaisman-vermoedens* behandeld. Verder worden interessante voorbeelden van l.c.K.-ruimten beschreven waarop geen globale Kählermetriek kan worden geconstrueerd. Vervolgens wordt speciale aandacht besteed aan de meetkundige studie van een bijzondere familie van l.c.K.-ruimten, de zogenaamde *veralgemeende Hopf-ruimten* of *Vaisman-ruimten*, dit zijn l.c.K.-ruimten met een parallele Leeform. Daarna wordt een studie gemaakt van Hermite-oppervlakken die een l.c.K.-structuur bezitten, en worden holomorfe afbeeldingen tussen l.c.K.-ruimten en submersies

van l.c.K.-ruimten bestudeerd. In het laatste hoofdstuk van dit deel wordt aangetoond hoe bepaalde technieken uit de studie van l.c.K.-ruimten ook kunnen worden angewend voor het bestuderen van *lokaal conforme hyperKähler-ruimten*.

Het tweede deel van de tekst is gewijd aan de studie van deelvariëteiten van l.c.K.-ruimten. In een eerste hoofdstukken worden CR-deelruimten behandeld, en wordt aandacht besteed aan complexe, anti-invariante en ombilicale deelvariëteiten van l.c.K.-ruimten. Daarna wordt een studie gemaakt van extrinsieke sferen in veralgemeende Hopf-ruimten, en van reële hyperoppervlakken in l.c.K.-ruimten, en in het bijzonder in complexe Hopf-ruimten. Vervolgens wordt de meetkunde van complexe deelvariëteiten van l.c.K.-ruimten behandeld. Gebruik makend van integraalformules wordt verder een classificatie gemaakt van een belangrijke klasse van compacte, minimale CR-deelruimten in een complexe Hopf-ruimte. Tenslotte worden in een laatste hoofdstuk ondermeer de stabiliteit van complexe deelruimten van veralgemeende Hopf-ruimten, Chen klassen en geodetische symmetrieën ten opzichte van deelruimten in l.c.K.-ruimten besproken. Appendices over de Boothby-Wang-fibratie en over Riemannse submersies en een zeer uitgebreide literatuurlijst sluiten het boek af. De auteurs zijn erin geslaagd de vele resultaten in verband met l.c.K.-ruimten, die tot nu toe enkel verspreid in de literatuur van de laatste twee decennia konden worden gevonden, samen te brengen in een gestructureerd en overzichtelijk geheel, wat dit boek tot een waardevol naslagwerk maakt voor iedereen die geïnteresseerd is in de studie van lokaal conforme Kähler-ruimten.

P. Bueken

M. Crabb, I. James

Fibrewise homotopy theory

London, etc.: Springer-Verlag, 1998. 341 p., prijs DM 159,-

(Springer monographs in mathematics). ISBN 1-85233-014-7

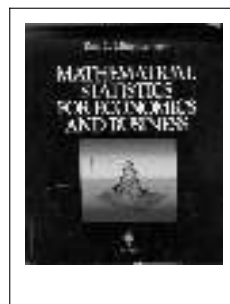
Voor een drietal topologische ruimten X, Y, B met vaste continue afbeeldingen $p : X \rightarrow B, q : Y \rightarrow B$ wil men de continue afbeeldingen $f : X \rightarrow Y$ bestuderen die compatibel zijn met p en q , d.w.z. waarvoor geldt $q \circ f = p$. De echte interesse ligt in homotopieën en homotopieklassen die de compatibiliteit respecteren. Zulks is vaak aan de orde in de theorie van de vezelbundels, waarbij p en q vezelbundels zijn. Die situatie is in zekere zin simpeler omdat alle vezels van p onderling homeomorf zijn. Dit geldt ook voor alle vezels van q . Is V de vezel van p en W de vezel van q boven hetzelfde punt van B , dan ligt het voor de hand om een zekere correspondentie te verwachten tussen 'bundelafbeeldingen' f zoals boven beschreven en afbeeldingen van V naar W .

Het onderhavige boek poogt een overzicht te geven van de huidige stand van zaken in de algemene situatie zoals beschreven in de eerste zin. Het onderwerp is sinds ongeveer 30 jaar in ontwikkeling. James is een van de scheppers ervan, en levert nog steeds bijdragen aan de literatuur erover. In 1989 publiceerde hij reeds een boek over dit onderwerp: I.M. James, **Fibrewise topology**. Cambridge University Press, 1989. Besproken in Med.Wisk.Gen.34(1991)#4, p.173-174. Daarin speelde de theorie van de fibrewise vezelbundels een ondergeschikte rol. Helaas is het boek in onze bibliotheek vermist, dus kan ik geen gedetailleerde vergelijking maken. Daarentegen gaat het grootste deel (deel II, bijna 200 pagina's) van het nu besproken boek over de fibrewise stable homotopy theory, met sterke connecties naar de

topologische K -theorie. Dit deel is opgezet als ware het een apart boek. Definities, stellingen, et cetera beginnen weer te tellen vanaf 1.1 en terugverwijzingen zijn altijd binnen dit deel, tenzij (spaarzaam) apart wordt vermeld dat het deel I betreft. Deel II is volgens de aparte introductie bedoeld als inleiding en heeft niet de pretentie om de huidige stand van zaken weer te geven. In tegenstelling met deel I wordt in deel II steeds verondersteld dat de basisruimte B een ENR (Euclidean Neighbourhood Retract) is. Daardoor zijn veel resultaten uit deel I te verfijnen, wat in de eerste paragrafen van deel II dan ook gebeurt. Mede daardoor is deel II inderdaad tamelijk onafhankelijk van deel I.

De tekst op de achterkant van het boek generaliseert een gedeelte van het voorwoord, en vermeldt: "In this monograph, fibrewise homotopy theory is developed ab initio, assuming only a basic knowledge of ordinary homotopy theory." In hun voorwoord voegen de auteurs er wijselijk aan toe: "at least in the early sections". Ik moet zeggen dat het bekijken van dit boek voor mij toch wel erg werd vergemakkelijkt omdat ik er destijds zelf enige research in gedaan heb. Overigens heette het vak toen nog *Ex-homotopy theory*. De schrijvers handhaven een tamelijk hoog niveau en zijn niet bijzonder scheutig met verduidelijkende voorbeelden. In het voorwoord staat: "The second part is concerned with the stable theory; the emphasis is on theory appropriate for geometric applications, and it is hoped that the account will be accessible to readers who may not already be experts in the classical stable theory." Uw reviewer heeft toch grote aarzeling om het boek geschikt te verklaren voor beginners in dit vak. Daarentegen zal het voor gevorderden zeker onmisbaar zijn als ze er verder onderzoek in willen doen.

P.W.H. Lemmens



R.C. Mittelhammer
Mathematical statistics for economics and business

New York, etc.: Springer-Verlag 1996.

723 p., prijs DM 78,-.

ISBN 0-387-94587-3

In the preface of the book we read: "This book is designed to provide beginning graduate students and advanced undergraduates with a rigorous and accessible foundation in the principles of probability and mathematical statistics underlying statistical inference in the fields of business and economics." More shortly, the book is meant for econometrics students and should provide the necessary background for more advanced econometric theory and methods. Indeed the book is written for students in econometrics. Most texts on mathematical statistics lack a thorough treatment of topics that are important to econometric theory. On the other hand, the text is also very suitable for students in mathematical statistics, because various classical issues in the area of mathematical statistics are treated. The book is a sort of compromise and in the opinion of the reviewer the author should be complimented with his unique approach. The book is very rich with regard to the topics that are treated and the rigorous way this is done. Since the book is also a compromise all kinds of topics are not included. Of course the author had to make his choices, otherwise the book would have been twice as large.

Chapter 1 is about elementary probability theory. The author avoids the use of measure theory. Chapter 2 treats random variables, their distributions and the representations by density functions, distribution functions, and moment generating functions. Univariate, multivariate, discrete, continuous, mixed, conditional and marginal probability distributions are all discussed in this chapter. Mathematical expectations and moments are the subject of Chapter 3. Conditional expectation and regression are also discussed. The concept of expectation is considered as a measure for the center of gravity of a distribution. It is a little bit peculiar that Jensen's inequality is treated before various elementary properties are derived. The usual (multivariate) parametric families of density functions are treated in chapter 4. In this chapter the exponential class of densities is also discussed. Asymptotic theory is presented in chapter 5. It is an extensive presentation, because it is beyond the standard subjects in similar textbooks: Berry-Esseen bound, triangular arrays, M -dependence, Liapounov's CLT, et cetera. The statistics theory starts in chapter 6 with a very short introduction to statistical inference. In order to motivate what statistics is all about this is rather late and in fact it is insufficient. The subjects are: random sampling, empirical distribution function (Glivenko-Cantelli), sample moments, transformations (why not in chapter 2?), t and F distribution (the χ^2 distribution has already been treated as a special case of the gamma distribution), random sample simulation, and order statistics (no theory about extreme values). Maybe it would have been more logical to have sampling before asymptotics. Point estimation is treated in chapter 7 and 8. Chapter 7 gives the (classical) theory and Chapter 8 presents methods to obtain estimators. Chapter 7 displays a flavour of the decision theoretic approach. Loss func-



H. Gordon
Discrete probability

Berlin, etc.: Springer-Verlag, 1997.

265p., prijs DM 68,-

(Springer monographs in mathematics).

ISBN 0-387-98227-2

Dit boek gaat in feite over het onderdeel Kansrekening zoals dat in diverse elementaire cursussen en boeken over Waarschijnlijkheidstheorie en Statistiek voorkomt. De inhoud bevat meer dan er over het algemeen en dergelijke cursussen van wordt behandeld. Zo zijn er hoofdstukken over genererende functies, random walks en Markovketens. Zij kunnen echter naar believen worden overgeslagen zonder de continuïteit te schaden. De beperking tot discrete zaken heeft geleid tot meer aandacht voor details dan gebruikelijk, niet alleen met betrekking tot de theorie maar ook ten aanzien van de historische ontwikkeling van de kansrekening. Van diverse personen is een korte biografie opgenomen. Het boek is geschreven als een elementaire cursus voor wiskunde- en informaticastudenten. Zij worden ingeleid in de kunst van het toch altijd weer moeilijke tellen door middel van vele uitgewerkte voorbeelden. De opzet van de theorie is formeel. Een goed studieboek. Er zijn maar liefst 405 opgaven met 1196 antwoorden opgenomen.

J. van der Kleij

tions are not discussed, but admissibility is defined for quadratic loss. Further topics are (minimal) sufficient statistics and complete statistics and the role played by exponential classes of distributions. Lehmann-Scheffé and Rao-Blackwell theorems are established. Of course the Cramér-Rao lower bound is discussed. It is strange that the information matrix is discussed, but it is not given this name. Chapter 8 starts with GLM and least squares. GLM stands for general linear model and is not to be confused with the more common abbreviation of generalized linear model. Subsequently the method of maximum likelihood and the method of moments are presented and a lot of relevant related theory is also discussed. It is nice that instrumental variable techniques, two- and three-stage least squares, et cetera are mentioned. One would expect now a chapter about confidence intervals, but this subject is more or less hidden in section 10.7. This is a bit peculiar, point estimation is important, but assessing uncertainties is in fact the main theme in inferential statistics. Chapter 9 and 10 are devoted to hypothesis testing. Chapter 9 provides the traditional theory: unbiasedness, admissibility, Neyman-Pearson fundamental lemma, monotone likelihood ratio, et cetera. Chapter 10 is about hypothesis-testing methods. It is nice to have a section entitled 'heuristic approach'. The methods treated are generalized likelihood ratio, Lagrange multiplier and Wald test. Section 10.6 is devoted to testing in the general linear model. Section 10.7 treats some theory about confidence intervals: relation with critical regions and pivotal quantities. Section 10.8 discusses the χ^2 goodness-of-fit test. Attention is paid to testing normality and three well-known tests are described. The use of graphical methods is not mentioned. In this section the Wald-Wolfowitz runs test is also given.

The presentation is technical. A lot of results and their proofs are given. The book is rigorous and covers a wide variety of subjects that are especially of interest to econometricians. The book has not the intention to present the basics on nonparametric statistics. (M)ANOVA is not discussed. The Bayesian approach is not treated. The philosophy of the author is that a fundamental statistical background is necessary to appreciate a text that more or less gives a survey of various statistical techniques. Students who have already studied statistics at a little higher level than elementary statistics will indeed appreciate this textbook if they like mathematics. If we look at the presentation then the author rightly claims in the preface that no prior knowledge of probability or statistics is required. This being true from a theoretical point of view, for a lot of students a background in statistics at a level somewhat higher than the elementary level will be very helpful in appreciating the text. The text is not inspiring for students who have to do real applications. One way or the other lecturers will have to provide material that can motivate and stimulate students.

A.G.M. Steerneman

E.M.J. Bertin, I. Cuculescu et al.

Unimodality of probability measures

Dordrecht, etc.: Kluwer, 1997. 251 p., prijs f210,-

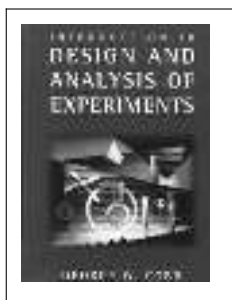
(Mathematics and its applications; 382). ISBN 0-7923-4318-2

Een groot gedeelte van dit boek was al in 1994 gereed. De tweede auteur heeft, na het overlijden van Bertin in dat jaar, dit goed geschreven boek helpen afronden. Uitgangspunt is de *stelling van Khinchin* uit 1938 die stelt dat elke *unimodale* kansmaat op $\mathbb{R}$ (met modus 0) te schrijven is als een mengsel van homogene kansmaten op intervallen van de vorm $(a, 0)$ of $(0, a)$. De Lévy-Shepp-versie van deze stelling is in termen van stochastische variabelen: X heeft een unimodale verdeling als en alleen als X dezelfde verdeling heeft als UZ met U en Z onafhankelijk en U homogeen verdeeld op $(0, 1)$. In termen van karakteristieke functies wordt de Khinchin-Fourier-versie verkregen. Khinchins stelling kan gezien worden als een niet-compacte variant van de bekende stellingen van Krein-Milman en Choquet uit de convexiteitstheorie. Na een voorbereidend eerste hoofdstuk, waarin een lijst met notaties, ontwikkelen de auteurs in hoofdstuk 2 aan de hand van Choquet-convexiteitstheorie een abstract raamwerk voor unimodaliteit; de resulterende zogeheten Khinchinruimten bevatten kansmaten die een Khinchin-achtige voorstelling hebben. Ook in deze algemene setting worden Lévy-Shepp- en Khinchin-Fourier-versies gepresenteerd. In hoofdstuk 3 wordt een speciale Khinchinruimte van kansmaten op een Hilbert-ruimte H geconstrueerd; deze kansmaten worden *beta-unimodaal* genoemd, omdat de beta-verdeling een speciale rol speelt. Wanneer $H = \mathbb{R}$, worden de verdelingen verkregen van UZ met U en Z onafhankelijk en U beta-verdeeld. Ingeval $H = \mathbb{R}^n$ wordt beta-unimodaliteit vergeleken met verschillende bekende unimodaliteitsbegrippen. Hoofdstuk 4 is geheel gewijd aan Khinchins klassieke unimodaliteit op $\mathbb{R}$; met name worden karakterisering in termen van quasi-concaviteit en concentratie-functies gegeven. Voor *discrete unimodaliteit* van kansmaten op $\mathbb{Z}$ zijn verschillende definities mogelijk; deze worden gegeven en vergeleken in hoofdstuk 5. Ook wordt verband gelegd met de Khinchinruimten van hoofdstuk 2; in het bijzonder worden (discrete) beta-unimodale verdelingen op $\mathbb{Z}$ onderzocht, dit zijn verdelingen van stochastische variabelen van de vorm $U \odot Z$ met U beta-verdeeld, Z een $\mathbb{Z}$ -waardige stochastische variabele en $\odot$ de voor de hand liggende generalisatie van de binomiale uitdunningsoperatie zoals ingevoerd door Steutel en van Harn. Hoofdstuk 6 is gewijd aan *sterk unimodale* kansmaten op $\mathbb{R}$, dit zijn (unimodale) kansmaten waarvan de (additieve) convolutie met elke andere unimodale kansmaat weer unimodaal is; hun relatie met log-concaviteit en dispersiviteit komt uitvoerig aan de orde. Ook zijn er analogons voor multiplicatieve convoluties. Tenslotte wordt in hoofdstuk 7 onder andere positiviteit van de oneven centrale momenten van een unimodale kansmaat op $\mathbb{R}$ of $\mathbb{Z}$ bewezen.

Zoals gezegd, het boek is goed geschreven. Elk hoofdstuk begint met inleidende beschouwingen en een samenvatting; bovendien bevat elke paragraaf een samenvatting van enkele regels. De hoofdstukken eindigen met een paragraaf met historische opmerkingen en aanvullende informatie. Er is, naast een goede index, een uitvoerige literatuurlijst met 233 titels. Deze zijn alfabetisch gerangschikt overeenkomstig de gebruikte afkortingen; dit heeft soms tot gevolg dat artikelen van eenzelfde (eerste) auteur niet bij elkaar staan. Waarom de lijst met notaties achterin het boek

niet opgenomen is in de lijst van hoofdstuk 1 (of omgekeerd), is mij niet duidelijk. Het (wellicht niet te vermijden) overvloedige gebruik van notaties voor allerlei klassen van maten, functies, et cetera maakt het boek af en toe wel moeilijk leesbaar. Dit gebruik is ook niet altijd zorgvuldig; zo wordt de notatie S voor de verzameling van sterk unimodale kansmaten in een voorbeeld in hoofdstuk 2 ingevoerd en zonder nadere toelichting in hoofdstuk 6 gebruikt. Niettemin is het boek zeker aan te bevelen, vooral aan hen die geïnteresseerd zijn in de gemeenschappelijke aspecten van de verschillende unimodaliteitsbegrippen. Voor een eerste oriëntatie op het gebied van unimodaliteit op $\mathbb{R}^n$ en $\mathbb{Z}^n$ is het ook door de auteurs genoemde boek van Dharmadhikari en Joag-dev (*Unimodality, convexity, and applications*) wellicht meer geschikt. Beperking tot kansmaten op $\mathbb{R}^n$ en $\mathbb{Z}^n$ zou ook het onderhavige boek toegankelijker gemaakt hebben (en zou behandeling van de meeste toepassingen in hoofdstuk 3 tot en met 7 niet onmogelijk maken). Anderzijds geeft de gevolgde abstracte opzet misschien meer aanleiding tot nieuw onderzoek en nieuwe toepassingen.

K. van Harn



G.W. Cobb

Introduction to design and analysis of experiments

New York: Springer-Verlag, 1998.

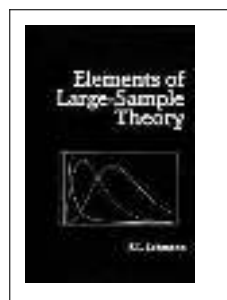
795 p., prijs DM 114,-.

ISBN 0-387-94607-1

Dit boek biedt een onconventionele benadering van de theorie van proefopzetten. Het is bedoeld voor studenten die nog geen statistische achtergrond hebben en voor het eerst met statistiek kennis maken in het kader van het opzetten van experimenten. De basisstatistiek komt aan bod in de context van het opzetten van deze experimenten en in de context van het analyseren van de resultaten van experimenten. Een opmerkelijke en moeilijke keuze. Zonder dat de student enige kennis heeft van betrouwbaarheidsintervallen of toetsen van hypothesen wordt begonnen met de principes van het ontwerpen van een proefopzet. Dat heeft natuurlijk wel aantrekkelijke aspecten. Het is bij zo'n aanpak mogelijk helemaal bij het begin te starten. Het boek begint dan ook met een voorbeeld van een wetenschapper die onderzoek wil gaan doen naar de omstandigheden die dieren ertoe bewegen om in winterslaap te gaan. De lezer wordt aan de hand meegenomen bij de beslissingen die de wetenschapper moet nemen om het onderzoek te doen. Op een intuïtieve manier wordt uitgelegd welke beslissingen er genomen moeten worden, welke veronderstellingen er gemaakt worden en welke dingen een rol kunnen spelen. Voorbeelden hangen er hier niet los bij, maar vormen de leidraad. Een ander groot pluspunt is de zeer heldere manier waarop de basisprincipes van proefopzetten worden uitgelegd. Deze basisprincipes krijgen veel aandacht en er wordt veel moeite gedaan om (weer aan de hand van voorbeelden) uit te leggen waarom die principes wezenlijk zijn. Enkele voorbeelden daarvan zijn: uitleg van potentiële variatiebronnen (gewenst en ongewenst), noodzaak van randomisatie, blokvorming. Wat dat betreft kan ik het boek zeker aanraden.

Echter, en dat is de keerzijde van de medaille, op een gegeven moment houdt de intuïtie op. Sommige dingen kunnen nu niet exact worden uitgelegd. Over de foutenstructuur wordt opgemerkt dat hij 'chance-like' is. De standaarddeviatie wordt gedefinieerd als de 'typical size' van de fout. Er is een paragraaf met het formele model (overigens optional) zoals de meesten van de lezers dat zullen kennen. De formele definitie voor de foutterm is: "we assume the error terms behave like independent draws from the same box of numbered tickets (same standard deviation), with the average of box equal to zero, and that a dot graph for the tickets follows a normal curve". Ik begin dan toch wel de formele wiskundige benadering met behulp van kansrekening te missen. Als het toetsen voor het eerst wordt geïntroduceerd, gebeurt dat aan de hand van het voorbeeld van een rechtszaak. Op zich een mooie analogie, die ik ook vaak in mijn onderwijs gebruik. Echter, dan wordt gezegd: "the jury takes the form of a table of critical values, created by Fisher, that will tell us how to judge the F-ratio". Ook de latere wat preciezere definitie blijft in de lucht hangen. Een betrouwbaarheidsinterval op grond van de t -verdeling wordt als volgt ingevoerd: "Instead of $\pm (SE \times 2)$ for the interval, you use $\pm (SE \times t\text{-value from a table})$ ". Dit alles wordt mij teveel een deus ex machina. Samengevat: de principiële keuze van de schrijver heeft gemaakt dat de basisprincipes van proefopzetten zeer helder worden uitgelegd en wat dat betreft zal ik het boek zeker nog eens openslaan om na te lezen hoe bepaalde principes kunnen worden uitgelegd. Ik mis op sommige plaatsen de wiskundige en kanstheoretische onderbouwing. Op een gegeven moment kan je nu eenmaal niet zonder. Bovendien denk ik dat in de meeste curricula men toch wel eerst iets van kansrekening en statistiek gehad heeft. Waarom zou je je dan in zoveel bochten wringen?

E.E.M. van Berkum



E.L. Lehmann

Elements of large-sample theory

New York: Springer-Verlag, 1999.

631p., prijs DM 159,-

(Springer texts in statistics).

ISBN 0-387-98595-6

Velen van ons zijn vertrouwd en groot gebracht met de boeken van E.L. Lehmann. Deze zijn als regel zeer doorwrocht en beschrijven met een grote wiskundige diepgang de belangrijkste statistische concepten. De vraag dringt zich op wat Lehmann nog te publiceren zou hebben. Het antwoord daarop is zijn nieuwe boek, *Elements of Large-Sample Theory*. In dit boek slaagt Lehmann erin om veel ideeën en concepten uit zijn voorgaande boeken samen te vatten en overzichtelijk te presenteren op een meer toegepast niveau. Veel stellingen worden gepresenteerd en besproken, maar voor een bewijs wordt verwezen naar achterliggende, als regel goed toegankelijke literatuur. Er zijn zeven hoofdstukken. Na twee inleidende hoofdstukken 'Mathematical background' en 'convergence in probability in law', behandelen de volgende twee hoofdstukken 'The performance of statistical tests' en 'Estimation'. Deze worden gevolgd door hoofdstuk 5 met 'Multivariate extensions', en hoofdstukken 6 en 7 die gaan over

'Nonparametric estimation' en 'Efficient estimators and tests'.

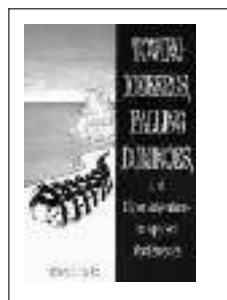
Het lezen van dit boek kan geen grote problemen met zich meebrengen, hoewel het wiskundige niveau nog steeds redelijk hoog is. Maar het onderwerp is natuurlijk ook van dien aard, dat een niet-wiskundige behandeling in feite onmogelijk is. De referenties zijn steeds zodanig dat zonder veel problemen de achterliggende bewijzen en redeneringen kunnen worden opgezocht en zo nodig worden gevolgd. Door op een dergelijke manier selectief te zijn, heeft het boek als belangrijkste voordeel dat een groot aantal onderwerpen nu tezamen komt in één enkele band, waar tot op heden tenminste drie boeken voor nodig waren: het toetsen van hypothesen, het maken van schattingen en verdelingsvrije statistiek. Al deze onderwerpen worden vanuit een enkel perspectief behandeld, wat het boek een grote mate van uniformiteit geeft. Bovendien is het boek geschreven door een van de grootste statistici van onze tijd, zodat we met alle vertrouwen het boek iedere keer opnieuw kunnen raadplegen als een standaardwerk. En dit bijna encyclopedische karakter maakt het boek uniek. Het bevat daarnaast een zeer groot aantal opgaven en uitbreidingen, zodat er meer dan voldoende materiaal is om verder te komen.

De enige beperking van het boek in mijn ogen is het betrekkelijk geringe aantal uitgewerkte voorbeelden, terwijl het ontbreken van bewijzen af en toe ook wel eens storend werkt, met name om de redeneringen te kunnen blijven volgen. Maar gezien alle voordelen is dat uiteraard van secundair belang. Wellicht ook kan de uitgever een volgende druk van een wat minder schreeuwende gifgroene omslag voorzien. Bij elkaar geeft het boek een prima overzicht van de wiskundige statistiek. Het presenteert een grote rijkdom aan wiskundige concepten die het vakgebied zo uniek gemaakt hebben. Het lijdt geen twijfel dat het boek snel een standaardwerk zal zijn en dat het keer op keer gebruikt zal worden om details te checken, de juiste toets te selecteren, de toepasbaarheid van toetsen na te gaan en de juiste toetsingsprocedures vast te stellen.

A. Stein

plementation in an object oriented, procedural language. The rest of the book documents the library.

W.A. van der Meiden



R.B. Banks

**Towing icebergs, falling dominoes
and other adventures in applied mathematics**

Princeton: Princeton University Press, 1998.

328p., prijs \$ 29,95.

ISBN 0-691-05948-9

Dit vermakelijke boek behandelt een aantal toepassingen van de wiskunde. De drijfveer van het boek vormen de toepassingen, en de benodigde wiskunde wordt erbij gehaald en uitgelegd. Niet alle details komen aan het bod en geregeld wordt er verwezen naar andere publicaties die het betreffende onderwerp verder uitdiepen. Als voorbeeld wordt bekeken of het mogelijk is om een ijsberg van de zuidpool naar de baai van San Francisco te slepen om die daar gebruikt te worden voor drinkwater. In dat geval wordt de kortste route bepaald, de grootte van de ijsberg die kan worden meegenomen, de snelheid die moet worden aangehouden om zo weinig mogelijk water te verliezen aan smelten door zowel de lucht en watertemperatuur als de wrijving, wanneer er moet worden afgeremd, wat de meest economische manier is om het ijs te smelten. In dit geheel komen zaken aan de orde als boldriehoeksafmetingen, statistiek en differentiaalvergelijkingen, technieken die ook in de andere hoofdstukken een belangrijke rol spelen. De andere toepassingen liggen in de economie (groei modellen), het vallen van regendruppels en meteorieten, het idee achter allerlei soorten gebouwen en draagbogen, en sport (hoe moet je een 'eerlijk' landenklassement van de olympische spelen opstellen, hoe zorg je door middel van de selectie van rekruten dat niet altijd dezelfde teams winnen, aërodynamica van geworpen en geslagen ballen, skispringen en snelheid van hardlopers).

Het is jammer dat er enige slordigheden in het boek voorkomen. Zo wordt bijvoorbeeld in het eerste hoofdstuk ingegaan op fysische dimensies. Daar worden niet alle gebruikte dimensies ingevoerd (wat is een eenheid van viscositeit?) en de term voor wrijvingskracht heeft een verkeerde dimensie. In veel gevallen worden constanten gekozen door een kleinste-kwadratentechniek naar echte meetgegevens. Er wordt niet altijd duidelijk gemaakt waarom bepaalde termen verwaarloosd kunnen worden, en waarom de kleinste-kwadratenmethode gebruikt wordt op de geselecteerde assen (vaak logaritmisch). Al met al is het een inspirerend boek voor mensen die voorbeelden zoeken voor het gebruik van wiskunde. Een aantal voorbeelden is interessant om ook leken en scholieren mee enthousiast te maken.

F. van der Linden



W.H. Steeb, K.S. Tan

**Symbolic C++
An introduction to computer algebra
using object-oriented programming**

Berlin, etc.: Springer-Verlag, 1998.

598p., prijs DM 98,-.

ISBN 981-3083-55-7

This book describes the features of a library for computer algebra, written in C++. The library can be used in any C++ program. Source files are available on floppy disk. Inheritance and late binding are used to implement the classes that involve expression trees, C++ templates and operator overloading are used for those representing variables and containers. Chapters on computer algebra, mathematics, object orientation and C++ only provide results and examples, no introduction to theory or underlying ideas. These chapters may make the book selfcontained for those who are interested only in applying the library to get the results they need. However, they do not replace introductory textbooks on these topics. For students in mathematics of computer algebra, the book may complement the theory, by showing an im-



S. Albeverio, J. Jost et al
A Mathematical introduction to string theory. Variational problems, geometric and probabilistic methods
 Cambridge: Cambridge University Press, 1997,
 prijs £22.95 (London Mathematical Society
 lecture notes series; 225). ISBN 0-521-55610-4

Dit boek brengt een combinatie van probabilistische en meetkundige methoden bij de behandeling van bosonische snaren. Het meetkundige startpunt is het Plateau-probleem (minimaaloppervlakken), het probabilistische, de (Euclidische) padintegraal, die voor stringtheorie vooral onder impuls van A. Polyakov werd ontwikkeld. Hierbij wordt gemikt op een andere dan de gebruikelijke 'fysische' behandeling. Een samenvatting hiervan (als inleiding en motivatie) neemt drie bladzijden in beslag. Zij wordt zeer uitdrukkelijk bestempeld als heuristisch. Op pagina 3 komt het woordje 'heuristic' liefst negenmaal voor; de lapsus in de omschrijving van heuristic "... for objects which are (or are not yet) defined in rigorous mathematical terms" is dan ook verbazend: dit moet uiteraard zijn: "...objects which are not (or are not yet)..." In wat volgt zal deze heuristische behandeling vervangen worden door een mathematisch veel preciezere. Hierbij putten de auteurs zeer uitgebreid uit eigen werk in verband met het preciseren van het begrip padintegraal, werk dat reeds aanving in de eerste helft van de jaren zeventig, maar dat sinds de helft van de jaren tachtig dus ook op snaartheorie werd toegepast.

In ongeveer 85 bladzijden wordt het wiskundige apparaat samengebracht. Dit begint bij het probleem van Plateau, maar gaat onmiddellijk door met de topologische en metrische structuur van ruimten van afbeeldingen. Deze twee komen samen in harmonische afbeeldingen en Cauchy-Riemann-operatoren, maar dan is er een plotse verandering van decor: de zeta-functiemethode voor determinanten van operatoren wordt ingevoerd, de Faddeev-Popov-procedure voor ijktheorieën, en determinantbundels met hun Chern-klassen. Hierna weer een verschuiving van de aandacht, nu naar Gauss-maten voor fluctuerende velden, en functionele methoden voor de kwantisering, met speciale aandacht voor het Liouville-veld. Dit eerste deel wordt afgesloten met formules voor het asymptotisch gedrag van determinanten geregulariseerd met warmtekernels. In ongeveer 35 bladzijden wordt dit alles toegepast op de Polyakov string. Eerst even de kwantisatie met functionele integralen invoeren, dan via enkele korte secties naar de Polyakov maat, zowel voor de kritische als voor de niet-kritische snaar. Een paar bladzijden over correlatiefuncties besluiten de tekst. Er zijn nog zeven bladzijden verwijzingen naar de literatuur, en een korte index (2 bladzijden).

De nadruk ligt onomwonden op de wiskundige uiteenzetting, niet op de fysische inhoud. Dit blijkt uit de gekozen volgorde (zie boven), en uit de stijl van de presentatie. Voor de stijl respecteer ik de keuze van de auteurs, maar voor de volgorde vind ik die niet gelukkig: wie niet zeer goed op de hoogte is van het fysische kader, én van het schema dat door fysici gehanteerd wordt voor kwantum-snaartheorie, raakt al snel het spoor kwijt, en naar ik vrees ook de motivatie om zich door de gevarieerde verzameling van wiskundige hoofdstukken heen te worstelen, om pas na tweederde van de tekst het fysische onderwerp aan te snijden.

Een geïntegreerde aanpak zou naar mijn smaak de motivatie van de student meer steun hebben gegeven. Ik kan dit boek niet aanbevelen als eerste kennismaking met snaartheorie, ook niet voor wiskundigen: men dient eerst een meer fysische behandeling te lezen. Voor wie daarna op zijn honger blijft zitten wat betreft wiskundige precisering is dit boek echter uitstekend. Het behandelt weliswaar slechts één lijn bij de kwantisering (padintegralen, geen cohomologische (BRST) noch operatormethoden), maar dat is dan wel de belangrijkste in de moderne praktijk. Het komt ook niet toe aan snaren met fermionische vrijheidsgraden, maar gezien de aandacht voor wiskundig detail kon dit moeilijk anders binnen het bestek van nog geen 150 bladzijden. Kortom, een goede aanvulling bij de 'fysische' literatuur van snaartheorie, voor te behouden voor wie geïnteresseerd is in de gedetailleerde wiskundige precisering van dit populaire model.

W. Troost

E. Fishbach, C.L. Talmadge
The search for non-Newtonian gravity

Springer-Verlag, 1998, 305 p., prijs DM 98.-
 ISBN 0-387-98490-9

Dit boek gaat over een boeiende episode in de natuurkunde. In 1986 verscheen een artikel, waarvan Fishbach en Talmadge co-auteurs waren, waarin oude experimentele gegevens van de baron Von Eötvös opnieuw geanalyseerd werden. Deze baron deed in het begin van deze eeuw uitgebreid experimenteel onderzoek naar een voorname eigenschap van de zwaartekrachtstheorie van Newton: de eigenschap dat alle lichamen elkaar aantrekken met een kracht die afhangt van de massa's van de lichamen, maar niet van hun (chemische) samenstelling. De conclusies van de baron steunden de theorie van Newton. Door heranalyse van dit experiment vonden Fishbach en anderen aanwijzingen voor een weliswaar kleine, maar toch onmiskenbare afwijking van de theorie van Newton. Dit bracht vanzelfsprekend de nodige commotie teweeg in de wereld der natuurkundigen. Het verschijnsel dat aan de vermeende afwijking ten grondslag zou liggen werd bekend als de 'vijfde kracht'. Er volgde een korte periode met veel publiciteit rond de vijfde kracht. Deze periode wordt vanuit wetenschapshistorisch oogpunt beschreven in het voortreffelijke boek *The rise and fall of the fifth force*, van A. Franklin (AIP, New York 1993).

Fishbach en Talmadge beschrijven de ontwikkelingen in dit gebied van 1986 tot heden, nu vanuit natuurkundig perspectief. Het zal duidelijk zijn dat het eerder genoemde artikel uit 1986 een uitdaging voor de experimentele natuurkundigen vormde. Immers, men zou verwachten dat het Eötvös-experiment met de huidige technieken met grotere nauwkeurigheid uitgevoerd zou kunnen worden. De verdere uitwerking van de vijfde kracht leek een kwestie van tijd. Dit bleek allemaal aanzienlijk minder eenvoudig. Laboratoriumexperimenten over de zwaartekracht waren en zijn nog steeds buitengewoon moeilijk, en eensluidende conclusies zijn over dit onderwerp nog niet getrokken. De vijfde kracht is experimenteel niet bevestigd — integendeel, de recente experimenten zijn volledig in overeenstemming met de theorie van Newton. Mede om die reden plaatsen Fishbach en Talmadge hun boek in een wat ruimere context. Er zijn andere afwijkingen mogelijk van Newtons gravitatie-theorie dan alleen die welke het gevolg zijn van de samenstelling van de lichamen die aan zwaar-

tekracht onderhevig zijn. Zo zou ook de afhankelijkheid van de kracht van de afstand tussen twee lichamen anders kunnen zijn dan Newton voorschrijft. Ook metingen van de gravitatieconstante van Newton worden besproken. Daarnaast wordt uitgebreid toegelicht in hoeverre een vijfde kracht geplaatst zou kunnen worden in het beeld van de elementaire-deeltjesfysica als geheel. Ook gravitatie van anti-materie wordt besproken. De algemene relativiteitstheorie van Einstein komt niet aan de orde. Deze theorie voorspelt afwijkingen van de zwaartekrachtswet van Newton die in extreme omstandigheden — sterke zwaartekrachtsvelden, grote snelheden — van belang zijn, en veel van deze voorspellingen zijn inmiddels bevestigd. Bij geofysische metingen en bij experimenten in het laboratorium zijn de omstandigheden echter van dien aard dat afwijkingen ten gevolge van de relativiteitstheorie te verwaarlozen zijn.

Het boek geeft een mooi overzicht van recente experimenten met de zwaartekracht. Het is nuttig en leerzaam voor natuurkundigen die een overzicht over dit gebied van de experimentele fysica willen hebben. Het plezier bij het lezen van dit boek zit, wat mij betreft, in de gedetailleerde beschrijving van de experimenten, in samenhang met hun theoretische achtergrond. Er zijn nuttige appendices over de meting van Newtons gravitatieconstante, over de precieze interactie tussen de zwaartekracht en een torsie-balans, essentieel om de experimenten naar de vijfde kracht te kunnen begrijpen, en over de precieze vorm van het zwaartekrachtsveld van de aarde, nodig voor de geofysische zwaartekrachtmetingen.

Het boek is voor iemand met een solide achtergrond in de natuurkunde goed leesbaar. Alleen het hoofdstuk over effecten in de elementaire deeltjes fysica, in het bijzonder over neutrale K-deeltjes, vereist gespecialiseerde kennis. Voor belangstellenden die zich tot de geschiedkundige aspecten van deze episode willen beperken zou ik het eerder genoemde boek van Franklin willen aanraden. De conclusie van het boek is, dat er op dit moment geen 'compelling evidence' voor een vijfde kracht is gevonden. Maar dit hoofdstuk van de natuurkunde is geenszins afgesloten. Nieuwe experimenten, ook in satellieten, zijn in voorbereiding. Wordt vervolgd.

M. de Roo

J. Hofbauer, K. Sigmund

Evolutionary games and population dynamics

Cambridge: Cambridge University Press, 1998.

323 p., prijs £16,95 (pb). ISBN 0-521-62570-X

This book replaces the book *The theory of evolution and dynamical systems* by the same authors and publisher, published in 1988. The 1988 book has been praised rightfully as an example of how to write a textbook on a subject in biomathematics that is of interest for students both in biology and mathematics. It dealt with an exciting (relatively) new area where game theory, evolution and ecology were brought together. The book has been reprinted a number of times since its publication and was a pioneer in the field. In the last ten years a lot of progress has been made notably in evolutionary game theory and dynamical aspects of games. Also, the intersection between game theory and population dynamics, not yet very tight in the pioneering book, has become a much more coherent whole (the number of people mentioned in the preface has quadrupled). These aspects together justify that a

new book was called for, rather than a new edition of the existing volume. Almost all the biological introductions in the 1988 book have been deleted to make room for new mathematical developments.

Many sections from the older book have been included somewhere in the new book, but a clearer view of the subject and the new material added have caused almost everything to be in a different place than before. The result is that indeed the book is more of a whole than the previous one, but unfortunately the result is also that the book has shifted substantially from a more biological to a more mathematical audience. The mathematical level has increased throughout. While this certainly does justice to the developments in the last decade, it is a pity since the suitability as a textbook for biology students has decreased. However, as textbook for mathematics students on applications of game theory and dynamical systems in an exciting biological setting, the book is as excellently written as before. In the meantime, also the mathematical skills of one of the authors seem to have increased. In the 1988 book, some exercises were quite hard "at least for one of the authors". This statement has been excluded from the corresponding paragraph in the new preface.

J.A.P. Heesterbeek

A. Verweij, M. Kindt

Perspectief, hoe moet je dat zien?

Utrecht: Epsilon Uitgaven, 1999. 52 p., prijs f14,75

(Zebra Reeks; 2). ISBN 90-5041-052-9

De uitgave van de Zebra reeks is geïnspireerd door de introductie van de tweede fase in de bovenbouw van het voortgezet onderwijs. In de nieuwe wiskundeprogramma's van het vwo is een klein gedeelte bestemd voor keuzeonderwerpen. Toetsing vindt plaats binnen het schoolexamen en mag uiteenlopen van mondeling verslag tot schriftelijke presentatie. Epsilon Uitgaven heeft in samenwerking met de Nederlandse vereniging voor wiskundeleraars het initiatief genomen om een reeks boekjes uit te geven die in dit onderdeel van de wiskunde gebruikt kunnen worden. Er wordt naar gestreefd om de komende jaren vijf titels per jaar te laten verschijnen. De eerste vijf titels zijn: *Kattnaids en statistiek*, *Perspectief*, *Hoe spannend is herhalen* (over iteratie en chaos), *De gulden snede* en *Schatten*. *Perspectief* is geschreven door auteurs van de TUD en de UU met ervaring op het gebied van middelbare-schoolwiskunde. Het boekje beschrijft de analyse van perspectiefafbeeldingen met behulp van de wiskunde en weet zo een aantrekkelijke brug te slaan tussen redelijk pittige wiskunde en de kunst van schilderen en tekenen. De foto's en afbeeldingen vormen een samenhangend geheel met de tekst. Het goede woordgebruik en de verzorgde indruk geven de beoogde doelgroep een bredere kijk op de maatschappelijke relevantie van de wiskunde. De meetkunde is in het nieuwe vwo-examenprogramma drastisch veranderd en hier wordt aansluitend een duidelijke verdieping van de leerstof aangeboden. De uitgave is ook bruikbaar als basis bij een ander nieuw onderdeel van de tweede fase: een verplichte praktische opdracht. De bescheiden prijs is bij een abonnement nog lager dan nu al het geval is. Kortom, een mooi en voorlopig geslaagd initiatief.

C.P. Smit

F. Göbel

Schubertlaan 28, 7522 JS Enschede
a.gobel@wxs.nl

Recreational mathematics

The Dutch Cubist Club



For some people, mathematics is a profession. For others, mathematics is a hobby. In a series of articles the Nieuw Archief will pay attention to Dutch activities which focus on the recreational aspects of mathematics. In this article Frits Göbel introduces the Dutch 'Kubus Klub'. Among the members of this club are Donald Knuth and Erno Rubik.

The Dutch Cubist Club was founded in 1981 by Anneke Treep and Just van Rossum under the name 'Nederlandse Kubus Club'. It started as a club of enthusiastic solvers of Rubik's Cube. In those years, the number of members surpassed 100. All over the world, clubs of this type were formed. When the cube-craze was over, most of these clubs ceased to exist. The NKC, too, lost many members. At some point it was a club of 13 people only. Later, the scope of the NKC was extended to mechanical puzzles in general. This step had an enormous impact. At present the club has about 400 members in 35 countries.

CFF

The club issues a magazine, Cubism For Fun, which appears three times a year. In the first few issues the language is Dutch; from num-

ber 14 on, it is English. Recently CFF 50 appeared, a special issue in 6 parts.

Kubusdag

Each year the 'Kubusdag' (Cube Day) is held, usually in October. The location varies. Here members meet, lectures on various (puzzle)subjects are given, and there is the possibility to exchange and buy puzzles. The club also has an extensive library of puzzle books



and magazines, which can be borrowed by the members.

Most of the members are *collectors* of puzzles. Certain others are better described as *inventors*, *designers*, or *puzzle-makers*. And there are a few (semi-)professionals who are interested in *selling* puzzles. Needless to say, many members combine several of the above activities.

Mathematics

Since quite a few members have a mathematical background, it will not come as a surprise that some articles in CFF have a mathematical flavour. In general, such articles give an analysis of a certain type of puzzle. Examples of puzzles that lend themselves to mathematical analysis are Rubik's Cube (and other rotational puzzles, like the Teufelstonne and the Hungarian Rings), Chinese Rings (and other binary puzzles like Spin Out and the wonderful Hexadecimal Puzzle), mazes, sliding block puzzles, and packing problems. Most of these puzzles have been treated so far in issues of CFF.

Occasionally, a mathematical problem is formulated in CFF that has no relation to a mechanical puzzle. As an example we mention the problem of the opaque cube: within a unit cube, define surfaces of minimum total area such that each line that passes through the cube will cut at least one of these surfaces.

Further information

Further information on the NKC may be obtained from the Secretary: Geert Hellings, Schepenenlaan 36, 6114 MS Susteren, Netherlands. Telephone: 0(031)46-4495688. ☎

