

Inhoud | Contents

Onderzoek | Research

138 Het Bas/Serra-oppervlak

Jaap Top

Onderzoek | Research

140 The arithmetic-geometric mean: A pearl of Gauss

Piet Van Mieghem

Onderwijs | Education

153 Bespreking examen vwo wiskunde B 2023: In 1983 liep het anders af dan in 2023

Wim Caspers

Evenement | Event

157 NWD: De geofractor komt om de hoek

Rob van Oord

Interview | Interview

161 Teun Koetsier: Wiskunde, filosofie en werktuigbouw

Redactie NAW

In Memoriam | Obituary

167 Boele Braaksma: Een gewaardeerd hoogleraar in de klassieke analyse

Henk Broer, Henk de Snoo

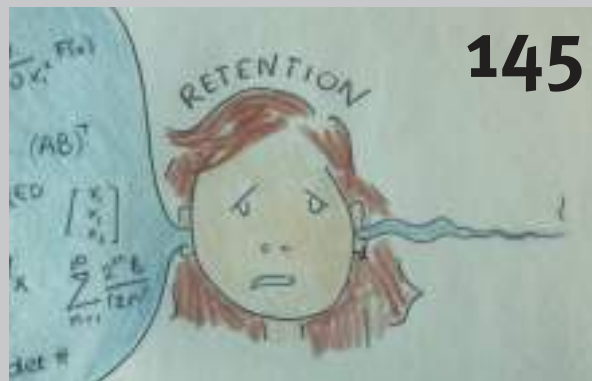
In Memoriam | Obituary

177 Jacob Murre: A tribute to an expert in algebraic geometry

Chris Peters



Een verslag van Rob van Oord van de 29ste Nationale Wiskunde Dagen die in april plaatsvonden.



In de nieuwe column 'Better than blackboard' schrijft Nelly Litvak over wiskundeonderwijs aan de universiteit.

131 Redactioneel ChatGPT / Robbert Fokkink

132 Agenda Edward Berengoltz

134 Nieuws Edward Berengoltz

137 Nieuws van het KWG Young KWG Board

Column | Better than blackboard

145 We shouldn't give classroom lectures anymore

Nelly Litvak

Column | New Impulse

150 A journey in academia: Exploring mathematical finance across continents

Fenghui Yu

165 Proof by example: Assia Mahboubi

Francesca Arici, Diletta Martinelli

Column | Piet takes his chance

172 Convex hulls

Piet Groeneboom

187 In de verdediging: Chris Kooloos

Nicolaos Starreveld

190 Problemen Onno Berrevoets, Daan van Gent

Colofon

Het Nieuw Archief voor Wiskunde is een uitgave van het Koninklijk Wiskundig Genootschap en verschijnt vier maal per jaar. Het tijdschrift richt zich op eenieder die zich beroepsmatig met wiskunde bezighoudt, als academisch of industrieel onderzoeker, student, leraar, journalist of beleidsmaker. Het stelt zich ten doel te berichten over ontwikkelingen in de wiskunde in het algemeen en in de Nederlandse wiskunde in het bijzonder.

ISSN 0028-9825

Adres

Nieuw Archief voor Wiskunde
Centrum Wiskunde & Informatica
Postbus 94079, 1090 GB Amsterdam
tel. 020-5924288
redactie@nieuwarchief.nl
www.nieuwarchief.nl

Hoofredactie

Raf Bocklandt (r.r.j.bocklandt@uva.nl)
Robbert Fokkink (r.j.fokkink@tudelft.nl)

Eindredactie/Bladmanager

Fred Drissen (fred@nieuwarchief.nl)

Redactie

Francesca Arici (UL), Edward Berengoltz (UvA), Viktor Blåsjö (UU), Hans Cuypers (TU/e), Teun Koetsier (VU), Diletta Martinelli (UvA), Daan Mulder, Nicolaos Starreveld (UvA), Hans Sterk (TU/e), Mark Timmer (UT)

Problemenrubriek (problems@nieuwarchief.nl)

Onno Berrevoets en Daan van Gent

Bureauredactie

Anne van Grinsven

Illustraties

Ryu Tajiri

Vormgeving

Susanne Laws (omslag, begeleiding binnenwerk)
Kitty Molenaar (ontwerp)

Druk

Veldhuis Media

Advertenties

advertenties@nieuwarchief.nl

Koninklijk Wiskundig Genootschap

www.wiskgenoot.nl

Platform Wiskunde Nederland

www.platformwiskunde.nl

European Mathematical Society

www.euro-math-soc.eu

International Mathematical Union

www.mathunion.org

Koninklijk Wiskundig Genootschap

Het Koninklijk Wiskundig Genootschap (KWG) is een landelijke vereniging van beoefenaars van de wiskunde. In 1778 opgericht onder de zinspreuk: 'Een onvermoeide arbeid komt alles te boven' is het 's werelds oudste nationale wiskundegenootschap. Leden ontvangen het Nieuw Archief voor Wiskunde als onderdeel van hun lidmaatschap.

Bestuur

Mathisca de Gunst (VU, voorzitter), Alef Sterk (RUG, penningmeester), Jop Briët (CWI, secretaris), Barry Koren (TU/e, vice-voorzitter), Danny Beckers (VU), Rogier Bos (UU), Charlene Kalle (UL), Michael Muger (RU).

Secretariaat

Koninklijk Wiskundig Genootschap
Centrum Wiskunde & Informatica
Postbus 94079, 1090 GB Amsterdam
wiskgenoot@wiskgenoot.nl

Ledenadministratie KWG / Abonnementen

admin@wiskgenoot.nl, tel. 020-5924193
Wijzigingen of opzegging kunt u ook doorgeven door in te loggen op www.wiskgenoot.nl.

Contributie

Tarieven per jaar (bij betaling per automatische incasso krijgt u €2,50 korting):

- gewoon lid: €97,50
- reciprociteitslid: €77,50
- gepensioneerden en werklozen: €52,50
- aio's, oio's, studenten: €42,50 (max. 4 jaar)
- lid zonder Nieuw Archief: €57,50

Studenten en pas afgestudeerden kunnen een jaar lang gratis lid worden.

Voor verzending van het Nieuw Archief naar het buitenland wordt een portotoeslag van €10 in rekening gebracht.

Instituten in Nederland en buitenland kunnen zich abonneren op het Nieuw Archief voor Wiskunde voor €105 (Nederland), €115 (Europa) of €117,50 (buiten Europa).

Members of foreign societies

Members of SIAM, the *Société Mathématique de France*, the *Gesellschaft für Angewandte Mathematik und Mechanik*, the *Deutsche Mathematiker-Vereinigung*, and of the *American, Australian, Belgian, Indian, London, Spanish, and South-African Mathematical Societies* living outside of the Netherlands pay €77,50 instead of the full membership fee of €97,50 a year. Conversely, these foreign societies, as well as the VvS+OR and the NVORWO, have reduced membership fees for KWG members. A postage charge of €10 is added for members living abroad but in Europe, and a charge of €12,50 for members living outside of Europe.

Exchange subscriptions

Koninklijk Wiskundig Genootschap Library
Centrum Wiskunde & Informatica
P.O. Box 94079, NL-1090 GB Amsterdam
KWG-exchange@cwi.nl

Informatie voor auteurs

Kopij

Kopij dient per e-mail te worden aangeboden aan kopij@nieuwarchief.nl. Voor meer informatie en auteursinstructies zie www.nieuwarchief.nl.

Volgende nummers

nummer	maand	verschijnen	deadline kopij
24(4)	december	2023	verstrekken
25(1)	maart	2024	01-11-2023
25(2)	juni	2024	01-02-2024
25(3)	september	2024	01-05-2024

Instituuts- en bedrijfsleden

De publicaties van het KWG worden mede mogelijk gemaakt door de bijdragen van de volgende instituten en bedrijven.



Centrum Wiskunde & Informatica



Universiteit van Amsterdam



Vrije Universiteit Amsterdam



Rijksuniversiteit Groningen



Universiteit Leiden



Radboud Universiteit Nijmegen



Universiteit Utrecht



Technische Universiteit Delft



Technische Universiteit Eindhoven



Universiteit Twente



Elsevier



ORTEC

Op het omslag

In het Lorentz Center vond dit voorjaar een bijeenkomst plaats met als ondertitel 'A Celebration of Bas Edixhoven's Mathematics'. Lees het artikel van Jaap Top over het Bas/Serra-oppervlak op pagina 138. De afbeelding is een impressie van Walt van Ballegooijen.

Een onthullende weerspiegeling

In deze ondoorgrondelijke tijd van technologische onstuimigheid doemt een nieuwe realiteit op: AI-gegenereerde redactionelen. Als een ware disruptie hebben geavanceerde algoritmen het vermogen verworven om teksten te scheppen die de menselijke schepping nabootsen. Maar laten we niet verblind worden door het schimmenspel van deze technologische triomf, want er zijn dieperliggende vragen die onze menselijkheid en de fundamenteën van het schrijverschap betreffen.

AI-gegenereerde redactionelen lijken op het eerste gezicht een zegen te zijn. Met ongekeerde snelheid kunnen AI-systemen grote hoeveelheden informatie verwerken en zo teksten voortbrengen die voldoen aan de eisen van onze gejaagde maatschappij. De belofte van een overvloed aan actuele en feitelijke content lijkt binnen handbereik.

Maar laten we niet vergeten dat het schrijverschap gedrenkt is in de menselijke ziel, doordrongen van ervaringen, perspectieven en emoties. AI-systemen mogen dan wellicht de oppervlakte van de tekst raken, maar ze missen de diepgang, de subtiliteiten en de unieke stem van de schrijver. De rijkdom van de menselijke creativiteit en het vermogen om de ziel van de lezer te beroeren, blijven ontoegankelijk voor de kille logica van de algoritmen.

Daarnaast kunnen we niet ontkennen dat de opkomst van AI-gegenereerde redactionelen het risico met zich meebrengt van

misleiding en manipulatie. De afhankelijkheid van AI-systemen van trainingsdata kan resulteren in een vertekend beeld van de werkelijkheid. Misinformatie en propaganda vinden hun weg naar de lezer zonder enige menselijke controle. Het gevaar van een dystopische wereld waarin algoritmen onze gedachten beïnvloeden en onze waarheidsvinding ondermijnen, is niet denkbeeldig.

We moeten waakzaam zijn, mijn vrienden. Transparantie, verantwoordelijkheid en menselijke supervisie zijn geen loze woorden, maar de heilige grondslagen waarop onze samenleving moet rusten. Laat ons de verleiding weerstaan om ons blindelings over te geven aan de verlokkingen van de technologische vooruitgang. Bewaak de waarde van de menselijke stem, de menselijke verbeelding en de zoektocht naar waarachtigheid.

In de wereld van AI-gegenereerde redactionelen schuilt een complexe spiegel. Het is aan ons om onze reflectie in die spiegel onder ogen te zien en te bepalen welke weerspiegeling van de menselijke ziel we willen omarmen.

ChatGPT, in opdracht van
Robbert Fokkink, hoofdredacteur
Delft Institute of Applied Mathematics, TU Delft

Agenda

| Upcoming Events

september 2023

4–8 september 2023

□ Mathematics of FinTech

Vijftiende editie van de European Summer School in Financial Mathematics.

plaats TU Delft

info tudelft.nl

6–7 september 2023

□ John Einmahl Workshop

Tweedaagse workshop ter gelegenheid van de afscheidslezing van John Einmahl, hoogleraar statistiek in Tilburg.

plaats Hotel Boschoord, Oisterwijk

info einmahlworkshop.nl

15 september 2023

□ Finale Nederlandse Wiskunde Olympiade

Nationale finale van de wiskundeolympiade voor middelbare scholieren.

plaats Technische Universiteit Eindhoven

info wiskundeolympiade.nl

15 september 2023

□ Special Functions and Their Applications

Symposium over speciale functies ter ere van Tom Koornwinder's tachtigste verjaardag, georganiseerd door profs. E. Koelink (RU Nijmegen) en J. Stokman (UvA).

plaats KdVI, Universiteit van Amsterdam

17 september 2023

□ Mathfest

Wiskundefeest met activiteiten, goochelshows, optredens en stand-up, het slot van de tentoonstelling Imaginary en een recordpoging aporiek betegelen.

plaats Volkssterrenwacht Beisbroek, Brugge

info platformwiskunde.be/mathfest-2023

22 september 2023

□ Wiskundetoernooi / Mathematikturnier

32ste nationale wiskundige wedstrijd voor 100 middelbareschoolteams, in samenwerking met gelijktijdige toernooien (13de edities) in Leuven en Bonn.

plaats Huygensgebouw, Radboud Universiteit

info ru.nl/over-ons/agenda/wiskundetoernooi

23 september 2023

□ Een bonte verzameling

Symposium van de Werkgroep Geschiedenis van de NVvW, met lezingen van onder anderen Hendrik Lenstra.

plaats Domstad, Utrecht

info nvvw.nl/werkgroep-geschiedenis

25–29 september 2023

□ Social Influence Analysis

Lorentz workshop, mede georganiseerd door Doina Bucur (UT) en Mike Preuss (UL).

plaats Lorentz Center@Snellius, Leiden

info lorentzcenter.nl

27–29 september 2023

□ Woudschoten Conference 2023

Een jaarlijkse conferentie van de Nederlands-Vlaamse Numerieke Analyse-groepen, georganiseerd door de Werkgemeenschap Scientific Computing (WSC).

plaats Woudschoten, Zeist

info wsc.project.cwi.nl/events

29 september 2023

□ Onderwijs meets onderzoek

Het thema van deze editie van het symposium is 'Curriculumvernieuwing'. Georganiseerd door NVvW, Freudenthal Instituut en SLO.

plaats Domstad, Utrecht

info nvvw.nl

oktober 2023

7–8 oktober 2023

□ Nationaal Weekend der Wetenschap

Themaweekend voor een breed publiek. Tijdens het weekend kun je overal in Nederland een kijkje nemen achter de schermen van de wetenschap en technologie.

plaats diverse instituten door het hele land

info weekendvandewetenschap.nl

9–13 oktober 2023

□ Autumn School – Scientific Machine Learning and Dynamical Systems

Onderdeel van het CWI Research Semester Programma, voor promovendi, postdocs en andere junior onderzoekers.

plaats Amsterdam Science Park

info cwi.nl

Suggesties voor deze agenda zijn welkom.

Redacteur: Edward Berengoltz

agenda@nieuwarchief.nl

10 oktober 2023

Landelijk Congres 'Actualisatie Kerndoelen'
Congres over bruikbaarheid der nieuwe kerndoelen in de schoolcurricula rekenen en wiskunde in het basis- en voortgezet onderwijs.
plaats De Woonindustrie, Nieuwegein
info actualisatiekerndoelen.nl/rekenenwiskunde

12–13 oktober 2023

Annual Meeting Dutch Inverse Problems Community
Derde editie, met onder andere een plenaire lezing van Bas van der Linden (TU/e).
plaats Rijksuniversiteit Groningen
info cw.nl

23–27 oktober 2023

Computing Combinatorial Dynamics in High Dimensional Biological Networks
Lorentz workshop, mede georganiseerd door Shane Kepley en Bob Rink (VU).
plaats Lorentz Center@Snellius, Leiden
info lorentzcenter.nl

november 2023

3 november 2023

Integrating Machine Learning in Statistics Education
Bijeenkomst van de Vereniging voor Statistiek en Operations Research over AI in het statistiek-onderwijs.
plaats Universiteit Groningen
info vvsor.nl/education

3 november 2023 – 24 maart 2024

Net als Escher
Tentoonstelling van moderne kunstenaars die Escherse thema's uitbeelden in het kader van het Escherjaar.
plaats Escher in Het Paleis, Den Haag
info escherinhetpaleis.nl

4 november 2023

Jaarvergadering NVvW
Jaarlijkse vergadering en studiedag van de Nederlandse Vereniging van Wiskundeleraren.
plaats Ichthus College, Veenendaal
info nvvw.nl/jaarvergadering

6–10 november 2023

Integrating Acquisition and AI in Tomography
Lorentz workshop, mede georganiseerd door Tristan van Leeuwen (CWI).
plaats Lorentz Center@Oort, Leiden
info lorentzcenter.nl

10 november 2023

Prijsuitreiking Nederlandse Wiskunde Olympiade
De prijsuitreiking van de finale van de Nederlandse Wiskunde Olympiade.
plaats Technische Universiteit Eindhoven
info wiskundeolympiade.nl

10 november 2023

Voorronde Wiskunde A-lympiade
Voorronde van de jaarlijkse competitie voor leerlingen uit de bovenbouw havo/vwo met wiskunde A in hun pakket.
plaats eigen school
info wiskundeintams.sites.uu.nl

10 november 2023

Wiskunde B-dag
Een competitie voor leerlingen uit de bovenbouw havo/vwo die wiskunde B in hun pakket hebben. Leerlingen werken in kleine teams de hele dag aan een wiskundig probleem.
plaats eigen school
info wiskundeintams.sites.uu.nl

18 november 2023

Ars et Mathesis-dag
Jaarlijks symposium dat kunst en wiskunde combineert. Tevens vindt de prijsuitreiking van de lustrumprijsvraag plaats. De stichting Ars et Mathesis viert dit jaar haar 40-jarig jubileum.
plaats Kamerlingh Onnes Gebouw, Leiden
info arsetmathesis.nl/ars-et-mathesis-dag

27 november – 1 december 2023

Fractional Differential Equations, Applications and Complex Networks
Workshop over gebroken differentiaaloperatoren en hun toepassingen in biologische systemen.
plaats Lorentz Center@Snellius, Leiden
info lorentzcenter.nl

28–30 november 2023

The Analysis and Optimisation of Warehouse Performance
Workshop over transportoptimalisatie in het kader van onder andere wachtrijtheorie en kunstmatige intelligentie.
plaats Eurandom, Eindhoven
info eurandom.nl

januari 2024

15–17 januari 2023

49th Conference on the Mathematics of Operations Research
De 49ste editie van het jaarlijkse congres van het Landelijk Netwerk Mathematische Besliskunde.
plaats Kontakt der Kontinenten, Soesterberg
info lnmb.nl/conferences

22–24 januari 2024

21st Winter School on Mathematical Finance
De 21ste editie van de jaarlijkse wintercursus binnen het domein van de financiële wiskunde.
plaats Kontakt der Kontinenten, Soesterberg
info staff.fnwi.uva.nl/a.khedher/winterschool/winterschool.html

22 januari – 2 februari 2024

Eerste ronde Nederlandse Wiskunde Olympiade 2024
De wiskundeolympiade gaat weer van start voor middelbareschoolklassen 1 t/m 5.
plaats eigen school
info wiskundeolympiade.nl

april 2024

2–3 april 2024

NMC 2024
Nederlands Mathematisch Congres. Jaarlijkse bijeenkomst van wiskundig Nederland, georganiseerd door het KWG.
plaats Van der Valk Hotel, Utrecht
info mathematischcongres.nl

5–6 april 2024

NWD 2024
De 30ste editie van de Nationale Wiskunde Dagen, een tweedaagse conferentie voor wiskundeleraren.
plaats De Leeuwenhorst, Noordwijkerhout
info uu.nl/onderwijs/nationale-wiskunde-dagen

Nieuws

| News

Deze rubriek is een kroniek van wiskundige activiteiten in Nederland. Toekomstige activiteiten worden aangekondigd en van voorbije activiteiten wordt verslag gedaan. Wilt u uw aankondiging of verslag in deze rubriek geplaatst zien? Stuur ons dan uw bijdrage, zo mogelijk met illustratie. De redactie behoudt zich het recht voor berichten te weigeren of in te korten.

Redacteur: Edward Berengoltz
 nieuws@nieuwarchief.nl

Wil Schilders geridderd voor wiskundige verdiensten

Professor Wil Schilders, hoogleraar scientific computing in industry aan de Technische Universiteit Eindhoven, is op vrijdag 23 juni bij de gelegenheid van zijn uittreerede geridderd tot Officier in de Orde van Oranje-Nassau. Hij krijgt de onderscheiding voor zijn talrijke verdiensten binnen de Nederlandse en internationale wiskundige gemeenschappen en industrie.

Schilders, wiens vakgebied in de numerieke analyse ligt, heeft wis- en natuurkunde gestudeerd in Nijmegen en is in 1980 gepromoveerd in Dublin. Hij heeft sindsdien jarenlang voor Philips gewerkt aan numerieke methoden voor halfgeleidersimulaties. In (internationaal) samenwerkingsverband heeft hij in dit kader baanbrekende resultaten geboekt door nieuwe wiskundige methoden en modellen te ontwikkelen om een breed scala aan vraagstukken binnen de industriële sector aan te pakken. Daarnaast heeft hij nauw samengewerkt met overheids- en academische instellingen op drie continenten ter bevordering van de wiskunde en haar toepassingen in de industrie en technologie.

Na een productieve carrière bij Philips leidde hij vanaf 2006 de wiskundeafdeling bij NXP Semiconductors. Sinds 2010 was hij als hoogleraar verbonden aan de TU Eindhoven. Daarnaast is Schilders directeur van het Platform Wiskunde Nederland en medeoprichter van het EU-MATHS-IN. In het verleden was hij voorzitter van het European Consortium for Mathematics in Industry en hoofdredacteur van het *Nieuw Archief voor Wiskunde*. Met de publicatie van boekjes over sudoku's toont hij bovendien ook zijn enthousiasme voor de luchtigere kant des levens.

Barry Koren



Foto: Martijn Anthonissen

Wil Schilders

Belgische promovendus kraakt vermoeden van Erdős

Het gebeurt niet vaak dat eerstejaars promovendi een door eminente wiskundigen geformuleerd vermoeden weten te bewijzen. Dit is echter precies wat de Belg Cédric Pilatte, aio aan de University of Oxford onder begeleiding van professor Ben Green en professor James Maynard heeft gepresteerd. Zijn onderzoek behelst

analytische getaltheorie en additieve combinatoriek, maar om het vermoeden, waarop hij werd gewezen door zijn begeleiders, te bewijzen heeft hij bovendien gevorderde technieken uit de algebraïsche meetkunde en waarschijnlijkheidsleer aangewend. Wat is dit voor hardnekkig vermoeden?

Beschouw een deelverzameling X der natuurlijke getallen. Zij vormt een *Sidonrij* als alle waarden $x+y$ met $x \leq y$ en $x, y \in X$ paarsgewijs verschillend zijn. Anderzijds heet X een *asymptotische basis* van orde m als ieder voldoende groot natuurlijk getal geschreven kan worden als de som van m elementen van X . In 1993 formuleerden de Hongaren Erdős, Sárközy en Sós het vermoeden dat er een X bestaat die zowel Sidons is, als ook een asymptotische basis van orde 3. Dit is duidelijk een wedstrijdje touwtrekken: Sidonrijen lijken intuïtief ‘klein’. Hoe groter X immers is, des te groter wordt de kans dat de optelfunctie hetzelfde getal meermaals aan zal tikken. Andersom moeten asymptotische bases ‘groot’ zijn. Zwakkere vormen van het vermoeden (met $m > 3$) werden gedurende de 21ste eeuw bewezen maar zakten tot $m = 3$ wilde niet lukken. (Kleiner dan 3 is sowieso onmogelijk.) Enter Pilatte.

Zijn cruciale inzicht was om het bestaande verband tussen getaltheorie enerzijds en algebraïsche meetkunde anderzijds te benutten. Voor de kenner: priemgetallen gedragen zich op soortgelijke wijze als irreducibele polynomen over een eindig lichaam, die met meetkundige methoden kunnen worden aangepakt. Precies zulke gevorderde meetkundetechnieken, namelijk recente resultaten van Will Sawin, heeft Pilatte gebruikt om een verzameling te construeren met de gewenste eigenschappen, waarmee het vermoeden werd bewezen. Hier zit wel een noot aan: de constructie is probabilistisch van aard. De geproduceerde Sidonrij is ‘très probablement’ een asymptotische basis van orde 3, aldus Pilatte. Dat wil zeggen, met kans 1 heeft de verzameling de verlangde eigenschap. Een bewijs heeft hij (nog) niet, maar Pilatte vermoedt dat het mogelijk moet zijn om, weliswaar met meer moeite, de constructie uit te voeren zonder dit stochastische element.

Zo is weer een van Erdős’ vermoedens bewezen met behulp van vakgebied-overstijgende technieken. Met pure getaltheorie zou de constructie gewoonweg niet lukken: “De evenknie van Sawins [meetkundige] resultaten voor priemgetallen is een volledig open probleem dat moeilijker is dan de Riemannhypothese.” Pilattes kunst was om priemgetallen te vervangen door polynomen, waarop vervolgens machinerie uit de algebraïsche meetkunde — ‘puis-sante et profonde’ — kon worden losgelaten.



Cédric Pilatte

Foto: mathis.ov.ac.uk

Griekse wiskundige siert 2 euromunt

Ieder jaar slaan de meeste eurolanden een aantal herdenkingsmunten bestemd voor circulatie. Dit jaar wordt ook een wiskundige geëerd: de Bank van Griekenland produceert in september 750.000 stuks 2 euromunten met het portret van Constantin Carethéodory (1873–1950) — die belangrijk werk heeft verricht in de analyse en maattheorie, maar ook variatierekening en thermodynamica — ter ere van zijn 150ste geboortedag.

Het ontwerp van Geórgios Stamatópoulos toont Carathéodory’s portret naast twee formules uit diens oeuvre. Zij luiden $L(A+B) = \mu A < \frac{1}{2}$ en $\int (h-U)^a \sqrt{T} dt = \min$. De betekenis van deze formules, die zonder context erg wonderlijk ogen, is echter niet duidelijk. De lezer die denkt ze te snappen, melde zich bij de nieuwsredactie.

Ook komt dit jaar een zilveren 10 euromunt ter ere van Euclides uit, maar deze zal niet circuleren en is voor verzamelaars bestemd. Ten slotte verschijnt wiskundige János (John von) Neumann dit jaar op een vierkante Hongaarse verzamelstuk van 3000 forint, 120 jaar na zijn geboorte.

www.bankofgreece.gr, en.numista.com



2 euromunt met Constantin Carethéodory

Achttienjarige Duitser promoveert in de meetkunde

Met zeventien jaar de middelbare school afsluiten, is niet bijster opmerkelijk. Tezeldertijd ook het bachelor- én masterdiploma wiskunde behalen echter wel. Dit is precies wat Yanik Kleibrink, nu achttien en werkzaam als promovendus aan de Goethe-Universität Frankfurt am Main, heeft gepresteerd, en wel zonder al te grote inspanning. Als elfjarige volgde hij zijn eerste online wiskundecursus terwijl zijn familie tijdelijk in de Verenigde Staten woonde, een jaar later zat hij in een collegezaal in Frankfurt bij het vak *Mathematik für Studierende der Physik* en inmiddels promoveert hij als jongste doctorandus in Frankfurt op moduliruimten van vlakke oppervlakken. Daarnaast volgt hij de masteropleiding natuurkunde.

Wat Kleibrink het meest begeistert in de wiskunde is haar logische structuur. “Dat men van begin af aan uit de axioma’s de hele wereld af kan leiden.” Van zijn middelbareschooltijd zegt hij niets te hebben gemist: zijn vreugde heeft in de wiskunde gelegen sinds hij haar ontdekt had. Dat hij gelijktijdig aan zijn bachelor- en masterscripties werkte op de middelbare school, hebben zijn klasgenoten “eigenlijk amper meegekregen. Mij heeft daarom niemand ooit een nerd genoemd.” ’s Ochtends Duits of aardrijkskunde en

's middags wiskundecollege. Als aio denkt Kleibrink nu 's morgens over zijn probleem na, waarna hij vakartikelen leest. Ergens tussendoor vindt hij tijd om aan zijn masterscriptie voor natuurkunde te werken, die voortbouwt op zijn eerdere ideeën. Voorlopig wil hij aan de universiteit blijven en zijn leven wijden aan onderzoek in de meetkunde.

zeit.de

Tom Koornwinder viert tachtigste verjaardag

Emeritus hoogleraar Tom Koornwinder wordt op 19 september tachtig jaar. Deze expert op het gebied van speciale functies en orthogonale polynomen heeft een glansrijke carrière gehad, maar noemde zijn afscheidsrede in 2008 "niet [zijn] laatste woord". Inderdaad is hij nog steeds zeer actief: er verschijnen geregeld publicaties en hij is niet zelden op kantoor te vinden, nu eens voor een seminarium, dan weer om collega's te verblijden door boeken uit te delen.

Na zijn doctoraal in Leiden heeft Koornwinder bijna een kwart eeuw bij het Mathematisch Centrum in Amsterdam gewerkt. Aldaar raakte hij dankzij de grote Richard Askey geïnspireerd om onderzoek te doen in de speciale functies en hun samenhang met representatie- en Lie-theorie. Zijn eerste doorbraak als beginnend promovendus was de optelformule voor de Jacobi-polynomen begin jaren zeventig. In 1992 construeerde hij, na een lumineuze ingeving in een hotel in Ivoorkust, de naar hem vernoemde familie van Koornwinder-polynomen als gemeenschappelijke veralgemening van zowel de Askey–Wilson- als de klassieke Macdonald-polynomen. Het verband tussen kwantumgroepen en zulke (oudere) 'kwantum-gedeformeerde' polynomen zou een wiskundige goudmijn blijken: zo ook in Koornwinder's werk, die de AW-polynomen interpreteerde als matrixcoëfficiënten van representaties van kwantum-SU(2). Vanaf datzelfde jaar tot 2008 bekleedde hij tevens de leerstoel analyse aan het Korteweg-de Vries Instituut in Amsterdam, waarvan hij ook de eerste directeur werd.

Koornwinder is niet alleen een vlijtig wiskundige gebleven maar ook lid geweest van verscheidene prijzencomités, de organisatie van de Wiskundeolympiade, en redacties van vaktijdschriften. Jarenlang heeft hij een kantoor gedeeld met mede-emeritus Jaap Korevaar (dit jaar 100 geworden), totdat de kantoorrapte anders noopte. Te zijner ere wordt deze maand een symposium georganiseerd in Amsterdam door twee van zijn promovendi.

Jasper Stokman



Tom Koornwinder

Beëindiging Wiskunde Persdienst

De Wiskunde Persdienst (WPD) is per 22 juli definitief gestopt. Het online platform heeft sinds begin van deze eeuw gediend om wiskundig nieuws en gebeurtenissen ten gehore te brengen. De dienst werd opgericht om de wiskundige gemeenschap centraal te kunnen informeren over actualiteiten en in het begin was hij in het bijzonder gefocust op samenwerking met het onderwijs. Helaas was nu de software dusdanig verouderd dat besloten is de website uit de lucht te halen. Wel is er een aanvraag bij het Bèta Outreachfonds gedaan voor een nieuw soort WPD. Dus mogelijk komt er in de toekomst nog een opvolger.

wiskundepersdienst.nl

Erdős' vermoeden zwicht wederom voor Belgisch vernuft

Het is een goed jaar voor de Belgen. In juni hebben dr. Sam Mattheus en prof.dr. Jacques Verstraëte een preprint beschikbaar gesteld waarin zij een vermoeden van Erdős bewijzen met behulp van meetkunde. Het speelveld is dit keer grafentheorie en combinatoriek, specifiek de Ramseytheorie. Het resultaat betreft het asymptotische gedrag van een specifiek *Ramseygetal*. Dit concept laat zich traditiegetrouw als volgt uitleggen: Zijn $n, m \in \mathbb{N}$. Stel, er wordt een feestje georganiseerd waarvan men eist dat er hoe dan ook een groepje van n man moet zijn, waarin iedereen elkaar onderling kent, of een groepje van m juist bestaande uit louter vreemdelingen. Hoeveel mensen moeten minimaal worden uitgenodigd om dit te garanderen? Dat aantal heet het Ramseygetal $R(n, m)$ en bestaat altijd. Iets wiskundiger kan het probleem worden geformuleerd in termen van graafkleuringen en klieken.

Deze getallen zijn notoir moeilijk te berekenen en wiskundigen hebben bijna een eeuw geprobeerd om hen zo scherp mogelijk van onder of boven te begrenzen. Mattheus, werkzaam aan de Vrije Universiteit Brussel en nu te gast bij Verstraëte aan de University of California San Diego, had het innovatieve idee om het asymptotische gedrag van $R(4, m)$ wanneer m nadert naar oneindig te bestuderen aan de hand van eindige meetkunde — binnen een paar maanden hadden de heren oogst. Zij hebben een lang staande ondergrens verbeterd en daarmee een vermoeden van Erdős uit 1990 bewezen. De reactie van grafentheoretici is 'surreel', aldus een overweldigde Mattheus.

vub.be

Koninklijk Wiskundig Genootschap

□ Joke Blom benoemd tot erelid KWG

Dit voorjaar is Joke Blom door het bestuur van het KWG benoemd tot erelid van het KWG. De voordracht is door de Algemene Ledenvergadering van het KWG unaniem goedgekeurd. Joke heeft zich op veel manieren ingezet voor het KWG. Het bestuur en de leden zijn haar hiervoor heel dankbaar.

□ Oproep EMS voor nominaties prijzen

Het EMS roept op om nominaties in te sturen voor de volgende prijzen (zie euromathsoc.org/ems-prizes): Ten EMS Prizes for young researchers (deadline 1 November 2023); the Felix Klein Prize (31 December 2023); the Otto Neugebauer Prize for the History of Mathematics (31 December 2023).

Young KWG Board

youngkwg@wiskgenoot.nl

News Royal Dutch Mathematical Society (KWG)

Introducing Young KWG

It is a pleasure to introduce ourselves as Young KWG, the newest addition to the Royal Dutch Mathematical Society (KWG). As our name suggests, our main goal is to attract and support young mathematicians in the early stages of their careers. When we say ‘young mathematicians’, we embrace a broad spectrum, ranging from bachelor students to (assistant/associate) professors, from aspiring mathematics teachers to industry professionals.

With Young KWG, we aim to create a vibrant network in the Netherlands, a place where individuals can connect, interact, and learn from one another. We especially support international colleagues embarking on their careers in a new environment, ensuring a seamless integration into the mathematics community in the Netherlands. Our endeavors center around organizing events and workshops tailored for young mathematicians and increasing the visibility of the Dutch mathematical community.

Exciting events on the horizon

We are thrilled to share that we already have some exciting activities lined up for the upcoming academic year. First on the list is the Young KWG Day, an event that will kick-start Young KWG. During this day, scheduled for May 2024, we aim to bring together a diverse group of young mathematicians from across the Netherlands. Expect inspiring lectures and workshops on relevant topics such as grant writing, scientific presentations, and science communication.

Another exciting event in our lineup is ‘A PhD, is that for me?’. This annual event is meant for master students who are exploring the possibility of pursuing a PhD in mathematics. Following the success of previous editions in 2021 and 2022, we are happy to continue hosting this event, offering useful insights into the world of doctoral research.

Empowering young mathematicians

We will be preaching to the choir when saying that the world should see the beauty and power of mathematics. However, our mission extends beyond the confines of our community. Through our activities, we aim to show this passion for mathematical research to everyone. We aim to equip young mathematicians with

effective communication and outreach skills, empowering them to express the beauty and relevance of their research to audiences beyond academia. Moreover, by providing them with a platform to showcase their work and achievements, we celebrate their contributions and give them the recognition they deserve.

In line with our goal of empowerment, we aim to offer workshops and resources that focus on essential professional skills. From grant writing and scientific presentations to networking and career guidance, we aim to equip young mathematicians with the tools they need to thrive in their chosen paths, whether in academia or beyond.

Meet the Board

Allow us to introduce ourselves — the founding members of the Young KWG Board:

- Nicos Starreveld (Chair) (Teacher in the Bachelor Mathematics at University of Amsterdam)
- Lotte Weedage (Secretary) (PhD candidate at Twente University)
- Sven Polak (Treasurer) (Assistant Professor at Tilburg University)
- Bharti Bharti (PhD candidate at University of Amsterdam)
- Mar Curco Iranzo (PhD candidate at Leiden University)
- Pierfrancesco Dionigi (PhD candidate at Leiden University)
- Martijn Gösgens (PhD candidate at Eindhoven University of Technology)
- Nikki Levering (PhD candidate at University of Amsterdam)

Join Young KWG!

As the first board of Young KWG, we extend a warm invitation to all young mathematicians eager to explore, grow, and inspire. Together we can strengthen the Dutch mathematical community, extend our network, and create an inspiring environment for young minds. We are committed to keeping you updated on new Young KWG activities through the KWG website and newsletter, the Nieuw Archief, research institutes, and social media. Stay tuned, and if you have any questions, ideas, suggestions, or want to contribute, don't hesitate to reach out to us! You can contact us at youngkwg@wiskgenoot.nl. ☘

Jaap Top

Bernoulli Instituut voor Wiskunde, Informatica en
Kunstmatige Intelligentie, Rijksuniversiteit Groningen
j.top@rug.nl

Onderzoek

Het Bas/Serra-oppervlak

Het omslag van dit nummer van *Nieuw Archief voor Wiskunde* wordt opgesierd door een fraaie weergave van een oppervlak. Met een vergelijkbaar plaatje werd recent de bijeenkomst 'An Expedition into Arithmetic Geometry' aangekondigd, een workshop in het Lorentz Center die plaatsvond van 30 mei tot en met 2 juni 2023, met als ondertitel 'A Celebration of Bas Edixhoven's Mathematics'. De week werd afgesloten met een goedbezocht en op een breed wiskundig publiek gericht herdenkingssymposium. Het ging die vrijdagmiddag over een thema waar Bas veel belangstelling voor toonde, namelijk verbanden tussen wiskunde en kunst. Tussen april 2014 (het Nederlands Mathematisch Congres in Delft) en mei 2019 (een Algant Alumni Netwerk symposium in Benasque, Spanje) gaf Bas diverse voordrachten over een door hemzelf onderzocht fascinerend voorbeeld van zo'n verband, namelijk de 'getordeerde ellipsen' van de als kunstenaar tot de minimalisten gerekende Amerikaan Richard Serra.

Het tot dusver meest concrete gevolg van deze belangstelling van Bas is te vinden in virtueel museum Tesseract [1], een initiatief van de stichting Ars et Mathesis. Tussen de namen en digitale werken (concreet is in een virtueel museum niet hetzelfde als tast-

baar) van bijvoorbeeld Koos Verhoeff, Rinus Roelofs en vele anderen, staat daar ineens Bas Edixhoven. Zijn plaatjes *Serra Twins* 1 t/m 8 tonen verschillende gezichtspunten op drie ontwerpen, zie Figuur 1.

Tijdens het symposium op 2 juni mocht ik aandacht vragen voor dit onderwerp. Daarbij werd het publiek aangemoedigd het als werk van Bas verder te verspreiden, bijvoorbeeld in meetkundecolleges. Een link naar de gebruikte slides is te vinden in [2], en wellicht kan de huidige tekst hiervoor van dienst zijn.

De getordeerde ellips

De serie *The Matter of Time* bestaat uit acht enorme uit staalplaten (zogenoemde cortenstaal) gemaakte vormen. Ze staan tentoongesteld in het Guggenheim Museum in Bilbao [3] en ze zijn in de periode 1994–2005 ontworpen door Richard Serra. Een van de ontwerpen (de kleinste...) draagt de naam *Getordeerde ellips*, zie Figuur 2.

Het gevaarte is 427 cm hoog en de staalplaat is 5 cm dik. De onderrand en de bovenrand bestaan uit identieke ellipsen, en die zijn ten opzichte van elkaar een kwartslag gedraaid. Door om het kunstwerk heen te lopen, is te zien dat overal het zijcontour, dus de manier waarop het

uiterste zichtbare punt op de onder-ellips wordt 'verbonden' aan het uiterste zichtbare punt op de boven-ellips, een rechte lijn is. Serra zelf beschreef het ontwerp op een mechanische manier: denk aan een as, met aan beide enden een ellipsvormig wiel waarbij de beide gelijke wiel-ellipsen 90° ten opzichte van elkaar gedraaid zijn. Laat deze as met wielen over de grond rollen. Daarbij raakt hij op ieder moment de grond in twee punten, een op elke ellips. De lijnstukken tussen zulke tweetallen vormen samen de getordeerde ellips.

In Siegen (Duitsland) vond Serra het bedrijf Pickhan dat de enorme staalplaten voor hem kon maken. Overigens werden zijn getordeerde ellipsen al vanaf 1996 getoond in het Solomon R. Guggenheim Museum in New York. De Duitse TV-film *Richard Serra: Thinking on Your Feet* uit 2005 van Maria Anna Tappeiner geeft een boeiend verslag van de ontstaansgeschiedenis van *The Matter of Time*.

De beschrijving uitgaande van een as met twee (in parallelle vlakken draaiende) wielen eraan, levert een goede manier om de getordeerde ellips wiskundig beter te begrijpen. Dat begint met de observatie dat als onze as met wielen de grond raakt, dan gebeurt dat in twee punten (op elke



Figuur 1 Serra Twins van Bas Edixhoven in virtueel museum Tesseract.



Figuur 2 Getordeerde ellips van Richard Serra.

ellips één), en de raaklijnen aan de ellipsen in deze punten lopen evenwijdig. Voor Bas was deze eenvoudige constatering een reden om dieper te gaan nadenken, want hij zag direct dat het een verband met elliptische krommen opleverde. Ook begreep hij, omdat er bij elk punt op de ene ellips niet één maar twee punten op de andere ellips zijn die tot evenwijdige raaklijnen aanleiding geven, dat Serra's getordeerde ellips in zekere zin de helft van een tweeling is. Dit is zonder expliciete formules te beredeneren en zo deed Bas het ook. Om alles zo concreet mogelijk te maken rekenen we hier wel verder met een concreet voorbeeld.

Meetkunde

In de xyz -ruimte nemen we als de 'vloer' waar de onderste ellips C_1 ligt, het vlak $z = -1$. De ellips C_2 aan de bovenkant leggen we in het vlak $z = 1$. Als ellipsen, een kwartslag gedraaid ten opzichte van elkaar, nemen we

$$\begin{aligned} C_2: x^2 + 2y^2 &= 1, \quad z = 1, \\ C_1: 2x^2 + y^2 &= 1, \quad z = -1. \end{aligned}$$

De richting van de raaklijn aan C_1 in $P_1 := (x_1, y_1, -1) \in C_1$ is

$$\begin{pmatrix} -y_1 \\ 2x_1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

en $P_2 := (x_2, y_2, 1) \in C_2$ levert raakrichting

$$\begin{pmatrix} 2y_2 \\ -x_2 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Evenwijdig zijn van beide raaklijnen betekent $4x_1y_2 = x_2y_1$. De lijn door P_1 en P_2 wordt geparametriseerd door

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \\ -1 \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} x_2 - x_1 \\ y_2 - y_1 \\ 2 \end{pmatrix}.$$

Schrijf E voor de kromme in de 4-dimensionale ruimte gegeven door

$$E: \begin{cases} x_2^2 + 2y_2^2 = 1, \\ 2x_1^2 + y_1^2 = 1, \\ 4x_1y_2 - x_2y_1 = 0. \end{cases}$$

De projecties $E \rightarrow C_j$ (vergeet twee van de coördinaten) beelden in het algemeen twee punten naar eenzelfde beeld, overeenkomstig met de observatie dat er bij een punt op de ene ellips twee punten op

de andere zijn met evenwijdige raaklijnen. Dus per constructie levert

$$E \times \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}^3: (x_1, y_1, x_2, y_2, \lambda) \mapsto \begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \\ -1 \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} x_2 - x_1 \\ y_2 - y_1 \\ 2 \end{pmatrix}$$

als beeld van $E(\mathbb{R}) \times \mathbb{R}$ niet alleen iets als Serra's getordeerde ellips op, maar nog meer.

Dit is goed te omschrijven door E anders te bezien. Dat kan bijvoorbeeld door de ellips gegeven door $x^2 + 2y^2 = 1$ te parametriseren: $(-1, 0)$ is een punt hierop, en elke lijn $y = t(x + 1)$ snijdt de ellips in een uniek ander punt $(\frac{1-2t^2}{1+2t^2}, \frac{2t}{1+2t^2})$. Hetzelfde voor de andere ellips levert daarvoor de parametrisatie $(\frac{2u}{1+2u^2}, \frac{1-2u^2}{1+2u^2})$. In plaats van de variabelen x_1, y_1, x_2, y_2 voor E , kunnen dan t en u gebruikt worden. Het wordt allemaal nog eenvoudiger als u wordt vervangen door $v = (4t^2 - 2)u - 8t$. Dat levert voor E in de t, v -coördinaten de vergelijking

$$v^2 = 8t^4 + 56t^2 + 2.$$

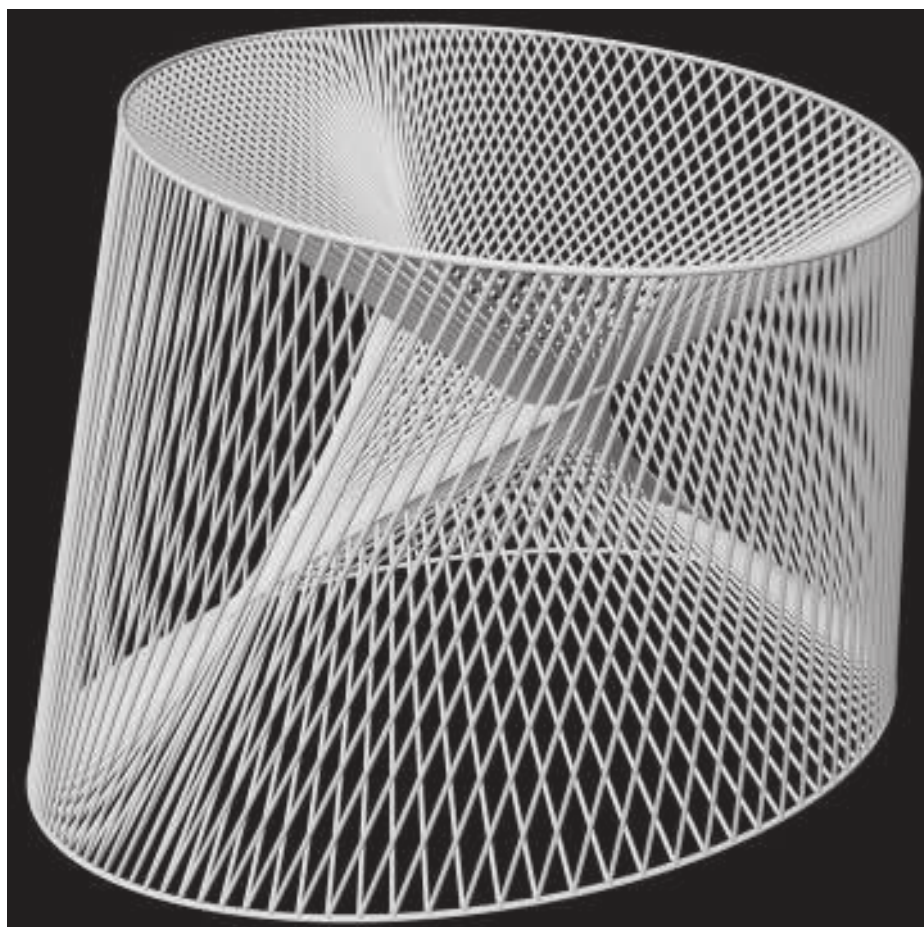
Zo blijkt allereerst dat E *irreducibel* is, dat wil zeggen het is niet de vereniging van

twee beide als nulpunten van veeltermen beschreven krommen. Toch bestaat de verzameling $E(\mathbb{R})$ van reële punten op E uit twee disjuncte componenten, namelijk punten $(t, v) \in \mathbb{R}^2$ met $v \geq \sqrt{2}$ en punten met $v \leq -\sqrt{2}$. Noemen we die componenten $E(\mathbb{R})^+$ en $E(\mathbb{R})^-$, dan is Serra's getordeerde ellips het stuk tussen de vlakken $z = \pm 1$ in $\mathbb{R}^3$ in het beeld van $E(\mathbb{R})^- \times \mathbb{R}$ onder de boven gegeven afbeelding $E \times \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}^3$.

Het beeld van $E \times \mathbb{C}$ is een irreducibel oppervlak, en de reële punten ervan vormen gezamenlijk een soort Siamese tweeling. Al is het een wat ongebruikelijke combinatie van een voor- en een achternaam, 'Bas/Serra-oppervlak' klinkt goed en doet recht aan de personen achter beide delen van wat er in $\mathbb{R}^3$ van te zien is. ☼

Referenties

- 1 <https://www.arsetmathesis.nl/virtueel-museum-tesseract>
- 2 <https://www.math.rug.nl/~top/lectures/LinesBetweenMathandArt.pdf>
- 3 <https://www.guggenheim.org/artwork/17143>



Figuur 3 Het Bas/Serra-oppervlak. Impressie door Walt van Ballegooijen.

Piet Van Mieghem

Network Architectures and Services
TU Delft
p.f.a.vanmieghem@tudelft.nl

Research

The arithmetic-geometric mean: A pearl of Gauss

The arithmetic-geometric mean (AGM) algorithm has an amazingly fast convergence. In this article Piet Van Mieghem follows Gauss on his remarkable path of mathematical discoveries, posthumously published in Gauss's *Nachlass* in 1866.

Carl Friedrich Gauss (1777–1855) was a titan of science [5]. Words fall short to describe his phenomenal mathematical creations: just as paintings and musical pieces by the greatest artists¹, his mathematics fills an impressive gallery of the finest art. The only difference between music and paintings compared to mathematical art is that the latter requires more effort to understand, before its penetrating light embraces human emotions. After all, just as in music and paintings, it requires much technical skills, before creations and art occur. Art is all about emotion. The most beautiful mathematical art shines by its simplicity, which often shields its depth. It may sound odd that I speak about mathematical art, while most people associate mathematics with a cool and logical system, void of any human emotion. And, yet, there is an ocean of beauty in which the logical pieces are built towards a magnificent castle.

The sequel here is devoted to one type of painting, one style of Gaussian symphony. In [15], I have tried to unravel his unpublished work, posthumously collected in his *Nachlass* (in *Gauss Werke*, Band 3), about the arithmetic-geometric mean (AGM). This article is a summary of [15] and I will refer to it for details. While the AGM algorithm, explained in formula (2) in the next section, is rather basic and before Gauss discovered by another genius Lagrange, it was Gauss, who created an astonishing piece of art. The first part in the *Nachlass* [8] in Lat-

in is the easiest, because it is sufficiently well explained. That first part also shows Gauss's trajectory towards his first fundamental result (8) via elegant Taylor series expansions. The second part [9] in German is challenging and difficult, because Gauss has merely left sketches or just a list of formulae without any clue nor derivation. Of course, we cannot blame Gauss: he never found the time to publish his work on AGM in his near to perfect style, based on his adagium² “*pauca, sed matura*”. After Gauss has seen the work of Abel and Jacobi, who found independently parts of his own discoveries about thirty years later, Gauss seemed to have been content that Abel and Jacobi had relieved him from publishing his work on elliptic functions.

Gauss's path towards the valley of elliptic functions, starting with the AGM algorithm, is extremely hard; a narrow, steep route through high and icy mountains, which today is abandoned, because only the most experienced alpinists may succeed. The valley of elliptic functions, which are doubly periodic functions in the complex plane, is now approached by two avenues. First, elliptic functions are beautifully introduced by Tannery and Molk [12, last chapter], who started from Weierstrass's great work on entire functions. Entire functions do not contain singularities in the finite complex plane, but an essential singularity at infinity, and can be regarded as generalizations of polynomials. Tannery and Molk [13] relat-

ed Weierstrass's to Jacobi's approach, the latter based on the surprising theta-functions (which Gauss has discovered first, see [15, Section 7]). A second avenue starts from Cauchy's integral theorem and Liouville's elegant theorem, stating that a bounded analytic function without singularities (e.g. poles) in the complex plane is a constant. When applying these two theorems to the fundamental parallelogram of an elliptic functions, many properties are deduced (see e.g. [16]). Yet, I believe that the start of Gauss's path, namely the arithmetic-geometric mean, is worth to explore, essentially due to its amazingly fast convergence.

The arithmetic-geometric mean (AGM)

1. *Definition of the arithmetic-geometric mean $M(a, b)$.* The arithmetic mean of two numbers a and b is defined by $m_A = \frac{a+b}{2}$ and their geometric mean by $m_G = \sqrt{ab}$. We assume that a and b are non-negative real numbers, to avoid complications with the squareroot in $m_G = \sqrt{ab}$. An immediate bound $m_A \geq m_G$, with equality only if $a = b$, follows from

$$0 \leq \frac{1}{2}(\sqrt{a} - \sqrt{b})^2 = \frac{a+b}{2} - \sqrt{ab}. \quad (1)$$

Gauss [8] studies the sequence $\{(a_n, b_n)\}_{n \geq 0}$, where³

$$a_n = \frac{a_{n-1} + b_{n-1}}{2} \text{ and } b_n = \sqrt{a_{n-1} b_{n-1}} \quad (2)$$

starting from $(a_0, b_0) = (a, b)$, which he already knew at the age of 14 years old [4]. Explicitly, the arithmetic-geometric mean (AGM) algorithm (2), written in two columns, is

$$\begin{aligned}
a_0 &= a & b_0 &= b \\
a_1 &= \frac{a+b}{2} & b_1 &= \sqrt{ab} \\
a_2 &= \frac{1}{2} \left(\frac{a+b}{2} + \sqrt{ab} \right) & b_2 &= \sqrt{\frac{a+b}{2} \sqrt{ab}} \\
a_3 &= \dots & b_3 &= \dots
\end{aligned}$$

Invoking the inequality $m_A \geq m_G$ to (2) illustrates that $a_n \geq b_n$ for any integer $n \geq 1$. In other words, for $n \geq 1$, the left column with $\{a_n\}_{n \geq 1}$ will contain numbers that are always larger than the right column with $\{b_n\}_{n \geq 1}$, if we exclude the uninteresting case that $a = b$, for which $a_n = b_n = a$ and nothing changes with n . If $n = 0$, we obviously have that $a_0 < b_0$ if $a < b$, but for $n \geq 1$, it holds that $a_n \geq b_n$. In the sequel, therefore, we assume that $a > b$, so that the inequality $a_n > b_n$ holds for any integer $n \geq 0$. Combining $a_n > b_n$ with the arithmetic mean $a_n = \frac{a_{n-1} + b_{n-1}}{2} < a_{n-1}$ then shows, for any integer $n \geq 1$, that $a_n < a_{n-1}$, while the geometric mean $b_n = \sqrt{a_{n-1}b_{n-1}} > b_{n-1}$ shows that $b_n > b_{n-1}$.

2. Convergence of the AGM algorithm in (2). Gauss observes, for $a \geq b \geq 0$, that

$$\begin{aligned}
\frac{a_n - b_n}{a_{n-1} - b_{n-1}} &= \frac{(a_n - b_n)(a_n + b_n)}{(a_{n-1} - b_{n-1})(a_n + b_n)} \\
&= \frac{a_n^2 - b_n^2}{(a_{n-1} - b_{n-1})(a_n + b_n)} \\
&= \frac{\left(\frac{a_{n-1} + b_{n-1}}{2}\right)^2 - a_{n-1}b_{n-1}}{(a_{n-1} - b_{n-1})(a_n + b_n)} \\
&= \frac{(a_{n-1} - b_{n-1})^2}{4(a_{n-1} - b_{n-1})(a_n + b_n)} \\
&= \frac{a_{n-1} - b_{n-1}}{2(a_{n-1} + b_{n-1}) + 4b_n} \\
&\leq \frac{1}{2} \frac{a_{n-1} - b_{n-1}}{a_{n-1} + b_{n-1}} \leq \frac{1}{2}
\end{aligned}$$

where equality only holds if $b = 0$. Only if $b = 0$, the AGM algorithm (2) reduces to $b_n = 0$ and $a_n = \frac{1}{2}a_{n-1}$ with solution $a_n = \frac{a}{2^n}$ for $n \geq 0$. Hence, for $a > b > 0$, Gauss obtains the inequality $a_n - b_n < \frac{1}{2}(a_{n-1} - b_{n-1})$, which after iteration on $n \geq 0$ shows that

$$a_n - b_n < \frac{1}{2^n}(a - b). \quad (3)$$

With $a_n \pm b_n = \frac{1}{2}(\sqrt{a_{n-1}} \pm \sqrt{b_{n-1}})^2$, we have

$$\begin{aligned}
\frac{a_n - b_n}{a_n + b_n} &= \frac{(\sqrt{a_{n-1}} - \sqrt{b_{n-1}})^2}{(\sqrt{a_{n-1}} + \sqrt{b_{n-1}})^2} \\
&= \left(\frac{a_{n-1} - b_{n-1}}{(\sqrt{a_{n-1}} + \sqrt{b_{n-1}})^2} \right)^2 \\
&< \left(\frac{a_{n-1} - b_{n-1}}{a_{n-1} + b_{n-1}} \right)^2,
\end{aligned}$$

because $(\sqrt{a_{n-1}} + \sqrt{b_{n-1}})^4 = (a_{n-1} + b_{n-1} + 2\sqrt{a_{n-1}b_{n-1}})^2 > (a_{n-1} + b_{n-1})^2$ for $a > b > 0$. Iterated p times,

$$\begin{aligned}
\frac{a_n - b_n}{a_n + b_n} &< \left(\frac{a_{n-1} - b_{n-1}}{a_{n-1} + b_{n-1}} \right)^{2^p} \\
&< \dots < \left(\frac{a_{n-p} - b_{n-p}}{a_{n-p} + b_{n-p}} \right)^{2^p}
\end{aligned}$$

leads, after choosing $p = n$,

$$\frac{a_n - b_n}{a_n + b_n} < \left(\frac{a - b}{a + b} \right)^{2^n}. \quad (4)$$

Since $a_{n+1} = 2(a_n + b_n)$ and $a_{n+1} < a_n$, we find that $a_n - b_n < 2a_1 \left(\frac{a-b}{a+b} \right)^{2^n}$, which tends to zero considerably faster than $\frac{a-b}{2^n}$ in (3) for $n > n_0$, where n_0 is a threshold value. The AGM algorithm (2) converges quadratically or the convergence of the sequence $\{(a_n - b_n)\}_{n \geq 0}$ is of second order. A convergence of second order means that each iteration in the AGM algorithm (2) for positive a and b approximately doubles the number of correct decimal digits.

In summary, the difference $a_n - b_n$ in the sequence $\{(a_n, b_n)\}_{n \geq 0}$ tends to zero with $n \rightarrow \infty$. In other words, the sequences $\{a_n\}_{n \geq 0}$ and $\{b_n\}_{n \geq 0}$ converge to the same limit $M(a, b)$, which Gauss calls the *arithmetic-geometric mean* (AGM),

$$M(a, b) = \lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \lim_{n \rightarrow \infty} b_n. \quad (5)$$

For $a > b > 0$, the above analysis shows

that

$$\begin{aligned}
a &> a_1 > \dots > a_n > a_{n+1} \geq \dots \geq M(a, b) \\
&\geq \dots \geq b_{n+1} > b_n > \dots > b_1 > b,
\end{aligned}$$

while

$$M(a, a) = a, \quad M(a, 0) = 0.$$

Since any pair (a_n, b_n) in the sequence $\{(a_n, b_n)\}_{n \geq 0}$ converges to the same limit, we also conclude that

$$M(a, b) = M(a_1, b_1) = \dots = M(a_n, b_n) = \dots. \quad (6)$$

3. Scaling of $M(a, b)$. If we multiply both a_n and b_n by a positive real number β , then the AGM recursion (2) shows that also a_{n+1} and b_{n+1} are multiplied by β . Hence, $\lim_{n \rightarrow \infty} \beta a_n = \beta M(a, b)$ and

$$M(a\beta, b\beta) = \beta M(a, b). \quad (7)$$

Taking $\beta = \frac{1}{a}$ and subsequently $\beta = \frac{1}{b}$ in (7) yields $M(a, b) = aM(1, \frac{b}{a}) = bM(\frac{a}{b}, 1)$. The scaling (7) means that the study of $M(a, b)$ can be reduced to $M(1, x)$, where $0 \leq x \leq 1$, because we assume as Gauss that $a > b$. However, interchanging a and b in the iterative algorithm (2) does not impact the limit, i.e. $M(a, b) = M(b, a)$. Thus, alternatively $M(a, b)$ can be reduced to $M(x, 1)$, where $x \geq 1$. Figure 1 draws $M(x, 1)$ together with its upper bound $\frac{1+x}{2}$ and lower bound $\sqrt{x}$ on a lin-lin and log-log scale.

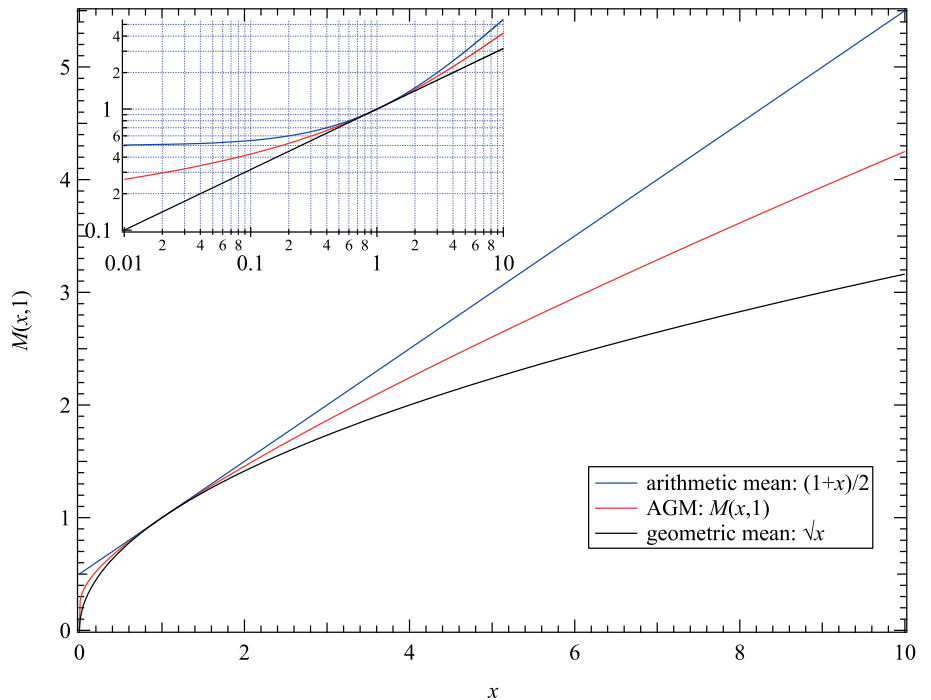


Figure 1 The three means of x and 1: the arithmetic mean $(1+x)/2$, Gauss's AGM $M(x, 1)$ and the geometric mean $\sqrt{x}$, both on lin-lin and log-log scale (inset).

Gauss [8, art. 3] computes four examples with different (a, b) up to 20 decimal digits (!) to illustrate how fast the recursion (2) converges. Numerical computations confirm a convergence of second order and that the iteration n in (2) has about twice the number of correct digits than the iteration $n-1$, which is numerically an amazingly fast convergence. This very fast convergence of the sequence in (2) likely attracted Gauss to explore the properties of the arithmetic-geometric mean $M(a, b)$.

Highlights of Gauss's journey

Gauss [8, art. 5] computes several Taylor expansions, like $M(1+x, 1) = \sum_{k=0}^{\infty} h_k x^k$, but each time concludes that the Taylor coefficients do not satisfy an interesting law. Eventually, he deduces the Taylor series

$$\begin{aligned} \frac{1}{M(1+x, 1-x)} &= \sum_{m=0}^{\infty} \left(\frac{(2m)!}{(2^m m!)^2} \right)^2 x^{2m} \\ &= \sum_{m=0}^{\infty} \left(\frac{1}{2} \right)^2 x^{2m} \\ &= 1 + \frac{1}{4}x^2 + \frac{9}{64}x^4 + \frac{25}{256}x^6 + \frac{1225}{16384}x^8 + \dots \end{aligned}$$

which can also be written in terms of Gauss's hypergeometric function as

$$\frac{1}{M(1+x, 1-x)} = F\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, 1; x^2\right).$$

Gauss wrote a great manuscript [7] on the hypergeometric function, which basically generalized Newton's working horse, the binomial expansion $(1+x)^\alpha = \sum_{k=0}^{\infty} \binom{\alpha}{k} x^k$ and which derives the theory of the Gamma function most elegantly (that led Weierstrass later to his artful theory of entire functions). Hence, Gauss rapidly saw that the Taylor expansion can be written as an integral,

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{d\theta}{\sqrt{a^2 \sin^2 \theta + b^2 \cos^2 \theta}} = \frac{\pi}{2} \frac{1}{M(a, b)} \quad (8)$$

called a 'tour de force' by McKean and Moll [11].

Gauss's fundamental integral (8) is rewritten in terms of Legendre's complete elliptic integral

$$K(k) = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{d\theta}{\sqrt{1-k^2 \sin^2 \theta}}$$

of the first kind as

$$\frac{1}{a} K\left(\frac{1}{a} \sqrt{a^2 - b^2}\right) = \frac{\pi}{2} \frac{1}{M(a, b)}.$$

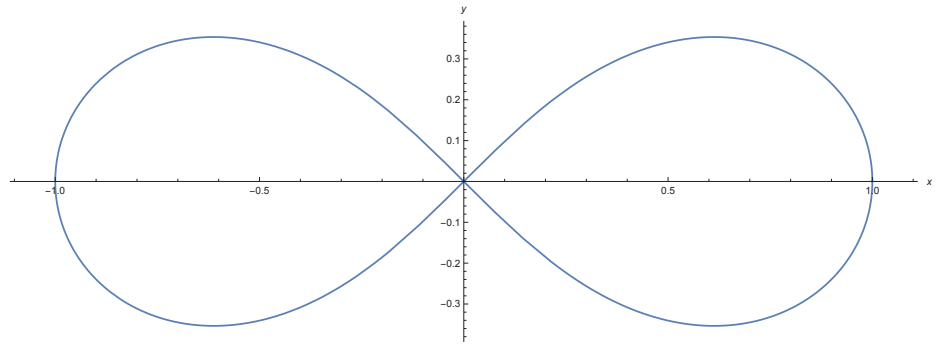


Figure 2 The lemniscate is defined in polar coordinates (r, θ) as $r^2 = \cos(2\theta)$.

Gauss knew the theory of lemniscate, invented by Jacob Bernoulli in 1694, and realized that the total length L_l of the lemniscate equals

$$L_l = \frac{2\pi}{M(\sqrt{2}, 1)}.$$

Consequently, a basic result in Gauss's investigations [4, p.280–283] relates the total length of the lemniscate to the arithmetic-geometric mean

$$\begin{aligned} M(\sqrt{2}, 1) &= \frac{\pi}{2 \int_0^1 \frac{dy}{\sqrt{1-y^4}}} \\ &= \frac{\sqrt{\pi} \Gamma(\frac{3}{4})}{2 \Gamma(\frac{5}{4})} \simeq 1.19814. \end{aligned}$$

Gauss denotes $\varpi = 2 \int_0^1 \frac{dy}{\sqrt{1-y^4}} \simeq 2.39628$ to emphasize the importance of $L_l = \frac{2\pi}{M(\sqrt{2}, 1)}$ which is then

$$M(\sqrt{2}, 1) = \frac{\pi}{\varpi}. \quad (9)$$

Since the integral $\int_0^x \frac{dy}{\sqrt{1-y^4}}$ resembles $\int_0^x \frac{dy}{\sqrt{1-y^2}} = \arcsin(x)$, Gauss studied the inverse function of $\int_0^x \frac{dy}{\sqrt{1-y^4}}$, because the properties of $\sin(x)$ are much more elegant than those of its inverse function $\arcsin(x)$. Gauss⁴ defined the lemniscatic functions as

$$\text{sinlem}\left(\int_0^x \frac{dy}{\sqrt{1-y^4}}\right) = x$$

and deduced many beautiful series expansion and theta-function like expansions, that were never published by Gauss, only in his Nachlass. Gauss's sinus and cosinus lemniscatus are a special case of Jacobi's elliptic amplitudinis functions [10] and doubly-periodic with periods 2ϖ and $2i\varpi$. Cox [4, Section 3] demonstrates that Gauss had a complete theory of elliptic functions!

Computations of π

The number π has fascinated humans for over 4000 years since the Babylonians and old-Egyptians and is still captivating cur-

rent mathematicians. The Borwein brothers and Bailey [3] overview the history of the computing π . We will only discuss here Archimedes' algorithm, Leibniz' and Euler's series and the application of Gauss's AGM algorithm.

4. *Archimedes' computation of π .* Surprisingly similar to Gauss's AGM recursion (2), the Borwein brothers [2] (see also [6, pp. 31–35]) mention Archimedes' recursion

$$A_n = \frac{A_{n-1} + B_n}{2} \text{ and } B_n = \sqrt{A_{n-1} B_{n-1}} \quad (10)$$

where $\frac{1}{A_n}$ is the area of the circumscribed regular 2^n -gon and $\frac{1}{B_n}$ denotes the area of an inscribed regular 2^n -gon around a circle with radius 1. The recursion of Archimedes (ca. 287–212 BC) in (10) seems due to Gauss's teacher Pfaff [3, p.205] and is derived in [15]. Comparing with the circle, we find the inequalities $\frac{1}{B_n} < \pi < \frac{1}{A_n}$ and the recursion (10), starting at $n=2$ with $B_2 = \frac{1}{2}$ and $A_2 = \frac{1}{4}$, converges to π . Table 1 computes Archimedes' recursion (10) for π up to $n=15$.

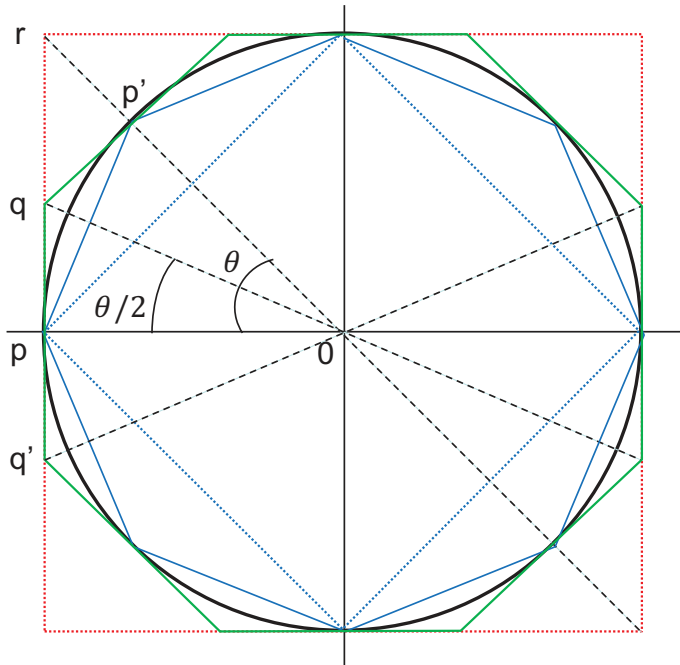
5. *Leibniz's series.* Perhaps the simplest or most classic series to compute π are derived from inverse trigonometric functions. We confine ourselves to series for $\arctan z$, whose Taylor series around $z=0$ is

$$\arctan z = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{2k+1} z^{2k+1} \quad \text{for } |z| < 1, \quad (11)$$

which converges for $z=1$, because Leibniz' series

$$\begin{aligned} \frac{\pi}{4} &= \lim_{K \rightarrow \infty} \sum_{k=0}^K \frac{(-1)^k}{2k+1} \\ &= 1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \frac{1}{7} + \frac{1}{9} - \frac{1}{11} + \frac{1}{13} - \frac{1}{15} + \dots \end{aligned} \quad (12)$$

is an alternating sum with decreasing terms. Most likely, Leibniz' series (12) is one of the simplest, but also slowest con-

Figure 3 Inscribed and circumscribed 2^n -gon of a circle with radius 1.

n	$\frac{1}{A_n}$	$\frac{1}{B_n}$	$\frac{1}{A_n} - \frac{1}{B_n}$
1	4	2	2
2	3.3137084989	2.82842712474	0.485281
3	3.1825978780	3.06146745892	0.12113
4	3.1517249074	3.12144515225	0.0302798
5	3.1441183852	3.13654849054	0.00756989
6	3.1422236299	3.14033115695	0.00189247
7	3.1417503691	3.14127725093	0.000473118
8	3.1416320807	3.14151380114	0.00011828
9	3.1416025102	3.14157294036	0.0000295699
10	3.1415951177	3.14158772527	$7.39247 \cdot 10^{-6}$
11	3.1415932696	3.14159142151	$1.84812 \cdot 10^{-6}$
12	3.1415928075	3.14159234557	$4.6203 \cdot 10^{-7}$
13	3.1415926920	3.14159257658	$1.15507 \cdot 10^{-7}$
14	3.1415926632	3.14159263433	$2.88768 \cdot 10^{-8}$
15	3.1415926559	3.14159264877	$7.21921 \cdot 10^{-9}$

Table 1 Archimedes' recursion (10) for π up to $n = 15$.

vergent series for π . If $K = 10^m$ terms are computed in (12), then about m decimal digits are correct. Leibniz did not obtain (12) as derived above, but from his general method of 'transmutation', which is nicely explained by Edwards [6, p. 245–252]. The companion series of (12), due to Newton and equally slowly converging, is

$$\frac{\pi}{2\sqrt{2}} = \lim_{K \rightarrow \infty} \sum_{k=0}^K (-1)^k \left(\frac{1}{4k+1} + \frac{1}{4k+3} \right) = 1 + \frac{1}{3} - \frac{1}{5} + \frac{1}{7} - \frac{1}{9} + \frac{1}{11} - \frac{1}{13} + \frac{1}{15} - \dots \quad (13)$$

Newton's π -series (13) is computed in [15].

Many other variations on $\arctan z$ exists [2, p. 352]. John Machin (1680–1752) found that

$$\pi = 16 \arctan\left(\frac{1}{5}\right) - 4 \arctan\left(\frac{1}{239}\right),$$

while Leonhard Euler (1707–1783) started from

$$\pi = 20 \arctan\left(\frac{1}{7}\right) + 8 \arctan\left(\frac{3}{79}\right).$$

Euler introduced his famous Euler transform and derived [14] the series in 1755,

$$\begin{aligned} \arctan z &= \frac{z}{1+z^2} \lim_{K \rightarrow \infty} \sum_{k=0}^K \frac{(k!)^2 2^{2k}}{(2k+1)!} \left(\frac{z^2}{1+z^2} \right)^k \\ &= \frac{z}{1+z^2} \left(1 + \frac{2}{3}y + \frac{2 \cdot 4}{3 \cdot 5}y^2 + \frac{2 \cdot 4 \cdot 6}{3 \cdot 5 \cdot 7}y^3 + \dots \right)_{y = \frac{z^2}{1+z^2}}. \end{aligned} \quad (14)$$

Borwein and Borwein [2] mention that Euler computed π to 20 decimal places in an hour, because powers of $\frac{z^2}{1+z^2} \Big|_{z=1/7} = \frac{1}{50}$ and $\frac{z^2}{1+z^2} \Big|_{z=3/79} = \frac{9}{6250}$ are small.

6. AGM computation of π . Almkvist and Berndt [1, Theorem 5] mention

$$\pi = \frac{4M^2(1, \frac{1}{\sqrt{2}})}{1 - \sum_{n=1}^{\infty} 2^{n+1} c_n^2} \quad (15)$$

where $c_n = \sqrt{a_n^2 - b_n^2}$. The entire derivation of (15) is in [15]. Borwein and Borwein [1, Section 5] present another algorithm for π with second order convergence.

Only 10 iterations in (15), with $a = 1$ and $b = \frac{1}{\sqrt{2}}$, lead to an astonishingly small error at $n = 9$ of less than $10^{-29} \approx 10^{-512}$, as illustrated in Table 2, where 30 decimal digits are given.

We again observe that, at each iteration in n , the number of decimal digits approximately doubles!!

n	a_n	b_n	$2c_{n+1} = a_n - b_n$	formula (15)
0	1	0.707106781186547524400844362105	0.29289	4
1	0.853553390593273762200422181052	0.840896415253714543031125476233	0.012656	3.18767264271210862720192997053
2	0.847224902923494152615773828643	0.847201266746891460403631453693	0.000023636	3.14168029329765329391807042456
3	0.847213084835192806509702641168	0.847213084752765366704298051780	$8.24274 \cdot 10^{-11}$	3.14159265389544649600291475882
4	0.847213084793979086607000346474	0.847213084793979086605997900490	$1.00244 \cdot 10^{-21}$	3.14159265358979323846636060271
5	0.847213084793979086606499123482	0.847213084793979086606499123482	$1.48265 \cdot 10^{-43}$	3.14159265358979323846264338328
6			$3.24336 \cdot 10^{-87}$	
7			$1.55206 \cdot 10^{-174}$	
8			$3.55415 \cdot 10^{-349}$	
9			$1.86375 \cdot 10^{-698}$	

Table 2 The 30 decimal digits AGM computation for π in formula (15) up to iteration $n = 9$.

n	$\frac{1}{2^{n-1}} \log\left(\frac{4b_{n+1}}{c_n}\right)$	$\frac{1}{2^{n-1}} \log\left(\frac{4a_n}{c_n}\right)$
0	3.11916231251975389237754454656	3.46573590279972654708616060729
1	3.14157172949917097506914830630	3.14904153515897666929968289288
2	3.14159265355330856833419360289	3.14159962823802109942254203509
3	3.14159265358979323846242152809	3.14159265360195479517183083648
4	3.14159265358979323846264338328	3.14159265358979323846271733501

Table 3 The first four iterations of formula (16).

We add another AGM computation of π due to Gauss [9, p. 377], and which did not appear in recent literature,

$$\frac{1}{2^n} \log\left(\frac{4b_{n+1}}{c_n}\right) \leq \frac{\pi}{2} \frac{M(a,b)}{M(a,c)} \leq \frac{1}{2^n} \log\left(\frac{4a_n}{c_n}\right). \quad (16)$$

If $a = b\sqrt{2} = c\sqrt{2}$, then $\frac{M(a,b)}{M(a,c)} = 1$ and, confining to $n = 0$ in (16), we have that

$$\log\left(\frac{4a_0}{c_0}\right) = \log(4\sqrt{2}) = \frac{5}{2} \log(2),$$

while

$$\begin{aligned} \log\left(\frac{4b_1}{c_0}\right) &= \log\left(\frac{4\sqrt{a_0b_0}}{c_0}\right) \\ &= \log\left(2^{2+\frac{1}{4}}\right) = \frac{9}{4} \log 2 \end{aligned}$$

from which Gauss concludes that

$$\frac{9}{4} \log 2 < \frac{\pi}{2} < \frac{10}{4} \log 2.$$

If n increases in (16), we find lower and upper bounds for π where each step in n results in the famous approximate doubling of decimal digits. Choosing $a = 1$ and

$b = \frac{1}{\sqrt{2}}$ as above, the first four iterations of (16) are as shown in Table 3, while for $n = 5$ all 30 digits are correct. The lower bound for $n = 4$ has already 30 decimals correct, while the upper bound only has 22 correct decimals. Hence, we observe that Gauss's upper and lower bounds (16) converge a little faster in n towards π than (15), in spite of the computation of the logarithm, which is numerically more demanding.

Summary

The extremely fast convergence of the AGM algorithm (2) is still attractive in times of the abundant presence of computers. Except for inverse functions computed by Newton–Raphson's method (that is also of second order), it is still unknown [2, p. 352] whether there are other functions than complete elliptic integrals that possess a quadratically converging algorithm such as Gauss's AGM algorithm (12). $\zeta \cdots$

Notes

- 1 Ludwig Van Beethoven (1770–1827), with Flemish roots from Mechelen, was a German contemporary of Carl Friedrich Gauss.
- 2 “Pauca, sed matura” is Latin and means “Few, but ripe”. Gauss wrote clearly and briefly in a Ciceroan Latin style. He avoided unnecessary prose, in contrast to the then ruling French scientists of the Académie Française in Paris. Each sentence in his work plays a role; it is hard to further condense

or skip parts without missing the idea. When contemporaries complained to him that he shielded the way in which he has found his discoveries, Gauss briefly replied: “Have you ever seen a beautiful building, to which the scaffold is still attached?” ‘Pauca’ does not imply that Gauss wrote only few articles. In fact, he was very productive, but he could have published more if his high writing standard was reduced. His work on AGM

is an example; he did not publish this pearl.

- 3 Gauss writes accents instead of subscripts in n ; thus $a' = a_1$, $a'' = a_2$, $a''' = a_3$, et cetera.
- 4 Gauss Werke, Band 3, p. 404 on ‘Elegantiores integralis $\int_0^x \frac{dy}{\sqrt{1-y^4}}$ proprietatis’, in which he defines the sinuslemniscatus and derives many of its functional properties, much more than the sinus possesses.

References

- 1 G. Almkvist and B.C. Berndt, Gauss, Landen, Ramanujan, the arithmetic-geometric mean, Ellipses, π and the Ladies Diary, *American Mathematical Monthly* 95 (1988), 585–608.
- 2 J.M. Borwein and P.B. Borwein, The arithmetic-geometric mean and fast computation of elementary functions, *SIAM Review* 26(3) (1984), 351–366.
- 3 J.M. Borwein, P.B. Borwein and D.H. Bailey, Ramanujan, modular equations and approximations to π or how to compute one billion digits of π , *The American Mathematical Monthly* 96(3) (1989), 201–219.
- 4 D.A. Cox, The arithmetic-geometric mean of Gauss, *L'Enseignement Mathématique* 30 (1984), 275–330.
- 5 G.W. Dunnington, *Carl Friedrich Gauss: Titan of Science*, The Mathematical Association of America, 2004. Reprinted version, first edition by Hafner Publishing, 1955.
- 6 C.H. Edwards Jr., *The Historical Development of the Calculus*, Springer, 1979.
- 7 C.F. Gauss, Disquisitiones generales circa seriem infinitam $1 + \frac{a\beta}{1-\gamma}x + \frac{a(1+a)\beta(1+\beta)}{1-2\gamma(\gamma+1)}x^2 + \frac{a(1+a)(2+a)\beta(1+\beta)(2+\beta)}{1-2\cdot 3\gamma(\gamma+1)(2+\gamma)}x^3$ etc., pars prior, *Commentationes societatis regiae scientiarum Gottingensis recentiores*, Vol. II, in Gauss Werke, Band III, 1813, pp. 125–162.
- 8 C.F. Gauss, De origine proprietatibusque generalibus numerorum mediorum arithmetico-geometricorum, *Nachlass in Gauss Werke*, Band 3, 1866, pp. 362–374.
- 9 C.F. Gauss, Fortsetzung der Untersuchungen über das Arithmetisch Geometrische Mittel, *Nachlass in Gauss Werke*, Band 3, 1866, pp. 377–403.
- 10 C.G.J. Jacobi, *Fundamenta Nova Theoriae Functionum Ellipticarum*, Borntraeger, 1829.
- 11 H. McKean and V. Moll, *Elliptic Curves: Function Theory, Geometry, Arithmetic*, Cambridge University Press, 1997.
- 12 J. Tannery and J. Molk, *Éléments de la Théorie des Fonctions Elliptiques*, Thome I, Gauthier-Villars et Fils, 1893.
- 13 J. Tannery and J. Molk, *Éléments de la Théorie des Fonctions Elliptiques*, Thome II, Gauthier-Villars et Fils, 1896.
- 14 P. Van Mieghem, Characteristic coefficients of a complex function (1993–2020), unpublished.
- 15 P. Van Mieghem, *The Arithmetic-Geometric Mean: A pearl of Gauss*, Delft University of Technology, 2023, Report 20230605.
- 16 E.T. Whittaker and G.N. Watson, *A Course of Modern Analysis*, Cambridge University Press, 1996.

Nelly Litvak

Department of Mathematics and Computer Science
Eindhoven University of Technology
n.v.litvak@tue.nl



Column Better than blackboard

We shouldn't give classroom lectures anymore

My colleague Frederic Schuller never planned to be a YouTube star. Some fans recorded his award-winning blackboard lecture courses on Differential Geometry, General Relativity and Quantum Mechanics [1] and launched a YouTube channel under his name. The style of these videos is exactly the opposite of what any course on educational videos teaches us: each lecture is two hours long, with just Frederic at the blackboard, telling his well-paced story, on most demanding level from the start, with admirable knowledge and humour. The videos are a stunning success. Each of the three 50-hour lecture courses has been watched more than 50 000 times by wide audience, from students all over the world to MIT professors. The loving comments say that Frederic is the best teacher ever.

What can be better than the magic of mathematics unfolding on a blackboard? I love to listen to blackboard lectures, this is how I learned mathematics. I love to give them even more. Many of my colleagues, academic mathematicians, feel this way. But is the blackboard lecture effective for teaching mathematics to the university students of today? This is an entirely different question.

Welcome to the new column 'Better than blackboard'! In this column we will talk about teaching mathematics at university. I will address problems that many university teachers face: students don't show up at classes, cannot concentrate, stay passive, learn by mimicking old solutions, show no deep understanding, get scared of the proofs, and have no reliable pre-knowledge in follow-up courses. Emotions aside, I want to talk about mathematics education in the same way as we talk about mathematics: stating definitions, questioning assumptions, and being very critical to our intuition. And I want to look for solutions.

I proudly introduce illustrations by Eline van Hove. Graduate of MSc Applied Mathematics as well as academy of arts, Eline says that she was formed by art and mathematics. In her daily work, Eline helps organizations to solve societal problems. I am delighted that she agreed to work with me on these articles! Check more of Eline's art work at www.elinevanhove.nl. This inaugural article is about classroom lectures. And my main statement is the title of this first column: 'We shouldn't give classroom lectures anymore'.

No classroom lectures anymore

We shouldn't give classroom lectures anymore. Not online, and not live either. In class, passive lecture should give place to active learning methods, when students do something themselves rather than listening to the teacher.

I know this is not a popular statement at university. Therefore I will write this article in a form of a conversation. I will state most common, in my experience, concerns and counterarguments in defense of classroom lectures, and I will try to give logical answers. Here we go.

What makes lectures ineffective?

Hundreds of studies, time and again, arrive to the same conclusion: classroom lectures are a terrible way for the students to learn. 'Terrible' is not my word choice, I quoted it from the book *Building the Intentional University*, about the experience of the innovative university Minerva, Chapter 11: 'The Science of Learning: Mechanisms and Principals' [5]. Why terrible? Below is an incomplete list of issues, that, most likely, sound familiar.

Low retention

In my experience, students almost never can accurately recall what was said in a lecture. This is of course an anecdotal evidence. The numbers in the literature vary, and are often up to interpretation. Yet, there is an overwhelming consensus that active learning methods yield much higher retention than a lecture. One may say: "We don't expect the students to recall the lecture. We expect them to read, solve problems, and then they will remember." Yes, and we hope that the students connect their reading and problem solving to the lecture, right? So, we do expect some retention after all, while in reality, this retention is much lower than we would like it to be.

Lack of interaction

Most teachers highly value interaction with students. This is why we were so eager to go back to campus after lockdowns. But how much interaction actually occurs during your lectures? Try to write down two numbers: (1) How many percent of time in your lecture do you spend on interaction? (2) How many percent of the students participate in the interaction?

Often in a classroom lecture only a couple of students answer teacher's questions or ask questions themselves. The rest stay silent. There is not much time for interaction either because the teacher must cover a sizable material.

One colleague argued that interaction is implicit: the teacher observes the students' reaction and therefore may slow down or speed up. Well, then videos are even better. Students can speed up or rewind the video, watch it at their own pace. What is the obvious value of an 'implicit' interaction, without actual communication between the students and the teacher? Can you name it? I can't.

Short attention span of the students

We all complain about it: students nowadays are not able to listen for half an hour at a stretch. True. Digital tools have greatly contributed to this. But have you ever checked out our digital competitors for the students' attention? For example, have you seen the YouTube channel '3blue1brown' [2]? If not, please have a look. And prepare to be amazed. Arguably, these videos will not teach students how to prove theorems or solve problems. But when material of

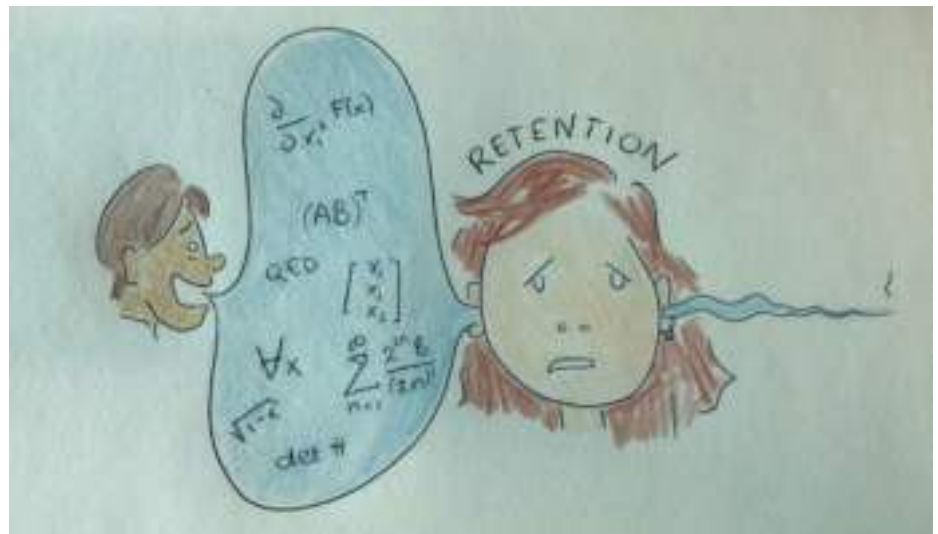


Illustration: Eline van Hove

this quality is freely available on the Internet, how can we even expect the students to patiently listen to a 90 minutes lecture?

Most importantly, even if our complaints are righteous, they are pointless. These are the students we have now. Digital tools are not going anywhere, they will only get better. We must learn how to work with real-life students in our class, not imaginary students we wish we had.

And by the way, the lack of students' concentration on a lecture doesn't mean that mathematics is doomed. Try to make this mental exercise: what, in your opinion, are the most important qualities for doing mathematics? In his brilliant book *Building Thinking Classrooms in Mathematics* [8], Peter Liljedahl reports on asking many teachers, and arrives at the following top-3 list:

1. perseverance,
2. taking risks,
3. collaboration.

Now think of 'listening for 30 minutes'. Will this quality make your top-3 list? Not mine, no. Honestly, I believe one can learn mathematics very well without even having this quality at all.

Altogether, I am convinced that it is not really a problem that the students cannot listen for too long. The problem is that we expect them to.

Writing dead notes

Ideally, we hope that the students listen actively and write notes. In reality, however, it is very hard for the students to listen to the teacher and write notes at the same

time. I will again cite Peter Liljedahl [8], he talks about 'live notes' and 'dead notes'. The live notes are what the teacher writes on the board in real time while building up the story, they are the core strength of blackboard lectures. The dead notes are what is left on the blackboard after the story is finished. Unfortunately, when students try to make notes, they often lag behind, and end up copying the dead notes, without even understanding them. This is quite a mindless and not so useful activity (see also practice 11 on website [3]).

Sage on a stage

An obvious issue with a classroom lecture is that it is extremely teacher-centred. The teacher is the Sage-on-a-Stage. This is not ideal because students can learn mathematics only by doing it themselves. The learning process is inherently student-centred. The right place of the teacher is not the Sage-on-a-Stage, but the Guide-on-a-Side.

You may say, the students must receive some information first, before they can even start working themselves. This is right. My point is that the classroom time is not best spent on basic explanations. During the class, real-life students are right in front of you. This is your Guide-on-a-Side opportunity.

I am a convinced proponent of a flipped classroom: give students a good textbook and videos to prepare, and spend classes on interaction. Below in this article I will share some specific ideas how such interaction may look like. And don't worry, this will not deprive you from explaining the material in your own way. Quite

the opposite. In a lecture, most time goes into covering the standard material, leaving only little space for truly original insights of the teacher. In a flipped classroom, the students have already studied the basics, and you are free to plan the entire class around a few most interesting questions. You may ask, how to make sure that the students watch videos (or read a book) before the class? In Minerva [5] they start classes with small low-stake quizzes. I like this idea but honestly I didn't yet have time to do this. Currently I simply assume that the students are prepared. Very soon they realize that it makes no sense to come to the class without preparation, they simply cannot understand anything. I believe, by the way, that this, too, is a useful feedback for the students. If they lag behind, they should have no illusion about it.

On a somewhat higher level, I think, it's downright arrogant to believe that what exactly I say is oh so important for the students' bright mind. Recently I saw a tweet from a fellow mathematician: "When I make a mistake on the board, students learn the most." I find this typical Sage-on-a-Stage talking. And I don't agree either. The students learn most when they make mistakes themselves. When you make a mistake, they are mostly confused and have messed up their notes. My motto is: it's not important what I say, it's important what students do.

Students not thinking

When assessing effectiveness of learning methods, Peter Liljedahl and his team measure only one thing: how much time



Figure 1 My own rough estimation of how much time students spend thinking in my lecture.

students spend thinking [8]. They estimate thinking time by closely observing the students and interviewing them after the class. I like this approach because it is so elegant and pure. Indeed, no learning of mathematics can happen without thinking!

I imagine Liljedahl and his team sitting at the back in my lecture, observing the students. I wonder, what their results could be? Based on my own observations, I expect the results approximately as in Figure 1. This is not my dream situation. Obviously, I wish for more students in the green group. But unfortunately I suspect that my figure is too optimistic. Most probably, in reality, the blue group, that spends less than 20% thinking, is larger. What is your honest estimation for your lectures?

The problem is not a lecturing style. Personally I often receive compliments from the students for my lectures, and I won several teaching awards. According to Liljedahl's research, we cannot blame the students either. The students are merely humans reacting naturally to their environment. The problem is in the environment of classroom lectures. Besides the Sage-on-a-Stage setup and the lack of interaction, turns out, even neat rows of tables discourage thinking! (See practice 4 of the website [3].)

Students at the back

We always have these students, leaning back passively, maybe looking at their phone, usually in the back rows. We may blame them for the lack of motivation but this is too easy and not necessarily fair.

To begin with, if a teacher doesn't use a microphone, then listening to the lecture is simply harder in the back rows. The teacher's voice dampens with the distance and interferes with classroom noises: turning pages, moving chairs, other students talking. The effort spent on merely hearing the teacher, goes on cost of cognitive capacity.

I believe however that there is more to the story than just hearing the teacher. I see the back rows as an embodiment of a larger problem in our higher education system — anonymity. Anonymity is opposite to agency and community. Agency means that students take responsibility for their studies, and academic community is a key value of the university. Anonymity means that students hide in the crowd, and the back rows are their hiding place. Agency and community are important topics by themselves, and we will come back to it in later articles.

Doubtful implicit goals: inspiration, general overview of the topic, et cetera

Many colleagues actually agree on all I said above. They say: "Yes, students don't learn much at a lecture, but lecture is also not for learning, it has different goals. It gives the students motivation for the topic, exposes them to inspiring professors, and gives general ideas on the subject..." I agree, these are noble goals, and I don't believe that a standard classroom lecture is the best way to achieve them. If we want to inspire, maybe better to give short inspirational talks? If we want to give general understanding, maybe better ask students to write summaries? And stating the question very pragmatically: are the inspiration and the general ideas in the form of a classroom lecture worth 1,5 hours per week of students' valuable time? I seriously doubt that.



Illustration: Eline van Hove

This is just your opinion

I have explained the above arguments, and more, in different forms, many times, to many different people. I don't know what's wrong with me or with these arguments, but the most common reaction I get is: "This is just your opinion." I find this dismissive if not hurtful, and highly inaccurate, too.

Of course, a statement "lectures are ineffective" is not a hard mathematical fact as in "the determinant of an invertible matrix is non-zero". But it is also not an opinion as in "watching sitcom is relaxing". My opinion that classroom lectures are ineffective is not grounded in my personal taste. Quite the opposite, I love giving lectures myself, I miss them even. But I won't give them again, because I have read a lot about it, I intentionally tried many different things in my classes, and I came to the conclusion that lectures are ineffective. If you insist that this is just my opinion, then let's make it symmetric: your opinion is that lectures can be effective. Great. What else have you tried? What is your opinion based on? Below are most common arguments, and honestly I don't find them very strong.

"...I loved it when I studied. It worked for me." Yes. Me too. This is why you and I ended up teaching at university. Projecting our experience on today's students is a perfect example of survival bias, selection bias, and a problematic time translation.

"...We have always done it this way." Yes. So, what? We don't do almost anything the same way we did thirty years ago. Think about communication technology and healthcare. The fact that we didn't change our teaching habits for so long might not be an argument for change, but it is definitely not an argument against the change.

"...It's nice what you do. But do we all have to do this? Isn't variety good for students?" Yes, variety is good. But is this comment really about the variety? Sometime I feel that people who say this actually are saying, "Good for you. But I will continue in my old ways, and look, the students will benefit from the variety!" I want to answer this very directly: passive learning is not variety, it's an ineffective education. Will you use a computer from 1980s for the sake of variety? Will its terrible run-

ning time, memory overflow, and painful neon green font benefit you in any way? Good education requires active learning methods. And don't worry, active learning has plenty of variety.

"...Educational sciences have nothing to say about how I should teach my courses." I understand the sentiment. I felt the same when I was taking my teaching qualifications twenty years ago. And even now I keep a healthy dose of scepticism. I believe that educational sciences failed miserably in disseminating their knowledge to university teachers, and there is plenty of bad educational science, too.

Yet, I will stand by educational sciences and listen to them. And not only because there is a lot of excellent educational science such as Peter Liljedahl's thinking classroom. But mainly because in any complex human activity practitioners adopt their practices based on new science. For instance, quite recent results from mathematics are adopted in the practice of logistics, finance, cybersecurity, imaging, et cetera. Higher education is a complex human activity. I am a practitioner of higher education. Educational sciences are the only source of evidence-based scientific approach in my classroom practice. I don't have a choice but listen, this is the only sustainable way forward.

"...Students like the lectures." Yes, they do. Today's students like them even more than, say, thirty years ago. One explanation, offered by a colleague of mine, is that the quality of lectures has improved a lot. Long gone the times when a lecturer was standing with their back to the class mumbling something, scribbling messy formulas with no beginning and no end. Many of today's lecturers are skilled presenters, our lectures are simply very good! But the point is not whether students like the lectures. The point is how much students learn from the lectures. And even if they believe they learned a lot, can we really trust their judgement?

Here is a fantastic paper [7] published in 2019 in PNAS, a journal respected in all areas of science. The authors conducted a very clean experiment. They gave students two sorts of classes. One was a standard lecture. Another one was a class where students worked on a question first, and then received explanation from the teacher. In

evaluation, on the questions like "I learned a lot" and "I wish all my classes were taught this way", standard lecture clearly wins. Except, the test results came out exactly the other way around! The authors suggest three explanations to this, and I think you will recognize all three. First, the students confuse the fluency of the teacher with their own fluency. They have an impression that if they could follow the explanation, they can explain, too, but this is simply not true. Second, students are novice to the topic, so it is really hard for them to evaluate how much they really learned. And third, when students work on a new difficult question, they make errors, get stuck, and therefore feel that they learn nothing. But exactly the opposite is true: they learn most exactly when they make errors and get stuck!

By the way, similarly, students believe that they learn more from a lecturer who is fluent and has great presence, rather than from one who is not so fluent and avoids eye contact, but study [6] found that appeal of a lecture had no effect on retention.

It is not so surprising that students are often simply wrong about what works for them in a class. Daniel Kahneman has received the Nobel Prize basically for demonstrating that humans don't like to think and are very poor in evaluating their own cognition. What students like is not necessarily effective for their learning.

What can we do instead of lectures?

I believe that we often hold on the lectures simply because we don't exactly know what to do otherwise, and our academic jobs are so terribly busy that we have truly no time to figure it out. I will write a lot about active learning in further articles, but for now I will explain two simple ideas.

Quiz

In my courses, I have all material covered in videos, and in the class, instead of lectures, I do quizzes. Usually I prepare 5–6 questions, that emphasize fundamental concepts, and common difficulties. Maybe somewhat unexpectedly, multiple choice questions often serve these purposes very well. In the class I let students answer the questions anonymously on their devices using an online tool. University of Twente uses Wooclap (and I love it, it is very easy), but every university has some tool at their disposal. I like to use questions that students

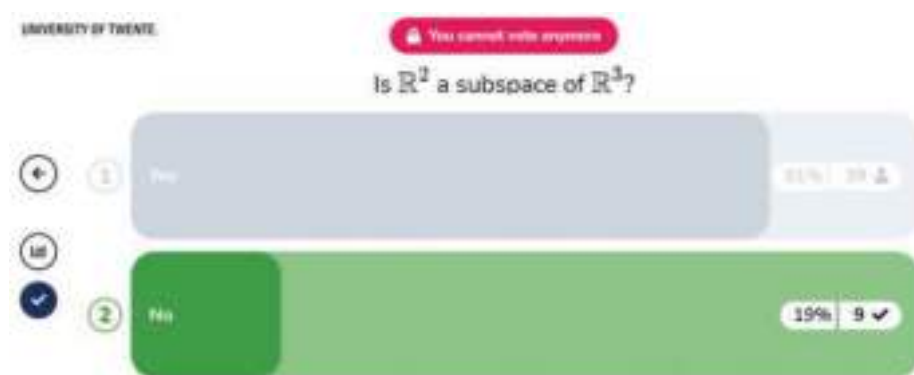


Figure 2 First year students in applied mathematics, in the second week of their study, learning about subspaces by making a quiz.

often answer wrongly because I want them to make errors in a safe way, and learn from these errors. For instance, every year, in the second week of their studies, 80% of my first year mathematics students vote $\mathbb{R}^2$ to be a subspace of $\mathbb{R}^3$, see Figure 2.

After students have answered the question, I usually do the simplest thing: I explain which answers were wrong, which were correct, and why. This part actually resembles a lecture, although there are differences. First, since the students already tried to answer the question themselves, they want to know the answers. They usually listen well and often ask further questions. Second, I see from the answers what was difficult, and I can spend more time there.

This year in evaluations some students wrote that they didn't find quizzes useful because "there was no new material". However, judging by plenty of wrong answers in the quiz, I have enough reasons to believe that quizzes are very useful.

Quizzes have many forms with more interaction. The innovative university Minerva [5] has a standard quiz format that works as follows. (1) Let students answer a question individually. (2) Let students discuss in groups. (3) Let students answer the question again. (4) Discuss with the

entire class and the teacher. There is also a similar method with game elements called Team Based Learning [9] that works as follows. (1) Students individually answer several multiple choice questions, each with four possible answers. (2) Students discuss all questions in groups. (3) Each group chooses the answers. If they answer a question correctly in the first attempt, they get 4 points. If not, they try again. In they answer correctly in the second attempt, they get 2 points, and in the third attempt 1 point. The points may be used for grade, but not necessarily, it can be just a fun way of getting feedback.

Creating questions

This idea comes from a colleague in Germany, I didn't use it myself yet. This teacher, too, has all her material on videos. In the class, she divides students in groups and asks each group to come up with a question about the material. Then they write these questions on a board and discuss together. She says it works great in her MSc courses. In BSc courses, however, it didn't work very well.

Will blackboard lectures disappear?

No, of course not, what a ridiculous question! A blackboard lecture is a craft perfect-

ed by mathematicians through centuries. It will stay with us forever. But not per se in the same function and context. Think of listening to a music. In early days, everybody had vinyl disks. Now most people use digital devices, but vinyl disks didn't disappear, they became exclusive. Likewise, blackboard lectures may (and should) give place to active learning in everyday classrooms, but they will not disappear, they will become exclusive events.

A masterful blackboard tutorial is perfect for a specialized workshop, with motivated fellow researchers in the audience. I saw many such lectures and enjoyed them a lot. In education, too, videos of blackboard lectures by teachers like Frederic Schuller or MIT's Gilbert Strang [4], are invaluable. Students need these explanations before active learning can even start. I believe that creating such series of videos is comparable to writing a textbook or shooting a show. In fact, we may also invite a live studio audience like in (my favourite) sitcoms. And you know what? For some of these lecture recordings, I will gladly buy a ticket!

Replacing classroom lectures by active learning doesn't mean the end of lecturing. Rather, it is a new beginning for the lecture genre and for the future-proof education of today's students.

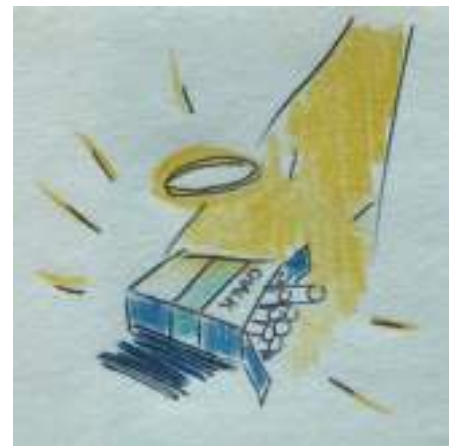


Illustration: Elise van Hove

References

- 1 <https://www.youtube.com/@thewe-heraeusinternational2060> and <https://www.youtube.com/@FredericSchuller>
- 2 <https://www.youtube.com/c/3blue1brown>
- 3 <https://buildingthinkingclassrooms.com/14-practices>
- 4 MIT Open Courseware, Linear Algebra, Prof. Gilbert Strang. <https://ocw.mit.edu/courses/18-06-linear-algebra-spring-2010>
- 5 *Building the intentional University: Minerva and the future of higher education*, Stephen M. Kosslyn and Ben Nelson, eds., MIT Press, 2017.
- 6 S.K. Carpenter, M.M. Wilford, N. Kornell and K.M. Mullaney, Appearances can be deceiving: Instructor fluency increases perceptions of learning without increasing actual learning, *Psychon. Bull. Rev.* 20 (2013) 1350–1356.
- 7 L. Deslauriers, L.S. McCarty, K. Miller, K. Callaghan and G. Kestin, Measuring actual learning versus feeling of learning in response to being actively engaged in the classroom, *Proceedings of the National Academy of Sciences* 116(39) (2019), 19251–19257.
- 8 P. Liljedahl, *Building Thinking Classrooms in Mathematics, Grades K-12: 14 Teaching Practices for Enhancing Learning*, Corwin Press, 2020.
- 9 L.K. Michaelsen, and M. Sweet, The essential elements of team-based learning, *New Directions for Teaching and Learning* 2008 (116), 7–27.

Fenghui Yu

*Delft Institute of Applied Mathematics
TU Delft
fenghui.yu@tudelft.nl*

Column New Impulse

A journey in academia: Exploring mathematical finance across continents

In this column, researchers who have been recently appointed to one of the Dutch mathematics institutes, introduce themselves.

My name is Fenghui Yu, and I've been an assistant professor in mathematical finance at the Delft University of Technology since August 2022. Working in a field that combines my passions for mathematics and finance, my research interests encompass a wide range of areas, including stochastic modeling, stochastic optimal control, risk management, machine learning, and data-driven methods, all applied to the domain of finance and insurance. In this article, I would like to share my personal story in academia, from humble beginnings in a small city in China to my current position in the Netherlands, and some of the varied experiences I've had along the way.

Growing up in a small city called Qiyang in the southeastern province of Hunan, China, I had never imagined pursuing a career in academia, or living outside of my home country. On the other hand, I've been an adventurous person ever since I was a child, and at the age of seventeen I decided to go to a university somewhere far away from my home town to seek new experiences and explore a different way of life. In the end I chose Jilin University, located in the far northeastern part of China — a 30 hour train journey from Qiyang.

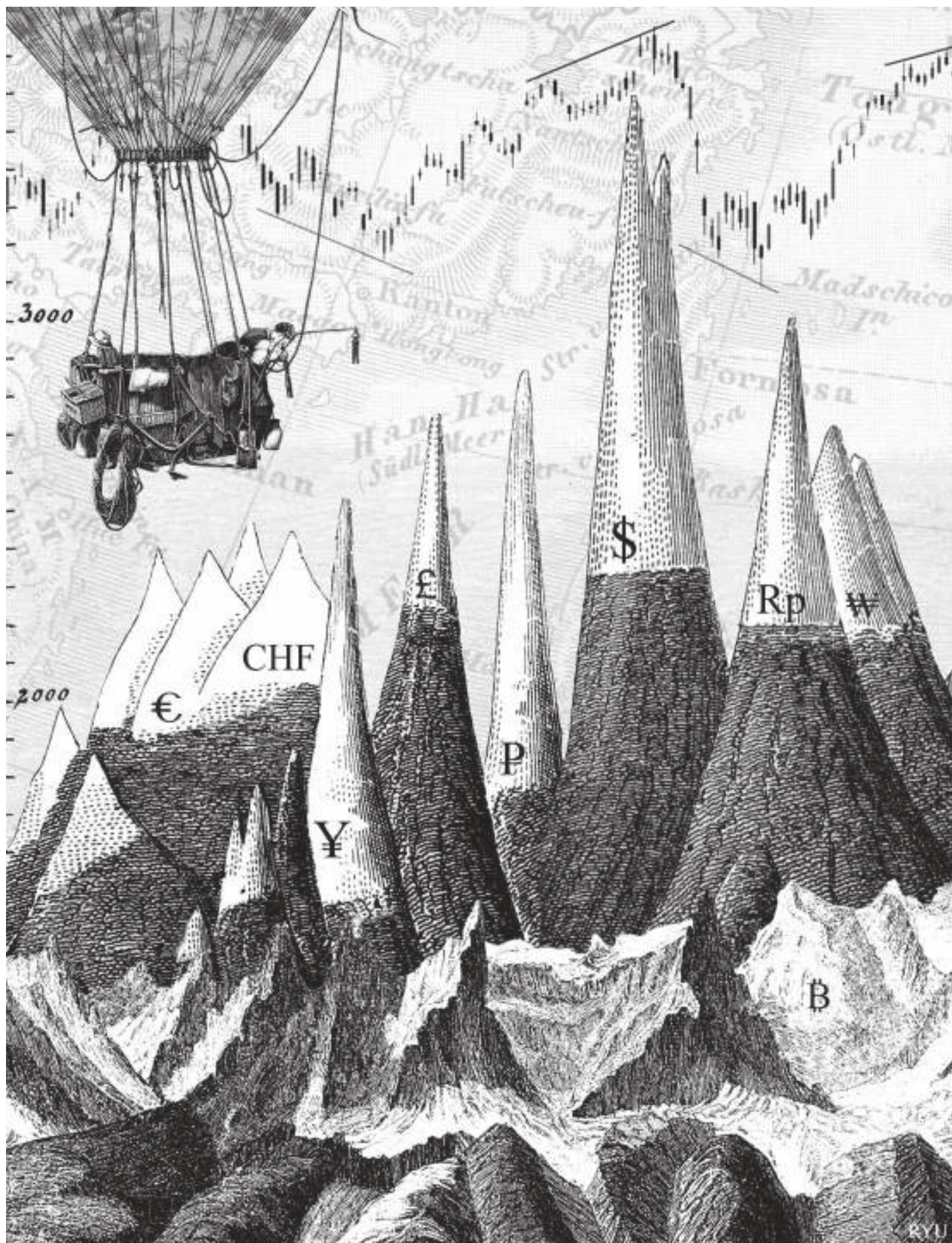
Since the country is so big, life in Jilin province is actually very different to life in my home town. For example, in northern China people rarely take showers at home, and instead go to public showers, where everybody showers in the same room with no privacy! It also gets extremely cold there in the winter; you would even see people selling ice cream outside, without any need to keep it refrigerated. One time I forgot to bring my

hair dryer with me to the public showers, and my wet hair froze solid on the way home.

The transition from my home town to the bustling city of Changchun, the capital city of Jilin Province, was overwhelming at first, but I quickly adapted to the new environment, enjoyed my studies and forged valuable friendships. After four years of undergraduate study I obtained a double bachelor's degree, with a major in computational mathematics and a minor in finance, which made it a natural choice for me to continue studying in the direction of mathematical finance.

The experience of living independently in a big city gave me confidence, and I was influenced by my professors to want to study abroad. However, when I first suggested this idea to my





parents, they were concerned about the uncertainties of going away alone to live in a foreign country. As a compromise, I decided to pursue my PhD studies in Hong Kong — a place not too distant from my home town, but still offering an international atmosphere and distinct education system. Fortunately, I received a PhD offer from the University of Hong Kong immediately after obtaining my bachelor's degree, along with an additional university scholarship.

Unlike Jilin, Hong Kong gets very hot — and yet whilst there I never wore shorts or skirts, since everywhere is so well air conditioned that I would get cold if I didn't wear enough clothes. I found life to be very convenient in Hong Kong. Being such a big city, you never have to travel very far to find what you need. You can quickly get to the bustling city center with its numerous skyscrapers, or to the beautiful nature in the mountains, harbours and beaches. I also liked the fact that the shops stayed open late. Many shops and restaurants would typically only open at 11am, but would stay open until 11pm or midnight. I would often leave the university at around 2am and stop by a dessert shop on the way home.

The opportunity to study in Hong Kong broadened my horizons, enabling me to attend conferences, participate in summer schools, and collaborate with people from around the world. These international interactions and experiences inspired me to seek new opportunities, and to finally move away from China altogether.

Following the completion of my PhD in Hong Kong I received an offer for a postdoctoral research position at ETH Zurich. This ended up being a crucial step in my career and in my life, as it committed me to an extended stay in a new continent. While awaiting the necessary documents to work in Switzerland I spent a few months as a postdoctoral fellow in Hong Kong, before finally embarking on my European adventure in June 2019.

Zurich can also get hot, but, unlike in Hong Kong, it's rare for buildings to be air conditioned. Sometimes I would sweat just sitting in my office, and at first I struggled to sleep due to the heat. Switzerland lives on a different schedule to Hong Kong; whilst shops close much earlier, the trams are already crowded at 6am, and many Swiss people get up even earlier than that. I also found Zurich to be much friendlier than Hong Kong, where I was used to staff in restaurants telling you to leave as soon as you'd finished your food. I was therefore surprised when, in a su-

permarket in Zurich, a member of staff kindly asked me whether I needed any help. Switzerland is also known for its incredibly stunning landscape, and I thoroughly enjoyed hiking, running, climbing and swimming in the beautiful Swiss countryside.

I feel extremely grateful to have had the opportunity to work at ETH Zurich. My research group there had a very stimulating atmosphere which made my work and life so enjoyable. It was a truly gratifying experience that exposed me to numerous experts in my field, expanded my research horizons and deepened my interests. Despite the challenges posed by the pandemic I had the opportunity to foster meaningful connections within my research network. The three years I spent in Zurich left a lasting mark on both my professional and personal development, reaffirming my love for the academic environment and the abundant opportunities it presents. Living in Europe also enriched my personal life, and allowed me to indulge my passions for outdoor activities and exploring places with a rich history.

I consider myself incredibly fortunate to have been offered a tenure-track assistant professorship at TU Delft. Since relocating from Zurich to Delft last summer, I have relished the chance to collaborate with new colleagues and connect with fellow researchers in the Netherlands. The country's small size and well-connected academic landscape makes it very convenient to travel and to visit various universities and institutions across the country. I was surprised at first to find out that so many of my colleagues in Delft actually live in other cities. In particular, it seems to be an unwritten rule that to be a professor in statistics at TU Delft you have to live further north than Amsterdam.

From a small city in Hunan, to Jilin, Hong Kong, Zurich and now Delft, each stage of my academic life has contributed to my growth as a researcher and as a person, and has shaped my perspective on academia. I'm grateful for the remarkable individuals I have encountered along the way, whose positive influences have paved the way for both my academic and personal development. As I continue my career at TU Delft, I remain passionate about exploring mathematical models and techniques for solving problems in financial mathematics, and I eagerly anticipate further collaboration and interaction with the academic community in the Netherlands and beyond.

Personal webpage: <https://fenghuiyu.github.io>

Wim Caspers

Stanislascollege, Delft, en
Faculteit EWI en Lerarenopleiding, TU Delft
w.t.m.caspers@tudelft.nl

Onderwijs Bespreking examen vwo wiskunde B 2023

In 1983 liep het anders af dan in 2023

In februari van dit jaar verscheen het rapport *Toetsen getoetst* [2], waarin het niveau van de centrale examens wiskunde B (en wiskunde A en natuurkunde trouwens ook) aan de orde werd gesteld. Er werden examens van vroeger met die van nu vergeleken en er werden vraagtekens gezet bij de hoge gemiddelde score (7,0) voor het examen wiskunde B in de periode 2015–2021. Het rapport en ook de discussie die na het uitbrengen ervan volgde maakte duidelijk dat het de moeite waard is om het niveau van onderwijs en examens eens goed tegen het licht te houden en ook dat vergelijkingen met vroeger trekken nog niet zo eenvoudig is. Wim Caspers heeft het examen van 1983 er eens bij gepakt en vergeleken met dat van 2023.

Inmiddels zijn we weer een paar examens verder dan waar het rapport *Toetsen getoetst* [2] zich op richtte (het jaar 2022 was nog niet meegenomen in het rapport), en kunnen we het verdere verloop van het gemiddelde cijfer wiskunde B bekijken. Het gemiddelde cijfer in de jaren 2021, 2022 en 2023 kwam op 6,7; 6,5 en 6,7 (door gebruik te maken van de N -termen 1,5; 1,8 en 1,9). Na de coronacrisis is voor het normeren van de centrale examens echter noodgedwongen een andere aanpak dan tot dan toe gebruikelijk gekozen. Voor het berekenen van

de N -term maakte de vaststellingscommissie gebruik van het gemiddelde cijfer uit de jaren voor de crisis, de historische N -term, de inschatting van de moeilijkheidsgraad door de docenten en de opmerkingen die docenten en leerlingen meldden over specifieke opdrachten uit het examen.

Cijfermatig blijft het lastig vast te stellen of examens makkelijker zijn geworden dan vroeger en nu misschien weer een beetje moeilijker worden. Gelukkig zijn oude examens goed terug te vinden via de website van Henk Hofstede [1] en als proef

op de som vergelijken we het examen van 2023 met dat van 1983.

Tot eind jaren tachtig was het leven overzichtelijk, zo ook de centrale examens wiskunde op het vwo. Niet iedereen had wiskunde in het pakket. De meesten deden wiskunde I en meer was ook niet nodig om toegelaten te worden in het vervolgonderwijs. Wiskunde II kon erbij gekozen worden, maar dat werd nooit populair. Het centrale examen uit 1983 was uitermate voorspelbaar (zie Figuur 1). Zoals ieder jaar was er een opgave waarin een functie onderzocht moest worden (met andere woorden: bepaling van domein, snijpunten met de x -as, afgeleide, extremen en asymptoten) vergezeld van het oplossen van een ongelijkheid of het bepalen van een integraal. Daarnaast steeds een kansberekeningsopgave, een opgave over een kromme en een differentiaalvergelijking. Geen verrassingen en eigenlijk was steeds duidelijk welke aanpak tot een succes zou leiden.

2

1. Gegeven zijn de functies met domein $\mathbb{R}^+$

$$f : x \rightarrow \frac{4 \ln^2 x}{x} \quad \text{en} \quad g : x \rightarrow \frac{1}{x}.$$

- Los op $f(x) \geq g(x)$.
 - Onderzoek de functie f .
Teken de grafieken van f en g ten opzichte van één rechthoekig assenstelsel Oxy .
 - Bereken de oppervlakte van het vlakdeel ingesloten door de grafieken van f en g .
2. Een vaas bevat twee gele, drie rode en vijf blauwe knikkers.
- Men trekt aselekt in één greep drie knikkers uit de vaas en legt ze terug in de vaas.
Dit experiment voert men tien maal uit.
Bereken in vier decimalen nauwkeurig de kans dat er bij deze tien grepen precies vier grepen zijn waarin geen blauwe knikker voorkomt.
 - Men trekt aselekt in één greep vier knikkers uit de vaas.
Bereken de kans dat er evenveel gele als rode knikkers in de vaas achterblijven.
 - Men trekt aselekt en met terugleggen tien maal een knikker uit de vaas.
Bereken in vier decimalen nauwkeurig de kans dat er bij deze tien trekkingen precies drie maal een gele en precies drie maal een rode knikker getrokken wordt.

3. Ten opzichte van een rechthoekig assenstelsel Oxy is

gegeven de kromme K met vergelijking $y^2 = \frac{-x^2 + 3x}{x + 1}$.

- Bereken de coördinaten van de punten van K waarin de raaklijn aan K evenwijdig is aan de x -as of aan de y -as.
- Onderzoek of K een asymptoot heeft.
Teken K voor $x \in [-5, 3]$.
- Het deel van K waarvoor $x \in [0, 3]$ wordt gewenteld om de x -as.
Bereken de inhoud van het omwentelingslichaam dat daardoor ontstaat.

4. V is de verzameling differentieerbare functies f van $(0, \pi)$ naar $\mathbb{R}$ met de eigenschap dat voor elke x uit het domein geldt:

$$f'(x) = f(x) + 7 \cos x + \sin x.$$

- Voor welke $a \in \mathbb{R}$ en $b \in \mathbb{R}$ geldt: de functie $x \rightarrow a \cos x + b \sin x$ is een element van V ?
- De grafiek van een element van V raakt de grafiek van de functie $x \rightarrow e^x$.
Bereken in twee decimalen nauwkeurig de coördinaten van het raakpunt.
- De grafiek van een element van V heeft een buigpunt op de lijn $y = 10$.
Bereken de richtingscoëfficiënt van de raaklijn aan die grafiek in dit buigpunt.

EINDE

Figuur 1 Examen wiskunde I, eerste tijdvak, 1983.

In 2023 begint het examen ook voor-
spelbaar met de functie f , die voor $x > 0$
gegeven wordt door

$$f(x) = 2x + \frac{1}{x}.$$

Het minimum mag berekend worden, een
scheve asymptoot wordt gezocht, een inte-
graal van a tot $2a$ mag onafhankelijk van
 a bewezen worden en de inhoud van een
omwentelingslichaam moet berekend wor-
den. Al met al niet zo heel veel anders dan
opgave 1 uit 1983, afgezien van het feit
dat de substitutiemethode nodig was voor
de integraal uit 1983 en dat die methode
in 2023 niet gekend hoeft te worden. Het
omwentelingslichaam zien we terug in 3c
uit 1983.

Daarna is het even klaar met de voor-
spelbaarheid in 2023. Er volgt een verhaal
over vrijbuigen van metalen platen, waarbij
sprake is van een neutrale lijn. Zie Figuur 2:
de lengte PQ gelijk aan de lengte van boog
 $P'Q'$. De aanpak voor dit vraagstuk is niet
zo vanzelfsprekend als voor de opgaven
uit 1983. Waar zit er een verband verstopt
tussen d en $P'Q'$, is het handig om d uit te
drukken in $P'Q'$ of juist andersom, waar-
om niet d gelijk aan 5 gekozen? Daarna
volgt nog invul- en omschrijfwerk van een
formule

$$F = \frac{R \cdot d^2}{V} \cdot \left(1 + \frac{4d}{V}\right).$$

Net als in 1983 is er ook in 2023 sprake van
een kromme, maar dan beschreven door
bewegingsvergelijkingen (zie Figuur 3).
De opdracht om te bewijzen dat inderdaad
de bewegingsvergelijkingen van Q gegeven
worden is voor de kandidaten een stan-
daardopgave, maar dat er in de formule
voor de lengte van PQ een absolute waar-
de opgeschreven kan worden

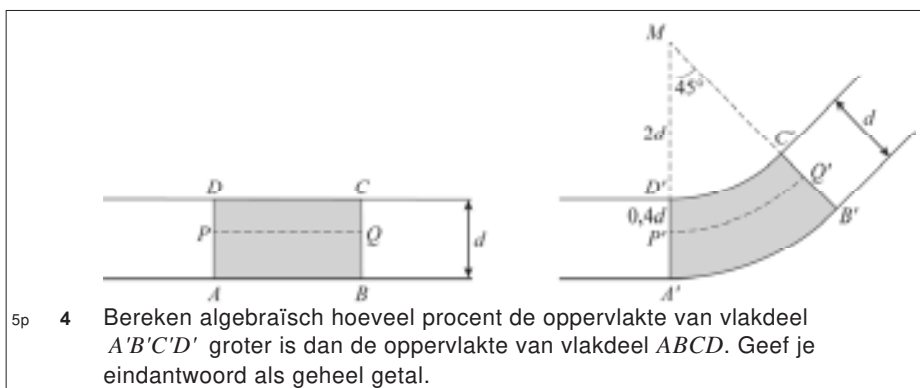
$$L = |t| \cdot \sqrt{2t^2 + 2}$$

is verrassend voor sommigen en de vraag
“tot welke waarde de helling van de gra-
fiek van L nadert als t vanaf links tot 0
nadert” zal velen overvallen hebben. Geen
gewoonlijk einde van een bewegingsverge-
lijkingenopdracht.

Kandidaten met een afkeer van de
absolute waarde werden in de volgende
opdracht niet gespaard (zie Figuur 4). Ge-
lukkig vielen de bijhorende vragen mee.
Er werd gevraagd a en b te bepalen in de
formule

$$g(x) = a + b \sin(x)$$

en ook om de oppervlakte van het grijze



Figuur 2 Figuur 3 uit examen wiskunde B, eerste tijdvak, 2023.

Gedraaide parabool

De bewegingsvergelijkingen van een punt P worden gegeven door:

$$\begin{cases} x_P(t) = 2t \\ y_P(t) = 2t^2 \end{cases}$$

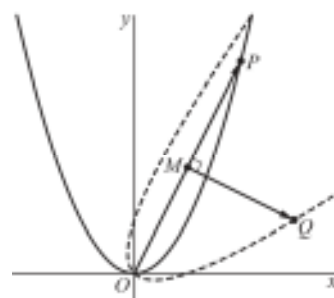
Punt M is het midden van lijnstuk OP . Vector $\overrightarrow{MP}$ wordt rechthoekig
geroteerd om M over 90° . Zo ontstaat de beeldvector $\overrightarrow{MQ}$.
In figuur 1 is voor een waarde van t de situatie weergegeven.

Tijdens de beweging van P beschrijft ook
het punt Q een baan. In figuur 1 is deze
baan gestippeld weergegeven.

De bewegingsvergelijkingen van Q
worden gegeven door:

$$\begin{cases} x_Q(t) = t + t^2 \\ y_Q(t) = t^2 - t \end{cases}$$

figuur 1



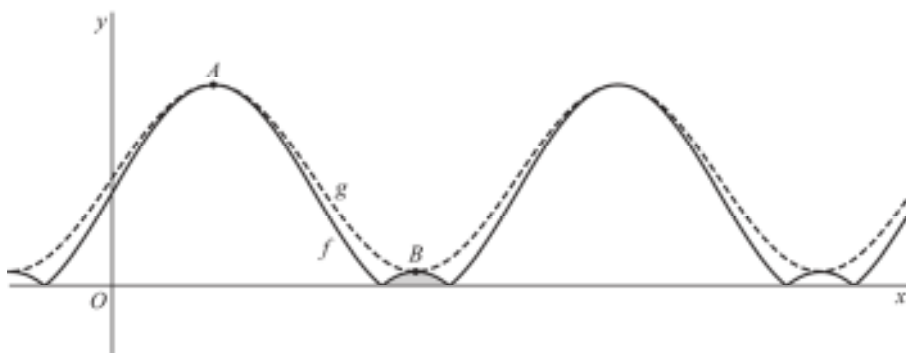
3p 7 Bewijs dat dit inderdaad de bewegingsvergelijkingen van Q zijn.

Figuur 3 Uit de opdracht 'Gedraaide parabolen' uit 2023.

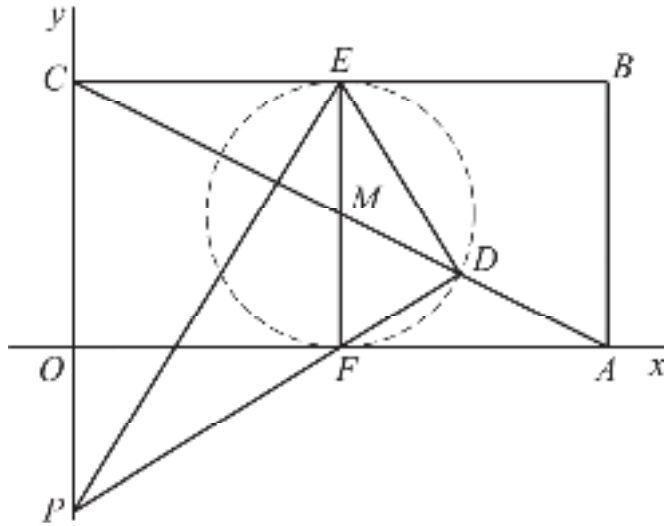
De functie f wordt gegeven door $f(x) = \left| \sin(x) + \frac{1}{2}\sqrt{3} \right|$.

In de figuur is de grafiek van f als doorgetrokken lijn weergegeven.

figuur



Figuur 4 Uit de opdracht 'Absolute sinus' uit 2023.



Figuur 5 Uit de opdracht 'Bissectrice in een rechthoek' uit 2023.

vlakdeel te berekenen. Uitwerkingen liggen redelijk voor de hand, al viel hier en daar het commentaar te horen dat je toch echt wel moest begrijpen wat je aan het doen was. In 1983 kwam je er makkelijker mee weg, als je niet begreep wat je aan het doen was.

De meetkundeopgave vereiste vanwege de veelheid aan mogelijke uitwerkingen

ook dat de kandidaten scherp in de gaten hielden waar ze mee bezig waren (zie Figuur 5). De rechthoek is 4 bij 8, de punten E en F zijn middens en de cirkel raakt de boven- en onderkant. Middelpunt $M(4,2)$ is snijpunt van AC en EF . De opdracht is om de y -coördinaat van P te berekenen. (Eerder werd al duidelijk dat de lijn door punten E en F bissectrice is.)

Ook de laatste opgave bevatte een verrassing. Waar in het begin van het examen gevraagd werd om te laten zien dat een integraal van a tot $2a$ onafhankelijk was van a , is de uitkomst van een integraal nu juist wel afhankelijk van a , namelijk $a - \ln(e^a + 1) + \ln(2)$, en de opdracht is te laten zien dat dit voor positieve a kleiner is dan $\ln(2)$. Zijn ze niet gewend, de kandidaten uit 2023.

In 1983 kwam je er makkelijker mee weg, als je niet begreep wat je aan het doen was.

Hoe liep het examen in 1983 af? Na de onvermijdelijke vaas met knikkers draaide een opgave over een differentiaalvergelijking uit op het oplossen van

$$8 \cos(x) - 6 \sin(x) = 10.$$

Het zou vandaag de dag een verrassing zijn, maar toen bevatten de boekjes rijen met sommetjes waarin dergelijke vergelijkingen werden opgelost, zonder nadenken. Toch is het met sommige kandidaten uit 1983 nog goed afgelopen. ☺

Referenties

- 1 H. Hofstede, hhofstede.nl, Opgehaald van http://www.hhofstede.nl/opgaven/examens/EXAMENS_OUD.htm, 9 juli 2023.
- 2 L. Zonnenberg en P. Rutten (2023), *Toetsen getoetst*, McKinsey & Company.

Rob van Oord

Waddinxveen
robvanoord@tiscali.nl

Evenement 29ste Nationale Wiskunde Dagen

De geofractor komt om de hoek

Op vrijdag en zaterdag 14 en 15 april vonden voor de 29ste keer de Nationale Wiskunde Dagen plaats, in de Leeuwenhorst in Noordwijkerhout. Rob van Oord was er weer bij.

Shortcut

Op 14 en 15 april 2023 kwamen ruim 800 wiskundedocenten, een recordaantal, naar Noordwijkerhout om samen het feest van wiskunde te vieren. Met drie big shoppers vol modellen en papier wurmde ik mij door de menigte die in een lange rij voor de incheckbalie stond. Vanuit de rij klonk blij en luidkeels: “Hé Rob, wat goed dat ik je zie.” Oud-collega Antoon had ik al jaren niet meer gezien. Hij is nu weer terug vanuit China en geeft les in Dordrecht. Voor deze sfeer van vrienden kom ik ook graag naar de NWD.

In de opening van de NWD liet Irma Cornelisse van het CvTE een menselijk gezicht zien van wat voor velen van ons slechts een instantie is die ons (de vaak vermaledijde) examens verstrekt. Er zitten wel degelijk op veel plaatsen in het proces wiskundecollega's. Ze maakte duidelijk dat het grote voordeel van centrale examens is dat je voor vervolgoopleidingen niet weer allerlei aparte toelatings hoeft te doen, zoals in de ons omringende landen wel vaak het geval is.

De beurt aan Marcus du Sautoy, een Britse getaltheoreticus aan Oxford University, die een pleidooi hield voor minder oefeningen en drill en meer shortcuts in het zoeken naar oplossingen van gestelde problemen. Eerst denken dan doen. Zo was Gauss ooit snel klaar met zijn strafwerk. Hij moest de getallen van 1 t/m 100 optellen. In gedachte zette hij de rij 1 t/m 100 in omgekeerde volgorde onder de gewone rij. Hij zag dat je dan bij optellen 100 keer 101 krijgt. Dus het antwoord van zijn strafwerk was $100 \times 101/2 = 5050$.

In de natuur zie je dat bijen vanuit zichzelf een shortcut gebruiken voor het maken van cellen van was. Ze hadden vierkante of driehoekige cellen kunnen maken, maar een honingraat bestaat uit zeshoekige cellen. Voor het bouwen van dit patroon is de minste energie nodig. In de praktijk van pretparken wordt de omgekeerde cycloïde gebruikt om een baan van de top naar een laagste punt verderop in de achtbaan te maken waar je op de snelst mogelijke manier heen kunt. Mooie bijkomstigheid is dat het niet uitmaakt waar je op de kromme begint met dalen. Vanaf elk punt van de kromme duurt het even lang om in het laagste punt te komen. Dus geen geduw en getrek van de wagentjes. Of toch wel, een beetje.

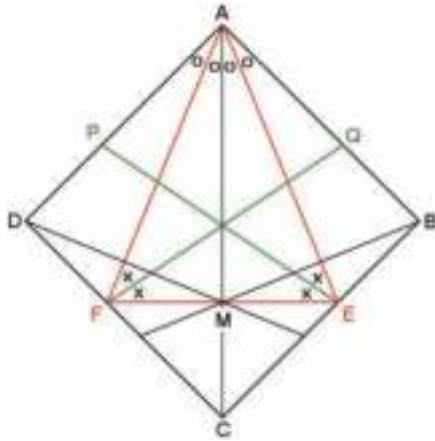
In de pauze kon ieder die dat wilde een gesigneerd exemplaar aanschaffen van het naar het Nederlands vertaalde boek: *Beter denken, de kunst van de shortcut* [2].

Islamitische patroonkunde

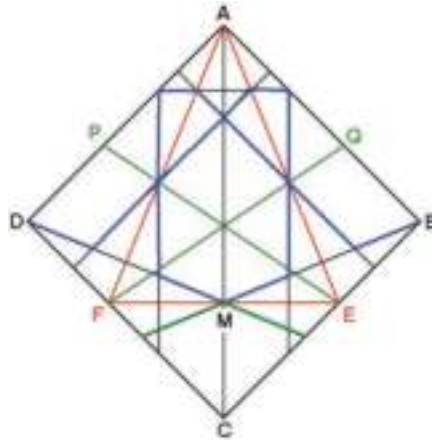
Een aantal jaar geleden werkte ik als invaller op het Alfrinkcollege in Zoetermeer. Daar begeleidde ik onder andere een klas 5 vwo wiskunde C met drie leerlingen. Als praktische opdracht moesten de leerlingen een lessenserie doorwerken, ontworpen door Goossen Karssenberg en Marjanne Klom, over islamitische patronen. Fascinerend hoe zij (wij) met potlood en liniaal ontdekten welke achterliggende patronen horen bij de mooie tegelfiguren die we van moskeeën kennen. Geïnspireerd door professor Jan Hogendijk heeft Goossen sinds 2008 tal van workshops gegeven aan scholieren en studenten in Isfahan, Istanbul en in Nederland. Gelukkig heeft hij een jaar

geleden besloten de manier van werken van deze kunstenaars, of moet je misschien zeggen ambachtslieden, en de achtergronden van veel patronen in een Zebra-boekje neer te schrijven. Over dit boekje, dat net is verschenen [4], gaf Goossen een workshop op de NWD. In de workshop vertelde Goossen over zijn zoektocht en ontdekkingen. Als redacteur van de Zebra-reeks beleefde ik al mooie momenten bij het lezen van zijn manuscript. Ik probeerde al tekenend achter de bedoeling te komen van de ‘kansen’ om te doen wat hij voorstelt. Even verderop bespreek ik van een tegeltableau [4, p.10] hoe die mogelijk ontworpen is. Veelal gaat het om precies en nauwkeurig de instructies te volgen, meer nog dan het bewijs of de figuren exact zijn.

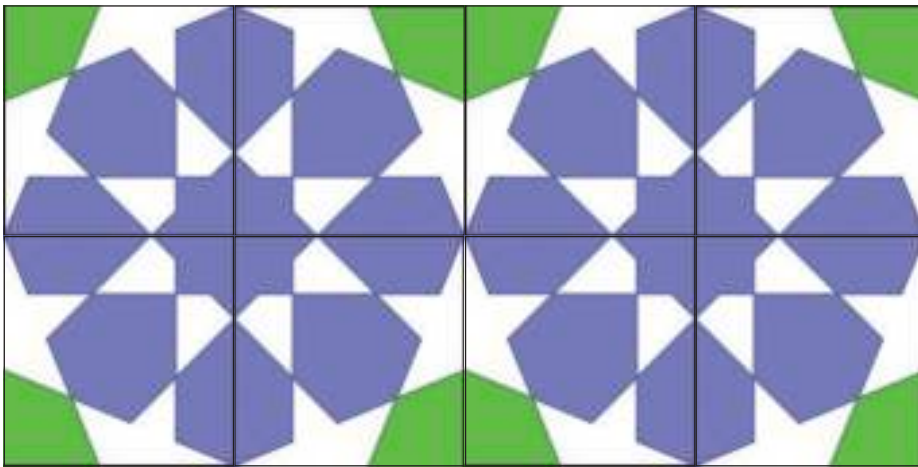
Omdat de hoeken van veelhoeken beter in delen van een hele toer van 360° zijn uit te drukken heeft Goossen een speciale hoekenmeter ontworpen. Niet in graden maar in delen van toeren. In graden is een hoek van $\frac{1}{7}$ toer niet zo eenvoudig te meten, of te tekenen. Op de zogenaamde geofractor vind je dan ook geen graden, maar wel getallen als $\frac{1}{5}$, $\frac{1}{6}$ ($=60^\circ$), $\frac{1}{7}$, ..., $\frac{1}{10}$ ($=36^\circ$), $\frac{2}{9}$, enzovoort, alle $< \frac{1}{4}$ toer ($=90^\circ$). Er zijn maar heel weinig manuscripten te vinden waarin wordt uitgelegd hoe de patronen ontworpen zijn. Het ging voornamelijk via mondelinge overlevering. Om achter de onderliggende patronen van mozaïeken te komen is het meten met de geofractor van onschatbare waarde. Het is de kunst om een onderliggende kleinste cel te vinden. Als je die eenmaal hebt, kun je door spiegelen, draaien en schuiven het patroon uitbreiden naar het gehele vlak. In het patroon zoek je naar symmetrieassen en punten, zowel lokaal als voor het hele patroon. Vaak ontstaat dan een vierkant (kleinste cel). Ik laat



Figuur 1



Figuur 2



Figuur 4 Acht cellen met hetzelfde patroon, gedraaid en gespiegeld.

eerst zien welk patroon we in de workshop getekend (gevouwen) hebben. Zie ook *Pythagoras* 59-1, september, 2019, Figuur 6C. Daarna behandel ik een patroon uit het Zebra-boekje. Zie [4, p. 16].

We zetten eerst een vierkant ABCD op zijn punt, met toppunt A. We tekenen (vouwen) de verticale diagonaal AC met twee bissectrices AE en AF (rood) van de halve tophoeken BAC en DAC. Vervolgens de basis EF (rood) van de gelijkbenige driehoek AEF, met hoeken van $\frac{1}{8}$, $\frac{3}{16}$ en $\frac{3}{16}$ toer. Teken (vouw) de bissectrices EP en FQ (groen) van de hoeken AEF en AFE. M is het midden van EF. Teken (vouw) de lijnen BM en DM. Zie Figuur 1. Teken lijnen $m \parallel AC$ en $n \parallel AC$ door de snijpunten van EP en AF, en van FQ en AE. Teken lijn $j \parallel AB$ door het snijpunt van AE en m , en lijn $k \parallel AD$ door het snijpunt van AF en n . Maak nu lijnstukken blauw (en groen) om (halve) zeshoeken, vliegers en sterpunten te accentueren. Zie Figuur 2.

In een blog op de site van de NVvW schreef Henk Hietbrink over een variant van dit patroon [3].

Patroon met strikjes (uit Zebra 66)

In het volgende voorbeeld komen er vierkante cellen met (rode) 'strikjes' tevoorschijn. De strikjes vormen de achtergrond van de cel met (blauwe) vliegers. Op p. 40 van Zebra 66 staat hoe je die strikjes kunt tekenen [4]. Maar omdat je bij deze beschrijving buiten de cel moet tekenen geef ik een iets andere versie. Die komt wel op hetzelfde patroon uit. Via een vernuftige constructie van gelijkvormige driehoeken, die kennelijk al in die tijd bekend moet zijn geweest, wordt een punt G op AB geconstrueerd zodat tegelijkertijd een punt H op BC en een punt J op AC komen te liggen waarbij driehoek GHJ gelijkbenig is met $GH=GJ$ én $\angle HGJ = \frac{3}{16}$ toer.

Neem een vierkant blaadje ABCD (uit een A4). Vouw beide diagonalen. Teken een gelijkbenige (hulp)driehoek APQ met tophoek A en opstaande zijden PA (P op AB) en QA (Q op AC) met lengte PA en QA ongeveer $\frac{1}{2}AB$. $\triangle APQ$ is dus gelijkbenig met tophoek A van $\frac{1}{8}$ toer ($=45^\circ$) en basishoeken APQ en AQP van $\frac{3}{16}$ toer. Teken door P een lijn $m \parallel AC$. Teken op



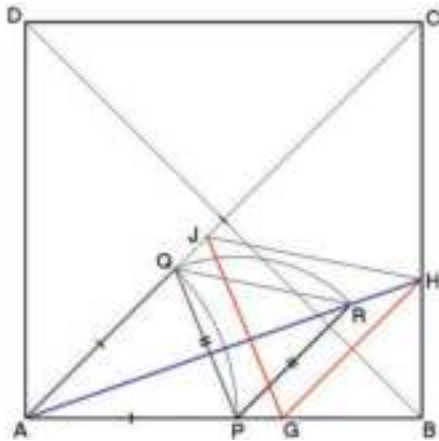
Figuur 3 Patroon van één cel.

m punt R zodat $PR=PQ$. Nu is $\angle RPB = \frac{1}{8}$ toer ($=45^\circ$) en $\angle RPQ = \frac{3}{16}$ toer. Teken lijn AR door tot punt H op BC. Hiermee vergroot je $\triangle PQR$ tot een driehoek (GHJ) met de gewenste eis dat de 'opgeplakte' driehoek (GHJ) gelijkbenig is met punt G op BC. Dit gaat dan zo. Teken punt G op AB zodat $GH \parallel AC$. Teken punt J op AC met $GJ \parallel PQ$. Nu is $\triangle PQR \sim \triangle GHJ$. Dus ook geldt dat $GJ=GH$ en $\angle HGJ = \frac{3}{16}$ toer. Zie Figuur 6. Teken het spiegelbeeld van GJ bij spiegelen in diagonaal BD en het halve strikje is af. Maak het strikje compleet door de getekende helft te spiegelen in diagonaal AC. Zie Figuur 7. Tot slot moeten nog de vliegers binnen het strikje getekend worden. Drie hoekpunten worden gevormd door de middens K van GJ, L van GH en M van HJ. Nu is $\angle KLM = \frac{3}{16}$ toer (ga dit zelf na). Teken de top N van de vlieger zodat $\angle NKL = \angle NML = \frac{3}{16}$ toer. Zie Figuur 7. Teken de overige vijf (blauwe) vliegers erbij. Zie Figuur 8.

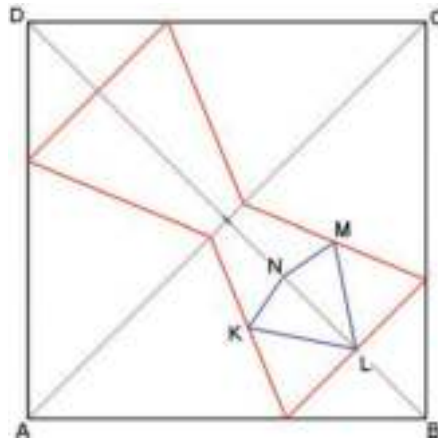
In 2017 maakte Goossen met zijn dochter Maïte een reis naar Isfahan. Over dit



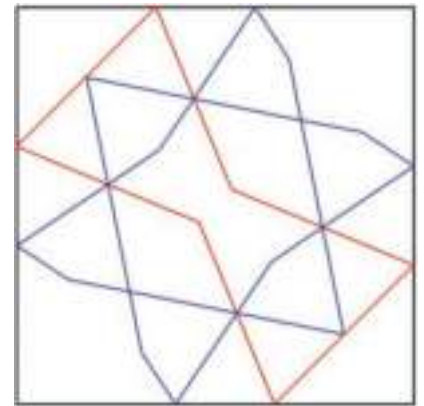
Figuur 5 Ontwerp van Goossen Karssenbergh.



Figuur 6



Figuur 7



Figuur 8 Patroon van één cel.

avontuur schreef zij het boekje *Snijpunt Isfahan* [5]. Daar werd door een bekende tegelmaker van een nog niet eerder vertoond patroon, ontworpen door Goossen, een echt tegeltafel gemaakt. Zie Figuur 5. Het is wel toevallig dat tegelpatronen ook actueel zijn in het nieuws. Op 30 maart 2023 verscheen een bericht dat wiskundigen van de universiteit van Arkansas een zogenaamde ‘einstein’-tegels, genaamd ‘de hoed’, gevonden hebben die het vlak aperiodiek bedekt, dat wil zeggen dat het patroon zich nergens herhaalt. In de pauze kon ieder die dat wilde spelen met een set van deze tegels. Ze zijn op internet te bestellen. In de jaren zeventig werd Penrose al beroemd door zijn sets van twee tegels die het vlak aperiodiek kunnen bedekken. Deze tegels komen uit de gulden snede-driehoek. De hoeken zijn veelvouden van 36° .

Heel veel kubussen

Na de pauze ontvingen Marjan Botke en ik de 55 deelnemers van onze workshop. Eerst gaven we wat voorbeelden van waar je kubussen tegenkomt, zoals dobbelstenen, kubuswoningen, puzzels, straatornamenten. Daarna kwamen we met wat mooie vragen die je bij een kubus kunt stellen. Uitgaande van een dobbelsteen (hoeveel verschillende zijn er eigenlijk?) waarvan je weet dat er zes zijvlakken zijn, kun je beredeneren hoeveel hoekpunten ($6 \times 4 = 24$, maar je telt elk hoekpunt in drie zijvlakken, dus $\frac{24}{3} = 8$) en hoeveel ribben ($6 \times 4 = 24$, maar je telt ze alle twee keer, dus $\frac{24}{2} = 12$) een kubus heeft. De formule van Euler: $H + Z = R + 2$ kun je laten zien. Ook bij vormen die je krijgt als je van een kubus stukken afzaagt (kubus met een deuk). Vloeren in een kubuswoning. Maar

het mooiste is als je eerst met de klas kubussen gaat vouwen. Daarna kun je er dan mee aan de slag met allerlei interessante vragen. Aan de hand van het boekje *Origami kubussen* [1] gingen de deelnemers vol goede moed aan de slag. Er was keuze uit meer dan achttien verschillende mogelijkheden. Zie Figuur 9. De meeste werden gevouwen uit zes gelijke modules. Op internet vind je de bekendste module, de SONOBE-unit. Het komt er telkens op neer dat je bij het vouwen gleufopeningen creëert waarin later flappen worden gestoken.

Het is ook mogelijk om een kubus uit één vouwblaadje te maken. De bekendste daarvan is de opblaaskubus uit de waterbombbasis. In het Chinese vouwboek [6] dat ik op mijn 11de van mijn moeder kreeg toen ik vanwege een hersenschudding twee weken op bed moest blijven, wordt het vouwsel papieren bal genoemd. Als het vouwen klaar is, moet je hem nog opblazen tot de ruimtelijke vorm. Nadeel is dat hij niet echt mooi hoekig en regelmatig is. Zie Figuur 10.



Figuur 9 Kubussen die deelnemers tijdens de workshop gemaakt hebben.



Figuur 10 Opblaaskubus.

Codes, spelletjes en bollenvelden

Na het diner vermaakte James Grime van de University of Cambridge ons met filmpjes van Numberphiles en zijn YouTube-kanaal 'the singing banana'. Met personen uit het publiek voerde hij enkele trucjes uit. Hij vertelde dat Claude Shannon eigenlijk belangrijker was dan Alan Turing, met wie hij in Washington samenwerkte om de Enigma te kraken, voor het ontsleutelen van de berichten van de Duitsers in de Tweede Wereldoorlog. Met de Lorenz-machine werden berichten tussen Hitler en de legertop verzonden. Hij bedacht om met bits te werken. Een voorbeeld: met 'dots en crosses' is oxxx een M. Versleutel je die met een optelling bij de 'geheime' letter R (oxoxo) door de regels $o + o = o$, $o + x = x$, $x + o = x$ en $x + x = o$, dan wordt het bericht oxxx + oxoxo = oxox (letter P). Om deze letter te ontsleutelen gebruik je weer een optelling met de letter R: oxox + oxoxo = oxxx. Ziedaar de letter M is terug.

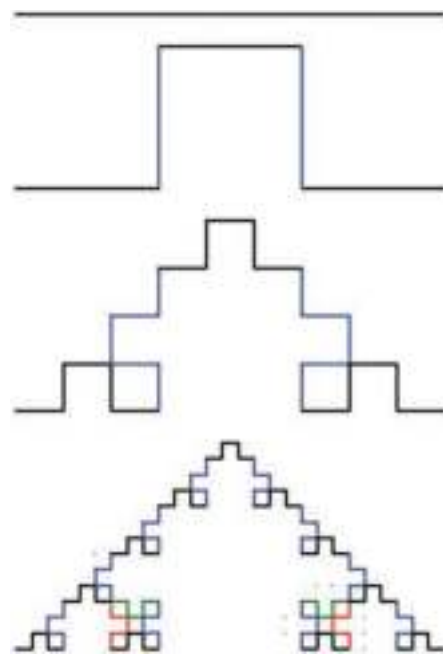
Ook de avond stond bij mij in het teken van de tegels. Op de spellenmarkt heb ik kennis gemaakt met het spel AZUL. Je moet proberen een tegelvloer (van de Portugese koning Manuel I) vol te krijgen met tegeltjes uit de fabrieken. Je kunt strategisch te werk gaan door goed te kijken naar wat andere spelers nodig hebben en wat er in de fabrieken en in de pot ligt. Je moet ook wat geluk hebben om de juiste aantallen van een soort te kunnen scoren. Bij pech gaan er punten van je totaal af. Mijn vrouw en ik spelen vaak spellen in de (winter-) avond. Dit spel is ook zeer geschikt om met z'n tweetjes te spelen. Er zijn inmiddels ook al drie varianten van op de markt. Maar ik ga mezelf eerst maar eens in de basisversie verdiepen. (Jammer was dat je het spel niet direct kon kopen. Ik heb het later in de winkel gekocht.) Daarna nog even de beentjes van de vloer op de muziek van de geweldige band Archie and the Bunkers. Omdat de bar niet in dezelfde ruimte was gezet, was de animo en de sfeer helaas ondermaats. Dat moet volgend jaar weer anders.

De zaterdagochtend begon met een mooie wandeling met collega's langs de bollenvelden en over een iets van het parcours afwijkende route door landgoed Nieuw Leeuwenhorst, behorende tot het Zuid-Hollands Landschap, waartoe ik als donateur en vrijwilliger (al 48 jaar) vrij toegang heb. De eerste hardlopers van de Funrun waren al lang en breed binnen toen wij ook ons zoveelste T-shirt afhaalden.

Fractalen met de klas

Peter Ypma liet in zijn workshop een van zijn leerlingen vertellen hoe zij voor een profielwerkstuk wiskundelessen maakten om uit te leggen hoe je met GeoGebra een fractal kunt laten tekenen. Eerst moet je analyseren welke stap er telkens herhaald wordt. We werden uitgedaagd om zelf bij gegeven voorbeelden de herhaalstap te vinden. Bij de Cantorverzameling wordt in een volgende stap elk bestaand lijnstuk in drie gelijke stukken verdeeld en het middelste deel weggelaten. Bij de sneeuwvlokfractal wordt elk lijntje in drie gelijke stukken verdeeld en wordt op het middelste stukje een gelijkzijdige driehoek gezet, en daarna de basis van de driehoek weggelaten.

Het derde voorbeeld was lastiger omdat daar vierkantjes ontstaan door de extra lijntjes die er per stap bijkomen. Zie Figuur 11. Maar als je goed kijkt dan zie je dat weer elk lijnstukje in drie gelijke stukken wordt verdeeld, op het middelste stuk een vierkantje wordt getekend, en ook daarvan de basis wordt weggelaten. Ik heb de verschillende stappen in kleur getekend. Zo zie je beter hoe het gaat. In feite moet je van elke rij een recursieopdracht opschrijven. Voor Cantor wordt het lijnstuk $[a, b]$ in de volgende stap gereduceerd tot de lijnstukjes $[a, a + \frac{1}{3}(b - a)]$ en $[a + \frac{2}{3}(b - a), b]$, enzovoorts. Daarna liet de leerling zien hoe je bij een vlakvulling met gelijkzijdige driehoekjes een recursie moet maken van de coördinaten van de hoekpunten van de



Figuur 11 Fractal.

opeenvolgende stappen. Door de juiste driehoekjes zwart te maken, respectievelijk wit te laten, ontstaat de zogenoemde Driehoek van Sierpiński. Naast dit proces krijg je ook te maken met de beperking van tekeningen op de computer omdat de pixels de kleinste eenheden zijn die je kunt tekenen. Het was mooi om te ervaren hoe goed de leerling zijn verhaal kon vertellen. Behalve de wiskundige vaardigheden werd er ook een helder betoog gehouden.

Rekenwonder en data science

In blok 4 was ik getuige van een show waarin het leven van het joodse rekenwonder Wim Klein voorbij kwam. Theater Adhoc en VLEK lieten deze 'levende computer' tot leven komen, met tekst, muziek en filmpjes. Hij werkte onder andere voor het CERN voordat computers het rekenen gingen overnemen. Hij was een fenomeen en werd Willy Wortel genoemd omdat hij feilloos kon worteltrekken uit grote (meer dan 200 cijfers) getallen. Toch was er ook veel drama in zijn leven. Met gemengde gevoelens verliet ik de zaal.

Margot Gerritsen uit Kloetinge, hoogleeraar datawetenschappen, nam ons in de slotlezing van de NWD aan de hand van zeven onderwerpen mee in haar leven als mens in de wetenschap. Ze heeft na haar studie aan de TU Delft over de hele wereld gewerkt. Ze ging telkens nieuwe uitdagingen aan om met Data Science stromingsproblemen te lijf te gaan. Ze stelde dat je qua wiskunde met alleen lineaire algebra kunt volstaan. Ze legde uit hoe je met vectoren met nullen en enen snel het hele web kunt doorzoeken op het item dat je hebt ingetikt. Ze eindigde (en dat doe ik dan ook maar) met een 'Loesje' van Niels Bohr: "Een expert is iemand die alle mogelijke fouten heeft gemaakt die maar gemaakt kunnen worden op een zeer klein gebied."

Referenties

- 1 Ad van den Broek, *Origami kubussen*, Wageningse Methode, 2019.
- 2 Marcus Du Sautoy, *Beter Denken*, Nieuwezijds, 2023.
- 3 Henk Hietbrink, *Patroonkunde*, blog nvww.nl, 11 april 2023.
- 4 Goossen Karssenbergh, *Islamitische Meetkundige Patronen*, Zebra-reeks, deel 66, Epsilon Uitgaven, 2023.
- 5 Maite Karssenbergh, *Snijpunt Isfahan*, Querido, 2018.
- 6 Maying Soong, *Chinees vouwboek*, Van Breda, 1949.

Redactie NAW

redactie@nieuwarchief.nl

Interview Teun Koetsier

Wiskunde, filosofie en werktuigbouw

Teun Koetsier is twintig jaar redacteur van het Nieuw Archief. Reden voor een interview.

Waarom ben je ooit wiskunde gaan studeren?

“In het bijzonder de meetkunde en later de stereometrie, waren op school — dat was het Christelijk Lyceum in Dordrecht — mijn favoriete vakken. Ik vond het leveren van bewijzen in een meetkundige context leuk. Er is echter nog een aspect van het vak dat een rol heeft gespeeld. Als mijn vader bezoek had dan gingen de discussies vaak over religie of politiek. Mijn vader was Nederlands Hervormd en stemde op de CHU. De bezoekers waren niet zelden Gereformeerd en stemden op de AR. Het ging over actuele politieke kwesties, maar het waarheidsgehalte van Bijbelteksten kwam ook aan de orde. De vraag of in het Paradijs de slang echt tot Eva heeft gesproken is het klassieke voorbeeld. Ik weet nog goed dat ik die discussies aanhoorde en dacht: dit kan ik ook. Lever mij een willekeurige stelling en ik vind er wel argumenten bij, maar met de waarheid heeft dit niets te maken. Geef mij maar wiskunde. Daar weet je precies waar je aan toe bent. Ik wilde al in een vroeg stadium wiskunde studeren.”

Waarom ben je naar Delft gegaan?

“Eigenlijk wilde ik naar Leiden, maar toen mijn moeder ontdekte dat je in Delft ook wiskunde kon studeren zei ze: ‘Waarom ga je daar niet naartoe, dan kan je thuis blijven wonen en met de trein op en neer.’ Zo is het Delft geworden. Helaas was het toen nog zo dat de opleiding tot wiskundig ingenieur pas in het derde jaar begon. Je werd verondersteld eerst de tweejarige

propedeuse van bijvoorbeeld natuurkunde, elektrotechniek of weg- en waterbouwkunde te halen. Daar had ik helemaal geen zin in, maar ik moest een keuze maken. Een artikel in de krant over de Deltawerken, dat waar Nederland groot in was, gaf de doorslag. Ik heb eerst twee jaar civiele techniek gestudeerd, al had ik misschien beter technische natuurkunde kunnen kiezen. Daarna werd het wiskunde.”

Je bent bij Bottema afgestudeerd.

“Oene Bottema was een zeer indrukwekkende persoonlijkheid. N.G. De Bruijn, die Bottema in 1941 in Delft leerde kennen, er-voer hem in die tijd als volgt: ‘Bottema was

een geweldig bestuurder. Zijn stijl was wat we tegenwoordig noemen ‘no nonsense, zero tolerance’. De assistenten en het bedienend personeel waren bang voor hem. Hij kon de dingen licht spottend zeggen, maar iedereen wist dat hij het meende. Niets ontging hem, en zijn geheugen was fenomenaal.’ [4] Dat was dertig jaar later, toen ik Bottema leerde kennen, nog net zo. Verder was hij een uitstekend wiskundige en ook nog een begaafd redenaar.

Ik koos hem als afstudeerdocent omdat hij het college theoretische mechanica op een geweldige manier gaf. Ik ben student-assistent bij hem geweest en ook nog enige tijd ingenieur assistent. Bottema was meetkundige. Achteraf is tot me doorgedrongen dat hij eigenlijk werkte in een onderzoeksgebied dat op veel punten stagneerde. Toen ik hem leerde kennen ging hij al richting emeritaat, maar door zijn fenomenale kennis van de negentiende-eeuwse meetkunde, die hij met twintigste-eeuwse precisie toepaste, slaagde hij er toch ook toen nog regelmatig in om net iets verder te komen dan zijn voorgangers. Een mooi voorbeeld van Bottema’s kunnen is Zieglers paradox. Die paradox, die het optreden van instabiliteit betreft waar je dat niet verwacht, werd in 1952 geformuleerd en na aanzienlijke inspanningen in de negentiger jaren van de vorige eeuw opgelost. In 2009 wezen Verhulst en Kirillov er op dat Bottema, vrijwel onopgemerkt, al in 1956 de oplossing had gegeven [14].

Ik ben afgestudeerd op een aantal kwesties uit de vlakke kinematica. Daar hield Bottema zich in die tijd vrij intensief mee bezig. Zijn werk had de aandacht getrok-



Teun Koetsier

ken van werktuigbouwkundigen in de Verenigde Staten omdat men bij het ontwerp en de analyse van mechanismen niet om de kinematica heen kan. Daarbij werden door ingenieurs, typisch negentiende-eeuws, heel lang grafische methoden gebruikt. Met de opkomst van de computer veranderde dat en gingen analytische methoden een grote rol spelen. Bottema was er goed in om klassieke resultaten analytisch te behandelen. Ludwig Burmester, een van de helden van het vak, had in de negentiende eeuw op synthetische wijze laten zien dat er bij vijf gegeven posities van een bewegend vlak in een vast vlak in het algemeen vier punten in dat bewegende vlak zijn die in de vijf posities op een cirkel liggen. Die punten heten Burmester-punten. Het idee is dat je die punten kunt gebruiken om een mechanisme te ontwerpen dat het bewegende vlak door die vijf posities geleidt. Bottema liet in 1967 met een elegante analytische beschouwing zien hoe je de Burmester-punten kunt berekenen. Dat maakte de bepaling van de Burmester-punten met een computerprogramma mogelijk.

Toen ik aan het afstuderen was werkte Bottema samen met een hoogleraar werktuigbouwkunde uit Stanford, Bernard Roth, die een sabbatical in Delft doorbracht. Roth kwam naar Delft voor Bottema. Samen begonnen ze toen aan het lijvige standaardwerk, *Theoretical Kinematics*, dat in 1979 verscheen [3]. Zonder Roth zou Bottema dit boek nooit hebben geschreven. Zonder Bottema zou Roth een heel ander boek hebben geschreven. De meetkundige eruditie van Bottema is in het boek alom aanwezig.

Voordat Roth terugging naar Stanford nodigde hij me uit om een jaar voor hem te komen werken. Dat heb ik gedaan.”

Je bent niet in de VS gebleven. Wanneer kwam je terug?

“Ik kijk met enigszins gemengde gevoelens terug op dat jaar, het was 1970, in de VS. Een roommate met een gesigndeerde foto van Ronald Reagan aan de muur, wiens vader voor de CIA had gewerkt, gewelddadige botsingen tussen de politie en tegen de Vietnam-oorlog demonstrerende studenten, heerlijk klimaat en een intellectueel stimulerende omgeving. Het was aan de ene kant geweldig. Roth was tevreden over me, maar mij werd ook duidelijk dat mijn toekomst niet in de werktuigbouwkunde



Gert Bottema

lag. Roth stelde mij op een zeker moment voor om in Stanford te promoveren, maar ik ben daar niet op ingegaan. Ik ben teruggekeerd naar Nederland waar ik na mijn militaire dienst een baan als docent wiskunde kreeg bij het Mollerinstituut. Dat was eerst in Eindhoven en later in Tilburg gevestigd.

Dat Mollerinstituut was een zogenaamde nieuwe lerarenopleiding (NLO). De gedachte achter de NLO was dat men duizenden jaren wiskunde had onderwezen zonder kennis van didactiek en pedagogiek. Dat moest veranderen en de NLO's besteedden veel aandacht aan die onderwijskundige aspecten. Ik gaf er wiskunde en heb dat met veel plezier gedaan.

De bedenkers van de NLO's hechtten er waarde aan dat de docenten op de NLO contact zouden onderhouden met het wetenschappelijk onderwijs. Alle docenten hadden ten behoeve daarvan elke week een 'wetenschappelijke dag'. Ik herinner me dat ik onze hoofddocent vroeg: 'Wat word ik verondersteld op mijn wetenschappelijke dag te doen?' Hij zei toen: 'We zijn druk bezig de opleiding vorm te geven. Besteed die dag maar aan voorbereiding.' Ik heb ook een keer een collega gevraagd wat hij op die dag deed. Hij antwoordde: 'Ik werk in mijn tuin.' Ik woonde echter op een flat en had geen tuin. In die tijd heb ik ook nog contact over een promotieproject gehad met Bottema, die mij wees op openstaande vragen in de equiforme kinematica. Daarbij laat men bij de beweging ook gelijkvormigheidstransformaties toe. Dat had inderdaad iets kunnen opleveren, maar ik zag

het in die tijd niet zitten. Daarop besloot ik om filosofie van de wiskunde te gaan studeren op mijn wetenschappelijke dag. Het Mollerinstituut behoorde bij de Katholieke Leergangen en ik besloot om die studie in Nijmegen te doen. Vanaf dat moment ging ik elke woensdag naar Nijmegen.”

In Nijmegen zwaaide Johan de longh de scepter, nietwaar?

“Dat klopt. Die studie bestond uit echte filosofievakken en de grondslagen van de wiskunde. Die grondslagenvakken werden door De longh uitstekend gegeven.

De longh was een intrigerend figuur. Hij was assistent geweest bij L.E.J. Brouwer in Amsterdam en ook bij Freudenthal in Utrecht. Hoewel hij niet gepromoveerd was en ook niet publiceerde werd hij in 1960 benoemd tot hoogleraar in Nijmegen om daar de studie wiskunde op te zetten.

De longh was een intuïtionist die vond dat Brouwer gelijk had, zonder dat hij overigens de klassieke wiskunde overboord gooide. Klassieke resultaten kun je zien als richting aangevende vermoedens die wachten op een mentale constructie, een intuïtionistisch bewijs. De longh was tevens een groot bewonderaar van Plato. In navolging van Plato zag hij het college geven als het voeren van een gesprek met spirituele groei als doel. Hij publiceerde nauwelijks omdat hij, ook in navolging van Plato, het geschreven woord als een starre en niet effectieve vorm van communicatie zag. Als vrome katholiek waardeerde hij eveneens de mystieke kant van Plato. Hij leefde celibatair in een appartement tegenover het station in Nijmegen. Daar woonde ook zijn huishoudster, juffrouw Marie. Als je bij De longh op bezoek was dan bracht juffrouw Marie de koffie.

Ik ben bij De longh afgestudeerd op een scriptie over verzamelingentheorie. Achteraf kijkend ben ik altijd een platonist geweest in de zin van Bernays' definitie uit 1935: 'Wiskundige structuren bestaan los van de menselijke geest en wiskundige waarheden zijn eeuwig.'

Een bekend en serieus bezwaar tegen het platonisme is dat niet duidelijk is hoe onze geest in contact kan komen met die los van haar bestaande structuren. Ik hang op dat punt de visie aan die 'overvloedig platonisme' (plenitudinous platonism) heet. Het kernpunt is dat elke consistente wiskundige theorie noodzakelijk naar een abstracte entiteit verwijst.”

Hoe ben je op de VU terechtgekomen?

“De afdeling wiskunde van de VU zocht aan het eind van de zeventiger jaren een ‘medewerker algemene vorming’, die onderwijs zou moeten verzorgen in de geschiedenis en filosofie van de wiskunde en in de maatschappelijke aspecten van het vak. Op het Mollerinstituut was ik betrokken bij het geven van een college geschiedenis van de wiskunde dat daar was opgezet door mijn collega daar Niek van Niekerk. Ik was bovendien inmiddels afgestudeerd in Nijmegen. Die combinatie moet de doorslag hebben gegeven. Ik werd in 1980 aangesteld op de VU.

Op de VU heeft men mij altijd erg vrij gelaten wat mijn onderzoek betreft. Omdat ik het gevoel had dat ik daar echt iets van wist, ben ik mij bezig gaan houden met de geschiedenis van de kinematica en tegelijkertijd zocht ik een geschikt promotieproject op het gebied van de filosofie van de wiskunde.

In Nijmegen had De longh mij attent gemaakt op het wetenschapsfilosofische werk van Imre Lakatos. Lakatos betoogt in *Proofs and Refutations* [13] dat de wiskunde net als de natuurwetenschap feilbaar is en dat de gedachte dat wiskundige kennis in principe absoluut zeker is op een illusie berust. Hij doet dat door van historische ontwikkelingen ‘rationele reconstructies’ te geven. Ik vond dat werk intrigerend. Het had zowel een historische component als een filosofische component. En het betrof een kwestie die me interesseerde, de zekerheid van de wiskunde.

Uiteindelijk ben ik op Lakatos gepromoveerd. De dissertatie is in 1991 als boek verschenen onder de titel *Lakatos’ Philosophy of Mathematics, a Historical Approach* [7]. Promotor was de aan de VU verbonden wetenschapsfilosoof Peter Kirschenmann. De historicus Henk Bos was copromotor. Opvallend was dat Henk in een vroeg stadium zei: Ik ben historicus van de wiskunde. Over de filosofische elementen heb ik geen oordeel. En Kirschenmann zei: Ik ben filosoof. Voor het historische deel draag ik geen verantwoordelijkheid. In de praktijk viel dat allemaal wel mee maar ik heb in die tijd wel eens gedacht aan Lenin. Eén van de goede dingen van het marxisme-leninisme was dat men altijd het belang van studie benadrukte. Aan Lenin wordt de kreet ‘Studeren, studeren en studeren’ (учиться, учиться и учиться) toegeschreven. Er zijn ook grote posters uit de Sovjet-

tijd waarop je Lenin ziet met die boodschap. En het verhaal zegt dat ze aan Lenin vroegen: ‘Wat kun je het beste hebben, een echtgenote of een maîtresse?’ Waarop hij zegt: ‘Beiden. Dan zeg je tegen je vrouw dat je bij je maîtresse bent en tegen je maîtresse dat je bij je vrouw bent. En waar ben je? Je zit in de bibliotheek en je studeert, studeert en studeert.’ Ik dacht in die tijd: ‘Tegen de filosoof zeg ik dat het geschiedenis is en tegen de historicus dat het filosofie is en ondertussen zit ik in de bibliotheek en doe mijn eigen ding.’

Dit is meer dan een goed verhaal. De historicus en de filosoof streven in principe heel verschillende doelen na en die laten zich niet zomaar verenigen. Dat alleen in de bibliotheek zitten heeft me zo nu en dan flink moeite gekost, maar het resultaat werd in het algemeen goed ontvangen. In het boek relativeer ik in aanzienlijke mate het idee dat wiskunde feilbaar is.

En de geschiedenis van de kinematica, waar heeft dat toe geleid?

“Toen ik mijn eerste artikelen over de geschiedenis van de kinematica had gepubliceerd, kreeg ik na enkele jaren de vraag of ik voorzitter wilde worden van de Permanente Commissie voor de Geschiedenis van de IFToMM (International Federation for the Theory of Machines and Mechanisms) [17]. Daar heb ik ja op gezegd en ik ben van 1990–1997 voorzitter geweest. Ik ben nog steeds lid van die commissie. Dat voorzitterschap was enerzijds erg interessant. Als commissievoorzitter mocht ik de ver-

gaderingen van het Executive Council van IFToMM bijwonen en het is fascinerend om te zien hoe zo’n internationale organisatie functioneert. Anderzijds was ik als niet-werktuigkundige ook een vreemde eend in de bijt met een onvoldoende groot werktuigkundig netwerk. Het werd pas een succes toen ik ging samenwerken met een Italiaan, Marco Ceccarelli. De commissie kwam helemaal tot leven. Er werden jaarlijks workshops georganiseerd en om de vier jaar een symposium. Er kwam een serie boeken, uitgegeven door Springer [15]. Het was boeiend om te zien hoe in enkele decennia binnen IFToMM de geschiedenis van de machines en mechanismen uitgroeide tot een serieus onderzoeksgebied. Ceccarelli speelde de hoofdrol en ik deed mee. Voor mijn bijdragen hebben ze me in 2019 Honorary Member van IFToMM gemaakt. Dat is zeer eervol.”

Je bent binnen wiskundig Nederland ook actief geweest toch?

“Ik ben van 2002 tot 2023 voorzitter geweest van de KWG- commissie Persoonlijke Archieven van Wiskundigen. Ik ben sinds 2010 voorzitter van het Epsilon-bestuur. En ik ben binnen de redactie van het Nieuw Archief nu zo’n twintig jaar verantwoordelijk voor de In Memoria.

Ik ben ook vele jaren voorzitter geweest van het Landelijk Werkcontact voor de Geschiedenis en de Maatschappelijke Functie van de Wiskunde. Gerard Alberts was secretaris en ik heb met hem buitengewoon prettig samengewerkt. Wij organiseerden bijvoorbeeld elk jaar op het Nederlands Mathematisch Congres een sessie over geschiedenis. Wij nodigden ook de bekende historicus van de wiskunde Dirk Struik uit naar Nederland toen hij 100 jaar was geworden, in 1994. We hebben dat gevierd met een symposium van een dag op het CWI. Er waren ettelijke sprekers en Struik hield een voortreffelijke voordracht van een uur. Ik herinner me die dag heel goed want ik mocht het symposium voorzitten. Tijdens zijn verblijf in Nederland heb ik Struik ook door Nederland gereden en onder meer in De Knipe in Friesland de historicus van de arbeidersbeweging Ger Harmsen bezocht. Ook een oude communist. Ze konden het goed met elkaar vinden. Ik weet nog dat Struik in De Knipe bij de plaatselijk bank, nadat hij het personeel naar zijn leeftijd had laten raden, geld wilde opnemen met een creditcard. De bank weigerde de kaart.



Johan de Jongh

Struik zei: ‘Dit is een Harvard Gold Card. Als ik die in de VS laat zien zijn ze altijd erg onder de indruk.’ Waarop het meisje zei: ‘Nou, wij in De Knipe niet.’”

Als we naar je publicaties kijken. Waar ben je het meest trots op?

“Trots is misschien niet het goede woord. Laat ik zeggen waaraan ik het meeste plezier heb beleefd.

Ik was betrokken bij een aantal publicaties over paradoxen die misschien niet wereldschokkend waren, maar waarvan ikzelf erg veel heb geleerd. De paradox van de onverwachte ophanging, paradoxen betreffende supertaken, de paradox van Yablo, fascinerend allemaal (een paar voorbeelden: [1, 2, 5, 6]).

In 2005 verscheen het boek *Mathematics and the Divine, A Historical Study*, gereedgeerd door Luc Bergmans en mijzelf [10]. Luc is aan de Sorbonne verbonden, maar ik ken hem uit Nijmegen, waar hij ook college liep bij De Jongh. De achtergrond is dat er talloze relaties zijn tussen wiskunde aan de ene kant en religie, theologie of mystiek, aan de andere kant. Wij vroegen zo’n dertig historici om een voorbeeld daarvan te behandelen. Het resultaat is niet perfect maar het proces dat ertoe leidde was leerzaam en boeiend. Naar aanleiding van het boek heb ik ettelijke voordrachten mogen houden, onder meer in Polen en in India.

Met de topoloog Jan van Mill heb ik een aantal artikelen over de geschiedenis van de topologie geschreven. Jan was op de VU vele jaren mijn buurman en wij kunnen het goed met elkaar vinden. (Niet het belangrijkste, maar wel het leukste artikel is [12]; het belangrijkste artikel is [11].)

Mijn werk op het gebied van de geschiedenis van machines en mechanismen heeft tot twee boeken geleid. In 2019 verscheen *The Ascent of GIM, the Global Intelligent Machine, A History of Production and Information Machines* [8]. Voor dat boek kreeg ik de ‘engineer historian award 2019’ van de American Society of Mechanical Engineers (ASME). Het tweede boek is *A History of Kinematics from Zeno to Einstein: On the Role of Motion in the Development of Mathematics*, dat dit najaar bij Springer zal verschijnen [9].”

Kun je nog iets zeggen over je boek over de GIM? Die komt nu toch angstaanjagend snel dichterbij. Hoe zie jij ChatGPT en de toekomst van de wereld?

“De Global Intelligent Machine is mijn naam voor de opvolger van het Internet of Things. Het is begonnen met het Internet, een de wereld omspannende informatiemachine. Daarna kwam het Internet of Things, dat is het Internet uitgebreid met miljoenen sensoren die informatie verzamelen. We zijn nu al een fase verder. Meer en meer worden productiemachines, dat zijn machines die fysiek in de werkelijkheid ingrijpen, aan het Internet of Things gehangen. We bouwen op die manier de Global Intelligent Machine (GIM), een wereldwijde machine die informatie verzamelt, die informatie verwerkt en op basis daarvan in de werkelijkheid ingrijpt. Het is geen robot, want er is geen centrale controle. Vele partijen, van de gebruikers van mobiele telefoons tot grote bedrijven en staten, proberen GIM voor hun doeleinden in te schakelen. Toch is GIM een eenheid, een samenhangende entiteit, die voortdurend groeit. Als er iets nieuws in de

high tech-sfeer wordt gebouwd dan gaat het vrijwel automatisch deel uitmaken van GIM.

Dat is een fascinerend feit. Er is dan wel geen centrale controle, maar die zou er, in ieder geval wat grote delen van GIM betreft, wel kunnen komen. Onwillekeurig denk je dan aan het verhaal uit 1909 van Edward Morgan Forster getiteld ‘The Machine Stops’. In dat verhaal leeft de mensheid in een grote stukken van de aarde bedekkende machine die alle aspecten van het leven beheerst. Even afgezien van de centrale controle lijkt onze situatie daar meer en meer op.

De op dit moment veel aandacht trekkende ontwikkeling is dat de GIM steeds intelligenter wordt. ChatGPT is verbaal erg sterk en nu nog inhoudelijk soms wat zwakker, maar laat wel zien wat ons te wachten staat. De vraag is wat de risico’s zijn als we meer en meer beslissingen overlaten aan programmatuur die intelligenter is dan de mens en razendsnelle toegang heeft tot vrijwel grenzeloze hoeveelheden informatie. Een beroemd expert op het gebied van neurale netwerken en deep learning, Geoffrey Hinton, maakt zich daar zorgen over. Hinton stelt zich bijvoorbeeld voor dat om een mogelijk op zich nobel doel te bereiken de superieur slimme programmatuur subdoelen definieert en bij het bereiken daarvan, niet gehinderd door een moreel kompas, grote schade zou kunnen aanrichten.

Ik denk dat je dit soort ideeën serieus moet nemen. Toch kunnen we verder niet veel meer doen dan de ontwikkeling volgen en die waar mogelijk sturen. De Europese Unie lijkt op dit punt goed bezig te zijn met de voorgestelde *Artificial Intelligence Act* [16].

Referenties

- Victor Allis en Teun Koetsier, On some paradoxes of the Infinite, *British Journal Philosophy of Science* 42 (1991), 187–194.
- Victor Allis en Teun Koetsier, On some Paradoxes of the Infinite II; *British Journal Philosophy of Science* 46 (1995), 235–247.
- Oene Bottema en Bernard Roth, *Theoretical Kinematics*, North-Holland, 1979.
- N.G. de Bruijn, Herinneringen aan O. Bottema, *Euclides* 77 (2002), 122–125. Zie: https://archief.vakbladeuclides.nl/bestanden/077_2001-02_04.pdf.
- Tjeerd B. Jongeling en Teun Koetsier, Blindspots, self-reference and the prediction paradox, *Philosophia, Philosophical Quarterly of Israel* 29 (2002), 377–390.
- Tjeerd B. Jongeling, Teun Koetsier en Evert Wattel, Self-reference in Finite and Infinite Paradoxes, *Logique & Analyse* 45(177–178) (2002), 15–30.
- Teun Koetsier, *Lakatos’ Philosophy of Mathematics, a Historical Approach*, Elsevier, 1991.
- Teun Koetsier, *The Ascent of GIM, the Global Intelligent Machine: A History of Production and Information Machines*, Springer, 2019.
- Teun Koetsier, *A History of Kinematics from Zeno to Einstein: On the Role of Motion in the Development of Mathematics*, Springer, 2023, te verschijnen.
- Teun Koetsier en Luc Bergmans, eds., *Mathematics and the Divine: A Historical Study*, Elsevier, 2005.
- Teun Koetsier en Jan van Mill, By their fruits ye shall know them. Some remarks on the interaction of general topology with other areas of mathematics, in I. M. James, ed., *History of Topology*, Elsevier, 1999, 199–240.
- Teun Koetsier en Jan van Mill, Irmgard Gawein en de topologische karakterisering van variëteiten, een poging tot rehabilitatie, *Nieuw Archief voor Wiskunde* 5/15(2) (2014), 100–110.
- Imre Lakatos, *Proofs and Refutations: The Logic of Mathematical Discovery*, Cambridge University Press, 1976.
- Ferdinand Verhulst en Oleg Kirillov, Bottema opende Whitney’s paraplu, *Nieuw Archief voor Wiskunde* 5/10(4) (2009), 250–254.
- <https://www.springer.com/series/7481>.
- https://en.wikipedia.org/wiki/Artificial_Intelligence_Act.
- Dit is de oorspronkelijke naam, die zo’n twintig jaar geleden is gewijzigd in ‘International Federation for the Promotion of Mechanism and Machine Science’ De afkorting IFToMM heeft men gehandhaafd.

Francesca Arici*Mathematisch Instituut
Universiteit Leiden
f.arici@math.leidenuniv.nl***Diletta Martinelli***Korteweg-de Vries Instituut voor Wiskunde
Universiteit van Amsterdam
d.martinelli@uva.nl***Proof by example** Portraits of women in Dutch mathematics

Assia Mahboubi

Assia Mahboubi is a tenured researcher at the Institut national de recherche en sciences et technologies du numérique (Inria), Nantes, France, and endowed professor in the Algebra and Number Theory section of the Vrije Universiteit Amsterdam. On 26 April she gave her inaugural lecture ‘Explore, abstract, compute, verify, can we do (all) mathematics by computer?’.

Thank you for accepting the interview for the NAW. I would like to begin by discussing the topic of your inaugural lecture. Can mathematics be done by computer? What are the main challenges involved?

“Certainly, mathematics can be done using computers. However, there are different aspects to consider. One aspect involves using computers for large calculations and incorporating them into proofs. Some skeptics argue that this approach undermines the true understanding of a proof, as they believe mathematics should be separate from calculation algorithms. Another challenge is the trustworthiness of computer-based calculations. While experts are sometimes able to validate their output, computer systems themselves cannot be fully trusted. However, there have been significant advancements in formal methods for ensuring program correctness in computer science, and there is hope that similar techniques can be applied to mathematical software.”

What kind of problems are you currently working on?

“My current research focuses on various aspects of mathematics and its formal representation. One area of my research

explores different foundations for formalizing mathematics on computers. This involves using computers not only for calculations but also to represent and check formal proofs. This field raises theoretical questions and opens up new avenues for mathematical investigations. I am also interested in developing tools that can assist mathematicians in ensuring the correctness of their calculations, particularly in the realm of symbolic computation. This involves designing theoretical tools to address the proofs suggested by such applications.”

How can we help mathematicians compute in a safe way and connect their proofs on paper to the computational parts?

“This is a significant challenge. Currently, my work involves developing tools and methods for mathematicians to ensure the correctness of their calculations and connect them with formal proofs. One approach is to use proof assistants, such as Coq, which is based on the same logical foundations as Lean. I find it interesting to have different systems based on the same theoretical foundations, as it allows for experimentation and different approaches.”



Assia Mahboubi

Do different mathematical fields have different needs?

“Certain mathematical fields have specific software programs that are more suitable for their needs. For example, there are specialized software libraries for symbolic computations, algebra, and analysis. However, when it comes to formal proof assistants, the focus is more on mathematics in general rather than specific fields. While there have been remarkable developments in certain specialized areas, the current systems are still in a preliminary stage and cannot be considered fully specialized.”

Is there any research result that you're particularly proud of or enthusiastic about?

“One result that stands out is a project I worked on with a former PhD student and colleague Thomas Sibut-Pinote [1]. We studied a result in number theory called the Apéry theorem, which addresses the irrationality of certain values of the Riemann zeta function $\zeta(s)$. The transcendence, or even the irrationality, of the values of the ζ function at odd integers is a challenging problem in number theory, and this result asserts that $\zeta(3)$ is irrational. We were able to provide a formally verified proof using computer algebra tools and a proof assistant, combining the strengths of both systems. It was a fun project that demonstrated the interaction between computer algebra and proof assistants.”

Could you share how you became interested in mathematics in the first place?

“I have always had a fondness for mathematics. Despite coming from a non-scientific family, I found it incredibly enjoyable. From a young age, I would solve math problems and engage in exercises from

books. However, I wasn't sure if I wanted to pursue it as a career. In high school, I also developed an interest in philosophy, so I had to choose between the two. My parents believed that pursuing a career in science would guarantee a job, so they advised me to choose that path and continue doing math as a hobby. At that time, I wasn't even aware of research in mathematics; my only knowledge was that of becoming a teacher. While studying in France, I attended a popular science talk by the mathematician Alain Connes, recommended by my math teacher. That was the first time I heard a mathematician speak, and it made me realize that being a mathematician was a viable career option. From that point on, I decided to pursue mathematics seriously.”

What attracted you to questions related to foundations and formalization of mathematics?

“Initially, my focus was primarily on computer algebra, particularly within the context of formal verification. The idea was to design algorithms that could produce certificates for algebraic problems, which could be verified later. When possible, outputs then become easier to check than to produce. However, I was part of a team where my advisor was more interested in computer algebra, while others were focused on logic. As a result, I began working in both areas and became gradually interested in the questions related to theoretical computer science.”

Is there anything about being a mathematician that you find challenging?

“When it comes to the actual process of doing mathematics, I find it enjoyable and fulfilling. However, like many others, I struggle with the surrounding activities, such as logistics, research management,

grant proposals, and administrative tasks. These activities tend to consume more and more time, leaving less time for actual mathematics. Moreover, as a woman in France, there are additional challenges such as quotas and gender-related biases that can affect the working environment.”

What do you think can be done to improve the working environment and promote diversity in mathematics?

“Simply increasing quotas is not an effective solution. Instead, we should aim for a sensible approach that respects the existing proportion of women and under-represented groups in different communities. It's important to involve women in mathematics without imposing artificial quotas. Additionally, measures can be taken to support individuals in balancing work and family life, such as providing assistance for childcare and facilitating participation in events. These measures benefit not only women but also promote diversity more broadly.”

And finally, on a positive note, what do you enjoy most about being a mathematician?

“What I enjoy the most about being a mathematician is the opportunity for continuous learning. Mathematics is an endless game, and there is always something new and surprising to discover. Each area has its unique techniques, objects, and nature that make it fascinating. The joy of learning in mathematics remains intact even after years of studying. It's a privilege to have the opportunity to engage in such a fulfilling pursuit.”

Reference

- 1 A. Mahboubi and T. Sibut-Pinote, A formal proof of the irrationality of $\zeta(3)$, *Log. Methods Comput. Sci.* 17(1) (2021).

Henk Broer

*Bernoulli Instituut voor Wiskunde, Informatica en
Kunstmatige Intelligentie, Rijksuniversiteit Groningen
h.w.broer@rug.nl*

Henk de Snoo

*Bernoulli Instituut voor Wiskunde, Informatica en
Kunstmatige Intelligentie, Rijksuniversiteit Groningen
h.s.v.de.snoo@rug.nl*

In Memoriam Boele Braaksma (1934–2023)

Een gewaardeerd hoogleraar in de klassieke analyse

Op 2 Januari 2023 overleed de wiskundige Boele Braaksma op 88 jarige leeftijd. Na zijn opleiding aan de Rijksuniversiteit Groningen was hij tussen 1964 en 1971 verbonden aan de Technische Hogeschool Delft om daarna terug te keren naar het Noorden. Bij zijn pensionering in 1998 behield Braaksma een werkplek op de universiteit waar hij tot aan de coronacrisis bijna dagelijks te vinden was. Zijn vakgebied was de klassieke analyse waarin hij een leven lang gewerkt heeft; de laatste publicatie waarvan hij medeauteur was stamt uit 2019. In dit artikel geven Henk Broer en Henk de Snoo een beschrijving van het leven en werk van deze altijd bescheiden gebleven wiskundige.

Groningen en Bolsward

Boele Lieuwe Jan Braaksma werd geboren in Groningen op 19 April 1934 in het gezin van de onderwijzer Henderikus Johannes Braaksma (1883–1962) en zijn vrouw Jantje Piers (1892–1981). Het gezin met een zoon en twee oudere dochters woonde boven een slagerij aan de Grachtstraat 69a. Henderikus was een sociaal voelend onderwijzer die al in 1910 het voortouw had genomen bij het jaarlijkse vakantie-kinderfeest (in Groningen lange tijd een begrip), oorspronkelijk bedoeld om veelal arme leerlingen een feestelijke dag te bezorgen. De naam Boele Braaksma heeft een historische oorsprong: zijn grootvader (1831–1899) en diens grootvader (1758–1824) hadden dezelfde naam. Laatstgenoemde was geboren in Bolsward en was aldaar, net als eerdere generaties Braaksma, burgemeester (van de patriottische soort) en armenvoogd. Bijzonder in dit verband is op te merken dat de naam Bolsward zijn oorsprong heeft als Boeles Wert: de wierde/terp van Boele. Braaksma was bijzonder trots op zijn Bolswardse oorsprong.¹ Na het doorlopen

van de lagere school bezocht hij van 1946 tot 1951 de Rijks-hbs (nu bekend als het Kamerlingh Onnes) te Groningen. In 1951 werd Braaksma voor het eerst ingeschreven als student aan de Rijksuniversiteit Groningen om wiskunde te gaan studeren.



Boele Braaksma (New York, 2014)

Opleiding

Het Mathematisch Instituut in Groningen was sinds 1935 gevestigd in een paar kamers aan de Oude Boteringestraat 6 en het was nogal kleinschalig van aard. Die kamers werden bezet door de in 1946 als hoogleraar-directeur aangestelde J. C. H. Gerretsen en enkele assistenten; ook kon men er de collectie meetkundige modellen uit de tijd van P. H. Schoute aantreffen en een boekerij. Verder waren aan het instituut verbonden de hoogleraren C. S. Meijer, J. Ridder (eerst buitengewoon) en L. J. Smid (bijzonder); de laatste werkte bij de Algemeene Friesche Levensverzekering-Maatschappij in Leeuwarden.² De positie van Smid was voorlopig de enige knieval van de wiskunde in de richting van maatschappelijke behoeften en het zou nog wel enige tijd duren voordat de toegepaste wiskunde een grotere plaats zou veroveren. Naast bovengenoemde wiskundedocenten kwam Braaksma ook in aanraking met de docenten H. Brinkman (de fysicus), H. J. Groenewold, P. J. van Rhijn en F. Zernike bij de colleges in de natuur- en sterrenkunde.

Hoewel de Groningse wiskunde-opleiding kleinschalig was liep er wel een aantal studenten rond wier naam later, lokaal of in het land, een zekere bekendheid zou krijgen. Toen Braaksma aankwam bij wiskunde waren P. C. Sikkema en J. H. (Jan) de Boer al geruime tijd assistent, terwijl E. M. de Jager en E. van Spiegel op weg waren naar het eind van hun studie; W. Knol en

A.H. Nicolai waren tweedejaars en S. Elgersma was een jaargenoot. Het volgend jaar arriveerden D.W. Bresters en L.R.J. Westermann, en in 1953 kwam J. Boersma. Braaksma bleek een vlotte student te zijn. Hij behaalde op 29 juni 1954 zijn kandidaatsexamen wis- en natuurkunde (richting a) en op 28 mei 1957 het doctoraalexamen wiskunde met bijvakken natuurkunde en mathematische statistiek; beide examens werden cum laude afgelegd. De samenstelling van de staf was in deze jaren (op een enkele nieuwe medewerker na) onveranderd gebleven: pas in 1958 zou met A.I. van de Vooren de toegepaste wiskunde echt binnenkomen. Het Mathematisch Instituut verhuisde in deze tijd naar een eigen gebouw aan de Reitdiepskade 4. Eerst in het begin van de jaren zestig werd de staf verder uitgebreid, mede door snel toenemende studentenaantallen.

Om te promoveren kwam Braaksma met zijn analytische instelling bij Meijer terecht. Tussen januari 1958 en februari 1961 had hij een aanstelling als assistent bij de Nederlandse Organisatie voor Zuiver Wetenschappelijk Onderzoek; daarna volgde een positie als wetenschappelijk ambtenaar. Aanvankelijk werd hij de richting ingestuurd van de destijds populaire pseudo-analytische functies. Maar uiteindelijk kwam een proefschrift tot stand over een geheel ander onderwerp: *Asymptotic Expansions and Analytic Continuations for a Class of Barnes-integrals*, waarop hij op 17 december 1963 cum laude promoveerde.³ Na zijn promotie vertrok Braaksma voor een jaar naar Edinburgh waar hij bij A. Erdélyi⁴ verbleef.

Loopbaan

Eind 1964 volgde een benoeming tot lector aan de Technische Hogeschool Delft. De wiskunde was daar ruim vertegenwoordigd: er was vanouds veel service-onderwijs en sinds 1956 was er een eigen opleiding tot wiskundig ingenieur. De analyse werd bedreven door S.C. van Veen, B. Meulenbeld, P.C. Sikkema en de net benoemde lector F. de Kok.⁵ Braaksma aanvaardde zijn lectoraat op 7 mei 1965 met een openbare les getiteld *Functies*. Toen het lectoraat in 1967 omgezet was in een hoogleraarship, hield Braaksma op 28 februari 1968 de oratie *Beoefening der Wiskunde*. Naast zijn gewone onderwijs was Braaksma betrokken bij een aantal werkgroepen met jongere medewerkers waarin literatuur



Bill Harris

bestudeerd werd over, bijvoorbeeld, harmonische analyse, sferoïdale functies (aan de hand van *Mathieusche Funktionen und Sphäroidfunktionen* van Meixner en Schäfer) en operatoren in Hilbert-ruimten. Aan het eind van de zestiger jaren begon, ook in het conservatieve Delft, een universitaire revolutie op gang te komen, waarvan Braaksma het begin meemaakte.⁶

In 1971 keerde Braaksma terug naar Groningen om Meijer op te volgen als hoogleraar wiskunde, in het bijzonder de klassieke analyse. Op het Mathematisch Instituut in Groningen, inmiddels verhuisd naar het universitaire complex 'De Paddepoel', vond door immer groeiende studentenaantallen een ingrijpende personele vernieuwing plaats. Hierbij werden rond dezelfde tijd ook W. Schaafsma, F. Takens en J.C. Willems tot nieuwe hoogleraren benoemd.⁷ Het waren roerige tijden voor de universiteit waarin de democratisering krakend zijn intrede deed. Het bestuurlijk werk in de nieuwe structuur kon Braaksma niet echt boeien: slechts korte tijd nam hij deel aan het toenmalige subfaculteitsbestuur. Wel was hij jarenlang voorzitter van de examencommissie. Het onderzoek waar hij in Delft mee bezig was geweest werd voortgezet, mede in samenwerking met verschillende lokale collega's, maar ondertussen was ook zijn samenwerking met de Amerikaanse wiskundigen W.A. Harris Jr. en Y. Sibuya tot stand gekomen. Inmiddels getrouwd, zou hij met zijn gezin enkele malen langere tijd bij deze collega's verblijven. Juist in deze drukke periode koos Braaksma ervoor om per 1 januari 1998 zijn formele betrekking bij het instituut op te zeggen. Hij ontsnapte net op tijd aan de bedrijfsmatige vorm die het onderzoek sinds de negentiger jaren in toenemen-



Yasutaka Sibuya

de mate heeft gekregen. Bij zijn emeritaat merkte hij op: "Ik heb eigenlijk altijd kunnen doen wat ik wilde." Na zijn pensionering behield Braaksma een werkplek op de universiteit waar hij tot op hoge leeftijd bijna dagelijks te vinden was. In deze latere jaren heeft hij samengewerkt met de Franse wiskundigen L. Stoklovitch en G. Iooss.⁸

Beoefening der wiskunde

Braaksma's wiskundige leven is begonnen met een promotie over Barnes-integralen en bijbehorende Mellin-transformaties. Bij Barnes-integralen bestaat de integrand uit quotiënten van producten van Γ -functies; ze worden vaak geïntegreerd over gecompliceerde contouren. Dit onderzoek had veel verbanden met het werk van Meijer over speciale functies en diens uitbreiding van de Laplace- en Fourier-transformatie, met speciale functies als kern.⁹ In dit werk is Braaksma's grote belangstelling voor (1) *asymptotische methoden* al te bespeuren en die belangstelling zou zijn hele lange leven blijven bestaan. In de beginjaren na zijn promotie was er werk over asymptotiek van specifieke klassen van differentiaalvergelijkingen; zie ook zijn twee Delftse redes waarin al de Airy-vergelijking besproken wordt. Later breidde die belangstelling zich uit tot de interpretatie van (2) *formele machtreeksontwikkelingen* rond singulariteiten van meromorfe differentiaalvergelijkingen als asymptotische ontwikkelingen van een 'echte' oplossing en de bijbehorende Stokes-multipliers. Tezelfdertijd was hij uitgebreid betrokken bij het onderzoek van dynamische systemen over (3) *quasi-periodieke dynamica* en later, reeds op gevorderde leeftijd, bij onderzoek over quasipatronen.

Ad (1). *Asymptotische methoden*. Tijdens het jaar in Edinburgh en de Delftse periode kwamen naast asymptotische methoden ook specifieke differentiaalvergelijkingen aan bod. In Edinburgh werd Braaksma door Erdélyi op het spoor gezet van een lokale reductiestelling van Sibuya voor systemen van differentiaalvergelijkingen met een kleine parameter en hij slaagde erin een globale versie te bewijzen. Daarnaast publiceerde hij over de asymptotiek van de oplossingen van de differentiaalvergelijking $y^{(n)} - x^\nu y = 0$ (een uitbreiding van de Airy-vergelijking) die door Turritin en anderen voor speciale waarden van ν ontwikkeld was. Door de oplossingen in termen van Barnes-integralen te schrijven lukte het de beperkingen aan ν op te heffen. Hier is een eerste optreden van Stokes-multipliers in het werk van Braaksma te zien. De belangstelling voor de asymptotiek van differentiaalvergelijkingen leidde tevens tot resultaten met betrekking tot integraaltransformaties, en bijbehorende omkeerstellingen in het complexe vlak, behorende bij de Sturm–Liouville- (of Schrödinger-) vergelijking $-(py')' + qy = \lambda y$. Dit zou later ook uitgebreid worden met translaties en convoluties die met deze vergelijking samenhangen, en met resultaten voor de defecte getallen voor zulke vergelijkingen. Ook verscheen werk over spherical harmonics en over algemene klassen van integraaltransformaties.¹⁰

Ad (2). *Formele machtreeksen*. Het werk aan analytische of meromorfe differentiaalvergelijkingen had betrekking op hun irreguliere singulariteiten en transformaties tot eenvoudiger gedaantes van de vergelijkingen om zulke singulariteiten te behandelen. Bij irreguliere singulariteiten van zulke vergelijkingen zijn er formele machtreek-oplossingen, verkregen via de Frobenius-methode (methode van onbepaalde coëfficiënten), die in het algemeen niet convergeren. Door een geschikte sommatiemethode kan in veel gevallen aan een formele oplossing een unieke analytische oplossing worden toegevoegd die, in een bepaalde sector, de formele machtreeks als asymptotische ontwikkeling heeft. Een voorbeeld is Borel-sommatie, waarbij de Borel-sommen van formele oplossingen voorgesteld kunnen worden door Laplace-getransformeerden van oplossingen van een geassocieerde convolutievergelijking. Een vergaande generalisatie van deze methode is multisommatie, ontwikkeld door onder anderen J.P. Ramis en J. Écalle. De relaties tussen verschillende multisommen van een formele oplossing in elkaar overlappende sectoren hangen samen met het Stokes-verschijnsel. In het lineaire geval worden deze bepaald door de zogenaamde Stokes-multipliers. Braaksma heeft op dit gebied, deels met collega's en promovendi, een aantal bijdragen geleverd, zowel voor differentiaalvergelijkingen als voor differentie-



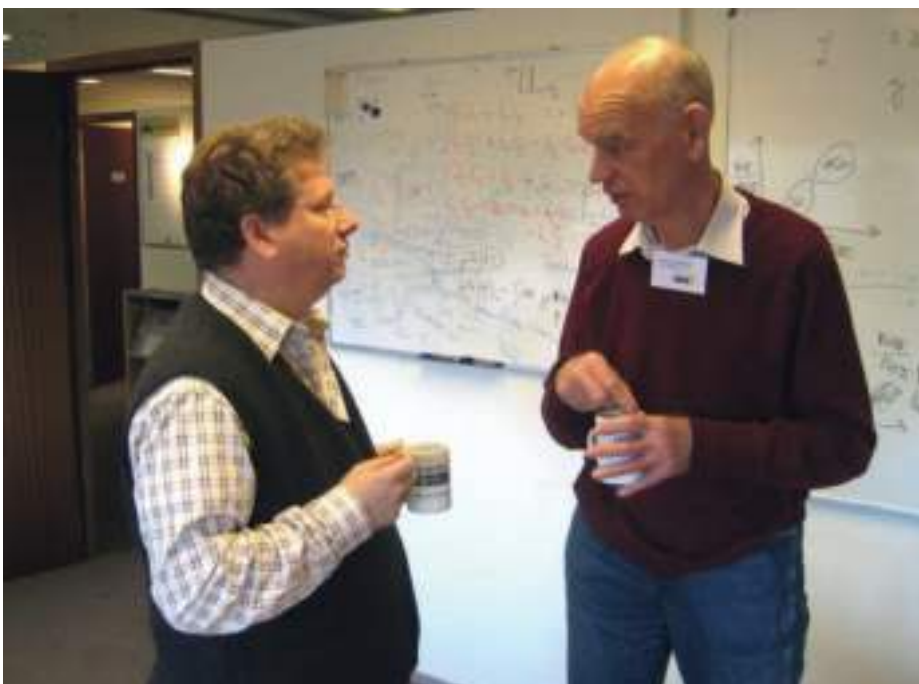
In Florence (2006)

vergelijkingen. In het bijzonder moet hier worden genoemd dat Braaksma in 1992 voor het eerst een sluitend bewijs geleverd heeft dat multisommeerbaarheid ook geldt voor formele reeksen bij niet-lineaire vergelijkingen.¹¹

Ad (3). *Quasiperiodieke dynamica*. Via contact met het vakgebied dynamische systemen kwam Braaksma in aanraking met kleine-noemerproblemen, waarbij het gaat om dreigende divergentie van bepaalde Fourier-reeksen. Deze problemen worden volgens de Kolmogorov–Arnold–Moser-theorie (KAM-theorie) opgelost met behulp van diofantische voorwaarden. In de tachtiger en negentiger jaren leidde dat met lokale collega's en promovendi tot verschillende publicaties over quasiperiodieke bifurcaties. Later pakte Braaksma dit thema nogmaals op bij bifurcaties van quasipatronen in samenwerking met de eerder genoemde Franse collega's.¹²

Lidmaatschappen en reizen

In 1960 werd Braaksma lid van het sinds 1933 bestaande Groningse wiskundedispuut «W⁴?», waaraan zowel wis- als natuurkundestudenten deelnamen. In hetzelfde jaar werd hij ook lid van het Genootschap Johann Bernoulli, dat tussen 1960 en 1978 bestond en oorspronkelijk bedoeld was als een Noordelijke tak van het Wiskundig Genootschap. Als tweedejaars student was Braaksma al lid geworden van het landelijke Wiskundig Genootschap. Hij zou in 1966 na vijf bekroonde oplossingen van door dit genootschap uitgeschreven prijsvragen lid van verdienste worden. Zijn



Met Laurent Stolovitch (Lorentz Center Leiden, 2008)



Resurgence of formal solutions of meromorphic ODEs (Bedlewo, 2008)

Delftse collega's S.C. van Veen en O. Bottema waren de andere leden van verdienste. In hetzelfde jaar werd Braaksma managing editor van het *Nieuw Archief voor Wiskunde*. In die functie bleef hij werkzaam tot 1977 om vervolgens tot 1983 aan te blijven als lid van de redactie. Tussen 1970 en 1979 was Braaksma lid van de editorial board van *SIAM Journal on Mathematical Analysis*. Hij is betrokken geweest bij de organisatie van verschillende conferenties: in Scheveningen over differentiaalvergelijkingen, en later in Groningen, bij conferenties over dynamische systemen en over differentiaalvergelijkingen en het Stokes-fenomeen. Braaksma was een van de guest

editors (samen met D.A. Lutz en Y. Sibuya) van een special issue van het *Journal of Difference Equations and Applications* uit 2001 bij het overlijden van W.A. Harris Jr. Ten slotte moet gememoreerd worden dat Braaksma een van de initiatiefnemers was van een grote reünie van Groningse wiskundigen in 1991.¹³ Reizen heeft Braaksma zijn hele leven graag gedaan. Zijn verblijf in 1964 in Edinburgh heeft een levenslange liefde voor het Schotse landschap veroorzaakt. Vanuit Delft heeft hij het ICM 1966 in Moskou bezocht en is hij in 1968 met een groep lokale collega's in St Andrews geweest. Vele malen heeft hij wiskundeconferenties en -workshops bezocht, bij-

voorbeeld in Oberwolfach, Dundee, Leiden (Lorentz Center), Bedlewo (Polen) en meerdere plaatsen in Frankrijk. In 2008 sprak hij nog in Bedlewo.

Nadagen

Toen er een nieuwe, internationale, belangstelling ontstond voor het werk van Meijer heeft Braaksma in 2014 nog een colloquiumvoordracht in Groningen gehouden: *The Meijer G-function*. De laatste publicatie waaraan hij meewerkte, stamt uit 2019. Kort daarna begon de coronapandemie en was het langere tijd onmogelijk naar het instituut te komen. Braaksma's Groningse aanstelling was begonnen op 1 oktober 1971 en het tiende lustrum hiervan kon in november 2021 in kleine kring gevierd worden samen met collega's en promovendi. In deze tijd kreeg hij steeds grotere problemen met zijn gezondheid; het einde kwam desalniettemin onverwacht. Op de rouwkaart schreven zijn zoons dat Boele een gewaardeerd hoogleraar was die zijn leven gewijd heeft aan de wiskunde en tot op het laatst heeft kunnen genieten. Die waardering was er inderdaad, zowel hier als in het buitenland.

Het was niet alleen de wiskunde die zijn belangstelling had. Boele is altijd muzikieliefhebber geweest; reeds de Delftsche Studenten Almanak wist over de nieuwe Delftse hoogleraar te melden: "Tot zijn hobby's rekent hij het pianospel." Daarnaast was hij, als natuurliefhebber, tot op hoge leeftijd wandelend en in de laatste jaren vooral fietsend in het Groningse en Friese landschap aan te treffen. Boele was zeer trouw in zijn omgang met de mensen in zijn omgeving.¹⁴ Als collega was hij behulpzaam en onbaatzuchtig. Hij stelde zich in het algemeen bescheiden op, maar beschikte wel over een groot gevoel voor humor. Velen zullen zich zijn innemende persoonlijkheid met een zekere weemoed herinneren. ☞

Braaksma's bekroonde oplossingen van prijsvragen van het Wiskundig Genootschap met de motto's waaronder ze anoniem ingediend werden.

1954.10 Hoe groot moet een cirkel minstens zijn opdat er n cirkels met straal 1 in gelegd kunnen worden die niet over elkaar heen grijpen ($n = 3, 4, 5, 6, 7$)? *Glücklich ist, wer vergisst was nicht mehr zu ändern ist*. Bekroond in 1955.

1954.11 Bepaal het aantal permutaties dat k sequenties bevat. *Arbeid is voor de mens, wat voor de wijnrank de stok is; wij zijn er door gebonden, doch door hem ook groeien wij omhoog*. Bekroond in 1955.

1959.5 Bepaal de integraal $\int_0^\infty x^\lambda \Phi(ax) \Psi(bx) dx$ als Φ en Ψ gegeneraliseerde hypergeometrische functies voorstellen. *Every pilgrim up the slopes of the mathematical Parnassus will sit down sometimes and invent an indefinite integral or two* (J.J. Sylvester). Bekroond in 1961.

1961.9 Onderzoek de asymptotiek van $\int_z^\infty \Phi(u)/u^p du$ voor z bij 0 of ∞ als Φ een geschikt gekozen functie van de vorm ${}_pF_q$ of $G_{p,q}^{m,n}$ is. *Onderzoek alle dingen en behoud het goede*. Bekroond in 1962.

1965.3 Bestudeer $\int_0^z \Phi(t) \Psi(z-t) t^{k-1} (z-t)^{k-1} dt$ als Φ en Ψ geschikt gekozen functies van de vorm ${}_pF_q$ of $G_{p,q}^{m,n}$ zijn. *Wie niet waagt, die niet wint*. Bekroond in 1966.

Dankwoord

Aan meerdere personen is dank verschuldigd voor hun bijdragen aan het verhaal over Boele Braaksma. In het bijzonder noemen we Werner Balser, George Huitema, Trudeke Immink, Don Lutz en Laurent Stolovitch. Ook moeten hier de zonen Hein, Anne en Tjeerd Braaksma vermeld worden; door hen kwam veel biografisch materiaal ter beschikking. Verschillende inlichtingen werden verschaft door Hans van Iperen, Aad en Catharine de Jong-de Kok, en Willem Schaafsma. Voor een lijst van Braaksma's publicaties en meer informatie, zie <https://www.math.rug.nl/bernoulli/Geschiedenis/Braaksma>.

Noten

- 1 Voor de naam Braaksma, zie *Der dy namma fan heten is – It komôf fan plaknammen* Pieter Duijff, 2022. Braaksma's tweede voor-naam Lieuwe refereert aan zijn grootvader van moederszijde Lieuwe Piers, kasteleinhouder in Doezum. Braaksma bleef op het adres Grachtstraat 69a wonen tot aan zijn vertrek naar Delft in 1964.
- 2 Qua wiskundecultuur was er bij de Groningse wiskunde na de oorlog nauwelijks iets veranderd. Gerretsen (1907–1983) was in 1939 in Groningen gepromoveerd bij G. Schaake; hij volgde in 1946 zijn promotor op die aan het eind van de oorlog door uitputting om het leven was gekomen. Meijer (1904–1974) was in 1933 Groningen gepromoveerd bij J.G. van der Corput; hij volgde in 1946 zijn promotor op, die na de oorlog naar Amsterdam was vertrokken. Ridder (1894–1977) was in 1921 in Utrecht gepromoveerd bij de Fransman A. Denjoy; hij was al sinds 1931 lector propedeutische wiskunde en was in 1951 net bevorderd tot buitengewoon (en nog later gewoon) hoogleraar. In 1954 werd hij benoemd tot lid van de KNAW. Smid (1901–1974) was in 1928 in Amsterdam gepromoveerd bij de meetkundige Hk. de Vries; hij was in 1936 na een leraarschap in Warffum in het verzekeringswezen terechtgekomen. In 1948 had hij een leeropdracht mathematische statistiek gekregen, die in 1951 werd omgezet in een bijzonder hoogleraarschap.
- 3 Het proefschrift verscheen tegelijkertijd onder dezelfde naam in *Compositio Mathematica* 15 (1962–1964), 239–341. De oorspronkelijke werkzaamheden aan pseudo-analytische functies (L. Bers) waren vastgelegd in een intern rapport *Review of the Theory of Pseudoanalytic Functions*, Report ZW-1, 1962. Braaksma zou er in 1965 nog een voordracht over houden bij het Groningse Genootschap Johann Bernoulli.
- 4 A. Erdélyi (1908–1977) was een specialist op het gebied van speciale functies en asymptotische ontwikkelingen, die voor de oorlog vanuit Hongarije door E.T. Whittaker naar Edinburgh was gehaald. Erdélyi had het zogenaamde Bateman Manuscript Project geleid, dat resulteerde in drie delen *Higher Transcendental Functions* en twee delen *Tables of Integral Transforms*, McGraw-Hill, 1953–1955. Braaksma zou veel later zelf als reviewer meewerken aan een soortgelijke onderneming: *NIST Handbook of Mathematical Functions*, Cambridge University Press, 2010.
- 5 Vanwege de grote onderwijslast waren er relatief veel wiskundehoogleraren en -lectoren die ondersteund werden door een leger van instructeurs, veelal ervaren wiskundeleraars, die de werkcolleges verzorgden. Door al dat onderwijs stond onderzoek niet bij iedereen in Delft hoog in het vaandel. Van Veen (1896–1978), Meulenbeld (1908–1998) en Sikkema (1919–1998) waren leerlingen van W. de Sitter, J.G. van der Corput en C.S. Meijer, respectievelijk. De Kok (1907–1996) was een leerling van J. Wolff. De Delftse wiskundeopleiding was overigens al in 1955 informeel begonnen.
- 6 Sommige docenten gaven (als wetenschappelijke arbeiders) onderwijs in stofjes om zo hun solidariteit met de werkende klassen te tonen. Braaksma had, net als R. Timman, de grote man van de Delftse wiskundeopleiding, wel belangstelling voor 'de democratisering' en bezocht met hem daartoe bijeenkomsten in het café hoek Voldersgracht/Papensteeg. In Delft had Braaksma ook veel contact met P. van der Steen, P.J. Holeywijn en H. Lemei die net gepromoveerd waren of dicht tegen een promotie aan zaten en die zo hun eigen gedachten hadden over de gang van zaken in Delft, los van de opkomende democratisering.
- 7 Het aantal medewerkers was in de loop der jaren sterk gestegen, mede door het instellen van een ingenieursopleiding door de faculteit. Schaafsma volgde de gepensioneerd Smid op, Takens verving de naar Oostenrijk vertrokken analyticus J. Cigler, terwijl Willems voor de systeemtheorie een voltijdse opvolger van P.M.E.M. van der Grinten was. Braaksma zelf nam vanuit Delft de medewerkers A. Dijkstra en H.S.V. de Snoo met zich mee.
- 8 Harris (1930–1998), gepromoveerd bij H.L. Turritin, was verbonden aan de University of Southern California; Sibuya (1930–2021), gepromoveerd bij E.A. Coddington, was verbonden aan de University of Minnesota; Stolovitch (1967), gepromoveerd bij B. Malgrange, is verbonden aan de Université de Nice Sophia Antipolis; looss (1944), gepromoveerd bij J.P. Guiraud, is ook verbonden aan de Université de Nice Sophia Antipolis.
- 9 Barnes-integralen waren rond de eeuwwisseling ingevoerd door de wiskundige en latere, soms omstreden, Anglicaanse bisschop E.W. Barnes. Braaksma's proefschrift verwijst ook naar een artikel van J. Boersma die als kandidaat een in 1957 door de faculteit uitgeschreven prijsvraag won onder het motto: "Het is niet nodig te hopen om te ondernemen, noch te slagen om te volharden [Willem van Oranje]." Boersma promoveerde later bij Van de Vooren.
- 10 Op het gebied van speciale functies en integraaltransformaties heeft Braaksma ook met B. Meulenbeld en H.S.V. de Snoo gepubliceerd. Promoties op dit gebied waren van H. Lemei (Delft), J.D. Siersma en A. Schuitman (Delft); Braaksma was ook betrokken bij de promotie van T.H. Koornwinder (Amsterdam)
- 11 Naast eigen werk publiceerde Braaksma op dit gebied artikelen met W. Balser, W.A. Harris, J.P. Ramis, Y. Sibuya en D. Stark. In Groningen was er een samenwerking met M. van der Put die uitmondde in gezamenlijke publicaties en in proefschriften van B.F. Faber, G.K. Immink en C. Praagman. Later promoveerde R. Kuik nog bij Braaksma.
- 12 Braaksma werd in de zeventiger jaren door F. Takens betrokken bij de promotie van H.W. Broer. Deze samenwerking leidde later ook tot de promotie van G.B. Huijtema en verschillende gezamenlijke publicaties. Het contact met Stolovitch, en daarna looss, kwam tot stand rond de pensionering van Braaksma, toen Stolovitch nog in Toulouse werkte, net als Ramis.
- 13 Sinds die tijd verschijnt ook jaarlijks een uitgave voor alumni, tegenwoordig de *Bernoulli Gazet* geheten. Tijdens deze reünie werd veel aandacht besteed, door toedoen van W. Knol, ook een promovendus van Meijer, aan de geschiedenis van de Groningse wiskunde waardoor de huidige auteurs gestimuleerd werden om zich met die geschiedenis te gaan bezighouden.
- 14 Een treffende illustratie is het geval van L.L. Zazjigajev. Deze Witrus had aan het eind van de vijftiger jaren een periode op het Mathematisch Instituut gewerkt; hij stond te boek als wetenschappelijk rekenaar. Bij zijn overlijden was Braaksma de enige belangstellende op de begrafenis.

Piet Groeneboom

Delft Institute of Applied Mathematics
TU Delft
p.groeneboom@tudelft.nl



Column Piet takes his chance

Convex hulls

Piet Groeneboom regularly writes a column on statistical topics in this magazine.

I recently learned from Geurt Jongbloed that in soccer (British: football) training the convex hull of the team is an important indicator of how well the team is playing. This seems a good excuse to talk about the research on convex hulls of points in the plane. Although with no guarantee that it will be useful for soccer trainers (or rather, with the guarantee that it will not be useful for them).

By the way, there is a ‘Conference on Convex Geometry and Geometric Probability’ in Salzburg, 25–29 September 2023, where Christian Buchta, who himself made important contributions to the field, is one of the main organizers.

In 1988 I proved the following result for the number of vertices N_n of the convex hull of a uniform sample of points from the interior of a convex polygon.

Theorem 1 [7, Corollary 2.5, p.350]. *Let N_n denote the number of vertices of the boundary of the convex hull of a uniform sample of n points from the interior of a convex polygon with r (≥ 3) vertices. Then*

$$\frac{N_n - \frac{2}{3}r \log n}{\sqrt{\frac{10}{27}r \log n}} \xrightarrow{\mathcal{D}} N(0,1) \quad (1)$$

as $n \rightarrow \infty$, where $\xrightarrow{\mathcal{D}}$ denotes convergence in distribution and $N(0,1)$ is the standard normal distribution.

Christian Buchta says in this connection in his paper from 2013 [1]: “A classical result by Rényi and Sulanke [16] states that $\mathbb{E}N_n = \frac{2}{3}r \log n + O(1)$ as $n \rightarrow \infty$. For a quarter of a century, in spite of many efforts, cf., e.g., [9, p.547] and [10, p.424], essentially no progress has been achieved concerning the variance of the distribution of N_n .”

This was something I did not know (at the time) that the problem of the variance of N_n was an old unsolved problem. One

would perhaps think that (1) implies that one can say:

$$\text{var}(N_n) \sim \frac{10}{27}r \log n, \quad n \rightarrow \infty,$$

but it could happen that the scaling constant for the central limit theorem is asymptotically different from the square root of the actual variance. I made some frivolous (but — I must say — essentially correct) remarks about this in the introduction of my paper, but was told that mathematicians in the German–Austrian community of stochastic geometers were saying: “Wir glauben es nur wenn wir es sehen.” (or something like that, if I remember correctly from roughly 30 years ago).

You may wonder where the factors $\frac{2}{3}r$ and $\frac{10}{27}r$ come from, not to speak of the $\log n$. There are several answers, depending on the angle from which one approaches the problem. Christian Buchta derives it all in [1] from a (non-trivial) recursive combinatorial relation between expectations for uniform samples of size n and $n+1$, respectively, where the points lie in the interior of a triangle with vertices $(0,0)$, $(0,1)$ and $(1,0)$.

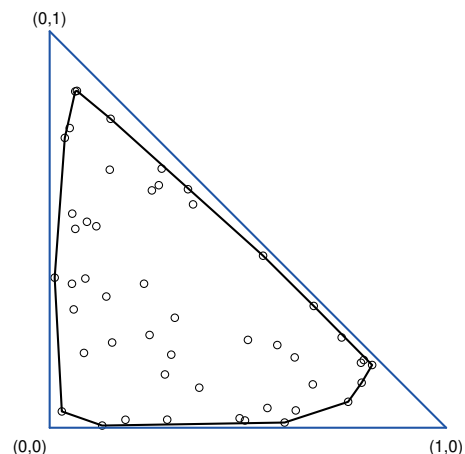


Figure 1 Convex hull of a uniform sample of $n = 50$ points in the interior of a triangle with vertices $(0,0)$, $(0,1)$ and $(1,0)$.

But in this column I mainly want to point attention to the interesting papers of Alexander Nagaev [12] and John Pardon [14, 15]. I have the impression that both authors have worked on the problem as outsiders of the field of stochastic geometry (like myself).

I only talked once with Alexander Nagaev (and his brother, I believe) at a conference in Vilnius in 1993, where Alexander explained to me what Isakjan Khamdamov and he had been doing in 1991 in the preprint [13] with my paper from 1988. But for some reason I did (or could) not pay sufficiently close attention to what he was saying then (it was at the conference party).

I shall now first try to describe the ideas of my paper [7]. The number of vertices of the convex hull is the result of a counting process: we walk along the boundary of the convex hull and count the number of vertices we meet in this way. At the time I worked on the problem martingales and the Doob–Meyer decomposition theorem for counting processes and martingales were very ‘hot subjects’, because they could be applied in the theory of right-censored data in statistics. This gave probabilists an argument for stating that their study of martingales, et cetera, was useful in practice and on the other hand statisticians could say that they were applying deep probabilistic tools.

I also ‘went with the wave’ and gave during half a year a seminar on the book *Probabilités et Potentiel* of Paul-André Meyer [11], the original version where Dellacherie was still not co-author) at the Mathematical Centre in Amsterdam in 1977 for a small audience, among whom the statisticians Willem van Zwet, Richard Gill and Kobus Oosterhoff (my own PhD supervisor). It was mainly useful for the topic of the dissertation of Richard Gill [5] (we were sharing a — very small — office at the Mathematical Centre).

So in working on the paper [7], about ten years later, I was curious to see what this theory could do for us in the context of the convex hulls. For example, this result of Rényi and Sulanke for the expectation of the number of vertices, couldn’t we very easily get this from martingale theory?

Let us zoom in on what happens near the corner at (0,0) in Figure 1 and imagine that we can describe the situation there by a Poisson process of points in the first quadrant with intensity 1, for which we compute the left-lower convex hull. For each $a > 0$ we define $W(a) = (U(a), V(a))$ as a point of a realization of the Poisson point process such that there are no points lying strictly to the left of the line $x + ay = c$ through $W(a)$.

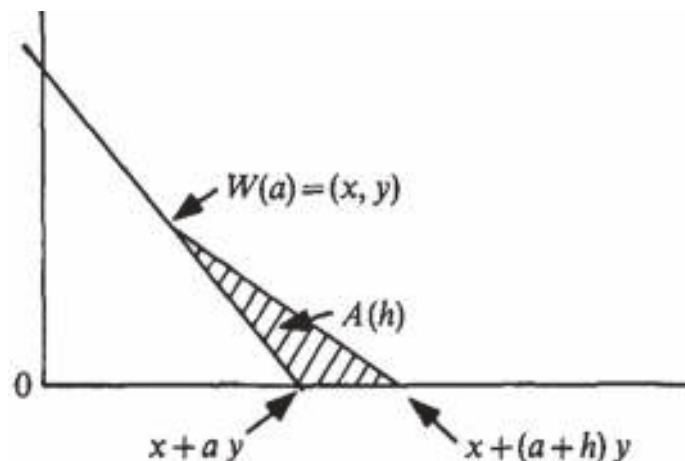


Figure 2 Vertex $W(a)$ of convex hull of Poisson point process in first quadrant.

In fact, we can walk through the left-lower convex hull of our Poisson process by lines $x + ay = c$, $a \in (0, \infty)$, where $c = c(a)$ is chosen so that the line runs through a point $W(a)$ of the point process of this type. This process has no beginning and no ending, but that’s OK. It is even a *Markov process*! That is, if we consider a to be the time parameter, the vertices $W(a')$ we’ll meet for $a' > a$ only depend on $W(a)$ and not on values $W(a')$ with $a' < a$.

We can define $N(a, b)$ as the number of vertices of the convex hull that we meet if we vary the parameter a' of the supporting lines $x + a'y = c(a')$ over the interval $[a, b]$. We then get the following lemma:

Lemma 1 [7, Lemma 2.6, p. 342]. *For each $a > 0$, the processes*

$$M_1(a, b) = N(a, b) - \frac{1}{2} \int_a^b V(c)^2 dc, \quad b \geq a, \quad (2)$$

and

$$M_2(a, b) = N(a, b)^2 - \frac{1}{2} \int_a^b \{2N(a, c) + 1\} V(c)^2 dc, \quad b \geq a, \quad (3)$$

are martingales.

In this lemma $V(c)$ is the second coordinate of a vertex $W(c)$ of the convex hull of the Poisson point process.

The way we prove a result like this is illustrated in Figure 2 (a screenshot of [7, Figure 2.4, p. 337]). The probability that the number of points in the counting process will be increased by 1 in the time interval $[a, a + h]$ is, as $h \downarrow 0$, equivalent to h times the area of the shaded rectangle in Figure 2, which is $\frac{1}{2}hy^2 = \frac{1}{2}hV(a)^2$. We use here that we are dealing with a Poisson process of intensity 1 in the first quadrant.

This yields, by elementary martingale theory, that the so-called *compensator* of the counting process (also called *predictable projection*) is given by the second term on the right-hand side of (2). Since the expectation of $M_1(a, b)$ does not change if $b \geq a$ increases, the expectation is equal to the expectation at time $b = a$, which is zero. So we get:

$$\mathbb{E}N(a, b) = \frac{1}{2} \int_a^b \mathbb{E}V(c)^2 dc.$$

A trivial one line computation, given in [7, below (2.32)], using the properties of the Poisson process, yields that

$$\frac{1}{2} \mathbb{E}V(c)^2 = \frac{1}{3c},$$

with the conclusion that

$$\mathbb{E}N(a, b) = \frac{1}{3} \log(b/a).$$

In particular, if we choose $a_n = 1/n$ and $b_n = n$, we get:

$$\mathbb{E}N(a_n, b_n) \sim \frac{2}{3} \log n, \quad n \rightarrow \infty.$$

Aha! Here we almost have the result in the Rényi and Sulanke paper! And with so little effort! If we can show that the convex hull of the original sample process near (0,0) behaves in the same way as the convex hull of the Poisson process near (0,0) for the time parameter between $1/n$ and n , and that we have a similar

phenomenon for the other vertices (using affine invariance), and can asymptotically neglect what happens along the sides, we actually have the Rényi and Sulanke result, modulo the transition from Poisson process to sample process. The latter transition is essentially the relation $(1 + \alpha/n)^n \rightarrow e^\alpha$, as John Pardon rightly argues in [15].

Moreover, (3) of Lemma 1 deals with the second moment, and if we use (3), we get information about the variance of N_n , which remained a mystery for a quarter of a century, according to the quote above from Buchta's paper [1]!

The central limit theorem can be derived from the fact that the process $\{N(a, b), b \geq a\}$ is *strongly mixing*, which can also be deduced from the martingale characterization of the process. This means that the dependence between pieces $N(a, b)$ and $N(a', b')$ if $a < b < a' < b'$ dies out rather rapidly if the distance between b and a' increases.

This program was carried out in [7] and yielded Theorem 1. A similar program was carried out for a uniform sample in the interior of the unit disc. Here we get the following result.

Theorem 2 [7, Theorem 3.4]. *Let N_n denote the number of vertices of the boundary of the convex hull of a uniform sample of n points from the unit disc. Then*

$$\frac{N_n - 2\pi c_1 n^{1/3}}{\sqrt{2\pi c_2 n^{1/3}}} \xrightarrow{\mathcal{D}} N(0, 1)$$

as $n \rightarrow \infty$, $c_1 \approx 0.53846$, $c_2 \approx 0.13160$ [3], and where $\xrightarrow{\mathcal{D}}$ denotes convergence in distribution and $N(0, 1)$ is the standard normal distribution.

The constant c_2 has to be evaluated numerically. The constant c_1 had already been evaluated in [16] and can also be written as $c_1 = (\frac{3}{2}\pi)^{-1/3} \Gamma(\frac{5}{3})$. The constant c_2 has been evaluated in [3], using the methods of [7]. It depends on the numerical evaluation of certain multiple integrals and corrects the original computation in [7].

The boundary of the convex hull of a uniform sample in the interior of a circle was studied as a prototype of the situation that the convex set from which the sample is taken has a C^2 boundary with non-vanishing curvature. One sees from Theorem 2 that the order of the number of vertices has increased from $\log n$ to $n^{1/3}$, going from Theorem 1 to Theorem 2. Also note that in Theorem 2 the scaling constants for the expectation and variance of N_n are of the same order, just as in Theorem 1.

The papers of Alexander Nagaev and John Pardon

This whole problem of “are the constants used in the scaling in Theorem 1 above asymptotically the same as the expectation and the square root of the variance of N_n ” was definitely solved by John Pardon in [15]. Corollary 1.2 in [15] gives this result for *all* convex sets K of unit area and at the same time gives a central limit theorem for the area A_n of $K \setminus C_n$, where C_n is the convex hull of a uniform sample from K .

Corollary 1 [15, Corollary 1.2, p.824]. *Let Φ be the normal distribution function. As $n \rightarrow \infty$, the following estimates for the convex hull C_n hold uniformly over all convex sets K of unit area:*

$$\sup_{x \in \mathbb{R}} \left| \mathbb{P} \left\{ \frac{N_n - \mathbb{E}N_n}{\sqrt{\text{var} N_n}} \leq x \right\} - \Phi(x) \right| \rightarrow 0,$$

and

$$\sup_{x \in \mathbb{R}} \left| \mathbb{P} \left\{ \frac{A_n - \mathbb{E}A_n}{\sqrt{\text{var} A_n}} \leq x \right\} - \Phi(x) \right| \rightarrow 0.$$

He derives this from the following fundamental theorem in [14].

Theorem 3 [14, Theorem 1.1]. *Let Φ be the standard normal distribution function. As $\text{area}(K) \rightarrow \infty$, the following estimates hold for the convex hull Π_K of a Poisson point process of intensity 1 in the interior of a convex set K .*

$$\sup_{x \in \mathbb{R}} \left| \mathbb{P} \left\{ \frac{N - \mathbb{E}N}{\sqrt{\text{var} N}} \leq x \right\} - \Phi(x) \right| = O \left(\frac{\log^2 \mathbb{E}N}{\sqrt{\mathbb{E}N}} \right),$$

and

$$\sup_{x \in \mathbb{R}} \left| \mathbb{P} \left\{ \frac{A - \mathbb{E}A}{\sqrt{\text{var} A}} \leq x \right\} - \Phi(x) \right| = O \left(\frac{\log^2 \mathbb{E}A}{\sqrt{\mathbb{E}A}} \right),$$

where N is the number of vertices and A the area of $K \setminus \Pi_K$.

Now I must say that I think that the methods John Pardon uses in [14] are rather close to what I was doing 33 years earlier in [7]. He indeed refers to my paper at several spots in his exposition and also to [2], which gives a central limit theorem for the area. I'll say more about [2] below.

But [14] has some very nice new twists. First of all there is the parametrization. He does not make the transition to an unbounded Poisson point process, but stays with the Poisson point process inside the original bounded convex set. He also walks through the vertices via points $W(\theta)$, but the parameter θ is now an angle in $\mathbb{R}/2\pi$ and not the parameter a of a line $x + ay = c$. A typical picture in his exposition is given in Figure 3.

The ‘cap’ $C_K(p, \theta)$ in Figure 3(b) is a region above the line with angle θ through $W(\theta)$ which does not contain points of the Poisson point process, parametrized either by a point p on the line segment cut off by the convex set K or parametrized by the area of $C_K(p, \theta)$.

Instead of letting the parameter λ of the Poisson process tend to ∞ and keeping the convex set fixed, it is more natural in his approach to keep the intensity of the Poisson process fixed, for example $\lambda = 1$ (like in the Poisson process considered above) and let the area of the convex set grow to ∞ . This amounts to the same type of asymptotics.

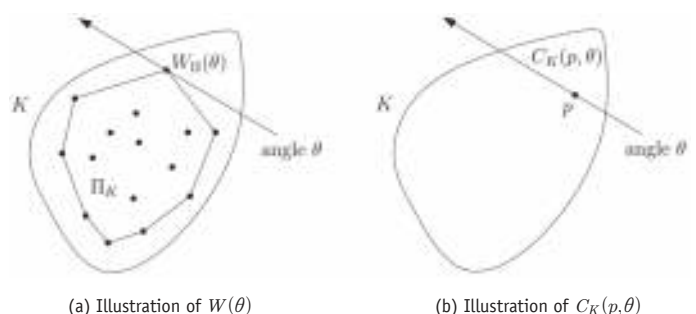
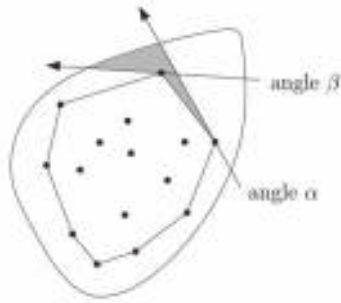


Figure 3 John Pardon's parametrization.

Figure 4 John Pardon's definition of $A(\alpha, \beta)$.

He lets $X(\alpha, \beta)$ be either the number of vertices $N(\alpha, \beta)$ or the area $A(\alpha, \beta)$ one gets by varying the angles of the lines of support between α and β , where $A(\alpha, \beta)$ is the shaded region in Figure 4 (screenshot of [14, Figure 1]).

Then he shows that $X(\alpha, \beta)$ (either number of vertices or area), chopping it up into L pieces $X(\alpha, \alpha_1), X(\alpha, \alpha_2), \dots, X(\alpha, \alpha_{L-1}), X(\alpha, \beta)$, corresponds to a strongly mixing process to which he can apply the following result.

Theorem 4 [17]. Let $X = \sum_{i=1}^L X_i$, where $X_1, \dots, X_L$ are random variables. Additionally suppose that

- $\mathbb{E} |X_i|^3 \leq c_1$,
- $X_1, \dots, X_L$ are α -mixing (= strongly mixing) with $\alpha \leq C_2 \exp\{-\delta |i-j|\}$,

for some $\delta > 0$ and $C_1, C_2 < \infty$. Then there exists $M > 0$ such that

$$\sup_{x \in \mathbb{R}} \left| \mathbb{P} \left\{ \frac{X - \mathbb{E}X}{\sqrt{\text{var} X}} \leq x \right\} - \Phi(x) \right| \leq M \frac{L(\log L)^2}{(\text{var} X)^{3/2}}.$$

(Note that the exponent in the power of the denominator of (10.1) in [14] should be $3/2$ instead of $-3/2$.)

This theorem is very interesting! It is from 1991. Had I known this in 1988, this would have spared me the trouble of trying to compute the variance! I derived the right type of strong mixing and also showed that the moment generating function existed in a neighborhood of the origin. Having these results, I could have stated the central limit theorem without bothering about computing the variance!

On the other hand, the variance was this long unsolved problem (something I did not know), and it served as a reference point for Christian Buchta's finite sample result for the number of vertices of the convex hull of a sample from a convex polygon.

John Pardon derives his central limit result from Theorem 4 also by showing the strong mixing property and showing that the moment generating function exists in a neighborhood of the origin. But he does not use martingales, and gets it straight from the properties of the Poisson process.

There are a lot of nice ideas in [14] I could talk about, for example the clever use of compactness arguments and the interesting idea of introducing an affine invariant measure. But the actual purpose of my column is to draw attention to Nagaev's paper [12], which somehow seems to have been neglected.

Alexander Nagaev died tragically in a skiing accident. Tomasz Schreiber was so kind to provide me with the preprint [13]; he is no longer alive either.

In 2012 I published the paper [6], discussing [13] and [12], and deriving the result of [13] from my own work. But I presently think that my paper [6] did not sufficiently reveal the importance of Nagaev's paper [12].

Unlike Pardon, he works with an unbounded convex set A , like I was doing in the first section and in [7]. He has the following conditions for A :

- a. A is convex unbounded, with $\lambda(A) = \infty$.
- b. The point $(0, 0)$ lies on its boundary.
- c. Each straight line $Z_c = \{(x, y) : y = c\}$ cuts off from A a region having finite area for all $c > 0$, i.e., Z_c intersects the boundary of A at two points.

Nagaev considers a doubly infinite sequence of vertices of the convex hull of the Poisson process of intensity 1: $\dots, w_{-2}, w_{-1}, w_0, w_1, w_2, \dots$, with corresponding regions $\dots, \theta_{-2}, \theta_{-1}, \theta_0, \theta_1, \theta_2, \dots$, where θ_0 is the region between the horizontal line through w_0 and the boundary of A , θ_1 the region enclosed by the line through w_0 and w_1 , the horizontal line through w_0 and the boundary of A , θ_{-1} the region enclosed by the line through w_{-1} and w_0 , the horizontal line through w_0 and the boundary of A , et cetera, see Figure 5, a screenshot of Figure 1 in [12].

He then defines the random variables $\xi_j = \lambda(\theta_j)$, the Lebesgue measure of the region θ_j , and γ_- and γ_+ as the left and right intersections of the horizontal line through w_0 with the boundary of A .

Furthermore, he defines for $j \geq 1$ the points γ_j as the intersection of the line through w_{j-1} and w_j with the right boundary of A and for $j \leq -1$ the points γ_j as the intersection of the line through w_j and w_{j+1} with the left boundary of A .

Finally, he defines the length of a line segment with endpoints a and b by $\ell(a, b)$ and then

$$\eta_j = \begin{cases} \ell(\gamma_-, w_0) / \ell(\gamma_-, \gamma_+), & \text{if } j = 0, \\ \ell(w_{j-1}, w_j)^2 / \ell(w_{j-1}, \gamma_j)^2, & \text{if } j > 0, \\ \ell(w_j, w_{j+1})^2 / \ell(\gamma_j, w_{j+1})^2, & \text{if } j < 0, \end{cases}$$

see Figure 5 (a screenshot of [12, Figure 1]). With these definitions he has the following remarkable theorem.

Theorem 5 [13, Theorem 2.1, p. 23]. The variables ξ_j, η_k , $j, k \in \mathbb{Z}$ are independent. Furthermore, the ξ_j are exponential with parameter 1 and the η_j are Uniform(0, 1).

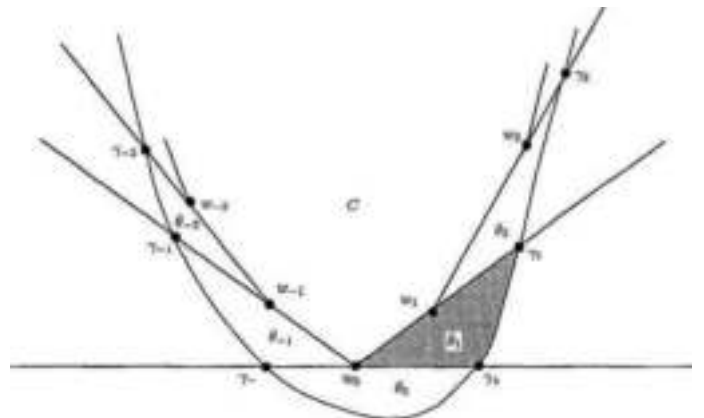


Figure 5 Nagaev's construction.

Note that we can apply this result both for convex regions with C^2 boundaries and for ‘wedges’ like the first quadrant, rotated over the angle $-\pi/4$. For the latter situation we get the following corollary.

Corollary 2 [13, Theorem 1.1]. *Let N_n denote the number of vertices of the boundary of the convex hull of a uniform sample of n points from the interior of a convex polygon K with r (≥ 3) vertices and area equal to 1. Let A_n be the area of $K \setminus C_n$, where C_n is the convex hull of the sample. Then (N_n, A_n) satisfies the following 2-dimensional central limit theorem:*

$$\left(\frac{10}{27}r \log n\right)^{-1/2} \left(N_n - \frac{2}{3}r \log n, nA_n - \frac{2}{3}r \log n\right) \xrightarrow{\mathcal{D}} N(0, \Sigma),$$

where

$$\Sigma = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & \frac{14}{5} \end{pmatrix}.$$

The proof of the asymptotic normality does not need the strong mixing, which was used by both John Pardon and myself, we just have sums of independent random variables (see, e.g., [6]). On the other hand, the result of John Pardon is still the most general, since it is independent of the type of boundary. Also, in his approach we do not have to go back from the unbounded Poisson point process to the bounded convex figure. Still it seems that some synthesis of these different approaches should perhaps be possible.

I still have to say something on the paper [2]. Here a central limit theorem for the area was derived. Although the method is OK, in the derivation of the constants a time inversion argument was needed that was not applied correctly. The argument with the correct time inversion argument is given in [8]. The matter is also discussed in [6].

Isakjan Khamdamov recently came back to his earlier work with Alexander Nagaev, see, e.g., [4]. ✎

References

- 1 Christian Buchta, Exact formulae for variances of functionals of convex hulls, *Adv. in Appl. Probab.* 45(4) (2013), 917–924.
- 2 A.J. Cabo and P. Groeneboom, Limit theorems for functionals of convex hulls, *Probab. Theory Related Fields* 100(1) (1994), 31–55.
- 3 Steven Finch and Irene Hueter, Random convex hulls: a variance revisited, *Adv. in Appl. Probab.* 36(4) (2004), 981–986.
- 4 Sh.K. Formanov and I.M. Khamdamov, On joint probability distribution of the number of vertices and area of the convex hulls generated by a Poisson point process, *Statist. Probab. Lett.* 169 (2021), 108966.
- 5 R.D. Gill, *Censoring and Stochastic Integrals*, Mathematical Centre Tracts, Vol. 124, Mathematisch Centrum, Amsterdam, 1980.
- 6 P. Groeneboom, Convex hulls of uniform samples from a convex polygon, *Adv. in Appl. Probab.* 44 (2012), 330–342.
- 7 Piet Groeneboom, Limit theorems for convex hulls, *Probab. Theory Related Fields* 79(3) (1988), 327–368.
- 8 Piet Groeneboom, The remaining area of the convex hull of a Poisson process, 2011, arXiv:1111.2504.
- 9 Nicholas P. Jewell and Joseph P. Romano, Coverage problems and random convex hulls, *J. Appl. Probab.* 19(3) (1982), 546–561.
- 10 Nicholas P. Jewell and Joseph P. Romano, Evaluating inclusion functionals for random convex hulls, *Z. Wahrsch. Verw. Gebiete*, 68(4) (1985), 415–424.
- 11 Paul-André Meyer, *Probabilités et potentiel*, Publications de l’Institut de Mathématique de l’Université de Strasbourg, XIV. Actualités Scientifiques et Industrielles, No. 1318, Hermann, Paris, 1966.
- 12 A.V. Nagaev, Some properties of convex hulls generated by homogeneous Poisson point processes in an unbounded convex domain, *Ann. Inst. Statist. Math.* 47(1) (1995), 21–29.
- 13 A.V. Nagaev and I.M. Khamdamov, Limit theorems for functionals of random convex hulls, Preprint of Institute of Mathematics, Academy of Sciences of Uzbekistan, Tashkent (in Russian), 1991.
- 14 John Pardon, Central limit theorems for random polygons in an arbitrary convex set, *Ann. Probab.* 39(3) (2011), 881–903.
- 15 John Pardon, Central limit theorems for uniform model random polygons, *J. Theoret. Probab.* 25(3) (2012), 823–833.
- 16 A. Rényi and R. Sulanke, Über die konvexe Hülle von n zufällig gewählten Punkten, *Z. Wahrsch. Verw. Gebiete* 2 (1963), 75–84.
- 17 Ī Sunklodas, Approximation of distributions of sums of weakly dependent random variables by the normal distribution, in *Probability Theory 6* (Russian), Itogi Nauki i Tekhniki, Akad. Nauk SSSR, Vsesoyuz. Inst. Nauchn. i Tekhn. Inform., 1991, pp. 140–199.

Chris Peters

Leiden University, and
Eindhoven University of Technology
c.a.m.peters@tue.nl

In Memoriam Jacob ('Jaap') Murre (1929–2023)

A tribute to an expert in algebraic geometry

Jacob Murre, emeritus professor algebraic geometry of Leiden University passed away on 9 April 2023. His former colleague Chris Peters, who worked with Murre for a long time, looks back on his life and work.

With the passing away of Jaap Murre I lost one of the two mathematicians with whom I had the longest contact of my life, the second person being my thesis advisor Ton van de Ven who died nine years ago.

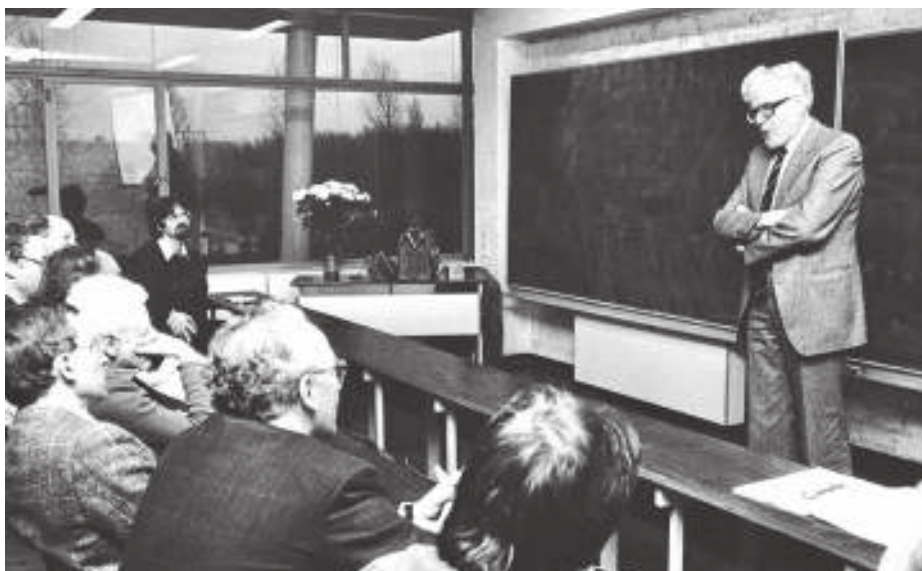
It all began in 1967 when, as a second year student I took Murre's advanced algebra course, and van de Ven's topology course. For the preparation of the master's degree only a few non-standard specialized courses were offered the next year, one of which was Murre's introduction to classical algebraic geometry, primarily centered around the Riemann–Roch problem for curves, and another was van de Ven's introduction to K -theory, based in part on Atiyah's lectures. These two teachers that knew each other from their student's time, had opposite personalities, but they generally got along remarkably well. Murre characterized van de Ven at the occasion of his commemoration at the KNAW (Royal Dutch Academy of Sciences) as follows: "His friends and colleagues knew Ton as a gourmand, he not only was knowledgeable about surfaces but also of good food and famous wines." Ton came from a well-to-do family, his parents spoke French at home, while Jaap came from a modest middle class family: his father owned a potato farm in the province of Zeeland. A colleague characterized him as the "gentle giant with a full mop of hair and soft of speech, genuinely kind and considerate, with a certain mannerism of modesty". There were also similarities:

both were excellent and inspiring teachers, with equally high demands and hence somewhat intimidating for us, students.

In the course of my twenty or so years at the Leiden Mathematics Institute I was in close contact with both, at first mostly with van de Ven, especially during the long period we worked with Wolf Barth, and later with Klaus Hulek on the book on complex surfaces [5, 6]. During these years Jaap and I had several common PhD students. I got to know him better and we became friends. After I left Leiden University to accept a position at the Grenoble University we kept contact as local responsables for

three consecutive European algebraic geometry projects.

I have fond memories of two summer schools that took place in the new millennium. On the first, in 2001 in Grenoble, a three-week event I organized together with Stefan Müller-Stach, Jaap delivered a highly appreciated series of lectures on cycles and motives. He enjoyed the atmosphere even in the sometimes stiflingly hot class room. The mountains are close by in Grenoble, and so during the hottest week my wife Annie and I took him to a walk in the cooler scenic mountains north of the city. Jaap had some problems walking and I had to run back to fetch my car so that we all could be in time to enjoy the appointed lunch in a nearby restaurant. On the one in 2002 in Guanajuato, Mexico, a weekend trip to



Jacob Murre at the Mathematical Institute Leiden in 1986 on the occasion of his 25th anniversary as a professor

the historical town Zacatecas will always remain in my memory: during the long ride in the rain Jaap told us detailed amusing stories about several legendary mathematical celebrities he knew personally. Some of these stories are going to appear below.

Jan Nagel, a joint PhD student of Jaap and me, having a job in France, like me spent the vacations and most of the summer with his family in the Netherlands. We thus could plan to visit Jaap together so that we saw him at least twice a year to talk about mathematics and our mathematical friends. The first decade we met at the Leiden Mathematics Institute, but in recent years, when his health gradually but steadily declined, we drove to his home, an idyllic house in the village of Wassenaar. We had arranged to visit him last April, but alas, we got a message that a few days before the planned date, he had died after a short illness. In our memories he'll live on, as I hope to testify through this tribute.

Early years (1929–1961)

Jacob Murre was born in 1929 in Baarland¹ as the son of a farmer. As for many people of his generation, the Second World War seriously affected the path of his secondary education. His school in Goes, a small town near Baarland, had to close near the end of the war. At the end of October 1944 the allied forces landed, an amphibious tank transported the schoolchildren across the Schelde waters to the already liberated Zeeuws-Vlaanderen², and they only returned towards the end of 1945. This intermission postponed their final exams till 1947.

Having obtained his diploma Jacob wanted to study mathematics. Instead, he complied with his father's wish who thought that being an engineer offered better prospects. So he started studying physical engineering at the Technical University Delft which at least offered some courses in mathematics. But after one year, inspired by the lectures of one of his teachers, the analyst Cees Visser³, Jacob moved to Leiden University to pursue his true interest, mathematics. After obtaining his bachelor degree, he attended the lectures of Hendrik Kloosterman (1900–1968), which Jacob admired for their clarity and precision. No wonder he started his doctoral studies under Kloosterman's supervision after obtaining the degree of 'doctorandus'⁴. Jacob subsequently became Kloosterman's and J. Droste's⁵ assistant.



Hendrik Kloosterman

Although Kloosterman's research was mainly in analytic number theory, he got interested in algebraic geometry because André Weil, using techniques from that field, could make the best estimates on exponential sums, a particular interest of Kloosterman. He advised Jacob to read *Einführung in die algebraische Geometrie* [31], a then standard 'modern' introduction by the famous Dutch mathematician Bartel Leendert van der Waerden (1903–1996). However, the 'bible' at that time was *Foundations of Algebraic Geometry* [32] by André Weil (1906–1998) written in 1946 and notorious for its extreme difficulty. Jacob, together with Tonny Springer (1926–2011), at that time assistant in Leiden, worked their way through the book. Jacob told me: "It was a joy to study Weil's book together with Springer. With his quick mind he often understood difficult passages more quickly than I did." As a consequence of their work, Jacob stumbled upon an open problem in Weil's book that seemed interesting enough to take up as a thesis topic.

Under Marshall Aid, scholarships were available to study in the United States, and Jacob was able to take advantage of such a scholarship to pursue his dissertation under the direction of A. Weil. In advance, Kloosterman had contacted Weil to obtain his permission. Together with Elly, whom Jacob had just married, he took the boat from Rotterdam to New York and then the train to Chicago. During his stay in Chicago, their first and only son, Jan, was born.

At that time Chicago was a center of algebraic geometry: Weil gave his famous lectures on abelian varieties attended by Armand Borel (1923–2003), Serge Lang (1927–2005), Teruhisa Matsusaka (1926–2006), Peter Swinnerton-Dyer (1927–2007),

and a couple of Weil's students among whom Paul Cohen (1934–2007)⁶ who later was awarded the Fields medal. Among Weil's circle were also Jean Dieudonné (1906–1992)⁷ who had left France in 1952, and the complex geometer Shing-Chen Chern (1911–2004) who held a chair at the University of Chicago from 1949 on. In the course of his stay in Chicago, Jacob solved Weil's problem. He told me: "Weil asked me to explain my proof. The first time he did not believe it was right. A second time, after Lang's suggestion to adapt the notation, Weil still did not believe it, but the third time he was convinced."

Back in Leiden the thesis defense took place in May 1957. It led to the publications [54, 55, 56]. In 1959 Jacob was appointed as 'lector'⁸. The following academic year, 1959/60, his daughter Tineke had just been born, he accepted an invitation from Matsusaka, and with his wife and two young children took the boat to New York to travel to Evanston, a town not far from Chicago. There he worked on the behaviour of Picard varieties in families and on abelian varieties, ameliorating a result of Weil (cf. [59]).

His first student was Frans Oort (born 1935), who obtained his doctorate in 1961 on *The Riemann–Roch Problem and the Construction of the Picard Scheme for One-dimensional Schemes* (suggested by A. Andreotti (1924–1980) during Oort's stay in Pisa). At that time only a full professor could award a doctorate and since Jaap was not appointed professor until 1961, Wil van Est (1921–2002) acted as Oort's formal supervisor.

After his promotion to full professor Jacob undertook various visits to institutes around the world that inspired and influenced his mathematical research. Without



André Weil

doubt the visits that influenced him most were those to Paris, where he worked with Alexander Grothendieck (1928–2014), about which I'll report below. His stay at the Tata Institute in Bombay from December 1964 to February 1965, accepting an invitation by C.S. Seshadri (1932–2020), was not only mathematically of interest but certainly also an exotic adventure: he talked to me about the famous Taj Mahal hotel where he stayed in an annex, his visits to Delhi, Agra, and the Corbett national park with the aim to see tigers. Unfortunately this did not happen, but he did see many elephants.

Influenced by Grothendieck (1958–1968)

Jacob has been deeply impressed and influenced by Grothendieck. Their first contact dates back to his stay in Chicago but then Grothendieck still worked and lectured on functional analysis. He broke through in algebraic geometry with his famous talk at the International Congress of Mathematics of 1958 in Edinburgh which Jacob attended. They briefly spoke with each other, and in the same year Grothendieck sent him a letter asking whether the results of his thesis could be transposed to the setting of *schemes*. Being unfamiliar with that theory Jacob could not provide an answer. In fact, having invested a lot of energy learning Weil's theory he was not sure to start all over again to learn schemes. But a little later, in the spring of 1960, Weil gave him a clear and pointed advice during a walk in the woods surrounding the Institute of Advanced Study in Princeton. "Grothendieck is doing things nobody else can, you are young and should quickly delve into these matters." This unexpected advice — it was well known that the relationship between Weil and Grothendieck was far from optimal — convinced him.

Jacob once told me of a conversation with Grothendieck in 1961 that very much impressed him. It took place in N. Kuiper's⁹ bungalow in the woods near the Agricultural University of Wageningen where Grothendieck just had given a talk. During a long conversation with Jacob about the pathological behaviour of the Picard varieties in positive characteristics recently discovered by Jun-ichi Igusa (1924–2013), Grothendieck remarked: "I have not yet accurately studied this point, but it will be explained in chapter 12 of EGA (*Éléments de Géométrie Algébrique*). Other people¹⁰ could not explain this behaviour because



Grothendieck lecturing on SGA at the IHES

their assumptions are too strict. I'll assume less and prove more." Indeed, one year later, during a Bourbaki talk in Paris on the Picard functor he explained everything with schemes. Murre attended this talk, since Grothendieck had invited him for the spring of 1962. During this stay Grothendieck succeeded in convincing him of the need to use schemes. His main argument was that nilpotents are nature-given, they should be used; neglecting them is a mistake and leads to oversights and seemingly pathological phenomena. This was clearly true as shown by his work on the Picard functor. Algebraic groups in characteristic p also lead naturally to nilpotents: there are homomorphisms that are injective on the level of groups, but that are not necessarily isomorphisms onto their image; the reason is that, considered as homomorphism of schemes, they have a kernel. Another illustration is his approach to the algebraic fundamental group of curves in characteristic p : using nilpotents one can lift curves to characteristic 0 where one can employ the complex topology, a method that could not be used in the classical framework.

Jean Dieudonné once told Jacob: "Grothendieck always departed from a concrete problem and searched the most natural framework in which to place it so that the solution would present itself naturally." A fantastic example of this is his relative Riemann–Roch theorem. Also SGA (*Séminaire de Géométrie Algébrique*) 1 and 2 [2, 3, 4] are rather concrete, but the EGA are far more abstract and written in great generality as there are certainly situations where one can make use of this. Indeed, as an example, the theory of fibered categories as further developed by Michael ('Mike') Artin (born 1934), Pierre Deligne (born 1944) and

Jean Giraud (1936–2007), is indispensable for an adequate treatment of moduli spaces via 'stacks'.

Grothendieck was not only generous with his ideas but also very hospitable. Jacob was always welcome in his house located on the *Ile-de-Jatte* just outside the center of Paris. Usually Jacob visited him in the afternoon and they talked many hours about mathematics after which he invariably was asked for dinner. This was usually followed by hour-long mathematical discussions, but now in Grothendieck's study upstairs. You could talk about any subject; for him there were no stupid questions.

This was the period when the IHES (Institut des Hautes Études Scientifiques) was founded by Léon Motchane (1900–1990) who was its first director. At first, it was still in Paris but it soon moved to the *Bois Marie* in Bures-sur-Yvette where the institute also had some apartments. The lively weekly seminar led by Alexander Grothendieck and Jean-Pierre Serre (born 1926) always drew a crowd, among whom the complex analysts Reinhold Remmert (1930–2016) and Hans Grauert (1930–2011). At that time there was no library at the IHES. One had to use the one at the IHP (Institut Henri Poincaré). Its librarian, Paul Belgodère (1921–1986), imposed strict rules. For instance, everyone who wished to make use of the library had to show him a letter of recommendation.

Jacob revisited Paris for a brief period in the fall of 1964; Grothendieck over lunch tried to explain the concept of *motives* to him. Later, in 1967 Grothendieck gave a series of lectures about these, attended by the Russian mathematician Yuri Manin (1937–2023) who understood the material perfectly and wrote a beautiful article [23] about it.

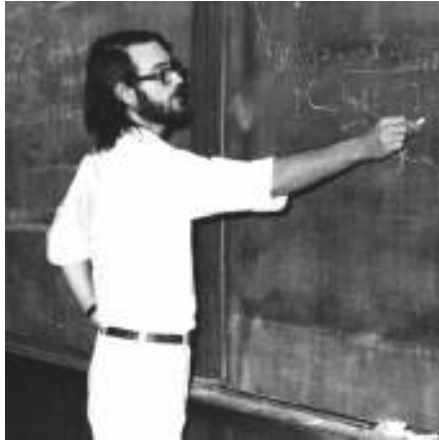
In 1964 Jacob also started to think about the *algebraic fundamental group*. Grothendieck was inspired by the article [24] by David Mumford (born 1937) on the local fundamental group of a normal surface, which he tried to mimic in characteristic p . Grothendieck, who already partly solved it, asked Jacob to look into it, since he was busy doing several other things. Back in the Netherlands Jacob indeed found a solution. Grothendieck told him to go ahead and publish it. However, since Jacob felt that Grothendieck had done an important part of the work, he asked him to be co-author. Grothendieck agreed (cf. [51] and also [79]). Jacob once told me: “This was a good move: I am one of the few people having published an article together with Grothendieck.”

In 1969, after visiting Grothendieck at home, Jacob asked him about the *Weil conjectures*. He answered: “I think only one step is needed to solve them and it would not surprise me if one of the younger people like Enrico Bombieri (born 1940) or Pierre Deligne would make this last step.” As one knows now, it was not a small step at all. Deligne solved it four years later in 1973 (see [11, 12] for which he was awarded the Fields medal).

Jacob kept in contact with Grothendieck but instead of discussing mathematics, they exchanged ideas on e.g. the ‘Survivre’ movement, an eco-political movement led by Grothendieck in which, with his sharp insight, he was far ahead of his time. He was rather disappointed by the lack of support of his mathematical friends. The last letters date from 1988–1990 when Grothendieck had assumed a teaching job at the university of Montpellier, but the exchange stopped abruptly in 1991 when he had left for the Pyrenees.¹¹

An expanding MI Leiden (1970–1994)

When Jacob started his studies in Leiden no local mathematical institute existed there. There were very few students, the exams were all oral and taken at the home of the professor. The results were communicated in the *leeskamer Bosscha* which later became the Lorentz institute for theoretical physics.¹² The first Mathematics Institute was at *Vreewijkstraat 12*, not far from the *Academiegebouw*, the oldest building of the Leiden university, but it did not have offices. In the 1970s the number of students exploded and the need for a larger mathematics



David Mumford lecturing at Tata

institute became apparent. Two floors of an apartment building at the *Stationsplein* were designated to house the institute and math library. Some six years later the faculty of mathematics moved to a newly built three-storey building in which also the first computers of the university were installed.

Philip Griffiths (born 1938), invited by Frans Oort, in 1970 gave a wonderful series of lectures at the University of Amsterdam. He gave talks on his newly found results regarding algebraic cycles [13] which Jacob followed with much interest. As a young PhD student I was encouraged to attend these lectures but, being a novice in algebraic geometry I did not understand all the details. Jacob, helpful as usual, answered many an elementary question I posed to him so that I ultimately caught up. These lectures as well as the influential article [10] on cycles on the cubic threefold by Herb Clemens (born 1939) and Philip Griffiths were an important source of inspiration for Jacob. This led the next year to discussions with David Mumford in Warwick¹³ where a special year in algebraic geometry (1970/1971) was organized on the occasion of his visit, resulting in several publications: [62, 63, 65]. In Warwick he met Alberto Conte (born 1942) which led to joint research on topics related to the interests of the old Italian school. Conte would become a life-long friend. Below I'll report about their cooperation more in detail.

The number of students choosing algebraic geometry grew not only in the Netherlands, but worldwide. The first summer schools in algebraic geometry were organized with the aim to inform researchers on all levels about the latest developments in their field. Particularly influential were those organized by the AMS (American



Philip Griffiths

Mathematical Society), several of which Jacob attended.

At the one held in Arcata (1974) he met Alberto Collino (1947–2020) who, also on behalf of Alberto Conte, invited him to Turin the next year. In the library of Turin's mathematics institute Jacob admired the many books from Gino Fano's legacy¹⁴. This visit spurred further scientific cooperation between Jacob and Alberto Conte who was invited several times to Leiden. Later Marina Marchisio (born in 1969) after having obtained her PhD joined them for the papers they subsequently published together. Alberto and Jacob furthermore initiated the founding of three successful European projects ‘GAV’ (*Geometry of Algebraic Varieties*, 1991–1994), ‘AGE’ (*Algebraic Geometry in Europe*, 1995–1998), and ‘EAGER’ (*European Algebraic Geometry Research*, 2000–2004). He also cooperated with Collino (see [34, 35, 36]) who visited Leiden a few times. Thanks to his influence on the algebraic geometry in Turin, especially through his close cooperation with Collino, and with Conte and Marchisio, the University of Turin conferred in 2002 an honorary doctorate on Jacob, and in 2004 he was appointed foreign member of the *Accademia Delle Scienze di Torino*.

Spencer Bloch (born 1944) was the second young mathematician he met at Arcata and who would likewise play an important role in his mathematical life. They became friends and visited each other multiple times, discussing K -theory and exchanging ideas on algebraic cycles (see e.g. the joint publication [33]). Jacob also initiated the contact between Bloch and the group of K -theorists in Utrecht. This contact resulted in 1978 in the PhD thesis of Jan Stienstra under the supervision of Spencer Bloch



Spencer Bloch at Oberwolfach

and Jan Strooker (1932–2014). After the PhD Stienstra worked for two years with Bloch at the University of Chicago and for two years with Murre at the University of Leiden. A decade later Jacob introduced an other promising young student to Spencer, Rob de Jeu from Leiden University. He was accepted by Bloch as a PhD student which led to a Chicago thesis in 1992.¹⁵

Let me skip back to the time of my doctoral studies (1970–1974). Then the central point of contact for the geometry group, consisting of a dozen persons, was the Leiden weekly Monday geometry seminar. Apart from the organizer, my thesis adviser, Professor van Ven¹⁶, the senior members consisted of Jacob ('Professor Murre' for youngsters, 'Jaap' for his colleagues, and Professor van Est¹⁷. Van de Ven and Murre were fellow-students and had parallel careers: they completed their doctorate in the same year; van de Ven became lector at the Mathematics Institute of Leiden two years after Murre, and was subsequently promoted to professor in 1963. He remained at the institute until his retirement in 1996. Wil

van Est in 1972 had taken up a position in Amsterdam and was succeeded by Wolf Barth (1942–2016), my second thesis adviser. At that time Jacob did not play a prominent role in the geometry seminar, but in later years that changed when he regularly invited renowned guests to the institute.

During 1980s and the beginning of the 1990s algebraic geometry at the Leiden institute was blooming. After the departure in 1976 of Wolf Barth to Erlangen, Joseph Steenbrink (born 1947) was hired as a lector (1978–1980) and subsequently became full professor (Leiden 1980–1988, Nijmegen 1988–2012) and had many successful students, several of whom later became professors¹⁸. In that period two major projects funded by the 'ZWO' (Dutch Foundation for Pure Research) were instrumental in building up a generation of promising young algebraic geometers. One of these projects, *Singularities*, was led by Dirk Siersma (born 1943), Eduard Looijenga (born 1948) and Joseph Steenbrink, the second, *Moduli*, starting a year later, was led by Gerard van der Geer (born 1950), likewise a former PhD student of van de Ven, Frans Oort and myself. The two-weekly Friday *Intercity Seminars* gathered PhD students from all over the country where they could freely discuss their problems and hear lectures about the latest developments in algebraic geometry, some of these given by foreign specialists who were invited as guest researchers.

In the course of the 1990s, after Hendrik Lenstra (born 1949) and Bas Edixhoven (1962–2022) were hired, the focus in the Mathematics Institute shifted more to number theory and arithmetic geometry, and algebraic geometry became less prominent.

In that period Jacob, through his many contacts abroad, invited renowned math-

ematicians like Uwe Jannsen, Christopher Deninger, Brent Gordon, Masaki Hanamura, Stefan Müller-Stach and Dinakar Ramakrishnan in order to exchange ideas and to collaborate. See the publications [46–50, 81].

Later years (1995–2023)

After his retirement Jacob remained professionally active. As mentioned above, in this period after the successful European grant 'GAV', he and A. Conte played an important role in assuring the two follow up grants 'AGE' and 'EAGER', which further stimulated cooperation between algebraic geometers in Europe.

During this period Jacob gave several series of lectures on algebraic cycles and motives, for instance during a summer school in Turin (1993)¹⁹ [71], Grenoble (2001) [77], Guanajuato in Mexico (2002) and in Trieste (2010) [78], but also on conferences like the one in Banff (1998) [75]. In these lectures Jacob tried to convey older as well as recent results by giving the essential arguments without burying these in technical detail. At the same time he carefully explained the basic background so that one could reconstruct the full proofs without too much effort. Participants much valued this approach. Jan Nagel and I proposed to write up his lecture notes on motives. Discussing this with Jacob it turned out that he wanted us to assist in extending the notes by adding some newer material on mixed motives. This resulted in the monograph [80].

A few years earlier in 2004, Bas Edixhoven, Jan Nagel and I organized an EAGER conference at the Lorentz Center (Leiden) on the occasion of Jacob's 75th birthday (see [36]) and we were pleased that many first-class mathematicians took up the invitation. Jacob clearly enjoyed this present.



At Alberto Conte's (l) 70th birthday with Arnaud Beauville (r)



C.P. working with Jacob on the monograph [80]



75th birthday fest with E. Looijenga (l) and C. Deninger (r)

Mathematical works

I shall for the most part follow the *Summary of the contents of the selected publications of Jacob P. Murre*, communicated to me a few years before his demise.

1. On a connectedness theorem for a birational transformation at a simple point [54]

The famous connectedness theorem of Oscar Zariski (1899–1986) states that the total transform of a normal point by a birational morphism is connected and in [54] it is shown that for a birational morphism the total transform of a simple point²⁰ is rationally connected (i.e., any two points can be joined by a chain of rational curves). This result is on the one hand more precise than Zariski's, but on the other hand more restricted because it applies to a simple point instead of to a normal point. Murre's result 'explains', for instance, the well-known fact that a rational map of a variety to an abelian variety is regular at simple points. Grothendieck mentioned this fact in [15, Sem. Bourbaki 190, p.26] and asked Jacob if he could extend his result to mixed characteristic which he could not at that time. However, Wei-Liang Chow (1911–1995) in [9] answered Grothendieck's question by proving the theorem in full generality.

In the subsequent paper [55] using his connectedness theorem, Jacob extended the notion of intersection multiplicity in the case of proper intersections, but also for maximal connected unions of intersections, solving a question posed by A. Weil in [32, p.249].

2. On contravariant functors from the category of preschemes over a field into the category of abelian groups (with an application to the Picard functor) [60]

In [15, Sem. Bourbaki 232] Grothendieck constructed the Picard scheme for a scheme projective over a base scheme. He first defines the Picard functor and then goes on to show its representability. His method for the construction of the Picard scheme is close to the method used originally in Matsusaka's construction of the Picard variety. However, Grothendieck replaced Chow varieties by Hilbert schemes. This uses in an essential way the projectivity over the base and so it leaves open the case of a scheme proper over a field. In the present article this gap has been filled, by constructing the Picard scheme for a scheme proper over a field. In rough outline the proof pro-

ceeds as follows. First, using all the fundamental tools created by Grothendieck in his previous Bourbaki talks (e.g. his theory of pro-representability, his comparison theorem and his famous existence theorem), necessary and sufficient conditions are established for the representability of a contravariant functor from the category of preschemes over a field to the category of abelian groups. Next it is shown that these necessary and sufficient conditions are satisfied by the Picard functor for a scheme proper over a field.

Further developments: In the fundamental paper [1] Michael Artin created the theory of algebraic spaces which 'settled' in a certain sense the problem of representability of functors over an arbitrary base. In general one can not expect representability by a scheme and Artin had the idea to use instead algebraic spaces. Under certain natural conditions Artin could show that such a functor (over a fixed base) is indeed representable by an algebraic space. Since, as also shown by Artin, over a field algebraic spaces endowed with a group structure are in fact schemes, this gives an improvement of [60].

3. The tame fundamental group of a formal neighbourhood of a divisor with normal crossings on a scheme [51]

Mumford in [24] studied the fundamental group of a normal point on a complex algebraic surface by considering a small tubular neighborhood of a suitable divisorial resolution of the singularity. As has been pointed out by Grothendieck in [16, VIII, Section 3] it is of interest to study this also in the abstract setting and this is the purpose of the present monograph, written jointly with Grothendieck. However, the final result is less nice and precise than Mumford's result. In this abstract algebraic case one has to work within formal neighborhoods of the exceptional divisor, and with the algebraic fundamental group. Moreover, one has to restrict to tame coverings. Hence there is not a characterization of simple points in terms of this fundamental group as in the complex situation as Mumford showed. See also the notes [61] of lectures given at the Tata institute.

4. Algebraic equivalence modulo rational equivalence on a cubic threefold [62]

One of the most striking results in 1971 in the field of algebraic geometry was

the proof by Clemens and Griffiths of the non-rationality of the non-singular cubic threefold [10], solving a famous problem of classical Italian geometry. The crucial tool in their proof was the intermediate jacobian which one can associate to any odd-dimensional cohomology group of a nonsingular projective variety. In general this is an analytic torus constructed via Hodge theory. In the present case of the cubic threefold the intermediate jacobian of the middle cohomology is in fact an abelian variety. It has a geometric flavour since it is determined by the family of lines on the threefold. In the non-rationality proof these algebraic cycles of codimension two play a crucial role. Since, as discovered earlier by Mumford and Griffiths, divisors and algebraic cycles of codimension ≥ 2 behave fundamentally different with respect to various equivalence relations, in this setting a natural question arose: what is the nature of the *Abel–Jacobi equivalence relation*?²¹ In the present article that question was answered: for the cubic threefold the group of one dimensional cycles which are algebraically equivalent to zero modulo rational equivalence maps injectively to the intermediate jacobian. The method of proof is entirely algebraic and it works over every algebraically closed field of characteristic different from 2. In this algebraic setting the intermediate jacobian has to be replaced by a so-called *Prym variety* which itself is a principally polarized abelian variety (see also [63] which is discussed in work 5 below). To give an idea how the Prym variety enters the proof, first fix a (general) line L on the cubic X and a plane N not meeting L in the ambient 4-dimensional projective space. By taking the span $M_p = \langle p, L \rangle$ of the points $p \in N$ with L , the intersections $C_p = M_p \cap X$ form a family of conics (on X) and hence a conic bundle over N . Over some curve C in N these conics degenerate into two lines (both meeting L). On the other hand we consider the curve C' of the set of all the lines meeting the fixed line L . This defines an involution of C' over C by interchanging these two lines and hence an involution of the level of the jacobian. This is the Prym involution and its 'kernel', the corresponding Prym variety, takes the place of the intermediate jacobian of X .

5. Reduction of the proof of the non-rationality of a non-singular cubic threefold to a result of Mumford [63]

Mumford has made a precise systematic study of Prym varieties in his paper [25]. Since the intermediate jacobian of a cubic threefold has an interpretation as a Prym variety (see work 4 above and the references given there), one could in this way get a proof (in characteristic zero) of the non-rationality of the cubic threefold. Using Mumford's results and methods from [62], and working with étale cohomology instead of singular cohomology the transcendental methods could be replaced by algebraic ones. Hence the non-rationality of the non-singular cubic threefold holds over every algebraically closed field of different from 2.

Further developments: In 1977 there appeared a truly beautiful paper [7] by Arnaud Beauville (born 1947), where he made a profound study of quadric bundles and their corresponding Prym varieties and which implied the results of [63] as a special case.

6. The Hodge conjecture for fourfolds admitting a covering by rational curves [41]

In this article, written jointly with A. Conte, the Hodge (2,2) conjecture for a nonsingular complex projective fourfold is shown in case there exists a covering family of rational curves. In particular this applies to nonsingular cubic quartic and quintic fourfolds and also to quadric bundles of dimension 4. More examples were given in [42].

7. On the Chow groups of certain types of Fano threefolds [33]

In this joint article with S. Bloch the Chow groups of codimension two cycles on three types of Fano threefolds X are investigated, namely quartic threefolds in $\mathbb{P}^4$, intersections of a cubic and a quadric in $\mathbb{P}^5$, and the intersections of three quadrics in $\mathbb{P}^6$; more precisely, we study their subgroups of rational equivalence classes of cycles algebraically equivalent to zero. These groups are shown to be weakly representable in the sense that they can be dominated by the jacobian of a curve via a correspondence between the curve and the variety in question²². In fact, they are parametrized by the points of a generalized Prym variety, i.e., a principally polarized abelian variety associated to a pair consisting of a jacobian variety of a curve and an endomorphism satisfying a quadratic equation.²³ This result is greatly inspired by the beautiful

paper [30] where such varieties (over $\mathbb{C}$) are considered via intermediate jacobians. Another important ingredient comes from Bloch's article [8], where it is shown that there exists a map between the torsion groups of the codimension two cycles to the third étale cohomology group. In the present situation these morphisms are isomorphisms. Using this, certain questions on the Chow groups can be reduced to known results in étale cohomology.

8. Applications of algebraic K-theory to the theory of algebraic cycles [67]

In this article it is shown that for codimension two cycles algebraically equivalent to zero there exists a universal regular map to an abelian variety (such a map is called regular if for every algebraic family T of such cycles the composite of the family and the map is itself a rational map—in the sense of algebraic geometry—from T to the abelian variety). Over the complex numbers this abelian variety is the image by the Abel–Jacobi map of the algebraic cycles of this kind in the intermediate jacobian.

The theorem answers a question of Mumford for such cycles [18, p.143]. The proof uses results of Hiroshi Saito, Bloch and Bloch–Ogus in combination with the theorem of Merkurjev–Suslin from algebraic K-theory. In 2018 Bruno Kahn found a mistake in the proof of one of the lemmas and fixed it in [20].

9. Abel–Jacobi equivalence versus incidence equivalence for algebraic cycles of codimension two [66]

As discussed in work 4 above, cycles of codimension j algebraically equivalent to zero are said to be Abel–Jacobi equivalent to zero if they are in the kernel of the Abel–Jacobi map to the j -th intermediate jacobian. On the other hand there is also the subgroup of the cycles incident equivalent to zero, a concept introduced by P. Griffiths in [14]. The importance of this concept has also been stressed by Grothendieck in [17].

Griffiths proved that incidence equivalence is coarser than Abel–Jacobi equivalence and raised the question whether the two differ at most by an isogeny. For the case of codimension two cycles this question of Griffiths has a positive answer as shown in this article. The main tool of the proof is Hodge theory and so the result is only valid over $\mathbb{C}$.

10. On the motive of an algebraic surface [68]

One of Grothendieck's reasons to create a theory of motives was to understand better the similarity of the cohomology groups of an algebraic variety in the different settings (classical étale, crystalline). He focussed on homological motives, i.e., motives built from algebraic cycles modulo homological equivalence (or rather, numerical equivalence, but this depends on a conjecture). His construction works for every adequate equivalence relation. Jacob in this article, inspired by works of Yuri Manin and Christophe Soulé, and by discussions with Spencer Bloch, turned to Chow motives, i.e., motives built using rational equivalence instead of homological equivalence. As he states in the introduction of loc.cit.: “It is my conviction that Chow motives are more suited for the study of the Chow groups.” In Grothendieck's theory one uses the cohomological Künneth components $p^j(X)$ of the diagonal of the variety X , but for Chow motives one replaces these with the finer Chow–Künneth components $\text{ch}^j(X)$ belonging to the Chow group of $X \times X$ whose classes should give the usual Künneth components. These components act as projectors. For every nonsingular projective variety X of dimension d (defined over an arbitrary field) one has the two trivial projectors $\text{ch}^0(X) = e \times X$ and dually $\text{ch}^{2d}(X) = X \times e$, where e is a (rational) point on X . In the present paper for every such X the next Chow–Künneth projector $\text{ch}^1(X)$ and its dual $\text{ch}^{2d-1}(X)$ are constructed. The construction of ch^1 is based upon the work of A. Weil and S. Lang on the Picard and Albanese variety. Using a linear section of the variety one constructs first a morphism from the Picard variety to the Albanese variety which turns out to be an isogeny. An inverse of this isogeny gives a morphism from the Albanese to the Picard variety and therefore by the Weil–Lang theory one obtains a divisor class in the product $X \times X$. This is a refined algebraic version of the $\Lambda_{d-1}(X)$ -class from the Lefschetz decomposition valid for cohomology. These ingredients allow to construct the Chow–Künneth projector $\text{ch}^1(X)$, and its transpose yields $\text{ch}^{2d-1}(X)$. The corresponding Chow motives are the motivic versions of the Picard and Albanese variety (similarly, in the case of a curve C the Chow motive $\text{ch}^1(C)$ is the motivic version of the jacobian variety of the curve C).

In the case of a surface this yields a complete decomposition of the diagonal since for the remaining $\mathrm{ch}^2(S)$ one can take the difference of the diagonal with the previous projectors. The surface S is now as Chow motive completely decomposed into five Chow motives $\mathrm{ch}^j(S)$ each of which not only gives back the j -th cohomology but on the Chow level this gives a filtration, the so-called Bloch–Beilinson filtration.²⁴

In his beautiful survey paper in the 1991 Seattle conference Tony Scholl [29] has given a more modern description (and some slight improvement) of this paper. See also work 13 below.

11. Motivic decomposition of abelian schemes and Fourier transform [46]

Already in 1974 Shermenev — a student of Manin — has shown, by intricate arguments, that the Chow motive $\mathrm{ch}(A)$ of an abelian variety A over an algebraically closed field can be completely decomposed. In this paper, joint with C. Deninger, the existence of a canonical motivic decomposition is proven, not only for an abelian variety over a field but also for an abelian scheme A over a base which is itself over a field. For this purpose the theory of Chow motives is extended to a theory of relative Chow motives over a given base. A. Beauville has used the work of S. Mukai on the Fourier transform to study the decomposition of the Chow groups of an abelian variety under the endomorphism of multiplication by n . Similar methods can be used on abelian schemes. The article [22] by D. Lieberman²⁵ then yields the required decomposition of the diagonal.

Further developments: K. Künnemann in [21] has extended these methods in a nice way and obtained a complete Lefschetz theory for Chow motives of an abelian scheme.

12. On a conjectural filtration on the Chow groups of an algebraic variety. Parts I, II [69, 70]

One of the famous standard conjectures is that the Künneth decomposition of the diagonal of a nonsingular projective algebraic variety X can be given by algebraic cycles on the product $X \times X$. Based on some examples Jacob suggested an even stronger conjecture namely that those required cycle classes can in fact be lifted to rational equivalence and then give an

Honors

- 1971 Member Royal Dutch Academy of Science (KNAW)
- 2000 Silver Medal *Unione Matematica Italiana*
- 2002 Doctor Honoris Causa Università di Torino
- 2004 Foreign Member *Accademia Delle Scienze di Torino*

Murre's doctoral students

R. van der Waall (with H. Kloosterman, 1972), F. van Schagen (1972), J. Bioch (1975), W. de Bruin (with M. van der Put, 1976), J. Brinkhuis (1981), G. Welters (with F. Oort, 1981), D. Epema (with C. Peters, 1983), R. Aerdts (with F. Oort, 1986), B. Ruitenburt (with G. Heckman, 1988), J. Mulder (with C. Peters, 1993), J. van Beelen (with B. Edixhoven, 1994), J. Nagel (with C. Peters, 1997).

orthogonal decomposition of the diagonal in the Chow ring, i.e., that there is not merely a Künneth decomposition but a Chow–Künneth decomposition which gives a filtration on the Chow groups (see work 10 above).

In [69] a number of conjectures were announced describing how this filtration should be determined by those Chow motives. In [70] part of these conjectures were verified in a (rather limited) number of cases. In particular for surfaces these are true (see work 10 above); moreover they are also true for threefolds of the type $S \times C$ where S is a surface and C is a curve. For abelian surfaces part of the conjectures is true and the remaining part is equivalent to a conjecture of A. Beauville.

To this day the evidence for the truth of the conjectures is still meagre (the cornerstone in this story remains of course the famous Standard Conjecture itself about the algebraicity of the Künneth components of the diagonal themselves — the so called *standard conjecture CK* — for which unfortunately no progress has been obtained for a long time).

In his beautiful lecture in the Seattle Conference on Motives (1991) Uwe Jannsen [19] discussed these conjectures and he showed that they are equivalent with the so-called *Bloch–Beilinson conjectures* (in one of their forms) and that the corresponding filtrations (if they exist) also coincide.

13. On the transcendental part of the motive of a surface [52]

This is a joint paper with Bruno Kahn and Claudio Pedrini. A warning is in order: in this paper Voevodsky's²⁶ convention is used which is homological rather than cohomological and uses a covariant version

of Chow motives which is the dual of Grothendieck's contravariant (cohomological) version. In all other papers of Jacob he adhered to Grothendieck's convention.

Recall that in the work 10 above a complete Chow–Künneth decomposition of the Chow motive of a surface S was given. Here the mysterious middle motive $\mathrm{ch}_2(S)$ is further decomposed into an obvious algebraic part (carrying the algebraic cohomology) and a transcendental part $t(S)$. The algebraic part is a sum of twisted Tate motives. However, the transcendental part is the truly mysterious part carrying the transcendental cohomology as well as the Albanese kernel. After the introduction there are three sections, each written by a different author. In the first part (written by Jacob) the validity of his conjectures is investigated for the motive of the product of two surfaces. In the second part (written by C. Pedrini) the birational motive of a surface is treated as well as the relation between Bloch's conjecture and the so-called finite dimensionality conjecture by Kimura–O'Sullivan. Finally, in the last part (written by B. Kahn) again birational motives of a surface are studied and also the step is made from passing from pure motives to the triangulated category of Voevodsky. ¶

Acknowledgements

This article heavily draws upon an interview from 2012 with Jacob which is available (in Dutch) on the author's webpage <https://www-fourier.univ-grenoble-alpes.fr/~peters>. The author also wants to thank A. Conte, C. Deninger, G. van der Geer, E. Looijenga, J. Nagel, F. Oort, U. Persson, H. Sterk, J. Stienstra, who provided him with corrections and further information, and S. Bloch, Ph. Griffiths, D. Mumford for also allowing to use their pictures.

Notes

- 1 A small village in the province of Zeeland. Baarland at that time had only 800 inhabitants.
- 2 The Dutch part of Flanders.
- 3 C. Visser was professor in Delft from 1946–1956, and in Leiden from 1956 until his retirement in 1976.
- 4 Roughly the equivalent of a masters.
- 5 Johannes Droste (1886–1963) was a Dutch mathematician and theoretical physicist.
- 6 Paul Cohen changed his adviser to Antoni Zygmund (1900–1992).
- 7 Jean Dieudonné was one of the founders of the Nicolas Bourbaki group.
- 8 Comparable to Reader or Associate Professor.
- 9 Nicolaas Kuiper (1920–1994) at that time held a chair at the Agricultural University of Wageningen, later moved to the University of Amsterdam, and from 1971–1985 served as director of the IHES.
- 10 He meant Weil, Chow and Matsusaka.

References

- 1 M. Artin, Algebraic approximation of structures over complete local rings, *Inst. Hautes Études Sci. Publ. Math.* 36 (1969), 23–58.
- 2 M. Artin, J. E. Bertin, M. Demazure, P. Gabriel, A. Grothendieck, M. Raynaud and J.-P. Serre, *Schémas en groupes. Fasc. 1: Exposés 1 à 4*, Institut des Hautes Études Scientifiques, Paris, 1963/1964. Deuxième édition, Séminaire de Géométrie Algébrique de l'Institut des Hautes Études Scientifiques, 1963, dirigé par Michel Demazure et Alexander Grothendieck.
- 3 M. Artin, J. E. Bertin, M. Demazure, P. Gabriel, A. Grothendieck, M. Raynaud and J.-P. Serre, *Schémas en groupes. Fasc. 2a: Exposés 5 et 6*, Institut des Hautes Études Scientifiques, Paris, 1963/1965. Deuxième édition, Séminaire de Géométrie Algébrique de l'Institut des Hautes Études Scientifiques, 1963/64, dirigé par Michel Demazure et Alexander Grothendieck.
- 4 M. Artin, J. E. Bertin, M. Demazure, P. Gabriel, A. Grothendieck, M. Raynaud and J.-P. Serre, *Schémas en groupes. Fasc. 2b: Exposés 7a et 7b*, Institut des Hautes Études Scientifiques, Paris, 1965. Deuxième édition, Séminaire de Géométrie Algébrique de l'Institut des Hautes Études Scientifiques, 1963/64, dirigé par Michel Demazure et Alexander Grothendieck.
- 5 W. Barth, K. Hulek, C. Peters and A. van de Ven, *Compact Complex Surfaces*, *Ergebn. der Math.* 3. Folge, Vol. 4, Springer, 2004, second edition.
- 6 W. Barth, C. Peters and A. van de Ven, *Compact Complex Surfaces*, *Ergebn. der Math.* 3. Folge, Vol. 4, Springer, 1984.
- 7 A. Beauville, Variétés de Prym et jacobiniennes intermédiaires, *Ann. Sci. École Norm. Sup.* (4) 10(3) (1977), 309–391.
- 8 S. Bloch, Torsion algebraic cycles and a theorem of Roitman, *Compositio Math.* 39(1) (1979), 107–127.
- 9 W. L. Chow, On the connectedness theorem in algebraic geometry, *Amer. J. Math.* 81 (1959), 1033–1074.
- 10 C. H. Clemens and P. A. Griffiths, The intermediate Jacobian of the cubic threefold, *Ann. of Math.* (2) 95 (1972), 281–356.
- 11 P. Deligne, La conjecture de Weil. I, *Inst. Hautes Études Sci. Publ. Math.* 43 (1974), 273–307.
- 12 P. Deligne, La conjecture de Weil. II, *Publ. Math. I.H.E.S.* 52 (1980), 137–252.
- 13 P. A. Griffiths, On the periods of certain rational integrals. I, II, *Ann. of Math.* (2) 90 (1969), 460–495, 496–541.
- 14 P. A. Griffiths, Some transcendental methods in the study of algebraic cycles, in *Several Complex Variables, II (Proc. Internat. Conf., Univ. Maryland, College Park, MD, 1970)*, *Lecture Notes in Math.*, Vol. 185, Springer, 1971, pp. 1–46.
- 15 A. Grothendieck, Fondements de la géométrie algébrique [Extraits du Séminaire Bourbaki, 1957–1962], Secrétariat mathématique, Paris, 1962.
- 16 A. Grothendieck, Cohomologie locale des faisceaux cohérents et théorèmes de Lefschetz locaux et globaux (SGA 2), *Advanced Studies in Pure Mathematics*, Vol. 2, North-Holland and Masson et Cie, 1968. Augmenté d'un exposé par Michèle Raynaud, Séminaire de Géométrie Algébrique du Bois-Marie, 1962.
- 17 A. Grothendieck, Hodge's general conjecture is false for trivial reasons, *Topology* 8 (1969), 299–303.
- 18 R. Hartshorne, Equivalence relations on algebraic cycles and subvarieties of small codimension, in *Algebraic Geometry, Humboldt State Univ., Arcata, CA, 1974*, (Proc. Sympos. Pure Math., Vol. 29, Amer. Math. Soc., 1975, pp. 129–164.
- 19 U. Jannsen, Motivic sheaves and filtrations on Chow groups, in *Motives (Seattle, WA, 1991)*, Proc. Sympos. Pure Math., Vol. 55, Amer. Math. Soc., 1994, pp. 245–302.
- 20 B. Kahn, On the universal regular homomorphism in codimension 2, *Ann. Inst. Fourier (Grenoble)* 71(2) (2021), 843–848.
- 21 K. Künnemann, A Lefschetz decomposition for Chow motives of abelian schemes, *Invent. Math.* 113(1) (1993), 85–102.
- 22 D. I. Lieberman, Higher Picard varieties, *Amer. J. Math.* 90 (1968), 1165–1199.
- 23 J. I. Manin, Correspondences, motifs and monoidal transformations, *Mat. Sb. (N.S.)* 77(119) (1968), 475–507.
- 24 D. Mumford, The topology of normal singularities of an algebraic surface and a criterion for simplicity, *Publications mathématiques de l'I.H.E.S.* 9 (1961), 5–22.
- 25 D. Mumford, Prym varieties. I, in *Contributions to Analysis (a collection of papers dedicated to Lipman Bers)*, Academic Press, 1974, pp. 325–350.
- 26 J. Nagel and C. Peters, eds., *Algebraic Cycles and Motives*, London Mathematical Society Lecture Note Series, Vol. 343 and 344, Cambridge University Press, 2007.
- 27 W. Scharlau, *Wer is Alexander Grothendieck?*, Vol 1 and 3, Books on Demand, 2010, 2011.
- 28 L. Schneps, Who is Alexander Grothendieck?, Vol 2, <https://webusers.imj-prg.fr/~leila.schneps/grothendieckcircle/Mathematics.html>, 2023, in progress.
- 29 A. J. Scholl, Classical motives, in *Motives (Seattle, WA, 1991)*, Proc. Sympos. Pure Math., Vol. 55, Amer. Math. Soc., 1994, pp. 163–187.
- 30 A. N. Tjurin, Five lectures on three-dimensional varieties, *Uspehi Mat. Nauk* 27(5) (1972), 3–50.
- 31 B. L. van der Waerden, *Einführung in die algebraische Geometrie*, Dover Publications, 1945.
- 32 A. Weil, *Foundations of Algebraic Geometry*, American Mathematical Society Colloquium Publications, Vol. 29, Amer. Math. Soc., 1946.

Publications of J.P. Murre

- 33 S. Bloch and J.P. Murre, On the Chow group of certain types of Fano threefolds, *Compositio Math.* 39(1) (1979), 47–105.
- 34 A. Collino and J.P. Murre, The intermediate Jacobian of a cubic threefold with one ordinary double point; an algebraic-geometric approach. I, *Nederl. Akad. Wetensch. Proc. Ser. A 81 / Indag. Math.* 40(1) (1978), 43–55.
- 35 A. Collino and J.P. Murre, The intermediate Jacobian of a cubic threefold with one ordinary double point; an algebraic-geometric approach. II, *Nederl. Akad. Wetensch. Proc. Ser. A 81 / Indag. Math.* 40(1) (1978), 56–71.
- 36 A. Collino, J.P. Murre and G.E. Welters, On the family of conics lying on a quartic threefold, *Rend. Sem. Mat. Univ. Politec. Torino* 38(1) (1980), 151–181.
- 37 A. Conte, M. Marchisio and J.P. Murre, On unirationality of double covers of fixed degree and large dimension; a method of Ciliberto, in *Algebraic Geometry*, de Gruyter, 2002, pp. 127–140.
- 38 A. Conte, M. Marchisio and J.P. Murre, On the unirationality of the quintic hypersurface containing a 3-dimensional linear space, *Atti Accad. Sci. Torino Cl. Sci. Fis. Mat. Natur.* 142 (2009), 89–96.
- 39 A. Conte and J.P. Murre, On quartic threefolds with a double line. I, *Nederl. Akad. Wetensch. Proc. Ser. A 80 / Indag. Math.* 39(3) (1977), 145–160.
- 40 A. Conte and J.P. Murre, On quartic threefolds with a double line. II, *Nederl. Akad. Wetensch. Proc. Ser. A 80 / Indag. Math.* 39(3) (1977), 161–175.
- 41 A. Conte and J.P. Murre, The Hodge conjecture for fourfolds admitting a covering by rational curves, *Math. Ann.*, 238(1) (1978), 79–88.
- 42 A. Conte and J.P. Murre, The Hodge conjecture for Fano complete intersections of dimension four, in *Journées de Géométrie Algébrique d'Angers, Juillet 1979 / Algebraic Geometry, Angers, 1979*, Sijthoff & Noordhoff, 1980, pp. 129–141.
- 43 A. Conte and J.P. Murre, Algebraic varieties of dimension three whose hyperplane sections are Enriques surfaces, *Ann. Scuola Norm. Sup. Pisa Cl. Sci. (4)* 12(1) (1985), 43–80.
- 44 A. Conte and J.P. Murre, On the definition and on the nature of the singularities of Fano threefolds, *Rend. del Sem. Mat. Univ. Pol. Torino* 43 (1986), 51–67.
- 45 A. Conte and J.P. Murre, On a theorem of Morin on the unirationality of the quartic fivefold, *Atti Accad. Sci. Torino Cl. Sci. Fis. Mat. Natur.* 132 (1998), 49–59.
- 46 C. Deninger and J.P. Murre, Motivic decomposition of abelian schemes and the Fourier transform, *J. Reine Angew. Math.* 422 (1991), 201–219.
- 47 B.B. Gordon, M. Hanamura and J.P. Murre, Chow–Künneth projectors for modular varieties, *C. R. Math. Acad. Sci. Paris* 335(9) (2002), 745–750.
- 48 B.B. Gordon, M. Hanamura and J.P. Murre, Relative Chow–Künneth projectors for modular varieties, *J. Reine Angew. Math.* 558 (2003), 1–14.
- 49 B.B. Gordon, M. Hanamura and J.P. Murre, Absolute Chow–Künneth projectors for modular varieties, *J. Reine Angew. Math.* 580 (2005), 139–155.
- 50 B.B. Gordon and J.P. Murre, Chow motives of elliptic modular threefolds, *J. Reine Angew. Math.* 514 (1999), 145–164.
- 51 A. Grothendieck and J.P. Murre, *The Tame Fundamental Group of a Formal Neighbourhood of a Divisor with Normal Crossings on a Scheme*, Lecture Notes in Math., Vol. 208, Springer, 1971.
- 52 B. Kahn, P. Murre and C. Pedrini, On the transcendental part of the motive of a surface, in *Algebraic Cycles and Motives*, Vol. 2, London Math. Soc. Lecture Note Ser., Vol. 344, Cambridge Univ. Press, 2007, pp. 143–202.
- 53 S.-I. Kimura and J.P. Murre, On natural isomorphisms of finite dimensional motives and applications to the Picard motives, in *Cycles, Motives and Shimura Varieties*, Tata Inst. Fund. Res. Stud. Math., Vol. 21, Tata Inst. Fund. Res., 2010, 227–241.
- 54 J.P. Murre, Intersection multiplicities of maximal connected bunches, *Amer. J. Math.* 80 (1958), 311–330.
- 55 J.P. Murre, On a connectedness theorem for a birational transformation at a simple point, *Amer. J. Math.* 80 (1958), 3–15.
- 56 J.P. Murre, On a uniqueness theorem for certain kinds of birational transformations, *Nederl. Akad. Wetensch. Proc. Ser. A 62 / Indag. Math.* 21 (1959), 129–134.
- 57 J.P. Murre, On divisors on products of three factors, *Nieuw Arch. Wiskunde* 3/8 (1960), 129–133.
- 58 J.P. Murre, On Chow varieties of maximal, total, regular families of positive divisors, *Amer. J. Math.* 83 (1961), 99–110.
- 59 J.P. Murre, On generalized Picard varieties, *Math. Ann.* 145 (1961/62), 334–353.
- 60 J.P. Murre, On contravariant functors from the category of pre-schemes over a field into the category of abelian groups (with an application to the Picard functor), *Inst. Hautes Études Sci. Publ. Math.* 23 (1964), 5–43.
- 61 J.P. Murre, *Lectures on an Introduction to Grothendieck's Theory of the Fundamental Group*, Tata Inst. Fund. Res. Lectures on Math., Vol. 40, Tata Inst. Fund. Res., 1967. Notes by S. Anantharaman.
- 62 J.P. Murre, Algebraic equivalence modulo rational equivalence on a cubic threefold, *Compositio Math.* 25 (1972), 161–206.
- 63 J.P. Murre, Reduction of the proof of the non-rationality of a non-singular cubic threefold to a result of Mumford, *Compositio Math.* 27 (1973), 63–82.
- 64 J.P. Murre, Algebraic hypersurfaces, *Nederl. Akad. Wetensch. Verslag Afd. Natuurk.* 83 (1974), 11–13.
- 65 J.P. Murre, Some results on cubic threefolds, in *Classification of Algebraic Varieties and Compact Complex Manifolds*, Lecture Notes in Math., Vol. 412, Springer, 1974, pp. 140–160.
- 66 J.P. Murre, Abel–Jacobi equivalence versus incidence equivalence for algebraic cycles of codimension two, *Topology* 24(3) (1985), 361–367.
- 67 J.P. Murre, Applications of algebraic K -theory to the theory of algebraic cycles, in *Algebraic Geometry, Sitges (Barcelona), 1983*, Lecture Notes in Math., Vol. 1124, Springer, 1985, pp. 216–261.
- 68 J.P. Murre, On the motive of an algebraic surface, *J. Reine Angew. Math.* 409 (1990), 190–204.
- 69 J.P. Murre, On a conjectural filtration on the Chow groups of an algebraic variety. I, The general conjectures and some examples, *Indag. Math. (N.S.)* 4(2) (1993), 177–188.
- 70 J.P. Murre, On a conjectural filtration on the Chow groups of an algebraic variety. II, Verification of the conjectures for threefolds which are the product on a surface and a curve, *Indag. Math. (N.S.)* 4(2) (1993), 189–201.
- 71 J.P. Murre, Algebraic cycles and algebraic aspects of cohomology and K -theory, in *Algebraic Cycles and Hodge Theory (Torino, 1993)*, Lecture Notes in Math., Vol. 1594, Springer, 1994, pp. 93–152.
- 72 J.P. Murre, On the work of Gino Fano on three-dimensional algebraic varieties, *Algebra and Geometry (1860–1940): the Italian contribution*, *Rend. Circ. Mat. Palermo (2) Suppl.* 36 (1994), 219–229.
- 73 J.P. Murre, Representation of unramified functors. Applications (according to unpublished results of A. Grothendieck), in *Séminaire Bourbaki*, Vol. 9, Exp. No. 294, Soc. Math. France, 1995, pp. 243–261.
- 74 J.P. Murre, Introduction to the theory of motives, *Boll. Un. Mat. Ital. A (7)* 10(3) (1996), 477–489.
- 75 J.P. Murre, Algebraic cycles on abelian varieties: application of abstract Fourier theory, in *The Arithmetic and Geometry of Algebraic Cycles Banff, AB, 1998*, NATO Sci. Ser. C Math. Phys. Sci., Vol. 548, Kluwer, 2000, pp. 307–320.
- 76 J.P. Murre, Fano varieties and algebraic cycles, in *The Fano Conference*, Univ. Torino, 2004, pp. 51–68.
- 77 J.P. Murre, Lecture on motives, in *Transcendental Aspects of Algebraic Cycles*, London Math. Soc. Lecture Note Ser., Vol. 313 Cambridge Univ. Press, 2004, pp. 123–170.
- 78 J.P. Murre, Lectures on algebraic cycles and Chow groups, in *Hodge Theory*, Math. Notes, Vol. 49, Princeton Univ. Press, 2014, pp. 410–448.
- 79 J.P. Murre, On Grothendieck's work on the fundamental group, in *Alexandre Grothendieck: A Mathematical Portrait*, Int. Press, 2014, pp. 143–167.
- 80 J.P. Murre, J. Nagel and C.A.M. Peters, *Lectures on the Theory of Pure Motives*, University Lecture Series, Vol. 61, Amer. Math. Soc., 2013.
- 81 J.P. Murre and D. Ramakrishnan, Local Galois symbols on $E \times E$, in *Motives and Algebraic Cycles*, Fields Inst. Commun., Vol. 56 Amer. Math. Soc., 2009, pp. 257–291.

In de verdediging

| In defence

Pas gepromoveerden brengen hun werk onder de aandacht. Heeft u tips voor deze rubriek of bent u zelf pas gepromoveerd? Laat het weten aan onze redacteur.

Redacteur: Nicolaos Starreveld
FNWI, Universiteit van Amsterdam
Postbus 94214
1090 GE Amsterdam
verdediging@nieuwarchief.nl



Eye on Variety – The teacher's work in developing mathematical whole-class discussions

Chris Kooloos

In May 2022, Chris Kooloos from Radboud University Nijmegen successfully defended his PhD thesis with the title *Eye on Variety – The teacher's work in developing mathematical whole-class discussions*. Chris carried out his research under the supervision of prof.dr. Gert J. Heckman (Radboud University), prof.dr. Rainier H. Kaenders (University of Bonn) and dr. Helma W. Oolbekkink-Marchand (Radboud University & HAN University of Applied Sciences).

Since 2021, Chris has been working as 'vakdidacticus' mathematics at Radboud University. In this position, he develops and provides master courses that are especially interesting for educational master students.

Teaching students to think mathematically

In the last century much has changed regarding mathematics education, attention has shifted from teaching mathematics as a set of rules and procedures toward teaching for mathematical thinking. The mathematical content should be supportive in – as well as resulting from this general analytical way of thinking. In the end, mathematics is at first a human activity, and not only a collection of procedures in which things need to be done in a certain way.

Research into student-centered mathematics education has flourished and provided many insights, models, and tools regarding teaching for mathematical thinking. In his thesis, Chris considered one specific teacher practice with regard to developing students' mathematical thinking: discourse-based teaching, or, in other words, teaching through whole-class discourse that builds on students' various ways of thinking. Discourse-based teaching relies on teaching mathematics lessons by

1. deciding what mathematics students should learn;
2. thinking about problems or questions that, if students work on them and discuss their ideas, can lead the students to learning to deal with that particular mathematics;
3. encouraging students to work on the problems and questions;
4. orchestrating a whole-class discussion about students' various ideas and solution methods.

During his PhD, Chris collaborated with a group of Dutch mathematics teachers and supported them in developing mathematics lessons based on whole-class discussions. They all had a common vision. Namely, to create opportunities for their students to experience variation in mathematics, create a learning environment in class where students can discuss their mathematical ideas freely, experience that mathematics can be done in different ways and is something they already do, and to realize that by discussing

their thinking they collectively learn new mathematics! A very novel vision to strive for.

Discussing to foster understanding

For teachers, discourse-based teaching is a valuable practice to gain insight into students' thinking, to build the lesson on their thinking, and to guide them toward learning important mathematical ideas. In discourse-based mathematics lessons, students can also develop a corresponding disposition: that their thinking matters, and that through thinking and discussing their thoughts, they can discover important mathematical ideas. However, developing, and orchestrating classroom discourse about students' different solution methods is a complex task for mathematics teachers. Work, time, creativity, patience, and persistence are needed.

What makes the orchestration of productive classroom discourse particularly complex is finding a balance between building on students' ideas and guiding the students toward domain-specific goals, such as 'understanding' of mathematical concepts like tangent lines. Mathematical goals can only be achieved by building on student thinking and by supporting them in making the necessary steps they need toward understanding the topic. The teacher has the responsibility to make decisions about the ideas students share and to advance the mathematical learning of the whole group toward the disciplinary mathematical ideas. For classroom discourse to be productive, students sharing and discussing ideas is not sufficient. Some students' mathematical ideas are more advanced than others, some explanations are generalizable, and some are not. Here lies an essential yet challenging task for the teacher, namely orchestrating classroom discourse such that the students are both supported in making important mathematical connections, and are also guided toward disciplinary ideas. At the same time the focus should be maintained on students' ideas and reasoning.

A large part of Chris's research is devoted to professional development and teacher learning. He collaborated closely with a team of mathematics teachers who wanted to implement discourse-based teaching in their classrooms. Teachers were stimulated to develop and implement discourse-based teaching while staying close to their practice and had regular meetings to discuss and evaluate the progress. So, the work is very close to high school teaching practice. During this collaboration, Chris investigated how teachers learned and applied discourse-based teaching in their classrooms, how they reacted to the students' ideas, and how they tried to make sense of the students' mathematical learning.

In four lessons

Let us have a peak in one of these collaborations. During his research, Chris collaborated closely with tenth-grade teacher Anna in developing four discourse-based lessons in analytic geometry. The four lessons in analytic geometry consisted of students working on a mathematical problem plus classroom discourse concerning students' different solution methods. During the first lesson, the students were asked to think of the following problem:

Calculate the distance from point $P(6,1)$ to line $l: y = \frac{1}{3} + 4$.

The current presentation of analytic geometry in Dutch textbooks is very procedural and often consists of step-by-step instructions. For example, to calculate the distance from a point to a line, only one solution method is given. Generally, students are accustomed

to memorizing and practicing such step-by-step procedures. During these lessons, instead of providing students with a single procedure, Anna presented them with open problems, and orchestrated classroom discourse about students' different solution methods. When students were asked to calculate the distance from a point to a line, several possible solution methods were formulated and discussed.

Moreover, by comparing various solution methods, students were supported in making important mathematical connections between different representations. Effective orchestration of classroom discourse shifts students' cognitive attention from problem solutions and procedural rules to sense-making and the reasoning that leads to a solution. In other words, instead of trying to get the right answer, mathematical discourse is about trying to understand and question each other's ideas and reasoning, and collaboratively deciding what is true based on logical argumentation.

From the analysis of the lesson observations, it is observed that the number of students who contributed to classroom discourse increased during the course of the four lessons. In the fourth lesson, 18 out of 23 students contributed to the discourse. In the first lesson, Anna talked twice as much as the students; in the second lesson, the students talked twice as much as Anna; and in the third and fourth lessons, the students talked slightly more than her.

A framework for teacher actions

During whole-class discourse, teachers should take many decisions on the spot, they need to build upon students' thinking and at the same time keep an 'eye on the mathematical horizon'. Chris constructed a theoretical framework to characterize the teacher's actions in classroom discourse, to describe the change in the teacher's role in learning discourse-based mathematical teaching, and to describe how the teachers tried to make sense of the mathematical thinking of the students.

The teacher's actions — utterances — in interaction during whole-class discourse are crucial in supporting the students to express their mathematical thinking, engage with each other's thinking, and make important mathematical connections. In a way, the teacher's actions are the gateway between everything the teacher knows, thinks, wants, and feels on the one hand and the students on the other hand. A teacher can choose to give a hint or to ask another student to think of the next step in trying to solve a problem. The concrete actions the teachers choose to coordinate whole-class discourse affect the learning process of the whole class.

A theoretical framework for the teacher's actions can give concrete characteristics of the attitude and work of teachers during classroom discourse. In the framework Chris developed teacher actions are divided into four categories. Those are: *convergent actions* (that help converge to a solution) such as demonstration and reformulation, *divergent actions* (that stimulate interaction and discussion between students) such as requesting explanations and clarifications, *encouraging actions* such as confirmation and encouragement, and *regulatory actions*, to make sure that the discussions are regulated. A combination of teacher actions can guarantee that there is a balance between building on students' ideas and guiding the students toward disciplinary ideas.

During the four lessons on analytic geometry, Chris made video recordings to observe how Anna orchestrated the discussions. Analysis of video recordings from the lectures revealed three main

changes in Anna's role. First, the way she reacted to correct or incorrect solution methods shifted from confirming or setting aside suggestions, toward making the solution methods the subject of discussion. Second, the distribution of turns changed such that more students were involved in the discourse and in reacting to each other's solution methods. Third, her actions shifted from convergent, teacher-led actions toward divergent, student-led actions. These results show that within four lessons, an important step has been taken toward establishing a discourse community.

Thinking like the student

During his research, Chris also explored the decision-making patterns of five experienced Dutch mathematics teachers during their novice attempts at orchestrating whole-class discourse. His goal was to understand how teachers try to make sense of the students' ideas and thoughts. During whole-class discussions teachers need to adapt to the perspective of the students, they need to imagine what the students' line of thinking could be, so they can help each student build upon, or change something in their line of thinking. How teachers understand the thoughts of the students influences their actions during whole-class discussions. The mathematical experience of teachers plays an important role in this process. Using video recordings of the lessons they reflected upon and discussed the whole-class discussions, and how the teachers and the students reacted to certain situations.

Chris grouped the observed teacher sense-making-actions in five categories concerning the role of teacher's mathematical thinking in their sense-making: *flexibility*, *preoccupation*, *incomprehension*, *exemplification*, and *projection*. Flexibility refers to the ability of a teacher's mathematical thinking to discuss openly various perspectives of a problem and to consider different solution methods proposed by students. On the other hand, preoccupation refers to the situation the content of teachers' mathematical thinking is limited to one solution method or a particular expected answer, this inflexibility can impede them in adopting a student's perspective that doesn't match their own thinking.

Incomprehension describes the situation a teacher does not mathematically understand a student's solution method or idea, this can impede sense-making: if the incomprehension does not get resolved, the teacher is not able to fully investigate the student's meaning and reasoning. However, such incomprehension can also foster adopting the perspective of other students in the classroom. The process that the teachers' mathematical thinking can serve as an example of the mathematical thinking they would like to develop in their students is described as exemplification. It can support teachers in articulating what kind of thinking they aim to develop in their students as well as in recognizing to what extent students already articulate such thinking. Finally, projection refers to teachers projecting their own ways of mathematical thinking onto their students, without considering the differences between their own expert thinking and the thinking of learners, this can impede them in adopting the students' perspective.

These categories show how both the content and the process of teacher mathematical thinking can support or impede students' sense-making. Chris's findings suggest that sense-making of students' mathematical thinking requires teachers to (re-)engage in reflective thinking regarding the mathematical content as well as the process of their own mathematical thinking.

The more personal aspect

As a final note we would like to give the word to the doctor.

Chris, how did you get interested in mathematics education?

"During my mathematics studies, I regularly provided tutoring and exam training for high school students and tutorials at the faculty, and becoming a teacher was sort of a plan B for me. When I actively started to orient myself on career options during my research master, I realized I would prefer to stand in front of young people all day over sitting behind a computer. One month after I had started teaching, I spoke to Wim Veldman, who had supervised my master thesis, and he told me there would be a PhD position in mathematics education. I had never realized that was something one could do a PhD in! For several years, I combined my teaching job with PhD research in mathematics education, and gradually became more and more aware and sure that the learning and teaching of mathematics would be the focus of my career."

Some other thoughts you would like to share with the readers?

"My work with a group of mathematics teachers was very important for my PhD project and opened my eyes to all the interesting mathematics that is involved in high-school mathematics, once people really start to think and talk about it. I have learned a lot of mathematics from these teachers and their students. Furthermore, I would say that this kind of teaching can also help younger students and their teachers, as well as higher mathematics education. For example, if university mathematics students would be supported (more) in thinking mathematically and talking about their thinking, I believe more students would succeed in finishing their studies (and enjoying mathematics!).

Mathematics Education faces many challenges. The most important is probably the huge shortage of mathematics teachers. In my position, I make an effort to recruit potential teachers by showing mathematics students how teaching mathematics involves so much more than being able to give good explanations, and that as a teacher, you learn a lot of mathematics, if you encourage students to think and talk and if you listen to what they say. It would be great if we, as mathematicians, would all spread the message that teaching mathematics is a very respectable and mathematical profession. Another important challenge is teaching students of all ages mathematics in such a way that they become aware of and develop their mathematical thinking and see the use and beauty in mathematics. I hope to continue cooperating with researchers, teachers, and students at multiple levels of mathematics education in making a modest contribution to facing both challenges."

Concluding

To summarize, in his research Chris investigated how teachers can organize their mathematics teaching using whole-class discourse. He collaborated closely with a group of mathematics teachers and supported them in developing their lessons. Teachers were stimulated to develop and implement discourse-based teaching while staying close to their practice. They met regularly to discuss and reflect upon the lesson recordings, and they tried to unravel the complex process of how teachers try to make sense of the thoughts and ideas of the students. It is beautiful to see such collaborations flourishing, we hope to see similar projects in the future! This project shows what is possible when enthusiastic people join their forces. We wish Chris the best with his future work!

Problemen

| Problem Section

This Problem Section is open to everyone; everybody is encouraged to send in solutions and propose problems. Group contributions are welcome. We will select the most elegant solutions for publication. For this, solutions should be received before **15 October 2023**. The solutions of the problems in this issue will appear in one of the subsequent issues.

Problem A

Let $n > 0$ be an integer and let $\varphi: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ be an isometry, i.e., a map such that for all $x, y \in \mathbb{R}^n$ we have $|\varphi(x) - \varphi(y)| = |x - y|$. Let $X \subset \mathbb{R}^n$ be a set such that $\{\varphi(x) \mid x \in X\} \subseteq X$. Show that if X is closed and bounded, then $\{\varphi(x) \mid x \in X\} = X$, and show that we can drop neither of these two assumptions.

Problem B

Let X be a normally distributed random variable and let $t \in \mathbb{R}_{>0}$. Show that $x \mapsto \mathbb{P}(X \leq x + t \mid x \leq X)$ is a decreasing function.

Problem C (proposed by Hendrik Lenstra)

Let $p = 2n + 1$ be an odd prime and consider the finitely presented group G with generators $x_1, \dots, x_n$ and for each $0 < i, j, k \leq n$ such that $ij = k$ or $ij = p - k$ the relation $x_i x_j = x_k$. Show that G is a cyclic group of order n .

Edition 2023-2 We received correct solutions from Rik Biel, Rik Bos, Pieter de Groen, Alexander van Hoorn, Nicky Hekster, Marnix Klooster, Timo van der Laan, Thijmen Krebs, Kees Roos and Andrés Ventas.

Problem 2023-2/A (proposed by Hendrik Lenstra)

Let R be a ring. We say $x \in R$ is *central* if $xy = yx$ for all $y \in R$. Suppose that for every $x \in R$ the element $x^2 - x$ is central in R . Show that R is commutative.

Solution We received correct solutions from Rik Biel, Rik Bos, Alexander van Hoorn, Nicky Hekster, Thijmen Krebs, Kees Roos and Andrés Ventas. It was noted by Nicky Hekster that more general results have been given on sufficient conditions for a ring to be commutative. A survey is given by J. Pinter-Lucke, Commutativity conditions for rings: 1950–2005, *Expositiones Mathematicae* 25(2) (2007), 165–174.

For $x, y \in R$ we have that

$$xy + yx = (x + y)^2 - x^2 - y^2 = [(x + y)^2 - (x + y)] - [x^2 - x] - [y^2 - y]$$

is central. It follows that $x(xy + yx) = (xy + yx)x$, hence $x^2y = yx^2$. From $y(x^2 - x) = (x^2 - x)y$ it then follows that $xy = yx$. Hence R is commutative.

Problem 2023-2/B (proposed by Onno Berrevoets)

Isaac really likes apples, but does not like pears. He does not have any fruit now. Each time he visits

- Andrea, he gets 3 apples in exchange for 2 pears;
- Bob, he gets 3 pears;
- Caroline, he gets 1 apple and 1 pear.

Prove that the maximum number of apples Isaac can have after n visits equals $\lfloor 9n/5 \rfloor$.

Solution We received correct solutions from Rik Biel, Pieter de Groen, Marnix Klooster and Thijmen Krebs. Partial solutions were received from Andrés Ventas and Timo van der Laan.

As many readers noticed, there was an error in the original problem statement: the maximum is $\lfloor 9n/5 \rfloor$ and not $\lfloor 5n/9 \rfloor$.

Value each pear as $3/5$ and each apple as 1 . Then Andrea, Bob and Caroline give you value $9/5$, $9/5$ and $8/5$, respectively, hence after n visits the value of Isaac's fruit is at most $9n/5$. Therefore, he has at most $\lfloor 9n/5 \rfloor$ apples after n visits. For $n = 1, 2, 3, 4, 5$ he can also get this many apples, via C, BA, CCA, BCAA, BBAAA. The case $n = 0$ is trivial. Now let $n > 5$ be an integer. Let $r \geq 0$ be the remainder of n upon division by 5 . We see inductively that Isaac can get $\lfloor 9r/5 \rfloor$ apples from r visits, and $\lfloor 9(n-r)/5 \rfloor = 9(n-r)/5$ apples from $n-r$ visits and thus

$$\lfloor 9r/5 \rfloor + 9(n-r)/5 = \lfloor 9n/5 \rfloor$$

apples after n visits.

Problem 2023-2/C (proposed by Daan van Gent)

For $S \subseteq \mathbb{Z}_{>0}$ write $\langle S \rangle$ for the submonoid of $\mathbb{Z}_{>0}$ generated by S . For $S \subseteq \mathbb{Z}_{>0}$ a *foundation* for S is a subset $C \subseteq \mathbb{Z}_{>1}$ for which $\langle C \rangle$ is minimal with respect to inclusion such that the elements of C are pairwise coprime and $S \subseteq \langle C \rangle$. For example, a foundation for $\{150, 180\}$ is $\{5, 6\}$.

a. Show that all subsets of $\mathbb{Z}_{>0}$ have a unique foundation.

Write $w(a, b)$ for the cardinality of the foundation for $\{a, b\}$ and let

$$f(n) = \min \{ab \mid a, b \in \mathbb{Z}_{>0}, w(a, b) = n\}.$$

b. Compute $f(11)$.

c* What is the asymptotic behaviour of f ?

Solution We received a correct solution from Thijmen Krebs. There was an error in the original problem statement. In the definition of a foundation it should be $C \subseteq \mathbb{Z}_{>1}$.

a. Let $S \subseteq \mathbb{Z}_{>1}$. Write $\mathcal{P}$ for the set of primes that divide any element of S and for primes p and $x \in \mathbb{Z}_{>0}$ write $v_p(x)$ for the exponent of p in x . This set induces an equivalence relation on $\mathcal{P}$ given by

$$p \sim q \Leftrightarrow (\forall s \in S) v_p(s)/g_p = v_q(s)/g_q$$

where $g_p = \gcd\{v_p(s) : s \in S\}$. We claim that $C = \{c_A : A \in \mathcal{P}/\sim\}$ with $c_A = \prod_{p \in A} p^{g_p}$ is the unique foundation of S .

For $s \in S$ we have

$$s = \prod_{p \in \mathcal{P}} p^{v_p(s)} = \prod_{A \in \mathcal{P}/\sim} \prod_{p \in A} p^{v_p(s)/g_p} \cdot g_p = \prod_{[p] \in \mathcal{P}/\sim} c_{[p]}^{v_p(s)/g_p} \in \langle C \rangle,$$

so $S \subseteq \langle C \rangle$.

Let $M \subseteq \mathbb{Z}_{>0}$ be any submonoid generated by a set of pairwise coprime integers. We observe that for every $X \subseteq M$ the element

$$\text{egcd } X = \prod_{\substack{p \text{ prime} \\ (\forall x \in X) p \mid x}} p^{\gcd\{v_p(x) : x \in X\}}$$

is also in M . As $c_{[p]} = \text{egcd}\{s \in S : v_p(s) > 0\}$, we conclude that $\langle C \rangle$ is indeed minimal such that $S \subseteq \langle C \rangle$. Hence C is a foundation. With an argument similar to the proof of unique prime factorization one shows that if D and E are both foundations, and thus $\langle D \rangle = \langle E \rangle$, then $D = E$. Hence C is unique.

b. Let C be a foundation of $\{a, b\}$. We obtain

$$ab = \prod_{p \in \mathcal{P}} p^{v_p(a) + v_p(b)} = \prod_{\substack{(s,t) \in \mathbb{Z}_{\geq 0}^2 \\ \gcd(s,t)=1}} \prod_{\substack{p \in \mathcal{P} \\ v_p(a)=g_p s \\ v_p(b)=g_p t}} p^{g_p(s+t)} = \prod_{\substack{(s,t) \in \mathbb{Z}_{\geq 0}^2 \\ \gcd(s,t)=1}} c_{s,t}^{s+t},$$

where the $c_{s,t}$ make up C as in point a. If we order the factors by increasing ‘weight’ $s+t$ with ties broken arbitrarily, then the product is minimized, given that the factors are pairwise coprime, if the first n terms are the first n primes in decreasing order. With the exception of $w=1$, the number of pairs of weight w is $\varphi(w)$, while there are two pairs of weight 1. Hence

$$f(11) = 31 \cdot 29 \cdot 23^2 \cdot 19^3 \cdot 17^3 \cdot 13^4 \cdot 11^4 \cdot 7^5 \cdot 5^5 \cdot 3^5 \cdot 2^5.$$

c. We will omit out some steps for brevity. Let

$$g(n) = \frac{2\pi}{\sqrt{27}} n \sqrt{n} \log n.$$

We claim that $\log f(n) \sim g(n)$.

Order the index set $\{x_1, x_2, \dots\}$ of the product as before and let $w_i = s+t$ be the weight of $x_i = (s, t)$. Write $\sigma(n) = \sum_{k=1}^n \varphi(k)$ and note that $\sigma(w_i) \sim i$. By a result of A. Walfisz we have $\sigma(k) \sim 3k^2/\pi^2$. Hence $w_i \sim \pi\sqrt{i/3}$. With p_i the i -th prime we have $p_i \sim i \log i$. We split the sum

$$\log f(n) = \sum_{i=1}^n w_i \log p_{n+1-i}$$

in three parts with indices $[1, N]$, $(N, n-N)$ and $(n-N, n)$ with $N = n/\log(n)$. The first and last part we estimate by

$$\leq N w_n \log p_n \sim \frac{n}{\log n} (\pi\sqrt{n/3}) (n \log n) = o(g(n)).$$

For the remaining sum we have

$$\begin{aligned} & \sim \sum_{i=N}^{n-N} \pi\sqrt{i/3} (\log(n+1-i) + \log \log(n+1-i)) \\ & = (1+o(1)) \frac{\pi}{\sqrt{3}} \sum_{i=N}^{n-N} \sqrt{i} \log(n+1-i) \\ & = (1+o(1)) \frac{\pi}{\sqrt{3}} \log(n) \cdot \frac{2}{3} n^{3/2} \\ & = (1+o(1)) g(n). \end{aligned}$$

Rectifications: From Thijmen Krebs correct solutions were also received for 2021-3B and 2021-3C (as well as a correct solution for 2021-3A). For 2019-3B it was noted that this problem corresponded to 2016-1C.

