

Inhoud | Contents

Geschiedenis | History

- 9 **De omzwervingen van Fourier**
Edward Berengoltz

Evenement | Event

- 19 **Dennis Sullivan is awarded the 2022 Abel Prize**
Sebastian van Strien, Edson de Faria

In Memoriam | Obituary

- 23 **Hans de Rijk: Nescius omnium curiosus sum**
Klaas Lakeman

Onderwijs | Education

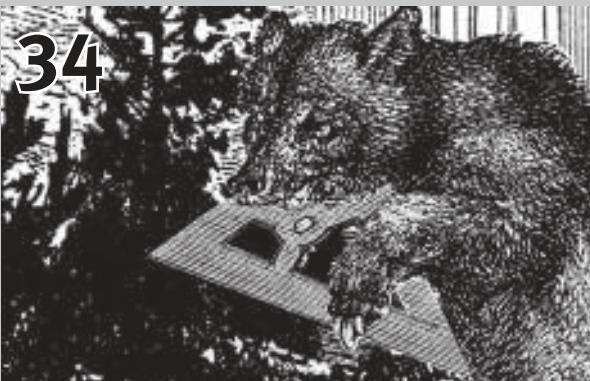
- 34 **Wiskundeangst: denk zelf nog een keer goed na**
Dominique van den Bosch

Column | Column

- 39 **Chernoff's law and Jante's law**
Piet Groeneboom

Interview | Interview

- 45 **A conversation with Willem Rutger van Zwet**
Mathisca de Gunst, Chris Klaassen, Aad van der Vaart



Dominique van den Bosch onderzoekt op welke manier docenten wiskundeangst bij leerlingen beïnvloeden.



In de nieuwe column 'New Impulse' stellen onderzoekers die recent aangesteld zijn zich voor. Dit keer Olga Mula.

- 3 **Redactioneel** *Robbert Fokkink*
- 4 **Agenda** *Nikki Levering*
- 6 **Nieuws** *Nikki Levering*
- 17 **New Impulse**
Olga Mula
- 21 **Proof by example: Diletta Martinelli**
Francesca Arici, Clara Stegehuis
- 28 **Stoffelijke resten: Deense denkers**
Wieb Bosma
- 38 **Wiskundigen in den vreemde**
Wijnand Stenekker
- 43 **Het keerpunt van Piet van Eeghen**
Daan Mulder
- 55 **Open podium** *brieven van lezers*
- 57 **Boekbesprekingen** *Hans Cuyppers, Hans Sterk*
- 62 **Problemen** *Onno Berrevoets, Daan van Gent*

Colofon

Het Nieuw Archief voor Wiskunde is een uitgave van het Koninklijk Wiskundig Genootschap en verschijnt vier maal per jaar. Het tijdschrift richt zich op eenieder die zich beroepsmatig met wiskunde bezighoudt, als academisch of industrieel onderzoeker, student, leraar, journalist of beleidsmaker. Het stelt zich ten doel te berichten over ontwikkelingen in de wiskunde in het algemeen en in de Nederlandse wiskunde in het bijzonder.

ISSN 0028-9825

Adres

Nieuw Archief voor Wiskunde
Centrum Wiskunde & Informatica
Postbus 94079, 1090 GB Amsterdam
tel. 020-5924288
redactie@nieuwarchief.nl
www.nieuwarchief.nl

Hoofredactie

Raf Bocklandt (r.r.j.bocklandt@uva.nl)
Robbert Fokkink (r.j.fokkink@tudelft.nl)

Eindredactie/Bladmanager

Fred Drissen (fred@nieuwarchief.nl)

Redactie

Francesca Arici (UL), Viktor Blåsjö (UU), Hans Cuypers (TU/e), Teun Koetsier (VU), Nikki Levering (UvA), Daan Mulder, Nicolaos Starreveld (UvA), Clara Stegehuis (UT), Hans Sterk (TU/e), Mark Timmer (UT)

Problemenrubriek (problems@nieuwarchief.nl)

Onno Berrevoets en Daan van Gent

Bureau redactie

Anne van Grinsven

Illustraties

Ryu Tajiri

Vormgeving

Susanne Laws (omslag, begeleiding binnenwerk)
Kitty Molenaar (ontwerp)

Druk

Veldhuis Media

Advertenties

advertenties@nieuwarchief.nl

Koninklijk Wiskundig Genootschap

www.wiskgenoot.nl

Platform Wiskunde Nederland

www.platformwiskunde.nl

European Mathematical Society

www.euro-math-soc.eu

International Mathematical Union

www.mathunion.org

Koninklijk Wiskundig Genootschap

Het Koninklijk Wiskundig Genootschap (KWG) is een landelijke vereniging van beoefenaars van de wiskunde. In 1778 opgericht onder de zinspreuk: 'Een onvermoeide arbeid komt alles te boven' is het 's werelds oudste nationale wiskundegenootschap. Leden ontvangen het Nieuw Archief voor Wiskunde als onderdeel van hun lidmaatschap.

Bestuur

Barry Koren (TU/e, voorzitter), Mathisca de Gunst (VU, vice-voorzitter), Alef Sterk (RUG, penningmeester), Jop Briët (CWI, secretaris), Danny Beckers (VU), Rogier Bos (UU), Michael Muger (RU), Wioletta Ruszel (TUD).

Secretariaat

Koninklijk Wiskundig Genootschap
Centrum Wiskunde & Informatica
Postbus 94079, 1090 GB Amsterdam
wiskgenoot@wiskgenoot.nl

Ledenadministratie KWG / Abonnementen

admin@wiskgenoot.nl, tel. 020-5924008
Wijzigingen of opzegging kunt u ook doorgeven door in te loggen op www.wiskgenoot.nl.

Contributie

Tarieven per jaar (bij betaling per automatische incasso krijgt u € 2,50 korting):

- gewoon lid: € 97,50
 - reciprociteitslid: € 77,50
 - gepensioneerden en werklozen: € 52,50
 - aio's, oio's, studenten: € 42,50 (max. 4 jaar)
 - lid zonder Nieuw Archief: € 57,50
- Studenten en pas afgestudeerden kunnen een jaar lang gratis lid worden.

Voor verzending van het Nieuw Archief naar het buitenland wordt een portotoeslag van € 10 in rekening gebracht.

Instituten in Nederland en buitenland kunnen zich abonneren op het Nieuw Archief voor Wiskunde voor € 105 (Nederland), € 115 (Europa) of € 117,50 (buiten Europa).

Members of foreign societies

Members of SIAM, the *Société Mathématique de France*, the *Gesellschaft für Angewandte Mathematik und Mechanik*, the *Deutsche Mathematiker-Vereinigung*, and of the *American, Australian, Belgian, Indian, London, Spanish, and South-African Mathematical Societies* living outside of the Netherlands pay € 77,50 instead of the full membership fee of € 97,50 a year. Conversely, these foreign societies, as well as the VvS+OR and the NVORWO, have reduced membership fees for KWG members. A postage charge of € 10 is added for members living abroad but in Europe, and a charge of € 12,50 for members living outside of Europe.

Exchange subscriptions

Koninklijk Wiskundig Genootschap Library
Centrum Wiskunde & Informatica
P.O. Box 94079, NL-1090 GB Amsterdam
KWG-exchange@cwi.nl

Informatie voor auteurs

Kopij

Kopij dient per e-mail te worden aangeboden aan kopij@nieuwarchief.nl. Voor meer informatie en auteursinstructies zie www.nieuwarchief.nl.

Volgende nummers

nummer	maand	verschijnen	deadline kopij
24(2)	juni	2023	verstrekken
24(3)	september	2023	01-05-2023
24(4)	december	2023	01-08-2023
25(1)	maart	2024	01-11-2023

Instituuts- en bedrijfsleden

De publicaties van het KWG worden mede mogelijk gemaakt door de bijdragen van de volgende instituten en bedrijven.

	Centrum Wiskunde & Informatica
	Universiteit van Amsterdam
	Vrije Universiteit Amsterdam
	Rijksuniversiteit Groningen
	Universiteit Leiden
	Radboud Universiteit Nijmegen
	Universiteit Utrecht
	Technische Universiteit Delft
	Technische Universiteit Eindhoven
	Universiteit Twente
	Elsevier
	ORTEC

Op het omslag

Vorig jaar was het 200 jaar geleden dat Joseph Fourier zijn meesterwerk over de warmtevergelijking publiceerde, dat de basis vormde voor Fourieranalyse. Lees het verslag van Edward Berengoltz over de opmerkelijke levensloop van deze revolutionaire Fransman op pagina 9.

Het redden van de hele wereld

Honger. Hyperinflatie. Klimaatverandering. Pandemie. Atoomoorlog. Internationale instanties komen niet tot zinnige afspraken en staan machteloos. Wat kunnen wij gewone mensen hieraan doen? Goede raad is duur. Mij lijkt vroom en zedig gedrag de enige mogelijkheid om het naderend onheil af te wenden. Het is natuurlijk de vraag of het werkt, maar wat kun je anders bedenken? Ik speel daarom met de gedachte om behangen met borden bij het Binnenhof winkelend Nederland op te roepen tot inkeer, voor het te laat is. Mijn dochter, die naast het Binnenhof woont, heeft mij verzekerd dat diverse mannen op leeftijd daar al deze boodschap verkondigen. Ik wacht er een paar jaar mee. Het redden van de hele wereld is een mooi klusje voor na mijn pensionering.

Terwijl de grote problemen om ons heen grijpen, zijn er ook nog allerlei kleine problemen die de aandacht vragen. Nabij het Binnenhof is een van de lezers van ons blad, tevens minister, hard bezig met de werkdruk in het onderwijs, het nijpend lerarentekort, wel of niet loten voor numerus fixus studies, de stijgende energierekening, de woningnood onder studenten, de explosieve groei van de studentenaantallen, discriminatie bij afstudeerstages, enzovoort, enzovoort. Het is nogal wat. De kamer roept op tot minder buitenlandse studenten om de universiteiten te ontlasten, maar studenten van buiten de EU studeren sneller en specialiseren zich juist in studies waar de arbeidsmarkt behoefte aan heeft. Bovendien brengen ze extra geld in het laatje. Dat is best handig voor een minister die moeite moet doen om ons onderwijs betaalbaar te houden. Ik heb wat dat betreft een suggestie. Vijftien jaar geleden heeft de rijksoverheid de promotiepremie ingesteld, omdat Nederland achterliep qua aantal doctoren per hoofd van de bevolking. Ondertussen lopen er zoveel promovendi rond dat begeleiden zeeën van tijd kost. De helft slaagt er niet eens in om binnen vijf jaar te promoveren. Het doel is ruimschoots gehaald, want Nederland behoort nu qua doctoren tot de koplopers in de wereld. De promotiepremie is een prikkel die zijn werk heeft gedaan. Afschaffen die hap, net als de salderingsregeling op de zonnepanelen.

Gelukkig zijn wiskundeproblemen veel leuker en hanteerbarder om op te lossen dan echte problemen. 2022 was wat dat betreft een goed jaar, want de Union Closed Conjecture (UCC) is tot wankelen gebracht. Nagenoeg al onze lezers zullen dit vermoeden kennen en sommigen hebben er misschien zelfs over nagedacht. De UCC is bijna net zo bekend als de Riemann-hypothese. Voor de volledigheid herhaal ik hier de probleemstelling. Gegeven een verzameling X en een familie $\mathcal{F}$ van deelverzamelingen van deze X . Als $\mathcal{F}$ gesloten is onder vereniging, is er dan een $x \in X$ die element is van minstens de helft van de verzamelingen in $\mathcal{F}$? Ruim veertig jaar lang was het wachten op een geniale gedachte. Die kwam in november 2022 in de vorm van *entropie*. Als je twee keer trekt zonder terugleggen uit $\mathcal{F}$, dan daalt de entropie. Echter, als je dit narekent per $x \in X$, dan daalt de entropie alleen als x element is van minstens een fractie $\frac{1}{2}$ min de gulden snede. Dat is precies de grens die werd gehaald in november, een aardig eind op weg naar de helft. Ondertussen worden de resultaten steeds beter. Wie weet is de UCC binnenkort opgelost.

Achteraf gezien is het vreemd dat we zo lang hebben moeten wachten op deze geniale gedachte. Entropie is een veel gebruikt middel om combinatorische problemen op te lossen. Dit hadden we met zijn allen best veel eerder kunnen bedenken. De UCC, een van de bekendste open problemen, blijkt bij nader inzien best wel oplosbaar. Zou dat ook gelden voor armoede, honger of oorlog? Stel je voor dat de grote maatschappelijke problemen eigenlijk helemaal niet zo moeilijk zijn als ze lijken en binnen enkele jaren worden opgelost. Ik moet er even niet aan denken. Wat moet ik dan gaan doen na mijn pensionering? 

Agenda

| Upcoming Events

maart 2023

6 maart 2023

□ Diligentia Lezing

Remco Duits (TU/e) geeft de lezing 'geometrische beeldanalyse en artificiële intelligentie voor medische beeldverwerking'.

plaats Theater Diligentia, Den Haag

info natuurwetenschappen-diligentia.nl

10 maart 2023

□ Tweede ronde Nederlandse Wiskunde Olympiade

De tweede ronde van de Nederlandse Wiskunde Olympiade speelt zich af op de universiteiten.

plaats universiteiten van Nederland

info wiskundeolympiade.nl

13–15 maart 2023

□ YES Causal Inference

Workshop over de verschillende perspectieven binnen de studie naar causale verbanden.

plaats Eurandom, Eindhoven

info eurandom.nl

13–17 maart 2023

□ Purpose-Driven Particle Systems

Lorentz workshop, mede georganiseerd door Oliver Tse (TU/e) en Franca Hoffmann (Bonn).

plaats Lorentz Center@Snellius, Leiden

info lorentzcenter.nl

16 maart 2023

□ W4 Kangoeroe

WereldWijdeWiskundeWedstrijd voor basis- en middelbare scholieren.

plaats op eigen scholen

info w4kangoeroe.nl

17 maart 2023

□ Lead by example

Pi-dag-evenement van EWN-NL waarbij verschillende succesverhalen van vrouwen binnen de Nederlandse wiskundegemeenschap worden verteld.

plaats Utrecht

info ewmnetherlands.nl/lead-by-example

17–18 maart 2023

□ Finaleweekend Wiskunde A-lympiade

Teams uit Nederland, Duitsland, Denemarken, Kroatië en Japan werken aan een opdracht tijdens een tweedaags verblijf op de Veluwe.

plaats Garderen

info wiskundeintams.sites.uu.nl

23 maart 2023

□ Annual Meeting Vereniging voor Statistiek en Operations Research (VVSOR)

Het thema van deze bijeenkomst is dit jaar 'Statistics and operations research for robust decision making'.

plaats In de Driehoek, Utrecht

info vvsor.nl

24 maart 2023

□ Nationale Rekencoördinator Dag

Dag voor rekencoördinatoren en leerkrachten, waarop het rekenonderwijs van de basisschool centraal staat.

plaats Utrecht

info nrcd.sites.uu.nl

24 maart 2023

□ Prijsuitreiking Wiskunde B-dag

Feestelijke bekendmaking top 10 deelnemende teams Wiskunde B-dag.

plaats Academiegebouw, Utrecht

info wiskundeintams.sites.uu.nl

27–31 maart 2023

□ YEP XVIII: Spectra of Random Graphs and Related Combinatorial Problems

Workshop over toevalsmatrices, toevalsgrafen en gerelateerde onderwerpen.

plaats Eurandom, Eindhoven

info eurandom.nl

29 maart 2023

□ Grote Rekendag

Dag voor alle basisscholen in Nederland en Vlaanderen (groep 1 t/m 8) die helemaal in het teken staat van rekenen. Het thema is dit jaar 'De afvalparade'.

plaats basisscholen Nederland en Vlaanderen

info groterekendag.nl

april 2023

Suggesties voor deze agenda zijn welkom.

Redacteur: Nikki Levering

agenda@nieuwarchief.nl

 1–23 april 2023

IMAGINARY

Reizende tentoonstelling over zichtbare en onzichtbare wiskunde. Georganiseerd door PWN in samenwerking met Nederlandse universiteiten en ondersteund door partnerorganisaties.

plaats Zernike Campus, Groningen

info imaginarymaths.nl

11–12 april 2023

NMC Scientific Days

Jaarlijkse bijeenkomst van wiskundig Nederland georganiseerd door het KWG, met onder andere de uitreiking van de Brouwerprijs.

plaats Van der Valk Hotel, Utrecht

info mathematischcongres.nl

13–19 april 2023

European Girls' Mathematical Olympiad

Europese wiskundewedstrijd speciaal voor meisjes.

plaats Portorož, Slovenië

info egmo.org

14–15 april 2023

Nationale Wiskunde Dagen

29ste editie van de tweedaagse conferentie voor wiskundeleraren.

plaats De Leeuwenhorst, Noordwijkerhout

info uu.nl/onderwijs/nationale-wiskunde-dagen

17–21 april 2023

Uncertainty Quantification for Healthcare and Biological Systems

Lorentz workshop, mede georganiseerd door Daniele Avitabile (VU) en Alfons Hoekstra (UvA).

plaats Lorentz Center@Snellius, Leiden

info lorentzcenter.nl

19–21 april 2023

Combinatorics in Digital Communication

Workshop voor het bevorderen van samenwerking tussen onderzoekers op het snijveld van digitale communicatie en discrete wiskunde.

plaats Technische Universiteit Eindhoven

info sites.google.com/view/workshop4tu

mei 2023

mei 2023

IMAGINARY

Reizende tentoonstelling over zichtbare en onzichtbare wiskunde. Georganiseerd door PWN in samenwerking met Nederlandse universiteiten en ondersteund door partnerorganisaties.

plaats Amsterdam

info imaginarymaths.nl

5–7 mei 2023

Benelux Mathematical Olympiad

Jaarlijkse olympiade voor middelbare scholieren uit België, Nederland en Luxemburg.

plaats Esch-sur-Alzette, Luxemburg

info wiskundeolympiade.nl

15–17 mei 2023

Numerical Analysis of Stochastic Partial Differential Equations (NASPDE)

Workshop over numerieke methoden voor het oplossen van (stochastische) partiële differentiaalvergelijkingen.

plaats Eurandom, Eindhoven

info eurandom.nl

30 mei–2 juni 2023

An Expedition into Arithmetic Geometry

Lorentz workshop, mede georganiseerd door Peter Bruin en Ronald van Luijk (UL).

plaats Lorentz Center@Oort, Leiden

info lorentzcenter.nl

31 mei 2023

Springmeeting Dutch-Flemish SCS

Voorjaarsbijeenkomst van de Dutch-Flemish Scientific Computing Society.

plaats Technische Universiteit Eindhoven

info wsc.project.cwi.nl

juni 2023

1–2 juni 2023

41ste Panama-conferentie

Jaarlijkse conferentie die zich richt op alle aspecten van leren en onderwijzen van rekenen-wiskunde. Dit jaar is het thema 'Rekenen-wiskunde in verbinding'.

plaats Woudschoten, Zeist

info panamaconferentie.sites.uu.nl

19 juni–24 juli 2023

IMAGINARY

Reizende tentoonstelling over zichtbare en onzichtbare wiskunde. Georganiseerd door PWN in samenwerking met Nederlandse universiteiten en ondersteund door partnerorganisaties.

plaats Maastricht

info imaginarymaths.nl

juli 2023

3–7 juli 2023

Analysis and Numerics of nonlinear PDEs: Degeneracies and Free Boundaries

Lorentz workshop, mede georganiseerd door Manual Gnann (TU Delft), Joost Hulshof (VU) en Stefanie Sonner (RU).

plaats Lorentz Center@Snellius, Leiden

info lorentzcenter.nl

6–13 juli 2023

International Mathematical Olympiad (IMO)

Internationale wiskundecompetitie voor middelbare scholieren, dit jaar in Japan.

plaats Chiba, Japan

info imo2023.org

10–14 juli 2023

Machine-Checked Mathematics

Lorentz workshop, mede georganiseerd door Sander Dahmen (VU).

plaats Lorentz Center@Oort, Leiden

info lorentzcenter.nl

17–21 juli 2023

A Multidisciplinary Approach to Epistasis Detection

Lorentz workshop, mede georganiseerd door Marleen Balvert (Tilburg)

plaats Lorentz Center@Oort, Leiden

info lorentzcenter.nl

31 juli–6 augustus 2023

International Mathematics Competition for University Students

Internationale wiskundewedstrijd voor studenten.

plaats Blagoevgrad, Bulgarije

info imc-math.org.uk

Nieuws

| News

Deze rubriek is een kroniek van wiskundige activiteiten in Nederland. Toekomstige activiteiten worden aangekondigd en van voorbije activiteiten wordt verslag gedaan. Wilt u uw aankondiging of verslag in deze rubriek geplaatst zien? Stuur ons dan uw bijdrage, zo mogelijk met illustratie. De redactie behoudt zich het recht voor berichten te weigeren of in te korten.

Redacteur: Nikki Levering
 nieuws@nieuwarchief.nl

Jaap Korevaar 100 jaar

Op 25 januari is er op de UvA een speciale viering geweest voor de honderdste verjaardag van Jaap Korevaar, met onder andere een lezing van een van zijn oud-promovendi, Raymond Brummelhuis (Université de Reims). Korevaar is zijn hele professionele leven academisch actief geweest, met onderzoek dat zich met name toespitst op de complexe analyse en de approximatietheorie. Hij behaalde zijn doctoraat in 1949 bij H.D. Kloosterman aan de Universiteit Leiden, waarna hij, na aanstellingen bij onder andere het CWI en de TU Delft, vele jaren aan de University of Wisconsin en de University of California San Diego (VS) doorbracht. In 1974 keerde hij terug in Nederland, en is sindsdien actief aan de UvA. Korevaar is voorzitter geweest van het KWG, is sinds 2012 Fellow van de American Mathematical Society, en won de Lester R. Ford Award (1987) en Chauvenet Prize (1989). uva.nl



Foto: Bob Awick, bussumnieuws.nl

Jaap Korevaar met de burgemeester van Bussum, Han ter Heegde

Den Haag in 2023 stad van Escher

In 2023 is het 125 jaar geleden dat Maurits Cornelis Escher (1898–1972) geboren werd. In dit speciale jubileumjaar dopen Kunstmuseum Den Haag en Escher in Het Paleis de stad Den Haag om tot stad van Escher. Deze twee musea, die samen de grootste museale Eschercollectie ter wereld huisvesten, organiseren vier speciale tentoonstellingen. Naast veel van zijn eigen kunst, zal ook werk van zijn ontdekker, Samuel Jessurun de Mesquita, te zien zijn, en dat van hedendaagse kunstenaars en ontwerpers die met dezelfde thema's als Escher werken. Daarnaast zullen er in Den Haag vele activiteiten met culturele partners, scholen, wijken en ondernemers worden georganiseerd. Er zullen zelfs een aantal gebouwen in het centrum van Den Haag worden aangekleed in Escherstijl. kunstmuseum.nl

Lars Pos wint Robbert Dijkgraaf Essayprijs

Lars Pos heeft met zijn essay 'Waarom wetenschap?' de Robbert Dijkgraaf Essayprijs 2022 gewonnen, welke in het teken van 'De fascinerende werking van wetenschap' stond. De student, momenteel bezig aan een bachelor wiskunde aan de Universiteit Leiden, schreef een pleidooi voor het maatschappelijk nut van fundamenteel wetenschappelijk onderzoek. Hij betoogt dat toepassingen zich soms pas in de toekomst kenbaar maken, en noemt daarbij ook het toepassen van getaltheorie voor digitale encryptie, en het toepassen van graafentheorie voor Google's zoekalgoritme. De prijs werd uitgereikt op

het Gala van de Wetenschap, en het winnende essay van Lars is in de *New Scientist* en het *AD* verschenen. universiteitleiden.nl



Foto: Bob Bronschoff

Stieltjesprijs voor Sophie Huiberts en Freek Witteveen

De Stieltjesprijs voor het beste wiskundige proefschrift van het academisch jaar 2021–2022 geschreven aan een Nederlandse universiteit zal zowel door Sophie Huiberts als Freek Witteveen worden ontvangen. Hun werk werd gekozen uit een totaal van 74 proefschriften, door een jury bestaande uit Erik van den Ban (UU), Odo Diekmann (UU, voorzitter), Aernout van Enter (RUG), Sara van de Geer (ETH Zürich), Frans Oort (UU), Marc Uetz (UT) en Kees Vuik (TUD). Gezien beide proefschriften van uitzonderlijk hoge kwaliteit waren besloot de jury dit jaar twee winnaars uit te roepen.

Sophie Huiberts schreef haar proefschrift bij het CWI, onder begeleiding van Gunther Cornelissen (UU) en Daniel Dadush (CWI), en verdedigde haar werk vorig jaar aan de Universiteit Utrecht. Het proefschrift draagt de titel *Geometric Aspects of Linear Programming: Shadow Paths, Central Paths, and a Cutting Plane Method*, en beschrijft vele nieuwe inzichten voor populaire optimalisatieprocedures en lang openstaande problemen binnen de combinatorische optimalisatie. Ze is momenteel een Simons Junior Fellow aan Columbia University.

Freek Witteveen verdedigde zijn proefschrift vorig jaar aan de Universiteit van Amsterdam. Het werk, getiteld *Quantum Information Theory and Many-Body Physics*, schreef hij bij het CWI onder begeleiding van Michael Walter (Bochum) en Eric Opdam (UvA). De jury gelooft dat zijn onderzoek zal leiden tot een nieuw onderzoeksgebied binnen de quantuminformatietheorie, en zo nog heel lang betekenis zal hebben. Momenteel is Freek postdoc aan de Universiteit van Kopenhagen. platformwiskunde.nl, cwi.nl



Sophie Huiberts



Freek Witteveen

Diamantprijs 2022

Met zijn voordracht over de volledige classificatie van $2\text{-term } L\text{-infinity algebras}$ heeft Kevin van Helden (RUG) op het najaarssymposium van DIAMANT de Diamantprijs gewonnen. De prijs werd onder toezien oog van juryvoorzitter Hendrik Lenstra (UL) overgedragen door Mike Daas (UL), de vorige winnaar. Kevin is de zevende en misschien laatste winnaar van de prijs, die het wiskundecluster DIAMANT toekent aan de beste jonge spreker op het symposium. Het bestuur van DIAMANT overweegt om de prijs niet meer uit te reiken, omdat deze niet meer past bij het doel van het najaars-symposium.

Robbert Fokkink

Stairway to Impact Award voor Wil Schilders

De NWO heeft Wil Schilders (TU/e) als een van de drie winnaars van de Science Stairway to Impact Award 2022 uitgeroepen. De award wordt jaarlijks uitgereikt, en is bedoeld voor wetenschappers die met hun resultaten effectieve stappen hebben gezet om maatschappelijke impact te bereiken. Wil Schilders heeft de award gekregen omdat hij al zijn hele carrière bezig is wiskunde en haar toepassingen samen te brengen. Enerzijds door nieuwe wiskundige methodes te ontwikkelen voor het oplossen van complexe praktische problemen, en anderzijds door industriële toepassingen te gebruiken als basis voor nieuwe wiskundige modellen. Zijn impact werd eerder erkend met een benoeming tot voorzitter van de International Council for Industrial and Applied Mathematics, een internationale organisatie voor professionele verenigingen voor toegepaste wiskunde. tue.nl, nwo.nl

Aad van der Vaart wordt president ISBA

Aad van der Vaart (TU Delft) is gekozen tot President Elect van de International Society for Bayesian Analysis (ISBA). Na een termijn van een jaar, die 1 januari 2023 is ingegaan, zal hij het voorzitterschap van de Society overnemen. ISBA is wereldwijd de toonaangevende organisatie voor Bayesiaanse analyse, een tak van de statistiek waarin conclusies worden geformuleerd op basis van waarschijnlijkheden, en welke is gebaseerd op de stelling van Bayes. Van der Vaart heeft vele invloedrijke artikelen gewijd aan Bayesiaanse analyse. Voor zijn imposante bijdragen, zowel binnen als buiten dit vakgebied, kreeg hij eerder de C.J. Kok Prijs (1988), de Van Dantzig Award (2000), de NWO Spinozapremie (2015) en de De Groot Prijs (2019). tudelft.nl

ERC Grants voor Jan Vonk, Stéphanie van der Pas en Martijn Kool

Jan Vonk (Universiteit Leiden) en Stéphanie van der Pas (Amsterdam UMC) zijn twee van de veertig Nederlandse wetenschappers die een ERC Starting Grant toegewezen hebben gekregen. Jan Vonk ontvangt de beurs voor zijn onderzoek naar singuliere moduli. De hoge relevantie van dit onderzoek blijkt wel uit het feit dat eerder onderzoek naar dit onderwerp er vorig jaar toe leidde dat een modern cryptosysteem, dat eerder onkraakbaar werd geacht, gekraakt werd. Stéphanie van der Pas krijgt de beurs voor haar onderzoek naar causale verbanden in grote datasets. Het doel is om nieuwe methoden te ontwikkelen om betrouwbare causale verbanden te

vinden en zo betere inzichten uit data-analyse te verwerven. Martijn Kool (UU) heeft een ERC Consolidator Grant mogen ontvangen. De beurs is hem toegewezen voor zijn project FourSurf, waarin hij onderzoek doet naar het aantal oppervlakken in Calabi–Yau-variëteiten. Dit gebied binnen de algebraïsche meetkunde heeft veel verrassende bruggen met andere wiskundige gebieden, en natuurkundige toepassingen binnen de Hodge-theorie en snaartheorie. universiteit leiden.nl, amsterdamumc.org, uu.nl

Boele L. J. Braaksma overleden

Op 2 januari 2023 is op 88-jarige leeftijd overleden Boele L. J. Braaksma, hoogleraar wiskunde te Groningen vanaf 1971 (daarvoor was hij een aantal jaren lector en hoogleraar in Delft). Hij heeft zich beziggehouden met vele, vaak fundamentele, aspecten van de analyse en is tot op hoge leeftijd wetenschappelijk actief gebleven. Hij was een sympathiek mens die gekenmerkt werd door grote bescheidenheid.

Henk de Snoo en Henk Broer



Jong Talent Prijzen en ASML afstudeerprijs

Op 28 november hebben negen wiskundestudenten van het KHNW de Jong Talent Aanmoedigingsprijzen voor hun resultaten in het eerste studiejaar ontvangen. In het Hodshon Huis reikte Goos Kant van ORTEC de prijzen uit aan Jovan Andreevski (RUG), Daan de Bos (UL), Dirk Burgers (TU/e), Kevin van Dijk (UU), Hartog Hartog (UvA), Tanja Muller (RU), Mark van der Post (TUD), Dan Tudor (VU) en Mikuláš Vanoušek (UT). In dezelfde bijeenkomst werd ook de ASML afstudeerprijs uitgereikt aan Fleur Theulen (Tilburg). Zij ontving de prijs voor haar scriptie *Solving Large Maximum Covering Location Problems with a GRASP Heuristic: Case-study for a Stroke Facility Allocation in Vietnam*, waarin een oplossing wordt gezocht naar de beschikbaarheid van medische faciliteiten in Vietnam. khnw.nl

Jean-Morlet Chair voor Peter Stevenhagen

Peter Stevenhagen (Universiteit Leiden) is voor het eerste halfjaar van 2023 benoemd tot Jean-Morlet Chair aan de Aix-Marseille University in Frankrijk. De Jean-Morlet Chair wordt altijd voor één semester gekozen, en toegekend aan een uitmuntende en innovatieve onderzoeker van een niet-Franse instelling. Stevenhagen heeft vele bijdragen geleverd aan de algebra en getaltheorie, en is onder an-

dere bekend van het Stevenhagen-vermoeden. Dit vermoeden uit 1993 beschrijft dat de negatieve Pell-vergelijking $x^2 - dy^2 = -1$ voor een set van waarden van d die aan bepaalde criteria voldoen in ongeveer 58% van de gevallen een geheeltallige oplossing heeft. Na bijna dertig jaar een vermoeden te zijn geweest, is de hypothese vorig jaar door Peter Koymans (University of Michigan) en Carlo Pagano (Concordia University, Montreal) bewezen. Hun bewijstechnieken zijn geïnspireerd op een in 2017 verschenen artikel van Alexander Smith (Stanford), waarin op baanbrekende manier een aantal stappen wordt gezet om de Cohen–Lenstra-heuristieken voor klassengroepen van getallenvelden te bewijzen. De eigenschappen van deze klassengroepen vormde dertig jaar geleden al de basis van Stevenhagens vermoeden. chairejeanmorlet.com, quantamagazine.org

Pieter van Mieghem benoemd tot IEEE Fellow

Vanaf 1 januari 2023 is Pieter van Mieghem (TU Delft) verheven tot IEEE Fellow. Het Fellow-comité van IEEE, 's werelds grootste technische beroepsorganisatie, nomineert ieder jaar minder dan 0,1 procent van de stemgerechtigde leden voor deze verheffing. De benoeming van Van Mieghem tot Fellow is een erkenning voor zijn bijdragen aan de modellering van netwerken en op kwaliteit van dienstverlening gebaseerde routeringsvraagstukken. tudelft.nl

Best Paper Award voor CWI-onderzoekers op SPIRE 2022

Twee onderzoekers van het CWI, Wiktor Zuba en Solon Pissis, hebben tijdens het symposium String Processing and Information Retrieval (SPIRE) 2022 samen met vier co-auteurs de Best Paper Award ontvangen, voor hun inzending 'Subsequence covers of words', een studie naar *string covering*, met potentiële toepassingen in de bioinformatica en datacompressie. cwi.nl

Koninklijk Wiskundig Genootschap

☐ NMC

Op 11 en 12 april zal het NMC 2023 gehouden worden. De Brouwermedaille zal dit jaar worden uitgereikt aan Éva Tardos (Cornell University) voor haar bijdragen aan de discrete wiskunde. Het zal ook de eerste keer zijn dat de *Indagationes Mathematicae*-prijs voor het beste artikel van de laatste vier jaar, gepubliceerd in het gelijknamige blad, zal worden uitgereikt. Op 11 april zal tussen 11.30 en 12.30 uur bij het NMC ook de Algemene Ledenvergadering van het KWG gehouden worden. Zie voor meer informatie mathematischcongres.nl.

☐ Young KWG

Op 15 december is er een kick-off meeting gehouden met Young KWG waarin veel mogelijke activiteiten van de groep zijn besproken. Hoe de groep precies kan worden ondergebracht binnen het KWG zal besproken worden tijdens de ALV.

☐ KWG Wintersymposium

Het Wintersymposium, dat in januari plaatsvond, was een groot succes. Het thema dit jaar was 'De wiskunde achter kunstmatige intelligentie'. Er waren ruim 120 deelnemers en uitstekende voordrachten van Max Welling, Bart Verheij, Sander Bohté en Jasmin Blanchette.

Edward Berengoltz

Korteweg-de Vries Instituut voor Wiskunde
Universiteit van Amsterdam
edikabb@xs4all.nl

Geschiedenis

De omzwervingen van Fourier

Vorig jaar was het 200 jaar geleden dat Joseph Fourier zijn meesterwerk over de warmte-vergelijking publiceerde, dat de basis vormde voor Fourieranalyse [3]. Ter ere van deze verjaardag brengt Edward Berengoltz verslag van de opmerkelijke levensloop van deze revolutionaire Fransman en laat hij ook zien dat het wiskundige pad dat Fourier tot zijn reeksen leidde heel wat omslachtiger was dan wat we nu in onze tekstboeken lezen.

Het is hartje zomer in de snikhete Egyptische woestijn; de temperatuur kan overdag meer dan 40 graden worden. In deze hel arriveert op 13 messidor in het jaar VI (1 juli 1798) het Franse leger van Generaal Napoleon Bonaparte. Bijna veertigduizend man — militairen, burgers en bevrijde galeislaven — alsmede een duizendtal paarden en tweehonderd veldkanonnen is nu landinwaarts door het verzengende zandlandschap op weg naar Alexandrië en Caïro. De soldaten, die niet eens van veldflessen waren voorzien, waren veteranen in de strijd maar geenszins voorbereid op de hitte. Ze kookten in hun strakke legeruniformen, de rantsoenen waren na één dag op, de luchtspiegelingen waren een foltering en sommigen werden blind door de reflectie van de zon in het gloeiend hete zand. De koelere nachten boden weinig soelaas vanwege de Mammelukse rovers die achterblijvers bestraften met afranselingen, sodomie en moord. Een Britse zeemacht zou hun spoedig de weg terug versperren; de Fransen moesten door. De situatie leek uitzichtloos: vele soldaten pleegden uit wanhoop zelfmoord [10, Hoofdstuk 15].

Ongetwijfeld zullen verreweg de meesten zich niet hebben verwonderd over hoe dat nu werkte, die brandende lucht en dat schroeiende zand. “*Zut alors*, wat is warmte eigenlijk?”, dacht niemand. Althans, bijna niemand.



Gravure van Fourier op latere leeftijd

Naast soldaten waren namelijk ook geleerden mee om Egypte te ontdekken. Een van hen was Jean-Baptiste Joseph Fourier. Zijn werk is tot op de dag van vandaag van enorme waarde. In de inleiding van zijn magnum opus *Théorie analytique de la chaleur* schrijft hij: “L’étude approfondie de la nature est la source la plus féconde des découvertes mathématiques.” [3, p. xii] Inderdaad liet zijn werkwijze zich kenmerken door nauwkeurig, diepgaand onderzoek en inspiratie uit de werkelijkheid; geen woestijn, hoe ondraaglijk ook, zou hem belemmeren.

We zullen Fouriers leven, zijn geografische en wiskundige omzwervingen, van guillotines tot piramides, volgen en plaatsen in hun historische context. Daarna duiken we dieper in zijn afleiding van wat nu de Fourierreeks heet — en komen erachter dat deze totaal anders was dan hoe we er nu tegenaan kijken! Franse citaten uit contemporaine bronnen worden in de oude spelling gegeven of vertaald.

Jeugd en revolutie

Joseph Fourier werd geboren in 1768 te Auxerre, ten zuidoosten van Parijs. Beide ouders overleden toen hij negen jaar oud was, maar dankzij een dame van aanzien die zijn talent opmerkte en doorgaf aan de lokale bisschop kon hij in 1780 aantreden bij de *École Royale Militaire*, een academie

onder toezicht van Benedictijnse monniken. Met een ‘ongebruikelijke ijver’ (aldus [8]) stortte hij zich op de wetenschap, en de wiskunde in het bijzonder. Hij ontpopte zich tot briljante leerling en fervent wiskundige.

Bij zijn afstuderen stond Fourier voor een keuze: *l’église et l’épée* — het klooster of het leger [2, p. 104]. Hij ambieerde een militaire carrière als ingenieur of artillerist. In een voor de wiskunde gelukkige wending werd hem, ondanks aanbeveling van de grote Legendre, echter toegang tot de *armée* ontzegd: hij was van te lage komaf, “al ware hij een tweede Newton” qua intelligentie. Ook het leven van een monnik was hem niet beschoren, bleek na twee jaar bij de abdij in Saint-Benoît-sur-Loire. Hij keerde onverrichter zake terug naar Auxerre en werd in het pregnante jaartal 1789 lector wiskunde aan de Benedictijner school. Naast wiskunde gaf hij lezingen in de retoriek, geschiedenis en filosofie. Het wierp zijn vruchten af: aan het eind van het jaar produceerde Fourier een resultaat over oplossingen van algebraïsche vergelijkingen dat werd voorgedragen voor de Académie des Sciences in Parijs [8]. Zijn welsprekendheid en vredelievendheid zouden hem later zowel ellende als succes bezorgen.

Tezelfdertijd stond Frankrijk op zijn kop. Aanvankelijk had Fourier sympathie jegens de Franse Revolutie en hij wenste een Europa verlost van absolutistische koningen en weerspannige geestelijken. Hij trad toe tot het lokale revolutionaire comité in Auxerre. Maar aan het begin der jaren negentig kwamen de Jakobijnen aan de macht en ontketenden de Terreur. Fourier was tegen het geweld — terugtrekken was echter niet meer mogelijk. Hij trachtte daarom zekere terdoodveroordeelden te beschermen en meerdere partijen te vriend te houden. Het werd hem spoedig te heet onder de voeten. Zo wendde hij zijn retorische vaardigheden in Orléans aan ter verdediging van een mederevolutionair. Dit zou hem letterlijk de kop hebben gekost, werde hij niet onverwachts gered [9].

In de zomer van 1794 werd Fourier gearresteerd en vastgezet. Zijn appél aan Robespierre werd afgewezen — hem wachtte de guillotine. Het tijdstip was echter fortuinlijk: zijn tribunaal werd voorgegaan door de val der Jakobijnen. De *Convention nationale* voltrok op 10 thermidor (28 juli) de executie van Robespierre. *Citoyen* Fourier



Fouriers redding: de onthoofding van Robespierre, met boven de guillotine de Frygische muts der Jakobijnen. Detail van het wandtapijt *Yngre enevælde* van Bjørn Nørgaard in Paleis Christiansborg in Kopenhagen.

kon een zucht van opluchting slaken: hij werd vrijgelaten.

Een ambitieus programma

Hoewel de Terreur tegen haar einde liep, was de ellende niet plotsklaps weg. De Revolutie had de instellingen van het *ancien régime* te gronde gericht. Er heerste een machtsvacuüm; onderwijs en infrastructuur verkeerden in slechte staat. Het lot van Lodewijk XVI en Marie-Antoinette had Europa bovendien diep geschokt en verbolgen. (Keizerin Catharina de Grote van Rusland sprak van de Franse ‘infectie’ die zich oostwaarts zou verspreiden en van ‘vergif, waanzin’.) Dat buurlanden Groot-Brittannië, Pruisen en Oostenrijk nu Frankrijk met argusogen gadesloegen is zacht uitgedrukt. Maar ja, er was een nijpend tekort aan leger-officieren en technische vaklui. Wat nu?

De oplossing kwam in december 1794 in de vorm van de École Polytechnique (aanvankelijk École Centrale des Travaux Publics). Dit instituut werd opgericht om ingenieurs, zowel militair als civiel, op te leiden. De meetkundige Gaspard Monge (1746–1818), een hooggeplaatste revolutionair, was een van zijn wiskundige aarts-

vaders. De beroemde Joseph-Louis Lagrange (1736–1813) werd *professeur* analyse en mechanica. Een vernieuwend verschil was dat tussen docenten (*instituteurs*) en examinatoren (*examineurs*), die tevens studenten rekruteerden. Pierre-Simon Laplace (1749–1827) was bijvoorbeeld *examineur* voor analyse, maar zou nooit lesgeven aan de École [5].¹

Wiskunde besloeg een belangrijk deel van het curriculum. (Zie ook Figuur 234.1 in [4, p. 96].) Lagranges analyselessen dekten differentiaal- en integraalrekening à la Leibniz. (Twintig jaar later zou Cauchy de *professeur* analyse worden en de theorie van limieten gebruiken om deze onderwerpen te verenigen; zijn stijl werd echter unaniem gehaat.)² Meetkunde was in handen van Monge, die zijn stokpaardje beschrijvende meetkunde doceerde en veelvuldig gebruikmaakte van tekeningen en diagrammen. Lagrange daarentegen hanteerde uitsluitend formules [5].

Fourier mocht studeren aan de École Normale (een school die begin 1794 kortstondig draaide om nieuwe docenten op te leiden) en presteerde uitstekend. Spoedig werd hij beloond met een uitnodiging om wiskunde te onderwijzen als *répétiteur* (assistent aan een *professeur*) aan de École Polytechnique. Hij las bijvoorbeeld differentiaal- en integraalrekening in de stijl van Lagrange en Laplace, maar ook de theorie van algebraïsche en transcendente functies, exponenten en logaritmen [1, p. 245]. Twee jaar lang werkte Fourier als docent. In 1797 werd hij zelfs Langranges opvolger als *professeur* analyse en mechanica.

Hij ontwikkelde een vriendschap met Monge die hem meer dan carrière opleverde; in juni 1795 was hij opnieuw gearresteerd — een nasleep van de Jakobijnse affaire — maar snel weer vrijgelaten. Men denkt dat de optredens van Monge en collega hier cruciaal waren.

À l’Égypte!

Het gesterkte leger van de Franse Republiek was intussen druk bezig. Een zekere goede vriend van Monge was een rijzende ster: deze Generaal Bonaparte veroverde Noord-Italië en versloeg Oostenrijk in 1797. Delen van Oostenrijks en Italiaans grondgebied werden Franse vazalstaten en ook werden de Oostenrijkse Nederlanden en de Bataafse Republiek Franse satellieten. Het *Directoire* vreesde Bonapartes succes en autoriteit en wilde van hem af. Met politie-

ke manoeuvres lukte het hem de directeurs ervan te overtuigen een expeditie naar Egypte goed te keuren.

Tijdens Bonapartes veldtochten in Noord-Italië was zijn vriend Monge (samen met andere geleerden) namelijk al lid geweest van een commissie die zou helpen bepalen welke kunstwerken, boeken, et cetera, zouden worden meegenomen naar Parijs. (Schrijnend detail: een aantal kunstenaars, onder wie de grote Jacques-Louis David, was tegen deze operatie.) Tijdens beider tijd in Italië merkte Monge bovendien op dat er zóveel bekend was over de Griekse en Romeinse beschavingen, en maar bar weinig over de Egyptische. Hij stelde thans voor om een commissie mee te sturen op de expeditie om over Egypte te leren.

Niet alleen zou Bonaparte kennis van Egypte naar Frankrijk halen, maar hij zou een agent der Verlichting worden en het door de Turken 'ontaarde' Egypte naar zijn Hellenistische hoogtij herstellen.

Het plan: versla de Mammelukken³ en organiseer (lees: beschaaf) Egypte. Dat wil zeggen: ontdoe het van zijn Ottomaanse juk om nadien bij Frankrijk in te lijven. Het invasieplan werd strikt geheim gehouden.

Slechts het *Directoire* en de kring rondom Bonaparte zelf waren op de hoogte. Een zo'n vertrouweling was Monge [10, Hoofdstuk 14].

Bonaparte besloot inderdaad een commissie illustere kunstenaars, geleerden en technici — de zogeheten *savants* — samen te stellen, naar Monges idee. Zij werden heimelijk gerekruteerd zonder dat de bestemming werd onthuld. Velen weigerden (David, bijvoorbeeld) en ook Monge, die zichzelf te oud (ruim 50) vond en comfortabel in Italië vertoefde, stemde slechts met grote tegenzin in. Vervolgens slaagde Monge erin om zijn discipel Fourier te werven.

De Franse vloot vertrok op 19 mei 1798. Monge was inmiddels opgebloeid en vergeleek zichzelf met een Argonaut, en Bonaparte met Jason die niet het gulden vlies maar de 'toorts der verlichting' naar een eeuwenlang 'in duisternis gehuld land' zou brengen [10, Hoofdstuk 14–15].

De vermetele *savants* zouden Egypte zowel letterlijk als figuurlijk op de kaart zetten en de fascinatie voor het land aanwakkeren in Europa. Een van hun beroemdste vondsten is bijvoorbeeld de Steen van Rosetta. Het Institut d'Égypte werd na de woestijntocht op 22 augustus opgericht

in een paleis in Caïro om de wetenschappelijke en archeologische onderzoeken te sturen. Monge werd voorzitter en Fourier permanente secretaris. Beiden behoorden uiteraard tot de wiskundeafdeling; idem Bonaparte zelf, die in Parijs reeds over wiskunde had gepraat met Monge en Lagrange.⁴ Naast wetenschap zochten de *savants* oplossingen voor praktische problemen (zoals bier brouwen en ovens bouwen) en vraagstukken van meer zonderlinge aard (bijvoorbeeld betreffende de dadelpalm, krokodillengenuitiën, prostitutie, magie, de struisvogel, en — jawel — zand). Monge raakte gefascineerd door luchtspiegelingen en vond een verklaring voor hen dankzij zijn meetkundekennis. Kunstenaars en archeologen trokken met Bonaparte langs de Nijl: hij om de Mammelukken te achtervolgen, zij om alles onderweg te documenteren.

Fourier publiceerde amper in de wetenschappelijke uitgaven van het instituut, de *Mémoires sur l'Égypte* en de *Décade égyptienne*. Naast wiskundige artikelen schreef hij over onder andere de uitgravingen van graftomben, het watertoevoer van de Nijl, irrigatie en oasen. Bovendien stuurde hij zelf sommige expedities aan [4, Hoofdstuk 9.1.1]. Al zijn onderzoek werd



Napoleons legermacht in Egypte op 21 juli 1798. Diorama in het Musée de l'Armée in Parijs.

gekaracteriseerd door een nauwlettende en vastberaden werkwijze. Wanneer hij iets wilde beschrijven, moest de onderste steen boven geraken, getuige bijvoorbeeld het volgende citaat in zijn bijdrage *Sur les Oasis* aan [7, p. 311]. Hij schrijft: “De Griekse en Middeleeuwse schrijvers hebben zulke soorten eilanden beschreven met een nauwkeurigheid die wellicht voldoende had kunnen schijnen, ware het niet dat talrijke commentaren zekere onduidelijkheid in de tekst hebben opgeworpen [*répandu*]. Krachtens deze discussies heeft dit onderwerp voldoende onzekerheid blootgesteld dat het noodzakelijk geworden is om haar te verdrijven.” In het vervolg geeft hij exacte lengte- en breedtegraden van de drie door Strabo beschreven oases in Libië en hij gaat in op de tegenspraken tussen een commentaar op de Arabische wijsgeer Aboe'l-Feda en de werken van Herodotus en Ptolemaeus. Als dat geen ‘étude approfondie’ is, eet ik mijn kniebroek op.

Naast het uitvoeren van zulk precies werk en het bundelen van alle resultaten van de leden van het Institut was Fourier ook diplomaat. Hij was de officiële Franse vertegenwoordiger bij de *divan* van Caïro en bemiddelde vaak tussen de Egyptenaren en Fransen. Zijn retoriek en beleefdheid kwamen hier uitstekend van pas.

Terugkeer naar Frankrijk

Het helse klimaat en akelige ziektes daar gelaten was de expeditie op militair gebied *aanvankelijk* succesvol: Alexandrië en Caïro werden ingenomen en de Mammelukken teruggedreven. In augustus ontdekte de Britse Admiraal Nelson de Franse vloot echter — en reduceerde haar tot gruzelementen, tot ontsteltenis van de meeste Fransen. Daarna kwam de Ottomaanse Sultan met een oorlogsverklaring en in Caïro brak een opstand uit. De Franse expeditie bevond zich in een hachelijk parket.

Begin 1799 trok Bonaparte richting Syrië met zijn leger om de thans gebundelde krachten van Turkije, Engeland en Rusland te bevechten. Binnen enkele maanden keerde hij, zijn mannen verslagen of geveld door de pest, nochtans terug van de veldtocht, welke [10] omschrijft als een *unmitigated disaster*. Vergezeld door zo'n 500 man (onder wie de meeste generaals en *savants*, Monge inclus) keerde Bonaparte in augustus terug naar Frankrijk. Ondanks het militaire falen was hij immens populair dankzij een sterk propaganda-apparaat.



Foto: Musée St. Germain, Auxerre

Portret van Fourier als préfet d'Isère

Dat jaar pleegde hij de coup waarmee het *Directoire* viel en hij *premier consul* werd.

Onderwijl had Fourier een expeditie in Opper-Egypte geleid. Eensklaps waren zowel Bonaparte en Monge weg, zodat hij nu de hoogste civiele autoriteit droeg.⁵ De situatie verslechterde: Caïro kwam weer in Turks bezit. Fourier voerde de vredesbesprekingen in een gevaarlijk stadsdeel; een verdwaalde kogel verbrijzelde eens de koffiekkan die hij in zijn hand hield. Pas twee jaar later, tegen het einde van 1801, keerden Fourier en de overblijfselen van de expeditie terug naar Frankrijk — weliswaar met bootladingen aan kennis, maar Egypte was weer in Ottomaanse handen. Bij de terugtocht werd hun boot door de Britten aangehouden, maar met enige moeite lukte het Fourier dezen te overtuigen om hen te laten gaan (wel moesten de Fransen de Steen van Rosetta overhandigen) [6, p. 74]. Hij ging in Parijs verder met de publicaties van vele stukken over Egypte maar hem zou de overdadige lof voor de expeditie later verweten worden als Napoleontische propaganda [8].

Fouriers wens was om zijn baan aan de École Polytechnique voort te zetten. Maar de *premier consul* had spoedig andere plannen.

Citoyen Fourier werd in januari 1802 aangesteld als prefect van het *département* Isère. Er is enig debat of dit een bevel van Napoleon was of dat Fourier eventueel had kunnen weigeren. Mogelijk voelde hij zich voldoende verzekerd van zijn positie aan de École om er te blijven

doceren, zoals hij wilde. (Parijs was immers een productievere plek dan het verre Isère qua wiskunde.) De brief van onder anderen Monge aan Napoleon om Fourier in Parijs te houden was echter aan dovemansoren gericht [2, pp. 173–174]. Aan de andere kant, Napoleon sprak over Fouriers ‘expectations’ omtrent de positie. Niet alleen klinkt dit niet als een expliciet bevel, maar bovendien suggereert de formulering dat Fourier, na zijn hoge ambten in Egypte, wellicht zelf iets als een prefectuur verlangde. Hoe dan ook ging hij akkoord. De precieze motieven zullen ongewis blijven, zie [6, Hoofdstuk 4.2]. Dat gezegd hebbende, hij zou in latere jaren via brieven naar Parijs proberen om zijn positie te ontbinden, zonder succes [2, p. 249].

Ook als prefect paste Fourier zijn diplomatieke en retorische vaardigheden toe om mensen en werken in goede banen te leiden en geschillen te beslechten. Hij kweet zich met verve. Zijn belangrijkste projecten waren de drooglegging van het grote moeras van Bourgoin voor akkerland en de aanleg van een grote weg tussen Grenoble en Turijn. Fourier was in 1804 aanwezig bij de kroning van Keizer Napoleon I, die hem in 1808 zelfs tot *Baron de l'Empire* heeft benoemd [8].

Hij ging intussen door met het voorbereiden van publicaties namens het Institut d'Égypte. Het zeer omvangrijke werk *Description de l'Égypte* kwam vanaf 1809 in delen ter perse, hoewel Fourier stellig weigerde om er salaris voor te ontvangen [6, p. 98]. Daarnaast gebruikte hij zijn positie om twee broers uit Grenoble de archeologie in te sturen; eentje zou zijn biograaf worden, de ander zou de Steen van Rosetta ontcijferen [4, p. 585].

Het begin van de warmteleer

Los van dit alles leverde Fourier noeste arbeid omtrent zijn warmteoverdrachtstheorie zodra hij er tijd voor had. Terwijl Napoleon in 1807 bij Tilsit zijn Corsicaanse gebrabbel mat met het vlekkeloze Frans van Keizer Alexander I van Rusland, legde Fourier de laatste hand aan zijn artikel. In december kwam de *Mémoire sur la propagation de la chaleur dans les corps solides* voor een viermanscomité (bestaande uit Laplace, Lagrange, Lacroix en Monge) in Parijs, waar deze met scheve ogen werd gelezen.

Fourier bestudeerde verschillende aspecten van de warmteleer: straling, afkoeling,

opwarming, enzovoort — alles geïnspireerd door processen uit de echte wereld. Hij gebruikte de techniek van goniometrische reeksen om de *warmtevergelijking* op te lossen, een zekere partiële differentiaalvergelijking van de tweede orde. Deze techniek was niet geheel nieuw, maar gebaseerd op soortgelijk werk van Euler. Fourier heeft haar echter op briljante wijze veralgemeend en breder toegepast. Deze Fourieranalyse avant la lettre was zelfs zo boud dat Laplace en Lagrange — alleszins vriendelijk jegens Fourier — zich niet lieten overtuigen van de methode.

Op de *afleiding* van de warmtevergelijking en haar afhankelijkheid van de afkoelingswet van Newton (1701) kwam ook kritiek, en wel van Jean-Baptiste Biot (1774–1862)⁶ en Siméon Denis Poisson (1781–1840) [9]. Fourier bleef namelijk lang vasthouden aan Newtons wet, die een lineair verband tussen warmteoverdracht en temperatuurverschil postuleert, terwijl Biot uit experimenten een kubisch verband had afgeleid bij hoge temperaturen [4, Hoofdstuk 12.2.2].

Hij zond zijn werk, eind 1811 voltooid, in bij een wiskundewedstrijd over warmtestroming in vaste stoffen. (Mogelijk nadat hij Laplace had verzocht zo'n wedstrijd op te zetten, zie [6, pp.103–104].) Fourier won — van één andere deelnemer — maar Laplace, Lagrange en Legendre hadden alsnog hun twijfels. De *mémoire* werd niet gepubliceerd, maar vormde wel de basis voor zijn latere [3].

De oorsprong van Fouriers interesse in de warmteleer is niet geheel duidelijk. Zeker is dat zijn gezondheid aanzienlijk was verslechterd na terugkeer uit Egypte, met reuma tot gevolg. Hij kon niet gewinnen aan het veel koudere klimaat in Isère en zou zich altijd zeer warm kleden. In zijn huis draaide de kachel overuren. Hoezeer dit zijn academische interesse ook beïnvloed hebbe, vast staat dat het concept van warmte in zijn dagelijks leven geworteld was.

De meest gebruikelijke warmtetheorie van die tijd beschreef een vloeistofachtige substantie, de *calor*, die door lichamen of gassen kon 'stromen' van warm naar koud totdat een thermisch evenwicht ontstond. De mysterieuze, massalozes *calor* zou worden aangetrokken door moleculen en kon niet worden gecreëerd of vernietigd. De precieze werking ervan was echter een raadsel. Daarnaast bestond een meer kinematische golftheorie, die warmtefenome-

nen beschreef via de bewegingen van deeltjes [4, p.587].

Fourier was agnost in deze discussie. Hij poogde vooral warmte te beschrijven aan de hand van *wiskunde*, ongeacht de fysische leest waarop de warmte geschoeid was. In zijn inleiding [3, p.18] schrijft hij bijvoorbeeld: "We zouden slechts onzekere veronderstellingen kunnen vormen over de aard van warmte, maar de kennis van de wiskundige wetten waaraan haar effecten onderworpen zijn, is onafhankelijk van iedere aanname." Hij vervolgt dat het om deze reden noodzakelijk is om alle definities en beginselen duidelijk uiteen te zetten alvorens aan het rekenen te slaan — zoals een goede wiskundige betaamt. Later [3, p.39] herhaalt hij dat de genoemde wetten rigoreus kunnen worden afgeleid: "Indépendamment de toute explication physique." De epigraaf die hij kiest voor Hoofdstuk I — het platonische citaat "et ignem regnunt numeri"⁷ — is een toonbeeld voor Fouriers werkwijze: natuurkundige verschijnselen verklaren aan de hand van wiskunde. Dit vertoont overeenkomsten met Newton, die een eeuw eerder de zwaartekracht op soortgelijke wijze had benaderd.

Terwijl Fourier zo noest werkte aan de warmteleer vanuit zijn *département*, werd Keizer Napoleons leger juist gevelde door een gebrek aan warmte na zijn dramatische invasie van Rusland.

Tussen wal en schip

In oktober 1814 wordt Napoleon in de Slag der Volkeren bij Leipzig verslagen door de Zesde Coalitie. Na de winter valt Parijs; de Bourbonmonarchie wordt hersteld en de keizer verbannen. Fourier behoudt zijn prefectuur, nu in dienst van de koning. Op weg naar Elba zou Napoleon door Grenoble gaan; Fourier liet de route veranderen om een ongemakkelijke ontmoeting te voorkomen. Toen Napoleon terugkeerde uit ballingschap, moest Fourier, openlijk koningsgezind, de stad ontvluchten, hopen op het beste.

Napoleon was toornig over Fouriers optreden maar nam hem opnieuw in dienst, nu als prefect van het *département de Rhône*. Spoedig kreeg Fourier orders om monarchisten te 'zuiveren'; hij nam ontslag en verhuisde naar Parijs met een pensioen van 6000 frank van Napoleon.⁸ Dit werd alleen nooit uitbetaald omdat de keizer definitief werd verslagen bij Waterloo. De monarchie werd op 8 juli 1815 opnieuw hersteld en ontzegde Fourier al diens gelden, ook die horende bij zijn baronie, in verband met zijn diensten onder Napoleon. Berooid en werkloos wilde Fourier terugkeren naar het onderzoeksleven. Opnieuw had hij geluk: de prefect van de Seine, een mede-savant, stelde hem aan als directeur van het Bureau de Statistique aldaar [9].

In 1816 werd Fourier verkozen als lid van de Académie des Sciences in Parijs — maar Lodewijk XVIII stak ook hier een stokje voor. Pas een jaar later gaf de koning alsnog toe. Tevens begon Fouriers reputatie te verbeteren: in de komende jaren werd hij lid van de Royal Society en de wetenschappelijke academie van St. Petersburg en sloot vriendschappen met onder anderen Ørsted en de jonge Dirichlet en Abel. Hoewel Fourier nooit is getrouwd, genoot hij graag het gezelschap van intelligente dames en hij raakte goed bevriend met de briljante Sophie Germain [6, Hoofdstuk 6.5]. Biot en Poisson bleven Fourier tot en met diens dood echter vijandig gezind en Galois zou hem er postuum van beschuldigen diens inzending naar de Académie opzettelijk te zijn verloren, hetgeen hoogstwaarschijnlijk onwaar was. Hij sprak graag met vrienden en bekenden en verhaalde veel over zijn reis naar Egypte. Dit deed hij zoals alles met een wiskundige nauwkeurigheid in plaats van de gebeurtenissen aan te dikken. Hij bleef ook doorgaan met de



Buste van Fourier in Musée de l'Ancient Évêché te Grenoble

Foto: wikimedia.org / Guillaume Piolle



Foto: Stadsarchief van Auxerre.

Dit standbeeld (Faillot, 1849) van Fourier in Auxerre werd door de nazi's omgesmolten voor wapens tijdens de Tweede Wereldoorlog.

publicatie van de *Description de l'Égypte*, nu sans verwijzingen naar Napoleon [8].

Het hoogtepunt van Fouriers carrière was wellicht 1822. Hij betrad de prestigieuze post van *secrétaire perpétuel* van de Académie en zijn boek [3] over de warmte-leer werd gepubliceerd. Het oogstte veel lof en zou de basis van de moderne Fourier-analyse vormen. Laten wij dit werk nader onder de loep nemen.

Fouriers analyse

Alvorens Fouriers concrete wiskunde te beschouwen, is het aardig om op te merken dat de moderne notatie voor 'de integraal over het interval $[a, b]$ ' aan hem te danken is. Leibniz' notatie $\int$, een gestileerde lange s , voor integralen en primitieven was algemeen in gebruik in Fouriers tijd. (In smallere regels werd soms ook een gewone hoofdletter S geschreven.) Zijn vernieuwing was de notatie

$$\int_a^b$$

met grenzen. Hij had deze al in eerdere artikelen gebruikt maar introduceerde haar pas echt in 1822 [3, p. 252]. Ze sloeg meteen aan bij onder anderen Cauchy, en zelfs Poisson moest toegeven dat de notatie *très-commode* was.

Ook de 'methode van Fourier' voor differentiaalvergelijkingen, ook bekend als scheiding van variabelen, speelt een belangrijke rol in zijn werk. Hij heeft deze wel-

iswaar niet bedacht, maar haar toegepast op een partiële differentiaalvergelijking zonder enige aannames op de functies die in de gestelde oplossing voorkomen — en dít was vernieuwend.

We zullen, omwille van de toegankelijkheid van het bronmateriaal, [3] hanteren. Qua inhoud lijkt dit grotendeels op Fouriers *mémoire* uit 1807. (De lezer volge desgewenst [4, Hoofdstuk 9.2].) Zoals eerder genoemd, vangt hij aan met een lange inleiding waarin hij het probleem schetst en definities en conventies vaststelt.

In Hoofdstuk II behandelt Fourier de warmtevergelijking voor enkele specifieke gevallen (bollen, annuli, et cetera) en vervolgens voor het inwendige van een willekeurig homogeen lichaam. In art. 140-2 (p. 131 e.v.) geeft hij een aantal stellingen, waaruit hij concludeert dat de temperatuur v als functie van de ruimtelijke coördinaten x, y, z en de tijd t voldoet aan de vergelijking

$$\frac{dv}{dt} = \frac{K}{C \cdot D} \left(\frac{d^2v}{dx^2} + \frac{d^2v}{dy^2} + \frac{d^2v}{dz^2} \right), \quad (W)$$

waarbij K, C en D fysische constanten zijn zoals de warmtecapaciteit van het lichaam. Dit heet per definitie de warmtevergelijking. Het bewijs volgt uit de eerdere resultaten over warmtestroming in 'infinitesimale versies' van meetkundige objecten in een kleine omgeving van het punt (x, y, z) . Op de volgende pagina's benadrukt Fourier dat een oplossing $v(x, y, z, t)$ bovendien afhangt van de opgelegde begintoestand op $t = 0$.

De precieze (analytisch meetkundige) afleiding van de warmtevergelijking laten we achterwege. Wel merken we op dat Fourier een *lineair* verband tussen warmtestroming en temperatuursverschil aanneemt, conform Newtons wetten. Specifieker, de functie

$$-K\omega \frac{dv(x, y, z, t)}{dz}$$

geeft de hoeveelheid warmte die tijdens een infinitesimaal stukje tijd dt door een infinitesimaal oppervlakje ω loodrecht op de z -as stroomt naar een punt (x, y, z) wiens temperatuur 0 is op tijdstip t . (De begintemperatuurwaarde 0 is verder niet van belang.) In art. 31 (pp. 22–23) noemt Fourier expliciet deze newtonse aanname, waar Biot en Poisson zoveel kritiek op hadden. In de inhoudsopgave (p. 604), en alleen daar, voegt hij echter toe dat zij niet

redelijkerwijs kan kloppen *pour certaines limites de température*.

Variabelen scheiden en reeksen afleiden

In het volgende hoofdstuk poogt Fourier de vergelijking (W) op te lossen. Hij neemt een gevulde dikke plaat, oneindig lang in de x - en z -richtingen, ingesloten tussen twee evenwijdige vlakken B en C . Loodrecht hierop laat hij een derde vlak A de plaat in tweeën delen. De onderkanten van B en C heten B' en C' , respectievelijk. De bovenste helft van de plaat (ingesloten door vlakken A, B en C) heeft begintemperatuur 0 en de onderste helft (ingesloten door A, B' en C') is een warmtebron van constante temperatuur 1 (een arbitrair getal). Alles hierbuiten, inclusief de zijvlakken zelf, heeft constante temperatuur 0 . (Hij vergelijkt de situatie met een door ijsblokken omgeven massa boven een kokendwaterbad.) Noem de horizontale richting y en de verticale x , zodat $A = \{x = 0\}$ en de plaat dikte π heeft. Zie de tekening op de volgende pagina.

We willen weten hoe de warmte vanuit het bad door de 'deksel' A de bovenste helft in stroomt. Hiertoe verdelen we de plaat langs de z -richting in oneindig veel vlakken als boven. De warmtevergelijking (W) voor de evenwichtstoestand (dat wil zeggen tijdsafhankelijk) in een dergelijk vlak is

$$\frac{d^2v}{dx^2} + \frac{d^2v}{dy^2} = 0. \quad (1)$$

Hierbij moet $v(x, y)$ voldoen aan

$$v(x, \pm \frac{\pi}{2}) = 0 \quad \text{voor alle } x \geq 0 \quad (2a)$$

en

$$v(0, y) = 1 \quad \text{voor alle } -\frac{\pi}{2} < y < \frac{\pi}{2}. \quad (2b)$$

Nu lost Fourier deze vergelijking op door variabelen te scheiden (art. 167): hij *veronderstelt* dat v een product is van de vorm

$$v(x, y) = F(x) \cdot f(y)$$

voor nader te bepalen functies F en f ; de verantwoording volgt later. Deze aanname invullen in vergelijking (1) geeft dat

$$\frac{F''(x)}{F(x)} + \frac{f''(y)}{f(y)} = 0,$$

waarbij de accentjes afgeleiden weergeven naar de respectievelijke variabelen x dan wel y . Daar de twee breuken ieder van een andere variabele afhangen, moeten ze ge-

lijk zijn aan een *constante*, die Fourier m^2 noemt, oftewel,

$$\frac{F''(x)}{F(x)} = m^2 = -\frac{f''(y)}{f(y)}.$$

De oplossingen hiervan lezen we eenvoudigweg af, namelijk

$$F(x) = e^{-mx} \text{ en } f(y) = \cos my.$$

De verantwoording hiervan is als volgt. A priori is elke functie $f(y) = a \cos(my) + b \sin(my)$ een oplossing, maar vergelijking (2a) noopt $b = 0$. Verder kunnen we aanvankelijk $F(x) = ce^{-mx} + de^{mx}$ zetten, maar voor grote x en $m > 0$ moet de temperatuur klein worden (de warmte komt immers uit A), zodat $d = 0$. (Of andersom als $m < 0$.) De constanten a en c zijn voor later zorg. Uit vergelijking (2b) en het feit dat $m > 0$ zien we dat noodzakelijkerwijs $m \in \{1, 3, 5, 7, \dots\}$.

We zien bovendien dat iedere lineaire combinatie

$$v(x, y) = \sum_{i=1}^{\infty} a_i e^{-(2i-1)x} \cos((2i-1)y)$$

eveneens voldoet aan (1), (2a) en (2b) mits

$$a_1 \cos y + a_2 \cos 3y + a_3 \cos 5y + \dots = 1$$

$$\forall y \in \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right).$$

We hebben dus precies een Fourierreeks voor $v(0, -)$ als functie van y gevonden!

“We zouden kunnen betwijfelen of zo’n functie bestaat”, aldus Fourier, “maar deze vraag wordt uitbundig verhelderd in het vervolg.”

Hierop volgt een vanuit onze moderne optiek vrij zonderlinge rekenpartij. Men neme alle afgeleides van even orde naar y van bovenstaande vorm van (2b). Dit geeft oneindig veel vergelijkingen, die gelden op heel A (zonder rand), in het bijzonder voor $y = 0$. We hebben dus een (oneindig) lineair stelsel

$$\begin{cases} 1 = a_1 + a_2 + a_3 + a_4 + \dots, \\ 0 = a_1 + 3^2 a_2 + 5^2 a_3 + 7^2 a_4 + \dots, \\ 0 = a_1 + 3^4 a_2 + 5^4 a_3 + 7^4 a_4 + \dots, \\ \vdots \end{cases}$$

Lineaire algebra in de zin van matrices bestond echter niet. Fourier doet het volgende: hij kapt dit stelsel af op de eerste n vergelijkingen in n onbekenden en begint eerst a_1 op te lossen. Enig gereken geeft voor $n = 7$ (p.169 e.v.) bijvoorbeeld dat

$$a_1 (13^2 - 1^2) (11^2 - 1^2) \dots (3^2 - 1^2) = 13^2 \cdot 11^2 \cdot \dots \cdot 3^2.$$

Omdat $(x^2 - 1^2) = (x - 1)(x + 1)$, volgt dat

$$a_1 = \frac{3 \cdot 3}{2 \cdot 4} \cdot \frac{5 \cdot 5}{4 \cdot 6} \cdot \dots \cdot \frac{13 \cdot 13}{12 \cdot 14}.$$

Het is nu duidelijk hoe dit resultaat moet worden uitgebreid als n nadert naar ∞ . Het zo verkregen oneindige product herkent

hij met de Stelling van Wallis als $\frac{4}{\pi}$. Door, mutatis mutandis, de andere coëfficiënten evenzo te behandelen, concludeert hij uiteindelijk dat

$$a_i = \frac{4}{\pi} \cdot (-1)^{i-1} \frac{1}{2i-1}.$$

Wij herkennen deze waarden als de coëfficiënten in de Fourierontwikkeling van een blok golf met waarde 1. En nu komt het volstrekt briljante inzicht van Fourier!

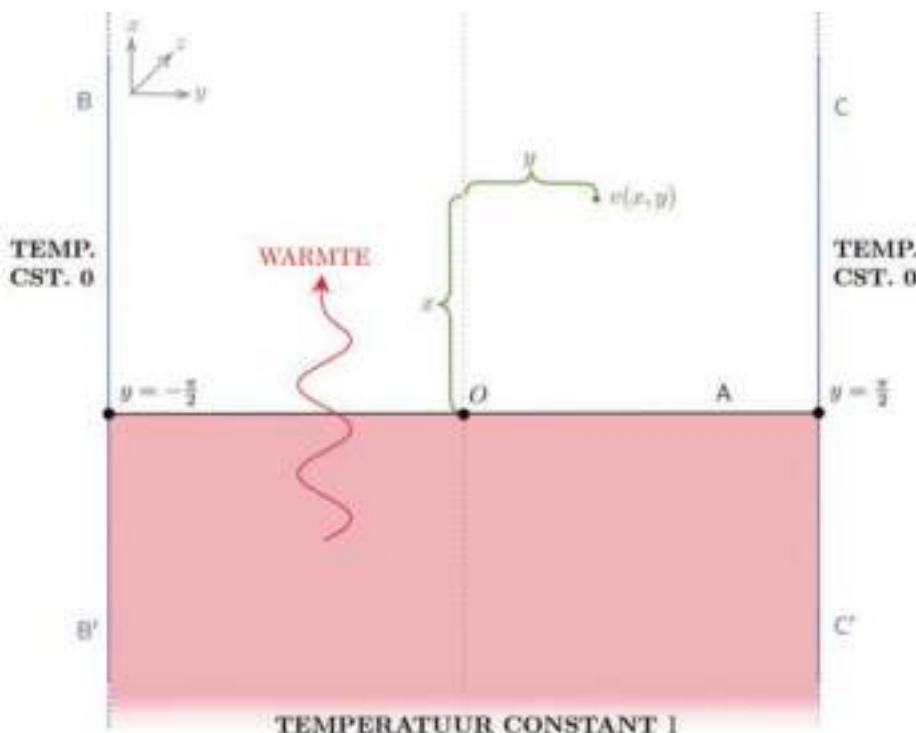
De ‘dekseltemperatuur’ op A moest voldoen aan $v(0, y) = 1$ voor alle $|y| < \frac{\pi}{2}$ (en 0 op de rand). Dit is precies de blok golf wier Fouriercoëfficiënten we zojuist hebben gezien. Stel nu, vervolgt Fourier, dat we een *willekeurige* functie $\varphi(y)$ nemen in plaats van 1. Als we hetzelfde trucje proberen toe te passen, krijgen we links in het oneindige stelsel niet $(1, 0, 0, 0, \dots)$ maar de coëfficiënten van de Taylorontwikkeling van φ rond $y = 0$. Fouriers methode is nu dus om de a_i (oftewel, de Fouriercoëfficiënten) uit te drukken in termen van de Taylorcoëfficiënten van φ . Dit is een lange berekening vol integralen en differentialen. Het eindresultaat, dat hij met recht ‘très-remarquable’ noemt, is de vergelijking (p.256)

$$\begin{aligned} \pi \varphi(x) &= \frac{1}{2} \int_0^{2\pi} \varphi(a) da \\ &+ \sum_{i=1}^{\infty} \sin ix \int_0^{2\pi} \varphi(a) \sin ia da \\ &+ \cos ix \int_0^{2\pi} \varphi(a) \cos ia da, \end{aligned}$$

“welke dient om een willekeurige functie te ontwikkelen als reeks gevormd uit sinussen en cosinussen van meerdere frequenties.”

Merk op dat Fourier *tientallen pagina's* nodig heeft om tot deze formule te komen. Vanuit ons perspectief is dit potsierlijk; wij stellen bovenstaande uitdrukking met integralen in enkele regels op. Maar dat is juist dankzij de arbeid van Fourier, die dit resultaat op baanbrekende wijze verkregen heeft, hetzij met omzwervingen — twee eeuwen geleden, zelfs nog vóór de formalisering van de analyse.

Het is evenwel niet gemakkelijk om door honderd pagina's aan berekeningen te ploeteren. De Lord Kelvin zou Fouriers werk een ‘wiskundig gedicht’ hebben genoemd. Het moge duidelijk zijn dat dit dan geen limerickje betreft, maar een Home-risch epos!



Situatieschets van de auteur gebaseerd op Figuur 7 uit [3].

Fin

Helaas was Fouriers gezondheid sinds Egypte nooit goed geweest. Naast reuma en koude-intolerantie leed hij aan een hartkwaal die in 1830 aanzienlijk verergerde. Hij valt op 4 mei van een trap, waarna zijn situatie snel bergafwaarts gaat; op 16 mei krijgt hij een toeval. Terwijl hij in bed met de arts praat, begint hij plotseling te roepen dat hij op sterven is en maant de arts aan vlug azijn te halen. Hij overlijdt diezelfde dag, 62 jaar oud, aan een hartaanval [8]. Er wordt geld ingezameld voor een herdenking (tot weiniger verbaazing dragen Biot en Poisson niet bij) en net als zijn mentor Monge wordt hij begraven op de *Cimetière du Père-Lachaise* in Parijs.⁹ Hoewel Fouriers warmtetheorie

en de wiskundige gevolgen daarvan ongetwijfeld zijn belangrijkste nalatenschap zijn, heeft hij nog veel meer betekend. Qua wiskunde bracht hij ook in de algebra en statistiek (een in die tijd nog onontgonnen vakgebied) resultaten voort. Naast de concrete werken over de warmteleer, vormen zijn werkwijze en filosofie een hoeksteen van wat nu mathematische fysica heet. Hij heeft een nieuwe generatie geleerden opgeleid, belangrijk administratief en diplomatiek werk als bestuurder in Frankrijk en Egypte verricht en natuurlijk bijgedragen aan de egyptologie en archeologie.

Fourier was ongetwijfeld een van de grootste geleerden van zijn tijd. Dat ‘tweede Newton’ was misschien zo gek nog niet. ☛

Nawoord

De auteur wil dr. Viktor Blåsjö en dr. Raf Bocklandt hartelijk bedanken voor hun waardevolle assistentie bij, de behulpzame feedback op en natuurlijk de gelegenheid tot het schrijven van dit artikel. Aan de geïnteresseerde lezer raad ik de volgende bronnen aan voor meer informatie. De eerste zes hoofdstukken van [6] vormen een aardige biografie van Fourier; voor zijn specifiek wiskundige werken (en algemener die uit negentiende-eeuws Frankrijk) kan echter beter [4] worden geraadpleegd. De boeken [1] (in het Frans) en [5] (in het Engels) zijn omvangrijke werken over de École Polytechnique. Ten slotte is [10] een uitstekende biografie van Napoleon, zijn expeditie naar Egypte inclusief. Een andere biografie, die zich specifiek richt op Napoleons betrekkingen tot de wetenschap en de *savants*, is [2] (dank aan dr. Gerard Alberts voor deze verwijzing).

Noten

- 1 Voor een beknopte tijdlijn van de École tussen 1794 en 1816, zie [2, pp. 200–201]. Voor een lijst studenten en staf, zie [5, pp. 235–236].
- 2 Na afloop van zijn 65ste lezing uit een reeks van 50 (!) op 12 april 1821 zou Cauchy vrolijk verder oreren over een nieuw onderwerp — waarop de studenten pardoes de zaal verlieten [5, p. 242].

- 3 De formidabele krijgersslaven die onder andere Egypte bestuurden namens de Ottomaanse Sultan.
- 4 Voor een volledig overzicht van de afdelingen, zie [2, p. 94].
- 5 Toen duidelijk werd dat Monge zou vertrekken, volgde een ontzette Fourier hem zelfs de straat op [6, p. 72].
- 6 Biots wrok had mogelijk voorkomen kunnen

worden; in zijn *mémoire* baseert Fourier een zekere berekening op Biots eerdere resultaten zonder dit te erkennen.

- 7 Ook het vuur beheersen de getallen.
- 8 Fouriers motieven hieromtrent zijn niet geheel zeker, zie [6, p. 112].
- 9 Monge zou later naar de crypten van het Panthéon worden verplaatst, waar ook Lagrange ligt.

Referenties

- 1 B. Belhoste, *La formation d'une technocratie. L'École Polytechnique et ses élèves de la Révolution au Second Empire*, Belin, 2003.
- 2 J. Fischer, *Napoleon und die Naturwissenschaften*, Franz Steiner Verlag, 1988.
- 3 M. Fourier, *Théorie analytique de la chaleur*, Firmin Didot, père et fils, 1822.
- 4 I. Grattan-Guinness, *Convolutions in French Mathematics, 1800–1840. From the Calculus and Mechanics to Mathematical Analysis and Mathematical Physics*, Vol. 2: *The Turns*, Birkhäuser, 1990.

- 5 I. Grattan-Guinness, The Ecole Polytechnique, 1794–1850: Differences over educational purpose and teaching practice, *The American Mathematical Monthly* 112(3) (2005), 233–250.
- 6 J. Herivel, *Joseph Fourier. The Man and the Physicist*, Clarendon Press, 1975.
- 7 Institut d'Égypte, *Mémoires sur l'Égypte, publiés pendant les campagnes du Général Bonaparte*, Vol. 1, P. Didot l'aîné, Paris, an VIII [1800, EB].
- 8 В. А. Никифоровский, Математик, общественный деятель, гражданин. К 225-летию

со дня рождения Ж.Б. Фурье, *Вестник Российской академии наук* 63(8) (1993), 743–746 [V.A. Nikiforovski, Wiskundige, publiek figuur, citizen. Ter gelegenheid van de 225ste verjaardag van J.B. Fourier, *Bulletin van de Russische Academie van Wetenschappen* 63(8) (1993), 743–746].

- 9 J.J. O'Connor en E.F. Robertson, Jean Baptiste Joseph Fourier, *MacTutor History of Mathematics*, University of St Andrews, Scotland, 1997.
- 10 A. Zamoyski, *Napoleon. The Man behind the Myth*, William Collins, 2018.

Olga Mula

Mathematics and Computer Science
Eindhoven University of Technology
o.mula@tue.nl

Column New Impulse

From Paris to Eindhoven

In this column, researchers who have been recently appointed to one of the Dutch mathematics institutes, introduce themselves.

“When a girl is tired of Paris, she must be tired of life.” That is what a fellow colleague said to me when he learnt that, after having spent the last fourteen years in Paris, I had decided to leave and relocate to Eindhoven. That was hard to hear but in a certain sense he was right. I was tired. But not of life! Only of a certain way of life, and a way of working.

My name is Olga Mula. I have been an Associate Professor of Applied Mathematics at TU Eindhoven for a year. I lead a group on Data-Driven Computational Science, and we do research on inverse problems, reduced order modelling, numerical optimal transport, and the mathematical foundations of artificial intelligence. In this note, I will not speak that much about my research but I will rather talk about my background, and why I decided to move from Paris to Eindhoven without any prior connection to the Netherlands.

I originally come from Spain, and I grew up as a very happy girl in the suburbs of Madrid. As a little child, my dream job evolved quickly from supermarket cashier (because little children are very materialistic, and cashiers are the ones that really handle money), magician (because they can produce anything, including money), astronaut, architect, and I very quickly converged to wanting to become a researcher in something connected to cutting-edge science.

I feel that I was put in a good track to become a scientist since a very young age. I do not come from a scientific family but my parents cared very much about my education. They did not want to send me to the shady public school next to my neighborhood which is often in the local news because of constant

social and drug-related problems. Thanks to my parents' caring, and also thanks to good luck, I was accepted at Lycée Français de Madrid when I was five years old. This is a private bilingual French school which had a very good reputation. I will be forever grateful to my parents for making me a bilingual person at such an early age. I enjoyed very much studying at Lycée Français, and I stayed there until I joined the Polytechnic University of Madrid to study energy engineering. There, I quickly realized that I preferred the French way of teaching, and that I was also more interested in the mathematical foundations of engineering, rather than engineering itself. So, to enhance my profile in applied mathematics, I joined École Polytechnique in Paris for a double degree. I arrived there in 2007, and graduated in 2010. I never came back to Spain to work. In fact, exactly at the time of



my graduation, Spain was hit by several terrible storms: the international financial crisis, a national reform of the labor market promoting short-term employment and early retirements, and a very questionable re-structuring of universities. As a result, it was almost impossible to find any interesting jobs in the Spanish industry or academia at that time. Our generation either went abroad, stayed unemployed, or accepted to take uninteresting, underpaid jobs.

On my side, I received a good offer to pursue an interesting PhD at the Laboratoire Jacques-Louis Lions, the famous applied mathematics department of Sorbonne University. The PhD was on topics revolving around time domain decomposition for kinetic problems, and inverse state estimation with reduced order models. After a one-year postdoc at RWTH Aachen, I returned to Paris to take a position at Paris Dauphine University in 2015. The position, called *Maître de Conférences*, is roughly equivalent to an Assistant or an Associate Professorship in other countries. It has the tremendous advantage of providing job security at an early academic stage because it is permanent after only one year of probation period. At Dauphine, I had the chance to develop as a young professor, with my own line of research, and a lot of opportunities to collaborate with outstanding colleagues from the Parisian ecosystem. The research activities, and interactions were absolutely extraordinary. Still, many aspects beyond research were unfortunately not as optimal, and I started to feel increasingly annoyed by them.

The first point is that living in Paris itself for a long time can become exhausting: bad and expensive housing, long commutes to go to work, frequent strikes and demonstrations of all sorts are part of the every-day life. One eventually wakes up wondering what is going to be the problem of the day that may drain your energy. The covid pandemic was also not very easy to experience in Paris, being locked down in a small apartment. The second point of disappointment came from the French academic system itself, and here I am going to give a very personal point of view of the situation. Unfortunately, salaries are currently low because they have not been properly updated in the last fifteen or twenty years. The salary evolution during a professor's career does not progress very quickly either. One of the elements that was making the job still appealing was the relatively good retirement plan. This is however being revisited by the government, and the expected outcome is of a substantial degradation. At some point, it became clear to me that the financial conditions were never going to allow to buy a decent

apartment in Paris, nor to expect a good retirement. The last problematic point is connected to the topic of work load. In disciplines such as applied mathematics and computer science, we were facing an increasing demand while we were not receiving enough reinforcement in staff numbers. This is combined to the fact that teaching duties are unequally distributed because the French academic ecosystem has plenty of different statuses. As a result, some colleagues were enduring heavy teaching hours. Some of them were clearly overworked. Since promotions are still rather based on research accomplishments, this point felt disturbing since it leads to certain competitive advantages/disadvantages depending on your respective position. I did not feel that *Maîtres de Conférences* were in a great position in this respect.

Tired of living in a too hectic, crowded city, and tired of an academic system that, in my view, desperately needs more financial influx and some internal renovations, I decided to look for positions beyond France. The Netherlands and Eindhoven appeared as a very appealing option. The Brabant region is extremely dynamic, and very technologically oriented. Eindhoven is a much more manageable city in its size than Paris, and I love being able to bike everywhere safely.

The academic system seems somehow less heterogeneous in terms of organization, the type of positions that exist, and the career evolution of staff. I also see a lot of conscience about having a realistic workload, and there seem to be very concrete actions taking place to work on this problem. Academic salaries are also better aligned with respect to the current cost of life, and the responsibilities carried by professors. Not everything is perfect, though! I am often surprised to see the extent to which connections with industry influence how universities are thought, and run. I am also still adjusting to the way of understanding teaching here, which I find different with respect to the one that I had been in contact so far. I also must admit that I miss the beauty of the Parisian architecture, and I also miss my friends and colleagues from there. Despite this, being in the Dutch system is being a great experience all in all, and I have found many interesting colleagues doing great research and inspiring teaching. Thank you all for the very warm welcome to the Dutch system!

Personal research page: www.olgamula.com
Group's page: www.datadriven-sci.com

Sebastian van Strien

Department of Mathematics, Faculty of Natural Sciences
Imperial College London
s.van-strien@imperial.ac.uk

Edson de Faria

Instituto de Matemática e Estatística
Universidade de São Paulo
edson@ime.usp.br

Event Abel Prize 2022

Dennis Sullivan is awarded the 2022 Abel Prize

Last year, the King of Norway awarded the ‘Abelprisen’ to Dennis Sullivan, who is most famous for his remarkable work on topology and dynamical systems. One of the hallmarks of Dennis’ works is his emphasis on geometric structures, and his ability to see and exploit connections between a wide range of areas in mathematics. In this short note Sebastian van Strien and Edson de Faria look back on his career.

Dennis Sullivan was born in 1941 in Michigan, but grew up in Houston Texas where he stayed to study chemistry at Rice University. Although he always liked mathematics, he once told us that he initially did not know it was possible to have a career in mathematics. But in 1963 he did graduate in mathematics. Three years later he defended his PhD thesis *Triangulating Homotopy Equivalences* at Princeton. His 1967 paper on the Hauptvermutung, an important conjecture in geometric topology, led to his 1971 Veblen Prize by the American Mathematical Society.

In 1974 Dennis gave a plenary talk at the International Congress of Mathematicians in Vancouver, and became a permanent member of the Institut des Hautes Études Scientifiques (IHÉS) in Paris. In 1981, Dennis became the Albert Einstein Chair in Science (Mathematics) at the Graduate Center, City University of New York, and reduced his duties at the IHES to a halftime appointment. In 1996 Dennis joined the

mathematics faculty at Stony Brook University, where he is to this day.

Dennis has made huge contributions to a diverse range of topics in mathematics,

often changing the focus of these fields entirely. His early work on geometric topology led to the creation of rational homotopy theory and his proof of the famous *Hauptvermutung*. In the late 1970’s Dennis started focussing on the study of Kleinian groups. In the 1980’s Dennis switched to the field of dynamical systems, proving a remarkable theory that rational maps do not have wandering domains and also giving a proof of Feigenbaum–Coullet–Tresser Renormalisation conjectures. He also had major contributions to string topology.

Rather than giving a summary of these mathematical achievements, for the remainder of this short note let us focus on the remarkable way Dennis influenced mathematicians through his outgoing personality. (Here we use the introductory section of our chapter on Dennis’ contributions in dynamical systems for the fourth volume in a book series on the Abel Prize Laureates.)

Influencing other mathematicians

Both while at IHES and at CUNY, Dennis had an office which came with an anteroom. Our impression is that he would spend most of his time in this anteroom, talking about mathematics with whoever



Dennis Sullivan

Photo: abelprize.org / Peter Bagde, Typo1



Dennis Parnell Sullivan, 2022 Abel Prize laureate

Photo: abelprize.org / John Griffin, Stony Brook University

he had invited or whoever was around. Quite often while listening to somebody, he would end up giving a new spin or a new interpretation to what they had been saying. Similarly, he would explain what he was working on, trying out new ideas, and also often explaining results of others. Spending time with him was always an incredible experience.

In this spirit, Dennis explained much of his work on renormalisation to Wellington de Melo. In turn, Wellington would then try to explain what he had heard and learned to SvS. When he could not convince SvS of some argument, Wellington would go back to Dennis and this process would repeat again, sometimes many times. This is how the final chapter of the book *One Dimensional Dynamics* of SvS with Wellington de Melo came into being. This chapter con-

tains a full exposition of Dennis' remarkable renormalisation theory, arguably the only place in which it was published.

During talks, Dennis often asked questions not necessarily to know the answer himself, but because he knew that somebody else in the audience would find the answer helpful. In this way, Dennis took on the role of introducing two people to each other. His presence in the audience would usually make a talk much more accessible and interesting. His questions would often clarify connections that would have remained implicit otherwise.

When Dennis invented or learned about a new mathematical idea, he would push this idea to the limit. For him it was very important to understand what this idea would give, and equally important to find out what the limitations of this idea might

be. Moreover, whenever possible, he liked to associate names to arguments such as the *dollar argument*, *smallest interval argument* or the *non-coiling argument* in order to synthesise a complex proof into its core ideas.

Often he mentioned that to understand a proof properly, you should treat it like a three dimensional object. You should not only look at it from one side, but from all sides. So in this sense, in his view, a proof was about mathematical understanding rather than about 'killing' a theorem.

Indeed, Dennis' interest in a result might not necessarily be in the power of the statement per se, but in the tools that are used in the proof of this result. Once he understands the tools and ideas, then he probably can recover the statement of the results by himself. ◀

Francesca Arici

Mathematisch Instituut
Universiteit Leiden
f.arici@math.leidenuniv.nl

Clara Stegehuis

Faculteit EWI
Universiteit Twente
c.steghuis@utwente.nl

Proof by example Portraits of women in Dutch mathematics

Diletta Martinelli

Diletta Martinelli is an assistant professor in mathematics and MacGillavry Fellow at the Korteweg-de Vries Institute for Mathematics at the University of Amsterdam, working on algebraic geometry. It is not the first time that she crosses paths with the Nieuw Archief voor Wiskunde: in June 2021 she wrote an article about her experience teaching mathematics in Africa, and in September 2022 the NAW published the interview with Shanti Venetiaan she conducted together with Džemila Šero.

Let's start from the beginning. What was it that got you interested in maths in the first place?

“When I was at secondary school, I didn't really have an idea of what I wanted to do with my life. I was quite unsure. I was changing my mind every day. Then one day I was at a popular science lecture with the title ‘The job of a geometer’: It was about non-Euclidean geometries and I found it very fascinating. I think from the beginning it was really a love of geometry, not necessarily of mathematics as a whole, that motivated me.

I was not really into mathematical games and puzzles. It was really more the idea of abstraction, the fact that you could use the power of your mind to describe spaces that you could not even see in your daily life, that attracted me to the discipline. Strangely enough, this professor turned out to be in my research community. I ran into him again many years later and told him: ‘You convinced me!’”

Speaking of geometry, your field is called birational geometry. Can you tell us more about it?

“The idea is common in geometry: you look at geometric shapes, in this case algebraic varieties, and try to classify them. What we are trying to do is understand when algebraic varieties are similar enough that you can think of them as equivalent. It has taken mathematicians a long time to work out what the right notion of equivalence is in this context. The

real question is: ‘How strict do we want to be, do we want to allow for some flexibility?’ Roughly speaking, two varieties are birational if they differ only in something of lower dimension. The whole idea of the subject is given by this equivalence, and this word ‘birational’ comes from the fact that this equivalence is implemented by rational functions instead of polynomials.

As I said, the whole idea is to arrive at a meaningful classification of our geometric shapes and to try to understand the building blocks from which you can then reconstruct any other shape.”

And now you are teaching this very subject in the MasterMath programme. How have you found teaching so far?

“I was really happy when I started as an Assistant Professor because I could explore the other side of our job, not just research, but being part of a department and interacting with students. I like the human side of our job, when you go to work and you see some real faces and you try to communicate what excited you as a student. Especially when I get to teach geometry courses and I can try to share my passion for the subject and try to communicate it to the students. Besides, it's always fascinating to see how much you learn when you teach a course, you always get new interesting questions... I always get to the end and think ‘Now I really get it!’ It's always a good learning experience for me.”



Diletta Martinelli



Some slices of Fano varieties, one of the building block in the classification of geometric shapes.

You took up your new post just before the outbreak of the pandemic. That must have been challenging...

"It was. I had negotiated no teaching for the first term, I had travelled to a couple of conferences and spent almost a month in Africa... I had put a lot of things off until the spring. Then, suddenly, there was a new word that we were all trying to find our way around. I didn't know any Dutch and, to be fair, it wasn't exactly the right time to learn a new language because I didn't get to meet anyone.

I really had the feeling that I was living in a bubble. It was really hard to connect with the city, and besides, it was recommended not to meet people. Sometimes I had meetings with some of my colleagues outside, in a park, and luckily my partner joined me in March 2020, so at least we were together. Looking back, I think it was a humbling experience for everyone."

Are there any mathematical results that you are particularly proud of?

"I think I am most proud of the project that came out of my PhD. It is a single-authored publication and what makes it special is really the personal value. For me, it was the first time I could identify with a problem. It took me a long time to find the solution, and in the end I felt that I had produced a mathematical theorem, something that really belonged to me in the mathematical landscape. Having said that, I am a person who tends to do a lot of work in collaborative projects. I am so happy that we are now starting to organise face-to-face meetings again. To be physically together, in front

of the blackboard, thinking about the same problem... I missed that during the pandemic."

And is there anything about your job that you do not like?

"The competitiveness of the academic system, this idea that your colleagues become your direct competitors. I really don't like this idea of constantly comparing yourself with other people, checking who's publishing more, who's publishing better, and trying to reduce something as complex as research in mathematics to numbers and bibliographic indices. I think that's almost against what good research should be, and it puts people under great stress. I see it in myself, but also in many other colleagues. I am not happy about the general trend I see in academia. It's something that's hard to fight as an individual. I know that there is — I think — a widespread discussion about it, so I know that a lot of people are trying to move in the right direction. But it's something that worries me. I hope that as a community we can make it better..."

Community is a theme that pervades your interview with Shanti Venetiaan for this column...

"Interviewing Shanti Venetiaan was really amazing: it was really impressive to learn from her experience.

When she came back to Suriname, there was no department of mathematics, and she just created it all on her own. For me that is such an incredible achievement, to be able to do so much for your mathematical community in your country. She is so passionate about mathematics, about strengthening the community, and it has been great to learn from such a different experience.

Džemila and I asked her about the gender balance in mathematics in Suriname, and she told us that, given that the community is at such an early stage, there are not yet any bad stereotypes associated with women. I think it would be really fascinating to see how this turns out in a few years..., maybe it could be an experiment when one can really try to start a mathematical community without stereotypes."

Continuing with the theme of community building, can you tell us more about your experience of teaching in Africa?

"During my PhD I started looking for opportunities to teach or do something with mathematics that had a bit of social impact. I was really lucky because there was a professor in my research community who was involved in a lot of activities in Africa. We once were at a conference together and during the coffee break I approached him and asked how I could get involved. So it was quite easy to start, having him as a contact.

He told me where I could go and teach: that was in 2018: I went to Cape Town to teach at one of the AIMS centres. After that, we organised a workshop in Kenya, and I really enjoyed the experience, it was very rewarding, and it was really nice to also kind of expand my community of students, to meet students who had very different life experiences and connect with them through mathematics. That was really something that I enjoyed a lot. So I kept looking for similar opportunities. During the workshop in Kenya I met the academic director of another institute in Cameroon, where I went in early 2020... I really enjoy this part of the work, and so I decided to look for more opportunities in this direction."



Diletta with some of her students at the end of the course, AIMS Cameroon, January 2020.

Klaas Lakeman

Ars et Mathesis

nt.lakeman@hccnet.nl

In Memoriam Hans de Rijk (1926–2021)

Nescius omnium curiosus sum

Ik weet weinig maar ben nieuwsgierig naar alles

Op 23 november 2021 overleed Hans de Rijk, erelid van het KWG en binnen wiskundekringen beter bekend als Bruno Ernst, een van zijn pseudoniemen. Hij was iemand die wanneer hij zelf ergens enthousiast voor was, anderen daar haast dwangmatig deelgenoot van moest maken. Vooral door er over te schrijven. En er waren heel wat wiskundige, natuurkundige en andere onderwerpen waar Hans voortkomend uit verwondering en nieuwsgierigheid enthousiast voor werd. Jarenlang vormde hij de drijvende kracht achter het tijdschrift *Pythagoras* en hij was initiator en medeoprichter van de Stichting Ars et Mathesis, 'Kunst en Wiskunde'. In dit artikel belicht Klaas Lakeman zijn wiskunde en wiskunstige kanten.

Al op 19-jarige leeftijd stond Hans de Rijk als onderwijzer voor de klas. Als Broeder Erich trad hij in bij een kloosterorde die zich toelegde op onderwijs. Zijn oorspronkelijke passie was natuurkunde, maar het bestuur van de kloosterorde dicteerde dat het handelswetenschappen en schrijven moest worden, omdat daar behoefte aan leerkrachten was. Later mocht hij overstappen naar wiskunde. Vooral door zelfstudie bekwaamde hij zich in natuurkunde, sterrenkunde, wiskunde en alles wat zijn interesse had. Dat zou hij ook zijn hele leven hartstochtelijk blijven doen. In 1967 verliet hij de kloosterorde en was dus Broeder Erich af. Hij trad in het huwelijk, kreeg twee dochters, scheidde en vond een nieuwe levenspartner. Na veel omzwervingen langs diverse onderwijsinstellingen eindigde Hans als leraar natuurkunde aan het Stedelijk Gymnasium te Utrecht.

Pythagoras

Als Bruno Ernst was Hans jarenlang de drijvende kracht achter *Pythagoras*, wiskunde-

tijdschrift voor jongeren. De ontstaansgeschiedenis van Pythagoras en de rol van Bruno Ernst daarbij is in 2018 door Martinus van Hoon en Jan Guichelaar uitvoerig in drie achtereenvolgende afleveringen van het *Nieuw Archief voor Wiskunde* beschre-



Hans de Rijk

ven. Vooral in de eerste jaren van Pythagoras toonde Hans zich een geweldig popularisator van de wiskunde. In feite voerde hij een persoonlijke ontdekkingstocht uit in de wereld van de wiskunde en wist daar al populariserend boeiend over te schrijven. Menigeen zal hij daarmee enthousiast voor de wiskunde hebben gemaakt.

M. C. Escher

Midden jaren vijftig leerde Hans — toen nog Broeder Erich — M. C. Escher kennen. Dat verliep door bemiddeling van Ir. Albert Ernst Bosman, de overbuurman van Escher, met wie Hans bevriend was. Die kennis-making zou uiteindelijk van grote invloed worden op zijn verdere leven. Escher en Hans raakten goed bevriend. Ze corresponderden en spraken veel over Eschers werk. Hans publiceerde daar onder andere in Pythagoras over en verzorgde lezingen. Toen eind jaren zestig Eschers gezondheid achteruitging besloten ze om alle prenten en voorontwerpen door te nemen om zo het ontstaan en de bedoeling ervan vast te leggen. Vanaf drie jaar voor zijn dood bezocht Hans Escher daartoe iedere zondagmiddag. Dat zou uitmonden in het gezaghebbende boek *De toverspiegel van M. C. Escher*, waarin het werk uitvoerig en goed gedocumenteerd is. Escher heeft de hele tekst nog kunnen lezen en corrigeren, maar mocht de uitgave daarvan in 1976 helaas niet meer meemaken.

Wereldfaam

De toverspiegel bezorgde Bruno Ernst wereldfaam als de Escherkenner bij uitstek. Hoewel andere beter geschoolde wiskundigen dieper op de wiskundige achtergronden van Eschers prenten — vooral de vlakverdelingen — in konden gaan, had Bruno Ernst daarentegen alle informatie uit de eerste hand. In het boek maakte hij de lezer deelgenoot van de ontdekkingsstocht door de interactieve wereld tussen kunst en wiskunde die Escher en hij gezamenlijk aan de hand van Eschers prenten ondernamen.

De toverspiegel van M.C. Escher is in meer dan 16 talen vertaald. Het wordt wereldwijd nog steeds herdrukt en geldt heden ten dage ook nog als het standaardwerk over de kunst van Escher.

Dat Bruno Ernst gezaghebbend en populair was bij Escherkenners blijkt uit een anekdote die Ars et Mathesis-secretaris Hans Kuiper optekende. Ter gelegenheid van de honderdste geboortedag van M.C. Escher was in 1998 in Rome een internationaal congres. Uiteraard was Bruno Ernst daar een van de belangrijkste gasten. Bij een diner ter afsluiting van dat congres zat Hans Kuiper aan een tafeltje naast dat van Hans en zijn vrouw Leny. Zo zag hij dat er telkens congresgangers langskwamen om samen met Bruno Ernst op de foto te gaan. Die liet zich dat maar al te graag welgevalen en genoot er zichtbaar van.

Persoonlijke kennismaking

Persoonlijk maakte ik eind 1982 kennis met Hans de Rijk. In een poging het blad *Pythagoras* een nieuwe boost te geven had Uitgeverij Wolters-Noordhoff een oproep gedaan voor aanvulling van de redactie. Zo belandde ik met nog enkele redacteurs in spe als beoogd eindredacteur bij een eerste redactievergadering ter voorbereiding van de drieëntwintigste jaargang. Uiteraard was Bruno Ernst ook aanwezig. Die stelde zich echter voor als Hans de Rijk. Dat zorgde bij ons nieuwelingen aanvankelijk wel voor enige verwarring.

Dat wij echter niet de enigen geweest zijn die dat overkwam, bleek na Hans' overlijden. Toen vernam ik dat Hans ooit eens vertelde over een bewonderaar van Bruno Ernst die hem wees op een zekere De Rijk, die ook heel wat van Escher afwist.

Op de betreffende redactievergadering liet Hans zich niet onbetuigd. Hij adviseerde hoe wij als aankomende redacteurs vernieuwend te werk konden gaan. Zelf zou hij er zich niet al te veel mee bemoeien, maar wel af en toe een bijdrage leveren.

In die tijd was hij net met pensioen, wat inhield dat hij gebruik had gemaakt van een riante regeling voor docenten van 55 jaar en ouder die plaatsmaakten voor een jongere docent die moeilijk aan de slag kon komen. Hoe onwezenlijk klinkt dat nu in tijden van een grote vraag naar docen-

ten! Wat hij met zijn net verworven vrije tijd ging doen werd spoedig duidelijk.

Oprichting Ars et Mathesis

Bij een volgende redactievergadering liet Hans terloops vallen dat hij van plan was iets met kunst en wiskunde te gaan doen. Op zijn vraag liet ik met enige schroom weten daar ook belangstelling voor te hebben. Enige weken daarna ontving ik een uitnodiging voor een bijeenkomst met een paar geïnteresseerden in kunst en wiskunde. Zo belandde ik met Hans, professor Van der Blij en Ed de Moor in het kantoor van Wim Veldhuysen, toen nog van Cordon-Grey Advertising in Baarn. Al snel bleek dat Hans vastomlijnde plannen en ideeën had. Eigenlijk had hij maar één stip op zijn horizon: het in leven roepen van een stichting ten einde een internationale tentoonstelling te organiseren over 'Onmogelijke Figuren' (afgekort OF). Wat de op te richten stichting ook zou ondernemen op het gebied van kunst en wiskunde was hem prima, maar linksom of rechtsom, die tentoonstelling moest en zou er komen. Daar was hij niet van af te brengen. Hans ging zich daar volledig voor inzetten.

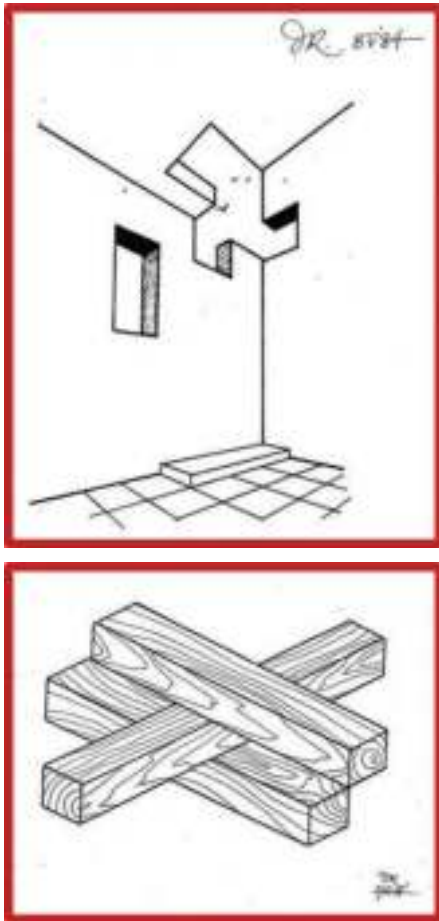
Na wat voorbereidende bijeenkomsten was het eind 1983 zover. Op 16 december 1983 passeerden de statuten van de Stichting Ars et Mathesis de notaris. Een dag daarna was de eerste officiële vergadering van het bestuur onder voorzitterschap van Frederik van der Blij. Hans was secretaris en mij werd de rol van penningmeester toebedeeld.

Sturende kracht

Die eerste jaren van Ars et Mathesis beheerste de internationale tentoonstelling OF de agenda van elke bestuursvergadering. Geen wonder want als secretaris beschikte Hans over de nodige tijd, in tegenstelling tot de anderen die nog een reguliere baan hadden. Hij stelde de agenda op, maakte de notulen en wist zo de activiteiten van de jonge stichting aardig in de door hem gewenste richting te sturen. Elke agenda en elk verslag van een vergadering voorzag Hans van een door hem ontworpen en getekend onmogelijk figuurtje. Eerder had hij al een soort van manifest OF gemaakt met uitleg en veel door hem ontworpen en geschetste onmogelijke figuren. Al die tekeningetjes bij de agenda's en verslagen vormden daar een aanvulling op. Nadat ik hem daartoe had



Een van de spaarzame foto's waarop Escher en Bruno Ernst samen zijn te zien, uit 1972.



Voorbeelden van OF-schetsjes bij notulen van bestuursvergaderingen van de Stichting Ars en Mathesis

aangespoord leidde dat in het voorjaar van 1985 tot de populaire uitgave van *Avonturen met onmogelijke figuren* bij de nog jonge uitgeverij Aramith. Bedoeld als opwarmertje voor de komende grote tentoonstelling over OF.

Niet aflatende ijver

Die jaren werd mij duidelijk wat een werk Hans kon verzetten als hij eenmaal een doel voor ogen had. Hij correspondeerde met iedereen waarvan hij maar vermoedde enige belangstelling voor OF te hebben. Velen kende hij uit reacties op zijn *Toverspiegel*. Dat hielp enorm. Zo wist hij Meulenhoff/Landshoff, uitgever van de *Toverspiegel*, te interesseren voor een catalogus bij de komende tentoonstelling. Dat werd het door Bruno Ernst geschreven *Het begoochelde oog* met ondertitel *Onmogelijke en meerzinnige figuren*.

Pythagorasbomen

Ook bezocht hij talloze kunstenaars. Zo kwam hij op een gegeven moment in het atelier van de Belgische schilder Jos de

Mey (1928–2007). Daar ontdekte hij naast veel OF-werken, waar hij eigenlijk voor kwam, ook schilderijen gebaseerd op de bekende Pythagorasboom van ir. Albert Ernst Bosman (1891–1961). Daarop toonde De Mey hem een schetsboek met meer dan 300 getekende variaties op de Pythagorasboom. Slechts enkele daarvan had hij uitgewerkt tot schilderijen. Zo kwam het dat de beoogde tentoonstelling OF niet de eerste door Ars et Mathesis geïnitieerde tentoonstelling was. Dat werd in het najaar van 1985 een bescheiden tentoonstelling van een aantal geschilderde Pythagorasbomen van Jos de Mey in het Vlaams Cultureel Centrum/De Brakke Grond in de Nes te Amsterdam. Tegelijk verscheen van de hand van Bruno Ernst het begeleidende boekje *Bomen van Pythagoras, variaties van Jos de Mey* met onder andere bijdragen van Jos de Mey zelf, Van der Blij en ondergetekende.

Tentoonstelling OF

Ondertussen gingen de voorbereidingen voor de OF-tentoonstelling gestaag door. Hans kreeg toezeggingen voor subsidies en sponsoring los. Ook stelde hij op een dag de directeur van het toenmalige Utrechtse Museum voor Hedendaagse Kunst, Wouter Kotte, als nieuw bestuurslid voor. Die was bereid de tentoonstelling in zijn museum onder te brengen. Zo kon najaar van 1986 de 'Internationale Tentoonstelling Onmogelijke Figuren' plaatsvinden. Daarmee had Hans zijn doel bereikt!

De kritiek op Kotte binnen de museumwereld (Wat hebben OF met kunst te maken?), was te vergelijken met opmerkingen van wiskundigen en soms zelfs binnen het bestuur van Ars et Mathesis ("Wat hebben OF eigenlijk met wiskunde van doen?"). De term *Onmogelijke Figuren* is daardoor wat beladen geworden en uiteindelijk dekt de latere benaming *Optische Illusies* de lading beter.

Spin-offs

Wel of geen kunst, wel of niet wiskunde, feit is wel dat bij die tentoonstelling onbedoeld en soms toevallig een aantal dingen samenkwamen. Zo kwam Baas Becking met een ontwerp voor een gesloten model van een onmogelijke kuboïde, zeg maar het onmogelijke kratje van Escher. Koos Verhoeff (1927–2018) maakte de berekeningen om het geheel sluitend te krijgen, en Popke Bakker (1946–2020) voerde het

uit. Daarmee deed het dubbelverstek zijn intrede binnen Ars et Mathesis. Dat zou najaar 1992 leiden tot een tentoonstelling 'Wiskunstige Schoonheid' in Kasteel Groeneveld te Baarn met wiskunstig werk van onder anderen Popke Bakker en Koos Verhoeff. En uiteraard schreef Bruno Ernst in de vorm van een AO-boekje daar een soort van catalogus bij.

De bijdragen van Van der Blij en ondergetekende aan het boekje *Bomen van Pythagoras* hadden te maken met computertekeningen (toen nog in de kinderschoenen) en een verwijzing naar en toelichting op fractals. Zomer 1987 kon op voorpraak van Van der Blij de tentoonstelling 'Schoonheid in de chaos' vanuit Duitsland naar het Museum voor Hedendaagse Kunst worden gehaald. En dat zou via via weer leiden tot twee populaire publicaties van Hans Lauwerier: *Fractals, meetkundige figuren in eindeloze herhaling* (1987) en *Een wereld van Fractals* (1990).

Het zijn maar enkele voorbeelden van onderwerpen die in tegenstelling tot OF onmiskenbaar wiskundige verwantschap hebben, maar die er waarschijnlijk niet zouden zijn geweest zonder die allereerste aanzet van Hans de Rijk eind 1982.

Volhardend

Met het klimmen der jaren nam Hans meer en meer afstand tot Ars et Mathesis, deels vanwege zijn gezondheid. Hij droeg het secretariaat over, beperkte zich tot bijdragen aan het blad *Arthesis* en een enkele lezing op de jaarlijkse Ars et Mathesis-dag. En nog weer later tot de van 2002 tot en met 2016 onregelmatig op de website van Ars et Mathesis verschijnende Bruno's Columns. Toen in 2007 aan het blad *Arthesis* een einde kwam, opperde Hans na rijp be raad nog het idee voor de uitgifte van een jaarboek.

Hij sloeg echter geen enkele bestuursvergadering over. Dat kon ook moeilijk anders, want hij hoefde maar de lift van zijn flat zeventien hoog naar beneden te nemen en hij was op de inmiddels vaste vergaderlocatie in het nu niet meer bestaande Hotel Hoog Brabant. En altijd had hij weer buiten de agenda om allerlei vragen en anekdotes die hij kwijt moest. Vooral in de jaren tachtig en negentig toen Hans nog volop aan het graven was in de wondere wereld van de wiskunde, kwam hij vaak met allerlei vragen. Professor Van der Blij wist daar meestal direct een helder



Hans en zijn vrouw Leny bewonderen het cadeau dat Rinus Roelofs hem schonk bij zijn afscheid van Ars et Mathesis (juli 2015).

antwoord op. Hans was echter niet snel tevreden en liet zich al helemaal niet door het over bekende zogenoemde *Van-der-Blij-effect* uit het veld slaan. Gedreven door zijn niet aflatende nieuwsgierigheid kwam hij een volgende vergadering met nieuwe vragen. En echt tevreden was hij pas als hij naar zijn mening voldoende grip op het betreffende onderwerp had. Het was vaak een genot om zo'n vraag-en-antwoord-spel tussen die twee bij te wonen.

Afscheid en herinnering

Begin 2015 liet Hans weten dat hij op dokters advies zijn weliswaar nog spaarzame activiteiten voor Ars et Mathesis moest beëindigen. Zo was er dan op een warme juli-middag een laatste bestuursvergadering

met Hans in het bijzijn van zijn vrouw Leny en een enkele oud-bestuurslid. De agenda bevatte slechts één punt: afscheid van Hans de Rijk. We deelden herinneringen en gaven cadeautjes. Enkele dagen na deze gezellige vergadering lag bij mijn post een envelop waarvan ik de afzender direct herkende aan de gekalligrafeerde adressering in zwierige zwarte letters en de hoofdletters in rood. In de beginjaren van Ars et Mathesis toen er nog geen e-mail was en alles per post ging, ontving ik vele malen post met dit soort sierlijke adressering. En nu was dit voor de laatste keer. Het liet geen twijfel wie de afzender was: *dR, Stationsstraat, Utrecht*, zoals Hans dat altijd kort aangaf. Uiteraard ook in hetzelfde sierlijke, maar wat kleinere handschrift.



In 2008 ontving Bruno Ernst bij zijn 82ste verjaardag van de Amerikaanse Escher-verzamelaar Jeffrey Price een ingelijst ambigram (Escher-Ernst) dat hij speciaal door John Langdon had laten maken.

Naast een aandoenlijke bedankbrief stuurde Hans als herinnering aan zijn afscheid een stevige kopie van een prent die Escher nooit heeft gemaakt met een verwijzing naar Bruno's Column van maart 2012 ('Alleen het allerbeste is goed') op de site van Ars et Mathesis. Een fraaie bewerking door Bruno Ernst van Eschers prent *Boven en Onder* (1947) in gelimiteerde oplage zoals uit de signering bleek: *2/15 MCE/dR*. Hans was zeer onder de indruk van *Boven en Onder*. In de jaren vijftig hing de prent pontificaal in het lokaal waarin hij les gaf. Vragen over deze prent waren de aanleiding voor zijn eerste persoonlijke kennismaking met M.C. Escher. Uiteraard heeft Bruno Ernst deze prent uitvoerig beschreven in zijn *Toverspiegel*, inclusief enige voorstudies.

Niet stilzitten

Van helemaal niets doen wilde Hans echter niet weten. Zo publiceerde hij in 2016 met Walt van Ballegooijen die de tekeningen verzorgde, in eigen beheer de brochure *Een driehoek is meer dan drie hoeken*, waarmee een wondere wereld is te ontdekken door te tekenen. Een boekje speciaal geschreven voor mensen die een hekel aan wiskunde hebben en voor jongeren die nog nooit wiskundeles gehad hebben, zoals Hans dat in de inleiding schreef. Het kan voor hen de motivatie zijn om de nodige energie op te brengen om zich verder te verdiepen in de wiskunde, waar zoveel interessante dingen te beleven zijn, aldus Hans. In feite geeft hij hiermee aan hoe hij zelf steeds gemotiveerd was om zich verder te verdiepen in de wiskunde en te zien wat voor interessants er allemaal te beleven viel.

Overlijden

Op zijn verzoek om hem op de hoogte te houden leverden we de jaren daarna met een of twee bestuursleden het *Ars et Mathesis Jaarboek* persoonlijk bij Hans af. De laatste keer was dat in de winter van 2019. Daarna was het vanwege corona niet wenselijk meer.

In de loop van 2021 bouwden we aan de tentoonstelling 'Kunst en Wiskunde' in ons virtuele museum Tesseract. Daarin namen we ook een 'onmogelijk' object van Bruno Ernst op. Dat was een model van de driebalk van Penrose, dat ook het omslag van het door Harry Mulisch in 2000 geschreven boekenweekgeschenk siert. Ooit



Penrose 'onmogelijke' drie balk van sigarenkistjeshout waarvan een model in de tentoonstelling 'Kunst en Wiskunde' in het virtuele museum Tesseract is opgenomen.

had Hans, een verstokt roker, dat met restjes van sigarenkistjes in elkaar geknutseld en gefotografeerd. Eind november wilden we hem daarover bellen, maar kregen geen gehoor. Toen er na nog enkele pogingen contact was met zijn oudste dochter om te vragen wat er was, vernamen we dat Hans net enkele dagen daarvoor was overleden.

Veel eerbetoon

Helaas is er in de landelijke media, mogelijk vanwege de heersende corona, slechts summier aandacht besteed aan zijn overlijden. Gelukkig is Hans tijdens zijn leven genoeg eerbetoon ten deel gevallen.

Al in 1966 ontving hij een Zilveren Anjer van het Prins Bernhard Cultuurfonds vanwege zijn werk voor de Volkssterrenwacht Simon Stevin te Hoeven.

Op deze plaats niet onbelangrijk te vermelden dat hij in 2004 werd benoemd tot erelid van het Koninklijk Wiskundig Genootschap.

In het Leiden Observatory werd op 30 maart 2007 speciaal voor hem een symposium gehouden. Ter gelegenheid daarvan schonk professor Hendrik Lenstra hem een wiskundige bewerking van de litho *Prentententoonstelling* (1956). Eerder had Lenstra deze Escherprent uitvoerig ontleed en gevonden wat er achter de witte cirkel in het midden van de prent schuil moet gaan. Anders gezegd: Lenstra had het verdwijnpunt in *Prentententoonstelling* opgelost.

In 2008 won Hans de NWO Eurekaprijs voor het beste oeuvre op het gebied van wetenschapscommunicatie. Hij dankte die eer aan zijn verdiensten als wetenschapspopularisator, in het bijzonder wiskunde, natuurkunde en sterrenkunde.



Een trotse Hans de Rijk met de wiskundig bewerkte *Prentententoonstelling* die Hendrik Lenstra (staand op de achtergrond) hem schonk bij het symposium in maart 2007.

In 2013 voltooiden regisseurs Sopra Bouman en Emily de Klerk onder de titel *Een leven lang nieuwsgierig* een korte documentaire over het productieve leven van Hans de Rijk. Te midden van al wie hij tijdens zijn leven deelgenoot had gemaakt van zijn verwondering en nieuwsgierigheid zette hij de eerste vertoning in het Utrechtse Louis Hartloper Complex persoonlijk luister bij.

Geridderd

In 2008 bestond Ars et Mathesis 25 jaar en was zoals gebruikelijk op de derde zaterdag van november de jaarlijkse Ars et Mathesis-dag, ditmaal in de inmiddels verdwenen Paperdome in Utrecht-Leidse Rijn. Die dag was ook de hele familie De Rijk uitgenodigd. Op voorstel van toenmalig voorzitter Aad Dijkshoorn was Hans namelijk een koninklijke onderscheiding toegekend. Ten overstaan van familie en donateurs van Ars et Mathesis reikte de Utrechtse burgemeester Aleid Wolfsen de versierselen uit van Officier in de orde van Oranje Nassau.



Twee van de onmogelijke schaakborden

Na afloop werd in klein gezelschap met de burgemeester nog wat nagepraat. Hans gebruikte dit onderonsje om de burgemeester te vertellen dat met weinig moeite wat extra gedaan kon worden met de zwerfkeien in Utrecht. Nog geen jaar later was de structuur van vijf zwerfkeien afgevlakt en gepolijst en voorzien van een plaatje met informatie over de betreffende steen. Een idee hebben is één, het realiseren ervan is twee. Ook dit kreeg Hans weer voor elkaar!

Eigen museum

Hans kreeg van veel kunstenaars objecten en prenten, kocht het nodige en maakte zelf ook diverse modellen die verband hielden met zijn vele interesses. Toen de gelegenheid zich voordeed, kocht hij op de verdieping waar hij woonde nog een flat en richtte die als museum in. Daar werd alles uitgesteld wat hij om zich heen had verzameld. En uiteraard stonden daar ook zijn OF-modellen van sigarenkistjeshout. Zo bezat hij een aantrekkelijk privé-museum daar zeventien hoog boven het Utrechtse Hoog Catherijne!

Bij een bezoek aan Hans kreeg je al een voorproefje. Want beneden in de grote hal bij de lift hangt nog steeds de nodige wiskunst: veel mooie ingelijste foto's van onder andere zijn onmogelijke schaakborden en andere prenten. Ook weer zijn initiatief.

Afgelopen juli kwamen we daar nog eenmaal om te zien wat Hans middels zijn testament aan Ars et Mathesis had nagelaten. Zijn museum was toen al grotendeels onttakeld, want ook andere verenigingen en stichtingen waar hij bij betrokken is geweest, waren in zijn testament bedacht.

Wat nu nog resteert zijn de mooie kleurrijke herinneringen aan de vele jaren met hem deels bij Pythagoras, maar vooral bij Ars et Mathesis.

✦



Wieb Bosma

IMAPP
Radboud Universiteit Nijmegen
bosma@math.ru.nl

Stoffelijke resten tastbare herinneringen aan wiskundigen

Deense denkers

Een korte zomervakantie in Denemarken had ik uitgetrokken om resten van historische Deense natuurwetenschappers te traceren. Uit mijn hoofd kwam ik niet verder dan Tycho Brahe (zie hieronder) en de gebroeders Bohr (en ik herinnerde me de naam van Piet Hein uit het werk van Gardner), dus me beperken tot wiskundigen leek me niet veelbelovend. Maar het huiswerk vooraf leerde me vooral dat Tycho op veel plaatsen te vinden moest zijn, zoals Christiaan Huygens bij ons.



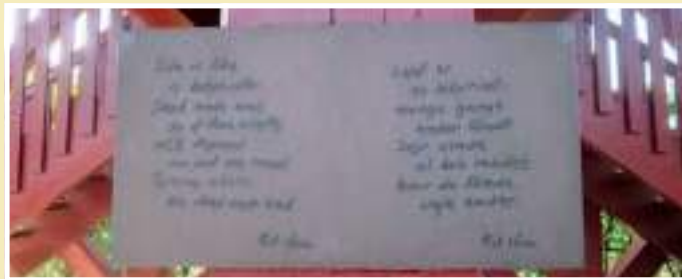
Egeskov: Op mijn weg naar hoofdstad Kopenhagen lagen twee plaatsen met verwijzingen naar Piet Hein (1905–1996). Hij was wiskundige, uitvinder en dichter (leuk voor deze rubriek: gebruikmakend van het pseudoniem Kumbel dat ‘grafsteen’ zou betekenen). Ik kende van hem de soma-kubus en de super-ellipsoïde. De eerste kent de lezer mogelijk wel als houten puzzel, waar een 3x3x3-kubus moet worden opgebouwd uit de 7 verschillende 3D-polyomino’s van 3 of 4 eenheidsblokjes. Volgens sommigen werd de puzzel bedacht door Piet Hein tijdens het luisteren naar kersverse Nobel-prijswinnaar Werner Heisenberg in 1933. Overigens zou hij Hex (door hem Polygon genoemd) bedacht hebben vlak voordat John Nash dat ook deed. In de eerste stopplaats Åbenrå is een versie van de door Hein ontworpen Helix-zonnewijzer te zien. De veranderende stand van de zon doet de schaduw verplaatsen over de helixvormige wijzerplaat. Het bijbehorende gedicht is in de door hem ontwikkelde en veel gebruikte vorm van de ‘Groek’.



Veel meer Piet Hein is te zien rond het museum-kasteel Egeskov op het grote eiland Fyn (Funen). Er staat een versie van de zonnewijzer in de door hem (met Prinses Alexandra van Sayn-Wittgenstein-Berleburg, die in het kasteel woont) ontworpen Zonnetuin. Een 'gouden' super-ellipsoïde is er ook te vinden. Deze ontstaat als omwentelingslichaam van een super-ellips, gegeven door $(x/a)^n + (y/b)^n = 1$, waar $n = 2$ de gewone ellips is en voor groter wordende n steeds meer een rechtehoek wordt benaderd.



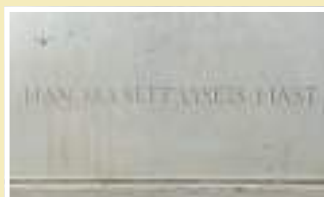
Een door Piet Hein ontworpen doolhof (van wilgen) vervangt het eeuwenoude beuken-doolhof dat de vele bezoekers niet meer kon verdragen. "Het doolhof is een oeroud universeel motief, in Egeskov heel specifiek vormgegeven. Zoals het leven zelf is het doolhof een plaats waar je in kunt verdwalen. Maar zoals het leven zelf, gaat het ook om concentreren op waar je heen wilt. Als je dat doet, vind je de weg naar het midden en de uitweg."

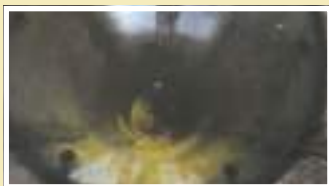


Kopenhagen: Door naar Kopenhagen, waar er twee nabij elkaar gelegen observatoria op mijn lijstje stonden. De prachtige 'Ronde Toren' (Rundtaarn), gebouwd (rond 1640) als combinatie voor een sterrenkundig observatorium (op de top, aangeprezen als oudste Europese functionerende sterrenwacht), bibliotheek (halverwege, nu tentoonstellingsruimte) en een Lutherse kerk onderin. Koning Christiaan IV zou zelf de rebus bovenin hebben geschetst, met een oproep aan God om hem de juiste ideeën in te fluisteren, in een mengeling van Latijn, Hebreeuws en symbolen, 'Doctrinam et justitiam dirige, Jehova, in Corde coronati regis Christiani Quarti'. De enige manier om de toren te beklimmen is om het stijgende, rondgaande pad te volgen, zeven en een halve keer rond.

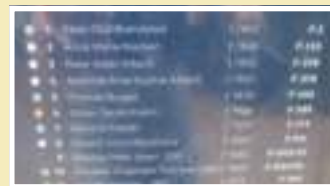


Vlak onder de top bevindt zich een beroemd planetarium van Ole Rømer. Rømer werkte jaren in Parijs, en berekende uit waarnemingen door hem en Cassini van overgangen van Io over Jupiter dat de lichtsnelheid eindig moest zijn. Huygens schijnt de eerste geweest te zijn die uit deze data in 1690 een waarde (van circa 212.000 km/s) bepaalde. Aan de bepaling van de eindige lichtsnelheid is de tekst op een postzegel en onderaan de grafsteen in de nabij gelegen kathedraal gewijd. Na terugkeer in Denemarken werd Rømer de Koninklijke Wiskundige. Oorspronkelijk kon het planetarium de kosmos volgens Tycho beschrijven, dat wil zeggen, met de aarde in het centrum, waaromheen de maan en de zon draaien, terwijl de andere planeten rond de zon draaien. Bij restauratie na een grote brand werd het Copernicaanse model, met de zon in het centrum, aangehouden. Er kwam ook een klok aandrijving. Oudere versies van aandrijving en achterplaat zijn op de zolder te zien.





In het midden van de Ronde Toren bevindt zich een holle schacht, nu afgedekt met glazen plaat omdat in de negentiende eeuw er een kind in is gevallen. Dit geeft symbolisch zicht op het 'nulpunt van Denemarken', het centrum van waaruit met driehoeksmeting Denemarken in kaart werd gebracht. Dat gebeurde onder leiding van Thomas Bugge (1740–1815). Bugge was een van de weinige wetenskundigen waarvoor ik online aanwijzingen voor een graf vond: dat moest op de Assistens Begraafplaats zijn (waar ook Kierkegaard en Hans Christiaan Andersen liggen). Ondanks de aanduidingen op het bord was het graf helaas niet te vinden.



Dat gold niet voor het opvallende (familie-)graf van Niels Bohr (1885–1962) en zijn wiskundige broer Harald (1887–1951) aldaar. De eerste kreeg een Nobelprijs voor de natuurkunde (in 1922) en zes kinderen met de zus van wiskundige Niels Erik Nørlund, waarvan de vierde in 1975 een gedeelde Nobelprijs ontving. Harald werkte aan Dirichletreeksen en speelde in het Deense voetbalelftal op de Olympische Spelen van Londen, 1908 (waar het Frankrijk met 12–1 versloeg). Niels kreeg ook een beeld in een buitengalerij gewijd aan wetenschappers, bij de kathedraal waar Rømer ligt. En later kwamen we nog een mooie buste tegen in Frederiksborg.



Aan de voet van de Ronde Toren het eerste beeld van Tycho Brahe (1546–1601), hoewel hij hier zelf natuurlijk nooit heeft kunnen zijn. Wel was zijn assistent Longomontanus (1562–1647) nauw betrokken bij het ontwerp. Nauwelijks een kilometer verderop, bij de botanische tuin, staat Tycho ten voeten uit bij het Observatorium.

Hven: Het absolute hoogtepunt voor Tycho-watchers moest nog komen: het eiland Hven, tussen Denemarken en Zweden gelegen in de Sont. Nu Zweeds grondgebied, destijds Deens (Ven), herbergde het kasteel Uranienborg. Tycho liet dit slot tussen 1576 en 1580 bouwen (naar ontwerp van een Vlaming, Hans van Steenwinkel), en werd er een soort aristocratische Heer over het eiland en de boeren en vissers die er woonden, als beschermeling van Koning Frederik II.



Tycho had faam verworven met zijn beschrijving van de geboorte van een nieuwe ster (De nova stella), door hem geobserveerd in 1572 en 1573. Het ging in feite om een supernova, en dus het explosieve einde van een ster. Het afgebeelde devies zegt zoiets als 'Macht noch weelde, doch slechts kunst en wetenschap zijn blijvend'.



Het slot werd tevens een soort onderzoeksinstituut met een stroom van buitenlandse bezoekers (waaronder Willem Blaeu, van wie de kaart is) waar Tycho met assistenten sterrenkundige waarnemingen deed. Omdat weer en vooral wind hem parten speelden, bouwde hij een ondergronds observatorium Stjerneborg.



Tycho raakte uit de gratie toen Christiaan IV aan de macht kwam, en omdat de lage afkomst van zijn vrouw verhinderde dat een van zijn acht kinderen hem als heerser over het eiland zou opvolgen, vertrok hij in 1597 met zijn gevolg en veel instrumenten om uiteindelijk bij Rudolf II in Praag te belanden, waar hij al in 1601 stierf.



In de voormalige kerk naast de kasteeltuin is sinds 2003 een prachtige tentoonstelling over leven en werk van Tycho en wetenschap in de 16e eeuw ingericht. Met ook een portret van zijn zus (tevens assistent), Sophie (1556–1643). De waarnemingen van Tycho (met het blote oog) waren ongekend uitgebreid en nauwkeurig. Hij kon met zijn wereldbeeld noch observaties het model van Copernicus, met planeten in cirkelbanen om de zon, verenigen, maar zag ook wel dat de planeten niet in cirkelbanen om de aarde draaien. In zijn model (en het planetarium dat Rømer maakte) draaien zon en maan om de aarde, en de overige planeten om de zon.



Uiteindelijk gaven de waarnemingen een assistent van hem, Johannes Kepler, het materiaal om te ontdekken dat de planeetbanen elliptisch zijn. Kasteel en sterrenwacht werden geheel vernietigd: de omtrekken van het slot zijn nu door hagen uitgebeeld, terwijl het observatorium is gereconstrueerd in 1951. Een van de (vijf) mythen die het museum tracht te ontzenuwen betreft de dood van Tycho, waarover onder meer beweerd wordt dat hij vergiftigd zou zijn, door de Deense koning, of door Kepler (omdat hij alle data van Tycho wilde hebben).



Op het eiland markeren, op afstanden op schaal, bordjes de toen bekende planeten.

Frederiksborg: Onze laatste stop was in Hillerød, ten noorden van Kopenhagen, weer terug op Sjaelland. We kwamen om het kasteel Frederiksborg en de kunst daarin te bekijken, maar vonden tot onze verrassing nog diverse objecten van interesse voor deze column.



Naast de buste van Bohr troffen we er ook een van de mij onbekende Poul la Cour (1846–1908) aan: fysisch, meteoroloog en uitvinder van onder meer vernieuwingen in de telegrafie en voor windmolens. Daarvoor had hij in Nederland bij Buijs Ballot inspiratie opgedaan. Ook hangt er een mooi portret van de beroemde fysisch Hans Christian Ørsted (1777–1851). Hij ontdekte dat elektrische stroom een magnetisch veld induceert (en naar hem is de eenheid van magnetische veldsterkte vernoemd).



De mooiste verrassing bestond uit twee (naar me later bleken) beroemde planetaria die hier staan opgesteld. De eerste is een 'hemelglobe van Gottorp', de Sphaera Copernicana, gemaakt rond 1655 voor hertog Frederik III van Sleeswijk door Andreas Bösch met hulp van de wiskundige Adam Olearius. Bijzonder is dat dit het heliocentrische model weergeeft (engelen houden het symbool van de planeet vast en draaien rond op de raderen in het midden, alleen de aarde heeft zelf weer een bol om zich waar de maan in draait); de grote bol geeft de sterrenbeelden weer. Het geheel wordt aangedreven via tandraderen onderin in verhoudingen die zorgen voor goed benaderende omlooptijden. Het tweede is in feite een tellurium, waarin de relatieve bewegingen van zon, aarde en maan worden weergegeven. Dit exemplaar uit 1651 werd door Nikolaus Siebenhaar gemaakt voor de (Lutherse) bisschop Johan X van Lübeck.



Ten slotte bleken ook hier verrassenderwijs nog twee portretten van Tycho te hangen, en een schilderij van het graf van Tycho in de Tynkerk in Praag, door Morten Jepsen. In 2010 werd dit graf van Tycho en zijn vrouw Kirsten geopend, onder andere om te onderzoeken of kwikvergiftiging kon worden vastgesteld. Een andere oude mythe was dat Tycho stierf aan een blaasinfektie opgelopen doordat hij bij een banket zijn plas te lang had opgehouden uit beleefdheid.

Dominique van den Bosch

Picasso Lyceum
Zoetermeer
d.vandenbosch@picasso-lyceum.nl

Onderwijs

Wiskundeangst: denk zelf nog een keer goed na

Op welke manier beïnvloeden wiskundedocenten de angst die leerlingen ervaren op de middelbare school als zij zich bezighouden met wiskunde? Deze vraag stond centraal in het afstudeeronderzoek aan de TU Delft van Dominique van den Bosch. Als eerstegraads docent wiskunde ziet zij dagelijks de omvang van wiskundeangst in haar klassen en ze maakt zich zorgen over de gevolgen. Ze onderzocht de rol van de wiskundedocenten bij de ontwikkeling van deze angst en heeft toekomstplannen om dit verder te onderzoeken onder begeleiding van Cor Kraaikamp en Annoesjka Cabo.

Ervaring in de klas

Sabine is een rustige leerling van mij uit een 5 vwo-klas die vaak het hoogste cijfer haalt voor wiskunde A. Ik geef haar al jaren les en ik heb de indruk dat ze zich op haar gemak voelt bij mij. Toch veroorzaakt ik tranen bij deze leerling op een middag dat ik haar lesgeef in kansrekening. Na de klassikale uitleg vraagt ze mij dichterbij te komen omdat de uitleg voor haar te snel gaat. Zoals altijd pak ik een stoel en ga ik, in alle rust, naast haar zitten en kijk ik haar vriendelijk en geduldig aan. Ze begint haar vraag te formuleren en toevallig weet ik al snel welke denkfout ze maakt. In de tijd dat zij haar vraag afrondt, bedenk ik een goede tactiek om dit onderwerp uit te leggen. Tijdens mijn studie heb ik geleerd dat ik leerlingen moet inspireren met de *groei-mindset*. Ik moet laten zien dat hun wiskundevaardigheden niet vastliggen (zoals verondersteld in de *vaste mindset*), maar dat ze die kunnen verbeteren door veel te oefenen. Op die manier zal een leerling zich meer richten op de leerdoelen van de opgaven in plaats van de prestatiedoelen. Deze leerdoelen zorgen ervoor dat ze een blokkade kunnen overbruggen met behulp van extra inspanning. Met deze informatie in mijn achterhoofd bedenk ik dat mijn hulp aan Sabine gering moet zijn en in de vorm van hints. Mijn doel is dat Sabine met veel inspanning bij het antwoord komt en dat ze ontdekt dat ze kan groeien in

haar wiskundevaardigheden. Deze didactische overwegingen hebben dit keer helaas niets goeds gebracht, want Sabine begint al snel te huilen. Ik word overspoeld door schuldgevoel en ik vraag mij af of de tranen komen door mijn gebrek aan subtiliteit of medeleven. Ze legt echter zelf uit dat ze altijd zenuwachtig wordt als ze vastloopt met een wiskundeopgave. Ze zegt: "Ik wil gewoon het antwoord weten mevrouw, anders raak ik gestrest." Ik vraag mij af of ik onnodig veel angst veroorzaakt met mijn tactiek. Als Sabine huilt van angst, kan zij ook niet profiteren van de hints die ik geef.

Wiskundeangst

De angst die Sabine weerhoudt om haar wiskundeopgaven te maken is niet onbekend voor mij als wiskundedocent. Veel leerlingen, studenten en zelfs mededocenten zie ik worstelen met wiskundeangst en ik begin langzaam de ernst van dit probleem te zien. Daarom duik ik de literatuur in en schets ik een kort beeld.

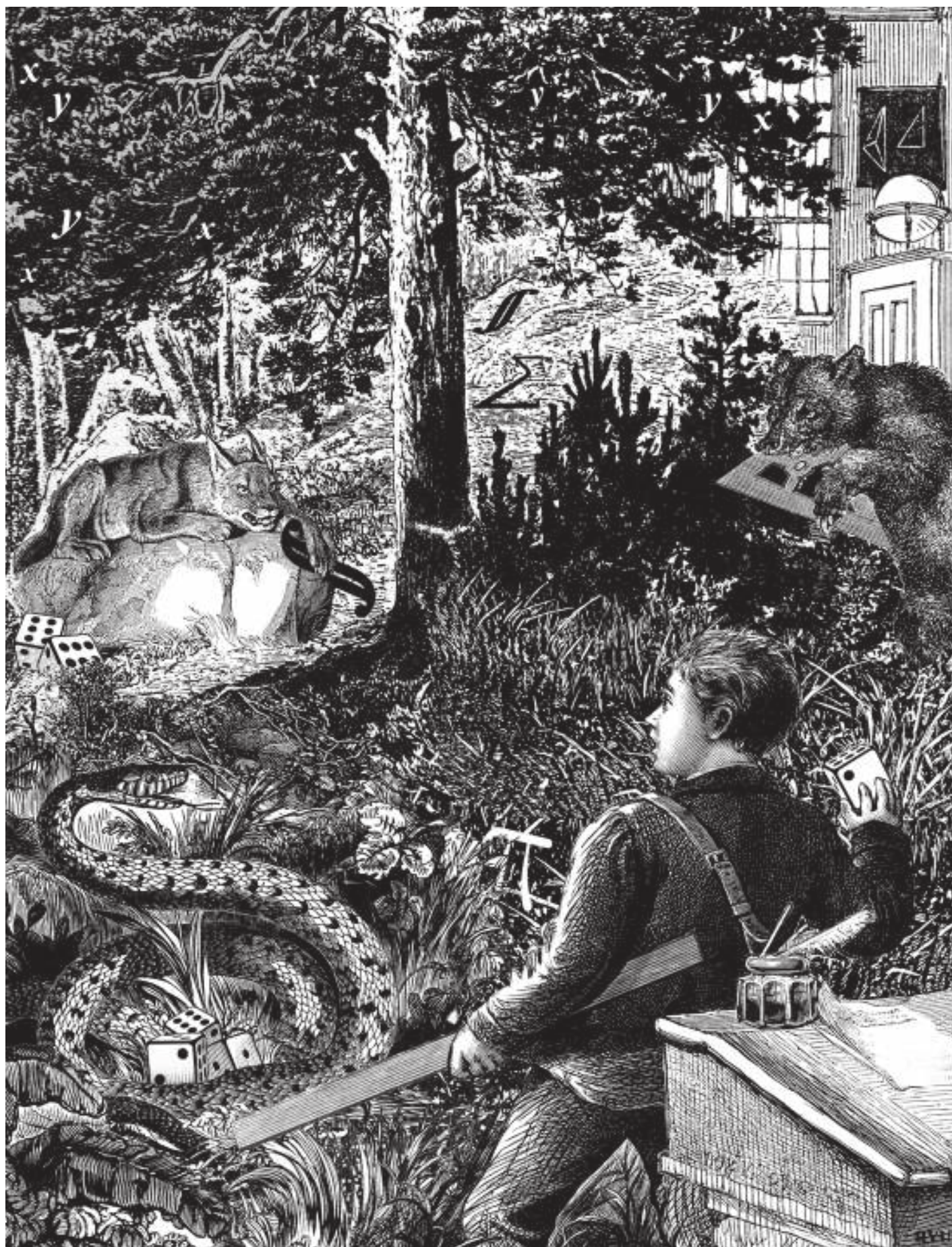
Er bestaan verschillende definities voor het begrip wiskundeangst, maar in [8] wordt een korte, maar krachtige definitie gegeven waarin beschreven wordt dat leerlingen met wiskundeangst negatief emotioneel reageren wanneer ze geconfronteerd worden met wiskunde, waarbij ze een duidelijk onderscheid maken tussen wiskundeangst en andere vormen van academische angst of examenvrees. In [3] wordt beredeneerd dat

leerlingen blokkeren tijdens een wiskundesom omdat hun werkgeheugen gevuld is met angsten en ten gevolge daarvan minder goed presteren. In een grootschalig onderzoek van Ray Hembree in 1990 [9] zijn vele correlaties gevonden rondom wiskundeangst en de oorzaken en gevolgen hiervan. Een van de correlaties laat zien dat hoge niveaus van wiskundeangst samen gaan met lage wiskundeprestaties, een correlatie die recentelijk is ondersteund in [14]. De beschreven wiskundeangst kan er volgens verschillende onderzoeken [1, 2, 9] ook voor zorgen dat leerlingen wiskunde ontwijken en zelfs hun toekomstplannen veranderen om zo weinig mogelijk wiskunde tegen te komen in hun carrière.

Factoren die een rol spelen

De gevolgen van wiskundeangst zijn blijkbaar groot en als wiskundedocent voel ik de verantwoordelijkheid om mij verder te verdiepen in de mogelijke oorzaken van het ontstaan hiervan. Een aantal persoonlijke factoren spelen een rol bij de ontwikkeling van wiskundeangst. Zo volgt uit [9, 11] dat leerlingen die een negatief beeld hebben over zichzelf ('self-concept') of over hun vermogen om een probleem op te lossen ('self-efficacy'), een hoger niveau van wiskundeangst ervaren. Daarnaast lijkt dat de veerkracht die iemand heeft om zich aan te passen aan nieuwe verwachtingen ('ego-resilience') een risicofactor kan zijn in de ontwikkeling van wiskundeangst, zoals beschreven in [5]. Ten slotte laat onderzoek [4, 9] zien dat er geen verschillen zijn tussen wiskundeprestaties van jongens en meisjes, maar dat de wiskundeangst hoger is bij meisjes dan bij jongens.

Bepaalde omgevingsfactoren spelen ook een rol in de ontwikkeling van wiskunde-



angst. In [12] wordt beschreven dat ouders die hun kinderen helpen met het huiswerk, hun eigen wiskundeangst kunnen overdragen aan hun kinderen. Een andere omgevingsfactor die een rol kan spelen is de cultuur waarin leerlingen opgroeien, wat bijvoorbeeld is onderzocht in [16]. In dit artikel wordt gesuggereerd dat in sommige culturen het gemiddelde niveau van wiskundeangst hoger ligt omdat de mensen minder vergevingsgezind zijn op het moment dat leerlingen fouten maken. Ten slotte spelen docenten een belangrijke rol bij de ontwikkeling van wiskundeangst, doordat zij onder andere hun eigen angst overdragen op leerlingen. In Figuur 1 is een overzicht weergegeven met de benoemde factoren.

Groeimindset van de docent

De rol van docenten in de ontwikkeling van wiskundeangst is op te delen in vele aspecten, waarbij we één factor in het gedrag van docenten verder bekijken: de mindset die ze overbrengen. De manier waarop docenten hun groeimindset of vaste mindset overdragen bij leerlingen, kan namelijk invloed hebben op de wiskundeangst bij leerlingen. Carol Dweck heeft breed onderzoek gedaan naar de invloeden van deze 'Growth mindset' en 'Fixed mindset' op leerlingen en studenten binnen het onderwijs. Ze beschrijft samen met David Yeager in [6,18] dat de groeimindset een geloof is dat persoonlijke karakteristieken, zoals intellectuele vaardigheden, kunnen groeien. De vaste mindset is volgens hen een geloof dat deze karakteristieken vast zijn en niet veranderd kunnen worden. Mensen met een groeimindset vinden het verbeteren van hun vaardigheden belangrijk en zien inspanning als

een hulpmiddel om deze verbetering waar te maken. Daarnaast leggen ze uit dat adolescenten die in de groeimindset geloven zich vaker vasthouden aan leerdoelen in plaats van prestatiedoelen. Volgens de definities in [7] streven adolescenten bij deze leerdoelen naar het verbeteren van hun vaardigheden, terwijl ze bij prestatiedoelen streven naar het bewijzen, valideren of documenteren van hun vaardigheden om positieve beoordelingen te behouden en negatieve beoordelingen te ontwijken. Als ze zich houden aan leerdoelen en vastlopen of falen, kiezen ze positieve strategieën die inspanning vereisen om zo hun doel alsnog te behalen. Adolescenten met een vaste mindset daarentegen vinden het verifiëren van hun vaardigheden heel belangrijk en associëren inspanning vaak met lage competentie. Adolescenten die geloven in de vaste mindset volgen prestatiedoelen in plaats van leerdoelen. Dweck beschrijft samen met Elaine Elliott-Moskwa [7] dat kinderen die zich vasthouden aan prestatiedoelen en zichzelf beschrijven als onbekwaam, hulpeloos op fouten reageren en snel opgeven. Data van verschillende onderzoeken [10,13,15,19] laat zien dat er positieve correlaties bestaan tussen het volgen van deze prestatiedoelen en wiskundeangst, terwijl vergelijkbare correlaties niet zijn gevonden tussen het aanhouden van leerdoelen en wiskundeangst.

In mijn eigen afstudeeronderzoek aan de TU Delft [17] naar de invloed van het gedrag van docenten op de wiskundeangst die leerlingen ervaren, heb ik ruim 900 leerlingen gevraagd een vragenlijst in te vullen. Het eerste deel van deze vragenlijst bestaat uit korte vragen om de algemene mate van wiskundeangst van leerlingen te meten en het laatste deel uit situaties

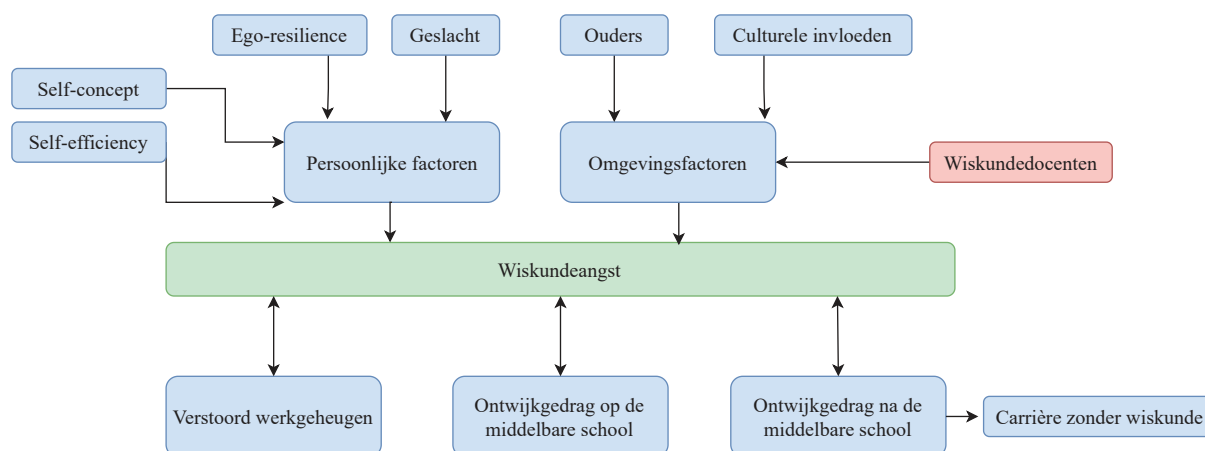
waarin een docent op drie verschillende manieren reageert. De leerlingen moesten aangeven hoeveel stress zij denken te ervaren op een schaal van 1 tot 7. Een voorbeeld van een situatie die leerlingen zich moesten inbeelden was het volgende.

In de wiskundeles maak je een makkelijke opgave en het lukt je niet. De docent ziet dit en loopt bij je langs.

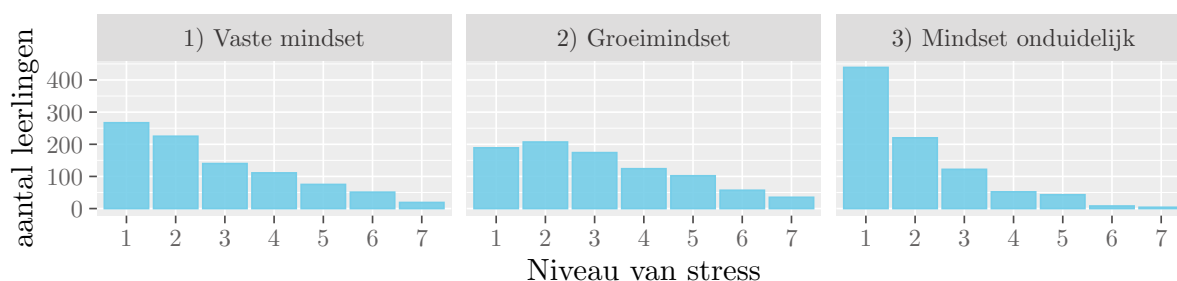
1. De docent zegt: "Het maakt niet uit, want voor sommige leerlingen blijft wiskunde moeilijk."
2. De docent zegt: "Denk zelf nog een keer goed na."
3. De docent schrijft de goede uitwerking van de opgave in je schrift.

In de eerste reactie toont de docent haar geloof in de vaste mindset, in de tweede reactie toont ze haar geloof in de groeimindset en in de laatste reactie is het onduidelijk of de docent gelooft in de vaste mindset of de groeimindset. Daarnaast geeft de docent weinig hulp in de tweede reactie om bij het antwoord te komen en veel hulp in de laatste reactie. In het histogram van Figuur 2 is te zien dat leerlingen aangeven dat ze verwachten de hoogste waarden van stress te ervaren bij de tweede reactie. Dit is opmerkelijk ten aanzien van de opvattingen van onder andere Dweck over de vaste mindset en de (indirecte) gevolgen die deze mindset kan hebben op de wiskundeangst van leerlingen.

Deze situatie vergelijkt echter niet alleen de groeimindset met de vaste mindset, maar ook de manier waarop de docent hulp aanbiedt. Verschillende bevindingen in mijn studie suggereren dat leerlingen in deze situatie vooral focussen op het feit dat ze een wiskundeopgave moeten maken zonder hulp van de docent in plaats



Figuur 1 Overzicht van wiskundeangst zoals beschreven hierboven, samen met de factoren die correleren met wiskundeangst.



Figuur 2 Situatie met betrekking tot de groeimindset en de vaste mindset ($n = 888$). De gemiddelden van de eerste, tweede en derde reactie zijn respectievelijk 2,70, 3,06 en 1,96.

van op het feit dat de docent lijkt te geloven dat de leerling deze opgave daadwerkelijk alleen kán maken. Een van deze bevindingen heeft te maken met de vergelijking tussen leerdoelen en prestatiedoelen. In deze situatie vertelt een docent wat zij met een werkblad vol met wiskundeopgaven gaat doen, zodra de leerlingen deze hebben ingeleverd. De docent geeft een cijfer, zet strepen door de fouten of schrijft hints naast de opgaven. Resultaten laten zien dat leerlingen verwachten de laagste waarden van stress te ervaren als de docent hints schrijft naast de opgaven. De docent benadrukt hier het leerdoel van de opgaven samen met haar geloof dat de leerling de opgave alsnog kan maken met hulp van de docent. Indirect laat zij haar geloof in de groeimindset zien op een manier waarbij ze ook hulp aanbiedt.

Naast deze bevinding, laat een andere bevinding ook zien dat leerlingen daadwerkelijk minder stress lijken te ervaren als de docent haar geloof in de groeimindset laat zien. De leerlingen beelden zich een situatie in waarin ze werken aan een wiskundeopgave en de docent reageert op fouten die zij hebben gemaakt. De docent benadrukt het leerdoel van het maken van een fout, legt het accent op de opgaven die foutloos zijn gemaakt of concludeert aan de hand van de fouten dat de leerling moeite heeft met wiskunde. Deze situatie laat de grootste verschillen zien binnen deze studie, waarin de leerlingen aangeven dat ze verwachten veel meer stress te ervaren bij de laatste situatie waarin de docent haar geloof in de vaste mindset laat zien.

Deze bevindingen gecombineerd met het uitgebreide onderzoek van onder an-

dere Dweck, brengt mij bij een van mijn conclusies in mijn afstudeeronderzoek. Leerlingen ervaren minder stress als de docent lijkt te geloven in de groeimindset, maar de hoeveelheid hulp die de docent geeft, is mogelijk een cruciale factor in het vermogen van leerlingen om ook echt deze lagere niveaus van stress te kunnen ervaren; zie ook [17].

In andere woorden, een leerling als Sabine zou best profijt kunnen hebben van mijn opvattingen over de groeimindset, maar ik moet er als docent eerst voor zorgen dat ik weet op welke manier ik hulp kan geven zonder dat ik Sabine extra angstig maak. Om deze reden is mijn onderzoek naar de rol van docenten in de ontwikkeling van wiskundeangst, nog niet afgerond en ga ik mij komende jaren buigen over dit probleem.

Referenties

- Mojeed Kolawole Akinsola, Adedeji Tella en Adeyinka Tella, Correlates of academic procrastination and mathematics achievement of university undergraduate students, *Eurasia Journal of Mathematics, Science & Technology Education* 3(4) (2007), 363–370.
- Mark H. Ashcraft, Math anxiety: Personal, educational, and cognitive consequences, *Current Directions in Psychological Science* 11(5) (2002), 181–185.
- Mark H. Ashcraft en Jeremy A. Krause, Working memory, math performance, and math anxiety, *Psychonomic Bulletin & Review* 14(2) (2007), 243–248.
- Amy Devine, Kayleigh Fawcett, Dénes Szűcs en Ann Dowker, Gender differences in mathematics anxiety and the relation to mathematics performance while controlling for test anxiety, *Behavioral and Brain Functions* 8(1) (2012), 33.
- Enrica Donolato, Enrico Toffalini, David Giofrè, Sara Caviola en Irene C. Mammarella, Going beyond mathematics anxiety in primary and middle school students: The role of ego-resiliency in mathematics, *Mind, Brain, and Education* 14(3) (2020), 255–266.
- Carol S. Dweck en David S. Yeager, Mindsets: A view from two eras, *Perspectives on Psychological Science* 14(3) (2019), 481–496.
- E.S. Elliott en C.S. Dweck, Goals: An approach to motivation and achievement, *Journal of Personality and Social Psychology*, 54(1) (1988), 5–12.
- Charlotte E. Hartwright, Chung Yen Looi, Francesco Sella, Alberto Inuggi, Flávia Heloísa Santos, Carmen González-Salinas, Jose M. García Santos, Roi Cohen Kadosh en Luis J. Fuentes, The neurocognitive architecture of individual differences in math anxiety in typical children, *Scientific Reports* 8 (2018).
- Ray Hembree, The nature, effects, and relief of mathematics anxiety, *Journal for Research in Mathematics Education* 21(1) (1990), 33–46.
- Shun Lau en Youyan Nie, Interplay between personal goals and classroom goal structures in predicting student outcomes: A multilevel analysis of person-context interactions, *Journal of Educational Psychology* 100(1) (2008), 15–29.
- Jihyun Lee, Universals and specifics of math self-concept, math self-efficacy, and math anxiety across 41 PISA 2003 participating countries, *Learning and Individual Differences* 19(3) (2009), 355–365.
- Erin A. Maloney, Gerardo Ramirez, Elizabeth A. Gunderson, Susan C. Levine en Sian L. Beilock, Intergenerational effects of parents' math anxiety on children's math achievement and anxiety, *Psychological Science* 26(9) (2015), 1480–1488.
- Michael J. Middleton en Carol Midgley, Avoiding the demonstration of lack of ability: An underexplored aspect of goal theory, *Journal of Educational Psychology* 89(4) (1997), 710–718.
- Jessica M. Namkung, Peng Peng en Xin Lin, The relation between mathematics anxiety and mathematics performance among school-aged students: A meta-analysis, *Review of Educational Research* 89(3) (2019), 459–496.
- Einar M Skaalvik, Self-enhancing and self-defeating ego orientation: Relations with task and avoidance orientation, achievement, *Self-Perceptions, and Anxiety* 89(1) (1997), 71–81.
- Lazar Stankov, Unforgiving Confucian culture: A breeding ground for high academic achievement, test anxiety and self-doubt?, *Learning and Individual Differences* 20(6) (2010), 555–563.
- Dominique van den Bosch, *Factors in the Behaviour of Mathematics Teachers that Influence Math Anxiety amongst High School Students*, Thesis, TU Delft, 2020.
- David S. Yeager en Carol S. Dweck, What can be learned from growth mindset controversies?, *American Psychologist* 75(9) (2020), 1269–1284.
- Akane Zusho, Paul R. Pintrich en Kai S. Cortina, Motives, goals, and adaptive patterns of performance in Asian American and Anglo American students, *Learning and Individual Differences* 15(2) (2005), 141–158.

Wijnand Steneker

Department of Mathematics and Statistics
UiT The Arctic University of Norway, Tromsø
wijnand.s.steneker@uit.no

Column Wiskundigen in den vreemde

Het hoge noorden

In deze rubriek doen wiskundigen verslag van hun ervaringen als wetenschapper in den vreemde. Wijnand Steneker verblijft in Tromsø, eerst als student en nu als promovendus.

Het hoge noorden van Noorwegen. Prachtige natuur met bergen, rivieren, fjorden, het noorderlicht en maandenlang genoeg sneeuw om te kunnen langlaufen. Voor mij was hierdoor de keuze snel gemaakt waar ik mijn vervolgstudie zou willen doen na de bachelorstudie wiskunde aan de Universiteit Utrecht. In 2020 startte ik met de master mathematical sciences aan de Universitet i Tromsø (UiT), en inmiddels werk en studeer ik hier als promovendus.

De omgeving is prachtig, maar biedt ook zo z'n uitdagingen. Tromsø ligt binnen de poolcirkel en dat betekent dat de zon in de zomer tijdens de midzomernacht helemaal niet onder gaat. Dit kan je slaapritme behoorlijk verstoren en de meeste huizen hebben hier dan ook verduisterende gordijnen. Daar staat weer tegenover dat gedurende de maanden oktober tot en met januari de zon niet of nauwelijks opkomt. De meeste sneeuw valt tussen december en april. Om het weer te beschrijven schieten de typische vier seizoenen eigenlijk tekort. De Sami (inheemse volkeren in het noorden van Scandinavië) bieden een goed

alternatief: acht seizoenen. Zo heeft men bijvoorbeeld het seizoen 'Čakčadálvi' (vrij vertaald de herfstwinter), wanneer er vrijwel geen daglicht is en weinig sneeuw valt. Mijn favoriete periode is de 'Giddageassi' of winterlente, met veel sneeuw en weer meer zon. Een goede tijd om te skiën dus!

De overgang was best groot en niet alleen door de omgeving. De Universiteit Utrecht heeft een grote wiskundefaculteit in vergelijking met Tromsø. Hier was ik de enige student differentiaalmeetkunde. Dat betekende ook dat ik vaak moest samenwerken en overleggen met studenten van andere vakgebieden. Heel interessant, maar soms ook wel lastig.

Door het lage aantal studenten is het vakkenpakket aan de UiT ook aanzienlijk minder breed dan aan de UU. De compacte samenstelling van de wiskundefaculteit maakt dan weer wel dat je erg nauw samenwerkt met je professoren. Hierdoor is het in overleg mogelijk om 'op maat' speciale vakken te volgen, vaak bestaande uit zelfstudie met wekelijkse discussies. Ik heb juist dit persoonlijke contact als erg prettig ervaren.

Recent vindt er ook meer samenwerking plaats tussen de universiteiten in Noorwegen om bepaalde vakken samen aan te bieden. Een voorbeeld hiervan was het vak *oneindigdimensionale meetkunde* over de differentiaalmeetkunde van variëteiten gemodelleerd op lokale convexe ruimtes. Dit vak was een samenwerking tussen UiB Bergen, UiT, NTNU Trondheim en UiO Oslo, en bestond uit drie seminars in Bergen. Er is echter nog geen vast programma *à la Mastermath* zoals in Nederland. Ik hoop dat hier de komende jaren verandering in komt.

Al met al geeft het een heel ander gevoel om te studeren in Tromsø dan bijvoorbeeld in Utrecht. Beide ervaringen zijn positief. Aan de UU heb ik veel gehad aan mijn medestudenten die hetzelfde studeerden als ik. Aan de kleinere faculteit van UiT is er meer persoonlijk contact, en dat past weer heel goed bij mij. Maar het grootste voordeel vind ik wel dat ik hier mijn favoriete sport kan uitoefenen... met wiskunde ben je veel met je hoofd bezig, en de fysieke inspanning zorgt voor een goede balans. Plus, de Noren zijn van zichzelf al meer gericht op een goede balans tussen leven en werken. Ondertussen ben ik gewend aan het Noorse leven en voel ik mij hier echt thuis.



Piet Groeneboom

*Delft Institute of Applied Mathematics
TU Delft
p.groeneboom@tudelft.nl*



Column Piet takes his chance

Chernoff's law and Jante's law

Piet Groeneboom regularly writes a column on statistical topics in this magazine.

Some history

In my column “Chernoff's distribution and the bootstrap” [8] I complained about the fact that in the Wikipedia article [14] Chernoff's original paper, where ‘Chernoff's distribution’ (which could also be called ‘Chernoff's law’) was discussed, was not mentioned, whereas three papers written by me were mentioned.

I do not know whether this complaint reached the Wikipedia authors, but the Wikipedia item on Chernoff's distribution has been drastically changed since I wrote that column. The section on ‘History’ now starts with the line: “Groeneboom, Lalley and Temme [4] state that the first investigation of this distribution was probably by Chernoff in 1964 [5] who studied the behavior of a certain estimator of a mode.”

The Wikipedia article does not summarize the history completely accurately from our paper, but since the law of Jante [16] prohibits me from writing in the Wikipedia article, I thought that it might be a good idea to write a column about the history while I am still alive. Henry Daniels [15] and Tony Skyrme [17], who both contributed to this history, are no longer alive.

However, I cannot tell the full story on the characterization of Chernoff's distribution in this column without breaking Jante's law several times. I will indicate that I am breaking the law by BJL (Breaking Jante's Law).

My own dealings with Chernoff's distribution started in the academic year 1982/1983, when I was invited to give a lecture in the so-called Neyman–Kiefer conference in Berkeley. I spent January till July 1983 at the Mathematical Research Sciences Institute (MSRI) in Berkeley, sharing the office with Steve Lalley and Thomas Sellke. It was not always clear that Thomas was present in our office, but he could suddenly become visible rising from below his desk, where he was taking naps.

The invitation to speak at this conference had been somewhat strange: the famous statistician from Berkeley who invited me had told me: “Some people seem to think that you should be invited to speak at the Neyman–Kiefer conference.” Perhaps he was applying Jante's first commandment: “You're not to think you are anything special.” Or Jante's second commandment: “You're not to think you are as good as we are.” The people who witnessed this invitation were appalled. But anyway, I accepted the kind invitation and talked about my investigations with respect to the (almost surely unique) location of the maximum of two-sided

Brownian motion minus a parabola. So I started with a result from Chernoff's paper:

Theorem 1 (Chernoff [1]). *Let W be two-sided 1-dimensional Brownian motion, originating from zero. The density f_Z of $Z = \operatorname{argmax}\{W(t) - t^2\}$ is given by:*

$$f_Z(s) = \frac{1}{2} \partial_2 u(-s, s^2) \partial_2 u(s, s^2),$$

where $u(s, x)$ solves the (heat) equation:

$$\frac{\partial}{\partial s} u(s, x) = -\frac{1}{2} \frac{\partial^2}{\partial x^2} u(s, x).$$

subject to:

$$u(s, x) = 1, x \geq s^2, \quad u(s, x) \rightarrow 0, x \rightarrow -\infty.$$

and $\partial_2 u(t, x)$ denotes the first derivative with respect to the second argument x .

The original computations of this density were based on numerically solving Chernoff's heat equation. This was done by Chernoff himself and also Willem van Zwet, both with the help of people from numerical mathematics, and by myself in 1982 at the Mathematical Centre, Amsterdam (now CWI), again with the help of numerical mathematics people. The latter mathematicians (in particular, Ben Sommeijer) noticed the instability of the solutions in the region where the time argument s is negative, if the then rather fashionable 'multigrid method' for the solution of partial differential equations was used. This phenomenon was explained in [4]:

$$\partial_2 u(-s, s^2) \sim c_1 \exp\left\{-\frac{2}{3}s^3 - cs\right\}, \quad s \rightarrow \infty,$$

where $c \approx 2.9458$ and $c_1 \approx 2.2638$. This fast decay entails that a numerical solution of this partial differential equation on a grid will not give a really accurate solution.

However, an analytic characterization that can be used for accurate numerical computations is given in the following theorem.

Theorem 2 [2, 4]. *The probability density f of the location of the maximum of the process $t \mapsto W(t) - t^2$, $t \in \mathbb{R}$, is given by*

$$f(s) = \frac{1}{2} g(s) g(-s),$$

where

$$g(s) = \frac{1}{2^{2/3} \pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{-ius}}{\operatorname{Ai}(i2^{-1/3}u)} du,$$

where Ai is the Airy function.

The density f_Z of Z can now be computed efficiently by two lines in Mathematica, see Figure 1.

Theorem 2 is also given in [11] and [9]. The proof in the latter paper seems at present the easiest way to obtain the result. The distribution of the maximum itself was studied in [5, 6, 12].

The Airy functions enter (in my approach to the problem) via the Cameron–Martin–Girsanov formula and the Feynman–Kac. The proof of Chernoff's result [1] and an exposition of how the Airy

```
In[1]:= f[x_] := (1/(2*Pi)) * 2^(1/3) *
Re[NIntegrate[Exp[-I*u*x]/Ai[AiryAi[1*2^(-1/3)*u]], {u, -10, 10}]]
In[2]:= g[x_] := (1/2) * f[x] * f[-x]
In[3]:= Plot[g[x], {x, -2, 2}]
```

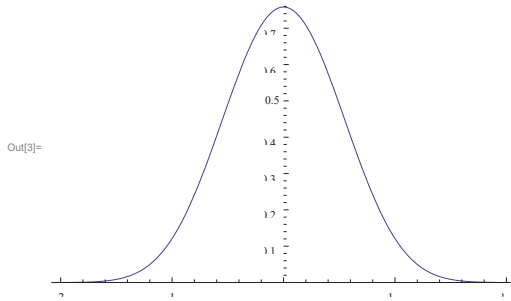


Figure 1 Density of $Z = \operatorname{argmax}\{W(t) - t^2\}$.

functions enter in [9] is given in [7] (my corresponding 2018 lecture in Banff, Canada, is also still on the internet, BJL).

The Airy functions appear in a lot of different contexts. Percy Deift says about this in his lectures on Riemann–Hilbert problems [3]: “Special functions are important because they provide *explicitly solvable models* for a vast array of phenomena in mathematics and physics. By ‘special functions’ I mean Bessel functions, Airy function, Legendre functions, and so on. If you have not met up with these functions, be assured, sooner or later, you surely will.”

Now, on the day of my lecture at the Neyman–Kiefer conference in 1983 and after I had delivered my lecture, a well-known Dutch statistician and a Berkeley statistician suggested that we should walk to a coffeeshop nearby. On the way to the coffeeshop the Dutch statistician kept saying “this is unimportant”. I wondered what this meant and why he was saying it (Jante's first commandment again?). The Berkeley statistician, on the other hand, kept saying: “This limit result of Chernoff for the mode cannot be right.” Why couldn't it be right? Because Hasminskii had shown that the minimax rate for estimating the mode was $n^{1/5}$, so how could an estimate of the mode converge at rate $n^{1/3}$ (this was Chernoff's limit result in the paper)?

The answer is of course rather simple. The minimax calculation corresponds to a rather pessimistic view of the world, where the convergence has to be uniform over whole neighborhoods of distribution functions. If one allows distribution functions that are sufficiently unpleasant in such neighborhoods one cannot get a faster rate than $n^{1/5}$. But Chernoff's (correct) result is for a fixed underlying distribution which is sufficiently well-behaving.

Further history

After returning from MSRI to CWI I wrote down my derivation leading (among other things) to Theorem 2 above in the CWI report [4]. The British statistician Henry Daniels, who around the same time also had derived an analytical expression with Airy functions for Chernoff's distribution, together with the physicist Tony Skyrme, got hold of my report and handed this to David Kendall. David Kendall was at the same Institute of Pure Mathematics and Mathematical Statistics at Mill Lane in Cambridge.

There was a lot of contact between Nico Temme and myself on the analytical aspects (we were both at CWI). Nico also wrote a paper on an analytical aspect of the problem [13]. So Nico and I certainly did not work independently on this problem, as stated now in the present Wikipedia article.

In 1984 I moved to the Mathematics Institute of the University of Amsterdam, where I received in 1985 a letter and a cheque from Cambridge, telling me that the Rollo Davidson Prize had been awarded to me (BJL, but I must say it because it is relevant for the further history). I later heard that Terry Lyons was the other winner that year.

I did not know who Rollo Davidson was, so I was not aware of the existence of this prize. The accompanying letter was written by Peter Whittle, but I later understood that David Kendall was the main person who had decided on this award. In fact, I received a letter from David Kendall, saying: "You cannot imagine how happy I felt when I read your report" (BJL again, I fear). I wondered when I read this letter whether I had felt like that myself in the past and realized that I had indeed felt like that sometimes, but not very often. Remarkably, I had felt like that reading a paper of my co-winner Terry Lyons.

But to return to what happened after I was awarded with the Rollo Davidson Prize: I sent in my CWI report to the journal *Probability Theory and Related Fields*. I now know who the two referees were. I first received a referee report of Steve Lalley (my office mate at MSRI and co-author in [9]). He also separately wrote me a letter, which basically suggested that I should introduce a stopping time argument in the Cameron–Martin–Girsanov part of the proof. That seemed a good idea, but I didn't do it. I kept his letter, though (something I usually don't do). In fact I did nothing, I put the report in a drawer and forgot about it.

A year later, I received another referee report. This was rather remarkable, because I already got the news that my paper was accepted with the first referee report a year earlier. This report was written by Rudi Lerche and he complained that the paper started off rather nicely, but then there was this awful appendix full of technical stuff on complex analysis computations, wasn't there some way to avoid that? I fully agreed with him, but didn't know how to do it.

Nothing happened for a while, in fact for a few years. Now and then I received letters from people asking: "What the hell is happening to this paper of yours that is now announced for years to appear in *Probability Theory and Related Fields*?" I had no answer, except that I received this prize for it and that I did not work on it (I got interested in other things in the mean time and felt no big urge to work on it because I had already been awarded with this prize for it).

And then finally, in 1987 or 1988 I received a letter from Mrs. Zassenhaus in Paris, who was handling the publishing of *Probability Theory and Related Fields*: "Mr. Groeneboom, are you still interested in your own paper? If so, send it in and we will publish it immediately." This seemed an easy way out for me and that is what I did. I sent in the original version without any change, and so it was finally published in 1989.

But after all these events I kept this nagging feeling that I should do something about the awful appendix in my original paper. And that I should use the suggestion of Steve Lalley to introduce the stopping time argument. So around 2013 I wrote to my old friends Steve Lalley and Nico Temme that I had some new ideas on how to tackle the problem without using my appendix in the original paper. Since this is a column, I will not go into the details here (which are explained in [9]), but the basic idea is that two expressions, involving integrals over the Airy func-

tions Ai and Bi have to be equal (something I could not prove in the eighties) and that they have to be equal because they satisfy the same partial differential equation. And then finally we need the maximum principle to pin everything down via the boundary conditions.

So we wrote a paper on this and I submitted it to the *Annals of Probability*. This seemed to me a safe place to send it, because Steve had been main editor of this journal and one would think that this would give him some credit. But that is not how things work nowadays. We waited half a year (not an unusual waiting time) and then I reminded the editor of our paper. Again some waiting, after which I received a letter from him: "Yes, we had some telephone communications about your paper and the upshot is that we were not very enthusiastic." No Associate Editor's report or referee reports. Often the Associate Editor (AE) and referees don't have a clue what the paper is about and then start saying this kind of thing. Or: "You proved this before, didn't you? So why a new proof?" Students can also say: "You already have a proof, why do you want another proof?" I do not know how many proofs Euclid's prime number theorem has in the last edition of *Proofs from THE BOOK*, but in my (4th) edition it has six.

Then I sent it to the *Journal of Mathematical Analysis and Applications* (Nico's suggestion). Again a considerable waiting time, but then I received a letter from the editor that it had been accepted (without any referee reports). Nico remarked: "Well, at least we do not have to thank the referees." The vagaries of publishing...

Marcel Proust submitted his work 'À la recherche du temps perdu' to the *Nouvelle Revue Française* (I talked about this in my previous column in connection with the 'sonate de Vinteuil'). This was turned down by this publisher, for which André Gide was responsible. Marcel Proust then published it on his own account. André Gide apologized a year later (usually this is not what the AE and referees do, but of course they are anonymous). It is a matter of keeping faith if one really believes in one's work and of having the means to push it through.

There is a difference in style in the paper of Henry Daniels and Tony Skyrme on one hand and my paper and the paper of Steve Lalley, Nico Temme and myself on the other hand. For example, Daniels and Skyrme say: "It should be possible to establish analytically that

$$\frac{1}{2\pi i} \int_{-i\infty}^{i\infty} \frac{dw}{Ai^2(w)} = 1." \quad (1)$$

(Part of the second to last formula of the paper.) This is British style, on the continent we are not allowed to say this. We say in [9, Appendix D]: "We have not been able to find a direct reference for the nice relation (1)" and then prove it (the proof is not very long, though).

A conference in Tashkent and Henry Daniels

Around this time, there was the first World Congress of the Bernoulli Society in Tashkent (1986). I was asked to visit the refuseniks in Moscow and was planning to do that on my way back from Tashkent. The refuseniks were (mostly) Jews who had asked permission to emigrate to another country (e.g., Israel), a request that had been turned down, usually under the pretext that this was because of security reasons (if the wife of a male refusenik

had been working at an official bureau, she had had access to 'classified information'). Even the parents of the refuseniks could lose their jobs because they "hadn't raised their children properly".

Certain British statisticians were planning to visit the refuseniks on their way to Tashkent. They made more noise about their plans than I did. There was absolutely nothing illegal in visiting the refuseniks, but the way the refuseniks were treated was not exactly propaganda for the Soviet Union. So there was the threat from Moscow that the whole conference in Tashkent would be canceled if the refuseniks would be visited. The British statisticians subsequently canceled their plans. But I did not cancel my plans (taking a lot of precautionary measures that had been advised to me by the organization that asked me to make the visit). In contrast with the way the refuseniks were treated, the Tashkent conference was a big propaganda event. I thought that canceling the conference was an empty treat.

In the plane for invited speakers and high officials from Moscow to Tashkent I was asked: "Piet, are you still planning to visit the refuseniks in Moscow on your way back to Holland?" After I answered "Yes, I am", I was told: "Be aware of the fact that this will have very serious consequences for your position in the Bernoulli Society!" At the time I was curious what this meant: would I be thrown out of the Bernoulli Society? Years later, during a night in Oberwolfach it became clear what had been meant. I 'was up' for an appointment in the council of the Bernoulli Society and the person who asked me this question would prevent (and indeed had prevented) this to happen. I was completely unaware of all this machinery behind the scenes.

These differences of opinion on the visit to the refuseniks could conceivably be between Henry Daniels and myself. Also, sometimes one gets the impression that mathematicians are involved in a race who will first get a result and this could be a further difficulty. But we actually became friends (I believe).

Henry Daniels played the piano but also a British invention, the concertina (credited to Sir Charles Wheatstone). The concertina is a kind of 'accordion'. In Oberwolfach he could fill in the missing violin and (if I remember correctly) the viola part in string quartets, playing on his concertina. He could fake a vibrato by moving the concertina in a special way. Henry and I even played Bach's violin-oboe concerto (don't remember which pianist played the orchestral part) in Oberwolfach, where Henry played the oboe part on his concertina and I played the violin part. In [10] I described the music event which took place at my house on a very rainy day during the ISI (International Statistical Institute) meeting in Amsterdam, 1985.

Later Henry invited me to come to Cambridge, where I stayed at King's College and attended the high table dinner with him. This was my first high table dinner (later I attended a similar event in Oxford; there were some differences, for example still more drinking in Oxford, but it might depend on the college) and it was exactly as I had expected. Men hanging in club chairs in a kind of antechamber with a glass of sherry before the dinner started and then this dinner at a table separate from the students' tables.

Henry was not so keen on these events and said something to me of the sort: "Glad you are with me, I always feel a bit out of place!" I know this feeling myself also all too well, so was glad to be of some assistance to him here. During the day we played music at his house. He claimed that one's rank in the hierarchy in King's college was measured by the amount of keys one had to different doors. Don't know whether this is really true.

He was a very kind man. I still remember that in the subway (underground) in Tashkent young men would offer him their seat (he was in his eighties then) and I was wondering whether a similar event would be possible in the Amsterdam subway. My guess was that this would not happen there. ☺

References

- 1 H. Chernoff, Estimation of the mode, *Ann. Inst. Statist. Math.* 16 (1964), 31–41.
- 2 H.E. Daniels and T.H.R. Skyrme, The maximum of a random walk whose mean path has a maximum, *Adv. in Appl. Probab.* 17 (1985), 85–99.
- 3 Percy Deift, Riemann–Hilbert problems, 2019, arXiv:1903.08304.
- 4 P. Groeneboom, *Brownian Motion with a Parabolic Drift and Airy Functions*, CWI Technical Report Department of Mathematical Statistics-R 8413, CWI, 1984.
- 5 P. Groeneboom, The maximum of Brownian motion minus a parabola, *Electron. J. Probab.* 15, no. 62 (2010), 1930–1937.
- 6 P. Groeneboom and N.M. Temme, The tail of the maximum of Brownian motion minus a parabola, *Electron. Commun. Probab.* 16 (2011), 458–466.
- 7 Piet Groeneboom, Chernoff's distribution and differential equations of parabolic and Airy type, Talk at meeting *Shape-Constrained Methods: Inference, Applications, and Practice*, Banff, 28 January to 2 February 2018.
- 8 Piet Groeneboom, Chernoff's distribution and the bootstrap, *Nieuw Archief voor Wiskunde* 5/22 (2021), 241–244.
- 9 Piet Groeneboom, Steven Lalley and Nico Temme, Chernoff's distribution and differential equations of parabolic and Airy type, *J. Math. Anal. Appl.* 423 (2015), 1804–1824.
- 10 Piet Groeneboom, Jan van Mill and Aad van der Vaart, In Memoriam Kobus Oosterhoff: Statistics as both a purely mathematical activity and an applied science, *Nieuw Archief voor Wiskunde* 5/18 (2017), 55–59.
- 11 S. Janson, Moments of the location of the maximum of Brownian motion with parabolic drift, *Electron. Commun. Probab.* 18, no. 15 (2013), 1–8.
- 12 S. Janson, G. Louchard and A. Martin-Löf, The maximum of Brownian motion with parabolic drift, *Electron. J. Probab.* 15, no. 61 (2010), 1893–1929.
- 13 N.M. Temme, A convolution integral equation solved by Laplace transformations, in *Proceedings of the International Conference on Computational and Applied Mathematics* (Leuven, 1984), Vol. 12/13, 1985, pp. 609–613.
- 14 Wikipedia, Chernoff's distribution, https://en.wikipedia.org/wiki/Chernoff%27s_distribution, 2023.
- 15 Wikipedia, Henry Daniels, https://en.wikipedia.org/wiki/Henry_Daniels, 2023.
- 16 Wikipedia, The Law of Jante, https://en.wikipedia.org/wiki/Law_of_Jante, 2023.
- 17 Wikipedia, Tony Skyrme, https://en.wikipedia.org/wiki/Tony_Skyrme, 2023.

Daan Mulder

promovendus AMOLF, Amsterdam
mulderdaan@live.nl



Het keerpunt van Piet van Eeghen

Meneer, u kunt toch wel tegen een grapje?

De trouwe lezers van deze rubriek zal het niet verbazen: een wiskundige kan zeker ook grappig zijn. Piet van Eeghen werkt als wiskundeleraar en won daarnaast de Publieksprijs op het Leids Cabaret Festival 2022. Hoe combineert hij die twee kanten van zichzelf? “Misschien is ‘Ik was laatst bezig met een fucking lekker wijffie, ik nodig haar uit voor een goed bord andijvie’ niet de eerste tekst die je associeert met je wiskundeleraar.”



Piet van Eeghen

Hoe koos je voor wiskunde?

“Op de middelbare school had ik een zes voor wiskunde. Ik was extreem lui en ging steeds met zo min mogelijk moeite naar het volgende jaar. Maar ik dacht: als ik nou een studie kies die heel moeilijk is, dan moet ik eens echt aan de bak om het te halen.

In eerste instantie ben ik, vanuit Amsterdam, in Groningen bedrijfswiskunde gaan studeren. Het hele eerste jaar heb ik niks aan mijn studie gedaan en ben ik het verenigingsleven ingedoken. Na drie maanden kwam de studie-adviseur naar me toe en zei: ‘Piet, je hebt je wiskunde B2 helemaal niet gehaald.’ Dat had ik vlak voor mijn eindexamen laten vallen, zodat ik meer tijd had om te leren voor de andere vakken. Ik had helemaal niet in de gaten dat je B2 nodig had voor bedrijfswiskunde.

Eerst heb ik dus wiskunde B2 ingehaald. Na de zomer zou ik weer aan bedrijfswiskunde beginnen, maar op mijn eerste collegedag bleek dat de hele studie door een gebrek aan aanmeldingen afgeschaft was. Toen moest ik even nadenken wat ik ging doen. Iets wiskundigs, dat wel, want ik wilde toch mijn B2 gebruiken: of econometrie, of wiskunde.

Foto: Brigitte Tops

Uiteindelijk heb ik voor wiskunde gekozen. Ergens heb ik altijd een voorliefde gehad voor niet-toegepaste dingen, zoals muziek, of schaken, of wiskunde.

Als kind heb ik een tijd lang veel geschaakt: ik was ooit bij een toernooi best hoog geëindigd, daarna ben ik training gaan volgen. Op een gegeven moment was ik echt vijf, zes, zeven keer in de week aan het schaken. Tijdens mijn middelbare schooltijd ben ik er ook weer mee gestopt, maar ik heb er nooit helemaal afscheid van kunnen nemen. Tijdens mijn studie ben ik gaan snelschaken — bizar verslavend, en fantastisch. Binnen zes minuten heb je gewoon het heerlijkste intellectuele verzetje dat er is. Na mijn scriptie, toen ik niet zo goed wist wat ik moest doen, heb ik me ook nog veel in schaakboeken verdiept.

Ik voel me geen enorme bèta, ik voel me ook geen wiskundige. Meer alsof ik per ongeluk in die studie terecht ben gekomen, en waarschijnlijk door schaken en handig kunnen leren, het toch gehaald heb.”

Hoe werd je leraar?

“Van het lesgeven had ik altijd al ergens in mijn achterhoofd dat ik het op een gegeven moment zou willen doen. Toen kwam er een traineeship voorbij, *Eerst De Klas*, een combinatie van lesgeven en ervaring opdoen in het bedrijfsleven. Deze tussenvariant was wel een manier om van het onderwijs te proeven.

Dat lesgeven was het eerste jaar veel zwaarder dan ik had verwacht, maar ik vond het toch erg leuk. Het was heel confronterend. Ik had wel eens zomerkampen gedaan, dus ik dacht: ik kan goed met kinderen omgaan, ze vinden mij altijd aardig. Maar dat hele ‘aardig doen’ werkte in de klas gewoon totaal niet. Ik werd de hele tijd uitgetest, maar daar reageerde ik dan nauwelijks op, en zo werd het steeds erger.

Ik ben zelfs uit een klas weggelopen om — zonder succes — de jaarlaagcoördinator te zoeken, omdat ik de leerlingen niet stil kreeg en ze ook nog begonnen te zingen. Uiteindelijk heb ik de les uitgezeten zonder zelfs maar in te grijpen. Het was een jaartje waarin ik heb geleerd om mijn grenzen aan te geven, maar het was wel een harde leerschool. Na een jaar

ging ik naar een andere school, en daar ging het vanaf de eerste dag een stuk beter. Ik had een jaar lang kunnen oefenen en kon op een nieuwe school met een schone lei beginnen, dat was heel prettig.

Ondertussen had ik ook nog het idee om iets met muziek te doen, zoals de Kleinkunstacademie. Ik heb altijd jazzpiano gespeeld. Ik had een fijne leraar die muziek op een analytische manier benaderde. Bij elk stuk legde hij uit hoe het is opgebouwd, en hij moedigde ook aan dat je zelf composities maakte. Daar zijn de eerste liedjes begonnen, nog wel zonder tekst.

Zo besloot ik mee te doen aan het Leids Cabaret Festival. Vorig jaar was daarvan de opzet dat je drie maanden ging toeren en dan eindigde met het festival. Die nieuwe opzet is mijn redding geweest. Van de regisseurs kreeg ik in het begin behoorlijke forse feedback, maar het was eigenlijk een opluchting om dat een keer te horen. Ik speelde altijd bij familiedingen, of voor vrienden, heel soms in een theater, maar iedereen was altijd ontzettend lief over wat ik deed. ‘Oh, wat goed, Piet, een wonder dat je überhaupt de piano kan spelen en tegelijkertijd kan zingen, wat knap.’

Tijdens die tournee heb ik nog veel geschreven en uitgeprobeerd. Tijdens het optreden merk je hoe iets valt. Ik keek ook video-opnames van mezelf terug. In het begin dacht ik nog ‘Haha, dat ben ik’, maar op een gegeven moment kijk je gewoon naar iemand en kun je gaan bedenken hoe het nog beter kan. Een goeie grap is ook super analytisch. Er zijn heel wat variabelen — hoe hard zeg je het, hoe snel spreek je het uit, waar kijk je naar, wat heb je daarvoor gezegd? Met die variabelen kun je spelen, en op een gegeven moment krijg je er gevoel voor om een zo goed mogelijke lach te krijgen.”

Hoe zou je je cabaret omschrijven?

“Sowieso veel muziek; de liedjes schrijf ik zelf op piano of gitaar. Het is ook t alleg. Ik heb een hele nonchalante kant, die breng ik op het podium tot uiting. Je hebt van die mensen die bij wijze van spreken niet zouden kunnen leven zonder op het podium te staan, dat heb ik eigenlijk niet. Ik vind het leuk om spannende dingen

te doen, en op het podium staan is daar één van.

Misschien heb ik dan toch één echt keerpunt: als jongen moest ik super vaak blozen. Op mijn veertiende ben ik in het schooltoneel gegaan — de Dreigroschenoper van Brecht — en heb ik daar mee opgetreden. Dat blozen was sindsdien in één klap verdwenen. Ik leerde dat je een bepaalde rol kan spelen als je voor een publiek staat. Daar is die liefde ontstaan voor het podium.”

Wat vinden je leerlingen van je cabaret?

“Nou, ik ben dit jaar op een andere school gaan werken. In mijn tweede les begint tijdens mijn uitleg ineens het deuntje van ‘Nieuw Shirtje’ te spelen, een van mijn nummers. De leerlingen hadden alles al op YouTube opgezocht. Ze vinden het wel leuk, hoor. Dan draaien ze dat nummer stiekem op hun telefoon en dan zeggen ze: ‘Meneer, u kunt toch wel tegen een grapje? U bent zelf cabaretier van beroep.’ Het is wel leuk om ook een persoonlijke band met leerlingen te hebben, dat je meer bent dan alleen de leraar. Na een paar weken raakt het cabaretier-zijn weer op de achtergrond. Dan heb je er ook al weer eens iemand uitgestuurd en dan denken ze: ‘Ja, hij is misschien wel cabaretier, het is óók gewoon zo’n lul als de rest.’”

Hoe zien de komende jaren er uit?

“Ik ben nu bezig met een avondvullende voorstelling. Die gaat in 2024 in première. Als ik er genoeg geld mee kan verdienen, zou ik wel willen proberen om te kijken hoe het is om fulltime met theater bezig te zijn. Het lijkt me ook leuk om met iemand samen te spelen. Toch zie ik mezelf ook nog lesgeven. Ik vind het heel erg leuk: de leerlingen, het dagelijks contact. Ik denk dat ik dat wel zou missen als ik alleen maar in het theater zou staan.”

Piet van Eeghen is de komende tijd als onderdeel van de Cabarestafette te zien.

Goede suggesties voor een Nederlandse wiskundige met een keerpunt in zijn of haar carrière zijn welkom via keerpunt@nieuwarchief.nl.

Mathisca C. M. de Gunst

*Department of Mathematics
Vrije Universiteit Amsterdam
m.c.m.de.gunst@vu.nl*

Chris A. J. Klaassen

*KdV Institute for Mathematics
Universiteit van Amsterdam
c.a.j.klaassen@uva.nl*

Aad W. van der Vaart

*Delft Institute of Applied Mathematics
TU Delft
a.w.vandervaat@tudelft.nl*

A conversation with Willem Rutger van Zwet

This interview was conducted at two occasions by Mathisca de Gunst, Chris Klaassen and Aad van der Vaart, all former students of Willem van Zwet (1934–2020). The sittings took place a while ago, in June 2000 and in 2001, in van Zwet's office at Leiden University, but the topics feel fresh. We start with a brief life history.

Willem Rutger van Zwet was born in 1934 in Leiden and passed away in 2020 at the age of 86. After attending gymnasia in Rotterdam and Den Haag, he studied physics and mathematics in Leiden. He chose to specialise in statistics, a fairly new subject at the time, and went on into a brilliant career in research and scientific administration. Throughout most of his career he was connected to Leiden University (his retirement lecture was titled 'No complaints so far'), but he travelled widely, with many visits to UC Berkeley and a half-time professorship at Chapel Hill from 1990–1998. During the cold war period, Willem played a significant role in the exchange between researchers on the two sides of the then 'iron curtain'.

Willem's research addressed asymptotic expansions and higher-order efficiency, and an eclectic range of other topics, including resampling methods, plant cell statistics and spatial stochastic processes (see [4] for an extensive review). Willem received numerous prizes and honours for his work (see [2]). A Willem van Zwet Medal and Willem R. van Zwet Award were established in his honor by the Bernoulli Society and the Dutch Statistical Society.

Willem used his talent as an organizer for Leiden University, but more so at the national and international level. From 1961–1996 he was almost continuously committed to the Mathematical Centre (now CWI) in Amsterdam. He was the co-founder and first director (1997–2000) of Eurandom in Eindhoven, and initiator of the Stochastics

Meetings Lunteren, the annual gathering of Dutch statisticians and probabilists with prominent speakers from all over the world, picked by Willem himself (1972–1999), which are still being continued. Perhaps the most impressive administrative achievements were international. Willem served as president of the three biggest international organisations in statistics, as Editor-in-Chief of two of the major journals, as board member of several international organisations, and held many other offices and memberships of programme, prize, review,



Willem van Zwet in 2013

advisory, restructuring, organising or publication committees (see [8]).

Without doubt Willem was the dominating force in statistics in the Netherlands for almost half a century. At one time Willem was the scientific father or grandfather of most mathematical statisticians in academia in the Netherlands and little could proceed without his knowing. Although Willem did not form a ‘school’ and was liberal as an adviser, his 16 PhD students took advantage of his authority, support and inspiration, and all of them pursued scientific careers at home or abroad [9].

Willem’s career coincides with a period of major changes in statistics, and in the world of science in general, as also becomes clear in the interview below. Another interview [2] from 2006 by Rudy Beran and Nick Fisher is addressed more to the international community.

Study and van Dantzig

You taught us that “a mathematician always starts small in order to end big”. How did you start? Did you study mathematics right from the beginning?

“No one studied mathematics right from the beginning in the fifties, but everybody studied physics. Only after going through three years of laboratory work, and God knows what, did I decide to study mathematics, when I found out that you could actually make a living in mathematics as a statistician. I had found out about statistics by a course in industrial statistics taught by Hans Sittig and A.R. van der Burg. Together with two fellow students, Jan van Ettinger Jr. and Jaap Fabius, we corrected the written homework. This was quite mysterious; we had no clue why they were dividing all these sums of squares, or what these sums of squares actually meant.¹ This is how I got interested in statistics. We had no idea of the mathematics behind it, or even whether there was any mathematics behind it, but we thought it was fun. Then I decided that I was absolutely fed up with physics, and studied mathematics for the second half of my studies.

I tried to find a professor of statistics, and there turned out to be one, who was teaching the ‘theory of collective phenomena’. This is what he was officially teaching, but after a little trouble we discovered that it actually was probability and statistics. Thus I was a student in Leiden



David van Dantzig in 1934

and travelled once a week to Amsterdam to take David van Dantzig’s course. This is how I got into mathematics and into statistics at the same time.”

Why this strange title ‘theory of collective phenomena’ for a statistics course?

“Well, I have no clue, but it was probability and a lot of statistics. Of course, van Dantzig taught whatever he damn-well liked. He would start out a course and end up somewhere completely different. One course on fiducial inference was supposed to be a standard course, but after one or two weeks he decided, that he didn’t want to teach about fiducial inference. He was writing a book review on Fisher’s last book² and wanted to find out whether he could make any mathematical sense out of that. He sort of swung back and forth; one week he said: ‘Oh yes! Now I understand what Fisher meant.’ The next week it was: ‘Oh no, it was all hopeless.’ He ended up concluding that it was totally hopeless and wrote this wonderful and odd book review ‘Statistical Priesthood II’ [7].”

There was a number I also?

“There was a number one [6]; that was on Savage’s book. These two book reviews were hardly read outside the Netherlands, but they were absolutely wonderful. They made quite a bit of fun of Fisher also. Van Dantzig could be really quite scathing. If he really felt something, then he would go out and say it. In the English speaking world, you don’t do that sort of thing, but van

Dantzig surely did. He wasn’t old fashioned at all about that.”

Was he a pure mathematician?

“Yes, he was a topologist, I think, originally. He got his degree with van der Waerden. They were probably students together; van der Waerden was very young as a professor in Groningen. Van Dantzig was appointed as a lecturer in Delft in the 1930s, and [in 1940] immediately fired by the Germans, because he was Jewish. He apparently hid during the war in a very practical manner. I mean, it was possible to get hold of him, but somehow they never caught him. I think that already before the war, he had been studying probability a little, but during the war, he was bored and had nothing else to do, and also started to learn a little statistics.

After the war he had this idea — he and a couple of other people — that mathematics could contribute to the re-building of the world. They set up the *Mathematical Centre*³ as a centre for applied mathematics, which was statistics and probability, and numerical analysis.

Van Dantzig was a very strange person. He was a pure mathematician, certainly also when doing statistics. I don’t think he did any applied statistics, but he was a great, well, promoter of statistics. Van Ettinger was called the promoter, van Dantzig the visionary, and Hemelrijk the travelling salesman.⁴

Van Dantzig’s main emphasis was on modelling. I think he was one of the first people who actually understood what a mathematical model was. To us, the three students in his class, it sounded clear and obvious, but he kept explaining it, until it was pretty boring. It seems that many people have great difficulties. Right now we teach courses on modelling and that sort of thing, right? I never could understand the problem, but that was probably because van Dantzig had very clear ideas about it.

The other thing was that he gave these more or less ‘random’ lectures. Quite often the proofs went wrong. At the end of the hour, he would say ‘You’d better look at it yourself’ or ‘This is how easy it is to cheat students’. The courses were supposed to be from 2:00 till 4:00, but never stopped before 5:30. It really was tough, and you had to take them for three years before he would even consider letting you take the

exam. Then the exam wasn't on anything he had taught, but about some *Annals [of Mathematical Statistics]* paper to read. I actually got two; that was hard work."

It still attracted you to statistics?

"Statistics was still very rudimentary, I mean, they knew a lot more on probability in those days. But it was absolutely wonderful. Van Dantzig taught you a lot of things that nobody else knows, while things that everybody knows, he never got to. But it was spectacular. He would come into the classroom with a little piece of paper and start somewhere, and nobody knew, he included, where this was going. It was adventurous. I loved probability.

In Amsterdam they worried about the axiom of choice, but in Leiden they didn't see this as an issue. The axiom of choice, if you wanted to use it, fine. Van Dantzig apologised every time he was using it."

He had to do this because of Brouwer?

"I don't know, this was tradition, I guess. Yes, it was quite interesting with these three students."

One of them was Jaap Fabius?

"Yes, Jaap, and for a while there was Fred Steutel. We were sitting there for two years and had to answer all the questions, before Fred showed up. Then Jaap and I developed a technique of looking superior, and looking at Fred as if we were wondering whether he knew the answer. Van Dantzig forced him to answer. Poor Fred."

Was van Dantzig connected to international statistics and research?

"Yes, he definitely was, I mean, he was an international figure and they all knew him."

In statistics?

"The distinction wasn't that clear at the time. Probability and statistics were not totally separate fields, as they are now, unfortunately. They knew him, because he'd been to Berkeley and attended the European Meetings of Statisticians. Van Dantzig was an authority. He did some work in probability himself, and a lot of it was published by students."

PhD and Hemelrijk

When you finished your undergraduate studies, did you continue as a PhD student?

"I wanted to go to Berkeley. You would think van Dantzig would mind that his students were running away, but he thought it was fine. Berkeley was the magic word. Van Dantzig had been there and he was very much in favour and willing to write letters. But I was having such problems with the army. There was no way of going anywhere before doing my twenty-one months in the army. So Jaap Fabius went there instead."

After the basic training of two months and four months at the officer's infantry school, Willem got a position at a military laboratory via a fraternity brother of his future father-in-law. This laboratory developed a special type of sonar.

"It was fun, I mean, I learned some physics. And the physics wasn't so bad, it was mainly Bessel functions."

After your army service, you did not want to go to Berkeley anymore?

"I had lost so many years by that time, that I felt that I needed to move quickly. I was 26. I started out young, because I skipped first grade of primary school, but lost many years as an undergraduate. Van Dantzig had died in the meantime, that was the bad part. So I went to Hemelrijk. I remember, my worst fear was becoming a doctor of engineering science, or something, which Hemelrijk was teaching in Delft."

So Hemelrijk had not yet succeeded van Dantzig?

"No. When van Dantzig died, I started to talk to Hemelrijk when I was still in the army, and he said he would be going to Amsterdam next September. Then I got a job with Hemelrijk at the Mathematical Centre."

Was that job directed at getting a PhD or more like a consulting job?

"No. Well, you were supposed to get your PhD, and some people actually did, but quite a few never got there. When I arrived, Hemelrijk was there, Bloemena had just died and Stan van Eeden had just left to the United States. There was me, Hemelrijk and an undergraduate student or assistant. They gave me a healthy big pile of consulting things and said 'Go ahead'. I really had no clue, but Hemelrijk was wonderful. He showed up three mornings a week, Monday, Wednesday and Friday, and we would spend half of his time talking about all this consulting business. Koos Kriens, the head of the OR-group, helped a bit. Time went by very quickly, because you had to survive. I also taught a course, the famous teachers course.

After one year I was thoroughly overworked and on the verge of collapse. I didn't realize that at the time, but Hemelrijk got worried. There was absolutely no time for doing research, because I spent all my working hours doing consulting. They promoted me to 'sous-chef' after six months, but I still had nobody working for me. It meant a 50% raise in salary, so that was nice.

I must have told you the story of my PhD thesis. Hemelrijk had a folder. Whenever he met somebody who had a problem which he couldn't solve, he wrote it on a



Willem van Zwet (second from the left) at his student club Minerva in Leiden in 1954. First from the left is Jaap Fabius, who later became professor of probability in Leiden.



Willem van Zwet and Jan Hemelrijk in the mid 1970s at the entrance of the Mathematisch Centrum at the 2e Boerhaavestraat 49 in Amsterdam.

piece of paper and put it in this folder. When you indicated you wanted to get a PhD, he handed you this folder. Most of the things in the folder were pretty awful, but there was one on order statistics. Because I didn't know anything about order statistics, it looked mildly interesting. So I looked at this problem for two months or so, and solved it! I was very, very pleased with myself, and went to Hemelrijk and told him about the piece I worked on. Then he replied: 'Of all the uninteresting things I have seen in my life, this beats everything.' But I persevered and made a thesis out of it, which I don't think Hemelrijk ever read. For myself, I think it is a nice thesis. It is totally idiosyncratic; it has nothing to do with anything else. The subject has become a little cottage industry; a number of people keep doing this sort of thing over and over, every ten years or so.

At the time I had no clue of what was going on in statistics and just did whatever I thought might work. I started reading journals, but it takes a while before you get any idea. At the Mathematical Centre everybody was doing rank tests, but I thought that was a non-subject. They were all doing that for generations, except for Stan van Eeden, who was doing isotonic regression, and Bloemena, who wrote a very nice thesis. That was another assignment I got: Bloemena died and I had to finish his thesis. It became a nice, but very strange thesis, with very complicated moment computations (see [5]). So I wasn't the only one who was fed up with rank tests.

Hemelrijk was basically not much interested in mathematics, but more into applied statistics, and he was bloody good

at it. Hemelrijk could sell you his grandmother. He was terrific, I have great admiration for him."

Do you think of Hemelrijk as somebody who had a lot of influence on your later career?

"I learned a lot from Hemelrijk. I am pretty fast, but he is ten times as fast as I am; I was continuously rushing to keep up with him.

It is hard to describe what you have learned from a person; I think it was more like an attitude towards statistics. Of course, there is always this influence of a thesis adviser. You spend an enormous amount of time with your PhD adviser, although Hemelrijk was not advising me on my PhD, but we were doing consulting together. At the end he asked if I thought that everything was correct. I don't think we ever talked about my thesis.

Naturally you go into another direction after that. When I left the Mathematical Centre, I felt that what was needed in Holland is to get statistics on a decent mathematical level. That was of no interest to Hemelrijk. So we were very different people with very different ways.

I believe that Hemelrijk has written somewhere that I am as fanatic as van Dantzig in mathematics. I don't know where he got this idea from."

Lector, full professor

After his PhD at the University of Amsterdam in 1964, Willem was appointed at Leiden University. He stayed there for the rest of his career.

You became a professor at Leiden University?

"No, I became lector, that is something very different. You had two kinds of 'lectoren'. One kind is a private property of a professor. There were a lot of professors who had their 'own' lector, who did all the work, of course. I was of the other type, I wasn't owned by anybody. I was of the type that had such an unimportant subject that you needed no full professor to do that.

Kloosterman [chair of the mathematics department in the 1960s] had no sympathy for applied mathematics, or whatsoever. But he was a smart person, and realised he needed it. He figured that it was a pretty risky thing to have applied mathematicians in his department, and decided to find out

which of these applied mathematicians had actually been a decent student in his number theory course. I think that was basically the criterion. So, Guus Zoutendijk was the first applied mathematics professor in Leiden. Guus ran the computing institute, 'Centraal Rekeninstituut'. I had the choice of being in the mathematical or the computing institute. Of course, I picked the computing institute.

I went on leave on the day I got appointed. Hofstee [from the 'College van Curatoren'] said that the university had been doing without statistics for 400 years, six more months wouldn't matter too much.

The irritating part of being lector was, that you couldn't get a PhD student, because a lector wasn't supposed to do that. I think Kobus [Oosterhoff] got his degree with me just after I got appointed full professor. I don't know what would have happened otherwise."

You were a lector for only a short time?

"For three years or so. I got an offer to become a full professor in Eindhoven. So they had to do something in Leiden."

Were there differences between the Mathematical Centre and the applied mathematics department in Leiden?

"In Amsterdam they all trooped to the Mathematical Centre for statistical advice, but in Leiden nobody seemed to have the need for that. That was fine, as far as I'm concerned, because I had been doing nothing but consulting for the past three and a half years.

In the first place, I had to set up all my courses, and whatever. Rob van der Vaart



Willem van Zwet and his wife Lucie in 1966, receiving congratulations from Hofstee, from the executive board of Leiden University, after his inaugural lecture.

had been teaching statistics. He was a biologist and had his own department of theoretical biology. He was the first guy to buy a computer, before the math department, where they didn't want anything to do with this. I had been a 'student assistant' with him; so we knew each other vaguely. After my first year at the Mathematical Centre, van der Vaart quit in an enormous row with the regents of the university. I got a letter or phone call from the chair of the math department, asking me if I would be willing to take over his course, in the middle of the year. I said fine and Hemelrijk said it was fine also. I remember that I knocked on van der Vaart's door to talk to him, here in Leiden, but there was no answer. So I opened the door and he pushed me out and was screaming at the top of his voice, scolding the administration.

But I took over his course, and I was teaching here one day of the week. It was a wonderful course, because it was really a mathematics course, with a book that was extremely mathematical to biologists. So we had to have a vote in class after a few weeks. They would all much prefer not to see this book anymore. Thus I changed the course and tried to explain all the things of statistics.

So I had been teaching here for a number of years before 1965, when I really came back to Leiden, and had time to actually work. I started to work with Kobus Oosterhoff on the likelihood ratio test for the multinomial, and we wrote a paper on that for the Berkeley Symposium of 1970 (see [13]). I got invited, it was a great sensation."

Berkeley

Right from the start of his appointment in Leiden, Willem went on leave to Eugene, Oregon, where Fred Andrews and Don Truax were his hosts. Fred recommended him to Betty Scott, so he could attend the fifth Berkeley Symposium on Mathematical Statistics and Probability in 1965. These renowned symposia were held every five years between 1945–1970, and were important in the development of mathematical statistics, in which Berkeley in general also played a central role.

"When I went to the 1965 symposium, I was very much impressed by Erich Lehmann. Erich has a wonderful capacity for making everybody feel good. I showed up

there and found out that he actually at least looked through my thesis. He was always quite nice to young people, making them feel at home, asking them out for dinner.

I had written this crazy thesis about weak ordering of distributions. It turned out, that was exactly what the reliability people were doing, only they ordered everything with respect to the exponentials, which was sort of a special case; and they were doing this with great gusto. I ran into Dick Barlow [Richard Barlow, one of the founders of modern reliability theory], probably after a symposium. I spent the summer of 1967 working with Dick on reliability things. This is, I think, how I got to know people at Berkeley a little bit. Dick was always very nice. I was in Berkeley again in 1972, for half a year, and that's when I got working with Peter Bickel. I hardly spent more than five minutes with Dick, although his grant paid for my stay. He never sort of objected to that. Yes, I think that was the connection with Berkeley at first.

Somebody asked me to discuss some Bickel paper, where he was proving an Edgeworth expansion theorem for some rank test. I looked at it and said that I could do much better than that. Peter didn't believe me, of course. We started writing together and published the results in 1978, the longest paper in the *Annals of Statistics* ever (see [3])."

Even if you left out a lot of computations.

"We left out a lot of computations and people are still worrying about that. There is an enormous amount of technical stuff in there, that you can use for anything. Since the paper is about rank tests and rank tests went out of fashion a few years later, lots of people haven't realised that a lot of stuff they are doing, is already in the appendix of that paper.

I remember very strongly that my main reason for going to Oregon, and going to meetings in the United States, was that I really wanted to find out where I was in the scheme of things. Writing my PhD thesis was fun, but it had nothing to do with what everybody else was doing. I just wanted to know 'How bad are you' or 'How good are you compared to others'. You have to find out by reading these people or talking to them.

In Eugene Don Truax got me interested in the work from [Samuel] Karlin on total positivity. I remember I gave a lec-

ture somewhere in the midwest about my research on total positivity. There was an elderly gentleman sitting in the audience and at the end he asked a question, and I answered it. After the lecture, he came to me and said: 'That was a fairly stupid question, wasn't it?' I said: 'Well,...' Then he said: 'I am [Isaac Jacob] Schoenberg.' He is the inventor of this whole idea. I didn't count on this at all. Karlin had picked up the thing from Schoenberg.

A similar thing happened to me during a European Meeting [of Statisticians]. I lectured about some Berry–Esseen theorem. Somebody stepped up to me and said: 'I am [Carl Gustav] Esseen.' I thought that the guy had been dead for 15 years.

Yes, I have met some historical figures. I was allowed to go to the ISI meeting in Paris in 1961. I went there without writing a paper; this was a high exception. There, I actually realised that people like Neyman and Fisher exist. That was a great discovery. There was a wonderful boat ride on the Seine in the evening, where I got to talk to Jerzy Neyman. This made an enormous impression on me, that the people you read, are real living human beings."

Did you speak to Fisher also?

"No. Fisher was there at the ISI meeting in Paris. Allan Birnbaum was trying to reconcile the usual inference issues in his lecture. At the end Fisher got up and started off that, of course, Birnbaum did valuable work, but this was total nonsense. It was a shame and a scandal, because Birnbaum was trying to reconcile Fisher's ideas with those of Neyman, while everybody knew that Fisher was right and Neyman was wrong. Neyman was just sitting there looking at his shoes."

Dutch statistics

That was in the early years. You mentioned, that you wanted to get Dutch statistics on a higher mathematical level. Did you have a plan for that?

"I thought that mathematical statistics was really in the saddest state. Van Dantzig had died and, as I said, he was mainly a foundations person. Stan van Eeden was doing isotonic regression before it was known. That was really nice, it came out of consulting obviously. Bloemena was also doing something totally original. But Bloemena died and Stan left. There had been a big brain drain.

The thing you can do is to have students. I think that has been reasonably successful.

But I also feel a little bit responsible, that in the meantime applied statistics got less attention. I have really a good bit of appreciation for people like Sittig, van Ettinger and Hemelrijk, who did a magnificent job in applied statistics. Ronald Does is trying to sort of revive the industrial statistics tradition in Holland. I mean, for years and years people like Hamaker and Sittig have had no successors. I felt a little bit bad about that. At the time I didn't realize it, of course."

Were you happy to leave the consultation at the CWI?

"I was quite pleased to get rid of that, because most of the consulting was really very short time business. You did something and you worked it out and that's it. You didn't have much time or occasion for thinking it over, or doing novel things. Very often it was standard and quite boring.

I regret that we have completely failed in this country to put statistics on the agenda in policy making or so."

Is that different from other countries?

"I don't know. It is probably different from Britain and also from the United States. In policy making we really haven't achieved anything. Last week I testified before the 'Raad van State' on the 'Betuwelijn'. My God, I might as well have stayed home. But I think we have to keep explaining. The Centraal Plan Bureau is basically this gigantic economic model that Tinbergen made and not very much else. They have been saying terrible things about the 'Betuwelijn', these recent years. But you make a very, very, I think, understandable statement about some statistical matters and then there is the 'landsadvocaat' who (a) doesn't understand what you're saying, and (b) interprets it as: 'Ah, it's nonsense. We all know better.'

The question is, of course, whether statistics is a science and if it is, whether it will continue to be a science. I mean everybody is peddling our waves nowadays."

Statistics a science?

Isn't social statistics one of the origins of the field?

"Friedrich [Götze] has put it pretty simple recently in a conversation. He said: 'If sta-

tistics is a science, there ought to be a central body of knowledge. Tell me what it is in relation to the problems that you are attacking.'"

Are you concerned that we don't have a central body of knowledge?

"I think we have that, but the development of practical statistics is away from that. For instance, it is clear that one of the central concepts — this is my personal opinion — that distinguishes statistics from anything else, is that you make statements, but you also say something about the chances that your statement, or whatever, is wrong. That is absolutely essential for statistics. But nobody is doing that anymore. Maybe it is too difficult, but as soon as that is lacking, you're just like any other picture drawer.

I think there is a big gap right now between expanding the central body of core knowledge and what actually happens in applications. Most applied work nowadays is on data-mining kind of things, and this has almost no, or very little, probabilistic content. I think that the moment that you ignore probability and just make statements, then you're no different from any other citizen out there in the street."

Is it clear that probability models are always useful in areas like data-mining?

"They are always useful if you can say something about the chances you're wrong. The problem is that you often can't, but then it is doubtful whether you're doing statistics, or any applied analysis or numerical analysis, or whatever. To me, trying to say something about the chances you're wrong is an essential element of statistics.

First, we were for a time in a totally closed off world doing our own things. For many, many years people have been working on a restricted set of problems and getting a nice and clean theory about that. Then there was in the 1970s or 1980s this swing back, and people were saying that statistics should go back to applications. But that is not so easy, I mean, you can immediately come up with lots of applied problems that you can't solve. It is a healthy sign that you suddenly are saying 'We know all this old stuff, let's look at new things', but then a long time is needed before you catch up with your theory.

Today again, the practical problems are running away. They are becoming more

and more complicated, and any computer scientist can solve a problem, that we can't hope to do very much about for the next God knows how many years. If you can't catch up somehow, or do something useful, you can lose out. Somebody else will run away with your profession. That, I think, is a serious problem. I do think statistics is a valuable science."

Are computer scientists the main competitors?

"No, they are everywhere. Of course, the computer scientists have this enormous computing power. I think essentially you have to ask yourself questions — let me not phrase this as probabilities that you're wrong — about the relevance of your conclusions in some sense, and then probability models seem the obvious thing to do. If you have no model, or you have a model, but you don't worry about validating, I think you are doing a different sort of thing.

But... there are many doomsday profits. I mean, it is also an interesting kind of time. Things are changing rapidly."

Regarding applications, you mentioned government and industry, but not other sciences.

"I think our relationship with other sciences is much better than with industry and certainly with the government. There're lots of people in science who are willing to talk to you, because they realize they have problems that you can do something about. In physics and science this is very typical and very clear, usually they can do their own job. They have enough statistics and don't do it badly. I think the situation with social sciences has much improved. There was a wall between the mathematicians and the social scientists, but I think this is no longer true or far less true.

For the government statistics does not exist."

Can it be made visible by defining statistics as handling uncertainty?

"Yes, but they're not interested. What politicians hate most of all is uncertainty. If you tell a politician that the number of people that will be out of a job will be between 4 and 10 percent, he doesn't know what to do anymore. Which is not so surprising, of course. What they like, I've found, is that you give them a number and assure them it is a reliable number.

These people do have a difficult job. What the hell do you do when someone tells you it is between here and there?"

Maybe a statistician should say more?

"Yes, but anyhow they hate anything statistical. They really don't like them at all. And this is what we have to break down somehow."

Do you think this is a typically Dutch situation?

"No, this is a problem of many European countries."

In the US professional statisticians were heard by congress about the undercount. That was a big thing, which attracted a lot of attention. Lots of people were not represented in the census samples, and they worried if they should correct or not correct for that, et cetera. That was a debate where politicians were interested in the outcome. Lots of people, like David Freedman, were making statements. That was a probabilistic debate on a public issue. I can't remember that we ever had that in our country.

I think there are many more statisticians in the United States at every level. In England this is also the tradition, but even there you can't say, that there is a tremendous influence."

Bayesianism

At a joint meeting of the Dutch Statistical Society and the Dutch Mathematical Society, around 1980, Willem gave an opinionated lecture on Bayesian statistics, one of the paradigms in statistics. The lecture was to be published in *Statistica Neerlandica*, but was apparently refused on the grounds that it was overly negative or even 'schandalig'. In an interview at the occasion of becoming honorary member of the Dutch Statistical Society [*STATOR* 1(1), 2000], Willem calls himself 'very moderate in this matter, but apparently other people do not agree'.

What was the title of this lecture?

"It was 'Statistiek of Zwarte Kunst', and it is among my unpublished work. It was nothing deep. All I said was that I can understand that somebody likes to use the average loss over the parameter space as criterion, as long as you realize that this is just one particular average. So I

feel happier with a non-Bayesian solution if that exists. Hemelrijk always said that Bayesian statistics was fine, because it gives you simpler computations, but that is about the only reason. Van Dantzig was maybe not raving against it, but he was certainly against it. You should read 'Statistical Priesthood I' [6] [a review of Savage's book]. I never have met Jimmy Savage. He was very highly regarded, to my knowledge.

What I can't stand are these 'beliefs discussions'. At that time it was like, you had to be a Bayesian, everything else was wrong. They came up with the famous examples of where frequentists go wrong, silly examples of negative variance, or so. The technique was to define a frequentist in a way that nobody in his right mind would behave, and then shoot him down. I have really no patience with people like that. They don't seem to understand that the Neyman–Pearson theory is a stylised version of what you do in real life. We never completely behave like that."

Statistics and mathematics

We have been talking about mathematical statistics and applied statistics. Can you also say something about the relationship mathematics and mathematical statistics? Do you feel different as a mathematician, being a mathematical statistician?

"In mathematics you don't have any responsibility whatsoever for your choice of subjects. As long as it is a good mathematical subject — and nobody knows what that is, but everybody has ideas — you can do whatever you like. For a statistician, it has to have some relation to some practical situation, right? But given that, I don't think I would have selected different topics, if I had been a mathematician. You pick things for intrinsic interest.

The nice thing about probability, is that the problems are out in the street. This is true for number theory too, basically, but in a different way. I think being a pure mathematician, I would miss this aspect. I don't know how they do that. Once I asked a pure mathematician: 'How do you decide what is a good problem and what isn't?' This sort of shook him up terribly. He quoted all kinds of authorities. So you move the problem one step, and ask why these authorities think it is a good problem.

We statisticians always have some guidance, there has to be a certain relation with what is going on in the world out there. Often in a certain area they are trying to solve this problem, and other people are trying to create knowledge to help solve that problem. But somebody there has to make that choice first."

Number theory seems like a great field. Didn't you like number theory?

"A more interesting question is the way that pure mathematicians and statisticians deal with each other. You know all about that. In Leiden it is reasonable, we have always had the policy of 'live and let live', I won't meddle with them and they won't meddle with me. But it is not much more than that. There are other universities in the world, some not far from here, where the situation is radically different. Pure mathematicians make long noses to statisticians. This may be true in Leiden too, but they do it behind my back; so it doesn't have any effect."

Van Zwet school

Some people in the United States built a department. You didn't create one in Leiden, but you got a big department in The Netherlands, because almost everywhere in Dutch academia are your scientific children or grandchildren. Do you think this is a healthy situation, the van Zwet school?

"I see no problem, because I think people are sufficiently independent.

I am not — how do you say that — somebody who creates a school of followers, not at all. In fact, I really prefer to work alone, perhaps the only exception is Peter [Bickel]. I am interested in people writing a thesis with me, so I work with them, but having a graduate student is finite. I have hardly ever worked with students after they have finished, very, very seldom. Building up a group is not at all my way. I am much more of a problem solver than maker. You remember that in the old days, I used to have my students at the CWI in Amsterdam, to create some distance."

On the other hand, we have spent many afternoons here. Any time we knocked on your door, we were welcome to stay here the whole day.

"Yes, that is true. I spent an enormous amount of time with my students."

Did you like that?

“Yes, because each and everyone of you always worked — and that is not your doing alone of course — on something which interested me. I never asked people to work on something that did not interest me.

And so, yes I spent incredible amounts of time on two things, that nobody spends much time on: graduate students and the *Annals of Statistics*. No other editor has ever spent as much time on it as I did. If I start doing things really enthusiastically, I don’t think much about the time.”

Peace-medal Prague

Being, in his own words, a ‘great believer in collaborating internationally’, Willem has been very active in the international statistical community. He was the Editor-in-Chief of the *Annals of Statistics* and of *Bernoulli*. He was also president of the International Statistical Institute (ISI), the Institute of Mathematical Statistics (IMS) and of the Bernoulli Society for Mathematical Statistics and Probability, among many other things (see [8]). He was a leading figure in opening up dialogue with colleagues in Eastern Europe. He received the peace medal from Charles University in Prague in 1988 and an honorary doctorate in 1996.

You got a peace medal.

“Yes, I got a peace medal in Prague — at the time I enquired whether that was only given to communists, but it still exists.

[Rafail] Khasminskiĭ [Institute for Problems of Information Transmission, Moscow] and I got it together.

The relation with Eastern Europe, I always felt, was really important. The meeting in Tashkent [Bernoulli-IMS World Congress, 1986] was great. We needed years before [Yurii Vasil’evich] Prohorov [Steklov Mathematical Institute of the Russian Academy of Sciences] could be convinced that we organised it there. And there were other things that we have done. I think the Bernoulli Society is one of the few international scientific bodies that was sort of bringing people together very easily. [Albert Nikolaevich] Shiryaev [Steklov] would tell us whom to invite, realistically [from the USSR]. I have spent a lot of time doing the European Committee [of the Bernoulli Society]. That was really much more in some personal capacity. I was chairman of this committee, but I am not really much interested in the regular business of running a society. They usually have pretty capable people in their office.”

Dean

Willem was dean of the Faculty of Science in Leiden in 1982–1983, at a time that the university was experiencing financial difficulties.

How about being dean?

“Running ‘een faculteit’, which I have done for two years, is much harder than an international society.”

Why?

“Usually, you have to cut back, and nobody wants to be cut back.”

Was it coincidence that you were dean at a time when important decisions had to be taken?

“There is a moment you can’t escape. I think it is wrong to try to escape. There are obviously some people with absolutely zero or negative talent on these things and you’d better avoid them. But otherwise I think sort of everybody has to do it one time.”

You must have done a good job, as it appears that after that they wanted you as rector.

“That is another danger. You have to say no to everything afterwards. It is very sneaky. You are doing nothing but sitting in meetings all day, and you’re beginning to consider this as work. And then, after you’re through with one job, they immediately ask you for the next one. So if you don’t look out, you are in there forever. You have to take positive action to get out of the circuit.

I didn’t think it was unenjoyable, because it gives you great insight in the human mind and human nature. Even though that doesn’t make you terribly optimistic.”

But you refused to run for rector?

“I think the university depends more on deans than on the rector. We used to say about the rector that he doesn’t have any money.”

Eurandom

Eurandom was established in 1997 as a European research institute for the study of random phenomena, located at the TU/e, and initially funded by a special grant from the Ministry of Education. It was the brainchild of Willem, who served as the first director from 1997–2000. Research programmes in mathematical and applied statistics, probability theory and stochastic operations research were carried out by postdocs and graduate students, mostly from abroad, and coordinated by Dutch senior scientists in the relevant areas. Workshops, seminars and a visitors programme were part of the scientific activities. In 2007 funding for postdocs stopped and Eurandom became a workshop and visitor centre. At the time of the interview it had just taken off.



From left to right Willem van Zwet, Jiří Anděl, Volker Mammitzsch, Peter Mandl, Peter Gaenssler, and Jitka Dupačová at the 1983 Prague Conference on Asymptotic Statistics.

Can you tell us about Eurandom?

"It is a great idea. So far I think we have been doing fine. Of course, there are things that are not perfect and ought to be done better. But on the whole, for something that has been going for a year and a half, I think it is really quite good. I think especially the probability science was spectacular. There is a difference between the different areas, because it is harder to get good people in one area than in another. So you can't really expect that everything takes off at the same speed.

We are now negotiating to get the future nailed down, because the first five years, we just live from our government money. After that we really need money from other countries, as well as NWO.

I think that what makes me optimistic, is not just that pretty good research is being done, but also that the first group of people that started a year and a half ago and are now looking for positions elsewhere—because we have two years appointments—seem to be pretty successful. They are going to good places. So it is a nice half way house, so to speak. That is not our main purpose, but it is a good side effect. I think the kids are extremely enthusiastic, everybody I know; they all say they love it."

Oberwolfach*Oberwolfach?*

"Ah, my favourite resting place. There is only one Oberwolfach. It is a wonderful institute.

Yes, of course my April fool lecture! Long ago Dick Dudley, John Kingman, who were visiting Holland, and I, were going to a meeting. I was driving. During the ride John Kingman says: 'Do you realise that next Wednesday is April Fool's?' So, we discuss this for a while, and we make a pact that if any of the three of us had to speak on April one, he would give an April Fool's Lecture. We agree to this, not knowing that the first thing John Kingman does on the day of arrival is to speak to the chairman to have me scheduled at nine o'clock on April one. So the next day it becomes clear that I had to speak on Wednesday. I worried a great deal about this. I went to the organiser of this meeting, [Peter] Gänssler, and asked him what he would think if I gave an April Fool's lecture. He said that it was acceptable, if I promised



From left to right Friedrich Götze, Peter Bickel and Willem van Zwet at an Oberwolfach meeting in 2007.

to give a serious lecture afterwards and realised that I shouldn't do this again. So I gave this totally outrageous lecture. I proved all kinds of incredible things. And they all sat there and listened. Part of the deal was, if it would be obvious that nobody would react and think, that John would ask a question to make it clear. Of course, again, John being the sneaky man that he is, just sits there in the back of the room and lets me struggle. So it got worse and worse. At one point I walked between the two rows in the old building and stood still next to Georg Neuhaus. I said: 'Georg, this means that not only Le-Cam's first lemma, but also the second and the third are false.' I ended up by writing on the blackboard 'Today is April Fool's', and they finally got it. That afternoon every single German participant stopped by me on the walk [to Sankt Roman] and said: 'Of course I knew but I didn't want to spoil the fun.'

So I was not invited to Oberwolfach for two years or so, as a penalty due to my outrageous behavior."

Nevertheless as a statistician, you have been there most.

"Well, I must have been there fifty times. I love it. We had great fun in Oberwolfach."

How are these meetings important to the scientific knowledge?

"I don't know that they are. I guess it is a relaxed atmosphere and you get to know people. In those days the terrible word 'networking' didn't exist. I guess they called

it 'connecting with a couple of friends that you can rely on'. You know, this is a place where you get to know people really well. So you can count on them. For instance, when I needed an editorial board for the *Annals*, you are really demanding a lot from people. I think one person turned me down, but the rest, in about three days the crowd was there. We really worked hard and had a lot of fun. You can only have that if you are with a group of friendly people."

Major influence

You already mentioned a lot of people, but who has been a major professional influence on your career?

"I guess van Dantzig. It depends, within which boundaries these questions are. He had a major influence on becoming a mathematician or even statistician.

I guess a major influence for me as a student was Edsger Dijkstra. This may sound surprising, because he is a computer scientist. He was three years senior as a student. We could get along quite well and compete. He was a smart cookie.

Hemelrijk, I guess, for reasons I've explained.

I guess the person who probably influenced me most is Peter Bickel. In my farewell address I have said: 'We are both a little different than we would have been if we had never met.' At least, Nancy [Bickel] complains that Peter has some idiosyncrasies of mine now, and I have probably some of his."

Lehmann became a doctor honoris causa in Leiden [in 1985]. What convinced you to nominate him?

"In the first place Erich, as a human being, is a great person. Secondly, his influence on the profession is immense. He has been a stimulating influence and help to so many people. He has done first rate scientific work, but also his books [11,12] were important to statistics."

Are these books still relevant? Will his work go to the next century?

"Yes it belongs to the central body of statistics. I think it will go. I mean, yes, in the sense that all the ideas come back in new general settings. I personally like his testing book best.

If you say 'Is this statistics today?', then, of course, many other things are better, but yes, this belongs to the central knowledge."

Doing mathematics

Willem retired from his position in Leiden in 1999, a year before this interview. From 2000–2003 he was Editor-in-Chief of the journal *Bernoulli*.

What will you do after Bernoulli?

"That is three years in the future from now. I want to do some mathematics. I have

to finish a number of things, before I do other things. As long as you don't go daft completely, mathematics is easy to do. It is fun too."

Easy compared to what?

"Compared to physical work, or whatever. You may get bored, I don't know about that, you may lose interest, but I haven't got to that point yet."

You once said that you might have done anything else, for instance that you could be a judge.

"Oh, yeah, lots of things. I got into this business totally random. The only thing I didn't like was physics."

Would you have liked being a judge?

"Why not? Another thing is being a simple-minded manager. I have realised quite often that in the last ten, fifteen years I have spent at least half my time managing things. I could have really made money had I done it somewhere else. It is crazy to play the role of a management person in the university. It is the most stupid place to do that."

But you like it in one way or another?

"Well, I don't dislike it. I don't know. I have an unfortunate tendency of thinking that, when thinking I am right, I am right. You may have noticed that. I like to convince

people. I think quite modestly that I am fairly successful with that.

People have such stupid ideas about running an organisation. For instance, here in Leiden most of my colleagues think that you have to cheat. That happens to be the only thing you should never do, because if you cheat once, that is the end of it. It is funny. People have no idea about how to run things. They are always thinking I am cheating them. It took me years to convince my colleagues here. I think they're finally beginning to understand that I am not cheating them all of the time. You have to have a certain basic honesty. You don't have to tell all of the facts all of the time to all of the people, but you certainly do not lie about it."

Looking back

What did you like most about your life as a statistician?

"I have said that in my final address: working with various students. And working with Peter [Bickel] and Friedrich [Götze]. Friedrich is really exceptionally bright, so is Peter of course." ☞

Acknowledgement

The authors thank Jan Rutger van Zwet, Friedrich Götze and Marie Hušková for contributing photographs for this article.

Notes

- 1 These would have been the orthogonal decompositions of square norms, used in the *analysis of variance*, divided by their *degrees of freedom*.
- 2 R.A. Fisher is considered the most important figure in statistics in the first half of the

twentieth century. Late in his career he introduced the principle of 'fiducial inference' (which never caught on).

- 3 The Mathematical Centre was founded in Amsterdam in 1946. The statistics department of it was run by Jan Hemelrijk, the suc-

cessor of van Dantzig. Since 1983 it is called Centrum Wiskunde & Informatica (CWI).

- 4 Van Zwet referred here to [1], whereas in [10], Hemelrijk is quoted to have called van Dantzig the prophet, Sittig the missionary and Hemelrijk the travelling salesman.

References

- 1 G. Alberts, F. van der Blij, J. Nuis, eds., *Zij mogen uiteraard daarbij de zuivere wiskunde niet verwaarlozen*, CWI, 1987.
- 2 R.J. Beran and Nicholas I. Fisher, An evening spent with Bill van Zwet, *Statistical Science* 24 (2009), 87–115.
- 3 P.J. Bickel and W.R. van Zwet, Asymptotic expansions for the power of distribution free tests in the two-sample problem, *Ann. Statist.* 6 (1978), 937–1004.
- 4 P. Bickel, M. Fiocco, M. de Gunst and F. Götze, Willem van Zwet's research, *Ann. Statist.* 49 (2021), 2439–2447.
- 5 A.R. Bloemena, *Sampling from a Graph*, Mathematical Centre Tracts 2, CWI, 1964.
- 6 D. van Dantzig, Statistical priesthood (Savage on personal probabilities [1]), *Statistica Neerlandica* 11 (1957), 1–16.
- 7 D. van Dantzig, Statistical Priesthood II: Sir Ronald on Scientific Inference, *Statistica Neerlandica* 11 (1957), 185–200.
- 8 N.I. Fisher and A.F.M. Smith, Willem van Zwet's contributions to the profession, *Ann. Statist.* 49 (2021), 2432–2438.
- 9 S. van de Geer and C.A.J. Klaassen, Willem van Zwet, teacher and thesis advisor, *Ann. Statist.* 49 (2021), 2448–2456.
- 10 R.D. Gill and W. Mettrop, De profeet, de missionaris en de handelsreiziger (interview J. Hemelrijk), in G. Alberts, F. van der Blij, J. Nuis, eds., *Zij mogen uiteraard daarbij de zuivere wiskunde niet verwaarlozen*, CWI, 1987, pp. 187–197.
- 11 E.L. Lehmann and J.P. Romano, *Testing Statistical Hypotheses*, Springer, 2005, 3rd ed.
- 12 E.L. Lehman and G. Casella, *Theory of Point Estimation*, Springer, 1998, 2nd ed.
- 13 J. Oosterhoff and W.R. van Zwet, The likelihood ratio test for the multinomial distribution, *Proceedings of the Sixth Berkeley Symposium on Mathematical Statistics and Probability (Univ. California, Berkeley, Calif., 1970/1971)*, Vol. I: *Theory of Statistics*, Univ. California Press, 1972, pp. 31–49.

Open podium

Brieven van lezers
brieven@nieuwarchief.nl

De uitvinding van de relativiteitstheorie

Eigenlijk heb ik weinig interesse in prioriteitenkwesities. Ideeën zijn vaak bij verschillende onderzoekers ontstaan en verspreiden zich door conferenties en persoonlijke contacten. “Het zat in de lucht” zegt men dan. Dat gold bijvoorbeeld voor minimalisering-concepten voor randwaardeproblemen in de negentiende eeuw die later een functionaalanalytische grondslag zouden krijgen. A.F. Monna [10] heeft daar een gemakkelijk boek over geschreven. “Het zat in de lucht” geldt natuurlijk niet voor alle concepten en ideeën die zijn uitgevonden, denk bijvoorbeeld aan bepaalde zeer originele resultaten en vermoedens die we aan Riemann te danken hebben.

Een geval dat nog iets anders ligt is de relativiteitstheorie. De grote aandacht in de pers die sinds de jaren twintig van de vorige eeuw onverminderd doorgaat, de behoefte aan een held bij journalisten en het grote publiek, heeft Albert Einstein (1879–1955) tot icoon van de wetenschap gemaakt. Dat hij veel had van het beeld van de geniale Europese professor, een interessant uiterlijk had en af en toe een slecht humeur, ook faux pas in interviews maakte, deed allemaal geen kwaad. Zie de uitzonderlijk interessante biografie [3] waarin zowel het wetenschappelijke als publieke leven van Einstein uitvoerig en gedocumenteerd wordt weergegeven. Einstein was ongetwijfeld een geniaal fysicus maar ook een ideale figuur om te worden gehypet door journalisten en popularisatoren van de wetenschap. De meeste Angelsaksische journalisten en wetenschappers zijn bovendien de andere Europese talen niet machtig, dat gaf al meteen een eenzijdige invalshoek. Zelfs in het Nieuw Archief schreef Klaas Landsman [4] in een overigens prachtig artikel over zwarte gaten en het werk van Roger Penrose: “Einsteins speciale relativiteitstheorie uit 1905.”

Een opmerking tussendoor. In de titel van dit verhaal staat ‘uitvinding’. Dat is gebaseerd op de visie dat de werkelijkheid beschreven wordt en niet een-op-een met die beschrijving samenvalt, hoe nauwkeurig die beschrijving ook is. Onze beschrijvingen zijn modelmatig en niet de werkelijkheid zelf. Ik hoorde eens een hoogleraar natuurkunde spreken over “de quantummechanica die de wetten van de natuur beschrijft”. Dat is natuurlijk onzin, het begrip ‘wet’ werd gebruikt in de Griekse filosofie en door religieuze leiders, het heeft geen plaats in de mathematische fysica. Ik sluit me hierbij overigens aan bij Henri Poincaré (1854–1912) die het begrip uitvinding vooral op wiskunde toepaste, zie [13].

De relativiteit van beweging werd al in de zeventiende eeuw opgemerkt door Galileo en Huygens, maar het echte verhaal over

de relativiteitstheorie begint met Hendrik Antoon Lorentz (1853–1921). Er bestond een duidelijk stijlverschil tussen het werk in de elektrodynamica van Maxwell en dat van de continentale theoretische fysici. De continentale fysici hadden een voorkeur voor een meer systematische afleiding uit basisprincipes. Lorentz nam de taak op zich om de elektrodynamica van Maxwell van een degelijker grondslag te voorzien en deze sterk uit te breiden. Daarbij speelde het idee van de *aether* nog steeds een wat kunstmatige rol, zie de omvangrijke in het Frans geschreven publicatie [5] uit 1892. In hetzelfde jaar van de publicatie [5] opert Lorentz in [6] (in het Nederlands geschreven) zijn idee van contractie van lengte ter verklaring van de mislukte pogingen om beweging van de Aarde ten opzichte van de *aether* aan te tonen. Een voorwerp met lengte L dat met snelheid v ten opzichte van de waarnemer beweegt zal voor deze de lengte

$$\frac{L}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}$$

hebben; hierbij is c de lichtsnelheid. Deze contractie was nodig om de experimenten van Michelson en Morley te verklaren die geen verschil in lichtsnelheid vonden in interferentielijnen bij proeven in verschillende richtingen ten opzichte van de beweging van de Aarde. Lorentz stelt in [6] deze contractie als oplossing maar breekt zich het hoofd over de mogelijke moleculaire krachten die dit te weeg kunnen brengen.

In [7] komt Lorentz nog eens terug op de talrijke verklaringen die zijn voorgesteld voor het Michelson–Morley-experiment; bij die verklaringen worden allerlei veronderstellingen over de *aether* gemaakt. Hij concludeert dat zijn verklaring waarbij contractie van lengte bij beweging ten opzichte van een waarnemer plaatsvindt er geen rol aan de *aether* is toebedeeld en nog steeds de meest bevredigende verklaring is. Lorentz merkt op dat ook Fitzgerald tot deze conclusie is gekomen.

Interessant is dat de contacten tussen Lorentz en Poincaré een blijvend karakter hadden. Lorentz beroept zich in [5] ook op een argumentatie van Poincaré uit 1890 die te vinden is in diens collegedictaten, zie de lijst in [14, p.252]. De contacten tussen Lorentz en Poincaré bleven van belang, in 1900 hield Poincaré een voordracht in Leiden ter gelegenheid van het 25-jarig jubileum van de doctorsgraad van Lorentz. In een aantal artikelen verwijzen de twee wetenschappers naar elkaar.

Een grote stap doet Lorentz in 1904 met publicatie [8]. Bij de beschrijving van de beweging in de x -richting van een geladen

deeltje, in die tijd meestal ‘electron’ genoemd, ten opzichte van een waarnemer voert Lorentz een transformatie $x, y, z, t \mapsto x', y', z', t'$ in van de vorm:

$$x' = kl(x + \varepsilon t), \quad y' = ly, \quad z' = lz, \quad t' = kl(t + \varepsilon x). \quad (1)$$

De transformatie (1) is geparametriseerd door k, l met:

$$k = \frac{l}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}},$$

waarbij c de lichtsnelheid is en v de snelheid van het bewegend object ten opzichte van de waarnemer. De parameter l is niet bepaald, maar Lorentz geeft argumenten voor de keuze $l = 1$. Het idee van de transformatie van positie-coördinaten en tijd sluit aan bij Lorentz eerdere ideeën geformuleerd in [6] en [7], maar de noodzakelijke verandering van de tijd in een inertiaalstelsel dat beweegt ten opzichte van de waarnemer, is een van de meest revolutionaire conclusies van alle tijden. Het gaf veel verwarring, maar ook interessante sf-verhalen, tevens protesten bij theologen die dit niet konden rijmen met een godsbeeld waar de tijd in het heelal relatief is.

Op 5 juni 1905, in [12] merkt Poincaré op dat de Lorentz transformaties (1) een groep vormen; de eis van invariantie van de inverse transformatie levert $l = 1$. In de literatuur wordt transformatie (1) de Lorentz–Poincaré-transformatie genoemd, evenzo beide namen voor de bijbehorende groep.

Poincaré merkt verder op dat combinaties van deze transformaties zijn toegestaan en dat deze de kwadratische vorm

$$x^2 + y^2 + z^2 - t^2 \quad (2)$$

behouden. Poincaré voert dan voor de 4-dimensionale x, y, z, t -ruimte de metriek

$$ds^2 = dy_1^2 + dy_2^2 + dy_3^2 + dy_4^2 \quad (3)$$

in met $y_4 = \sqrt{-1}t$ als vierde coördinaat. In de analyse van de meer algemene relativiteitstheorie van Hermann Minkowski [9] in 1908 voert deze overigens dezelfde metriek in.

In [12] merkt Poincaré op dat het onmogelijk is om absolute beweging vast te stellen. Verder dat we het idee van Laplace

moeten laten vallen dat gravitatie zich instantaan voortplant; hij stelt dat gravitatie zich voortplant met de lichtsnelheid. Overigens beredeneerde Poincaré al in 1902 dat er geen absolute beweging van deeltjes bestaat, alleen relatieve, zie [11]. Ginoux noemt in [3] bronnen die duidelijk maken dat Einstein dit essay van Poincaré in zijn studietijd heeft gelezen.

Iets later, op 30 juni 1905, publiceert Einstein zijn artikel [1] over de elektrodynamica van bewegende lichamen. Einstein stelt hier dat er geen absolute beweging is vast te stellen, ook leidt hij formules af voor de contractie van de afmetingen van lichamen die bewegen ten opzichte van een waarnemer, bovendien dat er tijdsverschil optreedt tussen waarnemer en bewegend object. We kunnen wel aannemen dat Einstein het artikel van Lorentz [8] niet gelezen heeft, al lijken zijn resultaten er erg veel op. Een belangrijk punt in [1] is dat het begrip *aether* in de natuurkunde kan worden losgelaten. Lorentz merkt echter in [6] al op dat hij voor het verklaren van het Michelson–Morley-experiment het idee van de *aether* niet nodig heeft. Zowel bij Lorentz als bij Poincaré komt het begrip *aether* in hun definitieve artikelen [8] and [12] niet voor.

Alles bij elkaar genomen had de redactie van de *Annalen der Physik* Einsteins artikel [1] moeten weigeren, ze hadden kennelijk geen kennis van zaken.

Het artikel van Poincaré dat enkele weken eerder verscheen dan dat van Einstein bevat de genoemde informatie in [1] en nog meer, met name de analyse van Lorentz–Poincaré-transformaties en de daarmee samenhangende ruimte–tijd-metriek in variationale context. Opmerkelijk is dat Einstein in zijn belangrijke artikel over de algemene relativiteitstheorie [2] zijn eigen artikel [1] niet noemt maar wel Lorentz-contractie en herhaaldelijk Lorentz-transformatie. Het lijkt me duidelijk dat de speciale relativiteitstheorie van 1905 is ontwikkeld door Lorentz en Poincaré.

In 1921 kreeg Albert Einstein als excellent fysicus terecht de Nobelprijs voor natuurkunde, maar niet voor de relativiteitstheorie.

Ferdinand Verhulst
Mathematisch Instituut
Universiteit Utrecht

Referenties

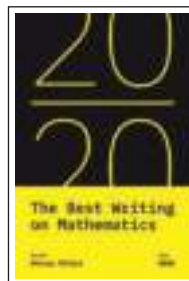
- 1 A. Einstein, Zur Elektrodynamik bewegter Körper, *Annalen der Physik* 17 (1905), 891–921.
- 2 A. Einstein, Die Grundlagen der allgemeinen Relativitätstheorie, *Annalen der Physik* 49 (1916), 769–822.
- 3 Jean-Marc Ginoux, *Albert Einstein, A Biography Through the Time(s)*, Hermann Editeurs, Paris, 2016.
- 4 Klaas Landsman, Zwarte gaten en het werk van Roger Penrose, *Nieuw Archief voor Wetenschap* 5/23 (2022), 169–172.
- 5 H.A. Lorentz, La théorie électromagnétique de Maxwell et son application aux corps mouvants, *Archives Néerlandaises* 25 (1892), 363–552.
- 6 H.A. Lorentz, De relatieve beweging van de aarde en den aether, *Verslagen der Afdeling Natuurkunde van de Koninklijke Akademie van Wetenschappen* 1 (1892), 74–79.
- 7 H.A. Lorentz, Over de vraag of de aarde bij hare jaarlijksche beweging den aether al dan niet medesleept, *Verslagen der Afdeling Natuurkunde van de Koninklijke Akademie van Wetenschappen* 6 (1897), 266–274.
- 8 H.A. Lorentz, Electromagnetic phenomena in a system moving with any velocity smaller than that of light, *Proceedings of the Royal Netherlands Academy of Arts and Sciences* 6 (1904), 809–831.
- 9 Hermann Minkowski, Die Grundgleichungen für die electromagnetischen Vorgänge in bewegten Körpern, *Nachrichten von der Königlischen Gesellschaft der Wissenschaften zu Göttingen* (1908), 53–111.
- 10 A.F. Monna, *Dirichlet's Principle: A Mathematical Comedy of Errors and its Influence on the Development of Analysis*, Oosthoek, Scheltema & Holkema, Utrecht, 1975.
- 11 Henri Poincaré, *La Science et l'Hypothèse*, Flammarion, Paris, 1902, hoofdstuk VII.
- 12 Henri Poincaré, Sur la dynamique de l'électron, *Comptes Rendus de l'Académie des Sciences, Paris* (1905), 1504–1508.
- 13 Henri Poincaré, *L'invention mathématique*, in *Science et Méthode*, Flammarion, Paris, 1908.
- 14 Ferdinand Verhulst, *Henri Poincaré, Impatient Genius*, Springer, 2012.

Boekbesprekingen

| Book Reviews

Redactie: Hans Cuypers en Hans Sterk

Review Editors NAW - MF 5.092
Faculteit Wiskunde & Informatica
Technische Universiteit Eindhoven
Postbus 513
5600 MB Eindhoven
reviews@nieuwarchief.nl
www.win.tue.nl/wgreview



Mircea Pitici (ed.)

The Best Writing on Mathematics 2020

Princeton University Press, 2020

xiv + 228 p., prijs \$24.95

ISBN 9780691207568

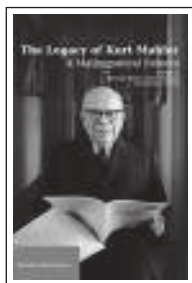
De auteur/editor van dit boek geeft weer wat in zijn ogen de beste beschouwende bijdragen zijn omtrent de wiskunde in al zijn aspecten in het algemeen: theoretisch, toegepast, in de praktijk van alledag, en wat dies meer zij.

Het gaat hier om publicaties die in 2019 zijn verschenen, met daarbij enkele uit 2018 ook nog beschouwd. De auteur noemt, voorzien van naam, toenaam en locatiegegevens, de volgende items: 31 boeken, 28 bijdragen in dagbladen, 229 artikelen. Hij heeft zijn best gedaan om al deze dingen onafhankelijk van elkaar te memoreren. Het doel is voorts om 20 (nog niet eerder beschouwde) bijdragen 'verbatim' voor het voetlicht te brengen. Daarbij valt het op, dat zijn keuzes vooral op aspecten 'over' de wiskunde en over de curricula vitae van de 23 betreffende auteurs betrekking hebben.

Ik vermeld nu die 20 bijdragen, met hier en daar (zeer) kort commentaar van mijn kant en/of trefwoorden, alsmede de locaties waar dit alles te vinden is. [Gebruikte afkortingen: SA = *Scientific American*; MH = *Mathematics Horizons*; QM = *Quanta Magazine*; MM = *Mathematics Magazine*; MI = *The Mathematical Intelligencer*]

(1) S. Strogatz, 'Outsmarting a virus with math' (SA 320), statistiek, covid-19. (2) P.J. Dening en T.G. Lewis, 'Uncertainty' (*Communications ACM* 62), statistiek. (3) B.M. Boghosian, 'The incapable casino' (SA 321), casino-gokken, gezondheid. (4) S. Wagon, 'Reserving the full economy singularity' (MH 76, 2018), economische puzzels, benzinegebruik, harmonisch gemiddelde. (5) J. Versdal, 'The median votes theorem: Why politicians move to the center' (*Medium*, 11 oktober), statistiek, stemstrategieën. (6) J. Baez, 'The math that takes Newton into the quantum world' (*Nautilus*, 28 februari). Prachtig persoonlijk verhaal over hoe hij vanaf zijn achtste levensjaar als het ware de wiskunde ingezogen werd, via zijn ouders, oom Albert en diens dochter, de folkzangeres Joan Baez. Hij wilde 'alles weten' en 'onderzoeken'. Tevens mooie 3-dimensionele plaatjes in kleur in dit artikel. (7) E. Klarreich, 'Decades old computer science conjecture solved in two pages' (QM, 25 juli), Boole'se functies, beschrijving van input-bits, beschreven oplossing van Hao Huang (Emory University) wordt hier verduidelijkt en uitgelegd. (8) R. Montgomery, 'The three body problem' (SA 321), oorsprong, doorwerking en toekomst van dit probleem. (9) C. King, 'The intrigues and delights of Kleinian limit sets' (MI 41), plaatjes in kleur betreffende chaos, fractals, dynamische systemen, Mandelbrot sets. (10) J. Henle, 'Mathematical treasures from Sid Sackson' (MI 41), verhaal over Sid Sackson (1920–2002), een professionele spelletjesuitvinder en de daarbij optredende wiskunde-spel-problemen. (11) D. Linkletter, 'The amazing math inside the Rubik's cube'. Korte beschrijving van de ins en outs van de draaiingen van de kubus van Rubik. Eerdere en uitgebreidere beschrijvingen zijn gegeven door René Schoof, Jan van de Craats en David Singmaster. Zie vooral ook het boek *Cubed, het verhaal van Ernő Rubik, de uitvinder van de kubus* (Thomas Rap, 2020).

(12) C. Adams, 'What is a hyperbolic 3-manifold?' (*Notices AMS* 65), verhaal over dit onderwerp, met technische uitwerkingen en plaatjes. (13) B. Odehnal, 'Higher dimensional geometries: What are they good for?' (*Proceedings of the 18th International Conference on Geometry and Graphics*, L. Concharella, pp. 94–105), cirkels, lijnen, bollen, modellen, euclidische bewegingen, Veronese variëteiten, Segre-producten, Clifford- en exterieure algebra's. (14) J. Propp, 'Who mourns the tenth Heegner number?' (*MH* 27). In de algebraïsche getaltheorie bestaat er een bepaald probleem waarbij de negen getallen 1, 2, 3, 7, 11, 19, 43, 67 en 163 een rol speelden, sinds Gauss' onderzoek. In 1934 toonden Heilbronn en Linfoot aan, dat er hoogstens nog één getal kon bestaan als mogelijke oplossing voor dit probleem. In 1952 bewees Kurt Heegner, een amateurwiskundige, dat er geen tiende mogelijkheid bestond. Jarenlang dacht men dat Heegners argumentatie gebreken vertoonde, maar Harold Stark gaf in 1969 een waterdicht bewijs, daarbij opmerkende dat Heegners bewijs in beginsel correct was met in- en aanvulling van enkele details. In Propps artikel wordt betoogd, dat teruggraven naar oude wiskundeartikelen zijn nut heeft om de ontwikkelingen te begrijpen gedurende de als dan verstreken tijd. (15) P. Horner, 'Your mark, get set, multiply' (*QM*, 23 september), over het verenigvuldigen van getallen en over hoe langzaam of hoe snel dat kan gaan. (16) B. Orlin 1994, 'The year calculus was born' (excerpt uit diens boek *Change is the Only Constant*), verhaaltje over integralen en hoe die te bepalen. (17) D. Teets, 'Gauss's conjecture of the Easter dates' (*MM* 92). Hij/zij die zich nooit heeft afgevraagd over het hoe en wat, dient kennis te nemen van dit artikel; goede technische uitwerkingen met verwijzingen. (18) P. Thagard, 'Mathematical knowledge and reality' (excerpt uit diens boek *Natural Philosophy from Social Brains to Knowledge, Reality, Morality, and Beauty*), wiskundekennis vanuit een filosofisch standpunt bezien, met de invloed daarvan op het dagelijks leven. (19) M. Colyvan, 'The ins and outs of mathematical explanation' (*MI* 18, 2018), wat betekent 'wiskundige uitleg' of het 'begrip van wiskunde'? (20) G.J. Hahn, N. Doganaskoy en W.Q. Mecker, 'Statistical intervals, not statistical significance' (*Significance* 16), nadere en omstreden beschouwingen over deze begrippen. Robert van der Waall



Michael Baake, Yann Bugeaud and Michael Coons (eds.)

The Legacy of Kurt Mahler A Mathematical Selecta

Documenta Mathematica, 2020
679 p., prijs €25,00
ISBN 9783000665646

Kurt Mahler was a German mathematician who worked in the fields of transcendental number theory, diophantine approximation, p -adic analysis, and the geometry of numbers. He was born in 1903 in Krefeld, Germany. He studied in Göttingen under Carl Ludwig Siegel, but with the change of power he realised he would need to leave Germany. After a stint in Groningen he started at the University of Manchester, where he was to remain for twenty-five years. The final thirteen years of his life Mahler was active in

Australia and there he was responsible for a drastic raise of the level of number theory, also through guiding many young mathematicians. In some sense Alf van der Poorten took over the torch from him, also in being a mentor and supporter of young Australian mathematicians. Alf made a start with trying to bring out the *Collected Works of Mahler*. Mahler, in his last letter to Alf wrote: "When my old papers first appeared, they produced little interest in the mathematical world, and it was only in recent times that they have been rediscovered and found useful. So a collection of all my papers may repair this position!" A reason for the long gestation of Mahler's work to become appreciated is perhaps that he was unmoved by mathematical fashion and always followed his own path.

The editors of the present work (also published online as *Documenta Mathematica*, Extra Vol., Mahler Selecta (2019) at eLibM (electronic Library of Mathematics): <https://www.elibm.org/issue?q=se:2204+in:443301>), finished the project begun by Alf. In 2012 the *Kurt Mahler Archive* was started. It is hosted by the Centre for Computer-Assisted Research Mathematics and its Applications (CARMA) and is located at the University of Newcastle in Australia. It contains (in PDF format) every mathematical article published by Mahler, as well as a host of links to biographies and other information. It can be found using the following URL: <https://carma.newcastle.edu.au/resources/mahler>.

The first nine chapters (Part I, in total 190 pages) cover various areas that Mahler worked on and give a glimpse of Mahler's main results and methods and discuss also their further impact. Part II contains several of Mahler's original highly influential publications (although some of the longer papers had to be omitted due to page constraints). Most of these papers are in German. Mahler's published papers and books are always written with great clarity and precision and I will restrict myself here to a further discussion of part I.

Chapter 1 discusses Mahler's work on the geometry of numbers. In this area a typical problem asks whether a particular n -dimensional body contains a non-zero point from a given lattice. Mahler focused mainly on star bodies. Given a reasonable distance function F a star body is defined by $\{x \in \mathbb{R}^n: F(x) \leq 1\}$. A result here became known as Mahler's compactness theorem and found also application outside the geometry of numbers.

Chapter 2 discusses Mahler's measure for polynomials in several variables. Mahler's work on these measures and that on additive relations in fields, have unexpectedly played important roles in the study of algebraic dynamical systems and is delineated in Chapter 3. Rather than discuss all of this in more detail, I will recall the easier notion of Mahler's measure for a polynomial $p(z)$ in one variable (already introduced before Mahler). Let $p(z) = a(z - \alpha_1)(z - \alpha_2) \cdots (z - \alpha_n)$ be the factorization of $p(z)$ over the complex numbers. The Mahler measure $M(p)$ is defined as $M(p) = |a| \prod_{|\alpha_i| \geq 1} |\alpha_i|$. The smallest known Mahler measure (greater than 1) is for Lehmer's polynomial $P(x) = x^{10} + x^9 - x^7 - x^6 - x^5 - x^4 - x^3 + x + 1$ and has Mahler measure 1.176280818.... It is a famous open problem whether or not this Mahler measure is indeed the minimal one.

Chapter 4 concerns Mahler's classification of complex numbers. Let z be a real or complex number. (This reminds the reviewer of a discussion he had many years ago with Alf on how to name a number that is complex, but not real. Obviously, 'a really complex number' is confusing. Alf suggested 'dinkum complex', the word dinkum being informal Australian for 'really, truly, honestly'.) For positive integers M and N , we define $\omega_N(M, z) = \min |\sum_{k=0}^M a_k z^k|$, where

the minimum is taken over all nonzero sums with integers $|a_k| \leq N$. Then we define $\omega_M(z) = \limsup_{N \rightarrow \infty} \log(1/\omega_N(M, z)) / \log N$ and $\omega(z) = \limsup_{M \rightarrow \infty} \omega_M(z) / M$. In 1932, Mahler classified the complex numbers into several subclasses. Namely, a number z is an A -number if $\omega(z) = 0$; it is an S -number if $0 < \omega(z) < \infty$. If $\omega(z)$ is infinite, then z is a T -number if all the $\omega_M(z)$ are finite, and a U -number otherwise. A few years later he proposed a similar classification of p -adic numbers. It is believed that values taken by ‘classical functions’ at (reasonable) nonzero algebraic numbers, are S -numbers if they are transcendental. A result of Popken implies, for example, that e is an S -number (apparently the notation S -number was chosen to honor Siegel). Indeed, the exponential function is quite a classical function and 1 is an algebraic number. In 1939, a related classification was introduced by Koksma. Mahler’s aim was to prove algebraic independence of numbers such as e and π of Liouville numbers. A real number u is called a Liouville number, if for any positive real number w , there exists a rational number x/y such that $0 < |u - x/y| < y^{-w}$. Mahler showed that two algebraically dependent numbers belong to the same class. He also showed that the set of A -numbers is the set of algebraic numbers. Mahler’s results allow for the conclusion that e and any Liouville number are algebraically independent. Mahler conjectured that $\omega_M(z) = M$, respectively $\omega_M(z) = (M-1)/2$ for almost all real (respectively complex) numbers z and for all integers M . After partial results by several authors, this conjecture was finally confirmed by Sprindžuk in 1965. The latter introduced a third classification of the complex numbers. Using ideas from the theory of dynamical systems (flows on homogeneous spaces) Kleinbock and Margulis in 1998 improved on Sprindžuk’s result.

Mahler’s method (so named by Alf) is discussed in Chapter 5. In 1926/27 Mahler was really sick and laid up in bed and started to think about the function $f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} z^{2^n}$. He was trying to prove that it is irrational, when evaluated in a rational argument z . However, he achieved rather more and finally proved that if α with $0 < |\alpha| < 1$ is an algebraic number, then $f(\alpha)$ is a transcendental number. Mahler’s method was born out of this result. The proof is based on the functional equation $f(z^2) = f(z) - z$, and follows a scheme of demonstration which is now classical in transcendence theory:

- Construction of an auxiliary function together with a corresponding evaluation.
- Proving an upper bound for this evaluation by means of analytic estimates.
- Proving the non vanishing of this evaluation by means of zero estimates.
- Proving a lower bound for this estimate by means of arithmetic estimates.

By evaluating the upper and lower bound in a suitable choice of parameters, a contradiction is then derived. Carrying out this scheme is usually not very difficult, which makes it an attractive method when it applies. In general it only works for functions satisfying some functional equation. Sadly, Mahler’s first three papers on this topic did not catch on for more than forty years. This changed in 1969, when Wolfgang Schwarz wrote a paper in which he reproved some simpler version of Mahler’s results, and Mahler felt compelled to write an article to inform the mathematical community about his old results. This led to a turning point, and by now a great many works based on this method have been published and also a book (Nishioka, *Lecture Notes in Mathematics* 1631).

In Chapter 6 effective methods of constructing Diophantine approximations to numbers and their implications for proving transcendence results are discussed. This often involves certain explicit families of polynomials. For example, using such methods Mahler and Popken proved that if z is any dinkum complex number in the upper half plane, then at least one of the three values of the Eisenstein series $E_2(z)$, $E_4(z)$ and $E_6(z)$ is transcendental. Another appealing result (of Mahler alone) is that $|\pi - p/q| > q^{-42}$ for every $q \geq 2$, showing that π in some sense cannot be approximated too well by any rational number p/q .

Chapter 7 considers Mahler’s work on Diophantine equations. Let $F(X, Y) = a_0 X^n + a_1 X^{n-1} Y + \dots + a_n Y^n$ be a binary form with integer coefficients and $n \geq 3$. We assume further that it is irreducible over the rational numbers. Thue proved that for every positive integer m the equation $F(a, b) = m$ has only finitely many solutions in integers a, b . Mahler considerably extended this result. Given primes $p_1, \dots, p_s$, the equation $F(a, b) = \pm p_1^{e_1} \dots p_s^{e_s}$ is now called the Thue–Mahler equation. The challenge is to find all solutions $(a, b, e_1, \dots, e_s)$ or to estimate the number of solutions. A simple equation of this form (but with $n = 2$) is the Ramanujan–Nagell equation $a^2 + 7 = 2^e$. Nagell showed in 1948, using elementary algebraic number theory, that it has only the solutions (a, e) given by $(\pm 1, 3), (\pm 3, 4), (\pm 5, 5), (\pm 11, 7)$ and $(\pm 181, 15)$.

The short Chapter 8 is devoted to the very important work of Mahler on the zeros of linear recurrences $\{a_n\}_{n \geq 0}$. For these, the n -th term is expressed as a fixed linear combination of a finite number of the previous terms (the Fibonacci numbers F_n defined by $F_n = F_{n-1} + F_{n-2}$ and starting values $F_0 = 0, F_1 = 1$, being the standard example). If the coefficients in this relation and all the values of the recurrence are from a field K , we talk about a K -valued linear recurrence. The Skolem–Mahler–Lech theorem states that the set of natural numbers n for which $a_n = 0$ is a union of at most finitely many infinite arithmetic progressions along with a finite set. Skolem proved this result in case the terms of the sequence are integers. Mahler extended it to the case where the terms are algebraic numbers and Lech extended it to arbitrary fields of characteristic zero.

The final chapter deals with miscellaneous results. Mahler’s first paper (1927) was in applied mathematics. He was an unpaid assistant of ... Norbert Wiener! Wiener had received a Guggenheim Fellowship to work with Max Born (Göttingen) and then to travel to Copenhagen to work with Niels Bohr. Interestingly, in this work there were connections with themes that would later recur in Mahler’s work, for example with Champernowne’s number 0.12345678910111213141516... . Let me just mention one nice result of Mahler from 1937. If $f(x)$ is a non-constant polynomial with integer coefficients such that $f(k) \geq 0$ for every positive integer k , then the decimal number 0. $f(1)f(2)f(3)\dots$ formed by concatenating the decimal expansions of the $f(k)$, is both transcendental and not a Liouville number. Taking $f(x) = x$ one obtains the Champernowne number.

The book clearly shows how many notions and theorems are called after Mahler. Likely, this comes for many as a surprise and so it still seems that even today the works of Mahler are not as well-known as they deserve to be. Hopefully, this book can amend this situation! Libraries that collect collected works certainly should have this one. Further, for workers in the area it will be an invaluable source of memahlerabilia.

Pieter Moree



Jelke Bethlehem

Het grafiekenboek

Amsterdam University Press, 2022

222 p., prijs €29,99

ISBN 9789463720984

In de inleiding (1) van dit boek wordt aan de hand van de rapportage van een onderzoek van het Centraal Bureau voor de Statistiek naar *pesten op internet* besproken hoe de resultaten in een artikel weergegeven kunnen worden. Dat zou kunnen door een tekst over de uitkomsten, door een tabel of door een grafiek. De keuze voor een grafiek wordt in de inleiding aan de hand van een vijftal eigenschappen gemotiveerd. Er volgt ook meteen de waarschuwing dat je bij het gebruik van grafieken je lezers op het verkeerde been kunt zetten.

Na de inleiding volgt in een kort hoofdstuk (2) een kleine terugblik op het gebruik van grafieken in de loop van de geschiedenis: van de oudste landkaart tot de eerste weergave van tijdreeksen.

De volgende twee hoofdstukken (3,4) richten zich op de ingrediënten van een grafiek en de richtlijnen voor het maken van grafieken. De weergaven van de data in de grafiek in combinatie met de titels, de assen, kleuren en keuze van type grafiek worden aan de hand van vele voorbeelden besproken. Bij het maken van grafieken wordt er veel aandacht besteed aan het gerommel met de assen en het gebruik van figuren in plaats van staven. Voorbeelden laten duidelijk zien dat het gebruik van voor de lezer misschien wel leuke figuren zoals een biervlas, een olievat of driedimensionale cirkeldiagrammen, vaak misleidend zijn.

In de volgende twee hoofdstukken (5,6) worden de verschillende soorten grafieken die gebruikt kunnen worden voor respectievelijk kwantitatieve en kwalitatieve variabelen besproken. Daarbij worden voor- en nadelen van de types benoemd en aan het eind

van elk hoofdstuk vind je een mooi overzicht met aandachtspunten waar je rekening mee dient te houden bij het maken van die specifieke grafieken. Bij het presenteren van kwantitatieve data wordt ook een kleine uitstap gemaakt naar betrouwbaarheidsintervallen. Dit wordt op een redelijk eenvoudige manier benaderd zonder al te veel uit te wijden in statistische theorie, wat het voor middelbare scholieren makkelijk maakt om te begrijpen. De auteur laat verder duidelijk merken dat de favoriete grafiekensoort het staafdiagram is en dat driedimensionale grafiekensoorten vermeden dienen te worden.

De volgende drie hoofdstukken (7,8,9) gaan over grafieken die samenhang weergeven tussen respectievelijk kwantitatieve, kwalitatieve en gemengde variabelen. Ook hier volgt aan het eind van elk hoofdstuk weer een overzicht met tips voor het maken van goede grafieken om samenhang tussen twee of meerdere variabelen weer te geven. Ook bij deze hoofdstukken komt een aantal statistische hulpmiddelen aan de orde, zoals correlatiecoëfficiënt en Chi-kwadrat-toetsen.

In het volgende hoofdstuk (10) komt aan de orde hoe je op een goede manier tijdreeksen kunt weergeven. Het laatste hoofdstuk (11) bespreekt de weergave binnen thematische kaarten. Dat wordt voornamelijk aan de hand van de verdeling van de kiesmannen bij de Amerikaanse presidentsverkiezingen gedaan. De bekende kaart van de Verenigde Staten met de rode en blauwe staten wordt op verschillende manieren weergegeven. Ook aan het einde van deze twee hoofdstukken weer een mooi overzicht met tips voor het maken van dit soort grafieken.

Dit boek is mijns inziens geschikt voor leerlingen in het middelbaar onderwijs die bij het schrijven van hun profielwerkstuk begeleid moeten worden. Dit boek biedt voldoende handvaten hoe ze het beste gegevens grafisch weer kunnen geven. Maar ook voor bachelor- en masterstudenten is dit boek mijns inziens een aanrader om te bekijken. Voor een ervaren statisticus staat er niet veel schokkende informatie in. Maar door de handige samenvattingen aan het einde van de hoofdstukken kan het als een mooi naslagwerk dienen.

Richard Jeurissen

Recent verschenen publicaties. Als u een van deze boeken wilt bespreken of als u suggesties heeft voor andere boeken voor deze rubriek, laat dit dan per e-mail weten aan reviews@nieuwarchief.nl.



Ryan B. Hayward

Hex: A Playful Introduction

American Mathematical Society, 2022

ISBN 9781470464929

bookstore.ams.org/nml-54



Colin Adams

The Tiling Book

An Introduction to the Mathematical Theory of Tilings

American Mathematical Society, 2022

ISBN 9781470468972

bookstore.ams.org/mbk-142



Pierre Guiraldenq
Émile Borel
A Life in Mathematics and Politics Across Two Centuries
 EMS Press, 2022
 ISBN 9783985470136
ems.press/books/standalone/244



Gunnar Carlsson, Mikael Vejdemo-Johansson
Topological Data Analysis with Applications
 Cambridge University Press, 2022
 ISBN 9781108838658
cambridge.org/9781108838658



Pieter Belmans, Wei Ho, Aise Johan de Jong
Stacks Project Expository Collection
 Cambridge University Press, 2023
 ISBN 9781009054850
cambridge.org/9781009054850



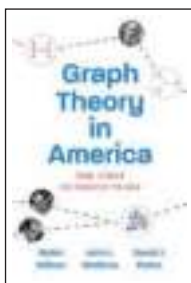
Jan-Hendrik Evertse, Kálmán Györy
Effective Results and Methods for Diophantine Equations over Finitely Generated Domains
 Cambridge University Press, 2022
 ISBN 9781009005852
cambridge.org/9781009005852



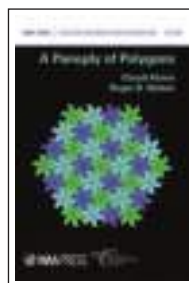
James Read, Nicholas J. Teh (eds.)
The Philosophy and Physics of Noether's Theorems
A Centenary Volume
 Cambridge University Press, 2022
 ISBN 9781108486231
cambridge.org/9781108486231



Shmuel Weinberger
Variations on a Theme of Borel
 Cambridge University Press, 2022
 ISBN 9781107142596
cambridge.org/9781107142596



Robin Wilson, John J. Watkins, David J. Parks
Graph Theory in America
The First Hundred Years
 Princeton University Press, 2023
 ISBN 9780691194028
press.princeton.edu/books/hardcover/9780691194028/graph-theory-in-america



Claudi Alsina, Roger B. Nelsen
A Panoply of Polygons
 AMS/MAA Press, 2023
 ISBN 9781470471842
bookstore.ams.org/dol-58



Jean Gallier, Jocelyn Quaintance
Homology, Cohomology, and Sheaf Cohomology for Algebraic Topology, Algebraic Geometry, and Differential Geometry
 World Scientific, 2022
 ISBN 9789811245022
worldscientific.com/worldscibooks/10.1142/12495



Tuvi Etzion
Perfect Codes and Related Structures
 World Scientific, 2022
 ISBN: 9789811255878
worldscientific.com/worldscibooks/10.1142/12823

Problemen

| Problem Section

This Problem Section is open to everyone; everybody is encouraged to send in solutions and propose problems. Group contributions are welcome. We will select the most elegant solutions for publication. For this, solutions should be received before **15 April 2023**. The solutions of the problems in this issue will appear in one of the subsequent issues.

Problem A

Does there exist a partitioning X of $\mathbb{R}$ into infinite sets such that for every choice map $c: X \rightarrow \mathbb{R}$, i.e. a map c such that $c(S) \in S$ for all $S \in X$, the image of c is dense in $\mathbb{R}$?

Problem B

Show that for all $k \in \mathbb{Z}$ there exists an $x \in \mathbb{Q}$ for which there are at least two subsets $S \subseteq \mathbb{Z}_{\geq 1}$ such that $\sum_{s \in S} s^k = x$.

Problem C (proposed by Daan van Gent)

For a group G and $g \in G$ write $c(g) = \{hgh^{-1} \mid h \in G\}$ and $G^\circ = \{g \in G \mid \#c(g) < \infty\}$.

- Show that G° is a normal subgroup of G and that $G^{\circ\circ} = G^\circ$.
- Now define $G_\circ = G/G^\circ$. Show that there exists a group G for which the sequence $G, G_\circ, G_{\circ\circ}, \dots$ does not stabilize, i.e. for none of the groups H in the sequence we have $H^\circ = 1$.

Edition 2022-3 We received solutions from Rik Biel, Brian Gilding and Pieter de Groen.

Problem 2022-3/A

- Let $n \in \mathbb{Z}_{\geq 1}$ and let $f: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ be continuous such that for all $x \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\}$ we have $|f(x)| < |x|$. Write f^m for the m th iteration of f . Prove that

$$\lim_{m \rightarrow \infty} f^m(x) = 0.$$

- Denote by ℓ^2 the Hilbert space of square-summable sequences of real numbers. Prove that there exists a continuous map $f: \ell^2 \rightarrow \ell^2$ such that for all $x \in \ell^2$ we have $|f(x)| < |x|$ and for some $a \in \ell^2$ we have that $\{f^m(a)\}_{m=1}^\infty$ does not converge.

Solution This problem is solved by Brian Gilding, Pieter de Groen and partially solved by Rik Biel. This proof is due to Brian Gilding.

- It suffices to show that for all $x \in \mathbb{R}^n$ and $\varepsilon > 0$ there exists an $m \geq 1$ such that $|f^m(x)| < \varepsilon$. If $|x| \leq \varepsilon$, this holds for $m = 1$. On the other hand, if $|x| > \varepsilon$, then, by the compactness of $S := \{z \in \mathbb{R}^n: \varepsilon \leq |z| \leq |x|\}$ and by continuity of f , the map $S \rightarrow [0, 1)$ given by $z \mapsto |f(z)|/|z|$ attains a maximum $k \in [0, 1)$ on S . Hence, $|f^m(x)| \leq k^m |x|$ for all $m \geq 1$ for which $|f^{m-1}(x)| \geq \varepsilon$. This gives $|f^m(x)| < \varepsilon$ for sufficiently large m .
- Consider

$$f(x) = (0, g(1, x_1), g(2, x_2), g(3, x_3), \dots) \quad \text{for } x = (x_1, x_2, x_3, \dots),$$

where

$$g(n, t) = \frac{n(n+2)}{(n+1)^2} t.$$

For all $x \in \ell^2$ we have $f(x) \in \ell^2$, since $g(n, \cdot)$ is a contraction on $\mathbb{R}$ for every $n \geq 1$. Moreover, for all $x \in \ell^2$ we have $|f(x)| \leq |x|$, with strict inequality if $x \neq 0$. Inasmuch f is linear, it follows that $f: \ell^2 \rightarrow \ell^2$ is continuous. Defining $e_1 = (1, 0, 0, 0, \dots)$, $e_2 = (0, 1, 0, 0, 0, \dots)$, $e_3 = (0, 0, 1, 0, 0, 0, \dots)$ and so on,

$$f^m(e_i) = \left(\prod_{j=i}^{m+i-1} g(j, 1) \right) e_{m+i} = \frac{i(m+i+1)}{(i+1)(m+i)} e_{m+i} \quad \text{for every } m \geq 1 \text{ and } i \geq 1.$$

Thus, for all $a \in \ell^2 \setminus \{0\}$, $\{f^m(a)\}_{m=1}^\infty$ has no accumulation points in ℓ^2 .

Problem 2022-3/B

Prove that for every integer n there exists a finite group G such that n equals the number of normal subgroups minus the number of non-normal subgroups.

Solution For a group G write $s(G) = (a, b)$ where a is the number of normal subgroups and b the number of non-normal subgroups of G . For all $k \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$ and p prime we have $s(\mathbb{Z}/p^k\mathbb{Z}) = (k+1, 0)$, so for all $n > 0$ we are done. For $n = 0$ we notice that $s(S_3) = (3, 3)$.

Claim. Let G_1 and G_2 be finite groups of coprime order with $s(G_i) = (a_i, b_i)$. Then $s(G_1 \times G_2) = (a_1 a_2, a_1 b_2 + a_2 b_1 + b_1 b_2)$.

Proof. Let $n = \#G_1$ and $m = \#G_2$. Then by Bézout there exist $x, y \in \mathbb{Z}$ such that $xn + ym = 1$. Let $H \subseteq G_1 \times G_2$ be a subgroup. For $(g, h) \in H$ we have

$$H \ni (g, h)^{ym} = (g^{ym}, h^{ym}) = (g^{1-xn}, 1) = (g, 1),$$

and similarly $(1, h) \in H$. Hence $H = H_1 \times H_2$ for subgroups $H_i \subseteq G_i$. Note that H is normal if and only if H_i is normal in G_i for both i . $\square$

For $n < 0$ it suffices to find a finite group G with $s(G) = (a, b)$ and $a - b = -1$, since $s(G \times (\mathbb{Z}/p^k\mathbb{Z})) = (a(k+1), b(k+1))$ and $a(k+1) - b(k+1) = -(k+1)$ for $p \nmid \#G$ a prime and $k \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$.

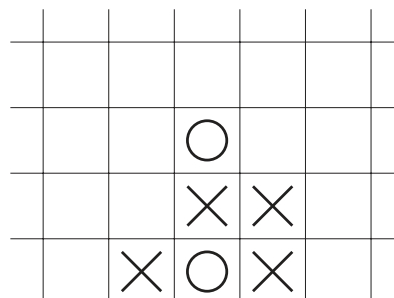
Consider the semidihedral group

$$\text{SD}_{16} = \langle a, x \mid a^8 = x^2 = 1, xax^{-1} = a^3 \rangle = C_8 \rtimes C_2$$

of order 16. A subgroup $H \subseteq \text{SD}_{16}$ either contains a^4 , or is of the form $\{1\}$ or $\langle a^{2k}x \rangle$ for $k \in \mathbb{Z}/4\mathbb{Z}$. In the former cases we may interpret H as a subgroup of the quotient $\text{SD}_{16}/\langle a^4 \rangle \cong D_8$ with $s(D_8) = (6, 4)$, while in the latter case only $\{1\}$ is normal. Hence $s(\text{SD}_{16}) = (7, 8)$.

Problem 2022-3/C

Olivia and Xavier play the game *Connect Three* on an infinite half grid on a sheet of paper. The rules are as follows: Olivia and Xavier take alternating turns, starting with Olivia. In her turn, Olivia draws an $\circ$ in a square with no empty squares below. In Xavier's turn, he twice draws an $\times$ in a square with no empty squares below. Olivia wins if she gets three $\circ$'s in a row, either horizontally, vertically, or diagonally. Can Xavier prevent Olivia from winning?



Oplossingen

| Solutions

Solution Yes. Represent the game board by $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}_{\geq 0}$. Then Xavier plays according to the following rules:

1. Whenever Olivia plays (a, b) with $a \equiv 0 (3)$ or $b > 0$, Xavier plays $(a, b+1)$ and $(a, b+2)$.
2. Whenever Olivia plays $(a, 0)$ with $a \not\equiv 0 (3)$, Xavier plays $(v, 0)$, where $v > a$ is minimal such that $v \not\equiv 0 (3)$ and $(v, 0)$ is empty. Moreover, Xavier plays $(u, 0)$, where $u < a$ is maximal such that $u \not\equiv 0 (3)$ and $(u, 0)$ is empty.

Let $a \in \mathbb{Z}$. One inductively shows that after Xavier's turn

1. if $a \equiv 0 (3)$, then column a has height $\equiv 0 (3)$, with (a, b) containing an $\times$ precisely when $b \not\equiv 0 (3)$;
2. if $a \not\equiv 0 (3)$, the column a is either empty or has height $\not\equiv 0 (3)$, with (a, b) containing an $\times$ when $b \equiv 2 (3)$.

By 1 and 2 no $\circ$ will ever be placed in a row b with $b \equiv 2 (3)$. Hence Olivia cannot obtain a vertical or diagonal three-in-a-row. By 1 no horizontal three-in-a-row can be obtained in a row b with $b \not\equiv 0 (3)$, while by 2 no horizontal three-in-a-row can be obtained in a row b with $b \equiv 0$ and $b > 0$. Finally, note that it is impossible that $(a, 0)$ and $(a+1, 0)$ both contain an $\circ$ for $a \equiv 1 (3)$. The first time Olivia plays in either of these squares, the other either already contains an $\times$, or it is empty, after which Xavier will play in it by rule 2. Hence Olivia cannot win.

Note: In the September 2022 issue Thijmen Krebs should also have been mentioned as one of the contributors of solutions for Problems 2022-1/A, 2022-1/B and 2022-1/C.

