

Inhoud | Contents

Artikelen | Features

- In Memoriam | Obituary**
- 201 **Bas Edixhoven: Genreus, optimistisch en betrokken**
Robin de Jong, Jaap Top, Gerard van der Geer, René Schoof
- Oratie | Inaugural Lecture**
- 208 **Opgetrommeld voor spectra in de meetkunde**
Walter D. van Suijlekom
- Interview | Interview**
- 218 **Craig Barton: How he wishes he'd taught maths**
Mark Timmer, Wim Caspers
- Column | Column**
- 226 **Danse macabre**
Piet Groeneboom
- In Memoriam | Obituary**
- 229 **Mient Jan Faber: Van wiskundige tot vredes-activist**
K.P. Hart, Teun Koetsier, Riekus Kok, Jan van Mill
- Onderzoek | Research**
- 237 **Egyptian fractions**
Thomas F. Bloom, Christian Elsholtz

Rubrieken | Departments

- 195 **Redactioneel**
Raf Bocklandt
- 196 **Agenda**
Nikki Levering
- 198 **Nieuws**
Nikki Levering
- 235 **Proof by example: Sophie Huiberts**
Clara Stegehuis, Francesca Arici
- 246 **In de verdediging**
Nicolaas Starreveld
- 249 **Wiskundigen in den vreemde**
Teun D.H. van Nuland
- 251 **Boekbesprekingen**
Hans Cuypers, Hans Sterk

Uitgelicht

218



Een interview met Graig Barton, de auteur van *Volgens Barton*, een boek over lesgeven in wiskunde.

237



Thomas Bloom en Christian Elsholtz over Egyptische breuken, waar de laatste decennia veel belangstelling voor is.

Colofon

Het Nieuw Archief voor Wiskunde is een uitgave van het Koninklijk Wiskundig Genootschap en verschijnt vier maal per jaar. Het tijdschrift richt zich op eenieder die zich beroepsmatig met wiskunde bezighoudt, als academisch of industrieel onderzoeker, student, leraar, journalist of beleidsmaker. Het stelt zich ten doel te berichten over ontwikkelingen in de wiskunde in het algemeen en in de Nederlandse wiskunde in het bijzonder.

ISSN 0028-9825

Adres

Nieuw Archief voor Wiskunde
Centrum Wiskunde & Informatica
Postbus 94079, 1090 GB Amsterdam
tel. 020-5924288
redactie@nieuwarchief.nl
www.nieuwarchief.nl

Hoofredactie

Raf Bocklandt (r.r.j.bocklandt@uva.nl)
Robbert Fokkink (r.j.fokkink@tudelft.nl)

Eindredactie/Bladmanager

Fred Drissen (fred@nieuwarchief.nl)

Redactie

Francesca Arici (UL), Viktor Blåsjö (UU), Hans Cuypers (TU/e), Teun Koetsier (VU), Nikki Levering (UvA), Daan Mulder, Nicolaos Starreveld (UvA), Clara Stegehuis (UT), Hans Sterk (TU/e), Mark Timmer (UT)

Problemenrubriek (problems@nieuwarchief.nl)

Onno Berrevoets en Daan van Gent

Bureauredactie

Anne van Grinsven

Illustraties

Ryu Tajiri

Vormgeving

Susanne Laws (omslag, begeleiding binnenwerk)
Kitty Molenaar (ontwerp)

Druk

Veldhuis Media

Advertenties

advertenties@nieuwarchief.nl

Koninklijk Wiskundig Genootschap

www.wiskgenoot.nl

Platform Wiskunde Nederland

www.platformwiskunde.nl

European Mathematical Society

www.euro-math-soc.eu

International Mathematical Union

www.mathunion.org

Koninklijk Wiskundig Genootschap

Het Koninklijk Wiskundig Genootschap (KWG) is een landelijke vereniging van beoefenaars van de wiskunde. In 1778 opgericht onder de zinspreuk: 'Een onvermoeide arbeid komt alles te boven' is het 's werelds oudste nationale wiskundegenootschap. Leden ontvangen het Nieuw Archief voor Wiskunde als onderdeel van hun lidmaatschap.

Bestuur

Barry Koren (TU/e, voorzitter), Mathisca de Gunst (VU, vice-voorzitter), Alef Sterk (RUG, penningmeester), Jop Briët (CWI, secretaris), Danny Beckers (VU), Rogier Bos (UU), Michael Muger (RU), Willem Jan Palenstijn (CWI), Wioletta Ruszel (TUD).

Secretariaat

Koninklijk Wiskundig Genootschap, CWI
Postbus 94079, 1090 GB Amsterdam
wiskgenoot@wiskgenoot.nl

Ledenadministratie KWG / Abonnementen

admin@wiskgenoot.nl, tel. 020-5924008
Wijzigingen of opzegging kunt u ook doorgeven door in te loggen op www.wiskgenoot.nl.

Contributie

Tarieven per jaar (bij betaling per automatische incasso krijgt u €2,50 korting):

- gewoon lid: €97,50
 - reciprociteitslid: €77,50
 - gepensioneerden en werklozen: €52,50
 - aio's, oio's, studenten: €42,50 (max. 4 jaar)
 - lid zonder Nieuw Archief: €57,50
- Studenten en pas afgestudeerden kunnen een jaar lang gratis lid worden.

Voor verzending van het Nieuw Archief naar het buitenland wordt een portotoeslag van €10 in rekening gebracht.

Instituten in Nederland en buitenland kunnen zich abonneren op het Nieuw Archief voor Wiskunde voor €105 (Nederland), €115 (Europa) of €117,50 (buiten Europa).

Members of foreign societies

Members of SIAM, the *Société Mathématique de France*, the *Gesellschaft für Angewandte Mathematik und Mechanik*, the *Deutsche Mathematiker-Vereinigung*, and of the *American, Australian, Belgian, Indian, London, Spanish, and South-African Mathematical Societies* living outside of the Netherlands pay €77,50 instead of the full membership fee of €97,50 a year. Conversely, these foreign societies, as well as the VvS+OR and the NVORWO, have reduced membership fees for KWG members. A postage charge of €10 is added for members living abroad but in Europe, and a charge of €12,50 for members living outside of Europe.

Exchange subscriptions

Koninklijk Wiskundig Genootschap Library
Centrum Wiskunde & Informatica
P.O. Box 94079, NL-1090 GB Amsterdam
KWG-exchange@cw.nl

Informatie voor auteurs

Kopij

Kopij dient per e-mail te worden aangeboden aan kopij@nieuwarchief.nl. Voor meer informatie en auteursinstructies zie www.nieuwarchief.nl.

Volgende nummers

nummer	maand	verschijnen	deadline kopij
24(1)	maart	2023	verstrekken
24(2)	juni	2023	01-02-2023
24(3)	september	2023	01-05-2023
24(4)	december	2023	01-08-2023

Instituuts- en bedrijfsleden

De publicaties van het KWG worden mede mogelijk gemaakt door de bijdragen van de volgende instituten en bedrijven.



Centrum Wiskunde & Informatica



Universiteit van Amsterdam



Vrije Universiteit Amsterdam



Rijksuniversiteit Groningen



Universiteit Leiden



Radboud Universiteit Nijmegen



Universiteit Utrecht



Technische Universiteit Delft



Technische Universiteit Eindhoven



Universiteit Twente



Elsevier



ORTEC

Op het omslag

Kun je de vorm van een object reconstrueren, puur en alleen door ernaar te luisteren? In zijn oratie belicht Walter van Suijlekom deze onderzoeksvraag uit de spectraalanalyse voor het opgetrommelde publiek. Lees een weergave van zijn oratie op pagina 208.

Ode aan het tegenvoorbeeld

Net zoals loodgieters, timmerlieden en monteurs beschikken wiskundigen over een heel arsenaal aan technische hulpmiddelen die hen helpen bij het uitoefenen van hun beroep. In plaats van schroevendraaiers, beitels en Engelse sleutels leren we onze studenten hoe ze inductie, contrapositie of *reductio ad absurdum* moeten gebruiken en drillen we hen met standaardsommen waarop die technieken van toepassing zijn.

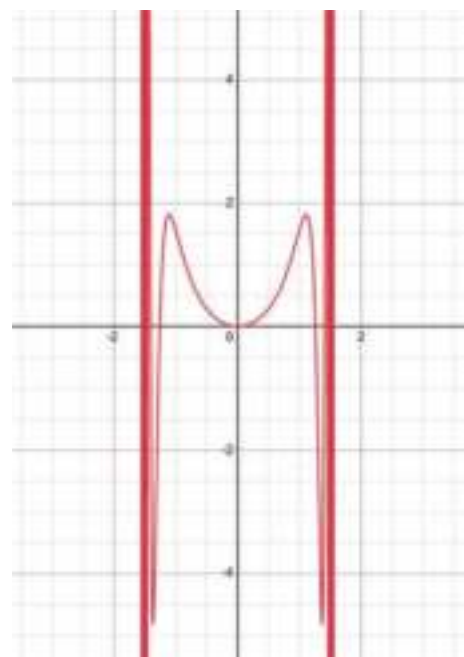
Een veelgebruikte methode die echter veel moeilijker aan te leren is, is die van het tegenvoorbeeld. Bij het lezen van de klassieke vraag ‘bewijs of geef een tegenvoorbeeld’ breekt bij menig student het angstzweet uit want ‘hoe begin je daaraan?’. Het vinden van een goed tegenvoorbeeld is een kunst op zich en vereist een kennis die meer weg heeft van die van een jager of ornitholoog, dan van een loodgieter of monteur. Je moet namelijk vaak het hele landschap van je vakgebied doorkruist hebben en goed op de hoogte zijn van de lokale fauna en flora voor een succesvolle vangst. Maar eens je je specimen gevonden hebt, is het een waar genoegen om het van alle kanten te bewonderen en te delen met je collega's.

Tegenvoorbeelden komen overal in de wiskunde voor (in dit nummer vind je een mooi exemplaar uit de spectraalanalyse in de oratie van Walter van Suijlekom), maar het vakgebied bij uitstek waar ze opduiken is toch wel de topologie. Hier vind je een ware freakshow van wat er allemaal kan mislopen als je intuïtieve meetkundige concepten probeert te wringen in een abstract formalisme. Er is zelfs een heel boek aan gewijd: *Counterexamples in Topology* door Lynn Steen en Arthur Seebach, waarin je kunt genieten van een verzameling van meer dan 140 topologische ruimtes met wonderlijke eigenschappen. Een indrukwekkende collectie maar blijkbaar toch niet altijd voldoende...

Onlangs kreeg ik namelijk een mail van een student met een vraag over de stelling van Jordan. Die stelt dat elke gesloten kromme het vlak opdeelt in twee delen en de student was nieuwsgierig naar wat er gebeurt met een open kromme. Het complement van een lijnstuk bestaat maar uit één samenhangend deel, terwijl een volledige lijn het vlak in twee delen verdeelt. Daarom vroeg hij zich af of men kan aantonen dat een open kromme (of technischer een deelvariëteit van het vlak homeomorf met $\mathbb{R}$) dat vlak altijd verdeelt in ten hoogste twee delen.

Mijn eerste reactie was: “Hmm, dit lijkt me sterk. Misschien kan ik iets vinden in Steen and Seebach.” Helaas leverde de index niets op, maar het bekijken van het omslag bracht me op een idee.

Op de voorkant stond een afbeelding van de *topologist's sine curve*: $\{(x, \sin(1/x)) : x > 0\} \cup \{(0, 0)\}$, het standaardvoorbeeld van een samenhangende maar niet padsamenhangende ruimte. Na heel wat probeer- en puzzelwerk kwam ik uiteindelijk met mijn eigen sinuskromme op de proppen die het vlak verdeelt in vier delen: $\{\arctan(x), x \sin(x) : x \in \mathbb{R}\}$. Met een tevreden gevoel typte ik mijn antwoord in en drukte op de verzendknop.



Mijn sinuskromme die het vlak in 4 delen verdeelt.

Epiloog

Die avond dronk ik samen met enkele collega's nog een biertje en toonde hen trots mijn speciale kromme. Al snel ontspon zich een discussie over het maximaal aantal componenten waarin een kromme het vlak kan verdelen. Een hele rits van krommes passeerde de revue en uiteindelijk vonden we een winnaar: een kromme die het vlak verdeelde in een overaftelbaar aantal delen. Hoe die eruitzag laat ik aan jullie verbeelding over. ☺

Raf Bocklandt, hoofdredacteur

Korteweg-de Vries Instituut, Universiteit van Amsterdam

Agenda

| Upcoming Events

december 2022

5–9 december 2022

❑ Counterfactual prediction for personalized healthcare

Lorentz workshop, mede georganiseerd door Dania Weir (UU) en Nan van Geloven (UL).

plaats Lorentz Center@Snellius, Leiden

info lorentzcenter.nl

8 december 2022

❑ Stochastic Analysis and Applications

Miniworkshop, georganiseerd door Sonja Cox en Asma Khedher (UvA).

plaats Universiteit van Amsterdam

info staff.fnwi.uva.nl/s.g.cox/MSA.html

12–16 december 2022

❑ Recent Developments in Stochastic Duality

Workshop over de meeste recente ontwikkelingen binnen de theorie en toepassingen van dualiteit in Markov-processen.

plaats Eurandom, Eindhoven

info eurandom.nl

19–23 december 2022

❑ The Lorentz Gas

Lorentz workshop, mede georganiseerd door Frank den Hollander, Luca Avena en Dalia Terhesiu (UL).

plaats Lorentz Center@Snellius, Leiden

info lorentzcenter.nl

januari 2023

14 januari 2023

❑ Wintersymposium KWG

Het jaarlijkse wintersymposium van het Koninklijk Wiskundig Genootschap. Dit jaar is het thema 'De wiskunde achter kunstmatige intelligentie'.

plaats Academiegebouw, Utrecht

info sites.google.com/view/wintersymposium2023

16–18 januari 2023

❑ LNMB-conferentie

Conferentie over de wiskunde van besliskunde georganiseerd door het Landelijk Netwerk Mathematische Besliskunde (LNMB).

plaats Kontakt der Continenten, Soesterberg

info lnmb.nl

16–27 januari 2023

❑ Eerste ronde Nederlandse Wiskunde Olympiade

De eerste ronde van de jaarlijkse landelijke wiskundewedstrijd voor leerlingen uit de onderbouw van het havo en het vwo.

plaats op eigen scholen

info wiskundeolympiade.nl

18–20 januari 2023

❑ Creativity in Mathematics and Artificial Intelligence

Workshop over de rol van creativiteit in menselijke wiskundige begripsvorming en kunstmatige intelligentie.

plaats Universiteit Maastricht

info aanmelder.nl/cmaj/home

23–25 januari 2023

❑ Winter School Mathematical Finance

Winterschool over financiële wiskunde met onder andere minicursussen van Jan Obłój (Oxford) en Gilles Pagès (Sorbonne Université).

plaats Kontakt der Continenten, Soesterberg

info staff.fnwi.uva.nl/p.j.c.spreij/winterschool/winterschool.html

30 januari – 3 februari 2023

❑ Studiegroep Wiskunde met de Industrie

Wiskundigen werken een week lang samen aan problemen voorgelegd door bedrijven.

plaats Rijksuniversiteit Groningen

info swi-wiskunde.nl

februari 2023

9 februari 2023

❑ CWI in Bedrijf

Matchmaking-evenement tussen onderzoekers en bedrijven. Het thema is dit jaar 'Scalable and robust energy transition in the next decennia'.

plaats CWI, Amsterdam

info cwi.nl

Suggesties voor deze agenda zijn welkom.

Redacteur: Nikki Levering

agenda@nieuwarchief.nl

13 februari – 2 maart 2023

IMAGINARY

Reizende tentoonstelling over zichtbare en onzichtbare wiskunde. Georganiseerd door PWN in samenwerking met Nederlandse universiteiten en ondersteund door partnerorganisaties.

plaats Technische Universiteit Eindhoven
info imaginarymaths.nl

14–15 februari 2023

Machine Learning Theory

Bootcamp bestaande uit workshops, lezingen en een posteressie, die onderdeel is van het CWI Research Semester Programme.

plaats CWI, Amsterdam
info cwi.nl

15 februari 2023

OnderbouwWiskundeDag/VMBO-Wiskunde-Dag

Competitie voor leerlingen uit 3 havo/vwo, en tegelijkertijd een competitie voor leerlingen uit jaar 3 van het vmbo-gt.

plaats eigen school
info wiskundeintams.sites.uu.nl

26 februari – 3 maart 2023

SIAM Conference on Computational Science and Engineering

Met meer dan 2000 bezoekers is deze conferentie van SIAM de grootste wiskundeconferentie ooit gehouden in Nederland.

plaats RAI, Amsterdam
info wsc.project.cwi.nl

maart 2023

6 maart 2023

Diligentia Lezing

Remco Duits (TU/e) geeft de lezing ‘geometrische beeldanalyse en artificiële intelligentie voor medische beeldverwerking’.

plaats Theater Diligentia, Den Haag
info natuurwetenschappen-diligentia.nl

10 maart 2023

Tweede ronde Nederlandse Wiskunde Olympiade

De tweede ronde van de Nederlandse Wiskunde Olympiade speelt zich af op de universiteiten.

plaats universiteiten van Nederland
info wiskundeolympiade.nl

13–15 maart 2023

YES Causal Inference

Workshop over de verschillende perspectieven binnen de studie naar causale verbanden.

plaats Eurandom, Eindhoven
info eurandom.nl

13–17 maart 2023

Purpose-Driven Particle Systems

Lorentz workshop, mede georganiseerd door Oliver Tse (TU/e) en Franca Hoffmann (Bonn).

plaats Lorentz Center@Snellius, Leiden
info lorentzcenter.nl

16 maart 2023

W4 Kangoeroe

WereldWijdeWiskundeWedstrijd voor basis- en middelbare scholieren.

plaats op eigen scholen
info w4kangoeroe.nl

24 maart 2023

Nationale Rekencoördinator Dag

Dag voor rekencoördinatoren en leerkrachten, waarop het rekenonderwijs van de basisschool centraal staat.

plaats Utrecht
info nrcd.sites.uu.nl

27–31 maart 2023

YEP XVIII: Spectra of Random Graphs and Related Combinatorial Problems

Workshop over toevalsmatrices, toevalsgrafen en gerelateerde onderwerpen.

plaats Eurandom, Eindhoven
info eurandom.nl

29 maart 2023

Grote Rekendag

Dag voor alle basisscholen in Nederland en Vlaanderen (groep 1 t/m 8) die helemaal in het teken staat van rekenen. Het thema is dit jaar ‘De afvalparade’.

plaats basisscholen Nederland en Vlaanderen
info groterekendag.nl

april 2023

1–23 april 2023

IMAGINARY

Reizende tentoonstelling over zichtbare en onzichtbare wiskunde. Georganiseerd door PWN in samenwerking met Nederlandse universiteiten en ondersteund door partnerorganisaties.

plaats Zernike Campus, Groningen
info imaginarymaths.nl

11–12 april 2023

NMC Scientific Days

Jaarlijkse bijeenkomst van wiskundig Nederland georganiseerd door het KWG, met onder andere de uitreiking van de Brouwerprijs.

plaats Van der Valk Hotel, Utrecht
info mathematischcongres.nl

13–19 april 2023

European Girls' Mathematical Olympiad

Europese wiskundewedstrijd speciaal voor meisjes.

plaats Portorož, Slovenië
info egmo.org

14–15 april 2023

Nationale Wiskunde Dagen

29ste editie van de tweedaagse conferentie voor wiskundeleraars.

plaats De Leeuwenhorst, Noordwijkerhout
info uu.nl/onderwijs/nationale-wiskunde-dagen

17–21 april 2023

Uncertainty Quantification for Healthcare and Biological Systems

Lorentz workshop, mede georganiseerd door Daniele Avitabile (VU) en Alfons Hoekstra (UvA).

plaats Lorentz Center@Snellius, Leiden
info lorentzcenter.nl

mei 2023

mei 2023

IMAGINARY

Reizende tentoonstelling over zichtbare en onzichtbare wiskunde. Georganiseerd door PWN in samenwerking met Nederlandse universiteiten en ondersteund door partnerorganisaties.

plaats Amsterdam
info imaginarymaths.nl

Nieuws

| News

Deze rubriek is een kroniek van wiskundige activiteiten in Nederland. Toekomstige activiteiten worden aangekondigd en van voorbije activiteiten wordt verslag gedaan. Wilt u uw aankondiging of verslag in deze rubriek geplaatst zien? Stuur ons dan uw bijdrage, zo mogelijk met illustratie. De redactie behoudt zich het recht voor berichten te weigeren of in te korten.

Redacteur: Nikki Levering
 nieuws@nieuwarchief.nl

Leermeesterprijs TU Delft naar Kees Vuik

De TU Delft heeft de Leermeesterprijs 2022 uitgereikt aan professor Kees Vuik, hoogleraar numerieke wiskunde. De prijs, die sinds 1994 bestaat, is bedoeld voor een hoogleraar die bij de top van de TU Delft hoort en zowel in onderzoek als onderwijs uitblinkt. Vuik is de afgelopen jaren onmisbaar geweest voor de faciliteit Delft High Performance Computing. Zijn inspanningen hebben geleid tot de komst van de Delft Blue-supercomputer, die de grenzen van numeriek modelleren en simuleren verder zal verleggen. Hij heeft inmiddels ook bijna 200 studenten en meer dan 40 promovendi begeleid, waarvan minstens zes nu zelf professor zijn. tudelft.nl



Perfekte scores bij Nederlandse Wiskunde Olympiade

Tijdens de finale van de Nederlandse Wiskunde Olympiade heeft zesdeklasser Lance Bakker (KSG Hoofddorp) de maximale score van 50 punten gehaald. Ook Daniël van Westreenen (Stanislas-college Delft) haalde de volle score, maar omdat Lance ook foutloos was in de eerste twee rondes werd hij uitgeroepen tot winnaar in de categorie klas 6. De categorie klas 5 werd gewonnen voor Yanniek Nitescu (49 punten, Huygens Lyceum Eindhoven), die een punt meer behaalde dan nummer twee Allie Zong (Lorentz-Casimir Lyceum Eindhoven). Tobias Kristiansen (Stedelijk Gymnasium Leiden) wist met 45 punten de eerste plek in de categorie klas 4 en lager te bemachtigen. Voor een aantal van de winnaars was het niet hun eerste wiskundeprijs. wiskundeolympiade.nl

YAL-lidmaatschap voor Francesca Arici

Francesca Arici, universitair docent in de groep Analyse en Dynamische Systemen aan de Universiteit Leiden (UL), is geselecteerd om de komende vijf jaar de Young Academy Leiden (YAL) te versterken. De YAL, opgericht in 2019, bestaat uit een kleine groep jonge academici die afkomstig zijn van de verschillende faculteiten van de UL. Het doel is om interdisciplinaire samenwerking te stimuleren en jonge academici een stem te geven in beleidskwesties over wetenschap en onderwijs. Verder is de YAL actief bezig met outreach. Het publieksbereik van de wiskunde vergroten is iets waar Francesca Arici al langer mee bezig is. Zo is zij lid van de Raising Public Awareness-commissie van de European Mathematical Society en plaatsvervangend lid van de standing committee van de organisatie European Women in Mathematics. universiteitleiden.nl

Irispenning 2022 naar Universiteit van Nederland

De Universiteit van Nederland (UvNL) heeft op de Avond van Wetenschap en Maatschappij de Irispenning 2022 voor Excellente Wetenschapscommunicatie ontvangen. De prijs, in het leven geroepen door NEMO Science Museum, Rijksmuseum Boerhaave en het Teylers Museum, is bedoeld voor projecten die gedurende langere tijd op vernieuwende en eigenzinnige wijze een breed publiek weten te informeren over onderwerpen op het terrein van wetenschap en techniek. UvNL doet dit door middel van een podcast, waar wetenschappers vanuit alle veertien Nederlandse universiteiten hun kennis met het brede publiek delen. Op Spotify en YouTube hebben deze mini-colleges een groot bereik, met gemiddeld 1,2 miljoen kijkers en luisteraars per maand. Onder de wiskunde podcasts zijn onder andere ‘Hoe kun je met statistiek levens redden?’ (Daniel Oberski, UU) en ‘Waarom spelen sommige wiskundigen graag in de zandbak?’ (Pieter Roos, UT). Verder zijn er mini-colleges van Johan van Leeuwen (TU), Arne Smeets (RU), Djoerd Hiemstra (UT) en Maurits Kaptein (RU). universiteitvannederland.nl

LOWI verwelkomt Klaas Landsman

Klaas Landsman, hoogleraar mathematische fysica aan de Radboud Universiteit in Nijmegen en winnaar van de NWO Spinozapremie, is aangesteld als nieuw lid van het Landelijk Orgaan Wetenschappelijke Integriteit (LOWI). Het LOWI is in 2003 door de KNAW, NWO en de universiteiten van Nederland opgericht als onafhankelijk adviesorgaan voor het afhandelen van meldingen over mogelijke misstappen binnen het onderzoek die haaks zouden staan op wetenschappelijke integriteit. Helaas groeit het aantal zaken dat door de LOWI behandeld moet worden al sinds haar oprichting. ru.nl

Mostafa Meliani naar Heidelberg Laureate Forum

Promovendus Mostafa Meliani (Radboud Universiteit) mocht aanwezig zijn bij 9th HLF 2022, het Heidelberg Laureate Forum. Voor deze jaarlijkse conferentie worden tweehonderd jonge onderzoekers met veel potentie binnen de wiskunde of computerwetenschappen geselecteerd. Tijdens de conferentie zijn veel laureaten van prestigieuze prijzen, zoals de Abelprijs, A.M. Turing Award en Fieldmedaille, aanwezig. ru.nl, Heidelberg-laureate-forum.org

Ig Nobelprijs voor onderzoek naar roddels

De Ig Nobelprijzen zijn satirisch bedoelde alternatieve Nobelprijzen voor onderzoek dat je eerst laat lachen en daarna aan het denken zet. Dit jaar is de Ig Nobelprijs voor de Vrede uitgereikt aan een groot internationaal onderzoeksproject, met inbreng van zowel de VU als de TU/e, naar het modelleren van eerlijk en oneerlijk gedrag. Het team ontwikkelde een algoritme waarmee we strategisch kunnen bepalen wanneer we tijdens het roddelen eerlijk moeten zijn en wanneer we beter een leugen kunnen vertellen. Hun onderzoek toont aan dat roddelen niet altijd negatief hoeft te zijn: door eerlijke roddels te verspreiden kan samenwerking en het functioneren van teams worden bevorderd. Ook de Ig Nobelprijs voor de economie was wiskundig getint: een team Italiaanse onderzoekers ontving de prijs voor hun wiskundige uitleg van de grote rol van geluk ten opzichte van talent in het behalen van succes. tue.nl, improbable.com

Cosmos Boekenprijs voor De Paraplu-stelling

De Cosmos Boekenprijs voor het beste populairwetenschappelijke boek van het jaar is afgelopen oktober voor het eerst uitgereikt. De prijs is in het leven geroepen om lezen bij het jonge publiek aan te moedigen, en nieuwe generaties te inspireren. Zowel de prijs van de scholierenjury als van de vakjury ging naar het boek *De Paraplu-stelling* van de Franse wiskundige Mickaël Launay. In het boek geeft Launay voorbeelden van de paraplu-methode, waarbij problemen in de alledaagse wereld worden opgelost door een uitstapje te maken naar de abstracte wereld van de wiskunde, waarin meer hulpmiddelen zijn, zoals bijvoorbeeld negatieve getallen. In dit boek ontbreekt de grondlegging van de geometrie door Euclides uiteraard niet, en worden ook de wiskundige grondslagen van de relativiteitstheorie, een belangrijk voorbeeld van de paraplu-methode, uitgebreid behandeld. newscientist.nl



UCLouvain-leerstoel voor Ieke Moerdijk

Professor Ieke Moerdijk (UU) heeft de De la Vallée Poussin-leerstoel aan de Université catholique de Louvain (UCLouvain) ontvangen. De leerstoel, sinds 2002 jaarlijks toegekend, is vernoemd naar de Belgische wiskundige Charles de la Vallée Poussin, die in 1896 de priemgetalstelling bewees. De toewijzing van Moerdijk is een erkenning voor de exceptionele bijdragen die hij leverde in de topologie, categorietheorie en differentiaalmeetkunde. Eerdere ontvangers van de leerstoel zijn Robbert Dijkgraaf en Jacques Tits (Abelprijs 2008). uu.nl, uclouvain.be

Beschuldigingen van valsspelen houden schaakwereld in zijn greep

Na een ongeslagen reeks van 53 partijen verloor wereldkampioen Magnus Carlsen op de prestigieuze St. Louis Sinquefeld Cup verrassend van de met zwart spelende en veel lager gerankte Amerikaanse tiener Hans Niemann. Na dit verlies trok de Noor zich zonder uitleg terug uit het toernooi. In de online partij die ze twee weken na deze wedstrijd spelen doet Carlsen slechts één zet, voor hij opgeeft en zijn beeldscherm op zwart zet. Carlsen heeft het vermoeden dat Niemann valsspeelt, en weigert nog tegen hem te

spelen. Niemann, die jaren in Utrecht op school zat en in Nederland leerde schaken, bekend vervolgens in twee online partijen, toen hij 12 en 16 was, te hebben vals gespeeld, maar ontkent verder alle beschuldigingen van vals spel. Toch wordt hem door Chess.com, de grootste schaakwebsite ter wereld, de toegang tot zijn account ontzegd, en wordt hij geweerd van een jaarlijks toernooi waar een miljoen dollar op het spel staat.

Er lopen talloze onderzoeken om te zien of Niemann inderdaad vals gespeeld zou hebben. Waar valsspelen vroeger gebeurde door op het toilet met anderen te overleggen, zijn er tegenwoordig vernuftigere methodes. Zo zou via geheime camera's of oortjes gebruikgemaakt kunnen worden van een schaakcomputer. Omdat goede spelers de hulp van zo'n computer op slechts een handvol zetten tijdens de partij nodig zullen hebben, is controle moeilijk. Maar Chess.com weet het zeker: Niemann heeft gefraudeerd. In een verklaring van 69 pagina's concluderen ze dat de Amerikaan in meer dan 100 online partijen heeft vals gespeeld, waaronder op evenementen waar prijzengeld te verdienen was. Ze concluderen dit na een analyse van Niemanns partijen, waarin ze naar eigen zeggen veel statistische vreemdheden hebben ontdekt. Professor Kenneth Regan, die als wiskundig informaticus aan de Universiteit van Buffalo statistische methoden heeft ontwikkeld om vals spel in het schaken aan te tonen, heeft echter zijn bedenkingen over de fraude-aantijgingen tegen Niemann. Volgens zijn analyse vertonen de partijen van Niemann geen opvallende afwijkingen.

De internationale schaakbond FIDE heeft inmiddels een officieel onderzoek ingesteld. Niemann heeft een zaak aangespannen tegen Carlsen, zijn bedrijf Play Magnus Group en Chess.com. Met ingediende claims zoals smaad, laster en samenzwering, zal deze schaakrel voorlopig nog niet ten einde zijn. *nos.nl*



Magnus Carlsen (links) in duel met Hans Niemann tijdens de St. Louis Sinquefeld Cup

Foto: Crystal Fuller/Saint Louis Chess Club

Winnaars ICIAM-prijzen 2023 bekend

De winnaars van de prestigieuze ICIAM-prijzen 2023, die in augustus 2023 tijdens het ICIAM uitgereikt zullen worden, zijn bekend gemaakt. De Collatz-prijs gaat naar Maria Colombo (EPFL), onder meer voor haar bijdragen aan de regularity theory en haar analyse van singulariteiten van elliptische partiële differentiaalvergelijkingen. Alfio Quarteroni (Politecnico di Milano) zal de Langrange-prijs ontvangen voor zijn werk aan eindige-elementen- en spectraalmethode. De Maxwell-prijs is voor Weinan E (Peking University, Princeton), welke hem onder andere wordt uitgereikt voor zijn onderzoek

naar machine-learning algoritmes. Leslie Greengard (NYU, Simons Foundation) ontvangt de Pioneer-prijs voor zijn vernieuwende onderzoek naar snelle algoritmes, zoals de fast multipole method. De Su Buchin-prijs, die naast het onderzoek ook de bijdragen aan de wiskundegemeenschap in Latijns-Amerika erkent, gaat naar José Mario Martínez Pérez (Unicamp). De Industry-prijs, in 2023 voor het eerst uitgereikt, zal worden ontvangen door Cleve B. Moler, de oprichter van MATLAB en mede-oprichter van MathWorks. *iciam.org*

Winnaars beste Scriptie Toegepaste Wiskunde 2022 bekend

Tijdens de tweede editie van het Dutch Mathematics Community Event zijn de Best Thesis in Applied Math Award 2022 BSc en MSc uitgereikt. Voor de beste masterscriptie waren Shravan Chipli, Teun Druif en Yanna van der Vlugt genomineerd. De award ging naar Teun Druif, die in zijn scriptie voor DB Cargo Nederland keek naar de planning van rangeerterrein de Kijfhoek. De drie genomineerden voor de beste bachelorscriptie waren Gaby Hageman, Meggie Wijen en Thomas van Houdt. De award werd gewonnen door Gaby Hageman die in haar scriptie voor het Erasmus MC onderzocht of machine learning tot betere voorspellingen kan leiden voor het na zes maanden wel of niet onafhankelijk lopen van patiënten met het syndroom van Guillain-Barré. *Platform Wiskunde Nederland*

Koninklijk Wiskundig Genootschap

Young KWG

Vijf jonge wiskundigen hebben aangeboden een nieuwe bestuurslaag vorm te geven binnen het KWG, Young KWG. Met hen is deze herfst een eerste bespreking gepland om ideeën uit te wisselen over nieuwe KWG-activiteiten die met name interessant zijn voor promovendi, postdocs en tenure trackers.

KWG-bestuur

Het KWG-bestuur is verheugd met het nieuws dat Charlene Kalle (Universiteit Leiden) heeft aangeboden vanaf april 2023 de rol van vice-secretaris binnen het KWG te vervullen. Deze functie stond sinds afgelopen april nog open.

Pythagoras

De subsidieaanvraag 'Pythagoras op de middelbare school' die eerder dit jaar is ingediend bij de call 'beta outreachmiddelen' van het Landelijk Overleg Bètadecanen is volledig gehonoreerd. In de eerste helft van 2023 zullen alle Nederlandse scholen met havo en/of vwo gratis tien exemplaren van drie nummers van *Pythagoras* ontvangen. Voor het schooljaar '23/'24 kunnen de scholen een speciaal kortingsabonnement afsluiten voor dertig exemplaren waarbij zij alleen de portokosten betalen.

Recent verschenen:

Epsilon Uitgaven (www.epsilon-uitgaven.nl)

Zebra 65. Filosofie van de wiskundige praktijk, Joachim Frans, Bart Van Kerkhove en Jean Paul Van Bendegem, € 10, 2022.

Zebra 64. Rekenen met risico's – Wiskunde bij schadeverzekeringen, Dennis Dannenburg, € 10, 2022.

Giraf 3. Reken maar – een doeboek met stokjes, muntjes en symbolen, Marijke Hasséfras-Zuidbroek, Jeanine Daems en Peter Lanser, € 8, 2022.

Robin de Jong

Mathematisch Instituut
Universiteit Leiden
rdejong@math.leidenuniv.nl

Jaap Top

Bernoulli Instituut
Rijksuniversiteit Groningen
j.top@rug.nl

Gerard van der Geer

Korteweg-de Vries Instituut voor Wiskunde
Universiteit van Amsterdam
g.b.m.vandergeer@uva.nl

René Schoof

Dipartimento di Matematica
Università di Roma "Tor Vergata"
schoof@mat.uniroma2.it

In Memoriam Bas Edixhoven (1962–2022)

Genereus, optimistisch en betrokken

Op 16 januari 2022 overleed Bas Edixhoven, hoogleraar meetkunde aan de Universiteit Leiden. Naast zijn onderzoek en onderwijs was Bas betrokken bij vele internationale en nationale wiskunde-organisaties. In Nederland onder andere bij de commissie Onderzoek en de commissie Onderwijs van Platform Wiskunde Nederland, Mastermath, Wisk4all, DIAMANT, Vierkant voor Wiskunde, Compositio Mathematica, Indagationes Mathematicae, en de Bèta-lerarenkamer. Tevens was hij lid van de Koninklijke Nederlandse Akademie van Wetenschappen. Zijn nabije collega's Robin de Jong, Jaap Top, Gerard van der Geer en René Schoof herdenken hem.

Robin de Jong**Korte beschrijving van Bas' leven en werk**

Bas Edixhoven werd geboren op 12 maart 1962 in Leiden en groeide op in Pijnacker. Hij studeerde in 1985 af in de wiskunde in Utrecht en promoveerde daar in 1989 bij Frans Oort.

Na zijn promotie werkte Bas twee jaar als Morrey assistant professor aan de University of California, Berkeley. Na een korte periode als Huygens fellow aan de Universiteit Utrecht werd hij tot hoogleraar benoemd in Rennes, in Frankrijk, waar hij bijna tien jaar bleef. In september 2002 werd Bas benoemd tot hoogleraar meetkunde in Leiden, als opvolger van Hansjörg Geiges. Sinds 2009 was hij lid van de Koninklijke Nederlandse Akademie van Wetenschappen.

Het vakgebied van Bas bevond zich in de aritmetische algebraïsche meetkunde. Het onderwerp van zijn proefschrift betrof modulaire krommen. Al vroeg in zijn carrière was hij op dit gebied een van de wereldwijde experts. Hij verrichtte belangrijk werk aan zaken die een rol spelen in het beroemde bewijs van de laatste stelling van

Fermat uit het begin van de jaren negentig, en aan het daarmee nauw verbonden vermoeden van Serre.

Na die beginperiode is onder meer Bas' werk aan het zogenaamde André–Oort-vermoeden bepalend geweest, evenals zijn



Bas Edixhoven in 2020

werk om modulaire vormen en de daarbij behorende Galois-representaties computationeel toegankelijk te maken. Voor een projectvoorstel in deze richting werd hem in 2004 een Vici-beurs toegekend. Een andere belangrijke bijdrage leverde Bas zeer recent door de zogenaamde kwadratische Chabauty-methode op meetkundige wijze te interpreteren.

Bas was in de periode 2003–2012 een van de hoofdredacteurs van het internationaal toonaangevende wiskundetijdschrift *Compositio Mathematica*. Hij bleef daarna een belangrijke rol spelen in het bestuur van de Stichting Compositio Mathematica. Verder was hij redacteur van een aantal andere tijdschriften, waaronder *Annales Henri Lebesgue*, *Expositiones Mathematicae*, *Indagationes Mathematicae*, *Journal of Number Theory* en *Journal de Théorie de Nombres de Bordeaux*.

Bas als wiskundige

In 1992 woonde ik als 4 vwo-scholier een voordracht van Bas bij, op een themadag Wiskunde en Informatica die de Universiteit Utrecht organiseerde. Dat was mijn eerste kennismaking met Bas. De variatie aan prachtige voordrachten die dag maakte grote indruk op mij en Bas heeft er zo mede aan bijgedragen dat ik wiskunde ben gaan studeren.

De eerste keer dat ik Bas durfde aan te spreken was tijdens een Intercity-getaltheorie-seminarium, in 2003. Ik was toen inmiddels promovendus. Bas gaf in dat seminarium een voordracht over een onderwerp dat gebruikmaakte van zaken

waar ik ook aan werkte op dat moment. De samenvatting van zijn voordracht vermeldde “a height estimate that is still to be worked out”. Bas en ik hebben die af-schatting toen samen opgepakt, en niet lang daarna werkten we samen aan enkele hoofdstukken voor het boek dat Bas’ Vici-onderzoekperiode zou afsluiten.

Tijdens het schrijven van die hoofdstukken en ook de hele periode erna heb ik enorm veel van Bas geleerd. Het is me in de loop der jaren duidelijk geworden dat de invloed van Bas op wiskundigen over de hele wereld ontzettend groot is geweest en nog steeds is. Bas deelde zijn inzichten op genereuze wijze met studenten en collega’s. Hij was wars van status en hiërarchie, en gemakkelijk benaderbaar. Bas had een groot plezier in het doen van wiskunde. Of je nu een beginnend student was of een icoon, Bas nam de tijd voor je. Velen zullen zich herinneren hoe er een twinkeling in zijn ogen kwam zodra je hem een interessante wiskundige vraag voorlegde.

Het antwoord op de meest diepzinnige vragen leek Bas schijnbaar zonder moeite te vinden, alsof hij het uit de sterren aflas. Zijn streven was daarbij altijd om een dieper inzicht te verwerven, en om de onderliggende, eenvoudige, structuur van een probleem boven water te krijgen. Vaak draaide het daarbij om het vinden van een geschikte herformulering van het probleem, een verandering van perspectief. Zijn aanpak was net zo effectief voor raadsels tijdens de lunchpauze als voor abstracte wiskunde.

Bas heeft gedurende zijn carrière circa dertig promovendi begeleid, waarvan bijna de helft in internationaal samenwerkingsverband. Hij was voor zijn studenten altijd gastvrij en behulpzaam, zowel op het wiskundig inhoudelijke als op het praktische vlak. Ik koester enkele kattebelletjes met Bas’ kristalheldere uitleg, opgesteld in zijn elegante en zelfverzekerde handschrift, en die ik als inlegvel in mijn tekstboeken heb zitten; ik stel me voor dat ik hierin zeker niet de enige ben.

Bas gaf colleges op alle niveaus en altijd met hetzelfde enthousiasme, ongeacht het onderwerp. Dit maakte hem geliefd bij studenten. Hij hechtte in zijn colleges grote waarde aan de juiste formulering van een resultaat, en het kiezen van de juiste notatie. Op volstrekt eigen wijze heeft hij zijn manier van denken in diverse prachtige syllabi gestalte gegeven. Zoveel — ook



Bas promoveerde in 1989 in Utrecht. Links Ken Ribet, bekend vanwege onder meer zijn bewijs van het epsilon-vermoeden.

vaak overbekende — dingen bekeek Bas op zijn eigen volstrekt originele manier. Voor hem was het allemaal de normaalste zaak van de wereld, dat je ergens zo en zo over moest nadenken.

Franse periode, 1992–2002

In zijn periode aan de Université de Rennes was Bas een van de drijvende krachten achter de heruitgave van de monumentale *Séminaires de Géométrie Algébrique* (SGA) uit de jaren zestig. In dit project namen vrijwilligers de taak op zich om deze nog grotendeels met typemachine vervaardigde bundels seminarium-aantekeningen over te zetten naar TeX, en zo gereed te maken voor de 21ste eeuw. Samen met Jan-Hendrik Evertse uit Leiden stelde hij, ook in deze periode, een bundel samen naar aanleiding van een conferentie in Soesterberg over een belangrijke doorbraak in de theorie van rationale punten op abelse variëteiten.

In 1993 gaf Bas een voordracht over het werk van Kamienny en Mazur in het prestigieuze Séminaire Bourbaki in Parijs. Van 1995 tot 2002 was hij lid van het Institut Universitaire de France. In zijn vrije tijd bracht Bas in deze periode veel tijd door op het platteland, in en rondom het huis van zijn ouders in Grugé-l'Hôpital, niet ver van Rennes.

Terug in Nederland, 2002–2022

De periode na Bas’ terugkeer naar Nederland in 2002 heb ik van dichtbij mee mogen maken. Direct vanaf het begin van zijn hoogleraarschap aan de Universiteit Leiden

was Bas nauw betrokken bij het onderwijs, bij het begeleiden van studenten en promovendi en het organiseren van seminars.

Bas was betrokken en kritisch lid van talloze internationale en nationale besturen en commissies. Op deze manier heeft hij zijn stempel gedrukt op vele ontwikkelingen binnen de wiskundige gemeenschap, veelal op onderwijsgebied. Voor de opleiding wiskunde in Leiden is hij lid geweest van de examen- en de opleidingscommissie, en in de periode 2007–2011 was hij opleidingsdirecteur. Vervolgens was hij van 2012 tot 2017 directeur van Mastermath, het gezamenlijke masterprogramma in de wiskunde van de Nederlandse universiteiten. Binnen Platform Wiskunde Nederland was Bas lid van zowel de commissie Onderzoek als de commissie Onderwijs. In de periode 2014–2016 was Bas directeur van het nationale wiskunde-onderzoekscloster Diamant.

In het kader van zijn lidmaatschap van de denktank ‘Bèta-lerarenkamer’ heeft Bas de welkom-docent-app mogelijk gemaakt, waarmee meer dan honderd docent-vluchtelingen zich kunnen bekwamen in de Nederlandse taal en wiskunde-didactiek en daardoor hun kansen op de Nederlandse arbeidsmarkt kunnen vergroten. In Leiden zelf zette hij zich met name persoonlijk in voor een aantal Syrische vluchtelingstudenten.

Bas’ inzet voor het onderwijs lag ook aan de basis van een programma dat door het opleiden van zij-instromers bijdraagt aan een oplossing voor het landelijk tekort

aan wiskundeleraars. Dit programma had aanvankelijk een plaats binnen Mastermath, en is recent onder leiding van Bas en met de naam Wisk4all opgegaan in het landelijke programma Beta4all.

Wiskundig vrijwilligerswerk

Naast academisch onderzoek, onderwijs en commissiewerk zette Bas zich vol overgave in als wiskundig vrijwilliger op een aantal vlakken. Bas heeft enkele malen, ook in november 2021 nog, als dagvoorzitter opgetreden bij de jaarlijkse Ars et Mathesisdag. Een interessant kunstwerk voor Bas was een verweerd stalen sculptuur, ‘Torqued ellipse’ genaamd, van Richard Serra, waar Bas een keer op vakantie in Bilbao tegenaan liep. Bas ‘ontdekte’ dat de sculptuur in het Guggenheim Museum slechts de helft is van een Siamese tweeling, waarvan de andere helft veel interessanter is.

Sinds 2003 was Bas voorzitter van het bestuur van Stichting Vierkant voor Wiskunde. Bas heeft zich niet alleen bestuurlijk, maar op velerlei manieren ook persoonlijk ingezet voor deze stichting. Zo gaf hij in de zomer van 2021 nog een workshop bij een van de zomerkampen en was hij begonnen met het schrijven van een boekje over quantumcomputing. Wie Bas gekend heeft weet dat puzzels en wiskundig speelgoed altijd hebben behoord tot Bas’ standaard-uitrusting als wiskundige.

De royalty’s van het boek dat Bas schreef als afsluiting van zijn Vici-project gingen linea recta naar Vierkant. Bas dacht er over na of hij misschien niet ook een tekstboek in de lineaire algebra zou gaan schrijven om op die manier nog meer voor Vierkant bijeen te brengen. Hij vroeg geld aan zijn Chinese studenten hoe groot de kans zou zijn dat een dergelijk boek populair zou worden in China.

Verbeter de wereld, begin bij jezelf

Bas’ exemplarische inzet strekte zich uit tot ver buiten de grenzen van de wiskunde. In de zomer van 2021 is Bas twee dagen minder gaan werken, onder andere om meer tijd te kunnen besteden aan zijn werkzaamheden als energiecoach. Bas was er trots op dat hij als pionier in zijn wijk als eerste een grondwarmtepomp bij hem thuis liet installeren.

Bas zette zich in voor een betere wereld, te beginnen in het klein dichtbij hemzelf. Hij was ervan overtuigd dat iedereen zelf stappen kan zetten naar een betere

wereld. Hij dacht na over wat het beste zou kunnen werken vanuit een groter perspectief en sprak hierover met velen. Niet altijd waren zijn oplossingen bestand tegen de weerbarstige politieke werkelijkheid, maar hij bleef herhalen dat alle vooruitgang valt of staat met degelijk onderwijs, en dat de taak om mensen, inclusief politici, te leren kritisch en helder na te denken niet licht moet worden opgevat.

Ter afsluiting een fraaie anekdote in dit opzicht. In september 2019 nam Bas met enkele collega’s uit Leiden deel aan een klimaatdemonstratie in Den Haag. Ter gelegenheid van deze demonstratie had Bas een groot 100 km/u bord vervaardigd. Aan het eind van de demonstratie wilde Bas dit bord aanbieden aan het ministerie van Infrastructuur, maar helaas lukte het niet daar binnen te komen. Ook het nabij gelegen ministerie van Onderwijs werkte niet mee.

Maar niet getreurd. De terugweg vanuit Den Haag naar Leiden, per fiets natuurlijk, voerde vlak langs de oprijlaan naar het toenmalige woonpaleis van het staatshoofd. Daar heeft Bas, met hulp van omstanders, zijn 100 km/u-bord voorzien van een tekst, en, via de marechaussee, aan het staatshoofd aangeboden. De tekst luidde:

“Beste Willem Alexander, koning van Nederland, wilt u ministers Rutte en Van Nieuwenhuizen wijzen op deze niets kostende maatregel voor het klimaat. Vriendelijke groeten, het Nederlandse volk.”

Ik mis Bas enorm.

Dankwoord

Graag wil ik Peter Bruin, Reinie Ern , Ronald van Luijk, Ralph Meulenbroeks en Pierre Parent bedanken voor hun hulp bij het schrijven van deze tekst.

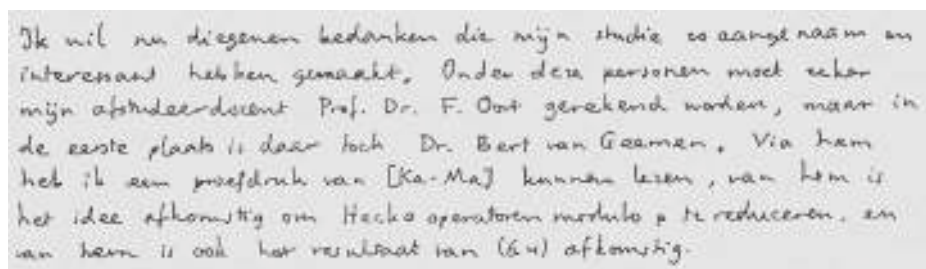


100 km/u-bord, door Bas aangeboden aan het staatshoofd

Jaap Top

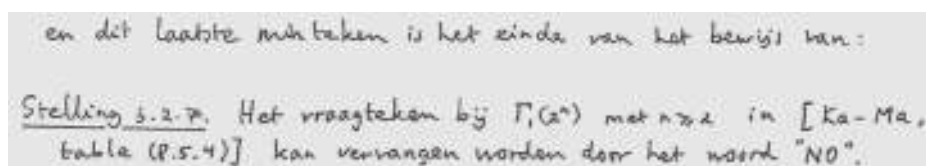
Een exacte datum voor de eerste ontmoeting tussen Bas en mij kan ik niet geven. Hij begon zijn studie in Utrecht in 1980, een jaar na mij. In ieder geval kenden we elkaar in maart 1982: hij nam toen deel aan een algebratentamen waarbij Bert van Geemen en ik surveilleerden. Bas behoorde (met onder meer Kareljan Schoutens, Erik en Herman Verlinde, Robbert Dijkgraaf en zeker ook zijn vriend vanaf het begin van de studie Huib-Jan Imbens) tot een groep studenten die zowel in natuurkunde als wiskunde interesse hadden. Maar waar de nadruk bij de anderen op zijn minst voorlopig op natuurkunde lag, groeide bij Bas al snel een brede fascinatie en kennis binnen wiskunde. Bij diverse colleges kwamen we elkaar tegen (distributies bij Hans Duistermaat, Lie-groepen bij Joop Kolk, conforme afbeeldingen bij Tonny Springer, combinatoriek bij Fred van der Blij). De realisering dat het ons meer om het onderwerp ging dan om het verkrijgen van studiepunten (als die term toen al bestond...) heeft Bas en mij toentertijd zeker dichter bij elkaar gebracht.

Seminaria bleken een probaat middel om kennis uit te breiden. Waarschijnlijk de eerste waar Bas en ik beiden aan meededen werd geleid door Ferdinand Veldkamp; we behandelden Jacobson’s Galoistheorie voor inseparabele uitbreidingen. Een ander gezamenlijk seminarium begon in september 1983. Een jaar eerder gaf Frans Oort een schitterend college complexe vari eiten, en daarbij hadden we op zijn advies een paar boeken aangeschaft waaronder Hartshorne’s *Algebraic Geometry*. Na het college, mede gemotiveerd door de observatie dat we uit dit dikke boek nog niet meer dan een beperkte kennis over het eerste hoofdstuk hadden, werd geopperd het in seminariumvorm verder te bestuderen. Frans Oort moedigde dit van harte aan, en (inmiddels promovendus) Bert van Geemen was bereid ons erbij te begeleiden. Berts aanpak bleek fantastisch te werken: elke deelnemer werd geacht, het te behandelen onderwerp in eigen woorden uit te schrijven. Zo ontstond een lijvig dictaat, met naast door Hartshorne’s boek ge inspireerde stukjes een scala aan verder materiaal: elliptische krommen, Serre-dualiteit, (cohomologie van) coherente schoven op een projectieve vari eit, vrije rotatie van een



Ik wil nu diegenen bedanken die mijn studie zo aangenaam en interessant hebben gemaakt. Onder deze personen moet zeker mijn afstudeerdocent Prof. Dr. F. Oort gerekend worden, maar in de eerste plaats is daar toch Dr. Bert van Geemen. Via hem heb ik een proefdruk van [Ka-Ma] kunnen lezen, van hem is het idee afkomstig om Hecke operatoren modulo p te reduceren, en van hem is ook het resultaat van (6.4) afkomstig.

Figuur 1 Dankwoord Bas in zijn afstudeerscriptie.



en dit laatste misstaken is het einde van het bewijs van:
Stelling 5.2.7. Het vraagteken bij $\Gamma_1(n^2)$ met $n \geq 2$ in [Ka-Ma, table (P.5.4)] kan vervangen worden door het woord "NO".

Figuur 2 Reactie Bas op een opengebleven vraag uit de tekst van Katz en Mazur.

star lichaam, kubische oppervlakken en Weylgroepen, opblazen van singuliere punten van een deelschema van $\text{Spec}(\mathbb{Z}[x])$, en meer. Een tweede voorbeeld van een studentenseminarium waar later vijf van de zeven deelnemers hoogleraar wiskunde (meetkunde) werden, ken ik niet.

Naast dat 'eigen' seminarium ontstond al gauw belangstelling voor wiskunde buiten Utrecht. Frans Oort bereidde ons voor op deelname aan het landelijke moduliseminarium, en hij zorgde ervoor dat de vele internationale gasten van hem ook met ons kennismakten. Vanaf ongeveer 1984 wist Bas driemaal per jaar een aantal van ons te overtuigen met hem af te reizen naar het Bourbaki-seminarium in Parijs (meermalen op maandagochtend gevolgd door het bijwonen van een college van J.-P. Serre). Bij Bas is de voorliefde voor algebraïsche meetkunde op deze manier snel gegroeid. Het 'eigen' seminarium kreeg, met wisselende groepen deelnemers waaronder altijd ook Bas, allerlei voortzettingen. Onder meer behelsde dat een reeks voordrachten door Bert van Geemen, startend bij elliptische en modulaire krommen en eindigend bij een uitleg waarom het (toen nog) vermoeden van Taniyama en Weil behouden blijft onder 'twisten'. Hier kwam Bas in aanraking met de onderwerpen waarop hij later grote naam zou maken. Die eerste kennismaking groeide snel verder toen Bert een tijd in Boston en in Princeton ging doorbrengen. Barry Mazur en Nick Katz waren daar een boek over reductietheorie van modulaire krommen aan het schrijven, en Bert stuurde ons stukken van die tekst-in-wording. Het afstudeeronderwerp van Bas (1984/85) is sterk gerelateerd aan dit werk. In Figuur 1

is te lezen wat hij erover schreef in zijn dankwoord in zijn scriptie.

De genoemde reductietheorie gaf aanleiding, voor een priemgetal p , tot een eenvoudige combinatorische beschrijving van zogeheten Hecke-operatoren bij $X_0(p)$ middels hun reductie modulo p . Bas bedacht de details hiervan, in de programmeertaal Pascal werden algoritmes ervoor geschreven en tientallen voorbeelden doorgerekend. Het was een behoorlijke schok en in eerste instantie zelfs een teleurstelling toen (alweer via Bert) een brief van Dick Gross aan Jean-François Mestre opdook waarin dezelfde strategie werd geschetst. Tegelijk illustreert het hoe zelfs al in die vroege fase Bas werkte aan onderwerpen waar grootheden in ons vakgebied zich voor interesseerden. Bas rondde zijn (doctoraal)scriptie af, zoals alles van hem

uit die tijd: handgeschreven, met vulpen, krachtig en heel karakteristiek. In Figuur 2 is een passage te lezen waarin hij reageert op een opengebleven vraag uit de tekst van Katz en Mazur.

Op de vierde verdieping van het Mathematisch Instituut (MI) kregen Bas en ik een plek tussen de hoekkamer van Frans Oort en het bescheidener kantoortje van Bert van Geemen. Bas zijn afstudeerwerk werd er gedaan en vier fantastische jaren als promovendus, begeleid door Frans Oort, volgden. In juni 2019 tijdens een congres op het CIRM in Luminy bracht Bas champagne mee om te vieren dat we die promotietijd precies dertig jaar ervoor hadden afgerond.

Er gebeurde heel veel in en vanuit die Utrechtse 'werk'plek. Geld van een UU-aanmoedigingsprijs gebruikten we om al ver voor ons afstuderen per auto af te reizen naar een conferentie in het eerdergenoemde Luminy. In de kofferbak zat een tent voor onderweg, plus de racefiets van Bas. Op een van de vele Michelin-wegenkaarten die ook meelingen was een stipje bij een plek in de Franse Alpen genoteerd: hier hoopte hij anderhalve week later vriend Huib-Jan Imbens te treffen om samen terug te fietsen. Het is nog gelukt ook. Tot genoeg van Bas reed de door ons voor de heenreis gebruikte auto op gas: ook toen al was hij zeer milieubewust.

In de promotieperiode ging onze aandacht zeker niet uitsluitend naar het eigen onderzoek uit. Na borrels in het MI belandden stevast de aangebroken flessen in



Peter Stevenhagen, Bas, Jaap Top en René Schoof vieren de promotie 30 jaar eerder van drie van hen, Luminy, juni 2019

onze kamer. En onderweg naar een Moduli Intercity-bijeenkomst in Leiden kon middels een kleine omweg op een mooie winterochtend eerst de Rottemerentocht geschaatst worden. Of moet die keer vermeld worden, op weg naar een Bourbaki-seminarium (met Bas achter het stuur van de al eerder genoemde op gas rijdende auto), heel kort na bomaanslagen in Parijs? Al pratend met zijn medepassagiers koos Bas bij de grens de rijbaan waarboven een groene pijl stond en met tamelijk hoge snelheid reden we Frankrijk binnen, al heel snel achtervolgd door douanebeambten in een auto met zwaailichten. Bas zijn uitstekende beheersing van de Franse taal (volgens kenners met een heel licht Bretons accent) was nodig om hen ervan te overtuigen dat we geen kwade bedoelingen hadden.

Tot de (vele) bezoekers van onze gezellige MI-kamer behoorde eind jaren tachtig ook regelmatig de latere levenspartner van Bas, Reinie Ern . In december 1988 deelde Frans Oort ons mee dat hij in de komende 2–3 maanden een eerste versie van een proefschrift verwachtte. Tegelijk met Oorts bericht vonden we op het prikbord van het MI een bericht van Shell Nederland BV waarin promovendi werden uitgenodigd bij hen een reisbeurs aan te vragen. Onmiddellijk raadpleegden we het meest recente nummer van de *Notices* van de AMS, en daar stond voor januari 1989 de Conference on the Arithmetic of Algebraic Curves aangekondigd, zie Figuur 3. We hadden een doel! Diezelfde dag is de aanvraag op de post gegaan. Ondanks de vele aanmoedigingen en hulp van onze promotor waar het buitenlandse bezoeken betrof (zomerschool Algebraïsche Meetkunde in Luminy, diverse keren Arbeitstagung in Bonn, bijeenkomst met Faltings en W stholz in Wuppertal, Journées Arithm tiques en veel meer), leek ons de huidige mogelijkheid in conflict met Oorts wens wat betreft de proefschriften. Ik ben vergeten wie van ons de noodzakelijke handtekening heeft nagelbootst. De beurs werd toegekend, onze reisplannen werden nog uitgebreid met een bezoek aan Chad Schoen (Duke University). Vanuit New York City waar we onderweg vanwege sneeuwstormen gestrand

waren hebben we Oort een kaartje met groeten en onze plannen gestuurd. De organisatoren van de conferentie (Bill McCallum en Sheldon Kamienny) beloofden dat ze vanwege onze vertraging iemand naar het vliegveld in Tucson zouden sturen om ons op te pikken. Wat waren we onder de indruk toen bleek dat John Tate deze klus op zich had genomen...

Na thuiskomst kon de motivatie om te voldoen aan de wens van onze promotor eigenlijk niet beter, en op de gewenste datum was alles er. Toen de boekjes in mei 1989 bij de drukker lagen hebben we een week rust genomen in Grug  l'Hôpital waar de familie Edixhoven een prachtig tweede huis bezat.

Na de promotie kreeg Bas voor twee jaar een baan aan de universiteit van Californië in Berkeley. Ik ging naar Queen's in Canada en daar kwam Bas ons na een paar maanden al opzoeken: op krukken, met een been in het gips vanwege een ski-ongelukje (dat, volgens Bas, uiteraard de schuld van iemand anders was). Stilzitten kon hij natuurlijk niet, en het bleek mogelijk voordrachten te geven in lokale seminaria. Zelfs samen naar Montreal lukte, al vielen de roltrappen in een van de gebouwen van Concordia University in zijn omstandigheden niet mee.

Een tegenbezoek volgde in april, en begin juli, nu samen met Reinie, als onderdeel van een tocht van de westkust naar het oosten van Noord-Amerika, was Bas opnieuw bij ons.

Terug in Nederland volgde voor Bas een jaar in Utrecht. Dit keer deelde hij zijn werkplek met Ben Moonen. Onder andere de Soesterberg-conferentie over diofantische approximatie en abelse variëteiten zorgde in dat jaar voor intensief contact; Bas en Jan-Hendrik Evertse redigeerden het in de *Springer Lecture Notes in Mathematics* serie verschenen boek dat hierop is gebaseerd. In 1992 begint Bas zijn Franse periode, als hoogleraar in Rennes. Vrijdag 27 augustus 1993 komen we met flink wat familie en vrienden toch nog even naar Utrecht, ter gelegenheid van het huwelijk van Bas en Reinie. Al ging de frequentie van bezoeken vanaf nu omlaag, de onderlinge band werd zeker niet minder. En wat alleen maar toenam was de kenmerkende en genereuze manier waarop Bas zijn enorme kennis met velen deelde. Een twinkeling in zijn ogen, en dan begon hij: "Het is eigenlijk heel simpel. Kijk,..."



Bas geeft een voordracht in het gips, Queen's University at Kingston, januari 1990 (voordracht over een bewijs van Stelling 8 van zijn proefschrift.)

In de Franse periode zijn Luc en Tom Edixhoven geboren. Het hele gezin verruilde in 2002 hun huis in St. Gregoire voor eentje aan de Spiegelkarper in Leiden.

Vanaf die tijd zagen we van dichterbij de betrokkenheid van Bas bij de wiskunde verbreden: de Stichting Vierkant, Mastermath en eerst daarbinnen, later via Wisk4all het opzetten en uitvoeren van een vakinhoudelijk programma voor 'zij-instromers' van de eerstegraads lerarenopleiding, internationaal bij CIMPA, bij het opzetten van ALGANT, en meer. Het zegt veel over Bas dat dit gebeurde naast een indrukwekkende en al verder groeiende wetenschappelijke staat van dienst.

Eind september 2021 logeerde Bas bij ons; we spraken over de warmtepomp waar hij zo trots op was, over zijn ideeën voor een goede meetkundige aanpak van de problemen behandeld in een proefschrift dat die vrijdag verdedigd zou worden, over hoe lekker en verrassend lang hij die nacht bij ons geslapen had, over onze kinderen, over lesgeven aan aanstaande (wiskunde)docenten.

Kort voor kerst dat jaar belde hij vanuit een Rotterdams ziekenhuis. Hij wilde persoonlijk vertellen over het 'lichamelijk probleem' dat nu onderzocht werd. Zondag 9 januari namen we, thuis aan de Spiegelkarper, afscheid van elkaar. Zonder woorden van de kant van Bas; zijn blik en handdruk hou ik als warme herinnering. Bij al het moois uit bijna veertig jaar vriendschap.

7–10. Conference on the Arithmetic of Algebraic Curves, University of Arizona, Tucson, Arizona. (Note date change from September 1988, p. 1057)

Figuur 3 Aankondiging conferentie in Arizona.

Gerard van der Geer

Bas Edixhoven heb ik leren kennen als promovendus in Utrecht toen ik daar op uitnodiging van Frans Oort college gaf. Een extraverte, duidelijk getalenteerde promovendus die met originele opmerkingen uit de hoek kon komen. Zijn promotieonderzoek betrof modulaire krommen, maar Bas hield zich ook bezig met andere dingen, zoals Arakelov-theorie. Na zijn promotie ging hij naar Berkeley en na een korte periode als Huygens-fellow in Utrecht werd hij hoogleraar in Rennes. Hij had in korte tijd een uitstekende reputatie opgebouwd. We hebben indertijd aan de UvA serieuze pogingen gedaan hem naar Amsterdam te halen, maar hij en zijn vrouw Reinie Ern  hadden het naar hun zin in Rennes, waar ze beiden op het wiskunde-instituut van de universiteit werkten.

Zijn kwaliteiten maakten Bas een ideale kandidaat voor de redactie van het tijdschrift *Compositio Mathematica*. Eind jaren negentig werd het tijd om een opvolger voor mij als hoofdredacteur voor *Compositio Mathematica* te zoeken. Ik heb toen Bas hiervoor al benaderd in 1999. We hadden hem al langer in het vizier als mogelijke hoofdredacteur. Bas stemde ermee in. Hij werd in 2000 benoemd als lid van de redactie van *Compositio Mathematica*. In de tussentijd hadden hij en zijn vrouw besloten naar Nederland terug te keren. Bas werd hoogleraar meetkunde in Leiden in het najaar 2002, en daarna ook actief als hoofdredacteur.

We zijn toen korte tijd samen hoofdredacteur van *Compositio* geweest. De overgang van *Compositio* van een commercieel uitgegeven tijdschrift naar een in samenwerking met de London Mathematical Society uitgegeven tijdschrift had net plaatsgevonden. De samenwerking met Bas verliep heel soepel. Na de beëindiging van mijn hoofdredacteurschap heeft Bas samen met Ben Moonen de hoofdredactie gevormd. Hij heeft dat een flink aantal jaren met veel toewijding gedaan, ruwweg van 2002 tot 2012. Daarna trad hij toe tot het bestuur van de Stichting *Compositio Mathematica*. Hij was zeer betrokken bij het wel en wee van de stichting. Hij was secretaris van de stichting gedurende de jaren 2013 tot en met 2021. Hij trad altijd zeer efficiënt op. Het was de bedoeling dat hij mij zou opvolgen als voorzitter van de stichting per 1 januari 2022.

In de loop der jaren heb ik ook op andere manieren met Bas samengewerkt. We hebben een aantal Intercity-seminaria georganiseerd en ook conferenties, zoals bijvoorbeeld samen met Ben Moonen de conferentie Modular Forms op Schiermonnikoog in 2006, en een Intercity-seminarium over het werk van Scholze in 2013.

Zoals hierboven vermeld zou Bas mij opvolgen als voorzitter van de Stichting *Compositio Mathematica* per 2022. Dat heeft niet meer mogen gebeuren. In het najaar van 2021 bleek hij een ernstige aandoening te hebben waaraan hij in januari 2022 is overleden.

Aan Bas houd ik uitstekende en bijzonder plezierige herinneringen. Allereerst als een uiterst getalenteerde, deskundige en erudiete collega en vriend. Met wiskundige vragen was je bij Bas aan het juiste adres. Hij was altijd heel direct en wars van plichtplegingen en je kon altijd een beroep op hem doen. De Stichting *Compositio Mathematica* is hem veel dank verschuldigd voor al het werk dat hij volledig onbaatzuchtig heeft verricht. Zie hiervoor ook het In Memoriam in *Compositio (Compositio Mathematica 158, 2022, pp.951–952)*. In zijn werk voor de Stichting *Compositio* heb ik vaak gemerkt dat hij begaan was met het lot van minder bedeelde en bijvoorbeeld activiteiten in de derde wereld graag wilde ondersteunen.

Bas straalde altijd levensvreugde uit. Ik denk dat Bas een uitstekend leven heeft gehad, dat helaas veel te vroeg is beëindigd. We zullen hem zeer missen.



Het omslag van *Compositio Mathematica*

René Schoof

Bas en ik hebben elkaar voor het eerst ontmoet bij de slijterij Partyshop in Zoetermeer. Dat was in 1981. Het was het jaar van de Rubik's kubus-rage en de slijterij had een kubuswedstrijd georganiseerd. Ik wist van de wedstrijd via mijn ouders die in Zoetermeer woonden. Bas zal het wel van zijn familie in Pijnacker gehoord hebben. We waren ons echter niet bewust van de aanwezigheid van de ander. We kenden elkaar nog niet. Bas was eerstejaars in Utrecht en ik was in Leiden bezig met mijn promotie. Pas een paar jaar later ontdekten we dat we beiden hadden deelgenomen aan die kubuswedstrijd.

Het proefschrift [1] van Bas gaat over modulaire krommen. Hij schreef het onder begeleiding van Frans Oort en verdedigde het in 1989. Dat was een interessante tijd voor de theorie van modulaire krommen en modulaire vormen. Een idee van Gerhard Frey, rond 1986 geperfectioneerd door Jean-Pierre Serre, suggereerde een mogelijk bewijs voor de laatste stelling van Fermat. Het heette 'Weil + epsilon implies Fermat'. Hier is 'Weil' een standaard vermoeden over modulaire vormen en 'epsilon' een destijds aannemelijke, maar nog onbewezen eigenschap van modulaire krommen. Kort daarna bewees Ken Ribet, een van de grote namen op het gebied van modulaire krommen, de 'epsilon'.

Bas ging in 1989 voor twee jaar naar Berkeley op bezoek bij Ken Ribet. In Berkeley perfectioneerde Bas zijn kennis en inzicht in de theorie van modulaire vormen. Hij werd daar een van de grootste experts op dit gebied. In 1994 bewees Andrew Wiles de laatste stelling van Fermat. Hij maakte gebruik van modulaire krommen en bewees het 'Weil'-gedeelte, dat na een campagne van Serge Lang de Modularity Conjecture was gaan heten. Bas kende de technieken in het bewijs van Wiles als geen ander. Onder supervisie van Bas konden we daarom in het voorjaar in 1995 in Lunteren als eersten in de wereld een conferentie gewijd aan het bewijs van Wiles organiseren. Later dat jaar vond de grote conferentie over het werk van Wiles in Boston plaats. Een aantal van de Lunteren deelnemers vinden we terug in de proceedings [2].

In die proceedings staat een artikel van Bas over het vermoeden van Serre [3]. Dit



Bas geeft college algebraïsche meetkunde in Leiden

vermoeden zegt dat elke oneven 2-dimensionale Galois-representatie met coëfficiënten in een eindig lichaam van een modulaire vorm komt. Het is nauw verweven met de stelling van Wiles. Bas was in staat om precieze uitspraken te doen over het gewicht van de modulaire vormen [4]. Serre's vermoeden werd in 2008 bewezen door Khare en Wintenberger.

Bas was een heel goed algebraïsch meetkundige. In een heel letterlijke zin. Hij zei dat hij niet hield van algebra's en priemidealen, maar wel van schema's en punten. Omgekeerd kon hij intuïtieve meetkundige argumenten altijd rechtvaardigen met keiharde commutatieve algebra. Hij beheerste Grothendieck-stijl algebraïsche meetkunde tot in de puntjes. Aan de andere kant werd hij aangetrokken door natuurlijke problemen die een eenvoudige formulering hadden.

Mijn algoritme gevonden om punten te tellen op elliptische krommen over eindige lichamen kan gebruikt worden om coëfficiënten van bepaalde modulaire vormen te berekenen. Om precies te zijn, met een eigenvorm f van gewicht 2 voor de groep $\Gamma_0(N)$ kun je een elliptische kromme E associëren. De Fourier-coëfficiënten van f worden op een eenvoudige manier bepaald door het aantal punten van E modulo priemgetallen p .

Ik heb Bas op een zeker moment gevraagd of hij dit kon generaliseren naar eigenvormen van hoger gewicht. Een mooi voorbeeld is de Ramanujan τ -functie. Dat zijn de Fourier-coëfficiënten van de be-

kende Δ -functie, een modulaire vorm van gewicht 12. Bas vond het een interessant probleem en in samenwerking met Jean-Marc Couveignes, Robin de Jong, Franz Merkl en Johan Bosman publiceerde hij in 2011 by Princeton University Press het boek *Computational Aspects of Modular Forms and Galois Representations*. Hierin wordt het probleem opgelost [5].

Bas heeft ook een belangrijke bijdrage geleverd aan de studie van het vermoeden van André en Oort over speciale deelvariteiten van Shimura-varieteiten. Eind jaren negentig bewees Bas onder aanname van het Gegeneraliseerde Riemann-vermoeden (GRH) een aantal speciale gevallen [6]. Zijn methode is later door anderen (Klingler, Ullmo, Yafaev) verfijnd. In 2021 is het vermoeden bewezen door Pila, Shankar en Tsimerman. Zij volgen een andere strategie.

Heel recent hield Bas zich met de Chabauty-methode van Minhyong Kim bezig. Hij had een meer meetkundige interpretatie in termen van Poincaré-torsoren. Dit resulteerde in het artikel 'Geometric quadratic Chabauty' [7]. Zie ook het proefschrift van Guido Lido, de laatste promovendus van Bas.

Bas organiseerde talloze dingen. Een paar jaar na de Lunteren-conferentie organiseerde hij samen met J.-H. Evertse een school over diofantische approximatie en het Mordell-vermoeden. De proceedings heeft hij daarna ook verzorgd [8]. In de jaren dat hij aan de universiteit van Rennes verbonden was, gaf hij twee voordrachten in het prestigieuze Séminaire Bourbaki.

Een ander initiatief van Bas was het typesetten van SGA in LaTeX. Dat deed hij niet alleen. Hij verdeelde het typewerk onder een aantal vrijwilligers. Zo is, gecoördineerd door Bas, de LaTeX-versie van SGA 1 gemaakt [9]. Inmiddels zijn ook LaTeX versies van SGA 2 en SGA 3 op deze manier gecreëerd.

Bas was altijd heel vriendelijk en had een positieve kijk op het leven. Hij was heel genereus met zijn wiskundige ideeën en kennis. Ik heb heel veel van hem geleerd. Bovenal was Bas een vriend van me. We kwamen elkaar overal ter wereld tegen. Op conferenties en scholen. Of we zochten elkaar gewoon op. In Trento, Rome of Rennes en later Leiden. Ik mis hem.

Referenties

- 1 *Stable Models of Modular Curves and Applications*, Proefschrift aan de Universiteit van Utrecht, 1989.
- 2 *Modular forms and Fermat's Last Theorem* (1997).
- 3 *Le rôle de la conjecture de Serre dans la démonstration du théorème de Fermat* (1995).
- 4 *The weight in Serre's conjectures on modular forms*, *Inventiones Mathematicae* (1992).
- 5 *Computational Aspects of Modular Forms and Galois Representations*, Princeton University Press, 2006.
- 6 (met A. Yafaev) *Subvarieties of Shimura varieties*, *Annals of Mathematics* (2003).
- 7 (met G. Lido) *Geometric quadratic Chabauty*, arXiv:1910.10752.
- 8 *Diophantine Approximation and Abelian Varieties*, 1997.
- 9 SGA 1, arXiv:math/0206203.

Walter D. van Suijlekom

IMAPP – Wiskunde
Radboud Universiteit Nijmegen
waltervs@math.ru.nl

Oratie

Opgetrommeld voor spectra

Walter van Suijlekom is sinds 1 december 2021 hoogleraar niet-commutatieve meetkunde aan de Faculteit der Natuurwetenschappen, Wiskunde en Informatica van de Radboud Universiteit. Dit artikel is een weergave van zijn oratie op 7 september 2022, met als onderzoeksvraag uit de spectraalanalyse: kun je de vorm van een object reconstrueren, puur en alleen door ernaar te luisteren?

De toehoorders van mijn oratie zijn muzikaal verwelkomd — letterlijk opgetrommeld — door trommelgroep RADAC, zoals het in de zeventiende eeuw gebruikelijk was om mensen bij elkaar te roepen in dorpen en steden (zie Figuur 1). Zij hebben kunnen horen, en misschien zelfs kunnen voelen wat voor een verschillende klanken trommels van verschillende formaten kunnen produceren. Dit gegeven vormt de rode draad van mijn verhaal: het *spectrum van trillingsfrequenties* van een object — zoals een trommel — zegt duidelijk iets over de meetkundige vorm ervan. Maar zegt het ook alles? De wiskunde hierachter is hoogst interessant, en dat wil ik graag laten zien, en horen. De tweede boodschap die ik wil meegeven is dat wiskunde bovenal mensenwerk is, en simpelweg niet zou bestaan zonder de vruchtbare interactie tussen wiskundigen.

Spectra en meetkundige vormen

Laten we beginnen met het woord *spectrum*. In de wiskundige literatuur duikt deze term al vroeg op in het werk van David Hilbert die het begrip omschrijft als een collectie van frequenties [10]. Ruim

twintig jaar later neemt John von Neumann het concept over binnen het wiskundig bouwwerk van de kwantummechanica [21]. Dankzij hun werk kunnen we nu op een vergelijkbare manier praten over bijvoorbeeld het auditieve spectrum, bestaande uit de trillingsfrequenties van een object,

of het visuele spectrum, bestaande uit de stralingsfrequenties van licht.

Het was echter mijn landgenoot Hendrik Lorentz die als natuurkundige de cruciale wiskundige vraag stelde voor het ontstaan van de zogeheten *spectrale meetkunde*. Ik vind dit zelf een prachtige illustratie van hoe onderzoek op het grensvlak van wis- en natuurkunde in zijn werk gaat, dus ik neem jullie graag even mee naar het begin van de twintigste eeuw.

Lorentz was toen al een gevierd en zeer gerespecteerd fysicus. Hij had in 1902 de



Figuur 1 Trommelgroep RADAC trommelt het publiek op voor de oratie.

Foto: Theo Hafmans



Walter van Suijlekom

Theo Hafmans

in de meetkunde

Nobelprijs ontvangen en was al 25 jaar als hoogleraar verbonden aan de Universiteit Leiden. Ondertussen werd hij veelvuldig uitgenodigd voor voordrachten en colleges in het buitenland. Zo ging hij per stoomboot naar de Verenigde Staten om daar colleges te geven, en was dus maanden van huis. Hij gaf ook een voordracht op het Internationale Wiskundecongres van 1908 in Rome, ondertussen genietend van het Italiaanse leven — iets wat ik persoonlijk erg goed kan begrijpen. In oktober 1910 was hij gasthoogleraar in Göttingen waar hij de zogeheten Wolfskehl-voordrachten verzorgde. Dat waren maar liefst zes lezingen in vijf dagen, over zeer gevarieerde onderwerpen [14].

In zijn derde lezing in Göttingen stelde Lorentz dat het elektromagnetische stralingsspectrum van een driedimensionaal object zich voor hoge frequenties onafhankelijk zou gedragen van de precieze vorm van dat object, en een veelvoud is van diens volume:

“Hierbei entsteht das mathematische Problem, zu beweisen, dass die Anzahl der genügend hohen Obertöne zwischen n und $n + dn$ unabhängig von der Gestalt der Hülle und nur ihrem Volumen proportional ist.”

[“Hier ontstaat het wiskundige probleem te bewijzen dat het aantal voldoende hoge boventonen tussen n en $n + dn$ onafhanke-

lijk is van de vorm van de omhullende en slechts evenredig met het volume ervan.”] Slechts een paar maanden later, eind februari 1911, leverde de jonge wiskundige Hermann Weyl, eveneens werkzaam in Göttingen, hiervoor het bewijs, uiteraard met de nodige wiskundige precisie [22]. Dit bewijs van Lorentz’ vraagstelling is zelfs toepasbaar in hogere dimensies. Feitelijk is toen de grondslag gelegd voor de spectrale meetkunde: het vakgebied in de wiskunde dat zich bezighoudt met de vraag of vormen volledig worden bepaald door hun trillingsspectrum.

In de natuurkundige literatuur uit die tijd is van dit bewijs niet snel meer iets terug te vinden, noch van bijvoorbeeld een referentie naar Weyls werk. Wel schreef Lorentz er een jaar later over. Hij spreekt nu niet meer van een probleem maar van een bewezen feit, én doet dat dit keer in het Frans:

“on démontre que le nombre des modes de vibrations possibles est proportionnel à V et indépendant de la forme du corps” [15]

[“hier wordt aangetoond dat het aantal mogelijke trillingsmodes evenredig is met V en onafhankelijk van de vorm van het lichaam”] Dit citaat is afkomstig uit de vijfde en laatste van zijn Michonis-lezingen die hij eind november 1912 gaf aan het prestigieuze Collège de France in Parijs (zie Figuur 2). Ik moet toegeven dat ik tijdens de

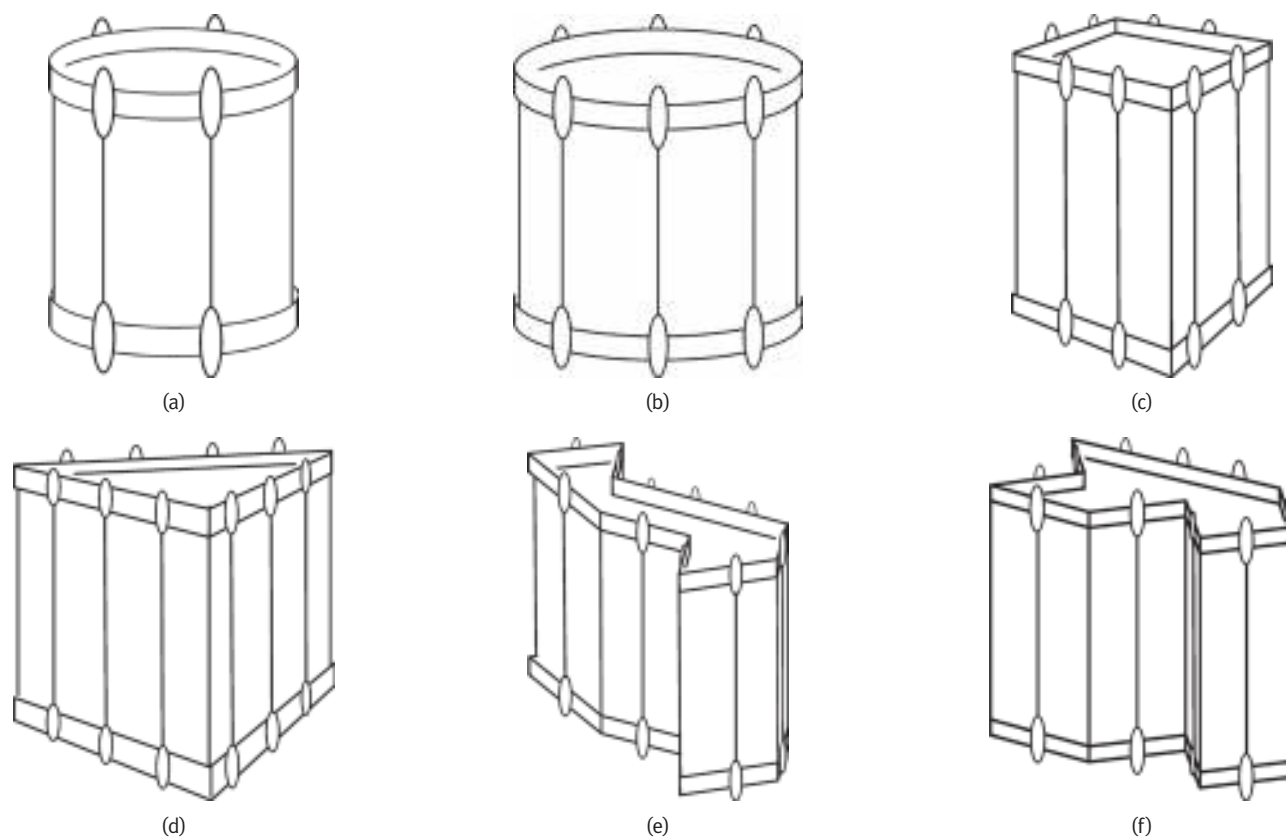
voorbereiding op deze lezing eerder dit jaar in de bibliotheek van het Collège met rode oortjes de briefcorrespondentie tussen Lorentz en het instituut heb zitten lezen — opnieuw in prachtig Frans. We zien trouwens meteen wat een talenwonder Lorentz was; iets wat hem eerder al de ideale voorzitter van het beroemde Solvay Congres had gemaakt, met deelnemers als Albert Einstein, Marie Curie, Max Planck, Henri Poincaré, et cetera. Tijdens dat congres kon Lorentz naast zijn uitstekende wetenschappelijke overzicht, ook zijn talenkennis inzetten. Niet alle Franse deelnemers spraken namelijk Duits, of de Duitse deelnemers Engels. (Veel van deze achtergrond is geput uit de twee uitgebreide recent verschenen biografieën van Lorentz [2, 12].)

Vanwege de politieke onrust in die tijd kwam Lorentz hierna niet meer in Duitsland, en ook Göttingen hield op te bestaan

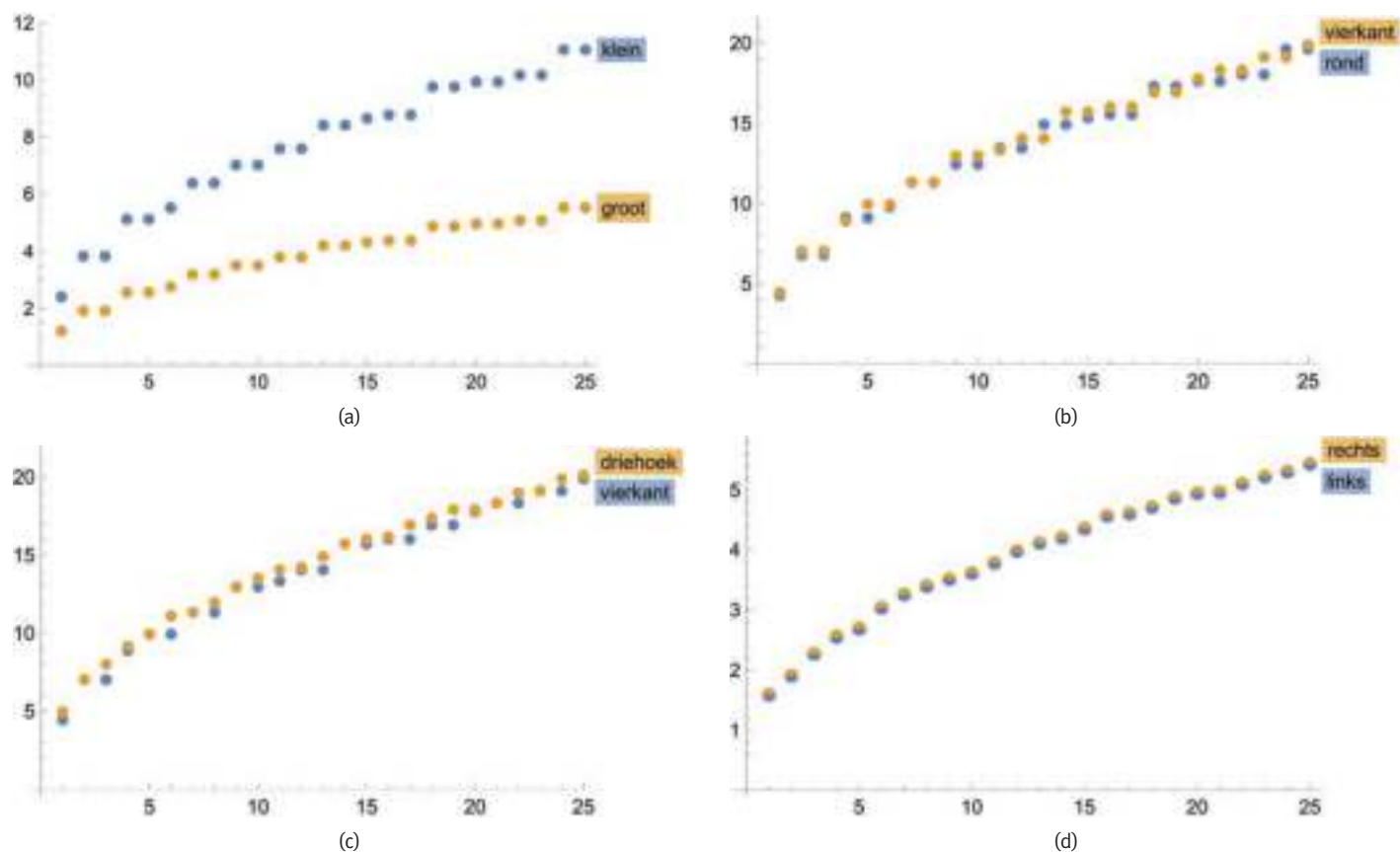


Figuur 2 Aankondiging van de Michonis-lezingen van Lorentz op het Collège de France in november 1912.

Fotografie van Collège de France



Figuur 3 Trommels in verschillende vormen.



Figuur 4 (a) De eerste 25 trillingsfrequenties van twee ronde trommels van verschillende doorsnede. (b) De eerste 25 trillingsfrequenties van een ronde en een vierkante trommel met gelijke oppervlakte. (c) De eerste 25 trillingsfrequenties van een vierkante en een driehoekige trommel (gelijkbenig en rechthoekig) met gelijke oppervlakte. (d) De eerste 25 identieke trillingsfrequenties van twee verschillende trommels.

als episch centrum van de wiskunde. We moeten daarom zo'n vijftig jaar wachten op de verdere ontwikkeling van de spectrale meetkunde. In 1966 publiceerde wiskundige Mark Kac het artikel 'Can one hear the shape of a drum?' ['Kun je de vorm van een trommel horen?'] [11]. U begrijpt dat deze titel mij niet alleen als wiskundige treft, maar mij ook als slagwerker zeer aanspreekt. We stellen ons de trommel voor als een oppervlak en bekijken alle mogelijke trillingsgolven van dit oppervlak die gelijk aan nul zijn aan de rand. Dit is onze trillende trommel: het vel trilt maar de rand van de trommel ligt vast. De vraag is nu: als we alle trillingsfrequenties van het oppervlak kennen, kunnen we dan de vorm van het oppervlak achterhalen?

Feitelijk vormde Kac' werk een verfijning van de stelling van Lorentz, en het bewijs van Weyl want daarmee was uit het trillingsspectrum in ieder geval het volume, of, in het geval van de trommel de oppervlakte te achterhalen. Dit strookt wellicht met uw intuïtie: grote muziekinstrumenten (zoals een contrabas) maken doorgaans een lager geluid dan kleine instrumenten (zoals een viool).

Laat ik een voorbeeld geven: voor de twee trommels in Figuur 3(a) en 3(b) staan in Figuur 4(a) de eerste 25 trillingsfrequenties uitgezet. De kleine trommel heeft inderdaad hogere frequenties dan de grote, zodat uit het geluid valt af te leiden welke trommel er klinkt.

De vraag van Kac gaat echter nog een stap verder en gaat ook over verschillende vormen, zoals een ronde en een vierkante trommel, in dit geval van gelijk oppervlak. Zie bijvoorbeeld de twee trommels in Figuur 3(b) en 3(c). Opnieuw is het de vraag of het mogelijk is om het verschil in vorm te horen tussen deze twee trommels, ongeacht hun precieze afmetingen. Als we kijken naar de eerste 25 trillingsfrequenties (Figuur 4(b)) zien we dat deze van elkaar verschillen zodat het antwoord weer bevestigend is. Wat ook opvalt aan deze figuur is dat de frequenties voor beide trommels globaal gezien dezelfde parabolische vorm volgen: dit is een goede illustratie van de wet van Weyl: voor voldoende hoge boventonen hangen deze alleen af van het volume — of in dit geval oppervlakte — van de trommel.

Laten we het nog iets ingewikkelder maken en naar een vierkanten en een driehoekige trommel luisteren, zoals de twee



Figuur 5 Rolmaat en laser-afstandsmeter.

trommels in Figuur 3(c) en 3(d). De eerste 25 trillingsfrequenties staan aangegeven in Figuur 4(c) en laten zien dat deze trommels een verschillende geluid maken.

Tot slot twee trommels met een wat exotischer vorm, van gelijke oppervlakte en met dezelfde omtrek, zie de twee trommels in Figuur 3(e) en 3(f). De eerste 25 trillingsfrequenties staan aangegeven in Figuur 4(d) en het verbluffende resultaat is dat ze een identiek trillingsspectrum hebben. Deze twee trommels hebben dus een verschillende vorm, maar klinken precies hetzelfde.

Onze conclusie is dus dat er nog een puzzelstukje ontbreekt als we vormen volledig met behulp van spectra willen beschrijven. Ik zal daarover straks een tipje van de sluier oplichten, maar eerst wil ik nog meer bewijsmateriaal verzamelen voor het gebruik van spectra bij het beschrijven van vormen, en wel in de natuurkunde. Die twee invalshoeken van wis- en natuurkunde vullen elkaar goed aan, en zijn ook een typerende eigenschap van mijn eigen onderzoek.

Spectra in de natuurkunde

Het was natuurlijk ver voor Lorentz al bekend dat spectra een cruciale rol spelen in de waarneming van samenstelling en vorm.

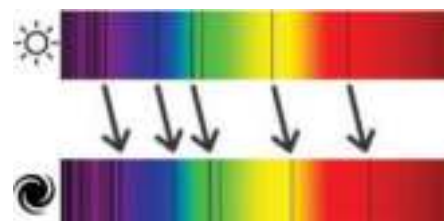
Voor het visuele spectrum moeten we terug naar Isaac Newton. Sterker nog, hij is degene die de term spectrum in de natuurkunde heeft geïntroduceerd om aan te geven hoe wit licht is opgebouwd uit licht van verschillende frequenties, iets wat hij al in de zeventiende eeuw liet zien met behulp van het prisma.

Maar, hoe kunnen we nu vormen meten met behulp van spectra? Laat ik dichtbij huis beginnen: afstanden meten we vaak niet meer met een klassieke rolmaat, in plaats daarvan gebruiken we het spectrum van laserlicht, zie Figuur 5. En mis-

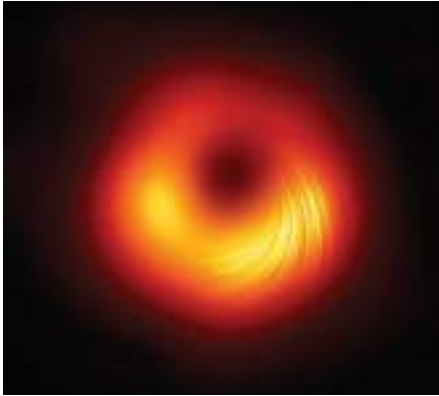
schien niet in uw huiskamer, maar dan wel in een lab, analyseren we het spectrum in Röntgenstraling in bijvoorbeeld een elektronenmicroscop, en als we nog verder inzoomen, zijn ook waarnemingen in een deeltjesversneller zoals die van het CERN in Zwitserland gebaseerd op resonantiespectra. Allemaal met als doel de samenstelling, vorm en eventuele snelheid van een object of deeltje spectraal te bepalen.

In de sterrenkunde spelen spectra ook een cruciale rol, simpelweg omdat metingen aan ver gelegen sterrenstelsels nooit ter plaatse kunnen worden gedaan. Echter, door goed te kijken naar het visuele spectrum van bijvoorbeeld een ster of cluster, en in het bijzonder naar de locatie van zogeheten absorptielijnen — kleine donkere lijnen in het spectrum — kunnen we de chemische samenstelling van ver gelegen sterren of clusters bepalen, en bijvoorbeeld hun snelheid uitrekenen (Figuur 6). Aan de hand van dit soort waarnemingen bepalen we de vorm en kromming van het universum door de objecten die er door bewegen spectraal te observeren. Dergelijke waarnemingen hebben zelfs tot de schokkende conclusie geleid dat het universum zelf aan het uitdijen is!

Maar we hoeven ons niet te beperken tot het visuele spectrum, want voor waarnemingen met behulp van radiotelescopieën of met infrarood-telescopieën geldt hetzelfde. In het radiospectrum maken we tegen-



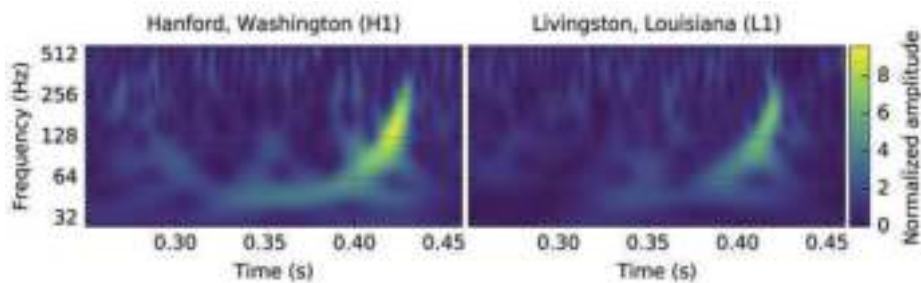
Figuur 6 De absorptielijnen van de zon (boven) zijn roodverschoven voor supercluster BAS11 (onder), bewegend met 7% van de lichtsnelheid.



Figuur 7 M87* gezien door de Event Horizon Telescope (EHT). De lijnen laten de polarisatie van licht in de omgeving van de event horizon (waarnemingshorizon) zien [9].



Figuur 8 Zwaartekrachtseffect zoals geobserveerd met de James Webb Telescoop (zoom van cluster SMACS 0723) naast vergelijkbaar vervormde klokken in Salvador Dalí's *La persistència de la memòria* (1931) waarvan de schilder zelf trouwens beweert dat het niet geïnspireerd is op Einsteins relativiteitstheorie.



Figuur 9 Zwaartekrachtsgolven zoals gemeten door LIGO (GW150914): een rimpeling van de ruimtetijd zelf veroorzaakt door het samensmelten van twee zwarte gaten [1].

woordig foto's die de omgeving van een zwart gat in kaart brengen (Figuur 7), en in het infrarode spectrum heeft de James Webb Telescoop zeer recent de kromming van ruimtetijd heel inzichtelijk in een beeld gevat (Figuur 8).

Daar kunnen zwaartekrachtsgolven aan worden toegevoegd: rimpels in de ruimtetijd om ons heen. Het trillingsspectrum dat die golven opleveren zegt ons iets over de vorm van de zwarte gaten of neutronensterren die om elkaar spiraliserend tot een geheel samensmelten (Figuur 9).

Kortom, eigenlijk zijn alle metingen in de natuurkunde spectraal van aard, zodat dus eigenlijk alle kennis van de fysieke wereld wordt bepaald aan de hand van de analyse van spectra. Dit maakt het nog crucialer een wiskundige theorie te hebben die vertelt hoe spectra kunnen worden gebruikt in de meetkunde.

Opmaat naar niet-commutatieve meetkunde

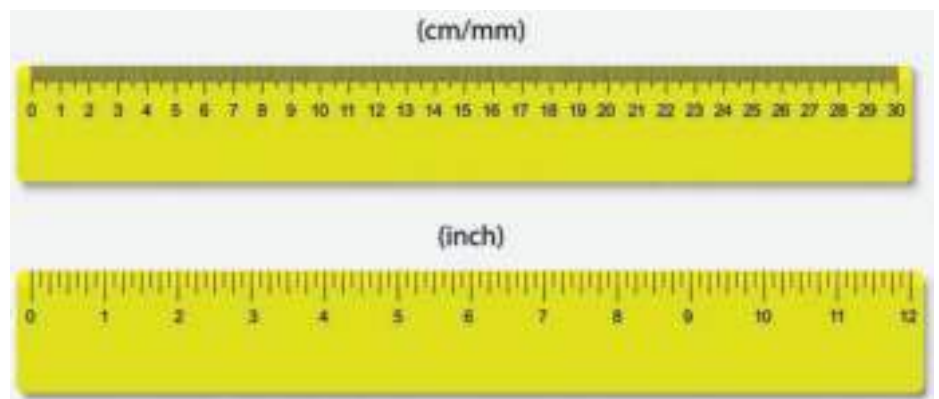
We weten dus dat natuurkundig gezien alle informatie over de vorm van het universum, op zowel kleine als grote schaal tot ons komt in de vorm van spectra. Maar hoe zit dat wiskundig in elkaar? Is er een wiskundig formalisme om meetkunde te doen alleen met behulp van spectra? Dat

lijkt cruciaal, zeker als we bedenken dat er verschillende objecten zijn die toch dezelfde trillingsfrequenties hebben, zoals het laatste paar trommels dat ik hierboven heb beschreven. Het antwoord is natuurlijk ja, maar daarvoor moeten we eerst nog even terug naar het begin van de twintigste eeuw. Het volgende deel is misschien iets technischer van aard dan de rest van mijn verhaal, maar geen zorgen ik beloof dat er de nodige verlichting zal komen.

In 1918 introduceerde Hermann Weyl het begrip *ijksymmetrie* [17, 18, 19, 23, 27]. Een goed voorbeeld van een ijk is de keuze tussen inches of centimeters, zie Figuur 10.

Het uitgangspunt van Weyl was dat natuurwetten onveranderd zouden blijven na aanpassing van de schaal, met andere woorden, na het kiezen van een ijk. Deze hypothese maakte het mogelijk om een meetkundige beschrijving te geven van elektromagnetisme, en de symmetrie te gebruiken voor een afleiding van de wet van behoud van lading. Einstein was het echter niet met hem eens en reageerde scherp in een addendum bij het artikel. Het bezwaar van Einstein was dat zo'n ijksymmetrie geen goede fysische aanname kon zijn, want deze zou als gevolg hebben dat de locatie van bijvoorbeeld de absorptielijnen in het spectrum van een element afhankelijk zou zijn van de afkomst van dat atoom. Dat is fysisch gezien duidelijk niet het geval!

Weyl probeerde Einsteins bezwaar nog te weerleggen in een reactie, maar zonder overtuiging. Echter, een klein decennium later vond zijn idee vruchtbare bodem in de kwantumfysica [8, 13]. De ijksymmetrie van Weyl moest worden vervangen door een *fase-symmetrie*. Wiskundig gezien is dit een kleine aanpassing — een factor i —



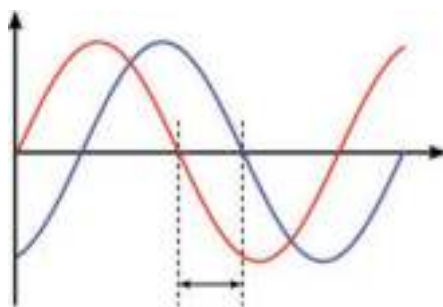
Figuur 10 Het kiezen van een ijk: centimeter versus inch.

maar wel een met grote gevolgen. Want als we terugdenken aan onze spectrale aanpak van meetkunde aan de hand van trillingsfrequenties, dan realiseren we ons dat een fase-verschuiving van een trilling de frequentie onveranderd laat (Figuur 11). En omdat we onze meetkunde baseren op dat spectrum, krijgt iksymmetrie zo een nieuwe betekenis waar ongetwijfeld ook Einstein zich in had kunnen vinden. Weyl omarmde dit idee in 1929 [24] en schreef er dit over [25]:

“...durch die Quantentheorie, glaube ich, können wir mit großer Bestimmtheit den Finger auf den Punkt legen, in welchem meine Theorie irrte: die Eichinvarianz verbindet die elektromagnetischen Potentiale nicht mit den g_{ij} der Gravitation, sondern mit den ψ_q des Materiefeldes. Das konnte ich freilich 1918 nicht wissen! Damals waren diese ψ noch völlig unbekannt.”

[“...door de kwantumtheorie, geloof ik dat we met grote zekerheid de vinger kunnen leggen op het punt waar mijn theorie niet klopte: de iksymmetrie verbindt de elektromagnetische potentialen niet met de g_{ij} van de gravitatie maar met de ψ_q van het materieveld. Dat had ik in 1918 natuurlijk niet kunnen weten! In die tijd waren deze ψ nog totaal onbekend.]

Overigens is Weyls afleiding van de wet van behoud van lading nog steeds geldig, en feitelijk een toepassing van de tweede Stelling van Noether [3]. Interessant genoeg publiceerde Emmy Noether haar werk hierover [16] ook in 1918, net als Weyl zijn artikel. Ze bewijst daarin dat er een een-op-een-verband bestaat tussen symmetrieën en behouden grootheden. Toegepast op Weyls iksymmetrie geeft dit de welbekende wet van behoud van lading. Tegenwoordig staan haar stellingen centraal in de theoretische en mathematische fysica, maar in die tijd was die erkenning ver te zoeken: niet vanwege haar kwaliteiten maar om haar geslacht. Zo werd haar eerste poging tot *Habilitation* afgewezen simpelweg omdat ze geen mannelijke kandidaat was. Volgens een bekende anekdote protesteerde Hilbert daarop dat hij niet inzag waarom het geslacht van de kandidaat ertoe zou doen; per slot van rekening was dit een universiteit, geen badhuis! Dit bleef zonder direct resultaat, en dus gaf Noether dan maar colleges onder de naam van Hilbert [26].



Figuur 11 Een fase-verschuiving laat de trillingsfrequentie van een golf onveranderd.

Een grote stap in de ontwikkeling van het principe van iksymmetrie wordt begin jaren 1950 gezet. Onafhankelijk van elkaar generaliseerden Yang en Mills [28] en Utiyama [20] elektromagnetisme, waarbij zogeheten *niet-abelse* ijkvelden het elektromagnetische veld generaliseerden [17]. In eerste instantie leek dit een theoretische exercitie, maar al snel bleken deze theorieën de bouwstenen van de deeltjesfysica te worden. De niet-abelse ijkvelden bleken de krachtdragers te zijn van de zwakke en sterke kernkrachten, net zoals het elektromagnetische veld kan worden gezien als drager van de elektromagnetische kracht. Welnu, in plaats van een enkele fase, zoals beschreven in het werk van Weyl, geven niet-abelse ijkvelden aanleiding tot een algemener idee van fase. En hoewel Weyl in die tijd op dezelfde plek werkte als Yang, in Princeton, leek hij niet op de hoogte van deze ontwikkelingen, die hij echter ongetwijfeld zou hebben omarmd, omdat

ze zich bevonden op het kruispunt van iksymmetrie en niet-abelse groepentheorie [27]. Ik heb het zelf altijd als ontzettend intrigerend ervaren dat de abstracte wiskunde zo veel te zeggen heeft over hoe de natuur zich gedraagt op de schaal van de elementaire deeltjes. Sterker nog, dat was precies wat mij zo aantrok in het grensvlak tussen de wis- en natuurkunde.

We kunnen zelfs nog een stap zetten, en daarmee komen we tot de kern van mijn onderzoeksgebied. De combinatie van het niet-abelse ijkprincipe — en dus deeltjesfysica — en de spectrale aanpak van de meetkunde leidt namelijk onvermijdelijk tot *niet-commutatieve meetkunde*. De iksymmetrie van Yang en Mills blijkt namelijk te kunnen worden gerealiseerd als symmetrie van het trillingspectrum van een niet-commutatieve ruimte: een trillende niet-commutatieve trommel dus. Zo lukt het ons om naast zwaartekracht — zoals Einstein beschreef een gevolg van de kromming van ruimtetijd — ook de elektromagnetische kracht en de kernkrachten meetkundig te beschrijven.

Tijd om terug te keren naar de wiskunde, want hoewel ik mijn vakgebied nu gemotiveerd heb vanuit natuurkundig perspectief, is de niet-commutatieve meetkunde diep geworteld in de wiskunde, getuige deze leerstoel. De grondlegger van dit vakgebied is de Franse wiskundige Alain Connes, zie Figuur 12. Hij won in 1982 de Fieldsmedaille voor zijn classificatie van Von Neumann algebras — een

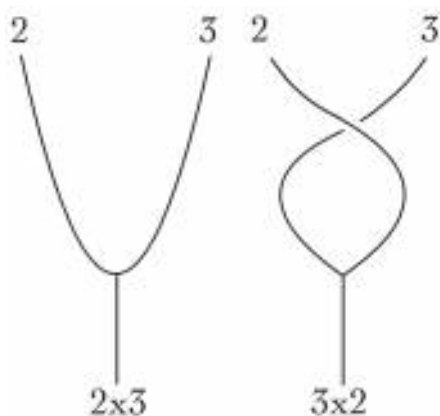


Figuur 12 Alain Connes (r) naast de Slinger van Foucault in het Huygensgebouw, Radboud Universiteit, 2016.

concept dat inderdaad teruggaat tot de eerste dagen van de kwantummechanica. Hij werd al snel daarna hoogleraar aan het Collège de France, ruim zestig jaar na Lorentz' Michonis-lezingen aldaar. In de jaren tachtig en negentig combineerde hij spectrale meetkunde met spectra van mogelijk niet-commuterende coördinaten. Het was precies deze combinatie waarmee hij de oude vraag van Kac bevestigend kon beantwoorden: door 'lokaal' te luisteren naar een trommel, kun je zijn vorm volledig bepalen [4,5]. Het is alsof je langs de rand van de trommels in de laatste vraag van de quiz loopt en luistert naar de klank, om op deze manier te ontrafelen wat de globale vorm is van de trommel.

Deze spectrale aanpak is dus niet alleen toepasbaar op trommels van verschillende vormen, of hoger-dimensionale meetkundige objecten, hij gaat ook op voor zogeheten niet-commutatieve ruimtes. Zoals gezegd heeft dit geleid tot toepassingen in de deeltjesfysica, maar om te voorkomen dat u naar huis gaat zonder een klein idee te hebben van wat er dan niet-commutatief is, volgt hier een alledaagser voorbeeld.

Als je getallen zoals 2 en 3 met elkaar vermenigvuldigt, maakt de volgorde niet uit: 2×3 is hetzelfde als 3×2 . Deze commutatieve algebra leren mijn kinderen al op school, en daar is natuurlijk helemaal niets mis mee. We zouden dit in een diagram kunnen samenvatten, zie Figuur 13. Op het kruispunt worden de getallen 2 en 3 met elkaar vermenigvuldigd, waarbij in het rechter diagram de volgorde eerst nog wordt omgedraaid. Omdat beide diagrammen gelijk zijn — de draaiing rechts kan eenvoudig ongedaan worden gemaakt zonder het diagram te veranderen — illustreert dit het commuteren van vermenigvuldiging.



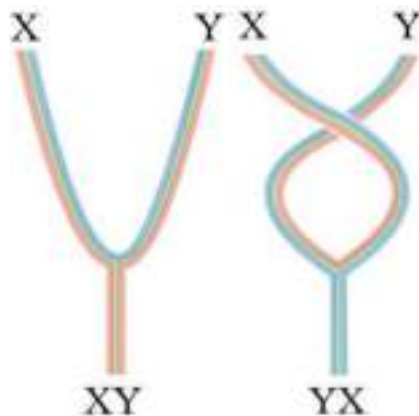
Figuur 13

In de meetkunde waar ik mij mee bezighoud gelden andere rekenregels, zodat vermenigvuldiging niet per se commutatief is. Een diagrammatische voorstelling van niet commuteren is met behulp van strookjes gekleurd papier, zoals afgebeeld in Figuur 14. Links geeft duidelijk een andere resultaat dan rechts, en dus is deze bewerking niet-commutatief. Als de kenner hier matrix-vermenigvuldiging in herkent, is dat volkomen terecht want dat is precies wat ik hier probeer voor te stellen. Samenvattend geldt dus dat onze coördinaten X en Y niet commuteren:

$$XY \neq YX$$

Natuurkundig gezien stellen de strookjes papier trouwens een ruimte van interne vrijheidsgraden voor — precies de eerder genoemde ijkvrijheidsgraden. Zo stelt oranje bijvoorbeeld een elektron voor, terwijl blauw een neutrino is, en het strookje geeft alle mogelijke superposities daarvan weer. Als we coördinaten kiezen die voldoen aan dergelijke rekenregels, is het mogelijk de interne vrijheidsgraden in de meetkunde 'in te bakken'. Kromming van zo'n niet-commutatieve ruimte geeft dan, in het verlengde van Einsteins relativiteitstheorie, aanleiding tot een meetkundige beschrijving van alle vier fundamentele natuurkrachten: de zwaartekracht, de elektromagnetische kracht en de zwakke en sterke kernkracht.

Vooruitkijkend naar de komende jaren wil ik werken aan een begrip van spectrale meetkunde als er slechts een deel van het spectrum bekend is. Het huidige formalisme van de niet-commutatieve meetkunde gaat namelijk uit van kennis van het volledige spectrum bestaande uit alle trillingsfrequenties. Dat is niet erg realistisch: natuurkundig gezien is het duidelijk dat een volledig trillingsspectrum nooit be-



Figuur 14

schikbaar is. Zo heeft een detector altijd een bepaalde bandbreedte en resolutie. En toch denken we dat we met onze spectroscopie een volledig beeld vormen van de werkelijkheid, inclusief kromming en afstanden in ons eigen universum. Kennelijk benaderen we met onze beperkte kennis van het spectrum toch de continue werkelijkheid. Denk nog eens terug aan de trommel: ook met ons beperkte gehoor lukt het ons prima het verschil in grootte van de trommels te bepalen. Zelfs als het gehoorbereik met het klimmen der jaren wat is afgenomen.

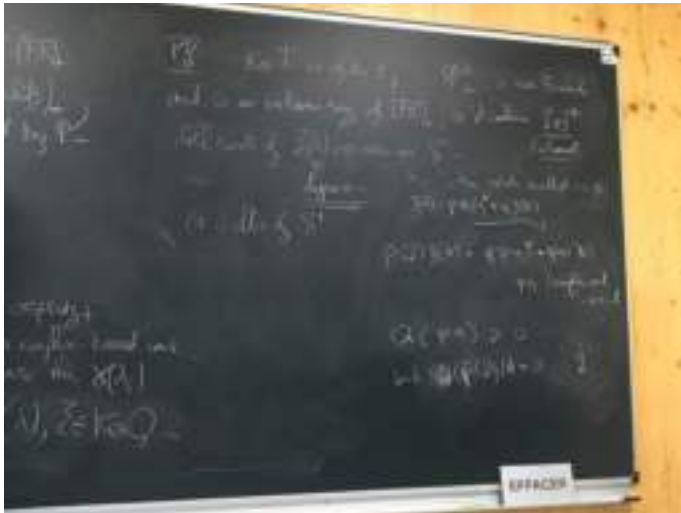
Ik wil onderzoeken hoe de wiskunde hierachter in elkaar steekt: kunnen we bewijzen dat we met de kennis van een deel van het spectrum kunnen convergeren naar de oorspronkelijke meetkundige vorm? In hoeverre is meetkunde op deze manier een *emergent* verschijnsel, voortkomend uit een eindig aantal trillingen? Kunnen we spreken van meetkunde op een bepaalde schaal gezien, of met een bepaalde resolutie gemeten?

Zo'n schaalafhankelijke meetkunde is tegelijk een cruciale voorbereiding op het formuleren van de hoognodige kwantumtheorie in het wiskunde bouwwerk van de niet-commutatieve meetkunde. Op kleinere schaal zullen kwantumeffecten namelijk een rol gaan spelen in de voortbeweging van elementaire deeltjes, en dus in de meetkundige formulering van de deeltjesfysica. Feitelijk kan dit worden gezien als de heilige graal van dit toepassingsgebied, en mijn onderzoeksgebied in het bijzonder.

Ik heb veel van mijn onderzoek uitgelegd aan de hand van trommels en met voorbeelden uit de natuurkunde. Dit zijn echter slechts metaforen voor mijn onderzoek en mijn vakgebied. Mijn dagelijkse werk ziet er wel wat anders uit, en zonder u daar ver in mee te nemen, lijkt het me toch goed om u hier een vluchtige blik op te laten werpen: goed gevulde krijtborden of gewoon krabbels met (digitale) pen en papier (Figuur 15 en 16).

Wiskunde als mensenwerk

Vooruitkijkend naar de manier waarop ik wiskunde zou willen beoefenen, zou ik graag de mens erachter naar de voorgrond willen brengen. Hierboven heb ik geprobeerd de personen achter al die wis- en natuurkunde te belichten, en te benadrukken hoe belangrijk de interactie met anderen was. Ik vind deze samenwerking



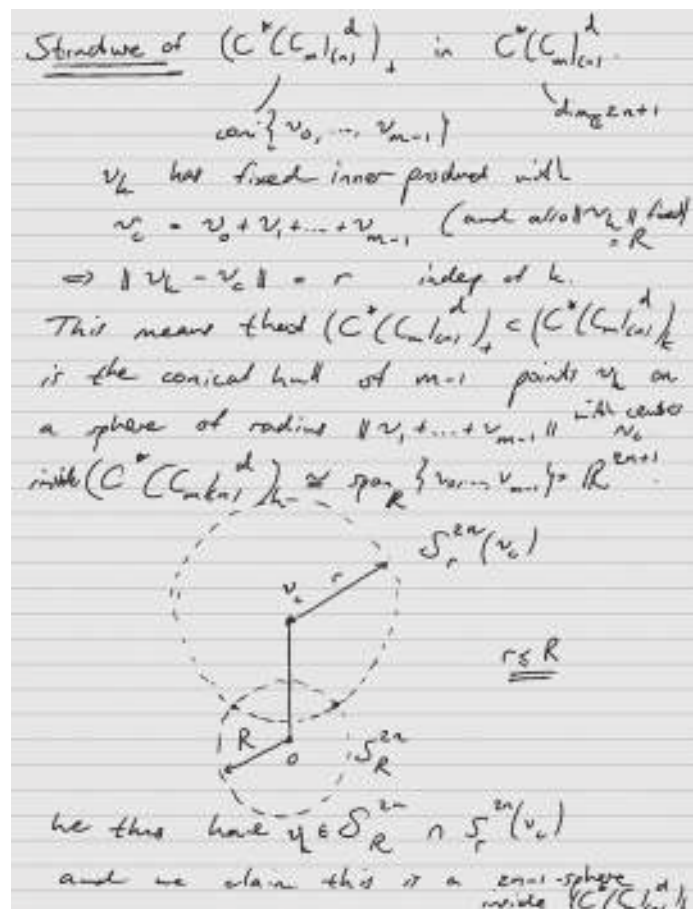
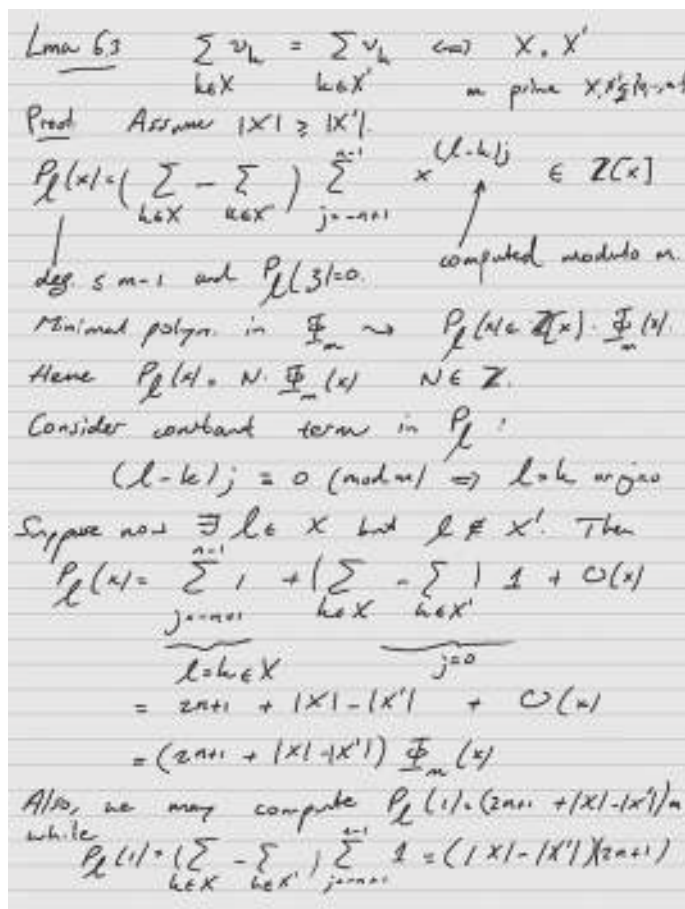
Figuur 15 Twee goed gevulde krijtborden (op IHÉS en in Kyoto).

een essentiële eigenschap van wetenschap en in het bijzonder van de wiskunde. Zo ontstaat een duurzaam netwerk van wetenschappers die elk met elkaar in verbinding staan en als dat mogelijk of zinvol is, ook tussen de vakgebieden in. En dan zijn er ook altijd onderzoekers die dichter bij de maatschappij staan, waar ze voor hun toepassingen kunnen putten uit het zo

belangrijke meer ongebonden onderzoek. De recente ontwikkelingen voor wat betreft dergelijke invloed bij NWO zijn positief, en ik zal me er de komende jaren sterk voor blijven maken, onder andere als lid van de adviestafel wiskunde.

Iets wat overigens wel pijnlijk duidelijk is geworden uit mijn verhaal, is dat dit vooral een mannelijke aangelegenheid

lijkt te zijn. Dat is natuurlijk volkomen onterecht maar het betekent wel dat er nog een flinke slag gemaakt moet worden. Nogmaals, wiskunde is mensenwerk, geen mannenwerk! Gelukkig is de situatie op de universiteit onder studenten inmiddels enorm verbeterd, maar bij elke volgende stap in de wetenschappelijke carrière vallen er meer vrouwen af dan mannen. We



Figuur 16 Twee willekeurige pagina's uit een van mijn (digitale) notitieboekjes.

Figuur 17 Viololconcert van Benjamin Britten; duet tussen slagwerk en viool, einde van deel I.

moeten overigens voorkomen dat we met ons beleid worden ingehaald door de werkelijkheid, want ook in bredere zin moeten we inclusief zijn.

Maar hoe zie ik mijn onderzoeksgroep dan voor me? Ik zou het willen vergelijken met het beklimmen van een berg. Ik loop een groot risico om in clichés te vervallen, maar vanuit een Nederlands perspectief is het niet zo vreemd om te dromen van bergen als er gewoon geen in de buurt zijn. In mijn onderzoek zie ik mijzelf wandelend op een bergrug, genietend van het uitzicht en alle schoonheid die er te ontdekken valt. Jonge mensen met verschillende kwaliteiten en achtergronden sluiten zich aan bij de reis en anderen vertrekken om een nieuw pad te vinden naar andere bergtoppen. Zo zou ik graag zien dat mijn onderzoeksgroep de komende jaren blijft bloeien, vanuit een langdurig streven om de top te bereiken, met een prachtig uitzicht als beloning.

Voor mij neemt de interactie met andere wis- en natuurkundigen dus een centrale

plaats in. Natuurlijk, het is geweldig om een wiskundig inzicht te hebben, of een natuurkundig verschijnsel in een formule te kunnen vangen. Maar het delen van inzichten met een collega of een student is toch wel wat het werk echt de moeite waard maakt.

Ik kom daarbij ook meteen op een ander punt van meer filosofischer aard, dat gaat over hoe ik wiskunde zie. Want ook al vormen formules, stellingen, bewijzen, et cetera, de taal waarmee wiskundigen elkaar verstaan, de kern is wat mij betreft het delen van het achterliggend intuïtieve denkbeeld. Ik zie het als volgt: aan de ene kant gebruikt de wiskundige zijn logica als basisgereedschap, maar aan de andere kant is er een immateriële werkelijkheid van wiskundige objecten. Een volledig op axioma's en deductie gebaseerde wiskunde — zoals Hilbert die graag had gezien — is dan ook gedoemd te mislukken, en wel omdat de Stelling van Gödel het bestaan aantoonde van beweringen die wel waar zijn, maar niet bewijsbaar. Zo'n bewering

zou dan een object zijn in die immateriële werkelijkheid, en staat zo losgekoppeld van de logica die tot de ogenschijnlijke paradox leidt. Alain Connes verwoordt het ontrafelen van deze immateriële schoonheid als volgt [6, 7]

“Cette réalité dont je parle, du fait qu'elle n'est localisable ni dans l'espace ni dans le temps, donne, lorsqu'on a la chance d'en dévoiler une infime partie, une sensation de jouissance extraordinaire par le sentiment d'intemporalité qui s'en dégage.”

[“Deze werkelijkheid waarover ik spreek, is niet lokaliseerbaar, noch in ruimte noch in tijd, en geeft, wanneer men de kans heeft om er een klein stukje van te ontsluiten, een gevoel van buitengewoon genot door het gevoel van tijdloosheid dat ervan uitgaat.”] Om dit voor niet-wiskundigen enigszins begrijpelijk te maken, zal ik het proberen uit te leggen aan de hand van muziekbeleving. Denk even aan het Viololconcert van Britten. In Figuur 17 ziet

u de bladmuziek van een passage uit dit concert, aan het einde van het eerste deel. Het is een prachtig samenspel tussen viool en slagwerk, een stuk dat ik zelf zo'n twintig jaar geleden ook heb mogen spelen als slagwerker in het VU-orkest, nota bene met Janine Jansen als solist.

Het notenschrift, tempoduidingen, et cetera, in de muziek zou ik willen vergelijken met formules en bewijzen in de wiskunde. Ze zorgen ervoor dat musici elkaar verstaan, maar uiteindelijk zijn ze onderschikt aan de achterliggende, meer intuïtieve schoonheid die via die taal met elkaar gedeeld kan worden. De schoonheid van de wiskunde heeft veel gemeen met die muzikale schoonheid, en de manier waarop we die met elkaar delen tijdens bijvoorbeeld een orkestuitvoering.

Met mijn verhaal hoop ik u in ieder geval een klein stukje van de schoonheid van mijn wiskunde te hebben laten zien. Ik hoop dat u net als een luisteraar van een muziekstuk die misschien niet het volledige notenschrift kent, zonder kennis van

formules of bewijzen toch heeft kunnen meegenieten van deze spectrale symfonie van de meetkunde.

Ik heb gezegd



Dankwoord

Hoewel dit een leerstoel in de wiskunde betreft, moge het duidelijk zijn dat mijn sterke motivatie voor het beoefenen van deze wiskunde uit de natuurkunde afkomstig is. Die interesse is lang geleden gewekt, onder andere tijdens de natuurkundelessen op het VWO Jan Arentsz. Veel dank aan mijn toenmalige natuurkundecollega's de heer Zwagerman en wijlen de heer Koch, van wie vandaag de dochter aanwezig is. Tijdens mijn studie natuurkunde in Amsterdam was Gerard Bauerle mijn afstudeerbegeleider. Hij heeft mij laten kennismaken met het vakgebied van de niet-commutatieve meetkunde, nota bene met een onderwerp uit de snaartheorie! Ik heb inhoudelijk natuurlijk veel van hem geleerd, maar hij leerde me ook al hoe je moest omgaan met een gevarieerd publiek. Na mijn studie natuurkunde heb ik een jaar wiskunde gestudeerd in Amsterdam, onder begeleiding van Klaas Landsman. Hoewel ik natuurlijk stiekem al lang bezig was met wiskunde op het grensvlak

met natuurkunde, was dit het formele begin van mijn carrière als mathematisch fysicus. Het contact dat ik in de jaren erna, als promovendus in Italië, met Klaas heb onderhouden was erg fijn, en zorgde ervoor dat ik na nog een korte tussenstop in Bonn in 2007 kon beginnen als postdoc in de groep van Klaas hier in Nijmegen, waar hij ondertussen naar toe was verhuisd. Ik ben hem zeer dankbaar voor alle steun in de jaren die volgden, tot en met de huidige benoeming aan toe. In het verlengde daarvan geldt natuurlijk hetzelfde voor mijn collega's van de afdeling Wiskunde, binnen het IMAPP en in de Faculteit, tot en met de huidige plaatsvervangende rector aan toe. My PhD supervisors in Italy were Ludwik Dabrowski and Gianni Landi. I had the chance to be in Trieste as a PhD student in an incredibly inspiring time. In addition to the richness that the country has to offer, Trieste has been a very active center for noncommutative geometry, in particular for the "rolling of quantum spheres". So I'd like to thank both of them for their guidance and their support. I have been working with Alain Connes for almost ten years now, and this has been incredibly inspiring. His enthusiasm when we talk about a particular problem, behind a chalkboard for example, but also increasingly more often via zoom, is very infectious and I'd like to spread it further to, for example, my students.

Referenties

- 1 B.P. Abbott e.a., Observation of gravitational waves from a binary black hole merger, *Phys. Rev. Lett.* 116 (2016), 061102.
- 2 F. Berends en D. van Delft, *Lorentz: Gevierd fysicus, geboren verzoener*, Prometheus, 2019.
- 3 K.A. Brading, Which symmetry? Noether, Weyl, and conservation of electric charge, *Stud. Hist. Philos. Sci. B Stud. Hist. Philos. Modern Phys.* 33 (2002), 3–22.
- 4 A. Connes, Gravity coupled with matter and the foundation of non-commutative geometry, *Comm. Math. Phys.* 182 (1996), 155–176.
- 5 A. Connes, On the spectral characterization of manifolds, *J. Noncommut. Geom.* 7 (2013), 1–82.
- 6 A. Connes, A. Lichnerowicz en M.P. Schützenberger, *Triangle de pensées*, Editions Odile Jacob, 2000.
- 7 A. Connes, A. Lichnerowicz en M.P. Schützenberger, *Triangle of Thoughts*, American Mathematical Society. Translated from the 2000 French original by Jennifer Gage.
- 8 V. Fock, Über die invariante Form der Wellen- und der Bewegungsgleichungen für einen geladenen Massenpunkt, *Z. Phys.* 39 (1926), 226.
- 9 C. Goddi e.a., Polarimetric properties of event horizon telescope targets from ALMA, *Astrophys. J. Lett.* 910 (2021), L14.
- 10 D. Hilbert, Grundzüge einer allgemeinen Theorie der linearen Integralgleichungen (Vierte Mitteilung), *Gött. Nachr.* (1906), 157–209.
- 11 M. Kac, Can one hear the shape of a drum? *Amer. Math. Monthly* 73 (1966), 1–23.
- 12 A.J. Kox, *Hendrik Antoon Lorentz. Natuurkundige (1853–1928)*, Balans, 2019.
- 13 F. London, Quantummechanische Deutung der theorie von Weyl, *Z. Phys.* 42 (1927), 375.
- 14 H. Lorentz, Alte und neue Fragen der Physik, *Phys. Zeitschrift* 11 (1910), 1234.
- 15 H. Lorentz, *Les théories statistiques en thermodynamique*, Teubner, Berlin, 1916.
- 16 E. Noether, Invariante variationsprobleme, *Nachr. d. Königl. Gesellsch. d. Wiss. zu Göttingen* (1918), 235–257.
- 17 L. O’Raifeartaigh, ed., *The Dawning of Gauge Theory*, Princeton Series in Physics, Princeton University Press, 1997.
- 18 N. Straumann, Early history of gauge theories and weak interactions, invited talk at *PSI Summer on Physics with Neutrinos, Zuz, Switzerland, 4–10 August 1996*, arXiv:hep-ph/9609230.
- 19 N. Straumann, Hermann Weyl and the early history of gauge theories, in *Symmetries in Algebra and Number Theory (SANT)*, Universitätsverlag Göttingen, 2009, pp. 173–189.
- 20 R. Utiyama, Invariant theoretical interpretation of interaction, *Phys. Rev.* 101 (1956), 1597.
- 21 J. von Neumann, Allgemeine Eigenwerttheorie Hermitescher Funktionaloperatoren, *Math. Ann.* 102 (1930), 49–131.
- 22 H. Weyl, Das asymptotische Verteilungsgesetz der Eigenwerte linearer partieller Differentialgleichungen (mit einer Anwendung auf die Theorie der Hohlraumstrahlung), *Math. Ann.* 71 (1912), 441–479.
- 23 H. Weyl, Gravitation und Elektrizität, *Sitzungsber. Preuss. Akad. Wiss.* (1918), 465–480.
- 24 H. Weyl, Gravitation and the electron, *PNAS* 15 (1929), 323–334.
- 25 H. Weyl, 50 Jahre Relativitätstheorie, *Naturwissenschaften* 38 (1930), 73–83.
- 26 H. Weyl, Emmy Noether 1882–1935, *Scripta Mathematica* 3 (1935), 201–220. [WGA 3, 425–444.]
- 27 C.N. Yang, Hermann Weyl’s contribution to physics, in *Hermann Weyl, 1885–1985*, Eidgenössische Tech. Hochschule, 1986, pp. 7–21.
- 28 C.N. Yang and R.L. Mills, Conservation of isotopic spin and isotopic gauge invariance, *Phys. Rev.* 96 (1954), 191–195.

Mark Timmer

Twents Carmel College, Oldenzaal, en
ELAN, Vakgroep Docentontwikkeling, Universiteit Twente
m.timmer@utwente.nl

Wim Caspers

Stanislascollege, Delft, en
Faculteit EWI en Lerarenopleiding, TU Delft
w.t.m.caspers@tudelft.nl

Interview Craig Barton on improving your teaching, lethal mutations and problem solving

How he wishes he'd taught maths

Over the last few years, Craig Barton has made quite a name for himself in the field of mathematics education. In his first book, *How I Wish I'd Taught Maths: Lessons learned from research, conversations with experts, and 12 years of mistakes* (2017), he describes in much detail exactly what its title suggests. Three years ago, the book was translated into Dutch by René Kneyber and given the appropriate name *Volgens Barton*. It's a play of words on the Dutch saying "volgens Bartjens", which means "from basic reasoning it follows that" — that saying in turn refers to the seventeenth century schoolmaster Willem Bartjens and is also the title of a Dutch magazine on mathematics education. A workshop based on the book, which was supposed to take place in March 2020, was postponed several times due to the Covid pandemic and finally took place in June 2022. In the meantime a second book was published: *Reflect, Expect, Check, Explain: Sequences and behaviour to enable mathematical thinking in the classroom* (2020). Mark Timmer and Wim Caspers were present to attend the workshop and interview Craig afterwards, and learnt that a third book may be on its way.

Craig studied Economics at the University of Cambridge, but mathematics was his favourite subject at school and he always had the wish to become a teacher. So, after finishing his studies and doing some travelling, he got his Postgraduate Certificate in Education and started teaching in secondary school at the age of 22. Already after a couple of years, he started the website www.mrbartonmaths.com to spread ideas about teaching mathematics. He was also maths advisor for *The Times*, and started his own podcast to broadcast interviews about teaching mathematics. While talking to many mathematics teachers and educational scientists, he started realising: "Pretty much everything I had done up

until that point in my career was wrong." Instead of giving up, Craig started reading research papers and books about education, cognitive psychology and mathematics teaching, culminating in his first book that describes what he did before, what he learned from research and what his current views are. In this article we discuss several themes from the first book, as well as new ideas Craig developed afterwards.

In the foreword of your book, Dylan William writes that teaching can never be fully research-based, in the sense that it's impossible to precisely dictate what works and what doesn't. But, he also states that it would be incorrect to call it an art that

can never be improved by science. So, it must be somewhere in between. With that idea in mind, which aspects of the teaching methodology that you prefer and describe in the book do you regard as objective truths about the best way to teach?

"I've started now doing this 'Tips for Teachers' thing, where teachers come on and speak to me about different advice from different subjects. I spoke to a lady recently, Sarah Cottingham, who is an English teacher and now a researcher and a teacher trainer. One of her tips was that teachers should treat research as a *compass*, not a prescription. I think that's probably the best way I've heard it articulated. Research can always guide us in a certain direction, but there are so many different variables at play within different classrooms, different contexts. Thirty students are never going to be the same across different schools, even different times of the day. So research can always guide us to certain things, but it can never tell us exactly what to do. But I think there are certain 'best bets': certain things that you're pretty sure are a good idea to do with anyone.

So the number one of course would be *retrieval practice*. It is a really good idea to keep asking students to try and recall things they've done in the past. And yet it's

still something that I don't think you would see in enough classrooms, certainly not done well. So retrieval practice; I think you will do well to find anyone who would argue that's a bad idea. I think, though, with retrieval practice, some people would argue that testing students is bad, but then as we discussed today, you can do that in a very low-stakes way, that gets all the benefits of retrieval without any of the anxiety-inducing effects. So retrieval would be one.

I think another best bet would be from cognitive load theory. It's probably a good idea to *identify extraneous load and reduce it*. So, it's probably a bad idea to have text and diagrams separated on a slide, it's probably a bad idea to put some text up and then read it out straight away. There are certain things like that, that I think are pretty non-controversial. I think they're pretty good bets.

Then there are lots of things that I passionately agree about, but other teachers wouldn't. For example, I think it's a very good idea to only challenge students to solve problem with material that they're secure with. Whereas you would get a whole load of literature on productive failure, which would suggest it's a really good idea to give students problems to solve with material they're not secure with. So, there are lots of things where research would suggest two different things. But I think there are certain areas of research where there are perhaps not objective truths, but certainly best bets."

Are there also certain aspects of your book, or in your way of teaching, that are just your style? And for which you think 'well, people could do that, but another way would be just as fine'?

"Yes, lots of things. Worked examples would be the big one. We talked today about how I use *silent teacher* (where I teach and model something in silence). I think it's a good idea and I think there are certain parts of research that suggest it's a good idea. But I certainly don't think it's the only way to do worked examples. I've seen plenty of poor examples of silent teacher, including given by myself. And I've seen plenty of examples of excellent modelling that doesn't use silent teacher. So I think that would be something that is very much up to interpretation.

What I tried to do in the first book, but I really try to do it now: never give



Craig Barton

advice. I will never say 'do this, do that'. I'll always say: 'Here is an idea. Here's what I do, here's why I do it. If you like it, how can you make it work for you?' And I think that's all we can ever do. As soon as you start saying 'this will definitely work', you're in a load of trouble. As soon as you start saying 'do this', you're in a load of trouble as well. It goes back to that idea of using research, but in this case advice, as a compass, not a prescription. I suggest ways, and then put it up to teachers to modify.

The idea of *lethal mutation* is interesting to mention. It's the idea that a teacher reads some research, and it comes out differently in the classroom. A really good example is *knowledge organizers*, where at the start of a unit you present the stu-

dents often with a one page summary of all the key facts and things that are really useful to remember for that unit. Seems fine, seems a smart thing to do. And, there is research to suggest that knowledge organizers indeed are a really good thing to do. The problem is, if it turns into a lethal mutation.

For a knowledge organizer to be good, it has got to be quizzable. Students need to be able to cover up one bit and then test themselves. So you cover up the definition of a word, can you remember the definition? Cover up a word, see the definition; can you remember the word? That's useful. But what happens is: people latch on to the idea that knowledge organizers are good and then all of a sudden every topic in every subject in every school has

a knowledge organizer. But they're useless. They're just a page of notes, and they're just given out to kids for no reason. So that's an example of a lethal mutation.

But sometimes these mutations are good things. Sometimes research will suggest something, and you take an aspect of that research, but you mutate it in a way that works for you. And actually it turns out to be something that the researchers hadn't suggested, but you found a way to make it work.

So I think teachers have got to be really careful. Firstly in actually understanding exactly what the research is suggesting. But then not being afraid to take the core idea and adding their own modifications to make it work. I think that's a smart way to do things."

Today, and also in the book, you talked about many 'effects' that teachers can use to improve their teaching: the self-explanation effect, the hypercorrection effect, the modality effect, and so on. And you also said: don't do everything at the same time. What would you say is the most important one if people want to just try one, or if they have to prioritise some?

"I've been thinking about this a lot. So, I mentioned Sarah Cottingham on my Tips for Teachers podcast, and she also suggested another thing which I've really started thinking about recently. She said: 'There is so much advice out there for teachers. You go on Twitter and there's a hundred ideas for you. You read a book, there's another hundred ideas. You go on a website, another hundred ideas.' And the classic thing is: the fear of missing out. You think: 'If you're not doing this idea, you're a terrible teacher. So I best do that and I best do this and I best do that.' And all of a sudden things are out of control. You tried to change too much, you don't know what you're doing, your kids don't know what's going on, and crucially: if something works, you don't know what has worked, and if something doesn't work you don't know what hasn't worked. So it's really terrible. You've got to prioritise.

And what Sarah suggests is: a good way to decide what to prioritise is to either *look for something you already do and see if there is a way to make it better*. And she would call this a 'tip'. An example of this would be: let's imagine that you use mini-whiteboards in your lessons, and you're

really happy using mini-whiteboards. But you just wonder: 'Is there a way I could use them better?' So, what you do is: you go looking for tips that can improve your mini-whiteboard use. A good example of this for me is: when you say '3...2...1... show me your boards', the key is saying '3...2...1... at the back, show me your boards. Okay, put your boards down. Middle, show me your boards. Okay, front, show me your boards'. That way you don't get this visual overwhelm. So that is an example of a tip. And I went hunting that because it's something I already do, and it's not going to lead to a major change in my practice. So I think looking for tips that build on something that you already do is a good idea.

Your other option is *look for something in your practice that you know isn't working*. An example here would be: you know that your checking for understanding isn't great. So here you think: 'How can I improve my checking for understanding?' And there you might come across mini-whiteboards as a solution, but now that's going to require a bigger change. Now you need to learn all the techniques of mini-whiteboards.

So, I think looking for tips that build on something you already do, or looking for techniques that will fill in a deficiency of something you've identified as a problem with your teaching, that's quite a good strategy to help you prioritise. Having a way to direct what you want to improve on either by identifying a gap in your teaching or identifying something you already do that you can improve, I think is far better than just looking for any old tip and saying 'try that, try that, try that'."

Are there some topics in maths education that you think you could still delve into a bit more?

"When I first started doing the research, I read two things. First, I read research papers and books specifically about maths education. Second, I would read generic teaching books and generic research papers. The Bjorks' *desirable difficulties* would be a classic example, or Doug Lemov's *Teach Like A Champion*, which isn't aimed at any particular subject.

What I'm reading now, though, and I'm finding fascinating, is books or blogs written by non-maths teachers but who are practicing in the classroom. So for me the best by a long way at the moment is Adam Boxer, who is a science teacher, and I'm

currently reading his book *Teaching Secondary Science: A Complete Guide*. And just like I did in my *How I Wish I'd Taught Maths*, he makes clear in the introduction that this is just for science teachers. Every example is either about physics or chemistry or biology; there is nothing else in there. He never says: 'If you are a geography teacher, this will work for teaching volcanos. If you're a French teacher, this will work for whatever.' So, all about science. I think that's fascinating, because you get a real good picture as to what he does with content that he is familiar with. And then the challenge for the reader is: what does this look like for me as a maths teacher. Interestingly, maybe paradoxically, I find that much easier to apply to my subject than a generic teaching book that tries to come up with this broader principle that will work in history, will work in French, will work in maths. I don't find that as powerful as something so focused on a particular subject that actually I can read something and either immediately dismiss it or immediately see 'you know what, I think this could work in maths'.

So I'm reading Adam Boxer's book at the moment and I'm making pages of notes. I can just see how clearly this applies to maths, because you see how it gets implemented in practice. In Adam's book, he writes a whole chapter on how he explains how the heart works. And you think: 'What on earth is that going to teach me about maths?' But I read that and I think: 'You know what, I can use those exact same principles for how I would teach how a quadratic equation works, or quadratic graphs.' So I think seeing how something works specifically in a classroom, that's what I'm interested in at the moment as well. I've not been so brave as to read a book from an English teacher, because I think English and maths are possibly so far removed that it would not be as transferable. But then I don't know, I've not tried that. That's on my list."

Is there a topic that you think requires more research?

"There's lots, actually. Let me mention three quickly. I think *problem solving* is interesting. The problem with problem solving is: lots of the research defines problem solving in a way that we as mathematicians wouldn't. When John Sweller talks about solving problems in maths with cognitive

load theory, his problems are just what we would consider to be kind of fluency problems; it's just examples like 'solve this linear equation', whereas we would consider problems to be non-routine things with different contexts and so on. So, I'd like to see more research into genuine maths problems and either ways to solve them or effective strategies. Because as I say, it seems to be dominated by research into productive failure. And my problem with that research is: I think, from reading the studies, it seems to work best with motivated successful students — students who have experienced success in mathematics, so failure is seen as a short-term state. And if they keep working, they can be successful. Whereas you try that with a student who experienced a lot of failing in mathematics, and you ask them to struggle again, I'm not convinced that works. So I think more research into problem solving would be one thing.

More research into *modelling and explanations* I think is interesting. What makes a good explanation in mathematics, is something that I think a lot of teachers just try to make up on their own. Is there a better way to explain how to solve an equation? Because teachers have all their own favourite methods. Joanne Morgan, a teacher in the UK, has written a brilliant book called *Mathematical Methods*. With lots of different maths topics, there are seven or eight different ways you can go ahead and solve the problem. And often as teachers we either choose our favourite or we expose students to three or four methods, but that feels to me like a bit of a risky policy. It feels to me that there should be the best method to do something. There should be a way to test teaching students different methods and see which one is most effective. But it's difficult, because you've got to control for teacher quality and all that kind of thing. Just feels to me that there has not been enough research into methods, and a lot of teachers tend to just use their favourites. I'm not convinced that's the best way. Imagine you've got a novice teacher, so a teacher who has only been teaching for two or three years. Are they in the best position to determine the best way to teach solving linear equations to a high-attaining 11-year-old versus a low-attaining 14-year-old? They're just guessing. It just feels to me that that's an area where we

could be a bit more informed. But teachers feel very passionate about methods; you get teachers who are very attached to the way they were taught something. And the problem with that is: a lot of maths teachers are good at maths, and the way they were taught it, is perhaps not going to be the best way for someone who is lower-achieving and who struggles with mathematics. So I think, methods would be somewhere I would like to see a bit more research.

And the final one I would just mention is *retrieval practice*. I think this is another example of a lethal mutation; not all practice is retrieval practice and not all retrieval practice is created equal. I think there are good examples of retrieval practice and bad examples of retrieval practice, and I think a bit more support and guidance in that would be useful for teachers."

In your book you say that everything you did before was really bad. Everything was wrong: you didn't take working memory into account, you didn't encourage students to self-explain, and so on. But still, it seems that things were going quite well. Your manager was happy, you were happy, your students seemed to be happy. And the results were also quite okay. So, how bad could it have been, if everyone was happy and the results were good? What was so bad about it?

"Yeah, so it's the classic thing: the results were good, but how much better could they have been? That's the big question. The problem was: a lot of teaching in the UK as recent as five years ago, and maybe even through to today, was driven by what senior leaders in schools perceive that Ofsted (our national inspectorate of schools who come in and make judgements on teaching in schools) wanted. So if they got this idea that Ofsted wanted to see group work in lessons, then everybody better be doing group work. If they believed that Ofsted really liked it when students were up at the board writing, you could be sure that everyone was doing it. So my teaching was very whizz-bang, it had all the gimmicks in there. Any time I was observed, whether it was by teachers of my own school or by Ofsted, it went down a storm; it was brilliant, because it was ticking all the boxes.

And I was just thinking about this the other day: my first head of department, Debbie, was a fantastic teacher. When

I first started teaching when I was 22, Debbie had been teaching by then 20–25 years. In my first year — I cannot believe this — I was giving Debbie some training on how to use interactive whiteboards, how to facilitate group discussions, how to do all these things that I didn't have a clue what I was doing. Debbie, meanwhile, and this is 16 years ago, in her lessons, was using mini whiteboards, was doing mass participation, was doing really good self-explanation questions. And I watched Debbie, and I wouldn't even pay any attention to that, because it wasn't the fancy stuff of teaching that I wanted to do.

I look back and think: you know what, all right, my lessons were fine, I could get the kids on board, so the kids probably did a lot of work outside of lessons. Probably kids did well despite me, not because of me. But if I had known what I know now, back then, the kids would have done so much better, so much better. And crucially, the teachers I worked with back then, they would have been so much better as well."

Would that then have been better regarding motivation of the students, or the results on tests, or maybe it's not even visible on tests because it's more regarding how much they really understand the material?

"Yeah, I think the test scores would have been better. I think our tests are pretty good. Like any test they're not a perfect test of understanding, but our high-stakes tests are pretty good. So I think their tests would have been better. I would have been quizzing my kids more frequently, so they would have remembered more. And because they would have remembered more, we would have been able to do more complex things with that basic understanding, so their problem solving would have been better.

Knowing what I know about motivation, I think the kids probably would also have been more motivated, because they would have been more successful. I probably would have been happier as well. I love teaching, but I would have been happier because I think I had probably been doing less work. Because I used to spend hours planning lessons, because of all these fancy activities.

I think everything would have been better. The only thing that wouldn't have been better is: I would not have been able to

write a book about it, as I wouldn't have been able to go through the crisis."

You wrote that your ideas may transfer to primary school teaching, but how do you think they would transfer to university teaching?

"Interesting. So, I'm always careful to say two things. One: even if you're a secondary maths teacher who teaches the same age group as me, there's no guarantee anything I say will work. It's just ideas and suggestions, and as soon as you go outside of my domain, I'm always sceptical about whether it works. I've been told it works in primary school, but the challenge is always on teachers to see if they can apply the strategies. I think they work better for the older years of primary school.

University, again, I can't see any reason why some of the core things wouldn't work. I mean, you'd be mad not to do retrieval practice, whatever you want your kids to learn. But then we get something like silent teacher and you're doing some more complex multi-step procedure. I think that's when you need to do what we talked about today: you're doing perhaps a little bit in silence, and then get them to reflect on that, then a little bit more in silence. I think you need to adapt. But I think it's more likely to transfer to university maths than it is to, say, secondary school geography or secondary school history and so on. I think probably most of my ideas will transfer okay."

In the Netherlands, the idea of 'guided reinvention' by Hans Freudenthal is quite popular. Guided reinvention looks a bit like guided discovery, a concept that you mention in the book and that you do not seem to be a big fan of. The idea of guided reinvention is that students reinvent the materials, but not just by trying; the teacher ask questions and guides them in the right direction. Is this different from what you call guided discovery?

"This was one of the biggest changes I had to make as a teacher, as a result of reading research. I had it in my head that students should 'discover' something, and by that I certainly don't mean: 'Here is a blank piece of paper, prove Pythagoras.' I mean: 'Here are some prompts for things you should try, what do you notice?' I was convinced that if students did it that way, they were bound to either understand or remember more than if they were simply told that. It just made perfect sense. I can't say hand on heart that I'm convinced anymore.

I think it works better the more structured it is, and the more the teacher is in control. I think that's the key. The 'angle at the centre' theorem is a really good example. It doesn't work when students are given a load of blank circles, and you tell them: 'Put three points on the circumference, connect two of the points to the centre, connect the same two points to the third point on the circumference, measure the angles.' The reason that doesn't work

is: it takes ages and it relies on students being able to fluently measure angles to 'discover' the theorem. I had one child that said: 'The angle at the centre is three times the angle at the circumference.' Whereas, if you use something like GeoGebra, you can control those examples in a certain way, to make it clear to students what the relationship is. They still get that power of being convinced it is true, but without the potential room for misunderstanding that lesser guided reinvention or guided discovery brings into play. So I would always, where possible, try and show students something as well as telling it them, but in the past I was very much of: see if you can figure it out yourself. And I'm not convinced anymore that this works."

You say that there is a big difference between novices and experts in students, and in people in general. So, that also holds for teachers? And, if so, what would that imply for initial teacher training and for professional development? Do you think we should do different things there?

"I think novice teachers struggle a lot with the planning phases of sequences of lessons, because they often find it hard to pitch things. They often find it hard particularly to, what Doug Lemov would say, plan for error, or predict where students are going to go wrong. I think that's quite difficult.

When I look back at my teacher training, I almost wish that I could have had another year of training after I had been teaching for five years. Now I can be taught some of those techniques that I was introduced to before I had the opportunity to try them out. We do have things like 'Master's in Teaching' courses, but it's voluntary. Your school would need to support you in a lot of occasions to do it. I think it's one of those things that should be mandatory, in the same way that teachers should be, obviously, trained before they teach. I think there is a good argument to be made that it should be mandatory to upscale teachers after a certain amount of years.

I think what's really interesting to mention about teacher training: often novice teachers are advised to watch the so-called best teachers in the school, to learn their techniques. The problem with that is: novices can't really learn that much from experts, particularly regarding behaviour. Behaviour is a really interesting concept that

The workshop

It was not entirely clear what we could expect from the workshop we were to be attending on 7 June 2022. The books of course contain enough ideas and examples to elaborate upon. And the website www.mrbartonmaths.com developed into a gateway to a whole universe of websites, not only containing podcasts and links to research papers, but also a nicely accessible collection of teaching resources ordered by topic. Additionally, there are specific collections for teachers concerning diagnostic questions, variation theory and SSDD Problems (Same Surface, Different Depth).

All material can be applied instantly when preparing next day's lessons. And that turned out to be the approach of the workshop: prepare next day's lesson, choosing from an array of ideas and possibilities that were presented. So, we started with breaking down the subject of our lesson to atoms of knowledge, then prioritising the necessary prior knowledge, finding diagnostic questions and deciding how to use them. Then, we covered worked examples. Maybe we could use the 'Self Explanation Effect' or the 'Silent Teacher' approach. The final part of the morning session questioned the benefits and problems regarding students copying worked examples.

The afternoon session was devoted to retrieval (asking questions about material that has already been covered) with an emphasis on 'Low-Stakes Quizzes'. Also, the latest addition to the website family was introduced: 'Tips For Teachers' — an attempt to categorise and make accessible the ideas and lessons learnt over the years.

novice teachers often struggle with. I did myself. So what's the advice given? Well, 'go and watch a certain teacher because he is an expert at behaviour'. So you go watch him or her and the kids are behaving well, but you have no idea why. Because the things they do, they're invisible to novices. So you're much better placed to go and watch somebody who has been teaching for one year or two years, because there isn't as much of a gap between where you're at and where they're at. And you can probably start learning some of their techniques. The problem with that is, not many schools have the culture where trainee teachers observe other relatively novice teachers. And the novice teachers who've been teaching for one or two years, they've got to be quite confident themselves to have other teachers coming in to watch them.

So, I think you need almost a culture in the school, or some programme within universities, where novice teachers work with teachers who are only slightly less novice than them, so you can have those discussions. And then, later on, teachers who have been teaching for five years, they're the ones who can work with the teachers who have been working for ten years and see what they can learn from them. If you've been teaching for six weeks and you go watch someone who has been teaching for twenty years, I'm not convinced that is all that useful an experience."

You make use of diagnostic questions a lot. It can be difficult, though, to get all the students to participate truthfully. When you use the 'fingers in the air' approach that you mention in your book, some of the students quickly look around before answering, to cheat, and this is hard to prevent. How do you do this?

"This is a classic problem. My diagnostic questions are multiple-choice questions: one right answer, three wrong answers. And the idea is that you want mass participation, that's the whole point. The whole reason you're asking these is so you can get the understanding of every child in the class. But what inevitably happens: you say to students '3...2...1... show me your answers' and you'll always get students who do exactly what you describe; they wait. What they end up doing then, is they end up switching their answers to the answer that matches whom they perceive

to be the cleverest student in the class. And all of a sudden, all your advantages of mass participation have gone, because you might as well have just asked the cleverest kid in the class.

So, a couple of strategies for this. In the long term, you want a culture where students realise that there is no point doing that. And the best way to do that is for you to say to kids: 'I'm not collecting in your marks or your responses. The only reason I am asking you this question is so I know what you know and what you don't know, so I can help you.' Kids never believe you the first time you say that, but if you've done diagnostic questions for six weeks and at no point have you ever collected in marks for this, then all of a sudden kids start to realise 'you know what, maybe he is telling the truth here'. It takes time.

But in the short term, there are things you can do as well. Mini-whiteboards are good for this. Fingers have the problem that they're visible; if you're sat behind somebody and they hold up two fingers, you know they voted B. You voted C, so all of a sudden you drop one of your fingers down, and so on. Mini-whiteboards are better, because you can't see from the back of the board what the student has written on the front of the board. So mini-whiteboards work quite well for that.

ABCD-cards are my preferred way for students to vote at diagnostic questions, because if they're different colours, they're a lot easier to distinguish than one finger, two fingers, three fingers, four fingers. The problem with ABCD-cards is: they're also easier to distinguish for the kids. So you can see very quickly that the child in front of you is going for something different than you have and you can switch your answer. Not as quickly as you can with fingers, but you can still switch. The back of the cards can be white, that helps, but then you can have a quick glance down your row, which is still problematic.

I think you can do one thing that can solve a lot of these problems, and it sounds stupid. But just have the students close their eyes. You don't want them closing them before they have seen the question. But if they've seen the question and you say: 'Okay, decide on your answer. Okay, close your eyes. 3...2...1... hold up your answers.' That works quite well. Some teachers will have the kids put their heads on the desk, or cover their eyes, or whatever

works for you. If it's tied in with this idea of 'low stakes' — the fact that no one is going to be judged on this — it works well.

Imagine a scenario where you're one child in the class and you think the correct answer is A, and everyone else thinks it's B, and you hold up A, and everyone else holds up B. Then the teacher says to you: 'Why do you think the answer is A?' You've got to be pretty confident to say 'I think it's this because...'. What you'll probably do, is either say 'Well there's no point of me saying, since I'm wrong', or you'll say 'Everyone else thinks it's B, actually I meant to say B'. Whereas in fact A could be right. Or, more importantly, I want to know why you think it's A so I can help you. But if you close your eyes and you hold up A, and then the teacher says 'everyone put your cards down', then you don't know how many there were. It tends to lend itself better to student discussions when you don't know how many have said it. So that would be a short term fix that works quite well."

In the Netherlands, like in the UK, students have been at home a lot due to Covid. Many of them now have a hard time paying attention in class. They're distracted and they're not used to working hard anymore. Sometimes they don't do their homework anymore. It's difficult for teachers, we hear that quite a lot. The students have a hard time to be motivated, and many of them have also developed a lot of gaps in their knowledge. And, as you cite one of your former students in the first book: 'It's kind of hard to have a growth mindset when I keep doing shit on tests, sir.' This problem seems to apply to many students at the moment. What do you think would be the best course of action over the next months, or even years maybe, to get them back on track?

"It's the same problem in the UK. It's been a nightmare for teachers and students over these last couple of years. The first thing to say is that, like we talked about today in the workshop: assessment of relevant prior knowledge is more important than ever. Because we simply cannot assume students know something. When things were normal, we already couldn't make assumptions. But certainly now, considering that kids have had a disruptive two years, we can't assume anything at all. So for anything we teach students, there has

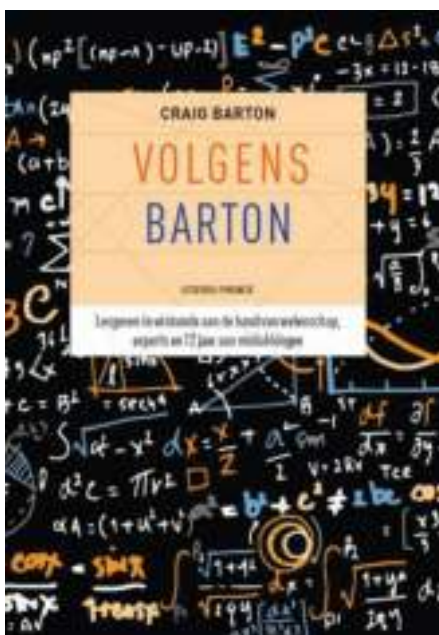
to be a really robust assessment of prior knowledge first. And then based on that assessment, just like we talked about today, we need to respond to it. So if there are gaps in students' knowledge, we need to either reteach it, offer an explanation and retest, or whatever it is — we need to respond. Because, the danger is, our curriculums haven't adapted to what has happened in the last two years. There is still the same amount of content to cover, but if that prior knowledge isn't there and we just try to race through it, we can't cover it.

I'll just use the 'leaky pipe analogy' that I shared today; a primary head teacher in the UK shared this with me. If you want to build a pipe to get from point A to point B, one option is that you start building it, and loads of holes appear, and you think: 'Forget it, it doesn't matter, I've got a deadline here, I'm just going to keep building.' And sure you'll get to point B, but the pipe is useless, because water is leaking out left, right and centre. Whereas option two is: you build the pipe, you notice a hole, so you stop everything and you plug that hole. And then you build a bit more. And then another hole, and you plug that hole. By the end of the time you're probably nowhere near point B, but at least you've got something that is useful. You can carry some water, you've made progress. So I think more than ever we've got to be realistic. If prior knowledge is not there, we have to respond to it.

Talking about confidence, talking about motivation: students are anxious now, more anxious than ever. And if we keep trying to teach the material on shaky grounds, so they keep failing that new material, it's not going to help anybody."

But how do you deal with students that did pay attention last year? You do want them to get to point B, and we don't want to hold them back by doing everything again this year for the ones that didn't do anything last year.

"So this is the eternal problem that teachers always face: differentiation. It's even worse now, and there is definitely no easy solution. There are things that we can do that make things easier. When we're assessing prior knowledge, and we find out that prior knowledge is present in some students, but absent in others, what we certainly shouldn't do, in my opinion, is



The Dutch translation: Craig Barton, *Volgens Barton – Lesgeven in wiskunde aan de hand van wetenschap, experts, en 12 jaar aan mislukkingen*, Uitgeverij Phronese, 2020, 2e druk, 540 p., ISBN 9789490120368, prijs € 34,99.

move one group of students onto the next thing, whilst we work with the other group. I don't think that works. Because then what happens if this group of students has problems with the new thing, then it's a disaster. What we can do is: we can come up with tasks that help students who are secure with that prior knowledge think deeper about that prior knowledge. I outlined one today, where if you assess prior knowledge with a diagnostic question, and it reveals that half your class know and half your class don't know, the half of the class who don't know you can reteach, re-explain and so on; the half of the class that do know can study that diagnostic question. There are two things I like to ask students to do with a diagnostic question.

One is: let's say the correct answer is A, explain why a student might think the correct answer is B, and then write an explanation how you would help them. Now that is a good challenge. And even if a student knows the correct answer, now they're thinking deeper about that subject matter. That's a useful thing to do that helps with differentiation.

The second thing that I spoke about today is: 'The correct answer to this question is A, you know that, fantastic. Change one thing in the question that makes B the right answer. Change one thing in the question that makes C the right answer.' So, now all of a sudden, students aren't just thinking

about that one area. They're now thinking about the other areas that the three wrong answers flag up. But you're doing it in a way that doesn't mean the students are off doing something completely different. And if you've got two or three students that are doing this, or five or ten students, they can swap questions with each other and check each other's work and so on and so on.

So I think you have to prioritise for your time to teach the kids whose prior knowledge isn't there, but I still think you can do really useful things with students whose prior knowledge is secure and get them thinking deeply, but I think that's as best you can do."

Still, the students are then working on the old material. Getting to point B will remain a problem then, probably.

"Yeah, it will still be a problem, but if you look at results of PISA, there is always this classic thing that comes out: students still do well on material they haven't been taught, if they have been taught the other material well. They do far better than students who have raced through everything and don't have that depth of knowledge. So I'd still always go for slower and depth, as opposed to trying to get people through it. But it's not an easy solution."

In your second book you wrote that problem solving was the most problematic topic from the first book, in the sense that it was received with quite some criticism. Can you elaborate a bit on that?

"Yes, that's what a lot of people get mad at me about. Problem solving is a really interesting area. I wouldn't say I've changed my mind on problem solving, but over the last couple of years I've read a lot more and thought a lot more about it. So, I still don't think generic problem solving skills such as 'draw a picture', 'be systematic' or 'solve a simpler problem' are useful. I think they're useful as a label, but I don't think they're useful as problem solving strategies. So, you would get somebody who is an expert in a certain domain, and you say to them 'here's a challenging problem', and they say 'I don't know how to do it' and you say 'can you solve a simpler problem?'. I think maybe they find that useful, maybe they can reduce that problem to something that they can solve and then scale back up again. If they're not secure in the knowledge for that domain, though,

that's not going to help, because... what is a simpler problem? I mean, $2 + 2$ is a simpler problem, but it's not going to help you solve a graphical challenge or a geometrical challenge. So I don't think those generic problem solving strategies are useful.

But I do think that there are two things that are useful. One is the obvious one: I think *domain-specific strategies* are useful. So, for example, if students have got a problem involving a triangle, it's probably a good idea to make that triangle right-angled. Drawing a radius in a circle is another good example. There are things like that I think you can teach students.

But when I wrote my first book, and even when I wrote my second book, what I didn't think were useful, are generic metacognitive strategies. And now I've read enough to know they are. So this is Alan Schoenfeld's work. He suggests that when students are stuck on a problem, you say things like 'what are you trying to solve?' or 'if you solved this part of the problem, how would it help you, what would you do with it?'. I think things like that do work. I've seen enough research to suggest they work. I've tried that out with enough students to suggest actually I think there is something in that. And those strategies I think can be applied to everything. But that would be an example of something that at the time, I grouped together with the Polya stuff and I thought 'no this doesn't work'. I think I've seen enough now to suggest that metacognitive strategies like that are probably worth building in with students."

In your latest book you describe a model of a learning episode using three components: the worked example, practice and problem solving. In the second component you invite the students to reflect, expect, check and explain. It seems possible to translate this to the four steps of problem solving Polya uses. So, aren't these generic skills after all that you can let students get acquainted with by using their labels and by pointing out 'this is what you're doing here, this is what you're doing there'?

"Yes, I think so. I think it's similar to what we talked about regarding Schoenfeld's metacognitive strategies. So Schoenfeld may ask a student 'why are you doing what you're doing?' and that would apply to any problem. I think the reflect-

expect-check-explain framework is really useful for different parts in the learning episode. So I use it during worked examples. Let's say you are doing silent teacher. You can imagine the teacher pausing for the student to *reflect* and ask himself: 'What has he just done there?' Then the *expect* part: what does the student think the teacher is going to do next? The teacher then does it, the student checks whether it matches what they expected, and they can then *explain*; if it is different, why is it different? If it is exactly what they expected to happen, how would they explain it to somebody who doesn't understand it? So, the framework certainly works in the modelling phase.

I designed the framework for the intelligent practice phase, so a student works through a sequence of related problems. They compare consecutive problems, reflect what's the same, what's different. 'What do I expect?', 'how is the answer going to change?', and so on. It can certainly work as a framework to work through isolated problems, but I think it works best when you have something to compare against. So whether it's something that has just happened and you're trying to predict what is going to happen next, or you've solved a previous problem and there is a relationship between the two problems — I think that's where it is at its most powerful. But it's a way of thinking; if students can exhibit it, they can do so at several points in the learning episode. I think it's a useful thing."

Problem solving seems to be the last stage in the learning episode. Are there other components, like applying mathematics or modelling?

"I would categorise problem solving as a broad label. A more useful label would be something like 'doing non-routine things'. That would, for me, include solving open-ended problems, doing application problems, maybe doing some inquiries. Basically, it's doing something non-routine with the material you have learned. I think Colin Foster has a useful way of describing this. He imagines two types of tunnel. One is where you go into the tunnel and you can see the exit. And the exit may be a long way away, but basically you know what you've got to do. You'll be in that tunnel for a long time, but there is only one way out of it; you just go through that

tunnel. For me that wouldn't be problem solving. That would be something routine. Maybe hard, but it would be routine.

Problem solving is where you walk into a tunnel and you have no idea how to get out. And you may walk around, you may go down some wrong paths and you need to come back on yourself. You may only be in that tunnel for a couple of minutes, but you also may be in there for a couple of days, trying to figure out your way out. I think for me that analogy encompasses what I mean by either 'non-routine' or 'problem solving'. Because, you can get an application problem and until you start messing around with that, you don't really know what that problem is about. You could get an inquiry problem, where you understand what the problem is about, but you have no idea how you are going to find the solution to it.

So, thinking in terms of routine versus non-routine, and the non-routine certainly coming after the routine, I think that is quite a useful way of doing it."

And this is what your next book will be about?

"No, haha. I *am* writing at the moment. I have not told anybody this, this is a world exclusive here. It will be surrounding my 'Tips for Teachers' thing. I really like the idea of a collection of 'tips'. As I said before: you can hunt through to find something that either helps you improve on something you already do or fixes a gap in something you've identified as a problem. And here are a list of techniques that you can try, like Doug Lemov does with *Teach Like A Champion*. But I think there is a slightly different way that I want to present this, that could be potentially useful. So at the moment, what I'm doing is: when I do talks, I'm experimenting with different tips, seeing which ones seem to work. Every time I go back to my phone if I feel like I've said something useful and I type it.

So, my next book will be based around 'Tips for Teachers', but it will be looking at all the things I've learned since I wrote *How I Wish I'd Taught Maths* and my second book. It will be taking core ideas from that and looking at what I think about them now. So, low-stakes quizzes for example. I talked today about fifteen ways to improve low-stakes quizzes. It will be things like that, I think that is what I'll be looking at next."

Piet Groeneboom

Delft Institute of Applied Mathematics
TU Delft
p.groeneboom@tudelft.nl



Column Piet grijpt zijn kans

Danse macabre

Piet Groeneboom schrijft op regelmatige basis in dit blad een column, deze keer over een dans met ‘dead subjects’.

Een niet zo geslaagde lezing

In 2011 werd ik uitgenodigd om te spreken op de zogenaamde ‘Statistische Dag’ in de Jaarbeurs in Utrecht. Voor zo’n gebeurtenis moest je een abstract schrijven die verscheen in het blaadje van de Vereniging voor Statistiek. Het leek mij toen wel leuk om een abstract te schrijven die de ‘Danse macabre’ tot onderwerp had. De Danse macabre is een bekend stuk van Camille Saint-Saëns dat ik voor het eerst op school bij muziekles had gehoord. Ik was toen erg ‘gepakt’ en eigenlijk pakt het me nog steeds als ik het weer hoor. Ik durf het bijna niet te zeggen, zeker niet nadat ik ergens heb gelezen dat Ravel (een van mijn favoriete componisten) heeft gezegd dat Saint-Saëns maar beter helemaal niet had kunnen bestaan.

Maar Saint-Saëns heeft volgens mij wel een heel mooie viool-sonate geschreven, die (naast bijvoorbeeld de sonates van César Franck en Gabriel Pierné — de zusjes Milstein gokken op Pierné, zie [5]) kandidaat is voor de ‘Sonate de Vinteuil’ in *À la recherche du temps perdu* van Marcel Proust. De vraag hierbij is steeds wat dan de ‘petite phrase’ is in deze sonates. Maar dit terzijde.

De duivel wekt in de Danse macabre de doden uit hun graven, die met hem (tot het kraaien van de haan) een dans op het kerkhof uit gaan voeren. Hij doet dit door de twee bovenste snaren van zijn viool in het interval A-Es in plaats van A-E te stemmen. Het interval A-Es is een verminderde kwint en wordt wel de ‘diabolus in musica’ genoemd. Heel passend dus dat de duivel dit interval gebruikt.

Waarom dacht ik aan de ‘Danse macabre’ voor mijn lezing? Aan het begin van mijn loopbaan als statisticus had ik een gesprek gehad met een bekende Nederlandse statisticus, omdat ik zijn steun probeerde te verwerven voor een project dat ik voor een student had aangevraagd. Ik zou daar zelf het isotone regressie-deel van voor mijn rekening nemen. Isotone regressie is regressieanalyse

onder een orde-restrictie op de schatter, zoals monotonie, convexiteit, enzovoort. Ik schrijf nog steeds artikelen op dit gebied. Verder wijdde het Amerikaanse tijdschrift *Statistical Science* in november 2018 nog een speciaal nummer geheel aan isotone regressie. Maar de bekende statisticus zei: “The subject is dead!” Hij was wel Nederlands, maar gebruikte graag Engelse uitdrukkingen.

Twintig jaar later sprak ik met een bekende Amerikaanse statisticus in Stanford over de bootstrap en hij zei hetzelfde (maar nu over de bootstrap): “The subject is dead!” Dus schreef ik in mijn abstract dat ik een Danse macabre zou gaan uitvoeren met deze twee ‘dead subjects’. In feite was mijn column ‘Chernoff’s distribution and the bootstrap’ in dit tijdschrift ook zo’n dans.

Tot zover was er nog niet zo veel aan de hand, maar toen het tijdstip van de lezing naderde, vond ik dat het mijn plicht was om uit te leggen waarom de duivel aan het begin van de Danse macabre zijn viool in het diabolus in musica-interval stemde en



Een historische afbeelding van een ‘Danse macabre’

dat ook te laten horen en te wijzen op de verminderde kwint (of overmatige kwart wat eigenlijk hetzelfde is). Ik schafte daartoe op internet een uitvoering van Kyung Wha Chung (vroeger een van mijn favoriete violistes) en Charles Dutoit (met een mijns inziens wat te zwaar aangezet orkest) aan, die ik inderdaad in de Jaarbeurs heb laten horen.

Vooraf lijkt zoiets allemaal heel leuk, maar, zoals vaak gebeurt, op de dag zelf ging alles fout. De Jaarbeurs is op zichzelf al zo'n gebouw dat ik liever niet betreed, maar het heeft wel het voordeel dat het vanuit het station Utrecht gemakkelijk te bereiken is. Ik was dus keurig op tijd, maar de voorzitter van de sectie die mij had uitgenodigd was er niet. Bovendien had mijn abstract kennelijk heel veel toehoorders getrokken. Dat is in het algemeen moeilijk van tevoren te voorspellen, soms sta je voor een enorme zaal met anderhalve man en een paardenkop, maar in dit geval waren er niet genoeg stoelen. De Nederlandse statisticus die had verklaard dat isotone regressie een 'dead subject' was, was er ook, samen met een bekende toegepaste statisticus uit Stanford. Zij moesten stoelen uit een belendende zaal gaan halen.

Er was dus een chaotische beginsituatie, met allemaal mensen die stoelen uit belendende zalen gingen halen en een ontbrekende voorzitter. Maar uiteindelijk arriveerde hij toch een kwartier te laat. Je zou denken dat hij me dan wat extra tijd zou geven, maar nee dat wilde hij niet (op dat soort dingen moet je ook voorbereid zijn). Dus daar begon ik met mijn uitleg over de diabolus in musica en het fragment met Kyung Wha Chung en Charles Dutoit. Toen was ik al bijna door de mij toegestane tijd heen.

Later heb ik nog via via begrepen dat alles wat ik had gezegd onbegrijpelijk was, zowel wat ik over de diabolus in musica had gezegd als wat ik nog over de 'two dead subjects' te melden had in de geringe resterende tijd. Gelukkig kon ik dus in deze column in ieder geval nog even die diabolus in musica opnieuw uitleggen.

Een zeer geslaagde lezing

Maar het kan ook anders. In 1980 was ik in Seattle bij een lezing van David Freedman (die hoogleraar was in Berkeley). David Freedman kwam daar een lezing over de bootstrap (een van de twee 'dead subjects', zie boven) houden. Eerlijk gezegd dacht ik voorafgaand aan die lezing dat de bootstrap flauwekul was, gewoon een variant van simuleren, waar veel ophef over gemaakt werd en waar een krachtige reclamecampagne achter zat.

Maar na die lezing van David Freedman was ik helemaal 'om'. Wat was dat een goede lezing, die bovendien op tijd begon! Er hoefden ook geen stoelen uit belendende zalen te worden gehaald. Alles wat David Freedman zei was volledig begrijpelijk en het was ook nog heel interessant. Het was in de begintijd van de artikelen over de bootstrap, niet lang nadat Bradley Efron zijn eerste artikelen hierover geschreven had (zie [2] en [3]).

Het prettige (voor mij) van het feit dat een echte wiskundige zoals David Freedman, die eveneens bijzondere boeken over de theorie van de Brownse beweging heeft geschreven, zich met dit onderwerp ging bezighouden was dat ik daardoor ook ineens begreep waar het eigenlijk om ging.

Hij schreef in die tijd een artikel met Peter Bickel (zie [1]), waarin bijvoorbeeld Theorem 1 hieronder stond. Bij de aanvankelijke vorm van de bootstrap (de 'klassieke bootstrap') trekken we met teruglegging uit onze oorspronkelijke steekproef $X_1, \dots, X_n$. Deze trekkingen worden meestal aangeduid met X_i^* . We kunnen een

bootstrap steekproef van dezelfde omvang nemen: $X_1^*, \dots, X_n^*$ of een steekproef van andere omvang $X_1^*, \dots, X_m^*$, waarbij m zowel groter als kleiner dan n kan zijn. Over het trekken van steekproeven van kleinere, verdwijnende omvang $m = o(n)$, waarbij desondanks $m \rightarrow \infty$ als $n \rightarrow \infty$, is een heel boek geschreven: zie [4].

In de stelling hieronder is $\bar{X}_n$ het gemiddelde van de oorspronkelijke steekproef, $\bar{X}_m^*$ het gemiddelde van de bootstrap steekproef, S_m^* is gedefinieerd door

$$S_m^* = \left\{ m^{-1} \sum_{i=1}^m (X_i^* - \bar{X}_m^*)^2 \right\}^{1/2}$$

(de positieve wortel) en $N(0, \sigma^2)$ duidt een normale verdeling met verwachting 0 en variantie σ^2 aan.

Theorem 1. Suppose $X_1, X_2, \dots$ are independent, identically distributed, and have finite positive variance σ^2 . Along almost all sample sequences $X_1, X_2, \dots$, given $(X_1, \dots, X_n)$, as n and m tend to ∞ :

a. The conditional distribution of $\sqrt{m}(\bar{X}_m^* - \bar{X}_n)$ converges in distribution to $N(0, \sigma^2)$.

b. $S_m^* \rightarrow \sigma$ in conditional probability, that is, for $\epsilon > 0$,

$$P\{|S_m^* - \sigma| > \epsilon \mid X_1, \dots, X_n\} \rightarrow 0, \text{ almost surely.}$$

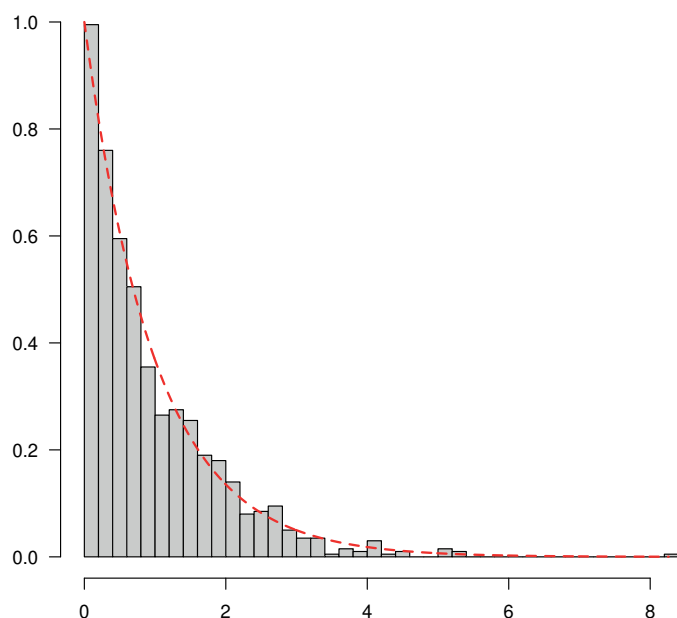
Wat de bootstrap onder andere onderscheidt van gewone simulatie is dat we (voorwaardelijk) bijna zekere convergentie *langs bijna alle rijen* $X_1, X_2, \dots$ krijgen. We zouden het ongelukkig kunnen treffen en met een heel onwaarschijnlijke rij en daardoor met erratisch gedrag van de bootstrap steekproeven te maken kunnen hebben. Maar we kunnen nu eenmaal met slechte steekproeven te maken krijgen en dat is 'all in the game'.

Ook is het zo dat de bovenstaande stelling gaat over een situatie waarin we de bootstrap eigenlijk niet nodig hebben en waar de centrale limietstelling ons al geeft wat we nodig hebben. Maar Bickel en Freedman merken terecht op dat het interessant is om te zien dat de bootstrap het doet in een situatie die we ook analytisch kunnen behandelen.

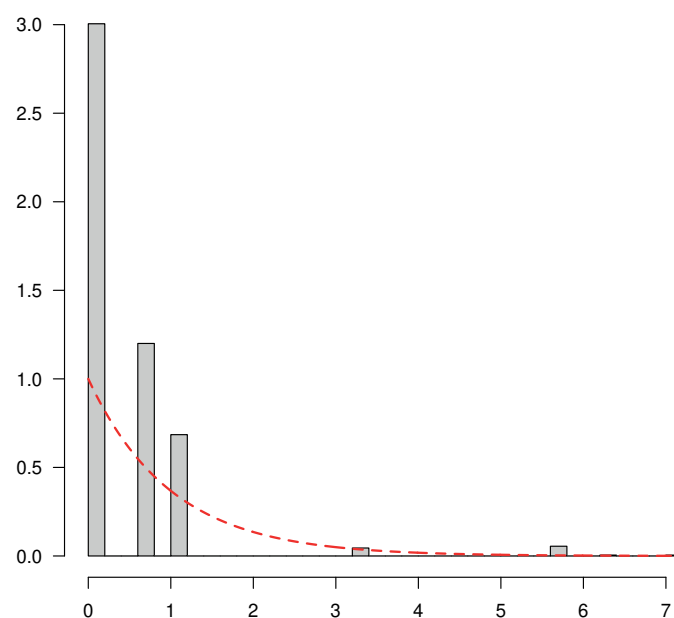
Iemand in het gehoor vroeg bij de lezing van Freedman: "Is het niet zo dat de bootstrap bij de mediaan niet 'werkt'?" De (steekproef) mediaan is de (een) 'middelste' waarneming bij de geordende waarnemingen als de steekproefgrootte oneven is en het gemiddelde van de twee middelste waarnemingen als de steekproefgrootte even is. Freedman antwoordde "That's a lie!" Dat vond ik toen heel grappig. Dus niet gewoon "Nee, het werkt ook voor de mediaan", maar "That's a lie!"

Dat de bootstrap 'werkt' voor de mediaan betekent dat we hiervoor een soortgelijke stelling als Theorem 1 kunnen formuleren en dat de verdeling van de mediaan in het door de bootstrap-steekproeven gesimuleerde gedrag voorwaardelijk op de oorspronkelijke steekproeven bijna zeker naar dezelfde limietverdeling convergeert als de verdeling van de mediaan in de oorspronkelijke steekproef.

'Werkt' de bootstrap altijd? Nee, natuurlijk niet. In [1] wordt het voorbeeld van het maximum van een uniforme steekproef gegeven. Als $X_1, \dots, X_n$ een steekproef uit een uniforme verdeling op het interval $[0, \theta]$ is, geldt voor het maximum, dat meestal met $X_{(n)}$ wordt aangeduid, dat $n(\theta - X_{(n)})/\theta$ in verdeling naar een standaard exponentiële verdeling convergeert. Als de klassieke



Figuur 1 Histogram van $n(X_{(n)} - X_{(n)}^*)/X_{(n)}$, gebaseerd op 1000 parametrische bootstrap steekproeven $X_1^*, \dots, X_n^*$, waarbij $X_{(n)}$ is gebaseerd op één oorspronkelijke steekproef $X_1, \dots, X_n$, met $n = 1000$, uit de uniforme verdeling op $[0, 2]$. De rode gestreepte kromme is de standaard exponentiële dichtheid.



Figuur 2 Histogram van $n(X_{(n)} - X_{(n)}^*)/X_{(n)}$, gebaseerd op 1000 niet-parametrische bootstrap steekproeven $X_1^*, \dots, X_n^*$ met teruglegging uit dezelfde steekproef $X_1, \dots, X_n$ als in Figuur 1. De rode gestreepte kromme is weer de standaard exponentiële dichtheid.

bootstrap zou werken voor het maximum, zou $n(X_{(n)} - X_{(n)}^*)/X_{(n)}$, voorwaardelijk op $X_1, \dots, X_n$, met kans 1 ook naar een standaard exponentiële verdeling moeten convergeren. Merk op dat hier de rol van θ door $X_{(n)}$ is overgenomen en de rol van $X_{(n)}$ door $X_{(n)}^*$ in de bootstrap-steekproeven.

Maar de voorwaardelijke verdeling van $n(X_{(n)} - X_{(n)}^*)/X_{(n)}$ heeft in dit geval helemaal geen limiet! Wel kunnen we in dit geval de klassieke zogenaamde niet-parametrische bootstrap vervangen door de parametrische bootstrap die wel werkt. In dat geval genereren we *uniforme* bootstrap-steekproeven $X_1^*, \dots, X_n^*$ uit $[0, X_{(n)}]$ en berekenen het maximum $X_{(n)}^*$ in deze bootstrap-steekproeven.

Dat de parametrische bootstrap *wel* werkt betekent dat de voorwaardelijke limietverdeling van $n(X_{(n)} - X_{(n)}^*)/X_{(n)}$ wel bijna zeker dezelfde is als die van $n(\theta - X_{(n)})/\theta$, wat wordt geïllustreerd door Figuur 1, waarin het histogram als dichtheidsschatte wordt gebruikt (relatieve frequentie delen door breedte van staaf).

Dat het helemaal misgaat voor de oorspronkelijke ‘klassieke’ bootstrap wordt getoond in Figuur 2. In feite kan worden aangetoond dat in dit geval de voorwaardelijke kans dat $n(X_{(n)} - X_{(n)}^*)/X_{(n)} = 0$ bijna zeker convergeert naar $1 - e^{-1} \approx 0,63$. Hierdoor zal de hoogte van de linker staaf van het histogram bijna zeker naar oneindig convergeren als $n \rightarrow \infty$ en de staafbreedte naar 0 gaat. ☹

Referenties

- 1 Peter J. Bickel en David A. Freedman, Some asymptotic theory for the bootstrap, *The Annals of Statistics* 9(6) (1981), 1196–1217.
- 2 Bradley Efron, Bootstrap methods: another look at the jackknife, *Ann. Statist.* 7(1) (1979), 1–26.
- 3 Bradley Efron, Computers and the theory of statistics: thinking the unthinkable, *SIAM Rev.* 21(4) (1979), 460–480.
- 4 Dimitris N. Politis, Joseph P. Romano en Michael Wolf, *Subsampling*, Springer Series in Statistics, Springer, 1999.
- 5 Gerard Scheltens, La Sonate de Vinteuil, 2017, <https://www.opusklassiek.nl/cd-recensies/cd-gsch/gschdebussy01.htm>.

K. P. Hart*Faculteit EWI
TU Delft
k.p.hart@tudelft.nl***Teun Koetsier***Faculteit der Bètawetenschappen
Vrije Universiteit Amsterdam
t.koetsier@vu.nl***Riekus Kok***Faculteit der Bètawetenschappen
Vrije Universiteit Amsterdam
riekus.kok@tiscali.nl***Jan van Mill***Faculteit FNWI
Universiteit van Amsterdam
j.vanmill@uva.nl***In Memoriam Mient Jan Faber (1940–2022)**

Van wiskundige tot vredesactivist

Op 15 mei 2022 overleed Mient Jan Faber, bij velen bekend als het gezicht van het Interkerkelijk Vredesberaad (IKV). Dit artikel gaat over hem en over zijn wiskunde.

Herinneringen van Riekus Kok

Mient Jan Faber werd geboren op 14 december 1940 in het Drentse Coevorden. De hbs werd doorlopen op het Christelijk Lyceum te Emmen. In Coevorden bestond zo'n school niet. Na de middelbare school schreef hij zich in voor de studie wis- en natuurkunde aan de Vrije Universiteit in Amsterdam, na een korte, niet succesvolle, start bij scheikunde. Tot aan zijn kandidaatsexamen waren wiskunde én natuurkunde beide hoofdvak waaraan toegevoegd een snuffe astronomie.

Hoewel ik hetzelfde programma volgde (met eveneens eerste jaar van inschrijving 1959) leerde ik Mient Jan pas kennen na ons beider kandidaatsexamen. We kozen allebei voor uitgebreid hoofdvak wiskunde met natuurkunde als bijvak. Voor natuurkunde dienden wij op zaterdagmorgen (!) het vak klassieke mechanica te volgen (geen boek, geen gestencild dictaat). Wij hadden al gauw door dat het handig was de weekenden naar 'huis' zo te regelen dat er altijd een van ons op de VU aanwezig was om een dictaat te maken. Veel meer contact kregen wij toen in de doctoraalfase het vak topologie werd ingevoerd.

Na het overlijden in 1964 van de grondlegger van wiskunde aan de VU, J.F. Koksmma, vonden in de jaren daarna nieuwe benoemingen plaats, onder anderen P.C. Baayen, M.A. Maurice en M.A. Kaashoek.

Na een verblijf in de Verenigde Staten nam Maarten Maurice een college topologie op zich. Hij en Cor Baayen waren bij J. de Groot gepromoveerd op een onderzoek in de topologie. Voor ons als studenten was dit vak een openbaring: een bevlogen docent, een modern vak. Er vormden zich groepjes studenten die na elk college van Maurice zich bogen over de opgaven en problemen die hij op college had genoemd. Een vrij

uniek gebeuren. Na ons doctoraalexamen meldden zich drie personen bij Maarten Maurice (niet allemaal tegelijk) met het verzoek bij hem promotieonderzoek te mogen doen. In volgorde van de start van het onderzoek: Jan van Dalen, Riekus Kok en Mient Jan Faber. Er waren toen wekelijkse besprekingen, 'praatjes' op congressen, en er moesten allerlei nieuwe colleges gevolgd worden van Maarten Maurice. Mient Jan en ik kregen kleine werkhokken toegewezen (naast elkaar), waarbij wij elkaar zo nodig konden beschreeuwen. In die periode riepen Mient Jan en ik een vraagstukkenpraktikum topologie in het leven (topologie was inmiddels ingedaald in het kandidaatsprogramma wiskunde). Mient Jan had een zeer zelfverzekerde manier van uitleggen en kon studenten daarmee snel overtuigen; een eigenschap die hij later bij het IKV ook goed kon benutten.

In dit verband is de volgende anekdote illustratief. Mient Jan was een fervent liefhebber van sport (niet alles actief). Ajax was zijn favoriete club, en zo kon het gebeuren dat Mient Jan de andere twee topologen meetroonde naar een wedstrijd Ajax–Feyenoord in het Olympisch Stadion in mei 1971. Ik was daar nog nooit geweest en had Ajax nog nooit zien voetballen. We kwamen terecht in een duidelijk Feyenoordvak. Mient Jan schroomde niet om zijn afkeuring van het Feyenoord-spel luid en duidelijk rond te strooien. Ik hield mijn hart vast, maar het scoreverloop kwam ons (mij?) te hulp: Ajax–Feyenoord 1–3, en



Mient Jan Faber in 2014

Foto: Carel Vogels

Ajax kon het kampioenschap vergeten. Na afloop van de wedstrijd aarde een Feyenoorder Mient Jan over zijn hoofd, en zei: “Kun je het nog een beetje verwerken?” Maar hij voegde er sympathiek aan toe: “Volgende week woensdag staan we allemaal achter Ajax in de finale Europa Cup I op Wembley.”

Naast wiskunde was Mient Jan toen al actief in kwesties van oorlog en vrede en ontwikkelingssamenwerking. Zo was hij ook woordvoerder van de actiegroep Synoodkreet binnen de Gereformeerde Kerken.

Ten tijde van onze promoties was de werkgelegenheid voor wiskundigen aan universiteiten niet al te royaal. Jan van Dalen was gelukkig dat hij aan de TUE aan de slag kon; Mient Jan vertrok naar het IKV en ik kon door een plotseling ontstane vacature aan de VU blijven.

Nadat onze wegen uiteen waren gegaan zag ik Mient Jan en zijn vrouw Minie in 2017 weer in Amstelveen. Ze hadden daar als jong gezin al een tijdje gewoond en waren uit Den Haag (waar zij in de straat met de interessante naam Mient woonden) naar Amstelveen terugverhuisd in verband met de gezondheidstoestand van Mient Jan. We hernieuwden het contact. Al snel gingen we samen met enige regelmaat aan de wandel, al gooiden corona-pieken een paar keer roet in het eten. In november 2021 was onze laatste wandeling en in mei 2022 overleed Mient Jan.

Naar het IKV

Zoals werd opgemerkt in de eerste paragraaf was Faber al eerder tijdens zijn studie aan de VU actief in organisaties op het gebied van vrede en ontwikkelingssamenwerking. Overigens had hij na de middelbare school nog overwogen om naar de Koninklijke Militaire Academie te gaan.

Hij schreef later: “De oorlog in Vietnam was de trigger die mij in beweging zette. Ik zie me weer lopen te midden van enkele duizenden demonstranten, in de straten van Amsterdam, in de zomer van 1966. Voorop liep de gereformeerde professor Jo Verkuyll. [...] Wij waren tegen de vuile oorlog van de Amerikanen in Vietnam.” [8, pp. 14–15]. Hij komt in die tijd ook in contact met illegaal in Nederland verblijvende vluchtelingen uit Afrika [4]. Zijn persoonlijke contacten met slachtoffers van oorlog of dictatuur hebben zijn hele leven grote invloed op hem. Hij zou eigenlijk altijd, in de woorden van de NOS, een gereformeer-

de jongen blijven, sterk ethisch gedreven [18]. Het kwaad diende resoluut te worden bestreden.

Eind juni 1974, enkele maanden na zijn promotie, ging hij aan het werk bij het Interkerkelijk Vredesberaad (IKV), als algemeen secretaris. Hij zag zich zelf daarbij helemaal niet als een geschikte kandidaat en solliciteerde dan ook niet, maar hij werd gevraagd.

Hij stond in feite voor de keuze van een carrière als wiskundige of een carrière als bestrijder van het kwaad in de wereld. Hij koos voor het laatste. En het was wennen. Hij schreef: “Dat komt ervan als je zoals ik je eigenlijke metier — wiskunde — verlaat en geheel onvoorbereid in een vreemde wereld duikt.” [8, p. 23]. Inderdaad een vreemde wereld. Door Faber beschreven in onder meer zijn boek *Vooruitgeschoven spionnen, bevrijd uit de boeien van de koude oorlog* uit 2007 [8].

Het IKV werd opgericht in 1966 als een oecumenische organisatie waarin negen kerken participeerden, waaronder de Rooms-Katholieke Kerk, de Nederlandse Hervormde Kerk en de Gereformeerde Kerken in Nederland. De jaarlijkse vredesweek die het IKV organiseerde had aanvankelijk elk jaar een ander thema maar in 1976 besloot men om zich op kernwapens te concentreren. De slogan ‘Help de kernwapens de wereld uit, om te beginnen in Nederland’ werd in de winter van 1976–1977 bedacht. De campagne startte bij de opening van de Vredesweek in 1977 [8, pp. 30–31]. Het vigerende veiligheidssysteem, berustend op de bereidheid om massavernietigingswapens in te zetten, werd als zowel levensgevaarlijk als moreel onaanvaardbaar gezien [11, p. 10]. Kernwapens waren wezenlijk slecht en moesten dus de wereld uit. Daarnaast diende er te worden gestreefd naar een wereld zonder oorlog. Het idee was dat die doelen bereikt zouden moeten worden door op democratische wijze druk uit te oefenen op de regeringen.

Faber was voor het IKV op dat moment een gouden greep. Hij was een uitstekend spreker. Helder formulerend vertolkte hij de gevoelens van de mensen. Hij was oplossingsgericht en zelfverzekerd. “Mient Jan ziet problemen als een intellectuele uitdaging. Hij wil problemen oplossen als pragmatische wiskundige”, zei zijn IKV-collega Wim Bartels ooit [15]. In dezelfde zin liet Faber zich uit in het VPRO-marathon-

interview dat Rik Delhaas in 2003 met hem had.

Het IKV vertolkte gevoelens die bij velen leefden. De NAVO besloot in 1979 tot plaatsing van 572 nucleaire middellangeafstandsraketten in Europa. Dat was een reactie op de plaatsing door de Sovjet-Unie van SS-20's met een bereik tot 5000 kilometer. In Woensdrecht zouden 48 kruisraketten gestationeerd moeten worden. Het verzet was groot en het IKV was de spreekbuis.

Toen Faber aantrad als secretaris had het IKV nauwelijks een achterban. Dat veranderde. Faber was een goede organisator en er werd zorgvuldig een groot netwerk van lokale kernen van het IKV geschapen. Dat was een enorm succes. Het IKV bleek grote aantallen mensen te kunnen mobiliseren.

Het IKV met Faber in een hoofdrol organiseerde de grootste demonstraties in de Nederlandse geschiedenis. De eerste vond plaats in Amsterdam op 21 november 1981. Op het Museumplein kwamen 400.000 mensen bij elkaar. Daarna werd in 1982 het *Komitee Kruisraketten Nee* (KKN) opgericht waarbinnen het IKV een centrale rol speelde. Het KKN organiseerde de antikernwapendemonstratie van 29 oktober 1983 in Den Haag. Op het Malieveld verzamelden zich circa 550.000 mensen. Ook elders in Europa vonden vergelijkbare demonstraties plaats, bijvoorbeeld in Bonn op 10 oktober 1981 met 250.000 deelnemers en in Brussel op 23 oktober 1983 met 420.000 deelnemers. Aan de demonstratie in Bonn namen honderden Nederlanders deel die op initiatief van het IKV met een aparte trein naar Bonn waren gekomen [8, p. 53].

Het IKV opereerde in een interessant krachtenveld. De strijd tegen de wapenwedloop zag Faber niet los van de strijd voor democratie en mensenrechten in Oost-Europa. Na 1981 zocht Faber dan ook breed contact met Oost-Europese dissidenten.

Geheime diensten van Oost en West volgden de ontwikkelingen met interesse. In Nederland had de BVD grote belangstelling voor het IKV evenals de Nederlandse communisten. De CPN deed pogingen om in het IKV te infiltreren [8, p. 39]. Ter illustratie, volgend voorbeeld. In mei 1988 vond er in Boedapest een bijeenkomst plaats van dissidenten uit de DDR en Hongarije waaraan ook Nederlanders deelnamen. Een van de DDR-deelnemers, Inez, was een agente van de Oost-Duitse geheime dienst



Foto: Nationaal Archief, Rob Groes / Anefo

Mient Jan Faber houdt een toespraak tijdens de vredesdemonstratie in Den Haag op 29 oktober 1983

de Stasi. In haar pas na de Wende ontdekte rapport lezen we “Mient Jan Faber is zeer doelgericht opgetreden tijdens de bijeenkomst en wist heel precies hoe hij zijn eisen en doelen er door moest drukken. Op een of andere manier is hij een fascinerende persoonlijkheid en hij weet dat effect ook goed te gebruiken. Bij hem was duidelijk waar te nemen en hij heeft het indirect ook zo geformuleerd dat hij een Europees netwerk van oppositionele groepen nastreeft.” [8, p. 186].

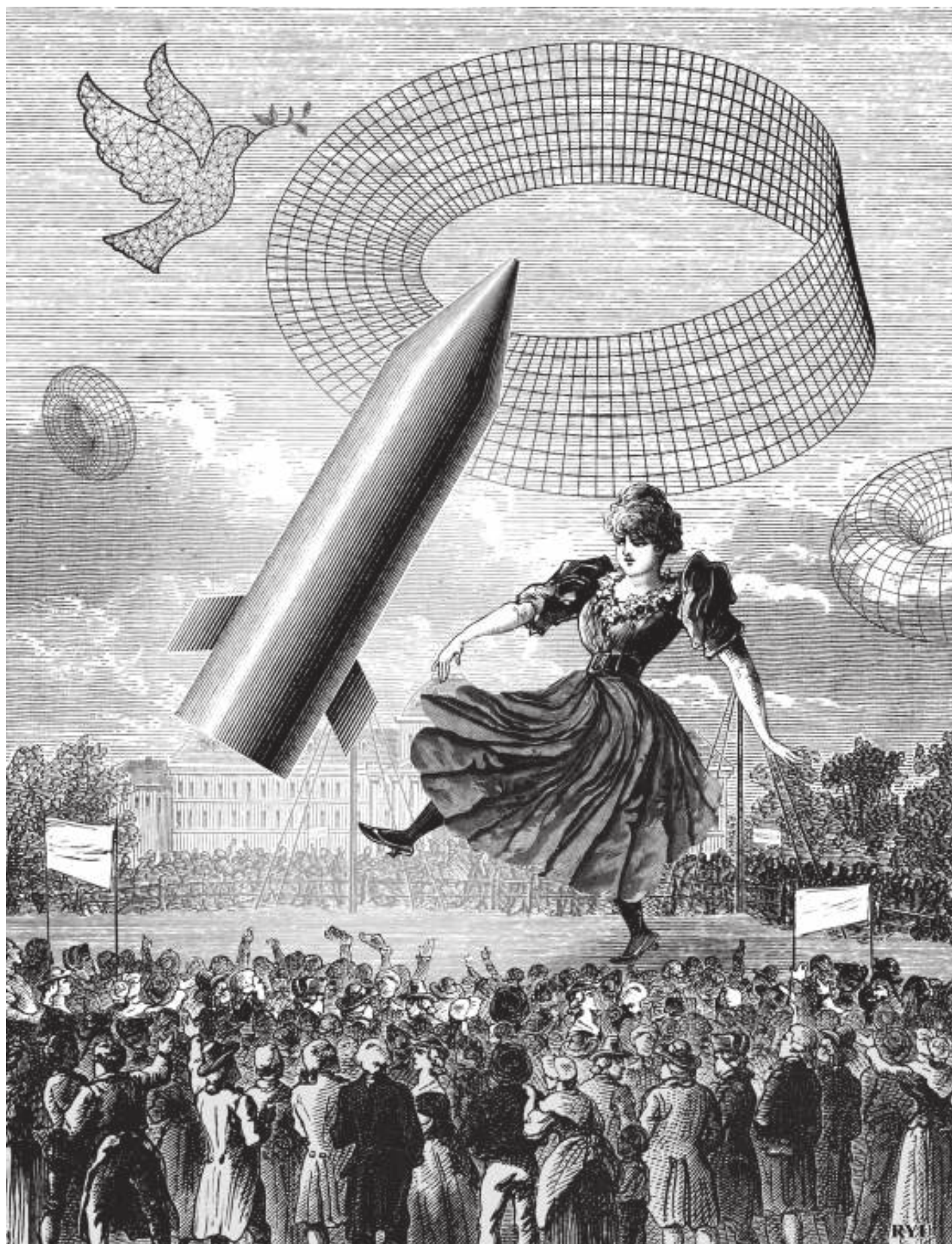
Na de val van de Berlijnse muur in 1989 richtte Faber zijn aandacht op de Balkan [20]. Later ook elders. Hij was tegen kernwapens, maar geen radicale pacifist. Dat werd nu duidelijk. Voor tirannie buigt men niet, was zijn motto. Hij achtte daarom militair ingrijpen soms onvermijdelijk, zoals toen de Verenigde Staten in actie kwamen tijdens de Kosovo-oorlog in 1999 en de Irak-oorlog van 2003. Lang niet al zijn medestanders van het eerste uur waren dit met Faber eens. Zijn vertrek bij het IKV in 2003 hing hier nauw mee samen. Faber schreef:

“Toen hadden de kerken en het IKV-be-stuur er genoeg van.” [8, p. 24].

Een mooi voorbeeld van Fabers ethische gedrevenheid betreft zijn inzet voor de nabestaanden van de massamoord in Srebrenica. In 1993 kreeg een gebied rond het stadje Srebrenica in Bosnië van de Veiligheidsraad van de VN de status van ‘safe area’ en werd geplaatst onder de bescherming van de United Nations Protection Force (UNPROFOR). In 1994 werd Overste Thom Karremans benoemd tot de commandant van het licht bewapende Nederlandse bataljon, Dutchbat III, dat de enclave moest beschermen. Het bataljon huisde op een basis in de enclave bij het dorpje Potočari. Het gebied werd geheel omringd door grond die door de Bosnische Serviërs werd gecontroleerd. In het gebied waren ook uit moslims bestaande eenheden van het Bosnische leger actief. Het bataljon had aan de grens van het gebied observatieposten ingericht.

Zolang alle partijen de safe area respecteerden was er niets aan de hand. In juli

1995 werd echter de enclave door de Servisch generaal Ratko Mladić ingenomen. Dutchbat liet het gebeuren. Zo’n 25.000 Bosniërs vluchtten naar de VN-basis bij Potočari, 20.000 van hen vonden enig onderdak in fabriekscomplexen en de busremise van Potočari. Slechts 5.000 van hen werden op de basis toegelaten, maar ook die moesten op een zeker moment de basis verlaten. Dat is niet onbegrijpelijk. De hitte, onvoldoende voedsel en water en gebrek aan sanitaire voorzieningen creëerden een dramatische situatie. De vluchtelingen werden gedeporteerd door de Serviërs. Ruim 8.000 van hen, vrijwel uitsluitend mannen, werden vermoord. Deels gebeurde dat spontaan en werd wraak genomen. Niet gehinderd door enig respect voor het moderne oorlogsrecht redeneerde Mladić vermoedelijk ook als volgt. Als ik ze laat lopen worden ze binnen de kortste keren bewa-pend, voegen zich bij het Bosnische leger en schieten op ons. Dus schakel ik ze uit nu dat kan. Het was de grootste massamoord in Europa na de Tweede Wereldoorlog.



In 1996 gaf de regering het NIOD opdracht om de gang van zaken rond de val van Srebrenica in detail te onderzoeken. De cruciale vraag was al snel in hoeverre Nederland verantwoordelijk was voor het drama. Het NIOD-rapport liet echter lang op zich wachten. Contacten met nabestaanden stimuleerden Faber om als secretaris van het IKV een eigen onderzoek te starten.

Op 10 april 2002 kwam het NIOD na vijfenhalf jaar met haar rapport van 3368 bladzijden [17]. Het is een historische studie die niet beoogde politieke conclusies te geven. Op dinsdag 16 april 2002 viel het hele Tweede Kabinet Kok nadat zowel de minister van Defensie Frank de Grave en de minister van VROM Jan Pronk af wilden treden. Premier Kok nam verantwoordelijkheid voor het gebeurde in Srebrenica op zich, maar erkende geen schuld.

Fabers rapport verscheen net iets eerder dan het NIOD-rapport. Hij betoogde dat de massamoord mogelijk voorkomen had kunnen worden als Dutchbat alle vluchtelingen op de basis had toegelaten. Faber schreef dat het er op leek dat Nederland “slechts één doel voor ogen had: Hoe komt Dutchbat zo snel mogelijk ongeschonden uit deze hel? Het lijkt erop dat daar alles voor moest wijken, dus ook de Moslimmannen.” [6, p. 110].

Faber was van mening dat het Nederlandse bataljon proactiever had moeten zijn. Hoewel ze de omvang van de moordpartij niet konden voorzien, waren er duidelijke aanwijzingen dat de Serviërs mannen en jongens executeerden. Faber pleitte voor een parlementaire enquête. Die kwam er. In het rapport concludeerde de parlementaire commissie dat Nederland een “geheel eigen verantwoordelijkheid” had gehad in het drama. De schuld van de massamoord werd door de commissie echter geheel bij de Bosnische Serviërs gelegd [21].

In 2005 daagden nabestaanden van slachtoffers van de genocide de Nederlandse Staat voor de rechter. Faber steunde dat initiatief. Als gevolg daarvan oordeelde uiteindelijk in 2019 de Hoge Raad dat de Nederlandse Staat voor een klein deel aansprakelijk is voor de dood van 350 moslimmannen in Srebrenica. Faber kreeg gelijk, zij het ten dele. En Faber had absoluut een punt: los van de politiek zijn er ook binnen de Nederlandse krijgsmacht hoge militairen die vinden dat Dutchbat in Srebrenica te slap was opgetreden. Het had anders gekund.

In 2014 keek Faber terug op de IKV-slogan ‘Help de kernwapens de wereld uit, te beginnen uit Nederland’ en erkende hij dat de daarin vervatte doelstelling niet helemaal realistisch was geweest. Hij noemde de protesten echter ‘bijzonder succesvol’. “Ik heb daar geen spijt van. Integendeel, ik zou het in die situatie weer doen.” [13] De vreemde wereld van de politiek waarin de zuiver wiskundige Mient Jan Faber was beland verschilde nogal van de academische wereld. In de echte wereld veranderen de omstandigheden voortdurend en telkens doe je wat je meent te moeten doen.

Van 2005 tot 2012 was Faber bijzonder hoogleraar *Citizens’ Involvement in War Situations* aan de Vrije Universiteit (zie de volgende paragraaf). In zijn inaugurele rede [7] waarin hij ook de val van Srebrenica besprak, relativeerde hij zijn standpunten enigszins met de woorden: “Wat me uit de gouden jaren van de wiskunde goed is bijgebleven, is de stelling dat finale antwoorden alleen in de wiskunde gevonden kunnen worden. Daar heb ik tot op de dag van vandaag vrede mee.”

Terug naar de VU

Mient Jan Faber trad in 2003 terug als algemeen secretaris van het IKV. Zoals opgemerkt in de vorige paragraaf, werd hij in 2004 benoemd tot bijzonder hoogleraar *Citizens’ Involvement in War Situations* aan de Faculteit der Sociale Wetenschappen van de Vrije Universiteit in Amsterdam. Op 21 april 2005 aanvaardde hij zijn ambt door het uitspreken van een rede getiteld ‘Srebrenica, vanuit een andere hoek bekijken’ [7]. Het eerste deel van zijn voordracht ging over het nut en gebruik van het concept *human security* met betrekking tot het beleid en de concrete activiteiten van overheden en burger-initiatieven, in oorlogssituaties. Daarna stond hij stil bij het drama Srebrenica. Hij vroeg zich onder meer af of de hantering van het concept *human security* door Dutchbat tot een verwrongen beeld van de werkelijkheid heeft geleid. De leerstoel werd gefinancierd door het IKV en hij bekleedde die tot aan 2012. Hij werd opgevolgd door Marlies Glasius, die de deeltijdbaan (één dag per week) combineerde met haar baan als hoofddocent Internationale Betrekkingen aan de Universiteit van Amsterdam. Zij stopte aan de VU in 2014 [19].

Faber heeft in zijn periode als bijzonder hoogleraar ‘peer-reviewed’ artikelen

gepubliceerd, onder meer met zijn toenmalige promovendus Martijn Dekker [3, 9, 10] die in 2013 bij hem promoveerde [2]. In deze artikelen en het proefschrift van Dekker, speelt het concept *human security* een belangrijke rol. Dekker schrijft over zijn proefschrift dat het een studie is over de manieren waarop veiligheid wordt geleverd aan, en wordt ervaren door, de Palestijnen die in de West Bank wonen. Een tweede project dat aangevangen werd met Gijsbert Maarten van Itersen Scholten, werd niet afgerond; Gijsbert promoveerde uiteindelijk in 2018 bij Fabers opvolgster, Marlies Glasius [12].

Een volledige lijst van publicaties van Faber uit deze periode is te vinden op <https://www.narcis.nl> onder prof. dr. M.J. (Mient Jan) Faber.

De wiskunde van Mient Jan Faber

De titel van het proefschrift [5] van Mient Jan Faber, *Metrizability in Generalized Ordered Spaces*, waar hij in april 1974 op promoveerde, bergt twee onderwerpen in zich die in de jaren zeventig van de vorige eeuw centraal stonden in de algemene topologie: metriseerbaarheid en lineaire ordeningen.

Metriseerbaarheid is van alle tijden: zodra algemene topologische ruimten gedefinieerd waren ging men op zoek naar voorwaarden die impliceren dat de topologie door een metriek voortgebracht wordt. Echter, in de jaren zestig en zeventig maakten de ontwikkelingen in de verzamelingenleer nieuwe technieken beschikbaar om oude problemen aan te pakken. Daarnaast groeide de belangstelling voor de relatie tussen de topologie en de combinatorische eigenschappen van lineair geordende verzamelingen.

In een lineair geordende verzameling $(X, <)$ definieert men de *ordetopologie* λ , net als op $\mathbb{R}$, door U open te verklaren als voor elk punt x van U een open interval (a, b) bestaat met $x \in (a, b) \subseteq U$ (met voor de hand liggende aanpassingen als $x = \max X$ of $x = \min X$). Het drietal $(X, <, \lambda)$ noemt men in de wandeling een *LOTS* (Linearly Ordered Topological Space).

Als nu Y een deelverzameling van X is dan heeft Y twee natuurlijke topologieën: de deelruimtetopologie τ_1 bepaald door λ en de ordetopologie τ_2 bepaald door de relatieve ordening op Y . Zoals de deelverzameling $[0, 1] \cup (2, 3)$ van $\mathbb{R}$ laat zien hoeven τ_1 en τ_2 niet gelijk te zijn. Dit verschijnsel

leidt tot de ruimere klasse van GO-ruimten (de Generalized Ordered spaces uit de titel van het proefschrift): dit zijn per definitie de deelruimten van LOTS-en en deze worden gekarakteriseerd als lineair geordende verzamelingen met een topologie die fijner is dan de ordetopologie en die een basis heeft bestaande uit orde-convexe verzamelingen.

De bekendste GO-ruimte is wel de Sorgenfreylijn $\mathbb{S}$, deze heeft $\mathbb{R}$ als onderliggende verzameling en de familie ‘spelden’ $\{[a, b): a, b \in \mathbb{R}, a < b\}$ als basis (VU-studenten kennen deze topologie daarom ook wel als de *speldentopologie*). De GO-ruimten $\mathbb{S}$ en $[0, 1] \cup (2, 3)$ hebben gemeen dat het *echt* geen LOTS-en zijn: er is geen enkele lineaire orde op de onderliggende verzameling die de gegeven topologie kan voortbrengen. Het artikel [16] van David Lutzer biedt een van de eerste systematische onderzoeken van metriseerbaarheid en aanverwante eigenschappen in de klasse van GO-ruimten.

Het proefschrift van Faber opent, na een inleidend hoofdstuk, met een grondig onderzoek van (relatief) discrete deelverzamelingen van GO-ruimten. In een gewone LOTS ziet een discrete deelruimte, zeg D , er ook discreet uit: om elk element van D is er een open interval dat geen andere punten van D bevat. Een blik op $\mathbb{S}$ leert dat in een GO-ruimte anders zit: de deelverzameling $S = \{1\} \cup \{1 - 2^{-n} : n \in \mathbb{N}\}$ ziet er op het oog uit als een convergente rij maar is discreet: dankzij de omgeving $[1, 2)$ ligt 1 toch ver weg van de andere punten

van S . Het feit dat sommige punten zich afwenden van alles wat rechts ligt, of van alles wat links ligt maakt het werken met GO-ruimten lastiger.

Er is een mooie stelling die metriseerbaarheid in LOTS-en karakteriseert: de diagonaal is een G_δ -verzameling in het vierkant. Voor GO-ruimten gaat deze niet op, zie de Sorgenfreylijn. Fabers werk aan discrete deelverzamelingen stelde hem in staat een versie van deze metriseringsstelling te formuleren en bewijzen. Deze stelling is voor velen nog steeds het startpunt van een verder onderzoek naar metriseerbaarheid van GO-ruimten. Daarnaast bevat het proefschrift karakterisering van enige bekende topologische eigenschappen, zoals paracompactheid en de Lindelöfeigenschap, voor GO-ruimten. Hierbij spelen de discrete verzamelingen belangrijke rollen. In de woorden van Lutzer, die het proefschrift voor de *Mathematical Reviews* recenseerde: “This monograph begins by presenting new (and better) proofs of certain results obtained by the reviewer in [16] ...”

Dit materiaal wordt in het tweede deel gebruikt in een onderzoek naar de orde-topologie van lexicografische producten van LOTS-en. Ook dit onderzoek is fundamenteel gebleken: een zoektocht op MathSciNet leert dat het werk van Faber aan de basis staat van veel recent werk aan lexicografische producten van GO-ruimten, zoals [14].

We besluiten met twee opmerkelijke resultaten uit het proefschrift.

Het eerste is een metriseerbare LOTS met de eigenschap dat geen enkele σ -disjuncte

familie van open *intervallen* een overdekking vormt. Het opmerkelijke hieraan is dat in een metrische ruimte er zelfs een basis bestaat die een vereniging is van aftelbaar veel discrete families. Dit voorbeeld laat zien dat men niet altijd kan verwachten dat zo’n basis uit ‘mooie’ verzamelingen bestaat.

Het tweede resultaat is dat een GO-ruimte met een σ -discrete *dichte* deelverzameling perfect normaal is. Het bewijs is niet echt moeilijk maar de vraag naar de omkering van deze stelling is dat wel. Die vraag staat tegenwoordig bekend als ‘de vraag van Maurice’, naar de promotor van Faber: Maarten Maurice.

We kijken even naar een aanverwante stelling en vraag: het is duidelijk dat in een separabele LOTS elke paarsgewijs disjuncte familie intervallen aftelbaar is; in 1920 vroeg Souslin of die implicatie omkeerbaar is. Een tegenvoorbeeld voor die omgekeerde implicatie heet nu een Souslinlijn en een van de vroegste successen van de bovengenoemde nieuwe methoden in de verzamelingenleer was dat het bestaan van Souslinlijnen consistent met en onafhankelijk van de gewone axioma’s van de verzamelingenleer is.

Een Souslinlijn, als LOTS, is perfect normaal maar heeft geen σ -discrete dichte deelverzameling en is daarmee een consistent tegenvoorbeeld voor de vraag van Maurice. Echter, er zou nog een echt tegenvoorbeeld kunnen bestaan. Tot nu toe is dat nog niet bewezen, noch uitgesloten, zie [1].

Referenties

- H. R. Bennett en D. J. Lutzer, Recent developments in the topology of ordered spaces, in: *Recent Progress in General Topology*, Vol. II, North-Holland, 2002, pp. 83–114.
- M. Dekker, *Occupational Hazards – Providing Human Security in the Palestinian West Bank in the Context of Israeli Occupation*, Proefschrift, Vrije Universiteit, 2013.
- M. Dekker en M. J. Faber, Winning the hearts and minds of the foreign protectors, in: *Reconstruction after Violent Conflicts*, Brill Academic Publishers, 2009, pp. 149–178.
- R. Delhaas, *Marathoninterview met Mient Jan Faber*, VPRO, 2003, <https://edu.nl/a6d4d>.
- M. J. Faber, *Metrizability in Generalized Ordered Spaces*, Mathematical Centre Tracts, No. 53, Mathematisch Centrum, 1974.
- M. J. Faber, *Srebrenica, de genocide die niet werd voorkomen*, IKV, 2002.
- M. J. Faber, *Srebrenica, vanuit een andere hoek bekeken*, Oratie, Vrije Universiteit, 2005.
- M. J. Faber, *Vooruitgeschoven spionnen, bevrijd uit de boeien van de koude oorlog*, Spectrum, 2007.
- M. J. Faber en M. Dekker, Human security from below in a Hobbesian environment, *Security and Human Rights* 19(1) (2008), 37–44.
- M. J. Faber en M. Dekker, Violent conflict and the individual security dilemma, in: *Routledge Handbook of Human Security*, Routledge, 2013, pp. 145–158.
- M. J. Faber, L. Hogebrink, J. ter Laak en B. ter Veer (red.), *Zes jaar IKV-campagne*, De Horstink, 1983.
- G. M. van Iterson Scholten, *The Peaces we Build – Visions of Peace of Professional Peace Workers from the Netherlands, Lebanon and Mindanao*, Proefschrift, Vrije Universiteit, 2018.
- M. van der Kaaij, Interview ‘We moeten met kernwapens leven’, *Trouw*, 28 februari 2014, <https://edu.nl/vcr8w>.
- N. Kemoto, Paracompactness of lexicographic products of GO-spaces, *Topology Appl.* 240 (2018), 35–58.
- E. König, Mient Jan Faber was een eigenwijze, gedreven vredesactivist, *NRC*, 15 mei 2022.
- D. J. Lutzer, On generalized ordered spaces, *Dissertationes Math. (Rozprawy Mat.)* 89 (1971), 32.
- NIOD, *Srebrenica: een ‘veilig’ gebied. Reconstructie, achtergronden, gevolgen en analyses van de val van een Safe Area*, Boom, 2002, <https://edu.nl/7kxm8>.
- D. Verkuil, *Vredesactivist Mient Jan Faber bleef gereformeerde jongen*, NOS, 15 mei 2002, <https://edu.nl/86a4m>.
- Bijzondere vredesleerstoel al twee jaar leeg, *Ad Valvas*, 22 maart 2016.
- Mient Jan Faber prijst De Grave, *Trouw*, 27 mei 1999, <https://edu.nl/hfaj4>.
- Parlementaire enquête Srebrenica (2002–2003), <https://edu.nl/pacyd>.

Clara Stegehuis

Faculteit EWI
Universiteit Twente
c.stegehuis@utwente.nl

Francesca Arici

Mathematisch Instituut
Universiteit Leiden
f.arici@math.leidenuniv.nl

Proof by example Portraits of women in Dutch mathematics

Sophie Huiberts

In ‘Proof by example’, Clara Stegehuis and Francesca Arici portray women in Dutch mathematics. This edition portrays Sophie Huiberts, Simons junior fellow at Columbia University, who recently defended her PhD thesis at CWI on algorithms for linear programming. In this interview she tells about her research and her motivation to pursue a career in mathematics.

When did you start to like mathematics?

“I had a great mathematics teacher in high school, who was very enthusiastic about it. Still, I thought that mathematics was a bit boring, as it did not touch upon any of the subjects that interested me as a teenager. However, I did like programming at that time, which I did as a hobby. At some point I found out that the algorithms I programmed also had inventors. For me, that was a real revelation, and being an ‘inventor of algorithms’ seemed like the best job in the world to me. These people were described as mathematicians and computer scientists, so this made it easy for me to choose my majors at university after high school: mathematics and computer science as a double bachelor program in Utrecht.”

So you started to study computer science because you liked programming. So why are you a mathematician now, and not a computer scientist?

“In my master program I already chose for mathematics over computer science. I found the theoretical aspects of algorithms more interesting than implement-

ing them in practice, on which the computer science degree put a heavy focus. I really liked my master graduation project, so when my thesis supervisor, Daniel Dadush posted a vacancy for his first PhD student, I applied for this position, and that is how I got into research professionally.”



Sophie Huiberts

What is your research about?

“Funnily enough, my research is still about algorithms, so that interest stuck with me. I now focus on a very particular type of algorithms: the ones used in linear programming and integer linear programming. These types of algorithms solve optimization problems that can for example create train schedules, allocate personnel to different tasks or design large sports competitions. In theory, these algorithms can take a very long time to run. Nevertheless, in practice these algorithms are extremely fast. Some algorithms for linear programming run in exponential time in the worst case, but in practice they run in linear time. Integer linear programming is even NP-hard in theory, but in practice, it can be solved quickly as well. I investigate how this difference between theory and practice arises, and try to come up with theoretical models that better explain why these algorithms work so well in practice.”

How do you approach this?

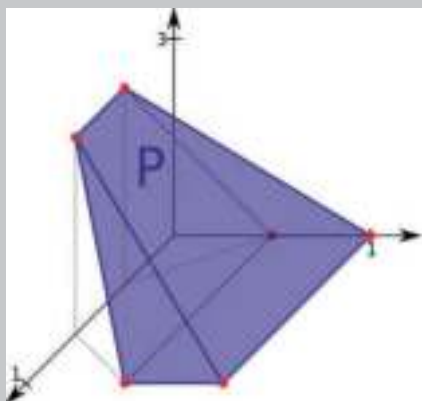
“For example, I can assume that the constraints in the linear program come from some probability distribution. Then, I can show that the algorithm runs in linear time in expectation. We interpret this as a way of arguing that a large class of linear programs can be solved in linear time.”

Is there also a particular application of linear programs that you focus on in your research?

“Even though there are many applications of linear programs, my research is mostly abstract and purely theoretical. Recently though, we proposed a new algorithm that we think might be useful in practice. Then we implemented this algorithm, and tested it on real-world instances. This experience was a lot of fun. The actual implementation of the algorithms I investigate is very complex however, and accurately comparing different algorithms is not easy. I am happy that we can ignore many of these nuances when proving mathematical theorems.”

What result of your research are you most proud of?

“I am most proud of my recently published results on the diameter of polytopes. When you have a set of linear inequalities, the set of feasible solutions to this system becomes a high dimensional polytope. You can view the polytope as a graph, where all corners are nodes, which are connected by the edges of the polytope. One question that you can then ask is: what is the diameter of this graph? In other words, what is the longest distance between any two vertices in this graph? We studied this question for random polytopes, where there were no mathematical results known yet. After working on this problem for a while, we proved that the diameter of the graph of a random polytope is close to the average distance between two random vertices. This means that most distances in this graph are similar, so the result is quite strong. But I am most proud of the fact that this was the first project where I was really



A 3-dimensional polytope

in the lead as a scientist. During the beginning of your PhD, you usually rely on your supervisor for guidance, and they often give you problems to work on, broken up into manageable chunks. This was the first time that I really took the lead in a project, and I ended up being the one to give specific tasks to my coauthors to complete. This experience gave me a lot of confidence and made me certain that I would like to remain in academia.”

And how did you decide to apply for the Simons fellowship that you now have?

“I was a bit doubtful about the postdoc phase. Most postdocs I knew were often stressed by their uncertain and temporary positions. This was not something I wanted for myself. I therefore decided to only apply to two positions that seemed great to me. If they both would not work out, I would leave academia. One of the positions was here as a Simons fellow at the University of Columbia. Someone I knew asked if they could nominate me for it, and of course I said yes. In the end, I even got offered both positions I applied for, so that made me more certain that I

am welcome in the research environment. As a fellow, I have a three year position with a grant and not many obligations. This makes the postdoc experience much more pleasant.”

What do you like the most about doing research?

“I like the fact that I am sometimes the first person who finds the solution to a particular problem, the first person ever to know a particular fact. This is a very special experience, and I can be happy about it for weeks. I also really like the fact that I can sit in my office, and just think about a problem for a while without time pressure.”

And what do you like the least?

“The main thing I do not like about academia is the uncertainty in being an early-career researcher. After your PhD it is nearly mandatory to go abroad for a temporary postdoc. Still this upheaval of your life gives you no assurance that you can stay in academia for the long term. This uncertainty can be stressful, because you always have to think about where to apply next, and wonder when you will ever have a permanent contract, and are away from your local community and loved ones. Many people say that experience abroad is important, but I believe this does not have to come with a lack of job security. If universities want their researchers to have international experience, why can they not offer permanent positions with the option to go abroad? This would make early-career academia less stressful and probably more productive. After all, you can focus better on your research when you are not stressed about job insecurity.”

Thomas F. Bloom

Mathematical Institute
University of Oxford
bloom@maths.ox.ac.uk

Christian Elsholtz

Institut für Analysis und Zahlentheorie
Technische Universität Graz
elsholtz@math.tugraz.at

Research

Egyptian fractions

Egyptian fractions are one of the oldest parts of number theory, yet there are many fascinating questions that continue to puzzle mathematicians today. In this article Thomas Bloom of the University of Oxford and Christian Elsholtz of the Technische Universität Graz describe a number of aspects on this subject that have received considerable interest over the last decades.

Scribes of Ancient Egypt had an unusual method of writing fractions: they were always expressed as a sum of distinct unit fractions $\frac{1}{x_i}$ (with the exception of $\frac{2}{3}$ and $\frac{3}{4}$) — for example, $\frac{2}{15}$ would instead be written as $\frac{1}{10} + \frac{1}{30}$. The Papyrus Rhind [32], written over 3500 years ago, contains a table showing how to do this for the most frequently used fractions $\frac{2}{n}$. It is unclear precisely why the Egyptians wrote fractions in this form, which seems quite complicated for us, but the study of the equation

$$\frac{m}{n} = \frac{1}{x_1} + \dots + \frac{1}{x_k} \quad (1)$$

with $m, n, x_1, \dots, x_k$ positive integers, where in some cases k is considered as fixed and in other cases k may vary, has been very fruitful from a modern number theoretic point of view. Equations with integer or rational variables are called ‘Diophantine equations’. Another example of a Diophantine equation is the Pythagorean triple $x^2 + y^2 = z^2$, whose history goes back to Babylonian clay tablets, and is given a parametric solution in Euclid’s *Elements*.

The study of solutions to (1), so-called ‘Egyptian fractions’, has an important caveat when compared to the study of

general Diophantine equations: we usually limit our attention to those solutions with $x_1 < x_2 < \dots < x_k$ — in particular, we do not allow equality between the x_i , and always count solutions as ordered tuples. For the study of Egyptian fractions this is no loss of generality: it has been observed by Takenouchi [43] that a fraction which can be written as a sum of k unit fractions

with repeated fractions can also be written as a sum of k unit fractions with distinct fractions. To see this, one can replace any multiple occurrence of some x_i by means of the two formulae below, depending on whether x_i is odd or even:

$$\frac{1}{2t} + \frac{1}{2t} = \frac{1}{t+1} + \frac{1}{t(t+1)}$$

and

$$\frac{1}{2t+1} + \frac{1}{2t+1} = \frac{1}{t+1} + \frac{1}{(t+1)(2t+1)}.$$

Note that the sum of the denominators increases by this replacement. One possibly has to repeat this, but as the sum of the



Part of the Papyrus Rhind, written by Ahmes, an ancient Egyptian scribe.

denominators increases, and as there is only a bounded number of ways to write a fraction as a sum of k unit fractions (as we will show later on), this is a bounded process which eventually stops with k distinct unit fractions.

There are some even easier observations about Egyptian fractions:

- A fraction $\frac{m}{n}$ which has a solution of (1) with fixed k also has a solution with every $k' \geq k$.
- If $\frac{m}{n}$ has a solution of the form (1) with fixed k , then $\frac{m}{n!}$ also has such a solution. When m and k are fixed one therefore often concentrates on prime values n .

The most basic question concerning Egyptian fractions is, given some rational $\frac{m}{n} \in (0, 1]$, does (1) always have a solution (for some $k \geq 1$)? The answer is yes, and in fact a greedy algorithm can be used to construct a solution: let $x_1 \geq 1$ be the smallest positive integer such that $\frac{1}{x_1} \leq \frac{m}{n}$. It follows that $\frac{m}{n} - \frac{1}{x_1} = \frac{m'}{n'} < \frac{1}{x_1}$ where $m' = mx_1 - n < m$. While $\frac{m'}{n'} > 0$ we may repeat this process, and since the numerator decreases at each stage this must terminate with a solution to (1). In particular, this greedy algorithm shows that $\frac{m}{n}$ can always be written as the sum of at most m distinct unit fractions.

For example, when applied to $\frac{4}{17}$ this algorithm produces the representation

$$\frac{4}{17} = \frac{1}{5} + \frac{1}{29} + \frac{1}{1233} + \frac{1}{3039345}.$$

The solution found by the greedy algorithm is not necessarily the simplest one, in either the sizes of the denominators or the number of summands. For example, $\frac{4}{17}$ may also be written as

$$\frac{4}{17} = \frac{1}{6} + \frac{1}{17} + \frac{1}{102}.$$

The greedy approach is one of a variety of different algorithms for producing a solution to (1), each with its own advantages and disadvantages. For a survey on the rich literature concerning algorithmic aspects we refer the reader to [18].

In this survey we will consider more theoretical questions, and focus on a number of aspects that have received considerable interest over the last decades. We have endeavoured to give, where possible, some indication of the ideas and methods used, and hence have sacrificed some breadth for depth. The topics considered here do not cover the full range of results and open

problems in this fascinating area, and the reader is encouraged to explore further in the surveys of Erdős and Graham [20, 21], the open problems collection of Guy [22, Section D11], and the survey of Schinzel [37].

The Erdős–Straus conjecture

The greedy algorithm guarantees that $\frac{m}{n}$ can always be written as the sum of at most m distinct unit fractions. As the example for $\frac{4}{17}$ above shows, however, this is not necessarily optimal, and one can ask, for any fraction $\frac{m}{n}$, what is the minimal k such that (1) has a solution.

Sums of two unit fractions

One certainly needs at least two unit fractions to represent $\frac{2}{n}$ (when n is odd), and it is easy to check that one needs at least three unit fractions to represent $\frac{3}{p}$, where p is a prime such that $p \equiv 1 \pmod{3}$.

In general, Stewart [41] has shown that a reduced fraction $\frac{m}{n}$ is a sum of two unit fractions if and only if there are two coprime divisors n_1, n_2 of n such that m divides $n_1 + n_2$.

In particular, when applied to $m = 4$, this implies that $\frac{4}{n}$ is the sum of two unit fractions for almost all n : Stewart's criterion implies that if $\frac{4}{n}$ is not the sum of two unit fractions then all prime factors of n are $1 \pmod{4}$, and the number of such integers $n \leq N$ is asymptotically $c \frac{N}{\sqrt{\log N}} = o(N)$, for some constant $c > 0$. In fact, for every m a similar but more complicated analysis shows that the number

of integers $n \leq N$ such that $\frac{m}{n}$ is not the sum of two unit fractions is asymptotically $c_m \frac{N(\log \log N)^{\beta_m}}{(\log N)^{\alpha_m}} = O\left(\frac{N}{\sqrt{\log N}}\right)$, for some constants c_m, α_m, β_m — see [11] for details.

In particular, once we have fixed m , asymptotically almost all fractions with numerator m are the sum of two unit fractions. The fact that we have fixed the numerator is vital here: for any fixed $k \geq 1$ the set of rationals which can be expressed as sum of k unit fractions is nowhere dense [40], except at 0, so the picture changes considerably when not fixing the value m .

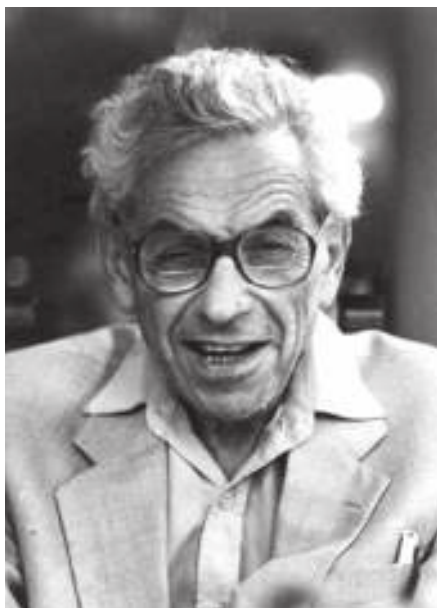
Sums of three unit fractions

When $m \leq 3$, the greedy algorithm produces a solution to (1) with $k \leq 3$. When $m = 4$ the greedy algorithm may require four unit fractions, as we have seen above. It is believed, however, that for all $n \geq 1$ this can be improved, and $\frac{4}{n}$ can be written as the sum of three unit fractions. This is perhaps the most notorious open problem concerning Egyptian fractions.

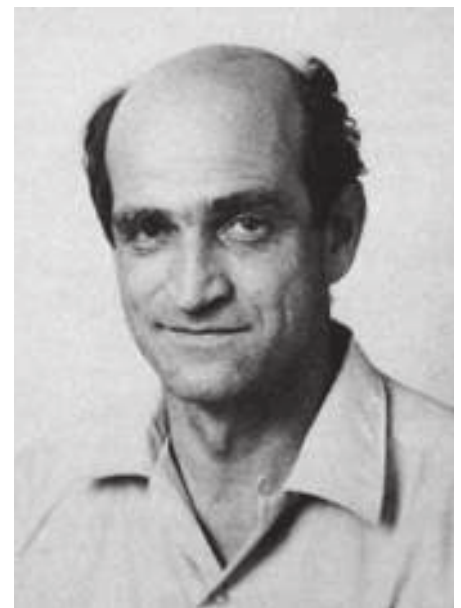
Conjecture 1 (Erdős–Straus [19]). *For every $n \geq 2$ there exist positive integers x, y, z such that*

$$\frac{4}{n} = \frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{1}{z}. \quad (2)$$

This conjecture appeared in a 1950 paper of Erdős [19], attributed to himself and Ernst G. Straus. It is unknown when the conjecture was originally made. Another reference is in a paper of Obláth [31],



Paul Erdős



Ernst G. Straus

submitted in 1948, who mentions it as a conjecture of Erdős, and solved it for small integers. (Some webpages, such as Wikipedia, and a paper by Graham [21] seem to suggest that Obláth made this conjecture independently. This is not the case, as Obláth's paper clearly attributes it to Erdős.) When the second author asked Erdős in 1996 how he came up with the conjecture the answer was that this is the first interesting case.

Although $m = 4$ is the first non-trivial case, it is believed that a similar phenomenon holds for any $m \geq 4$ (excluding finitely many exceptions). The analogous conjecture with numerator 5 is due to Sierpiński [40], and the general form was conjectured by Schinzel (also in [40]).

Conjecture (Schinzel [36]). *For every $m \geq 4$ there exists a number N_m such that, for every $n \geq N_m$, there exist positive integers x, y, z such that*

$$\frac{m}{n} = \frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{1}{z}.$$

We note that if (2) is soluble for n it is trivially also soluble for all multiples of n . In particular, in exploring the Erdős–Straus conjecture it suffices to concentrate on prime values of n .

The Erdős–Straus conjecture has been computationally verified up to 10^{17} [34]. It is possible to prove the Erdős–Straus conjecture for many congruence classes via elementary means.

The key observation is that, for any $m \equiv 3 \pmod{4}$, if there are integers a, c, d such that $4acd - 1 = m$ and $n \equiv -\frac{a}{c} \pmod{m}$, then (2) is solvable. Indeed, if $cn + a = (4acd - 1)b$, then dividing by $abcdn$ shows that

$$\frac{4}{n} = \frac{1}{abd} + \frac{1}{acd n} + \frac{1}{bcd n}.$$

This observation allows one to verify the Erdős–Straus conjecture for many congruence classes immediately. For example, modulo 47 we could take $(a, c, d) = (1, 6, 2)$, so that any $n \equiv -8 \pmod{47}$ satisfies the conjecture, and in fact we can write $\frac{4}{47k-8}$ as

$$\frac{1}{(6k-1)2} + \frac{1}{12(47k-8)} + \frac{1}{(6k-1)12(47k-8)}.$$

We could instead take $(a, c, d) = (1, 2, 6)$, thereby verifying the conjecture for $n \equiv -24 \pmod{47}$, or $(a, c, d) = (2, 3, 2)$, verifying the conjecture for $n \equiv -32 \pmod{47}$, and so on. Varying over all 18 ways of writing

$12 = acd$ we find 13 distinct congruence classes modulo 47 for which the Erdős–Straus conjecture is true. In general, the number of such ‘solved’ congruence classes modulo $4t-1$ essentially depends on $d_3(t)$, the number of ways to write t as a product of three positive integers, which on average grows like $\approx (\log t)^2$.

Using similar reasoning, one can quickly show that modulo 840 only the congruence classes 1, 49, 121, 169, 289, 361 (all squares!) are not generally solved (for details see [28]), and modulo 120120 there is corresponding work by Terzi [44].

If we take $a = c = 1$ then the above shows that modulo all integers of the shape $4d-1$ the congruence class -1 is soluble. Any simple sieve approach (such as Brun’s sieve) can then be used to prove that almost all integers $n \leq N$ satisfy the Erdős–Straus conjecture.

A much more sophisticated version by Vaughan [45] combines the above remark that the number of soluble congruence classes modulo primes is described by the divisor function d_3 with the large sieve and proves that there are at most $N \exp(-c(\log N)^{2/3})$ exceptions $n \in [1, N]$, for some absolute constant $c > 0$. (To estimate the number of soluble congruence classes correctly, one needs both the Bombieri–Vinogradov and the Brun–Titchmarsh theorem, which guarantee that on average prime numbers are relatively well distributed in congruence classes.)

Arguing heuristically, the number of soluble congruence classes is so large that all sufficiently large integers should be covered by at least one, giving a compelling heuristic argument that the Erdős–Straus conjecture holds, at least for all sufficiently large n . More precisely, one could argue as follows: since the average value of $d_3(m)$ is $\approx (\log m)^2$, for any prime $p \leq N$ congruent to $-1 \pmod{4}$ we expect to find on average $\approx (\log p)^2$ many congruence classes modulo p for which the Erdős–Straus conjecture holds. Therefore, assuming independence between these classes for distinct primes, the ‘probability’ that any n fails the Erdős–Straus conjecture is, using standard prime number estimates,

$$\begin{aligned} &\ll \prod_{\substack{p \leq n \\ p \equiv -1 \pmod{4}}} \left(1 - \frac{d_3((p+1)/4)}{p}\right) \\ &\approx e^{-\Omega((\log n)^2)}. \end{aligned}$$

(Here we use the Vinogradov notation $f \ll g$ to mean $f = O(g)$.) Since $\sum_{n \geq 1} e^{-c(\log n)^2}$ converges, this probabilistic heuristic suggests there are at most finitely many exceptions to the Erdős–Straus conjecture. (Indeed, since this converges very rapidly, and the conjecture has already been confirmed up to 10^{17} , this strongly suggests the conjecture holds for all n .)

Some congruence classes are easier than others for the Erdős–Straus conjecture. For example, for $n \equiv 3 \pmod{4}$ the fraction $\frac{4}{n}$ can even be represented by 2 unit fractions, $\frac{4}{4t+3} = \frac{1}{t+1} + \frac{1}{(t+1)(4t+3)}$, and for $n \equiv 5 \pmod{8}$ it can be represented by three unit fractions $\frac{4}{8t+5} = \frac{1}{2(t+1)} + \frac{1}{(t+1)(8t+5)} + \frac{1}{2(t+1)(8t+5)}$. It can be shown, however, that there are some congruence classes for which there is no such explicit formula. For example, Schinzel [38] proved this is the case for all quadratic residue congruence classes. In particular, there is no such formula for $n = 4t+1$.

Although there are some congruence classes for which we cannot solve the Erdős–Straus conjecture in such an explicit fashion, there are some congruence classes (as discussed above) for which we are able to easily verify the conjecture. To establish the conjecture for all primes p (and hence all integers n) it therefore suffices to show that these ‘good’ congruence classes cover all primes. (For example, although 61 is of the form $4t+1$, for which we have no general solution, it is also of the form $7t-2$, for which we have the general solution $\frac{4}{7t-2} = \frac{1}{2t} + \frac{1}{2(7t-2)} + \frac{1}{t(7t-2)}$.) This is a classical observation. It is less widely known that in fact this covering property is equivalent to the Erdős–Straus conjecture.

Theorem 1. *The Erdős–Straus conjecture is equivalent to the statement that all primes are in at least one of the following congruence classes:*

$$-\frac{a}{c} \pmod{4acd-1}$$

for some $a, c, d \geq 1$, or

$$-\frac{4c^2d+1}{k} \pmod{4cd}$$

for some $c, d, k \geq 1$ with $k \mid 4c^2d+1$.

(Similar statements can be found in Nakayama [29], Rosati [33], and Mordell [28].)

Proof. We first show that the covering statement is sufficient for the Erdős–Straus conjecture to hold. The case $p \equiv -\frac{a}{c}$

$(\text{mod } 4acd - 1)$ has already been discussed above. If $k \mid 4c^2d + 1$ and $p \equiv -\frac{4c^2d+1}{k} \pmod{4cd}$ then there exists $a \geq 1$ such that $p = 4acd - \frac{4c^2d+1}{k}$. Therefore $kp + 1 = 4cd(ak - c)$ and an elementary rearrangement shows that

$$\frac{4}{p} = \frac{1}{ad(ak-c)} + \frac{1}{acd} + \frac{1}{(ak-c)cdp}.$$

Thus the Erdős–Straus conjecture holds for all primes p (and hence for all integers n) if these congruence classes cover all primes.

We now argue that the covering statement is necessary. Suppose then that the Erdős–Straus conjecture holds, let p be some prime, and let $\frac{4}{p} = \frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{1}{z}$ with $x \leq y \leq z$, so that $4xyz = p(xy + yz + xz)$. Note that $x < p$, and hence $p \nmid x$. In fact one can show via an elementary argument, considering greatest common divisors, that there must exist integers $a, b, c, d \geq 1$ such that either

1. $x = abd$, $y = acdp$ and $z = bcdp$, or
2. $x = abd$, $y = acd$ and $z = bcdp$.

In the first case we have $4abcdp^2 = p(ap + cp^2 + bp)$ whence $4abcd = a + b + cp$ and so $p \equiv -\frac{a}{c} \pmod{4acd - 1}$, and in the second case we have $4abcdp = p(a + cp + bp)$, whence $4abcd = a + (b + c)p$. In particular a divides $b + c$, say $b + c = ak$, and so

$$kp + 1 = 4cd(ak - c) = 4akcd - 4c^2d$$

whence $k \mid 4c^2d + 1$ and $p \equiv -\frac{4c^2d+1}{k} \pmod{4cd}$. Thus p belongs to at least one of the required congruence classes as claimed. $\square$

Recently Bright and Loughran [5] have studied the Erdős–Straus conjecture using tools from modern algebraic geometry, in particular showing that there is no Brauer–Manin obstruction to the existence of solutions to (2).

Counting solutions

For any existence problem there is a corresponding counting problem. Let $f(n)$ count how many representations $\frac{4}{n}$ has as the sum of three distinct unit fractions, so that the Erdős–Straus conjecture is the statement that $f(n) > 0$ for $n \geq 2$ (and is equivalent to the statement that $f(p) > 0$ for all primes $p \geq 2$).

Elsholtz and Tao [17] have shown that

$$\sum_{p \leq N} f(p) = N(\log N)^{2+o(1)},$$

where the sum is over the primes $p \in [1, N]$.

As the number of such primes is asymptotically $\frac{N}{\log N}$, one can deduce that, on average, $f(p) = (\log p)^{3+o(1)}$. Elsholtz and Planitzer [15] proved that for almost all integers $n \leq N$

$$f(n) \geq (\log n)^{\log 6 + o(1)}.$$

(Note that $\log 6 \approx 1.79$.) Moreover for infinitely many n the number of solutions is much larger, namely $f(n) \geq \exp((\log 6 + o(1)) \frac{\log n}{\log \log n})$. This is larger than one might expect at first sight, and improves upon results of Elsholtz and Tao [17]. The crucial idea is to study those n consisting of many small primes, where one can choose many divisors d of n such that $\frac{4}{n} - \frac{1}{d}$ still has very many solutions as a sum of two unit fractions.

A corresponding bound is also known even when we restrict to primes: all reduced congruence classes $e \pmod{f}$ contain primes that have many solutions, at least $\exp(c_f \frac{\log p}{\log \log p})$ for some constant $c_f > 0$.

Furthermore, Elsholtz and Tao [17] established the pointwise upper bound $f(p) \leq p^{\frac{3}{5}+o(1)}$ for primes. This was generalized by Elsholtz and Planitzer [15] to composite denominators: $f(n) \leq n^{\frac{3}{5}+o(1)}$. It seems possible that a much better bound of $O_\epsilon(n^\epsilon)$ holds.

Bounding the number of fractions required

As we have already observed, the greedy algorithm implies that any $\frac{m}{n} \in (0, 1)$ is the sum of at most m distinct unit fractions, and Schinzel's conjecture implies that in fact three unit fractions suffice, assuming n is sufficiently large compared to m .

What if m is large compared to n ? The number of fractions required may grow with n : for example, an Egyptian fraction decomposition of $\frac{n-1}{n}$ requires $\Omega(\log \log n)$ distinct unit fractions. (This follows from the bounds given in the section ‘Counting solutions to $1 = \frac{1}{x_1} + \dots + \frac{1}{x_r}$ ’.) The greedy algorithm shows that $n-1$ unit fractions always suffice, but much better bounds are known.

The proofs of all reasonable upper bounds follow a similar scheme. Suppose we have an increasing sequence $N_1 < N_2 < \dots$ of positive integers such that any $1 < n < N_k$ is the sum of at most $F(N_{k-1})$ distinct divisors of N_k , for some increasing function F . The relevance of such a sequence, as we will now show, is that it implies that any $\frac{m}{n} \in (0, 1)$ can be written as the sum of at most $2F(n)$ distinct unit fractions.

To see this, given $\frac{m}{n} \in (0, 1)$ choose k such that $N_{k-1} < n \leq N_k$, and let $l < N_k$ be such that $\frac{l}{N_k} \leq \frac{m}{n} < \frac{l+1}{N_k}$, whence $0 \leq mN_k - nl < n$. Writing both $mN_k - nl$ and l as the sum of at most $F(N_{k-1}) \leq F(n)$ distinct divisors of N_k and using the identity

$$\frac{m}{n} = \frac{mN_k - nl}{nN_k} + \frac{l}{N_k}$$

we obtain $\frac{m}{n}$ as the sum of at most $2F(n)$ distinct unit fractions as claimed.

A trivial example of such a sequence is to take $N_k = 2^k$, which allows for $F(n) = O(\log n)$ (already a vast improvement over the $O(n)$ delivered by the greedy algorithm). Erdős [19] observed that a more efficient choice is to take N_k to be the product of the first k primes, which allows for $F(n) = O(\log n / \log \log n)$ instead. The best-known construction to date is due to Vose [47], who constructed an explicit sequence N_k with $F(n) = O(\sqrt{\log n})$, yielding the following result.

Theorem 2 (Vose [47]). *Any fraction $\frac{m}{n} \in (0, 1)$ can be written as the sum of $O(\sqrt{\log n})$ many distinct unit fractions.*

Erdős [19] conjectured that in fact any $\frac{m}{n} \in (0, 1)$ can be written as the sum of $O(\log \log n)$ many distinct unit fractions, which would be the best possible as the example of $\frac{n-1}{n}$ shows.

Parametric solutions of $\frac{m}{n} = \frac{1}{x_1} + \dots + \frac{1}{x_k}$
Let $E_{m,k}(N)$ count those $n \leq N$ such that $\frac{m}{n}$ is not the sum of k unit fractions. As mentioned in the section ‘The Erdős–Straus conjecture’, Vaughan [45] showed that $E_{4,3}(N) \leq N \exp(-c(\log N)^{2/3})$, for some positive c . This has been generalised by Elsholtz.

Theorem 3 (Elsholtz [10]). *Let $m > k \geq 3$ be positive integers. Then*

$$E_{m,k}(N) \leq N \exp(-c_{m,k}(\log N)^{1-\frac{1}{2^{k-1}-1}})$$

for some absolute constant $c_{m,k} > 0$.

Note that $m = 4$ and $k = 3$ recovers Vaughan's bound. Viola [46] previously established a similar bound with $\frac{1}{2^{k-1}-1}$ replaced by $\frac{1}{k-1}$, which Shen [39] had improved to $\frac{1}{k}$.

A key idea in the proof of Theorem 3, and a useful tool in general for studying Egyptian fractions, is the realisation that solutions to the equation $\frac{m}{n} = \frac{1}{x_1} + \dots + \frac{1}{x_k}$

can naturally be described by $2^k - 1$ variables. The earliest reference containing this idea, which we are aware of, is Dedekind [9]. A detailed explanation of the general case is in [11], and shorter explanations are in [10, 16, 17].

For concreteness, we will explain the idea first when $k = 3$, and then when $k = 4$. Suppose that $\frac{m}{n} = \frac{1}{x_1} + \frac{1}{x_2} + \frac{1}{x_3}$. Let $t_{123} = \gcd(x_1, x_2, x_3)$, $t_{12} = \gcd(x_1, x_2) / t_{123}$, and similarly for t_{13} and t_{23} . Note that t_{12}, t_{13}, t_{23} are all coprime in pairs. It is elementary to check that $t_{12}t_{13}t_{23}$ divides x_1 , whence we can write $x_1 = t_{12}t_{13}t_{23}$, and similarly for x_2 and x_3 . It follows from the definition that t_1, t_2, t_3 are also all coprime in pairs, and also that $\gcd(t_1, t_{23}) = \gcd(t_2, t_{13}) = \gcd(t_3, t_{12}) = 1$.

Furthermore, if we write $\frac{m}{n}$ as

$$\frac{1}{t_1 t_{12} t_{13} t_{23}} + \frac{1}{t_2 t_{12} t_{23} t_{13}} + \frac{1}{t_3 t_{13} t_{23} t_{12}}$$

and multiply by common denominators we obtain

$$\begin{aligned} m t_1 t_2 t_3 t_{12} t_{13} t_{23} t_{123} \\ = n(t_1 t_2 t_{12} + t_1 t_3 t_{13} + t_2 t_3 t_{23}) \end{aligned}$$

and hence (assuming that $\gcd(m, n) = 1$) each t_i divides n . In particular, when n is prime, this leaves only the possibilities that the t_i are 1 or p . In other words, when n is prime, one has $7 - 3 = 4$ free parameters.

To further illustrate the idea, we now examine the case $k = 4$. Every quadruple of four positive integers (x_1, x_2, x_3, x_4) can be written as

$$\begin{aligned} x_1 &= t_1 t_{12} t_{13} t_{14} t_{123} t_{124} t_{134} t_{1234}, \\ x_2 &= t_2 t_{12} t_{23} t_{24} t_{123} t_{124} t_{234} t_{1234}, \\ x_3 &= t_3 t_{13} t_{23} t_{34} t_{123} t_{134} t_{234} t_{1234}, \\ x_4 &= t_4 t_{14} t_{24} t_{34} t_{124} t_{134} t_{234} t_{1234}, \end{aligned}$$

where

$$\begin{aligned} t_{1234} &= \gcd(x_1, x_2, x_3, x_4), \\ t_{123} &= \gcd(x_1, x_2, x_3) / t_{1234} \end{aligned}$$

(and similarly for other three indices), $t_{12} = \gcd(x_1, x_2) / (t_{1234} t_{123} t_{124})$, and so on. Crucially, any pair t_I, t_J with $I \not\subseteq J$ and $J \not\subseteq I$, for example t_{123}, t_{124} or t_1, t_{23} , must be coprime. Given a solution to $\frac{m}{n} = \frac{1}{x_1} + \frac{1}{x_2} + \frac{1}{x_3} + \frac{1}{x_4}$, multiplying by the common denominator as above, we see that when $n = p$ is prime, each t_i must be a divisor of p . In particular, the family of solutions is naturally described by $2^4 - 1 - 4 = 11$ free parameters. In general, with the sum of k unit fractions we have $2^k - k - 1$ free parameters.

We may now attempt a generalisation of Vaughan's argument, finding a large collection of congruence classes that attempt to cover most $n \leq N$. Crucially, the number of degrees of freedom when constructing these congruence classes grows exponentially in k , leading ultimately (after a great deal of technical difficulty and further sieve estimates) to Theorem 3. (For comparison, Viola [46] and Shen [39] used k and $k + 1$ free parameters respectively, resulting in their weaker bounds.)

For example, when $k = 4$, one can now solve the classes

$$\begin{aligned} (m t_{12} t_{23} t_{24} t_{123} t_{124} t_{234} t_{1234} - 1)r \\ - m t_{12} t_{123} t_{124} t_{234} (t_{12} t_{23} t_{123} + t_{12} t_{24} t_{124}). \end{aligned}$$

For comparison, in the case $k = 4$ Viola made use of the fact that one can solve the classes

$$(m t_{123} t_{124} t_{234} - 1)r - (t_{123} + t_{124}),$$

and Shen used

$$\begin{aligned} (m t_{123} t_{124} t_{234} t_{1234} - 1)r \\ - m t_{123} t_{124} t_{234} (t_{123} + t_{124}). \end{aligned}$$

When $k = 3$ the number of soluble congruence classes was described by the d_3 function; now when $k = 4$ it is described by the d_7 function. That is, modulo $q \equiv -1 \pmod{m}$ we obtain a soluble congruence class for each way of splitting $\frac{q+1}{m}$ into a product of 7 factors.

There is a complication when $k > 3$ (resulting in the final bound of Theorem 3 containing a $2^{k-1} - 1$ where one might expect $2^k - k - 2$), since the soluble congruence classes are now described by sums of products, rather than a single product as in Vaughan's argument. In particular it is much more difficult to prove that different congruence classes thus obtained are actually distinct.

The reader may wonder if such parametric solutions could be used more generally in the study of Diophantine equations. The answer is yes, in principle, but in practice this general approach often simplifies to a much easier one, as one can see with the Fermat equation $x^n + y^n = z^n$. Here one quickly sees that nothing is gained, as the variables can be assumed to be coprime.

Counting solutions to $1 = \frac{1}{x_1} + \dots + \frac{1}{x_r}$

We now turn our attention from the study of (1) for fixed small k and varying m/n , and consider the opposing situation in which we fix $\frac{m}{n} = 1$ and study the solutions

to

$$1 = \frac{1}{x_1} + \dots + \frac{1}{x_k} \quad (3)$$

as k varies. An easy inductive argument shows that the number of solutions to (3) for fixed $k \geq 1$ is finite. We now present an elementary argument which gives an explicit upper bound as follows (for more details and slight improvements see [35]).

Fix some solution to (3), ordered so that $x_1 \leq \dots \leq x_k$. For $0 \leq m < k$ define $y_m \in \mathbb{Q}$ by

$$1 - \sum_{1 \leq i \leq m} \frac{1}{x_i} = \frac{1}{y_m}, \quad (4)$$

so that $y_0 = 1$ and $y_{k-1} = x_k$, and for $1 \leq m < k - 1$ we have $y_m < x_{m+1}$. By definition, $\frac{1}{y_{m+1}} = \frac{1}{y_m} - \frac{1}{x_{m+1}}$, whence $y_{m+1} \leq y_m(y_m + 1)$ for all $0 \leq m < k - 1$. In particular, if $(u_i)_{i \geq 1}$ is the sequence defined by $u_1 = 1$ and $u_{i+1} = u_i(u_i + 1)$, then $y_m \leq u_{m+1}$ for $0 \leq m < k$. Since the left-hand side of (4) is at most $\frac{k}{x_{m+1}}$ we deduce that, for all $1 \leq i \leq k$, we have $x_i \leq k u_i$. The sequence $u_n^{2^{-n}}$ is strictly increasing and tends to $c_0 = \lim_{n \rightarrow \infty} u_n^{2^{-n}} = 1.26408\dots$, the so-called Vardi constant, and hence $x_i \leq k c_0^{2^i}$. It follows immediately that the number of solutions to (3) is at most

$$k^k \cdot c_0^{2^k - 1} = c_0^{2^k(1+o(1))}.$$

In particular, this grows doubly exponentially with k . It is surprisingly difficult to come up with considerably better upper bounds. Small improvements are possible, by estimating the number of the first $k - 2$, $k - 3$ or $k - 4$ values of x_i trivially as above, but using non-trivial upper bounds for the number of ways of writing a fixed fraction as a sum of 2, 3 or 4 unit fractions, respectively. The best upper bound currently known is still doubly exponential in k , and is due to Elsholtz and Planitzer [16]. They show (using $k - 4$ and 4 fractions) that the number of solutions to (3) is at most

$$c_0^{2^k(\frac{1}{5} + o(1))}.$$

Although the upper bounds are all doubly exponential in k , it was an open problem for some time whether this was the true order of magnitude of the number of solutions to (3). That the number of solutions is indeed increasing with (essentially) doubly exponential growth was shown by Kon-yagin [25], who proved that the number of solutions to (3) is at least

$$2^{c \frac{k}{\log k}}$$

for some constant $c > 0$. We will now

sketch a variant of Konyagin's construction, which yields this lower bound for an increasing sequence of k , even if we further ask that all denominators are odd. For full details see [12, 25].

We make crucial use of fractions of the shape $\frac{1}{2^n-1}$ with highly composite n . The important feature of these fractions is that the denominator 2^n-1 has many divisors, and for every divisor $m \mid 2^n-1$ there is a decomposition of $\frac{1}{2^n-1}$ as

$$\frac{1}{2^n-1+m} + \frac{1}{2^n-1+(2^n-1)^2/m}.$$

This means that if we can find at least one representation of 1 as the sum of $k-1$ distinct unit fractions, one of which is $\frac{1}{2^n-1}$, then there are at least $d(2^n-1)-2k$ many ways to write 1 as the sum of k distinct unit fractions. (Here the $-2k$ is to avoid counting representations with repeated denominators.) We can write $\frac{1}{2^n-1}$ as both

$$\frac{1}{2^{2n}-1} + \left(\frac{1}{2^{2n}} + \frac{1}{2^{2n}(2^{2n}-1)} + \frac{1}{2^n+1} \right)$$

and

$$\frac{1}{2^{n+1}-1} + \left(\frac{1}{(2^n-1)(2^{n+1}-1)} + \frac{1}{2^{n+1}} + \frac{1}{2^{n+1}(2^{n+1}-1)} \right).$$

We may use these identities to find a solution to (3) containing $\frac{1}{2^n-1}$ for any n with $k = O(\log n)$. To do so one writes the number n in binary and applies a combination of the two identities, to increase the exponent by one, or double it, respectively. For example the number

$$29 = 16 + 8 + 4 + 1 = 11101_2$$

can be reached from 1 as follows (in binary):

$$0, 1, 10, 11, 110, 111, 1110, 11100, 11101.$$

Thus, one can construct a decomposition of 1 into unit fractions including $\frac{1}{2^n-1}$ with $k = O(\log n)$ fractions.

We have therefore shown the existence of $\gg d(2^n-1)$ many solutions to (3) in $k = O(\log n)$ many variables. If n is the product of the first r primes then $r \sim \frac{\log n}{\log \log n} \approx \frac{k}{\log k}$ and it can be shown (see [12, Lemma 2.1]) that 2^n-1 has many prime factors: $\omega(2^n-1) \geq 2^r-6$. It follows that

$$d(2^n-1) \geq 2^{\omega(2^n-1)} \geq 2^{2^r-6}.$$

Combining these observations we have found $\geq 2^{c(k/\log k)}$ many distinct solutions to (3) with k variables as required.

Solutions to $1 = \frac{1}{x_1} + \dots + \frac{1}{x_k}$ with restricted denominators

We now turn our attention from counting to an existence problem: what restrictions can we impose on the denominators in (3) while still being guaranteed of finding a solution?

Restrictions on the sizes of the denominators

The first natural question is: does there exist a solution to (3) such that the denominators are all large? Or all small? There are various ways to make this question precise. Henceforth we fix some $k \geq 1$ and order a solution to (3) as $x_1 < \dots < x_k$.

We may first ask: how small can the largest denominator x_k be? Erdős observed that since

$$1 \geq \sum_{0 \leq j < k} \frac{1}{x_k - j} \sim \log \left(\frac{x_k}{x_k - k} \right),$$

we must have

$$x_k \geq \left(1 + \frac{1}{e-1} + o(1) \right) k,$$

and asked whether this was best possible. This was proved by Martin.

Theorem 4 (Martin [27]). *For any $k \geq 1$ there is a solution to (3) such that*

$$1 < x_1 < \dots < x_k \leq \left(\frac{e}{e-1} + o_{k \rightarrow \infty}(1) \right) k.$$

We now ask, on the other hand: how large can the smallest denominator x_1 be? By a similar argument to the above, we must have $x_1 \leq \left(\frac{1}{e-1} + o(1) \right) k$, and Erdős asked whether this was best possible. This was proved, at least for infinitely many k , by Croot. In fact, Croot proves the following stronger result.

Theorem 5 (Croot [7]). *For any $N > 1$ there exists some $k \geq 1$ and a solution to (3) such that*

$$N < x_1 < \dots < x_k \leq (e + o_{N \rightarrow \infty}(1))N.$$

Notice that since the sum of all reciprocals in $(N, (e + o(1))N)$ is $1 + o(1)$, we must have $k = (e - 1 + o(1))N$. It immediately follows that there are infinitely many k and an accompanying solution to (3) with $x_1 \geq \left(\frac{1}{e-1} + o(1) \right) k$, as required. (Note also that Croot's result implies Martin's for infinitely many k .) Both Croot's and Martin's results are more general than we have

stated here, concerning decompositions of arbitrary rationals, and we refer to [7, 27] for more details.

Restrictions to arbitrary sets

Of course, one may impose many more restrictions on the denominators than simple size bounds. Finding a solution to (3) is a challenge even when the restrictions are very mild: for example, it is a non-trivial task to manually find a representation of 1 as the sum of distinct unit fractions with all denominators odd (and > 1).

There is one trivial obstruction that prevents a solution to (3) within small sets: certainly no solution can exist with denominators in A if $\sum_{n \in A} \frac{1}{n} < 1$. Thus, for example, the set of integers in the interval $[N, 2N]$ contains no solution to (3), no matter how large N is. On the other hand, Theorem 5 shows that, for intervals, this trivial obstruction is the only one, and that the set of integers in $[N, (e + o(1))N]$ must contain a solution for all large N .

If we consider restricting the denominators to some (infinite) arithmetic progression, there are no longer any obvious obstructions. Indeed, we may find a solution to (3) within any infinite arithmetic progression, as shown by van Albada and van Lint [1]. Taken together, these positive results about finding solutions to (3) in short intervals and arbitrary congruence classes can be seen as showing that there are no 'local' obstructions to the existence of a solution to (3).

It is therefore natural to conjecture, as Erdős and Graham did in [20], that the equation (3) enjoys a Ramsey-type property: whenever the integers are finitely coloured, there exists a monochromatic solution to (3). This was proved by Croot.

Theorem 6 (Croot [8]). *For any $r \geq 1$, if the integers are arbitrarily coloured with r many colours, then there must be a monochromatic solution to*

$$1 = \frac{1}{x_1} + \dots + \frac{1}{x_k}$$

with $1 < x_1 < \dots < x_k$.

In fact, Croot proves a strong quantitative version: there exists a constant $C > 1$ such that, for any $r \geq 1$, if the integers in $[2, C^r]$ are coloured with r many colours then there must exist a monochromatic solution to (3). This exponential behaviour is the best pos-

sible, since using a greedy approach one can r -colour the integers in $[2, e^{(1+o(1))r}]$ so that the sum of all reciprocals in each colour class will be less than one, and hence certainly there can be no solution to (1). It is an interesting and open problem to improve the value of Croot's constant C . (In [8] Croot shows that $C = e^{167000}$ is sufficient for large r .) For $r = 2$ colours a PhD thesis by Andreas Hipler [23] proves that the interval $[2, 208]$ has this property, and that 208 is sharp. The proof involved nontrivial computer calculations, as one has to study many distinct colourings of certain crucial integers in this interval.

If we colour the integers in r many colours then at least one colour class has upper density $\geq \frac{1}{r}$. (We recall that the upper density of $A \subset \mathbb{N}$ is defined as $\limsup_{N \rightarrow \infty} \frac{|A \cap [1, N]|}{N}$.) The following result, which was conjectured by Erdős and Graham (for example in [21]) and Sun [42], is therefore a natural strengthening of Croot's colouring result.

Theorem 7 (Bloom [4]). *Any subset of the integers with positive upper density contains a solution to*

$$1 = \frac{1}{x_1} + \dots + \frac{1}{x_k}$$

with $1 < x_1 < \dots < x_k$.

(The proof has now been formally computer-verified, using the Lean proof assistant, by Bloom and Mehta. The formal version of the proof can be accessed at <https://github.com/b-mehta/unit-fractions>.) The proof of Theorem 7 extends the method used by Croot to prove Theorem 6: a variant of the Hardy–Littlewood circle method, combined with an ingenious elementary combinatorial argument. Croot actually proves a density result for sufficiently ‘smooth’ integers: in particular, that any positive density set of integers A , satisfying the additional constraint that all prime factors of $n \in A$ are $\leq n^{\frac{1}{4}-o(1)}$, contains a solution to (3). This immediately implies Theorem 6, since any r -colouring of all integers must also r -colour all such smooth integers.

This is not sufficient for an unrestricted density result since, for example, the set of all n with a prime divisor $> n^{1/2}$ has positive density. The chief novelty of [4] is that it improves the technical strength of Croot's argument so that the smoothness

threshold of $\frac{1}{4} - o(1)$ is raised to $1 - o(1)$. This suffices to prove an unrestricted density result, since almost all integers n have no prime factors $> n^{1-o(1)}$.

A sketch of Croot's method

We now present a sketch of Croot's method and the proofs of Theorems 6 and 7. The actual proofs are quite technical, and the interested reader is referred to [8] and [4] for full details.

Suppose we are given some finite set of integers A such that

1. $A \subseteq [N, O(N)]$,
2. A is ‘ N^θ -smooth’, in the sense that all prime factors of $n \in A$ satisfy $p \leq N^\theta$,
3. $|A| \gg N$.

Our goal is to find some $S \subseteq A$ such that $\sum_{n \in S} \frac{1}{n} = 1$. We begin by noting that, combining properties (1) and (3) (with appropriate choices of constants), we may assume that $\sum_{n \in A} \frac{1}{n} \in (2 - o(1), 2)$ (after possibly discarding some elements of A). Since we then have $\sum_{n \in S} \frac{1}{n} < 2$ for all $S \subseteq A$, it suffices to find some non-empty $S \subseteq A$ with $\sum_{n \in S} \frac{1}{n} \in \mathbb{Z}$. This trivial recasting has the advantage that it naturally leads to the possibility of using exponential sums. In fact, if we let $P = \text{lcm}(A)$, then a simple exercise using orthogonality shows that the number of $S \subseteq A$ with $\sum_{n \in S} \frac{1}{n} \in \mathbb{Z}$ is exactly equal to

$$\frac{1}{P} \sum_{-\frac{P}{2} < r \leq \frac{P}{2}} \prod_{n \in A} \left(1 + e\left(\frac{r}{n}\right)\right), \quad (5)$$

where $e(x) = e^{2\pi i x}$. It suffices therefore to prove that (5) is ≥ 2 .

The $r = 0$ summand contributes exactly $2^{|A|}/P$, and elementary number theory shows that the N^θ -smoothness assumption implies $P = e^{O(N^\theta)}$, which is $2^{o(|A|)}$ provided $\theta \leq 1 - o(1)$. This ‘main term’ therefore contributes $2^{(1-o(1))|A|}$, which is much larger than we require. The contribution from other small r , those with $0 < |r| \leq \frac{N}{4}$, say, is harder to calculate exactly, but an elementary calculation shows that the sign of $\Re \prod_{n \in A} (1 + e(\frac{r}{n}))$ is $\cos(\pi r \sum_{n \in A} \frac{1}{n}) \prod_{n \in A} \cos(\frac{\pi r}{n})$. In particular, since $\sum_{n \in A} \frac{1}{n} \in (2 - o(1), 2)$, the contribution to (5) from all r with $0 < |r| \leq \frac{N}{4}$ is non-negative, and hence can be discarded in our quest for a lower bound.

In particular, to show that (5) is ≥ 2 as required, it suffices to show that whenever $\frac{N}{4} < |r| \leq \frac{P}{2}$, we have

$$\left| \prod_{n \in A} \left(1 + e\left(\frac{r}{n}\right)\right) \right| = o(2^{|A|}/P). \quad (6)$$

If $r \notin [-\frac{N}{8}, \frac{N}{8}] \pmod{n}$, then, writing $r_n \in [-\frac{n}{2}, \frac{n}{2}]$ for the integer such that $r \equiv r_n \pmod{n}$, we have $e(\frac{r}{n}) = e(\frac{r_n}{n}) = e(\frac{\xi}{c})$ for some $\xi \in (c, \frac{1}{2})$ (with $c > 0$ some absolute constant), and hence $|1 + e(\frac{r}{n})| \leq \frac{2}{c'}$ for some other absolute constant $c' > 1$. Since $P \leq e^{O(N^\theta)}$, to prove (6) it therefore suffices to find $\gg N^\theta$ many $n \in A$ such that $r \notin [-\frac{N}{8}, \frac{N}{8}] \pmod{n}$.

We may equivalently phrase this as saying that, if I is the interval of width $\frac{N}{4}$ centred at r , then there are $\gg N^\theta$ many $n \in A$ that do not divide any $x \in I$.

At this point we have left any mention of exponential sums (and indeed of unit fractions) far behind: Croot's method transforms the problem into a purely combinatorial question concerning the interaction between intervals and multiples of elements in A . Finding a satisfactory answer to this question is a subtle and difficult affair, however. The overall idea is that if there is some interval I which fails the requisite property, then one can construct an integer $x \in I$ with ‘too many’ divisors.

To explain this combinatorial procedure, we introduce a new ‘measure’ of sets of integers (depending on the fixed set A),

$$\mu(X) = \frac{1}{\log \log N} \sum_{p \in \mathcal{P}_A \cap X} \frac{1}{p},$$

where $\mathcal{P}_n$ is the set of primes dividing n , and $\mathcal{P}_X = \bigcup_{n \in X} \mathcal{P}_n$. It is also convenient to introduce the notation $A_q = \{n \in A : q \mid n\}$, for any integer $q \geq 1$. The three crucial facts about this measure μ are that

1. for any X , $\mu(X) \leq 1 + o(1)$,
2. for any x and q , if

$$|\{n \in A_q : n \mid x\}| \geq \frac{N}{q} (\log N)^{-o(1)},$$

then $\mu(\mathcal{P}_x) \geq e^{-1} - o(1)$, and

3. if $0 < |x_1 - x_2| \ll N$ then

$$\mu(\mathcal{P}_{x_1} \cup \mathcal{P}_{x_2}) = \mu(\mathcal{P}_{x_1}) + \mu(\mathcal{P}_{x_2}) + o(1).$$

Suppose now that there exists some interval I of width $\frac{N}{4}$ such that all but $o(N^\theta)$ many $n \in A$ divide some $x(n) \in I$. We will argue that there must exist some $x \in I$ divisible by *all* primes in $\mathcal{P}_A$, and hence divisible by $P = \text{lcm}(A)$, which is an immediate contradiction if, as in our application, I is an interval of width $\frac{N}{4}$ centred at some r with $\frac{N}{4} < |r| \leq \frac{P}{2}$.

Let $p \in \mathcal{P}_A$, and consider A_p — heuristically, we expect $|A_p| \approx \frac{|A|}{p} \gg \frac{N}{p}$, which we will assume henceforth. In particular, provided $\frac{N}{p} \gg N^\theta$, for almost all $n \in A_p$ there exists some $x(n) \in I$ divisible by n . In fact, after some divisor sleight of hand, one can ensure that there is some $x_p \in I$ which equals $x(n)$ for $\gg |A_p| (\log N)^{-o(1)}$ many $n \in A_p$. Therefore, by property (2) of μ above, we have $\mu(\mathcal{P}_{x_p}) \geq e^{-1} - o(1)$.

Therefore all $p \in \mathcal{P}_A$ have an associated $x_p \in I$ such that $\mathcal{P}_{x_p}$ has μ -weight at least $e^{-1} > \frac{1}{3}$. Combining properties (1) and (3) of μ it follows that there cannot be three distinct such $x_p \in I$. If all x_p are in fact identical, then we have found some $x \in I$ divisible by all $p \in \mathcal{P}$, and hence by P as required (we are assuming for simplicity that P is squarefree here). The only remaining possibility is that all x_p are one of two distinct $x, y \in I$. In this case, we may find some large subset $A' \subseteq A$, such that all $n \in A'$ divide one of either x or y , and we perform a similar iteration with A' replacing A .

The above analysis succeeds provided $\frac{N}{p} \gg N^\theta$ for all primes $p \in \mathcal{P}_A$. Since the N^θ -smooth hypothesis implies $p \leq N^\theta$, this in turn is guaranteed provided $\theta < \frac{1}{2}$, and hence we have proved (6). Therefore, assuming a smoothness threshold of $N^{\frac{1}{2}-o(1)}$, we have found some $S \subseteq A$ with $\sum_{n \in S} \frac{1}{n} = 1$, and obtain Croot's smooth density result. (Croot works with $\theta < \frac{1}{4}$ rather than $< \frac{1}{2}$ to ease some of the many technical difficulties we have ignored in this sketch, but in principle his method works up to any $\theta < \frac{1}{2}$.)

To prove an unrestricted density result such as Theorem 7, we need to raise this smoothness threshold to $\theta = 1 - o(1)$. The key idea of [4] is to give up on the strong pointwise bound (6), and instead only aim to prove an averaged version, which suffices for our purposes. We note that in fact the above combinatorial argument shows that, for any interval I of width $O(N)$, there exists some $x \in I$ divisible by every $p \in \mathcal{P}_A$ with the property that all but $o(\frac{N}{p})$ many $n \in A_p$ divide some $x \in I$. If there are many such p , then the ensuing bound on $|\prod_{n \in A} (1 + e(\frac{x}{n}))|$ is quite weak (particularly when some of the primes can be as large as $N^{1-o(1)}$), but on the other hand, there are not many possible values of r for which this can occur, since such r must be $O(N)$ -close to a fixed multiple of many primes simultaneously. On the other hand,

if there are few such p , then we cannot restrict r , but can recover a pointwise bound comparable to (6) in strength. Trading off the two gains, we are able to establish a version of (6) that holds on average, which is sufficient.

Applications

We conclude by mentioning some intriguing applications of Egyptian fractions to other areas of pure mathematics.

Finite group theory

One simple yet surprising application is within finite group theory. It is natural to ask what limits the number of conjugacy classes imposes on the underlying group. By considering Egyptian fractions, Landau showed that there are only finitely many possibilities.

Theorem 8 (Landau [26]). *For any $k \geq 1$ there are only finitely many finite groups with exactly k conjugacy classes.*

This is an elementary consequence of the bounds of the section ‘Counting solutions to $1 = \frac{1}{x_1} + \dots + \frac{1}{x_r}$ ’ on the size of the denominators of solutions to (3). It suffices to show that, if G has exactly k conjugacy classes, then $|G| \ll_k 1$. Suppose that G has conjugacy classes of sizes $m_1, \dots, m_k$. Since these partition G , it follows that $|G| = m_1 + \dots + m_k$. On the other hand, each m_i is a divisor of $|G|$, and hence, dividing by $|G|$, we have

$$1 = \frac{1}{|G|/m_1} + \dots + \frac{1}{|G|/m_k}.$$

It follows that, by the upper bound proved in the before-mentioned section, we have $|G|/m_i \leq kc_0^{2^k}$ for all $1 \leq i \leq k$. Furthermore, since the identity is only conjugate to itself, for some i we have $m_i = 1$. It follows that $|G| \leq kc_0^{2^k}$ as required. (Note that this explicit bound implies, for example, that any finite group G has $\gg \log \log |G|$ many distinct conjugacy classes.)

Landau's lower bound estimate has been strengthened and extended in a number of ways; see, for example, [3] for extensions and references.

Polytopes

A more recent connection is to discrete geometry. Recall that a polytope in $\mathbb{R}^d$ is the convex hull of some finite set of points in $\mathbb{Z}^d$. We say that P is

- integer-free if there are no points in $\mathbb{Z}^d$ in the interior of P ,
- weakly maximal if it is integer-free and there is no integer-free polytope that strictly contains P , and
- strongly maximal if it is integer-free and there is no integer-free, closed, convex, d -dimensional, set of any sort that strictly contains P .

It is not obvious whether there can exist integer-free polytopes that are weakly maximal yet not strongly maximal. Indeed, there do not exist such polytopes in dimensions ≤ 3 . It was shown in [30] that there do exist such polytopes in all dimensions ≥ 4 . Recently, Averkov has shown that in fact there must exist *many* such polytopes, by establishing a close link between counting polytopes which are weakly, not strongly, maximal, and Egyptian fraction decompositions of (3).

Theorem 9 (Averkov [2]). *Let $d \geq 6$. Up to affine equivalence, the number of weakly maximal integer-free polytopes in $\mathbb{R}^d$ that are not strongly maximal is at least the number of solutions to (3) with $k = d - 5$ variables.*

In particular, using Konyagin's lower bound, we deduce that there are at least $2^{c^{d/\log d}}$ many weakly maximal polytopes that are not strongly maximal (for some constant $c > 0$).

Huffman codes

The study of solutions to (3) when the denominators x_i are (not necessarily distinct) powers of a fixed integer t has a close connection to coding theory. For our purposes, a k -code in an alphabet of size t is simply a set of k distinct $\{0, \dots, t-1\}$ -strings. For many practical applications, it is preferred that the code be prefix-free, that is, no string appears as an initial segment of any other (in particular this allows for instant decoding). The Kraft–McMillan inequality states that if a prefix-free k -code has string lengths $l_1, \dots, l_k$ then $\sum \frac{1}{t^{l_i}} \leq 1$.

Prefix-free codes with the average word length as small as possible, also known as compact Huffman codes, therefore have string lengths that satisfy $\sum \frac{1}{t^{l_i}} = 1$. In fact, given any solution to this equation, a corresponding compact Huffman code can be produced. For example, there are three essentially distinct ways (with the word

lengths l_i ordered by size) of writing 1 as a sum of five reciprocal powers of 2:

$$\begin{aligned} 1 &= \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \frac{1}{16} + \frac{1}{16} \\ &= \frac{1}{2} + \frac{1}{8} + \frac{1}{8} + \frac{1}{8} + \frac{1}{8} \\ &= \frac{1}{4} + \frac{1}{4} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \frac{1}{8}. \end{aligned}$$

These correspond to the compact Huffman codes

$$\{0, 10, 110, 1110, 1111\},$$

$$\{0, 100, 101, 110, 111\},$$

and

$$\{00, 01, 10, 110, 111\}.$$

This correspondence shows that the num-

ber of compact Huffman codes is (up to equivalence) the number of solutions to $\sum \frac{1}{2^{l_i}} = 1$. This is also equivalent to counting other natural combinatorial objects, such as the number of nonequivalent canonical rooted trees, or the number of bounded degree sequences. For more information we refer to [13, 14]. $\diamond$

References

- P.J. van Albada and J.H. van Lint, Reciprocal bases for the integers, *Amer. Math. Monthly*, 70 (1963), 170–174.
- G. Averkov, Difference between families of weakly and strongly maximal integral lattice-free polytopes, in *Interactions with Lattice Polytopes*, Springer Proceedings in Mathematics & Statistics, Vol. 386., Springer, 2017, pp. 1–10.
- A. Beltrán, M.J. Felipe and C. Melchor, Landau's theorem on conjugacy classes for normal subgroups, *International Journal of Algebra and Computation* 26 (2016), 1453–1466.
- T.F. Bloom, On a density conjecture about unit fractions (2021), arXiv:2112.03726.
- M. Bright and D. Loughran, Brauer–Manin obstruction for Erdős–Straus surfaces, *Bull. Lond. Math. Soc.* 52(4) (2020), 746–761.
- T.D. Browning and C. Elsholtz, The number of representations of rationals as a sum of unit fractions, *Illinois J. Math.* 55(2) (2011), 685–696.
- E.S. Croot, On unit fractions with denominators in short intervals, *Acta Arith.* 99(2) (2001), 99–114.
- E.S. Croot, On a coloring conjecture about unit fractions, *Ann. of Math.* (2) 157 (2003), 545–556.
- R. Dedekind, *Gesammelte mathematische Werke, Band 2*, Hrsg. v. Robert Fricke, Emmy Noether u. Oeystein Ore., Über Zerlegungen von Zahlen durch ihren größten gemeinsamen Teiler, (Festschrift der Universität Braunschweig, 1897), Friedr. Vieweg & Sohn, Braunschweig, 1931.
- C. Elsholtz, Sums of k unit fractions, *Trans. Amer. Math. Soc.* 353 (2001), 3209–3227.
- C. Elsholtz, *Sums of k Unit Fractions*, PhD Thesis (Darmstadt), Shaker Verlag, 1998.
- C. Elsholtz, Egyptian fractions with odd denominators, *Q.J. Math.* 67(3) (2016), 425–430.
- C. Elsholtz, C. Heuberger and D. Krenn, Algorithmic counting of nonequivalent compact Huffman codes (2021), arXiv:1901.11343.
- C. Elsholtz, C. Heuberger and H. Prodinger, The number of Huffman codes, compact trees, and sums of unit fractions, *IEEE Trans. Inform. Theory* (2) 59 (2013), 1065–1075.
- C. Elsholtz and S. Planitzer, The number of solutions of the Erdős–Straus Equation and sums of k unit fractions, *Proc. R. Soc. Edinb. A: Math.* 150(3) (2020), 1401–1427.
- C. Elsholtz and S. Planitzer, Sums of four and more unit fractions and approximate parametrizations, *Bull. Lond. Math. Soc.* 53(3) (2021), 695–709.
- C. Elsholtz and T. Tao, Counting the number of solutions to the Erdős–Straus equation on unit fractions, *J. Aust. Math. Soc.* 94(1) (2013), 50–105.
- D. Eppstein, Ten algorithms for Egyptian fractions, *Mathematica in Education and Research* 4(2) (1995), 5–15.
- P. Erdős, Az $1/x_1 + 1/x_2 + \dots + 1/x_n = a/b$ egyenlet egész számú megoldásairól, *Mat. Lapok* 1 (1950), 192–210.
- P. Erdős and R.L. Graham, *Old and New Problems and Results in Combinatorial Number Theory*, Monographies de L'Enseignement Mathématique, Vol. 28, Université de Genève, 1980.
- R.L. Graham, Paul Erdős and Egyptian fractions, in *Erdős Centennial*, Bolyai Soc. Math. Stud., Vol. 25, János Bolyai Math. Soc., 2013, pp. 289–309.
- R.K. Guy, *Unsolved Problems in Number Theory*, Springer, 2004, Third Edition.
- Andreas Hippler, *Zu Modulspannweiten und zu einem Problem von Erdős und Graham*, PhD Thesis, University of Mainz, 2002.
- O.T. Izhboldin and L.D. Kurlyandchik, Unit fractions, *Proc. St. Petersburg Math. Soc.* 111 (1995) 193–200.
- S.V. Konyagin, Double Exponential Lower Bound for the Number of Representations of Unity by Egyptian Fractions, *Math. Notes* 95(1–2) (2014), 277–281.
- E. Landau, Über die Klassenzahl der binären quadratischen Formen von negativer Diskriminante, *Math. Ann.* 56 (1903), 671–676.
- G. Martin, Denser Egyptian fractions, *Acta Arith.* 95(3) (2000), 231–260.
- L.J. Mordell, *Diophantine Equations*, Pure and Applied Mathematics, Vol. 30, Academic Press, 1969.
- M. Nakayama, On the decomposition of a rational number into 'Stammbrüche', *Tohoku J. Math.* 46 (1939), 1–21.
- B. Nill and G.M. Ziegler, Projecting lattice polytopes without interior lattice points, *Math. Oper. Res.* 36(3) (2011), 462–467.
- M.R. Obláth, Sur l'équation diophantienne $4/n = 1/x_1 + 1/x_2 + 1/x_3$, *Mathesis* 59 (1950), 308–316.
- The Papyrus Rhind*, approximately 1650–1550 BCE, written by the scribe by Ahmes.
- L.A. Rosati, Sull'equazione diofantea $\frac{4}{n} = \frac{1}{x_1} + \frac{1}{x_2} + \frac{1}{x_3}$, *Bollettino della Unione Matematica Italiana* (3) 9 (1954), 59–64.
- S. Salez, The Erdős–Straus conjecture: New modular equations and checking up to $N = 10^{17}$ (2014), arXiv:1406.6307.
- C. Sándor, On the number of solutions of the Diophantine equation $\sum_{i=1}^n \frac{1}{x_i} = 1$, *Period. Math. Hungar.* 47(1–2) (2003), 215–219.
- A. Schinzel, Sur quelques propriétés des nombres $3/n$ et $4/n$, où n est un nombre impair, *Mathesis* 65 (1956), 219–222.
- A. Schinzel, Erdős's work on finite sums of unit fractions, in *Paul Erdős and his Mathematics, I* (Budapest, 1999), Bolyai Soc. Math. Stud., Vol. 11, János Bolyai Math. Soc., 2002, pp. 629–636.
- A. Schinzel, On sums of three unit fractions with polynomial denominators, *Funct. Approx. Comment. Math.* 28 (2000), 187–194.
- Z. Shen, On the Diophantine equation $\sum_{i=0}^k 1/x_i = a/n$, *Chinese Ann. Math. Ser. B* 7(2) (1986), 213–220.
- W. Sierpiński, Sur les décompositions de nombres rationnels en fractions primaires, *Mathesis* 65 (1956), 16–32.
- B.M. Stewart, *Theory of Numbers*, The Macmillan Company, 1964, Second Edition.
- Z.-W. Sun, A conjecture on sets of positive integers with positive upper density, Number Theory mailing list (2007), <https://listserv.nodak.edu/cgi-bin/wa.exe?A2=NMBRTHRY; a8772b3.0701>.
- T. Takenouchi, On an indeterminate equation, *Proc. Phys.-Math. Soc. Japan* (3) 3 (1921), 78–92.
- D.G. Terzi, On a conjecture by Erdős–Straus, *Nordisk Tidskr. Informations-Behandling (BIT)* 11 (1971), 212–216.
- R. Vaughan, On a problem of Erdős, Straus and Schinzel, *Mathematika* 17 (1970), 193–198.
- C. Vjola, On the diophantine equations $\prod_{i=0}^k x_i - \sum_{i=0}^k x_i = n$ and $\sum_{i=0}^k 1/x_i = a/n$ *Acta Arith.* 22 (1972/73), 339–352.
- M.D. Vose, Egyptian fractions, *Bull. London Math. Soc.* 17(1) (1985), 21–24.

In de verdediging

| In defence

Pas gepromoveerden brengen hun werk onder de aandacht. Heeft u tips voor deze rubriek of bent u zelf pas gepromoveerd? Laat het weten aan onze redacteur.

Redacteur: Nicolaas Starreveld
FNWI, Universiteit van Amsterdam
Postbus 94214
1090 GE Amsterdam
verdediging@nieuwarchief.nl



ALL-IN meta-analysis

Judith ter Schure

In April 2022, Judith ter Schure from CWI successfully defended her PhD thesis at Leiden University with the title *ALL-IN meta-analysis*. Judith carried out her research under the supervision of prof. dr. Peter D. Grünwald (UL and CWI) and dr. Daniël Lakens (TU/e).

Accumulation of knowledge

Learning in science can be considered a cumulative process. Over time, researchers perform studies, which ideally leads to the accumulation of knowledge. In clinical research, for example, often multiple studies are performed over time to measure the impact of some medicine. Promising trials may motivate researchers to do more research, and at some time a conclusion is drawn after which no new trials are deemed necessary. It is thus important that existing studies actively steer the decisions on new research. To support the decision-making process, researchers perform systematic reviews that construct a complete collection of the results of all publications that try to answer a similar question. These publications are evaluated based on quality, such that the overview gives a good impression of what is known so far. A meta-analysis adds to that with a statistical summary of the results, usually relying on hypothesis testing, confidence intervals, or p -values. Hence an important question arises: how do you statistically combine results from studies that accumulate over time? This question is not so simple to answer.

Conventional statistical methods that rely on p -values perform very poorly in meta-analyses where *time* is involved. Judith developed ALL-IN meta-analysis, a way to synthesize in one statistical analysis results obtained in multiple studies, while the collection of studies is still growing. ALL-IN meta-analysis stands for Anytime, Live, and Leading INterim meta-analysis. It provides the statistical methodology for a meta-analysis that can be updated at *any time* — reanalyzing after each new observation while retaining type-I error guarantees (probability of a false positive), is *live* — no need to prespecify the exact size of the collection of studies or the timing of the analysis, and can be *leading* — in the decisions on whether individual studies should be initiated, stopped or expanded. Let's see how this works.

p - and e -values

In statistical testing, the p -value is a notion of surprise; it tells us something about how unexpected the observed results would be assuming the null hypothesis is true. A very small p -value occurs if it would be very unlikely to observe such an extreme (or more extreme) observation by mere chance. The null hypothesis is rejected when p is less than a significance value α , conventionally chosen equal to 0.05.

But, p -values have a downside, they perform very poorly when time is involved. This happens, for example, when studies are accumulated one after the other and decisions are made in between about the timing of new studies and meta-analysis.

Consider the following scenario, a team is carrying out a trial where they want to study whether a beta-blocker prevents a second deadly heart attack. They randomly divide a very large group of patients into two groups of equal size, one that will take the placebo, and one that will take the beta-blocker. The proportion of heart attacks in the placebo group could serve as an indicator of the effectiveness of the beta-blocker. If it has a positive effect we expect a significantly higher proportion of heart attacks in the placebo group, since heart attacks in the beta-blocker group are prevented. But how can you decide whether an observed higher proportion of heart attacks in the placebo group is more likely due to an effective drug, or just occurred by chance?

The p -value tells us something about how unusual such a higher proportion of heart attacks would be in the placebo group, assuming that the beta-blocker is not effective. If we wait for 50, 100, 150, or 200 heart attacks to occur, we expect half of the heart attacks to occur in the placebo group if the beta-blocker is not effective. Due to random fluctuations, however, this can also be a bit smaller or a bit higher. Each possible sample proportion has a probability to occur, and together all possibilities form the sampling distribution shown in Figure 1.

Sampling distributions depend on the sample size n , in this example the number of heart attacks the team of researchers observed. To observe a sampling proportion in $[0.60, 0.62)$ in the placebo group, the probability is different if 50 heart attacks are observed (so 30 of these on placebo, with a probability of 0.042) than if 100 heart attacks are observed (so 60 or 61 of these on placebo, with probability $0.011 + 0.007$). If a proportion of 0.6 is observed, the p -value is either 0.203, 0.057, 0.018 or 0.006 for 50, 100, 150 or 200 total heart attacks, respectively. The p -value can be computed only if the sample distribution and the sample size are known in advance.

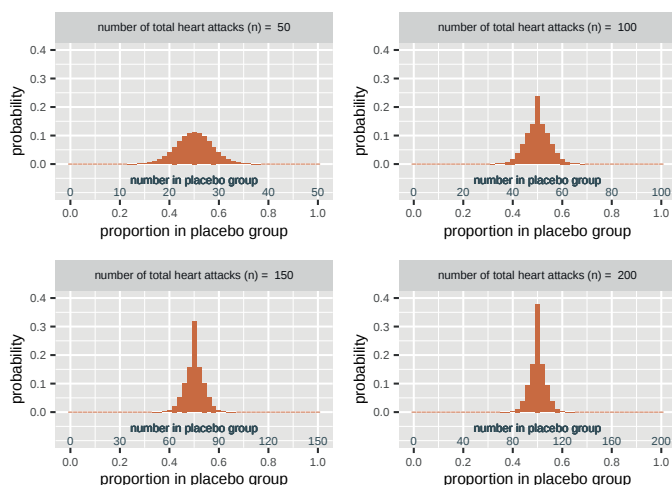


Figure 1 Sampling distributions of the proportion of heart attacks in the placebo group, for various total number of heart attacks (n), under the assumption that the treatment is ineffective (the attacks occur at random in the two groups).

Suppose the team of researchers did a trial, and out of 150 heart attacks they observed a proportion of 0.6 in the placebo group. In that case, the drug seems to prevent heart attacks and the p -value would be 0.018. The beta-blocker looks promising and that might be a good reason to start a new trial. In a follow-up trial, 50 heart attacks are observed, again with a proportion of 0.6 in the placebo group. Combining both studies 120 heart attacks were observed in the placebo group, out of the 200 heart attacks. Can the researchers now state that the p -value is equal to 0.006, as we stated before about sample sizes of 200 total heart attacks? As it would be in a trial where they analyzed all the heart attacks together? The answer is “no”! Because the success of the first study influenced the existence of the second study! This means that only in some selected scenario do we reach two studies and perform the meta-analysis, introducing bias in the sampling distribution. This bias was first described in Judith’s work and called *accumulation bias*.

p -value-based statistical tests are intended to be prospective and require the sample size — or the stopping rule that produces the sample — to be specified in advance of observing any data. In the beta-blocker trial, for example, the researchers should pre-determine that the study will stop when exactly 200 heart attacks will be observed, also if the first 150 might show a harmful effect of the drug! Moreover, the use of p -value tests suggests that the results of earlier studies should be unknown when planning new studies as well as planning meta-analyses. Such assumptions are unrealistic. Because most meta-analyses are retrospective and give a statistical summary of the results obtained in all previous studies — after a systematic review has been performed. At the same time, ignoring these assumptions invalidates conventional p -value tests and inflates type-I errors.

ALL-IN meta-analysis resolves the time deficiency in the standard p -value by replacing it with an e -value. An e -value is defined as the outcome of a nonnegative random variable with expectation 1 under the null hypothesis. For example, suppose a player is betting on the roulette table, and suppose that the player starts with 1 €. If a bet is placed on either black or red, for simplicity forget the zero in roulette, then the expected return after one round is $0.5 \times 2\text{€} + 0.5 \times 0 = 1\text{€}$. Hence this betting score in roulette is an e -value.

Accumulation bias and ALL-IN

Accumulation bias is caused by the dependence of follow-up studies on the results of previous studies. Judith showed that all forms of accumulation bias are related to the time aspect in meta-analysis. She developed a framework to describe that accumulation bias is not necessarily a problem, like with standard p -value analysis, but part of the solution!

Judith describes the general form of a test statistic that can withstand any accumulation bias process: the likelihood ratio (which is an e -value). The likelihood ratio offers the meta-analyst the flexibility to decide at any time to finalize the meta-analysis and advise against future studies. It also fosters the accumulation of scientific knowledge, which is critical in reducing research waste.

The heart of an ALL-IN analysis lies in constructing a nonnegative *martingale* (a sequence of random variables for which the conditional expectation of the next observation, given all the previous observations, is equal to the most recent observation)

using likelihood ratios. Each new study adds a term to this martingale process. The likelihood ratio becomes smaller when the observations are more likely under the null hypothesis. For likelihood ratios, using Ville's inequality a threshold can be established that guarantees type-I error control under any accumulation bias process and at any time, as follows:

$$P_0\left(\text{LR}^{(t)} \geq \frac{1}{a} \text{ for some } t = 1, 2, \dots\right) \leq a,$$

where the likelihood ratios $\text{LR}^{(1)}, \text{LR}^{(2)}, \dots, \text{LR}^{(t)}$ yield the desired martingale, and the discrete time units correspond to the times at which we add a new study to the meta-analysis.

Communication

Next to her research, Judith emphasizes the need for simple and clear communication of statistical results. As she states in her dissertation: “*p*-values are turning science into a sorting machine for single studies. Science needs more spirit of collaboration, more efficiency, and simpler communication.”

She likes using gambling and betting scores to communicate statistics. Let's see an example concerning the efficacy of vaccines against Covid-19, that illustrates how betting scores can contribute in this direction. More detailed explanations and computations, can be found in Judith's thesis [pp. 20–24].

On 30 June 2020, the US FDA published its guidance document on ‘Development and Licensure of Vaccines to Prevent Covid-19’. This set the goals for any Phase III clinical trial on a protective effect of a vaccine against Covid-19. The document prescribed two things to achieve: (1) at least a vaccine efficacy (VE) of 50% and (2) evidence against a null hypothesis of <30% VE (i.e. the lower endpoint of the corresponding confidence interval should be >30%). According to the FDA, the goal is not only to rule out an ineffective vaccine but also reject the hypothesis that the vaccine has an effect that is too small.

Judith interpreted the design and the results of the Covid-19 vaccine trials using betting scores. Her goal is to bet on one of the two possible outcomes: either the next infection is in the vaccinated or in the placebo group. Using the betting score we can decide whether the vaccine is a real deal-breaker (the scores behave like the salary of a professional poker player) or whether it is not effective enough (the scores behave like anyone playing the roulette wheel). To ensure that the betting scores can show either case, she designed a game that is fair — under the null hypothesis of 30% VE or smaller — and then optimize playing the game with a strategy that is profitable — under the alternative of 50% VE or larger.

Let's see what the betting scores would say in two actual trials, the trial of Pfizer/BioNTech and the CureVac AG mRNA vaccine. The Pfizer/BioNTech trial observed 8 cases of Covid-19 among vaccinated participants, and 162 among the participants assigned to placebo. In the CureVac AG trial, the numbers were 83:145 vaccinated:placebo. If these results are interpreted using the betting game above, Pfizer/BioNTech could report a total betting score of 118 million €, while CureVac AG has a betting score of 1.84 €, both starting with 1 €. If two players win such amounts at the poker table, who would you consider a professional player with a favorable strategy, and who is the beginner just lucky to be still in the game like anyone playing roulette?

The more personal aspect

As a final note we would like to give the word to the doctorate.

Judith, how did you get interested in statistics?

“From elementary school, I knew I wanted to become a scientist — I used to say ‘inventor’ then — when I would grow up. My interest in statistics is best described by a quote from statistician John Tuckey: ‘The best thing about being a statistician is that you get to play in everyone's backyard.’ Statistics is everywhere, and many important decisions are made relying on it, which puts a lot of responsibility on doing it right. I also find it very attractive that statistics can be applied to a broad range of problems. It may be funny but I decided to start this particular PhD project on an evening in a café, where my promoter was giving a talk. I realized there and then that this is the topic I could work on and stay motivated for four years. It has also a societal impact, which I found important, and so it happened that I still enjoy the line of research very much.”

Were you also involved in some activities you would like to share with the readers?

“Early 2020, I initiated the ALL-IN-META-BCG-CORONA research initiative. BCG researchers from the university medical centers of Utrecht and Nijmegen were among the first to announce their clinical trial. The main goal was to find whether an immune response to the BCG vaccine, originally developed to protect against tuberculosis, provides indirect protection against Covid-19. The researchers shared their protocol when other researchers around the world started similar trials. Because of the urgency, multiple trials were addressing the same question simultaneously, and a live meta-analysis could provide huge benefits. We contacted the research group and proposed to use our methodology to analyze all these BCG trials together continuously, while they were still ongoing. In this project, the involved trials put collaboration before their interests, since protocols and results were shared before being published. I think that such a collaborative attitude is needed in science, it can increase value, and reduce research waste. All trials are completed now. We hope to put out the results this month (December 2022).”

Concluding

To summarize, in her research Judith developed an ALL-IN meta-analysis, a statistical methodology that makes it possible to analyze results coming from different ongoing studies in a line of research that is growing. Accumulation bias is not a problem but part of the solution, encapsulated in the likelihood ratio and its generalization, the *e*-value. It also offers the meta-analyst the flexibility to decide at any time to complete the meta-analysis and advise against future studies. Moreover, Judith used betting scores to communicate statistical results simply, clearly, and convincingly.

Judith is currently working as a consultant in biostatistics at Amsterdam UMC where she also continues her research on ALL-IN meta-analysis. She is currently collaborating with researchers in the field of oncology to set up a meta-analysis of ongoing clinical trials with ALL-IN methodology. We wish Judith all the best with her work on guaranteeing that statistical errors stay under control and results are communicated clearly!

←

Judith's thesis can be read here: <https://ir.cwi.nl/pub/31587>.

Teun D. H. van Nuland

*School of Mathematics and Statistics
UNSW Sydney, Kensington
t.van_nuland@unsw.edu.au*

Column Wiskundigen in den vreemde

De menselijke kant van wiskunde

In deze rubriek doen wiskundigen verslag van hun ervaringen als wetenschapper in den vreemde. Teun van Nuland verblijft sinds augustus in Sydney waar hij als postdoc werkzaam is aan de School of Mathematics and Statistics.

Op 24 augustus was het dan echt zo ver: ik ging verhuizen naar Sydney. Eindelijk, want dit plan was al meer dan een half jaar uitgesteld. Na corona duurde het erg lang voordat Australië weer volledig openging. Een paar maanden eerder ging het al gedeeltelijk open; Australië deelde toen visa uit voor mensen die er permanent gingen werken. Ook studenten, waar promovendi ook onder vallen volgens Australië, mochten bij uitzondering het land in. Hierdoor vielen postdocs dus precies buiten de boot. Gelukkig kon mijn voorgaande postdoc-contract in de Verenigde Staten met nog wat maanden verlengd worden, en zat ik geen moment zonder salaris.

Ik heb het over mijn contract in de Verenigde Staten, maar stiekem zat ik nog gewoon in Nederland. Het was wel de bedoeling dat ik op een gegeven moment die kant op zou gaan, om mijn werkgever daar te ontmoeten. Gedurende de eerste drie maanden van die postdoc gaf ik een vak in Nijmegen, waar ik in persoon bij moest zijn. Daarna was ik van plan naar Albuquerque te vliegen. Maar helaas, door omstandigheden werd dit uiteindelijk onmogelijk.

Soms kon ik niet zeggen of mijn plannen om naar Australië te verhuizen daadwerkelijk wortel zouden schieten of afgeblazen zouden worden door een hogere macht.

In iets wat leek op een slecht voorteken werd mijn vlucht geschrapt door de drukte op Schiphol. Ik negeerde het voorteken en boekte mijn vlucht om, met als gevolg een nacht op een bankje op London Heathrow (waar ik uiteindelijk op heb kunnen slapen, in het voordeel van mijn geestelijke gezondheid en in het nadeel van mijn rug). De volgende dag voelde ik me moe maar hoopvol. En dat bleek terecht. Uiteindelijk verliep mijn vlucht soepel, zag ik de zon ondergaan over de outback, en landde ik 's avonds in regenachtig maar levendig Sydney.

Onderzoeksgroep

De eerste week op de universiteit (UNSW) leek niet heel verschillend van de tijd gedurende corona, omdat er vrijwel niemand op mijn gang was. Het bleek vakantie te zijn, en veel mensen waren weg. Na een tijdje kwamen de mensen gelukkig terug, en leerde ik steeds meer collega's kennen, tijdens seminars, koffie, lunches, en af en toe zelfs in het uitgaansleven. Ook kwam stap voor stap mijn onderzoeksgroep terug, en kon ik eindelijk weer eens face-to-face met mijn collega's samenwerken. Ik kwam er toen pas achter hoe erg ik die menselijke kant van wiskunde gemist had.

De hoogleraar die me heeft aangenomen is een erg joviale man, waarmee je goed een praatje kunt maken, en die zich ook echt zorgen maakt over het welzijn van de mensen in zijn onderzoeksgroep. Hij komt regelmatig naar ons kantoor als hij een van zijn postdocs nodig heeft. Hij staat blijkbaar bekend als de enige hoogleraar die dit doet. Als je het mij vraagt heb ik

het getroffen, want hij zorgt voor een hele open werksfeer, en het geeft echt een gevoel van een *groep*, zoals in wiskunde wat minder vanzelfsprekend is dan in, bijvoorbeeld, experimentele natuurkunde. Het geeft je het gevoel dat je het samen doet.

Dat is natuurlijk ook zo, wiskunde is een gezamenlijke onderneming. Zelfs als je in je eentje publiceert en nooit met je collega's praat bouwt je werk (als het goed is) nog steeds voort op resultaten van andere wiskundigen. Zo is de wiskunde eigenlijk een kolossaal bouwwerk waar iedereen een groot of klein steentje aan bijdraagt. Dit is een mooi idee, maar een beetje abstract. Het is mooi dat dit gezamenlijke aspect van de wiskunde voor mij nu weer, voor het eerst sinds maart 2020, concreet zichtbaar is.

De Australische honours-student

Deze week ben ik aan het praten met een honours-student over een mogelijk afstudeerproject dat ik zou kunnen begeleiden. Een week geleden had ik nog geen idee wat een honours-student was, dus vroeg ik aan mijn baas of dit eigenlijk een bachelor- of masterstudent was. Het antwoord: geen van beiden. Als je in Sydney je bachelor hebt afgerond, en je wilt graag het onderzoek in, kun je een jaar 'honours' doen. Dit is een vol programma met zowel vakken als onderzoek (vaak grotendeels literatuurstudie, met soms wat nieuwe resultaten, en een enkele keer iets publiceerbaars). Het honoursprogramma wordt op de website van UNSW Sydney aangeprezen als een 'extra jaar' bovenop je bachelor. Het gekke is dat je, na je honours, je master kunt overslaan en gelijk je promotie kunt starten. Dit is volgens mijn baas ook wat er in de praktijk vaak gebeurt. De beste studenten doen honours, en stromen na vier jaar gelijk door naar een promotieplaats. Vanaf dan hoeft je geen vakken meer te doen, enkel onderzoek. Ikzelf kon me niet voorstellen dat ik zo snel een volwaardige wiskundige basis had kunnen opbouwen. De vijf jaar van mijn studie heb ik helemaal volgebouwd met vakken (en heb zelfs nog een paar maanden uitloop genomen omdat ik sommige vakken gewoon niet wou missen) en ik had voor geen goud een heel jaar aan vakken willen opgeven.

Mijn baas las de verbijstering op mijn gezicht, en moest me eraan herinneren dat het een heel ander systeem is, maar dat dat niet wegneemt dat het goed werkt. En daar heeft hij waarschijnlijk gelijk in. Systemen (maar ook dingen en mensen) die we niet kennen lijken vaak slechter dan dat ze zijn.

Ten eerste, een Australische master is meer gericht op mensen die niet het onderzoek in willen gaan, en dat zijn de meesten. Nederlandse studenten die niet in onderzoek geïnteresseerd zijn, hebben vaak de terechte kritiek dat universitaire studies zo'n hyperfocus op wetenschap hebben. Dit is volgens mij een punt waar Nederland van Australië kan leren.



Ten tweede, een Australische promovendus wordt iets meer als een student behandeld. Het is officieel ook geen baan zoals in Nederland, en je krijgt er een vergoeding voor in plaats van een salaris. Dit is op zich logisch te rijmen met het feit dat ze een jaar eerder zijn gestart, en dus in eerste instantie meer lijken op tweedejaars masterstudenten.

Toch is het gek dat die promovendi vervolgens geen vakken meer hoeven te volgen. Het lijkt me jammer voor een promovendus in bijvoorbeeld operator algebra's om nooit een specialistisch vak op dit gebied voor de kiezen te krijgen, maar het te moeten doen met een (leuk maar) algemeen vak zoals functionaalanalyse. Dit is volgens mij een punt waar Australië van Nederland kan leren.

Ik hoop hier overmorgen met de bewuste honours-student over verder te kletsen. Om dit soort dingen te begrijpen moet je toch met mensen praten die er middenin zitten.

Het weer

En dan ten slotte: het weerbericht. In tegenstelling tot het beeld dat ik van het weer van Sydney had, is het bijna niet te merken dat deze stad aan de rand van een enorme woestijn ligt. Sterker nog, de dagen zijn hier heel erg vergelijkbaar met Nederlandse dagen. Het verschil is als volgt: het is hier bijna elke dag mooi weer. Gevolg: elke dag dat het niet mooi weer is, klagen mensen over de regen. Toegegeven, het is dit jaar bovenmatig regachtig naar Australische begrippen, maar voor een Nederlander is dat gesneden koek.

Op de foto een existentiebewijs van een mooie dag, die natuurlijk doorgebracht moet worden aan het strand. Wiskundigen zijn tenslotte ook maar mensen.

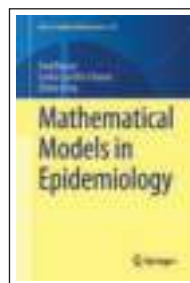


Boekbesprekingen

| Book Reviews

Redactie: Hans Cuypers en Hans Sterk

Review Editors NAW - MF 5.092
Faculteit Wiskunde & Informatica
Technische Universiteit Eindhoven
Postbus 513
5600 MB Eindhoven
reviews@nieuwarchief.nl
www.win.tue.nl/wgreview



Fred Brauer, Carlos Castillo-Chavez, Zhilan Feng

Mathematical Models in Epidemiology

Springer, 2019

xvii + 619 p., prijs €87,19

ISBN 9781493998265

Dit boek is bedoeld voor wiskundestudenten en gezondheidsmedewerkers die geïnteresseerd zijn in het modelleren van de verspreiding van besmettelijke ziekten. Om het boek te kunnen lezen is er achtergrondkennis nodig op het gebied van calculus, lineaire algebra en oplosmethoden (zowel analytisch als numeriek) van gewone differentiaalvergelijkingen. In het boek wordt beschreven hoe wiskundige technieken gebruikt kunnen worden. Er is niet veel theorie opgenomen. Het boek zou geschikt moeten zijn voor tweede- of derdejaars bachelorstudenten. Het boek kan gebruikt worden om een cursus uit te geven. Het is niet nodig om het gehele boek te bestuderen. Na het introductiedeel zijn verschillende keuzen mogelijk uit de meer gedetailleerde onderwerpen. Er zijn niet alleen opgaven in het boek opgenomen maar ook een groot aantal projecten, die door een groep van studenten aangepakt kunnen worden. Als lezers van het boek niet over de benodigde voorkennis beschikken, is het mogelijk om de benodigde kennis op te doen via materiaal dat beschikbaar is op een website behorende bij dit boek. Naast het gewone materiaal zijn er ook secties en opgaven met een *, die bedoeld zijn voor lezers met meer wiskundige kennis.

Het boek bestaat uit 4 delen: Deel 1: Basisconcepten van wiskundige epidemiologie; Deel 2: Modellen voor specifieke ziekten; Deel 3: Meer geavanceerde concepten; Deel 4: De toekomst. Elk deel bevat een aantal hoofdstukken. Elk hoofdstuk wordt afgesloten met mogelijke projecten, opgaven en verwijzingen. Deel 1 en 2 maken beide ongeveer een derde van het boek uit. Deel 3 en deel 4 vormen het laatste deel, waarbij deel 4 slechts 25 bladzijden lang is. Appendices bevatten een overzicht van wiskundige kennis die bekend verondersteld wordt zoals: eigenschappen van vectoren en matrices, eerste-orde gewone differentiaalvergelijkingen en stelsels van differentiaalvergelijkingen. Hierna zullen de verschillende delen in meer detail besproken worden.

Deel 1: Dit deel start met een historisch overzicht van de verschillende modellen die ontwikkeld zijn binnen de wiskundige epidemiologie. Daarna gaan de schrijvers in op de compartimentmodellen voor het beschrijven van de verspreiding van de besmettelijke ziekte. Deze modellen worden gebruikt voor het bespreken en analyseren van endemische en epidemische ziektemodellen. Hierna wordt er onderzocht wat er aangepast moet worden als er bijvoorbeeld vaccinatie geïntroduceerd wordt. De modellen worden dan complexer en zijn dan ook moeilijker op te lossen. Als laatste onderwerp worden ziekten beschouwd die verspreid worden door middel van een zogenaamde vector, denk aan malaria die verspreid wordt door malariamuggen.

Deel 3: Verdere uitbreiding van de modellen komt in dit deel aan bod. Een voorbeeld is een model waarbij de leeftijd van de patiënten een rol speelt. Een andere uitbreiding is het meenemen van hoe een ziekte zich over een land verspreidt. Als laatste wordt de invloed van mobiliteit, gedrag en tijdschaal geanalyseerd.

Deel 4 bestaat uit één hoofdstuk. Hier wordt een aantal onderzoeksrichtingen aangegeven waar grote uitdagingen en mogelijkheden liggen. Ook wordt een richting uitgezet waarin toekomstig theoretisch onderzoek mogelijk is.

Ik vind dit boek goed verzorgd. Het bevat veel informatie die gebruikt kan worden voor een beter begrip van de modellen uit de literatuur en voor gebruik in de praktijk. Het is geschikt om als leerboek te gebruiken tijdens een cursus over dit onderwerp. Ik denk dat het voor gezondheidsmedewerkers minder geschikt is. Er wordt veel wiskunde gebruikt, die niet heel geavanceerd is, maar ik twijfel of deze kennis aanwezig is bij gezondheidsmedewerkers. Door de vele opdrachten en mogelijke projecten is het boek heel geschikt om ideeën te leveren voor studiemateriaal, zowel voor een cursus over dit onderwerp, maar ook voor opdrachten bij een cursus modelleren, of voor een bachelor- of masteropdracht. Door de vele referenties is het ook geschikt voor onderzoekers die werkzaam zijn op het gebied van het modelleren van de verspreiding van besmettelijke ziekten. In het tweede deel worden veel verschillende ziekten onderzocht. De beschouwde ziekten zijn: tuberculose, hiv/aids, griep, ebola, malaria, dengue koorts en het zikavirus. In elk hoofdstuk wordt gestart met een introductie van de ziekte. Daarna wordt het bijbehorende model gegeven en besproken wat de eigenschappen zijn. Daarna verschillen de hoofdstukken in wat er nog meer besproken wordt. Soms zijn dit uitbraken van de ziekte uit de geschiedenis, soms alternatieve modellen of hoe ziekten elkaar beïnvloeden. Een voorbeeld hiervan is een koppeling van de epidemiologie van malaria en de genetisch bepaalde sikkelcelziekte.

Kees Vuik



Keith Kendig

**A Gateway to Number Theory
Applying the Power of Algebraic Curves**

American Mathematical Society/MAA Press,
2021

xv + 207 p., prijs \$59.00

ISBN 9781470456221

De theorie van algebraïsche krommen kan gebruikt worden om problemen in de getaltheorie op te lossen. Tot zover ben ik het met de auteur van dit boek eens. Maar verder is de aanpak van dit boek niet aan te raden voor iemand die wiskunde wil doen. Een van de eerste eisen lijkt me dat er heldere en sluitende definities gepresenteerd worden, en dat er precies geformuleerde constructies en bewijzen gegeven worden. Deze aspecten ontbreken in dit boek. Waar de auteur probeert iets uit te leggen, ontbreekt precisie, exacte uitleg en goede verwijzingen voor beweringen die je niet op elementair niveau kunt bewijzen. Bovendien houdt de auteur er een heel eigen terminologie op na. Weet de lezer van deze bespreking wat een 'rationale kromme' is? Bij Kendig is dat een kromme gedefinieerd over $\mathbb{Q}$.

Wat is een algebraïsche kromme? Nergens in dit boek kan ik een juiste definitie vinden. Als inleiding wordt in Definitie 1.1.1 verteld wat een algebraïsche kromme is en 180 pagina's verder zien we dezelfde definitie: B7 op pagina 188. We zien dat een *vlakke algebraïsche*

kromme een verzameling is in $\mathbb{R}^2$ die bestaat uit de nulpunten van een $p(X,Y) \in \mathbb{R}[X,Y]$ (over een willekeurig lichaam wordt er geen definitie gegeven). Kennelijk mogen we $p = X^2 + Y^2 + 1$ nemen, en dan is die verzameling leeg; voor $p = X^2 + Y^2$ komt er een kromme in $\mathbb{R}^2$ die uit één punt bestaat; maar ook $p = 1$ is niet uitgesloten, ja, dat geeft de lege verzameling; ook $p = 0$ mag gekozen worden: kennelijk is $\mathbb{R}^2$ ook een algebraïsche kromme.

Wat wordt er bewezen over getaltheorie en meetkunde? Een voorbeeld: in 3.12 wordt gezocht naar nulpunten van $3X^3 + 4Y^3 + 5$. Kenmerkend voor dit boek: *ten eerste*, een 'bewijs' door intimidatie: "it turns out that this equation defines an affine curve which avoids passing through even one rational point in $\mathbb{R}^2$ " (wat hebben we aan "it turns out"?); er zijn heel goede verwijzingen voor een bewijs hiervan. *Ten tweede* (schandalig): dit voorbeeld is afkomstig van Selmer (1951, 1954); een verwijzing wordt niet gegeven (vanaf dit moment wantrouwt elke lezer deze auteur). *Ten derde*, een gemiste kans: er wordt niet verteld dat in dit voorbeeld het 'Hasse-principe' niet geldt (wel oplossingen over $\mathbb{Q}_p$ voor elke p en over $\mathbb{R}$, maar geen enkele oplossing over $\mathbb{Q}$, prachtige wiskunde, het was een beginpunt van belangrijke ontwikkelingen). Exemplarisch voor dit boek: wel hier en daar wat vermelden, zonder bewijs, zonder goede verwijzingen, maar erger: de lezer niet informeren waar de echte problemen in dit vak liggen, en hoe theorie daarover ontwikkeld is.

In Hoofdstuk 3 wordt verteld wat een gladde (*smooth*) vlakke affiene algebraïsche kromme is. De definitie wordt alleen maar gegeven voor een affiene kromme over $\mathbb{R}$ of over $\mathbb{C}$. Over andere lichamen van definitie, bij voorbeeld over $\mathbb{Q}$, wordt niet verteld wat 'smooth' betekent. Ook wordt er geen sluitende definitie gegeven van 'smooth' voor een projectieve kromme (wel beloofd: 6.2, maar daar staat het niet). En denkt de lezer dat de verzameling nulpunten van $X(X-1)$ in $\mathbb{R}^2$ (twee evenwijdige lijnen in het affiene vlak) 'smooth' is? Nee, want die kromme is reducibel en 'dus' niet 'smooth' in $\mathbb{R}^2$.

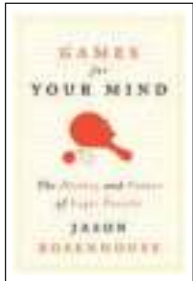
Storend is het dat voor een affiene kromme C over een lichaam $K \subset \mathbb{C}$ de objecten $C \subset \mathbb{A}_K^2$ en $C(K)$ en $C(\mathbb{C})$ met hetzelfde symbool worden gegeven, en door elkaar heen worden gebruikt. Kijk naar Definitie 3.2.1 van een elliptische kromme; die wordt alleen gegeven als het grondlichaam $\mathbb{Q}$ is, en het is een verzameling in $\mathbb{P}^2(\mathbb{R})$. Even later is C 'een torus' (zonder verdere uitleg).

Ik kan geen duidelijke definitie vinden van de optelling op een elliptische kromme C . Onduidelijk is waar de auteur een 0 voor de optelling gebruikt, en of uitspraken over die groepsstructuur afhangen van een keuze van 0. Er is geen bewijs dat $C(K)$ een groep is voor elke $K \subset \mathbb{C}$.

Een goede didactische opzet: vermelden hoe de optelling verkregen wordt, met alle details (elementair en niet moeilijk), laten zien dat aan groepsaxioma's voldaan is, voor de associativiteit uitleggen dat er minstens drie verschillende bewijzen zijn, met verwijzingen. Zo leert de lezer wiskunde, en krijgen we inzicht in de geschiedenis van dit onderdeel.

Ik weet dat het niet zo gemakkelijk is om op een elementair niveau sluitende definities van begrippen uit de algebraïsche meetkunde te geven, vooral niet als je toepassingen in de getaltheorie wilt geven (over een niet-algebraïsch gesloten grondlichaam). Maar de auteur van dit boek overtreedt elementaire regels van wiskunde, van werken met wiskundige begrippen en met wiskundige literatuur.

Popularisering van mooie begrippen leidt tot een haast theologische verhandeling in dit boek: over niet-gedefinieerde begrippen worden onbewezen uitspraken gedaan. Veel interessante, voor de hand liggende onderwerpen worden niet behandeld. In de beschrijving lezen we “...the book includes many pictures along with the exposition, making the material meaningful and easy to grasp”; ja, veel mooie plaatjes, maar ik zie niet hoe iemand hieruit iets over dit onderwerp kan leren of begrijpen. Onbegrijpelijk dat de AMS dit boek in het bestand heeft opgenomen. *Frans Oort*



Jason Rosenhouse

Games for Your Mind
The History and Future of Logic Puzzles

Princeton University Press, 2020

xiv + 333 p., prijs \$ 29.95

ISBN 9780691174075

Waar moet je aan denken bij het begrip logische puzzels? Maken niet alle puzzels gebruik van een zekere vorm van logisch denken? Wat wordt er dus verstaan onder een *logische puzzel*? Een voorbeeldje uit de zogenaamde klassieke logica om dat duidelijk te maken (van Martin Gardner, vrij vertaald door ondergetekende): *Anna beweert dat Peter meer dan duizend boeken bezit. Barend ontkent dat en beweert dat Peter minder dan duizend boeken heeft. Chiara beweert dat Peter minstens één boek heeft. Hoeveel boeken heeft Peter als verder bekend is dat precies één van de drie gedane uitspraken waar is?* Het zal in het vervolg van het boek (soms zelfs pijnlijk) duidelijk worden hoe snel je de verkeerde conclusie(s) kunt trekken, zelfs bij een ogenschijnlijk eenvoudig probleem zoals het bovenstaande.

De aanvankelijke opzet van Rosenhouse was een overzicht te geven van de logische puzzels van twee grootheden op het gebied van de recreatieve wiskunde — Lewis Carroll (pseudoniem van Charles Lutwidge Dodgson, 1832–1898) en Raymond Smullyan (1919–2017) — en die te voorzien van de nodige historische en wiskundige context om vervolgens af te sluiten met door de schrijver ontworpen puzzels gebaseerd op de zogenaamde niet-klassieke logica. Die opzet is evenwel opzijgezet voor de veel bredere opzet van het onderhavige boek, namelijk die in de volgende vijf delen: I een algemene introductie in de (klassieke) logica en logische puzzels; II het werk van Lewis Carroll, uitgesplitst in het recreatieve deel en het meer academische deel daarvan in bijvoorbeeld het boek *Symbolic Logic*; III een introductie in de wiskundige logica en de propositie-logica en de ideeën van Gödel, waarbij het werk van Raymond Smullyan dient als illustratie daarvan; IV een introductie in de niet-klassieke logica die vanaf 1920 opgeld deed; en V enkele zijstapjes naar onder andere meta-puzzels, paradoxen, logische fictie en de klassieke detective oftewel logica in de vorm van een verhaal. Om ook duidelijk te maken wat de term propositielogica inhoudt, geef ik voordat we verder gaan het volgende (eenvoudige), typerende voorbeeld (naar Carroll, weer vrij vertaald): *Als mijn sauspennen de enige voorwerpen zijn van tin die ik bezit en ik al jouw cadeaus nuttig vind en geen enkele*

sauspan ook maar het minste nut heeft, wat kan er dan geconcludeerd worden?

Het boek beschrijft dus uitvoerig de geschiedenis van de logica die begint bij Aristoteles (384–322 voor Christus) die als eerste een formele studie maakte van (valide en niet-valide) logische redeneringen (wellicht gevoelde hij die behoefte vanwege de tijd waarin hij leefde en de daarbij horende prille staat van de ontwikkeling van de democratie en het grote effect van retorica en een goede argumentatie). Pas in 1662 publiceren Antoine Arnauld en Pierre Nicole hun boek *Logic, or the Art of Thinking* waarmee weliswaar hernieuwde interesse in de logica maar geen echte vernieuwing wordt getoond en datzelfde geldt ook voor het veel latere *A System of Logic* van John Stuart Mill uit 1843. Pas in 1854 respectievelijk 1881 weten George Boole (die schijnbaar niet wist van eerdere soortgelijke ideeën van Leibniz) in *An Investigation into the Laws of Thought* en John Venn in *Symbolic Logic* nieuwe stappen te zetten door een wiskundig symbolensysteem te ontwerpen waarmee logische analyse kon worden uitgevoerd. De voorlopig laatste die de wiskundige logica significant (en min of meer definitief) formaliseerde was Bertrand Russell in *The Principles of Mathematics* uit 1903 (gebaseerd overigens op ideeën van Gottlob Frege in *Begriffsschrift* uit 1873). Het baanbrekende en zeer diepe inzicht dat elk logisch systeem (zoals u natuurlijk weet) *incompleet* en *inconsistent* is, hebben we te danken aan Kurt Gödel die in 1931 bewees dat niet elke ware uitspraak in een logisch systeem ook bewijsbaar is in datzelfde systeem en dat ook de uitspraak *Dit systeem is consistent* daarin niet bewijsbaar is. Ook de tegenwoordig zeer belangrijke *fuzzy logic* (ik prefereer hier de Engelse term) wordt niet overgeslagen in dit overzicht van de klassieke en de niet-klassieke logica.

Terug naar de twee hoofdrolspelers. Waar Lewis Carroll de basisprincipes van de klassieke Aristotelianse logica op een speelse manier wilde presenteren aan een toegankelijk wilde maken voor een groter publiek (en daar met immens veel succes in slaagde onder andere in *Alice in Wonderland*), daar is de minstens zo inventieve Raymond Smullyan — met even groot succes — erin geslaagd (zoals ooit zijn doel was) de fundamentele ideeën van Gödel te illustreren met onder andere een vloed aan zogenaamde Knight/Knave problemen (waarbij een Knight *altijd* de waarheid spreekt en een Knave *altijd* liegt). Een voorbeeld van zo'n puzzel (Smullyan, zeer vrij vertaald): *Je ontmoet drie eilandbewoners A, B en C. A zegt dat precies één van ons (van A, B of C dus) altijd liegt. B zegt dat precies twee van ons leugenaars zijn. C zegt dat wij alle drie leugenaar zijn. Wie van de drie eilandbewoners is leugenaar en wie spreekt altijd de waarheid?*

In het boek wordt vervolgens omstandig en helder behandeld dat Carroll maar vooral Smullyan (en ook anderen na hem) in het bedenken van allerlei logische puzzels veel en veel verder zijn gegaan. Dat *verder gaan* betekent bijvoorbeeld dat niet alleen het aantal personen die uitspraken doen soms groter is dan twee of drie, maar ook dat de gedane uitspraken (nog) meer genesteld zijn of dat er (en dan wordt het allemaal veel ingewikkelder) ook personen *soms* liegen of *soms* de waarheid spreken (waarbij dus het klassiek-logische principe wordt verlaten van de *uitgesloten derde*, oftewel dat dus iets alleen maar waar kan zijn of niet waar) of dat personen soms zelfs een zeker percentage van de waarheid spreken[!]. Een en ander zal uiteindelijk (althans in dit boek) in 1996 leiden tot George Boolos' *Hardest Logic Puzzle Ever*.

Hoe hard en soms onnavolgbaar sommige van de 92 (genummerd van 1 tot en met 92 en dus — in tegenstelling helaas tot in andere soortgelijke boeken — zeer eenvoudig terug te vinden in het boek) zeer goed gekozen puzzels (van telkens eenvoudige instaproblemen tot al heel snel zeer pittige hersenbrekers) ook lijken, ze worden gelukkig zonder uitzondering aan het einde van elk hoofdstuk volledig uitgewerkt gepresenteerd. Dit boek — waarin verder nog vele andere zaken (soms kort) aan de orde komen zoals Sudoku-problemen, schaakproblemen, Mastermind en het fameuze *Problem of Cell 13* (beste detective-verhaal ooit volgens Rosenhouse) — is zeer helder en leesbaar geschreven en staat garant voor vele uren puzzelplezier (en als dat niet genoeg is geeft de zeer uitgebreide literatuurlijst nog vele nuttige tips om bijvoorbeeld het onvolprezen werk van Smullyan en dat van Martin Gardner nog eens nader te exploreren). Een aanrader dus. *Loop van der Vaart*



Ananyo Bhattacharya

**The Man from the Future
The Visionary Life of John von Neumann**

Penguin Random House, Imprint Allen Lane, 2021

xiv + 354 p., prijs £20.00

ISBN 9780241398852

John von Neumann was een van de grootste wiskundigen van de twintigste eeuw, en, hoewel misschien niet de meest diepzinnige of breedste, mogelijk de briljantste en meest veelzijdige. Zijn snelheid van denken en begrip, zijn rol als pionier bij gebieden uiteenlopend van zuivere wiskunde tot toegepaste wiskunde, natuurkunde, economie en informatica, aan de zuivere wiskundekant de theorie van operator-algebra's en ergodentheorie tot toepassingen als computerontwerp en speltheorie, zijn lidmaatschap van de 'Marsmannetjes', de geniale Hongaarse groep wetenschappers, die bijdroegen aan de Amerikaanse atoombom in het Manhattan-project, maakten hem legendarisch. Om een idee te krijgen over de indruk die hij op prominente tijdgenoten maakte: hier zijn drie Nobelprijswinnaars en een Abelprijswinnaar aan het woord:

Hans Bethe: "I have sometimes wondered whether a brain like von Neumann's does not indicate a species superior to that of man."

Enrico Fermi tegen een student: "You know, Herb, Johnny can do calculations in his head ten times as fast as I can. And I can do them ten times as fast as you can, so you can see how impressive Johnny is." En volgens het verslag van een andere student: "John von Neumann came by and saw what Fermi had on the blackboard and asked what he was doing. So Enrico told him and John von Neumann said: 'That's very interesting.' He came back about fifteen minutes later and gave him the answer. Fermi leaned against his doorpost and told me: 'You know, that man makes me feel I know no mathematics at all.'"

Eugene Wigner: Wigner, een goede vriend van Von Neumann, sinds ze leerlingen waren aan dezelfde middelbare school, toen hij bij de uitreiking van zijn Nobelprijs de vraag kreeg waarom er in zijn generatie zoveel Hongaarse genieën voorkwamen, antwoordde: "Het enige genie dat ik kende was Von Neumann."

Peter Lax: "To gain a measure of von Neumann's achievements, consider that had he lived a normal span of years, he would certainly have been a recipient of a Nobel Prize in economics. And if there were Nobel Prizes in computer science and mathematics, he would have been honored by these, too. So [he] should be thought of as a triple Nobel laureate or, possibly, a $3\frac{1}{2}$ -fold winner, for his work in physics, in particular, quantum mechanics."

Nog steeds is het artikel van Paul Halmos (die, zelf Hongaars, een paar jaar Von Neumanns assistent was) 'The Legend of John von Neumann' een van de beste beschrijvingen van zijn karakter en wiskundige betekenis. Een andere wetenschapper die hem persoonlijk kende en breed genoeg was om hem kritisch te appreciëren was Freeman Dyson die in zijn stukken voor de *Notices* van de AMS 'Birds and Frogs' en 'A walk through Johnny von Neumann's Garden' op zijn bijdragen en wetenschappelijke stijl inging. Maar voor bijna iedereen is het te veel gevraagd om zo iets als een wetenschappelijke biografie van Von Neumann te schrijven. Het boek van Bhattacharya, zelf gepromoveerd fysicus en wetenschaps-journalist, is wat dat betreft dan ook maar gedeeltelijk gelukt. Hij beschrijft de belangrijkste gebeurtenissen in Von Neumanns leven, en maakt dan in verschillende hoofdstukken een selectie van een aantal belangrijke wetenschappelijke bijdragen van Von Neumann, en geeft ook aan waartoe die later zoal geleid hebben. Hij geeft daarmee een behoorlijke, zij het nog steeds onvolledige indruk van de grote invloed die Von Neumanns ideeën nog steeds uitoefenen. De gemaakte keuzes weerspiegelen de interesse, de expertise en ook de beperkingen van de auteur.

Janos (Jancsi) von Neumann, 'Johnny' na zijn emigratie naar de Verenigde Staten, de zoon van een Hongaars-Joodse bankier, was een wonderkind. Na een opleiding en promotie in Boedapest, Zürich en Berlijn, en een paar tijdelijke aanstellingen in Duitsland als Privatdozent belandde hij in de Verenigde Staten, waar hij een baan kreeg aan het net opgerichte Institute for Advanced Studies in Princeton, als jongste van de hoogleraren daar (naast onder andere Einstein).

Hij was tweemaal getrouwd. Uit zijn eerste huwelijk dat in een scheiding eindigde had hij een dochter, Marina. Volgens de scheidingsregeling zou die tot haar twaalfde bij haar moeder wonen, daarna bij haar vader, omdat ze dan tot de leeftijd des onderscheids ('the age of reason') zou zijn gekomen, en maximaal profijt zou kunnen trekken van de intelligentie van haar vader. Het overmatig vertrouwen in de ratio dat hier uit sprak is typerend voor het karakter van Von Neumann. Zoals die dochter later aangaf is de puberteit niet echt een 'age of reason', maar toch lijkt de aanpak gewerkt te hebben, ze werd later een prominente econoom. Zijn tweede huwelijk was met Klara Dan, die bij de prototypes van de computers die Von Neumann ontwierp als een van de eerste programmeurs ter wereld optrad. Hoewel ze dus van bovengemiddelde intelligentie moet zijn geweest, gaf het leven met Von Neumann, die vaak omschreven werd als de intelligentste mens ter wereld, haar een chronisch minderwaardigheidscomplex. Er was vrijwel niemand die Von Neumann kon bijhouden, maar hij trad wel regelmatig als mentor en steun op voor jongere wis- en natuurkundigen. Ik leerde uit het boek dat onder andere Mandelbrot, de latere uitvinder/profeet van fractalen, er daar eentje van was.

In het eerste hoofdstuk worden Von Neumanns pogingen om betrouwbare grondslagen van de wiskunde te vinden besproken. Hoewel hij bestaande ideeën fatsoeneerde en wiskundig veel

scherper formuleerde dan tevoren, liep het door Hilbert opgestarte programma uit op een faliekante mislukking door de stelling van Gödel. Die gebruikte het formalisme zoals Von Neumann dat had ontwikkeld, maar gebruikte dat destructief, om aan te tonen dat er ware maar onbewijsbare beweringen bestonden. Von Neumann herkende als eerste belang en diepgang van Gödels resultaten, en zag direct, weliswaar na Gödel, maar reeds voordat hij Gödels preprint daarover zag, de consequenties over de onmogelijkheid van consistentiebewijzen (voor voldoende rijke wiskundige systemen). Maar het was het einde van Von Neumanns werk over grondslagen van de wiskunde, al is die achtergrond in zijn latere werk over computers duidelijk terug te vinden. Turing, die ook het ‘Entscheidungsproblem’ als onoplosbaar identificeerde, kwam na zijn promotie naar Princeton, en Von Neumann zag, alweer direct, het belang van wat hij gedaan had, eerder dan bijna alle anderen. Von Neumann bleef een levenslange bewonderaar van Gödel, zijn collega in Princeton, en bleef ook groot respect voor Turing houden.

Het hoofdstuk over quantummechanica concentreert zich op grondslagen van de quantummechanica, theorieën met verborgen variabelen, en de latere bezwaren van met name Bohm en Bell (met als vergeten voorloper Grete Hermann) tegen de claim van Von Neumann dat er geen ‘redelijke’ (en wat redelijk is, is en blijft nog steeds tamelijk betwistbaar) theorie van verborgen variabelen kan bestaan. Von Neumanns constructievere bijdragen, zoals de invoering van de dichtheidsmatrix, de formulering van quantummechanica in Hilbertruimtes, zijn formulering van het meetprobleem en zijn werk aan onbegrensde operatoren blijven onderbelicht, ik vond het hoofdstuk daardoor wat onevenwichtig.

Het hoofdstuk over Von Neumanns bijdragen aan de atoombom benadrukt zijn bijdragen aan de theorie van explosies en implosies. Ook leerde ik daar dat hij een octrooiaanvraag schreef samen met de beruchte atoomspion Klaus Fuchs.

De grootschalige berekeningen die vereist waren bij het maken van de bom leidden Von Neumann tot zijn interesse in computers. De prehistorie van de computer is berucht wegens verschillende claims en gevechten over prioriteiten en patenten, en over het belang van ieders bijdrage. Het is wel duidelijk in alle versies dat Von Neumann hierbij een zeer prominente rol speelde. Een plausibele speculatie in het boek is dat gedurende de oorlog, toen Von Neumann een aantal maanden in Engeland was, hij Turing weer ontmoette, en dat beiden elkaar stimuleerden en inspireerden. Turing, die toen een leidende rol speelde in Enigma, bij het decoderen van geheime Duitse berichten, een project dat jarenlang geheim bleef, pleegde zelfmoord, na chemisch gecastreerd te zijn, en Von Neumann stierf ook betrekkelijk jong, dus geen van beiden heeft dit later kunnen bevestigen of ontkennen. Het is wel bekend dat Von Neumann Turings bijdragen aan de informatica heel hoog inschatte.

Twee volgende hoofdstukken gaan in op Von Neumanns rol in de speltheorie, zijn minimax-theorema en zijn boek met Morgenstern over wiskundige economie, en ook op zijn latere rol als strategisch consultant, zowel binnen de Rand Corporation, als voor allerlei militaire en politieke instanties. De speltheorie kreeg naast de economie al snel ook binnen de politiek, de militaire strategie, en de biologie (evolutietheorie) allerlei toepassingen. Politiek was Von Neumann te omschrijven als centrumrechts, en sterk anticommunistisch; maar een fanaticus was hij toch niet, zo

steunde hij Oppenheimer toen die beschuldigd werd wegens zijn te linkse opinies. Kort na de oorlog adviseerde Von Neumann een preventieve oorlog tegen de Sovjet-Unie (net als de linkse pacifist Bertrand Russell, overigens), maar nadat Stalin ook een atoombom had, leidden zijn adviezen tot de MAD-strategie (Mutual Assured Destruction), waarin atoomwapens alleen als dreiging, maar niet als militair gereedschap gebruikt worden; volgens sommigen heeft die strategie ons voor een atoomoorlog behoed. In de periode dat ik deze recensie schrijf valt net Rusland Oekraïne binnen, de aanname (fundamenteel in veel toepassingen van de speltheorie in economie en politiek) dat alle strategische spelers rationele beslissingen nemen, lijkt helaas lang niet altijd gerechtvaardigd.

Het laatste hoofdstuk beschrijft Von Neumanns ideeën over biologie, en het modelleren van (zelf-replicerende) cellulaire automaten, en hoe die zich via Conways Game of Life en Wolframs bijdragen verder ontwikkelden, en ook hoe ver hun invloed reikte binnen het vakgebied van de Kunstmatige Intelligentie.

Voor wiskundigen ontbreken de theorie der operator-algebra's (Von Neumann-algebra's), volgens velen zijn wiskundig meest diepzinnige bijdrage, een gebied waarbinnen bijvoorbeeld Fields-medailles zijn uitgereikt aan Alain Connes en Vaughan Jones. Ook miste ik een overzicht over de ergodentheorie, waarin Von Neumanns ergodenstelling (bewezen voor, maar gepubliceerd na, de ergodenstelling van Birkhoff) een heel vroege mijlpaal was. En zo ontbreekt er nog wel meer.

Het boek is dus lang niet de definitieve wetenschappelijke biografie die Von Neumann toekomt, maar het is goed geschreven, bevat veel interessants, en behandelt allerlei wat in andere boeken niet of minder aan de orde komt. Voor Von Neumann aficionado's is het zeker aan te raden, voor een wiskundige ontbreken er belangrijke stukken van het raadsel dat het ‘denkbeest’ (volgens Einstein) Von Neumann was en blijft.

Aernout van Enter



Marcel van Belle

Schopenhauer De rehabilitatie van een miskend genie

Tilburg, Postbellum, 2021

(uitgave in eigen beheer, marcel@shape9.nl)

351 p., prijs €25,00

ISBN 9789081347105

Marcel van Belle is a business economist and philosopher who became interested in and fascinated by the philosophical writings of L.E.J. Brouwer (1881–1966). Familiar with the work of Schopenhauer (1788–1860) he noticed great similarities between the ideas of Schopenhauer and Brouwer. Brouwer is generally considered a great mathematician, but his philosophical papers are less appreciated. This is most likely due to the fact that most mathematicians have little affinity with philosophy, and, conversely, most philosophers have little affinity with mathematics. This phenomenon has for instance resulted in deleting large parts of Brouwer's philosophical writings from his Collected Works, part I, *Philosophy and Foundations of Mathematics*, edited by A. Heyting in 1975. According to the author, this phenomenon has also led to serious

misinterpretations of Brouwer in the major biographies by Walter van Stigt (1990) and Dirk van Dalen (2001/2013).

Chapter 1 outlines Schopenhauer's life, presents his oeuvre and discusses his world view on the basis of the first four books of his *Die Welt als Wille und Vorstellung*. Chapter 2 starts with an outline of Brouwer's life and continues with a presentation of his philosophical works between 1898 (Geloofsbelijdenis) and 1952 (Historical Background, Principles and Methods of Intuitionism). The main chapter, chapter 3, analyses in detail the similarities and differences between Brouwer's and Schopenhauer's philosophical writings by comparing the texts of both authors on epistemology, metaphysics, aesthetics and ethics in sections 3.2, 3.3, 3.4 and 3.5, respectively.

The author concludes on page 295 that without any doubt Brouwer must be seen as a genuine, albeit *critical*, follower of Schopenhauer. Although some, among them Teun Koetsier, have noticed a certain similarity between these two great thinkers, up till recently nobody has drawn the ultimate consequences of this similarity and has been able to find a satisfactory explanation for the differences of opinion between Schopenhauer and Brouwer.

The book finishes with a very good and interesting résumé in three pages of Brouwer's philosophy (pp. 297–299). It also has an appendix with a short history of philosophy (pp. 301–322) for those who are not familiar with philosophy.

In his general summary (pp. 343–345), the author concludes that (1) Brouwer has clearly adopted Schopenhauer's general philosophical framework; (2) in essence, Brouwer deviates from Schopenhauer only in three fundamental respects and explicitly accounts for these: (a) he denies the a priori status of both space and (b) causality and accepts only time as an a priori form of

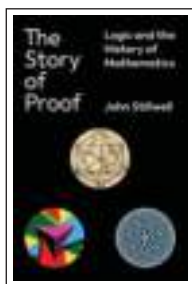
sensibility, (c) he denies the existence of general concepts in human cognition; (3) all other differences can be traced directly or indirectly to these three deviating principles; (4) to the extent that Schopenhauer's philosophical views are compatible with these principles, Brouwer does not deviate from them; (5) the philosophical solutions that Brouwer devises when the occasion arises, are often inventive and sometimes extremely original; and (6) Brouwer's biographical data clearly show that his moral behavior is based on Schopenhauer's ethical system.

Brouwer has reduced the scope of objective knowledge to the bare minimum: mathematics as it can be constructed from only the primal intuition of time. Pure mathematics is for Brouwer a languageless human activity that takes place in the (sensory) imagination.

Summarizing it may be said that the author of this Dutch book argues that Brouwer clearly builds on the work of Schopenhauer, although at some points he also deviates from Schopenhauer and goes his own way. More precisely, the author claims that Brouwer has thoroughly reshaped Schopenhauer's epistemology, while staying as close as possible to Schopenhauer's views on metaphysics, aesthetics and ethics. The author supports his claim by comparing text fragments of Schopenhauer with those of Brouwer and next points out and analyses similarities and differences. He concludes that Brouwer was not only a great mathematician, but a great philosopher as well, at the same level as Kant and Schopenhauer; and not a vague mystic, but a thoroughly disciplined thinker. Brouwer is generally considered a difficult person, but Brouwer's biography makes it clear that Brouwer greatly respected the autonomy of others and only fiercely resisted others who tried to impose their will on him.

Harrie de Swart

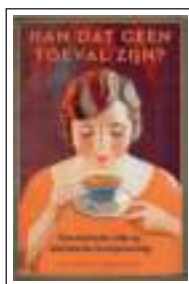
Recent verschenen publicaties. Als u een van deze boeken wilt bespreken of als u suggesties heeft voor andere boeken voor deze rubriek, laat dit dan per e-mail weten aan reviews@nieuwarchief.nl.



John Stillwell

**The Story of Proof:
Logic and the History of Mathematics**

Princeton University Press, 2022
ISBN 9780691234366
[press.princeton.edu/books/hardcover/
9780691234366/the-story-of-proof](http://press.princeton.edu/books/hardcover/9780691234366/the-story-of-proof)



Ronald Meester, Klaas Slooten

Kan dat geen toeval zijn?

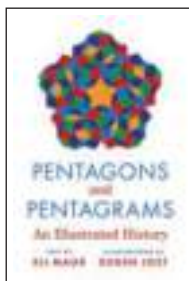
Amsterdam University Press, 2022
ISBN 9789463725088
aup.nl/book/9789463725088



Michael Artin

**Algebraic Geometry
Notes on a Course**

American Mathematical Society, 2022
ISBN 9781470471118
bookstore.ams.org/gsm-222



Eli Maor, Eugen Jost

**Pentagons and Pentagrams
An Illustrated History**

Princeton University Press, 2022
ISBN 9780691201122
[press.princeton.edu/books/hardcover/
9780691201122/pentagons-and-pentagrams](http://press.princeton.edu/books/hardcover/9780691201122/pentagons-and-pentagrams)