

Inhoud | Contents

Artikelen | Features

- 137 **Maatschappij | Society**
Ukrainians have always felt themselves to be free Europeans
Alexander Kuchansky
- 139 **Maatschappij | Society**
Life during war
Mykola Malyar
- 140 **Geschiedenis | History**
The Scottish Book
Raf Bocklandt
- 143 **Evenement | Event**
NWD: Een nieuwe dimensie
Rob van Oord
- 147 **Onderzoek | Research**
Het $3x + 1$ -probleem, recente ontwikkelingen en oplossingsrichtingen
John Simons
- 155 **Onderzoek | Research**
Een recept voor quasimodulaire vormen
Jan-Willem van Ittersum
- 160 **Evenement | Event**
Sfeerimpressie Abelprijs 2022
Wil Schilders
- 163 **Column | Column**
Wortel min 1 bestaat niet!
Piet Groeneboom
- 167 **Onderzoek | Research**
Zwarte gaten en het werk van Roger Penrose
Klaas Landsman
- 175 **Recreatieve wiskunde | Recreational Mathematics**
Problems inspired by maths' biggest prize
Alex Bellos
- 176 **Onderwijs | Education**
Bespreking examen vwo wiskunde B 2022: Wat voor leerlingen werden er dit jaar student?
Wim Caspers
- 181 **In Memoriam | Obituary**
Theodorus Jozef Dekker: Vooraanstaand numeriek wiskundige, en informaticus van het eerste uur
Peter van Emde Boas
- 189 **In Memoriam | Obituary**
Gerhard Woeginger: A formidable scientist and a teacher with a natural gift
Jan Karel Lenstra, Franz Rendl, Frits Spijksma, Marc Uetz

Rubrieken | Departments

- 131 Redactioneel
Robbert Fokkink
- 132 Agenda
Nikki Levering
- 134 Nieuws
Nikki Levering
- 153 Het keerpunt van Rolf Ypma
Daan Mulder
- 173 Proof by example: Shanti Adensi Venetiaan
Džemila Šero, Diletta Martinelli
- 179 Wiskundigen in den vreemde
Jan Swart
- 191 Problemen
Onno Berrevoets, Daan van Gent

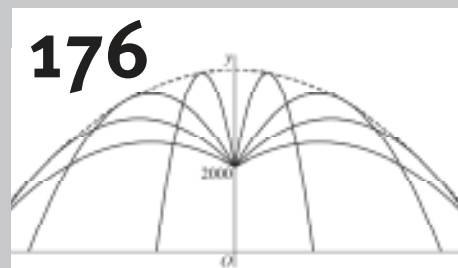
Uitgelicht

143



Een verslag van de Nederlandse Wiskunde Dagen door Rob van Oord.

176



Het examen vwo wiskunde B 2022 wordt besproken door Wim Caspers.

Colofon

Het Nieuw Archief voor Wiskunde is een uitgave van het Koninklijk Wiskundig Genootschap en verschijnt vier maal per jaar. Het tijdschrift richt zich op eenieder die zich beroepsmatig met wiskunde bezighoudt, als academisch of industrieel onderzoeker, student, leraar, journalist of beleidsmaker. Het stelt zich ten doel te berichten over ontwikkelingen in de wiskunde in het algemeen en in de Nederlandse wiskunde in het bijzonder.

ISSN 0028-9825

Adres

Nieuw Archief voor Wiskunde
Centrum Wiskunde & Informatica
Postbus 94079, 1090 GB Amsterdam
tel. 020-5924288
redactie@nieuwarchief.nl
www.nieuwarchief.nl

Hoofredactie

Raf Bocklandt (r.r.j.bocklandt@uva.nl)
Robbert Fokkink (r.j.fokkink@tudelft.nl)

Eindredactie/Bladmanager

Fred Drissen (fred@nieuwarchief.nl)

Redactie

Francesca Arici (UL), Viktor Blåsjö (UU), Hans Cuypers (TU/e), Teun Koetsier (VU), Nikki Levering (UvA), Daan Mulder, Nicolaos Starreveld (UvA), Clara Stegehuis (UT), Hans Sterk (TU/e), Mark Timmer (UT)

Problemenrubriek (problems@nieuwarchief.nl)

Onno Berrevoets en Daan van Gent

Bureauredactie

Anne van Grinsven

Illustraties

Ryu Tajiri

Vormgeving

Susanne Laws (omslag, begeleiding binnenwerk)
Kitty Molenaar (ontwerp)

Druk

Veldhuis Media

Advertenties

advertenties@nieuwarchief.nl

Koninklijk Wiskundig Genootschap

www.wiskgenoot.nl

Platform Wiskunde Nederland

www.platformwiskunde.nl

European Mathematical Society

www.euro-math-soc.eu

International Mathematical Union

www.mathunion.org

Koninklijk Wiskundig Genootschap

Het Koninklijk Wiskundig Genootschap (KWG) is een landelijke vereniging van beoefenaars van de wiskunde. In 1778 opgericht onder de zinspreuk: 'Een onvermoeide arbeid komt alles te boven' is het 's werelds oudste nationale wiskundegenootschap. Leden ontvangen het Nieuw Archief voor Wiskunde als onderdeel van hun lidmaatschap.

Bestuur

Barry Koren (TU/e, voorzitter), Mathisca de Gunst (VU, vice-voorzitter), Alef Sterk (RUG, penningmeester), Jop Briët (CWI, secretaris), Danny Beckers (VU), Rogier Bos (UU), Michael Muger (RU), Willem Jan Palenstijn (CWI), Wioletta Ruszel (TUD).

Secretariaat

Koninklijk Wiskundig Genootschap, CWI
Postbus 94079, 1090 GB Amsterdam
wiskgenoot@wiskgenoot.nl

Ledenadministratie KWG / Abonnementen

admin@wiskgenoot.nl, tel. 020-5924008
Wijzigingen of opzegging kunt u ook doorgeven door in te loggen op www.wiskgenoot.nl.

Contributie

Tarieven per jaar (bij betaling per automatische incasso krijgt u €2,50 korting):

- gewoon lid: €97,50
 - reciprociteitslid: €77,50
 - gepensioneerden en werklozen: €52,50
 - aio's, oio's, studenten: €42,50 (max. 4 jaar)
 - lid zonder Nieuw Archief: €57,50
- Studenten en pas afgestudeerden kunnen een jaar lang gratis lid worden.

Voor verzending van het Nieuw Archief naar het buitenland wordt een portotoeslag van €10 in rekening gebracht.

Instituten in Nederland en buitenland kunnen zich abonneren op het Nieuw Archief voor Wiskunde voor €105 (Nederland), €115 (Europa) of €117,50 (buiten Europa).

Members of foreign societies

Members of SIAM, the *Société Mathématique de France*, the *Gesellschaft für Angewandte Mathematik und Mechanik*, the *Deutsche Mathematiker-Vereinigung*, and of the *American, Australian, Belgian, Indian, London, Spanish, and South-African Mathematical Societies* living outside of the Netherlands pay €77,50 instead of the full membership fee of €97,50 a year. Conversely, these foreign societies, as well as the VvS+OR and the NVORWO, have reduced membership fees for KWG members. A postage charge of €10 is added for members living abroad but in Europe, and a charge of €12,50 for members living outside of Europe.

Exchange subscriptions

Koninklijk Wiskundig Genootschap Library
Centrum Wiskunde & Informatica
P.O. Box 94079, NL-1090 GB Amsterdam
KWG-exchange@cwi.nl

Informatie voor auteurs

Kopij

Kopij dient per e-mail te worden aangeboden aan kopij@nieuwarchief.nl. Voor meer informatie en auteursinstructies zie www.nieuwarchief.nl.

Volgende nummers

nummer	maand	verschijnen	deadline kopij
23(4)	december	2022	verstrekken
24(1)	maart	2023	01-11-2022
24(2)	juni	2023	01-02-2023
24(3)	september	2023	01-05-2023

Instituuts- en bedrijfsleden

De publicaties van het KWG worden mede mogelijk gemaakt door de bijdragen van de volgende instituten en bedrijven.

	Centrum Wiskunde & Informatica
	Universiteit van Amsterdam
	Vrije Universiteit Amsterdam
	Rijksuniversiteit Groningen
	Universiteit Leiden
	Radboud Universiteit Nijmegen
	Universiteit Utrecht
	Technische Universiteit Delft
	Technische Universiteit Eindhoven
	Universiteit Twente
	Elsevier
	ORTEC

Op het omslag

De pitten van de zonnebloem — het nationale symbool van Oekraïne — vormen een wiskundig patroon waarin we Fibonacci zien terugkomen. Onze collega's uit Kyiv en Oezjhorodan beschrijven de gevolgen van de Russische invasie voor hun wiskundeafdelingen, zie pagina 137 en 139.

Historische anekdotes

Wiskundeconferenties zijn vaktechnisch niet aan mij besteed. Mijn hoofd is veel te langzaam om de snelle informatie van een voordracht te verwerken. Het interessantste zijn de gesprekken bij de koffie of de lunch en wat dan altijd bij mij blijft hangen zijn historische anekdotes. Pierre Arnoux vertelde mij eens dat hij ging luisteren bij een college van zijn broer Mathieu, hoogleraar Middeleeuwse geschiedenis. Mathieu sprak over de betekenis van Fibonacci voor de opbloei van de Italiaanse economie. “Dat was een interessant college, we hebben wat gemeen, want ik werk aan de rij van Fibonacci”, zei Pierre tegen zijn broer. “Wat is de rij van Fibonacci?”, vroeg Mathieu. Leonardo van Pisa introduceerde de decimale notatie en de moderne boekhouding in Europa. Dat gedoe met die konijnen is een speeltje voor wiskundigen.

Van David Leslie hoorde ik waarom hij had besloten om zijn studie materiaalkunde eraan te geven. “Het was allemaal veel te empirisch.” Duizend jaar geleden kwamen wapensmeden erachter dat je veel betere zwaarden kon maken door het gloeiende staal te dopen in de urine van een ezel. Een smid was een zwaard aan het maken en toen piste zijn ezel er bij toeval overheen. Dat zwaard werd veel scherper en sterker dan normaal. Sindsdien hield elke smid een ezel en voerde het beest tomaten, want dat had die allereerste ezel ook gegeten. Eeuwenlang volgden wapensmeden deze methode, zonder uit te zoeken wat er nu essentieel was in

het proces. “Je hebt geen ezel nodig en die tomaten zijn helemaal onzin. Toen ben ik wiskunde gaan studeren”, besloot David.

Rostislav Grigorchuk vertelde mij dat tsaar Peter de Grote geen Rus was. Toen hij terugkwam uit Zaandam was hij een kop groter geworden, sprak Russisch met een accent, en zijn hond moest niets van hem weten. Hij was een heel ander mens geworden. “Jullie hebben onze Peter ingewisseld voor een Hollander.” Zou Vladimir Poetin dat weten? De Russische president is ook een liefhebber van geschiedenis en spiegelt zich graag aan Peter de Grote. Toen zijn dochter nog in Voorschoten woonde (in de Krimwijk) kwam Poetin regelmatig langs en is er meermalen gespot in de Albert Heijn. Ook Poetin ziet er heel anders uit sinds hij in Nederland is geweest en schijnt veel roekelozer te zijn geworden. Zou onze geheime dienst hem hebben ingewisseld? Bij kale mannen is dat immers niet zo moeilijk. Welke gewetenloze schurk er ook in het Kremlin zit, de wereld is nog lang niet van hem af. Er komt voorlopig geen einde aan de oorlog in Oekraïne. Onze collega's in Kyiv en Oezjhorod beschrijven hoe zij, zo goed en zo kwaad als het kan, de wiskundeafdelingen draaiend proberen te houden. ☞

Agenda

| Upcoming Events

september 2022

4–24 september 2022

IMAGINARY

Reizende tentoonstelling over zichtbare en onzichtbare wiskunde. Georganiseerd door PWN in samenwerking met Nederlandse universiteiten en ondersteund door partnerorganisaties.

plaats Huygensgebouw, Nijmegen

info imaginarymaths.nl

5–9 september 2022

YES: Optimal Transport, Statistics, Machine Learning and Moving in Between

Lezingen van experts uit verschillende vakgebieden, en een workshop met presentaties over statistiek en optimaal transport.

plaats Eurandom, Eindhoven

info eurandom.nl

12–14 september 2022

Stochastic Models in Life Sciences

Conferentie over de ontwikkelingen in stochastische modellen voor biologische processen.

plaats Eurandom, Eindhoven

info eurandom.nl

16 september 2022

Annual meeting EWM-NL

Jaarlijkse bijeenkomst van de Nederlandse tak van European Women in Math, met thema 'Wiskunde en Kunst'.

plaats Vrije Universiteit Amsterdam

info vu.nl

16 september 2022

Finale Nederlandse Wiskunde Olympiade

Nationale finale van de wiskundeolympiade voor middelbare scholieren.

plaats Technische Universiteit Eindhoven

info wiskundeolympiade.nl

20–22 september 2022

DDQC 2022: Management of Service Systems

Online workshop over de nieuwe uitdagingen van wachtrijtheorie binnen servicesystemen.

plaats online

info ddqc.io

23 september 2022

Wiskundetoernooi

Wiskundetoernooi voor teams van middelbare scholieren. Een team bestaat uit vier of vijf leerlingen uit 5–6 vwo en een begeleider.

plaats Radboud Universiteit, Nijmegen

info ru.nl/wiskundetoernooi

24 september 2022

Junior Wiskunde Olympiade

Jaarlijkse landelijke wiskundewedstrijd voor leerlingen van havo en vwo, georganiseerd door de VU in samenwerking met de Nederlandse Wiskunde Olympiade en W4Kangoeroe.

plaats Vrij Universiteit Amsterdam

info wiskundeolympiade.nl

26–30 september 2022

Bridging the Gap: from Brain Mechanics to Brain Dynamics

Lorentz workshop, mede georganiseerd door Daniele Avitabile en Christian Bick (VU).

plaats Lorentz Center@Oort, Leiden

info lorentzcenter.nl

oktober 2022

1 oktober 2022

NVvW Geschiedenis-symposium

Symposium van de werkgroep Geschiedenis van de NVvW, met dit jaar als thema 'Machtige verhalen'.

plaats Museum Boerhaave, Leiden

info nvvw.nl

1–21 oktober 2022

IMAGINARY

Reizende tentoonstelling over zichtbare en onzichtbare wiskunde. Georganiseerd door PWN in samenwerking met Nederlandse universiteiten en ondersteund door partnerorganisaties.

plaats Minnaertgebouw, Utrecht

info imaginarymaths.nl

3–7 oktober 2022

Recent Trends in Spatial Stochastic Processes

Workshop over interacting random systems, met zowel aandacht voor theorie als toepassingen.

plaats Eurandom, Eindhoven

info eurandom.nl

Suggesties voor deze agenda zijn welkom.

Redacteur: Nikki Levering

agenda@nieuwarchief.nl

4–7 oktober 2022

□ Nonlocality: Analysis, Numerics and Applications

Lorentz workshop, mede georganiseerd door Qiang Du (Columbia).

plaats Lorentz Center@Oort, Leiden

info lorentzcenter.nl

5–7 oktober 2022

□ Solving Polynomial Equations and Applications

Workshop, onderdeel van het CWI Research Semester Programme. Mede georganiseerd door Monique Laurent en Simon Telen (CWI).

plaats CWI, Amsterdam

info cwi.nl

5–7 oktober 2022

□ Woudschoten Conference 2022

Een jaarlijkse conferentie van de Nederlands-Vlaamse Numerieke Analyse-groepen, georganiseerd door de Werkgemeenschap Scientific Computing (WSC).

plaats Woudschoten, Zeist

info wsc.project.cwi.nl/events

13–14 oktober 2022

□ Advances in Mathematical Neuroscience: Data, Models and Dynamics

Workshop over de laatste ontwikkelingen in wiskundige neurowetenschap.

plaats Vrije Universiteit Amsterdam

info vu.nl

17–21 oktober 2022

□ Making Sense of Interpretable Machine Learning

Lorentz workshop, mede georganiseerd door Ilker Birbil (UvA) en Hakan Akyuz (Erasmus)

plaats Lorentz Center@Snellius, Leiden

info lorentzcenter.nl

november 2022

november 2022

□ IMAGINARY

Reizende tentoonstelling over zichtbare en onzichtbare wiskunde. Georganiseerd door PWN in samenwerking met Nederlandse universiteiten en ondersteund door partnerorganisaties.

plaats Enschede

info imaginarymaths.nl

2–4 november 2022

□ YEQT: Machine Learning for Stochastic Networks

Workshop met Ton Dieker (Columbia), Tor Lattimore (Deepmind) en Laurent Massoulié (Inria) als keynote sprekers.

plaats Eurandom, Eindhoven

info eurandom.nl

3 november 2022

□ CWI Soirée en Van Wijngaarden Awards 2021

Uitgestelde uitreiking Van Wijngaarden Awards 2021 aan Susan A. Murphy (Harvard) en Marta Kwiatkowska (Oxford).

plaats Trippenhuis Amsterdam en online

info cwi.nl

5 november 2022

□ Jaarvergadering NVvW

Jaarlijkse vergadering en studiedag van de Nederlandse Vereniging van Wiskundeleraren. Thema is 'Wiskunde in eenheid'.

plaats Ichthus College, Veenendaal

info nvvw.nl/jaarvergadering

10–11 november 2022

□ Annual meeting Dutch Inverse Problems Community

Tweede editie, met masterclasses in 'High Performance Computing' en 'Inverse Problem Theory'.

plaats Conferentiecentrum De Werelt, Lunteren

info cwi.nl

11 november 2022

□ Prijsuitreiking Nederlandse Wiskunde Olympiade

De prijsuitreiking van de finale van de Nederlandse Wiskunde Olympiade.

plaats Technische Universiteit Eindhoven

info wiskundeolympiade.nl

11 november 2022

□ Voorronde Wiskunde A-lympiade

Voorronde van de jaarlijkse competitie voor leerlingen uit de bovenbouw havo/vwo met wiskunde A in hun pakket.

plaats eigen school

info wiskundeintteams.sites.uu.nl

11 november 2022

□ Wiskunde B-dag

Een competitie voor leerlingen uit de bovenbouw havo/vwo die wiskunde B in hun pakket hebben. Leerlingen werken in kleine teams de hele dag aan een wiskundig probleem.

plaats eigen school

info wiskundeintteams.sites.uu.nl

16 november 2022

□ CWI Lectures

Jaarlijkse lezingen, met dit jaar als thema 'Algebraic and Geometric Methods in Optimization'.

plaats CWI, Amsterdam

info cwi.nl

17–18 november 2022

□ Polynomial Optimization and Applications in Control and Energy

Workshop, onderdeel van het CWI Research Semester Programme. Mede georganiseerd door Monique Laurent (CWI) en Bert Zwart (TU/e, CWI).

plaats CWI, Amsterdam

info cwi.nl

december 2022

12–16 december 2022

□ Recent Developments in Stochastic Duality

Workshop over de meeste recente ontwikkelingen binnen de theorie en toepassingen van dualiteit in Markov processen.

plaats Eurandom, Eindhoven

info eurandom.nl

19–23 december 2022

□ The Lorentz Gas

Lorentz workshop, mede georganiseerd door Frank den Hollander, Luca Avena en Dalia Terhesiu (UL).

plaats Lorentz Center@Snellius, Leiden

info lorentzcenter.nl

januari 2023

30 januari–3 februari 2023

□ Studiegroep Wiskunde met de Industrie

Wiskundigen werken een week lang samen aan problemen voorgelegd door bedrijven.

plaats Rijksuniversiteit Groningen

info swi-wiskunde.nl

Nieuws

| News

Deze rubriek is een kroniek van wiskundige activiteiten in Nederland. Toekomstige activiteiten worden aangekondigd en van voorbije activiteiten wordt verslag gedaan. Wilt u uw aankondiging of verslag in deze rubriek geplaatst zien? Stuur ons dan uw bijdrage, zo mogelijk met illustratie. De redactie behoudt zich het recht voor berichten te weigeren of in te korten.

Redacteur: Nikki Levering
 nieuws@nieuwarchief.nl

Klaas Landsman ontvangt Spinozapremie

Klaas Landsman, hoogleraar mathematische fysica aan de Radboud Universiteit in Nijmegen, is een van de vier wetenschappers die dit jaar de NWO Spinozapremie ontvangt. Samen met de Stevinpremie is de Spinozapremie de hoogste onderscheiding in de Nederlandse wetenschap. NWO roemt de unieke manier waarop Landsman onderzoek doet op het grensvlak tussen wis- en natuurkunde met vernieuwende inzichten in de fundamentele, geschiedenis en filosofie van de fysica. Hij heeft zijn stempel op de mathematische fysica gedrukt door onder andere groepoïden, wiskundige symmetrieën, te introduceren in de natuurkunde. Verder bedacht hij een nieuwe klasse C^* -algebra's waarmee concepten in de kwantumtheorie in een nieuw daglicht kwamen te staan. Daarnaast is ook zijn maatschappelijke staat van dienst groot. Zo zat Landsman in de commissie die de huidige wiskundestructuur op de middelbare school, met types A, B, C en D, bedacht. Eerder dit jaar gaf Landsman een lezing over zwarte gaten op het Wintersymposium van het KWG, waarvan u verderop in dit nummer een artikel vindt. *nwo.nl*



Klaas Landsman

Fieldsmedaille voor vier wiskundigen

Op 5 juli zijn tijdens het ICM 2022 in Helsinki de Fieldsmedailles uitgereikt. Deze worden eens in de vier jaar toegekend aan een groep van twee tot vier wiskundigen jonger dan veertig jaar. Dit jaar zijn er vier Fieldsmedailles uitgereikt, aan Hugo Duminil-Copin (Genève, IHÉS), June Huh (Princeton), James Maynard (Oxford) en Maryna Viazovska (EPFL). Duminil-Copin krijgt de Fieldsmedaille voor het oplossen van open vraagstukken binnen de probabilistische theorie van fase-transities in de statistische fysica. Met name zijn werk aan Ising-type modellen van dimensies drie en vier en twee-dimensionale Fortuin–Kasteleyn-modellen wordt als baanbrekend beschouwd. June Huh, die zich pas in zijn masteropleiding op wiskunde richtte, ontvangt de prijs voor zijn bijdragen aan de geometrie en combinatoriek. Zo bracht hij de ideeën van de Hodge-theorie naar de combinatoriek, en bewees hij onder meer de Dowling–Wilson-, Heron–Rota–Welsh- en Mason-vermoedens. De Fieldsmedaille wordt James Maynard toegekend voor zijn spectaculaire werk in de structuur en verdeling van priemgetallen. Daarnaast heeft Maynard belangrijke bijdragen geleverd aan de oplossing van het Duffin–Schaeffer-vermoeden, en daarmee fundamenteel werk geleverd voor de diofantische benadering. Maryna Viazovska ontvangt de Fieldsmedaille voor het bewijs dat het E8-rooster de

dichtste pakking oplevert voor identieke bollen met acht dimensies, en haar verdere bijdragen aan de Fourieranalyse. Viazovska is na Maryam Mirzakhani pas de tweede vrouw in de geschiedenis die de Fieldsmedaille toegekend krijgt. *mathunion.org*

Nederlands goud op IMO

Op de Internationale Wiskunde Olympiade (IMO) in Oslo heeft Casper Madlener heel knap 37 van de 42 punten weten te behalen, waarmee hij 19de van de wereld is geworden. Dit leverde hem een gouden medaille op, na eerder dit jaar ook al een gouden medaille op de BxMO te hebben gewonnen. Ook de rest van het Nederlandse team zette een mooie prestatie neer. Jelle Bloemendaal (25 punten) en Kees den Tex (23 punten) sleepten beide een bronzen medaille in de wacht. Eervolle vermeldingen, voor het foutloos oplossen van ten minste een van de opgaven, waren er voor Lars Pos (21 punten), Mads Kok (20 punten) en Lance Bakker (19 punten). Lars, Mads en Lance wisten ieder zelfs twee of drie opgaven volledig foutloos op te lossen. Met de behaalde scores eindigde het Nederlandse team op plek 40 in het landenklassement. In totaal deden er 104 landen mee. *wiskundeolympiade.nl*



IMAGINARY

Na een eerdere editie in het schooljaar 2016–2017 is op 2 juni voor de tweede keer de IMAGINARY-tentoonstelling geopend. Deze reizende tentoonstelling over zichtbare en onzichtbare wiskunde wordt in samenwerking met de Nederlandse universiteiten georganiseerd door Platform Wiskunde Nederland. Het thema van deze tweede editie is 'Pracht en kracht van wiskunde', waarbij de schoonheid en maatschappelijke rol van wiskunde wordt getoond met aansprekende voorbeelden uit onder andere de economie, sport, zorg en misdaadbestrijding. Om deze voorbeelden aan de bezoekers te demonstreren, worden posters, 3D-objecten, puzzelopstellingen en interactieve touchscreens ingezet. De tentoonstelling werd geopend in Leiden, waarna het in 2022 nog verder zal reizen naar Nijmegen, Utrecht en Enschede. In 2023 kan de tentoonstelling bezocht worden in Eindhoven, Groningen, Amsterdam en Maastricht. Op elke locatie zijn gratis rondleidingen voor schoolklassen en andere geïnteresseerden. *imaginarymaths.nl*

KWG PhD-prijs en Pythagorasprijs uitgereikt op NMC

Op het Nederlands Mathematisch Congres (NMC) is de KWG PhD-prijs uitgereikt voor de beste voordracht door een promovendus. Lucas Slot, promovendus aan het CWI, mocht de prijs uit handen van Barry Koren (voorzitter KWG) in ontvangst nemen. Lucas onderzoekt het gebruik van semidefinite programming binnen de polynomiale optimalisatie, en zal in de maand september zijn proefschrift, geschreven onder begeleiding van Monique Laurent (CWI), verdedigen. De polynomiale optimalisatie die Lucas bestudeert vindt zijn oorsprong deels in het werk wat gedaan is om het zeventiende Hilbertprobleem op te lossen, en heeft toepassingen in de wiskundige optimalisatie van processen in onder andere energienetwerken, logistiek en transport. Tijdens het NMC werd ook de Pythagorasprijs uitgereikt, voor het best geschreven profielwerkstuk over een wiskundig onderwerp. Er waren drie finalisten, die allen hun werkstuk op het NMC mochten presenteren, waarna een vijfokoppige jury de winnaar bekend maakte. De derde prijs was voor 'Goochelen met kunstmatige intelligentie' van Raf Brenninkmeijer en Aron Hardeman (Willem Lodewijk Gymnasium, Groningen), over het programmeren van een neurale netwerk dat *Go* leert spelen. Fleur Koolhaas en Naomi van der Meer (Picasso Lyceum, Zoetermeer) sleepten een tweede prijs in de wacht. In hun project, 'Rekendidactiek', ontwierpen zij lessen om de relatie tussen verhoudingen en percentages te leren aan basisschoolleerlingen. De eerste prijs was voor Rosa Kroonstuiver (Bertrand Russell College, Krommenie), die in 'De getallenhemel' twee extra hoofdstukken schreef voor *De Telduivel* van Hans Magnus Enzensberger, waarin we Pythagoras en Sophie Germain tegenkomen. *cwi.nl, pyth.eu*



Lucas Slot ontvangt de KWG PhD-prijs uit handen van Barry Koren

Beoordeling financieel beleid kabinet

Sinds 2017 organiseert de commissie voor de Rijksuitgaven van de Tweede Kamer de V-100, waar het kabinet verantwoording moet afgeven aan honderd burgers. Deze groep wordt door de Tweede Kamer uitgenodigd de jaarverslagen van de ministeries te lezen, en kritische vragen te stellen over verschillende thema's. Dit jaar maakte de V-100 onderdeel uit van het kennisevenement 'Beweren en Bewijzen – Ontmoeting tussen wetenschap, advies en politiek', en waren er honderd jonge wetenschappers uitgenodigd. Onder hen ook jonge wiskundigen, zoals Rianne de Heide van de Vrije Universiteit Amsterdam. *vu.nl, tweedekamer.nl*

ACM STOC Award voor Ronald de Wolf

Voor het artikel 'Linear vs semidefinite extended formulations: exponential separation and strong lower bounds' heeft Ronald de Wolf (CWI, UvA) samen met zijn co-auteurs de prestigieuze ACM STOC 10-year Test of Time Award gewonnen. Ze ontvingen de award tijdens het ACM Symposium on Theory of Computing (STOC). Hun artikel is oorspronkelijk gepubliceerd bij het STOC 2012, waar het al de Best Paper Award won. Een van de belangrijkste resultaten van het artikel betreft de computationele complexiteit van het Travelling Salesman Problem (TSP). De Wolf en co-auteurs bewijzen namelijk dat ieder lineair programma dat het TSP beschrijft exponentiële grootte moet hebben.

quantumsc.nl



Ronald de Wolf

AI slaagt voor MIT-wiskundetentamen

Samen met collega's heeft computerwetenschapper Iddo Drori (MIT) een kunstmatig intelligent systeem ontwikkelt dat universitaire wiskundetentamen kan lezen en oplossen. De onderzoekers gaven het systeem, OpenAI Codex, tal van opgaven uit wiskundevakken gegeven op het MIT ter inzage. Na training van het systeem bleek het in 81% van de gevallen in staat een code uit te schrijven om een dergelijke opgave ook daadwerkelijk op te lossen. Er zit zelfs een stap-voor-stap-uitleg bij de gegenereerde oplossing, wat docenten in de toekomst veel tijd zou kunnen schelen. Een andere rol die OpenAI Codex zou kunnen spelen betreft het genereren van de tentamens. Het systeem is namelijk ook in staat, bij invoer van een selectie opgaves, zelf soortgelijke vragen in elkaar te zetten. Het onderzoek van Drori wijst uit dat de studenten van mening zijn dat de moeilijkheidsgraad van de nieuwe vragen goed aansluit, en dat zij geen tot weinig onderscheid kunnen maken in opgaven die geconstrueerd zijn door hun docenten en de opgaven gecreëerd door de AI. De bevindingen van Drori staan gepubliceerd in het wetenschappelijk tijdschrift *PNAS*.

KIJK Magazine

Nederlandse inbreng post-quantumcryptografie standaarden

Het National Institute of Standards and Technology (NIST) heeft vier algoritmes voor de standaardisering aangewezen. Ieder van de algoritmes is een samenwerking tussen vele onderzoeksgroepen, waarbij ook sterke Nederlandse inbreng: het CWI en de Radboud Universiteit zijn betrokken bij CRYSTALS-KYBER (digitale handteke-

ning) en CRYSTALS-DILITHIUM (public-key-versleuteling), en de TU/e is leidend geweest in de ontwikkeling van SPHINCS+, een versleutelingssysteem gebaseerd op hash-functies. *cwi.nl, tue.nl, nist.gov*

Oplossing voor 50-jaar oud Erdős-probleem

In 1850 stelde Thomas Penyngton Kirkman de volgende vraag: als vijftien meiden zeven dagen achter elkaar in groepjes van drie naar school lopen, is het dan mogelijk dat geen van hen twee dagen met eenzelfde meisje in het groepje zit. In grafentheorie termen: gegeven een graaf met vijftien punten (de meisjes), is het mogelijk deze zeven maal te construeren met vijf driehoeken, zodat ieder punt per constructie slechts in een driehoek zit, en de set van alle driehoeken geen driehoeken bevat die een lijn gemeenschappelijk hebben. In 1973 stelde Erdős een soortgelijke vraag, over de constructie van hypergrafen die twee tegenstrijdig lijkende eigenschappen bezitten, namelijk, in termen van het aantal driehoeken, globale dichtheid en lokale spreiding. Specifiek moeten alle punten ten minste een driehoek gemeenschappelijk hebben, en, voor iedere kleine verzameling driehoeken moeten er ten minste drie punten meer zijn dan het aantal driehoeken zelf. In januari hebben vier wiskundigen na vijftig jaar eindelijk het bewijs kunnen leveren dat dergelijke constructies bestaan zolang je genoeg punten in de hypergraaf hebt. De strategie voor de constructie, die gedetailleerd beschreven staat in het vijftig pagina tellende bewijs, kiest driehoeken via een random proces, en past deze iteratief en met veel zorg aan om aan de eisen te voldoen. De auteurs van het bewijs zijn optimistisch dat hun methode uitgebreid kan worden, zodat deze in de toekomst kan worden toegepast op andere combinatorische open problemen. Een potentieel voorbeeld is het Ryser–Brualdi–Stein-vermoeden, dat open staat sinds de jaren zestig.

quantamagazine.org

Koninklijk Wiskundig Genootschap

▣ Jong KWG

Er is enthousiast gereageerd op de vraag naar nieuwe KWG-bestuurders die een nieuw 'jong KWG' zullen gaan vormgeven. Binnenkort zal de eerste vergadering plaatsvinden waarin de eerste plannen besproken kunnen worden.

▣ Brouwermedaille 2023

Eens per drie jaar wijst het KWG een deelgebied van de wiskunde aan en vervolgens selecteert een speciale commissie een internationaal toonaangevend onderzoeker in dat deelgebied. De laatste wordt uitgenodigd tijdens het eerstvolgend Nederlands Mathematisch Congres (NMC) een voordracht over zijn of haar vakgebied te geven die toegankelijk is voor een algemeen wiskundig gehoor. Na afloop wordt de laureaat de Brouwermedaille met bijbehorende oorkonde uitgereikt. De medaille geniet groot internationaal prestige. Voor 2023 is als thema 'discrete wiskunde' gekozen. Dit thema kwam het laatst in 1996 aan bod, met László Lovász als toenmalige winnaar.

▣ NMC 2023

Het wetenschappelijke comité van het NMC 2023 zal worden voorgezeten door Maria Vlasiou. De evenementen 'Onderwijs meets onderzoek' en 'Speed dates with industry' zullen terugkeren naar het NMC.

Alexander Kuchansky

Head of the Department of Information Systems and Technology
Faculty of Information Technology
Taras Shevchenko National University of Kyiv, Ukraine
kuchansky@knu.ua



Society Russian invasion in Ukraine

Ukrainians have always felt themselves to be free Europeans

On 24 February 2022 Russia invaded Ukraine. Every day we hear news reports about the consequences for Ukrainian citizens. As a mathematical journal we are very curious to know how our colleagues at mathematical departments are dealing with the current situation. Dr. Alexander Kuchansky, Head of Department of Information Systems and Technology at Taras Shevchenko National University of Kyiv shares his experiences.

Until recently I believed that the most formative memories I had was the birth of my daughter, four years ago. Unforgettable feelings: light, full of happiness to hold your continuation in your hands. But at 5 am on 24 February 2022, with the unprovoked Russian invasion of Ukraine and the

first explosions, an opposite episode was added to these memories — full of hopelessness and uncertainty for the future of children, relatives and all Ukrainians. The following days cannot be summarized in these text lines. I would rather forget them: explosions, the roar of bombers, gunfights on the streets, the acrid smell of mold in a damp bomb shelter.

My daughter quickly learned that you need to fall on the ground and hide your head in the case of any whistling or loud noise. This is something that will always be with us now, even though such episodes are unthinkable for Europe in the 21st century. My family and I were lucky to be able to evacuate to the western part of Ukraine. But not everyone had such a possibility. Mass terror, murders of civilians in Irpin, Bucha, Mariupol and throughout the occupied part of Ukraine, filtration camps and rocket attacks took lives, and are still taking them. Mass war crimes by the Russian troops in Ukraine, reminiscent of episodes of the Second World War and the peculiarities of the political ideology of current Russia gave birth to a new term that is already familiar to everyone — Rushism or Russian fascism [1].

Since the education in February 2022 was remote (due to the back then ongoing Covid-19 restrictions), many students were at home in different regions of Ukraine. By this unfortunate coincidence some of them could not leave due to the occupation of these territories. The contact with them was also missing. The situation improved with the de-occupation of areas around Kyiv, Sumy and Chernihiv. However, the psychological condition of our students was terrible. Since the beginning of the war a psychological service has been actively



Alexander Kuchansky main scientific interests are scientometrics, scholarly communication, gender differences in scientific collaboration, time-series data mining, et cetera.

The Taras Shevchenko National University of Kyiv, founded in 1853, was named after writer and political activist Taras Shevchenko, who is considered the founder of modern Ukrainian literature. The university has produced many famous alumni, including:

Mykhailo Hrushevsky was a Ukrainian academician, politician, historian, and President of the Central Council of Ukraine (1917–1918).

Volodymyr Klychko is a former Ukrainian professional boxer. He held the world heavyweight championship twice, including the unified WBA (Super), IBF, WBO, and IBO. In February 2022, Klychko joined the Kyiv Territorial Defense Forces in response to Russia's invasion of Ukraine. He holds a PhD in sports science.

Maryna Viazovska is a Ukrainian mathematician who solved the sphere-packing problem in dimension 8. She also solved a conjecture by Jaap Korevaar and John-Jules Meyer. She was awarded the Fields Medal in July 2022, making her the second woman (after Maryam Mirzakhani) and the first Ukrainian to receive it.



The main building of the Taras Shevchenko National University of Kyiv

working at our university, trying to help everyone in need. Currently the education is offered remotely, because many students are internally displaced persons or left to other countries due to war.

At the beginning of the war also the Faculty of Information Technology building was damaged as a result of shelling by Russian troops, but currently the reconstruction work is underway and the faculty staff members could continue their work.

Even under these circumstances our students actively use the academic mobility programs, in particular Erasmus+. Some of them have even completed their studies while staying in the EU countries. At the same time from the first days of the war some of our staff members and gradu-

ate students joined the Territorial Defense Forces of the Armed Forces of Ukraine. Thanks to the situational study process, introduced at the university, they successfully teach and improve their qualification even in such extreme conditions.

Unfortunately, all foreign post-graduate and some Ukrainian students had to take an academic leave because they could not continue their studies. One of the reasons was a difficult psychological tension that prevented them from studying. Students who until recently were or just left the occupation, or have relatives on the territory occupied by Russia, with whom the relationship is complicated, experience difficulties with the lack of motivation, panicky moods and the inability to gain new



The building of the Faculty of Information Technology of the Taras Shevchenko National University of Kyiv was damaged as a result of shelling by Russian troops (March 2022)

knowledge. Scientists of the faculty who are involved in the international projects convince their colleagues not to cooperate with scientists affiliated in Russia. This country currently has nothing to do with the civilized world.

At the moment, more than 20% of the territory of Ukraine remains occupied by Russia, which is larger in area than Switzerland and Austria combined. But Ukrainians can defend their land from invaders and are doing everything possible, thanks to the help of the Netherlands and the entire EU, Great Britain, the USA, et cetera. Ukrainians have always felt themselves to be free Europeans. No imperial discourse can be imposed on our new generation. During twenty years of transformation our society went through two revolutions, the main idea of which was freedom and democracy, and the ongoing war with Russia — the country whose leadership considers democracy the main threat to its existence. Drawing attention of the world community to the Russian invasion of Ukraine is something that everyone can do, and it does help all Ukrainians in their struggle. ☞



Photo: Facebook

Mykyta Perebyinis was a student of the Faculty of Information Technology at the Taras Shevchenko National University of Kyiv. He, his mother and sister were killed near Irpin [2].



Photo: Teach for Ukraine

Yulia Zdanovska was a student of the Faculty of Mechanics and Mathematics at the Taras Shevchenko National University of Kyiv. She was killed by the Russian shelling of Kharkiv on 3 March 2022. She was 21 [3].

References

- 1 <https://www.nytimes.com/2022/04/22/magazine/racism-ukraine-russia-war.html>.
- 2 <https://www.nytimes.com/2022/03/09/world/europe/ukraine-family-perebyinis-kyiv.html>.
- 3 <https://cacm.acm.org/news/259846-in-memoriam-yulia-zdanovska-2000-2022/fulltext>.

Mykola Malyar

Dean of the Faculty of Mathematics and Digital Technologies
Uzhhorod National University, Ukraine
mykola.malyar@uzhnu.edu.ua



Society Russian invasion in Ukraine

Life during war

On 24 February 2022 Russia invaded Ukraine. Every day we hear news reports about the consequences for Ukrainian citizens. As a mathematical journal we are very curious to know how our colleagues at mathematical departments are dealing with the current situation. Professor Mykola Malyar, dean of the Faculty of Mathematics and Digital Technologies at Uzhhorod National University in Western Ukraine shares his experiences.

The Faculty of Mathematics and Digital Technologies is one of 21 departments at Uzhhorod National University, located in Zakarpatska Oblast on the western part of Ukraine. The first mathematics students, admitted to the Department of Mathematics within the Faculty of Physics and Mathematics of back then Uzhhorod State University, can be traced back to 1 September 1950. Sixteen years later, in 1966, the department had separated and became an independent faculty. Within some time, the study programs were no longer limited to the pure mathematical curriculum but also covered new developments in IT, aligned

with the modern requests and societal needs. Nowadays students follow study programs in Mathematics, Applied Mathematics, Secondary Education, System Analysis and Statistics.

Since its foundation the faculty is a place of interaction between mathematicians at diverse conferences and workshops. Students and professors are actively involved in international scientific projects and exchange programs. However, the war that has started on 24 February 2022 has changed this everyday life. Especially during the first few days of invasion one could recognize anxiety among the staff

members and students. Luckily, the administration of the faculty could calm down its colleagues and effectively organize teaching in a new reality. Currently all employees work remotely, ensuring the high quality of education in the ongoing study programs. This requires, of course, an extreme technical and technological support.

Many students and staff members of the faculty, and the university overall, are enrolled in different volunteering missions in Ukraine and abroad. They assist with logistics of the humanitarian help, accommodate refugees in the student dormitories and continue to do what they master the best — teach mathematics to children who fled from war.

There are also students and staff members who have joined the armed forces of Ukraine or territorial defense forces to protect their motherland. According to orders of the Ministry of Education and Science of Ukraine and rector of the Uzhhorod National University these students can continue and finish their studies remotely.

Additionally, the faculty hosts the administration of the Chernihiv Polytechnic National University that since the invasion has relocated from the northern part of Ukraine. People try to organize common events to leave good memories about the Zakarpattya region.

The faculty does its best to have excellent graduates with know-hows who are and will be extremely important after our victory over the aggressor to rebuild Ukraine's infrastructure, restart its economics and reform education, medicine and science.



Photo: <https://www.uzhnu.edu.ua/uk/cat/faculty-mat>

Teachers and students actively joined the volunteer movement

Raf Bocklandt

Korteweg-de Vries Institute for Mathematics
University of Amsterdam
r.r.j.bocklandt@uva.nl

History Lviv, Ukraine

The Scottish Book

The ongoing tragedy in Ukraine brings to mind a piece of mathematical cultural heritage from almost a century ago when Lviv, a city on the western borders of the country, was a center of excellence that hosted some of the most well known analysts and topologists of that time. In this article Raf Bocklandt describes the story of this flourishing mathematical community and the famous relic that it brought forth: the Scottish Book.

Lviv

Before the war in Ukraine started, Lviv, previously also known as Lwów in Polish or Lemberg in German, was a well kept secret that featured prominently on the bucket list of connoisseur city trippers. This hidden beauty spot was one of the few cities in Eastern Europe whose historic center has largely remained intact, despite its occupation by the Germans in the Second World War. Even now because it lies at the western border of the country it has largely been spared from the devastation that eastern cities like Charkiv and Mariupol suffered.

Nowadays Lviv is part of Ukraine, but it has seen many different rulers during the almost eight hundred years of its existence. It started out as the capital of the long since vanished kingdom of Ruthenia, a medieval eastern Slavic state that covered parts of Poland, Belarus, Moldova, Romania and Ukraine. In the fourteenth century it became part of Poland and this rule lasted for four hundred years until the Polish monarchy was split up between

Prussia, Russia and Austria at the end of the eighteenth century.

Lwów ended up in Austrian hands and was renamed Lemberg. During the nineteenth century the city grew into the fourth largest city in the Austrian empire. At first the Austrians tried to Germanize the city, but after the empire was restyled to the dual monarchy Austria-Hungary, the city gained more independence and became an important cultural center for Polish, Ukrainian and Jewish people. With the break-up of the empire after the First World War, both the Poles and Ukrainians tried to win over the city. A civil war ensued, and after two years of conflict Lwów became part of the reestablished Polish state.

During the twenties and thirties the city became the cradle for the cultural rebirth of the Polish nation. Counting five institutions of higher learning and many academies and societies, it had a very lively intellectual community and the streets and bars were buzzing with excitement. During that time the Lwów School of Mathematics was established under the impulse of Hugo Steinhaus and Stefan Banach.

The Scottish Café

Steinhaus [2, 5] was born in 1887 in a Jewish family and had studied mathematics and philosophy at the University of Lemberg (as it was called in these days). After a year he moved to Göttingen, did a PhD with Hilbert and in 1917 he returned to his alma mater where he later became a full professor. Between finishing his PhD and getting

a permanent academic position he spent some time in Krakow. There, walking in a park, he overheard someone talking about Lebesgue integration, a hot topic in analysis but not really a standard theme for casual causeries. Intrigued by the strange conversation, Steinhaus introduced himself to the two people sitting on the bench. One of them was Stefan Banach, a brilliant mind who had never bothered to take formal exams but maintained an active interest in current mathematical research.

After their serendipitous meeting in Krakow, Steinhaus and Banach became good friends, despite having very different characters. Steinhaus was a classical cultured professor, fluent in Latin and Greek, who gave minutiously prepared but sometimes difficult to follow lectures. He had broad interests: he wrote about a lot of different topics in geometry and analysis, and collaborated with economists, physicians and biologists. Banach [3, 6] on the other hand was a single-minded genius whose research focused almost solely on functional analysis. To the dismay of his later colleagues he didn't care about the proper dress professorial code, was often short of money, showed up late during term, and made up his — nevertheless inspiring — classes on the fly. On a mathematical level their different styles complemented each other and this proved to be a perfect match. They not only worked together on various mathematical problems, but they also founded a new journal on functional analysis and a series of mathematical monographs.

Steinhaus quickly realized the ingenuity of his new friend and helped him to obtain an academic post in Lwów despite his lack of formal qualifications. The two friends, now settled at the same university, became the



Lviv on a map of modern day Ukraine

Illustration: Wikimedia Commons



Photo: Wikimedia Commons

Banach with his friend Nikodym discussing Lesbesgue integration on a bench in Krakow.



Photo: Wikipedia

A present day picture of the Scottish Café



Photo: MacTutor History of Mathematics Archive

Stanisław Mazur hands over a goose to Per Enflo as a reward for solving problem 153 of the Scottish Book.

core of a larger group of mathematicians, which included other famous names such as Stanisław Ulam, Stanisław Mazur, Mark Kac, Kazimierz Kuratowski, Julius Schauder and Stefan Kaczmarz. Together they formed a local chapter of the Polish Mathematical Society, which held weekly meetings on Saturday, after which they would frequent some of the bars near the department.

Banach liked to do mathematics in bars. Fueled by coffee, cognac, beer and cigarettes no one could keep up with his fast thinking and drinking. On the Academic Square not far from the university stood a peculiar building with an arched portal flanked by two plump turrets. Inside on the ground floor resided the Scottish Café, a coffee house decorated in the Viennese style with marble tables. It wasn't the bar with the most refined food and drinks, but

because of the owner's generous bar tab policy it became Banach's favourite hang-out place and with him he brought along a flock of fellow mathematicians. He would always be the first one to arrive and the last to leave, only to return the next day with handwritten proofs of the problems discussed the previous day.

It did not take long before they started meeting on a daily basis, using the marble table tops as writing boards to accompany their mathematical discussions. This was not an ideal solution as it did not please the owner and often their scribbles were washed away the following day. In 1935 Banach's wife came up with an idea, she bought them a big notebook that was kept safely behind the counter of the bar and which could be consulted by any visitor who felt a mathematical urge.

The *Scottish Book*, as it was called, was not only reserved for the local mathematicians, but visitors from Krakow, Warsaw or even from places abroad such as Paris or Moscow were encouraged to contribute when they visited the department. Over the years the book filled with mathematical problems, both easy and difficult. Some were serious research questions, others just fun recreational puzzles. Some even came with prizes, like an ounce of caviar, a bottle of whiskey, or a live goose.

One problem for lunch

Many of the problems in the *Scottish Book* were concerned with the areas of expertise of the group: point-set topology, measure theory and functional analysis [7]. These were fairly new fields at that time: the now classical definition of a topological space had barely been settled upon, the Lebesgue measure dated from the beginning of the century, while the notion of a Banach space — a vector space with a complete norm — a crucial ingredient for functional analysis, was being developed in Lwów at that very moment by our main protagonist. These new abstract concepts enabled them to replicate classical analytical arguments to show that certain maps had zeros or fixed points, which had many applications in geometry, analysis and the study of differential equations.

As an example, let us focus on one of the problems from the book itself: nr 123. Although originally formulated quite technically, the result became later known in its colloquial culinary version, the ham sandwich theorem [1]. In the problem, Steinhaus



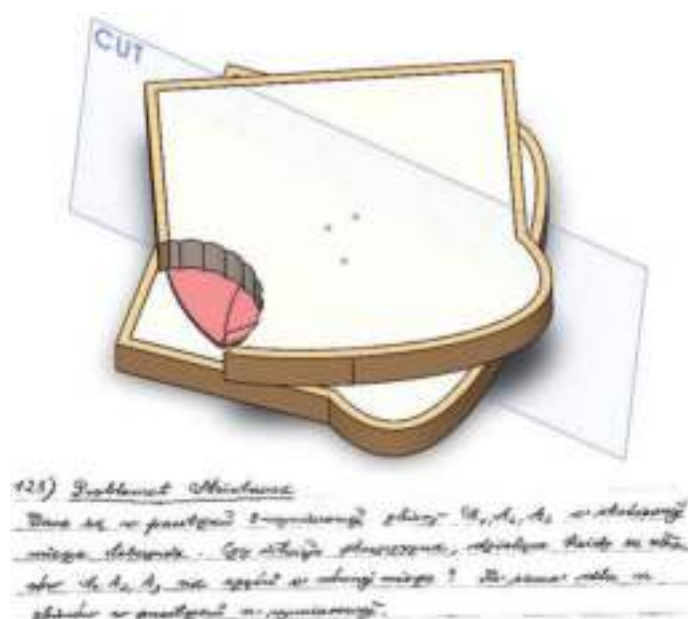
Photo: MacTutor History of Mathematics Archive

Hugo Steinhaus



Photo: MacTutor History of Mathematics Archive

Stefan Banach



The ham sandwich problem with its original description from the Scottish Book in Polish

Illustration: <https://www.lastsandwich.com/articles/culture-sandwich/61>
 Description: http://kelech.amu.edu.pl/Stefan_Banach/pdf/As-szkocka/As-szkocka1pol.pdf

asked whether it is possible to cut each configuration of three subsets of $\mathbb{R}^3$ with finite Lebesgue measure (or, if you want, two slices of bread and a slice of ham) by a plane such that each subset is divided precisely in two halves of equal size.

It was Banach who first came up with a solution [8] using another famous theorem involving mathematicians who wrote problems in the Scottish Book: the Borsuk–Ulam theorem. Stanisław Ulam was a student in Lwów who, apart from being an accomplished topologist also later became notorious for being the coinventor of the hydrogen bomb. He had a friend in Warsaw, Karol Borsuk, who sometimes came over to meet him and join the others in the Scottish Café. Influenced by these meetings, Borsuk published a proof of a conjecture by Ulam, which now bears their names [4]. It states that every continuous map $f: S^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ from the n -sphere to n -dimensional space for which $f(-x) = -f(x)$ has 0 in its image.

The ham sandwich theorem — and its generalization involving an n -dimensional

hypersandwich with $n - 2$ condiments — is a nice consequence of Borsuk’s result. Using the intermediate value theorem, one can find for each unit vector a plane normal to it that cuts the slice of ham exactly in half. This plane does not necessarily cut the two slices of bread in equal halves. Measure the differences between the upper and lower parts of the other two slices and gather these two differences in a vector. This gives a continuous map from the unit sphere to the plane. It satisfies the additional requirement $f(-x) = -f(x)$ because the opposite unit vector corresponds to the same plane, but reverses the role of the upper and lower part. The unit vector which maps to zero comes from a plane for which the differences are both zero, in other words, where both slices of bread are cut in equal halves.

Aftermath

In September of 1939 Poland was again split up and Lwów was annexed by the Soviet Union. The university was Ukrainized and renamed after Ivan Franko, a Ukrainian

writer. Some of the Polish mathematicians left, but Banach, who kept good relations with both Russians and Ukrainians, stayed and even became dean of the science faculty. The remaining mathematicians kept on meeting in the Scottish Café and even received visits from well known Soviet mathematicians such as Sobolev, Bogolyubov and Alexandroff, who left their marks in some of the final problems of the book.

In 1941 Hitler declared war on Stalin and the city was conquered by the Germans. Of its 120 000 Jewish inhabitants only about 800 would survive the war, but also its Polish population was hit hard. Many intellectuals and university professors were shot on the spot or sent to camps. Only half of the members of the mathematics group pulled through the war unscathed. The head of the department was executed, the Jew Julius Schauder was never seen again, and Banach survived under harsh conditions, but died of lung cancer in 1945. After the war, the boundaries of Poland were shifted to the west and Lviv stayed in the Ukrainian part of the Soviet Union. The Polish population was forced out and Banach’s wife smuggled the Scottish Book to Wrocław. Later Stanisław Ulam, who had fled to the United States before the war, translated it to English and published it [7].

The original book stayed in the hands of Banach’s family, but a copy still can be found on display in the Scottish Café — now restyled as Restaurant ‘Szkocka’ — and offers the mathematically oriented visitors some extra brain food to supplement their dinner. In recent years the mathematical department of the University of Lviv has even installed a new version of the Scottish Book, which true to the modern age now not only has a paper version but also a web page [9], a Facebook account, a YouTube channel, and a MathOverflow user-id to keep the word wide mathematical community up to date with its new problems.

References

- 1 William A. Beyer and Andrew Zardecki, The early history of the ham sandwich theorem, *The American Mathematical Monthly* 111(1) (2004), 58–61.
- 2 Biography of Hugo Steinhaus, <https://maths.history.st-andrews.ac.uk/Biographies/Steinhaus>.
- 3 Biography of Stefan Banach, <https://maths.history.st-andrews.ac.uk/Biographies/Banach>.
- 4 Karol Borsuk, Drei Sätze über die n -dimensionale euklidische Sphäre, *Fundamenta Mathematicae* 20(1) (1933), 177–190.
- 5 Mark Kac, Hugo Steinhaus — a reminiscence and a tribute, *Amer. Math. Monthly* 81 (1974), 572–581.
- 6 Roman Kaluza, W.A. Wołyński and Ann Kostant, *Through a reporter’s eyes: The life of Stefan Banach*, Birkhäuser, 1996.
- 7 R. Daniel Mauldin, *The Scottish Book*, Vol. 4, Birkhäuser, 1981.
- 8 Hugo Steinhaus et al., A note on the ham sandwich theorem, *Mathesis Polska* XI (1938), 26–28.
- 9 The Lviv Scottish Book, <http://www.math.lviv.ua/szkocka/index.php>.

Rob van Oord

Waddinxveen
robvanoord@tiscali.nl

Evenement 28ste Nationale Wiskunde Dagen

Een nieuwe dimensie

Op vrijdag en zaterdag 8 en 9 april vonden voor de 28ste keer de Nationale Wiskunde Dagen plaats, in de Leeuwenhorst in Noordwijkerhout. Aanvankelijk zou het evenement plaatsvinden op 28 en 29 januari, maar vanwege de coronamaatregelen is het verplaatst naar april. Rob van Oord was weer een van de deelnemers en doet verslag.

Na een jaar virtuele wiskundedagen en een uitgestelde datum, vonden de Nationale Wiskunde Dagen (NWD) dit jaar plaats in april. Ook volgende jaren worden de NWD gehouden in april. Je zou kunnen spreken van een nieuwe dimensie. Wiskundig gezien is dimensie het aantal coördinaten dat je nodig hebt voor plaatsbepaling. In de ruimte spreek je dan van drie dimensies.

Maar in de omgang betekent een nieuwe dimensie meestal een nieuw aspect. Voor mijzelf was er een ander aspect dat van belang was. Op dag 1 van de NWD verscheen het boek waar ik een jaar lang aan gewerkt heb. Ik vatte het idee op om de onderwerpen van de workshops die ik door de jaren heen op de NWD en de studiedagen van de NVvW heb gegeven in een boek bij elkaar te zetten. Ik liet daarin zien hoe ik probeerde mijn lessen uitdagender, levendiger en leuker te maken. Aangespoord door collega's ben ik aan de slag gegaan. In de coronatijd leek me dit een goede tijdsbesteding. Zie Figuur 1.

Perfect getal

Maar to the point. De NWD werden geopend door Jan Beuving. Geen onbekende voor ons. Een cabaretier met een wiskundige achtergrond. En dat geeft hem, zo zegt hij zelf, een thuisgevoel als hij voor ons op het podium staat. Ik las regelmatig zijn columns in De Verdieping van *Trouw*. Altijd spitsvondig met een draai naar wiskunde. In zijn optreden gebruikte hij de column die nog moest verschijnen over iemand die op vakantie zijn laatste girokaart foutief invulde. Dat ging toen nog met de hand. Hij vulde bij het jaar 98, terwijl het 89 had moeten zijn. Verbeteringen (met Tipp-Ex of

dergelijke) zijn niet toegestaan. Totdat hij op het idee kwam om er een 1 vóór te zetten en een 9 erachter. Ja, 1989 dus. Jan liet ons ook een schitterend liedje horen van Tom Lehrer: 'That's Mathematics'. Het ging over waar je overal wiskunde voor nodig hebt en is op YouTube te vinden.

Het waren de 28ste NWD. Een perfecte timing dat hij voor de opening van deze perfecte editie gevraagd is. Immers, 28 is, na 6, een perfect getal: gelijk aan de som van zijn delers ($1 + 2 + 4 + 7 + 14 = 28$). De eerstvolgende uitnodiging met zo'n *perfect getal* zou dan voor de 496ste NWD zijn. Dat gaat hij niet halen.

Ambulances

In de startlezing vertelde Sandjai Bhulai, mede namens Rob van der Mei (die door omstandigheden niet kon komen), over hoe zij wiskunde gebruiken om maatschappelijke problemen op te lossen. Ze kregen voor hun onderzoek naar wachttijden van ambulances de Huibregtsenprijs 2021. Het is soms beter om alvast een ambulance te verplaatsen naar een andere plek om bij een eventuele volgende melding sneller ter plaatse te kunnen zijn. Gebruik van data van ongelukken en (het huidige aantal) standplaatsen van ambulances combineerden ze tot een strategisch plan waarbij uiteindelijk een ambulance bij een nieuw ongeval vaker op tijd arriveert. Voor een zogenaamd A1-geval moet er binnen 15 minuten een ambulance zijn. In 95 procent van de gevallen moet hij er op tijd zijn. Tot



Figuur 1 Het omslag van het boek van Rob van Oord.

dan toe was 7 procent te laat. (In het examen havo wiskunde A tijdvak 2 van 2022 staat een opgave over Spoedeisende ritten van ambulances.)

Op dit moment zijn ze aan het rekenen hoe de brandweer, met het huidige materieel, beter voorbereid kan zijn op verschijnen bij rampen. Een extra factor daarbij is dat er ook nog verschillende soorten voertuigen zijn. We zijn benieuwd naar hun uitkomst. Ze hebben ook bedacht hoe de wachttijden in de ouderenzorg voor plaatsing in een tehuis omlaag konden. Door voorkeuren handiger toe te delen werd de wachttijd van 235 dagen teruggebracht naar gemiddeld 211. Een belangrijk aspect is dat je de belanghebbenden goed moet uitleggen wat de mogelijkheden zijn. Er komt dus ook sociale vaardigheid om de hoek.

Er is een aantal mensen in wiskundeland waarvan ik blij word. Ik kies graag voor het bijwonen van hun workshop. Natuurlijk zijn er ook nog veel andere om uit te kiezen. Maar ik kan er per NWD slechts drie kiezen, naast de workshop die ik zelf geef.

Wat is dimensie?

Na de lunch, die zoals gebruikelijk weer overdadig en lekker was, spoedde ik mij opgetogen naar de eerste workshop. Ik had gekozen, hoe kan het ook anders, voor 'Wat is dimensie?' door Jeroen Spandaw. Hij trakteerde ons in een levendige sessie op leerzame gedachten over dimensie.

Aan de hand van verschillende dia's mochten we bedenken welke dimensie volgens ons hoort bij

1. een sinusgrafiek,
2. ruitjes op papier,
3. een boloppervlak met vergelijking

$$x^2 + y^2 + z^2 = 1, \text{ en}$$

4. een bolinhoud met ongelijkheid

$$x^2 + y^2 + z^2 < 1.$$

Je zou kunnen stellen dat het aantal parameters (= het aantal vrijheidsgraden) dat nodig is om het item te beschrijven de dimensie bepaalt. Maar dan kom je soms tot tegenstrijdigheden of paradoxen. G. Cantor ontdekte dat de reële lijn 'evenveel' punten heeft als het reële vlak, dat wil zeggen er bestaat een afbeelding $f: \mathbb{R}^1 \rightarrow \mathbb{R}^2$ zodat er voor ieder punt (a, b) in $\mathbb{R}^2$ precies één t in $\mathbb{R}^1$ is met $f(t) = (a, b)$. Erger nog, G. Peano ontdekte 'vlakvullende krommen', dat wil zeggen continue afbeeldingen $g: \mathbb{R}^1 \rightarrow \mathbb{R}^2$ zodat voor ieder punt (a, b) in $\mathbb{R}^2$ een t in

$\mathbb{R}^1$ bestaat met $g(t) = (a, b)$. Hebben we dan toch maar één continue vrijheidsgraad nodig om het reële vlak te beschrijven en kunnen we dan niet meer zeggen dat het reële vlak een grotere dimensie heeft dan de reële lijn? Is het begrip 'dimensie' nog wel houdbaar?

Het korte antwoord op deze laatste vraag is: ja, het begrip 'dimensie' is gered door de Nederlandse wiskundige L.E.J. Brouwer. Hij bewees dat zo'n vlakvullende, continue kromme bij $g: \mathbb{R}^1 \rightarrow \mathbb{R}^2$ onherroepelijk zelfdoorsnijdingen heeft. Er bestaan dus punten t_1 en t_2 in $\mathbb{R}^1$, met $t_1 < t_2$ zodat $g(t_1) = g(t_2)$. Topologisch zijn $\mathbb{R}^1$ en $\mathbb{R}^2$ dus echt verschillende objecten.

Het bewijs dat $\mathbb{R}^1$ en $\mathbb{R}^2$ topologisch verschillen gaat als volgt. Als je uit $\mathbb{R}^1$ een punt weglaat, valt de lijn in twee stukken uiteen, maar als je uit $\mathbb{R}^2$ een punt weglaat bestaat het restant nog steeds uit één stuk. Om het topologische verschil tussen $\mathbb{R}^2$ en $\mathbb{R}^3$ te bewijzen, gebruiken we een nieuw idee, namelijk om lussen te bekijken om de weggehaalde punten. Als je uit $\mathbb{R}^2$ of uit $\mathbb{R}^3$ een punt weghaalt, dan bestaan beide restanten nog wel uit één stuk. Echter, een lus in $\mathbb{R}^2$ rond het weggehaalde punt kun je niet continu tot één punt samentrekken, terwijl dat bij elke lus in $\mathbb{R}^3$ om een weggehaald punt nog wel kan. We concluderen daaruit dat $\mathbb{R}^2$ en $\mathbb{R}^3$ topologisch verschillend zijn.

Tot slot hebben we gekeken naar holografie, waarbij hoger-dimensionale ob-

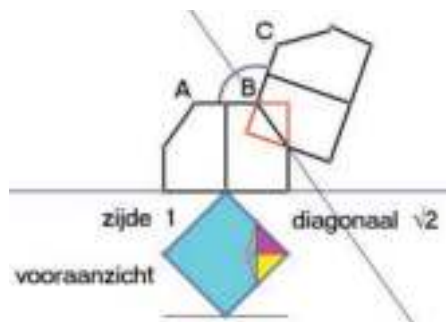
jecten in lagere dimensies gerepresenteerd worden 'zonder informatieverlies'. Jeroen stipte heel even aan dat als gekeken wordt door de bril van F. Klein, dat wil zeggen als we alleen maar naar 'symmetrieën' kijken, dat dan bijvoorbeeld het 2-dimensionale hyperbolische vlak 'niet te onderscheiden' is van zijn 1-dimensionale rand. Dus in dit perspectief lijkt het dimensiebegrip wel te sneuvelen. Op zich is elke stap van een fractal een hoeveelheid lijntjes ($\dim = 1$). Maar de limiet heeft een dimensie tussen 1 en 2. Dit wordt onder andere uitgelegd in *Fractals*, deel 10 van de Zebra-reeks.

Kubussen met een deuk

In blok 2 moest ik zelf aan de bak. Samen met Marjan Botke deden we uit de doeken hoe je met zes vouwblaadjes een kubus met een deuk kan vouwen. Het maken van een krans van vijf van deze kubussen gaf een extra dimensie (zie Figuur 2). Het lijkt alsof de vijf kubussen precies strak in elkaar geschoven een regelmatige vijfhoek insluiten. Maar niets is wat het lijkt. Als je een bovenaanzicht maakt van twee in elkaar geschoven kubussen met een deuk, dan kun je de hoek berekenen die ze vormen als ze strak in elkaar zitten. Die hoek is geen 108° die je nodig hebt om exact een regelmatige vijfhoek te krijgen (zie Figuur 3). Dit onderdeel zat in 2020 al in onze workshop, maar daar zijn we toen niet aan toegekomen. Wel staat



Figuur 2 Vijf kubussen vormen een krans.



Figuur 3 De hoek tussen twee kubussen.



Figuur 4 Een deelnemer toont een kubus met een deuk.



Figuur 5 Trits getordeerde kubussen.

de vouwinstructie en de achtergrondinformatie in de hand-out van NWD 2020, 'Wiskunde daar komt wat uit'. De deelnemers waren dolenthousiast over het gebodene (zie Figuur 4). Tussendoor maakten we ook nog vouwsels die, aan elkaar geplakt, een serie getordeerde kubussen vormden (zie Figuur 5).

Tattoos en spelletjes

In de avondvoorstelling verscheen de Brit Tom Crawford ten tonele. Hij heeft zijn hele lijf vol tattoos over wiskunde laten zetten. Bij elke tattoo vertelde hij het verhaal erachter. De tattoo $e^{i\pi} + 1 = 0$ staat onder zijn linker tepel, op zijn rechter kuit staan de vijf platonische lichamen. Op zijn rech-

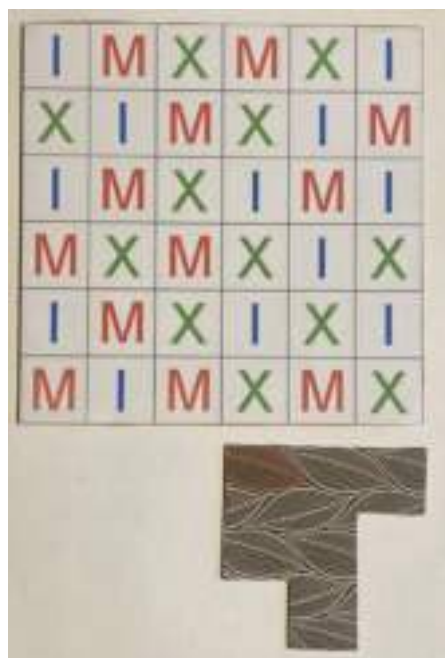
ter bovenarm staan honderd decimalen van het getal e . Op YouTube kun je een filmpje, getiteld *Navier-Stokes equations*, over zijn ideeën achter de tattoos bekijken (<https://youtu.be/ERBFVfcutl3M>). Vermakelijk hoe er telkens weer Britse wiskundigen op de NWD komen die van wiskunde een feestje weten te maken.

Op andere NWD begon ik de avond met een bezoek aan de spelletjesmarkt. Dit keer bracht ik de avond verder door met Odette (Pentomino) De Meulemeester (volgens Odette mag ik niet 'de' Meulemeester schrijven, want 'de' is in Vlaanderen alleen voorbehouden aan adel) en andere Vlaamse vrienden. Ze wilde graag van mij weten hoe je een kubus met een deuk vouwt. Met een klein gezelschap deed ik mijn workshop nog eens dunnetjes over. Daarna kwam er een niet-aflatende stroom spelletjes en puzzeltjes, die Odette allemaal zelf maakt, ter tafel. Ze deelt graag uit. Voor dit jaar moesten vijf gelijke puzzelstukjes van zes vierkantjes op een karton met M, X en I gelegd worden zodat er precies twee keer een M, een X en een I zichtbaar zijn: het jaar MMXXII. Zie Figuur 7 en 8.

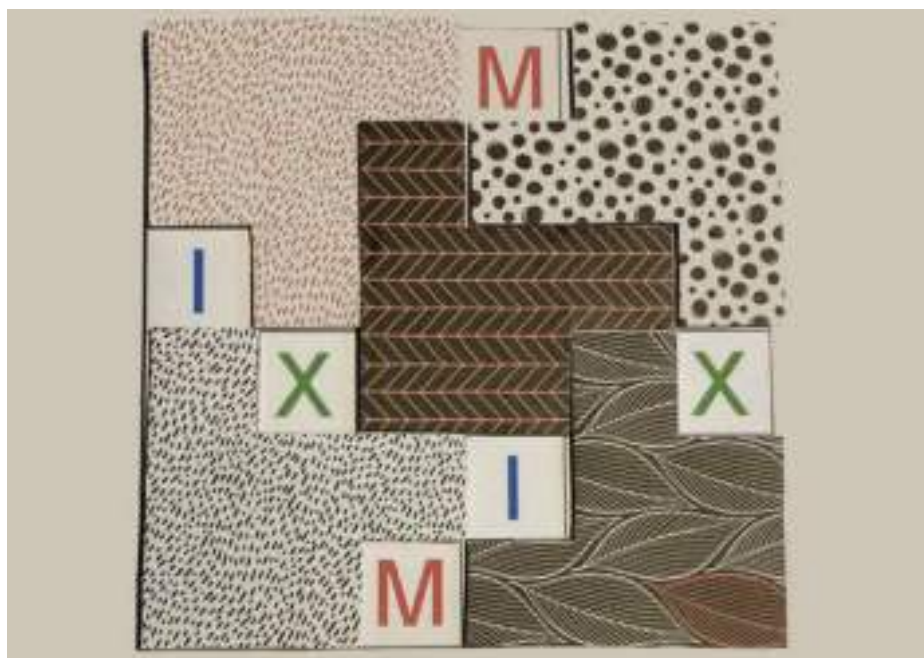
Gelukkig bleef er ook nog tijd over om de beentjes van de vloer te heffen bij de rockmuziek van Out of Time.

Kleurboek

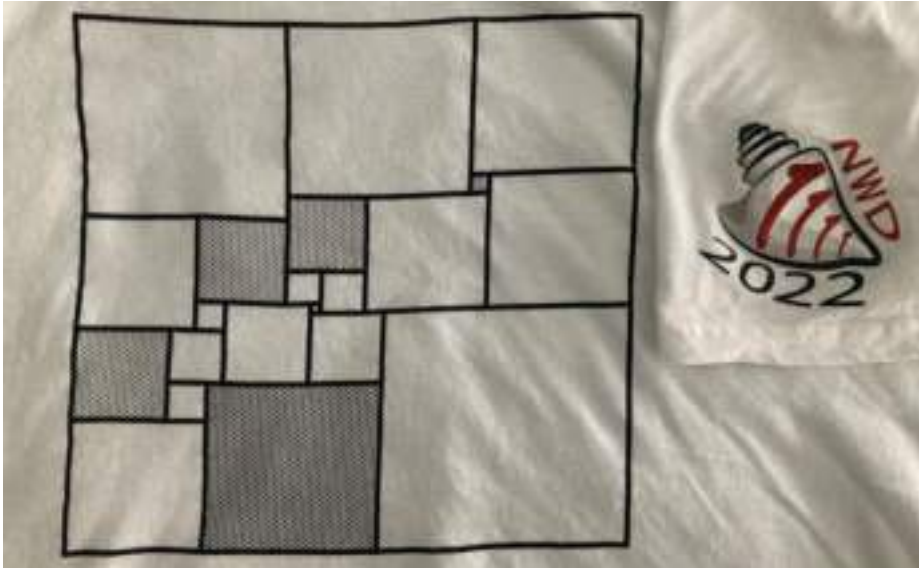
De Funrun kreeg ook een nieuwe dimensie. Bij klaarlichte dag wandelde ik (rennen mag ik niet meer van mijn vrouw)



Figuur 6 Karton met één puzzelstukje.



Figuur 7 Een oplossing.



Figuur 8 Opdruk T-shirt Funrun.

het parcours dat ik al vele malen in het pikkedonker had afgelegd. Nu genoten we van kleurrijke bollenvelden en fris lentegroen. De print op het T-shirt komt uit het *Kleurboek Wiskunde* van Dirk Huylebrouck. Hij presenteerde dit kleurboek als tegenhanger van de bekende Mandala-kleurboeken. De prent bestaat uit 21 verschillende vierkanten in een vierkant met zijde 112. Dit (onder voorwaarden, kleinst mogelijke) patroon is in 1978 ontdekt door de Nederlander Duijvestijn. Zie Figuur 8.

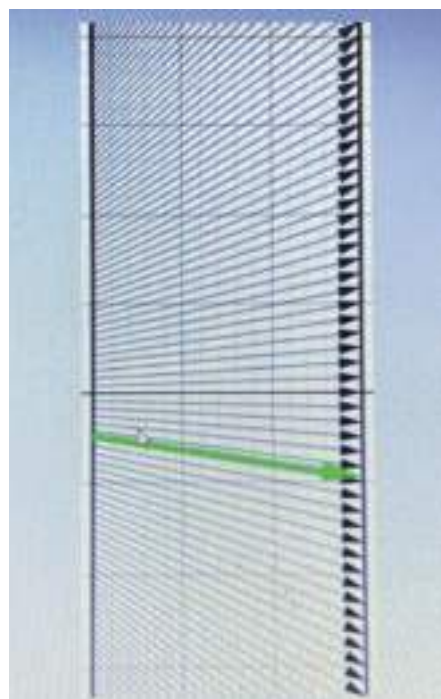
Funcities en nomogrammen

Voor blok 3 bezocht ik de workshop 'Fun met funcities', gegeven door Paul Drijvers en anderen. In de workshop werd getoond hoe het Freudenthal Instituut onderzoek doet naar het gebruik van applicaties op de mobiele telefoon in de les. Via een link konden deze worden gebruikt. Leerlingen zien spelenderwijs, *hands-on* heet dit, hoe je met nomogrammen formules beter kunt begrijpen. Zie Figuur 9. Wij konden er zelf ook mee aan de slag (ik ben niet zo handig met mijn mobiel, dus keek ik mee bij mijn buurvrouw). Uiteraard werd in de lezing ook aandacht besteed aan de verschillende niveaus die leerlingen doorlopen bij het leren van het begrip functie. Niveau 1: Input-Output, als een machientje. Niveau 2: dynamische co-variatie, met grafieken erbij. Niveau 3: afbeelding, correspondentierelatie met pijlen tussen origineel en beeld. Niveau 4: als wiskundig object, een functie differentiëren of primitiveren. Bij het leren wil je dat de leerlingen steeds een hoger niveau berei-

ken. Via (woord)formules, grafieken, tabellen, nomogrammen (volgens de docenten van de workshop een ondergewaardeerd instrument), taal, naar functioneel denken, in termen van relaties.

De workshop gaf een mooi inkijkje in de ontwikkeling van nieuwe tools om wiskunde mee te bedrijven. In de toekomst zullen VR-tools (virtual reality) nog beter inzicht geven in wiskundige begrippen.

Wel werd duidelijk dat sinds de invoering van ICT bij wiskunde het gebruik ervan nog vaak in 'het laten zien van' en 'mooi tekenen van' is blijven hangen. De



Figuur 9 Nomogram uit de applet.

echte didactische voordelen van ICT zouden nog veel meer benut kunnen worden. De projecten die met medewerking van het Freudenthal Instituut worden uitgevoerd zouden het veld over de streep moeten trekken om een inhaalslag te maken. Voor interactieve lessen zijn verschillende tools ontwikkeld. Kahoot! en Wooclap zijn daarvan mooie voorbeelden.

Lugubere wiskunde

In blok 4 gaf Dirk Huylebrouck een vlamende lezing over *Lugubere wiskunde*, zoals ook zijn nieuwste boek heet. Veel van de voorbeelden die Dirk liet zien waren afkomstig uit schoolboeken die de nazi's gebruikten bij hun rekenlessen, verkapte propaganda dus. Ook hoe Le Corbusier de gulden-snedeverhouding gebruikte om in zijn ogen aan te tonen dat Joden geen 'mooie' mensen zijn. Kortom, wiskunde die niet altijd even zuiver werd toegepast.

Epidemieën

De slotlezing werd verzorgd door een aanstormend talent, Clara Stegehuis. Als jonge wiskundige heeft ze natuurlijk een blog. Daar kun je lezen waarmee ze bezig is en wat haar gedachten zijn. Ze presenteerde hoe je uit data een netwerk van muzikanten maakt en daarin bijvoorbeeld kunt zien wie de gezelligste artiest is.

Uiteraard kwamen ook de epidemieën ter sprake. De rekenmodellen zijn in feite differentiaalvergelijkingen in de vorm van

$$\frac{dI}{dt} = b \cdot I \cdot \frac{S(n)}{N} - k \cdot I,$$

met I = het aantal geïnfecteerden, b = het aantal ontmoetingen (besmetting van vatbare personen), k = de snelheid van beter worden. Om te berekenen wat het effect is van een besmetting moet je rekening houden met verschillende aspecten, zoals welke maatregelen je neemt, hoeveel mensen er immuun worden, hoe groot de kans is dat je iemand tegen het lijf loopt die je kunt besmetten, enzovoort.

$$R_0 = \frac{\text{aantal te besmetten personen}}{\text{tijd dat je ziek bent}}.$$

Het is zaak om ervoor te zorgen dat $\frac{dI}{dt} < 0$ wordt, zodat $R_0 < 1$. Alleen dan neemt het aantal besmettingen af. Met een blij gevoel dat wiskundigen bijdragen aan een gezonde maatschappij verliet ik het Atrium om met vrienden de afsluitende lunch te nuttigen en nog wat laatste nieuwtjes te horen.

John Simons

Rijksuniversiteit Groningen
j.l.simons@rug.nl

Onderzoek

Het $3x + 1$ -probleem, recente ontwikkelingen en oplossingsrichtingen

Voor een natuurlijk getal x definiëren we de opvolgerfunctie $T: x \rightarrow \frac{x}{2}$ als x is even en $x \rightarrow \frac{3x+1}{2}$ als x is oneven. Het (onbewezen) $3x + 1$ -vermoeden zegt dat vroeger of later de cykel $1 = 2$ wordt bereikt. In dit artikel bespreekt John Simons enkele recente ontwikkelingen en oplossingsrichtingen.

Het $3x + 1$ -probleem werd in 1937 voor het eerst geformuleerd door Lothar Collatz. Er bestaat veel onderzoek over [4, 6, 9], desondanks is het probleem nog steeds onopgelost. Voor een beginwaarde x wordt de rij $x \rightarrow T(x) \rightarrow T^2(x) \dots$ de baan van x genoemd. De cykel $1 = 2$ wordt de triviale cykel genoemd. Er kunnen nu twee $3x + 1$ -vermoedens worden geformuleerd:

Het cykelvermoeden. *Voor iedere x bestaat er een k zodanig dat $T^k(x) = 1$, dat wil zeggen er bestaan geen niet-triviale cyclen.*

Het convergentievermoeden. *Voor iedere x bestaat er een bovengrens $U(x)$ zodanig dat voor iedere k geldt $T^k(x) \leq U(x)$, dat wil zeggen er bestaan geen divergente banen.*

Naar aanleiding van een vakantiecursus schreef Benne de Weger in 2014 in het NAW een interessant artikel over herformuleringen van het $3x + 1$ -probleem in de grafentheorie, in de theorie van eigenwaarden van oneindige matrices en in de theorie van functionaalvergelijkingen [16]. Het hui-

dige artikel behandelt recente oplossingsrichtingen en deelresultaten voor de twee onderscheidenlijke vermoedens:

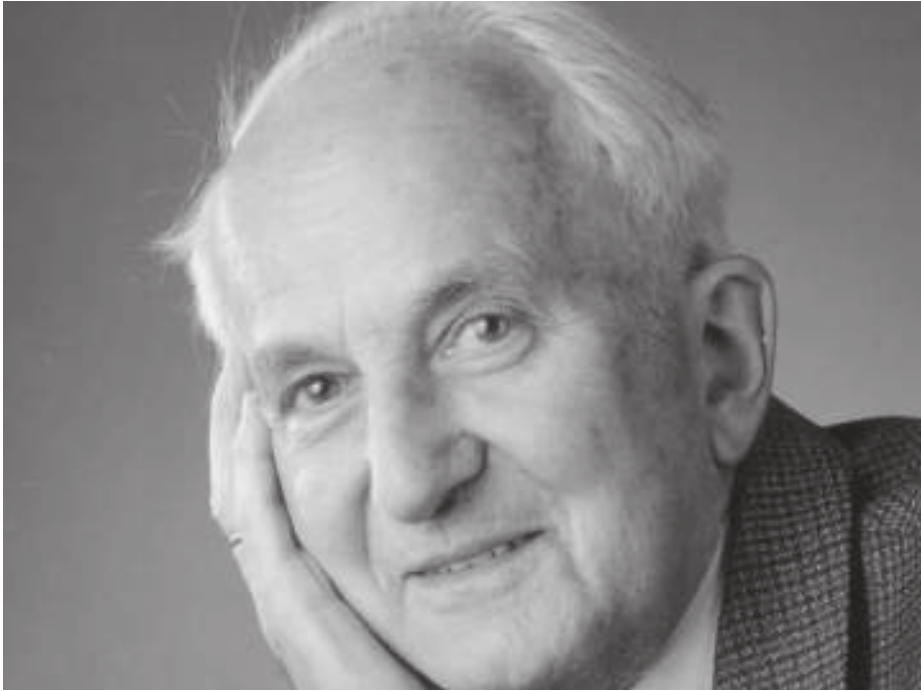
- Voor het *cykelvermoeden* worden voorwaarden gedefinieerd voor het bestaan van een niet-triviale cykel. Als zo'n cykel K oneven en L even getallen bevat, dan moet $\frac{3^K}{2^{K+L}}$ ongeveer 1 zijn. Dit betekent dat $(K+L)\log 2 - K\log 3$ klein is. De transcendent getaltheorie levert stellingen over de grootte van zulke lineaire log-expressies in termen van de coëfficiënten. De opvolgerfunctie T wordt hier als een deterministische functie beschouwd.
- Voor het *convergentievermoeden* wordt voor een beginwaarde $x > 2$ het concept stoptijd geanalyseerd, dit is de kleinste k waarvoor $T^k(x) < x$. De theorie van ergodische processen levert uitspraken over de dichtheid van de verzameling beginwaarden met een eindige stoptijd. De opvolgerfunctie T wordt hier als een stochastische (niet-deterministische) functie beschouwd.

In de volgende paragraaf bespreken we de geschiedenis van het $3x + 1$ -probleem. Daarna worden enkele generalisaties van het $3x + 1$ -probleem genoemd. Deze gebruiken we om recente ontwikkelingen en oplossingsrichtingen voor het $3x + 1$ -probleem te beoordelen op hun algemenere toepasbaarheid.

In de paragraaf daarna gaan we dieper in op een oplosmethode [10] om het (niet) bestaan van cyclen te bewijzen. Als een cykel m lokale minima (en dus ook m lokale maxima) heeft, noemen we dat een m -cykel. Met behulp van transcendent getaltheorie en diofantische approximatietechnieken is het (wonderlijk schijnende) resultaat bewezen dat voor $2 \leq m \leq 75$ geen m -cykel bestaat. Die aanpak is ook toepasbaar op generalisaties van het $3x + 1$ -probleem, zij het met de nodige aanpassingen.

Vervolgens bespreken we het recente bewijs van Tao [14] dat bijna alle banen bijna begrensd zijn. Verder gaan we in op de generaliseerbaarheid van de stoptijd. Voor een speciale generalisatie van het $3x + 1$ -probleem wordt het bestaan van divergente banen bewezen.

Hoewel de onderzoekslijnen voor de twee vermoedens geheel verschillend zijn, gaan we in de laatste paragraaf in op een merkwaardige overlap, namelijk het be-



Lothar Collatz (1910–1990)

staan van bepaalde cycli en het niet bestaan van bepaalde divergente banen voor het $3x + 1$ -probleem.

De literatuur over het $3x + 1$ -probleem is omvangrijk en groeit nog steeds. Dit overzicht is derhalve onvolledig.

Een hardnekkig probleem

Algemeen wordt aangenomen dat Lothar Collatz (Duits wiskundige) in de dertiger jaren dit probleem heeft geïntroduceerd.

In 1972 publiceert Martin Gardner erover in de *Scientific American* en gaat het probleem ‘viral’. Het probleem wordt meestal het Collatz-probleem genoemd, maar staat ook onder andere namen bekend zoals probleem van Hasse, Kakutani, Ulam, Syracuse. Herman Duparc introduceerde het probleem bij zijn wiskundestudenten (waaronder ik) tijdens een Christiaan Huygens-borrel in café Het Noorden in Delft in 1967. Sindsdien houdt het $3x + 1$ -probleem mij bezig.

Waarom is het $3x + 1$ -probleem zo taai? Dit is eerder een wetenschapsfilosofische dan een wiskundige vraag. Volgens Lagarias [6] zijn er twee oorzaken: (i) Het pseudo-random gedrag van een deterministisch proces. Een klassiek getaltheoretisch bewijs dat er geen divergente banen zijn loopt vast op het pseudo-random gedrag en een stochastische analyse loopt vast op de deterministische opvolgerfunctie die het proces niet pseudo-random maakt. (ii) De onbeslisbaarheid van het

probleem. Conway [2] heeft bewezen dat er geen algoritme bestaat om voor iedere $x \in \mathbb{N}$ te bepalen of er een k bestaat met $T^k(x) = 1$.

Hierbij kunnen kanttekeningen worden geplaatst. Het concept pseudo-random heeft een intuïtieve connotatie. De wiskundige definitie is niet van toepassing op sommige generalisaties van het $3x + 1$ -probleem. Zie de paragraaf ‘Het convergentievermoeden’ verderop. Een algoritme kan geen bewijs uit het ongerijmde produceren.

Het Koninklijk Wiskundig Genootschap voert de zinspreuk dat een onvermoeide arbeid alles te boven komt. Volgelin-



Herman Duparc (1918–2002)

gen van Brouwer zouden kunnen vragen: “Wanneer?” Erdős beoordeelde het $3x + 1$ -probleem als volstrekt hopeloos. Hetzelfde zal lange tijd gezegd zijn van de grote stelling van Fermat (geen positief gehele oplossingen van $x^n + y^n = z^n$ voor $n > 2$). Dat pessimisme werd in 1997 gelogenstraft door Wiles. Zijn onvermoeide arbeid resulteerde in een bewijs van 190 pagina’s!

In navolging van Hilbert worden de bewijzen en deelresultaten in dit artikel gespiegeld aan generalisaties van het $3x + 1$ -probleem:

“If we do not succeed in solving a mathematical problem, the reason frequently consists in our failure to recognize the more general standpoint from which the problem before us appears only as a single link in a chain of related problems.” – David Hilbert (1862–1943)

Uitzoemen: het $px + q$ -probleem

We beschouwen een algemener probleem. Voor oneven p, q kiezen we de opvolgerfunctie

$$T(x) = \begin{cases} \frac{x}{2} & \text{als } x \text{ is even,} \\ \frac{px+q}{2} & \text{als } x \text{ is oneven.} \end{cases} \quad (1)$$

Dit probleem is uitgebreid geanalyseerd [7, 11]. Het cykelvermoeden (ook voor het $px + q$ -probleem onbewezen) is dat het aantal cycli eindig is. Noem het aantal cycli $C(p, q)$. $C(3, 1) = 1$ is het cykelvermoeden voor het $3x + 1$ -probleem. Er is bewezen dat voor iedere p er oneindig veel $px + q$ -problemen zijn met $C(p, q) \geq 1$ [12]. Rob Tijdeman bestudeerde priemgetallen q waarvoor k, l bestaan zodanig dat $2^{k+l} - 3^k = q$. Noem q een gegeneraliseerde Tijdeman-priem indien er k, l bestaan zodanig dat $2^{k+l} - p^k = q$. Dan is $C(p, q) \geq 1$. Een exotisch voorbeeld is het $97x + 32641759$ -probleem met tenminste 92 cycli.

Het convergentievermoeden (onbewezen) is dat voor $p = 3$, $U(x)$ altijd bestaat en voor $p \geq 5$, $U(x)$ bijna nooit bestaat.

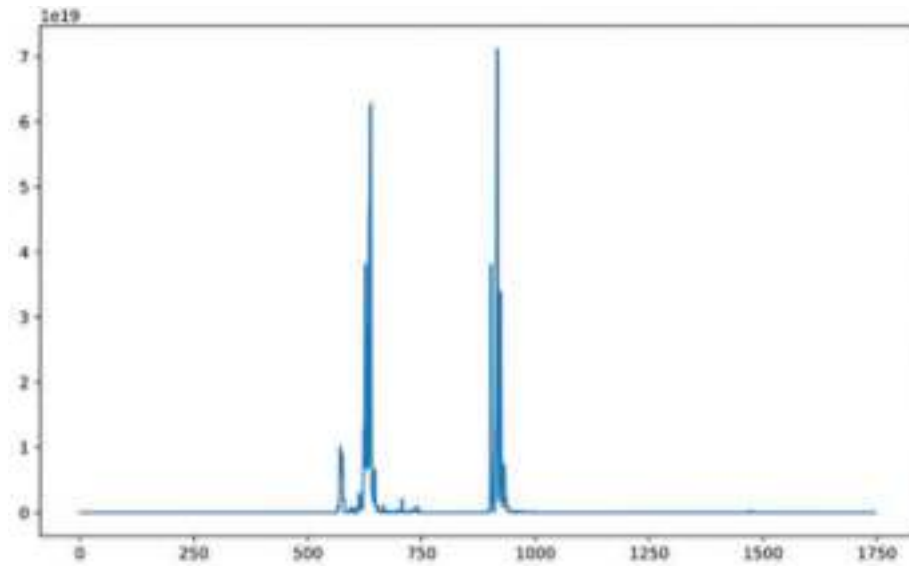
Het gegeneraliseerde Collatz-probleem

Een algemenere versie van het $px + q$ -probleem werd geïntroduceerd door Matthews [8]. Beschouw daartoe de opvolgerfunctie

$$x_{n+1} = \frac{p_i \cdot x_n + (q - p_i) r_i}{q} \quad (2)$$

als $x_n \equiv i \pmod{q}$

met p_i, r_i ($i = 0, \dots, q-1$) en q zodanig dat $(p_i, p_j) = 1$, $(p_i, q) = 1$, $r_i \equiv i \pmod{q}$.



Figuur 1 Getallen in de cykel van opvolgerfunctie (3) beginnend met 114.

Zij $s = |p_0 p_1 \cdots p_{q-1}| - q^q$. Vanwege de eisen aan p_i, q, r_i geldt altijd $s \neq 0$. Het cyclilvermoeden en het convergentievermoeden (beide onbewezen) zijn afhankelijk van het teken van s . Als $s < 0$ dan bestaat $U(x)$ voor iedere x . Er zijn dan geen divergente banen en er is een eindig aantal cycli (minimaal 1). Als $s > 0$ dan bestaat $U(x)$ bijna nooit, dat wil zeggen bijna alle banen zijn divergent en het aantal cycli is eindig.

Er zijn veel voorbeelden om deze vermoedens empirisch te ondersteunen. Als $\prod p_i = q^q - 1$ zijn er grote cycli. Beschouw bijvoorbeeld de opvolgerfunctie

$$T(x) = \begin{cases} \frac{x}{4} & \text{als } x \equiv 0 \pmod{4}, \\ \frac{3x-3}{4} & \text{als } x \equiv 1 \pmod{4}, \\ \frac{5x-2}{4} & \text{als } x \equiv 2 \pmod{4}, \\ \frac{17x-3}{4} & \text{als } x \equiv 3 \pmod{4}. \end{cases} \quad (3)$$

Er zijn tenminste 17 cycli, sommige met lengte 1747 zoals $\{114, 142, 177, 132, 33, \dots, 27\}$ en een maximum waarde van 71133256567324334017, zie Figuur 1.

Matthews formuleert nog een extra vermoeden gebaseerd op een waarschijnlijkheidsargument. De getallen in een divergente baan zijn uniform verdeeld modulo q^α voor iedere $\alpha \geq 1$.

Het cyclilvermoeden

We keren nu weer terug naar het $3x+1$ -probleem. Hoe kun je het bestaan of niet bestaan van cycli bewijzen? Dat gaat via het vinden van noodzakelijke voorwaarden voor het bestaan van een cykel. Veronderstel dat er een cykel bestaat met k oneven

en l even getallen. Als we ons beperken tot cycli die bestaan uit een rij oneven getallen gevolgd door een rij even getallen (een 1-cykel) dan kan zo'n bestaansvoorwaarde eenvoudig worden afgeleid. Het minimum van de cykel is een oneven getal x , dat kan worden geschreven als $x = a2^k - 1$. Na k keer toepassen van $T(x) = \frac{3x+1}{2}$ ontstaat het even getal $a3^k - 1$, het maximum van de cykel. Na l keer toepassen van $T(x) = \frac{x}{2}$ zijn we weer terug bij het getal $a2^k - 1$. Als zo'n cykel bestaat dan voldoen a, k, l aan de koppelvergelijking

$$\frac{a3^k - 1}{2^l} = a2^k - 1.$$

Hieruit volgt

$$0 < 2^{k+l} - 3^k \leq 2^l - 1,$$

$$0 < 1 - \frac{3k}{2^{k+l}} < \frac{1}{2^k}$$

en

$$1 < \frac{2^{k+l}}{3^k} < 1 + \frac{1}{2^{k-1}}.$$

Een noodzakelijke voorwaarde voor zo'n 1-cykel is dat k, l voldoen aan

$$0 < (k+l) \log 2 - k \log 3 < \frac{1}{2^k - 1}. \quad (4)$$

Voor dit type van diofantische vergelijkingen levert de transcendente getaltheorie, aanvankelijk ontwikkeld door Baker [1], een expliciete ondergrens die polynomiaal is in k . Als $|(k+l) \log 2 - k \log 3| \neq 0$ dan is $|(k+l) \log 2 - k \log 3| > ck^{-d}$ met $c, d > 0$. Confrontatie van deze polynomiale ondergrens met de exponentiële bovengrens van vergelijking (4) levert een $k_{\max}$ op. Met de theorie van de kettingbreuken (continued

fractions) kun je vervolgens slim zoeken naar oplossingen $k \leq k_{\max}$. In 1978 bewees Steiner [13] op deze wijze dat $k=1, l=1$ en dus $a=1$ de enige oplossing is van vergelijking (4), overeenkomend met de cykel $1=2$.

De aanpak van Simons en De Weger

We definiëren een m -cykel als een cykel met m lokale maxima (en dus ook m lokale minima). De baan tussen twee lokale minima begint met een stijgende rij oneven getallen, gevolgd door een dalende rij even getallen. De lokale minima kun je schrijven als $x_i = a_i 2^{k_i} - 1$ voor $i = 0, \dots, m-1$. Na k_i keer toepassen van de opvolgerfunctie ontstaat het lokale maximum $y_i = a_i 3^{k_i} - 1$ en na l_i keer toepassen van de opvolgerfunctie ontstaat het minimum $x_{i+1} = a_{i+1} 2^{k_{i+1}} - 1$. Steiner bewees dat $1=2$ de enig mogelijke 1-cykel is. In 2005–2010 bewezen Simons en De Weger [10] dat er geen m -cycli bestaan voor $2 \leq m \leq 75$. Het bewijs steunt op de volgende constatering: een noodzakelijke en voldoende voorwaarde voor het bestaan van een m -cykel met $K = \sum k_i$ oneven getallen en $L = \sum l_i$ even getallen is het bestaan van een oplossing (a_i, k_i, l_i) voor $i = 0, \dots, m-1$ van de matrixvergelijking

$$M \begin{pmatrix} a_0 \\ a_1 \\ \vdots \\ a_{m-1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2^{l_0} - 1 \\ 2^{l_1} - 1 \\ \vdots \\ 2^{l_{m-1}} - 1 \end{pmatrix},$$

met

$$M = \begin{pmatrix} -3^{k_0} & 2^{k_1+l_0} & 0 & \dots & 0 \\ 0 & -3^{k_1} & 2^{k_2+l_1} & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & 0 & \ddots & -3^{k_{m-2}} & 2^{k_{m-1}+l_{m-2}} \\ 2^{k_0+l_{m-1}} & 0 & \dots & 0 & -3^{k_{m-1}} \end{pmatrix}.$$

Dit is een generalisatie van de koppelvergelijking in Steiners bewijs. Met een niet-triviale approximatie van $\frac{x_{i+1}}{x_i}$ waarbij de minima groter zijn dan een numeriek verkregen ondergrens X_0 , kan een noodzakelijke voorwaarde voor het bestaan van een m -cykel worden afgeleid.

Lemma 1. Veronderstel dat de matrixvergelijking een integer oplossing (a_i, k_i, l_i) heeft. Dan geldt voor K, L, m ,

$$0 < (K+L) \log 2 - K \log 3 < \sum_{i=0}^{m-1} \frac{1}{x_i} < m c_m 2^{-\frac{\delta-1}{\delta} K},$$

waarbij $\delta = \log 3 / \log 2$ en c_m een constante is die marginaal van X_0 afhangt.

Met transcendente getaltheorie (sinds 1978 zijn scherpere grenzen afgeleid, maar de essentie blijft [3]) kan wederom een $K_{\max}$ worden berekend. Bovendien kan vanuit de ondergrens $x_i > X_0$ een $K_{\min}$ worden berekend. Vervolgens worden geavanceerde diofantische approximatie-technieken gebruikt om het interval $(K_{\min}, K_{\max})$ te verkleinen en voor $m \leq 75$ wordt aldus het niet bestaan van m -cyclen bewezen.

Recente ontwikkelingen

De bovengrens in Lemma 1 kan op twee manieren worden verlaagd.

(i) Het bewijs voor m -cyclen maakt gebruik van de schatting $x_i > X_0$ voor elke i . Dat kan scherper. De worst case in het bewijs is dat $x_0 < x_1 < \dots < x_{m-1}$ en het verschil tussen x_{i+1} en x_i kan worden afgeschat. We introduceren het concept m -nykel (nykel van nagenoeg cykel).

Definitie. Een m -nykel is een baan vanaf x_0 met $m + 1$ lokale minima $x_0, x_1, \dots, x_m$ die voldoen aan $x_0 < x_i$. In tegenstelling tot een m -cykel geldt niet $x_m = x_0$.

Voor een 1-nykel (een baan vanaf het globale minimum x_0 naar het lokale minimum x_1) kan een resultaat worden bewezen dat vergelijkbaar is met Steiners resultaat.

Lemma 2. Voor een 1-nykel met $x_1 = x_0 + 2v$ met $v \geq 1$ bestaat een eenvoudig berekenbare bovengrens $x_0 \leq C_v$, met andere woorden bij gegeven v is er een eindig aantal oplossingen voor x_0 .

Bewijs. a, k, l zijn gedefinieerd zoals voor een 1-cykel, zie vergelijking (4). De koppeling vergelijking is nu

$$\frac{a3^k - 1}{2^l} = a2^k - 1 + 2v$$

en die leidt tot de noodzakelijke voorwaarde

$$0 < k \log 3 - (k + l) \log 2 < \frac{v}{2^{k-1}}. \quad (5)$$

Transcendente getaltheorie leidt tot een $k_{\max}$ en dus tot een C_v . $\square$

Analoog aan Steiners bewijs voor 1-cykels kan worden aangetoond dat de enige 1-nykel met $v = 1$ is 11, 17, 26, 13. Voor $v = 4052$ echter zijn er twee 1-nykels met als kleinste element 64827 en 593919. Bij

gegeven v geldt $x_0 \leq C_v$, dus als $x_0 > C_v$ (waarbij v , zoals $v = 4052$, met de theorie der kettingbreuken slim moet worden gekozen!) dan is $x_1 > x_0 + 2v$. Voor de worst case van oplopende minima geldt $x_i > x_0 + i \cdot 2v$. Het effect is dat de factor m in Lemma 1 wordt verlaagd tot $\sim \log m$.

(ii) In het bewijs van Simons en De Weger wordt voor de coëfficiënten a_i in de matrixvergelijking de afchatting $a_i \geq 1$ gebruikt. Dat kan eveneens scherper. Inductief kan worden bewezen dat $a_i \neq a_j$. We nemen aan dat met behulp van Lemma 1 het niet bestaan van een m -cykel is bewezen voor gegeven m . Veronderstel nu dat er een $m + 1$ -cykel bestaat met $a_0 = a_q$ en $x_0 < x_q$. Voor de variabelen $a_0, \dots, a_{q-1}$ volgt uit de matrixvergelijking de voorwaarde

$$0 < (k_1 + \dots + k_q + l_0 + \dots + l_{q-1}) \log 2 - (k_0 + \dots + k_{q-1}) \log 3 < \sum_{i=0}^{q-1} \frac{1}{x_i}.$$

Met de substitutie

$$K = k_0 + \dots + k_{q-1}, \\ L = l_0 + \dots + l_{q-1} + k_q - k_0,$$

ontstaat een tegenspraak met vergelijking (1) voor een kleinere m . Deze voorwaarde leidt tot

$$\prod_{i=0}^{m-1} a_i \sim \left(\frac{m}{e}\right)^m.$$

Het effect op c_m is voor kleine m verwaarloosbaar en voor $m > 50$ een factor ~ 3 .

Deze scherpere afchattingen verlagen de bovengrens in Lemma 1 en leiden tot uitsluiting van m -cyclen voor grotere m . Dit onderzoek loopt nog.

Het convergentievermoeden

Het convergentievermoeden zegt dat voor iedere x een bovengrens $U(x)$ bestaat zodanig dat voor iedere k , $T^k(x) \leq U(x)$. Empirisch convergeren alle getallen, maar $U(x)$ kan relatief groot zijn. Zo is

$$U(27) = 4616$$

en

$$U(274133054632352106267113298) = 124744388651798242538014293435290632.$$

Er is bewezen dat het aantal getallen $1 \leq n \leq n_{\max}$ waarvan de baan naar 1 $\Rightarrow 2$ convergeert tenminste $n_{\max}^{84}$ is voor voldoende grote $n_{\max}$ [5]. Hoe kun je bewijzen dat voor het $3x + 1$ -probleem een baan

$x, T(x), T^2(x), \dots$ convergeert? Het concept pseudo-random levert een intuïtief 'bewijs':

'Bewijs'. Kies random een oneven getal x en bereken $T(x)$. In 50% van de gevallen zal $T(x)$ even zijn, en in 50% van de gevallen zal $T(x)$ oneven zijn. De verwachte waarde van de vermenigvuldigingsfactor van x is $\frac{3}{2} \cdot \frac{1}{2} = \frac{3}{4} < 1$. De verwachting is daarom dat de baan $x, T(x), T^2(x), \dots$ convergeert.

Intuïtief moge dit overtuigend zijn, het is geen wiskundig bewijs. Dat komt onder andere omdat random trekken van een oneven positief getal een kansfunctie verlangt op de verzameling positieve oneven getallen. Die kan niet uniform zijn omdat $\sum_{n=0}^{\infty} \mathbb{P}(x = 2n + 1) = 1$. Wat dan wel? En wat is het argument voor een gekozen kansfunctie?

In het convergentie-onderzoek wordt gebruikgemaakt van de begrippen stoptijd en dichtheid. Voor $x > 2$ is de kleinste k met $T^k(x) < x$ de stoptijd en de kleinste k met $T^k(x) = 1$ de totale stoptijd. De dichtheid van een verzameling (in de verzameling der natuurlijke getallen $\mathbb{N}$) wordt als volgt gedefinieerd. Beschouw een deelverzameling $A \subseteq \mathbb{N}$ en definieer $a(n)$ als het aantal elementen in A kleiner of gelijk aan n . Als $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a(n)}{n}$ bestaat dan heet die limiet de *natuurlijke* (ook wel *asymptotische*) *dichtheid* van A . De dichtheid van de even getallen is 0,5, van de priemgetallen 0 en van de samengestelde getallen 1. Het zijn alle drie oneindige verzamelingen. Een bewering wordt bijna altijd waar genoemd voor $\mathbb{N}_+$ indien de bewering waar is voor een deelverzameling met dichtheid 1.

Terras [15] bewees in 1976 dat de natuurlijke dichtheid $F(k)$ van de getallenverzameling met een stoptijd $\leq k$ eindig is. Als $k \rightarrow \infty$ dan $F(k) \rightarrow 1$. Dit betekent dat bijna alle getallen een eindige stoptijd hebben. De verzameling getallen die geen eindige stoptijd hebben is niet per definitie leeg. Als $\pi^*(x)$ het aantal getallen $n < x$ is met een eindige stoptijd, dan bestaat voor het aantal getallen zonder eindige stoptijd een bovengrens $cx^{1-\eta}$ met $c, \eta > 0$.

Voor het $3x + 1$ -probleem is een eindige stoptijd een noodzakelijke voorwaarde voor een eindige totale stoptijd. Bij generalisaties is de relatie tussen de aldus gedefinieerde stoptijd en totale stoptijd niet bepalend voor het eindigen in een cykel. Neem het $3x + 7$ -probleem met de cykel

5, 11, 20, 10. Het getal 11 heeft stoptijd 2 en heeft geen eindige totale stoptijd. Om het al of niet eindigen in een cykel te analyseren is een generalisatie van het concept stoptijd nodig:

Definitie. *Stoptijd voor $px + q$ -problemen.* Beschouw de baan $x \rightarrow T(x) \rightarrow T^2(x) \dots$. Voeg als voorganger van x toe $2x$, dat wil zeggen $T(2x) = x$. Beschouw twee lokale minima $T^j(x)$ en $T^k(x)$ met $0 \leq j < k$. Definieer de *stoptijd* van x als de minimale k waarvoor een j bestaat zodanig dat $T^k(x) < T^j(x)$. Definieer de *totale stoptijd* als de minimale k waarvoor een j bestaat zodanig dat $T^k(x) = T^j(x)$.

De nieuwe stoptijd is nu weer een noodzakelijke voorwaarde voor de nieuwe totale stoptijd. Met deze definities wordt het bestaan van niet-triviale cyclen onderzocht.

Recente ontwikkelingen

Er zijn alternatieve definities voor de dichtheid, bijvoorbeeld de logaritmische dichtheid. Dan wordt niet het aantal elementen met n vergeleken, maar $\sum_{n \in A, n < x} \frac{1}{n}$ met $\log x$. Tao bewees in 2020 (zijn woorden) dat: *Almost all orbits of the Collatz map attain almost bounded values.* Wat bewijst Tao [14] nu precies?

Tao gebruikt een eigen definitie voor de logaritmische dichtheid. Voor $R, A \subset \mathbb{N}_+$ wordt een random variabele $\text{Log}(R)$ gedefinieerd door

$$\mathbb{P}(\text{Log}(R) \in A) = \frac{\sum_{x \in A \cap R} \frac{1}{x}}{\sum_{x \in R} \frac{1}{x}}.$$

Zijn logaritmische dichtheid van de verzameling A wordt dan

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \mathbb{P}(\text{Log}(\mathbb{N}_+ \cap [1, x]) \in A).$$

Tao hanteert de gebruikelijke definitie van *almost all*. Een bewering $P(x)$ is waar voor bijna alle x indien de (logaritmische) dichtheid de limiet 1 heeft als $x \rightarrow \infty$. Zij $\text{Lo}(x) = \min_k T^k(x)$. Tao bewijst

Lemma 3. *Voor iedere $f: \mathbb{N}_+ \rightarrow \mathbb{R}$ met $\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = \infty$ geldt voor bijna alle x , $\text{Lo}(x) \leq f(x)$.*

Neem als voorbeeld $f(x) = \log x$. Veronderstel dat we van alle getallen $\leq X_0$ weten dat de baan convergeert naar de cykel $1 \Rightarrow 2$. Dan zegt dit lemma dat voor $x = X_0 + 1$ almost always de baan van



Terence Tao

x een minimum bevat dat kleiner is dan $\log x$ en dus ook kleiner dan x . Inductief is dan bewezen dat de baan van x eveneens convergeert naar de cykel $1 \Rightarrow 2$. Dat is de betekenis van *almost bounded values* in de titel van zijn artikel. Tao claimt niet het cykelvermoeden of het convergentievermoeden te hebben bewezen. Hij bewijst wel een sterke uitspraak over een combinatie van de twee vermoedens. Het bewijs omvat 49 pagina's, gebruikt transcendente getaltheorie en ergodische theorie en is geen sinecure (ik kwam er niet doorheen).

Los van Tao's resultaat kan in bijzondere gevallen voor een generalisatie van het $3x + 1$ -probleem divergentie worden bewezen. Lothar Collatz bestudeerde aanvaankelijk getallen, voortgebracht door

$$T(x) = \begin{cases} \frac{2x}{3} & \text{als } x \equiv 0 \pmod{3}, \\ \frac{4x-1}{3} & \text{als } x \equiv 1 \pmod{3}, \\ \frac{4x+1}{3} & \text{als } x \equiv 2 \pmod{3}. \end{cases} \quad (6)$$

In de terminologie van Matthews is $s = 32 - 27 = 5$ met de daarbij horende vermoedens over cyclen en convergentie. De verwachte vermenigvuldigingsfactor is $32/27$. T is een permutatie van de verzameling $\mathbb{N}$ en de inverse T^{-1} is

$$T^{-1}(x) = \begin{cases} \frac{3x}{2} & \text{als } x \equiv 0 \pmod{2}, \\ \frac{3x+1}{4} & \text{als } x \equiv 1 \pmod{4}, \\ \frac{3x-1}{4} & \text{als } x \equiv 3 \pmod{4}. \end{cases} \quad (7)$$

$s = 81 - 64 = 17$ en de hierbij verwachte vermenigvuldigingsfactor is niet $27/32$,

maar $81/64 > 1$. Volgens Matthews gelden voor T en T^{-1} dus dezelfde vermoedens. Divergente banen zijn dubbel divergent: zij komen van oneindig, dalen af naar een minimum en stijgen weer naar oneindig. Dezelfde vermenigvuldigingsfactor (bijvoorbeeld $32/27$) zorgt kennelijk voor de oneindig lange daling en de oneindig lange stijging. Empirisch lijken er willekeurig veel dubbel divergente banen te zijn.

De permutaties van vergelijkingen (6) en (7) kunnen alternatief worden beschreven als de permutatie

$$\begin{aligned} 2n &\leftrightarrow 3n, \\ 4n+1 &\leftrightarrow 3n+1, \\ 4n+3 &\leftrightarrow 3n+2. \end{aligned} \quad (8)$$

Elk natuurlijk getal x valt zowel links als rechts in precies één categorie (regel). In bijzondere gevallen kan het bestaan van divergente banen worden bewezen. Beschouw het voorbeeld

$$\begin{aligned} 6n &\left\{ \begin{array}{l} 3n \\ 12n+1 \\ 12n+2 \\ 12n+3 \\ 12n+4 \\ 12n+5 \\ 12n+7 \\ 12n+8 \\ 12n+9 \\ 12n+10 \\ 12n+11 \end{array} \right\} & \leftrightarrow & \left\{ \begin{array}{l} 15n+1 \\ 15n+2 \\ 15n+4 \\ 15n+5 \\ 15n+7 \\ 15n+8 \\ 15n+10 \\ 15n+11 \\ 15n+13 \\ 15n+14 \end{array} \right\}. \end{aligned} \quad (9)$$

Vanaf de tweede regel geldt (van links naar rechts): Als $x > 2$ dan $T(x) > x$ en $T(x) \not\equiv 0 \pmod{3}$. Hieruit volgt dat er drie triviale cyclen (0), (1), (2) zijn en een oneindig aantal dubbeldivergente banen met minima 3, 9, 15, In een divergente baan is geen uniforme distributie van getallen zoals vermoed door Matthews.

In vergelijking (6) zijn de verzamelingen $\{(2,0), (4,1), (4,2)\}$ en $\{(3,0), (3,1), (3,2)\}$ van gelijke grootte. Hetzelfde geldt voor de verzamelingen links en rechts in vergelijking (9). Het zijn zogenaamde *CC-sets*:

Definitie. Zij C een verzameling van $k \geq 2$ geordende paren $\{(a_i, b_i), i = 1, \dots, k\}$ met $a_i \in \mathbb{N}_+$ and $b_i \in \mathbb{N}_0$. We noemen C een *CC-set* (complete coverage set) indien voor iedere $x \in \mathbb{N}$ er precies een i bestaat waarvoor $x \equiv b_i \pmod{a_i}$. Voorbeelden zijn:

$$\begin{aligned} &\{(2,0), (4,1), (8,3), (16,7), (16,15)\}, \\ &\{(3,0), (3,1), (3 \cdot 2^{k+1}, 3 \cdot 2^k - 1) \mid k \geq 0\}. \end{aligned}$$

Gelijke grootte CC-sets zijn een voldoende voorwaarde voor de aanpak van Simons en De Weger. Op deze wijze kan het (niet) bestaan van cyclen worden bewezen, evenwel niet het bestaan van divergente banen.

Permutaties zijn in twee opzichten bijzondere generalisaties van de $3x+1$ -functie T .

1. Als er een eindig aantal cyclen is, dan moeten er divergente banen zijn. Er kunnen namelijk geen aanloopspruiten zijn zoals in het $3x+1$ -probleem.
2. Na verwisseling van twee expressies aan de rechter (of linker) zijde (bijvoorbeeld $15n+7$ en $15n+8$ in vergelijking (9)) blijft de functie een permutatie. We hebben dus te maken met een klasse van $(N+1)!$ permutaties waarvoor dezelfde CC-set-voorwaarde en lineaire log-expressie geldt, maar waarvan de cyclen per gekozen permutatie in die klasse verschillen.

Hebben de twee vermoedens overlap?

De twee onderzoekslijnen om het cykelvermoeden en het convergentievermoeden voor het $3x+1$ -probleem te bewijzen gebruiken verschillende takken van de wiskunde, respectievelijk transcendent getaltheorie en ergodische theorie. Zij hebben weinig overlap. Hierna wordt uitgelegd dat het nykel-concept in beide onderzoekslijnen een rol speelt.

Het verschil tussen x_0 en x_1 in een 1-nykel is $2v$. Voor iedere v bestaat er een 1-nykel met $k=2$, $l=1$. Die begint met $x_0 = 16v-5$ en eindigt met $18v-5$. De hele 1-nykel is $(16v-5, 24v-7, 36v-10, 18v-5)$ en dan valt de overeenkomst met de 1-cykel $(-5, -7, -10, -5)$ voor $x < 0$ op. Een analoge opmerking betreft de 2-cykel $(-17, -25, -37, -55, -82, -41, -61, -91,$

$-136, -68, -34, -17)$ die correspondeert met de 2-nykel die begint met $x_0 = 4096w-17 = 2^{11}2w-17$ en eindigt met $4374w-17 = 3^72w-17 = x_0 + 2 \times 139$. Algemeen geldt: indien er voor $x < 0$ een m -cykel bestaat met $k_i, l_i, i = 0, \dots, m-1$, dan bestaan er voor $x > 0$ oneindig veel m -nykels met diezelfde $k_i, l_i, i = 0, \dots, m-1$.

De eindwaarde $18v-5$ van de 1-nykel kan in de vorm $16w-5$ worden geschreven als $v = 8t$ en $w = 9t$. w bevat dan een factor 8 minder dan v . Dit proces is eindig. Hieruit volgt dat er geen divergente baan bestaat die een opeenvolging is van 1-nykels met $k_i = 2$, $l_i = 1$. Hetzelfde geldt voor een opeenvolging van 2-nykels met $k_0 = 4$, $l_0 = 2$, $k_1 = 3$, $l_1 = 3$. De triviale constatering dat er voor het $3x+1$ -probleem geen divergente baan bestaat met uitsluitend oneven getallen, hangt samen met het bestaan van de cykel (-1) .

Een divergente baan kan niet bestaan uit m -nykels met dezelfde k_i, l_i vanwege zo'n koppelveergelijking. Een divergente baan bestaat (afgezien van een aanloopspruit) per definitie uit een opeenvolging van m -nykels waarvan de beginwaarden $\bar{x}_j$ voldoen aan $\bar{x}_j < \bar{x}_{j+1}$. De rij k_i, l_i (per m -nykel zijn er m minima) kan geen cyclisch patroon bezitten. Lemma 2 kan worden gegeneraliseerd voor m -nykels en dat heeft gevolgen voor de structuur van een divergente baan

Lemma 4. Een divergente baan bestaat uit een qua grootte van v en/of m oneindige verzameling m -nykels.

Bewijs. Veronderstel dat de verzamelingen van v waarden en van m waarden allebei eindig zijn. Voor iedere m en v bestaat er een maximale x_0 . Over alle m -nykels en

alle v waarden bestaat er dan een maximale x_0 en dat is in tegenspraak met de divergentie. $\square$

Conclusies

1. De kracht van een methode om een vermoeden van het $3x+1$ -probleem te bewijzen, kan worden getoetst aan de toepasbaarheid op gegeneraliseerde problemen. Bij het cykelvermoeden gaat $\Lambda = (K+L)\log 2 - K\log 3$ van het $3x+1$ -probleem over in $\Lambda = (K+L)\log 2 - K\log p$ voor het $px+q$ -probleem en over in een lineaire vorm van meer logaritmen voor andere generalisaties. Transcendente getaltheorie blijft toepasbaar voor het bewijs van (non)-existentie van cyclen. Bij het convergentievermoeden speelt s in de formulering van Matthews een cruciale rol. Het concept pseudo-random is niet altijd van toepassing op divergente banen. Terras' definitie van de stoptijd is specifiek voor het $3x+1$ -probleem.
2. Voor het cykelvermoeden kan de bovengrens in Lemma 1 worden verscherpt. Dat leidt tot een grotere m voor de non-existent van m -cyclen. Een nieuw idee, bijvoorbeeld een m -onafhankelijk bewijs voor een eindig aantal cyclen, is nodig om significante voortgang te bereiken.
3. Voor het convergentievermoeden kan (vermoedelijk) de dichtheid van de getallenverzameling waarvoor het convergentievermoeden geldt, worden verhoogd. Een doorbraak zou zijn als bewezen kan worden dat divergente banen een bepaalde structuur moeten bezitten, en vervolgens het bestaan van zulke banen tot een tegenspraak leidt.
4. En overigens is het $3x+1$ -probleem nog niet opgelost. $\cdots$

Referenties

1. A. Baker, Linear forms in the logarithms of algebraic numbers IV, *Mathematika* 15 (1968), 204–216.
2. J.H. Conway, Unpredictable iterations, in *Proc. Number Theory Conference, University of Colorado, Boulder, Colorado, 1972*, pp. 49–52.
3. J.H. Evertse, Linear forms in logarithms I : Complex and p -adic, 2007, <https://www.math.leidenuniv.nl/~evertse/linearforms.pdf>.
4. R.K. Guy, *Unsolved Problems in Number Theory*, Problem Books in Mathematics, Vol. 1, Springer, 1994, second edition.
5. I. Krasikov and J.C. Lagarias, Bounds for the $3x+1$ problem using difference inequalities, *Acta Arithmetica* 109(3) (2003), 237–258.
6. J.C. Lagarias, ed., *The Ultimate Challenge: The $3x+1$ Problem*, AMS, 2010.
7. J.C. Lagarias, The $3x+1$ problem: An overview (2021), arXiv:2111.02635.
8. K.R. Matthews, The generalized $3x+1$ mappings, Markov chains and ergodic theory, 2010, <http://www.numbertheory.org/PDFS/matthews-final-revised.pdf>.
9. A. van der Poorten e.a., *Recurring Sequences*, AMS Mathematical Surveys and Monographs, Volume 104, AMS, 2000.
10. J.L. Simons en B.M.M. de Weger, Theoretical and computational bounds for m -cycles of the $3n+1$ problem, *Acta Arithmetica* 117(1) (2005), 51–70.
11. J.L. Simons, On the non-existence of m -cycles for generalized Syracuse sequences, *Acta Arithmetica* 131(3) (2007), 217–254.
12. J.L. Simons, Exotic Collatz cycles, *Acta Arithmetica* 134(3) (2008), 201–209.
13. R.P. Steiner, A theorem on the Syracuse Problem, in *Proc. 7th Manitoba Conference on Numerical Mathematics 1977, Winnipeg, 1978*, pp. 553–559.
14. T. Tao, Almost all orbit of the Collatz map attain almost bounded values, 2020, arXiv:1909.03562.
15. R. Terras, A stopping time problem on the positive integers, *Acta Arithmetica* 30 (1972), 241–252.
16. B. de Weger, Het $3n+1$ -vermoeden, *Nieuw Archief voor Wiskunde* 5/15(3) (2014), 40–50.

Daan Mulder*promovendus AMOLF, Amsterdam
mulderdaan@live.nl***Het keerpunt van Rolf Ypma**

Je kijkt in een wereld die je normaal niet ziet

Het gebouw van het Nederlands Forensisch Instituut (NFI) verrijst rechts naast je, als je vanaf Den Haag onder de A4 door fietst. Het kantoor zelf is maar een paar verdiepingen hoog, maar vooral heel breed, en ligt op een soort terp. Wie naar binnen wil, moet een afspraak hebben, zijn ID meebrengen en door een smalle, beveiligde draaideur naar binnen. Daar haalt Rolf Ypma (1986), die hier werkt als forensisch *data scientist*, me op. De indrukwekkende rondleiding door het gebouw voert langs PCR-machines en massaspectrometers, en langs een aantal vervalste, in beslag genomen, Goya's en Rembrandts. De schietbaan onder in het gebouw is, jammer genoeg, al dicht.

Hoe ziet een werkdag er hier uit?

“We werken hier in projectteams. Zo'n project is vaak een strafzaak waar de politie aan werkt, zoals een moord. De politie komt bij ons met een specifieke vraag over die strafzaak. ‘We hebben deze telefoons gevonden en deze data uitgelezen, is het aannemelijk dat de verdachte de dader is?’ Wij proberen dan om die vraag in een rapport te beantwoorden. Overigens kun je wiskundig gezien nooit een harde conclusie trekken — wij doen altijd een kansuitspraak. Dat rapport wordt dan weer gebruikt in een rechtszaak. Andere projecten hebben als doel onderzoeksmethoden te verbeteren of te valideren.

Als NFI hebben we geen bevoegdheid om aan opsporing te doen; wij zijn gewoon burgers. Als de politie of het OM een vraag heeft, dan levert de politie de data aan. Soms zijn dat chatgesprekken, en is de vraag wie de auteur is, soms zijn het mastgegevens van een telefoon, bij welke zendmast een telefoon in de buurt is geweest, en is de vraag of dat overeenkomt met het bewegingspatroon van een verdachte. Ik werk op de digitale

afdeling; de rest van het NFI werkt met fysieke sporen. Dan heb je bijvoorbeeld een wapen, en doen we hier het sporenonderzoek en de analyse. Dat kan van alles zijn: van kruitsporen tot DNA.

Ik houd me ook bezig met hoe we als instituut *data science* in kunnen zetten.



Rolf Ypma

Op de digitale afdeling is natuurlijk heel veel aandacht voor computers. Maar in die andere labs worden ook data gegenereerd, waar je data science-technieken ook heel goed op kunt toepassen. Dus dan gaan overleggen en kijken wat er mogelijk is — juist die veelheid aan domeinen maakt het NFI zo boeiend.”

Waarom ben je wiskunde gaan studeren?

“Een heel slechte reden: ik wilde gewoon iets dat moeilijk is. Ik vond natuurkunde en wiskunde leuk, maar ik houd niet zo van practica en mijn oudere broer deed al natuurkunde, dus het werd technische wiskunde, in Delft. Het is een gezamenlijke bachelor met Leiden. In Leiden doe je bijvoorbeeld topologie en getaltheorie, en in Delft ligt de nadruk veel meer op modelleren en scripts schrijven. Ik heb ook een minor computer science gedaan. Maar voor mijn afstuderen heb ik juist wel een heel theoretisch onderwerp gekozen, in de getaltheorie. Dat leek me leuk, en ik wist: dit is de laatste keer dat dat gaat gebeuren. Ik heb het later nog een keer teruggelezen; ik snap nu nog maar de helft van wat ik toen heb opgeschreven.

Ik vind het wel leuk om ook die theoretische kant gezien te hebben. Het is conceptueel veel ingewikkelder dan de toegepaste kant, maar als theoreticus heb je het voordeel dat je je eigen problemen formuleert. Je kunt je probleem zo kiezen dat het nog haalbaar is, of

redelijk om mee te werken. In de toegepaste praktijk is het probleem vaak óf heel simpel, óf compleet onmogelijk.

Zoals veel mensen bij wiskunde ben ik heel breed geïnteresseerd in alles wat met puzzelen te maken heeft. Met data krijg je vanzelf een puzzel: wat kan ik eruit halen, hoe kan ik hier meer uit leren? Dan kom je op het snijvlak van wetenschap en engineering terecht. Wetenschap is voor mij 'ik wil begrijpen hoe het werkt, en om dat te doen moet ik iets bouwen dat werkt', terwijl je bij engineering zegt 'ik wil iets bouwen dat werkt, en daarom moet ik beter begrijpen wat er gebeurt'. Het lijkt heel erg op elkaar, maar het doel is net anders.

Op welk gebied je dat toepast, maakt voor mij dan minder uit: ik vind veel te veel gebieden interessant. Ik ben bij het RIVM gepromoveerd op modellen voor infectieziekten. Jacco Wallinga, die de afgelopen jaren zo veel in het nieuws was in verband met corona, was daar een van mijn begeleiders. Ik heb bijvoorbeeld gekeken naar de mogelijke rol van wind bij het verspreiden van vogelgriep.

Daarna ben ik in Cambridge als postdoc hersenonderzoek gaan doen. Of het nu gaat om de verspreiding van een ziekte, of de communicatie in een hersennetwerk: veel van de wiskunde om het te beschrijven is hetzelfde, zoals grafentheorie, en de technieken om data mee te verwerken zijn dat ook. Bij het hersenonderzoek ging het specifiek over de communicatienetwerken in de hersenen zoals je die kan meten met een fMRI-machine. Als je kan zien welke hersengebieden met elkaar communiceren kun je natuurlijk iets zeggen over hoe de hersenen werken.

Uiteindelijk zag ik toch geen toekomst voor mezelf in dat veld: ik was er niet genoeg van overtuigd dat de grafentheorie de problemen ging oplossen in de hersenwetenschap. Toen ben ik in Cambridge bij het Development Center van Amazon gaan werken. Dat was wel een heel andere kant op: we werkten aan de software van Alexa; software waar je vragen aan kunt stellen, en waar dan een antwoord op moet komen.

Inmiddels hadden mijn vrouw en ik ook twee kinderen gekregen. Toen haar werk in Engeland ophield, hebben we be-

sloten om terug naar Nederland te gaan. Toen kwam ik bij het NFI terecht, inmiddels vijf jaar geleden.

Ik houd heel erg van de wetenschap, maar ik vind het heel fijn dat ik op een plek zit als hier. Je kunt hier wel wetenschap doen, maar niet in een academische setting waar je moet publiceren alsof je leven ervan afhangt, of moet verhuizen voor een vaste positie. In het algemeen heb je in Nederland, zeker bij de overheid, meer mogelijkheden om parttime te werken. In Engeland werkt iedereen eigenlijk vijf dagen, en omdat iedereen vijf dagen werkt heeft iedereen ook het gevoel dat ie dat moet doen. De universiteit van Cambridge is nog wel het ergste: in het lab daar zijn mensen eigenlijk gewoon altijd bezig, en is de consensus dat je dat nu eenmaal moet doen om iets te bereiken. Dat is een cultuur die zichzelf versterkt."

Merk je nu een groot verschil met de academie?

"In de forensische wetenschap helpt het heel erg om te zien wat de echte problemen zijn, waar je in de praktijk tegenaan loopt. Simpel voorbeeld: je hebt een telefoon en je wilt daarin alle plaatjes van wapens vinden. Als je academicus bent, kun je op internet plaatjes van wapens zoeken en een model ontwikkelen dat die plaatjes herkent. Maar als wij dat model gebruiken, werkt het veel slechter dan zij in een publicatie zeggen. Niet omdat ze liegen, maar omdat de foto's die op een telefoon worden gevonden verschillen van de plaatjes op internet: ze zijn slechter belicht, of bewogen, of de wapens liggen maar half in beeld.

Bij het zoeken naar plaatjes is het niet zo erg dat de computer foutjes maakt, maar bij andere toepassingen, zoals in de rechtszaal of bij het aanmerken van verdachten, is het moeilijker. Je kunt met *artificial intelligence* (AI) aan gezichtsherkenning doen — we weten uit allerlei tests dat AI dat beter doet dan zelfs experts — maar we weten niet hoe zo'n algoritme precies werkt. Je kan het niet maken om de fout in te gaan. Als wij in een moordzaak zeggen: dit spoor is gelinkt aan deze persoon uit de database, dan staat daar de volgende dag politie voor de deur, die zo iemand van het bed licht

en meeneemt naar het bureau. Dan kun je niet later zeggen: oh, ik heb nog eens naar mijn automatische analyse gekeken, het klopte toch niet helemaal. Vandaar dat we veel meer aan validatie doen dan bijvoorbeeld een Amazon, en kijken naar combinaties van mens en machine."

Hoe is het om zoveel met criminaliteit bezig te zijn?

"Het is vooral fascinerend: je kijkt in een wereld die je normaal niet ziet. Een goed voorbeeld is de versleutelde EncroChat-service. De politie wist dat ze die konden hacken en live meelesen. Een van de eisen van de rechter-commissaris om dat te mogen doen, was dat de politie moest ingrijpen als iemand met het leven bedreigd zou worden. Dus de politie moest in die enorme stroom data zien of er mensen bedreigd worden. Toen is de politie bij ons gekomen om te vragen of we een AI-model konden maken om dat soort berichten eruit te halen. Dat was een heel erg gevoelige operatie, wij hadden geen idee waar dit over ging, wij wisten alleen dat we zo'n model moesten maken. Wat we daarvoor moesten doen was veel berichten lezen en labelen. Dan zie je dat levens in die wereld heel goedkoop zijn. Je kunt voor een paar duizend euro iemand laten liquideren. Mensen spreken over levens van anderen alsof het niets waard is."

Je begon je carrière met het maken van modellen voor infectieziekten voor het RIVM. Had je in maart 2020 geen spijt dat je daar weg bent gegaan?

(lacht) "Dat was razend interessant geweest, en hard werken ook. Daar had ik best wel bij willen zijn. Maar over het algemeen heb ik er geen spijt van, ik heb zoveel interessante dingen kunnen doen. Ik heb het gevoel dat ik al vier carrières gehad heb, in zekere zin. Dat vind ik een van de boeiende dingen aan wiskunde en data science: je kan zoveel verschillende domeinen bekijken en daar kennis op doen. Wiskunde maakt dat mogelijk." ❧

Goede suggesties voor een Nederlandse wiskundige met een keerpunt in zijn of haar carrière zijn welkom via keerpunt@nieuwarchief.nl.

Jan-Willem van Ittersum

Max-Planck-Institut für Mathematik
Bonn
ittersum@mpim-bonn.mpg.de

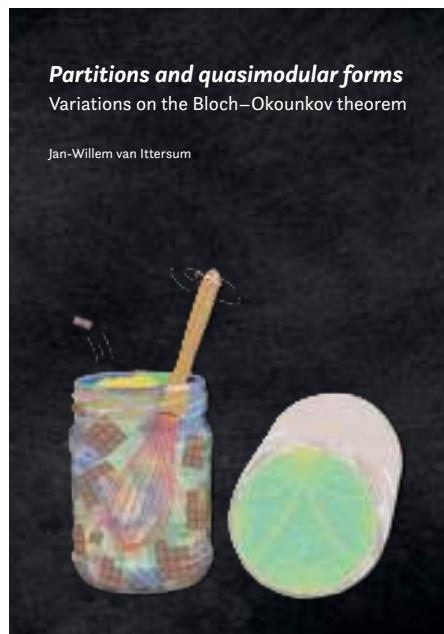


Jan-Willem van Ittersum

Onderzoek KWG PhD-prijs 2021 en Stieltjesprijs 2020–2021

Een recept voor quasimodulaire vormen

Het is lunchtijd! Terwijl jij jouw broodtrommeltje tevoorschijn haalt, komt Jan-Willem aangelopen met een zak brood en een pot vol smeersel. Wat is dat voor smeersel? Is het chocolapasta? Of heeft hij vandaag weer pindakaas? “Je mag wel een beetje proeven, hoor”, zegt hij wanneer hij je naar de pot ziet staren. “Het zijn de laatste resultaten van mijn proefschrift.” Je neemt een hapje. Het smaakt een beetje als gekristalliseerde honing en ook als spekkoeke; hij noemt het een *quasimodulaire vorm*. “Zelfgemaakt”, zegt hij trots. Nog voordat je hem een verdere vraag kan stellen, begint hij al te vertellen: “Je neemt een bepaalde hoeveelheid partities, een soort tetris-chocoladerepen. Even kloppen met een speciaal soort garde — de q -haak — en... tadaah: een quasimodulaire vorm! Vandaag is het E_2 , want ik had van elke partitie evenveel gram als zijn eigen grootte genomen, maar ik had ook best een bepaalde macht van alle delen kunnen nemen.” “Eh, ik volg het niet helemaal”, onderbreekt iemand anders hem. “Wat zijn dat voor ingrediënten, partities? En wat is nu precies het recept?” “Lekker is het in ieder geval wel”, denk je. Hier wil je meer van (w)eten! Jan-Willem van Ittersum won zowel de KWG PhD-prijs voor de presentatie van zijn promotieonderzoek op het NMC 2021 en de Stieltjesprijs voor het beste wiskundige proefschrift van het academische jaar 2020–2021 aan een Nederlandse universiteit.



De voorkant van het proefschrift

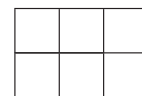
In mijn proefschrift heb ik me beziggehouden met variaties op de Bloch–Okounkov-stelling: een soort recept om quasimodulaire vormen te maken uit partities. Een recept begint altijd met een aantal ingrediënten, geeft vervolgens een bereidingswijze om tot een resultaat te komen en sluit af met enkele variatietips. Evenzo beginnen we met het introduceren van partities, vervolgens definiëren we de q -haak en de quasimodulaire vormen die we met dit recept bereiden. We sluiten af met enkele variatietips, dat wil zeggen: de eigenlijke resultaten van dit proefschrift.

Ingrediënten: partities

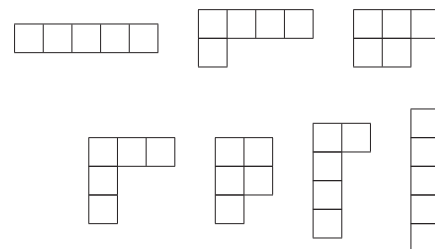
Een *partitie* is een manier om een geheel getal te schrijven als de som van positieve gehele getallen. Zo is bijvoorbeeld $3 + 2$ een partitie van 5. Alle partities van het getal 5 zijn als volgt:

5, $4 + 1$, $3 + 2$, $3 + 1 + 1$, $2 + 2 + 1$,
 $2 + 1 + 1 + 1$, $1 + 1 + 1 + 1 + 1$.

Andere sommen zijn niet mogelijk, behalve dat we ook $2 + 3$ zouden kunnen schrijven in plaats van $3 + 2$. We spreken af dat we in zo'n geval $3 + 2$ en $2 + 3$ als dezelfde partitie beschouwen, omdat de volgorde van de getallen in een som niet uitmaakt. De ‘tetris-chocoladereep’, beter gezegd het *Young-diagram*, die hoort bij deze partitie is



want de eerste rij in dit diagram telt 3 hokjes en de tweede rij telt 2 hokjes. In het algemeen construeer je het Young-diagram van een partitie door de getallen in de bijbehorende som door een rij van evenveel hokjes te vervangen; in het voorbeeld van de partities van 5 hierboven krijg je dan:



Merk op dat het aantal hokjes in alle bovenstaande diagrammen gelijk is aan 5, dit getal noemen we de *grootte* van een partitie.

Voor elk geheel getal n kunnen we nu tellen hoeveel partities er zijn van grootte n . Dan vinden we dat er 1, 2, 3, 5, 7, ... partities



zijn voor de getallen $1, 2, 3, 4, 5, \dots$. Deze getallen nemen we samen in de voortbrengende reeks van partities

$$\sum_{\lambda \in \mathcal{P}} q^{|\lambda|} = 1 + q + 2q^2 + 3q^3 + 5q^4 + 7q^5 + \dots,$$

waar we $\mathcal{P}$ schrijven voor de verzameling van partities en $|\lambda|$ voor de grootte van de partitie λ . De identiteit

$$\sum_{\lambda \in \mathcal{P}} q^{|\lambda|} = \frac{1}{\prod_{n \geq 1} (1 - q^n)}$$

werd voor het eerst bewezen door Euler. De rechterkant is, op een macht van q na, gelijk aan de inverse van de Dedekind-eta-functie

$$\eta(q) = q^{\frac{1}{24}} \prod_{n \geq 1} (1 - q^n).$$

Deze functie is het eerste voorbeeld van een modulaire vorm.

Opmerking: Het aantal van partities van n wordt gegeven door

$$\frac{1}{4n\sqrt{3}} \exp\left(\pi\sqrt{\frac{2n}{3}}\right)$$

als $n \rightarrow \infty$. Dit resultaat is een van de ontdekkingen van Ramanujan. Voor het bewijs zijn de modulaire eigenschappen van η essentieel.

De ingrediënten van ons recept zijn dus partities: niet alleen van 5, maar partities van alle mogelijke gehele getallen. We moeten ook nog vertellen wat het *gewicht* is van elke partitie voor het recept: het maakt namelijk heel veel uit of je een brood bakt van 200 g bloem en 4 g zout of 4 g bloem en 200 g zout. Dat is precies waar dit proefschrift over gaat: welke combinatie van gewichten zorgt er voor dat het recept een (heerlijke) quasimodulaire vorm als uitkomst heeft? We geven een oneindige familie van voorbeelden van ‘goede’ gewichten.

Het recept van het smeersel in het begin nam van elke partitie van een geheel getal n precies n gram. Oftewel, het gewicht van elke partitie is gelijk aan de grootte van die partitie. Iets algemener nemen we als gewichtsfunctie ($k \geq 1$):

$$p_k(\lambda) = \frac{1}{k!} \sum_{i=1}^r ((\lambda_i - i + \frac{1}{2})^k - (-i + \frac{1}{2})^k)$$

voor een partitie

$$\lambda = \lambda_1 + \lambda_2 + \dots + \lambda_r.$$

Het zijn precies deze gewichtsfuncties die gebruikt worden in het recept van de

Bloch–Okounkov stelling. Merk op dat voor $k = 1$ we weer de gewichtsfunctie krijgen die aan een partitie de grootte toekent, dat wil zeggen $p_1(\lambda) = \sum_i \lambda_i = |\lambda|$.

Opmerking: Bij het tellen van zogenaamde overdekkingen van twee-dimensionale meetkundige objecten (oppervlakken) stuiten wiskundigen als vanzelf op bepaalde hoeveelheden partities. Dit soort tellingen begon met het werk van de wiskundige Hurwitz aan het einde van de negentiende eeuw en vormt een groot onderzoeksgebied in de huidige wiskunde en natuurkunde. Een voorbeeld van zo’n telling, vertaald naar een probleem in de symmetrische groep S_d is het bepalen van de kardinaliteit van

$$\{(\alpha, \beta, \gamma_1, \dots, \gamma_k) \in S_d^{k+2} \mid \gamma_i \text{ transposities, } \alpha\beta\alpha^{-1}\beta^{-1}\gamma_1 \dots \gamma_k = 1\}$$

voor $k \geq 1$. Deze blijkt gelijk te zijn aan

$$d! \sum_{\lambda \vdash d} p_2(\lambda)^k,$$

waar de som loopt over alle partities λ van grootte d . Hoewel deze formule bewezen kan worden met klassieke resultaten uit de representatietheorie van eindige groepen, is deze pas in 1990 ontdekt in de theoretische natuurkunde [4]. Mijn proefschrift bevat ook enkele resultaten over vergelijkbare tellingen.

Bereidingswijze: de q -haak

We bereiden quasimodulaire vormen uit partities door gebruik te maken van de q -haak, afgebeeld als een garde. De q -haak van een (complexwaardige) gewichtsfunctie g is gedefinieerd als

$$\langle g \rangle_q := \frac{\sum_{\lambda \in \mathcal{P}} g(\lambda) q^{|\lambda|}}{\sum_{\lambda \in \mathcal{P}} q^{|\lambda|}} \in \mathbb{C}[[q]]. \quad (1)$$

Merk op dat de noemer $\sum_{\lambda} q^{|\lambda|}$ precies de voortbrengende reeks van partities is.

Als voorbeeld berekenen we nu $\langle p_1 \rangle_q$. Door gebruik te maken van Eulers formule voor de voortbrengende reeks van partities zien we dat

$$\begin{aligned} \langle p_1 \rangle_q &= \frac{\sum_{\lambda} |\lambda| q^{|\lambda|}}{\sum_{\lambda} q^{|\lambda|}} = q \frac{\partial}{\partial q} \log \left(\sum_{\lambda} q^{|\lambda|} \right) \\ &= -q \frac{\partial}{\partial q} \log \left(\prod_{m \geq 1} (1 - q^m) \right). \end{aligned}$$

Door de expansie van de meetkundige reeks te gebruiken concluderen we dat

$$\begin{aligned} \langle p_1 \rangle_q &= \sum_{m \geq 1} \frac{mq^m}{1 - q^m} = \sum_{m, r \geq 1} mq^{mr} \\ &= \sum_{n \geq 1} \sigma(n) q^n, \end{aligned}$$

waar $\sigma(n)$ gelijk is aan de som van alle delers van n . Zo zien we hoe we, door te beginnen met partities, een reeks met interessante getaltheoretische coëfficiënten hebben gekregen. We zullen nu zien waarom het natuurlijk is de constante $-\frac{1}{24}$ bij deze reeks op te tellen. Namelijk, op deze constante na is de reeks een voorbeeld van een quasimodulaire vorm.

Opmerking: De breuk (1) kunnen we ook interpreteren als de door de natuurkundigen Maxwell en Boltzmann in de negentiende eeuw geïntroduceerde *toestandssom* van een meetbare grootheid g in een systeem. In dat geval is λ een van de vele microstaten, het getal n de bijbehorende energie en het getal q een functie van de temperatuur. Deze toestandssom geeft alle macroscopische informatie over het systeem, bijvoorbeeld het volume en de druk.

Resultaat: een quasimodulaire vorm

De quasimodulaire vormen die volgens bovenstaand recept verkregen zijn, kan men visualiseren zoals in Figuur 1. (Zie [5] voor hoe men deze afbeeldingen maakt en wat ze precies weergeven.) Het is duidelijk dat quasimodulaire vormen een opmerkelijk symmetrie bezitten! Deze doet denken aan de cirkellimieten van M.C. Escher. Inderdaad, in beide gevallen is de symmetriegroep die van een betegeling van het hyperbolische vlak.

Per definitie is een modulaire vorm van gewicht k een complexe functie f die voldoet aan de volgende eigenschappen:

- (i) f is holomorf op het complexe bovenhalfvlak $\{z \in \mathbb{C} \mid \text{Im}(z) > 0\}$.
- (ii) Voor alle z geldt

$$f(z+1) = f(z) \text{ en } f\left(\frac{-1}{z}\right) = z^k f(z).$$

- (iii) $f(z)$ is holomorf in oneindig, dat wil zeggen, f heeft een Fourierreeks

$$f = \sum_{n=0}^{\infty} a_n q^n \quad (q = e^{2\pi iz})$$

met Fouriercoëfficiënten a_n .

Zo is bijvoorbeeld η^{24} een modulaire vorm van gewicht 12. Voor de definitie van quasimodulaire vormen moet je de functionaalvergelijking (ii) vervangen door



Figuur 1 Visualisatie van quasimodulaire vormen.

(ii') Voor alle z geldt

$$f(z+1) = f(z) \text{ en } f\left(\frac{-1}{z}\right) = \sum_{i=0}^p z^{k-i} f_i(z)$$

voor holomorfe functies $f_0, \dots, f_p$ op het bovenhalfvlak en in oneindig, als in (i) en (iii).

Het bekendste voorbeeld van een quasimodulaire vorm is de logaritmische afgeleide van de η -functie

$$E_2(z) = -\frac{1}{24} + \sum_{n \geq 1} \sigma(n) q^n$$

die voldoet aan

$$E_2\left(-\frac{1}{z}\right) = z^2 E_2(z) - \frac{1}{2} \frac{z}{2\pi i}.$$

Hier hebben we weer de identificatie $q = e^{2\pi iz}$ gemaakt.

Uit deze definities zijn de volgende belangrijke eigenschappen af te leiden. Allereerst kan je quasimodulaire vormen bij elkaar optellen, aftrekken en met elkaar vermenigvuldigen. Het resultaat is dan een nieuwe quasimodulaire vorm. (Als je de homogene polynomen $x^2 + y^2$ en $x^5 - xy^4$ bij elkaar optelt is het resultaat een niet-homogeen polynoom. Evenzo is de som van twee quasimodulaire vormen van verschillende gewichten een quasimodulaire vorm van *gemengd gewicht*.) Bovendien kan je quasimodulaire vormen differentiëren, ook dan is het resultaat een quasimodulaire vorm. Ten tweede zijn er betrekkelijk weinig quasimodulaire vormen. Alle quasimodulaire vormen zijn namelijk een combinatie van de drie 'bouwstenen' E_2 , E_4 en E_6 . We hebben hierboven al de definitie van E_2

gezien; voor $k \geq 2$ is de Eisensteinreeks E_k gedefinieerd als

$$E_k = -\frac{B_k}{2k} + \sum_{n \geq 1} \sum_{d|n} d^{k-1} q^n$$

met B_k het k -de Bernoulligetel.

Stelling 1. *De algebra van quasimodulaire vormen is gelijk aan $\mathbb{C}[E_2, E_4, E_6]$.*

Opmerking: Er zijn vele toepassingen van quasimodulaire vormen in de getaltheorie alsmede in andere gebieden van de wiskunde. Bekijk bijvoorbeeld de modulaire θ -reeks

$$\theta(z) = \sum_{n_1, n_2, n_3, n_4 \in \mathbb{Z}} q^{n_1^2 + n_2^2 + n_3^2 + n_4^2}.$$

We vinden dan het klassieke resultaat dat elk positieve geheel getal n te schrijven is als som van vier kwadraten van gehele getallen op

$$8 \sum_{\substack{d|n \\ 4 \nmid d}} d \quad (2)$$

manieren, door te gebruiken dat de ruimte van modulaire vormen voor een vast gewicht van eindige dimensie is. Op deze manier reduceert het bewijs van de stelling van Lagrange tot het checken dat de coëfficiënt van q^n in θ overeenkomt met (2) voor $n = 1$ en $n = 2$.

Ook diepere resultaten, zoals de oplossing van de laatste stelling van Fermat, of de oplossing voor het bolpakkingsprobleem in dimensie 8 en 24, waar Maryna Viazovska recent de Fieldsmedaille voor heeft gewonnen, zijn bewezen met behulp van quasimodulaire vormen.

Het vermenigvuldigen van recepten

Zoals gezegd kan je quasimodulaire vormen bij elkaar optellen en met elkaar vermenigvuldigen. Hoe zit dat eigenlijk met recepten? Als we bijvoorbeeld de ingrediënten voor een cake samen nemen met de ingrediënten voor een brood, dan kunnen we uit deze combinatie van ingrediënten gemakkelijk zoete broodjes bakken. Optellen van recepten kan dus goed gaan. Vermenigvuldigen van de ingrediënten van cake en brood is iets heel vreemds, en ik denk niet dat daar iets van te bakken valt. Hier houdt de vergelijking met recepten dan ook op. De recepten van Bloch en Okounkov kan je namelijk wel met elkaar vermenigvuldigen.

Dat kan als volgt geformuleerd worden. Zij Λ^* de algebra van alle lineaire combinaties en producten van de gewichtsfuncties p_k , i.e.,

$$\Lambda^* := \mathbb{Q}[p_1, p_2, p_3, \dots].$$

Stelling 2 (Bloch–Okounkov [1]). *Voor alle $f \in \Lambda^*$ is $\langle f \rangle_q$ een quasimodulaire vorm.*

Eerste variatietip:

Symmetrische gewichtsfuncties

Tijdens mijn doctoraat vroeg ik me af of er nog meer van dat soort algebra's zijn als Λ^* . Immers, deze eigenschap dat je de gewichtsfuncties met elkaar kan vermenigvuldigen terwijl de q -haak geen groepshomomorfisme is, vond ik bijzonder. Er bestaat inderdaad nog zo'n algebra. Namelijk, zij

$$s_k(\lambda) = \sum_i \lambda_i^k$$

een *symmetrische* functie, in plaats de verschoven symmetrische functie p_k . Dan is er voor

$$\mathcal{S} := \mathbb{Q}[s_1, s_3, s_5, \dots]$$

een vergelijkbaar resultaat.

Stelling 3. Voor alle $f \in \mathcal{S}$ is $\langle f \rangle_q$ een quasimodulaire vorm.

Het is goed om op te merken dat er nog talloze andere interessante functies f bekend zijn waarvoor $\langle f \rangle_q$ een quasimodulaire vorm is, maar dat het onbekend is of er nog meer van zulke *algebra's* als Λ^* en $\mathcal{S}$ bestaan.

Opmerking: Net als voor de verschoven symmetrische functies zijn er waarschijnlijk allerlei toepassingen in de aftellende meetkunde en mathematische fysica voor deze stelling. Na het verdedigen van mijn proefschrift heb ik bijvoorbeeld dit resultaat gebruikt in een artikel met Giulio Ruzza [7]. Hierin bewijzen we dat de voortbrengende reeksen van bepaalde quantum-Hamiltonische operatoren quasimodulair zijn.

Tweede variatietip:

De Laplace-operator van een recept

Wanneer voldoet het resultaat van een van de recepten nou aan de functionaal-vergelijking (ii) in plaats van (ii'), dat wil zeggen, wanneer is het resultaat modulair in plaats van quasimodulair? Voor het antwoord op deze vraag moeten we g niet alleen beschouwen als gewichtsfunctie, maar ook als een formeel polynoom in variabelen $\tilde{p}_1, \tilde{p}_2, \dots$, die we, op een constante na, identificeren met de gewichtsfuncties $p_1, p_2, \dots$.

Stelling 4 (Zagier [8]). Voor $g \in \Lambda^*$, schrijf $\tilde{g}$ voor het corresponderende polynoom in de variabelen $\tilde{p}_1, \tilde{p}_2, \tilde{p}_3, \dots$. Dan geldt dat $\langle g \rangle_q$ modulair is precies als $\tilde{g}$ in de kern ligt van de operator $\Delta = \mathcal{D} - \partial^2$ met

$$\partial = \sum_{m \geq 0} \tilde{p}_{m-1} \frac{\partial}{\partial \tilde{p}_m},$$

$$\mathcal{D} = \sum_{k,l \geq 0} \binom{k+1}{k} \tilde{p}_{k+l-1} \frac{\partial^2}{\partial \tilde{p}_k \partial \tilde{p}_l}.$$

en na de substitutie $\tilde{p}_{-1} = 1$ en $\tilde{p}_0 = 0$.

Zo kunnen we bijvoorbeeld uitrekenen dat de gewichtsfuncties ($k \geq 2$)

$$\tilde{h}_k = \sum_r \frac{\tilde{p}_1^r \tilde{p}_{k-2r}}{2^r (k-r-\frac{1}{2})_r r!}$$

modulaire vormen geven na toepassing van de q -haak (hier is $(x)_n = x(x+1) \cdots (x+n-1)$). Het blijkt dat de tweede-orde operator Δ zich precies zo gedraagt als de laplaciaan. Door vergelijkbare ideeën te gebruiken als voor de laplaciaan, heb ik in mijn proefschrift een expliciete basis gevonden voor de ruimte van gewichtsfuncties g zodat $\langle g \rangle_q$ een modulaire vorm is, in plaats van een quasimodulaire vorm.

Opmerking: Er is een opmerkelijke parallel tussen dit resultaat en het antwoord op de vraag voor welke polynomen P een theta-reeks als

$$\theta_P(z) = \sum_{n_1, n_2, n_3, n_4 \in \mathbb{Z}} P(n_1, n_2, n_3, n_4) q^{n_1^2 + n_2^2 + n_3^2 + n_4^2}$$

modulair is. De reeks θ_P , die een variatie is op de eerdergenoemde reeks θ , is namelijk een quasimodulaire vorm voor alle polynomen P , en modulair precies als P in de kern ligt van de Laplace-operator.

Derde variatietip: Eenheidswortels

In een wiskundig artikel over recepten kunnen eenheidswortels niet ontbreken! In deze variatie zijn eenheidswortels echter niet de ingrediënten, maar komen ze voor in de gewichtsfuncties. Bekijk bijvoorbeeld de gewichtsfunctie

$$\sum_i \lambda_i^k \zeta_N^{\lambda_i}$$

voor een N -de-machts eenheidswortel ζ_N .

Polynomen in zulke gewichtsfuncties leveren inderdaad quasimodulaire vormen op (op een zekere twist in de definitie van quasimodulaire vormen na; we vegen de technische details hier onder het tapijt).

Ondanks dat complexe getallen als gewichten niets betekenen in de oorspronkelijke analogie van recepten ("Neem $\frac{1}{2} + \frac{1}{2}i\sqrt{3}$ gram suiker, ..."), is er wel degelijk een interpretatie van deze resultaten. Namelijk, na een discrete Fouriertransformatie, vinden we dat ook sommen van de vorm

$$\sum_{\lambda_i \equiv a \pmod{N}} \lambda_i^k,$$

quasimodulaire vormen geven. Hier is de som over alle delen λ_i van een partitie λ waar λ_i voldoet aan een bepaalde congruentieconditie. Bijvoorbeeld, voor $a = 1$ en $N = 2$, nemen we in de som alleen machten van de *oneven* delen λ_i .

Opmerking: Congruenties zijn een terugkerend thema in zowel de theorie van partities, als in de theorie van modulaire vormen. De bekendste en zeer fascinerende voorbeelden gaan beiden terug naar Ramanujan. Schrijf $p(n)$ voor het aantal partities van het getal n . Dan geldt

$$p(5k+4) \equiv 0 \pmod{5},$$

$$p(7k+5) \equiv 0 \pmod{7},$$

$$p(11k+6) \equiv 0 \pmod{11}.$$

En, als we $\tau(n)$ schrijven voor de coëfficiënt van q^n in $\eta^{24} = q \prod_{n \geq 1} (1 - q^n)^{24}$, geldt er

$$\tau(n) \equiv \sum_{d|n} d^{11} \pmod{691}.$$

Verder lezen

Zelf heb ik veel geleerd van [2], [8] en [9] over modulaire vormen en hun relatie tot partities. Het boek [3] is een goede inleiding in de aftellende meetkunde die voortbouwt op het werk van Hurwitz. ☺

Referenties

- 1 Spencer Bloch en Andrei Okounkov, The character of the infinite wedge representation, *Adv. Math.* 149(1) (2000), 1–60.
- 2 Peter Bruin en Sander Dahmen, *Modular Forms*, Lecture notes voor het MasterMath-vak over modulaire vormen, 2020, <https://few.vu.nl/~sdn249/modularforms16/notes.pdf>.
- 3 Renzo Cavalieri en Eric Miles, *Riemann Surfaces and Algebraic Curves: A First Course in Hurwitz Theory*, Vol. 87 of London Mathematical Society Student Texts, Cambridge

University Press, 2016.

- 4 Robbert Dijkgraaf en Edward Witten, Topological gauge theories and group cohomology, *Comm. Math. Phys.* 129(2) (1990), 393–429.
- 5 David Lowry-Duda, Visualizing modular forms (2020), [arXiv:2002.05234](https://arxiv.org/abs/2002.05234).
- 6 Jan-Willem van Ittersum, *Partitions and Quasimodular Forms: Variations on the Bloch–Okounkov Theorem*, Proefschrift, Universiteit Utrecht, 2021, <https://dspace.library.uu.nl/handle/1874/402356>.

[uu.nl/handle/1874/402356](https://dspace.library.uu.nl/handle/1874/402356).

- 7 Jan-Willem van Ittersum en Giulio Ruzza, Quantum KdV hierarchy and quasimodular forms (2022), [arXiv:2202.03213](https://arxiv.org/abs/2202.03213).
- 8 Don Zagier, Elliptic modular forms and their applications, in *The 1-2-3 of Modular Forms*, Universitext, Springer, 2008, pp. 1–103.
- 9 Don Zagier, Partitions, quasimodular forms, and the Bloch–Okounkov theorem, *Ramanujan J.* 41(1–3) (2016), 345–368.

Wil Schilders

Platform Wiskunde Nederland
w.h.a.schilders@tue.nl

Evenement Uitreiking Abelprijs, 23–25 mei 2022, Oslo

Sfeerimpressie Abelprijs 2022

Op 24 mei werd de Abelprijs 2022 uitgereikt aan Dennis Sullivan tijdens een driedaags evenement in Oslo. Wil Schilders was als president-elect van de International Council for Industrial and Applied Mathematics (ICIAM) aanwezig op uitnodiging van het Abel-comité.

De Abelprijs is vernoemd naar Niels Henrik Abel (1802–1829), de grootste wiskundige van Noorwegen door de tijden heen. Ondanks zijn vroege overlijden, aan tuberculose, heeft Abel blijvende sporen nagelaten in de wiskundige wereld. Abel bestudeerde differentiaal- en integraalrekening, de functietheorie en de Galoistheorie. Hij is beroemd geworden door als eerste te bewijzen dat de algemene vijfdegraadsvergelijking niet met radicalen kan worden opgelost. Dit is de stelling van Abel–Ruffini. Voor oneindige reeksen formuleerde hij een stelling, die naar hem is genoemd. Verder is hij samen met Jacobi de ontdekker van de elliptische functies. Zijn naam leeft voort in de wiskunde, zoals in de twee genoemde stellingen, in de abelse groepen (commutatieve groepen), en in bepaalde elliptische functies, de abelse functies. Hij verrichtte fundamenteel onderzoek naar oneindige functiereeksen (samen met Cauchy) en schreef de *Mémoire sur les équations algébriques* (1824).

De Abelprijs werd in 2002 door het Noorse parlement (de Storting) ingesteld ter gelegenheid van de 200ste verjaardag van Abels geboorte. De prijs bedraagt 7,5 miljoen Noorse Kronen (ongeveer even hoog als de Nobelprijzen), en wordt toegekend

door de Noorse Academie van Wetenschappen en Letteren, namens het ministerie van Onderwijs. Jean-Pierre Serre was de eerste winnaar in 2003, terwijl Andrew Wiles de prijs ontving in 2016. Karen Uhlenbeck was de eerste vrouwelijke winnaar in 2019. In 2021 waren er twee winnaars, László Lovász en Avi Wigderson, die recent voordrachten hielden bij de KNAW en het CWI.



Het Abel-comité, bestaande uit vijf vooraanstaande wiskundigen uit de hele wereld, heeft tot taak de voorgedragen kandidaten te beoordelen en een waardige winnaar aan te bevelen. Het Abel-comité 2022 was als volgt samengesteld:

- Hans Munthe-Kaas, University of Bergen, Norway (Chair)
- Subhash Khot, New York University, USA
- Alex Lubotzky, Weizmann Institute of Science, Israel
- Parimala Raman, Emory University, USA
- Ulrike Tillmann, University of Cambridge, England

De voorzitter is altijd een Noors wiskundige, daarnaast hebben de European Mathematical Society (EMS) en de International Mathematical Union (IMU) het recht om twee wiskundigen af te vaardigen. Wellicht zou ICIAM in de toekomst ook een rol hierin kunnen spelen. Hendrik Lenstra was van 2009 tot 2011 lid van het Abel-comité.

Er is ook een bestuur, de Abel Board, welke verantwoordelijk is voor de wiskundige evenementen in verband met de prijs, maatregelen uitvoert om de belangstelling voor wiskunde bij kinderen en jongeren te stimuleren, en een begroting en een jaarplan voor de Abelprijs voorstelt die aan het bestuur van de Norwegian Academy of Science and Letters worden voorgelegd.

De Abelprijs wordt ook wel de Nobelprijs voor wiskunde genoemd, vanwege het gro-



Dennis Sullivan ontvangt de Abelprijs uit handen van koning Harald van Noorwegen

Foto: abelprize.no, Naïna Helén Jäma

te belang van de prijs en het internationale aanzien dat de prijs heeft. Vanwege de hogere frequentie van toekenning (analoog aan de Nobelprijs), en het feit dat leeftijd geen rol speelt (hoewel: meestal zijn de prijswinnaars aardig op leeftijd), heeft de prijs een hoger aanzien dan de Fields-medaille. En mede ook door de winnaars tot nog toe natuurlijk.

Abelprijs 2022

De Abelprijs 2022 werd toegekend aan de Amerikaanse wetenschapper Dennis Sullivan van “for his groundbreaking contributions to topology in its broadest sense, and in particular its algebraic, geometric and dynamical aspects” (abelprize.no). Van 23–25 mei waren er verschillende activiteiten in verband met de uitreiking van de prijs, waarbij vooral veel Noren aanwezig waren, maar daarnaast ook een internationaal gezelschap van genodigden. Standaard worden de presidenten van de IMU, de EMS en ICIAM (International Council for Industrial and Applied Mathematics) uitgenodigd. Als president-elect van ICIAM was ik ditmaal ook uitgenodigd, een erg leuke ervaring.

De festiviteiten begonnen met een diner op maandagavond, op uitnodiging van

de Norwegian Academy of Science and Letters, ter ere van Dennis Sullivan. Dinsdagmiddag vond de officiële prijsuitreiking plaats. Deze feestelijke gebeurtenis vindt normaliter plaats in de aula van de universiteit, waarbij dan meer dan 500 aanwezigen kunnen zijn. Helaas was er een kans op een staking van ambtenaren, en om te voorkomen dat de prijsuitreiking niet plaats zou kunnen vinden, week men uit naar een kleinere zaal bij de Norwegian Academy of Science and Letters. Hierbij kon slechts een select gezelschap aanwezig zijn, anderen moesten noodgedwongen de online registratie bijwonen. Ik zat naast de staatssecretaris voor hoger onderwijs, Ola Borten Moe, en had een aardig gesprek met hem over het belang van wiskunde.

Ondertussen gaf een klok aan hoeveel minuten en seconden het nog duurde voordat de Noorse koning zou arriveren, en de plechtigheid zou aanvangen.

Er volgde een divers programma, met optredens van artiesten, en onder andere een interview met de president van de Norwegian Academy of Science and Letters (opgericht 1857), Lise Øvreås, en de voorzitter van het Abel-comité, Hans Munthe-Kaas. Daarna volgde de officiële

overhandiging van de prijs door de Noorse koning Harald, gevolgd door een korte toespraak van de winnaar. Hij sloot af met twee memorabele woorden, zijn motto: “Be interested”, waarna een lang applaus volgde.

’s Avonds vond het officiële diner plaats in het prachtige kasteel Akershus, op een heuvel in Oslo. Voor alle festiviteiten was een adequate dresscode afgekondigd, zodat de heren allemaal in smoking bij het diner verschenen, en de dames in een lange jurk dan wel een nationaal kostuum (vooral de Noorse dames). De koning kon er wegens zijn gezondheidstoestand niet bij zijn, dat was erg jammer. Maar het was een mooie avond, met een prachtig optreden door een talentvolle 15-jarige violiste begeleid door een pianist. Ik zat aan tafel met onder anderen de winnaar van de Noorse wiskundeolympiade, een talentvolle jongen die vast van plan was om wiskunde te gaan studeren, en alles bijzonder interessant vond. Dit jaar vindt de International Mathematical Olympiad in Oslo plaats, een thuiswedstrijd voor hem zagezegd.

Ditmaal waren ook de laureaten uit 2020 en 2021 uitgenodigd, omdat in die jaren



Het gebouw van de Norwegian Academy of Science and Letters

de prijs enkel online uitgereikt kon worden vanwege de geldende corona-maatregelen. Op woensdag, tijdens de *Abel Lectures*, werden zij nogmaals geëerd. De eerste spreker die dag was de winnaar van de Abelprijs 2022, Dennis Sullivan, en zijn voordracht was getiteld 'Gathering chestnuts of math related to fluid motion'. Michael Hopkins en Étienne Ghys zetten vervolgens Dennis Sullivan en zijn werk in het

zonnetje. Afgesloten werd met een panel-discussie omtrent 'Mathematics, Common Sense and Good Luck'.

De festiviteiten werden afgesloten met een besloten *Abel Party* op woensdagavond in het prachtige gebouw van de Norwegian Academy of Science and Letters. De party werd geleid door de secretaris-generaal van de Academy, Gunn Elisabeth Birkelund. Er was veel gelegenheid voor netwerken,

daarnaast vond er weer een prachtig optreden plaats door een gitarist, en later op de avond door een operazangeres en een zanger, begeleid door een geweldige pianist. Ook was er een heerlijk buffet, en het weer was prachtig zodat we buiten op het balkon konden zitten. Eenmaal daar plaats genomen kwam Dennis Sullivan naast me zitten, samen met zijn vrouw en dochters, en hadden we een aardig gesprek over wiskunde (fluid dynamics) en andere zaken, onder andere zijn Ierse afkomst. Een zeer aardige man, en een terechte winnaar van de Abelprijs 2022.

Slotwoord

Het was interessant om de festiviteiten rondom de Abelprijs 2022 mee te maken. Het zou mooi zijn als we ook eens een Nederlandse winnaar zouden hebben. Misschien zouden we eens moeten nadenken over nominaties, zie <https://abelprize.no/page/nomination-guidelines-and-nomination-form>. De deadline hiervoor is 15 september 2022. Nieuwe voorzitter van het Abel-comité is Helge Holden, op dit moment nog de secretaris van de IMU. Meer informatie over de Abelprijs: abelprize.no. ☺



Wil Schilders en Volker Mehrmann (president EMS) voorafgaand aan het galadiner



Dennis Sullivan (midden) tijdens de Abelparty genietend van een prachtige performance

Piet Groeneboom

Delft Institute of Applied Mathematics
TU Delft
p.groeneboom@tudelft.nl



Column Piet grijpt zijn kans

Wortel min 1 bestaat niet!

Piet Groeneboom schrijft op regelmatige basis in dit blad een column, deze keer over een wonderbaarlijk boek, het vermoeden van Baudet en de stelling van Van der Waerden.

Onbestaanbare getallen

Derde klas middelbare school. De wiskundeleraar roept weer eens: “De wortel uit min 1 bestaat niet!” Ik roep: “De wortel uit min 1 bestaat wel, het is een imaginair getal!” (het zijn er natuurlijk in feite twee, i en $-i$). Er valt een stilte, waarna de wiskundeleraar zegt: “Let niet op Piet, hij wil geleerd doen. Voor jullie bestaat de wortel uit min 1 niet!” Hij volgde hier de Taoïstische spreuk: “Een wijs heerser maakt de hoofden van zijn onderdanen leeg en hun buiken vol.” Hoewel hij natuurlijk over ons heerste, gedroeg hij zichzelf wat dit betreft als onderdaan van een groter heerser en werd daarom wel ‘buikie’ genoemd in de wandelgangen.

Ik had het niet kunnen accepteren. Wel kon ik accepteren dat wortel min 1 niet op de reële getallenlijn lag, maar waar lag wortel min 1 dan wel? Net zoals Hugo Brandt Corstius in zijn bedje lag na te denken over de stelling dat ‘drie eerlijke lijnen’ (waaronder hoogtelijnen, zwaartelijnen en bisectrices in een driehoek) door één punt gaan (zie [1]), lag ik in mijn bedje na te denken over waar dan toch die wortel uit -1 lag. In *Weten, Algemeen ontwikkelend maandblad* las ik toen een artikel over Gauss en complexe getallen. Een wereld ging voor mij open! Natuurlijk, het platte vlak! Dat ik daar zelf niet opgekomen was!

Het was niet mijn bedoeling geweest om geleerd te doen, ik kon dat “wortel -1 bestaat niet!” gewoon niet meer aanhoren. In de pauze legde ik het nog eens aan mijn klasgenoten uit, maar zij waren niet geïnteresseerd. Ach, waarom zou je moeilijk doen als onze wiskundeleraar nu eenmaal zei dat wortels uit negatieve getallen niet bestaan. Ik moest weer denken aan deze gebeurtenis van lang geleden bij het herlezen van het boek *Spelen met getallen*

van Fred Schuh, dat ik onlangs weer antiquarisch heb kunnen aanschaffen. Schuh zegt hierover [7, p.11]:

“In elk geval is de benaming ‘imaginair getal’ heel wat beter dan ‘onbestaanbaar getal’. Deze laatste naam, die vooral vroeger veel in ons land gebruikt werd — in het buitenland treft men een overeenkomstige naam niet aan — drukt iets geheel onjuists uit. De naam ‘onbestaanbaar’ stamt uit de tijd waarin men op het standpunt stond: ‘Die getallen bestaan wel niet, maar je doet maar alsof ze er wel zijn.’ [PG: Dit standpunt doet erg denken aan wat Marilyn vos Savant hierover had op te merken, zie mijn vorige column.] Een behoorlijke invoering van de complexe getallen, waarbij begonnen wordt met *wat ze zijn*, doet inzien dat imaginaire getallen wel degelijk bestaan.”

Spelen met getallen

Spelen met getallen is een wonderbaarlijk boek. Ik las dit “fascinerende boek voor jong en oud” toen ik op de middelbare school zat (derde klas of zo) en ik weet niet meer hoe ik er toe kwam het te lezen. Ik las ook *Inleiding tot de logica* van Alfred Tarski, *Eén, twee, drie ... oneindig* van Gamow, *Drie eeuwen fysica* van Einstein en Infeld en een of ander boek van Max Born. Maar deze boeken maakten toch minder indruk op mij dan *Spelen met getallen* van Schuh. Ik denk dat dit kwam omdat ik toen wel de portee van wat Schuh zei kon begrijpen, maar niet de portee van bijvoorbeeld de vertrekkende treinen, gelijk gezette klokken, enzovoort, in het boek van Einstein en Infeld (als ik het me goed herinner) en de portee van de (ware) beweringen: “Als $2 \times 2 = 5$, dan is New York een kleine (respectievelijk grote) stad” in Tarski’s boek. Over het boek van Tarski heb ik trouwens later nog tentamen gedaan op een moment dat ik (hopelijk) de portee wel begreep.



Fred Schuh geeft een simultaan seance in het spel *Jumbo*, met oud-wereldkampioen schaken Max Euwe tegenover zich. De foto staat in *Spelen met getallen*, naast het titelblad.

Fred Schuh legt alles glashelder uit. Na zijn beschouwing over het nimp spel gelezen te hebben, kon ik iedereen in mijn klas in dit spel verslaan (niemand wilde het daarom nog met mij spelen; ze hadden het boek van Schuh natuurlijk niet gelezen en bovendien waren hun hoofden leeggemaakt door onze wiskundeleraar).

Chris Zaal heeft het in [11] over Schuhs 'gortdroge stijl. Misschien was dat zo in zijn leerboeken, maar zeker niet in het boek *Spelen met getallen*. Als typerend voorbeeld van zijn stijl van schrijven geef ik hieronder een passage uit de sectie 'Grote getallen zonder achtergrond' [7, pp.54–55].

"Het is met eenvoudige hulpmiddelen mogelijk getallen neer te schrijven, waarbij weer 100^{100} als een kleinigheidje wegvalt. Zo is daar bijvoorbeeld:

$$100^{100^{100}},$$

waar dus 100 tot de macht 100^{100} verheven wordt, een getal zo groot dat men zich zelfs van het aantal nullen, waarmee het geschreven zou moeten worden als men dit volgens het aan ons allen bekende systeem deed, niet eens een voorstelling kan vormen. Dit aantal nullen is namelijk zelf een getal geschreven als 2 gevolgd door 200 nullen. En dan een kleine stap – wat je maar klein noemt, zul je zeggen – naar

$$100^{100^{100^{100}}}.$$

En toch kan van dit verbijsterende getal (ik weet het passende bijvoeglijke naamwoord niet) met het grootste gemak bewezen worden dat het bij deling door 13 rest 9 geeft. Wat kan mij die rest schelen, zul je zeggen; of er nu één meer of één minder overblijft, als we het met zijn dertien gaan verdelen. Wij hebben er heus genoeg aan en zullen er geen ruzie om maken als er wat overschiet en niet ieder evenveel krijgt. Maar je hebt nu eenmaal van die rare mensen, wie het wel kan schelen wat ze als rest krijgen. Daarvoor hebben ze vernuftige methoden bedacht, alsof hun leven er van afhangt, alsof ze gehangen worden, als er een 7 uitkomt, en een koningskroon krijgen als het op 3 uitdraait. Maar ze krijgen noch de strop noch de koningskroon, want de rest is nu eenmaal 9, daaraan valt niets te veranderen.

Je zult misschien vragen hoe ik dat zo weet van die rest 9..."

En dan volgt een (korte) volkomen duidelijke uitleg. Voor de aardigheid heb ik nog even geprobeerd wat Mathematica doet met dit probleem door

$$\text{Mod}[100^{\{100^{\{100^{\sim}100\}}\}}, 13]$$

in te typen. Zoals verwacht kreeg ik het antwoord 'Overflow'. $\text{Mod}[100^{\sim}100, 13]$ doet Mathematica nog wel goed (via onze server in Delft).

Het vermoeden van Baudet en de stelling van Van der Waerden

Ik 'zat eens aan' bij een zogenaamd Stieltjes-diner, waar iemand, laat ik hem 'Jan' noemen (de spelers in het boek van Fred Schuh heten ook Jan en Piet), zei: "Eigenlijk is Emmy Noether niet alleen de moeder van de algebra, maar ook de moeder van de Nederlandse statistiek." Waarom Jan dit zei weet ik niet, maar de gevolgen waren vreselijk. Een collega, die ik nu even 'Piet' zal noemen riep: "Hoe kom je daarbij?" Jan legde uit: "Emmy Noether was de inspiratrice van Van der Waerden, van Dantzig is gepromoveerd bij Van der Waerden, en een aantal Nederlandse statistici en kansrekenaars is gepromoveerd bij van Dantzig" Waarop Piet riep: "Belaachelijk! Van der Waerden is nooit hoogleraar in Nederland geweest, waar heb je dat vandaan, Jan?" Jan antwoordde besmuikt dat hij dit had gelezen op de wiskundesite van de VU op internet. Hierna riep Piet: "Oh, op internet staat zoveel onzin! Van der Waerden was een eigenwijs ventje, die zich misschien alleen maar wilde voordoen als de geestelijke vader van Van Dantzig."

De personen die ook bij dit Stieltjes-diner waren, zullen zich deze gebeurtenissen ongetwijfeld nog herinneren en ook weten wie 'Jan' en 'Piet' eigenlijk waren. De volgende dag werd Gerard Alberts geraadpleegd, en ja, Van der Waerden was wel (kort) in Nederland hoogleraar geweest, en ja, van Dantzig was bij hem gepromoveerd.

De laatste tijd heb ik veel over Van der Waerden gelezen en het beeld dat door 'Piet' van hem werd opgeroepen strookt helemaal niet met het beeld dat ik inmiddels van hem heb. De versie van een lezing die Van der Waerden in 1963 op een herdenking van de sterfdag van Emil Artin in Hamburg heeft gehouden begint als volgt:

"Artin, Schreier und ich gingen im Jahr 1926 öfter im Curio-Haus in Hamburg essen und unterhielten uns dabei über mathematische und andere Fragen. Einmahl erzählte ich ihnen über die Vermutung des früh verstorbenen holländischen Mathematiker Baudet. Sie lautete:

Teilt man die Gesamtheit der natürlichen Zahlen 1, 2, ... in zwei Klassen ein, so enthält mindestens eine dieser Klassen eine arithmetische Progression von l Gliedern, wobei l eine beliebig grosse vorgegebene Zahl ist.

Nach dem Essen gingen wir in Artins Zimmer im damaligen Mathematischen Institut an der Rothenbaumchaussee und überlegten uns gemeinsam vor der Wandtafel an Hand von kleinen Kreidezeichnungen wie man wohl die Vermutung beweisen könnte. Wir stellten allerlei Überlegungen an und hatten ein paar Einfälle, die der Überlegung eine neue Richtung gaben und schliesslich zur Lösung führten."

Han Baudet was de overgrootvader van de momenteel veel in het nieuws zijnde politicus Thierry Baudet. Hij is reeds op 30-jarige

leeftijd overleden. Kennelijk was hij niet alleen een begaafd wiskundige maar ook nog een begaafd musicus. Zijn wiskundige leermeester was Fred Schuh en Fred Schuh had hem aangeraden zijn vermoeden aan Van der Waerden voor te leggen.

Ik zal nu even kort de essentie van het bewijs van Van der Waerden in [9] proberen uit te leggen, gebruikmakend van de manier waarop Van der Waerden het zelf ook uitlegt in [10] in de situatie waarin er twee klassen zijn ($k = 2$) en de lengte van de rekenkundige rij gelijk is aan 3 ($l = 3$).

We stellen ons voor dat twee spelers, Jan en Piet, de natuurlijke getallen rood en blauw willen kleuren, waarbij Piet een rekenkundige rijtje van drie getallen van dezelfde kleur probeert te maken en Jan dat probeert te voorkomen. Zowel Jan als Piet mogen van beide kleuren gebruikmaken en ze zijn om de beurt ‘aan zet’.

Dit is een spel dat Jan altijd zal verliezen. Zoals dat bij veel spelen gaat, is het verstandig om de eindsituatie, waarbij Jan zich in een verliezende positie bevindt te bekijken. Zo’n mogelijke eindsituatie wordt getoond in Figuur 1 (Figuur 3 uit [10]).

Niet dat het er iets toe doet, maar voor mijn afscheidsrede die in hetzelfde nummer van NAW staat als het artikel [4] van K. P. Hart over de stelling van Van der Waerden, heb ik precies zulke plaatjes zitten maken, maar deze keer heb ik gewoon een screenshot van Figuur 3 in [10] genomen. Ik had het in mijn afscheidsrede [3] ook over de stelling van Van der Waerden en de resultaten van Szemerédi en Green en Tao, omdat ik daar net in Seattle drie lezingen van Timothy Gowers over had bijgewoond en daardoor buitengewoon enthousiast over dit onderwerp was geworden.

En nu ik het daar toch over heb, moet ik nog eens Derk Pik bedanken voor de mooie collages die hij geheel ongevraagd bij mijn afscheidsrede heeft gemaakt en mijn toenmalige buurman Hans Marcelis (rector van het categoriaal(!) Stedelijk Gymnasium Utrecht), voor de titel ‘Summa cogitatio’, wat de Latijnse vertaling is van ‘Topdenken’. Ik wilde namelijk niet achterblijven bij mijn geleerde collega’s en mijn afscheidsrede voor de grap een deftige Latijnse titel geven. Met andere woorden: “Ik wilde geleerd doen!” Iemand vroeg zich nog af of ‘Het topdenken’ niet de titel van een (Bommel-)boek van Marten Toonder was. Dat had inderdaad heel goed gekund, maar zover ik weet is het niet het geval.

Ter zake! Het eerste blok in Figuur 1 representeert een zogenaamde ‘pre-monochrome’ rekenkundige rij van lengte 3, bijvoorbeeld $\{1, 3, 5\}$ waarbij 1 en 3 dezelfde kleur hebben in een blok van 5 opvolgende natuurlijke getallen. De twee horizontale lijnstukjes in de blokken representeren de twee kleuren en de dwarsstreepjes de getallen 1, 3 en 5. Stel bijvoorbeeld dat het bovenste lijnstuk binnen het blok de kleur rood representeert en het onderste lijnstuk binnen het blok de kleur blauw, dan geeft het eerste blok in dit geval de situatie 1 en 3 rood, 5 blauw, weer.

De term ‘pre-monochrome’ ontleen ik aan [4]. Een monochrome rekenkundige rij van 3 getallen is ook een pre-monochrome rij. Het gaat erom dat de twee eerste getallen monochroom zijn; als we een monochrome rekenkundige rij van 3 getallen hebben, heeft Piet natuurlijk al gewonnen. In 5 opvolgende getallen kunnen we altijd een pre-monochrome rij vinden en er zijn $32 = 2^5$ mogelijke configuraties met betrekking tot de kleurverdeling. We laten ook toe dat alle 5 getallen van dezelfde kleur zijn. Dit betekent dat als we 33 blokken van dit type bekijken, er (minstens) twee dezelfde configuratie hebben. Dit heet in het Engels het ‘pigeonhole principle’ en in het Duits ‘Schubfachprinzip’.

Het kan natuurlijk zijn dat deze twee blokken al een monochrome rij van 3 getallen bevatten, en dan zijn we klaar, dus we bekijken alleen de situatie dat er in de twee blokken een pre-monochrome rij voorkomt zoals getoond in de eerste twee blokken van Figuur 1. Het derde blok toont dan de verliezende positie van Jan. Als we het tweede blok namelijk naar rechts verschuiven over een afstand gelijk aan de afstand tussen het eerste en tweede blok (die dus hoogstens 32 blokken is) krijgen we het derde blok.

Of Jan of Piet nu aan zet is in de positie met de twee kruisjes geeft niet, in beide gevallen kan het ontstaan van een rekenkundige rij van lengte 3 niet voorkomen worden. Als in het derde blok voor a wordt gekozen ontstaat de monochrome rekenkundige rij aaa , als voor b wordt gekozen de monochrome rekenkundige rij bbb . Merk op dat in het derde blok de twee eerste dwarsstreepjes niet betekenen dat Jan of Piet hier hun zetten hebben gedaan.

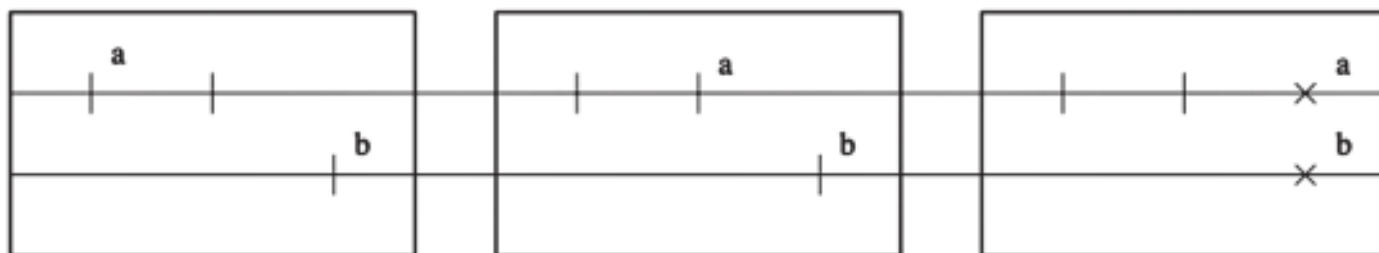
Van der Waerden zegt op dit punt van zijn voordracht:

“Dieser Beweis galt zunächst für den bereits früher erledigten Fall $k = 2$ [PG: twee klassen/kleuren], $l = 3$ [PG: lengte rekenkundige rij]. Trotzdem hatte ich, als ich ihn vorbrachte, das sichere Gefühl, nun den allgemeinen Beweis in Händen zu haben.”

Tot slot

Alexander Soifer zegt in [8]: “Van der Waerden did not originally think much of his 1927 theorem and published it in an obscure little read Dutch journal.” Dit ‘obscure little read Dutch journal’ was ons eigen *Nieuw Archief voor Wiskunde*! Maar toen kwam het boek *Three Pearls of Number Theory* [6] van Khinchin (er waren eerdere edities in het Russisch en Duits), waar de ‘Stelling van Van der Waerden’ een van de drie parels van de getaltheorie genoemd werd en begon Van der Waerden positiever te denken over zijn eigen bijdrage (volgens Soifer). Hoe een auteur denkt over de waarde van zijn eigen werk komt vaak niet overeen met hoe anderen hierover denken en dat kan twee kanten opgaan!

Aan het eind van [10] zegt Van der Waerden: “Jetzt habe ich Ihnen alles erzählt, was mir von jener denkwürdigen Stunde, in der



Figuur 1 Figuur 3 uit [10].

wir drei gemeinsam eine ‘Perle’ gefunden haben, noch in Erinnerung ist. Es war eine meiner schönsten Stunden.” Het is bijzonder hoe Van der Waerden hier uit de doeken doet wie wat bedacht heeft, zo gaat het toch vaak niet. Ook is in [8] nog een opmerkelijke brief van Van der Waerden aan Artin te lezen, waarin hij zijn herinneringen voorlegt aan Artin, die dan antwoordt dat hij het zich ongeveer ook zo herinnert (maar een minder goed geheugen heeft dan Van der Waerden).

Er zijn nog wat gaten tussen het vermoeden van Baudet (“Bij het verdelen van de natuurlijke getallen in twee klassen bevat in ieder geval één klasse een rekenkundige rij van willekeurige (eindige) lengte”) en de stelling van Van der Waerden, die zegt dat er een kleinste getal $W(k, l)$ is (het zogenaamde *Van der Waerden getal*), zodat bij elke verdeling van de getallen $1, 2, \dots, W(k, l)$ in k klassen een rekenkundige rij van lengte l in één van de klassen ligt. De meeste Van der Waerden getallen zijn onbekend, maar bijvoorbeeld $W(k, 2) = k + 1$, want een monochrome rekenkundige rij van lengte 2 correspondeert gewoon met twee getallen met dezelfde kleur (zelfde klasse) en het pigeonhole principle geeft ons dan het resultaat. Ook weten we dat $W(2, 3) = 9$. Het getal 8 is in dit geval te klein. K.P. Hart geeft in [4] het voorbeeld $\{1, 3, 6, 8\}$, $\{2, 4, 5, 7\}$ voor een verdeling in twee klassen zonder rekenkundige rij van lengte 3 in één van de klassen.

K.P. Hart dicht in [4] gedeeltelijk het gat door in feite de stelling van Tychonoff (“het product van compacte ruimten is compact”) aan te roepen. Dat is wel een interessante kwestie, waar ik even met hem over van gedachten heb gewisseld. De stelling van Tychonoff is van later datum dan het artikel van Van der Waerden [9]! Kelley zegt in [5] over de stelling van Tychonoff: “It is probably the most important single theorem of general topology.” Een sterke



Het Curio-Haus in Hamburg

bewering! Hij geeft twee bewijzen, een klassiek bewijs met het lemma van Alexander en een bewijs dat aan Bourbaki wordt toegeschreven. Allebei de bewijzen maken gebruik van het lemma van de statisticus Tukey (volgens K.P. Hart een afvallig topoloog).

Timothy Gowers heeft in [2] een bovengrens gegeven voor het Van der Waerden getal:

$$W(k, l) \leq 2^{2^{k2^{2^{l+9}}}}.$$

Het doet een beetje denken aan de grote getallen van Fred Schuh.

Het Curio-Haus in Hamburg, waar Van der Waerden met Artin en Schreier ging eten voordat ze aan het vermoeden van Baudet begonnen te werken op Artins kamer in het instituut, bestaat nog steeds: www.curiohaus.de. ☞

Referenties

- Hugo Brandt Corstius, Drie eerlijke lijnen snijden elkaar in één punt, *NRC*, 25 januari, 1996.
- W.T. Gowers, A new proof of Szemerédi's theorem, *Geom. Funct. Anal.* 11(3) (2001), 465–588.
- Piet Groeneboom, Summa Cogitatio, *Nieuw Archief voor Wiskunde* 5/8(2) (2007), 119–125.
- Klaas Pieter Hart, De stelling van Van der Waerden, *Nieuw Archief voor Wiskunde* 58(2) (2007), 92–97.
- John L. Kelley, *General Topology*, D. Van Nostrand Company, 1955.
- A.Y. Khinchin, *Three Pearls of Number Theory*, Graylock Press, 1952.
- Fred Schuh, *Spelen met getallen*, Thieme, 1951.
- Alexander Soifer, *The Scholar and the State: In Search of van der Waerden*, Springer, 2015. With forewords by Dirk van Dalen, James W. Fernandez, Branko Grünbaum, Peter D. Johnson, Jr. and Harold W. Kuhn.
- Bartel Leendert van der Waerden, Beweis einer Baudetschen Vermutung, *Nieuw Archief voor Wiskunde* 2/15 (1927), 212–216.
- Bartel Leendert van der Waerden, Wie der Beweis der Vermutung von Baudet gefunden wurde, *Elem. Math.* 53(4) (1998), 139–148.
- Chris Zaal, Wiskunde en alcohol (2014), <https://www.slideserve.com/rufus/wiskunde-en-alcohol>.

Klaas Landsman

IMAPP

Radboud Universiteit Nijmegen

landsman@math.ru.nl

Onderzoek

Zwarte gaten en het werk van Roger Penrose

Dit is een uitgewerkte versie van de voordracht die Klaas Landsman gegeven heeft op het KWG Wintersymposium 2022 over zwarte gaten (15 januari 2022). Roger Penrose won in 2020 als eerste wiskundige ooit de (halve) Nobelprijs voor Natuurkunde voor zijn stelling uit 1965 over het noodzakelijk optreden van singulariteiten in zwarte gaten en daarmee staat hij in dit artikel centraal (al lijdt zijn stelling, zoals zal blijken, onder een mismatch tussen de wiskunde en de toepassing).

Wie of wat is fascinerender, Roger Penrose of zwarte gaten? Van de eerste lijkt het bestaan zeker (al is hij inmiddels 90) en van de tweede inmiddels ook, dankzij zo-

wel Penrose als de twee winnaars van de andere helft van de Nobelprijs van 2020 (te weten Andrea Ghez en Reinhard Genzel voor hun empirische argumenten voor het

bestaan van een superzwaar zwart gat in het centrum van onze Melkweg [27, 37]). Ook de foto hieronder uit 2019 van het nog veel zwaardere zwarte gat in het verderop gelegen stelsel M87 door de *Event Horizon Telescope* [35] draagt bij aan dit geloof, al was het doel van de foto niet zozeer om het bestaan van zwarte gaten aan te tonen: dat werd al aangenomen in de reconstructie van het beeld uit de data.



Zwarte gat in het sterrenstelsel M87

Wie is Roger Penrose?

Roger Penrose werd in 1931 geboren in een briljante familie van academici en kunstenaars. Zijn vader Lionel was geneticus en psychiater, zijn oom Roland een vermaard kunstschilder. Zijn broer Jonathan was de beste Britse schaker ooit (uit mijn jeugd herinner ik me de meesterlijke partij Penrose–Tal uit 1960). Zijn broer Oliver en zus Shirley waren beiden hoogleraar, in respectievelijk statistische fysica, en genetica; het houdt niet op. Meer dan de zeven vinkjes dus, maar hou je maar eens staande in zo'n familie! Naast zijn baanbrekende werk aan de algemene relativiteitstheorie (ART) en in het bijzonder aan zwarte gaten, was hij de grondlegger van de wiskundige theorie van quasi-periodieke vlakvullingen (*Penrose tilings*), van verschillende diagramtechnieken in algebraïsche meetkunde en representatietheorie, en ten slotte van twistortheorie, een geünificeerde the-

orie van ruimte-tijd, massaloze deeltjes, en conforme en complexe meetkunde die het in de natuurkunde niet gehaald heeft maar in Oxford (waar Penrose van 1973 tot 1999 *Rouse Ball Professor of Mathematics* was) grote invloed had op wiskundigen als Atiyah, Donaldson en Hitchin.

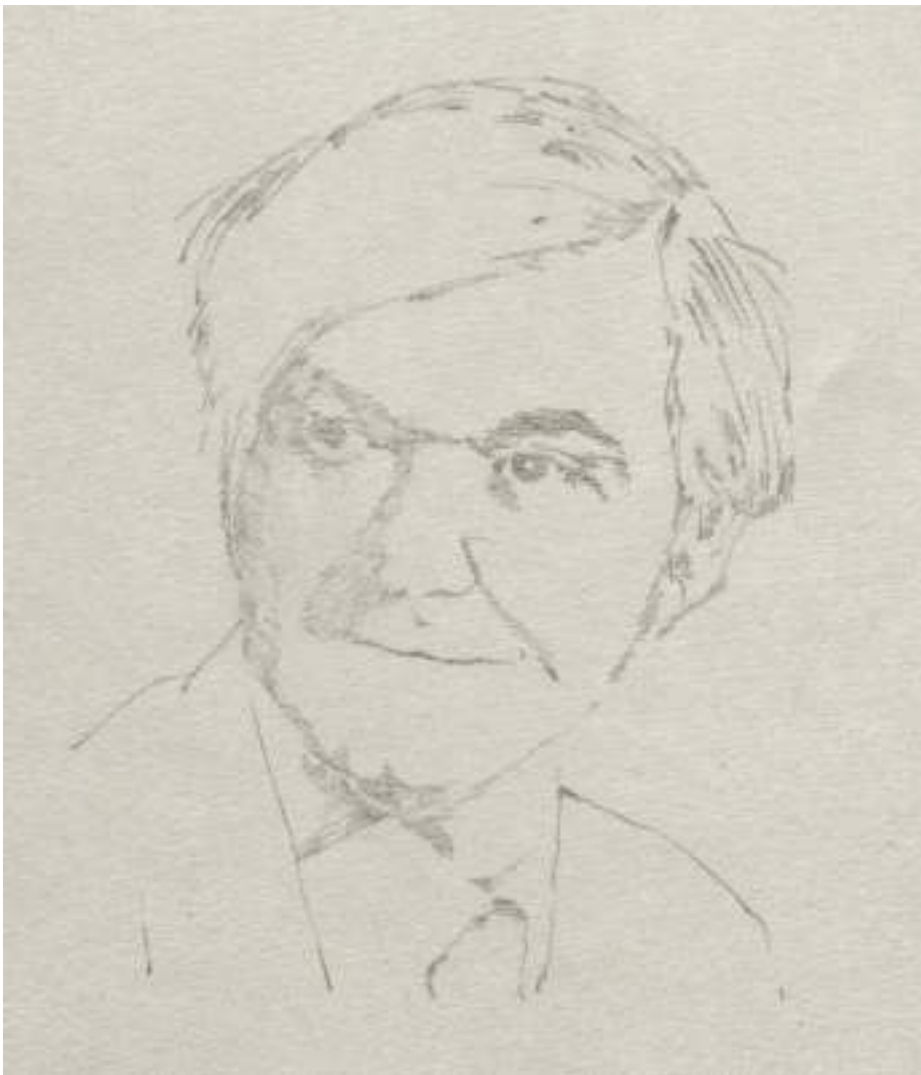
Bij het grote publiek is Penrose vooral bekend wegens zijn boeken over het verband tussen bewustzijn, logica, kwantumtheorie, en zwaartekracht, culminerend in [20]. Zijn aanpak (waarbij hij alle grote problemen van de fundamentele wetenschap op één hoop gooit) en zijn conclusies (dat het brein geen computer kan zijn en evenmin door bestaande wetenschap beschreven kan worden, en dat de zwaartekracht het meetprobleem van de kwantummechanica oplost) zijn omstreden, maar mogelijk niet kansloos; zie bijvoorbeeld [11] voor een goede, neutrale analyse van de eerste kwestie. Interessant is dat Penrose als stu-

dent al met dergelijke zaken bezig was (en niet met gravitatie en zwarte gaten); zowel het geschreven interview met Lightman [13] als het gefilmd interview met Hodges (de Turing-biograaf, die oorspronkelijk een student van Penrose was) [31] geven een mooi overzicht van de loopbaan en het denken van Penrose. Op een andere manier geldt dit ook voor zijn boek *The Road to Reality* [19] (1127 pagina's!), alsmede voor het *Festschrift* [9].

Ten slotte is de interactie tussen Penrose en Escher vermeldenswaard. Deze begon toen Penrose in 1954 tijdens de ICM in Amsterdam, waar hij als student aan deelnam, een tentoonstelling van Escher in het Stedelijk Museum bezocht (Penrose herinnert zich nog dat hij daar met de tram heen ging). Dit inspireerde hem tot een artikel met zijn vader [24] waarin hij een aantal later bekend geworden 'onmogelijke figuren' tekent, zoals de driehoek van Penrose [36]. Dit stuurde hij naar Escher, die mede hierdoor geïnspireerd in 1961 zijn litho *Waterval* maakte [34] en Penrose vervolgens in 1962 bij hem thuis in Baarn uitnodigde. Omgekeerd beïnvloedde Escher ook Penrose: het idee van een Penrose-diagram (zie onder) is om door middel van een conforme (quasi-)compactificatie en dus met behoud van hoeken 'oneindig' naar binnen te trekken. Al kende Penrose dit idee natuurlijk al uit de wiskunde, als visueel ingesteld denker waren de *Cirkel-limiet* houtsneden van Escher (die op zijn beurt weer door Coxeter was beïnvloed [33]), hierbij eveneens een grote inspiratie. Zie ook de documentaire [16].

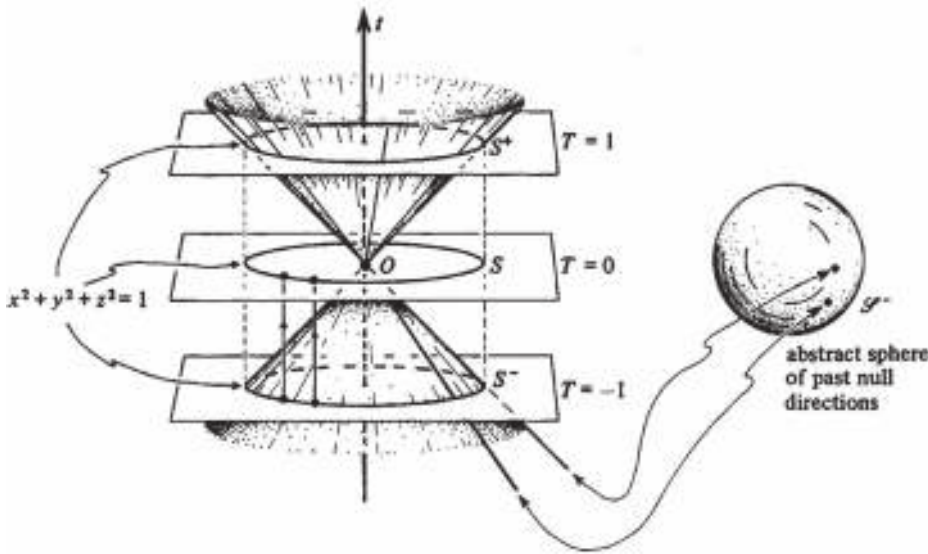
Wat is algemene relativiteitstheorie?

Aangezien zwarte gaten meestal worden bestudeerd in de context van de ART en ook Penrose deze theorie altijd als uitgangspunt nam (en zeer verrijkte), moet daar eerst iets over worden gezegd. De ART is een theorie van ruimte en tijd en *en passant* tevens van de zwaartekracht, die door Einstein in november 1915 na een lange en moeizame zoektocht werd opgesteld [10]. Hilbert, die gedurende dat jaar in een race met Einstein was verwikkeld om de juiste vergelijkingen voor de theorie te vinden en wist waar hij het over had, beschouwde de ART als 'een van de grootste wetenschappelijke prestaties ooit' en als de 'voltooiing van het project dat Pythagoras was begonnen en door Newton was voortgezet'. Wiskundig gesproken is



Tekening: Edith de Jong, gebaseerd op de foto van Penrose in *Gravitation* [15, p. 936]

Roger Penrose in 1970



Lichtkegel (in Minkowski-ruimte-tijd) en de hemelbol, getekend door Penrose zelf [25, Fig. 1–2, p. 9]. Het verband tussen lichtstralen, de Riemann-sfeer (dat wil zeggen de bol met de gebruikelijke holomorfe en conforme structuur) in de complexe meetkunde, en spinoren in de kwantummechanica is een levenslange fascinatie van Penrose (waar we hier niet nader op in gaan) [25, 26]. Bij vrijwel alle tekeningen van Penrose valt overigens op hoe fraai, instructief, precies, goed doordacht, en soms speels ze zijn, dat laatste zelfs in wetenschappelijk artikelen en boeken.

de ART in eerste instantie een combinatie van twee constructies:

1. De *Riemannse meetkunde* uit 1854, waarin meetkunde in een willekeurige dimensie d wordt beschreven door een metriek $ds^2 = \sum_{i,j=1}^d g_{ij}(x) dx^i dx^j$, waarbij $(g_{ij})(x)$ een positief definitie $d \times d$ -matrix is die van het punt x in de ruimte af mag hangen. De euclidische meetkunde is het speciale geval $d=2$ of $d=3$ en dan $g_{ij}(x) = \delta_{ij}$, en ook alle vormen van niet-euclidische meetkunde zijn speciale gevallen van de Riemannse meetkunde.
2. De *Minkowski-meetkunde* uit 1908, waarin de ruimte-tijd van Einsteins speciale relativiteitstheorie uit 1905 wiskundig wordt beschreven door op $\mathbb{R}^4$ eveneens een metriek van bovenstaande vorm te leggen, waarbij de matrix $(g_{ij})(x)$ echter niet meer positief definitief is maar, voor iedere $x \in \mathbb{R}^4$, gelijk is aan $\text{diag}(-1, 1, 1, 1)$.

Einstein combineerde deze ideeën in zijn ART door te postuleren dat de ruimte-tijd een vierdimensionaal continuüm M is, opgetuigd met een metriek g_{ij} die anders dan bij Riemann de signatuur $-+++$ heeft in plaats van $++++$, en anders dan bij Minkowski niet vlak hoeft te zijn, dat wil zeggen niet gelijk aan $\text{diag}(-1, 1, 1, 1)$. Deze metriek wordt bepaald door de materie in het heelal via de *Einstein-vergelijkingen*, een stelsel van tien meetkundig fraaie

maar analytisch ingewikkelde gekoppelde niet-lineaire PDVs voor de tien onafhankelijke componenten van de symmetrische 4×4 -matrix $g_{ij}(x)$. Testdeeltjes (die niet zelf g beïnvloeden) bewegen via geodeten en zo verklaart de ART planeetbanen, afbuiging licht, enzovoort. Zie bijvoorbeeld [1] voor een wiskundige behandeling. Vergeleken met de theorie van Newton is de zwaartekracht bij Einstein geen kracht meer, maar een gevolg van de metrische structuur van de ruimte-tijd.

Globale overwegingen rond M (wij zouden nu zeggen: een differentieerbare of gladde variëteit) had Einstein nog niet of nauwelijks (hij werkte altijd in coördinaten), maar dat gold ook voor zijn wiskundige tijdgenoten als Levi-Civita en diens leermeester Ricci, die een effectieve differentiaalrekening voor de Riemannse meetkunde hadden ontwikkeld die Einstein uitstekend van pas kwam, en zelfs voor Hilbert (die de Einstein-vergelijkingen in 1917 als eerste als PDVs bestudeerde). Ook Riemann, toch een van de grondleggers van het globale en topologische denken, deed daar in zijn meetkunde weinig mee.

Causale structuur van ruimte-tijd

Globaal denken over het paar (M, g) van ruimte-tijd met metriek vinden we vanaf Weyl [32], die in veel opzichten een voorloper van Penrose was. Dit geldt met name voor de nadruk van beiden op de *conforme* en daarmee de *causale* structuur van

de ruimte-tijd, waarin *lichtkegels* als mogelijke trajecten van lichtstralen en zwaartekrachtsgolven een allesbepalende rol spelen. Niettemin zijn vrijwel alle belangrijke wiskundige begrippen en resultaten in dit opzicht afkomstig van Penrose, die zich hier vanaf ongeveer 1960 mee bezig hield. Meer in het algemeen was Penrose de eerste die topologische technieken in de ART toepaste; hoe nieuw dat destijds zelfs voor wiskundig (maar dan voornamelijk in de differentiaalmeetkunde) geschoolde theoretisch fysici was, leest men in Thorne [30], wiens boek sowieso een aanrader is als geschiedenis van de ART uit eerste hand.

Om de causale structuur van een ruimte-tijd (M, g) in kaart te brengen voerde Penrose de *causal future* $J^+(S)$ (respectievelijk *causal past* $J^-(S)$) van een deelruimte $S \subset M$ in als de verzameling punten in M die vanuit S bereikt kunnen worden via een naar de toekomst (verleden) gerichte *causale curve* $t \mapsto c(t)$ (met raakvector $\dot{c} = dc/dt$), dat wil zeggen dat $g(\dot{c}, \dot{c}) \leq 0$ langs de hele curve (merk op dat de metriek g in de ART niet positief definitief is!).

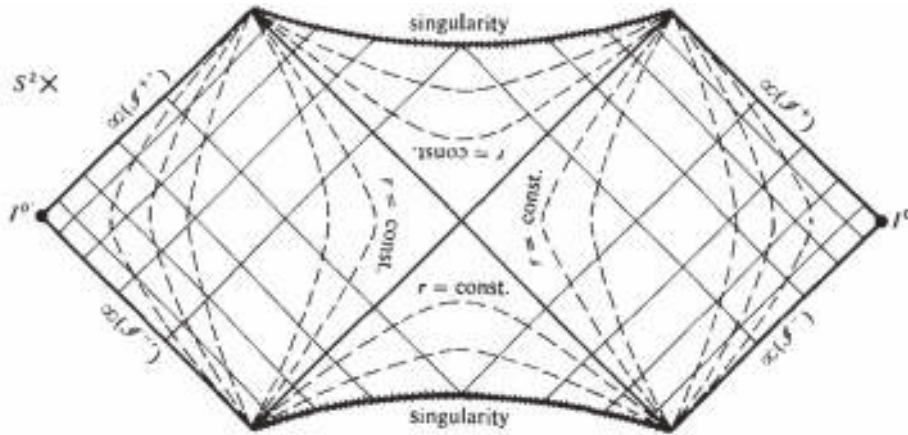
Hieruit ontstaat het cruciale begrip (*future*) *null infinity* $\mathcal{I}^+$, uit te spreken als ‘scri-plus’. Dit is een deel van de rand van een soort conforme compactificatie $i: M \hookrightarrow \hat{M}$ van M , waarbij

$$i(M) = \hat{M} \setminus \partial \hat{M},$$

met $\partial \hat{M}$ de rand van M . Zo’n compactificatie is te vergelijken met bijvoorbeeld het oprollen van het complexe vlak tot de Riemann-sfeer (waarin slechts een enkel compactificatiepunt nodig is); zie [12, §10.1] voor een precieze definitie. Ruw gezegd: als M een metriek g heeft, heeft $\hat{M}$ een metriek $\hat{g} = \Omega^2 g$, waarbij $\Omega: \hat{M} \rightarrow [0, \infty)$ positief is op $i(M)$ en nul op de rand $\partial \hat{M}$. Hierdoor doet $\hat{g}$ verre afstanden krimpen en trekt $\hat{M}$ ver gelegen gebieden in M (en zelfs ‘oneindig’) naar binnen, precies zoals bij Escher [33]. Als deze constructie werkt (zoals voor zogenaamde asymptotisch vlakke metrieken g) kunnen we definiëren

$$\mathcal{I}^\pm := \partial \hat{M} \cap J^\pm(M),$$

waarbij $J^\pm$ wordt berekend in de fictieve ruimte-tijd $(\hat{M}, \hat{g})$. Gezien als gebied op ‘oneindig’ in M is $\mathcal{I}^+$ de locatie waar alle lichtstralen en zwaartekrachtsgolven ‘uiteindelijk’ (als limiet) terechtkomen, tenzij ze in een zwart gat verdwijnen (zie de volgende paragraaf).



Penrose-diagram van Kruskal-ruimte-tijd [22, Fig. 37, p. 208]

De causale structuur van een ruimte-tijd (M, g) kan via de (quasi-)compactificatie $(\hat{M}, \hat{g})$ worden gevisualiseerd in een *Penrose-diagram*; dit is een 2D-plaatje van $\hat{M}$ waarin (ruimteachtige) bollen als punten worden getekend en lichtstralen net als in Minkowski-ruimte-tijd rechte lijnen langs $\pm 45^\circ$ zijn. Het bovenstaande voorbeeld is een door Penrose zelf getekend diagram van een ruimte-tijd met een niet-roterend zwart gat en tevens een wit gat in een soort spiegel-universum. Zie bijvoorbeeld [12, 15, 22]. Dergelijke diagrammen zijn inmiddels niet meer weg te denken uit de ART. Toen Hawking vanwege zijn ziekte (ALS) niet meer zelf kon schrijven en steeds meer was aangewezen op zijn vermogen tot visualisatie, speelden de diagrammen van zijn vriend en collega Penrose zelfs een welhaast levensreddende rol!

Wat is een zwart gat?

Een zwart gat heeft per definitie twee eigenschappen: het is *zwart* en het is een *gat*. De eerste eigenschap is al vanuit de Newtoniaanse gravitatie-theorie uit 1687 te verklaren, zoals de Britse geoloog Michell (in 1783) en de Franse wiskundige Laplace (in 1799) al doorhadden: voor een bol met straal r en massa m is de ontsnapings-snelheid groter dan de lichtsnelheid c als $r < 2Gm/c^2$, waardoor met name licht dan niet weg kan en het object onzichtbaar is (de kritieke straal $r = 2Gm/c^2$ is, voor kenners, precies de Schwarzschild-radius van een statisch zwart gat in de ART). Dit krijgt extra lading in Einsteins speciale relativiteitstheorie, volgens welke niets sneller kan bewegen dan het licht, en dus ook niets van de bol kan ontsnappen. Een zwart object (niet te verwarren met een zwarte straler, die wel degelijk straling uit-

zendt maar dat buiten het zichtbare bereik doet) is dus voldoende zwaar en tegelijk voldoende klein om geen licht, en daarmee ook niets anders, te laten ontsnappen. De *horizon* is dan, voorlopig nog in woorden, de muur van deze gevangenis, oftewel de rand het gebied rond het object waaruit niets meer kan ontsnappen.

Dankzij de boven aangeduide topologische technieken van Penrose kon hij (en later Hawking) dit idee ook in de ART definiëren [6, 17]:

Definitie 1.

1. Een ruimte-tijd (M, g) met conforme (quasi-)compactificatie $(\hat{M}, \hat{g})$ bevat een *zwart object* als het binnengebied

$$Z := M \setminus J^-(I^+)$$

daarvan niet leeg is, oftewel als het buitengebied

$$B := J^-(I^+) \cap M$$

niet gelijk is aan M (met $J^\pm$ berekend in de conforme (quasi-)compactificatie $(\hat{M}, \hat{g})$).

2. Als dat zo is, is de *horizon* van het zwarte object de rand ∂Z van het gebied Z dat het object bevat/is.

Het idee is dus dat licht uit het buitengebied B nog kan ontsnappen, en uit het binnengebied Z niet. De horizon ∂Z hoort bij het zwarte object Z ; lichtstralen staan daar letterlijk stil, als het ware vastgeketend tussen hun neiging om weg te vliegen en de werking van de zwaartekracht die ze naar binnen trekt.

Het idee van een *gat* is lastiger. Intuïtief is dat een *singulariteit in de ruimte-tijd*, maar dit kan van alles betekenen, zoals een punt *in* de ruimte-tijd waar de materiedichtheid oneindig is, en daarmee via de

Einstein-vergelijkingen ook de kromming, of een punt dat juist *ontbreekt* in de ruimte-tijd. Of iets anders.

Het eerste idee is onmogelijk, omdat de ART altijd werkt met gladde of tenminste continue meetkundige structuren, en een punt waarin de kromming oneindig is daarom niet in M kan liggen (daar komt het probleem bij, welke maat van kromming men zou moeten hanteren — anders dan in $d = 2$ waar men de kromming van Gauss heeft, zijn er in $d = 4$ vele invarianten van de Riemann-krommingstensor). Het tweede idee lijkt ook al met zichzelf in tegenspraak en zelfs genieën en ART-pioniers als Einstein, Hilbert en Weyl wisten zich eigenlijk geen raad met singulariteiten (in de Schwarzschild-oplossing uit 1916 [1, 12, 15] werden zowel $r = 0$ als $r = 2m$ als onfysische, respectievelijk onbereikbare singulariteiten gezien, zonder een duidelijk idee wat dit dan inhield, hetgeen tevens aantoont dat nog verwarring bestond over pure coördinaat-singulariteiten van de metriek [5]).

Niettemin kan men deze beide problematische ideeën combineren! Historisch gezien was Misner [14] vermoedelijk de eerste die dit deed, maar Penrose [18] hanteerde impliciet dezelfde definitie:

Definitie 2. Een *singulariteit* in een ruimte-tijd (M, g) is een onvolledige (dat wil zeggen: niet verder dan zijn definitiegebied continu voort te zetten) causale geodeet in M .

Als we een causale geodeet zien als een mogelijk traject van een waarnemer of lichtstraal in vrije val, dan is het idee dat dit traject plotseling ophoudt omdat het arme wezen in ‘het gat’ valt. Vooral Hawking was (als promovendus) zeer gecharmeerd van dit idee en maakte de definitie expliciet in zijn fameuze *Adams Prize Essay* uit 1966 [7]. Later schreef hij daar over:

“Timelike geodesic incompleteness has an immediate physical significance in that it presents the possibility that there could be freely moving observers or particles whose histories did not exist after (or before) a finite interval of proper time. This would appear to be an even more objectionable feature than infinite curvature and so it seems appropriate to regard such a space as singular. (...) The advantage of taking timelike and/or null incompleteness as being indicative

of the presence of a singularity is [also] that on this basis one can establish a number of theorems about their occurrence.” [8, p. 258]

Het laatste doet denken aan de opmerking (van bijvoorbeeld Glimm): “A good definition should be the hypothesis of a theorem!”

Nu kunnen we een zwart gat in de ART wiskundig definiëren:

Definitie 3. Een *zwart gat* is (in het kader van de ART) een zwart object Z met een singulariteit binnen diens horizon ∂Z .

Met dat laatste bedoelen we dat als de bewuste geodeet een curve $\gamma: (a, b) \rightarrow M$ is en de onvolledigheid zeg bij b optreedt, er een $\varepsilon > 0$ bestaat zodat tenminste $\gamma([b - \varepsilon, b))$ in Z ligt.

De singulariteitenstelling van Penrose

Penrose won de Nobelprijs voor de volgende stelling [18]:

Stelling. *Stel dat (ruw gezegd):*

1. *De metriek van ruimte-tijd middels de Einstein-vergelijkingen ‘uniek’ wordt bepaald door beginvoorwaarden op een niet-compacte deelruimte.*
2. *De ruimte-tijd positieve kromming heeft.*
3. *Er een gebied is waarin licht zeer sterk afbuigt.*

Dan bestaat in deze ruimte-tijd minstens één onvolledige causale geodeet (en wel een lichtstraal oftewel nul-geodeet).

Daarmee is deze ruimte-tijd per definitie singulier, zodat dit de *singulariteitenstelling van Penrose* heet. Vanwege de nog te bespreken problemen zou het echter beter de *onvolledigheidsstelling van Penrose* kunnen heten, al was het maar vanwege diens bewondering voor Gödel [20]! Uiteraard gaf Penrose de aannamen in wiskundig precieze vorm; zie [8, 12, 18, 28, 29].

Alle singulariteitenstellingen in de ART berusten op aannamen van deze vorm, die als volgt kunnen worden geabstraheerd:

1. Een *causaliteitsaanname* (waarbij Penrose in feite het bestaan van een niet-compact Cauchy-oppervlak in de ruimte-tijd eist, en ‘uniek’ tussen scare quotes staat omdat de oplossing slechts uniek is op isometrie na).
2. Een *dynamische aanname* op de kromming van de ruimte-tijd, uitgedrukt via de covariante Ricci-tensor.

3. Een *statische aanname* oftewel randconditie op de kromming, die ergens voldoende positief moet zijn.

Positieve kromming betekent via de Einstein-vergelijkingen immers aantrekkende zwaartekracht, die vervolgens via aanname 2 alsmaar sterker wordt en ieder voldoende geconcentreerd blok materie uiteindelijk doet instorten. In de stelling van Penrose uit 1965 gebeurt dit vooruit in de tijd, terwijl het in die van Hawking uit 1966 over de noodzaak van een singulariteit in de oerknal [7], geënt op [18], terug in de tijd geschiedt.

Aangezien de astrofysica aantoonde dat aannamen 2 en 3 in bepaalde gebieden van ons heelal gelden en aanname 1 onschuldig lijkt, overtuigde de stelling van Penrose vele theoretici van het bestaan van zwarte gaten. In het bijzonder werd het (voor)oordeel van Einstein en anderen dat zwarte gaten slechts wiskundig zouden bestaan als gevolg van onfysische idealisaties (zoals bolsymmetrie in de Schwarzschild-oplossing) sindsdien terzijde geschoven (we zullen zien of dit terecht was!).

De invloed van de stelling uit 1965 op het theoretisch onderzoek in de ART was zeer groot [30]; alle latere singulariteitenstellingen in de ART, zoals die van Hawking (zie boven) zijn er alvast op gemodelleerd. Plotseling moest iedereen de technieken van Penrose leren om de discussies über-

haupt te kunnen volgen [8, 23, 32], en ook nu nog is vrijwel al het wiskundig georiënteerde onderzoek in de ART daarop gebaseerd.

Problemen met de stelling van Penrose

Ondanks het eclatante historische succes van zijn stelling moet Penrose zelf als eerste hebben geweten dat er problemen mee waren; afgezien van zijn werk aan twistortheorie is een groot deel van zijn werk aan de ART na 1965 zelfs te duiden als een serie pogingen deze op te lossen (vooralsnog met matig succes).

De stelling impliceert noch het bestaan van een zwart object, noch dat van een gat, laat staan dat van een zwart gat!

Wat het eerste punt betreft kan het de lezer niet ontgaan zijn dat de stelling *niets* zegt over een horizon. Niets uit Penrose's bloedeigen Definitie 1 boven komt in zijn stelling voor.

Wat het tweede betreft: het probleem met Definitie 2 is dat een onvolledige geodeet niet noodzakelijk wijst op een singulariteit van de kromming of materiedichtheid, zoals de (astro)fysica wil. De geodeet kan ook om andere redenen ophouden, bijvoorbeeld omdat de ruimte-tijd uitgebreid kan worden.

Penrose merkt ook al in [18] op dat dit geval bij de toepassing van zijn stelling moet worden uitgesloten, maar zegt niet hoe.



Roger Penrose en Klaas Landsman, Oxford, 2 juli 2022

Hier komt nog bij dat de eerste aanname in de stelling voor geen enkel zwart gat geldt dat in het universum voorkomt (en voor zover bekend wordt beschreven door de uniform roterende Kerr-metrick). Als het Nobelprijs-comité dit had geweten...

Om uit zijn stelling het bestaan van zwarte gaten te concluderen zijn Penrose's *cosmic censorship*-vermoedens nodig. Het eerste daarvan, dat bekend staat als *weak cosmic censorship* [17], postuleert simpelweg dat iedere singulariteit zich achter een horizon bevindt (iets wat hij natuurlijk heel graag al direct in 1965 had bewezen). Ironisch genoeg is dit vermoeden slechts bewezen onder de aanname van bolsym-

metrie [2], precies de onfysische idealisatie die Einstein en anderen ertoe bracht om het bestaan van de Schwarzschild-oplossing als zijnde indicatief voor het bestaan van zwarte gaten niet serieus te nemen.

Om zowel het tweede probleem als dat met aanname 1 te omzeilen voerde Penrose het *strong cosmic censorship conjecture* in [21], dat ruwweg inhoudt dat iedere fysisch realistische ruimte-tijd aan aanname 1 voldoet (mogelijk met een compact Cauchyoppervlak) en niet uitgebreid kan worden. Zie [3, 4, 5, 12]. Het door Penrose zelf voorgestelde fysische mechanisme achter dit eveneens nog onbewezen vermoeden is de ultraviolet-instabiliteit van de *Cauchy-hori-*

zon, een door Hawking ingevoerd begrip dat detecteert vanaf welke grens het beginwaardeprobleem voor de Einstein-vergelijkingen in een gegeven ruimte-tijd zijn voorspellend vermogen verliest. Algemeener moeten de fysische inzichten van Penrose geroemd worden; zo is hij een van de grondleggers van de thermodynamica van zwarte gaten (zie [12, §10.12]).

Maar dit verhaal toont vooral aan dat een stelling als die van Penrose groter is dan haar schepper, hetgeen een compliment voor de laatste is. Penrose is en blijft de vader van het wiskundig onderzoek in de ART (en Yvonne Choquet-Bruhat de moeder [1]).

Referenties

- 1 Y. Choquet-Bruhat, *General Relativity and the Einstein Equations*, Oxford University Press, 2009.
- 2 D. Christodoulou, The instability of naked singularities in the gravitational collapse of a scalar field, *Annals of Mathematics* 149 (1999), 183–217.
- 3 M. Dafermos, The cosmic censorship conjectures in general relativity (ICTP School on Geometry and Gravity). Lecture 1: <https://youtu.be/Lg1CetfV9l> Lecture 2: https://youtu.be/SorhBSt_mNo
- 4 M. Dafermos, The mathematical analysis of black holes in general relativity, *Proceedings of the ICM, 2014*, <https://www.dpmms.cam.ac.uk/~md384/ICMarticleMihalis.pdf>.
- 5 J. Earman, *Bangs, Crunches, Whimpers, and Shrieks: Singularities and Acausalities in Relativistic Spacetimes*, Oxford University Press, 1995.
- 6 S.W. Hawking, Black holes in general relativity, *Communications in Mathematical Physics* 25 (1972), 152–166.
- 7 S.W. Hawking, Singularities and the geometry of spacetime (Adams Prize Essay), reprinted in *European Journal of Physics H* 39 (2014), 413–503.
- 8 S.W. Hawking en G.F.R. Ellis, *The Large Scale Structure of Space-Time*, Cambridge University Press, 1973.
- 9 S.A. Huggett e.a., *The Geometric Universe: Science, Geometry, and the Work of Roger Penrose*, Oxford University Press, 1998.
- 10 M. Janssen en J. Renn, *How Einstein Found His Field Equations: Sources and Interpretation*, Springer, 2022.
- 11 P. Koellner, On the question of whether the mind can be mechanized, I: From Gödel to Penrose, II. Penrose's new argument, *The Journal of Philosophy* 115 (2018), 337–360, 453–484.
- 12 K. Landsman, *Foundations of General Relativity: From Einstein to Black Holes*, Radboud University Press, 2021, Open Access from <https://radbouduniversitypress.nl/site/books/m/10.54195/EFVF4478/>
- 13 A. Lightman, *AIP Oral History Interviews: Roger Penrose*, 1989, <https://www.aip.org/history-programs/niels-bohr-library/oral-histories/34322>.
- 14 C.W. Misner, The flatter regions of Newman, Unti, and Tamburino's generalized Schwarzschild space, *Journal of Mathematical Physics* 4 (1963), 924–937.
- 15 C.W. Misner, K.S. Thorne en J.A. Wheeler, *Gravitation*, Freeman, 1973.
- 16 R. Penrose, *The Art of the Impossible: MC Escher and Me – Secret Knowledge*. <https://youtu.be/f7kW8xd8p4s> (part 1) <https://youtu.be/1CYrGpd8k5w> (part 2)
- 17 R. Penrose, Gravitational collapse: The role of general relativity, *Rivista del Nuovo Cimento, Numero Speciale I* 252 (1969), herdrukt in *General Relativity and Gravitation* 34 (2002), 1141–1165.
- 18 R. Penrose, Gravitational collapse and space-time singularities, *Physical Review Letters* 14 (1965), 57–59.
- 19 R. Penrose, *The Road to Reality: A Complete Guide to the Laws of the Universe*, Jonathan Cape, 2004.
- 20 R. Penrose, *Shadows of the Mind: A Search for the Missing Science of Consciousness*, Oxford University Press, 1994.
- 21 R. Penrose, Singularities and time-asymmetry, *General Relativity: An Einstein Centenary Survey*, S.W. Hawking en W. Israel, eds., Cambridge University Press, 1979, pp. 581–638.
- 22 R. Penrose, Structure of space-time, *Batelle Rencontres: 1967 Lectures in Mathematics and Physics*, C. DeWitt en J.A. Wheeler, eds., W.A. Benjamin, 1968, 121–235.
- 23 R. Penrose, *Techniques of Differential Topology in Relativity*, SIAM, 1972.
- 24 L.S. Penrose en R. Penrose, Impossible objects: A special type of visual illusion, *British Journal of Psychology* 49 (1958), 31–33.
- 25 R. Penrose en W. Rindler, *Spinors and Space-Time. Vol. 1: Two-Spinor Calculus and Relativistic Fields*, Cambridge University Press, 1984.
- 26 R. Penrose en W. Rindler, *Spinors and Space-Time. Vol. 2: Spinor and Twistor Methods in Space-Time Geometry*, Cambridge University Press, 1986.
- 27 R.H. Sanders, *Revealing the Heart of the Galaxy: The Milky Way and its Black Hole*, Cambridge University Press, 2014.
- 28 J.M.M. Senovilla, Singularity theorems and their consequences, *General Relativity and Gravitation* 30 (1998), 701–848, corrected version: arXiv:1801.04912.
- 29 J.M.M. Senovilla en D. Garfinkle, The 1965 Penrose singularity theorem (2015), arXiv: 1410.5226.
- 30 K.S. Thorne, *Black Holes and Time Warps: Einstein's Outrageous Legacy*, W.W. Norton & Company, 1994.
- 31 University of Oxford, *Extra Time: Roger Penrose in Conversation with Andrew Hodges*, 2014. https://youtu.be/zN5eLsl_Tuo (part 1) <https://youtu.be/FFWbpHmll1g> (part 2)
- 32 H. Weyl, *Raum – Zeit – Materie: Vorlesungen über Allgemeine Relativitätstheorie*, Springer, 1918.
- 33 <https://www.escherinhetpaleis.nl/escher-vandaag/cirkellimiet-iv-hemel-hel>
- 34 <https://www.escherinhetpaleis.nl/escher-vandaag/waterval>
- 35 <https://eventhorizontelescope.org>
- 36 <https://nl.wikipedia.org/wiki/Penrose-driehoek>
- 37 https://nl.wikipedia.org/wiki/Sagittarius_A*

Džemila Šero*Computational Imaging group
Centrum Wiskunde & Informatica, Amsterdam
dzemila.sero@cwi.nl***Diletta Martinelli***Korteweg-de Vries Institute for Mathematics
University of Amsterdam
d.martinelli@uva.nl***Proof by example** Portraits of women in Dutch mathematics

Shanti Adensi Venetiaan

In ‘Proof by example’, women in Dutch mathematics are portrayed. This edition portrays Professor Shanti Adensi Venetiaan, from the Anton de Kom University of Suriname, who works in mathematical statistics. She studied mathematics at the University of Leiden and then obtained a PhD from the University of Amsterdam in 1994. This time the interview has been done by Džemila Šero and Diletta Martinelli, who asked Professor Venetiaan about her mathematical career and inspiring work in fostering the mathematical community in Suriname.

When did you first get interested in mathematics?

“I think that I have always been interested in mathematics. I was a curious child and I liked puzzling. I always requested puzzles for my birthday, like the jigsaw ones. At school, mathematics was my favorite subject. Moreover, my father is also a mathematician. So by the time that I had to choose a study at university, it was very clear that it had to be mathematics.”

And that is when you came to the Netherlands. Was there a specific reason for that?

“Given that Suriname was a former Dutch colony, it was actually very common for Surinamese students to study in the



Shanti Adensi Venetiaan

Netherlands, so it was almost a natural choice. All my school mates went to the Technical University in Delft, but I decided to go to Leiden University: the same university where my father had studied.”

Were you always sure that you wanted to pursue an academic career?

“I was not actively pursuing an academic career when I started university. I do remember reading the leaflet that described all the steps leading to a PhD and beyond. At that moment, I realized that that was what I wanted. After I did my final thesis in Leiden with Professor Chris Klaaseen, he moved to the University of Amsterdam. He asked me whether I was interested in becoming his PhD student. Still, I was not sure what to do at that moment: I had been in the Netherlands for five years already and I was ready to go back home to Suriname. I discussed this with my parents, and they persuaded me to stay and to take the opportunity, so I did. Now, I can say that I am very happy that I took this opportunity!”



So it was only after your PhD that you went back to Suriname. Could you tell us a bit more about the mathematical scenery in Suriname?

“When I came back from the Netherlands there was no mathematics department at the Anton de Kom University and I was hired in the School of Technology. The academic life here revolves mainly around teaching, and there is no real research environment. But we are working hard to change this. Our bachelor’s in mathematics got accredited and we are trying to achieve a research culture. One of the main difficulties is the lack of expertise: I am the only person with a PhD in mathematics in the country. Suriname is a very small country with a population of around 500 thousand people, so it is common to be the only one with a certain expertise. But it is a nice challenge, and I like it!”

Do you think that Dutch institutions could play a role in helping the Suriname mathematical community to grow and thrive?

“At the moment, there are not many institutional connections. This is partially because there is a big gap in development and infrastructure between the two countries. Foreign researchers are mostly here to investigate the great biodiversity that the country offers. Nevertheless, we are initiating more collaborations. For instance, the pandemic opened new possibilities for our students: they could now follow online lectures from universities around the world. I hope similar opportunities will continue after Covid-19 and become official partnerships.”

What do you think about the idea of creating more scholarships for Surinamese students to study in the Netherlands?

“These are of course useful opportuni-

ties. It was actually very common until the eighties, then they stopped due to the beginning of a military dictatorship in Suriname. However, these types of scholarships have to be accompanied by capacity building programs in Suriname. Otherwise, I am afraid that they will just increase the brain drain of talented people who leave the country for education or work and do not come back.”

In the Netherlands, there is still a substantial gender gap in mathematics, what is the situation in Suriname? Is mathematics perceived to be a ‘male subject’ or a ‘male profession’?

“I think that in Suriname, not much attention is given to mathematics at all. Generally, people think that you do not have many options after a mathematics degree outside of teaching. We are trying to change this perception. We work with schools and companies to increase the awareness of the beauty and usefulness of mathematics. But regarding gender, I think there are no biases against women. Actually, most of our students are female. People are more worried about the large number of boys dropping out of schools. I think that women and men are equally encouraged to study and work.”

And finally, what advice would you give to a young student who would like to study mathematics?

“I think I would say to follow your heart. If mathematics is where your heart is, then do it! It is a beautiful subject. If you like puzzling, it is very fulfilling. Furthermore, mathematics provides you a training in abstract thinking that you can use everywhere!”

Alex Bellos

The Guardian

alexanderbellos@gmail.com

Recreational Mathematics The Fields Medals for beginners

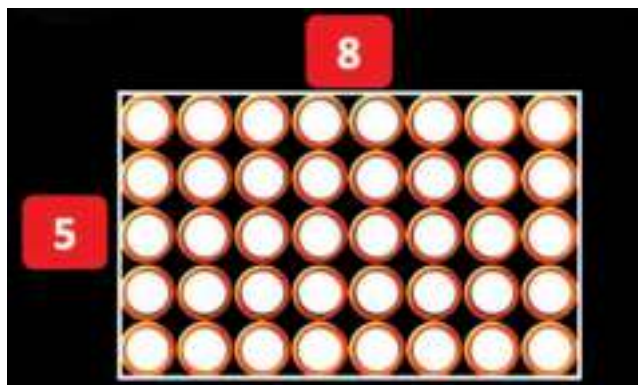
Problems inspired by maths' biggest prize

At the beginning of July, the Fields Medals were announced. The award, which every four years goes to up to four mathematicians under 40, is a recognition both of outstanding work and future promise. The announcement of the prize inspired Alex Bellos to find puzzles for each area of the winners of the Fields Medal 2022. The first three were published in his weekly puzzle section in *The Guardian* 'Can you solve it?' and are reprinted here with permission. The fourth one has been added by the editors of this journal.

Maryna Viazovska, aged 37, from Ukraine, won a medal for her groundbreaking work on how to pack spheres in 24 dimensions. In her honour, the first puzzle is about how to pack beers in three dimensions.

Puzzle 1: A crate problem

Is it possible to put more than 40 cans of beer of diameter 1 unit and height 2.6 units in a crate that has dimensions $5 \times 8 \times 2.6$? Here's 40 in the crate. But can you fit any more in?



Devised by Trần Phương, a legendary maths educator from Vietnam

James Maynard, aged 35, from the UK, won a medal for his many prime results about prime numbers. As a tribute to his success, here is a puzzle about the number 13, a prime number.

Puzzle 2: Chairs, mate

Place 13 chairs along the walls of a rectangular room such that each wall has the same number of chairs as the wall it faces.

From the journal 'Pythagoras'

June Huh, aged 39, from the US, won a medal for results linking graph theory, combinatorics, algebra and many other abstract concepts. A graph in this context means a network of discrete points connected to each other, which is one way you might think of a chessboard, which is discrete squares connected to each other.

Puzzle 3: Chess neighbours

Imagine a 9×9 chessboard (like a Sudoku grid, but with alternating black and white cells). Each square has a different person standing on it. Is it possible for all 81 people to step onto a neighbouring square, so that each square again has a different person on it?

From the journal 'Pythagoras'

Hugo Duminil-Copin, aged 36, from France, won a medal for his work on percolation theory, the analysis of fluids flowing through a porous medium, like water coursing through coffee grounds. It involves the formation of connected clusters in random networks, but can also represent the spread of a disease, the advance of a forest fire or the march of an ant colony.

Puzzle 4: Ant Alice

Twenty-five ants are placed randomly on a meter-long rod; the thirteenth ant from the west end of the rod is our friend, Ant Alice. Each ant is facing east or west with equal probability. They proceed to march forward (that is, in whatever direction they are facing) at 1 cm/sec; whenever two ants collide, they reverse directions. What is the probability that Alice is the last ant to fall off the rod?

From 'Mathematical Mind Benders' by Peter Winkler

<https://www.theguardian.com/science/series/alex-bellos-monday-puzzle>

Solutions: Puzzle 1: yes you can. Puzzle 2: put a chair in the corner. Puzzle 3: you can't. Puzzle 4: chance of 12 heads with 24 tosses of a fair coin.

Wim Caspers

Stanislascollege, Delft, en
Faculteit EWI en Lerarenopleiding, TU Delft
w.t.m.caspers@tudelft.nl

Onderwijs Bespreking examen vwo wiskunde B 2022

Wat voor leerlingen werden er dit jaar student?

Wat voor leerlingen hebben we dit jaar vanuit het vwo aan de Nederlandse universiteiten afgeleverd? Hoe zijn ze op de rest van hun leven voorbereid, qua wiskunde? Het antwoord is niet eenvoudig te geven. Ze hebben 4, 5 en 6 vwo doorlopen gedurende de pandemie. Het wiskundeonderwijs kende in die periode veel vormen: volledig op school, volledig online, halve klassen op school en halve klassen op afstand, of wellicht soms even helemaal geen onderwijs. Het afgelopen schooljaar was er daarom een heleboel geld beschikbaar om achterstanden op allerlei gebieden in te lopen. Veel bijspijker- en examentrainingen zijn er ingekocht, en menig docent zal ook zelf heel wat extra bijlessen hebben gegeven. Wat leverde het op? Wim Caspers doet verslag van zijn ervaringen.

Normaal gesproken weten docenten vrij nauwkeurig waar zich over het algemeen zwakke plekken in de kennis en vaardigheden van leerlingen voordoen. Afgelopen jaar leverde echter nog wel eens verrassingen op. Er bleek bij het aanbrengen van de grondverf in de vierde en vijfde klas nog wel eens een stukje overgeslagen te zijn en komt het dan bij het aflakken in de zesde klas in voorbereiding op het examen nog wel helemaal goed? Het examen wiskunde B op het vwo leek geen rekening te hebben gehouden met al die omstandigheden, niet op het eerste gezicht en ook niet bij nadere bestudering. Dat is maar goed ook, want anders weten we niet hoe het staat met de kennis en kunde van de leerlingen, inmiddels studenten.

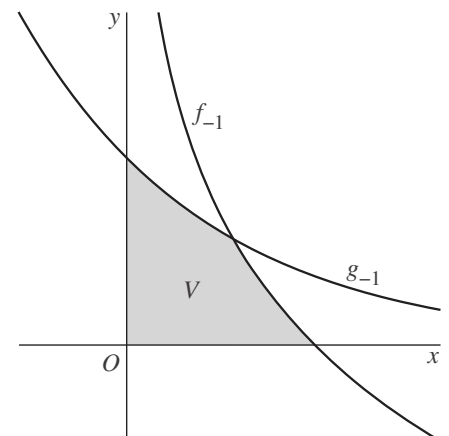
Wat kwam de leerling tegen in het examen van het eerste tijdvak? Het hele examen is terug te vinden op Examenblad.nl [1] en ook de bespreking van KP Hart die hij

er jaarlijks op zijn blog over schrijft is de moeite waard [2]. In het artikel dat u nu leest wordt een aantal opvallende opgaven belicht en worden te bespeuren ontwikkelingen in de aard en samenstelling van wiskunde B-examens op het vwo geschetst.

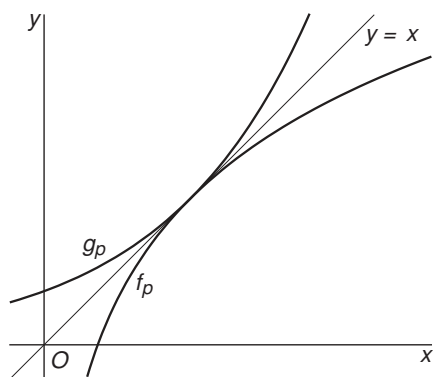
Inverse functies

Een aantal jaar alweer maakt het onderwerp 'inverse functies' deel uit van de examenstof en dit jaar figureerde het als openingsnummer in de opgave 'Inverse van $\ln(x)$ '. Voor $p \neq 0$ werden de functies f_p en g_p gegeven door $f_p(x) = p \ln(x)$ en $g_p(x) = e^{\frac{x}{p}}$. Gevraagd werd te bewijzen dat de functies elkaars inverse zijn. Niet gehinderd door zorgen over domein en bereik en op grote schaal het woord 'elkaar' negerend wisten heel veel leerlingen te voldoen aan het correctievoorschrift, door het toepassen van een goed getraind werkschema.

De tweede vraag in dezelfde opgave, het berekenen van de oppervlakte weergegeven in Figuur 1, deed verder geen noodzakelijk beroep op dat elkaars inverse zijn. De oppervlakte hoefde niet exact berekend te worden. Een exacte aanpak zou problemen opleveren bij het bepalen van het snijpunt, en ook een primitieve van de natuurlijke logaritme hoort niet per se tot de parate kennis van een wiskunde B-leerling. Nu is niet iedere docent op het vwo daarvan op de hoogte, dus nogal wat leerlingen zullen de vraag door middel van primitiveren geprobeerd hebben te maken en daarbij onnodig gestruikeld zijn over vergeten mintekens en haakjes.



Figuur 1



Figuur 2

De situatie van de derde vraag uit de openingsopgave is weergegeven in Figuur 2. De gelegenheid om nu wel gebruik te maken van de kennis dat de functies elkaar inverse zijn, wordt niet aangegrepen door de samenstellers van het examen. Gevraagd wordt exact de waarde van p te berekenen waarvoor de lijn $y=x$ de gemeenschappelijke raaklijn is van de grafieken van f_p en g_p . Door een vergelijking van de gemeenschappelijke raaklijn weg te geven en trouwens ook het bestaan van zo'n p te verklappen, wordt de waarde ervan al gevonden wanneer men op zoek gaat naar een functie f_p die de lijn $y=x$ als raaklijn aan de grafiek heeft. Het lijkt erop dat deze opgave aangepast is en dat er oorspronkelijk niet zoveel werd weggegeven.

Bézierkromme

In de tweede opgave wordt de Bézierkromme ten tonele gevoerd in de context van het beschrijven van de rand van een letter op een computerscherm. Zie Figuur 3. A krijgt als coördinaten $(\frac{1}{15}, \frac{4}{3})$ mee, $B(1, \frac{19}{10})$ en in het eerste onderdeel mag de x -coördinaat van C exact berekend worden aan de hand van gegeven hellingen van de raaklijnen. Zonder spannende wiskunde komt er $\frac{5}{24}$ uit.

Dan volgt de beschrijving van de Bézierkromme, zie Figuur 4. Achteraf vertrouwde een leerling me toe dat hij aangenaam verrast was met deze opgave omdat hij een week eerder een filmpje op YouTube erover bekeken had, *The Beauty of Bézier Curves* [3]. Veel kinderen kijken trouwens voor hun plezier wiskundefilmpjes op YouTube, Numberphile en 3Blue1Brown, een hoopvolle ontwikkeling. Wie het filmpje bekijkt zal inzien dat het hem in dit geval hielp om de opgave snel te begrijpen.

De vraag die volgde was om het punt R te tekenen dat hoort bij $t=0,25$ op de uitwerkbijlage waar in het plaatje getoond in Figuur 3 punt A , B en C al voorgetekend waren. Helaas kende de uitwerkbijlage geen schaalverdeling, want een aanzienlijk deel van de leerlingen ging opgeruimd aan de slag met de gegeven coördinaten en de zojuist berekende $\frac{5}{24}$ om de meest

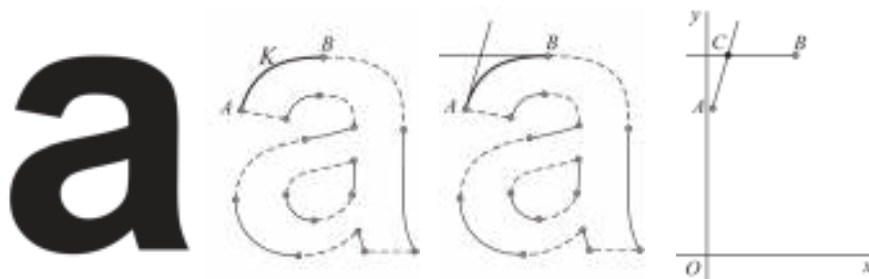
gruwelijke breuken het licht te doen laten zien en die dan enigszins nauwkeurig in te tekenen. Het correctievoorschrift had rekening gehouden met die manier van antwoord geven, want deze methode werd als mogelijke oplossing beschreven. Het gebruik van een schaal 6,7:1 werd daarbij geëist. Bij het tekenen werd een marge van 1 mm toegestaan. Een ware nakijkkel, waarbij elk werkje van een leerling die de beschreven constructie gewoon op papier uitvoerde, zoals normale mensen dat doen, met gejuich ontvangen werd.

Rakende grafieken

In de derde opgave wordt gevraagd aan te tonen, excuses, 'te bewijzen' (want 'aantonen' mag in het voortgezet onderwijs immers door de grafische rekenmachine in de uitwerking een rol te laten spelen), dat de grafieken van $f(x) = \frac{\sin(x)}{\sin(2x)}$ en $g(x) = \sin(x)$ elkaar raken. De perforatie $(0, \frac{1}{2})$ in de grafiek van f wordt genegeerd. Ook hier werd oorspronkelijk misschien weer een ingewikkeldere opdracht bedoeld.

Raaklijn verschuiven

Hebben we nu genoeg vragen over raken-de grafieken voorbij zien komen? Ja, maar er volgden er toch nog meer. In de opgave 'Raaklijn verschuiven' wordt na het integreren van de functie $f(x) = x^2 - 2x\sqrt{x} + x$ naar het plaatje in Figuur 5 verwezen. Bijbehorende vraag is om exact te berekenen voor welke $a \neq 0$ een verschuiving van de raaklijn k over de vector $\begin{pmatrix} a \\ 0 \end{pmatrix}$ weer een raaklijn aan de grafiek van f geeft. Zowel met de integraal als de verschuiving worden de leerlingen niet overvraagd, al blijft een deel bij de laatste vraag wel steken bij het vinden van een punt van de grafiek waar de raaklijn helling 1 heeft en wordt vergeten dat de opdracht was om a te vinden. Waarom gesproken wordt over een verschuiving 'over de vector $\begin{pmatrix} a \\ 0 \end{pmatrix}$ ', en niet



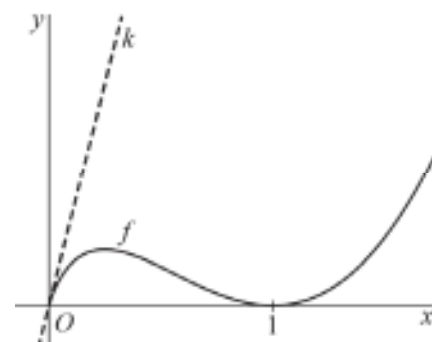
Figuur 3 Plaatje van lettercontouren bij tweede opgave.

Om de kromme K te kunnen construeren, worden er, behalve de drie vaste punten A , B en C , drie bewegende punten P , Q en R gebruikt. Deze bewegen als volgt:

- Punt P beweegt voor $0 \leq t \leq 1$ met een constante snelheid over lijnstuk AC van A naar C . Er geldt: $\overrightarrow{OP} = \overrightarrow{OA} + t \cdot \overrightarrow{AC}$
- Punt Q beweegt voor $0 \leq t \leq 1$ met een constante snelheid over lijnstuk CB van C naar B . Er geldt: $\overrightarrow{OQ} = \overrightarrow{OC} + t \cdot \overrightarrow{CB}$
- Terwijl punten P en Q bewegen, schuift punt R op het bewegende lijnstuk PQ van P naar Q . Er geldt: $\overrightarrow{OR} = \overrightarrow{OP} + t \cdot \overrightarrow{PQ}$

Het punt R doorloopt van $t=0$ tot $t=1$ een kromme van A naar B . Deze kromme wordt de **Bézierkromme** (van A , B en C) genoemd, en dat is kromme K uit figuur 2.

Figuur 4 Beschrijving van de Bézierkromme in de tweede opgave.



Figuur 5

gewoon over een verschuiving van 'a naar rechts', zoals de leerlingen gewend zijn, wordt niet helemaal duidelijk.

Lavabommen

Tijd voor een context, om precies te zijn de opgave 'Vulkaan', waarin de banen van een aantal lavabommen beschreven worden. Wat nogal eens opvalt bij opgaven met een rijke context, in dit geval ook weer, is dat de tweede keer dat je de opgave maakt, je feilloos de wiskunde eruit weet te filteren en dat de ware gedaante van de opdracht zich zonneklaar openbaart. Ontdaan van alle context komt de laatste vraag van deze opdracht neer op een plaatje en twee formules en — alweer — een vraag over rakende krommen: bewijs dat alle banen van de Lavabommen raken aan de gestippelde kromme. Voor geïnteresseerden,

zie Figuur 6 voor het plaatje en hier de formules:

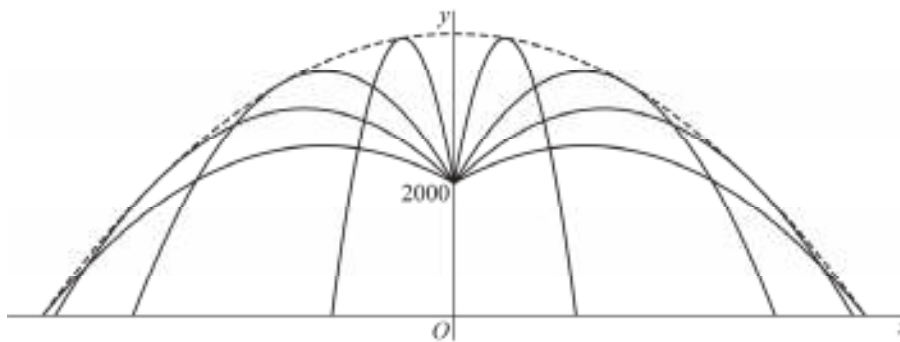
$$y = \frac{1 + \tan^2(\alpha)}{9000} \cdot x^2 + \tan(\alpha) \cdot x + 2000$$

en

$$y = -\frac{1}{9000} \cdot x^2 + 4250.$$

Vlieger

Na al die opgaven over raken beкроop leerlingen wel de vraag waar de sommen over meetkunde toch bleven. Tot de tanden bewapend met allerlei kennis en vaardigheden over cirkels, lijnen, afstanden en hoeken, moesten ze wachten tot de laatste opgave waar een middelloodlijn en een zwaartepunt bepaald moesten worden. Voor sommigen teleurstellend, als ze daar al aan toe kwamen, want zeker als je verleid was tot het tekenen op schaal 6,7:1



Figuur 6

in de opgave over Bézierkrommen was het examen aan de lange kant.

Tot slot

De vraag wat voor leerlingen er dit jaar als studenten begonnen zijn aan de universiteit wordt met deze beschrijving van het examen natuurlijk niet beantwoord. Maar de opgave 'Scheve asymptoot' en de manier waarop die gemaakt werd illustreert het een beetje. De functie f werd gegeven door $f(x) = x + \frac{2}{x}$ en in de beantwoording van een van de vragen was het nodig om een vergelijking van de scheve asymptoot van de grafiek van f te vinden. Wat leerlingen gewend zijn, is dat de scheve asymptoot nog verstopt is in het functievoorschrift. In dit geval zou dat $f(x) = \frac{x^2 + 2}{x}$ zijn. Door het uitvoeren van een staartdeling wordt dan de scheve asymptoot onthuld. Nogal wat leerlingen herschreven daarom het voorschrift van f eerst tot een breuk om vervolgens met een staartdeling de originele vorm terug te vinden en een juiste vergelijking van de scheve asymptoot op te schrijven. Dus wie dacht dat alle leerlingen aangeleerde stappenplannen inzichtelijk uitvoeren, is nu een illusie armer. Laten we hopen dat het niet de leerlingen zijn die vrijwillig Numberphile of 3BlueBrown kijken, want van die leerlingen moeten we het toch een beetje hebben. ☺

Referenties

- <https://www.examenblad.nl/examen/wiskunde-b-vwo-2/2022>.
- <https://fa.ewi.tudelft.nl/~hart/blog/eindexamen-wBvwo-2022-1.pdf>.
- <https://youtu.be/aVwxzDHniEw>.

Jan Swart

*Institute of Information Theory and Automation
The Czech Academy of Sciences
swart@utia.cas.cz*

Column Wiskundigen in den vreemde

Verschillen in Tsjechische en Nederlandse mentaliteit

In deze rubriek doen wiskundigen verslag van hun ervaringen als wetenschapper in den vreemde. Jan Swart verblijft sinds 2005 in Tsjechië, waar hij werkzaam is bij een instituut van de Tsjechische Academie der Wetenschappen.



Jan Swart

In 1995, toen ik aan mijn promotie werkte in Nijmegen, ben ik eens voor een maand naar Praag geweest voor een herfstschool. Daar heb ik mijn latere vrouw leren kennen en meteen bij terugkomst een boekje gekocht met de hoopvolle titel *Czech in Three Months*. Toen mijn vrouw en ik tien jaar later naar Tsjechië verhuisden was mijn Tsjechisch net op het niveau dat ik min of meer een gewone conversatie kon voeren. Voor Nederlanders is het Tsjechisch een lastige taal. Het heeft een systeem van naamvallen dat ongeveer net zo werkt als in het Latijn: elk woord krijgt een uitgang afhankelijk van het geslacht (man/vrouw/onzijdig) aantal (enkel/meervoud) en de functie in de zin (zeven naamvallen, één meer dan in het Latijn). In feite is het nog wat ingewikkelder want woorden van hetzelfde geslacht kunnen tot verschillende groepen (declinaties) behoren waar het Tsjechisch er vijftien van heeft. Kortom een jungle van uitgangen waar je maar langzaam wijs uit wordt. Als je het eenmaal kent is het soms wel een mooi efficiënt systeem. Om de Nederlandse zin “Hij reed door het donker” uit te drukken heeft een Tsjech maar twee woorden nodig: “Jel tmou”. Het Tsjechisch heeft geen lidwoord (dat vinden Tsjechen dan weer moeilijk aan het Engels of Nederlands), het voorzetsel ‘door’ wordt met de naamval -ou uitgedrukt, en ‘Hij’ kan worden weggelaten omdat de vorm van het werkwoord ‘Jel’ al aangeeft dat het om een man (derde persoon) gaat.

Ik werk sinds 2005 aan een instituut van de Tsjechische Academie der Wetenschappen, UTIA. Net als andere Oostbloklanden heeft Tsjechië uit communistische tijden een duaal academisch systeem overgehouden waarbij de universiteiten en de daarvan onafhankelijke Academie der Wetenschappen elk ongeveer een gelijk aantal wetenschappers in dienst hebben. Omdat ik op zo’n instituut werk, betekent dat dat ik geen onderwijsverplichting heb. “Voortdurend sabbatical”, zoals Angelsaksische collega’s dat wel eens met enige jaloezie beschrijven. In feite geef ik toch een college per semester aan de universiteit, maar meestal zijn



Links het instituut van de Tsjechische Academie der Wetenschappen waar Jan Swart werkt, en rechts het uitzicht vanuit zijn werkkamer.

dat gevorderde vakken voor een kleine groep studenten aan het eind van hun studie of voor promovendi. Een nadeel van niet aan de universiteit zijn is dat het moeilijker is om zelf een promovendus te vinden. De financiering van promovendi is in Tsjechië niet goed geregeld. Er is een soort basisbeurs die zo laag is dat je er niet van kunt leven en verder weet iedere prof voor zijn of haar promovendi nog wat extra geld te regelen, maar soms is van tevoren niet zeker voor hoe lang dat is en de beloning kan van persoon tot persoon sterk variëren. Een deel van de promovendi heeft daarom een baan naast zijn studie en goede studenten gaan vaak liever promoveren in West-Europa of kiezen voor een goed betaalde carrière in het bedrijfsleven.

Tsjechië neemt geografisch een interessante positie in als het meest westelijke voormalige Oostblokland. Als je van Praag naar het noorden gaat kom je in Berlijn en naar het zuiden in Oostenrijk. Die positie weerspiegelt zich in relatief grote welvaart in vergelijking met andere voormalige Oostbloklanden. Ook in cultureel opzicht is Tsjechië meer westers georiënteerd. In tegenstelling tot Hongarije en Polen zijn er in Tsjechië geen problemen met de persvrijheid en onafhankelijkheid van de justitie. Wel enigszins met corruptie. De Tsjechen zijn zelf zeer bezorgd over corruptie. Het wederzijds vertrouwen en het vertrouwen in de overheid is laag. Om corruptie tegen te gaan, zoekt men zijn heil in strenge bureaucratische regels, die soms zo onwerkbaar zijn dat de enige manier om ermee om te gaan, is ze te breken. Het is heel gewoon gevraagd te worden bij je handtekening een datum van een maand geleden te schrijven of een papier te ondertekenen dat je een brandveiligheidstraining van een uur hebt gevolgd alleen om een halve dag op een instituut op bezoek te kunnen zijn. Voor Tsjechen is dat een betere oplossing dan de

regels versoepelen, want dat zou in hun ogen pas echt de sluizen openzetten voor corruptie.

Terwijl Tsjechen bij het bestrijden van corruptie inzetten op strenge regels, is hun aanpak van andere maatschappelijke problemen zoals discriminatie heel anders. In vergelijking met Nederland heeft Tsjechië een homogene bevolking. De grootste minderheden zijn zigeuners en Vietnamezen. De laatsten zijn hier in communistische tijd gekomen. Discriminatie is wel een probleem, maar in tegenstelling tot West-Europese landen heeft men hier meer vertrouwen in de medemens en is er weinig animo het probleem met strenge regels aan te pakken. Integendeel, men kijkt achterdochtig naar wat wordt gezien als een overdaad aan politieke correctheid in het Westen en een cancel culture die in sommige opzichten verdacht veel kan lijken op de manier waarop in communistische tijden met afwijkende meningen werd omgegaan. In de wetenschap zijn er geen quota voor vrouwen en zelfs het principe “bij gelijke geschiktheid een vrouw” wordt hier niet gehanteerd. Aan de andere kant zijn er hier eminente vrouwelijke wiskundigen, ook in de oudere generatie die in Nederland vrijwel uitsluitend uit mannen bestaat. Voor Westerse universiteiten die proberen hun aandeel vrouwen op te krikken, liggen hier zeker mogelijkheden, al hoop ik dat tenminste een deel van het jonge vrouwelijke talent hier blijft.

Er zijn vrij grote verschillen in de Tsjechische en Nederlandse mentaliteit wanneer het gaat om hoe er naar de wereld buiten Europa gekeken wordt. In ben nu 22 jaar weg uit Nederland en door de afstand die dat schept vallen mij nu dingen op die ik eerder niet zo zag. Bijvoorbeeld een zekere zendingsdrift die zich uit in een diepgewortelde overtuiging dat de zorgen van de hele wereld de zorgen van Nederland zijn en dat Nederland er de oplossingen voor moet bieden. Ik zie dat ook in andere voormalige koloniale machten zoals Groot-Brittannië. Misschien is het werkelijk een overblijfsel van koloniaal denken. Voor Tsjechen is de wereld buiten Europa veel minder hun zorg, wat bijvoorbeeld tot een vrij groot conflict leidde toen het besluit viel binnen de EU om vluchtelingen eerlijk te verdelen. Dat besluit heeft autoritaire en populistische politici hier enorm in de kaart gespeeld. ‘Migrant’ werd een lelijk woord en het opnemen van ook maar een enkele vluchteling was over het hele politieke spectrum onbespreekbaar, tot de oorlog in Oekraïne daar een einde aan maakte en een half miljoen vluchtelingen plotseling geen enkel probleem waren. Nu zijn het weer de Nederlanders die zich zorgen maken dat Oekraïne te snel lid van de EU zou kunnen worden, voordat het land aan alle strenge (Nederlandse) idealen voldoet.



Peter van Emde Boas

*Institute for Logic, Language and Computation
Universiteit van Amsterdam
p.vanemdeboas@uva.nl*

In Memoriam Theodorus Jozef Dekker (1927–2021)

Vooraanstaand numeriek wiskundige, en informaticus van het eerste uur

Dirk Dekker was tussen 1971 en 1992 hoogleraar numerieke wiskunde aan de subfaculteit Wiskunde (sinds 1987 subfaculteit Wiskunde en Informatica) van de Universiteit van Amsterdam. In die functie heeft hij een centrale rol gespeeld bij de ontwikkeling van de numerieke wiskunde en programmatuur in Nederland. Daarnaast heeft hij een grote bijdrage geleverd aan de introductie van de informatica als een zelfstandige studierichting. Zijn oud-collega Peter van Emde Boas kijkt terug op zijn leven en werk.

Theodorus Jozef Dekker, in de wandeling Dirk genoemd (of voor intimi Dorus) is geboren op 1 maart 1927 in Heerhugowaard. Hij was de jongste zoon in een katholieke agrarische familie. De oudere kinderen waren drie zusters en een broer. Zijn jeugd-jaren bracht hij door in deze agrarische gemeenschap, maar op de dorpschool viel reeds snel op dat hij beter was in leren dan in werken in het boerenbedrijf. Aldus kreeg de familie het advies van zijn onderwijzer (Meester Buis) om Dirk naar het Petrus Canisius Gymnasium in Alkmaar te sturen. De middelbareschoolperiode viel voor het grootste deel samen met de oorlogsjaren; hij behaalt het eindexamen alfa en bèta in 1945, hetgeen in de praktijk erop neer komt dat hij het diploma behaalde zonder een eindexamen af te hoeven leggen. Dankzij zijn gunstige leeftijd blijven onaangenaamheden als de Arbeitseinsatz hem bespaard.

Als jongste zoon in een katholiek gezin wordt Dirk na zijn afgesloten gymnasiale

opleiding in navolging van zijn oudere broer op het spoor gezet van de priesteropleiding op het college Hageveld in Heemstede. Maar reeds na een jaar wordt het Dirk duidelijk dat het priesterschap niet zijn roeping was, en verlegt hij zijn pad naar een studie wiskunde aan de Universiteit van Amsterdam. Door gebruik te maken van studieuittstel voor militaire dienst ontkomt hij aan uitzending naar Nederlands Indië. Tijdens zijn studie komt hij in contact met de inspirerende hoogleraar Johannes de Groot en gaat hij diens vakgebied topologie beoefenen.

Na het behalen van het doctoraal examen in 1954 wacht hem alsnog de militaire dienst. In afwachting van de opkomst gaat hij op advies van professor De Groot een korte periode werken op de Rekenafdeling van het Mathematisch Centrum, waarmee de eerste stappen worden gezet richting zijn latere loopbaan in de informatica. Wetenschappelijk rekenen gebeurde in die tijd nog met zware elektrische tafelrekenma-

chines van het soort dat alleen de oudere lezers nog zullen kennen. Na afloop van de militaire dienst krijgt hij een aanstelling als assistent bij professor De Groot en begint hij aan een promotieonderzoek in de zuivere wiskunde, meer in het bijzonder de topologie. Dit onderzoek resulteert in de dissertatie *Paradoxical Decompositions of Sets and Spaces* [4] onder leiding van pro-



Dirk bij zijn promotie op 17 december 1958



Dirk bij zijn oratie op 25 september 1972

fessor De Groot, dat hij op woensdag 17 december 1958 verdedigt in de aula van de Universiteit van Amsterdam, destijds nog gevestigd in de Oudemanhuispoort.

Dirk is inmiddels zelfstandig gaan wonen in Amsterdam. In 1957 krijgt hij een relatie met Mies (Maria Francisca Huberdina) van Heezik, met wie hij in 1958 trouwt. Zij zullen 56 jaar samenblijven tot haar overlijden in april 2014. Zij krijgen samen twee zonen (Jan 1961 en Niels 1963) en twee dochters (Annemarie 1965 en Eline 1968). Het gezin verhuist in 1964 naar Castricum om vijf jaar later te verhuizen naar het adres in Bakkum waar hij de rest van zijn leven heeft gewoond.



Dirk en Mies bij het emeritaatsymposium op 27 november 1992

Na zijn promotie blijft Dirk verbonden aan het Mathematisch Centrum bij de Rekenafdeling alwaar hij steeds nauwer betrokken wordt bij vroege ontwikkeling en gebruik van elektronische rekenapparatuur. Hij werkt aan programmatuur op de ARMAC en later op de Electrologica X1 en X8. Naast de ontwikkeling van programmatuur voor deze machines geeft hij ook cursussen voor de gebruikers ervan.

In 1969 krijgt Dirk een leeropdracht 'Computer science in het bijzonder de numerieke algebra' aan de Universiteit van Amsterdam. In 1971 wordt dit omgezet in een ordinariaat in de numerieke wiskunde dat hij tot 1992 (modulo enkele organisatorische transformaties) zal bekleden. Tussen 1971 en 1987 had Dirk ook een aanstelling aan de Interfaculteit Actuarial en Econometrie. Op 25 september 1972 houdt Dirk zijn oratie getiteld 'Automatisch Rekenen'. Tussen 1971 en 1992 vervult Dirk een veelheid aan organisatorische taken. Op 27 november 1992 geeft hij zijn afscheidscollege getiteld 'Tussen Wiskunde en Informatica'.

In het Album Academicum van de Universiteit (<https://albumacademicum.uva.nl>) staat Dekker vermeld als promotor van een zestal studenten: Piet Hemker (1977), Jacobus Bus (1980), Johannes Cuppen (1983), Robert Gmelig Meyling (1986), Walter Hoffman (1989) en Theodorus Ripmeester (1996). Maar volgens het Mathematics Genealogy Project (www.mathgenealogy.org) zijn er daarnaast nog twee promovendi: Jan Verwer (1977) en Kees Dekker (1980); deze twee studenten hebben in het Album

Academicum Piet van der Houwen als eerste promotor.

Twee buitenlandse verblijven onderbreken de Nederlandse aanstellingen: eerst een bezoek aan Berkeley in 1963 en later een bezoek aan Bell Labs in 1968.

Ook na zijn emeritaat blijft Dirk een actieve deelnemer aan wetenschappelijke activiteiten, ook na het overlijden van Mies op 19 april 2014. Zijn laatste publieke optreden is in 2018 tijdens een symposium ter gelegenheid van de overdracht van een (gedeeltelijke) X8-machine aan het Boerhaave Museum in Leiden.

Dirk overlijdt op 25 november 2021.

Zuivere wiskunde

Het proefschrift van Dirk handelt over generalisaties van de Banach–Tarski-paradox. Deze paradox handelt over een opsplitsing van een tweedimensionale sfeer, respectievelijk de bol in drie dimensies in een aantal stukken die via meetkundige isometrieën kunnen worden samengevoegd tot twee sferen, respectievelijk bollen. Dit heeft als direct gevolg dat niet alle verzamelingen meetbaar kunnen zijn in de gebruikelijk zin, want ons maatbegrip is invariant onder meetkundige isometrieën.

Het resultaat berust op het bestaan van vrije niet commutatieve ondergroepen van de groep van alle isometrieën van rang groter gelijk twee. Dirks proefschrift handelt dan ook grotendeels over algebra: de expliciete constructie van vrije niet commutatieve ondergroepen met een verzameling generatoren gelijkmatig met de reële getallen. Hiermee laat de stelling van Banach en Tarski zich op diverse wijzen generaliseren. In de driedimensionale ruimte is het mogelijk om transformaties te gebruiken die dekpuntsvrij zijn, waarmee een onelegant onderdeel van de oorspronkelijke constructie (een speciale rol voor een aftelbaar stukje van de ruimte) verdwijnt. In hoofdstuk 2 van zijn proefschrift komen ook topologische eigenschappen van de fragmenten aan de orde.

Vanuit hedendaags gezichtspunt is het een kort proefschrift: 46 pagina's. En uiteraard zijn er bij het proefschrift twaalf stellingen toegevoegd. Ik citeer stelling X:

"De vraag of een automatische rekenmachine kan denken, is in wezen de vraag of het menselijk denken een automatisch proces is. Deze laatste vraag nu kan op wijsgerige gronden ontkennend worden beantwoord."



Algemeen Wiskunde Colloquium, 7 februari 1979

U ziet dat de discussie over de sterke AI geen recent verschijnsel is. De resultaten uit het proefschrift zijn daarnaast gepubliceerd in een achttal artikelen, waarvan drie gezamenlijk met professor J. de Groot.

Aan het einde van zijn loopbaan keert Dirk terug tot de zuivere wiskunde. De ouderen onder u zullen zich wellicht het tafelkleedje herinneren vervaardigd ter gelegenheid van het IMU-congres in 1954 in Amsterdam dat een weergave vertoont van de priemgetallen in de ring van de gehele getallen van Gauss ($\mathbb{Z}[i]$). (De schrijver van dit artikel heeft thuis een parketvloer laten maken van dit patroon.) Deze patronen zijn ook te definiëren voor andere kwadratische getallenringen. Dirk heeft in zijn latere jaren een veelheid van deze patronen uitgerekend en daar plaatjes van gemaakt. Het geval $\mathbb{Z}[\sqrt{2}]$ vormt de basis van het omslag van de gedrukte versie van zijn afscheidscollege. Publicaties hierover zijn verschenen in de *CWI Quarterly* [11] en in 2010 op arXiv [12].

Programmatuurontwikkeling

Twee centrale thema's in het wetenschappelijke rekenen zijn de toepassing van methoden uit de lineaire algebra en het oplossen van differentiaalvergelijkingen. Deze twee onderwerpen vormden en vormen ook nu nog de kern van de numerieke wiskunde en algebra. Dirk heeft zich vanaf het vroegste begin met deze onderwerpen beziggehouden. Dat betreft zowel ontwikkeling van programmatuur en het geven van onderwijs aan gebruikers van

deze programmatuur. Een vroeg voorbeeld daarvan is de cursus programmeren voor de ARMAC uit 1959 [5]. De overgang van de wiskunde achter de gebruikte algoritmen naar de implementatie ervan in een programma roept nu eenmaal een veelheid aan problemen op: de algoritmen zelf zijn soms niet exact maar leveren benaderingen van het gewenste resultaat op, met een al dan niet voorspelbare precisie; de rekenapparatuur werkt met een getalrepresentatie in eindige precisie, waarbij slechts een fractie van de getallen exact wordt gerepresenteerd, en de gebruikte rekenkundige instructies zijn ook niet exact — soms omdat het exacte resultaat niet representeerbaar is, en soms vanwege een ongelukkige implementatie in de hardware van de machine.

Wat het laatste betreft konden wij ons in Amsterdam gelukkig prijzen met de destijds gebruikte Electrologica-machine EL X8 die gebruik maakte van de Grau-aritmetiek [20, 22]. Die leverde gegarandeerd bij ieder bewerking, hetzij het exacte resultaat, hetzij de beste benadering van het exacte resultaat op. Op dit punt waren deze machines destijds uniek in de wereld. Deze eigenschap is ook essentieel voor de correctheid van de methoden die Dirk in 1971 publiceert om de precisie van een computer te kunnen vergroten [8].

In de vroege periode (voor 1968) speelde bij de ontwikkeling van programmatuur een veelheid aan beperkingen een rol waar wij tegenwoordig geen weet meer van hebben. Machines waren langzaam en

hadden maar een zeer beperkt geheugen. Dekker beschrijft in zijn afscheidscollege hoe je bij het bewerken van matrices op de ARMAC zorgvuldig moest nagaan waar de gegevens werden opgeslagen, rekening houdende met de omloopsnelheid van het trommelgeheugen en het gedrag van twee snelle op ferrietkernen gebaseerde caches. Tegen de tijd dat programmatuur werd geschreven in Algol 60 waren dit soort problemen niet meer zo relevant; tegen de tijd dat algoritmen ontwikkeld werden voor parallelle machines kwamen zij in gewijzigde vorm weer boven water.

Een belangrijk aspect bij programmatuurontwikkeling is de keuze van de gebruikte programmeertaal. Als leerling van Van Wijngaarden en lid van de Europese gemeenschap van ontwikkelaars van programmatuur maakte Dekker gebruik van de taal Algol 60 vanaf het moment dat deze taal beschikbaar was in 1960. Dit in een tijd dat de groepen die grootschalig aan het rekenen waren zich primair oriënteerden op Fortran. De voordelen van Algol voor Dirks doelstellingen waren legio: exacte beschrijving, goede semantiek en ook het gebruik van recursieve functies was van groot nut. Helaas was de opvolger van Algol 60, Algol 68, een taal die mislukt is in haar schoonheid; te moeilijk voor de wereld om te begrijpen en te gebruiken.

Centraal bij de ontwikkeling van programmatuur stonden de aspecten van numerieke betrouwbaarheid, correctheid en herbruikbaarheid. Dirk heeft zich al vroeg ingezet voor de ontwikkeling van programmatheken, geïllustreerd door het in twee MC tracts gepubliceerde pakket voor lineaire algebra routines in Algol 60 [6, 7]. Toen uw auteur in 1969 in dienst trad van de universiteit als junior medewerker was een van zijn taken de begeleiding van een practicumgroep bij het college numerieke wiskunde van Dekker, waarbij dit pakket werd gebruikt. Ondanks alle voorzorgen getroffen om de correctheid van de afgedrukte routines te garanderen (zoals onder meer beschreven door Walter Hoffmann in zijn bijdrage in het *liber amicorum* [18]) liep ik in mijn groep toch tegen een fout in een van de routines aan; uiteraard bij het gebruik van de routine op een wijze waarvoor deze niet was bedoeld.

Daarnaast onderzocht Dirk ook de invloed van de eindige precisie van de getalrepresentatie en de gevolgen van de imperfectie van de geïmplementeerde arit-

metiek op de correctheid van programma-tuur [9,10].

Een numerieke procedure gekoppeld aan de naam Dekker is de procedure *zeroin*. De analyse leert dat een continue functie gedefinieerd over een gesloten interval waarvan de functiewaarden op de eindpunten een tegengesteld teken hebben, binnen dat interval een nulpunt moet hebben. De kunst is om het nulpunt te vinden. Bekende methoden hiervoor zijn bisectie, lineaire interpolatie, of (in het geval van een differentieerbare functie) Newtons algoritme. Echter ook hier geldt dat de duvel in de details zit. Je wilt voorkomen dat de routine in een loop raakt omdat het tussenpunt in de computeraritmiek samenvalt met een van de eindpunten, en je wilt ook niet dat de computer door nul gaat delen. Jacques Bus beschrijft in het *liber amicorum* [18] de totstandkoming van de publicatie over deze routine in een ACM tijdschrift [2] en in hetzelfde liber schrijft M. van Veldhuizen over een aanpassing van de procedure om deze nog robuuster tegen onoordeelkundig gebruik te maken.

Na 1980 kwam de ontwikkeling van vectormachines en andere supercomputers. Iedere nieuwe vorm van computerarchitectuur vraagt om een volledige herbezinning van de implementatie van de elementaire bewerkingen in de lineaire algebra. Dekker heeft zich gedurende de laatste tien jaar van zijn aanstelling en tijdens zijn emeritaat intensief bezig gehouden met programmatuur voor computers met parallelisme; zie onder andere de publicatie [23].

In zijn laatste jaren heeft Dekker in samenwerking met Jan Bergstra getracht te komen tot een machine-onafhankelijke definitie van het begrip *algoritme*. Dit heeft geleid tot een aantal manuscripten, maar helaas niet tot een gepubliceerd artikel [3]. Het probleem blijkt gewoon te moeilijk te zijn om tot een overtuigende oplossing te komen. Men kan het erover eens zijn dat een algoritme een voorschrift is om bepaalde handelingen uit te voeren, maar op welk abstractie niveau deze handelingen beschreven moeten worden is minder duidelijk. Als men werkt met toekenningsopdrachten van waarden aan variabelen voert men toch stiekem een abstract model van een computer in. Daarnaast is het duidelijk dat deze handelingen een doel moeten hebben. Een algoritme kan niet los worden gezien van de beoogde relatie tussen begin en eindtoestand, al dan niet

gelardeerd met wenselijke tussentoestan-den en bijbehorende invarianten. Dit type specificatie vormt daarmee een essentieel onderdeel van de beoogde definitie.

Het lastigste probleem betreft de equivalentie van algoritmen. Levert het verwisselen van twee toekenningsopdrachten zonder enige vorm van interactie (die dus in feite ook parallel kunnen worden uitgevoerd) een ander algoritme op? Uiteraard is dit afhankelijk van de vraag of de intermediaire situatie geobserveerd wordt in de vorm van een beschreven tussentoestand. Hiermee wordt de equivalentie afhankelijk van de gebruikte specificatie. Bovendien wil men ook nog een keer dat het equivalentiebegriff een congruentie vormt onder de operaties waarmee men algoritmen wil samenstellen uit deelalgoritmen, en daarvoor is geen passende definitie gevonden.

Algoritme voor wederzijdse uitsluiting

Dekker is in de kerninformatica vooral bekend geworden door de oplossing van een probleem in *concurrency control*; curieus genoeg is dit een onderwerp waarmee hij zich later praktisch niet heeft ingelaten — de oplossing is ook niet door hemzelf gepubliceerd, maar door Edsger W. Dijkstra [14–17]. Pas in 2018 schrijft Dirk er een artikel over [13] naar aanleiding van een voordracht die hij over zijn algoritme heeft gegeven in Leiden. Desalniettemin is Dekkers algoritme een beroemd resultaat dat in vele boeken over concurrency (maar ook over verificatie) is terug te vinden, zoals bijvoorbeeld in [1, hfdst. 3 en 4] of in [19].

De Electrologica X1 was de eerste computer die gebruikmaakte van het interrupt-mechanisme dat de computer in staat stelt om te blijven rekenen terwijl de randapparatuur bezig is met in- en uitvoer van gegevens. In die tijd rond 1960 toen computers nog alles behalve snel waren, leverde dit belangrijke tijdswinst op. Een nadeel was dat het veel lastiger werd om te begrijpen hoe de interactie tussen verschillende actieve processen verloopt: het probleem van de concurrency was geboren. Edsger W. Dijkstra was zich zeer bewust van de complexiteit van deze problemen en heeft zich daar actief mee beziggehouden.

In 1959 (volgens Dekker in 1960) formuleerde Dijkstra het probleem van de wederzijdse uitsluiting van twee naast elkaar lopende processen die beide herhaald een zogeheten kritieke sectie willen doorlopen, waarbij moet worden gegarandeerd dat

deze processen zich nooit tegelijkertijd binnen hun kritieke sectie bevinden. Denk aan een computer waarop twee processen rekenen en resultaten willen afdrucken; je wilt niet dat de resultaten door elkaar heen worden afgedrukt, dus het gebruik van de printer moet afwisselend exclusief aan een van beide processen worden toegewezen.

Ik onderneem een poging om het probleem en de oplossing in woorden te beschrijven; de programmatekst kan u vinden in de genoemde artikelen van Dijkstra, en in het artikel dat Dekker er zelf over heeft geschreven aan het einde van zijn leven [13].

Het is uiteraard nodig dat de twee processen kunnen communiceren. Dijkstra stelt daarvoor gedeelde variabelen beschikbaar met atomaire toegang: beide processen kunnen de variabele lezen en schrijven, waarbij de atomaire toegang garandeert dat de effecten zich altijd laten interpreteren als hadden beide processen hun acties in een of andere volgorde na elkaar uitgevoerd: een leesopdracht levert altijd een eerder door een van beide processen geschreven waarde op, en geen mengsel van twee gelijktijdig uitgevoerde schrijfoopdrachten. En ook in de situatie dat beide processen tegelijkertijd willen schrijven is het resultaat dat een van de bedoelde waarden in de variabele terecht komt (onbepaald welk van de twee), en geen onbedoeld mengsel van twee waarden. Het blijkt in de praktijk voldoende te zijn om slechts gebruik te maken van binnaire variabelen.



Voordracht over wederzijdse uitsluiting, Leiden, 24 maart 2018

De oplossing moet ook aan redelijkheidseisen voldoen. Het verbieden dat een van beide processen ooit toegang krijgt tot de kritieke sectie is een oplossing die wederzijdse uitsluiting garandeert, maar dat is duidelijk niet de bedoeling. Processen die hun kritieke sectie willen betreden moeten daartoe vroeger of later de kans krijgen, ongeacht der relatieve snelheid waarmee de processen hun programma uitvoeren. De processen mogen ook niet blijven hangen in een lus waar zij niet meer uit kunnen komen.

Dijkstra had dit probleem gesteld, nauwkeurig geformuleerd, en voorgelegd bij diverse collega's binnen de secties van de Rekenafdeling van het Mathematisch Centrum. Hij beschrijft diverse voorgestelde oplossingen waarvan hij laat zien dat ze niet werken, en hij twijfelde of het probleem wel oplosbaar was. Tot zijn verbazing kwam Dirk enkele dagen nadat hij over het probleem had gehoord met een oplossing.

Om de oplossing van Dirk te begrijpen is het nuttig om eerst te kijken naar wat niet werkt. Men kan de twee processen om de beurt het recht geven de kritieke sectie te betreden, maar dat is geen correcte oplossing; immers een proces dat zijn kritieke sectie heeft doorlopen en vervolgens het andere proces de beurt geeft kan in de situatie komen dat het opnieuw de kritieke sectie wil betreden terwijl het andere proces in die tijd geen enkele belangstelling heeft getoond om diens kritieke sectie te betreden, en dus ook niet de beurt heeft kunnen teruggeven.

De processen moeten daarom kunnen testen of de kritieke sectie van het andere proces vrij is op het moment dat zij hun kritieke sectie willen binnengaan. Beide processen krijgen daarvoor een binaire variabele die aangeeft dat zij belangstelling hebben; deze variabele is ook voor het andere proces leesbaar. En uiteraard dient een proces dat vaststelt dat de ander belangstelling heeft (en zich dus mogelijk reeds in de kritieke sectie bevindt), wachten tot de ander vertrokken is.

Het proces moet dus alvorens de kritieke sectie te betreden zelf uitspreken geïnteresseerd te zijn, en te controleren dat het andere proces niet geïnteresseerd is. Als deze actie en test samen atomair zouden kunnen worden uitgevoerd (en dus in het geval dat de test oplevert dat op dit moment geen toegang mogelijk is, er niets

wordt veranderd), zou het probleem daarmee zijn opgelost, maar helaas: het zijn twee acties en daartussenin kan het andere proces een willekeurig aantal stappen hebben gezet.

Als beide processen eerst zich aanmelden en dan checken of de kritieke sectie vrij is binnen het andere proces kan de situatie ontstaan dat beide processen vaststellen dat ze niet verder kunnen. Dit levert een dodelijke omarming op doordat beide processen op elkaar staan te wachten. Omgekeerd als de twee processen eerst testen en dan hun interesse publiceren kan de situatie ontstaan dat beide processen elkaar testen (en zien dat de weg vrij is) en daarna beide menen toegang tot de kritieke sectie te mogen claimen. Dit levert de te vermijden onveilige situatie op.

Dijkstra kiest derhalve toch voor het zich eerst aanmelden; echter als na aanmelding de test oplevert dat het andere proces ook geïnteresseerd is moet een extra actie worden ondernomen inhoudende dat het proces zich tijdelijk terugtrekt en wacht tot er wel ruimte is. Echter als beide processen dit doen is niet langer te garanderen dat een van beide processen ooit aan de beurt komt. Dijkstra vergelijkt dit met een tweetal mensen die herhaald elkaar proberen te bellen en elkaar in gesprek vinden en dan weer ophangen. Vroeger of later zal een van beide geluk hebben en de verbinding alsnog tot stand brengen, maar dat is een stochastisch proces en daarmee is het probleem niet op de gewenste wijze opgelost.

De gedachte achter Dekkers oplossing is een combinatie van het mechanisme om de processen elkaar om en om de beurt te geven (via een gedeelde atomaire variabele die zij beide kunnen lezen en schrijven), en de hierboven uitgelegde sluismethode. Echter het hebben van de beurt geeft geen vrije toegang tot de kritieke sectie, maar alleen maar het recht om met handhaving van de claim op de kritieke sectie te wachten tot het andere proces zijn kritieke sectie vrijgeeft. Het proces dat de beurt niet heeft moet zijn claim terugtrekken en daarna wachten tot het de beurt terugkrijgt (waarvoor het andere proces zorg zal dragen als het gereed is met diens kritieke sectie).

In zijn postume publicatie [13], gebaseerd op de voordracht die Dekker 24 maart 2018 in Leiden heeft gehouden, beschrijft hij alternatieve oplossingen die in de literatuur te vinden zijn en de nodige

generalisaties. Dijkstra [15,16] heeft zich door de in de oplossingen optredende wachtlussen laten inspireren tot de introductie van de zogeheten seinpalen (semaforen), waarmee dit type problemen systematisch kunnen worden opgelost.

Organisatie en bestuur

Toen Dekker in dienst kwam bij de Universiteit van Amsterdam waren de wiskundigen verdeeld over twee instituten: het Mathematisch Instituut en het Instituut voor Toepassingen van de Wiskunde. Daarnaast bestond er interfacultair instituut voor grondslagenonderzoek waaraan de logici mede verbonden waren en een instituut voor propeadeutische wiskunde, ooit opgericht door de scheikundigen, biologen, geologen en farmaceuten om hun wiskundeonderwijs te verzorgen; deze groepen waren ontevreden over het onderwijs dat zij vanuit de Subfaculteit Wiskunde en Natuurkunde kregen.

In de jaren zeventig ging de universitaire structuur op de helling. Het resultaat voor wat betreft de wiskundigen was de vorming van een Subfaculteit Wiskunde (dus niet langer gezamenlijk met natuur- en sterrenkunde). Deze subfaculteit kende negen vakgroepen, waaronder een vakgroep numerieke wiskunde en informatica. Als enige voltijds hoogleraar binnen die vakgroep was Dekker vanzelfsprekend de voorzitter van deze vakgroep. Naast hem was Van Wijngaarden als deeltijds hoogleraar actief, en er was een wisselende leeropdracht die in die periode voor vier jaar werd vervuld door Kruseman Aretz.

Uitbreiding van de vaste formatie verliep in de midden jaren zeventig moeizaam. Een extra lectoraat kon slechts verworven worden door dit te delen met de propeadeuten (dit is de positie waarop uw auteur in 1976/77 is aangesteld).

De jaren zeventig zijn ook de jaren van de radendemocratie. Na de invoering van dit systeem kende de Subfaculteit Wiskunde een raad bestaande uit zeven stafleden, zes studenten en één vertegenwoordiger van het (amper aanwezige) technische en administratieve personeel. Een centraal politiek twistpunt was de al dan niet verplichte invoering in het curriculum van een vak *wetenschap en samenleving*, met als afgeleid probleem de nadere invulling van de zetelverdeling in de raad; de zeven zetels voor de staf volgde automatisch uit de omvang van de raad want de wet schreef



Subfaculteitsbestuur Wiskunde 1977–1978, Judith van Witsen, Elly Dobber, Dirk Dekker, Gerard Foekema en Martje Roessingh

voor dat de staf precies 50 procent van de zetels moest bezetten, maar de verdeling tussen studenten en administratieve staf mocht nader worden ingevuld. Dit conflict resulteerde uiteindelijk in een patstelling waarbij geen van de hoogleraren meer bereid was het decanaat te vervullen. Als overgangsmaatregel trad Josef Steenbrink — destijds nog geen hoogleraar — op als voorzitter van een interim bestuur (met steun van de decaan van de faculteit Breslers). Dit was een problematische situatie omdat hij bepaalde functies van het decanaat zoals het regelen en voorzitten van promoties niet mocht vervullen.

Dekker is instrumenteel geweest bij het herstel van de normale verhoudingen door zijn bereidheid om in 1977 de taken van Steenbrink te gaan overnemen. Volgens mijn fotocollectie is hij in januari 1978 voor het eerst als voorzitter in de raad opgetreden (zie de foto hierboven). Hij heeft deze functie met veel inzet vervuld tot in 1980.

Een veel fundamenteeler probleem diende zich in de tweede helft van de jaren zeventig aan: de positie van de informatica binnen de academische orde. De mensen die zich met informatica bezighielden waren verdeeld over allerlei instituten. Binnen de Faculteit Wiskunde en Natuurwetenschappen waren de grote computergebruikers te vinden bij natuur en scheikunde (denk aan de groeiende behoefte aan rekenkracht om de experimenten in de hoge energiefysica te kunnen interpreteren). En ook buiten de faculteit waren er informatica-activiteiten — denk aan de bestuurlijke informatica en

het op artificiële intelligentie gerichte werk bij de psychologen.

In de praktijk resulteerde dit vooral in op cultuurverschillen gebaseerde meningsverschillen over zowel de positie die de informatica binnen de universiteit zou moeten krijgen als de inhoud van het vak. Er was onenigheid over de voor het onderwijs te gebruiken programmeertalen (Algol versus Fortran). Was informatica gewoon wiskunde over een nieuw en ander onderwerp (zoals belichaamd in het vak theoretische informatica), stond het programmeren en systeemontwikkeling centraal of moest het zwaartepunt liggen bij de toepassingen, in het bijzonder bij de natuurkunde. Daarnaast speelde de vraag of informatica een aparte opleiding moest worden, dan wel dat binnen de bestaande studierichtingen op informatica gerichte varianten ontwikkeld moesten worden.

Eind jaren zeventig had een facultaire commissie (waarvan ondergetekende als secretaris mocht opdraven) nog geadviseerd tegen een zelfstandige studierichting, maar de landelijke ontwikkelingen haalden ons spoedig in. Er moesten zelfstandige informaticaopleidingen komen, hetgeen de kwestie oprise van het aantal en de plaats van deze nieuwe opleidingen. Oorspronkelijk werd gedacht aan vier plaatsen in het land, waarbij instellingen zouden samenwerken. De Universiteit van Amsterdam zou dan samenwerken met de Vrije Universiteit en de Universiteit Utrecht. Uiteindelijk bleef de samenwerking beperkt tot de UvA en de VU, mede ingegeven door het feit dat

ook met het bijeenzoeken van alle deskundigheid binnen deze twee instellingen het nog maar amper mogelijk bleek een passend curriculum aan te bieden. Opgemerkt dient te worden dat in 1979 en 1980 toen deze plannen moesten worden gerealiseerd binnen onze faculteit geen voltijds vertegenwoordiger te vinden was van wat destijds gezien werd als kerninformatica (programmatuur en bedrijfsystemen); De VU beschikte daar wel over in de personen van Reind van de Riet en Andy Tanenbaum.

De nieuwe studierichting die aan de UvA in 1980 van start ging (met in het eerste jaar nog een vijfjarig programma dat na 1981 werd gereduceerd tot vier jaar conform de vigerende regels) werd verzorgd door een divers gezelschap van docenten en medewerkers uit de subfaculteiten Wiskunde, Natuur- en Sterrenkunde, Scheikunde en Geologie. Dit gezelschap werd ondergebracht in een facultaire vakgroep informatica, waarvan Dekker in 1981 de eerste voorzitter werd. Deze groep behoorde niet tot een subfaculteit en ressorteerde rechtstreeks onder de faculteit. De leden van de vakgroep bleven in het begin officieel aangesteld bij de instelling vanwaaruit zij afkomstig waren. Vanuit deze startpositie kon begonnen worden met de werving van meer informatici. De eerste nieuwe hoogleraar was Bob Hertzberger die een sleutelrol had gespeeld bij de opzet van de nieuwe structuren vanuit zijn positie bij natuurkunde en het CERN. Enkele jaren later werd Jan Bergstra benoemd als programmatuurkundige. Bob Hertzberger nam in 1984 het voorzitterschap van de vakgroep over van Dekker.

In 1984 maakten formatieperikelen bij wiskunde het noodzakelijk om de positie van Dekker (en de mijne) alsnog over te plaatsen naar de facultaire vakgroep. Dit duurde echter niet lang; in 1987 werd de vakgroep weer samengevoegd met de Subfaculteit Wiskunde tot een nieuwe Faculteit Wiskunde en Informatica, waarbij de numerieke wiskunde en algebra werd ondergebracht bij een vakgroep systeemontwikkeling gerichte informatica, naast de vakgroepen wiskunde, logica en theoretische informatica, en programmatuurkunde. Dit was de structuur toen Dekker in 1992 met emeritaat ging. Nadien is in de jaren negentig een fusie gekomen met natuur- en sterrenkunde, om in de jaren nul van deze eeuw terug te keren tot een alomvattende Faculteit der Natuurwetenschappen,



Bezoek IFIP working group WG 2.5 aan Amsterdam op 24 mei 1977, W.S. Brown, P. van der Houwen, Dirk Dekker, B. Einarson, H.J. Stetter en Piet Hemker.

Wiskunde en Informatica — afgezien van de informatica lijkt dit dus op de structuur van vijftig jaar eerder.

Over het karakter van Dekker als bestuurder zijn de meningen van alle betrokkenen gelijklopend: hij was recht door zee, maakte geen vijanden, had een zekere mate van naïeve onhandigheid die soms aanleiding gaf tot verwarring, en hij had nooit een dubbele agenda.

Nog iets over internationale contacten. Dekkers werk op het gebied van numerieke programmatuur, in het bijzonder numerieke lineaire algebra bracht hem in contact met groepen die elders bezig waren met de productie van gestandaardiseerde programmabibliotheken. Te denken valt aan groepen zoals de Numerical Algorithms Group (NAG) die bij gelegenheid in Amsterdam op bezoek kwam.

Een ander internationaal gremium was de IFIP working group WG 2.5, die zich niet alleen bezighield met softwareontwikkeling voor numerieke toepassingen maar ook met de standaardisatie van de aritmetiek. Dekker groeide op in een tijd dat iedere machine er eigen ideeën op nahield over de rekenkundige bewerkingen. Het verhaal ging dat numerici rondliepen met een briefje met een lijstje rekenkundige formules; aan de hand van de uitkomsten bij het uitrekenen van deze formules konden zij de gebruikte machine herkennen. Inmiddels hebben wij de IEEE-standaard die aan deze minder gewenste toestanden een einde heeft gemaakt (zij het niet zo

mooi als de eerder vermeldde Grau-aritmetiek). Dekker was gastheer van een WG 2.5 bijeenkomst in Amsterdam in mei 1977, zie de foto hierboven.

Slotwoord

Ik wil aan het einde van dit artikel nog iets vermelden over onze onderlinge relatie.

Ondanks het leeftijdsverschil van ruim 18 jaar hebben wij een gedeeld verleden in de vorm van de invloed van de hoogleraar Johannes de Groot op onze loopbaan, en daarmee een gedeeld verleden in de topologie. Het was ook De Groot die mij na mijn deeltijds aanstelling aan de universi-

teit in 1969 adviseerde om ter verbreding van mijn werkterrein mijn diensten aan te bieden bij Dekker bij de begeleiding van zijn practica numerieke wiskunde — een vak waarmee ik mij eerder niet had ingelaten. De Groot kon destijds nog niet vermoeden dat ook ik de zuivere wiskunde de rug zou toekeren en zou eindigen als theoretisch informaticus.

Na mijn benoeming tot lector in 1976/77 waren wij collega proximus van elkaar. De beginperiode van de informatica aan de Universiteit van Amsterdam hebben wij gezamenlijk vorm helpen geven, uiteraard vanuit onze eigen verschillende invalshoeken. Na 1984 kwamen wij echter niet alleen in twee verschillende secties van de informatica terecht, maar ook op twee verschillende locaties — ik op het Roeterseiland en Dekker in het Wetenschappelijk Centrum Watergraafsmeer. Tegen de tijd dat alle groepen op de Roetersstraat moesten verhuizen naar het WCW (in 2009) was Dekker reeds lang en breed met emeritaat.

Ondanks onze totaal verschillende werkterreinen denk ik nog altijd met veel plezier terug aan de cursus programmeermethoden die wij gezamenlijk hebben verzorgd in de periode 1975–1977. Verschillende docenten konden daar enkele colleges geven over hun specialisme. Zo sprak Dekker over de invloed van eindige precisie op programmacorrectheid, en ik gaf een van mijn eerste colleges analyse van algoritmen. Intussen mochten de studenten werken aan serieuze programmeerprojecten, zoals het verkiezingsprogramma dat



Dirk verkent de nieuwbouw op het WCW, mei 2009

is ontwikkeld door Gijs Tuynman dat een einde moest maken aan het gebruik van een incorrect en daardoor onwettig pakket overgenomen van de TU Delft ter bepaling van de uitslag van de verkiezingen voor (sub)faculteitsraden volgens het systeem van de Enkelvoudig Overdraagbare Stem. Andere projecten bij deze cursus waren de eerste stappen van Arjen Lenstra (met Ruud Mak en A. Bos) op het gebied van

de polynoomfactorisatie, de implementatie van mijn priority queue door Rob Kaas en Erik Zijlstra en het kraken van het L-spel van de Bono door een viertal studenten waaronder onze latere KdV-directeur en KWG-voorzitter Jan Wiegerinck [21].

Dekker bleef ook na zijn emeritaat actief, en wij hebben elkaar ook regelmatig bij colloquia en congressen getroffen, naast diverse ontvangsten aan huis. Hij

was een zeer prettige collega om mee samen te werken. ☹

Dankwoord

Met dank aan de kinderen van Dirk voor het leveren van materiaal gebruikt voor dit artikel. De foto's van de promotie en oratie zijn door de familie ter beschikking gesteld. Ik ben ook dankbaar voor de commentaren op eerdere versies van dit artikel van Gerard Alberts, Krzysztof Apt en Jan Bergstra.

Referenties

- 1 M. Ben-Ari, *Principles of Concurrent and Distributed Programming*, second edition, Addison-Wesley, 2006.
- 2 J.C.P. Bus en T.J. Dekker, Two efficient algorithms with guaranteed convergence for finding a zero of a function, *ACM TOMS* 1 (1975), 330–345.
- 3 J.A. Bergstra en T.J. Dekker, Definition of algorithm and of equivalence of algorithms (2021), unpublished manuscript.
- 4 T.J. Dekker, *Paradoxical Decompositions of Sets and Spaces*, proefschrift, G. van Soest, Amsterdam, 1958.
- 5 T.J. Dekker, *Programming for the ARMAC, VI, Matrix Complex RAM*, report MR 30 (in het Nederlands), MC, 1959.
- 6 T.J. Dekker, *ALGOL 60 Procedures in Numerical Algebra, Part 1*, Mathematical Centre Tracts 22, 1968.
- 7 T.J. Dekker en W. Hoffmann, *ALGOL 60 Procedures in Numerical Algebra, Part 2*, Mathematical Centre Tracts 23, 1968.
- 8 T.J. Dekker, A floating-point technique for extending the available precision, *Num. Math.* 18 (1971), 224–242.
- 9 T.J. Dekker, Correctness proofs and machine arithmetic, in L.D. Fosdick, ed., *Performance Evaluation of Numerical Software*, North Holland, 1979, pp. 31–43.
- 10 T.J. Dekker, Program correctness and machine arithmetic, in P.C. Messina en A. Murli, eds., *Problems and Methodologies in Mathematical Software Production*, LNCS 142, Springer, 1982, pp. 48–80.
- 11 T.J. Dekker, Prime numbers in quadratic fields, *CWI Quarterly* 7 (1994), 367–394.
- 12 T.J. Dekker, Primes in quadratic fields (2010), arXiv:1001.5214v1.
- 13 T.J. Dekker, History of Dekker's algorithm for mutual exclusion – a personal view, in G. Alberts en J.F. Groote, eds., *Tales of Electrológica; Computers, Software and People*, History of Computing Series, Springer, 2022, pp. 113–123.
- 14 E.W. Dijkstra, Over de sequentialiteit van procesbeschrijvingen, *EWD* 35, ca. 1962–64, <https://www.cs.utexas.edu/~EWD>.
- 15 E.W. Dijkstra, Cooperating sequential processes, *EWD* 123, ca. 1964–67, <https://www.cs.utexas.edu/~EWD>.
- 16 E.W. Dijkstra, Cooperating sequential processes, in F. Genuys, ed., *Programming Languages*, Academic Press, 1965.
- 17 E.W. Dijkstra, Solution of a problem in concurrent programming control, *CACM* 17(8) (1965), 453–455.
- 18 P. van Emde Boas, P.W. Hemker, W. Hoffmann, P.J. van der Houwen en P.R. Pfluger, *Is er nog nieuws?*, liber amicorum aangeboden aan prof. dr. Th.J. Dekker, 1992.
- 19 N. Frances, *Fairness*, Texts and Monographs in Computer Science, Springer, 1986.
- 20 A.A. Grau, On a floating-point number representation for use with algorithmic languages, *CACM* 5(3) (1962), 160–161.
- 21 V.W. Gijlswijk, G.A.P. Kindervater, G.J. van Tubergen en J.J.O.O. Wiegerinck, *Computer Analysis of E. de Bono's L-game*, Report 76–18 MI, Universiteit van Amsterdam, 1976.
- 22 F.E.J. Kruseman Aretz, *Design and Correctness Proof of an Emulation of the Floating-Point Operations of the Electrológica X8: A Case Study*, report TU Eindhoven, 2010.
- 23 H.J.J. te Riele, T.J. Dekker en H.A. van der Vorst, eds., *Algorithms for Solving Numerical Linear Algebra Problems on Supercomputers*, North Holland, 1987.

Jan Karel Lenstra

*Centrum Wiskunde & Informatica, Amsterdam
jkl@cw.nl*

Franz Rendl

*Alpen-Adria-University of Klagenfurt
franz.rendl@aau.at*

Frits Spieksma

*Eindhoven University of Technology
f.c.r.spieksma@tue.nl*

Marc Uetz

*University of Twente
m.uetz@utwente.nl*

In Memoriam Gerhard Woeginger (1964–2022)

A formidable scientist and a teacher with a natural gift

T-shirt, casual pants, a pair of Birkenstocks, a knowledgeable smile, a subdued voice and unassuming. Gerhard Woeginger, a great mind, a compendium of knowledge of discrete algorithms and complexity, a source of inspiration to many colleagues and students for more than thirty years, has passed away. His colleagues Jan Karel Lenstra, Franz Rendl, Frits Spieksma and Marc Uetz look back on his work.

Born on 31 May 1964 in Graz, Austria, Gerhard Woeginger studied applied mathematics at Graz University of Technology. In 1991 he finished his PhD thesis under the supervision of Franz Rendl [10]. He was on the faculty in Graz from 1991 to 2001 and completed his habilitation in 1995, after which he spent a year as postdoc at Eindhoven University of Technology. He returned to the Netherlands as a full professor at the University of Twente in 2001, moved to Eindhoven in 2004, and accepted the chair of algorithms and complexity at RWTH Aachen University in Germany in 2016. After a nine-month battle with cancer, he died on 1 April 2022.

It is not so easy to summarize his scientific work. His territory was vast and he knew it well. He was interested in all sorts of problems and in algorithms of all flavors, be it exact, approximate or online. He knew results from faraway times that had appeared in obscure journals and he had an amazing talent to see connections across fields. Computational geometry,

scheduling, social choice, bibliometrics and, of course, computational complexity, one of his prime loves. His drive to draw the line between easy and hard was infectious. He set up and maintained the

P-versus-NP page, a vintage Gerhard-style webpage that collects attempts to settle this Millennium Prize Problem [17].

Among his many contributions, we mention his papers on approximation algorithms for scheduling parallel machines [1, 5, 6, 9, 11], on the connection between dynamic programming and the existence of a fully polynomial-time approximation scheme [12], and on an axiomatic characterization of the h-index and other bibliometric indices [14, 15, 16]. As a byproduct of the latter analysis, he invented the w-index, which has favorable properties; however, promoting it was not in his nature. He wrote a number of authoritative surveys on subjects like well-solvable cases of the traveling salesman problem [2], online algorithms [3], and exact algorithms for NP-hard problems [13].

He published more than 400 papers, about eighty of which are on scheduling. His paper on ten notorious open problems related to the approximability of machine scheduling problems [8] became quite influential. Several of these problems have been settled by now, be it through better lower bounds, e.g. based on the unique games conjecture, or through better upper bounds, using new relaxations or new rounding techniques. It is remarkable that



Gerhard Woeginger

Photo: MFO, Renate Schmid



all progress made on these ten problems has been nontrivial, which testifies to their significance.

Gerhard's work did not go unnoticed by funding agencies and prize committees. He was the recipient of the Austrian Start-Preis in 1996, of a Dutch NWO Vici grant in 2004, and of a German Humboldt Research Award in 2011. He was on the program committee of an enormous number of conferences, he was program chair of ESA 1997, MAPSP 2005, EURO 2009 and IPCO 2011, and he was on the board of a dozen journals.

Gerhard's curiosity was authentic, and he could listen. He was open towards newcomers in the community and he was able

to find truth in one's unstructured words. Among German colleagues, when an argument was basically clear while the details had not yet been worked out, he would say: "Das geht sich dann aus" – "That will do". He had an uncanny ability to distill the essentials of an argument and write it down in a natural and elegant way.

He was a teacher with a natural gift. Many of us have attended his tantalizing talks. He could make complicated proofs look simple. He would then show his mysterious smile, which expressed a mixture of modesty and mastery, sometimes perhaps with a hint of mockery. Once, during a talk, Gerhard used Lenstra's polynomial algorithm for integer programming with a fixed number of variables [7]. After the talk, Jan Karel suggested that next time he should perhaps mention the first name of this Lenstra: "Otherwise they think it's me." When Gerhard gave the talk again and invoked Lenstra's algorithm, he turned around, pointed to Jan Karel, and said: "Not him."

During the many workshops that he visited, he liked to socialize with friends. Science was never far away. Gerhard knew about the ideal composition of a darts board. He introduced the Mafia social game to several communities and played it with passion until early in the morning. He could even get upset when players made unreasonable decisions. Without Gerhard, Mafia will not be the same. However, after he had recovered from a bike accident in



Photo: Marco Lübbecke

Eindhoven in 2007, we saw less of him at meetings.

Frits had dinner with Gerhard in Aachen on 23 March. "I feel guilty about something I did in Eindhoven", Gerhard said. "When they were cleaning out the library, I found Duijvestijn's PhD thesis from 1962 [4]. His perfect square is still on the cover of the *Journal of Combinatorial Theory*. I took the thesis. Actually, I have it with me now." "Do you want me to return it to Eindhoven?", Frits asked. "Yes, I do", he said.

Gerhard will be missed for so much and for so many little things. Our field has lost a formidable scientist, we have lost a dear friend. Rest in peace, Gerhard. ☹

References

- 1 N. Alon, Y. Azar, G.J. Woeginger and T. Yadid, Approximation schemes for scheduling on parallel machines, *Journal of Scheduling* 1 (1998), 55–66.
- 2 R.E. Burkard, V.G. Deineko, R. van Dal, J.A.A. van der Veen and G.J. Woeginger, Well-solvable special cases of the traveling salesman problem: a survey, *SIAM Review* 40 (1998), 496–546.
- 3 J. Csirik and G.J. Woeginger, On-line packing and covering problems, in: A. Fiat and G.J. Woeginger, eds., *Online Algorithms: The State of the Art*, LNCS 1442, Springer, 1998, pp. 147–177.
- 4 A.J.W. Duijvestijn, *Electronic Computation of Squared Rectangles*, PhD thesis, Technische Hogeschool Eindhoven, 1962.
- 5 H. Hoogeveen, P. Schuurman and G.J. Woeginger, Non-approximability results for scheduling problems with minsum criteria, *INFORMS Journal on Computing* 13 (2001), 157–168.
- 6 H. Hoogeveen, M. Skutella and G.J. Woeginger, Preemptive scheduling with rejection, *Mathematical Programming* 94 (2003), 361–374.
- 7 H.W. Lenstra, Jr., Integer programming with a fixed number of variables, *Mathematics of Operations Research* 8 (1983), 538–548.
- 8 P. Schuurman and G.J. Woeginger, Polynomial time approximation algorithms for machine scheduling: ten open problems, *Journal of Scheduling* 2 (1999), 203–213.
- 9 M. Skutella and G.J. Woeginger, A PTAS for minimizing the total weighted completion time on identical parallel machines, *Mathematics of Operations Research* 25 (2000), 63–75.
- 10 G.J. Woeginger, *Geometric Clustering, Reconstruction and Embedding Problems: Combinatorial Properties and Algorithms*, PhD thesis, Technische Universität Graz, 1991.
- 11 G.J. Woeginger, A polynomial-time approximation scheme for maximizing the minimum machine completion time, *Operations Research Letters* 20 (1997), 149–154.
- 12 G.J. Woeginger, When does a dynamic programming formulation guarantee the existence of a fully polynomial time approximation scheme (FPTAS)?, *INFORMS Journal on Computing* 12 (2000), 57–74.
- 13 G.J. Woeginger, Exact algorithms for NP-hard problems: a survey, in: M. Jünger, G. Reinelt and G. Rinaldi, eds., *Combinatorial Optimization – Eureka, You Shrink!*, LNCS 2570, Springer, 2003, pp. 185–207.
- 14 G.J. Woeginger, An axiomatic characterization of the Hirsch-index, *Mathematical Social Sciences* 56 (2008), 224–232.
- 15 G.J. Woeginger, An axiomatic analysis of Egghe's g-index, *Journal of Informetrics* 2 (2008), 364–368.
- 16 G.J. Woeginger, Generalizations of Egghe's g-index, *Journal of the American Society for Information Science and Technology* 60 (2009), 1267–1273.
- 17 G.J. Woeginger, The P-versus-NP page, 2016, <https://win.tue.nl/~gwoegij/P-versus-NP.htm>.

Problemen

| Problem Section

This Problem Section is open to everyone; everybody is encouraged to send in solutions and propose problems. Group contributions are welcome. We will select the most elegant solutions for publication. For this, solutions should be received before **15 October 2022**. The solutions of the problems in this issue will appear in one of the subsequent issues.

Problem A

1. Let $n \in \mathbb{Z}_{\geq 1}$ and let $f: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ be continuous such that for all $x \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\}$ we have $|f(x)| < |x|$. Write f^m for the m th iteration of f . Prove that

$$\lim_{m \rightarrow \infty} f^m(x) = 0.$$

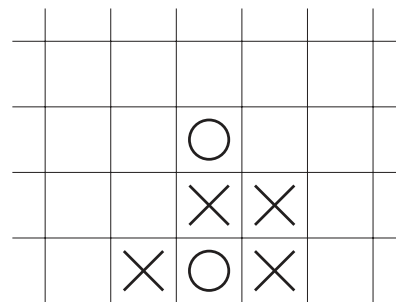
2. Denote by ℓ^2 the Hilbert space of square-summable sequences of real numbers. Prove that there exists a continuous map $f: \ell^2 \rightarrow \ell^2$ such that for all $x \in \ell^2$ we have $|f(x)| < |x|$ and for some $a \in \ell^2$ we have that $\{f^m(a)\}_{m=1}^{\infty}$ does not converge.

Problem B

Prove that for every integer n there exists a finite group G such that n equals the number of normal subgroups minus the number of non-normal subgroups.

Problem C

Olivia and Xavier play the game *Connect Three* on an infinite half grid on a sheet of paper. The rules are as follows: Olivia and Xavier take alternating turns, starting with Olivia. In her turn, Olivia draws an $\circ$ in a square with no empty squares below. In Xavier's turn, he twice draws an $\times$ in a square with no empty squares below. Olivia wins if she gets three $\circ$'s in a row, either horizontally, vertically, or diagonally. Can Xavier prevent Olivia from winning?



Edition 2022-1 We received solutions from Brian Gilding, Pieter de Groen en Nicky Hekster.

Problem 2022-1/A (proposed by Hendrik Lenstra)

Let R be a ring. We say $x \in R$ is a *unit* if there exists some $y \in R$ such that $xy = yx = 1$ and write R^* for the set of units of R . Show that $1 < \#(R \setminus R^*) < \infty$ implies $1 < \#R < \infty$.

Solution As solved by Nicky Hekster. Since $1 < \#(R \setminus R^*)$, we may pick some non-zero $a \in R \setminus R^*$. If $Ra = aR = R$, then a is a unit, which is a contradiction. So suppose without loss of generality that $Ra \subsetneq R$. In particular $Ra \cap R^* = \emptyset$. Hence $Ra \subseteq R \setminus R^*$ is finite. Consider $\text{Ann}(a) = \{r \in R: ra = 0\}$. Since $\text{Ann}(a) \cap R^* = \emptyset$, we again have that $\text{Ann}(a)$ is finite. Finally, the left R -module homomorphism $R \rightarrow R$ given by $r \mapsto ra$ induces an isomorphism $R/\text{Ann}(a) \cong Ra$, from which it follows that R is also finite.

Problem 2022-1/B (proposed by Hendrik Lenstra)

Let G be a group. For $n \in \mathbb{Z}_{>0}$ write $G[n] = \{g \in G \mid g^n = 1\}$ and $G^n = \{g^n \mid g \in G\}$.

1. Suppose G is abelian and $m, n \in \mathbb{Z}_{>0}$. Show that $G[n] \subseteq G^m$ if and only if $G[m] \subseteq G^n$.
2. Show that there exist $m, n \in \mathbb{Z}_{>0}$ such that the above is false when we drop the assumption that G is abelian.

Solution 1. We will use additive notation. By symmetry it suffices to show that $G[n] \subseteq mG$ implies $G[m] \subseteq nG$. For a prime p and abelian group H write $H[p^\infty] = \{h \in H : (\exists k \geq 0) p^k h = 0\}$ and $H[\infty] = \{h \in H : (\exists n > 0) nh = 0\}$.

Claim 1. For all $n > 0$ and primes p we have $G[n][p^\infty] = G[p^\infty][n]$ and $(nG)[p^\infty] = n(G[p^\infty])$.

Proof. The first equality is trivial, as well as the inclusion $n(G[p^\infty]) \subseteq (nG)[p^\infty]$. Suppose $x \in (nG)[p^\infty]$. Then $ny = x$ for some $y \in G$ and $p^k x = 1$ for some $k \geq 0$. Write $n = p^s u$ for some $s \geq 0$ and $(u, p) = 1$, and let v be an inverse of u modulo p^k . Then $p^{k+s}(uvy) = p^k vx = 1$, so $uvy \in G[p^\infty]$, and $nuy = vx = x$, so $x \in n(G[p^\infty])$. $\square$

Claim 2. With p ranging over the primes we have $\sum_p G[p^\infty] = G[\infty]$.

Proof. This follows from the Chinese remainder theorem. $\square$

We reduce to the case $G = G[p^\infty]$ for some prime p . Suppose $G[n] \subseteq mG$. Then $G[p^\infty][n] = G[n][p^\infty] \subseteq (mG)[p^\infty] = m(G[p^\infty])$ by Claim 1. Assuming we have solved the case $G = G[p^\infty]$ we get $G[m][p^\infty] \subseteq (nG)[p^\infty]$. From Claim 2 it then follows that $G[m] \subseteq (nG)[\infty] \subseteq nG$, as was to be shown.

Thus we assume $G = G[p^\infty]$. Consequently, we may assume $m = p^a$ and $n = p^b$. Furthermore, the statement is clearly true when $a = 0$ or $b = 0$, so suppose neither is the case. Let $x \in G[p^a]$. We distinguish two cases.

Case $a \leq b$: It suffices to show inductively for all $0 \leq k \leq b$ that there exists a $y_k \in G$ such that $x = p^k y_k$. For $k \leq a$ we have $x \in G[p^a] \subseteq G[p^b] \subseteq p^a G$, so we may write $x = p^a y_a$ and $y_k = p^{a-k} y_a$. Suppose $a < k \leq b$ and $p^{k-a} y_{k-a} = x$. Then $p^k y_{k-a} = 0$, so $y_{k-a} \in G[p^a] \subseteq G[p^b] \subseteq p^a G$. Hence $y_{k-a} = p^a y_k$ for some $y_k \in G$ and $p^k y_k = x$, as was to be shown.

Case $b \leq a$: It suffices to show inductively for all $0 \leq k \leq b$ that there exists a $y_k \in G$ such that $p^k x = p^b y_k$. For $k = b$ we may take $y_k = x$. Suppose $0 < k \leq b$ and $p^k x = p^b y_k$. Then $0 = p^{b-k}(p^k x - p^b y_k) = p^b(x - p^{2b-k} y_k)$, so $x - p^{2b-k} y_k \in G[p^b] \subseteq p^a G$ for some $z \in G$. It follows that

$$p^{k-1}x = p^{a+k-1}z + p^{2b-1}y_k = p^b(p^{a-b+k-1}z + p^{b-1}y_k) =: p^b y_{k-1},$$

as was to be shown.

2. Consider the non-trivial semi-direct product $G = (\mathbb{Z}/3\mathbb{Z}) \rtimes (\mathbb{Z}/4\mathbb{Z})$. Then $G[2] = \{(0,0), (0,2)\} = G^6$, while $G[6] = \{(a,b) : b \in 2\mathbb{Z}\} \not\subseteq \{(0,0), (1,0), (2,0), (0,2)\} = G^2$.

Problem 2022-1/C (proposed by Onno Berrevoets)

Let $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ be a twice differentiable function. Suppose that $a < b < c$ are real numbers such that $f(a) = f(b) = f(c) = 0$. Prove that there exists $x \in (a, c)$ such that

$$f'(x) + f''(x) = f(x)^2 + 2f(x)f'(x).$$

Solution Solved Brian Gilding, partially solved by Pieter de Groen. Proof from Brian Gilding: Define two functions $\mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ by the following:

$$g(x) = f(x) \exp\left(-\int_b^x f(t) dt\right) \quad \text{and} \quad h(x) = e^x (f' - f^2)(x).$$

Notice that g and h are differentiable on $\mathbb{R}$. Since $g(a) = g(b) = g(c) = 0$, by Rolle's theorem there exists $u \in (a, b)$ and $v \in (b, c)$ such that $g'(u) = g'(v) = 0$. The last two equalities imply that $h(u) = h(v)$. Hence, by Rolle's theorem, $h'(x) = 0$ for some $x \in (u, v)$. This yields $(f' + f'' - f^2 - 2ff')(x) = 0$.