

Inhoud | Contents

Artikelen | Features

- Nieuws | News**
 73 Looking back: the past five years of EWM-NL
Maria Vlasiou
- Interview | Interview**
 75 Nataša Jonoska: Understanding biology from a mathematical perspective
Clara Stegehuis, Cor Kraaikamp
- Geschiedenis | History**
 77 Back in the days
T.A. Springer
- Column | Column**
 88 Monty Hall, Marilyn vos Savant en Fermat
Piet Groeneboom
- Onderwijs | Education**
 93 Meetkunde van de stang: speciale en algemene reële algebraïsche krommen
Rainer Kaenders
- Onderwijs | Education**
 103 Studenten denken algoritmisch bij Dynamische Systemen
Sharon Calor, Sonia Abrantes Garcêz Palha, Laura Kubbe
- Geschiedenis | History**
 108 Het twaalfde probleem van Hilbert
Jan Vonk
- In Memoriam | Obituary**
 113 Piet Hemker: Denker en doener
Barry Koren

Rubrieken | Departments

- 67 Redactioneel
Raf Bocklandt
- 68 Agenda
Nikki Levering
- 70 Nieuws
Nikki Levering
- 91 Proof by example: Annika Betken
Clara Stegehuis, Francesca Arici
- 101 Het keerpunt van Luc Stultiens
Daan Mulder
- 119 Wiskundigen in den vreemde
Jan Rozendaal
- 120 In de verdediging
Nicolaos Starreveld
- 123 Boekbesprekingen
Hans Cuypers, Hans Sterk

Uitgelicht



77

De memoires van T.A. Springer, voor het eerst gepubliceerd in een Engelse vertaling.

$$\frac{x^2}{\sqrt{2}} \quad \dots \quad x^{\#2} / \text{sqrt}(\#2)$$

120

Annemiek van Leendert is gepromoveerd op het beter leren lezen en begrijpen van wiskundeformules in braille.

Colofon

Het Nieuw Archief voor Wiskunde is een uitgave van het Koninklijk Wiskundig Genootschap en verschijnt vier maal per jaar. Het tijdschrift richt zich op eenieder die zich beroepsmatig met wiskunde bezighoudt, als academisch of industrieel onderzoeker, student, leraar, journalist of beleidsmaker. Het stelt zich ten doel te berichten over ontwikkelingen in de wiskunde in het algemeen en in de Nederlandse wiskunde in het bijzonder.

ISSN 0028-9825

Adres

Nieuw Archief voor Wiskunde
Centrum Wiskunde & Informatica
Postbus 94079, 1090 GB Amsterdam
tel. 020-5924288
redactie@nieuwarchief.nl
www.nieuwarchief.nl

Hoofredactie

Raf Bocklandt (r.r.j.bocklandt@uva.nl)
Robbert Fokkink (r.j.fokkink@tudelft.nl)

Eindredactie/Bladmanager

Fred Drissen (fred@nieuwarchief.nl)

Redactie

Francesca Arici (UL), Viktor Blåsjö (UU), Hans Cuypers (TU/e), Teun Koetsier (VU), Nikki Levering (UvA), Daan Mulder, Nicolaos Starreveld (UvA), Clara Stegehuis (UT), Hans Sterk (TU/e), Mark Timmer (UT)

Problemenrubriek (problems@nieuwarchief.nl)

Onno Berrevoets en Daan van Gent

Bureauredactie

Anne van Grinsven

Illustraties

Ryu Tajiri

Vormgeving

Susanne Laws (omslag, begeleiding binnenwerk)
Kitty Molenaar (ontwerp)

Druk

Veldhuis Media

Advertenties

advertenties@nieuwarchief.nl

Koninklijk Wiskundig Genootschap

www.wiskgenoot.nl

Platform Wiskunde Nederland

www.platformwiskunde.nl

European Mathematical Society

www.euro-math-soc.eu

International Mathematical Union

www.mathunion.org

Koninklijk Wiskundig Genootschap

Het Koninklijk Wiskundig Genootschap (KWG) is een landelijke vereniging van beoefenaars van de wiskunde. In 1778 opgericht onder de zinspreuk: 'Een onvermoeide arbeid komt alles te boven' is het 's werelds oudste nationale wiskundegenootschap. Leden ontvangen het Nieuw Archief voor Wiskunde als onderdeel van hun lidmaatschap.

Bestuur

Barry Koren (TU/e, voorzitter), Mathisca de Gunst (VU, vice-voorzitter), Alef Sterk (RUG, penningmeester), Jop Briët (CWI, secretaris), Danny Beckers (VU), Rogier Bos (UU), Michael Muger (RU), Willem Jan Palenstijn (CWI), Wioletta Ruszel (TUD).

Secretariaat

Koninklijk Wiskundig Genootschap, CWI
Postbus 94079, 1090 GB Amsterdam
wiskgenoot@wiskgenoot.nl

Ledenadministratie KWG / Abonnementen

admin@wiskgenoot.nl, tel. 020-5924008
Wijzigingen of opzegging kunt u ook doorgeven door in te loggen op www.wiskgenoot.nl.

Contributie

Tarieven per jaar (bij betaling per automatische incasso krijgt u €2,50 korting):

- gewoon lid: €97,50
 - reciprociteitslid: €77,50
 - gepensioneerden en werklozen: €52,50
 - aio's, oio's, studenten: €42,50 (max. 4 jaar)
 - lid zonder Nieuw Archief: €57,50
- Studenten en pas afgestudeerden kunnen een jaar lang gratis lid worden.

Voor verzending van het Nieuw Archief naar het buitenland wordt een portotoeslag van €10 in rekening gebracht.

Instituten in Nederland en buitenland kunnen zich abonneren op het Nieuw Archief voor Wiskunde voor €105 (Nederland), €115 (Europa) of €117,50 (buiten Europa).

Members of foreign societies

Members of SIAM, the *Société Mathématique de France*, the *Gesellschaft für Angewandte Mathematik und Mechanik*, the *Deutsche Mathematiker-Vereinigung*, and of the *American, Australian, Belgian, Indian, London, Spanish, and South-African Mathematical Societies* living outside of the Netherlands pay €77,50 instead of the full membership fee of €97,50 a year. Conversely, these foreign societies, as well as the VvS+OR and the NVORWO, have reduced membership fees for KWG members. A postage charge of €10 is added for members living abroad but in Europe, and a charge of €12,50 for members living outside of Europe.

Exchange subscriptions

Koninklijk Wiskundig Genootschap Library
Centrum Wiskunde & Informatica
P.O. Box 94079, NL-1090 GB Amsterdam
KWG-exchange@cwi.nl

Informatie voor auteurs

Kopij

Kopij dient per e-mail te worden aangeboden aan kopij@nieuwarchief.nl. Voor meer informatie en auteursinstructies zie www.nieuwarchief.nl.

Volgende nummers

nummer	maand	verschijnen	deadline kopij
23(3)	september	2022	verstrekken
23(4)	december	2022	01-08-2022
24(1)	maart	2023	01-11-2022
24(2)	juni	2023	01-02-2023

Instituuts- en bedrijfsleden

De publicaties van het KWG worden mede mogelijk gemaakt door de bijdragen van de volgende instituten en bedrijven.

	Centrum Wiskunde & Informatica
	Universiteit van Amsterdam
	Vrije Universiteit Amsterdam
	Rijksuniversiteit Groningen
	Universiteit Leiden
	Radboud Universiteit Nijmegen
	Universiteit Utrecht
	Technische Universiteit Delft
	Technische Universiteit Eindhoven
	Universiteit Twente
	Elsevier
	ORTEC

Op het omslag

Uitsnede van de poster 'Vrouwen in de Wiskunde', een initiatief van EWM-NL. Lees op p. 73 de terugblik van Maria Vlasiov op vijf jaar voorzitterschap. [Poster: vertaling Clara Stegehuis, bewerkt door Yuexu Celine Chen en Joost Gabriels, ontwerp Jana Kleinberg, projectcoördinatie Maria Vlasiov.]

Notities uit een ver verleden

Na meer dan twee jaar was ik er eindelijk opnieuw aan toe: een conferentie. Nee, niet zo een flauw afkooksel via zoom, maar the real stuff. Ik pakte mijn koffer, kuste mijn gezin vaarwel, griste nog snel een mondkapje uit de kast, en vertrok richting het Zwarte Woud voor de Workshop on Interactions between Algebraic Geometry and Noncommutative Algebra in Oberwolfach.

Het Mathematische Forschungsinstitut Oberwolfach is een wonderbaarlijke plaats. Afgelegen in de bossen, maar toch merkwaardig dichtbij. Een rustige plek vol activiteit met een komen en gaan van wiskundigen van allerlei pluimage. Je loopt er niet enkel oude collega's tegen het lijf met wie je kan discussiëren over de laatste ontwikkelingen uit je eigen vakgebied, maar door het ingenieuze servettensysteem kom je bij elke maaltijd terecht aan een andere tafel en leer je zo ook snel de nieuwe gezichten kennen.

Over de vele jaren heeft het instituut heel wat wiskunde zien passeren. De abstracts van alle lezingen worden bijgehouden in een boek waarin iedere spreker een handgeschreven bijdrage levert. Tegenwoordig worden deze abstracts ook allemaal ingescand en kan je ze vrij raadplegen op de website. Op die manier krijg je een inkijk in wat er zoal gaande was in de wiskundige gemeenschap door de jaren heen en welke dingen vaak opnieuw terugkeren.

In deze editie van Nieuw Archief brengen we ter nagedachtenis van het overlijden van T.A. Springer in 2011 een Engelse vertaling

van zijn memoires. Springers erfenis is nog steeds levendig, zo bleek ook op deze workshop, want een van de bijdragen was getiteld 'Soergel and Springer Motives and Correspondences'. Daarin bracht Jens Eberhardt een moderne versie van Springers originele constructie van representaties van Weyl-groepen. Naarmate ik de lezing verder probeerde te volgen en langzaam de weg kwijtraakte in de abstracte wereld van motieven en afgeleide categorieën, dwaalden mijn gedachten af naar Springer zelf en de vraag of er hier in Oberwolfach nog sporen te vinden zouden zijn van zijn oorspronkelijke werk. Na de lezing ging ik op pad en het duurde niet lang of mijn speurwerk leverde resultaat op. Tussen de oude abstracts van een conferentie over algebraïsche groepen uit 1976 vond ik er één van Springer waarin hij zijn originele resultaat presenteerde, nog voor de officiële publicatie.

Toen ik in Nederland arriveerde was Springer al een paar jaar overleden, dus ik heb hem nooit persoonlijk gekend, maar toen ik zijn handgeschreven abstract in de vergeelde pagina's van dat boek las, kwam hij alvast in mijn gedachten nog even tot leven. ☘

Raf Bocklandt, hoofdredacteur

Korteweg-de Vries Instituut, Universiteit van Amsterdam

Agenda

| Upcoming Events

juni 2022

2 juni – 25 juli 2022

IMAGINARY

Reizende tentoonstelling over zichtbare en onzichtbare wiskunde. Georganiseerd door PWN in samenwerking met Nederlandse universiteiten en ondersteund door partnerorganisaties.

plaats Oude universiteitsbibliotheek, Leiden

info imaginarymaths.nl

7 juni 2022

Operations Research for Sustainable Development

Seminar van het Landelijk Netwerk Mathematische Besliskunde en het Nederlands Genootschap voor Besliskunde.

plaats Conferentiecentrum De Werelt, Lunteren

info vvsor.nl

8 juni 2022

Queueing Colloquium – speciale editie

Speciale editie van het queueing colloquium, ter ere van de 60ste verjaardag van Ivo Adan en Jacques Resing (TU/e).

plaats Eurandom, Eindhoven

info eurandom.nl

9–10 juni 2022

Workshop on AI and Mathematics – Connecting the Mathematics Clusters

Workshop van de vier clusters met als doel de rol van wiskunde binnen machine learning te belichten.

plaats CWI, Amsterdam

info cwi.nl

10 juni 2022

Onderwijs meets onderzoek

Het thema van de vierde editie van dit symposium is De toekomst van het statistiekonderwijs.

plaats Domstad, Utrecht

info nvww.nl

13–17 juni 2022

Beyond Abstract Measures: Geometry and Computation

Lorentz workshop, mede georganiseerd door Marc van Kreveld (UU) en Rodrigo Silveira (UPC).

plaats Lorentz Center@Oort, Leiden

info lorentzcenter.nl

18 juni 2022

Symposium Aïda Paalman-de Miranda

Ter nagedachtenis van Ietje Paalman. Sprekers zijn onder anderen Margriet van der Heijden (auteur biografie), Ronald Venetiaan (oud-president Suriname) en Robbert Dijkgraaf (minister OCW).

plaats Universiteit van Amsterdam

info kdvi.uva.nl

20–21 juni 2022

NDNS+ Workshop Twente

Tweedaagse workshop van het cluster NDNS+ (Nonlinear Dynamics of Natural Systems).

plaats Universiteit Twente

info utwente.nl

22 juni 2022

Grote Rekendag

Dag voor alle basisscholen in Nederland en Vlaanderen (groep 1 t/m 8) die helemaal in het teken staat van rekenen. Het thema is dit jaar 'Bouwavonturen'.

plaats basisscholen Nederland en Vlaanderen

info groterekendag.nl

30 juni – 1 juli 2022

40e Panama-conferentie

Jubileumeditie van de Panama-conferentie met als thema '40x Panama: verleden, heden en toekomst'.

plaats Zeist

info panamaconferentie.sites.uu.nl

30 juni – 1 juli 2022

Separating Integer Points in Polyhedra: Theory and Applications

Workshop die onderzoekers van verschillende disciplines met expertise in aspecten van integral polyhedra samenbrengt.

plaats Eurandom, Eindhoven

info eurandom.nl

juli 2022

4–8 juli 2022

Coherent Structures: Current Developments and Future Challenges

Lorentz workshop, mede georganiseerd door Martina Chirilus-Bruckner en Hermen Jan Hupkes (UL).

plaats online en Lorentz Center@Oort, Leiden

info lorentzcenter.nl

Suggesties voor deze agenda zijn welkom.

Redacteur: Nikki Levering

agenda@nieuwarchief.nl

6–14 juli 2022

ICM 2022

Het vierjaarlijkse International Congress of Mathematicians, dat oorspronkelijk zou worden gehouden in St. Petersburg, wordt dit jaar een virtueel evenement.

plaats online

info icm2022.org

9–16 juli 2022

International Mathematical Olympiad (IMO)

Internationale wiskundecompetitie voor middelbare scholieren, dit jaar in Noorwegen.

plaats Oslo, Noorwegen

info imo2022.org

11–15 juli 2022

Advanced Optimization for Social Choice

Lorentz workshop, mede georganiseerd door Ronald de Haan (UvA).

plaats Lorentz Center@Snellius, Leiden

info lorentzcenter.nl

11–15 juli 2022

Disorder's Role in Glass Formation and Deformation

Lorentz workshop, mede georganiseerd door Peter Schall en Edan Lerner (UvA).

plaats Lorentz Center@Oort, Leiden

info lorentzcenter.nl

18–22 juli 2022

Multidimensional Continued Fractions and Euclidean Dynamics

Lorentz workshop, mede georganiseerd door Evgeny Verbitsky (UL).

plaats Lorentz Center@Snellius, Leiden

info lorentzcenter.nl

augustus 2022

1–7 augustus 2022

International Mathematics Competition for University Students

Internationale wiskundewedstrijd voor studenten.

plaats Blagoevgrad, Bulgarije

info imc-math.org.uk

8–12 augustus 2022

Stability and Fluctuations in Complex Ecological Systems

Lorentz workshop, mede georganiseerd door Peter de Ruiter (WUR) en Eric Forgoston (MSU).

plaats Lorentz Center@Oort, Leiden

info lorentzcenter.nl

15–19 augustus 2022

Symplectic Dynamics Beyond Periodic Orbits 2022

Lorentz workshop, mede georganiseerd door Federica Pasquotto (UL).

plaats Lorentz Center@Oort, Leiden

info lorentzcenter.nl

16–19 augustus 2022

Symposium Bifurcations and Instabilities in Fluid Dynamics

9de editie van dit internationale symposium, met sprekers Karin Jacobs (Saarland), Andrew Hazel (Manchester) en Henk Dijkstra (UU).

plaats Universiteit Groningen

info bifd2022.org

22–30 augustus 2022

RandNET Workshop on Random Graphs

RandNET Zomerschool en Workshop over Random Graphs, waarin in groepsverband aan open problemen gewerkt wordt.

plaats Technische Universiteit Eindhoven

info randnet.upc.edu

26–27 augustus 2022 en 2–3 september 2022

Vakantiecursus 2022

Vakantiecursus van PWN voor leraren, studenten en voor andere belangstellenden. Dit jaar is het thema 'Willekeur en structuur in netwerken', met als Hoofddocente Nelly Litvak (UT).

plaats CWI Amsterdam en AG Eindhoven

info platformwiskunde.nl/vakantiecursus

september 2022

4–24 september 2022

IMAGINARY

Reizende tentoonstelling over zichtbare en onzichtbare wiskunde. Georganiseerd door PWN in samenwerking met Nederlandse universiteiten en ondersteund door partnerorganisaties.

plaats Huygensgebouw, Nijmegen

info imaginarymaths.nl

5–9 september 2022

YES: Optimal Transport, Statistics, Machine Learning and Moving in Between

Met lezingen van experts uit verschillende vakgebieden, en een workshop met presentaties over statistiek en optimaal transport.

plaats Eurandom, Eindhoven

info eurandom.nl

12–14 september 2022

Stochastic Models in Life Sciences

Conferentie over de ontwikkelingen in stochastische modellen voor biologische processen.

plaats Eurandom, Eindhoven

info eurandom.nl

16 september 2022

Finale Nederlandse Wiskunde Olympiade

Nationale finale van de wiskundeolympiade voor middelbare scholieren.

plaats Technische Universiteit Eindhoven

info wiskundeolympiade.nl

26–30 september 2022

Bridging the Gap: from Brain Mechanics to Brain Dynamics

Lorentz workshop, mede georganiseerd door Daniele Avitabile en Christian Bick (VU).

plaats Lorentz Center@Oort, Leiden

info lorentzcenter.nl

oktober 2022

1 oktober 2022

NVvW Geschiedenis-symposium

Symposium van de werkgroep Geschiedenis van de NVvW, met dit jaar als thema 'Machtige verhalen'.

plaats Museum Boerhaave, Leiden

info nvvw.nl

1–21 oktober 2022

IMAGINARY

Reizende tentoonstelling over zichtbare en onzichtbare wiskunde. Georganiseerd door PWN in samenwerking met Nederlandse universiteiten en ondersteund door partnerorganisaties.

plaats Utrecht

info imaginarymaths.nl

Nieuws

| News

Deze rubriek is een kroniek van wiskundige activiteiten in Nederland. Toekomstige activiteiten worden aangekondigd en van voorbije activiteiten wordt verslag gedaan. Wilt u uw aankondiging of verslag in deze rubriek geplaatst zien? Stuur ons dan uw bijdrage, zo mogelijk met illustratie. De redactie behoudt zich het recht voor berichten te weigeren of in te korten.

Redacteur: Nikki Levering
 nieuws@nieuwarchief.nl

Abelprijs voor Dennis Sullivan, Wolfprijs voor George Lusztig

De ontvangers van de Abelprijs 2022 en Wolfprijs 2022, de twee belangrijkste wiskundeprijzen na de Fieldsmedaille, zijn bekend. De Noorse Academie voor Literatuur en Wetenschappen heeft de Abelprijs toegekend aan de Amerikaan Dennis Parnell Sullivan (Stony Brook University, Graduate School and University Center of the City University of New York). Hij ontvangt de prijs voor zijn baanbrekend werk op het gebied van topologie en dynamische systemen. De Wolf Foundation kent de Wolfprijs toe aan de Roemeense-Amerikaan George Lusztig (MIT). De prijs is een erkenning voor zijn vele bijdragen aan de representatietheorie en gerelateerde vakgebieden.

Dennis Parnell Sullivan is geboren in Michigan, maar verhuisde op jonge leeftijd naar Texas. Hier begon hij aan een studie scheikunde aan de Rice University, maar stapte al snel over op wiskunde. Na zijn afstuderen werkte hij als PhD-student aan Princeton University aan de classificatie van manifolds. In zijn proefschrift ontwikkelde hij technieken en verschaftte hij inzichten die het vakgebied revolutioneerden. Een jaar later schreef hij een artikel over een vermoeden in de geometrische topologie, *die Hauptvermutung*, die hem in 1971 de Oswald Veblen-prijs voor geometrie van de AMS opleverde. In die tijd schreef hij ook een verzameling niet-gepubliceerde notities, die wijd circuleerden en van grote betekenis waren voor de classificatie van manifolds en de problemen die in de algebraïsche topologie centraal staan. Deze notities werden in 2006 alsnog gepubliceerd, en staan wereldwijd bekend als de *MIT Notes*. Een andere belangrijke bijdrage was zijn nieuwe kijk op *rational homotopy theory*, een deelgebied van de algebraïsche topologie, waar hij multivariabele calculus inzette die berekeningen erg vereenvoudigden. Verder heeft hij meerdere belangrijke stellingen in de dynamische systemen bewezen, en is hij een van de grondleggers van de *string topology*.

George Lusztig ontdekte zijn wiskundetalent toen hij Roemenië vertegenwoordigde op twee opeenvolgende Internationale Wiskunde Olympiades, en beide keren zilver won. Na een studie wiskunde aan de Universiteit van Boekarest deed hij — net als Sullivan — een PhD aan Princeton University. Beiden delen ook een promotor, in de persoon van William Browder. Lusztig bestudeerde objecten die gerelateerd zijn aan algebraïsche groepen, zoals Hecke-algebra's en p -adische groepen, en is een van de grondleggers van moderne representatietheorie. Hij ontwikkelde fundamentele nieuwe concepten, zoals Deligne–Lusztig-variëteiten en Kazhdan–Lusztig-polynomen. Zijn bijdragen aan de theorie van quantumgroepen heeft de studie naar representatietheorie en laag-dimensionale topologie een enorme stap vooruit geholpen.

abelprize.no, wolffund.org.il

Foto: abelprize.no / John Griffin, Stony Brook University



Dennis Sullivan



George Lusztig

Foto: wolffund.org.il

PS George D. Smith-prijs voor master TU/e

INFORMS, de belangrijkste organisatie voor professionals in de operations research en data analytics, heeft de UPS George D. Smith-prijs 2022 uitgereikt aan de masteropleiding Industrial and Applied Mathematics (IAM) van de faculteit Mathematics and Computer Science, Technische Universiteit Eindhoven. Deze prestigieuze prijs is een erkenning voor de hoge kwaliteit van de master, die studenten opleidt tot experts in de besliskunde. Het speciale masterprogramma bestaat al meer dan twintig jaar, en is een van de weinige wiskundige opleidingen in Nederland die focust op toegepaste wiskunde. De omgeving is daar dan ook uitermate geschikt voor, met het unieke ecosysteem van high-tech bedrijven in de Brainport regio in Eindhoven. Voor studenten begint de samenwerking met bedrijven al in het eerste semester van de master, en loopt vaak door tot na het afstuderen.

De INFORMS-prijs is vernoemd naar de toenmalige UPS Chief Executive Officer George D. Smith, en in leven geroepen om de connectie tussen het bedrijfsleven en het hoger onderwijs te versterken. De prijs wordt toegekend aan een faculteit of opleiding die op een effectieve en innovatieve manier studenten voorbereidt op het toepassen van operations research en data analytics. Een belangrijk pluspunt van de aanvraag van IAM was de goede nationale samenwerking tussen opleidingen, met name via Mastermath. De prijs is in die zin dan ook een breder compliment naar alle masteropleidingen betrokken bij Mastermath.

tue.nl



Anke Simons (IAM-alumna) en Maria Vlasίου (TU/e) hebben de prijs in ontvangst genomen

Nieuwe fase 'Docentvluchteling voor de Klas'

Met het project 'Docentvluchteling voor de Klas' (DVDK) worden vluchtelingen die in het land van herkomst al wiskundeleraar waren goed geïntroduceerd in het Nederlandse onderwijs. Met de welkom-docent-app gaan zij aan de slag met de Nederlandse taal, krijgen ze informatie over het wiskundeonderwijs in Nederland en worden ze aan een vakmaatje gekoppeld. Het project, een samenwerking van NVvW en VluchtelingenWerk Nederland, is nu een nieuwe fase ingegaan, waarbij de eerste vijftien vluchtelingen zijn begonnen met een nascholingscursus bij de Hogeschool Utrecht. Deze cursus focust op didactiek, pedagogiek en de taal en cultuur op Nederlandse scholen. De verwachting is dat met deze scholing 15% van het tekort aan wiskundeleraars in 2026 opgelost kan zijn. Eenmaal werkzaam in het Nederlandse onderwijs, zijn de vluchtelingen niet meer afhankelijk van een uitkering.

nvvw.nl

Eremetaal BxMO en EGMO

Op de Benelux Wiskunde Olympiade (BxMO) hebben de scholieren Casper Madlener en Lars Pos ieder een gouden medaille behaald. Met hun knappe scores werden zij respectievelijk tweede en derde. De eerste plaats was voor de Belgische deelnemster Zhichang Chen, die alle opgaven foutloos wist te maken. Naast tweemaal goud behaalde het Nederlandse team ook vijf zilveren medailles (Mads Kok, Lance Bakker, Daan de Groot, Kees den Tex, Felix Hamoen) en drie bronzen medailles (Wouter Zandsteeg, Tobias Kristiansen en Yanniek Nitescu).

Een paar weken voor de BxMO vond de European Girls' Mathematical Olympiad (EGMO) plaats in Eger, Hongarije. De pas 16-jarige Allie Zong wist na het brons van vorig jaar, ditmaal, met een score van 22 punten, een zilveren medaille te behalen. Het team bestond verder uit Lieke van Dam, Katya Nikitchenko en Wietske de Vos. Katya Nikitchenko verdiende een eervolle vermelding voor het foutloos oplossen van een van de opgaven. *wiskundeolympiade.nl*

Koninklijke Onderscheiding Willem van Ravenstein

Willem van Ravenstein heeft in april een Koninklijke Onderscheiding ontvangen met benoeming tot Ridder in de Orde van Oranje-Nassau. Deze eer valt de oud-wiskundeleraar ten deel voor zijn inzet op het gebied van het online wiskundeonderwijs. Zo richtte hij ruim twintig jaar geleden de website WisFaq.nl op, een digitale vraagbaak voor allerlei wiskundige onderwerpen. De database bestaat momenteel uit meer dan 40.000 beantwoorde vragen, en een groot deel van de antwoorden zijn door Willem van Ravenstein zelf gegeven. Later zette hij nog twee andere websites voor het wiskundeonderwijs op: *wiswijzer.nl* en *wiskundeleraar.nl*. Docenten en studenten van middelbare scholen kunnen deze websites gebruiken voor het aanleren van wiskunde. *wisfaq.nl*

Svetlana Dubinkina nieuwe voorzitter EWM-NL

Svetlana Dubinkina, assistant professor aan de Vrije Universiteit Amsterdam, is de nieuwe voorzitter van European Women in Mathematics – The Netherlands (EWM-NL). Deze organisatie is in 2013 in het leven geroepen, en verenigt alle vrouwen die wiskunde beoefenen in Nederland. De vereniging is erg actief, met de organisatie van verschillende landelijke activiteiten, het verlenen van beurzen en de inzet van een mentornetwerk ter ondersteuning van jonge vrouwelijke wiskundigen. *vu.nl*

Klaas Landsman KHMW-lid

Professor Klaas Landsman (Radboud Universiteit Nijmegen) is dit jaar gekozen als een van de tweeëntwintig nieuwe leden van de Koninklijke Hollandse Maatschappij der Wetenschappen (KHMW). Leden van de KHMW zijn vooraanstaande wetenschappers uit alle disciplines. De KHMW heeft als doel de wetenschap te bevorderen en een brug te slaan tussen samenleving en wetenschap. Die brug slaan is Klaas Landsman niet vreemd, gezien hij populairwetenschappelijke boeken zoals *Requiem voor Newton* en *Naar alle ONwaarschijnlijkheid* op zijn naam heeft. Verder was hij betrokken bij de invoering van wiskunde A, B, C en D op middelbare scholen, en werd hij eerder benoemd tot lid van de KNAW. *khw.nl, knaw.nl*

VVSOR: nieuw erelid en Van Zwet Award

Tijdens de jaarlijkse bijeenkomst van de Nederlandse Vereniging voor de Statistiek en Operations Research (VVSOR) heeft Jacqueline Meulman, emeritus hoogleraar toegepaste statistiek aan de Universiteit Leiden, het erelidmaatschap ontvangen. Haar benoeming tot erelid heeft zij onder andere te danken aan haar omvangrijke bijdragen aan de niet-lineaire multivariate analyse en omliggende vakgebieden. Daarnaast heeft ze jarenlang een belangrijke rol in de vereniging gespeeld, met name als voorzitter (2011–2017). In deze rol heeft ze veel werk verzet in het verjongen van de vereniging. Zo opende zij het aparte onderdeel ‘Young Statisticians’, waardoor ook promovendi en jonge professionals bij de vereniging aansloten. Met het erelidmaatschap is Jacqueline Meulman het elfde erelid van de vereniging.

Bij de jaarlijkse bijeenkomst van VVSOR was er meer goed nieuws voor Jacqueline Meulman. Rianne de Heide, die haar promotietraject voltooide onder begeleiding van Jacqueline Meulman, Peter Grünwald en Wouter Koolen, heeft de Willem R. van Zwet Award voor haar proefschrift ontvangen. In dit proefschrift, getiteld *Bayesian Learning: Challenges, Limitations and Pragmatics*, ligt de focus op veelgebruikte Bayesiaanse methoden om te leren van data, en de limitaties die deze methoden hebben. Daarnaast wordt er een nieuwe theorie voor hypothesetesten geïntroduceerd, die ‘e-waarden’ gebruikt in plaats van p -waarden. vvsor.nl



Jacqueline Meulman



Rianne de Heide

Florida verbiedt 54 wiskundeboeken

De Amerikaanse staat Florida heeft 42 schoolboeken voor wiskunde verboden omdat ze elementen van sociaal emotioneel leren of kritische rassentheorie zouden bevatten. Florida heeft een nieuwe wet, die juli dit jaar in zal gaan, die de huidige educatie over seksuele oriëntatie, identiteit en emotionele vaardigheden limiteert. Veel Amerikaanse schoolboeken zijn momenteel echter zo geschreven dat de plaatjes en verhalen moeten bijdragen aan het sociaal- en zelfbewustzijn van de scholieren. Volgens de non-profitorganisatie die dit idee ontwikkelde bevestigt onderzoek dat sociaal emotioneel leren de academische vaardigheden versterkt, omdat het de focus van scholieren langer kan vasthouden. Volgens gouverneur Ron DeSantis zou wiskunde echter alleen over het oplossen van wiskundige vraagstukken moeten gaan, en niet over de gevoelens die scholieren bij het vraagstuk hebben. Er is heel weinig informatie vrijgegeven over de specifieke inhoud waarop de 42 boeken zijn afgewezen. Nog eens 12 schoolboeken werden afgewezen omdat ze op andere manieren niet aan de academische standaarden van Florida zouden voldoen. nytimes.com

Hoogleraar twijfelt aan tweede plaats Columbia University

Michael Thaddeus, hoogleraar aan Columbia University, twijfelt aan de eerlijkheid van de data die de universiteit aanlevert voor de bepaling van de universitaire ranglijst van U.S. News & World Report. Volgens zijn analyse zou de aangeleverde data inaccuraat en misleidend zijn. Zo vindt hij het opmerkelijk dat Columbia nu tweede staat, terwijl het in 1988 nog op de achttiende plaats stond. Hij twijfelt er niet aan dat Columbia sommige aspecten verbeterd heeft, maar zag dat sommige statistieken niet overeenkwamen met zijn eigen observaties. Data van andere bronnen liet ook grote verschillen met de cijfers van de ranking zien, bijvoorbeeld betreffende de klasgrootte, de hoogte van educatieve uitgaven en de diploma's van de hoogleraren. Als reactie heeft Columbia aangegeven achter de aangeleverde data te staan, welke volgens hen aan de richtlijnen voldoet. Ze geven wel toe dat deze niet geheel eenduidig zijn. Met zijn bevindingen wakkert Thaddeus niet alleen twijfels aan over de ranking van Columbia, maar over het gebruik van universitaire ranglijsten in het algemeen. nytimes.com

Nederlandse winnaars RangL challenge

Het Alan Turing Institute heeft met RangL een platform gecreëerd dat als nieuw model zou moeten dienen voor samenwerking tussen de academische wereld en het bedrijfsleven. Het platform bevat datagedreven challenges die met klassieke en machine learning-technieken opgelost kunnen worden. Begin dit jaar kwam de ‘Pathways to Net Zero’-challenge online, waar deelnemers reinforcement learning-technieken moesten gebruiken om de optimale strategie tot een klimaatneutraal 2050 te vinden. Onder de drie winnende teams bevonden zich maar liefst twee teams van Nederlandse universiteiten: de VU (Sandjai Bhulai, Jasper van Doorn, Erica van der Sar, Alessandro Zocca) en de TU Delft (Aleksander Czechowski, Jinke He). [vu.nl, fransoliehoek.net](http://vu.nl/fransoliehoek.net)

Koninklijk Wiskundig Genootschap

□ NMC 2022

Op 18 en 19 april vonden de NMC Scientific Days plaats, met onder andere de Beegerlezing van Shafi Goldwasser (MIT) en de uitreiking van de N.G. de Bruijnprize aan Joris van der Hoeven (CNRS) voor zijn werk (samen met David Harvey) aan algoritmen voor matrixvermenigvuldiging.

□ Algemene ledenvergadering

De jaarlijkse algemene ledenvergadering van het KWG vond dit jaar plaats tijdens het NMC 2022 op 19 april. Jop Briët (CWI) en Mathisca de Gunst (VU) zijn toegetreden tot het bestuur. Marie-Colette van Lieshout en Jan Wiegerinck zijn afgetreden als bestuurslid. Het KWG is sinds 1 januari btw-plichtig. De gratis lidmaatschappen van 1 jaar voor afgestudeerden worden niet meer automatisch verlengd. Er worden junior bestuursleden geworven die nieuwe KWG-activiteiten gaan organiseren om het lidmaatschap aantrekkelijker te maken voor jongeren.

Recent verschenen:

□ **Epsilon Uitgaven** (www.epsilon-uitgaven.nl)

Wiskunde bij de les, Rob van Oord, € 20, 2022.

Maria Vlasiou

President of EWM-NL 2017–2022
m.vlasiou@tue.nl



News EWM-NL

Looking back: the past five years of EWM-NL

EWM-NL is the national association of women working in the field of mathematics in The Netherlands, established in 2013. In this article, Maria Vlasiou, the president of the past five years, gives an overview of what EWM-NL has achieved under her leadership.

Mid November 2021, I was asked by one of the editors of this journal, Nicos Starreveld, to write a short article giving a brief overview of the activities of EWM-NL for 2021, a summary of the discussions during the annual meeting of EWM-NL, which had just taken place, and a glimpse to our plans. I readily accepted, as this offered a very efficient method to reach out to the wider mathematics community in the Netherlands, beyond what we achieve through our members, representatives, events and social media. Of course, citing the usual reason of academicians of workload, I postponed the task to just a few months down the road, when I expected to be at relative leisure. (I am sure that the reader will not be surprised to learn that my grossly overestimated the probability of existence of said leisure...) This delay though played a crucial role in writing this article: since accepting this task, a member answered our call to fill the position of the president of EWM-NL. By the publication of this article, Dr. Svetlana Dubinkina will have assumed this role. Thus, rather than summarising our latest annual meeting, what I wish to offer you below is a brief overview of what EWM-NL has achieved in the past five years under my leadership.

What's in a name?

EWM The Netherlands (EWM-NL) is a platform for all female professional mathematicians working in the Netherlands. It is supported and financed by Platform Wiskunde Nederland (PWN) and the Dutch Research Council (NWO). The association was established in 2013 by Valentijn Karemaker and KaYin Leung, who chose to link the name of the Dutch association to that of EWM. EWM, the European Women in Mathematics association, is one of the oldest in Europe, having been founded in 1986. While I do not know the actual reasons for this choice, I do find it an excellent one. In the Netherlands, a good part of women in mathematics are not Dutch nationals. I feel that the name of EWM-NL reflects in some part our international identity, links us to the wider European community of women mathematicians, and is more recognisable and less awkward than e.g. 'Women in mathematics in the Netherlands' or similar choices. Having said that, I have spent a good part of the past five years saying to colleagues "It's EWM-NL. EWM is an independent association."

Setting up EWM-NL to its current form

Early in my tenure with EWM-NL, I saw quite some variation in the understanding of what the association actually is

and wishes to do. Quite a few mathematicians were unaware of its existence. Some thought it was a social group targeted to PhD students in mathematics. Others said explicitly that this is the national association of women in mathematics and has the role to support their interests as needed. Clearly, this role was not a well-defined or widely recognised one.

To clear up these conflicting views, the board of 2017, consisting of Francesca Arici, Anna Kruseman, Brigit Sollie, Sanne Willems and myself, decided to work first towards establishing the association in the national academic landscape. To fulfil this, we worked in three directions: first, we wrote down our mission and vision and established means of communicating with members (an email, website, newsletter, and social media). Second, we initiated a dialogue with all mathematicians in the country. We did so by visiting all departments of mathematics in the Netherlands in order to present our agenda and vision and discuss with all mathematicians what priorities we should establish and what points they believe should be addressed. Third, we initiated a dialogue with national organisations and structures in the country. This led to discussions with NWO on diversity in NWO programmes and national institutions, with PWN on the role of the platform in supporting women in mathematics in the country, and with the Royal Dutch Mathematical Society (KWG) on a

wider representation of women mathematicians in the events organised and publications issued within the country.

Activities of EWM-NL

The association is broadly focusing on support, networking, outreach, cooperation, and accountability. We provide direct support to women mathematicians, e.g., through our mentoring programme, grants scheme, or small-scale workshops, but also indirect support, which is typically through identifying, discussing, and proposing amendments to structures that may be particularly unfavourable to women. Through our meetings, we create networking opportunities for like-minded mathematicians. In terms of outreach, we focus on the visibility of women in mathematics, we are a reliable source of dissemination of information in the wider mathematical community, and we encourage future aspiring mathematicians. We cooperate closely with organisations within the Netherlands, but also extensively with other national associations, the European Women in Mathematics, and the Committee for Women in Mathematics of the International Mathematical Union. This has been manifested through participation on national events and global projects, collaboration on joint projects, think-tanks, and joint event organisation. Accountability, always hand-in-hand with cooperation, is typically expressed by monitoring the participation of women mathematicians in national events and gently reminding stakeholders that broader diversity benefits us all. In 2017, in connection to an interview I was about to give for an Australian newspaper, I contacted NWO for information for the data of women in mathematics in the Netherlands throughout the years. NWO did

all they could to assist me, but unfortunately this information was not systematically recorded. After discussions with PWN, KWG and NWO, EWM-NL was tasked with collecting and maintaining this information. I am happy that in the past five years, we have enjoyed both a significant progress in the number of women in mathematics and an almost universal support from universities in keeping track of this information.

EWM-NL aims to organise events throughout the country, even if that sometimes means that the travel is longer than what a central location would allow. We believe in reaching out to all our members. We combine events mainly focused on practical advice (such as the workshops), with networking events (such as the annual meetings), and focused events (e.g. our monthly meetings for the Wikipedia project or the NMC sessions focusing on young careers). Naturally, we pay special attention to purely mathematics, and the International Day of Mathematics is a great opportunity to do so.

At its core, EWM-NL strives to support its members. This has taken us to unexpected places, as the EWM-NL members approached us with creative ideas that are close to their hearts or are simply of interest. Through our grant scheme, we supported the participation of a volunteer to summer mathematics camps in Kitale. We initiated and coordinated the Wikipedia project (a project to add, extend, and translate pages of — mostly — women mathematicians) and the poster on women in mathematics based on the vision of two (board) members. Most of our workshops have been on topics directly requested from our members. The topics were rather diverse: negotiation and conflict resolution, work-

life balance, assertiveness, persuasion and influencing, but also media training and a workshop specifically for Masters students who wish for a better understanding of what a PhD entails and what a career in industry looks like. After extensive work on gathering and documenting best practices, we have provided recommendations on diversity and tenure-track contracts to NWO, universities, departments, and PWN as a direct response from problems brought to our attention by our members. It is impossible for me to know if our action was a driver in the progress we have noticed in the last few years on this topic. I would like to think however, that even if not a driver, it may have helped plant a seed or reinforce the message of many.

Looking back

It is my belief or wishful thinking that EWM-NL has become a widely recognised association both domestically and internationally. We grew from about 100 registered accounts to our newsletter at the end of 2017 to approximately 300 at the end of 2021. While this may be nice, it is my sincere hope that we have been (and continue to be) a useful association. Our primary mission is to support our members, after all. It is perhaps fair to say that the value of an association is strongly correlated to the engagement of its members. In this respect, EWM-NL flourishes. The number of volunteers that have helped the association grow, men and women, is in my view humbling. For the past five years, including two years of unusual circumstances, we have had a continuous stream of colleagues willing to help out, support our message, organise events, approach us with an idea, and help us connect to their newest colleagues. EWM-NL is by now well established in the country, is in continuous communication with its members, and provides a forum where both the problems and the projects of our members can be served.

I have experienced a supportive atmosphere almost uniformly throughout the Netherlands. While I do not claim that I do not see points of improvement, my typical experience has been that our colleagues are willing to listen and help when being made aware of our views and suggestions. In my view, having an active enthusiastic community in the core of mathematics contributes positively to the wider mathematical community, and EWM-NL fulfils this role. ☺



Clara Stegehuis

Faculteit EWI
Universiteit Twente
c.steghuis@utwente.nl

Cor Kraaikamp

Delft Institute of Applied Mathematics
TU Delft
c.kraaikamp@tudelft.nl

Interview Nataša Jonoska

Understanding biology from a mathematical perspective

Nataša Jonoska is a Distinguished Professor of mathematics, at the University of South Florida. She works on discrete models of bimolecular processes and biological computations, where she uses her background in symbolic dynamics to solve computational problems with molecules. This year, she was invited as plenary speaker at the Dutch Mathematical Congress (NMC). On that occasion Clara Stegehuis and Cor Kraaikamp talked with her about her research, and her journey toward doing interdisciplinary science.

When did you first become interested in mathematics?

"I never really knew myself that I wanted to be a mathematician. Still, my mother remembers that my first grade teacher told her that she was certain that I was going to become a mathematician. Mathematics was always easy for me, but I was bad at Latin and Greek. Because of this, I went to a high school that focused on mathematics instead of the gymnasium schools where you also had to study ancient languages. In this school, our mathematics courses were even taught by university professors, so they really exposed me to the field of mathematics."

And how did you decide to study mathematics?

"When I first came to the university, I came there with one of my friends, and we decided that we would like to choose the same major. When we had to hand in the paperwork stating our main field of study, we ran into a discussion. I wanted to become an architect, but my friend was not interested in that. So in the end we decided together to

study mathematics, as that was something that we both knew through our high school education. Of course, looking back at this now, it was a very foolish way to determine my major field of study, but fortunately this rather random choice suited me well."



Nataša Jonoska

What questions do you like to solve in your research?

"The main questions that I am interested in are: how do molecules form? And how do they exchange information? For example, DNA molecules can exchange information by how they do or do not fit together. This formation of molecules can also help us in solving mathematical problems.

For example, we solved a three-coloring problem using DNA-based molecules. Basically, the DNA-molecule represents a graph in three-dimensional space. There are three types of molecules that can represent vertices: one molecule for each possible vertex color. From a computer science point of view, these different types of molecules try all possible colorings. We ensure that two similar colors will bind, whereas two different colors will form a bubble. We then use an enzyme that destroys all the bonds, so that only the different colors remain. If a target molecule of the size of the original graph then forms, that means that the graph is three-colorable. We experimentally showed on a specific example that this target molecule can indeed form and prove the three-colorability of the example graph. Showing that this target molecule forms is still not trivial. We cannot observe it directly, as these molecules are too small to observe. Therefore to show that the target molecule was built, we needed ideas from topological graph theory. Once the mol-



Foto's Cor Kraaikamp

ecules are built, there is a molecule that traverses all the edges of the graph. This is similar to an Eulerian tour, except that edges may be traversed twice. So when you fetch that molecule, and show that it contains all of the edges of your original graph, you have a proof of the three-colorability of the graph.”

How did you get from being trained as a pure mathematician to doing real experiments with molecules?

“I was trained as a pure mathematician in symbolic dynamics. During my tenure track years, I was fascinated by a new paper that appeared in *Science* on using molecular biology to compute NP hard problems on graphs with DNA molecules. This paper focused on the Hamiltonian path problem. I then asked a colleague if they could explain the biology behind this, and we quickly decided that we could together also perform similar experiments for the road coloring problem. Unfortunately, this did not lead to our desired conclusion at that time, as the road coloring problem appeared to be much more difficult.

Still, this subject stayed in the back of my mind. Then I attended a conference talk by Nadrian Seeman, about a *Nature* paper by him reporting on forming a cube out of DNA. The fact that molecules could form an actual three-dimensional graph structure was fascinating to me. I then decided that I would like to work on these types of problems as well.”

How did you teach yourself the biological background that you needed for this?

“It was a very steep learning curve. I spent a year in Ned’s lab on a sabbatical to learn

more about biology. He was very structural in his education on how to conduct experiments, and I followed this training as well. He assigned one of his PhD students to me, to make sure that I would not mess up any of the equipment.

After I made my first experimental design, he told me that I should first assemble the molecule myself by hand, using molecular building blocks. I spent a lot of time on building this molecule. When I finally showed it to him, he said ‘This molecule hates itself’, and quickly changed some of the building blocks to improve it. This made me realize how difficult it is to make a good sequence design, and how much I needed to learn. But after all of this, the improved molecule led to an experiment in which we represented a 3D graph by molecules. The paper we wrote was very well accepted, so then this learning curve paid off.”

How could you convince your collaborators that mathematics can be useful to them?

“My first collaboration in this topic was with Ned. He was always open to all kinds of new ideas, so when I would approach him with some idea, he always encouraged me to investigate it. After our first collaboration, we collaborated for twenty more years. He recently passed away, and this is why I will also dedicate my talk at the NMC to him. But this first collaboration showed that the combination of mathematics and biology can be useful.

I think that I now understand biology from a mathematical perspective. I can use this approach for a careful and modular design of experiments. Biologists often collect large amounts of data, and would

like to extract information from that. Still, if you want to know why or how something happened, you need to collect your data very carefully, otherwise this large amount of data still cannot give you the answer you are looking for. So in fact we often help to redesign the experiments, to obtain the right data that we need to answer these important questions.”

What do you like most about your work?

“I really like learning new, fascinating science. There are always things that I had never thought of, and often my PhD students show me results that I had never imagined before. Recently, I started working on transcript RNA for example. As it turns out, it is still unclear what are all the types of interactions between DNA and transcript RNA during transcription, but we do know that they are extremely important. These interactions can for example help in double strand breaks of DNA repair. This is really a miracle: it would be similar to a mailman who also fixes all holes in the streets that they pass while delivering your mail.

I also enjoy going to conferences. They can give you creative, new research ideas. The very fact that I am now in this field of research is because I happened to attend a talk at a conference by Ned Seeman.”

And what do you like least?

“I do not like applying for grants and funding. You spend a lot of time writing a proposal, and when it is not funded, this time was essentially wasted. Fortunately, I recently got some grants, which buys me some time until I have to apply for new ones.”

T.A. Springer

Mathematisch Instituut
Universiteit Utrecht

History Memories of T.A. Springer as a mid 20th century young mathematician

Back in the days

Shortly before his death about ten years ago, T.A. Springer (1926–2011) started writing down his memories. This is their first public appearance, in an English translation, accompanied by memories of his daughter Emmalien, as well as the (Dutch) text of a scene from one of Jan Beuving's shows about his encounter with Springer.

It is now about seventy years ago that I began to take a serious interest in mathematics and conceived the plan to continue in this field. But my plans for the future were hazy; I had no idea how far I could get. Looking back in 2011, I am a little surprised at my development, from a boy out of the Dutch lower bourgeoisie to a professional in mathematics. Via a somewhat winding road I ended up in international mathematics. It seems to me not uninteresting to follow that road a bit.

This is not a coherent autobiographical story. It is my intention to give an impression of the beginnings of my mathematical development and of the influence and help of others from which I have been able to benefit. Here and there, adding to the story, there are some personal or work-related digressions.

Family

My father Pieter Springer (1893–1955) was born in Delft, but his family came from Leiden. According to my father, the origin of the family name lies there: Springer means jumper in Dutch. In the time of the siege

of Leiden in 1573 by the Spanish troops of Philips II, a 'Springer' was a Leiden citizen who managed to pass the Spanish lines by jumping over ditches with a pole, and that nickname has become a family name. I don't have documentation for this provenance of the name. But some facts support

it: I could trace Leiden ancestors to 1689 and the surname Springer is still relatively common in Leiden.

My ancestors were simple people. About my grandfather Willem Frederik Springer (1859–1933) I only know that he was a cigar maker in Delft and that he later owned a grocery store in The Hague, in the Transvaal neighborhood. He married my grandmother Mathilda Henrica van Zwanenburg (1861–1927) in 1892. She was a widow who already had six children (two of whom had

T.A. (Tonny Albert) Springer (Scheveningen, 13 February 1926 – Zeist, 7 December 2011) studied mathematics in Leiden with Kloosterman, finishing *cum laude* with a PhD on symplectic transformations. He worked in Nancy and Leiden, before joining the Utrecht mathematical institute in 1955 as lector and from 1957 until his retirement in 1991 as full professor of 'algebra and analysis'. He supervised seventeen PhD students. In 1964, he was elected a member of the Netherlands Royal Academy and in 1983, he was awarded the Shell Prize. He was a speaker at the International Congress of Mathematicians in Stockholm (contributed) and Madrid (invited). For several years, he was an editor of *Inventiones Mathematicae*. In Nancy, Springer proved his eponymous theorem on quadratic forms. He was one of the founders of the theory of algebraic groups. With Steinberg, he worked on conjugacy classes of semi-simple algebraic groups. He is famous for his discovery of the action of the Weyl group as monodromy groups of certain fibrations associated to algebraic groups, now called 'Springer fibrations'. With Borel, he worked on rationality questions for algebraic groups. He also worked on Lusztig's theory of character sheaves, complex reflection groups, Hecke algebras and compactifications of symmetric spaces. He wrote very influential textbooks on linear algebraic groups, invariant theory, and Jordan algebras.

died). My father was the second child and the eldest son of my grandparents. They had eight children (two died early).

After elementary school my father had to go work, further education was out of the question. To get ahead, he reported at the age of sixteen to Schoonhoven to be trained as a non-commissioned officer in the Mounted Artillery. Towards the end of the mobilization period of 1914–1918 (the period of World War I) he was stationed in The Hague. There he met my mother, Emma Lina van Drumpt (1892–1946). She was born in the Betuwe municipality of Kesteren. Her father Teunis van Drumpt (1865–1944) was a carpenter and contractor there. He married Aaltje Aalbers (1859–1950). They had four children, and my mother was the second child. According to my father, my grandfather was well off at first, but later he fell on hard times. During the 1930s crisis, the grandparents lived in poor conditions in Wageningen, with an unemployed son. My grandfather died during the evacuation of Wageningen in 1944, after the airborne landings near Arnhem.

My mother was a good student at school. The teacher felt that she should continue her studies to become a teacher. But my grandfather disagreed and thought his daughter should find a job. So that is what happened. When she met my father, she worked as a live-in maid for a family in Scheveningen.

My parents married in 1917 and went to live in Scheveningen. They had two children. Their first child Willem Frederik was born in November 1918, in a period of important events: the end of the World War I and the height of the Spanish flu in the Netherlands (a younger brother of my father died of it). I was the second child Tonny Albert (named after my mother), born in Scheveningen on February 13, 1926.

Childhood

I seem to have been an easy child. Because my brother was much older and went his own way, I was left to my own devices at home, which didn't trouble me. I believe I was able to read early on, with the help of a teacher (Ms. Cor Langereis) who was our tenant. In my school days I became a fervent reader. First I went to school in The Hague. But in 1934 my father (by then a sergeant at the Mounted Artillery) was transferred to Ede. There I went through



T. A. Springer

the upper levels of elementary school. From 1937 I was at secondary school. In 1939 we went back to The Hague.

The HBS

My father made sure that his sons received the secondary school education at the HBS that he himself had missed. The HBS (Higher Civil School), introduced in 1863, was a school type that existed for about a hundred years. Originally it was intended that there, students from the upper middle class attained a level of general knowledge as required for jobs in trade and industry. Later, the HBS became a popular type of school. It also proved to be a good preparation for a study in the exact sciences; prominent Dutch scholars of the early 20th century started at the HBS. The most important subjects in the curriculum were the exact subjects: mathematics, physics, chemistry; and modern languages: French, German, English and of course Dutch. The education was solid. Making the material enjoyable was not a goal.

In the first two years of my HBS period I was at the Wagenings Lyceum. After we moved to The Hague in 1939, I attended the Second Municipal Lyceum at the Stokroosplein. In 1942 I did my final exams there. (Shortly afterwards the school building and its surroundings were razed to the ground by order of German military authorities). I did not have much trouble with the examination material. Physics and chem-

istry fascinated me the most, more than mathematics. Drawing and 'state house-keeping' (= economics) were my worst subjects. The language lessons also bore fruit: I was still a fervent reader and I could indulge in foreign literature, which had become accessible through education. Later, too, I benefited greatly from the knowledge of languages that was taught to me at the HBS.

Via school I was also introduced to another part of culture: music. For secondary school students in The Hague, concerts were given by the Residentie-orkest, accompanied by explanations by the conductor. Through those concerts I became fascinated by music and that has remained so. I myself have never played an instrument, I am just a listener. ('Music' to me is 'classical' music, taken in a broad sense. I have never been interested in pop music and the like.) After I left school I listened to many concerts in The Hague. Regular musical life more or less continued until the last year of the war. After the end of the war there was a lot going on. Many famous conductors performed in The Hague (or Scheveningen) around 1950 (Ansermet, van Beinum, Furtwängler, Kubelik, Monteux, Walter). In later years this did not happen anymore. Although my concert attendance has declined over the years, I have benefited for many years, together with my wife, from the vigor of the Utrecht and Amsterdam music scene. In the 21st century, this unfortunately stalled.

Society

At the beginning of my school years social and political developments passed me by, secure as I was in the peace and quiet of a family. The crisis of the 1930s brought salary cuts for civil servants like my father, but no forced resignations. My parents had to be frugal but they were used to that.

In contrast to the situation of many Dutch contemporaries, religion did not play a major role for my parents. The 'verzuiling' (pillarization of religion in Dutch society), noticeable everywhere at that time, was not to their liking. I noticed it sometimes, with family and acquaintances, or when Catholic neighbor boys in Ede let me know that they were only allowed to play soccer with Catholic boys.

In Ede I also became aware of the social stratification of the Netherlands, when a classmate (son of an officer) told me that

he really shouldn't play with a non-commissioned officer's son. Because I was such a smart student the contact was still permissible. Such expressions of social discrimination were not uncommon in those days. Later on, until the 1950s, I still encountered them in the university world, in remarks made by regents and by representatives of student fraternities. (After the cultural revolution of the years after 1968 this no longer happened; by then everyone had become progressive.) Such statements irritated me. However, I kept my irritations to myself. But I did get a critical (or perhaps even cynical) view of Dutch academic morals and habits. Later I have always distanced myself from the circles of University regents and student fraternities. The few times that I did find myself amongst them I felt out of place.

Back to school. The most far-reaching event in my school years was the German invasion of the Netherlands in 1940, the beginning of the war period 1940–1945. During those years I started to study mathematics. But before I talk about that, it should be noted that in that period, especially the later years, the woes of war always loomed in the background. Incidentally, my family got through those years reasonably well.

Mathematics

In my school years there was not much evidence of a special talent for mathematics. My highest grades were for physics and chemistry (9 or 10 on a scale of 10). For math it was never more than 8 (the teacher, a former officer, did not go higher). At the beginning of the last school year, I thought about studying chemistry at the Technical College in Delft. My interest, however, shifted to physics and astronomy and eventually to mathematics. But the mathematics education was boring. It came down to training for the final exam. I did try to learn a little more about mathematics, from popular science books I found in the library, but it didn't make me much wiser.

Snooping around the book market in The Hague (where there was a lot of everything) however, I found a 19th century French book with mathematical exercises: Frenet's *Recueil d'exercices sur le calcul infinitésimal*. Some of the exercises I could understand and even solve, but most of it was mysterious. If I am not mistaken, at the same time I came across a formula that

greatly intrigued:

$$1 + \frac{1}{4} + \frac{1}{9} + \frac{1}{16} + \dots = \frac{\pi^2}{6}.$$

I began to suspect that there were interesting things to be found in mathematics and I wanted to know more about it. A study at a university did not seem possible. After consultation with my parents I decided to look for an office job and in addition to that, to start studying for a mathematical degree in teaching. I ended up with a job at the central government of PTT (Post Telegraph Telephone) in the Hague, as a non-tenured deputy commissioner.

KI and KV

I studied for non-university exams KI and KV to obtain the authority to teach mathematics at the HBS. They were held once a year in The Hague, with a written and an oral part. The material covered a large part of the material from the first years of a university mathematics study.

One prepared for the exams by self-study, or by following lessons with a 'trainer'. I did the latter. For the first KI exam I ended up with a teacher who showed me the ropes (Ms. C. Gerritsen, in early 1945 she was killed in the bombing of the The Hague Bezuidenhout district). An important subject was 'steltkunde', i.e., algebra. The subject matter was old-fashioned. It included, in addition to algebraic matters such as linear equations, some analysis, such as convergence criteria for infinite series. The most difficult subject was uniform convergence of series of functions. I had difficulty with it. I had even more difficulty with the subject of descriptive geometry. For that one had to make complicated drawings on the written exam. Because of my poor drawing skills this was a failure. Nevertheless I passed the KI exam in the fall of 1943, by the skin of my teeth.

For the second KV exam I took lessons from a well-known trainer in The Hague, Dr. M. Scheffer. I benefited greatly from his lessons. (He also taught me the principles of complex function theory). With the exam KV I had no trouble, not even with the descriptive geometry. I took it in December 1945; and by then I was already studying in Leiden.

KI and KV (continued)

For the benefit of those studying for the KI and KV exams, there arose, between 1900

and 1950, a small subculture. This involved textbooks (for example a series by the publisher Noordhoff) and a magazine (the *Nieuw Tijdschrift voor Wiskunde*).

Actively involved in all this was Pieter Wijdenes (1872–1972). Starting as a teacher he became a leading man in Dutch mathematics education, who published many textbooks, of various levels. He also provided training for the K-exams. I used his book *Middle Algebra* (1933) for the algebra part of the KI exam. It is a preparation for the more difficult *Higher Algebra*. For that, reference is made to the *Lessons on Higher Algebra* (from 1926) by Prof. Schuh, an adaptation of a book with the same title by R. Lobatto from 1845 (!). Fred. Schuh (1872–1966) was professor of mathematics at the Technical College in Delft for many years and his scientific output is not large, but he produced many textbooks which, although exact and precise, are mainly dry as dust. They have not stood the test of time. Still worthwhile though, is a more lighthearted book of his on mathematical games, published in English as *The Master Book of Mathematical Recreations* (Dover, 1968). Schuh provided radio commentaries, and partly because of that he was perhaps the most prominent Dutch mathematician in the 1920s and 1930s. The profound L.E.J. Brouwer was relatively unknown then. I only came across his name for the first time in February 1943 in an encyclopaedia article about D. Hilbert, which I consulted when his death was reported in the newspaper.

Mathematics in Leiden

In my civil service days I had saved some money. It became the basis for a study of mathematics at Leiden University, which I started in the fall of 1945. I continued to live in The Hague with my parents. In Leiden a new world opened up for me. I knew the larger part of the University mathematics material for the first few years, but that material was built into a bigger whole and the teaching was not aimed at exam training.

The very first lecture I attended immediately made a lasting impression. It was a (non-compulsory) lecture by H.D. Kloosterman about the number theory of quadratic forms. It began with elementary material that I knew from the KI exam, but presented in a superior fashion. Later he discussed the classical theory of binary quadratic forms.

The first academic exam (the candidacy exam) had two main subjects (for a mathematics student usually mathematics and physics) and an minor (usually astronomy). I wanted to pass the candidacy exam quickly, but there was a problem with a physics major: it required a two-year lab practicum to be taken. I therefore decided to take astronomy as my second major (and physics as a minor subject). I then succeeded in passing the exam in the summer of 1946.

My brief contact with astronomy has taught me a lot of respect for Leiden astronomy. I believe I even thought of switching to astronomy. But I stayed with mathematics: I noticed that I comprehended things more easily there. Also the side of astronomy involving instruments did not appeal to me.

The academic year 1945–1946 was largely filled with studying astronomy and physics. I must have worked hard, but that was a relief after the bureaucratic job of the previous years. There was still time left to become acquainted with the foreign mathematical literature. It was accessible at the ‘Bosscha reading room’, housed in the Institute for Theoretical Physics, in a corner of the Kamerlingh Onnes Laboratory. The reading room had come into existence at the initiative of the Leiden theoretical physicist Paul Ehrenfest (1880–1933), who, following the example of the university in Göttingen, had set up a mathematical-physical library annex reading room, financially supported by the Dutch-Indian planter K.A.R. Bosscha (son of a Dutch physicist). Ehrenfest’s successor, Kramers, kept the reading room going. After his death in 1951, the library was split.

I benefited greatly from the Leiden library facilities. I spent many hours in the reading room with books that I had discovered in the library. In that first year I rummaged through the library, mostly on my own, and became superficially acquainted with all kinds of subjects. Kloosterman’s lecture led me to peek at books on number theory, where I found intriguing subjects (prime number theory, Riemann’s conjecture...). I then (and a bit later on as well) also tried to learn a bit more about the work of ‘classical’ mathematicians, through their own publications. That’s how I learned a thing or two from Gauss’s *Disquisitiones Arithmeticae*. But other classical work, such as that of Riemann, was still out of reach for me.

Assistant in Delft

In the fall of 1946, I had to start looking for work or additional income. A fellow student told me that there were vacant assistant positions at the mathematics department of the Delft Technical College. I applied and was hired.

Around the same time I began to visit the monthly meetings of the Dutch association of mathematicians (the Wiskundig Genootschap whose motto is ‘An untiring labor surpasses all’). At the time such a meeting took place in the Amsterdam hotel Krasnapolsky; and the major part was a scientific lecture. The first time I went there was a lecture by the young Delft professor N.G. de Bruijn about zeroes of polynomials. That first time, it must have been in January 1947, I witnessed the famous Brouwer. I distinctly remember our meeting. Before the beginning of that meeting I kept myself in the background, hardly knowing anyone of the attendants. At a certain moment an older gentlemen entered the room, including a tall person having a striking appearance. “That must be Brouwer”, I thought and I was correct. To my surprise, he approached me, introduced himself and had a friendly chat with me.

In the meantime, I was an assistant at Delft. The assistants were assigned to one of the professors, and in my case, to my surprise, this was de Bruijn, whom I had seen for the first time shortly before at the Society. An assistant taught practicals for the subject descriptive geometry (which has since disappeared from the curriculum) and in addition did little jobs for his supervisor. This brought me into closer contact with de Bruijn. He is one of the most prominent Dutch mathematicians from the second half of the 20th century. Born in The Hague in 1918, where he also attended the HBS, he took the KI and KV exams as a self-taught person and went to study in Leiden in 1936. He came under the influence of H.D. Kloosterman and obtained his doctorate in 1943, on a subject related to Kloosterman’s interests. When I became his assistant he had left this field.

Contact with such an original mathematician was a new experience for me. So far I had been merely receptive in mathematics. That you yourself could invent (or, if you will) find mathematics was new to me. In our conversations about mathematics, I came to be impressed by de Bruijn’s knowl-

edge and insight. But I also noticed that we approached mathematics differently. De Bruijn tackles problems of all kinds with original ideas. I am interested in problems coming from the mathematical tradition and in the tools from the new mathematical technology with which they are tackled. An illustration: when de Bruijn once saw me reading in H. Weyl’s articles from the 1920s on representations of Lie groups, he asked me if I needed those things for something. I had no answer to that. I had come across those articles via some roundabout route and they intrigued me and incidentally, it took a long time before I grasped the content fully. In our conversations de Bruijn told me what he was working on. It turned out that we could answer a question that he had posed in his lecture to the Mathematical Society. That led to a joint publication (my first) [2]. Somewhat to my surprise; my contribution was only a small one I thought. De Bruijn had conjectured that its main result (an inequality for zeroes of polynomials) is a special case of a more general inequality. That conjecture has strangely lain unproven lurking for years in our article, and it was not proven until 2005, see [7].

My Delft assistantship was not of long duration. In the fall of 1947 I became an assistant of mathematics in Leiden. My contacts with de Bruijn did not end completely, but they did become fewer. Later we went our separate ways and there were minor collisions at crossroads sometimes. In our old age our relationship has become friendly again.

Assistant in Leiden

From September 1947 to October 1951 I was an assistant in Leiden. In those years my teaching task was to assist with H.D. Kloosterman’s lecture on the infinitesimal calculus, by means of a practical problem solving class, and to assist with written examinations. Mathematicians did not have workrooms at the university. But if necessary (for appointments with students, for example) I could go somewhere in the Institute for Theoretical Physics, where Kloosterman also gave his elementary lectures. In this way I got to know the theoretical physicists of Leiden at the time: the professor H.A. Kramers, the curator J. Korringa and the assistant P.H.E. Meijer. This led to pleasant and (for me) instructive contacts. But of course I was most in-

volved with the mathematicians in Leiden and with Kloosterman in the first place.

About H.D. Kloosterman

Born in 1900 he did his final exams at the HBS in The Hague and in 1918 he went to study mathematics in Leiden. If I am not mistaken, he had already taken the KI and KV exams during his HBS period. Ehrenfest made it possible for him to continue his studies abroad in 1922, after his doctoral examination. First in Copenhagen with H. Bohr and then in Oxford with G.H. Hardy.

Kloosterman's 1924 dissertation deals with an old problem from number theory: The splitting of an integer into a sum of squares of integer numbers. He tackles it with the, at that time brand new, analytic method of Hardy and Littlewood. A few years later he found a refinement of that method, introducing what are now called 'Kloosterman sums', ingredients of modern analytic number theory.

Kloosterman spent a number of years in Germany. In 1930 he returned to Leiden as a lecturer. In 1947 he became a professor there. Kloosterman was aware of what was happening in international mathematics, including outside his own field. In the 1930s he thus discussed many 'modern' subjects in (non-compulsory) lectures in Leiden. Kloosterman's activities at that time did not contribute to a modernization of the somewhat ossified University mathematics education, then firmly in the hands of an older generation. The same goes for the Amsterdam activities of another 'modern' mathematician at that time, H. Freudenthal.

Kloosterman's main teaching task was teaching analysis in the first two years for students of mathematics and physics. His teaching, in content and presentation, was at a high level. He took great care with it. I have sometimes wondered whether

Kloosterman's teaching activities were not at the expense of his scientific production. During the forced closure of Leiden University during World War II, he (in his own words) found time to write a long article, which was published in 1946 [4]. He spoke about that work at the International Congress of Mathematicians of 1950 in Cambridge Mass. (as the only Dutch 'invited speaker'). In the academic treadmill, he would probably not have found an opportunity for long-term work.

During my four years as an assistant in Leiden I had a lot of contact with Kloosterman, primarily related to a calculus problem session for first-year students. At the beginning he took it in hand himself, later more was left to me. I learned from him how to deal with students: in a friendly way, not overbearing or belittling, but with some distance. Through many conversations I got to know Kloosterman better. It did not come to really confidential conversations; Kloosterman was a closed person and the same applied to me. But I learned a lot from what he had to say about mathematics and mathematicians. His statements often had an ironic undertone. Perhaps there was melancholy behind the irony, or a personal problem maybe...

First years in Leiden

During the assistantship I could also prepare myself for the final doctoral examination. That didn't take much effort. Early 1949 I took the exam. Meanwhile I began to take an interest in group theory. I had already taken some things from van der Waerden's *Modern Algebra*. In Kloosterman's seminar on topological groups (on the basis of Pontryagin's *Topological Groups*) other aspects of group theory were discussed. I tried to understand something of Kloosterman's 1946 article. In this article he tackles a difficult algebraic problem

(description of irreducible characters of the finite groups $SL_2(\mathbb{Z}/p^n\mathbb{Z})$), with analytical tools. His analytical prowess somewhat overwhelmed me. But the algebraic problem was intriguing; it stimulated my interest in the character theory of finite groups.

At that time in the Netherlands, one was not very aware of what was going on in international mathematics. Every now and then something trickled through. From Kloosterman I heard about the optimal estimation of Kloosterman's sums, a consequence of the Riemann conjecture for function fields, proven by A. Weil (1906–1998) in 1939. The details did not appear until 1948, as applications of Weil's 1946 book *Foundations of Algebraic Geometry*. When I looked into the book I was impressed by the introduction and I thought "I have to read that book". It turned out not to be an easy read, I did not quite get through it, but my interest in algebraic geometry was awakened.

In 1948, for the first time I attended a lecture by a leading foreign mathematician in Leiden, namely the topologist Heinz Hopf (1894–1971). I was impressed by his lecture. He dealt with an elementary algebraic problem: understanding (not necessarily associative) fields over the real numbers. Hopf proved with tools from algebraic topology that the dimension of such an algebra is a power of 2. Those tools were foreign to me, but it was intriguing that here geometry (topology) was enlisted to help tackling an algebraic problem. Many years later it was proved with more subtle algebraic topology that only the powers 1, 2, 4, 8 are to be considered. To my knowledge, an algebraic proof of this last result is still not available.

When I was dealing with quadratic forms in the 1950s, I remembered Hopf's lecture, and I saw a way to deal algebraically with the case of commutative (non-associative) fields over the real numbers. There, only dimensions 1 and 2 come into play; Hopf had already shown this via topology. Later I had some dealings with the interplay between algebra and geometry, which I encountered in Hopf's lecture for the first time.

To the PhD

Although I had no clear plans for the future it was clear to me I had to produce a thesis in order to obtain the doctoral degree. It was obvious that Kloosterman would be

Special Issue of *Indagationes Mathematicae* in memory of T.A. Springer

Indagationes Mathematicae, the scientific journal of the Royal Dutch Mathematical Society, has published a three-volume special issue in memory of T.A. Springer (edited by Gunther Cornelissen and Eric Opdam), containing the first (open access) English translation of his PhD thesis *On Symplectic Transformations*, <https://doi.org/10.1016/j.indag.2021.12.003>, as well as contributions by Bao, Bayer-Fluckiger, Brion, Carnovale, Ciubotaru, Cohen, Digne, Eberhardt, Esposito, Fenn, Fiebig, Gaitsgory, Garibaldi, Gille, Gross, Guralnick, Gurevich, He, Hoffmann, Howe, Jibladze, Juteau, Kac, Kato, Kazhdan, Knop, Lecouvey, Lusztig, Michel, Neher, Panyushev, Procesi, Rozenblyum, Serre, Solleveld, Sommers, Sorlin, Stokman, Stroppel, Taylor, Varshavsky, Yun, Ziegler, and van der Kallen.

the supervisor. He did not prescribe a PhD topic, but let me do my own thing. This is how it had been for his own doctorate as well. Kloosterman's analytical work on the character theory of the finite matrix group $SL_2(\mathbb{Z}/p^n\mathbb{Z})$, led me to ask whether one could also approach that case algebraically. That led me to search the literature for what was known about irreducible characters of this kind of groups and turned out not to be very much. G. Frobenius (1849–1917), the father of character theory, had determined the irreducible characters of the groups $PSL_2(\mathbb{Z}/p\mathbb{Z})$ (p a prime) and of the symmetric groups. I. Schur (1875–1941) had treated the groups $GL_2(F)$ (F a finite field).

Could one do something for other finite classical groups such as $GL_n(F)$, $SL_n(F)$ or the finite orthogonal and symplectic groups? The name 'classical groups' had been introduced by H. Weyl (1885–1955), in the title of his book *Classical Groups* (from 1946). I knew that book, but found it rather difficult. However, it was clear to me that it offers views on technically subtle parts of mathematics, e.g. representation theory and invariant theory. Over the years, I have had much to gain from Weyl's book and also from other publications of his. I admire the way he approaches mathematics.

Useful to me was a, for that time, modern elementary introduction to the classical groups by J. Dieudonné (1906–1992), in his booklet *Sur les groupes classiques* (1948). At first I tried, following Schur, to find the irreducible characters of other linear groups, with $GL_3(F)$ and $GL_4(F)$ as the first to be considered. I succeeded in doing so in 1950. It seemed a suitable topic for a dissertation. But a little later I came across an article by Robert Steinberg which showed that he had already dealt with these groups in 1948, in his dissertation at the University of Toronto, with R. Brauer (1901–1977) as supervisor. I then tried to tackle another classical group: the symplectic group $Sp_4(F)$ (F a finite field with characteristic $\neq 2$). That did not succeed entirely. But an explicit description of the characters of a finite group requires knowledge of its conjugacy classes. For the group $Sp_4(F)$ these were already described by Dickson in 1901. I was able to extend Dickson's work to the case of $Sp_{2n}(F)$, with F an arbitrary field of characteristic $\neq 2$. This did not seem to have been done in that generality and it became

the subject of my dissertation. I wrote it in the summer of 1951; the defence took place in October. The thesis was a short paper: about 35 pages. In later years it became customary at Dutch universities for doctoral students in mathematics to produce thick dissertations. In my opinion, the obesity of dissertations is a symptom of pomposity of supervisors. A dissertation is a first test of scientific competence. I don't see that 150 pages are necessary when it can be done in 30. It only costs the poor PhD student extra time and money.

There was something special going on with my doctorate. The Leiden Faculty of Mathematics and Physics had long ago put 'cum laude' on hold, allegedly because the famous H.A. Lorentz had not received 'cum laude' at his promotion. In 1951 it was taken out of the refrigerator: I seemed to be the first to receive it again. I myself felt that my dissertation did not deserve such an award. I was aware that it had little depth. I see now that I was a bit clumsy with my doctoral dissertation. The first thing is: I wrote the dissertation in Dutch, English would have been more efficient. I did intend to translate it. But during my stay in France after the PhD I did not get around to it. And after returning to the Netherlands I did not get around to it either.

A second awkwardness was that the conjugacy classes of other classical groups (orthogonal, unitary) had been left out. It would not have taken much trouble and space to say something about that too. Eventually an English exposé of my approach appeared in 'seminar notes' by Steinberg and myself in 1970 [10]. Therein the conjugacy classes were considered in the context of the theory of linear algebraic groups. But in 1951, that theory had not yet taken off.

Nancy

Kloosterman advised me to spend some time abroad after the doctorate and suggested a stay in France, at the Université de Nancy, to which Dieudonné was attached. This was made possible by a scholarship for the academic year 1951–1952 from the French CNRS (Centre National de Recherches Scientifiques).

I left for Nancy at the beginning of November 1951 and I acclimatized quite quickly. I found out that a lot was going on in the 1951–1952 academic year in mathematics. The most prominent professors

were Jean Dieudonné and Laurent Schwartz (1915–2002). Dieudonné was someone with enormous work power, who at that time did a lot of work as 'secretary' of the mythical Nicolas Bourbaki, for example in the publication of new Bourbaki volumes (of which there were quite a few in the pipeline at the time). Recently, he had produced a initial text for a future Bourbaki volume on class field theory (which has still not appeared...) I was lucky that he lectured on this subject in 1951–1952. It gave me a background in algebraic number theory. At that time, the cohomological approach was not quite there yet, but the idèles of Chevalley and Weil were already playing a role. Dieudonné was an accessible person. Every week, at a fixed time, he had a chat with me, where I could come with questions and where he told me the latest news. Laurent Schwartz was a distinguished analyst. He had been awarded the Fields Medal for his work on distributions. He lectured on it in 1951–1952 and I followed his lectures with interest. Incidentally, in 1952 Dieudonné and Schwartz both left Nancy, for respectively the USA, and Paris.

Prominent foreign mathematicians such as C.L. Siegel and H. Whitney paid a short visit to Nancy and gave a lecture (in French). Several young mathematicians, like myself, spent some time in Nancy, from outside France there were, among others, Heinz Bauer (Germany), Paul Cohn (England), Heinz Jacobinski (Sweden), Paulo Ribenboim (Brazil). Then there were young Frenchmen (later prominent figures) who worked with Schwartz: Jacques-Louis Lions, Bernard Malgrange, Paul Malliavin. And of course there was Alexander Grothendieck, already a class act at that time. He was then working on his dissertation. I came into closer contact with several of them, mostly with Cohn and Jacobinski, and less with the French.

In the meantime I found out a few things about what the French mathematicians were working on. I heard about Leray's work in algebraic topology, for example his spectral sequences. And I learned that Serre and Grothendieck were considered the best of their generation. This kind of information did not penetrate into the Netherlands. I tried to find out more about several things. In Nancy the theory of topological vector spaces was in the air, because of its importance for distri-

butions. But that theory did not appeal to me. I studied Chevalley's recently published book on algebraic groups, and that book did not suit me. It would be superseded in 1957 by Borel's work. In retrospect, I would have been better off occupying myself with editing my dissertation.

During my stay in Nancy I published one small article, in the Parisian *Comptes Rendus*, in which I answered a question of E. Witt (in an article on quadratic forms from 1936). The answer is sometimes called 'Springer's theorem'. A few years later I learned from an article by Witt that this name is actually not sound: the answer was already given in the 1930s by E. Artin (but not published), see [13]. An example of the well-known phenomenon that naming in mathematics is quite often careless.

Back to the Netherlands

I had vague plans, after the stay in France, to look around a bit further abroad, for instance in the United States. But before I could do so, I received an offer via Kloosterman of a job at the mathematics department in Leiden and I accepted. There was a real danger of failure if I stayed abroad: in Nancy I had noticed that my knowledge and insight were lacking. It seemed to me better not to try to penetrate into the higher regions of mathematics, but to continue as an amateur provincial.

So in the autumn of 1952 I was admitted to the mathematics staff of Leiden University, as a scientific officer 1st class. That staff was only small: three professors J. Droste (analysis), J. Haantjes (geometry), Kloosterman (analysis and number theory) and a few temporary assistants. I was entrusted with part of the teaching of the first two years, which had previously been done by the professors, and a new course in 'abstract' algebra. That was a considerable teaching task, but I did not find it difficult. I enjoyed teaching interested students. I also learned from it: to explain something clearly you mustn't avoid details, but you must also keep a clear distinction between main issues and side issues. I never became a brilliant teacher.

Quadratic forms

In these days in Leiden I ended up in the theory of quadratic forms. If my memory serves me correctly this happened by reading M. Eichler's book *Quadratische Formen und orthogonale Gruppen*, which had just



Tonny and Tijnje Springer in 1953

Photo: family photo album

appeared. I produced a couple of articles on the subject. One of them is about quadratic forms over a p -adic field L (with $p \neq 2$). Such a quadratic form is a polynomial $F(x_1, \dots, x_n) = \alpha_1 x_1^2 + \dots + \alpha_n x_n^2$. I was interested in the case of anisotropic forms F , where for $\xi_1, \dots, \xi_n$ it holds that $F(\xi_1, \dots, \xi_n) \neq 0$ if not all ξ_i are zero. Guided by the analogy with definite quadratic forms over the real numbers, I could analyze this case. This leads to a description of the Witt group of L , see [5].

Another aspect of quadratic form theory with which I was concerned was what is now called Galois cohomology of orthogonal groups. Let L be any field (characteristic $\neq 2$), F a quadratic form over L . To F belongs an orthogonal group G , the group of linear transformations of variables with coefficients in an algebraic closure of L , which leave F invariant. Now Galois cohomology says that the isomorphism classes of n -dimensional quadratic forms over F are classified by a set $H^1(F, G)$ (which is defined for any algebraic group G over F). In my Leiden time I had found a result that is more or less equivalent to this. My starting point was an old result by Fueter from 1919 which says (in modern language) that $H^1(F, GL_n)$ is trivial (a noncommutative version of 'Hilbert 90'). I considered my result formal and not very interesting and did not publish it until a few years later. It was in 1962 at Princeton where I was attending a seminar by Borel on Galois cohomology when I realized that those formalities were worthwhile after all.

To Utrecht

In the summer of 1955 I was offered the position of 'lector' (lecturer) at Utrecht University. The lector rank was abolished in

1980. It was something like an 'assistant professorship'. A lector taught but had no administrative obligations. I accepted the offer and started in Utrecht in the fall of 1955. I thus somewhat offended the Leiden mathematicians, in particular Kloosterman. For in Leiden there was also a lectureship on the horizon and Leiden had and has a higher status than Utrecht with some people in the Netherlands. Maybe the reason I preferred Utrecht — my memory is a bit diffuse — is because the future looked less sluggish in Utrecht than it did in Leiden. In Utrecht Freudenthal was an active member of the older generation and from my generation one had van der Blij and van Est, whose interests were close to mine. But what happened in the future could not be foreseen. Indeed van der Blij and I worked together for a while. However, van Est left already in 1956 to Leiden, as successor of the geometry professor J. Haantjes, who had died unexpectedly.

Freudenthal

In 1955, at the Utrecht Mathematical Institute, Hans Freudenthal (1905–1990) was the dominant figure. Born in the vicinity of Berlin, Freudenthal studied at Berlin University in the 1920s, where he received his doctorate in mathematics in 1930, with Heinz Hopf as his first supervisor. He was educated by several (then and later) luminaries. He had become well versed in the modern mathematics of the time. At the invitation of L.E.J. Brouwer, he came to Amsterdam University, as an assistant in mathematics. There he developed great activity, resulting among other things in mathematical publications of a high level. He was one of the most prominent young topologists of the 1930s. In 1946 he was appointed professor at Utrecht University, where he set to work with great energy.

I have known Freudenthal in Utrecht for many years and I usually got along well with him. But we did not have intensive contacts. However, I did become interested in subjects that were in the air in Utrecht because Freudenthal was working on them: octaves (Cayley algebras) and the geometry of exceptional Lie groups. I was not yet familiar with Lie groups but Freudenthal's work also dealt with algebraic issues that I had some insight into. Hence the algebra of the octaves (on which I worked with van der Blij) and of the exceptional Jordan algebras (for which I found a new approach).

I have always remained interested in these matters, as evidenced by a booklet of much later date [11]. Freudenthal always kept his interest in mathematics, as well as his good mathematical taste. But in my later years in Utrecht his activities lay mainly in the, unfamiliar to me, world of mathematics education. I gradually began to find myself in modern parts of mathematics that Freudenthal did not deal with.

First years in Utrecht

Teaching first- and second year students in Utrecht was the domain of Freudenthal and van der Blij. My teaching task in Utrecht was in the later years of study, with subjects from algebra and analysis. More or less fixed lecture topics became Galois theory, complex function theory and Riemann surfaces. In addition, every now and then a special subject. I remember a rather advanced lecture in 1960–1961 on algebraic geometry, for an audience that partly consisted of staff members.

In the meantime, I had continued to dabble around. It became clear to me that knowledge of algebraic groups was necessary for a better understanding of the topics I had been working on. A first observation was that in the problem of my dissertation, over a finite ground field, good use could be made of a result of Serge Lang, which he had needed for other purposes, see [6]. It also became clear to me that I needed to become familiar with the work of Armand Borel (1923–2003) on linear algebraic groups from 1957, completed by Claude Chevalley (1909–1984) (their work could be found in the exposés of [3]). I also tried to get somewhat up to speed on what else was going on in mathematics. Very useful was an interuniversity colloquium (the ‘Sheaves Colloquium’) set up by N. H. Kuiper.

N. H. Kuiper

Nico Kuiper (1920–1994) studied mathematics at Leiden University from 1937–1941. In 1946 he received his PhD there on a subject from classical differential geometry, with W. van der Woude. During 1947–1949 he was assistant of O. Veblen at the Institute for Advanced Study (Princeton, NJ). In 1950 he was appointed professor of mathematics at the Agricultural College in Wageningen and in 1961 as professor at the University of Amsterdam. From 1971–1985 he was director of the Institut

What are Springer fibers?

To study 2×2 -matrices up to conjugation, one can look at their trace and determinant. This gives a map

$$\mathrm{gl}_2 \rightarrow \mathbb{C}^2 : M \mapsto (\mathrm{Tr} M, \det M)$$

for which the fibers can be written as

$$F_{(b,c)} := \left\{ \begin{bmatrix} \frac{b}{2} + X & -Y \\ Z & \frac{b}{2} - X \end{bmatrix} : X^2 - YZ = \frac{b^2}{4} - c \right\}.$$

This is a smooth quadric when $b^2 - 4c \neq 0$. In that case all matrices in the fiber have the same two different eigenvalues and hence they are conjugate. If $b^2 - 4c = 0$ the fiber is a cone whose singularity correspond to a scalar matrix, while the rest are nondiagonalizable matrices.

The singularity of a cone $C = \{(x, y, z) \mid x^2 - yz = 0\}$ can be resolved by looking at pairs of a point and a line on the cone on which it lies:

$$f : \tilde{C} = \{(p, L) \mid p \in C, L \subset C \text{ and } p \in L\} \rightarrow C.$$

For every point outside the origin there is a unique such line through p , so apart from the origin this map is one-to-one. Through the origin there is a line on C for every point at infinity, so the fiber is the projective conic $\{(X : Y : Z) \mid X^2 - YZ = 0\}$, which is a $\mathbb{P}^1$.

A more conceptual approach uses the notion of a Borel subalgebra. This is a subalgebra $\mathfrak{b} \subset \mathrm{gl}_2$ that is conjugate to the upper triangular matrices. Every matrix can be brought in upper triangular form, so the map

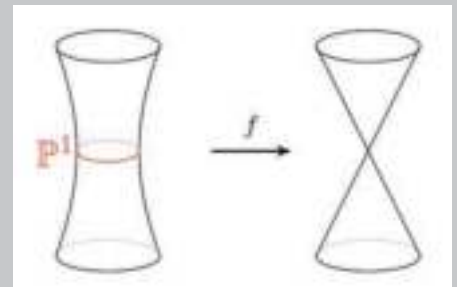
$$\psi : \widetilde{\mathrm{gl}_2} := \{(M, \mathfrak{b}) \mid M \in \mathfrak{b}\} \rightarrow \mathrm{gl}_2 : (M, \mathfrak{b}) \mapsto M$$

is a surjection. It is a nice exercise to check that the fiber $\psi^{-1}(M)$ consists of

- just one point if M is not diagonalizable,
- two points if it has two different eigenvalues, or
- $\mathbb{P}^1$ if M is a scalar.

Furthermore $\psi|_{\psi^{-1}(F_{(b,c)})}$ is a resolution when $F_{(b,c)}$ is singular.

This whole story can be generalized to arbitrary semisimple Lie algebras: the Springer fiber S_x of $x \in \mathfrak{g}$ is the space of all Borel subalgebras $\mathfrak{b} \subset \mathfrak{g}$ that contain x . T. A. Springer [9] has constructed an action of the Weyl group W on the cohomology of the fiber S_x (in our example $W \cong \mathfrak{S}_2$ is the group of permutation matrices). This is an important contribution to the representation theory of Weyl groups. Springer fibers and their variants have been studied extensively ever since. For instance, ‘affine Springer fibers’ (Springer fibers in a context with power series) are crucial in the work of Ngo Bao Châu on the so-called ‘Fundamental Lemma’ in the Langlands programme, for which he got a Fields Medal.



des Hautes Études Scientifiques (IHES) at Bures-sur-Yvette near Paris. Kuiper developed into an internationally prominent geometer, with important contributions to global differential geometry. He was someone who easily made contacts and maintained friendly relations with many prominent mathematicians. He was well informed about recent developments and he tried to make them known in the Neth-

erlands as well. The ‘official’ Dutch mathematics, at that time embodied in the Mathematical Centre Foundation, did not, however, make use of Kuiper’s abilities. Many visitors stopped by Kuiper’s house and were hospitably received by him and his wife Agnete.

The ‘Sheaves Colloquium’ was set up by Kuiper around 1955. The intention was to keep abreast of new developments.

I have no documentation about it, but I do have the dates of the meetings from 1960–1969 (I could not find anything anymore in 1970). These took place every two weeks on Saturdays, in different places, first Utrecht and Amsterdam, later also Leiden and Nijmegen. Most of the participants were from the younger generation, although Freudenthal also came to listen on occasion. Some of the topics that were discussed were: oscillation theory and applications, complex and Kähler varieties, automorphic forms, index theorem. I have good, but unfortunately hazy, memories of our meetings.

Princeton

In the fall of 1960, I was surprised by an invitation from Borel for a stay in the upper echelons of mathematics, as a ‘member’ of the Institute for Advanced Study at Princeton. The benevolent position of Utrecht University authorities made it possible for me to accept the invitation. Thus I found myself in the United States from September 1961 to June 1962 with my family. Adapting to American life did not cost us much effort. Adjusting to the mathematical entourage cost me a little more trouble. I still considered myself a mathematical amateur and I entered an unknown world of mathematical professionals. I had to get used to that. The great mathematicians with whom I came into contact inspired awe in me.

There was a lot of news in the air and I tried to absorb some of it. Borel, in his ‘seminar’, covered recent work on algebraic groups over arbitrary fields, a prelude to his later work with Tits, and also discussed his work with Serre on noncommutative Galois cohomology. A great mathematician of an older generation with whom I had superficial contact was Weil. What I knew of his work impressed me. At the Institute he gave some lectures and at Princeton University he organized a weekly ‘current literature seminar’, which I attended. Weil had a sharp tongue which was not appreciated by everyone. I liked his sharp remarks, they were always to the point.

At the Institute I attended a ‘seminar’ by Harish-Chandra (1923–1983). He was then a ‘member’; a few years later he became a professor at the Institute. He discussed his construction of the discrete series of representations of a non-compact Lie group, one of the highlights of the representation theory of those groups. I was not familiar

with the technical aspects of semi-simple Lie groups and I could therefore follow Harish-Chandra only partially. Nevertheless, I stayed onboard his seminar and later found out that some of it had stuck after all.

I got to know many contemporaries at Princeton. Some of them, with whom I stayed in touch with later on were Nagayoshi Iwahori (Tokyo), K.G. Ramanathan (Bombay), Hans Reiter (then in Newcastle, later for a number of years in Utrecht, then in Vienna) and especially Robert Steinberg (Los Angeles).

Mathematics at Princeton

I gradually began to become familiar with linear algebraic groups. The work of my dissertation naturally led to problems about conjugacy classes in such groups. It turned out that Robert Steinberg was also interested in such problems. We got to talking about a question about conjugacy classes in finite Lie groups, which emerged in his work on modular representations of those groups and to which he did not yet know the answer. I saw that Lang’s theorem about algebraic groups over a finite ground field, which I had come across earlier, could be brought into play with

Steinberg’s problem. With that, the problem was related to the question of the connectedness of centralizers in a semi-simple algebraic group. During an afternoon tea at the Institute we presented that question to Borel, who referred us to a recent article of his which answered an analogous question in the case of compact Lie groups. That put us on the right track and Steinberg’s problem could be solved, see his article [12].

The course of events illustrates the usefulness of informal contacts. I owe a lot to the contacts with great mathematicians of my generation, such as Armand Borel, Jean-Pierre Serre, Jacques Tits. But I will not elaborate on them here. I do want to say something about another great mathematician: Alexander Grothendieck. My personal contact with him was of short duration, but it stimulated me.

Grothendieck

During my stay in Nancy I had already gotten to know Grothendieck superficially. About his work in algebraic geometry I heard from Nico Kuiper in 1957, if I am not mistaken, who had attended the first ‘Arbeitstagung’ in Bonn, where Grothendieck had presented his Riemann–Roch Theorem.



Congratulated by Rudy Kousbroek with being awarded the Shell Prize in 1983

Memories of my father: 1957–1970, by Emmalien Springer

One of my first memories is waking up in the middle of the night after we moved to Maarn in the beginning of 1957, I was 2 years old and scared by our new surroundings. My father took me on his arm, and we looked at the sky with the stars and the moon. He told me that the universe was infinite and expanding and that we were all part, albeit infinitesimally small, of this galaxy. That reassured me and it still does, as a matter of fact. Another memory from around that time is me drawing something and my father telling me that a line was a series of infinitely many points. For me this was just as normal as having a home and a life filled with books, papers, magazines, art, culture, classical music, games, the outdoors, lots of interesting and strange people and being interested in everything.

When we lived in Princeton in 1961–1962, we experienced a different kind of lifestyle: lots of parties and dinners where children were always welcome. Halloween, Christmas, Easter were exuberantly celebrated at the Institute and there were outings and dinners (with the Borels, who had two daughters, Dominique and Ann, my age, the Dworks, our neighbours: the Pottashes, later to go to Groningen, and the Truongs, later to go to Paris, and many others). I remember Andre Weil's still very French accent and John Nash walking the grounds surrounding the Institute hands clasped behind his back, my father telling me he was a smart and interesting man. It was a very open, creative and exhilarating atmosphere and I expect my father enjoyed our stay there: in his last will he left the Institute the money that came with the Shell Prize he got in 1983.

We came back to Holland in 1962; my father took the train to Utrecht, where the faculty was in the Boothstraat, a very cozy, peaceful and beautiful place. Freudenthal was always around, and the secretary gave us cookies and lemonade. When I started to notice that my parents were quite strange compared to the other folks in Maarn, we went, again by boat, to America in 1965, starting with a road trip from New York to a summer conference in Boulder, Colorado. After the conference, one of my father's PhD students, Hans Mars, came along with us in our car on our way to Los Angeles and some of the national parks. After that trip we settled in Santa Monica and my father worked at UCLA. We got to see the lovely Steinberg couple a lot that year and went on trips to everything there was to see, as we were used to doing, every weekend and every holiday. After the summer break in 1966 we went back to Holland. Very much later, I must have been around 50, my father told me that it would probably have been better for all of us to have stayed in the States, but that he had the idea at that time that the schools were better in Holland (I started high school in 1966).

A vivid memory is of the French speaking mathematicians Verdier, Serre, and some others, being happy and doing acrobatics on the grass after dinner at the conference Local Fields (organized by Monna and my father) in Driebergen in the summer of 1966, after we had just returned from LA. I remember being

there every day. My father enjoyed himself hugely just like my mother, going out with the ladies, and us, the kids, seeing our American friends. I remember how in '67, '68 and '69, he would also enjoy the company and the intellectual atmosphere of the Tagungen in Oberwolfach.

After the summer of 1966 my father settled as a mathematician in Utrecht, and as a family we settled in Maarn. We had a fruit and vegetable garden, we would eat our own potatoes, beans, strawberries and other vegetables and fruits all year round. After we came back from LA my father started to cultivate asparagus beds, and we ate a lot of asparagus and to this day I am still not wild about them. My parents both liked to walk and hike wherever they were: I remember the cyclical gathering of brambles, chestnuts, mushrooms, an interest he shared with Corrado de Concini, and other edible and nonedible things you could find in the woods near Maarn. In Utrecht he would invite lots of mathematicians at the faculty, now in a new building on the Uithof. Then and until his death, he loved to travel all over the world, preferably in the company of my mother, to share ideas with his fellow mathematicians. Later on I would joke that my father's mathematics took them abroad for about half of each year.

My dad was a convinced pacifist, like Grothendieck, and a very kindhearted man: he always wanted to help. All of his PhD students, and later my friends, came to our house for drinks, dinner and parties and were treated as equals, which was uncommon at that time, the sixties, in Holland: Hans Mars, Jan Strooker, Wilberd van der Kallen, Gerrit van Dijk, Arjeh Cohen and Henk Barendregt; I will have undoubtedly have forgotten some. My mother would organise drinks, dinners and parties for the people my father invited to Utrecht and for their friends, mostly scientists: Els Hornix, the families van der Blij, van Dalen, Kuiper, Laman, Murre, Monna, van der Sluis, Seidel, Reiter and Tits come to mind. My mother was a big part of my father's career: she edited his work, they talked a lot about everything, she founded the International Neighbour Group in Utrecht, found houses for visiting lecturers and organized outings and activities for the partners. Later on she became an archeologist, and would go to excavations, whilst my father would take care of us: very uncommon in Holland at that time.

My dad was not the run-of-the-mill father: he hated injustice, and fought, on many levels where he had influence, for justice and peace, he was humble and sensitive, could get impatient and short tempered, he showed me the shortsightedness of others ("not stupid, Emmalien," he would say, "just shortsighted"), he was the most morally sound person I have known (later on I found that he was right about a lot of things) and had strong opinions but tried not to judge, he loved good music, art, food, drink, conversation and discussion and was interested in almost anything. He died on his morning walk with my mother of an aneurism of the heart, still working on an article with Lusztig, I think. An extraordinary man with a kind heart, a good soul and a great mind.

Grothendieck gave a lecture around 1960, invited by Kuiper, at the Wageningen Agricultural College, on his new approach to algebraic geometry. This was its introduction to the Netherlands. In the years that followed, I heard a little more about Grothendieck's work in algebraic geometry from Jaap Murre, who was developing into a connoisseur of that work. In early 1964, Murre had invited Grothendieck to give a lecture at the University of Leiden. He discussed his new results on linear algebraic groups, over arbitrary ground fields. Surprising to me was that he needed Lie algebras in the proofs; they had moved somewhat to the background at that time.

In June 1964, at Grothendieck's invitation, I visited the IHES. During my stay I worked out calculations in variants of simple Lie algebras over the integers. This involved explicit arithmetic information about the adjoint action of a regular nilpotent element (elementary divisors and the like). The intention was to use that information in a proof of the existence of regular unipotent elements in a simple algebraic group in arbitrary characteristic. (Steinberg had already done that via another way.) I did not quite manage to prove what I wanted; there is a problem if the characteristic is 'bad'. But in a bad characteristic p something else emerged: numerical coincidences of arithmetic information and information about the cohomology modulo p of the corresponding compact Lie group.

I told these matters to Grothendieck and through his intervention it came to a publication [8]. Without his encouragement this probably would not have happened: I found my work to be a rather trivial cal-

Een herinnering aan T.A. Springer van Jan Beuving (uit het theaterprogramma 'Rotatie')

Van Professor Springer heb ik nooit les gehad — hij was al geëmeriteerd toen ik met studeren begon. Toch heb ik een strak uitgelijnde herinnering aan hem. In de bibliotheek van het wiskundegebouw stonden twee identieke stoelen. In een van die twee zat ik op een dag een wiskundeboek te lezen — een zeldzame gebeurtenis in mijn studententijd — toen professor Springer binnenschuifde. Professor Springer, wist ik, was een van de grootste wiskundigen die onze universiteit ooit had voortgebracht, en al over de tachtig, maar nog iedere dag op het instituut. Gekleed in een pantalon met kaarsrechte vouw en een keurig colbertje. Zijn hand ging langs de ruggen van de boeken in de kasten die hij zo goed kende, tot hij op zeker moment het juiste vond, er even in bladerde, en er vervolgens mee in de andere stoel ging zitten. Daar zaten we: de twee intellectuele uitersten die het mathematisch instituut in haar geschiedenis had voortgebracht, zaten naast elkaar de wiskunde te bedrijven. Ik weet nog dat ik toen dacht: als er nu een buitenstaander binnen zou lopen, en ons zou zien zitten, dan kon die niet zien wie van ons nu het genie was, en wie de schlemiel. Dichter bij de Nobelprijs ben ik nooit gekomen.

culatation. Moreover, for me the process of writing things down usually goes hand in hand with some reluctance. In this case, some nice things emerged while writing it up. It turned out to be worthwhile to transfer the Jordan decomposition from an algebraic group over to its Lie algebra. This became an ingredient for a different approach to Grothendieck's new results (from his lecture in Leiden). I didn't quite get there, but when I (at a conference in Boulder in the summer of 1965) discussed the approach with Borel, he saw how to proceed.

A later by-product of the article was a bijection, in good characteristic, between the unipotent variety of a simple algebraic group and the nilpotent variety of its Lie algebra. This was the theme of my talk at the conference on algebraic geometry at the Tata Institute in Bombay in early 1968. It was the last time I spoke with Grothendieck. He may have benefited from my lecture. One ingredient of it was the reso-

lution of the unipotent variety of a simple algebraic group. A year or so later, Grothendieck's 'simultaneous resolution' appeared, a kind of unfolding of the first resolution. That simultaneous resolution was of importance in Brieskorn's work, in which he put simple singularities inside simple Lie algebras, see [1]. In the background of the simple singularities float the Platonic solids. That we encounter these classical objects again in esoteric modern mathematics is a remarkable fact that deserves some reflection.

So much for the digression on Grothendieck.

Conclusion

Meanwhile, I have ended up in 1970. By then I had metamorphosed from an amateur provincial into a mathematical professional. I don't want to discuss the comings and goings of that professional any further. Now is a good time to end the story. ☞

References

- 1 E. Brieskorn, Singular elements of semisimple groups, in: *Actes Congr. Intern. Math.*, Vol. 2, 1970, pp. 279–284.
- 2 N.G. de Bruijn and T.A. Springer, On the zeros of a polynomial and of its derivative, *Proc. Kon. Ned. Ak. v. Wet.* 50 (1947), 458–464.
- 3 *Classification des groupes de Lie algébriques*, Séminaire C. Chevalley, Paris, 1956–1958.
- 4 H.D. Kloosterman, The behavior of general theta functions under the modular group and the characters of binary modular congruence groups I, II, *Annals of Math.* 47 (1946), 317–446.
- 5 T.Y. Lam, Introduction to quadratic forms over fields, *Amer. Math. Soc.* (2005), 146.
- 6 S. Lang, Algebraic groups over finite fields, *Amer. J. Math.* 78 (1956), 555–563.
- 7 S.M. Malamud, Inverse spectral problem for normal matrices and the Gauss–Lucas problem, *Trans. Amer. Math. Soc.* 357 (2005), 4043–4064.
- 8 T.A. Springer, Some arithmetical results on semisimple Lie algebras, *Publ. Math. I.H.E.S.* 30 (1966), 115–141.
- 9 T.A. Springer, The unipotent variety of a semi-simple group, in *Algebraic Geometry (Internat. Colloq., Tata Inst. Fund. Res., Bombay, 1968)*, Oxford University Press, 1969, pp. 373–391.
- 10 T.A. Springer and R. Steinberg, Conjugacy classes, in: *Seminar on Algebraic Groups and Related Finite Groups*, A. Borel, ed., Lect. Notes in Math. 131, Springer, 1970, pp. 167–266.
- 11 T.A. Springer and F.D. Veldkamp, *Octonions, Jordan Algebras and Exceptional Groups*, Springer, 2000.
- 12 R. Steinberg, Representations of algebraic groups, *Nagoya Math. J.* 22 (1963), 33–56.
- 13 E. Witt, *Collected Papers*, Springer, 1998, p. 615.

Piet Groeneboom

Delft Institute of Applied Mathematics
TU Delft
p.groeneboom@tudelft.nl



Column Piet grijpt zijn kans

Monty Hall, Marilyn vos Savant en Fermat

Piet Groeneboom schrijft op regelmatige basis in dit blad een column, ditmaal over twee oude veelbesproken problemen.

Monty Hall en Marilyn vos Savant

Het Delftse studieboek [2] voor statistiek start met een aantal voorbeelden. Voorbeeld 1.3 heet ‘Cars and goats: the Monty Hall dilemma’. We volgen de expositie in [2], die ook grotendeels in [10] te vinden is.

On Sunday September 9, 1990, the following question appeared in the ‘Ask Marilyn’ column in *Parade*, a Sunday supplement to many newspapers across the United States.

“Suppose you’re on a game show, and you’re given the choice of three doors: Behind one door is a car; behind the others, goats. You pick a door, say No. 1, and the host, who knows what’s behind the doors, opens another door, say No. 3, which has a goat. He then says to you, ‘Do you want to pick door No. 2?’ Is it to your advantage to switch your choice?”

Craig F. Whittaker, Columbia, MD

Een probleem in de elementaire discrete kansrekening van uiterst triviale aard, zou je denken, maar misschien niet als je leest over alle opwinding die dit heeft veroorzaakt. Het probleem heet het ‘Monty Hall-probleem’, omdat het onderdeel was van de show *Let’s Make a Deal* van de Canadese radio- en tv-presentator Monty Hall. Zowel Monty Hall als de Amerikaanse statisticus Steve Selvin hadden dit probleem al correct opgelost in 1975 (zie [6]), maar grote bekendheid kreeg het pas na de column uit 1990 van Marilyn vos Savant (IQ 228, zie hieronder), die aanraadt te switchen, waar volgens [10] 10000 brieven op kwamen.

In [9] vinden we de volgende informatie over de opleiding van Monty Hall (en ook de foto op de volgende pagina):

“Hall graduated with a Bachelor of Science degree from the University of Manitoba, where he majored in chemistry and zoology. He had hoped to go on to medical school, but was not admitted due to secret quotas restricting the number of Jewish students admitted.”

In het kader van ‘Piet legt het nog één keer uit’ bespreek ik nu de oplossing van het Monty Hall-probleem op de manier van *How to Solve It* [5] van Polya, in samenspraak met een klas van kinderen die misschien niet allemaal IQ 228 hebben.

“Jullie kiezen voor deur 1 in de aanvankelijke keuze. Wat is de kans dat de auto achter de deur jullie gekozen deur staat?”

“Ehhh ..., $\frac{1}{3}$.”

“De quizmaster gaat nu op zijn kop staan. Verandert daardoor jullie kans van $\frac{1}{3}$?”

“Ehhh ..., nee.”

“In plaats van op zijn kop te gaan staan, opent hij nu een deur waar een geit achter staat (niet jullie deur). Verandert daardoor jullie oorspronkelijke kans van $\frac{1}{3}$ dat de auto achter deur 1 staat?”

“Ehhh ..., nee.”

“Dus wat is de kans dat de auto achter die andere niet-geopende deur staat?”

“...”

“Hint: de som van de kansen is 1.”

“ $\frac{2}{3}$?”

“Goedzo. Is het dus verstandig te switchen?”

“Ehhh ..., ja.”

We kunnen ook zeggen dat we aanvankelijk met deur 1 te doen hebben, met een kans van $\frac{1}{3}$ dat daar die auto achter staat, en een complement dat kans $\frac{2}{3}$ heeft dat daar een auto achter één van de deuren staat. Door de actie van de quizmaster is het complement tot één element teruggebracht dat dus de hele vracht van de $\frac{2}{3}$ kans draagt.

Helaas zie je in de oplossing van dit probleem echter meestal een langdradige opsomming van gevallen. Ik heb nooit zo warm kunnen lopen voor dit probleem ("Jongens, hou nou eens op over Monty Hall!"), maar dat kunnen we niet zeggen van mijn collega's Casper Albers, Richard Gill, Mark van der Laan en Willem Schaafsma. Richard Gill heeft zelfs de discussie in de Wikipedia zo hoog op laten lopen dat hij geschorst is (door de moderatoren). Ik heb deze discussie niet gevolgd, maar Richard heeft mij dit verteld.

Richard Gill zegt in [3]: "The best reason to switch is to be found in von Neumann's minimax theorem from game theory, rather than in Bayes' theorem." Dat de zogenaamde stelling van Bayes (beter 'formule van Bayes', want 'stelling' is een beetje groot woord) er ook weer bij kan worden gesleept had ik nog niet eens verteld, maar ik ga daar nu verder niet op in. Er zijn veel manieren om het probleem ingewikkelder te maken.

Bij een kanotocht van een week in Värmland (Zweden) met een groep academici (en mijn zoon Tim die toen nog op school zat), waarbij we onze tenten opzetten op onbewoonde eilandjes, vertelde de natuurkundige in het gezelschap het Monty Hall-probleem als zijn bijdrage tot de 'bonte avond' aan het eind. Het 'leeft' dus wel.



Monty Hall in 1976

Marilyn vos Savant, die genoemd wordt in het Delftse studieboek voor statistiek, staat in het *Guinness Book of Records* vanwege haar score IQ 228 op de Stanford-Binet-intelligentietest. Zij is lid van de high-IQ societities Mensa International en de Mega Society. Tot haar voordeel moet wel gezegd worden dat ze IQ-tests 'useless' vindt ("Savant sees IQ tests as measurements of a variety of mental abilities and thinks intelligence entails so many factors that 'attempts to measure it are useless'", zie [8]).

Die 10000 brieven schrijvers bij de column van Marilyn, zouden die echt bestaan? Er waren veel PhD's in de wiskunde bij (ik neem aan dat ze dan in ieder geval een gebrekkige scholing in de kansrekening hebben gehad). Mark Haddon citeert wat brieven schrijvers in zijn boekje [4], bijvoorbeeld:

Robert Sachs, PhD, George Mason University: "I'm very concerned with the general public's lack of mathematical skills. Please help by confessing your error."

En:

Scott Smith, PhD, University of Florida: "There is enough mathematical illiteracy in this country and we don't need the world's highest IQ propagating more. Shame!"

En nog vier soortgelijke reacties. Erdős zou pas geloofd hebben dat het beter is om te switchen toen hij simulaties had gezien (zie [10]). Dat klinkt toch ook enigszins bizar. Als het waar is, maakt het de bezitters van een laag Erdős-nummer (waaronder ikzelf) toch iets minder trots hierop. Aan de andere kant moeten we misschien wat toleranter zijn voor menselijke zwakheden.

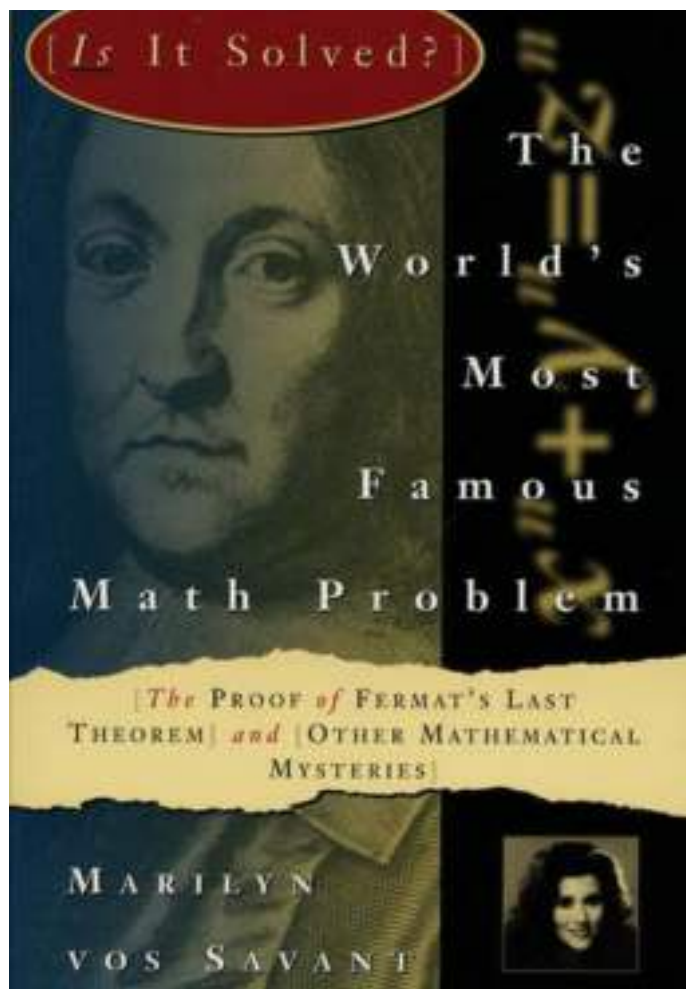
Als er 1000 deuren waren, 999 geiten en 1 auto, en de quizmaster had 998 deuren met een geit erachter opengemaakt, zodat de kans dat de auto achter die ene niet geopende deur van het complement staat inmiddels is opgelopen tot $\frac{999}{1000}$, zou Erdős dan nog steeds hebben gezegd: "Nee hoor, de kans is $\frac{1}{2}$ "? Dat is moeilijk te geloven.

Marilyn vos Savant en Fermat

Marilyn vos Savant schreef het boek *The World's Most Famous Math Problem* [7]. Hiermee wordt de 'laatste stelling van Fermat' aangeduid. Ik heb het speciaal voor het schrijven van deze column aangeschaft. Op de buitenkant staat 'Is It Solved?'.

In de eerste plaats: was er niet ook zoiets als de Riemann-hypothese? Een beroemde uitspraak van Hilbert is: "Als ik wakker zou worden na 1000 jaar geslapen te hebben, zou mijn eerste vraag zijn: is de Riemann-hypothese bewezen?" Hij rept hier niet over Fermat. Ook sprak ik in de vorige eeuw nog als student met een hoogleraar in de topologie die tegen mij zei: "De laatste stelling van Fermat, dat wordt nog wel opgelost deze eeuw, de Riemann-hypothese niet, dat is te moeilijk voor de algebra" (nadat ik gezegd had dat er toch voortgang via de algebra was met de Riemann-hypothese over eindige lichamen). Hij kreeg gelijk. Maar niet dus van Marilyn vos Savant, die om verschillende redenen het bewijs van Andrew Wiles in twijfel trekt.

Nu heeft Marilyn vos Savant geen wiskunde gestudeerd, wel twee jaar filosofie, maar heeft die studie afgebroken om bij haar vader 'in de zaak' te gaan werken, begrijp ik uit [8]. Ook wordt in [8] gezegd: "Reviewers questioned her criticism of Wiles' proof; asking whether it was based on a correct understanding of mathematical induction, proof by contradiction, and imaginary numbers."



Inderdaad, wat te denken van de volgende passage over imaginaire getallen op pagina 60 van haar boek in de sectie “Why Wiles’ proof isn’t as satisfying as it could be”:

“But how can one prove anything by contradiction? Imaginary numbers are one example. The square root of $+1$ is a real number because $+1 \times +1 = +1$; however, the square root of -1 is imaginary because -1 times -1 would also be $+1$, instead of -1 . This appears to be a contradiction.”

Waarom is dit een contradictie? Zij vervolgt met:

“Yet it is accepted, and imaginary numbers are used routinely. But how can we use them to *prove* a contradiction?” ???

(vraagtekens van mij) Daarna volgt een passage waaruit een misvatting over het wiskundig gebruik van inductie naar voren lijkt te komen. De sectie eindigt met:

“But the relative merits of inductive versus deductive proofs aside, inductive proofs have relative merits among themselves. To illustrate, let’s suppose for a moment that Fermat’s last theorem has just been tested with modern hardware for the first time. At your left, there’s a powerful computer and a printout of the results, which show the theorem is true for exponents up to four million. At your right, there’s a mathematician holding a two-hundred-page document, which concludes, by any form of mathematical logic, that the theorem is true for all numbers. Which do you believe provides the greatest certainty? (Interestingly, if it were only *two* pages long, it would seem more credible.) In short, does anyone believe Fermat’s theorem is true any more now than they did before June of 1993?”

Die 200 bladzijden is een thema dat veel terugkomt in haar boek. Verder kun je je ook afvragen wat ‘modern hardware’ betekent in deze context. Wordt hier niet over het hoofd gezien dat voor dat ‘testen’ door de computer programma’s geschreven moeten worden die gebruikmaken van wiskundige inzichten? Zelfs voor het bekende geval van exponent 4, waarvoor al een bewijs bestaat sinds Fermat (die de ‘methode van de oneindige afdaling’ bedacht heeft, die natuurlijk wel naar een door Marilyn gewraakte contradictie toewerkt), gaat het toch om een in principe oneindige verzameling mogelijke oplossingen (die er weliswaar niet zijn), dus dat ‘testen’ is een niet-triviale aangelegenheid.

Na de laatst geciteerde passage komt de volgende korte sectie (‘A Possible Fatal Flaw’):

“A possible fatal flaw in Wiles’s proof is whether the same basic arguments could be constructed to hold true for *all* exponents instead of just the exponents equal to or greater than 3. If it could, the same proof would ‘prove’ the Pythagorean theorem ($x^2 + y^2 = z^2$) to be false.”

Ze bedoelt hier waarschijnlijk te zeggen dat dit zou bewijzen dat $x^2 + y^2 = z^2$ ook geen oplossingen in positieve gehele getallen heeft. Tja. Wat heeft de auteur gedreven om dit boek te schrijven, vraag je je af.

Een verhelderende bespreking van het boek van Marilyn vos Savant wordt gegeven in [1]. De bespreking eindigt met: “We’d like to thank Sharon Stone, Boris Yeltsin and the Vienna Boys Choir for being such good sports with all of our faxes, and for (presumably) putting them to the appropriate use.” Dit is een toespeling op de manier waarop Marilyn vos Savant Barry Mazur, Ken Ribet and Karl Rubin bedankt in haar ‘Acknowledgements’: “And a personal ‘thank you’ to Barry Mazur, Kenneth Ribet and Karl Rubin for being such good sports and for putting up with all of my faxes.” Ken Ribet heeft geen enkele herinnering aan contact met haar en bij de anderen was het (indirecte) contact te miniem om ‘good sports’ genoemd te worden. ☹

Referenties

- 1 Nigel Boston en Andrew Granville, The world’s most famous math problem (the proof of Fermat’s Last Theorem and other mathematical mysteries), *Amer. Math. Monthly* 102(5) (1995), 470–473.
- 2 F.M. Dekking, C. Kraaikamp, H.P. Lopuhaä en L.E. Meester, *A Modern Introduction to Probability and Statistics*, Springer Texts in Statistics, Springer, 2005.
- 3 Richard D. Gill, The Monty Hall problem is not a probability puzzle, *Stat. Neerl.* 65(1) (2011), 58–71.
- 4 Mark Haddon, *The Curious Incident of the Dog in the Night-Time*, Vintage, 2004.
- 5 G. Polya, *How to Solve It – A New Aspect of Mathematical Method*, with a foreword by John H. Conway, Princeton Science Library, Princeton University Press, 2014. Reprint of the second (2004) edition.
- 6 Steve Selvin, A problem in probability, *The American Statistician* 29(1) (1975), 67.
- 7 Marilyn vos Savant, *The World’s Most Famous Math Problem*, St Martin’s Press, 1993.
- 8 Wikipedia, Marilyn vos Savant, https://en.wikipedia.org/wiki/Marilyn_vos_Savant, 2022.
- 9 Wikipedia, Monty Hall, https://en.wikipedia.org/wiki/Monty_Hall, 2022.
- 10 Wikipedia, Monty Hall problem, https://en.wikipedia.org/wiki/Monty_Hall_problem, 2022.

Clara Stegehuis

Faculteit EWI
Universiteit Twente
c.stegehuis@utwente.nl

Francesca Arici

Mathematisch Instituut
Universiteit Leiden
f.arici@math.leidenuniv.nl

Proof by example Portraits of women in Dutch mathematics

Annika Betken

In ‘Proof by example’, Clara Stegehuis and Francesca Arici portray women in Dutch mathematics. This edition portrays Annika Betken, assistant professor at the University of Twente, who was recently awarded a Veni grant for her research on the statistics of time series and change points. In this interview she tells about her research and her motivation to pursue a career in mathematics.

When did you first become interested in mathematics?

“For me, it was not always obvious that I wanted to be a mathematician. I liked the formal language in mathematics in elementary school or in high school, so mathematics was something that I always enjoyed. Still, I also liked other subjects, and in fact I was planning to study literature or philosophy. But when I visited the job center in Germany, they told me that these did not have great job prospects. They asked me if I had any other interests as well, and then it became clear that mathematics was a better choice. So then I ended up studying mathematics, but I still did a minor in Philosophy as well.”

And then you moved into statistics?

“That was also not really a conscious choice. My statistics lecturer gave very interesting lectures, so I started following more of them. He already mentioned that

he had some PhD positions when I was still in my bachelor program. By then, I did not know yet if I wanted to pursue a PhD, but in the end, I obtained one



Annika Betken

of these positions. Beside the interesting lectures I followed, I also like the link to applications that statistics has. The mathematics that you work with on a daily basis is of course still quite abstract, but for me it is motivating that I can always keep its applications in mind.”

What is your main topic of research?

“My research is about time series analysis, and in particular about change point detection. In change point detection, the main question is: does your data undergo a change at some time point, or are changes in the data over time just due to random fluctuations? In my research I investigate how we can answer this question when long-range correlations are present.”

What are these long-range correlations?

“In time series analysis, you have measurements at different time steps. These time series are usually correlated: if your measurement was high in the previous time step, it is often likely to be high in the current time step as well. Still, when the time gap between two measurements gets larger, you expect to see less correlation between the measurements. How-

ever, in many applications, there is so-called long-range correlation. This means that the correlation between two measurements decays very slowly with the time gap. These long-range correlations make it impossible to use standard statistical methods such as central limit theorems. This makes it also more difficult to see whether there is a change point in your data, or whether this is caused by the long-range correlations. In my research, I try to come up with new strategies to still be able to detect these change points.”

Can you give an example of data with such long range correlations?

“One famous application of long-range correlations in time series analysis is in the discharges of the river Nile. A researcher there was interested in the amount of water flowing through the Nile close to Cairo, and measured this flow on a regular basis. However, these measurements did not fit with standard theoretical predictions at all. Only when they took long-range correlations into account, they were able to match the theory with the actual measurements. This shows that when you want to investigate a property of such data, it is important to take long-range correlations into account.”

What is a topic that you have recently been interested in?

“Together with Hongwei Wen, a PhD student I am working with, and Hanyuan Hang, a fellow assistant professor at the University of Twente, we are currently doing research more on the topic of machine learning. Suppose that you have one data set with labels, and another data set without labels, which is a ‘shifted’ version of your first data set. In practice, you can think of the first data set to be disease symptoms of persons when they get tested for example for COVID-19, before its major outbreak. The labels are classifications of whether the person with these symptoms is infected or not. The second data set is taken during the pandemic, when the distribution of infected persons differs from the first scenario. For example, the age distribution of these persons during the disease may be different than in the first data set. You can train a classification algorithm on the first labeled data set to find a classifier for the disease. But how well does this algorithm perform on the second data set? And how much information gets lost when the data set is shifted? This is important to know, because often the data on which you train a specific algorithm is slight-

ly different than the data you will use the algorithm on, like in the example of COVID-19 infections at different time points. For very simple classification problems Hongwei already has some results, but we hope to extend these to more scenarios soon.”

What is the result that you are most proud of?

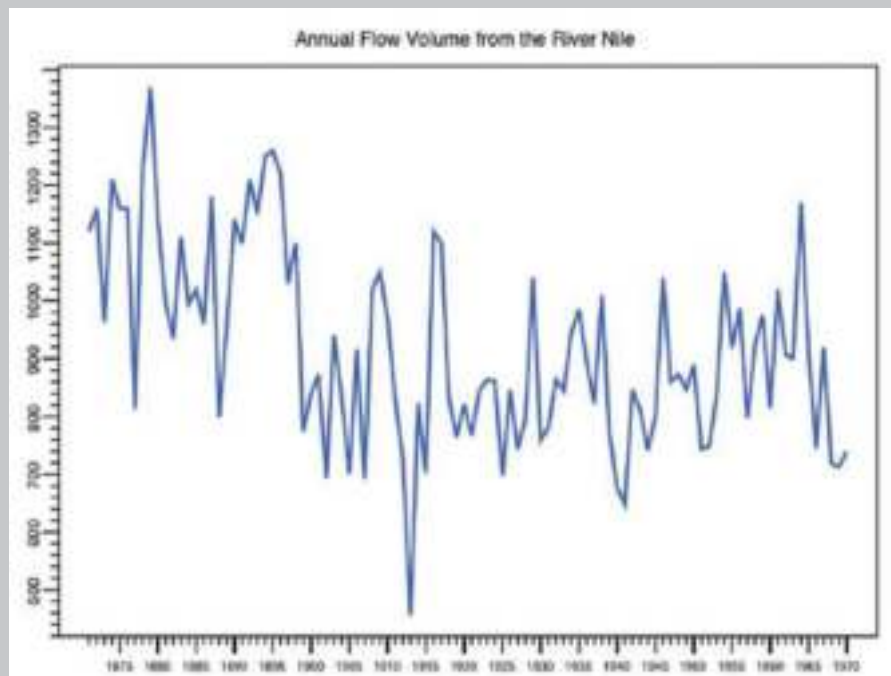
“This is probably the first paper I wrote, based on the research I did during my master thesis. My supervisor asked me to think of a better statistic for something. So I gave it some thought, and then I came up with an idea. My supervisor said that it was actually quite a good idea, and that I should write this up as a paper. I had never written a paper before, so I had to learn this just by doing it. I am mainly proud of this paper because the main idea in this paper was probably more original than many of the ideas that I have now. As a master student, I think that your ideas can sometimes be more fresh than when you have been into a topic for a long time, as you then usually already have a particular research direction in mind.”

What do you like best about doing research?

“In the research itself, I mostly like puzzling. You are stuck on a problem for a while, and have to come up with new solutions every time to solve a new problem. But other than that, I also really enjoy traveling for conferences and I especially like meeting new people. The people you meet at universities are usually very open minded, which I appreciate a lot. They are interested in new mathematical problems, and you can easily connect with them.”

And what do you like less?

“Recently I got more overwhelmed with many small tasks. I really do not like this, because when you have so many different things to do, you cannot do all of them well anymore. In fact, you really have to choose what to focus on and what not to focus on. This is something that I have not mastered yet myself.”



The discharges of the river Nile have long-range correlations

Rainer Kaenders

Hausdorff Center for Mathematics
Universität Bonn
r.kaenders@uni-bonn.de

Onderwijs

Meetkunde van de stang: speciale en algemene reële algebraïsche krommen

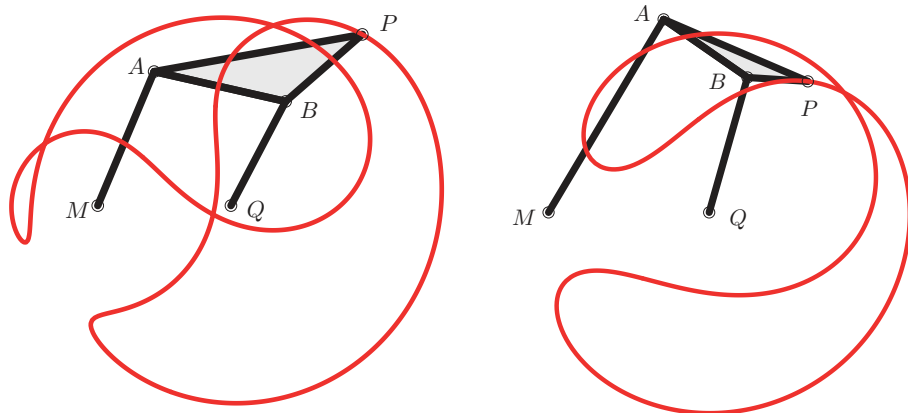
De Vakantiecursus Wiskunde voor leraren heeft in 2021 voor de 75ste keer plaats gevonden. Rainer Kaenders was (naast Teun Koetsier en de kunstenaar Theo Jansen) docent van deze cursus en probeert in een tweeledige bijdrage (NAW 5/23(1) en (2)) de rijkdom te laten zien die zich bij de studie van stangenmechanismes op het gebied van elementaire meetkunde ontplooit.

Hoe kun je een algebraïsche kromme door een stangenmechanisme tekenen? Wij beginnen met het antwoord op deze vraag door het ontwerp van een constructie voor de lemniscaat van Bernoulli en kijken dan naar de constructie van stangenmechanismes voor kegelsneden. Uiteindelijk stellen we ons de vraag welke reële algebraïsche krommen überhaupt door een stangenmechanisme gerealiseerd kunnen worden. Het antwoord is verrassend: Van elke reële algebraïsche kromme kan elk begrensd stuk door een stangenmechanisme worden getekend. Hiervoor stellen we de algemene constructie uit het bewijs van Alfred Bray Kempe (1849–1922) voor, die laat zien hoe een stangenmechanisme voor de algemene reële algebraïsche kromme kan worden vervaardigd. Deze aanpak illustreren we aan de hand van een eenvoudige kromme, de parabool, wat al voor een zo eenvoudige kromme een grootscheepse constructie oplevert.

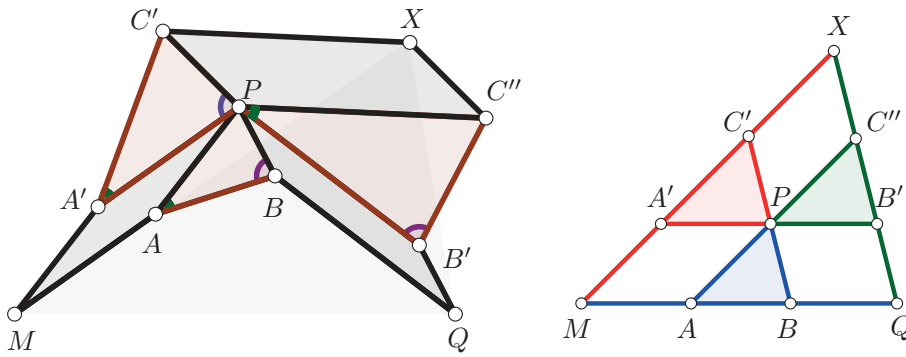
Terugblik

In het eerste deel van deze bijdrage over stangenmeetkunde kwamen pogingen aan bod om een rechtgeleiding met een stangenmechanisme te maken die of een lijnstuk benaderen of het precies beschrijven. We hebben geleerd hoe je met stangen-

mechanismes *inversoren* kunt maken. Dat zijn stangenmechanismes die met een pivotpunt aan het vlak zijn vastgemaakt en waarmee je in een gegeven cirkel rond dat pivotpunt kunt spiegelen. Dat wil zeggen dat je ergens op de stangen van dit stangenmechanisme een *wijzer* en een *pen* vast neerzet, zodat als je de wijzer op een punt van een door de wijzer bereikbaar deel van het vlak schuift dat dan de pen op de plek van het spiegelbeeld van dat punt in deze cirkel komt te liggen. De eerste zulke bekende inversor was de



Figuur 1 Twee voorbeelden van koppelkrommen.



Figuur 2 Drie verwante koppelmechanismen volgens de *Stelling van Roberts en Chebychev links*, Cayley-diagram als constructieschema rechts.

inversor van Peaucellier en Lipkin. Het bestaan van zulke inversoren zorgt ervoor dat zodra we in staat zijn een bepaalde kromme te construeren wij onmiddellijk ook een mechanisme voor haar spiegelbeeld in de gegeven cirkel hebben. Zo is bijvoorbeeld een cirkel makkelijk met een stang te maken, die met één einde aan het vlak is vastgemaakt. Als wij ervoor zorgen dat deze cirkel door het middelpunt gaat van de reflectiecirkel, dan is zijn beeld onder de inversie een rechte lijn hetgeen een rechtgeleiding mogelijk maakt.

In de vorige bijdrage werden ook zogenaamde *koppelmechanismen* geïntroduceerd. Een dergelijk koppelmechanisme is een stangenvierzijde $MQBA$, waarbij M en Q vast aan het vlak verbonden zijn en er een vaste driehoek $\triangle ABP$ aan de stang AB , de zogenaamde *koppelstang*, is vastgemaakt en star met AB meebeweegt. In dat punt P van de driehoek ABP denken we ons een 'pen' gemonteerd. Het is daarbij ook mogelijk dat de driehoek ABP ontaard is, dat wil zeggen dat P ook op de lijn AB kan liggen en zelfs A of B kan zijn. Een dergelijk mechanisme tekent een *koppelkromme*, wier vorm afhankelijk is van de lengtes van de stangen van het koppelmechanisme.

Op grond van een stelling van Roberts en Chebychev (zie het eerste deel) horen bij elke door een koppelmechanisme voort-

gebrachte koppelkromme nog twee andere (over het algemeen verschillende) koppelmechanismen, die dezelfde koppelkromme voortbrengen. Deze mechanismen heten *verwante* ('cognate') koppelmechanismen. Deze verwante koppelmechanismen vinden we als we uitgaande van het gegeven koppelmechanisme alle andere lijnstukken en punten van het gehele plaatje zoals dat links in Figuur 2 te zien is door de eenduidig bepaalde evenwijdige lijnen door de desbetreffende punten construeren. Schematisch houden we daarbij het patroon, het Cayley-diagram rechts in Figuur 2 aan. Houden we M en Q vast en bewegen de rest, dan blijft ook X vast zodat het punt P op een koppelkromme van elk van de drie koppelmechanismen verloopt: het mechanisme dat ontstaat als je M en Q vasthoudt, het mechanisme met vaste Q en X of hetgene met X en M vast. In elk van de drie gevallen doorloopt P dezelfde koppelkromme.

Stangenmechanisme voor de lemniscaat

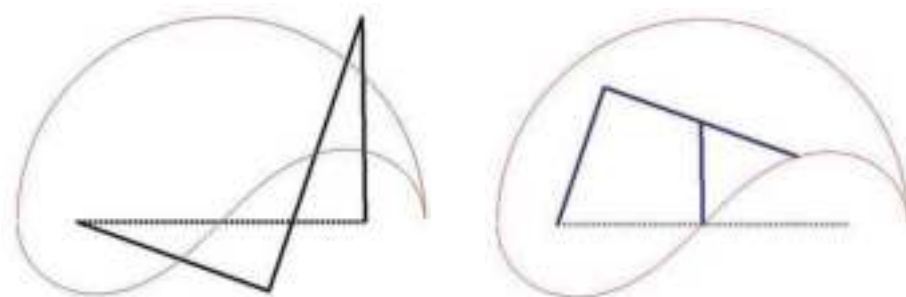
Sommige koppelkrommen hebben een vorm die aan het cijfer acht doet denken. Zulke krommen worden ook *veralgemeende lemniscaten* of soms *lemniscoiden* genoemd. De naam is terecht omdat ook de klassieke lemniscaat van Bernoulli door een dergelijk koppelmechanisme kan worden getekend.

Hoewel de lemniscaat als kromme reeds door John Wallis (1616–1703) in zijn boek *Arithmetica Infinitorum* werd ingevoerd, wordt zij meestal verbonden met de naam Jacob Bernoulli (1654–1705), die er in het jaar 1694 een vergelijking voor heeft afgeleid. De lemniscaat is gedefinieerd als de meetkundige plaats van punten waarvan het product van de afstanden tot twee gegeven brandpunten constant is. In formule: gegeven twee brandpunten F_1 en F_2 in het vlak met afstand $2d$, dan is de *lemniscaat* de meetkundige plaats van alle punten P in het vlak waarvoor geldt

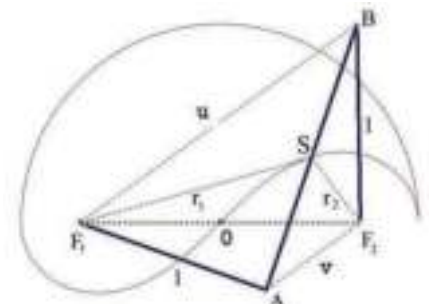
$$|PF_1| \cdot |PF_2| = d^2.$$

Uiteindelijk willen we een stangenmechanisme voor kegelsneden construeren. Het plan ervoor gaat als volgt. Wij beginnen met een orthogonale hyperbool. Hiervoor zullen wij bewijzen dat als je een orthogonale hyperbool spiegelt in een cirkel rond het snijpunt van zijn asymptoten, dan is het resultaat van deze spiegeling een lemniscaat van Bernoulli. Om dus een mechanisme van een orthogonale hyperbool te fabriceren gaan we eerst een stangenmechanisme voor een Bernoulli-lemniscaat ontwerpen en zullen dan gebruikmaken van een inversor om de gespiegelde kromme te verkrijgen. We zullen dan zien dat als we in deze constructie alleen de lengtes van de stangen (en de afstanden van de pivotpunten) veranderen, wij elke kegelsnede kunnen maken. (Hier zijn alle ellipsen, hyperbolen en parabolen bedoeld. De 'ontaarde kegelsnede, die uit twee lijnen bestaat, laten we hier buiten beschouwing.)

Deze klassieke lemniscaat ontstaat op twee verschillende, met elkaar verwante, manieren als koppelkromme. In Figuur 3 schetsen wij deze verwante mechanismen. Er zijn in wezen twee lengtes van stangen in de plaatjes van Figuur 3; de langere stangen zijn twee maal zo lang als de korte



Figuur 3 Twee verwante mechanismen met de lemniscaat als koppelkromme.



Figuur 4 Tekening bij de bewijzen van Stelling 1 en 2.



Figuur 5 'Der Eber' in Eberswalde: Dit Doppellenkersystem für Drehkrane werd 1932 aldaar door de Ardel-Werke uitgevonden.

stangen waarvan wij de lengte als 1 aan-nemen. De horizontale gestippelde lijnen zijn bij beide mechanismes vast. Links wordt de lemniscaat beschreven als meetkundige plaats van het middelpunt van de koppelstang. In het rechter mechanisme is de bovenste stang twee keer zo lang (lengte 2) als de kortste stang (lengte 1) en de lemniscaat is de meetkundige plaats van het losse eindpunt van deze verlengde koppelstang. Het mechanisme rechts is dus een kraanconstructie.

Stelling 1. *Bij beide mechanismes is de bijbehorende koppelkromme gelijk aan de klassieke lemniscaat van Bernoulli plus een cirkel.*

Wij bewijzen dat het mechanisme links in Figuur 3 de lemniscaat als koppelkromme levert. Dat bij de beweging ook de cirkel ontstaat als de stangenvierzijde een parallelogram vormt is duidelijk. Het mechanisme rechts is een verwant mechanisme in de zin van Roberts en Chebychev en we laten het over aan de lezer om dit aan de hand van het Cayley-diagram zelf na te gaan.

Bewijs. Zoals eerder zetten wij ook hier (zie Figuur 4) de lengte van de korte stangen gelijk aan 1. Dan is $d = \frac{1}{2} |F_1 F_2| = \frac{1}{\sqrt{2}}$. Nu beschouwen we een stand van de stangenvierzijde met gekruiste stangen. In de andere standen, waarin de stangen een parallelogram vormen, wordt klaarblijkelijk een cirkel getekend. Voor $u := |F_1 B|$ en

$v := |AF_2|$ en $r_1 := |F_1 S|$ en $r_2 := |F_2 S|$ is te bewijzen: $r_1 r_2 = \frac{1}{2}$.

Eerst merken wij op dat de driehoeken $\triangle ASF_1$ en $\triangle AF_1 B$ gelijkvormig zijn, want ze hebben de hoek bij A gemeen en de verhoudingen $\frac{|F_1 A|}{|AB|}$ en $\frac{|AS|}{|F_1 A|}$ zijn gelijk. Om een zelfde reden is driehoek BAF_2 gelijkvormig met driehoek $\triangle BF_2 S$ en daarom:

$$\frac{u}{\sqrt{2}} = \frac{r_1}{1} \quad \text{en} \quad \frac{v}{\sqrt{2}} = \frac{r_2}{1}.$$

Uit de gelijkvormigheid van $\triangle ASF_1$ en $\triangle AF_1 B$ volgt ook dat $\angle F_1 B A$ gelijk is aan $\angle A F_1 S$. Omdat de situatie symmetrisch is, geldt ook $\angle F_1 B A = \angle F_2 F_1 B$. Als wij bij beide hoeken, $\angle F_2 F_1 B$ en $\angle A F_1 S$, de hoek $\angle S F_2 F_1$ weghalen, vinden wij $\angle A F_1 F_2 = \angle S F_1 B$. Hieruit volgt dat $\triangle A F_2 F_1$ en $\triangle S B F_1$ gelijkvormig zijn en daarmee vinden we de verhouding $u/(\frac{1}{\sqrt{2}}) = \frac{\sqrt{2}}{v}$ oftewel $u \cdot v = 1$. Dit is ook rechtstreeks in te zien door de stelling van Ptolemaeus toe te passen op de koordenvierhoek $F_1 A F_2 B$. Samengevat:

$$r_1 r_2 = \frac{u}{\sqrt{2}} \cdot \frac{v}{\sqrt{2}} = \frac{1}{2} u v = \frac{1}{2}.$$

Dit bewijst dat de klassieke lemniscaat door het onderhavige stangenmechanisme wordt gegenereerd. $\square$

Zulke mechanismes, maar dan een beetje gedeformeerd, worden daadwerkelijk ook als kraanconstructies ingezet. Het zijn mechanismes met veralgemeniseerde lemniscaten (ook wel 'lemniscoiden') als koppelkrommen, die een bijna horizontale lastweg hebben, *lemniscatkransen* genoemd, zoals te zien in Figuur 5.

Stangenmechanismes voor kegelsneden

Met de constructie van de klassieke Bernoulli-lemniscaat hebben we dus nu ook een orthogonale hyperbool geconstrueerd. Hiervoor nemen we een stangenmechanisme dat het lemniscaatmechanisme combineert met een inversor. Het is echter nog aan te tonen dat de orthogonale hyperbool en Bernoulli-lemniscaat ook werkelijk elkaars gespiegelden zijn in een cirkel rond het dubbelpunt van de lemniscaat. Een dergelijk mechanisme met veranderde lengtes, zoals dat in Figuur 6 te zien is, levert dan ook een algemeen mechanisme voor alle mogelijke kegelsneden.

Stelling 2. *De lemniscaat van Bernoulli met dubbelpunt O gespiegeld in een willekeurige cirkel rond O is een orthogonale hyperbool waarvan de asymptoten door O gaan.*

Met deze stelling wordt dan ontwijfelbaar duidelijk dat we de orthogonale hyperbool door een combinatie van het geschetste koppelmechanisme voor de lemniscaat en van een inversor kunnen tekenen. Allereerst bewijzen we een eenvoudig maar wel handig lemma.

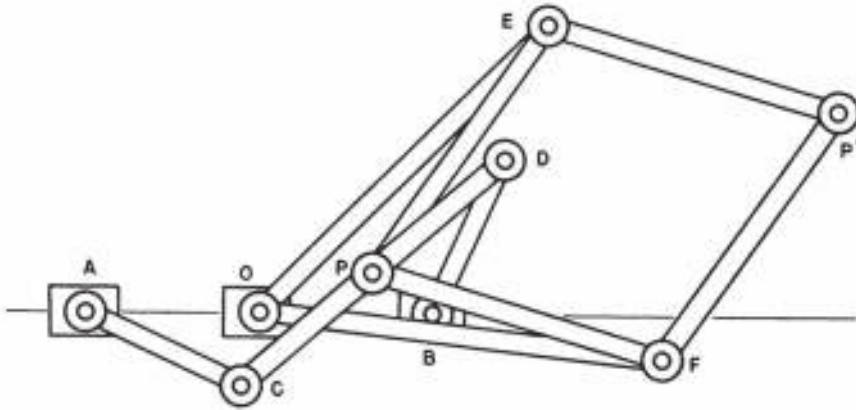
Lemma 1. *Voor een cirkel k met middelpunt O laat de punten P en P' als ook Q en Q' elkaars gespiegelden in k zijn. Dan zijn de driehoeken $\triangle OPQ$ en $\triangle OQ'P'$ gelijkvormig.*

Bewijs. De hoeken $\angle POQ$ en $\angle P'OQ'$ zijn dezelfde. Bovendien geldt: $\frac{|OP|}{|OQ|} = \frac{|OQ'|}{|OP'|}$ hetgeen het bewijs voltooit. $\square$

Hiermee bewijzen we dan dat lemniscaat en hyperbool elkaars gespiegelden zijn.

Bewijs van Stelling 2. Wij nemen de notatie over uit het bewijs van Stelling 1 zoals dat ook in Figuur 4 is afgebeeld. Weer zetten we $|F_1 F_2| = \sqrt{2}$. Aldaar in dat bewijs hebben we ook al gevonden dat voor $u := |F_1 B|$ en $v := |AF_2|$ geldt: $u = \sqrt{2} \cdot r_1$ en $v = \sqrt{2} \cdot r_2$. Als $r := |SO|$, dan zien we met gelijkvormigheid dat $r = \frac{|u-v|}{2}$, want bijvoorbeeld voor $u \geq v$ is $r + 2 \cdot \frac{v}{2} = \frac{u+v}{2}$ en voor $u < v$ gaat dit analoog.

Bovendien hebben we nu een reflectiecirkel k rond O met straal ρ gegeven. De punten F_1, F_2, A, B en S , worden in k gespiegeld met de spiegelbeelden F'_1, F'_2, A', B' en S' . Met $r = |OS|$ en $r_i = |SF_i|$ de-



Figuur 6 Schema voor stangenmechanismen waarmee alle kegelsneden (ellips, parabool en hyperbool) getekend kunnen worden mits $|AC| = |BD|$ en $|AB| = |CD|$ als ook $|AO| = |PD|$ de passende lengte hebben (uit [4]).

finiëren we $r'_i := |OS'_i|$ en $r''_i := |S'_iF'_i|$ voor $i = 1, 2$. Lemma 1 heeft tot gevolg dat voor $i = 1, 2$ de driehoeken $\triangle OSF_i$ en $\triangle OS'_iF'_i$ gelijkvormig zijn. Daarmee is dan voor $i = 1, 2$:

$$\begin{aligned} r'_i : r''_i &= |S'_iF'_i| : |SF_i| \\ &= |OS'_i| : |OF_i| = \sqrt{2} \cdot r'. \end{aligned}$$

We laten nu zien: Het beeld van de lemniscaat met brandpunten F_1 en F_2 is de orthogonale hyperbool met brandpunten F'_1 en F'_2 . Uit $r_1 \cdot r_2 = \frac{1}{2}$ zou dus nu moeten volgen dat $|r'_1 - r'_2|$ constant is. Hiervoor berekenen we

$$\begin{aligned} |r'_1 - r'_2| &= \sqrt{2} \cdot r' (r_1 - r_2) \\ &= \sqrt{2} \cdot \rho^2 \cdot \frac{|r_1 - r_2|}{r} \\ &= \rho^2 \cdot \frac{|u - v|}{r} = 2\rho^2. \quad \square \end{aligned}$$

Deze meetkundige constructie geeft een idee ervan hoe we een stangenmechanisme voor een algemene kegelsnede kunnen verkrijgen. (Hier volgen we het boek van Robert C. Yates [4, pp.51–54].) Hiervoor gaan we weer uit van een stangenvierzijde waarvan de tegenover elkaar liggende stangen even lang zijn en twee daarvan elkaar kruisen — ook *contra-parallellogram* genoemd. Het idee is net als bij de hyperbool om een door een *contra-parallellogram* geconstrueerde koppelkromme in een cirkel te spiegelen. Dat doen we door een mechanisme zoals in Figuur 6 te vervaardigen. Preciezer gesproken kunnen we dat *contra-parallellogram-mechanisme* als volgt beschrijven: Gegeven een contra-parallellogram $ACDB$ met vaste punten AB en middelpunt M van AB . Verder laten we de langere stang CD de halve lengte $a = \frac{1}{2}|CD| = \frac{1}{2}|AB|$ hebben en de halve

lengte van de kortere (oftewel niet-langere) stangen AC en BD noemen we $b = \frac{1}{2}|AC| = \frac{1}{2}|BD|$. We hebben dus $a \geq b$. Op de stang CD kiezen wij een vaste plek P diens baan de koppelkromme beschrijft. Een dergelijke kromme is dus een koppelkromme met een ontaarde driehoek CDP . Door de keuze van P op de stang CD kunnen we elke waarde van $c := |OM|$ tussen 0 en a bereiken. Dit is de constructie en zij hangt af van de lengtes a , b en c .

Om deze constructie (Figuur 7) te kunnen beschrijven kiezen we op een handige manier de oorsprong O van ons coördinatensysteem: O is het eenduidig bepaalde punt op het lijnstuk tussen A en B zo dat $|AO| : |BO| = |DP| : |CP|$ en wij noemen $r := |OP|$ en $\theta := \angle BOP$.

Stelling 3. In het boven beschreven mechanisme beschrijft P een kromme die in de poolcoördinaten (r, θ) geven wordt door de vergelijking

$$\left(\frac{r}{2} - c \cos \theta\right)^2 = b^2 - a^2 \sin^2 \theta.$$

Bewijs. Allereerst tonen we aan dat tijdens de gehele beweging de drie lijnstukken AD en OP als ook CB evenwijdig blijven, want het trapezium $ACBD$ is spiegelsymmetrisch waarbij P en O volgens de definitie van O elkaars spiegelbeelden moeten zijn. Analoog met onze eerdere benaming zetten we $u := |AD|$ en $v := |CB|$. De vierhoek $ACBD$ is een koordenvierhoek en met de stelling van Ptolemaeus berekenen we het product van u en v door $u \cdot v + 2b \cdot 2b = 2a \cdot 2a \Leftrightarrow u \cdot v = 4(a^2 - b^2)$.

Laat T het snijpunt van AB en CD zijn en noem S het midden van AD en R het midden van CB . Verder noemen we $z := |MT|$, waarbij M het middelpunt is van AB . Dan geldt

$$u = 2|AS| = 2|AT| \cos \theta$$

en

$$v = 2|BR| = 2|BT| \cos \theta.$$

En bovendien geldt $|AT| = (a + z)$ en $|BT| = (a - z)$. Dus hebben we:

$$\begin{aligned} u &= 2|AT| \cos \theta = 2(a + z) \cos \theta, \\ v &= 2|BT| \cos \theta = 2(a - z) \cos \theta. \end{aligned}$$

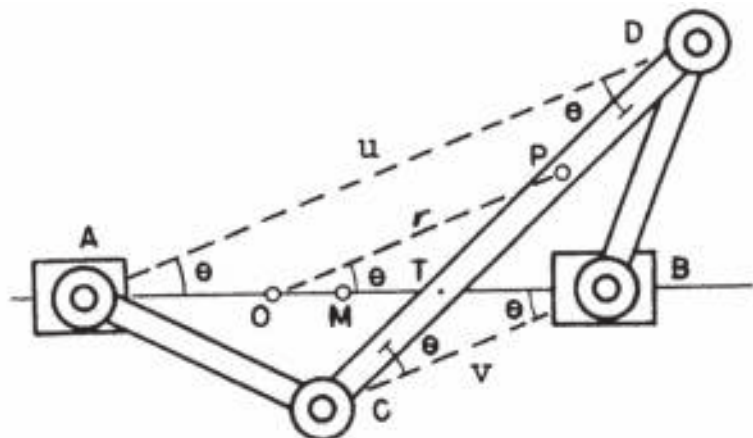
Als wij deze uitdrukkingen u en v nu vermenigvuldigen, verkrijgen we nog een andere uitdrukking voor het product van u en v die we aan de eerder gevonden uitdrukking $u \cdot v = 4(a^2 - b^2)$ gelijk zetten:

$$u \cdot v = 4(a^2 - z^2) \cos^2 \theta = 4(a^2 - b^2).$$

Dit kunnen we ook anders schrijven als volgt:

$$z^2 \cos^2 \theta = b^2 - (1 - \cos^2 \theta)a^2.$$

Er geldt $r = 2(c + z) \cos \theta$ oftewel $\frac{r}{2} - c \cos \theta = z \cos \theta$ en dat vullen we nu in deze formule in om dan de volgende vergelijking van



Figuur 7 Een koppelmechanisme op een algemeen contra-parallellogram.

hoeken kunnen *verdubbelen* ofwel *halveren*. Dit komt goed van pas als we hoeken bij elkaar willen optellen of van elkaar willen aftrekken. Als in het mechanisme in Figuur 9 (midden) bijvoorbeeld de hoeken $\angle AOB$ en $\angle AOC$ gegeven zijn, dan is

$$\angle AOD = \angle AOB + \angle AOC.$$

Als aan de andere kant de hoeken $\angle AOD$ en $\angle AOC$ gegeven zijn, dan is

$$\angle AOB = \angle AOD - \angle AOC.$$

Het op een dergelijke manier gehanteerde gereedschap heet bij Kempe *The Additor*. Als twee hoeken θ en ϕ door twee stangen ten opzichte van een derde referentiestang gegeven zijn, dan kunnen we voor natuurlijke getallen m en n een stang construeren die ten opzichte van deze derde stang een hoek heeft van $m\theta + n\phi$. En natuurlijk kunnen we er ook nog elke vaste hoek α , dat wil zeggen een hoek die tijdens de beweging niet verandert, bij optellen, zodat we ten slotte alle hoeken $m\theta + n\phi + \alpha$ kunnen maken.

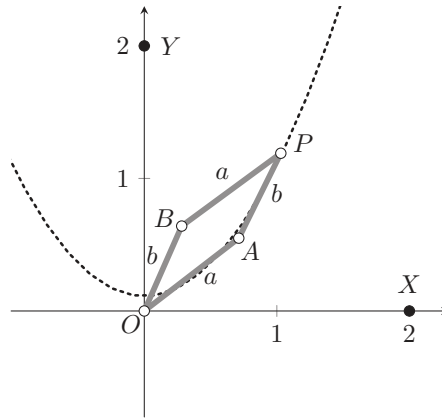
De laatste voorbereiding voor het bewijs bestaat erin dat we beseffen dat je bij elke stang een evenwijdige stang ergens in het vlak kunt construeren. Dat doen we, zoals in Figuur 9 (onder) afgebeeld, door twee parallelogrammen te gebruiken. Dan is AB evenwijdig met CD . Kempe noemt dit mechanisme *The Translator*.

Het bewijs van de stelling van Kempe

Een algemene reële algebraïsche kromme is gegeven als de verzameling van alle nulpunten $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ van een reële veelterm $\Phi(x, y)$, dat wil zeggen alle (x, y) , waarvoor geldt: $\Phi(x, y) = 0$. De parabool, waarvoor we hier exemplarisch een stangenmechanisme bouwen is gegeven als de nulpuntsverzameling in $\mathbb{R}^2$ van de vergelijking (in onze concrete constructie is $c = 0,2$)

$$\Phi(x, y) = x^2 - y + c = 0.$$

Anders gezegd, gaan we een concreet stangenmechanisme maken voor de grafiek van de functie $f(x) = x^2 + c$. Het basismechanisme (zie Figuur 10) voor ons algemeen stangenmechanisme is een parallelogram $OAPB$, waarbij het hoekpunt O vast aan de oorsprong van het coördinatenstelsel is verbonden. Het daar tegenoverliggende punt P (staat weer voor 'pen') zal dan onze parabool gaan tekenen. Met dit mechanisme kunnen we alle punten in een zelfgekozen deel van het vlak bereiken. De zijden van het parallelogram zullen de lengtes



Figuur 10 Het basismechanisme.

a en b hebben, die we zo kiezen, dat met name het deel van de kromme, waarin wij geïnteresseerd zijn, bereikbaar is. (In ons concrete voorbeeld is $a = 0,9$ en $b = 0,7$.)

Het idee is nu dat we aan dit basismechanisme een aantal verdere mechanismes vast gaan hangen, tot dat er een eindpunt van een stang ontstaat, dat alleen nog maar op een verticale lijn op en neer kan lopen mits P op de kromme ligt. Daar zetten we dan een mechanisme tegenaan, die een lijn kan tekenen zoals bijvoorbeeld de rechtgeleiding van Peaucellier-Lipkin.

Allereerst geven we de hoeken van het basismechanisme een naam:

$$\theta := \angle XO A \quad \text{en} \quad \phi := \angle XO B.$$

Het punt $P = (x, y)$ heeft dan de coördinaten

$$x = a \cos \theta + b \cos \phi$$

en

$$y = a \cos\left(\theta - \frac{\pi}{2}\right) + b \cos\left(\phi - \frac{\pi}{2}\right),$$

waarbij voor een hoek φ de uitdrukking $\cos(\varphi - \frac{\pi}{2})$ hetzelfde is als $\sin \varphi$. Omdat wij bij alle punten uiteindelijk naar de x -coördinaat zullen kijken, gaan we hier alleen maar met de cosinusfunctie aan de slag. Voor de verdere operaties is daarom dan ook een regel van belang, die laat zien hoe het product van de cosinuswaarden van twee hoeken als som van cosinuswaarden kan worden geschreven. Het is de regel (ook bekend als één van de *prosthaphaeresis* formules):

$$\cos \alpha \cdot \cos \beta = \frac{\cos(\alpha + \beta) + \cos(\alpha - \beta)}{2}$$

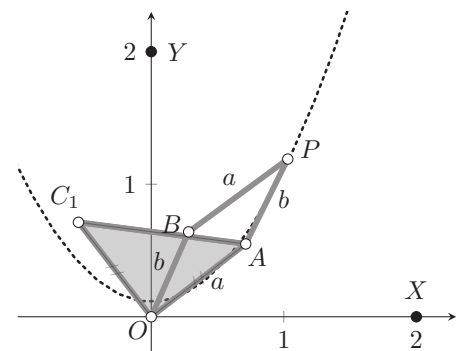
en in het bijzonder $2 \cos^2 \alpha = \cos(2\alpha) + 1$. Deze regel is makkelijk in te zien als gevolg van de optellingstheorema voor $\cos(\alpha - \beta)$ en $\cos(\alpha + \beta)$.

Als we met punt P de kromme doorlopen, dan moet voor coördinaten (x, y) van een punt P op de kromme gelden dat $\Phi(x, y) = 0$. Deze vergelijking geeft ons dus een eis, die de vrijheid waarin P in het basismechanisme verkeert, beperkt: $\Phi(x, y)$ moet gelijk aan nul zijn.

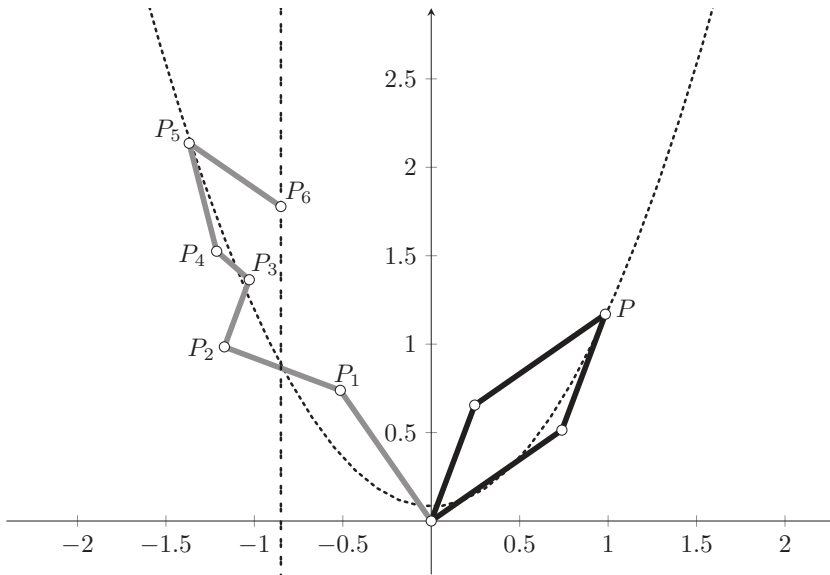
Omdat de algemene constructie anders een beetje abstract zou kunnen lijken, is het op dit moment een goed idee om eerst concreet naar ons voorbeeld te kijken en te laten zien hoe daar het stangenmechanisme ontstaat. Hier wordt de vergelijking $\Phi(x, y) = x^2 - y + c = 0$ als volgt uitgewerkt met onze formule voor producten van cosinustermen:

$$\begin{aligned} \Phi(x, y) &= (a \cos \theta + b \cos \phi)^2 \\ &\quad - a \cos\left(\theta - \frac{\pi}{2}\right) - b \cos\left(\phi - \frac{\pi}{2}\right) + c \\ &= a^2 \cos^2 \theta + b^2 \cos^2 \phi \\ &\quad + 2ab \cos \theta \cos \phi - a \cos\left(\theta - \frac{\pi}{2}\right) \\ &\quad - b \cos\left(\phi - \frac{\pi}{2}\right) + c \\ &= \frac{a^2}{2} (\cos(2\theta) + 1) + \frac{b^2}{2} (\cos(2\phi) + 1) \\ &\quad + ab(\cos(\theta + \phi) + \cos(\theta - \phi)) \\ &\quad - a \cos\left(\theta - \frac{\pi}{2}\right) - b \cos\left(\phi - \frac{\pi}{2}\right) + c \\ &= -a \cos\left(\theta - \frac{\pi}{2}\right) - b \cos\left(\phi - \frac{\pi}{2}\right) \\ &\quad + \frac{a^2}{2} \cos(2\theta) + \frac{b^2}{2} \cos(2\phi) \\ &\quad + ab \cos(\theta + \phi) + ab \cos(\theta - \phi) \\ &\quad + \left(\frac{a^2 + b^2}{2} + c\right) = 0. \end{aligned}$$

Bij elk van deze termen kunnen we, uitgaande van ons basismechanisme, nu een mechanisme bouwen, waarvan het eindpunt deze desbetreffende term als x -coördinaat heeft. Bijvoorbeeld zien we in het mechanisme van Figuur 11 dat het punt C_1 bij elke stand van het basismechanisme de x -coördinaat $-a \cos(\theta - \frac{\pi}{2})$ zal hebben. Op



Figuur 11 Een mechanisme voor de term $-a \cos(\theta - \frac{\pi}{2})$.



Figuur 12 De keten van stangen $OP_1P_2P_3P_4P_5P_6$.

een analoge wijze construeren we een punt C_2 dat bij elke stand van het basismechanisme de x -coördinaat $-b\cos(\phi - \frac{\pi}{2})$ heeft.

Met behulp van *The Reversor*, *The Multiplier*, *The Additor* en *The Translator* is het mogelijk om stangenmechanismen met punten $C_1, \dots, C_6$ te bouwen, zo dat de x -coördinaat van punt C_3 de term $\frac{a^2}{2}\cos(2\theta)$ is en de x -coördinaat van punt C_4 bij $\frac{b^2}{2}\cos(2\phi)$ zal zijn. En verder kunnen we nog mechanismes met punten C_5 respectievelijk C_6 met de x -coördinaat $ab\cos(\theta + \phi)$ respectievelijk $ab\cos(\theta - \phi)$ vinden. Vatten we dit samen, dan hebben we –uitgaande van ons basismechanisme – punten $C_1, \dots, C_6$ geconstrueerd met de volgende eigenschappen:

- C_1 heeft x -coördinaat $-a\cos(\theta - \frac{\pi}{2})$,
- C_2 heeft x -coördinaat $-b\cos(\phi - \frac{\pi}{2})$,
- C_3 heeft x -coördinaat $\frac{a^2}{2}\cos(2\theta)$,
- C_4 heeft x -coördinaat $\frac{b^2}{2}\cos(2\phi)$,
- C_5 heeft x -coördinaat $ab\cos(\theta + \phi)$,
- C_6 heeft x -coördinaat $ab\cos(\theta - \phi)$.

Deze x -coördinaten van C_1 tot en met C_6 opgeteld zijn dan $-\left(\frac{a^2+b^2}{2} + c\right)$.

Nu komt *The Translator* in het spel. Hiermee kunnen we beweeglijke steigers gaan bouwen die ervoor zorgen dat we ons stangenmechanisme op kunnen bouwen zodat punten $P_1, \dots, P_6$ ontstaan met de eigenschap dat $P_1 = C_1$ en verder dat voor $i = 2, \dots, 6$ geldt $P_{i-1}P_i$ is bij elke stand van het basismechanisme evenwijdig en even lang als OC_i . In Figuur 12 is de keten van

lijnstukken $OP_1P_2P_3P_4P_5P_6$ te zien. Hier voor construeren we met behulp van *The Translator* mechanismes die stapsgewijs voor $i = 2, 3, 4, 5, 6$ de stang OC_i evenwijdig verschuiven zodat O op P_{i-1} terecht komt. Zodoende vinden we dus het punt P_6 wiens x -coördinaat bij elke stand van het basismechanisme, waarbij het punt $P = (x, y)$ aan de vergelijking $\Phi(x, y) = 0$ voldoet, gelijk is aan

$$-\left(\frac{a^2+b^2}{2} + c\right).$$

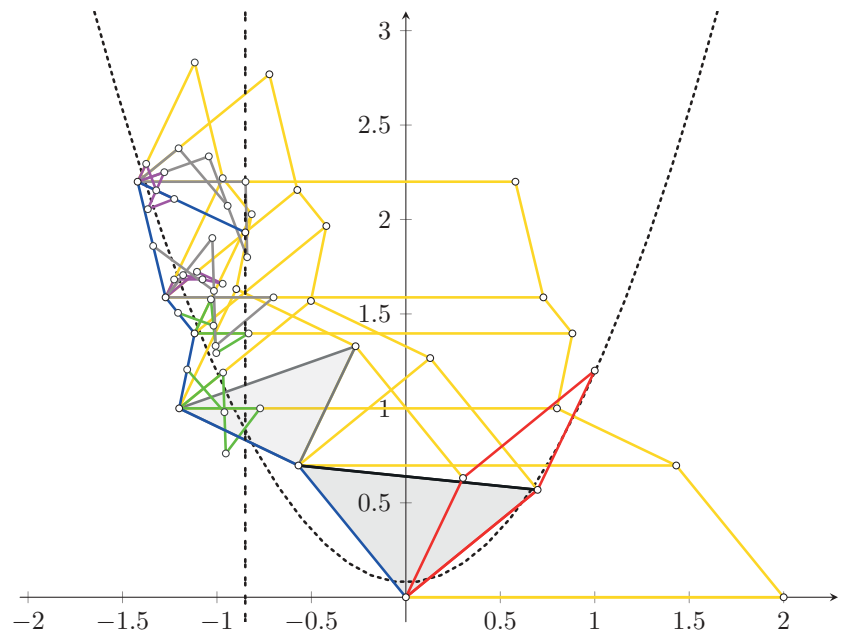
Als nu omgekeerd het hele mechanisme door de beweging van P zo wordt ingesteld, dat P_6 op de lijn $x = -\left(\frac{a^2+b^2}{2} + c\right)$

komt te liggen, dan geldt voor de coördinaten (x, y) van P dat zij aan de vergelijking $\Phi(x, y) = 0$ moeten voldoen, want we hebben gezien: $\Phi(x, y) = 0$ is equivalent met de eis dat de x -coördinaat van P_6 gelijk is aan $-\left(\frac{a^2+b^2}{2} + c\right)$. Hiermee is duidelijk dat we de parabool door een stangenmechanisme kunnen maken.

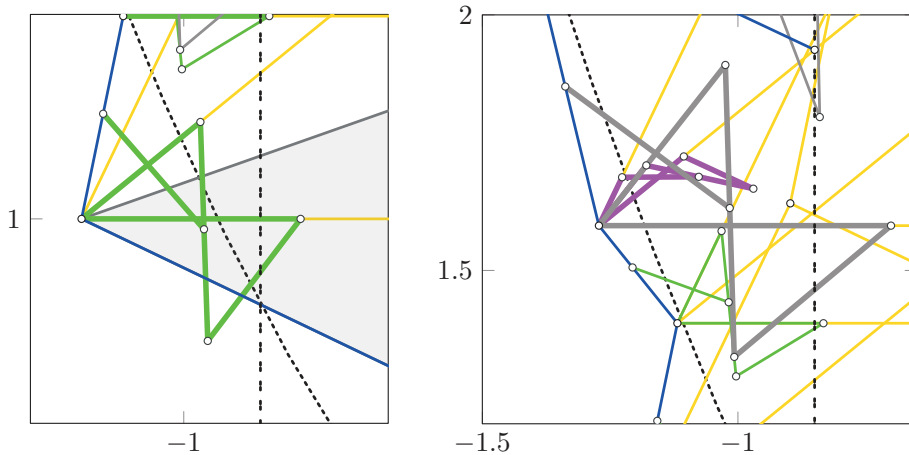
Gaan we hier serieus werk van maken dan lijkt dit op het eerste gezicht een zoetje maar de manier van werken is echter duidelijk. In Figuur 13 is het basismechanisme en daaraan vastgemaakt het hele mechanisme met de vele translatoren (in geel) in de vorm van parallellogrammen als een soort steiger te zien.

Aan het einde van de reeks blauwe stangen vinden we het punt P_6 dat wordt gedwongen op een lijn te lopen. Hier moet dan nog een mechanisme tegenaan worden gezet, waarbij P_6 op een verticale lijn wordt gedwongen.

Zover het idee. Concreet zien we dat er drie verschillende soorten mechanismes zijn. Allereerst zijn er twee mechanismes met gelijkbenige rechthoekige driehoeken om de termen $-a\cos(\theta - \frac{\pi}{2})$ en $-b\cos(\phi - \frac{\pi}{2})$ te maken. Verder hebben we twee keer een mechanisme voor de verdubbeling van hoeken (zie Figuur 14), verantwoordelijk voor de termen $\frac{a^2}{2}\cos(2\theta)$ en $\frac{b^2}{2}\cos(2\phi)$. En ten slotte nog twee mechanismes voor het optellen, respectievelijk afrekenen van hoeken (zie eveneens Figuur 14). Hierdoor worden $ab\cos(\theta + \phi)$ en $ab\cos(\theta - \phi)$ gemaakt.



Figuur 13 Het gehele mechanisme voor de parabool.



Figuur 14 Links *The Multiplier*: mechanisme voor de verdubbeling van een hoek en rechts *The Reverser* en *The Additor*: mechanisme voor het optellen van hoeken.

Nu weer terug naar het algemene geval. De vergelijking $\Phi(x, y) = 0$ wordt met de bovengenoemde prosthaphaeresis-regel uitgewerkt en we vinden dat een som met maar eindig veel van nul verschillende cosinustermen en met $\alpha_{m,n} \in \{0, \frac{\pi}{2}\}$, van het volgende soort een constant getal c moet zijn

$$\sum_{m,n \in \mathbb{N}} A_{m,n} \cos(m\theta + n\phi + \alpha_{m,n}) = c.$$

Bij elk van deze termen $A_{m,n} \cos(m\theta + n\phi + \alpha_{m,n})$ zullen we, uitgaande van ons basismechanisme, nu met behulp van *The Reverser*, *The Multiplier*, *The Additor* een mechanisme bouwen, waarvan het eindpunt $C_{m,n}$ de term $A_{m,n} \cos(m\theta + n\phi + \alpha_{m,n})$ als x -coördinaat heeft. Deze mechanismes en hun eindpunten nummeren we nu in een rij van N punten $C_1, C_2, \dots, C_N$. De som van al de x -coördinaten van al deze punten is dan constant (niet noodzakelijk c omdat er bij de uitwerking nog verdere constanten kunnen ontstaan zoals bij de parabool).

The Translator zorgt er nu voor dat bij punt C_1 , dat we nu ook P_1 noemen, de horizontale richting en de hoeken θ en ϕ ter

beschikking staan. Hiermee wordt dan met behulp van het mechanisme van C_2 een punt P_2 geconstrueerd zodat P_1P_2 evenwijdig aan en even lang is als OC_2 . Weer gebruiken wij *The Translator* om bij punt P_2 de horizontale richting en de hoeken θ en ϕ voor het verdere mechanisme ter beschikking te hebben. Met het mechanisme voor C_3 construeren wij een punt P_3 zodat P_2P_3 evenwijdig aan en even lang is als OC_3 . Zo gaan we door tot dat we een punt P_N hebben geconstrueerd.

Op deze manier bouwen we ons stangenmechanisme op zodat punten $P_1, \dots, P_N$ ontstaan met de eigenschap dat $P_1 = C_1$ en verder dat voor $i = 2, \dots, N$ geldt: $P_{i-1}P_i$ is bij elke stand van het basismechanisme evenwijdig en even lang als OC_i . Daarmee vinden we dus het punt P_N wiens x -coördinaat bij elke stand van het basismechanisme gelijk aan een bepaalde constante is dan en slechts dan als P op de kromme ligt. Alle hulpmechanismes zoals de (contra-) parallelogrammen of de lijnvoering door bijvoorbeeld een cirkelinvorsor kunnen willekeurig worden uitvergroot, zodat je in elke stap een zo groot bereik van het des-

betreffende mechanisme ter beschikking hebt als dat telkens nodig is.

Hiermee is duidelijk, dat we de gegeven kromme door een stangenmechanisme in het door het basismechanisme gegeven gebied kunnen tekenen en de geldigheid van deze uitspraak is volledig aangetoond.

Andersom is elke door stangenmechanismes geconstrueerde kromme ook deel van een algebraïsche kromme, wat we hier niet aan zullen tonen (zie [5, p. 30]). Daarmee geldt dat de door stangenmechanismes tekenbare krommen precies alle reëel algebraïsche krommen zijn.

Stelling 5 (Universaliteitsstelling van Sir Alfred Bray Kempe). *Bij elk begreind deel van een willekeurige reële algebraïsche kromme bestaat een stangenmechanisme, waarmee dat deel van de kromme te tekenen is.*

Tot slot

Stangenmeetkunde is een fantastische omgeving voor elementaire meetkunde. Tegenwoordig is de studie van stangenmechanismes veel verder gevorderd dan alles wat we hier hebben laten zien. Zij worden met behulp van algemene kinematische theorie (bijvoorbeeld door de kinematische afbeelding van Eduard Study), met gevorderde algebra (quaternionen, Clifford-algebra's et cetera) en met reële en complexe algebraïsche meetkunde, met moduli-ruimtes en veel ander indrukwekkend gereedschap uit de moderne wiskunde bestudeerd. Een bekend klassiek boek over gevorderde kinematica is bijvoorbeeld *Theoretical Kinematics* van Oene Bottema en Bernard Roth [1]. Naast abstract werkend wiskundige was Oene Bottema een fervent pleitbezorger voor elementaire meetkunde, zie [3]. Hij was bovendien een van de eerste sprekers in de vakantiecursus voor wiskunde in het jaar 1946. ☞

Referenties

- 1 O. Bottema en B. Roth, *Theoretical Kinematics*, Dover Publications, 1991.
- 2 A.B. Kempe, On a general method of describing plane curves of the n th degree by linkwork, *Proceedings of The London Mathematical Society* VII(102) (1875), 213–216.
- 3 T. Koetsier, Oene Bottema (1901–1992), in M. Ceccarelli, ed., *Distinguished Figures in Mechanism and Machine Science*, History of Mechanism and Machine Science, Vol. 1, Springer, 2007, pp. 61–68.
- 4 Robert C. Yates, *Curves and Their Properties*, Classics in Mathematics Education A Series, Volume 4, National Council for Teachers of Mathematics, 1974.
- 5 Walter Wunderlich, *Ebene Kinematik*, BI-Hochschultaschenbücher, 1970.

Daan Mulder*promovendus AMOLF, Amsterdam
mulderdaan@live.nl***Het keerpunt van Luc Stultiens**

Bij wiskunde ben je nou eenmaal gewend dat je het soms vaker moet lezen voor je het snapt

Na een internationale studententijd ging Luc Stultiens (1993) in Den Haag aan de slag. Zijn kennis van toegepaste wiskunde en economie gebruikt hij nu in zijn rol als politiek adviseur. “Wat ik bij GroenLinks zo goed vind, is de combinatie tussen radicaal en realistisch.”

“Ik werk sinds 2017 voor de GroenLinks-fractie in de Tweede Kamer, eerst als adviseur op het terrein van financiën, belastingen en pensioenen, en sinds een half jaar als Hoofd Beleid & Organisatie. Dat betekent dat ik het team aanstuur van beleidsadviseurs, en advies geef bij debatten van Jesse Klaver.

Als medewerker van een Kamerlid doe je voor een deel hetzelfde werk dat een Kamerlid doet, maar je blijft achter de schermen. Je leest de wetsvoorstellen door, je denkt na over eigen initiatieven, je leest rapporten van verschillende bureaus om te beoordelen of bepaalde plannen goed zijn of niet. Bij grote debatten, zoals over het regeerakkoord met alle fractievoorzitters, zit ik achter in de zaal om te adviseren.”

Was je altijd al met politiek bezig?

“Het is tijdens mijn studie langzaam gegroeid. Mijn bachelor deed ik aan het University College in Utrecht, een bredere opleiding. Ik had als hoofdrichting wis- en natuurkunde, maar kreeg daar ook een beetje politicologie en economie. Zo kwam ik in aanraking met mensen met

allerlei interesses. Veel van mijn vrienden deden meer vakken over politiek, dus zo raakte ik daar zelf geïnteresseerd in. Ik merkte dat ik in mijn vrije tijd liever praatte over wat ik in de krant had gelezen, dan over wiskunde.



Luc Stultiens

Bij de wiskundeopleiding ging ik zoeken naar een politiek haakje, al had ik dat toen nog niet zo door. Ik heb tijdens mijn bachelor ook een half jaar in Californië gezeten, bij Berkeley. Daar heb ik bijvoorbeeld een vak gedaan over de invloed van opiniepeilingen. De discussies bij zo'n vak vond ik het leukst, omdat het gaat om iets wat mensen in het dagelijks leven direct aangaat. Niet alleen wiskunde, maar ook de vraag: wat vind je nou eigenlijk eerlijk? Hoe zou een goed referendum moeten werken?

Mijn masters zelf waren wel wat specifiek, mijn master in Londen bij de London School of Economics was echt toegepaste wiskunde. De tweede master in Oxford nog wat meer gericht op Computer Science. In Londen heb ik een vak gedaan over social choice theory, een wiskundige manier om te kijken naar kiessystemen. Mijn scripties gingen wel steeds over politiek: hoe meet je in het parlement welke partij het meest invloedrijk is, kun je kwantificeren hoe groot de macht van partijen is? Kun je op basis van netwerktheorie en het stemgedrag van parlementariërs bepalen of er clusters zijn van partijen die samenwerken op een bepaald thema?

Na mijn master in Oxford kwam ik voor een dilemma. Ik heb toen heel erg getwijfeld om een PhD te gaan doen. Ik

twijfelde of ik wel intrinsiek gemotiveerd genoeg was om me vier jaar lang te verdiepen in een specifiek klein onderwerp. Mensen om me heen die een PhD deden, waren super gefascineerd door dat ene onderwerp. Ik merkte dat ik dat zelf minder had, en toch meer een generalist ben, die over van alles mee wil kunnen praten.

Toen heb ik besloten toch geen PhD te doen, maar me bij de overheid aan te melden voor een traineeship, om juist een heel andere kant op te gaan. Minder de academische wereld, meer maatschappelijk betrokken. Zo kwam ik uit bij het ministerie van Financiën. Na een jaar merkte ik dat het politieke me het meest aansprak: echt kunnen gaan voor je idealen. Na de verkiezingen van 2017 ging GroenLinks van vier naar veertien zetels. Toen dacht ik: dat is een goed moment om te solliciteren en te kijken of ik daar mijn kennis kan inzetten. Daar ben ik sindsdien gebleven.”

Komt er bij je werk nog wiskunde kijken?
“Nou, het hangt ervan af hoe je wiskunde definieert. Het is niet zo dat ik nog formules uit mijn studie hoeft toe te passen. Maar zaken als ordegraad, een beetje kansberekenen, of hoe een model werkt, daar heb je natuurlijk profijt van. Je bent ook niet bang als iets er moeilijk uitziet, want bij wiskunde ben je nou eenmaal gewend dat je het soms vaker moet lezen voor je het snapt.”

Welke thema's bij GroenLinks spraken je aan?

“Ik heb altijd al wel in die hoek gestemd. Wat me bij GroenLinks het meest aansprak was de combinatie van systeemverandering en realisme. We willen niet alleen aan een paar bestaande knoppen draaien, maar we durven te kijken hoe het radicaal anders zou kunnen. We zijn in staat om een pakket voorstellen te doen aan experts, zoals het Planbureau voor de Leefomgeving, die kunnen doorrekenen dat GroenLinks de partij is met de grootste CO₂-reductie. Dat vind ik goede politiek: je staat voor iets radicaals, maar je krijgt het ook onderbouwd. Dat vind ik een contrast met partijen die hoog van de toren blazen maar geen pakket kunnen aanleveren waarvan ook externe experts zeggen: hiermee ga je je doelen halen.

Bij het nieuwe regeerakkoord zie je dingen die de goede kant op bewegen. Maar als het gaat om ongelijkheid gebeurt in mijn ogen veel te weinig. Als we in Nederland kijken naar mensen die werken tegenover mensen die bezitten, dan is de conclusie dat tegen bezit niet op te werken is. De belasting op vermogen moet even hoog worden als die op inkomen. Als je geld verdient met aandelen, of met pandjes bezitten, dan wordt dat nu nauwelijks belast, terwijl je er niet voor hoeft te werken. Dat vind ik moeilijk uit te leggen. Zolang dat niet verandert, kun je wel heel veel nieuwe huizen bouwen, maar die gaan dan naar mensen die een tweede of derde huis willen, of naar beleggers. Zolang je daar geen harde maatregelen treft, wordt het voor mensen die een eerste huis moeten zoeken niet makkelijker. Dat hoor ik GroenLinks wel zeggen, maar partijen rechts van ons nog niet, helaas.”

Je bent gewend om veel met modellen te werken, maar verlies je dan niet de menselijke kant uit het oog?

“Ik vind het op zich niet erg dat er met modellen en harde cijfers wordt gewerkt, alleen zouden we een veel bredere blik moeten hebben. Welke cijfers vind je belangrijk? Ik vind dat er een te grote nadruk wordt gelegd op de financiële cijfers: de staatsschuld, de koopkracht — dat haalt altijd de krant. Terwijl er volgens mij heel veel andere indicatoren minstens zo belangrijk zijn. Levensgeluk, hoe lang zijn de wachtlijsten in de zorg, levensverwachting, hoe schoon is de lucht om je heen, hoe groot is de ongelijkheid? Al die indicatoren kun je wiskundig bekijken, alleen die krijgen veel minder nadruk.”

Heb je in de politiek al iets kunnen bereiken waar je trots op bent?

“Ja, zeker. Twee jaar geleden hebben we een wetsvoorstel geschreven toen in het nieuws kwam dat Shell geen winstbelasting betaalde. Bedrijven konden namelijk verliezen die ze in het buitenland hadden gemaakt, verrekenen met de winst die ze maakten in Nederland. Dat ging heel ver; wereldwijd, onbepert in de tijd, voor gigantische bedragen. Dus je zag bedrijven heel creatief worden, met allemaal nieuwe dingen starten ergens in de wereld,

en dan jarenlang verliezen opsparen, om die te kunnen verrekenen. Samen met Bart Snels, het Kamerlid waarvoor ik toen werkte, hebben we een wetsvoorstel gemaakt om dat in te perken. Het kabinet heeft dat voorstel uiteindelijk overgenomen, waardoor we nu elk jaar 250 miljoen extra belasting innen, voor een groot deel bij bedrijven als Shell, die eerst geen winstbelasting betaalden.”

Is er iemand waarvan je zou zeggen: dat is mijn voorbeeld?

“Ik heb niet een groot voorbeeld, maar wat me heel erg aanspreekt aan Pieter Omtzigt als Kamerlid is dat hij echt een doorbijter is en een enorm goed geheugen heeft. Hij wil de dossiers van A tot Z kennen. Zijn manier van oppositievoeren vind ik enorm knap, hij laat zich niet met een kluitje in het riet sturen. Dat vind ik inspirerend.”

Hoe zie je de toekomst voor je?

“Ik heb eigenlijk nooit zo ver vooruit gekeken; ik was eerst van plan om een promotieonderzoek te gaan doen, toen was ik van plan om bij de overheid te werken, en toen kwam ik bij GroenLinks terecht. De rol die ik nu heb als Hoofd Beleid & Organisatie van de fractie, heb ik nog maar sinds een half jaar. Het lijkt me sowieso leuk om dat de komende kabinetsperiode te doen. Ik vind het hele politieke wereldje leuk, maar of ik dat ook voor de schermen goed zou kunnen, dat weet ik niet. Ik heb niet gelijk dat ik denk: dat moet ik doen. En ik heb een brede interesse, als ik bij een universiteit langsfiets, denk ik ook: hartstikke leuk om hier te werken. Misschien ga ik als nog ooit een PhD doen.

Achter de schermen is het leuk dat je kan gaan voor de verdieping, de rapporten kan lezen zonder binnen een minuut een mooie quote voor de camera te hebben; dat is echt weer een ander soort eigenschap. Maar het kan ook wel samengaan. Wie weet.”

Goede suggesties voor een Nederlandse wiskundige met een keerpunt in zijn of haar carrière zijn welkom via keerpunt@nieuwarchief.nl.

Sharon Calor*Faculteit Onderwijs en Opvoeding
Hogeschool van Amsterdam
s.m.calor@hva.nl***Sonia Abrantes Garcêz Palha***Faculteit Onderwijs en Opvoeding
Hogeschool van Amsterdam
s.abrantes.garcez.palha@hva.nl***Laura Kubbe***Faculteit Onderwijs en Opvoeding
Hogeschool van Amsterdam
l.kubbe@uva.nl*

Onderwijs

Studenten denken algoritmisch bij Dynamische Systemen

Dynamische Systemen is een van de vakken van het wiskundeprogramma van de eerste-gradslerarenopleiding wiskunde van de Hogeschool van Amsterdam. De opleiding wil graag meer aandacht geven aan ICT in het wiskundeonderwijs, algoritmisch denken en programmeren, ook vanwege de toegenomen aandacht voor digitale geletterdheid in het voortgezet onderwijs. Het vak Dynamische Systemen leent zich hier goed voor als het gaat om numerieke benaderingen van oplossingen van differentiaalvergelijkingen. In dit artikel beschrijven docenten Sharon Calor, Sonia Abrantes Garcêz Palha en Laura Kubbe een ontwerp van een aantal opdrachten waarmee getracht is algoritmisch denken bij studenten te ontwikkelen. Om in kaart te kunnen brengen hoe studenten algoritmisch denken, is een coderingschema gemaakt en toegepast bij hardop denkende studenten.

Digitale geletterdheid krijgt de laatste tijd veel aandacht in het voortgezet onderwijs. De steeds voortgaande digitalisering van de maatschappij geeft aanleiding tot nadenken over wat leerlingen op school zouden moeten leren op het gebied van ICT. De plannen voor herzieningen van de programma's in het voortgezet onderwijs, waaronder de voorstellen van Curriculum.nu uit 2019, laten dit ook zien. Een onderdeel van deze voorstellen is de formulering van een leergebied *Digitale geletterdheid*. Dit gebied wordt onderverdeeld in vier afzonderlijke domeinen: ICT-basisvaardigheden, Informatievaardigheden, Mediawijsheid en Computational Thinking (CT). Om meer aandacht te kunnen geven aan ICT en onze studenten beter te kunnen voorbereiden op de ontwikkelingen in het onderwijs, hebben we bij de masteropleiding leraar wiskunde van de Hogeschool van Amsterdam (HvA) lesmateriaal bij het vak Dynamische Systemen ontwikkeld dat toegespitst is op het domein CT.

De masteropleiding leraar wiskunde van de HvA is bedoeld voor tweedegraadswiskundeleraars die hun eerstegraadsbevoegdheid willen behalen en in de bovenbouw van het voortgezet onderwijs willen lesgeven. De opleiding wordt in deeltijd aangeboden en studenten combineren de opleiding met hun baan op school. Het curriculum bevat (vak)didactische en pedagogische onderdelen en een praktijkdeel. Daarnaast krijgen de studenten een wiskundeprogramma met vakken als analyse, meetkunde en statistiek. Het vak Dynamische Systemen staat ook op het programma. Studenten leren bij dit vak verschillende gewone differentiaalvergelijkingen op te lossen en toe te passen bij modelleerproblemen. Daarnaast krijgen ze een onderdeel voor verdere verdieping. De opleiding kan daarbij kiezen uit een aantal onderwerpen, zoals *chaostheorie en fractalen* en *numerieke methoden* [6]. Tot voor kort was het eerste onderwerp onderdeel van het vak, maar om meer aandacht te geven

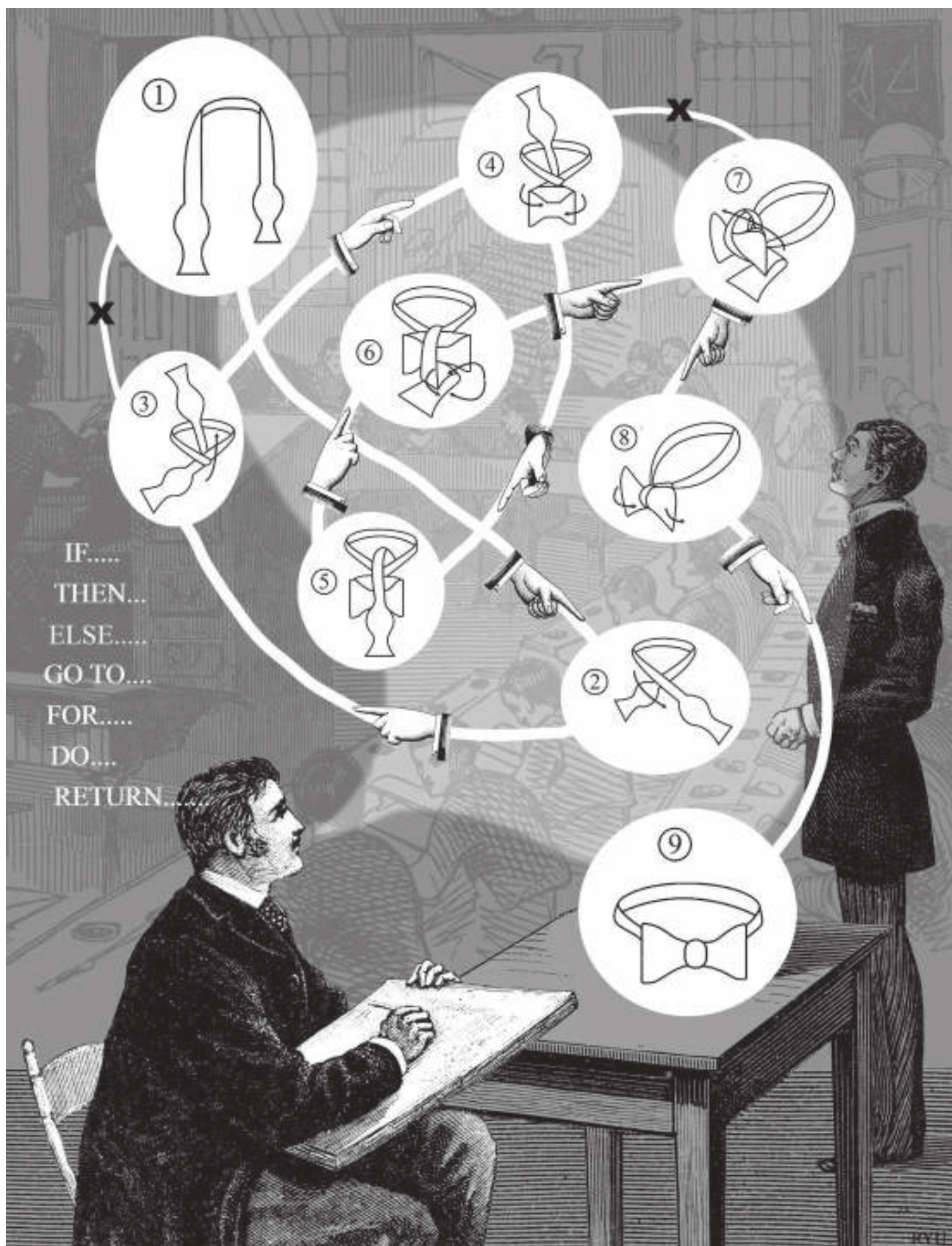
aan CT, algoritmes en ICT, zijn we ons gaan richten op numerieke methoden.

Er is tot nog toe geen consensus in de literatuur te vinden over wat CT is. De meest geciteerde definitie van CT is die van Wing [5]: "The thought processes involved in formulating problems and their solutions so that the solutions are represented in a form that can be effectively carried out by an information-processing agent." Over het algemeen wordt CT geassocieerd met abstractie, generalisatie, decompositie, algoritmes en debugging [1,4]. Bij algoritmes gaat het om de vaardigheid van het bedenken van een verzameling stap-voor-stapbewerkingen of acties om een probleem te kunnen oplossen [3]. Daarbij onderscheidt men twee onderdelen:

1. *Sequentie*: de vaardigheid om acties in de correcte volgorde te plaatsen.
2. *Flow of Control*: de manier waarop instructies/acties in volgorde worden uitgevoerd [3].

Algoritmisch Denken (AD) is in deze optiek een onderdeel van CT, waarbij het gaat om het formuleren van oplossingen van wiskundige problemen in een stappenplan. Curriculum.nu vraagt zelfs specifiek aandacht voor AD bij wiskunde in het voortgezet onderwijs [7] en noemt het belang van het hebben van enige kennis over de talrijke benaderingstechnieken binnen numerieke wiskunde.

Het vermogen om algoritmisch te kunnen denken is vanzelfsprekend belangrijk



bij wiskunde, maar de richting van de ontwikkelingen van een nieuw programma voor de middelbare school geeft aan dat het zinvol is om aankomende docenten wiskunde toe te rusten op het gebied van AD. Door ons te richten op numerieke methoden bij Dynamische Systemen vonden we een natuurlijke manier om AD een plek te geven binnen de opleiding. Het geeft ook aanleiding om aandacht te geven aan programmeren, een belangrijk aspect van AD en iets waar onze studenten weinig tot geen ervaring mee hebben. We denken dat AD bovendien het begrip van differentiaalvergelijkingen kan versterken.

Bij het ontwerpen van dit onderdeel hebben we ons niet alleen beziggehouden met de vraag hoe we AD vorm kunnen geven, maar ook of AD daadwerkelijk is te herkennen bij onze studenten als zij het onderwerp numerieke methoden bestuderen.

Algoritmisch denken

In het college Dynamische Systemen leren studenten verschillende soorten differentiaalvergelijkingen exact op te lossen. Met het programma GeoGebra kunnen ze richtingsvelden en oplossingen tekenen van differentiaalvergelijkingen van de eerste orde. Bij bijvoorbeeld het prooi- en roofdiermodel van Lotka-Volterra lukt dat exact oplossen echter niet, maar de oplossingskrommen kunnen met behulp van GeoGebra en computerprogramma's numeriek worden benaderd. Van richtingsvelden en het idee van een lineaire benadering van een functie is het een kleine stap naar de methode van Euler. Voor het beginwaardeprobleem

$$f(x, y) = \frac{dy}{dx}, \quad y(x_0) = y_0,$$

geeft de methode van Euler de bekende formules

$$x_{n+1} = x_n + h$$

en

$$y_{n+1} = y_n + h \cdot f(x_n, y_n).$$

Het bijbehorende algoritme geeft aanleiding om de studenten kennis te laten maken met eenvoudige algoritmen en manieren om deze op te schrijven. Daarna ligt het voor de hand om naar betere benaderingsmethoden te kijken en verdere stappen te nemen richting programmeren.

Bij het onderwijzen van numerieke methoden om de oplossing van differenti-

aalvergelijkingen te benaderen is het van belang dat studenten de numerieke algoritmes (en wiskundige concepten zoals complexiteit, stabiliteit en convergentie) begrijpen. Studenten moeten ook de numerieke algoritmes kunnen implementeren met een programma en het programma kunnen testen en debuggen. Met andere woorden, studenten moeten de CT-vaardigheden leren, in het bijzonder algoritmisch leren denken, om van een differentiaalvergelijking naar een betrouwbare benaderde oplossing te komen.

Categorieën in algoritmisch denken

Om meer inzicht te krijgen in AD in de context van het vak Dynamische Systemen, hebben we ons gericht op twee onderdelen van AD: het algoritme zelf (in programmeertaal of in *pseudocode*) en de *Flow of Control* [2]. Pseudocode is een manier om een algoritme in woorden te omschrijven, een soort representatie tussen het algoritme en de programmeercode in. Flow of Control is de wijze waarop commando's in volgorde worden uitgevoerd. We spreken ook van volgorde als er lussen in het algoritme voorkomen. Voor de analyse van de redeneringen van studenten bij het maken van een aantal opdrachten, hebben we een codeerschema gemaakt dat hiervan uitgaat. Het schema bestaat uit twee categorieën die verwijzen naar de twee hoofdaspecten van AD: *Algoritme en Pseudocode* en *Algoritme Flow of Control* met daarbij een aantal subcategorieën. Zie Figuur 1.

Algoritme en Pseudocode

De categorie *Algoritme en Pseudocode* bestaat uit de subcategorieën: *Pseudocode*

en *Euleralgoritme*. Bij Pseudocode laat de student zien dat hij/zij het Euleralgoritme in pseudocode kan beschrijven zoals hieronder:

Herhaal n maal

$$d = f(x, y)$$

$$y = y + h \cdot d$$

$$x = x + h$$

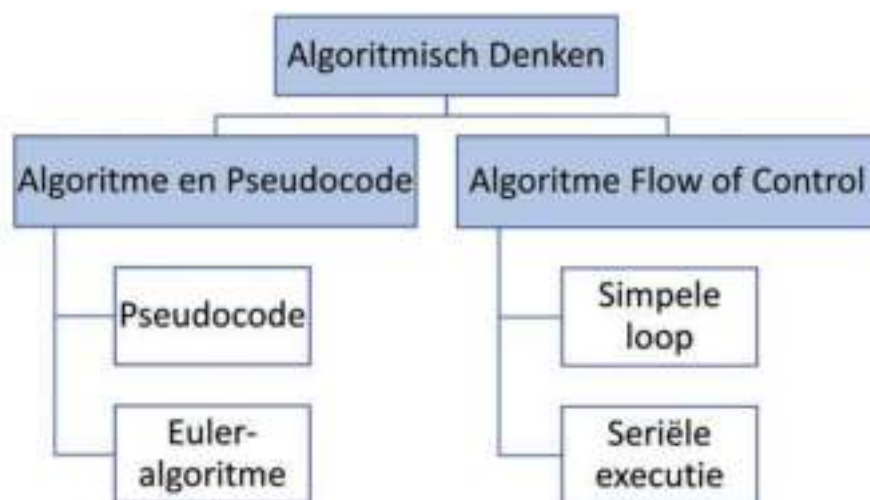
Uitvoer: x en y

Einde

De tweede subcategorie is Euleralgoritme, waarin de student schriftelijk of in woorden laat zien dat hij/zij de aspecten van het Euleralgoritme kan benoemen (maar niet per se hoeft te kunnen toepassen). De student ziet bijvoorbeeld dat het volgende punt steeds op de raaklijn ligt in het vorig punt, benoemt de beginwaarde en vertelt dat de volgende stappen een herhaling zijn van de berekeningen. De twee subcategorieën verwijzen naar twee verschillende aspecten van begrip van een algoritme. Zo kan iemand een algoritme in pseudocode zetten zonder dat hij/zij begrijpt wat het Euleralgoritme is en het omgekeerde kan ook gebeuren.

Algoritme en Flow of Control

Deze categorie bestaat uit de subcategorieën *Simpele loop* en *Seriële executie*. Seriële executie is van toepassing als de student laat zien dat hij/zij begrijpt hoe het programma in serie uitgevoerd is. Dit is bijvoorbeeld te herkennen doordat de student zegt "in de volgende cel komt deze formule te staan" of "eerst x_0 , dan $x_1, \dots$ ". De andere subcategorie is Simpele loop, waarin de student laat zien dat hij/zij begrijpt hoe een simpele loop werkt. Bijvoorbeeld door te



Figuur 1 Categorieën codeerschema AD.

zeggen: “Dus het moet n keer worden herhaald” of “de berekening van het volgende punt n keer...”. De subcategorieën kunnen los van elkaar geobserveerd worden (een simpele loop is een herhaling van een serie uitgevoerde executies en een seriële executie hoeft geen loop te hebben).

Opdracht bij de methode van Euler

De methode van Euler wordt in het college geïntroduceerd als de studenten verschillende manieren hebben gezien om gewone differentiaalvergelijkingen van de eerste orde op te lossen. Ze zijn op dat moment ook bekend met het gebruik van GeoGebra om richtingsvelden en oplossingen te tekenen van differentiaalvergelijkingen van de eerste orde. Ze maken kennis met het idee van een lineaire benadering van een functie, waarna het een kleine stap is naar de methode van Euler. De student krijgt als opdracht dit stap voor stap na te volgen.

Om een idee te krijgen van wat een algoritme is, bestuderen de studenten eerst enkele eenvoudige algoritmen met en zonder lussen. Deze worden in pseudocode gegeven en studenten moeten ook zelf pseudocode opschrijven. De studenten wordt vervolgens gevraagd de methode van Euler in pseudocode te schrijven. Na deze opdracht wordt het algoritme toegepast in GeoGebra om een benadering van een oplossingskromme van een gegeven differentiaalvergelijking te tekenen (Figuur 2).

Opdracht bij de methode van Runge–Kutta

Een veel betere benadering krijg je met de methode van Runge–Kutta. Hierbij wordt steeds een volgend punt (x_n, y_n) berekend met behulp van een soort gemiddelde helling. Hiertoe worden de hellingen genomen van een viertal hulppunten.

De student kan de serie ingewikkelde berekeningen invoegen op de plek van

het Euleralgoritme in de eerder gevonden pseudocode. Weer tekenen de studenten een benadering van een oplossingskromme met behulp van GeoGebra, om te ontdekken dat deze zeer nauwkeurig is. Een leuk weetje is dat de makers van GeoGebra zelf het algoritme van Runge–Kutta gebruiken voor het tekenen van oplossingskrommen.

Opdracht bij een complexer model

Als de studenten een paar algoritmes hebben gezien, willen we een complexer systeem nemen en gaan programmeren in Python. Voor het stelsel differentiaalvergelijkingen van het Lotka–Volterra-model

$$\begin{aligned}\frac{dx}{dt} &= \alpha \cdot x(t) - \beta \cdot x(t) \cdot y(t), \\ \frac{dy}{dt} &= -\delta \cdot y(t) + \gamma \cdot x(t) \cdot y(t),\end{aligned}$$

kunnen studenten bijvoorbeeld een pseudocode schrijven met zowel de methode van Euler als met die van Runge–Kutta voor zekere waarden van α, β, γ en δ . Dan gaat het om twee parallel verlopende berekeningen. Om de stap naar een programmeertaal te zetten, laten we de studenten een programma in Python bekijken (en uitvoeren) waar de oplossingen van een Lotka–Volterra-model worden benaderd met de methode van Euler. Vervolgens moeten de studenten de methode van Euler vervangen door die van Runge–Kutta en het programma testen. Dit onderdeel is nog in ontwikkeling en komt in een volgende ronde aan bod.

Ervaringen met de opdrachten

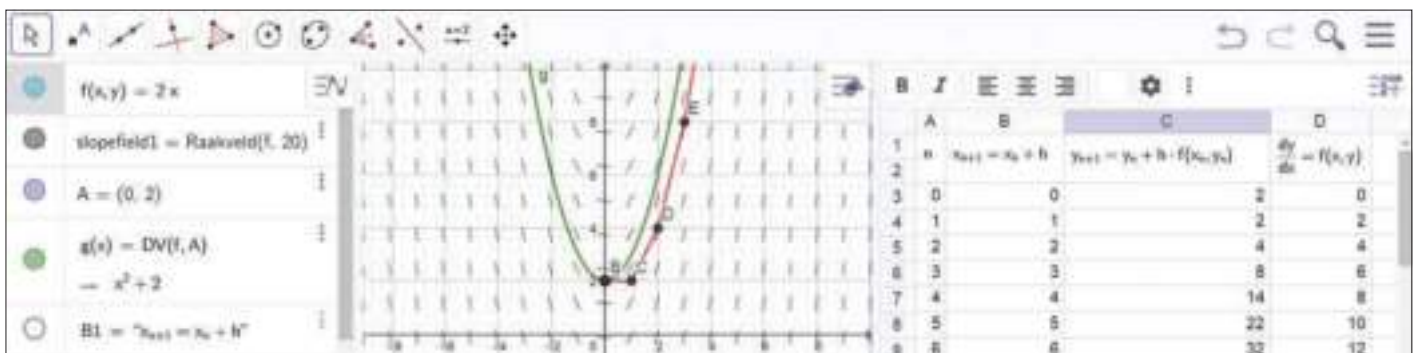
We hebben de opdrachten door de studenten laten maken in studiejaar 2020–2021. Dat was tijdens twee online sessies vanwege de lockdown die was ingesteld gedurende de coronapandemie. Twee van de studenten zijn elk door een onderzoeker apart genomen in een onlinevergadering

om de opdrachten hardop denkend te maken. De rest van de studenten hebben college van de docent Dynamische Systemen gekregen waarin dezelfde stof werd behandeld. De lesstof maakte deel uit van het tentamen dat alle studenten aan het einde van het vak hebben gemaakt.

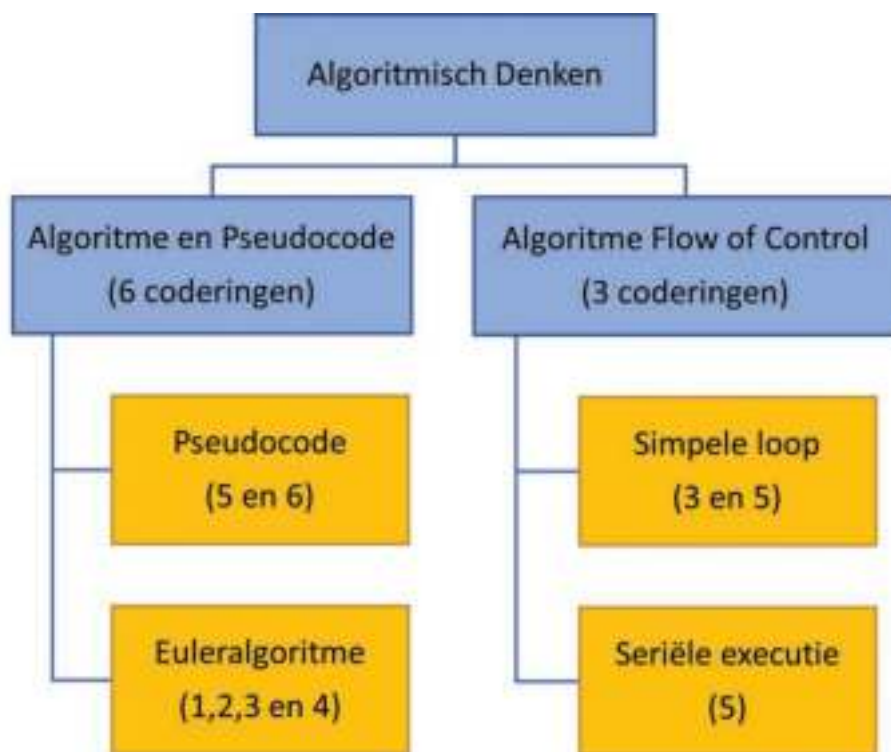
We hebben geobserveerd hoe de twee studenten aan de slag gingen met de opdrachten en gekeken in hoeverre de opdrachten bij de studenten tot AD leidden. Beide studenten waren uiteindelijk in staat om het Euleralgoritme uit te leggen en de pseudocode op te stellen. We zagen dat de studenten afwisselend de instructie lezen, nadachten over hun oplossingen en regelmatig terugkeken. Daarnaast zagen we dat de studenten vaak aan het reflecteren waren tijdens het oplossingsproces. Figuur 3 laat een weergave zien van de codering van het AD van een van de studenten, al werkend aan de opdracht met de methode van Euler.

Van de verschillende fragmenten vonden we er zes waarin AD was te herkennen. Sommige coderingen van de fragmenten vielen onder meerdere categorieën. Er waren negen coderingen in totaal waarvan er zes onder Pseudocode en Euleralgoritme kunnen worden geschaard en drie onder Flow of Control. Een voorbeeld van een fragment dat is gecodeerd als Flow of Control met simpele loop:

“Ik zou bij stap 5 dan invoeren hoe die uitvoer gegeven moet worden, dat is door die formule neer te zetten van $x_{n+1} = x_n + h$, of u_h , $y_{n+1} = y_n + h$ maal $f(x_n, y_n)$, maar dan wel even de n 's vervangen door nullen en dan zeggen dat die dat moet gaan herhalen en dat die zelf een $u_h \dots$ dat werd net een lus genoemd geloof ik. Dat die zelf een lus maakt.”



Figuur 2 GeoGebra-werkblad.



Figuur 3 Visuele weergave AD van een student.

Het is interessant om te zien dat de student nog twijfels over zijn oplossing heeft, nadat hij de pseudocode uiteindelijk had gevonden. Dit wijst de student zelf aan een gebrek aan ervaring met coderen. We denken dat het er ook te mee maken heeft dat hij niet gewend is om zelf een algoritme uit te werken.

Conclusie en discussie

De opdrachten die we hebben ontworpen voor het vak Dynamische Systemen zetten

de studenten aan het denken over algoritmes en over manieren om ze weer te geven. We zien dat studenten nog wel even moeten puzzelen voordat ze een simpele loop kunnen opschrijven in pseudocode, maar dat ze er uiteindelijk uitkomen. De opdrachten zijn toegankelijk en laten studenten op een laagdrempelige manier ervaring opdoen met algoritmes en algoritmisch denken.

Algoritmisch denken is niet nieuw binnen de wiskunde; je kunt wel zeggen dat

het onmogelijk is om wiskunde te bedrijven zonder algoritmisch te denken. We weten echter ook hoe moeilijk het is om denken en redeneren in de schoolpraktijk vorm te geven. Het expliciet benoemen van AD en CT als zelfstandige activiteiten, kan ertoe leiden dat er in het onderwijs meer aandacht komt voor deze processen. Wellicht dat docenten hierdoor ook ruimte in het curriculum maken om aandacht te besteden aan denken en redeneren en een didactiek kunnen toepassen die dit ook ondersteunt.

Het lijkt ons dat de lerarenopleiding een uitstekende plek is om aankomende docenten wiskunde hierop voor te bereiden. Het schema dat we hebben gemaakt om het AD van studenten in beeld te brengen, heeft ons geholpen om scherper te krijgen welke aspecten van de opdracht leiden tot AD. En we zien dat we het schema nog kunnen verbeteren. Zo vertonen de subcategorieën Pseudocode en Euleralgoritme enige overlap. Een student kan bijvoorbeeld blijk geven van begrip van het Euleralgoritme door een goede pseudocode op te schrijven. Dit geldt ook voor de subcategorieën Simpele loop en Seriële executie.

Verder denken we dat we in de opleiding bij andere onderdelen van wiskunde vakken eenvoudige algoritmes kunnen introduceren, voordat Dynamische systemen aan bod komt, en dat we de studenten hier wat langer dan twee colleges mee moeten laten werken. In feite moeten we meer ruimte maken bij de masteropleiding leraar wiskunde van de Hogeschool van Amsterdam om studenten algoritmisch te laten denken. ☞

Referenties

- 1 C. Angeli, J. Voogt, A. Fluck, M. Webb, M. Cox, J. Malyn-Smith en J. Zagami, A K-6 computational thinking curriculum framework: Implications for teacher knowledge, *Education Technology and Society* 19(3) (2016), 47–57.
- 2 S. Grover, R. Pea en S. Cooper, Designing for deeper learning in a blended computer science course for middle school students, *Computer Science Education* 25 (2015), 199e237.
- 3 C.C. Selby, *How Can the Teaching of Programming be Used to Enhance Computational Thinking Skills?*, doctoral dissertation, University of Southampton, 2014
- 4 V.J. Shute, C. Sun en J. Asbell-Clarke, Demystifying computational thinking, *Educational Research Review* 22 (2017), 142–158.
- 5 J.M. Wing, *Computational thinking: What and why?*, Carnegie Mellon University, 2010, <https://www.cs.cmu.edu/~CompThink/papers/TheLinkWing.pdf>.
- 6 10voordeleraar, Vereniging Hogescholen, *Kennisbasis Eerstegraadslerarenopleiding Wiskunde*, 2018, <https://10voordeleraar.nl>.
- 7 <https://www.curriculum.nu/voorstellen/rekenen-wiskunde/uitwerking-rekenen-wiskunde>, Grote opdracht 13: Algoritmisch denken.

Jan Vonk

Mathematisch Instituut

Universiteit Leiden

j.b.vonk@math.leidenuniv.nl

Geschiedenis

Het twaalfde probleem van Hilbert

Voor Carl Friedrich Gauß (1777–1855) gold de getaltheorie als de koningin der wiskunde, en de theorie der *complexe vermenigvuldiging* van elliptische krommen wordt door sommigen als haar kroonjuweel gezien. David Hilbert (1862–1943) droeg deze theorie een bijzonder warm hart toe, en nam diens veralgemening op als het twaalfde op zijn lijst van 23 open problemen, die hij in 1900 voordroeg aan de wiskundige wereld. Wat hebben we over dit probleem geleerd sinds die tijd? En wat is het belang van beroemde open problemen in de wiskunde? In dit artikel laat Jan Vonk zijn licht schijnen op deze vragen.

Drijfveren van de wiskunde

Het belang van open problemen in de wiskunde is zo oud als de discipline zelf. Ze gelden als mijlpalen, en de vooruitgang en de kracht van het vakgebied worden erdoor gemeten. Maar waarom worden wiskundigen er zo door gegrepen? Dit heeft niet altijd te maken met het praktische nut van de vraag, en hoeft in sommige gevallen weinig meer te zijn dan schoonheid of persoonlijke nieuwsgierigheid. In sommige gevallen is het een zoektocht naar nieuwe structurele verbanden tussen verschillende vakgebieden, of krachtige toepassingen waar in de maatschappij vraag naar is, en in andere gevallen ligt het dan weer ergens anders. De open problemen van het grootste historische belang komen voor in elke kleur van het spectrum.

Voorbeeld 1. Dat belangrijke open problemen in de wiskunde lang niet altijd van groot praktisch nut hoeven te zijn, blijkt uit het voorbeeld van de *laatste stelling van Fermat*. Dit bekende probleem, geformuleerd door Pierre de Fermat (1607–1665) en opgelost door Andrew Wiles in 1993, stelt dat elke gehele oplossing $(x, y, z) \in \mathbb{Z}^3$ van de vergelijking

$$x^n + y^n = z^n, \quad n \geq 3,$$

noodzakelijk aan $xyz = 0$ moet voldoen. Dat wil zeggen, minstens één van haar coördinaten moet gelijk zijn aan nul. Dit staat in sterk contrast met het geval $n = 2$, waar oneindig veel niet-nul-oplossingen bestaan zoals $3^2 + 4^2 = 5^2$ en $5^2 + 12^2 = 13^2$, waarvan reeds tabellen gemaakt werden ten tijde van de Babyloniërs. De ontwikkeling van de wiskunde heeft enorm veel te danken aan dit probleem, en generaties wiskundigen zijn in hun creatieve pogingen tot inzichten gekomen van onschatbare waarde. De aantrekkingskracht van het probleem ligt dus in zijn eenvoud en schoonheid, maar het nut voor de wiskunde ligt vooral in de ontwikkelingen die tot haar oplossing geleid hebben, en de (vaak onvoorziene) toepassingen van die ontwikkelingen.

Voorbeeld 2. Aan de andere kant van het spectrum zijn er open problemen die een dieper structureel verband zoeken tussen verschillende takken van de wiskunde. Een klassiek voorbeeld is het vermoeden van Birch en Swinnerton-Dyer, dat een diep verband voorspelt tussen de *analyse* en *algebra* van zogenaamde elliptische krommen. Kies bijvoorbeeld je favoriete gehele getal $d > 0$ en beschouw de vergelijking

$$E_d: y^2 = x^3 + dx. \quad (1)$$

We kunnen ons afvragen hoeveel *rationale* oplossingen (x, y) deze vergelijking heeft. Het antwoord hangt sterk af van de gekozen waarde van d . Zo zijn er voor $d = 4$ eindig veel oplossingen (precies drie, namelijk $(0, 0)$, $(2, 4)$ en $(2, -4)$), en voor $d = 5$ oneindig veel oplossingen. Welk van deze gevallen het is, wordt bepaald door de zogenaamde *rang*, een algebraïsche invariant van de elliptische kromme E_d . Aan de hand van uitgebreide berekeningen met een computer, merkten Bryan Birch (geb. 1931) en Peter Swinnerton-Dyer (1927–2018) een onverwacht verband op met de limiet $\lim_{X \rightarrow +\infty} P(X)$, die de kritieke waarde van de L -functie van E meet; een *analytische* invariant van E_d . Hier is $P(X)$ de functie van X gedefinieerd door

$$P(X) := \prod_{p < X} \frac{N_p}{p},$$

waarbij N_p het aantal oplossingen van (1) modulo p beduidt, en het product loopt over all priemgetallen $p < X$. De spectaculaire ontdekking van Birch–Swinnerton-Dyer was dat $P(X)$ groeit als een veelvoud van $\log(X)^r$, waarbij $r \geq 0$ de rang van E_d is. In het bijzonder is $P(X)$ begrensd wanneer E_d eindig veel rationale oplossingen heeft, en divergeert ze als er oneindig veel rationale oplossingen zijn.

Zelfs zonder de precieze vaktechnische formulering van het vermoeden van Birch–Swinnerton-Dyer, voelen we nu al aan dat dit een vraag van een andere aard is dan de laatste stelling van Fermat: haar kracht ligt in het onverwachte verband dat ze voorspelt tussen algebra en analyse. De verbazing die dit opwekte doet verwachten dat een bewijs zodanig baanbrekend zal moeten zijn, dat het onze inzichten fundamenteel zal veranderen. Dat het vermoeden waar is, betwijfelt inmiddels niemand meer. Wat we dus eigenlijk willen weten is niet *dat* het waar is, maar *waarom* het waar is.

De wiskundige gemeenschap hecht een enorm belang aan aantrekkelijke open problemen, en ze bepaalt ook stevast toonaangevende nieuwe open problemen. Soms gebeurt dat met de nodige publiciteit: op het Internationaal Congres voor Wiskundigen (ICM) in 1900 hield Hilbert een bijzondere rede, waarin hij een selectie van belangrijke open problemen voorstelde als uitdagingen voor de eeuw die komen zou. Bij de volgende eeuwwisseling in 2000 werd een gelijkaardige lijst met open problemen samengesteld door het Clay Mathematics Institute. Op deze laatste lijst staan zeven open problemen, waarvan reeds het vermoeden van Poincaré bewezen werd door Grigori Perelman (2003). De overige zes, inclusief het vermoeden van Birch–Swinnerton-Dyer dat we eerder noemden, zijn op dit moment nog steeds open.

Fermat en Euler

We zullen het hier nu hebben over één specifiek open probleem: Het twaalfde probleem van Hilbert. Zijn formulering is het resultaat van een lange evolutie, en maakt deel uit van een heus epos dat tot op de dag van vandaag nog steeds in volle ontwikkeling is. We beginnen ons verhaal met Pierre de Fermat (1607–1665) die voor priemgetallen p bewees dat

$$p = x^2 + y^2 \iff p = 2 \text{ of } p \equiv 1 \pmod{4}$$

Hij dacht ook na over een algemenere versie: Wanneer is een priemgetal p van de vorm

$$p = x^2 + ny^2?$$

Het antwoord hangt sterk af van het gekozen gehele getal n . Vele generaties wiskundigen bogen zich over dit probleem, en we moedigen de energieke lezer aan om zelf hun favoriete waarde van n te kiezen, en hun eigen vermoeden te formuleren aan de hand van (al dan niet manuele) experimenten. Laat ons ter illustratie $n = 3$ kiezen, en voor enkele kleine priemgetallen nagaan of ze al dan niet van de gewenste vorm zijn. Het resultaat staat in Tabel 1, tweede kolom, waarbij een leegte duidt op een negatief antwoord.

Bij het maken van deze tabel vallen ons onmiddellijk enkele dingen op. Zo lijkt het bijvoorbeeld alsof we ongeveer de helft van de priemgetallen kunnen schrijven in de gewenste vorm. Daarnaast kunnen we ons laten inspireren door het geval $n = 1$ van Fermat, en pogen om een gelijkaardige congruentievoorwaarde te verzinnen. We komen al snel uit op het vermoeden dat

$$p = x^2 + 3y^2 \iff p = 3 \text{ or } p \equiv 1 \pmod{3}.$$

Wie tot dezelfde conclusie kwam, is in goed gezelschap: Fermat zelf kwam tot deze conclusie, en beweerde ook een bewijs te hebben. Later schopte Euler (1707–1783) het nog veel verder, en vond niet alleen een bewijs voor de uitspraken van Fermat, maar dacht ook na over grotere waarden van n . Zijn ontdekkingen waren vaak erg verrassend. Laat ons bijvoorbeeld $n = 27$ kiezen. Dan is het resultaat de derde kolom van Tabel 1, een uitgedunde versie van de tweede kolom. Dit keer vinden we een heel stuk minder priemgetallen. De volgende priemgetallen in dit rijtje zijn

$$229, 277, 283, 307, 397, 433, \\ 439, 457, 499, 601, 643, 691, \dots$$

en als we deze berekening doorzetten krijgen we gemiddeld de indruk dat het aantal priemgetallen van deze vorm ongeveer $\frac{1}{6}$ van het totaal is. Het is een stuk minder duidelijk hoe deze priemgetallen beschreven kunnen worden. We zien dat ze noodzakelijk 1 modulo 3 zijn, maar die voorwaarde is duidelijk niet voldoende. Op basis van experimentele observaties kwam Euler tot het vermoeden dat de priemgetal-

p	$x^2 + 3y^2$	$x^2 + 27y^2$
2		
3	$0^2 + 3 \cdot 1^2$	
5		
7	$2^2 + 3 \cdot 1^2$	
11		
13	$1^2 + 3 \cdot 2^2$	
17		
19	$4^2 + 3 \cdot 1^2$	
23		
29		
31	$2^2 + 3 \cdot 3^2$	$2^2 + 27 \cdot 1^2$
37	$5^2 + 3 \cdot 2^2$	
41		
43	$4^2 + 3 \cdot 3^2$	$4^2 + 27 \cdot 1^2$
47		
53		
59		
61	$7^2 + 3 \cdot 2^2$	
67	$8^2 + 3 \cdot 1^2$	
71		
73	$5^2 + 3 \cdot 4^2$	
79	$2^2 + 3 \cdot 5^2$	
83		
89		
97	$7^2 + 3 \cdot 4^2$	
101		
103	$10^2 + 3 \cdot 1^2$	
107		
109	$1^2 + 3 \cdot 6^2$	$1^2 + 27 \cdot 2^2$
113		
127	$10^2 + 3 \cdot 3^2$	$10^2 + 27 \cdot 1^2$
131		
137		
139	$8^2 + 3 \cdot 5^2$	
149		
151	$2^2 + 3 \cdot 7^2$	
157	$7^2 + 3 \cdot 6^2$	$7^2 + 27 \cdot 2^2$
163	$4^2 + 3 \cdot 7^2$	
167		
173		
179		
181	$13^2 + 3 \cdot 2^2$	
191		
193	$1^2 + 3 \cdot 8^2$	
197		
199	$14^2 + 3 \cdot 1^2$	
211	$8^2 + 3 \cdot 7^2$	
223	$14^2 + 3 \cdot 3^2$	$14^2 + 27 \cdot 1^2$

Tabel 1 Priemgetallen van de vorm $p = x^2 + 3y^2$ naast priemgetallen van de vorm $p = x^2 + 27y^2$.

len van de vorm $p = x^2 + 27y^2$ precies deze zijn waarvoor

$$p \equiv 1 \pmod{3}$$

en

$$x^3 - 2 \equiv 0 \pmod{p} \text{ een oplossing heeft.}$$

Euler kon dit vermoeden nooit bewijzen, en een bewijs kwam eerst van de hand van Gauß (1777–1855) die gebruikmaakte van zijn kubische wederkerigheidswet. De vlijtige lezer die ijverig tot zijn of haar eigen vermoedens kwam voor kleine waarden van n zal een schril contrast zien met $n = 27$, waar een congruentievoorwaarde niet toereikend is, en de ‘magische’ polynoom $x^3 - 2$ opduikt.

Het twaalfde probleem van Hilbert

Voor de polynoom $x^3 - 2$, die als *deus ex machina* in het werk van Euler opdook, kwam later een structurele verklaring. De wiskunde ontwikkelde ongeveer een eeuw na het werk van Gauß de *klassenlichamentheorie*, een mijlpaal die ons inzicht in deze vragen volledig transformeerde. Zo leerden we het volgende:

- De *klassenlichamentheorie* vertelt ons dat er voor elke waarde van n een ‘magische polynoom’ $f_n(x)$ bestaat met de eigenschap dat, op een eindig aantal uitzonderingen na, er geldt dat $p = x^2 + ny^2$ als en slechts als $-n$ een kwadraat is modulo p (dit is een congruentievoorwaarde op p , door de kwadratische wederkerigheidswet) en $f_n(x) \equiv 0 \pmod{p}$ een gehele oplossing heeft in x . In vaktermen is f_n een polynoom wiens nulpunten voortbrengers zijn van het zogenaamde *ringklassenlichaam* van $\mathbb{Z}[\sqrt{-n}]$. (De uitzonderingen zijn zogenaamde vertakte of singuliere priemgetallen, die men voor elke f_n expliciet kan bepalen.)
- De theorie der *complexe vermenigvuldiging* van elliptische krommen (afgekort CM-theorie, van het Engelse ‘complex multiplication’) stelt ons in staat om voor elke *positieve* waarde $n > 0$ een ‘magische polynoom’ $f_n(x)$ met deze eigenschappen te construeren. Bijvoorbeeld, in het geval $n = 23$ kunnen we

$$f_{23}(x) = x^3 - x - 1$$

gebruiken. Er geldt dat

$$p = x^2 + 23y^2 \iff$$

$$\begin{cases} -23 \text{ is een kwadraat modulo } p \\ \text{en } x^3 - x - 1 \equiv 0 \pmod{p} \text{ heeft een oplossing.} \end{cases}$$

Klassenlichamentheorie

De klassenlichamentheorie geeft ons een volledige beschrijving van de eindige abelse uitbreidingen van een getallenlichaam K . De absolute Galoisgroep $\text{Gal}(\bar{K}/K)$ heeft een maximaal abels quotiënt $\text{Gal}(\bar{K}/K)^{\text{ab}}$ dat beschreven wordt aan de hand van een surjectieve afbeelding

$$\varphi: C_K \rightarrow \text{Gal}(\bar{K}/K)^{\text{ab}}$$

van de idèle klassengroep C_K . Deze afbeelding heet de *Artin-afbeelding*, en induceert een isomorfisme tussen de pro-eindige completering van het domein en $\text{Gal}(\bar{K}/K)^{\text{ab}}$. Hierin ligt de kracht van klassenlichamentheorie: ze beschrijft alle abelse uitbreidingen (‘externe’ objecten) aan de hand van de ‘interne’ idèle klassengroep, een object dat helemaal beschreven kan worden aan de hand van de elementen en lichaamsoperaties van K zelf.

Ondanks de duidelijke structurele eigenschappen van de Artin-afbeelding, is haar definitie erg abstract, en is het helemaal niet duidelijk hoe ze in de praktijk te beschrijven valt. Wie wil weten welke eindige abelse uitbreiding bij een gegeven open verzameling van C_K hoort, heeft weinig aan haar definitie. CM-theorie van elliptische krommen geeft een heel elegante manier om alle eindige abelse uitbreidingen van K te beschrijven (met voortbrengers), voor een speciale klasse van getallenlichamen K : de imaginair kwadratische uitbreidingen van de rationale getallen $\mathbb{Q}$.

Het is belangrijk te vermelden dat de toepassing op ons motiverend probleem van priemgetallen van de vorm $p = x^2 + ny^2$ slechts een vage schaduw is van wat klassenlichamentheorie en CM-theorie in werkelijkheid verwezenlijkt hebben. De lezer

met meer achtergrond kan te rade gaan bij [2] en [1]. Desondanks zien we zelfs in deze bescheiden context al een opmerkelijk defect in CM-theorie: Wat gebeurt er als $n < 0$? Bijvoorbeeld, wanneer is een priemgetal p van de vorm $p = x^2 - 205y^2$? De eerste

Complexe vermenigvuldiging

De stelling van Kronecker–Weber vertelt ons dat elke eindige abelse uitbreiding van $K = \mathbb{Q}$ bevat is in een *cyclotomisch* lichaam $\mathbb{Q}(\zeta_n)$, voor een zekere n , waarbij ζ_n een primitieve n -de eenheidswortel is. Deze eenheidswortels kan men zien als speciale waarden van de complex analytische functie

$$z \mapsto \exp(\pi iz)$$

bij rationale waarden van het argument z . Deze functie, of althans diens imaginaire deel, komt ons bekend voor uit de hoofdtypek, en geeft ons een heel expliciete beschrijving van de eindige abelse uitbreidingen van $\mathbb{Q}$.

Voor imaginair kwadratische getallenlichamen K geeft de theorie van complexe vermenigvuldiging ons een heel gelijkaardige beschrijving van de eindige abelse uitbreidingen van K , door middel van voortbrengers die speciale waarden van bijzondere complex analytische functies zijn. Het primaire voorbeeld is de j -functie van Klein, een holomorfe functie op het Poincaré-halfvlak

$$\mathfrak{H} := \{z \in \mathbb{C} : \text{Im}(z) > 0\}$$

die symmetrisch is voor de werking van de groep $\text{SL}_2(\mathbb{Z})$ door Möbius-transformaties op het argument z . In het bijzonder is deze functie ook invariant onder $z \mapsto z + 1$, en ze heeft een Fourier-ontwikkeling van de vorm

$$j(q) = q^{-1} + 744 + 196884q + 21493760q^2 + \dots, \quad q = e^{2\pi iz}.$$

De j -functie is een ongekennde bron van rijkdommen, die haar belang in de klassenlichamentheorie ver overstijgt. Haar waarden voor imaginair kwadratische argumenten $z \in K$, de zogenaamde *singuliere moduli*, waren de genesis van het werk van Gross en Zagier over het vermoeden van Birch en Swinnerton-Dyer. Haar Fourier-coëfficiënten werden in verband gebracht met de Monster-groep in het werk van Borcherds. Daarnaast duikt ze op in een horde van verschillende contexten binnen de wiskunde en natuurkunde.

priemgetallen van deze vorm zijn

5, 59, 131, 139, 241, 269, 271, 359, 409, 541,
569, 599, 661, 701, 761, 859, 881, 911, 941, ...

Klassenlichamentheorie voorspelt weliswaar het bestaan van een magische polynoom $f_n(x)$ zoals tevoren, maar CM-theorie, waarvan Kronecker vele grondslagen legde, laat ons in de steek om deze te construeren. Dit is wat het twaalfde probleem van Hilbert ons vraagt: een algemene versie van CM-theorie die alle klassenlichamen expliciet beschrijft, en niet enkel die van de rationale getallen $\mathbb{Q}$ en imaginair kwadratische lichamen $\mathbb{Q}(\sqrt{-n})$ voor $n > 0$. Een vrije vertaling van het origineel Franse citaat van Hilbert stelt:

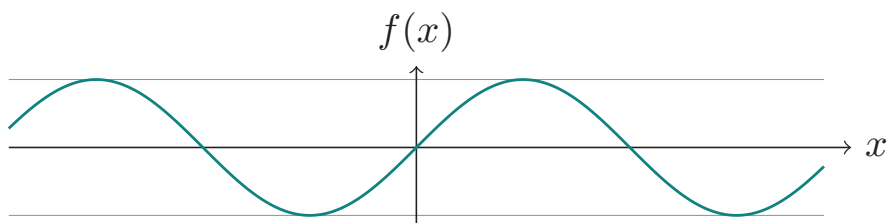
“De uitbreiding van de stelling van Kronecker naar het geval waarbij, in de plaats van rationale of imaginair kwadratische lichamen, een willekeurig algebraïsch lichaam genomen wordt als domein, schijnt mij van het grootste belang. Ik beschouw dit probleem als een van de diepste en meest verregaande in de theorie der getallen en functies. [...] Het is duidelijk dat in dit probleem de drie fundamentele gebieden der wiskunde, getaltheorie, algebra, en functietheorie, in de dichtste aanraking met elkaar komen, en ik ben ervan overtuigd dat in het bijzonder de theorie van functies in meerdere variabelen verrijkt zal worden indien men erin slaagt functies te vinden die de rol vervullen voor willekeurige getallenlichamen van de exponentiële en elliptische modulaire functies.”

David Hilbert

De aanpak van Kronecker, en de functies waarover Hilbert zo laaiend enthousiast klinkt, kunnen we zien als verfijningen van een oude bekende: de sinusfunctie $f: x \mapsto \sin(\pi x)$, zie Figuur 1. Van belang voor de theorie zijn de waarden van deze functie bij rationale argumenten, zoals

$$\begin{aligned}\sin\left(\frac{\pi}{2}\right) &= 1, \\ \sin\left(\frac{\pi}{4}\right) &= \frac{\sqrt{2}}{2}, \\ \sin\left(\frac{\pi}{8}\right) &= \frac{\sqrt{2-\sqrt{2}}}{2}, \\ \sin\left(\frac{\pi}{16}\right) &= \frac{\sqrt{2-\sqrt{2+\sqrt{2}}}}{2}, \\ &\vdots\end{aligned}$$

Alle waarden $f(x)$ bij rationale getallen zijn *algebraïsch*; ze voldoen aan een polynoom



Figuur 1

met gehele coëfficiënten. Kronecker (en Eisenstein, in onafhankelijk werk) ontdekte een analogon hiervan in twee dimensies, gebruikmakend van functies met translatiesymmetrie in twee verschillende richtingen, wiens waarden algebraïsche getallen opleveren die nulpunten zijn van de magische polynomen van voordien. Deze historische ontwikkelingen, wiens veralgemening het doel van Hilberts twaalfde probleem is, werden op meesterlijke wijze beschreven door Weil [7].

Dirichlet en Stark

Een recente doorbraak in Hilberts twaalfde probleem kwam van Samit Dasgupta en Mahesh Kakde [4], die een analytische constructie bewezen voor voortbrengers van klassenlichamen van totaal reële getallenlichamen. Een speciaal geval is de systematische constructie voor de ‘magische polynomen’ $f_n(x)$ met $n < 0$. Dit werk bouwt verder op vele spectaculaire ontwikkelingen die het vooraf gaan, en die steunen op een rijke traditie die haar wortels heeft in het werk van Dirichlet en Stark.

Het beginpunt komt deze keer uit een verrassend andere richting. We merkten reeds op dat de tweede kolom van Tabel 1 ruwweg voor de helft gevuld leek. Het werk van Dirichlet (1805–1859) impliceert dat dit inderdaad het geval is. Zijn argument berust op technieken uit de *analyse*, en was het beginpunt van de bloeiende discipline van de *analytische getaltheorie*. Dirichlet gebruikt in zijn werk veralgemeningen van de vertrouwde Riemann-zêta-functie; van het meeste belang voor ons is het gedrag van de *Dedekind-zêta-functie* $\zeta_K(s)$ van een getallenlichaam K (i.e. een eindige lichaamsuitbreiding van $\mathbb{Q}$) in de limiet $s \rightarrow 1$. Dit is het zogenaamde *kritieke punt*, een concept dat we al eerder ontmoetten in de context van elliptische krommen en het vermoeden van Birch–Swinnerton-Dyer. Deze functie is gedefinieerd door

$$\zeta_K(s) := \prod_p \left(1 - \frac{1}{\text{Nm}(p)^s}\right)^{-1}, \quad \text{Re}(s) > 1,$$

waar het product loopt over alle niet-triviale priemidealen van de ring van gehele van K . Wanneer $K = \mathbb{Q}$ is dit precies de Riemann-zêta-functie, bekend van een ander befaamd open probleem: de Riemann-hypothese. De *Dirichlet-klassengetalformule* stelt dat

$$\lim_{s \rightarrow 1} (s-1) \zeta_K(s) = \frac{2^n \cdot (2\pi)^{r_2} \cdot |\text{Cl}_K| \cdot \text{Reg}_K}{|\mathcal{O}_{K,\text{tors}}^\times| \cdot \sqrt{|\Delta_{K/\mathbb{Q}}|}}$$

waarin alle termen belangrijke aritmetische varianten zijn wiens definitie hier achterwege gelaten wordt. Voor ons is de term Reg_K van belang, de *regulator* van K , die een ingewikkelde uitdrukking is in een collectie *grondeenheden*, speciale elementen van het lichaam K die voldoen aan ‘magische polynomen’.

Veel later kwam Stark (geb. 1939) tot het belangrijke inzicht dat het voor een klassenlichaam K mogelijk zou moeten zijn de Dirichlet-klassengetalformule te verfijnen, door de Galois-symmetrieën van K uit te buiten. Dit leidde tot de vermoedens van Stark [6], die in het bijzonder een analytische constructie impliceren van grondeenheden van K . De vermoedens van Stark zijn nog steeds open, maar in het begin van de 21ste eeuw kwam hier verandering in voor een *p-adische variant* van het vermoeden, door het werk van Darmon, Dasgupta en Pollack [3], dat op zijn beurt steunde op ideeën van Gross, Ribet, Mazur, Greenberg, Stevens, en vele anderen, in de context van het vermoeden van Birch–Swinnerton-Dyer en de laatste stelling van Fermat. Dit illustreert mooi hoe wiskundige ideeën vaak krachtige toepassingen vinden in een probleem dat volledig verschilt van hun oorspronkelijke doel. Sinds afgelopen jaar [4] bestaat er een systematische constructie van de ontbrekende ‘magische polynomen’, die bovendien ook praktisch berekenbaar is. We vinden bijvoorbeeld voor *oneven* priemgetallen dat

$$p = x^2 - 205y^2 \Leftrightarrow \begin{cases} 205 \text{ is een kwadraat modulo } p, \text{ en} \\ 16x^4 + 31x^3 + 31x^2 + 31x + 16 \equiv 0 \pmod{p} \\ \text{heeft een oplossing.} \end{cases}$$

Terugblik op Hilberts twaalfde probleem

De ontwikkelingen rond de p -adische variant van het vermoeden van Stark doen in zekere zin helemaal wat het twaalfde probleem van Hilbert vraagt. Is het probleem dan eindelijk opgelost, meer dan een eeuw nadat het in 1900 werd voorgedragen aan de wiskundige gemeenschap?

Het is duidelijk dat dit een van de grote wiskundige ontwikkelingen van ons tijdsgewricht vormt, maar langs de andere kant is het ook een begin van een lange en spannende weg die lonkt. Voorlopig is de toepasbaarheid van deze ideeën beperkt tot klassenlichamen van totaal reële $K/\mathbb{Q}$, zodat Hilbert zijn probleem nog niet helemaal zou kunnen opdoeken. Daarnaast moeten we ook opmerken dat sinds de tijd van Hilbert een enorme hoeveelheid belangrijke ontwikkelingen heeft plaatsgevonden, waaronder:

- In de 19de eeuw lag de nadruk op expliciete klassenlichamentheorie, de achterliggende wiskunde van het soort vraagstukken als priemgetallen van de vorm $p = x^2 + ny^2$. Deze theorie was destijds nog in volle ontwikkeling, en vormde toen een heel belangrijk onderzoeksgebied binnen de wiskunde.
- In de late 20ste eeuw vond een ware revolutie plaats door het werk van Gross en Zagier [5] die op spectaculaire wijze CM-theorie uitbreidden om een deel van het vermoeden van Birch en Swinnerton-Dyer te bewijzen. Er is sindsdien sprake van een heuse renaissance van CM-theorie.

- In de 21ste eeuw is het belang van CM-theorie nog sterk toegenomen, door toepassingen binnen de cryptografie, zoals in het relatief jonge vakgebied van de post-quantumcryptografie, wiens doel het is om elektronische betalingen, virtuele authenticatie, et cetera, veilig te maken tegen aanvallen met quantumcomputers.

Het belang van CM-theorie binnen en buiten de wiskunde groeit met de dag, in vakgebieden waarvoor ze oorspronkelijk niet ontworpen werd, en haar rol is nog lang niet uitgespeeld. De 20ste- en 21ste-eeuwse ontwikkelingen van CM-theorie komen voort uit miraculeuze eigenschappen van de *singuliere moduli* van Kronecker en Weber, geconstrueerd aan de hand van analytische functies die enorm verschillen van de L -functies in de aanpak van Stark. Het waren precies deze functies waarover Hilbert met zo veel enthousiasme schreef, maar daarvan ontbreekt helaas nog steeds elk spoor voor algemene getallenlichamen. Meer dan een eeuw na Hilbert moeten we dus misschien wel onze blik verruimen, en het twaalfde probleem ook in een context zien die al de spannende ontwikkelingen sinds de tijd van Hilbert weerspiegelt. De mijlpaal die met het werk van Dasgupta en Kakde bereikt werd, is dus tegelijk ook een beginpunt van een nieuw avontuur dat ons op ongekende nieuwe plaatsen zal brengen.

Oplossen, of niet oplossen?

De verleiding om bekende open problemen als opgelost te bestempelen is altijd groot,

en geeft ons als gemeenschap een gevoel van vooruitgang en voldoening. Langs de andere kant mogen we niet overhaast zulke uitspraken doen, want een goed onopgelost probleem is een schatkist, die net door zijn gebrek aan oplossing grote bijdragen levert aan de wiskunde. In de nasleep van de oplossing van de laatste stelling van Fermat deed John Conway (1937–2020) de volgende uitspraak.

“I’m relieved that this result is now settled. But I’m sad in some ways, because Fermat’s Last Theorem has been responsible for so much. What will we find to take its place?” John H. Conway

Deze uitspraak kan ons tot nadenken stemmen. Hilbert formuleerde zijn twaalfde probleem op een meesterlijke manier. Hij wist als geen ander de diepte en kracht van de vraag te formuleren, op een manier die bovendien vaag genoeg blijft over hoe een ‘oplossing’ er precies moet uitzien. Misschien voorzag Hilbert welke ongeken- de rijkdom de theorie der complexe vermenigvuldiging nog zou blootgeven lang na zijn dood. Een aanpak als die van Stark geeft ons prachtige wiskunde, maar kan nooit deze volledige rijkdom evenaren. We staan duidelijk nog maar aan het begin van onze ontdekkingsstocht. Om zulke ontwikkelingen mogelijk te blijven maken, is het misschien wel belangrijker om open problemen niet te kunnen oplossen, dan het is om ze wel op te lossen. ☞

Dankwoord

Mijn bijzondere dank gaat uit naar Mike Daas voor een uitzonderlijk grondige proeflezing.

Referenties

- 1 J.W.S. Cassels en A. Fröhlich, *Algebraic Number Theory*, Academic Press, 1967.
- 2 D.A. Cox, *Primes of the Form $x^2 + ny^2$* , Wiley, 1989.
- 3 S. Dasgupta, H. Darmon en R. Pollack, Hilbert modular forms and the Gross–Stark conjecture, *Ann. of Math.* (2) 174(1) (2011), 439–484.
- 4 S. Dasgupta en M. Kakde, Brumer–Stark units and Hilbert’s 12th problem, arXiv:2103.02516.
- 5 B. H. Gross en D. B. Zagier, On singular moduli, *J. Reine Angew. Math.* 355 (1985), 191–220.
- 6 H. M. Stark, L -functions at $s = 1$. IV. First derivatives at $s = 0$, *Adv. Math.* 35(3) (1976), 197–235.
- 7 A. Weil, *Elliptic Functions According to Eisenstein and Kronecker*, Springer, 1976.

Barry Koren

Faculteit Wiskunde en Informatica
Technische Universiteit Eindhoven
b.koren@tue.nl

In Memoriam Piet Hemker (1941-2019)

Denker en doener

Op 27 mei 2019 overleed Piet Hemker, begaafd numeriek wiskundige, wiens werk van blijvende waarde is. Zijn oud-collega Barry Koren blikt terug op zijn leven en werk.

Piet (Pieter Wilhelm) Hemker is geboren in Den Haag, op 22 november 1941, maar getogen in Amsterdam. Vanaf zijn zesde jaar heeft hij zijn gehele verdere leven in Amsterdam gewoond. Piet vond Amsterdam een zeer aangename stad. Zijn middelbare schooltijd heeft hij doorgebracht op het Barlaeus Gymnasium, waar hij zijn vrouw Akke heeft leren kennen. Van 1961 tot 1968 heeft hij aan de Universiteit van Amsterdam (UvA) gestudeerd, aanvankelijk natuurkunde en filosofie. Filosofie liet hij echter al snel vallen; veel docenten filosofie vielen hem tegen; hij vond hen ijdel. In 1967 trouwden Piet en Akke, verruilde Piet zijn studie natuurkunde voor wiskunde en ging — nog niet afgestudeerd — ook als leraar wiskunde op een middelbare school aan de slag. Piet vond lesgeven boeiend, maar in de lerarenkamer bevond hij zich tussen ouderwetse docenten, die een liniaal anders gebruikten dan waarvoor deze bedoeld was, en tussen moderne leraren die geheel tegenovergesteld handelden. Na ruim een jaar verruilde hij de baan van leraar voor die van medewerker in de rekenafdeling van het Mathematisch Centrum (MC), de oude naam van het Centrum Wiskunde & Informatica (CWI). Tijdens een college numerieke algebra aan de UvA had de docent, Dirk Dekker, Piet deze nieuwe baan aangeboden. Dirk Dekker, die toen ook sous-chef van de rekenafdeling van het MC was, zag het grote wiskundetalent in Piet.

Piet maakte de overstap van onderwijs naar onderzoek. Onderzoek deed hij al als

klein kind, samen met zijn acht jaar oudere broer Coen, met de meterkast in het ouderlijk huis als laboratoriumruimte. Dirk Dekker adviseerde Piet bij zijn aanstelling om eerst de programmeertaal Algol te leren. Twee maanden na zijn aanstelling bij het MC werd Piet voorgesteld aan MC-directeur Van Wijngaarden, die aan Piet vroeg: “Wat ga je hier nu doen?” Daar was nog niet over gesproken, vandaag de dag onvoorstelbaar! Piet ging zich bezighouden met numerieke oplossingsmethoden voor differentiaalvergelijkingen met voorgeschreven randwaarden (randwaardenproblemen) en

met het schatten van parameters in niet-lineaire differentiaalvergelijkingen. In 1971 studeerde hij af en in 1977 promoveerde hij, bij Dirk Dekker, op een nog steeds geciteerd proefschrift [4].

Voortbordurend op zijn promotieonderzoek organiseerde Piet in 1978, in samenwerking met John Miller (Trinity College, Dublin), een internationale conferentie over randwaardenproblemen, hetgeen leidde tot de nog steeds bestaande tweejaarlijkse conferentie ‘Boundary and Interior Layers’. Na 1978 nam Piet met regelmaat en succes nieuwe numerieke wiskundeonderwerpen ter hand: eindige-elementenmethoden, multiroostermethoden, numerieke methoden voor de Euler- en Navier-Stokes-vergelijkingen, numerieke methoden voor de halfgeleidervergelijkingen, zelf-adaptieve numerieke methoden voor partiële differentiaalvergelijkingen, hiërarchische optimalisatiemethoden en meer.

Op 30 maart 1984 ontmoette ik Piet voor het eerst, tijdens een sollicitatiegesprek voor een promotieplaats bij hem, op het CWI. Toen hij daar beknopt uitlegde welk onderzoeksplan hij had, kreeg ik al snel de indruk met een knap wiskundige te maken te hebben. Vanaf 1 juli 1984 tot zijn (formele) pensionering in november 2006 heb ik in Piets directe omgeving gewerkt, een in vele opzichten rijke ervaring. Hieronder een impressie daarvan.

Industrie-georiënteerd onderzoek

Piet is in Nederland vele jaren van grote waarde geweest bij het ontwikkelen van numerieke wiskunde voor industriële toepassingen. Piets onderzoek hieraan



Piet Hemker in 2005

Foto: CWI Bibliotheek



Foto's: Peter van Ende Boas

De proefschriftverdediging van Piet op 16 maart 1977. Op de linker foto: Piet achter het spreekgestoelte, geflankeerd door zijn paranimfen, zijn broer Wim (links) en Kees Dekker (rechts). De promotiecommissie bestaat uit, achterste rij van links naar rechts: Hans Lauwerier, Aad van Wijngaarden en Piet van der Houwen; voorste rij van links naar rechts: Pia Pfluger, Jim Varah, Eduard de Jager, Piets broer Coen, Dirk Dekker en voorzitter Dirk Bresters. Op de rechter foto in het publiek: zijn vrouw Akke geflankeerd door hun kinderen Bas en Mirte, en Piets vader, die op zeventigjarige leeftijd bij zijn zoon Coen is gepromoveerd.

kenmerkte zich door een diepgaande en stelselmatige aanpak. Snelle ad-hoc-toepassing van allerlei numerieke methoden op rekenproblemen uit de industrie was hem vreemd. Een grote diepgang dus, maar ook een grote breedte in de zin dat hij zich de diverse disciplines van waaruit de rekenproblemen afkomstig waren (stromingsleer, warmteleer, elektriciteitsleer, scheikunde,...), steeds tot op hoog niveau eigen maakte. Niet alleen deze probleemafhankelijke, tweede disciplines, maar ook de voor het daadwerkelijk schrijven van professionele rekenprogrammatuur essentiële derde discipline, het programmeren van computers (het liefst in Algol68), beheerste hij op hoog niveau.

Piet is de aanvrager, uitvoerder en leider geweest van veel industrie-georiënteerde, extern gefinancierde CWI-onderzoeksprojecten, projecten waarbij hijzelf altijd actief meewerkend voorman was. Hier volgt een overzicht.

Fokker en anderen

Begin jaren tachtig startte Piet onderzoek aan het zo efficiënt mogelijk berekenen van Euler- en Navier-Stokes-stromingen. Gebruikers in dit onderzoek waren aerodynamici van Fokker, het Nationaal Lucht- en



Fokker 100, de omstroming van het stroomlijnstuk tussen motorgondels en vliegtuigromp is bij Fokker doorgerekend met de compressibele Navier-Stokes-methode, ontwikkeld in dit door STW gefinancierde onderzoek.

Ruimtevaartlaboratorium en de Faculteit Luchtvaart- en Ruimtevaarttechniek van de TU Delft. Het onderzoek werd gefinancierd door de Stichting Technische Wetenschappen (STW, het tegenwoordige NWO-TTW). Midden en eind jaren tachtig werkten Stefan Spekreijse en ik als promovendi mee in dit onderzoek. Multiroostermethoden, numerieke methoden om grootschalig rekenwerk te versnellen, vormden een belangrijk onderzoeksonderwerp in de twee promotie-onderzoeken. Dankzij Piets diepe inzicht in multiroostermethoden wierpen deze hun vruchten als versnellingsmethoden al in het onderzoek zelf af; de in mijn onderzoek uit te voeren berekeningen verliepen zeer snel dankzij de goede werking van de multiroostermethoden. Mijn onderzoek kon daardoor in drie in plaats van de geplande vier jaar worden voltooid. Bij de verdediging van mijn proefschrift kon Piet nog niet als promotor optreden; hij was toen nog net geen hoogleraar. Ongeveer een maand later werd hij het: bijzonder hoogleraar Industriële Wiskunde aan de UvA. Piet had toen inmiddels vier promovendi succesvol bij hun promotieonderzoek begeleid [1, 6, 12, 13].

Dassault en European Space Agency (ESA)

Piets numerieke wiskundeonderzoek ten behoeve van aerodynamica-berekeningen bleef niet onopgemerkt. Eind jaren tachtig was de Franse vliegtuigbouwindustrie Dassault in opdracht van de ESA gestart met het ontwerpen van een ruimteveer: de Hermes (de boodschapper van de goden). Het meest kritieke deel van de vlucht van een ruimteveer is de terugkeer in de aardse atmosfeer. Tijdens deze terugkeer wordt de zeer hoge vliegsnelheid verkleind door gecontroleerd gebruik van de lucht-

weerstand van het ruimteveer. Tijdens dit aerodynamisch afremmen wordt de bewegingsenergie van het ruimteveer omgezet in warmte van de omgevingslucht. De warmteontwikkeling in de lucht, vooral direct stroomopwaarts van het ruimteveer, kan zeer hoog zijn. Luchttemperaturen van enige duizenden graden Celsius zijn niet uitzonderlijk. De verhitte omgevingslucht kan het ruimteveer plaatselijk tot gevaarlijk hoge temperaturen opwarmen. Kennis en begrip van de warmtebelasting (en ook luchtdrukbelasting) van het ruimteveer zijn van levensbelang voor de bemanning. Betrouwbare voorspelling van deze belastingen is niet goed mogelijk op basis van windtunnelmetingen aan schaalmodellen van het ruimteveer. Numerieke simulatie is het enige alternatief. Eind jaren tachtig werd Piet door Dassault uitgenodigd om een rekenmethode te ontwikkelen voor compressibele Navier-Stokes-stromingsberekeningen voor de nog op de tekentafel liggende Hermes, tijdens diens (numeriek gesimuleerde) terugkeer in de atmosfeer. Het onderzoek, waaraan drie jaar is gewerkt, werd gefinancierd door de ESA. Het onderzoek was waardevol voor Dassault, en heeft geleid tot publicaties in de internationale wetenschappelijke literatuur, voordrachten op wetenschappelijke conferenties en overdraagbare programmatuur. Echter, het ruimteveer is nooit gebouwd. Het bleek te zwaar te zijn voor de beoogde, bestaande lanceerraket. Ontwerp van een nieuwe lanceerraket zou het project te duur maken. Als alternatief kon het ruimteveer kleiner en lichter worden ontworpen. Echter, de tandenborstels van de bemanningsleden zouden dan nog wel mee kunnen, maar de bemanning zelf niet meer.

Deutsche Aerospace, British Aerospace, Aerospatiale en Aeritalia

In aansluiting op het Hermes-onderzoek werd Piet uitgenodigd door het Von Karman Institute for Fluid Dynamics bij Brussel, om deel te nemen aan de ontwikkeling van een geavanceerde compressibele Navier–Stokes-methode. De methode zou een van Piets expertises (automatisch adaptieve multiroostermethoden) combineren met een expertise van onderzoekers van het Von Karman Instituut (meer-dimensionale upwind discretisatiemethoden). Industriële partners bij dit onderzoek, dat gefinancierd werd door de Europese Unie, waren de hierboven genoemde vier vliegtuigbouwindustriën. In het kader van dit tweede Europese onderzoeksproject van Piet is weer veel gepubliceerd, is overdraagbare programmatuur geschreven en heeft een promovendus, Eric van der Maarel, met succes een proefschrift weten te voltooien [7]. Piet trad hierbij voor het eerst op als promotor.

Philips

Eind jaren tachtig, begin jaren negentig was de simulatie van elektrische stromen in geïntegreerde halfgeleiderschakelingen (chips) van groot belang voor Philips. Het theoretische model dat deze simulatie beschrijft (een Poisson-vergelijking voor het elektrische veld en continuïteitsvergelijkingen voor gaten en elektronen) is wiskundig uitdagend. Het is sterk niet-lineair en er is een bijzonder grote variatie in de ordes van grootte van de te berekenen grootheden. Numerieke simulaties zijn ook hier noodzakelijk omdat experimenten ter bepaling van elektrische stromen in te ontwerpen chips erg duur of onmogelijk zijn. Voor een industrie die chips ontwerpt, in concurrentie met buitenlandse industriën,

is het van groot belang om halfgeleiderberekeningen nauwkeurig en efficiënt te kunnen uitvoeren. In het kader van een door het Ministerie van Economische Zaken gefinancierd Innovatief Onderzoeksprogramma (IOP) heeft Piet hier leidinggegeven aan een tweetal promotieonderzoeken gericht op het maken van nog betere halfgeleiderprogrammatuur voor Philips. Wetenschappelijke artikelen zijn gepubliceerd, industrieel bruikbare programmatuur is geschreven, en begin jaren negentig zijn beide promovendi, Hans Molenaar en Ronald van Nooyen, bij Piet gepromoveerd [9,10].

AkzoNobel en anderen

Het verloop van chemische reacties, waarbij de in de tijd veranderende concentraties van reagerende stoffen de te berekenen onbekenden zijn, wordt beschreven door differentiaal-algebraïsche vergelijkingen, die niet direct en volledig uit natuurwetten kunnen worden afgeleid. In het verleden moesten de vergelijkingen nog op omslachtige wijze worden opgebouwd, stap voor stap, op basis van experimentele meetgegevens. In het kader van een door Piet verworven en geleid STW-project is in het midden van de jaren negentig op het CWI onderzoek verricht ter verbetering en versnelling van dit moeizame modelvormingsproces. AkzoNobel was een van de gebruikers van de resultaten van dit onderzoek. De chemische reacties waar men bij AkzoNobel in was geïnteresseerd betroffen productieprocessen van grondstoffen voor nieuwe kunstvezels. Concrete namen van reacties en stoffen konden niet worden genoemd in het onderzoek. In verband met het grote industriële belang verstrekten AkzoNobel de reacties en stoffen slechts onder pseudoniem. In het project zijn industriële gebruikersprogrammatuur en publicaties geschreven. De

programmatuur wordt nog steeds gebruikt. Het project is afgesloten met de promotie van Walter Stortelder bij Piet [14].

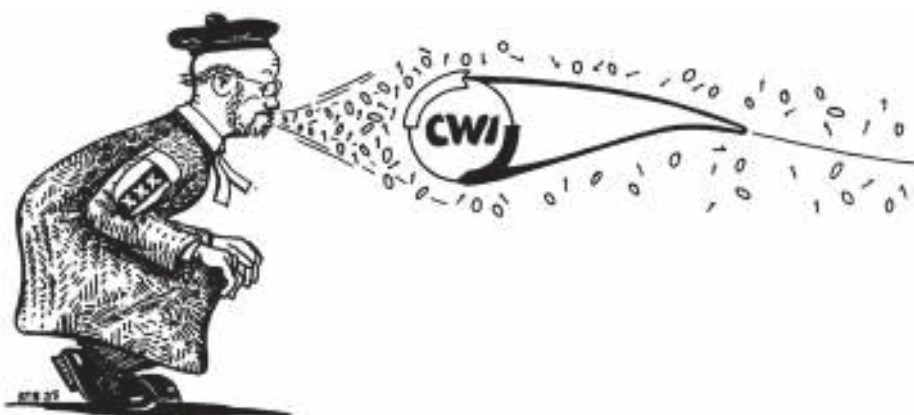
Het jaar ervoor was Piet ook nog promotor, samen met Sjoerd Verduyn Lunel, van een op optica gericht proefschrift [8] alsmede, samen met Piet Wesseling, van het voor multiroostermethoden belangrijke proefschrift van Paul de Zeeuw, vele jaren wetenschappelijk programmeur in Piets groep [15].

Maritiem Research Instituut Nederland (MARIN)

Na het verdwijnen van Fokker als zelf-scheppende vliegtuigbouwindustrie is de aandacht van het op de industrie gerichte numerieke stromingsleeronderzoek op het CWI verlegd van vliegtuigaerodynamica naar scheepshydrodynamica. MARIN's technologie voor het berekenen van waterstromingen om te ontwerpen scheepsrrompen bestond eind jaren negentig uit programmatuur voor het berekenen van alleen golfweerstand (in wrijvingsloze waterstromingen met golvend wateroppervlak) en programmatuur voor het berekenen van alleen wrijvingsweerstand (in incompressibele Navier–Stokes-stromingen zonder golvend wateroppervlak). Beide afzonderlijk berekende weerstandscomponenten werden eenvoudigweg bij elkaar opgeteld ter bepaling van de totale weerstand van het te ontwerpen schip. Deze optelling is niet correct. Golven en wrijving beïnvloeden elkaar wederzijds en kunnen daarom eigenlijk niet onafhankelijk van elkaar worden berekend en opgeteld. In Piets onderzoeksgroep bij het CWI is hiertoe door het MARIN gefinancierd promotieonderzoek verricht naar de ontwikkeling van een efficiënte incompressibele Navier–Stokes-methode voor de collectieve berekening van golf- en wrijvingsweerstand. Het onderzoek is met succes voltooid met de promotie van Harald van Brummelen, nu hoogleraar aan de TU Eindhoven [2], en voortgezet met twee door mij geleide promotieprojecten. Bij het MARIN worden inmiddels sinds jaar en dag de golf- en wrijvingsweerstand van scheepsrrompen collectief berekend.

ASML, Philips en Thales

Daarna volgde het Innovatieve Onderzoeksprogramma Elektromagnetische Vermogenstechniek (IOP-EMVT). Dit door SenterNovem (Ministerie van Economische Zaken) gefinancierde programma stimu-



Piet in de numerieke stromingsleer

Tekening: Tobias Baanders

leerde onderzoek naar vermogenslektronica, intelligentie in elektrische netwerken en elektromagnetische compatibiliteit. Een belangrijk doel van het programma was een brug te slaan tussen de kennis van universiteiten en onderzoeksinstituten zoals het CWI, en het gebruik hiervan door het bedrijfsleven. In het kader van dit programma werden op het CWI, onder leiding van Piet, een tweetal onderzoeksprojecten uitgevoerd.

Een van de twee projecten was het promotieonderzoek van David Echeverría naar een numeriek-wiskundige ontwerp-methode voor elektrische apparaten die zeer nauwkeurige bewegingen moeten kunnen uitvoeren. Onderzoekspartner hierbij was de groep Elektromechanica van de TU Eindhoven. Een van de industriële gebruikers van de onderzoeksresultaten was ASML. Diverse publicaties zijn verschenen, een proefschrift is geschreven en met succes verdedigd [3], en industrieel bruikbare programmatuur is geschreven.

Het tweede bij het CWI uitgevoerde IOP-EMVT-project betrof een onderzoek van Piet, postdoc Domenico Lahaye en Anton Tjhuis, hoogleraar Elektromagnetisme aan de TU Eindhoven. Onderwerp was de berekening van verstoringen door en van elektromagnetische zenders en ontvangers in allerlei omgevingen, bijvoorbeeld in ziekenhuizen. In dit onderzoek waren Philips en Thales gebruikers. Het onderzoek was van belang voor de ontwikkeling, bij Philips Medical Systems, van nieuwe Magnetic Resonance Imaging (MRI) systemen, waarbij verstoringen van het elektromagnetische veld van het MRI-systeem, door omgevingsvelden, tot een minimum dienen te worden beperkt.

Piet genoot het volste vertrouwen van de elektrotechnische onderzoekspartners en gebruikers betrokken bij IOP-EMVT.

Synapse

Het waren niet uitsluitend rekenproblemen uit de industrie die Piets belangstelling hadden. Gedurende zijn gehele wetenschappelijke loopbaan heeft hij ook, min of meer privé, een actieve belangstelling aan de dag gelegd voor rekenen aan een specifieke medische toepassing: de biochemie van bloedstolling. Deze belangstelling deelde hij met zijn eerdergenoemde broer Coen, gerenommeerd onderzoeker op het gebied van haemostase en trombose, een van de oprichters van de Univer-

siteit Maastricht, en oprichter en directeur van Synapse, adviesbureau op het gebied van onder andere bloedstolling. Piet publiceerde nog regelmatig met zijn broer Coen, na hun pensionering.

Fundamenteel onderzoek

Voor het vele jaren op hoog niveau kunnen leiden van op de industrie gericht wiskundeonderzoek is het essentieel om ook actief betrokken te blijven bij fundamenteel wiskundig onderzoek. Wetenschappelijke uitputting kan anders het gevolg zijn. Piet heeft fundamenteel onderzoek daarom nooit laten varen. Hieronder een overzichtje van fundamenteel onderzoek waaraan hij steeds actief en met succes heeft deelgenomen.

Defect-correctiemethoden

Een rode draad in Piets fundamentele onderzoek wordt gevormd door defect-correctiemethoden. Vele oplossingsmethoden in de numerieke wiskunde zijn defect-correctiemethoden, multiroostermethoden bijvoorbeeld zijn het. Het elegante principe in al deze methoden is dat fouten — inherent aan numerieke methoden — nuttig worden gebruikt. De fouten (defecten) gemaakt in een rekenstap worden gebruikt ter automatische verbetering (correctie) van de oplossing in een volgende rekenstap. Defect-correctieprocessen zijn zelf-corrigerende rekenprocessen. Een defect-correctieproces vertoont overeenkomst met de werking van bijvoorbeeld een centrale verwarming. Deze heeft een thermostaat die meet hoe groot het verschil (defect) is tussen werkelijke en gewenste temperatuur. Afhankelijk van het defect schakelt de verwarming zichzelf in om het te verkleinen. Het defect-correctieprincipe kan handig worden benut om moeilijke rekenproblemen op te lossen door een eenvoudiger, erop lijkend rekenprobleem herhaald op te lossen. Piet was een meester in het toepassen van dit principe, niet op een gis-en-mismanier, maar op een bewijsbaar goedwerkende manier. Heeft men de kunst van het defect-corrigeren onder de knie, dan kan men er zeer nuttig werk mee verrichten. Meerderen van Piets promovendi hebben zich de kunst eigen gemaakt en passen haar met succes toe.

Singuliere storingsproblemen

Een ander onderwerp dat Piets niet-aflattende belangstelling had zijn singuliere

storingsproblemen, problemen met een kleine term in een op te lossen differentiaalvergelijking. Een term die, ondanks het feit dat deze klein is, de oplossing van de vergelijking zeer sterk beïnvloedt en derhalve niet kan worden veronachtzaamd.

Een singuliere storing is dus iets kleins met een grote invloed, vaak een nadelige invloed. Een sprekend voorbeeld is een laagje ijs op een autoweg, het laagje kan zeer dun zijn, maar een grote invloed hebben op de begaanbaarheid van de weg. Een ander voorbeeld is de zogenaamde grenslaag om een varend schip of vliegend vliegtuig. Bij elk object dat zich door water beweegt — het geldt ook voor lucht, voor alle gassen en vloeistoffen — blijft een dun laagje water (het 'kleine' in dit voorbeeld) aan het object kleven. Dit laagje wordt de grenslaag genoemd. De grenslaag kunnen we zelf letterlijk aan den lijve ondervinden, als we bijvoorbeeld uit het zwembad op het droge stappen. We zijn dan nog nat, de dunne grenslaag van water kleeft dan nog gedeeltelijk aan ons. De invloed van de grenslaag is groot en veelal nadelig. In de grenslaag treden namelijk wrijvingskrachten op (daarom ook blijft ze kleven), *grote* wrijvingskrachten. De wrijvingskrachten zijn er mede de oorzaak van dat zwemmen veel energie kost. En ook dat alle vaartuigen, voertuigen en vliegtuigen die door lucht en/of water bewegen, een voorziening nodig hebben om de wrijvingskrachten in de grenslaag te overwinnen, veelal nog een brandstof verbruikende motor. Dit laatste geeft direct een groot maatschappelijk belang aan van het fundamentele onderzoeks-onderwerp singuliere storingsproblemen. Singuliere storingsproblemen komen voor in veel van de hiervoor beschreven industriële toepassingen. Fundamenteel onderzoek aan deze problemen is daarom van groot praktisch belang. Leidend beginsel bij het oplossen van singuliere storingsproblemen is in feite: wie het kleine niet eert, is het grote niet waard.

Piet werkte in zijn promotieonderzoek al aan singuliere storingsproblemen en is er aan blijven werken, in samenwerking met vooral Russische, Duitse en Ierse wiskundigen.

Discontinue Galerkinmethoden

Deze numeriek-wiskundige methoden vormen een recenter fundamenteel onderzoeksonderwerp van Piet. Het zijn methoden om oplossingen op rekenroosters

buitengewoon nauwkeurig te berekenen, methoden waarvan men kan zeggen dat ze een Rolls-Royce zijn onder de numerieke methoden; goed maar ook duur. Piet heeft deze methoden niet uitgevonden, maar heeft wel direct ingezien dat ze bijzonder geschikt kunnen zijn voor bijvoorbeeld singuliere storingsproblemen en dat ze zich ook goed laten combineren met multiroostermethoden. Dit is allemaal grondig onderzocht in een door Piet geleid en door NWO gefinancierd promotieonderzoek. Het bijbehorende proefschrift, van Marc van Raalte [11], heeft de serieuze belangstelling gewekt van numeriek wiskundigen bij de Amerikaanse ruimtevaartorganisatie NASA en ook die van het Thomas Stieltjes Institute for Mathematics. Het laatste instituut kende Marc van Raalte de prijs toe voor het beste wiskundeproefschrift in Nederland van 2004.

Onderwijs

Ook in het onderwijs aan Nederlandse universiteiten heeft Piet zijn schouders onder de numerieke wiskunde gezet, als gastdocent in Nijmegen en Utrecht en als buitengewoon hoogleraar Industriële Wiskunde aan de UvA. Gedurende zijn gehele werkzame leven heeft hij kennis overgedragen. Goed onderwijs stond hoog in het vaandel van Piet. Hij was er zich van bewust dat om Nederlandse industrieën te kunnen laten concurreren met buitenlandse industrieën we met die andere landen al in het onderwijs moeten concurreren. Piet vond dat onderwijs een sleutelpositie inneemt in de kennis-infrastructuur van een land.

Door het geringe aantal wiskundestudenten toentertijd in Nederland was het aantal toehoorders bij Piets colleges ook gering. Bij college geven aan slechts één student zette hij zich echter nog steeds volledig in. Het hiervoor genoemde motto — aandacht voor het ‘kleine’, het schijnbaar onbelangrijke — was ook hier van toepassing. Het motto gold ook voor Piets bijzonder grote aandacht voor ‘kleine foutjes’ in het werk van zijn studenten: van ‘denkfoutjes’ in analyses, ‘programmeerfoutjes’ in computerprogramma’s tot ‘schrijffoutjes’ in rapporten, elk type fout secuur met een eigen kleur gecorrigeerd: rood, groen of blauw.

Adviseren en leren

Hoog-technologische industrieën als Philips onderkennen het belang van adviezen

gegeven door wiskundigen, niet alleen vanwege hun kennis en ervaring met rekenmethoden, maar ook vanwege hun vermogen tot abstractie en generalisatie. De wiskundige weet de wezenlijke wiskundeproblemen uit de praktijkproblemen te destilleren. Hierdoor kan uiteindelijk vaak een grotere klasse van problemen worden opgelost.

De wiskundige kan zelf echter ook veel leren in de praktijk. Rekenproblemen uit de industriële praktijk vragen doorgaans veel diepgang. Uiteindelijk komt dit ten goede aan de rekenmethoden, zij worden er nauwkeuriger, efficiënter en robuuster van. Piet is zich altijd terdege bewust geweest van deze wisselwerking en heeft mede daarom altijd deze contacten gezocht en aangehouden. Gedurende vele jaren is hij adviseur geweest bij het Philips Natuurkundig Laboratorium. Dit adviseurswerk heeft ertoe geleid dat enige van de in het begin genoemde, door Piet ontwikkelde rekenmethoden, tot de beste behoren vanuit zowel wiskundig als bedrijfsmatig oogpunt.

Organiseren

Onderzoek doen en onderwijs geven was een passie van Piet. Leidinggeven en organiseren heeft hij echter niet gemeden. Op het CWI is hij vele jaren leider geweest van een onderzoeksgroep, eerst van de groep Randwaardenproblemen en later van de groep Computing and Control. Buiten het CWI, op nationaal niveau, is hij onder andere actief geweest als secretaris van de Werkgemeenschap Numerieke Wiskunde en mede-organisator van de jaarlijkse Woudschoten Conferentie Numerieke Wiskunde. Internationaal is hij (mede-)organisator geweest van diverse workshops en conferenties, waaronder de in 1993 in Amsterdam gehouden Fourth European Multigrid Conference, alsmede enige numerieke wiskundeconferenties op het Mathematisches Forschungsinstitut Oberwolfach. Vermeldenswaard in dit verband is nog Piets vice-voorzitterschap van de Working Group Numerical Software van de International Federation for Information Processing.

Europa

Samenwerking binnen Europa had een hoge prioriteit bij Piet. Hij leek dit als een noodzaak te zien. Toen het CWI eind jaren tachtig een samenwerkingsverband aanging met nationale zusterinstellingen

in Frankrijk en Duitsland, was hij een van de eerste wetenschappers die het initiatief nam om gezamenlijk onderzoek te starten. (Hij deed dit met Antoine Désidéri van het Franse Institut National de Recherche en Informatique et Automatique en later ook met Ulrich Trottenberg van het toenmalige Duitse Gesellschaft für Mathematik und Datenverarbeitung.)

Piet was van mening dat Nederland een wezenlijke rol kon en moest spelen in Europese samenwerkingsverbanden. Toen het IJzeren Gordijn viel, toonde hij visie door persoonlijke samenwerkingen aan te gaan met wetenschappers die hij slechts voornamelijk uit de literatuur kende (vooral met wiskundigen gegroepeerd rond Grigori Shishkin uit Rusland). Hij heeft hier niet alleen de wetenschap maar indirect ook een beetje de vrede in Europa mee gediend. Bij zijn pensionering in 2006 werd hij benoemd tot Ridder in de Orde van de Nederlandse Leeuw, door locoburgemeester Lodewijk Asscher van Amsterdam, die dit laatste aspect ook noemde in zijn toespraak bij de benoeming.



Piet wordt door locoburgemeester Lodewijk Asscher benoemd tot Ridder in de Orde van de Nederlandse Leeuw, aan het einde van het officiële deel van de bijeenkomst ter gelegenheid van zijn pensionering (17 november 2006, CWI).



Piet en Akke, na de tot ridderbenoeming

Ratio Res Temperat Omnes

Tot zover is de loftrompet geblazen over Piet. Waarin blonk Piet niet uit? Sport misschien? Sport is niet gezond zei hij soms. Bij niet al te slecht weer fietste hij echter wel altijd van zijn huis (omgeving Leidseplein) naar het CWI en vice versa. Wakker blijven tijdens voordrachten misschien? Ter gelegenheid van Piets pensionering is door Walter Hoffmann, Margreet Nool en Baas Louter een dvd amicum samengesteld. Willem Hundsdoerfer deelt, in zijn bijdrage aan de dvd amicum, toehoorders bij voordrachten in de volgende vier categorieën in: (i) mensen die zeer goed opletten en daarna een moeilijke vraag stellen, (ii) mensen die goed opletten en daarna een makkelijke vraag stellen, (iii) mensen die niet opletten en geen vraag stellen, mensen bijvoorbeeld die wat gaan zitten lezen of zelfs wegdommelen tijdens de voordracht, en tenslotte (iv) mensen die al snel na het begin van de voordracht in



Foto: CWI Bibliotheek

Piet geconcentreerd luisterend tijdens een voordracht, ... zojuist wakker geworden?

slaap vallen, op wonderbaarlijk wijze tegen het einde weer wakker worden en vervolgens een kritische vraag stellen waaruit blijkt dat ze het allemaal goed hebben begrepen. Over de eerste categorie schreef Willem: "Niet zulke fijne toehoorders, tenzij je toevallig een antwoord op de vraag weet, dan worden het opeens erg fijne toehoorders." Over de tweede categorie: "Fijne toehoorders, kun je er niet genoeg van hebben." Over de derde: "Geen fijne toehoorders, maar je went eraan." En over de vierde categorie: "De moeilijkste toehoorders, maar gelukkig zeldzaam." Hij kende er eigenlijk maar een van de laatste categorie: Piet! In het begin van een voordracht zag je Piets ogen inderdaad vaak langzaam dichtvallen en tegen het einde weer opengaan, waarna hij vervolgens één of meer zeer goede vragen wist te stellen. Willem schrijft dat hij geprobeerd heeft om Piet hierin te imiteren; dat hij het in slaap vallen wel onder de knie heeft gekregen, maar dat de rest erg lastig bleef.

Piet was een markante persoonlijkheid. Op de bovengenoemde dvd amicum geeft oud-collega Jan Verwer de volgende treffende kenmerken van Piet: (i) sterke intellectuele denkkraft, brede culturele en wetenschappelijke belangstelling en grote belezenheid; (ii) een bij uitstek goede smaak en vermogen om als wiskundige onderzoeksonderwerpen te kiezen, onderwerpen waaraan Piet fundamentele bijdragen leverde, op een manier die mensen uit de praktijk sterk aansprak; (iii) onverstoordbaarheid, nuchterheid en een groot relativeringsvermogen voor wat betreft storende omgevingsfactoren in het onderzoek: "gure winden die bij tijd en wijle konden opsteken". Vaak had Piet het dan bij het rechte eind met een reactie als "Dat waait wel



Foto: Margreet Nool

Piet brengt mij ook nog wat fijne kneepjes van de kookkunst bij, tijdens een uitje (kookworkshop) van de CWI-groep Modelling, Analysis and Simulation.

weer over", maar als er echt actie geboden was dan stond hij altijd klaar, aldus Jan Verwer.

Na zijn pensionering is Piet bij het CWI opgevolgd door Kees Oosterlee. Piet zelf bleef actief in het reeds door hem in 1965, onder zijn lijfspreuk *Ratio Res Temperat Omnes*, opgerichte Institute for Purely Incomprehensible Research (<https://pieth.home.xs4all.nl/IPIR/ipir/>). Van hieruit publiceerde hij over onder andere Oudgrieks, en ook nog over wiskunde. Zie bijvoorbeeld het mooie, door zijn broer Rob uitgegeven boek [5]. Naast wiskunde en Oudgriekse taal- en letterkunde had Piet ook grote belangstelling voor muziek, en hij was ook nog eens een uitstekende kok. Piet en Akke organiseerden thuis regelmatig gezellige etentjes voor collega's. De grootste zorg en aandacht besteedde Piet echter aan zijn familie: aan Akke, hun kinderen Bas en Mirte, en hun beider gezinnen. ☺

Referenties

- 1 M. Bakker, *Aspects of the Finite Element Method*, proefschrift, UvA, 1982.
- 2 E.H. van Brummelen, *Numerical Methods for Steady Viscous Free-Surface Flows*, proefschrift, UvA, 2002.
- 3 D. Echeverría, *Multi-level Optimization. Space Mapping and Manifold Mapping*, proefschrift, UvA, 2007.
- 4 P.W. Hemker, *A Numerical Study of Stiff Two-point Boundary Problems*, proefschrift, UvA, 1977.
- 5 P.W. Hemker, *Echte Wiskunde*, Het Patrys, Amsterdam, 2013.
- 6 B. Koren, *Multigrid and Defect Correction for the Steady Navier-Stokes Equations. Application to Aerodynamics*, proefschrift, TU Delft, 1989.
- 7 H.T.M. van der Maarel, *A Local Grid Refinement Method for the Euler Equations*, proefschrift, UvA, 1993.
- 8 M.J.J.B. Maes, *Mathematical Models for Reflector Design*, proefschrift, UvA, 1997.
- 9 J. Molenaar, *Multigrid Methods for Semiconductor Device Simulation*, proefschrift, UvA, 1992.
- 10 R.A.P. van Nooyen, *Some Aspects of Mixed Finite Element Methods for Semiconductor Simulation*, proefschrift, UvA, 1992.
- 11 M.H. van Raalte, *Multigrid Analysis and Embedded Boundary Conditions for Discontinuous Galerkin Discretization*, proefschrift, UvA, 2004.
- 12 H. Schippers, *Multiple Grid Methods for Equations of the Second Kind with Applications in Fluid Mechanics*, proefschrift, TU Delft, 1982.
- 13 S.P. Spekreijse, *Multigrid Solution of the Steady Euler Equations*, proefschrift, TU Delft, 1987.
- 14 W.J.H. Stortelder, *Parameter Estimation in Nonlinear Dynamical Systems*, proefschrift, UvA, 1998.
- 15 P.M. de Zeeuw, *Acceleration of Iterative Methods by Coarse Grid Corrections*, proefschrift, UvA, 1997.

Jan Rozendaal*Institute of Mathematics
Polish Academy of Sciences
jrozendaal@impan.pl***Column Wiskundigen in den vreemde**

Verrassing na verrassing

In deze rubriek doen wiskundigen verslag van hun ervaringen als wetenschapper in den vreemde. Jan Rozendaal verbleef van 2015 tot 2017 als postdoc in Polen, en is er sinds 2020 weer terug. Hij is er associate professor bij IMPAN in Warschau.

Ik moet bekennen dat ik niet direct overweldigd werd door vreemde toen ik een postdoc-positie in Polen aangeboden kreeg. Als student wiskunde was het niet mijn droom om in Polen te werken, ondanks het feit dat ik er nog nooit was geweest. In het laatste jaar van mijn promotie aan de TU Delft werd me aangeraden om bij IMPAN (het Instituut voor Wiskunde van de Poolse Akademie van Wetenschappen) te solliciteren, door een wiskundige van dat instituut. Ik had eigenlijk andere landen in gedachten voor een postdoc, maar het kan nooit kwaad om op veel plekken te solliciteren, zeker niet aan het einde van je promotietijd.

Toen ik afwijzing na afwijzing ontving van die andere instituten, was het zeker een opluchting om eindelijk een aanbod te krijgen. Maar ik had alsnog sterke twijfels, en ik wilde eigenlijk het liefst zo lang mogelijk wachten op een andere optie. Gelukkig raadden meer ervaren collega's in Delft mij aan om het aanbod serieus te nemen. Dus nam ik het vliegtuig naar Polen, om te zien waar ik nou eigenlijk zou komen te werken.

Ook al was ik me vooraf niet bewust van mijn vooroordelen over Polen, ik weet nog goed hoe snel het beeld dat ik van Warschau had veranderde. Al in de taxi vanaf het vliegveld verbaasde ik me over al die wolkenkrabbers, en ik kreeg meteen het gevoel dat dit een levendige, bruisende stad was. Natuurlijk waren de restanten van het communisme overal zichtbaar, zowel in de architectuur als in de cultuur. Maar dit was een stad waar mensen tot laat in de avond in cafés koffie dronken, waar restaurants soms wel de hele nacht open waren, en waar je gewoon om negen uur 's avonds een jas kon kopen in dezelfde kledingwinkels die ik uit Nederland kende. Aan de ene kant zijn de salarissen, uitgedrukt in euro's, veel lager, maar aan de andere kant is dat voornamelijk het gevolg van een correctiefactor. Sterker nog, terwijl ik in Nederland zelden uit eten ging, lunchten mensen in Warschau in restaurants. En alleen al in de buurt van het instituut kun je eten uit bijna elk werelddeel vinden.

IMPAN zelf verbaasde me ook, zeker toen ik er eenmaal werkte. Het wetenschappelijk onderzoek in Polen krijgt (net als an-

dere sectoren) veel subsidie, van de Poolse regering maar ook uit het buitenland. De Simons Foundation subsidieert regelmatig thematische semesters, en mijn eigen beurs wordt deels gefinancierd door Noorwegen en de Baltische staten. Dat soort subsidie creëert mogelijkheden die ik in Polen niet had verwacht.

Ook toen ik in Australië was voor een tweede postdoc, wist ik dat ik uiteindelijk terug wilde komen naar Polen. En nu ik terug ben, word ik nog steeds om de zoveel tijd verrast. Ik zal altijd onthouden hoe bezorgd mensen waren op de dag dat de oorlog in Oekraïne uitbrak. Het is toch geen prettig gevoel als je weet dat er niet ver van de grens gevochten wordt, zeker niet als je land hoog op het lijstje staat dat een regeringsleider boven zijn bed heeft hangen.

Er zijn stevige verschillen tussen mijn denkbeelden en die van een deel van de Poolse bevolking, maar het is hartverwarmend om te zien hoe er gereageerd wordt op de stroom aan vluchtelingen. Overal staan mensen in de rij om te helpen, ook al is het duidelijk dat het simpelweg niet mogelijk zal zijn om iedereen op te vangen.

Maar Polen zorgt niet alleen bij mij voor verrassingen. Vrijwel elke keer dat ik mensen vertel dat ik in Polen woon, krijg ik een soortgelijke reactie. Verrassing. Dan verwarring. En dan een beleefde poging tot enthousiasme. Ook Polen zelf reageren zo, alhoewel zij de impliciete vraag hardop uitspreken: waarom? Ondertussen kan ik erom lachen, omdat ik dat gevoel van verrassing maar al te goed ken.

✦



Jan Rozendaal (links) met Mario Klisse van de TU Delft, die op bezoek was in Warschau

In de verdediging

| In defence

Pas gepromoveerden brengen hun werk onder de aandacht. Heeft u tips voor deze rubriek of bent u zelf pas gepromoveerd? Laat het weten aan onze redacteur.

Redacteur: Nicolaos Starreveld
FNWI, Universiteit van Amsterdam
Postbus 94214
1090 GE Amsterdam
verdediging@nieuwarchief.nl



Improving Reading and Comprehending Mathematical Expressions in Braille

Annemiek van Leendert

In november 2021 heeft Annemiek van Leendert haar proefschrift verdedigd en de graad van doctor ontvangen. De titel van haar proefschrift luidt *Improving Reading and Comprehending Mathematical Expressions in Braille*. Haar promotoren en copromotoren waren prof. dr. P. H. M. Drijvers en dr. L. M. Doorman (Freudenthal Instituut) en prof. dr. J. van der Steen en dr. ir. J. J. M. Pel (Erasmus MC, afdeling neurowetenschappen). Annemiek is (al meer dan dertig jaar) werkzaam bij Koninklijke Visio, een organisatie die zich inzet voor zorg en onderwijs aan mensen met een visuele beperking. Ze heeft van het NWO een beurs gekregen om promotieonderzoek te doen.

In haar promotieonderzoek heeft Annemiek onderzocht hoe braillelezers vaardiger kunnen worden in het lezen en begrijpen van wiskundige expressies. Ze heeft dit vraagstuk vanuit verschillende invalshoeken benaderd. Ten eerste, Annemiek heeft onderzocht op welke manier braillelezers wiskundige expressies in braille lezen en begrijpen, en ook hoe ze hun tactiele leesstrategieën kunnen verbeteren. Hiernaast heeft ze ook gekeken naar de professionele ontwikkeling van wiskundedocenten die lesgeven aan braillelezers. In deze cursus speelden tactiele en auditieve waarneming een belangrijke rol. Als laatste, heeft Annemiek onderzocht welke wiskundige brailnotenotaties in andere landen (drie niet-Europese en dertien Europese landen) worden gebruikt, en hoe specifieke kenmerken van deze notaties braillelezers kunnen helpen bij het lezen en begrijpen van wiskunde.

Wiskunde in Braille

Lezen in braille

Braille is een systeem van voelbare puntjes waarmee je kunt lezen en schrijven. Een braillecel bestaat uit zes (::) of acht puntjes (:::). We spreken daarom van 6-punts of 8-punts braille. Een puntje kan wel of niet voelbaar zijn. De braillekarakters verschillen van elkaar in de locatie van de voelbare puntjes. In 6-punts en 8-punts braille is het dus mogelijk om hooguit $2^6 = 64$ en $2^8 = 256$ braillekarakters te maken. De braillelezer leest door de vingertoppen over de braillekarakters te verplaatsen, van links naar rechts. Met behulp van de braillekarakters kunnen woorden, wiskundige expressies en vergelijkingen weergegeven worden.

Bij het lezen bewegen de vingertoppen van links naar rechts over de braillekarakters, elk karakter moet afzonderlijk gelezen worden. Dit wordt *tactiel lezen* genoemd. We kunnen twee brailleleestechnieken onderscheiden: de conjointe en de disjuncte brailleleestechniek. Bij conjoint-lezen bewegen de wijsvingers één of twee braillecellen van elkaar. Bij disjunct-lezen verkennen de

twee wijsvingers verschillende delen van de regel. Het disjoint-lezen biedt meer flexibiliteit aan braillelezers omdat deze techniek braillelezers in staat stelt braillekarakters die relatief ver uit elkaar staan met elkaar te combineren of te vergelijken. Dit kan handig zijn bij het lezen van wiskundige expressies, wanneer een braille-lezer bijvoorbeeld wil weten waar het haakje sluiten staat; of om wat voor type expressie het gaat.

De letters van het alfabet worden in 6-punts en in 8-punts braille op dezelfde manier weergegeven. De letters a, b, en c, bijvoorbeeld, worden weergegeven als $\cdot$ (a), $\cdot\cdot$ (b) en $\cdot\cdot\cdot$ (c). In 6-punts braille wordt voor het weergeven van cijfers meestal een cijfertecken ($\cdot\cdot$) gebruikt. De cijfers 1, 2 en 3 worden dan weergegeven als $\cdot\cdot\cdot$ (1), $\cdot\cdot\cdot\cdot$ (2) en $\cdot\cdot\cdot\cdot\cdot$ (3). In 8-punts braille is dat niet nodig omdat er meer combinaties mogelijk zijn. Het cijfer 3 kan dan bijvoorbeeld weergegeven worden als $\cdot\cdot$ of als $\cdot\cdot\cdot$.

Woorden en wiskundige expressies worden gevormd door de braillekarakters achter elkaar te plaatsen. De afmetingen van de braillecellen ($\ddot{\cdot}$ of $\ddot{\cdot}\ddot{\cdot}$) vormen een beperking omdat slechts een beperkt aantal combinaties van voelbare puntjes mogelijk is. Bovendien staan alle braillecellen op een rechte lijn. Het is niet mogelijk om een braillekarakter iets hoger of lager te plaatsen (zoals bijvoorbeeld in 2^d). Braille is dus een lineaire notatie. In de wiskunde worden vaak ingewikkelde symbolen gebruikt, zoals een $\sqrt{\quad}$ voor een vierkantswortel, ∞ voor oneindig, en ∇ voor de gradiënt. In braille moeten dergelijke symbolen in puntjes worden weergegeven. Dat is lastig omdat het aantal puntjes in een braillecel beperkt is.

Wiskunde voelen

In de 6-punts Nederlands wiskundige brailnotenatie lijken wiskundige expressies op TeX-code. Een expressie wordt geschreven in lineaire tex-vorm en vervolgens omgezet in braille. Zie Tabel 1. We merken gelijk op dat er een essentieel verschil bestaat tussen de wiskundige notatie in zwartdruk en in braille. Zwartdruklezers kunnen de vorm en de posities van de symbolen gebruiken om de betekenis van de expressie sneller en beter te begrijpen. In een breuk bijvoorbeeld worden de teller en de noemer onder elkaar gezet en onderscheiden door een streep. Dit is niet mogelijk in braille, want braille is een *linear output modality*, en alle braillecellen zijn even groot.

Braillelezers moeten elk braillekarakter afzonderlijk en na elkaar lezen en zo een overzicht van de wiskundige expressie opbouwen. Dit vraagt veel van het werkgeheugen van de braillelezer. Een goedziende lezer kan vrij gemakkelijk gebruikmaken van de spe-

cifieke vorm van symbolen en van de lay-out van een expressie. Dat is veel lastiger voor een braillelezer omdat hij/zij sequentieel waarneemt en de braillekarakters erg op elkaar lijken. Over de hele wereld worden verschillende wiskundige brailnotenaties gebruikt. In sommige notaties wordt het verkrijgen van overzicht over een expressie vergemakkelijkt door de structuur van een (deel)expressie, bijvoorbeeld van een breuk, aan te kondigen. Er staat dan zoiets als 'bb $x^{\sqrt{2}}$ eb' (bb staat voor begin en eb voor einde breuk). Dit wordt in de Nederlandse wiskundige brailnotenaties niet gebruikt.

Annemiek heeft naar een andere manier gezocht om braillelezers te helpen bij het opbouwen van een overzicht. Ze heeft onderzoek gedaan naar tactiele leesstrategieën die braillelezers helpen om de wiskundige structuur van expressies en vergelijkingen beter te begrijpen en te gebruiken.

Wiskunde toegankelijk maken

Werkgeheugen ontlasten

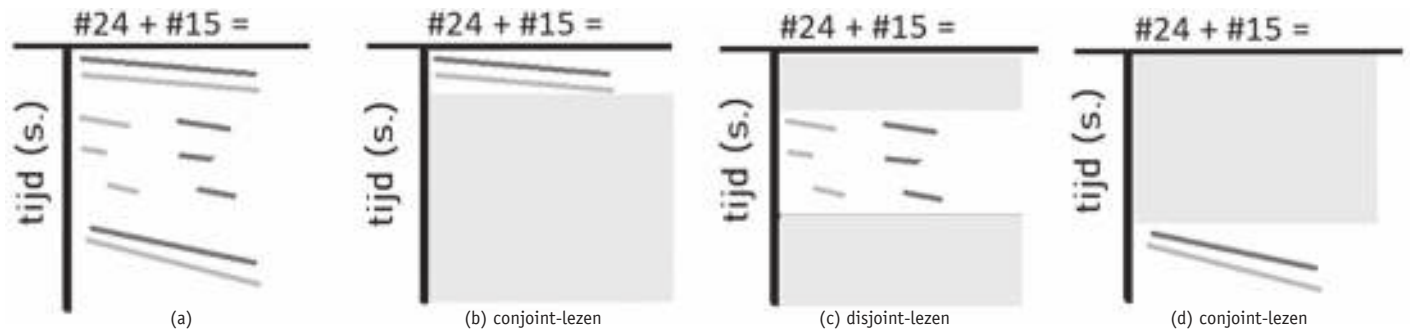
Nem als voorbeeld vergelijking (3) in Tabel 1. Als de braillelezer zich een beeld wil vormen van de vergelijking zal hij/zij eerst elk braillekarakter afzonderlijk moeten lezen. De braillelezer begint bij het meest linkse braillekarakter en beweegt zo naar rechts over de braillekarakters. Pas na het lezen van het eerste open haakje achter het '='-teken, weet de braillelezer dat het om een vergelijking gaat. Het is de vraag of de braillelezer na het lezen van de hele vergelijking, weet dat het om een vergelijking van twee gelijknamige breuken gaat. Dit is wel wat een goedziende leerling in één oogopslag ziet, en wat de leerling helpt om een begin van een oplossing te maken. Annemiek heeft daarom een interventie ontwikkeld die braillelezers leert om tactiele leesstrategieën met aandacht voor de wiskundige structuur van expressies en vergelijkingen te gebruiken.

Annemiëks interventie is gebaseerd op een aantal aannames over hoe braillelezers wiskundige expressies en vergelijkingen kunnen begrijpen. In Annemiëks onderzoek staat het volgende didactisch concept centraal:

1. De eerste stap om de structuur van een expressie of een vergelijking te kunnen begrijpen is het, zo accuraat mogelijk, decoderen van elke element van de expressie of vergelijking.
2. De tweede stap is om naar relaties te zoeken tussen verschillende delen van de expressie, of vergelijking.
3. Als laatste volgt de exacte berekening van de expressie, of de oplossing van de vergelijking.

wiskundenotatie	lineaire brailnotenatie
$24 + 15 = 39$ (1)	in braille: $\dots$ in zwartdruk: # 2 4 + # 1 5 = # 3 9
$\frac{x^2}{\sqrt{2}}$ (2)	in braille: $\dots$ in zwartdruk: x ^ # 2 / s q r t (# 2)
$\frac{(x+2)^2}{\sqrt{3}} = \frac{3(x+2)}{\sqrt{3}}$ (3)	in braille: $\dots$ in zwartdruk: ((x + # 2) ^ # 2) / s q r t (# 3) = (# 3 (x + # 2)) / s q r t (# 3)
Noot: # staat voor cijferteken (.)	

Tabel 1



Figuur 1 Schematische weergave van de vingerbewegingen bij het lezen van de uitdrukking $24 + 15 =$ in braille. De lichtgrijze en donkergrijze lijn geven respectievelijk de beweging van de linker en rechter wijsvinger weer. (a) laat het hele leesproces zien. (b), (c) en (d) geven de opeenvolgende fases van dit proces weer.

In de interventie wordt dit op de volgende manier uitgewerkt:

1. Voor de eerste stap ligt een conjointe-leesstijl het meest voor de hand omdat deze leesstijl het meest geschikt is voor precies lezen. Tijdens deze exercitie, wordt er ook van de braillelezers verwacht dat ze proberen een globaal beeld van de expressie of de vergelijking op te bouwen.
2. Voor de tweede stap lijkt een disjointe-leesstijl het meest geschikt, omdat dit de braillelezer in staat stelt om fysiek verschillende delen van de expressie of vergelijking aan elkaar te koppelen en met elkaar te vergelijken.
3. Voor de laatste stap, dat was de exacte berekening of oplossing, kunnen verschillende leesstijlen worden gebruikt, afhankelijk van het type expressie of vergelijking de ervaring en kennis van de braillelezer.

Figuur 1 laat de vingerbewegingen (zwarte en grijze lijnen) zien tijdens het lezen van de expressie " $24 + 15 =$ ". In Figuur 1(a) wordt het hele proces weergegeven. Hier is te zien dat de braillelezer eerst de hele expressie leest met zijn linker en rechter wijsvingers. Vervolgens wordt de som uitgerekend door eerst de tientallen en dan de eenheden bij elkaar op te tellen ($20 + 10 = 30$ en $4 + 5 = 9$). De disjointe leesstijl (zie Figuur 1(c)) ondersteunt dit proces. Uiteindelijk worden weer beide vingers gebruikt om de hele expressie nog een keer na te lopen.

In vijf stappen

De interventie bestond uit vijf individuele lessen van 45 minuten. Lisan Boonstra heeft voor haar masterscriptie meegewerkt aan de ontwikkeling en uitvoering van deze interventie. In de eerste les lag de focus vooral op het decoderen van de braillekarakters en op de structuur van wiskundige expressies. De braillelezers leerden hoe ze de wiskundige structuur op de tast kunnen onderzoeken. Denk bijvoorbeeld aan het vasthouden van haakje openen of sluiten.

In de tweede en derde les leerden de braillelezers vingerbewegingen te gebruiken die het begrijpen van wiskundige expressies en vergelijkingen ondersteunen. Een belangrijke strategie is bijvoorbeeld om de linker en rechter kant van een vergelijking 'gelijktijdig' te lezen met behulp van disjoint-lezen. Dat maakt het mogelijk om de expressies aan de linker en rechterkant van het '='-teken met elkaar te vergelijken. In de laatste twee lessen oefenden de leerlingen met uitdagende expressies en vergelijkingen om de eerder genoemde technieken goed onder de knie te krijgen.

Didactische verantwoordelijkheid

Annemiek opent haar proefschrift met een quote van Ignacio

Estrada: "If a child can't learn the way we teach, maybe we should teach the way they learn." Dit proefschrift richt zich vooral op braillelezers in de leeftijd van 12 tot 18 jaar. Ongeveer 50% van deze leerlingen — dat zijn ongeveer veertig leerlingen — zit op een reguliere school. De wiskundeboeken worden omgezet in braille en de bijbehorende tekeningen worden voelbaar gemaakt.

Annemieks onderzoek laat zien dat het belangrijk is dat we ons, als samenleving, inzetten voor inclusief onderwijs. Dat is onderwijs waarbij kennis toegankelijk is voor alle leerlingen. Het feit dat iemand een visuele beperking heeft, betekent niet dat hij/zij geen aanleg zou kunnen hebben voor wiskunde. Uit haar onderzoek blijkt ook dat het niet eenvoudig is om braillelezers wiskunde te geven. De wiskundeleraars moeten daarom volop de gelegenheid krijgen om zich te verdiepen in deze materie. Ze moeten de mogelijkheid krijgen om didactische vaardigheden — die nodig zijn voor het leren en onderwijzen van braillelezers — te ontwikkelen. En natuurlijk kunnen nieuwe en betere hulpmiddelen ook helpen bij het verbeteren van het wiskundeonderwijs aan braillelezers.

Het persoonlijke aspect

Twee vragen aan de promovenda: Annemiek, wat herinner je je uit de afgelopen vier jaar?

"Ik begin mijn proefschrift met de hiervoor genoemde quote van Ignacio Estrada. Dat is wel de kern van waar het, volgens mij, in het onderwijs om gaat. Tijdens mijn onderzoek realiseerde ik me vaak hoe ingewikkeld het is om wiskunde te geven aan braillelezers. Er is wat dat betreft nog veel werk aan de winkel. Het kan niet zo zijn dat braillelezers slecht presteren omdat wij (nog) niet weten hoe we ze goed kunnen helpen bij wiskunde."

Wat zijn je plannen voor de toekomst?

"Ik wil in de toekomst braillelezers (en hun docenten) blijven helpen bij wiskunde. Daarnaast hoop ik ook dat ik onderzoek kan blijven doen. Ik heb al concrete plannen voor een onderzoek over wiskundige vergelijkingen en (tactiele en hoorbare) grafieken. Hoe kun je braillelezers helpen bij het begrijpen en oplossen van wiskundige vergelijkingen? Verder wil ik me meer inzetten voor het wiskundeonderwijs in ontwikkelingslanden. Dat betreft het wiskundeonderwijs voor *alle* leerlingen."

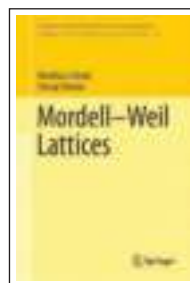
"Ik heb dit onderzoek met heel veel plezier gedaan. De weg eraan toe was spannend en uitdagend. Het was een fantastische ervaring."

Boekbesprekingen

| Book Reviews

Redactie: Hans Cuypers en Hans Sterk

Review Editors NAW - MF 5.092
 Faculteit Wiskunde & Informatica
 Technische Universiteit Eindhoven
 Postbus 513
 5600 MB Eindhoven
reviews@nieuwarchief.nl
www.win.tue.nl/wgreview



Matthias Schütt, Tetsuji Shioda

Mordell–Weil Lattices

Springer, 2019

xvi + 431 p., prijs €65,39

ISBN 9789813293007

De schrijvers beogen met dit boek een up-to-date-behandeling te geven van Mordell–Weil-roosters van elliptische krommen over een functielichaam. Deze zijn aan het eind van de jaren tachtig van de vorige eeuw onafhankelijk van elkaar door N. Elkies en T. Shioda geïntroduceerd en hebben direct daarna tot belangwekkende resultaten geleid.

Om dit onderwerp in zijn context te plaatsen is het goed een paar eigenschappen van *elliptische krommen* te memoreren. In de algebraïsche meetkunde verschijnen deze als kubische krommen in het projectieve vlak en in de complexe meetkunde als 1-dimensionale complexe tori. In beide verschijningsvormen kan men een commutatieve optelling definiëren op de punten van de kromme. De structuur van de resulterende groep, de *Mordell–Weil-groep*, hangt af van het lichaam K waarover men werkt. Welbekend heeft Mordell laten zien dat voor $K = \mathbb{Q}$ de groep eindig voortgebracht is en Weil heeft dit voor een willekeurig getallenlichaam bewezen.

In dit boek wordt het geval behandeld dat K het functielichaam is van een kromme, zeg C , die zelf over een al dan niet algebraïsch afgesloten lichaam k is gedefinieerd. Zo'n elliptische kromme kan men ook opvatten als een *elliptisch oppervlak*, dat wil zeggen een oppervlak dat gevezeld is over C en waarvan de 'algemene' vezel E_t over $t \in C$ een gladde elliptische kromme is. Punten over K corresponderen met secties van de vezeling. Ook hier geldt de stelling van Mordell mits de vezeling niet constant is (met andere woorden, de j -invariant van de elliptische kromme C_t varieert met t). De Mordell–Weil-groep modulo torsie is dus een vrije groep van eindige rang, de *Mordell–Weil-rang*. Op deze groep is er een paring (met waarden in $\mathbb{Q}$) die in beginsel afkomt van de snijvorm op divisoren op het oppervlak X (secties geven immers divisoren). De van deze paring voorziene groep is het *Mordell–Weil-rooster* waar dit boek over gaat. De precieze definitie van de paring is nogal technisch en zal hier niet gegeven worden. De lezer moet hieruit niet concluderen dat Mordell–Weil-roosters ongrijpbaar zijn. Zoals Shioda heeft laten zien, zijn ze meestal direct uit vergelijkingen te berekenen en dit is precies wat in het boek gebeurt.

Zoals boven vermeld zijn er veel toepassingen, waarvan sommige direct gevonden zijn na de introductie van het begrip en andere vrij recent. Deze bestrijken een groot gebied van de wiskunde; afhankelijk van het lichaam waarover gewerkt wordt, zijn deze van complex-meetkundige, Galois-theoretische of van aritmetisch-meetkundige aard. Veel van die toepassingen komen in dit boek aan de orde en het is dan ook niet verbazingwekkend dat de eerste honderd pagina's gewijd zijn aan basisbegrippen uit uiteenlopende takken van wiskunde, zoals gehele roosters, elliptische krommen, algebraïsche oppervlakken en in het bijzonder elliptische oppervlakken — die elk uitgebreid worden besproken.

Pas na al die voorbereidingen komt er een hoofdstuk over de Mordell–Weil-roosters, waarna de eerste meetkundige toepassin-

gen aan de orde komen die elliptische oppervlakken betreffen (wederom zo'n honderd pagina's). Daarna komen algebraïsche vergelijkingen en hun Galois-groep aan de orde, gelieerd aan zogenaamde excellente families van rationale elliptische oppervlakken. Een voorbeeld van zo'n familie is de elliptische kromme (over $\bar{\mathbb{Q}}(t)$) met vergelijking

$$y^2 + ty = x^3 - \epsilon_1 x^2 + \epsilon_2 x - \epsilon_3,$$

waarbij de drie parameters $\epsilon_1, \epsilon_2, \epsilon_3 \in \bar{\mathbb{Q}}$ algebraïsch onafhankelijk zijn over $\mathbb{Q}$. Hier is het Mordell–Weil-rooster het wortelrooster A_2 . De Galois-groep van $\bar{\mathbb{Q}}/\mathbb{Q}(\epsilon_2, \epsilon_3)$ werkt hierop en het blijkt (Stelling 9.15) dat deze representatie als beeld de Weyl-groep van A_2 heeft. Dit is één van de definiërende eigenschappen van 'excellentie' met betrekking tot een spiegelingsgroep — de overige zijn te technisch om hier te geven. Grofweg gezegd: dit begrip zegt dat er een aan de bovenstaande vergelijking gekoppelde eindige Galois-uitbreiding van $\mathbb{Q}(\epsilon_2, \epsilon_3)$ is met Galois-groep A_2 . De spiegelingsgroepen van type E_6, E_7, E_8 treden ook op in het raamwerk van excellente vezelingen van expliciet gegeven rationale elliptische oppervlakken en geven zo soortgelijke Galois-uitbreidingen van getallenlichamen. Daaraan gekoppeld worden relaties besproken met allerlei klassieke onderwerpen, zoals de 27 lijnen op het kubische oppervlak, del Pezzo-oppervlakken, de 28 bitangenten aan een vlakke vierdegraadskromme, enzovoort.

Dan volgen twee hoofdstukken over zogenaamde K3-oppervlakken met een elliptische vezeling. Het standaard voorbeeld wordt gegeven door de vierdegraads-oppervlakken in $\mathbb{P}^3$, maar die laten in het algemeen geen elliptische vezeling toe. Maar, als men onderstelt dat het oppervlak een lijn bevat, dan geeft de vlakkenwaaier door de lijn een elliptische vezeling. Het zijn dit soort oppervlakken die in de hoofdstukken 11 en 12 worden behandeld, meestal over $\mathbb{C}$, maar er is ook een paragraaf gewijd aan supersinguliere K3-oppervlakken (noodzakelijk in positieve karakteristiek).

Het slothoofdstuk, hoofdstuk 13, gaat over het vinden van Mordell–Weil-groepen van elliptische krommen over $k = \mathbb{Q}(t)$ van zo hoog mogelijke rang, en met toepassingen op bolpakkingen. Verschillende klassieke methodes komen aan de orde, onder andere die van Néron (Mordell–Weil-rang 10 als record), van Mestre (11 als record), en van Elkies (rang 18 is onmogelijk), Elkies e.a. (er is een kromme met rang minstens 28). Over $\mathbb{C}(t)$ bewees Shioda dat

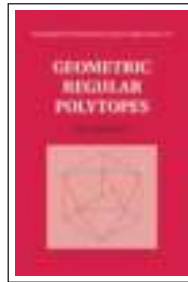
$$y^2 = x^3 + t^m + 1, \quad m \in \mathbb{N},$$

Mordell–Weil-rang ≤ 68 heeft met gelijkheid als 360 een deler is van m . Als $m = p$, een priemgetal van de vorm $6k - 1$, en als de bovenstaande kromme over $\mathbb{F}_{p^2}$ wordt beschouwd, dan geeft hun Mordell–Weil-rooster record goede bolpakkingen, zo blijkt in paragraaf 13.4.

Ter afsluiting nog wat opmerkingen over stijl en uitvoering van dit boek. De keuze van het steeds terugkerende voorbeeld van het hexagonale rooster (A_2) helpt de lezer enorm om de in de verschillende hoofdstukken ingevoerde begrippen goed te begrijpen. Dit wordt verder ondersteund door de vele diagrammen en schetsen van krommenconfiguraties. De gebonden uitgave is speciaal want hierin zijn de illustraties van de 27 lijnen op een kubisch oppervlak en de 28 bitangenten aan een kwartiek in fraaie kleuren uitgevoerd. Aanbevelenswaardig zijn ook de historische noten aan het eind van ieder hoofdstuk. Die zijn een genot om te lezen; hier komen auteurs aan het woord waarvan minstens één de geschie-

denis van het onderwerp van het boek — en veel van wat er mee samenhangt — van nabij heeft meegemaakt en er een actieve rol in gespeeld heeft. Is er dan niets op het boek aan te merken? Misschien is de index te uitgebreid. Die leidt voor sommige (door de schrijver dezès opgezochte) begrippen tot een lange zoektocht door delen van het boek. Hier hebben de schrijvers het adagium 'in de beperking toont zich de meester' voor één keer niet gevolgd. Deze minieme kritiek laat mijn eindoordeel onverlet: ik raad dit meesterwerk iedere algebraïsch- of aritmetisch-meetkundige die in oppervlakken of elliptische krommen is geïnteresseerd van harte aan.

Chris Peters



Peter McMullen

Geometric Regular Polytopes

Encyclopedia of Mathematics and its Applications 172

Cambridge University Press, 2020

xi + 603 p., prijs £105.00

ISBN 9781108489584

In 2002 publiceerde de auteur, tezamen met Egon Schulte, het boek *Abstract Regular Polytopes* in de Encyclopedia-serie van Cambridge University Press, onder nummer 92. In stilte hoopten zij dat de kennis zoals toen gepresenteerd, uitgebreid zou worden tot wat inmiddels in het vakgebied ontwikkeld is. Het voor u liggende boek is daar de verwoording van. Tot aan de publicatie van het boek van McMullen en Schulte, was de systematische uitpluizing van de structuur der reguliere polytopen voornamelijk geconcentreerd op die van ten hoogste drie dimensies. Daarna heeft McMullen het onderzoek uitgebreid naar hogere dimensies, ook daar waar het de zogeheten apeirotopen betreft (dat wil zeggen oneindige polytopen). In zijn eigen woorden zegt de auteur, dat herbezinning op de zaken zoals die zich ontwikkelden en ontwikkeld hebben, nodig waren, namelijk het weergeven van de classificatie van de reguliere polytopen en apeirotopen van volle en bijna volle rang. Maar het onderhavige boek stijgt daar ver bovenuit.

Het boek is opgedeeld in vier delen, en ieder deel bevat een groot aantal secties. In deel 1 vinden we in sectie 1 uitweidingen naar algebraïsche eigenschappen, isometrieën, hoek-som-betrekkingen, groepentheorie, quaternionen, en wat dies meer zij. In sectie 2 worden abstracte reguliere polytopen behandeld. In sectie 3, geheten 'Realizations of symmetric sets', komen we de Wijthoff-ruimte tegen (over Wijthoff komen we later nog te spreken). In sectie 4 volgen, te beginnen met de constructie van Wijthoff, 'Realizations of polytopes', terwijl in de secties 5 en 6 operaties op en met figuren aan de orde komen, alsmede ook rigiditeitseigenschappen.

Deel 2 behelst eigenschappen van klassieke polytopen (zoals de 24-cel, de 600-cel, de 120-cel, de ster-polytopen, honingraat-structuren), maar ook van niet-klassieke polytopen (zoals polytopen in alle dimensies, dito voor apeirotopen, alsmede apeirohedra en polyhedra, tezamen met hoger-dimensionale uitzonderingen).

Dan deel 3, 145 bladzijden vol met karakteristieke eigenschappen van allerhande families van 3-dimensionale en 4-dimensionale polytopen en apeirotopen, tezamen met hoger-dimensionale ge-

vallen zoals de Gosset–Elte-polytopen (over Elte komen we later ook nog te spreken).

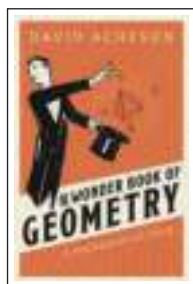
Deel 4 bevat verdere, recente uitbreidingen van de Gosset–Elte-polytopen, lokale toroïdale polytopen, bijzondere families van 4-polytopen en 5-polytopen. Het boek bevat ten slotte een omvangrijke literatuurlijst. Elke sectie van de delen is voorzien van noten en commentaren, hetgeen prachtig overkomt.

In dit korte bestek valt het volgende op te merken. Het boek is zonder meer een moderne bijbel op het gebied van de huidige stand van zaken betreffende polytopen. Het is niet overdreven te stellen dat ‘alles ervan’ in dit boek te vinden is; iets dergelijks overkwam mij met het boek *Endliche Gruppen I* van Bertram Huppert, maar dan wel in 1967.

In het voorgaande zijn de namen van Wijthoff en Elte gevallen. Als lezer van het Nieuw Archief voor Wiskunde, december 2020, bladzijde 240, zal het u niet ontgaan zijn dat daar vier Nederlandse meetkundigen voor het voetlicht werden gebracht, namelijk S.L. van Oss, P.H. Schoute, W.A. Wijthoff en E.L. Elte. In 2003 schreef T.A. Springer een necrologie voor de KNAW vanwege het overlijden van de grote voorvechter betreffende veelvlak-structuren, H.S.M. Coxeter, waarin opgemerkt wordt (citaat) “dat hun werk in onze tijd min of meer vergeten lijkt te zijn geraakt”. In het boek van McMullen komt evenwel het ‘oude’ werk van Van Oss, van Wijthoff en van Elte goed aan bod en de invloed ervan blijkt ook nu nog steeds springlevend te zijn! Overigens, in Nederland heb ik geen weet van personen die zich thans actief met de dingen zoals behandeld in het boek, bezighouden. Daarentegen ligt dat in het buitenland nu kennelijk anders!

Alles overziende biedt het boek een complete, verrassende blik op het vakgebied der polytopen. Een voltrekker van de Cambridge University Press. Tot slot nog dit. Het Zentralblatt für Mathematik is thans volledig openbaar en gratis toegankelijk te raadplegen voor en door een ieder. Ik geef u daaruit de aantallen publicaties en de tijdvakken van de bovengenoemde vier meetkundigen: S.L. van Oss (8; 1898–1932), P.H. Schoute (172; 1870–1916), W.A. Wijthoff (10; 1893–1927), E.L. Elte (5; 1912–1929). Ook vond ik in het Zentralblatt van de hand van een zuster van Willem Abraham Wijthoff, namelijk Anna Geertruida Kerkhoven-Wijthoff, tien publicaties uit de jaren 1893–1924. Het was geheel nieuw voor mij, dat ook zij wiskundig actief is geweest.

Rob van der Waal



David Acheson

The Wonder Book of Geometry A Mathematical Story

Oxford University Press, 2020
288 p., prijs £12.99
ISBN 9780198846383

Acheson is van oorsprong een toegepast wiskundige in de vloeistofdynamica, maar heeft zich sinds zijn emeritaat gericht op het schrijven van popularisaties van wiskundige onderwerpen. Zijn meest recente boek is dit wonderboek, dat ook heel goed zou passen in de Zebra/Epsilon-reeks zoals wij die kennen, hoewel

dit wonderboek misschien soms wel iets luchtiger is. Op de kaft zien we een goochelaar afgebeeld die de vijf regelmatige veelvlakken uit zijn hoge hoed tovert; aan het begin van elk hoofdstukje komt dit steeds als pictogram terug. Het boek bestaat uit 32 korte hoofdstukken. In de inleiding neemt Acheson de lezer mee terug naar 1956, toen hij 10 jaar oud was, en voor het eerst Thales' theorema uitgelegd kreeg. Zijn enthousiasme van toen heeft hij nog niet verloren en hij probeert dit door middel van dit boek op de lezer over te brengen. De pagina's bevatten maar weinig tekst, vaak een soort schoolbord met een krijttekening, met soms nog een ander figuur, foto of afbeelding van een wiskundige. Het boek verwacht nagenoeg geen voorkennis, alles wordt kort en helder uitgelegd en bewezen. Na wat basiswerk begint in hoofdstuk 3 een verhandeling over Euclides' *Elementen*, met een plaatje van Euclides, en de oudst bekende versie van zijn boek. De stijl blijft lichtig, maar wel serieus. Hoofdstuk 6 behandelt de stelling van Pythagoras en geeft drie bewijzen. Acheson meldt dat er in 1927 al een boek was van Elisha Scott Loomis met 230 bewijzen wat in de 2de druk (1940) al uitgebreid was tot 371 bewijzen, inclusief dat van een schoolmeisje, Ann Condit, die in 1938 een nieuw bewijs leverde, ook weer met een plaatje van haar. Genoemd wordt dat de Babyloniërs al een speciaal geval van de stelling van Pythagoras kenden, inclusief een foto van het kleitablet YBC 7289. Ook toepassingen van geometrie worden getoond waaronder de stuiterbommen van de 'dam busters', uit 1943, waarbij de vliegtuigen op een precieze hoogte moesten vliegen om hun bommen af te werpen, ook weer geïllustreerd met een foto. Uiteindelijk wordt in hoofdstuk 32, het laatste, niet-euclidische geometrie en wat topologie behandeld. Er is nog een lijst met 'further reading' en een index. Al met al is het wonderboek een heel fraai geïllustreerd boekje, waarin een groot aantal onderwerpen de revue passeert. Het lijkt gericht op de middelbare scholier en is op een heel plezierige manier geschreven.

Ronald Aarts



Ciro Ciliberto

Classification of Complex Algebraic Surfaces

EMS Series of Lectures in Mathematics
European Mathematical Society, 2020
ix + 133 p., prijs €36,00
ISBN 9783037192108

Een van de grote open problemen in de algebraïsche meetkunde is de (birationale) classificatie van algebraïsche variëteiten.

De classificatie van projectieve algebraïsche krommen over de complexe getallen gaat terug tot Riemann. Hier volstaat het geslacht g als enige topologische invariant en voor iedere $g \geq 2$ is er een moduli-ruimte die de krommen van geslacht g parametrizeert.

De situatie bij oppervlakken, dat wil zeggen, projectieve algebraïsche variëteiten is ingewikkelder. In het begin van de twintigste eeuw hebben Enriques en Castelnuovo een classificatie van oppervlakken gegeven. Later zijn deze resultaten nog uitgebreid naar compacte complexe oppervlakken (Kodaira) en in positieve karakteristiek (Bombieri–Mumford). Deze classificatie maakt aller-

eerst onderscheid naar Kodaira-dimensie. Deze bespreking is niet een geëigende plek om deze dimensie te introduceren, maar deze dimensie is $-\infty$ of een niet-negatief geheel getal ten hoogste de dimensie van de variëteit.

Oppervlakken van Kodaira-dimensie $-\infty$, 0 en 1 kunnen vrij precies worden beschreven. Zo zijn de minimale oppervlakken van Kodaira dimensie 0 de regeloppervlakken en $\mathbb{P}^2$. Van de oppervlakken van Kodaira dimensie 2 ontbreekt een preciezere classificatie. Deze oppervlakken worden normaal gesproken ‘van algemeen type’ genoemd.

Het centrale thema van dit boek is de classificatie van algebraïsche oppervlakken van Enriques te presenteren, maar dan met gebruik van moderne technieken (Minimal Model Programme), die ontwikkeld zijn voor de classificatie van projectieve variëteiten in hogere dimensie. Daarnaast geeft de auteur een gedetailleerde beschrijving van een aantal klassen die in de classificatie voorkomen.

Zowel Chris Peters als Klaus Hulek hebben collegedictaten geschreven met hetzelfde uitgangspunt. Ciliberto kijkt op twee punten af van deze dictaten. Ten eerste probeert Ciliberto zo weinig mogelijk topologische en complex-analytische resultaten te gebruiken. Daarnaast geeft Ciliberto een interpretatie van de resultaten in termen van het Sarkisov-programma, een hulpmiddel oorspronkelijk geïntroduceerd voor de classificatie in hogere dimensie.

Dit boek is een bewerking van een collegedictaat ontworpen voor een cursus voor promovendi. Het vereist zekere kennis in algebraïsche meetkunde. De auteur gebruikt bijvoorbeeld een aantal resultaten uit de theorie van cohomologie van schoven van coherente modules. Dit zijn resultaten die vaak aan het einde van een mastercollege algebraïsche meetkunde worden behandeld. Voor iemand die vertrouwd is met deze resultaten, bijvoorbeeld een promovendus in getaltheorie of meetkunde, is dit boek goed te lezen. De argumentatie is precies en redelijk beknopt.

Remke Kloosterman



Avi Wigderson

**Mathematics and Computation:
A Theory Revolutionizing Technology and
Science**

Princeton University Press, 2019
xiii + 418 p., prijs £40.00
ISBN 9780691189130

Dit is een boek over complexiteitstheorie, geschreven door een van de sleutelfiguren uit het gebied. Wigderson ontving in 2021 de Abelprijs voor zijn bijdragen hieraan.

Complexiteitstheorie ontstond in de jaren 1960/1970 als een nieuwe loot van de theorie van berekenbaarheid (Computability Theory), waarbij behalve naar het onderscheid berekenbaar/niet berekenbaar ook werd gekeken naar rekentijd en geheugen. Dit leidde tot een indeling in complexiteitsklassen, waarvan P en NP de bekendste zijn. Vijftig jaar later zijn de vragen over de ongelijkheid van een aantal van deze klassen nog altijd open, en is het P versus NP-probleem inmiddels uitgegroeid tot een van de bekendste open problemen uit de hele wiskunde.

Het boek van Wigderson is een leerboek, populariserend geschrift, ideeën-geschiedenis, en memoires ineen. Het is niet echt een *studieboek*: bewijzen ontbreken veelal, en vaak wordt alleen een ‘high-level description of the ideas’ gegeven. Dit kan echter zeer nuttig zijn om een idee te krijgen van het moderne onderzoek, en het boek is daarmee interessant voor zowel experts als voor een breder wiskundig publiek.

Een van de meest intrigerende ontwikkelingen van de afgelopen jaren is het werk in de richting van een bewijs van $P = BPP$, dat met name genoemd werd in het laudatio van de Abelprijs. Zoals P (polynomial time) staat voor de klasse van efficiënt berekenbare problemen, zo staat BPP (bounded probabilistic polynomial time) voor de klasse van problemen die efficiënt berekenbaar zijn met probabilistische algoritmen. Het beroemdste voorbeeld is het probleem PRIMES om te bepalen of een getal priem is. Er bestonden reeds lang probabilistische primaliteitstesten voordat in 2002 door Agrawal, Kayal en Saxena werd bewezen dat $PRIMES \in P$. De vraag is of het *altijd* zo is dat een probleem met een efficiënt probabilistisch algoritme ook een efficiënt deterministisch algoritme heeft, en dit wordt uitgedrukt door $P = BPP$. Verrassend genoeg wijst veel er nu op dat dit inderdaad zo is, zie bijvoorbeeld de stelling van Impagliazzo en Wigderson (Theorem 7.7). De grote rol die randomness speelt in de complexiteitstheorie, ook voor resultaten over deterministische algoritmen, is sowieso intrigerend.

Het boek is alleen al aan te bevelen omdat het iets biedt dat weinig in de wiskundeliteratuur te vinden is, namelijk een beschrijving van het vakgebied van binnenuit, door iemand die het mede zelf heeft vormgegeven. Een grote hoeveelheid onderwerpen passeert de revue, te veel om hier allemaal te bespreken. Er is in de afgelopen decennia veel moois gebeurd, maar tegelijkertijd is de hoeveelheid open vragen enorm. Veel daarvan draaien om het al dan niet bestaan van bepaalde logische circuits, die een combinatorische blik bieden op berekenbaarheid, ergens tussen logica en grafentheorie in. Ondanks de overstelpende hoeveelheid materiaal maakt Wigdersons boek duidelijk dat de complexiteitstheorie eigenlijk nog maar net begonnen is.

Het boek is verkrijgbaar bij Princeton University Press, maar ook gratis te downloaden via de webpagina van de auteur.

Sebastiaan Terwijn



David E. Rowe

**Emmy Noether
Mathematician Extraordinaire**

Springer, 2021
xxi + 339 p., prijs €130,79
ISBN 9783030638092

Emmy Noether (1882–1935) was een toonaangevend wiskundige, die in onze huidige tijd vooral wordt herinnerd door twee resultaten: haar beroemde principe uit 1918 over de equivalentie van behoudswetten en symmetrie bij variationele problemen, en de haar zo kenmerkende abstracte axiomatische opbouw van de algebra, ontwikkeld in de twintiger jaren. Zij doorbrak op radicale wijze het

glazen plafond van de masculiene wereld van wiskundigen door in Göttingen in de voetsporen van Gauss, Riemann en Hilbert te treden, en wel als buitengewoon — dat wil zeggen onderbetaald — hoogleraar, een dubbelzinnig grapje in de titel van het te bespreken boek.

Emmy Noether groeide op in een liberaal Joods gezin. Haar moeder Ida Kaufmann was van welgestelde komaf. Haar vader Max Noether was hoogleraar wiskunde in Erlangen, en is vooral bekend door zijn werk met Alexander von Brill over de algebraïsch meetkundige aanpak van het holomorf meetkundige werk van Riemann over abelse integralen. Hij was een erudiet persoon, enige tijd voorzitter van de DMV, en schreef een groot aantal nagedachtenissen in de *Mathematische Annalen*. Samen met de Joodse Paul Gordan, de koning van de klassieke invariantentheorie, vormden zij de wiskundestaf in Erlangen. Een volledig Joodse tweekoppige wiskundestaf was ondanks sluimerend antisemitisme toen niet onmogelijk.

Gordan had naam gemaakt met zijn stelling uit 1868 dat de algebra van invarianten van de groep $SL(2)$ voor binaire vormen van willekeurige graad d steeds eindig voortgebracht is. In de slotzin van zijn in memoriam uit 1912 karakteriseerde Max Noether zijn huisvriend Gordan als volgt: “Er war ein Algorithmiker.”

Om een indruk te geven van het werk van Emmy Noether breng ik een driedeling aan. De eerste periode in Erlangen was er een van relatieve afhankelijkheid, haar studie wiskunde en promotie in 1907 bij Gordan, waarbij ze geheel in zijn stijl een tabel met 331 voortbrengende invarianten van $SL(3)$ voor ternaire vormen van graad 4 wist te produceren. Later zou ze dit eerste werk afdoen als ‘Formelngestrüpp’. Rond 1890 had Hilbert reeds bewezen dat voor willekeurige n en d de invarianten van $SL(n)$ voor vormen in n veranderlijken van graad d een eindig voortgebrachte algebra vormen. Het bewijs gebruikte zijn niet-effectieve basisstelling zodat voor gegeven n en d het onduidelijk blijft tot welke graad je moet doorgaan om een volledig stel voortbrengers te hebben gevonden. Dit ontlokte bij Gordan het prangende commentaar: “Das ist nicht Mathematik, das ist Theologie.” Na haar promotie bleef Emmy Noether nog geruime tijd in Erlangen. Met hulp van Ernst Fischer, die vanaf 1911 de voormalige leerstoel van Gordan bezette, bekwaamde ze zich in de moderne invariantentheorie van Hilbert, schreef daar artikelen over, en nam het onderwijs voor haar vader waar bij ziekte of afwezigheid.

In 1916 maakte ze op uitnodiging van Hilbert en Klein de overstap naar Göttingen. Hilbert volgde in die tijd met grote belangstelling het ontstaan van de algemene relativiteitstheorie, en zocht ondersteuning van Noether om vanuit zijn variationele formulering van de Einstein-vergelijking de behoudswetten te begrijpen. Dit resulteerde in haar beroemde artikel ‘Invariante Variationsprobleme’ uit 1918 over de equivalentie van symmetrie en behoudswetten, dat de basis zou vormen voor haar habilitatie in 1919. Haar resultaat werd aanvankelijk nauwelijks opgemerkt, maar wordt thans zowel binnen de wiskunde als de natuurkunde gezien als een fundamenteel principe van haar hand.

Vanaf 1920 volgt haar zelfstandige periode als hoogleraar in Göttingen tot 1933. In deze periode wordt de abstracte axiomati-

sche aanpak van de algebra haar handelsmerk. Als Hermann Weyl (1885–1955) in 1930 naar Göttingen komt als opvolger van Hilbert ziet hij in Emmy Noether de centrale figuur van wiskundige activiteit aldaar, zowel in de vruchtbaarheid van haar onderzoeksprogramma als ook in haar invloed op een grote kring van leerlingen, de ‘Noether boys’. Van der Waerden (1903–1996) kwam als Amsterdams promovendus in 1924 een semester naar Göttingen, om het benodigd algebraïsch begrippenapparaat voor zijn onderzoek van haar te leren. Hun contact verdiepte zich met de jaren, leidend tot zijn invloedrijke tekstboeken *Moderne Algebra* uit 1930 en *Einführung in die Algebraische Geometrie* uit 1939.

Met de benoeming van Adolf Hitler in januari 1933 tot rijkskanselier daalde Nacht und Nebel over Duitsland en Europa neer. Een ontslag van alle Joodse hoogleraren volgde enkele maanden later. Over dat moeilijke jaar 1933 schrijft Weyl over Noether: “Her courage, her frankness, her unconcern about her own fate and her conciliatory spirit were, in the midst of all hatred and meanness, despair and sorrow surrounding us, a moral solace.” Op initiatief van Solomon Lefschetz kreeg Emmy Noether in september 1933 een aanstelling aan Bryn Mawr College, nabij Philadelphia. Geregeld gaf ze voordrachten aan het IAS in Princeton. Ze overleed in april 1935 pas 53 jaar oud aan de complicaties van een operatie, waarbij een tumor was verwijderd.

Er is de afgelopen jaren relatief veel over Emmy Noether geschreven. De reden zal wel primair zijn dat zij ondanks alle obstakels als eerste vrouw zo wist te excelleren op het hoogste niveau in een exclusieve mannenwereld. Zij is daarmee een uitzonderlijk rolmodel. Zij was zeer ruimhartig in een sterk competitieve omgeving. Toen Van der Waerden haar in 1927 vertelde dat hij het begrip ‘punto generico’ van de Italiaanse meetkundigen met haar algebra nu goed kon begrijpen, reageerde ze enthousiast, gaf nog wat tips en stelde voor om het in de *Mathematische Annalen* te publiceren. Wat ze er echter niet bij vertelde, was dat ze hetzelfde resultaat een half jaar daarvoor tijdens een college al had behandeld. Ze wilde het plezier van een jongeman over zijn ontdekking niet afnemen. Van der Waerden mocht dit verhaal later graag vertellen. Hoe anders waren Newton, Gauss en Hilbert.

Het boek van David Rowe vertelt uitgebreid het levensverhaal van deze bijzondere vrouw. Ik heb het met veel plezier gelezen. Twee kleine kritische kanttekeningen echter. Voor ieder die meer over de persoon Emmy Noether wil weten, zijn de nagedachtenissen uit 1935 van haar directe naasten, te weten Weyl (in zijn verzameld werk), Van der Waerden (in de *Mathematische Annalen*), en Alexandrov (in haar verzameld werk), absolute aanraders. Het had de lezer kunnen plezieren als ze integraal als appendix waren opgenomen, in plaats van hier en daar een citaat eruit. Daarnaast vroeg ik me af in hoeverre de hoofdstukken 3 en 5 te lezen zijn voor mensen, die nog niet bekend zijn met de betreffende wiskunde, namelijk haar eerder genoemd artikel uit 1918 over symmetrie en behoudswetten, en haar samenwerking met Brauer en Hasse over klassenlicamentheorie. Maar goed, dat ligt natuurlijk ook aan de aard van wiskunde, en je kunt ook altijd een hoofdstuk overslaan.

Gert Heckman

Recent verschenen publicaties. Als u een van deze boeken wilt bespreken of als u suggesties heeft voor andere boeken voor deze rubriek, laat dit dan per e-mail weten aan reviews@nieuwarchief.nl.



Nils Berglund
An Introduction to Singular Stochastic PDEs
Allen-Cahn Equations, Metastability, and Regularity Structures
 European Mathematical Society, 2022
 ISBN 9783985470143
doi.org/10.4171/ELM/34



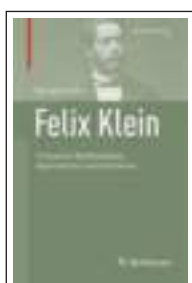
Ryan B. Hayward
Hex: A Playful Introduction
 American Mathematical Society, 2022
 ISBN 9781470464929
bookstore.ams.org/nml-54



Paolo Aluffi e.a. (eds.)
Facets of Algebraic Geometry
A Collection in Honor of William Fulton's Both Birthday
 Cambridge University Press, 2022
 ISBN 9781108870061
cambridge.org/9781108870061



Jan van Neerven
Functional Analysis
 Cambridge University Press, 2022
 ISBN 9781009232470
cambridge.org/9781009232470



Renate Tobies
Felix Klein
Visions for Mathematics, Applications, and Education
 Birkhäuser, 2019
 ISBN 9783030757854
springer.com/978-3-030-75785-4



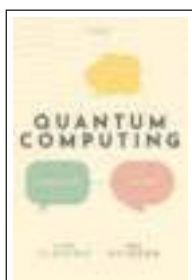
Klaas Landsman
Foundations of General Relativity
From Einstein to Black Holes
 Radboud University Press, 2021
 ISBN 9789083178929
doi.org/10.54195/EFVF4478



Alice Peters, Mark Saul
A Festival of Mathematics
A Sourcebook
 American Mathematical Society, 2022
 ISBN 9781470453381
bookstore.ams.org/mcl-28



Dana Mackenzie
What's Happening in the Mathematical Sciences
Volume 12
 American Mathematical Society, 2022
 ISBN 9781470464981
bookstore.ams.org/happening-12



Alice Flarend, Robert Hilborn
Quantum Computing
From Alice to Bob
 Oxford University Press, 2022
 ISBN 9780192857989
global.oup.com/academic/product/quantum-computing-from-alice-to-bob-9780192857989



Robin Wilson (ed.)
Oxford's Savilian Professors of Geometry
 Oxford University Press, 2022
 ISBN 9780198869030
global.oup.com/academic/product/oxfords-savilian-professors-of-geometry-9780198869030