

Inhoud | Contents

Artikelen | Features

- Nieuws | News**
- 9 Minisymposium 'De wiskundige L.E.J. Brouwer, een veelzijdig genie' op 17 maart 2022
Teun Koetsier
- Oratie | Inaugural Lecture**
- 10 Empirical explorations of a complex society
Frank Peter Pijpers
- Interview | Interview**
- 26 Avi Wigderson: A look at mathematics through the lens of computation
Raf Bocklandt
- Evenement | Event**
- 31 Avi Wigderson's work and influence *Ronald de Wolf*
- Maatschappij | Society**
- 37 An Italian CSI drama
Richard D. Gill
- Onderwijs | Education**
- 43 Meetkunde van de stang: rechte lijn en koppelkrommen
Rainer Kaenders
- Onderzoek | Research**
- 53 Steps towards openness and fairness in scientific publishing
Jop Briët, David Holmes, Ross J. Kang

Rubrieken | Departments

- 3 Redactioneel *Hans Sterk*
- 4 Agenda *Nikki Levering*
- 6 Nieuws *Nikki Levering*
- 20 Stoffelijke resten: België *Wieb Bosma*
- 35 Wiskundigen in den vreemde
Peter H. van der Kamp
- 51 Proof by example: Elena Pulvirenti
Francesca Arici, Clara Stegehuis
- 56 Boekbesprekingen
Hans Cuypers, Hans Sterk
- 62 Problemen
Onno Berrevoets, Daan van Gent

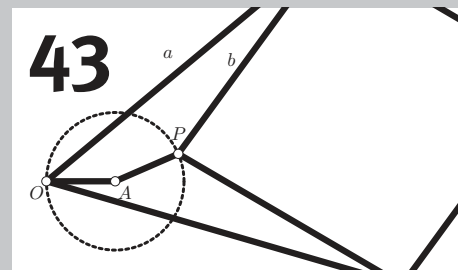
Uitgelicht

26



Een interview met Avi Wigderson, een van de twee winnaars van de Abelprijs 2021.

43



Eerste van twee delen van Rainer Kaenders over stangenconstructies.

Colofon

Het Nieuw Archief voor Wiskunde is een uitgave van het Koninklijk Wiskundig Genootschap en verschijnt vier maal per jaar. Het tijdschrift richt zich op eenieder die zich beroepsmatig met wiskunde bezighoudt, als academisch of industrieel onderzoeker, student, leraar, journalist of beleidsmaker. Het stelt zich ten doel te berichten over ontwikkelingen in de wiskunde in het algemeen en in de Nederlandse wiskunde in het bijzonder.

ISSN 0028-9825

Adres

Nieuw Archief voor Wiskunde
Centrum Wiskunde & Informatica
Postbus 94079, 1090 GB Amsterdam
tel. 020-5924288
redactie@nieuwarchief.nl
www.nieuwarchief.nl

Hoofredactie

Raf Bocklandt (r.r.j.bocklandt@uva.nl)
Robbert Fokkink (r.j.fokkink@tudelft.nl)

Eindredactie/Bladmanager

Fred Drissen (fred@nieuwarchief.nl)

Redactie

Francesca Arici (UL), Viktor Blåsjö (UU), Hans Cuypers (TU/e), Teun Koetsier (VU), Nikki Levering (UvA), Daan Mulder, Nicolaos Starreveld (UvA), Clara Stegehuis (UT), Hans Sterk (TU/e), Mark Timmer (UT)

Problemenrubriek (problems@nieuwarchief.nl)

Onno Berrevoets en Daan van Gent

Bureau redactie

Anne van Grinsven

Illustraties

Ryu Tajiri

Vormgeving

Susanne Laws (omslag, begeleiding binnenwerk)
Kitty Molenaar (ontwerp)

Druk

Veldhuis Media

Advertenties

advertenties@nieuwarchief.nl

Koninklijk Wiskundig Genootschap

www.wiskgenoot.nl

Platform Wiskunde Nederland

www.platformwiskunde.nl

European Mathematical Society

www.euro-math-soc.eu

International Mathematical Union

www.mathunion.org

Koninklijk Wiskundig Genootschap

Het Koninklijk Wiskundig Genootschap (KWG) is een landelijke vereniging van beoefenaars van de wiskunde. In 1778 opgericht onder de zinspreuk: 'Een onvermoeide arbeid komt alles te boven' is het 's werelds oudste nationale wiskundegenootschap. Leden ontvangen het Nieuw Archief voor Wiskunde als onderdeel van hun lidmaatschap.

Bestuur

Barry Koren (TU/e, voorzitter), Wioletta Ruszel (TUD, penningmeester), Willem Jan Palenstijn (CWI, secretaris), Danny Beckers (VU), Rogier Bos (UU), Marie-Collette van Lieshout (CWI), Michael Müger (RU), Alef Sterk (RUG), Jan Wiegerinck (UvA).

Secretariaat

Koninklijk Wiskundig Genootschap, CWI
Postbus 94079, 1090 GB Amsterdam
wiskgenoot@wiskgenoot.nl

Ledenadministratie KWG / Abonnementen

admin@wiskgenoot.nl, tel. 020-5924008
Wijzigingen of opzegging kunt u ook doorgeven door in te loggen op www.wiskgenoot.nl.

Contributie

Tarieven per jaar (bij betaling per automatische incasso krijgt u € 2,50 korting):

- gewoon lid: € 97,50
 - reciprociteitslid: € 77,50
 - gepensioneerden en werklozen: € 52,50
 - aio's, oio's, studenten: € 42,50 (max. 4 jaar)
 - lid zonder Nieuw Archief: € 57,50
- Studenten en pas afgestudeerden kunnen een jaar lang gratis lid worden.

Voor verzending van het Nieuw Archief naar het buitenland wordt een portotoeslag van € 10 in rekening gebracht.

Instituten in Nederland en buitenland kunnen zich abonneren op het Nieuw Archief voor Wiskunde voor € 105 (Nederland), € 115 (Europa) of € 117,50 (buiten Europa).

Members of foreign societies

Members of SIAM, the *Société Mathématique de France*, the *Gesellschaft für Angewandte Mathematik und Mechanik*, the *Deutsche Mathematiker-Vereinigung*, and of the *American, Australian, Belgian, Indian, London, Spanish, and South-African Mathematical Societies* living outside of the Netherlands pay € 77,50 instead of the full membership fee of € 97,50 a year. Conversely, these foreign societies, as well as the VvS+OR and the NVORWO, have reduced membership fees for KWG members. A postage charge of € 10 is added for members living abroad but in Europe, and a charge of € 12,50 for members living outside of Europe.

Exchange subscriptions

Koninklijk Wiskundig Genootschap Library
Centrum Wiskunde & Informatica
P.O. Box 94079, NL-1090 GB Amsterdam
KWG-exchange@cw.nl

Informatie voor auteurs

Kopij

Kopij dient per e-mail te worden aangeboden aan kopij@nieuwarchief.nl. Voor meer informatie en auteursinstructies zie www.nieuwarchief.nl.

Volgende nummers

nummer	maand	verschijnen	deadline kopij
23(2)	juni	2022	verstrekken
23(3)	september	2022	01-05-2022
23(4)	december	2022	01-08-2022
24(1)	maart	2023	01-11-2022

Instituuts- en bedrijfsleden

De publicaties van het KWG worden mede mogelijk gemaakt door de bijdragen van de volgende instituten en bedrijven.

	Centrum Wiskunde & Informatica
	Universiteit van Amsterdam
	Vrije Universiteit Amsterdam
	Rijksuniversiteit Groningen
	Universiteit Leiden
	Radboud Universiteit Nijmegen
	Universiteit Utrecht
	Technische Universiteit Delft
	Technische Universiteit Eindhoven
	Universiteit Twente
	Elsevier
	ORTEC

Op het omslag

Messier 3 (of M3) is een bolvormige sterrenhoop in het sterrenbeeld Jachthonden, en bestaat uit ongeveer 500.000 sterren. Lees de oratie van Frank Peter Pijpers over het empirisch onderzoeken van complexe systemen op pagina 10. [Foto: esahubble.org.]

Meer zichtbaarheid

De voorbereidingen voor de nieuwe onderwijsperiode vragen van mij en mijn collega's de nodige organisatorische flexibiliteit. We kunnen op de campus lesgeven, maar niet bij alle vakken met alle studenten in de zaal. We kunnen als docententeam weliswaar denken klaar te staan om les te geven, maar bij besmetting van een van ons moeten we onmiddellijk gaan improviseren, en die besmettingen komen er nu eenmaal, of beter: zijn er al. En ja, we zijn gaandeweg best wel handig(er) met middelen als Zoom, Teams en elektronische leeromgevingen geworden, en kunnen daarmee inmiddels dan ook het nodige voor elkaar krijgen. Toch vergt het steeds de nodige extra tijd en inspanning om je onderwijs op de rails te krijgen (en te houden als bijvoorbeeld overheidsmaatregelen wijzigen), en kost het in het bijzonder meer moeite om in contact te blijven met de studenten. Voor hen is het ook steeds van week tot week maar zien hoe het loopt, of zelfs van dag tot dag: on campus, online, hybride. Het maakt het voor beide partijen lastiger om de wiskunde voorop te laten staan en een levendig gesprek daarover aan te gaan voor, tijdens en na de colleges, zoals we gewend waren. Een student stelt digitaal zo gauw niet meer even dat simpele maar voor hem of haar o zo belangrijke vraagje.

Toch zijn er ook positieve kanten te ontwaren. Je kunt gemakkelijker op afstand met collega's werken (eigenlijk: je was eerder, althans ik, nauwelijks van de mogelijkheden op de hoogte), en vooral met collega's met wie je goed bekend bent kan een online overlegje heel efficiënt blijken te werken. Je sluit eerder aan bij een vergadering of seminar 'ver weg' omdat je niet hoeft te reizen. Kortom, we passen ons aan en doen lokaal varianten van dingen

die nu op allerlei plekken in de maatschappij aan het gebeuren zijn om de coronatijd het hoofd te bieden, binnen en buiten de wiskundeomgeving.

We worden in onze Nederlandse wiskundegemeenschap niet alleen digitaler, maar ook internationaler, en ook wordt de rol van wiskunde en de betrokkenheid van wiskundigen bij maatschappelijke kwesties steeds zichtbaarder. Het is geen zeldzaamheid meer om in de krant of een ander nieuwsmedium een wiskundige tegen te komen in een andere rol dan die van bewoner van een ivoren toren. Natuurlijk hebben we er niet in alle gebieden van de wiskunde evenveel mee te maken, al gaan bijvoorbeeld zaken met betrekking tot uitgevers ons allemaal aan, een bijdrage in deze aflevering maakt dat duidelijk. Statistiek is inmiddels een tak van wiskunde die én zichtbaar én niet meer weg te denken is uit onze maatschappij, maar ook al gauw tot commentaar leidt, zoals recent het geval was bij de plaatjes die Ernst Kuipers demonstreerde. Statistiek blijkt geen eenvoudige kant en klare toolbox te zijn en vereist de bekwame begeleiding van experts. Lees over Richard Gills betrokkenheid bij een buitenlands proces dat ons herinnert aan de zaak Lucia de Berk.

Wat me trouwens opviel aan mezelf in coronatijd: ik werd als vanzelf meer en meer aangetrokken tot wiskundig leesvoer, mischien maar goed ook voor een redacteur boekbesprekingen. ☞

Hans Sterk, redacteur boekbesprekingen

Faculteit Wiskunde en Informatica, Technische Universiteit Eindhoven

Agenda

| Upcoming Events

maart 2022

9 maart 2022

Rekenconferentie Kennispunt taal en rekenen MBO

Rekenconferentie met als doel het kennisdelen rondom rekenen in het algemeen en de invoering van de nieuwe rekeneisen.

plaats online

info taalenrekenenmbo.nl

11 maart 2022

Tweede ronde Nederlandse Wiskunde Olympiade

De tweede ronde van de Nederlandse Wiskunde Olympiade speelt zich af op de universiteiten.

plaats universiteiten van Nederland

info wiskundeolympiade.nl

17 maart 2022

W4 Kangoeroe

WereldWijdeWiskundeWedstrijd voor basis- en middelbare scholieren.

plaats op eigen scholen

info w4kangoeroe.nl

18–19 maart 2022

Finaleweekend Wiskunde A-lympiade

Teams uit Nederland, Duitsland, Denemarken, Kroatië en Japan werken aan een opdracht tijdens een tweedaags verblijf op de Veluwe.

plaats Garderen

info wiskundeintteams.sites.uu.nl

24 maart 2022

NMC: Speed Dates with Industry

Onderdeel van de NMC 2022 Series, waarin bedrijven kunnen speeddaten met promovendi en andere belangstellende deelnemers.

plaats online

info mathematischcongres.nl

24 maart 2022

Prijsuitreiking Wiskunde B-dag 2021

Feestelijke bekendmaking top 10 deelnemende teams Wiskunde B-dag.

plaats Academiegebouw, Utrecht

info wiskundeintteams.sites.uu.nl

24–25 maart 2022

Workshop Nonlinear PDEs: Analysis & Simulation

Workshop die focust op nieuwe manieren om de uitdagingen rond non-lineaire PDEs op te lossen.

plaats Radboud Universiteit Nijmegen

info www.math.ru.nl/npdes

25 maart 2022

Nationale Rekencoördinator Dag

Dag voor rekencoördinatoren en leerkrachten, waarop het rekenonderwijs van de basisschool centraal staat.

plaats Utrecht

info nrcd.sites.uu.nl

30 maart 2022

Grote Rekendag

Dag voor alle basisscholen in Nederland en Vlaanderen (groep 1 t/m 8) die helemaal in het teken staat van rekenen. Het thema is dit jaar 'Bouwavonturen'.

plaats basisscholen Nederland en Vlaanderen

info groterekendag.nl

april 2022

4 april 2022

Johann Bernoulli Lezing

Teun Koetsier (VU) houdt zijn Bernoulli Lezing 'The Ascent of the Global Intelligent Machine'.

plaats Rijksuniversiteit Groningen

info rug.nl

6–12 april 2022

European Girls' Mathematical Olympiad

Europese wiskundewedstrijd speciaal voor meisjes.

plaats Eger, Hongarije

info egmo.org

7–8 april 2022

Abel Prize Laureates Lectures

Lezingen van de Abelprijswinnaars László Lovász en Avi Wigderson, en een aantal onderzoekers die geïnspireerd zijn door hun werk. Georganiseerd door de KNAW en het CWI.

plaats online en Trippenhuis/CWI, Amsterdam

info kna.nl/abel-prize-2021, cwi.nl/abelprize2022

Suggesties voor deze agenda zijn welkom.

Redacteur: Nikki Levering

agenda@nieuwarchief.nl

8–9 april 2022

□ Nationale Wiskunde Dagen

28ste editie van de tweedaagse conferentie voor wiskundeleraren. De plenaire lezingen worden verzorgd door Nanda Piersma (HvA, CWI), Clara Stegehuis (UT) en Tom Crawford (Oxford).

plaats Noordwijkerhout

info uu.nl/onderwijs/nationale-wiskunde-dagen

12–13 april 2022

□ International Conference on Multilevel Analysis

Tweejaarlijks congres, met lezingen van George Leckie (University of Bristol) en Terrence D. Jorgensen (UvA).

plaats De Zalen van Zeven, Utrecht

info multilevel.fss.uu.nl

19–20 april 2022

□ NMC Scientific Days

Nederlands Mathematisch Congres 2022, met dit jaar als keynote speakers Helmut Hofer, Natasa Jonoska, Shafi Goldwasser en de (nog bekend te maken) winnaar van de N.G. de Bruijn Prijs.

plaats Van der Valk Hotel, Utrecht

info mathematischcongres.nl

29 april–1 mei 2022

□ Benelux Mathematical Olympiad

Jaarlijkse olympiade voor middelbare scholieren uit België, Nederland en Luxemburg.

plaats Mechelen, België

info wiskundepersdienst.nl

mei 2022

13 mei 2022

□ ELWiE-R-Event Conferentie en Symposium

Conferentie met als thema het Bèta-onderwijs in Nederland van 1971–2021–2071. Dit jaar zal aansluitend het symposium ‘100 jaar bèta-didactiek’ worden georganiseerd.

plaats nog te bepalen

info elbd.sites.uu.nl

30 mei–3 juni 2022

□ Noncommutative Geometry Along the North Sea 2022

Lorentz workshop, mede georganiseerd door Bram Mesland (UL) en Walter Daniel van Suijlekom (RU).

plaats Lorentz Center@Snellius, Leiden

info lorentzcenter.nl

30 mei–3 juni 2022

□ Benchmarked: Optimization Meets Machine Learning 2022

Lorentz workshop, mede georganiseerd door Joaquin Vanschoren (TU/e) en Mike Preuss (UL).

plaats online en Lorentz Center@Oort, Leiden

info lorentzcenter.nl

juni 2022

10 juni 2022

□ Onderwijs meets onderzoek

Het thema van de vierde editie van dit symposium is De toekomst van het statistiekonderwijs.

plaats Domstad, Utrecht

info nvvw.nl

18 juni 2022

□ Symposium Ietje Paalman-de Miranda

Ter nagedachtenis van Aïda Paalman-de Miranda. Sprekers zijn onder anderen Margriet van der Heijden (auteur biografie), Raf Bocklandt (UvA) en Ronald Venetiaan (oud-president Suriname).

plaats Universiteit van Amsterdam

info kdvi.uva.nl

30 juni–1 juli 2022

□ 40e Panama-conferentie

Jubileumeditie van de Panama-conferentie met als thema ‘40x Panama: verleden, heden en toekomst’.

plaats Zeist

info panamaconferentie.sites.uu.nl

juli 2022

6–14 juli 2022

□ ICM 2022

Het vierjaarlijkse International Congress of Mathematicians wordt dit jaar in St. Petersburg, Rusland, gehouden.

plaats St. Petersburg, Rusland

info icm2022.org

9–16 juli 2022

□ International Mathematical Olympiad (IMO)

Internationale wiskundecompetitie voor middelbare scholieren, dit jaar in Noorwegen.

plaats Oslo, Noorwegen

info imo2022.org

11–15 juli 2022

□ Advanced Optimization for Social Choice

Lorentz workshop, mede georganiseerd door Ronald de Haan (UvA).

plaats Lorentz Center@Snellius, Leiden

info lorentzcenter.nl

11–15 juli 2022

□ Disorder's Role in Glass Formation and Deformation

Lorentz workshop, mede georganiseerd door Peter Schall en Edan Lerner (UvA).

plaats Lorentz Center@Oort, Leiden

info lorentzcenter.nl

18–22 juli 2022

□ Multidimensional Continued Fractions and Euclidean Dynamics

Lorentz workshop, mede georganiseerd door Evgeny Verbitsky (UL).

plaats Lorentz Center@Snellius, Leiden

info lorentzcenter.nl

25–29 juli 2022

□ Coherent Structures: Current Developments and Future Challenges

Lorentz workshop, mede georganiseerd door Martina Chirilus-Bruckner en Hermen Jan Hupkes (UL).

plaats Lorentz Center@Snellius, Leiden

info lorentzcenter.nl

augustus 2022

1–7 augustus 2022

□ International Mathematics Competition for University Students

Internationale wiskundewedstrijd voor studenten.

plaats Blagoevgrad, Bulgarije

info imc-math.org.uk

Nieuws

| News

Hans de Rijk (aka Bruno Ernst) overleden

Afgelopen november is Hans de Rijk, beter bekend als Bruno Ernst, op 95-jarige leeftijd overleden. Tijdens zijn leven is hij van onschatbare waarde geweest voor de popularisering van de wetenschap binnen Nederland. Zo richtte De Rijk in de jaren zestig de Volkssterrenwacht Simon Steven op, was hij jarenlang een van de drijvende krachten achter het tijdschrift *Pythagoras*, en is hij daarnaast een van de oprichters van de stichting Ars et Mathesis.

De Rijk was wiskunde- en natuurkundeleraar van beroep. Hij had geen universitair diploma, maar werd gedreven door nieuwsgierigheid. 'Ik weet niets, maar ben nieuwsgierig naar alles' (*Nescius omnium buriosus sum*) was dan ook zijn levensmotto. Als autodidact schreef hij meer dan honderd artikelen en tientallen boeken, over wiskunde, sterrenkunde, holografie, en nog veel meer. Dit deed hij onder verschillende pseudoniemen, waaronder Bruno Ernst, Ben Engelhardt en Ben Elshout. Een van zijn bekendste boeken, geschreven onder het pseudoniem Bruno Ernst, is *De Toverspiegel van M.C. Escher*. De Rijk ontdekte Escher voordat deze bij het grote publiek bekend werd, en was naast een goede vriend van Escher ook zijn biograaf. Voor zijn bijdragen heeft De Rijk de Zilveren Anjer van het Prins Bernhard Cultuurfonds ontvangen, is er in 2007 een planetoïde naar hem vernoemd en kreeg hij in 2008 de NWO Eurekaprijs. Een van zijn laatste bijdragen is het kunstwerk *Penrose driehoek* in het virtuele Musée Tesseract, dat in het item hierna staat beschreven. [nrc.nl, wiskundebrief.nl](http://nrc.nl/wiskundebrief.nl)



Hans de Rijk (links) met Escher (uit het boek *De Toverspiegel van M.C. Escher*)

Virtueel wiskundemuseum Tesseract

Op 20 november is tijdens de Ars et Mathesis-dag het virtuele Musée Tesseract officieel geopend met de tentoonstelling 'Kunst en Wiskunde'. In dit virtuele en vrij toegankelijke museum is een uitgebreide tour langs uiteenlopende wiskundige kunstwerken te volgen. Naast 2D-werk aan de muur staan er ook vele 3D-objecten die van alle kanten te aanschouwen zijn, soms zelfs van binnenuit. Bij een aantal werken hangt voor de geïnteresseerde ook informatie over het werk zelf of de kunstenaar achter het werk. Het museum is zo ingericht dat je er als bezoeker zelf doorheen kunt bewegen en zo elk werk in alle rust kunt bewonderen. Daarnaast is er ook een tour die de bezoeker automatisch langs alle werken

Deze rubriek is een kroniek van wiskundige activiteiten in Nederland. Toekomstige activiteiten worden aangekondigd en van voorbijgaande activiteiten wordt verslag gedaan. Wilt u uw aankondiging of verslag in deze rubriek geplaatst zien? Stuur ons dan uw bijdrage, zo mogelijk met illustratie. De redactie behoudt zich het recht voor berichten te weigeren of in te korten.

Redacteur: Nikki Levering
nieuws@nieuwarchief.nl

brengt. In totaliteit bestaat het museum uit een centrale hal met vier galerijen en zes zalen aan weerszijden van deze hal.

Een van de te bewonderen werken is *De toren* van Jan W. Marcus, die als een van de 3D-blikvangers in de centrale hal staat. De toren is ongeveer 4,5 meter hoog en geïnspireerd door het werk van Kenneth Snelson. De toren bestaat uit drukstaven die verbonden zijn door spankabels, waarbij het fascinerende is dat de toren rechtop staat ondanks dat geen van de drukstaven elkaar raken. Een dergelijke constructie staat ook wel bekend als een *tensegrity*. Waar de toren van Snelson ook slaphangende draden bevatte, bevat Marcus' toren het minimum aantal componenten dat nodig is om stabiliteit te garanderen.

arsetmathesis.nl



Blik in de centrale hal van Musée Tesseract, met links *De toren* van Jan W. Marcus

ICIAM 2027 naar Den Haag

Het bestuur van het ICIAM heeft Den Haag gekozen als locatie voor het International Congress on Industrial and Applied Mathematics 2027. Dit congres, dat elke vier jaar wordt georganiseerd en meer dan 3500 internationale deelnemers telt, brengt toonaangevende experts binnen de wiskunde samen om het onderzoek naar de toepassingen van wiskunde te stimuleren. Den Haag werd als ideale locatie gezien vanwege de leidende rol die Nederland speelt binnen de industriële wiskunde, met verspreid door het land diverse instituten en organisaties met focus op dit vakgebied. Voor de organisatie van het ICIAM 2027 zal worden samengewerkt met het KWG en PWN.

iciam.org

Stieltjesprijs voor Jan-Willem van Ittersum

Jan-Willem van Ittersum zal tijdens het Nederlands Mathematisch Congres 2022 de Stieltjesprijs voor het beste wiskundige proefschrift van het academisch jaar 2020–2021 aan een Nederlandse universiteit ontvangen. Zijn proefschrift, getiteld *Partitions and Quasimodular Forms: Variations on the Bloch–Okounkov Theorem*, schreef hij onder begeleiding van Gunther Cornelissen (UU) en Don Zagier (Max Planck Institute for Mathematics) aan de Universiteit Utrecht. Van Ittersum bestudeerde hoe functies van partities van gehele getallen door een middelingsoperatie leiden tot de constructie van quasi-modulaire vormen. In zijn proefschrift staan acht resultaten over de eigenschappen van deze functies en de toepassingen ervan. Zijn werk werd gekozen uit 76 proefschriften. Al voor zijn promotie bleek Jan-Willem van Ittersum veel wiskundig inzicht te hebben. Zijn bachelor- en masterscriptie zijn beide origineel werk en zijn beide artikelen geworden die na eerste inzending al geaccepteerd zijn. Het promotietraject

was naar idee van Van Ittersum zelf: hij schreef het voorstel en verwierf een beurs om het onderzoek te kunnen uitvoeren. Voor zijn onderzoek kreeg hij vorig jaar ook de KWG PhD-prijs. Momenteel is hij postdoc aan het Max Planck Institute for Mathematics in Bonn.

platformwiskunde.nl

Lorentz Center bestaat 25 jaar

Het Lorentz Center in Leiden viert dit jaar haar 25-jarig bestaan. Het centrum organiseert sinds 1997 wetenschappelijke bijeenkomsten en verwelkomt daarbij onderzoekers van over de hele wereld. Tegenwoordig zijn er rond de tachtig workshops per jaar in allerlei disciplines. Zo waren er binnen de discipline wiskunde afgelopen jaar onder andere workshops over grafentheorie, topologie en quantumtheorie. Ter ere van haar 25-jarig bestaan organiseert het Lorentz Center extra activiteiten, waaronder meerdere lezingen in musea in Leiden. Verder zal het Lorentz Center een speciale samenwerking aangaan met Leiden2022, de organisatie achter alle activiteiten die worden opgezet omdat Leiden dit jaar, als eerste Nederlandse stad, gekozen is tot Europese wetenschapshoofdstad.

lorentzcenter.nl

Abelprijslaureaat Jacques Tits overleden

Jacques Tits, die samen met John Griggs Thompson in 2008 de Abelprijs in ontvangst mocht nemen, is afgelopen december op 91-jarige leeftijd overleden. Tits ontving de Abelprijs voor zijn belangrijke bijdragen aan de algebra, in het bijzonder de vormgeving van de moderne groepentheorie. Zo introduceerde hij de *Gebouwenetheorie*, welke een meetkundige interpretatie geeft aan onder andere algebraïsche groepen, Lie-groepen en eindige groepen.

Tits werd in 1930 geboren in België, en bleek al vroeg veel aanleg voor wiskunde te hebben. Zo slaagde hij op 14-jarige leeftijd voor het toelatingsexamen van de Vrije Universiteit Brussel, en behaalde hij zijn doctoraat toen hij slechts 20 jaar oud was. Na leerstoelen aan de Vrije Universiteit Brussel en de Universiteit van Bonn verhuisde hij naar Parijs, waar hij hoofd Groepentheorie aan het Collège de France werd. Deze positie zou hij tot zijn pensioen in 2000 bekleden. Naast de Abelprijs heeft Tits in 1993 ook de Wolfprijs mogen ontvangen.

abelprize.no, bms.ulb.ac.be

Monique Laurent benoemd als CWI Fellow 2021

Vanwege haar vele belangrijke bijdragen aan zowel de wetenschap als het management van het CWI is prof. dr. Monique Laurent (CWI, Tilburg University) gekozen tot CWI Fellow 2021. Het is slechts de tweede keer in de afgelopen vijf jaar dat deze titel wordt toegekend (Jos Baeten verkreeg de eer in 2020), en Laurent is hiermee zelfs de eerste vrouw die wordt gekozen tot CWI Fellow. Zij is sinds 1997 actief op het CWI, en is de afgelopen jaren onder andere leider van de onderzoeksgroep Networks and Optimization en lid van het management team geweest. Met de titel CWI Fellow krijgt Laurent de mogelijkheid in vrijheid verder te gaan met haar invloedrijke onderzoek naar discrete en polynomiale optimalisatie. Voor haar bijdragen in dit vakgebied werd zij eerder gekozen als SIAM Fellow 2017 en EUROPT Fellow 2021. Daarnaast is zij lid van het KNAW en het KHMW. In 2014 was ze een van de uitgenodigde sprekers op het International Congress of Mathematicians.

cwi.nl

Mike Daas wint Diamantprijs 2021

Met zijn voordracht 'The symplectic method for solving diophantine equations' heeft Mike Daas van de Universiteit Leiden de Diamantprijs gewonnen. Deze prijs wordt door het wiskundecluster DIAMANT jaarlijks toegekend aan de beste jonge spreker op het Diamantsymposium. De prijs werd uitgereikt door Hendrik Lenstra (Universiteit Leiden), en overgedragen door de vorige winnaar, Wouter Cames van Batenburg (TU Delft).

Robert Fokkink



Foto: Peter Steenhagen

Mike Daas heeft de Diamantprijs in ontvangst genomen van Hendrik Lenstra

Jong Talent Prijzen en ASML afstudeerprijs

Op 29 november hebben negen studenten (technische) wiskunde van het KHNW de Jong Talent Aanmoedigingsprijzen voor hun resultaten in het eerste studiejaar ontvangen. Gerrit Timmer, CSO van ORTEC, reikte de prijzen in een livestream met 444 belangstellenden van over de hele wereld uit aan Daniel Cortild (RUG), Gernt Hanskamp (UTwente), Jippe Hoogeveen (UU), Sebastian Kessler (UvA), Thijs de Kok (RU), Dominique Lawson (UL), Cor de Leeuw (TU/e), Soroush Raeisi (TUD) en Lars Wagoner (VU). In dezelfde bijeenkomst werd ook de ASML afstudeerprijs uitgereikt aan Mark van den Bosch (UL). Hij ontving de prijs voor zijn scriptie *Delay Differential Equations Driven by Levy Processes of Finite Intensity: on the Existence of Invariant Measures for Makey-Glass Type Equations*, waarin hij kansrekening toevoegt aan dynamische modellen om deze realistischer te maken. Met deze scriptie is hij summa cum laude afgestudeerd, en inmiddels is hij aan een promotietraject in Leiden begonnen.

khmw.nl

Nieuwe stap richting Chowla-vermoeden

Het vermoeden van Chowla voorspelt dat wanneer een geheel getal een even of oneven aantal priemfactoren heeft dit niet beïnvloedt of het vorige of volgende getal een even of oneven aantal priemfactoren heeft. Het vermoeden is in 1965 opgesteld en zou slechts als opstapje naar moeilijkere vragen over priemgetallen dienen. Zo legt het vermoeden een relatie tussen multiplicatie en additie, en zou het dus een belangrijk opstapje naar het priemtweelingvermoeden kunnen zijn. Echter, Chowla's vermoeden bleek zelf ook moeilijk te bewijzen, en bleef al die jaren niet meer dan een vermoeden. Door recente resultaten van Harald Helfgott (University of Göttingen) en Maksym Radziwiłł (Caltech) lijken we nu dan eindelijk een stap dichterbij gekomen.

Omdat de Liouville-functie respectievelijk waarde -1 en $+1$ toekent aan getallen met een oneven en even aantal priemfactoren, zegt Chowla's vermoeden dat er geen correlatie is tussen de waarden van de Liouville-functie voor opeenvolgende getallen. Het was bekend dat, gemiddeld gezien, de Liouville-functie de helft van de tijd $+1$ en andere helft van de tijd -1 is. In 2015 bewezen Radziwiłł en Matomäki (University of Turku) dat dit gedrag ook op kortere intervallen bestaat: ze lieten zien dat voor een willekeurig getrokken getal ongeveer de helft van de honderd dichtstbijzijnde burens een oneven aantal priemdelers heeft. Dit was precies wat Terence Tao (University of California) nodig leek te hebben om het logaritmische Chowla-vermoeden, waarin kleinere getallen grotere gewichten hebben zodat ze een even grote kans hebben om getrokken te worden als grotere getallen, op te lossen. Zijn gedachte was dat als er wel correlatie tussen opeenvolgende Liouville-getallen zou zijn dit ook over grotere intervallen zou gelden, wat een tegenspraak geeft met het resultaat van Radziwiłł en Matomäki. Om van opeenvolgende getallen naar grotere intervallen te gaan maakte Tao een graaf die bepaalde relaties tussen getallen codeert. Zijn bewijs zou rond zijn als hij zou kunnen aantonen dat deze graaf een bepaalde eigenschap had, namelijk dat de graaf expander was. Toen dit niet lukte kwam Tao wel met een andere bewijsmethode, maar helaas bleek het resultaat hiervan minder sterk.

In een artikel dat in 2021 is verschenen, vijf jaar na Tao's resultaat, weten Helfgott en Radziwiłł wel aan te tonen dat Tao's graaf expander is. Hiermee bewijzen zij dat het logaritmische Chowla-vermoeden klopt. Helfgott en Radziwiłł definiëren een simpelere graaf dan Tao en bewijzen dat hun graaf expander is. Vervolgens vertalen zij beide grafen naar matrices om aan te tonen dat hun simpelere graaf de graaf van Tao benadert. Dit laatste impliceert dat Tao's graaf ook de expander-eigenschap bezit. quantamagazine.org

Koninklijk Wiskundig Genootschap

■ NMC 2022

Als onderdeel van het Nederlands Mathematisch Congres 2022 vindt op 24 maart online de Speed Dates with Industry plaats. Op 19 en 20 april volgen de NMC Scientific Days, die gedeeltelijk op locatie (Van der Valk Hotel Utrecht) en gedeeltelijk online zullen zijn. Zie mathematischcongres.nl.

■ Bas Edixhoven overleden

Op 16 januari is Bas Edixhoven overleden, hoogleraar meetkunde aan de Universiteit Leiden. Bas was een zeer actief en succesvol wiskundige. Hij was lid van de KNAW-sectie Wiskunde en de PWN-commissie Onderwijs. Hij heeft een belangrijke organisatorische rol gespeeld in Mastermath en in de Beta-lerarenkamer. Ook voor het KWG heeft hij belangrijk werk gedaan, als (hoofd)redacteur van *Indagationes Mathematicae*, en tot eind vorig jaar nog als jurylid van de De Bruijnpreis 2022.

Recent verschenen:

■ *Indagationes Mathematicae* (www.elsevier.com/locate/indag)

Special Issue to the memory of T.A. Springer, part 3, Gunther Cornelsen en Eric Opdam (eds.), Volume 33, Issue 1, 2022.

■ *Epsilon Uitgaven* (www.epsilon-uitgaven.nl)

96. *Verzamelingen en van alles eromheen*, Lev Bukovský, Eva Coplakova, Klaas Pieter Hart, € 24, 2022.

Teun Koetsier

voorzitter Commissie Persoonlijke Archieven van Wiskundigen
Koninklijk Wiskundig Genootschap
t.koetsier@vu.nl

Nieuws

Minisymposium 'De wiskundige L.E.J. Brouwer, een veelzijdig genie' op 17 maart 2022

In 2015 is het persoonlijk archief van L.E.J. Brouwer (1881–1966) overgedragen aan het Noord-Hollands Archief in Haarlem. Onlangs zijn de circa acht strekkende meter manuscripten, correspondentie en andere documenten geschoond en geïnventariseerd. Daarmee is het archief van een van Nederlands grootste wiskundigen toegankelijk geworden voor geïnteresseerden.

Om dat te vieren organiseert de Commissie Persoonlijke Archieven van Wiskundigen van het Koninklijk Wiskundig Genootschap in samenwerking met het Noord-Hollands Archief op donderdag 17 maart 2022 het minisymposium 'De wiskundige L.E.J. Brouwer, een veelzijdig genie'. Het symposium zal vanaf 16.30 tot 17.40 uur online te volgen zijn via www.noord-hollandsarchief.nl/brouwer.

Programma

Welkomstwoord

Lieuwe Zoodsma (directeur Noord-Hollands Archief)

Wim Veldman (Radboud Universiteit)

Intuitionistische wiskunde: Brouwers antwoord aan Cantor

Jan van Mill (UvA)

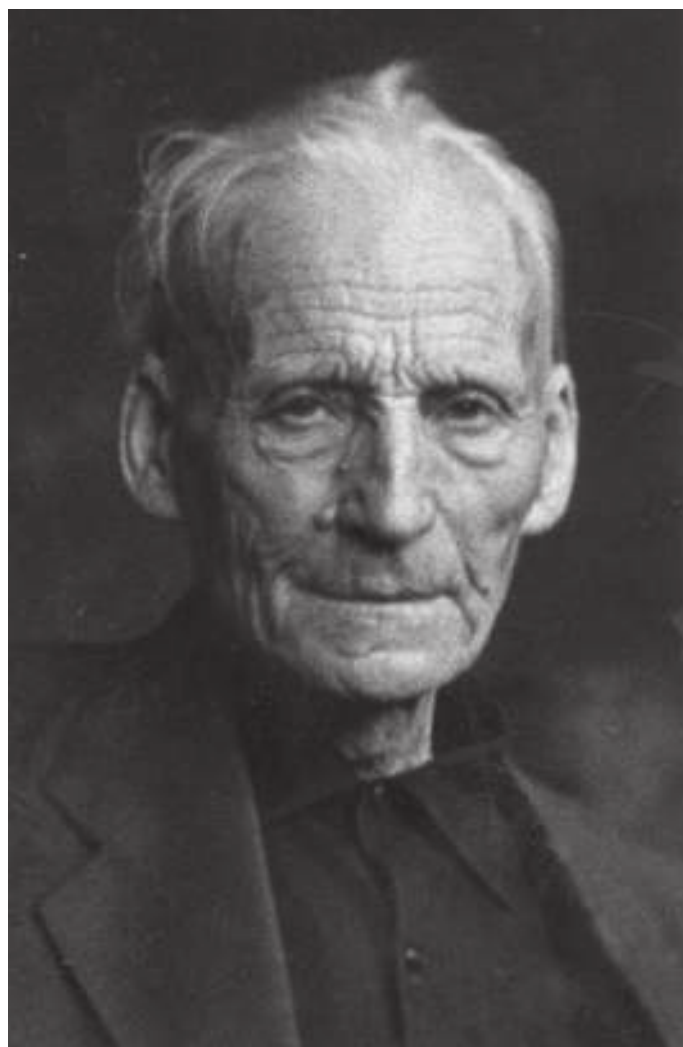
Brouwer en topologie

Teun Koetsier (VU)

Brouwer en de Bhagavad Gita

De ontsluiting van het archief van Brouwer is mogelijk gemaakt door financiële steun van de volgende instanties:

- Prof. dr. F.E.J. Kruseman Aretz Fonds/Prins Bernhard Cultuurfonds
- Noord-Hollands Archief
- Koninklijke Hollandse Maatschappij der Wetenschappen
- Stichting Compositio Mathematica
- Platform Wiskunde Nederland
- Korteweg-De Vries Instituut
- Institute for Logic, Language and Computation



L.E.J. (Bertus) Brouwer rond 1960

Frank Peter Pijpers

*Korteweg-de Vries Institute
University of Amsterdam
f.p.pijpers@uva.nl*

Inaugural Lecture

Empirical explorations of

On Wednesday 20 October 2021, Frank Pijpers delivered his inaugural lecture upon acceptance of the position of professor by special appointment in the field of complexity for official statistics at the Faculty of Science of the University of Amsterdam, on behalf of Statistics Netherlands (CBS).

Official statistics as a mirror of society

It is an important objective of the Complexity for Official Statistics chair to build a bridge between Statistics Netherlands (CBS), my main employer, and the knowledge and techniques that are developed within the academic discipline of complex systems. I therefore think it makes sense to tell something about each of those two separately; official statistics and complex systems, and only then describe my vision of what the two have to do with each other.

Before I get down to the task of doing all of that in a single public lesson, I think it's also good to share something about myself that is relevant. I believe that a good teacher starts by trying to understand what her or his audience already knows, or thinks they know, about the subject. This is certainly the case when such a teacher tries to use new knowledge to indi-

cate the boundaries of something that that audience considers a truth. The reverse also applies: it is good if an audience knows something about the background, knowledge and experience of the researcher who teaches, and the way in which the researcher examines and views reality.

It is therefore important that you know that I was trained as an astrophysicist and that for years I have conducted research in theoretical or mathematical sub-areas within it. This means, among other things, that I tend to think that *how long* a phenomenon or a process lasts is only meaningful in relation to another time scale belonging to a related or relevant other process. Now you are forewarned that I may take giant strides through the blink of an eye that is human history, without always making a distinction between a decade and a millennium. In addition, this background also

means that my world view revolves around physical processes and interactions rather than things. You may think that this mindset is not the best preparation for taking up employment at an agency whose task it is to count people and companies, and categorize and describe their characteristics, and neatly tabulate and publish the results. I hope I can convince you that this is an incomplete view of the purpose of a national statistical institute.

I will test your patience only briefly with history lessons on the origins of official statistics. The idea of a regular census certainly existed in the Roman Empire, and over the same era in China and India. The purpose of such censuses can be classified as "supporting public administration by providing facts about the population" as it is now. It is fair to say that public administration at that time may have limited itself mainly to levying taxes and raising armies: to put it bluntly it was about money and power. In addition to self-enrichment or glorification, however, certainly public works were built with



Frank Pijpers

a complex society

that tax revenue, such as roads, viaducts and aqueducts.

In this country, Statistics Netherlands has now been in existence for 122 years and over the years it has started to keep track of—and monitor—more and more things that are important for public policy. Not only are data collected and published about the population, but also about health and security, about education and leisure activities, about the environment and all kinds of economic activity, both nationally and internationally. As a result, each government ministry has its own specialized factual material at its disposal to use when making policy decisions. Incidentally, I prefer to use the term measurement data rather than the term factual material, but the latter term is simply in vogue within Statistics Netherlands. It is much more recent in origin that there is a further separation between the collection and publication of measurement data, by Statistics Netherlands, and the use of models, calibrated on that data, for calculating the (potential) consequences of public policy choices, through

the Netherlands Bureau for Economic Policy Analysis (CPB) and the even more recently established Netherlands Institute for Social Research (SCP) and the Netherlands Environmental Assessment Agency (PBL).

It is debatable whether this division between Statistics Netherlands and CPB was partly motivated to demarcate territory between the then CBS director-general Idenburg on the one hand, and Jan Tinbergen on the other, who was working at Statistics Netherlands at the time [5]. Tinbergen subsequently became the first director of the CPB, and was later also the winner of the Swedish Riksbank Prize in Economic Sciences; a prize that is equated with the Nobel Prizes. However, there is also a substantive reason for making this separation, just as a distinction is made between theoretical and experimental physics. In the case of the CBS-CPB distinction, this division explicitly prevents the impression that the measurement data might have been given a political slant. The consequences of the political choices presented in the national budget on Budget Day, are projected

by calculations of the CPB through models. Statistics Netherlands' material thus explicitly retains a higher degree of objectivity and independence than might otherwise be the case. The intention is that Statistics Netherlands can hold up a mirror to the Netherlands as faithfully as possible.

Such a separation also has drawbacks, but to explain them I would first like to take you into the world of the science of complex systems.

The whole and the sum of its parts

Language use in a technical context, sometimes condescendingly referred to as jargon, makes use of very precise definitions if all goes well. That may seem fussy, but it is really necessary to enable, for example, that re-doing experiments or measurements is indeed carried out precisely and correctly. That reproducibility is fundamental and distinctive to real science. Technical language use therefore sometimes leads to misunderstandings if a certain word also has a daily, and much less precisely defined, use. The word 'complex' in complex

systems is unfortunately such a word. In everyday usage it is often used as a synonym for complicated, or even synonymous with incomprehensible. Then it can happen that poorly documented and unstructured computer code is described as ‘complex’, when it is merely the result of bad habits and laziness. Every large organization has to deal with these kinds of problems, and Statistics Netherlands is certainly no exception, but that has nothing to do with the complex systems I want to talk about.

To paint a picture, I would like to give some analogies from nature that are expressions of complex systems, before taking a deeper dive into a more abstract, mathematical description. The first analogy is that of a termite mound. An individual termite is by itself an independent living organism. Considered as a unit among many members of the species, a single termite is not very intelligent: it reacts to external stimuli in quite restricted ways. Yet a large collection of termites is able to build structures on a scale that far exceeds their own size, and these are structures that also perform functions that allow a degree of control over the environment of that termite society, such as temperature control, which the single termite cannot possibly understand. Clearly, that termite society, the termite mound, is capable of behaviour that does not follow trivially from the behaviour of individual termites. The whole is more, can achieve more, than the sum of its parts. The construction of termite mounds, or the patterns that form in murmurations of starlings, are an expression of complex systems: this is summarily referred to by the term *emergent behaviour*.

We can also descend in scale level to that of atoms and molecules. Even with just the elements H, C, N, O and P, it is possible to build a huge variety of molecules. If those molecules are strung together in long chains, they can start to behave like self-reproducing machines. At this scale level it is indistinguishable whether we are looking inside humans or termites, or petunias, or whales [1]. There is no external controlling principle or overarching organisation that imposes an order of elements that is then reproduced. In fact, a long chain with the same sequence of elements can fold in different ways and thus acquire different chemical properties [10]. The possibility in itself that elements can form bonds naturally exists in the electron

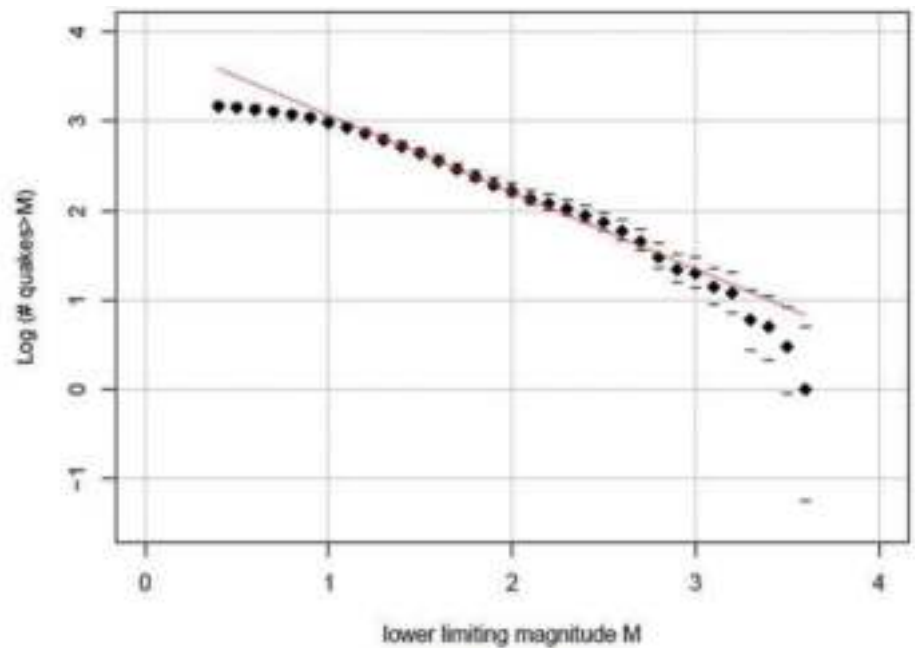


Figure 1 The logarithmic cumulative magnitude distribution of earthquakes for all earthquakes in the set. The red line is a linear function with a slope of -0.9 similar to values reported elsewhere [11]. 95% confidence intervals are indicated under the assumption that the underlying process obeys Poisson statistics.

structure of individual atoms themselves. However, there are boundless possibilities to build structures out of this that don't even have to be chains. So whether, and which, chains are formed, and how they fold, is by no means fixed in the atoms: it is *self-organizing behaviour* of the system.

Self-organizing behaviours can also be found on other scales in nature, and they are not limited to the animal kingdom either. It only takes a short trip from here to the dunes to see that structures made up of loose grains of sand display certain patterns that do not follow trivially from the properties of those grains of sand. As the slope of a dune increases, the chance of larger and smaller cascades and streams of sand increases. These sand displacements make the dune slope smaller. There is thus a feedback mechanism that ensures that dunes retain a certain shape and remain permanently in what is called a *self-organized critical state* [3].

Another example of this are earthquakes. A geophysical rock stratum can be unstable from fractures, such as where continental plates meet and from other natural causes, but fractures come in all sizes; from hundreds of kilometres to a few micrometres, there is a very broad spectrum. Those very small fractures will be described as brittle rocks rather than fractures, but they are actually part of a continuum [17]. If the pressure on that rock

changes, for example because of shifting overlying layers of the earth, or because an internal pressure changes, such as when gas is extracted, it could mean that that rock structure suddenly changes violently, resulting in an expanding wave movement (an earthquake). Because the faults are present over a wide spectrum of sizes, the amount of energy in each of those quakes can also vary over a wide spectrum. This can also be visualized with the aid of diagrams such as Gutenberg–Richter plots [22, 25], see Figure 1. What you see here are counts of quakes of a certain magnitude on the Richter scale, in this case for the province of Groningen. Larger quakes are rarer than small quakes, so the counts decrease as the quake strength increases, more towards the right in the diagram. Also very characteristic of complex systems is that in diagrams in which the number of times something occurs against the magnitude of that something, or its energy, or some other property, there seems to be a power-law relationship. If both axes are made logarithmic, as shown here, the result is something similar to a straight line. Of course, there is much more to say about the statistics of the earthquakes in Groningen, but then I digress too much (see [31, 32, 33] for some relevant websites).

I can not resist the temptation to give you an example of things on an even larger scale. What you see in Figure 2 below are

large collections of stars [20]. The photo on the left is a galaxy, number 74 from the catalogue originally prepared by a French astronomer, Charles Messier, who lived in the late eighteenth century, early nineteenth century. This photo of the object is of a much more recent date than the man. The photo on the right is object M3 from the same catalogue, and these types of objects are called globular clusters: also a gravitationally bound collection of stars but much smaller than a galaxy and with a different history and structure. M74 is roughly comparable in size to our own galaxy. Our galaxy, and also M74, has quite a few satellites such as M3. What I want to do next is something that will appeal to all Statistics Netherlands staff among you: a census of the star population. I graphically represent the result of that census in the form that astronomers will recognize as a Hertzsprung–Russell diagram. The picture below shows the result for M3 [28]. The vertical axis shows intrinsic brightness, on the horizontal axis is how astronomers measure colour which is a measure of a surface temperature of the star, with hotter stars more to the left in the diagram. Every

point in the diagram is a star, and you will probably notice that points are not evenly distributed throughout the diagram.

The greatest density of dots is distributed as a kind of ribbon that runs from the bottom centre of the term ‘Main Sequence’ up to where it says ‘Red giant branch’, and then is draped across the diagram to the left. I will not elaborate about the life course of stars, but what I do want to tell you is that within that ribbon, in the order I just used to describe the diagram, stars increase in mass, from less than once that of the sun, to a few dozens of times that of the sun. The counts of the numbers of stars as a function of their mass, the distribution function for star mass, also shows a power law [4]. That says something about the self-regulating processes that determine the mass of stars when they are formed. I’m cheating a bit, because the diagram on the left is not the census of M74. Instead, it’s the census of our own Milky Way, very similar to M74, where the GAIA satellite [12] gives us enough precision measurements for roughly 1.3 billion stars. The dot density in the chart is so great in places that a colour scale is used to indicate how many

stars are in that location in the chart. Also in galaxies, there is a distribution function of the star mass that behaves like a power law. The differences in these two diagrams, the systematics revealed by this census, shows that the majority of stars in the globular cluster formed almost simultaneously, while galaxies have multiple generations of stars. That is, the star formation process has active periods and also less active periods. This also has consequences for the spatial structure of these two types of systems. This too is an important aspect of complex systems: it may well be that a complex system does not have just one equilibrium, it can instead show periodic phenomena, or a few discrete quasi-equilibria between which it jumps from one to the other at unpredictable times.

After this whirlwind of examples, I now come to the point that I want to take a step back and try to formulate a definition for a complex system. I hope it is clear that such a system consists of many parts that have a certain degree of autonomous existence, such as termites or stars, but also form certain structures in each other’s presence such as termite mounds and galaxies. For the purposes of Statistics Netherlands, these autonomous units are people or companies and the structures are the Dutch society and the economy. As a system, they will exhibit certain characteristics such as emergent behaviour and self-organization, and in determining distribution functions of properties, skewed power laws will be the rule rather than the exception. It may also be expected that in the time evolution of such systems there will be sudden transitions interspersed with longer periods of apparently stable equilibria.

A certain amount of abstraction is of course necessary to explore patterns that govern structures in society and the economy. From statistical physics and mathematics, we learn that it is easier to start with homogeneous systems, in which all parts are identical, and only later to investigate the influence of heterogeneity and differentiation. Incidentally, there is also a need to do both, because it helps to assess whether there is a difference between homogeneous and heterogeneous systems, and if so, which is most beneficial, for example, for their long-term stability.

Besides making a distinction between homogeneous and heterogeneous systems, it is also useful to take into account



+ GAIA'S HERTZSPRUNG-RUSSELL DIAGRAM

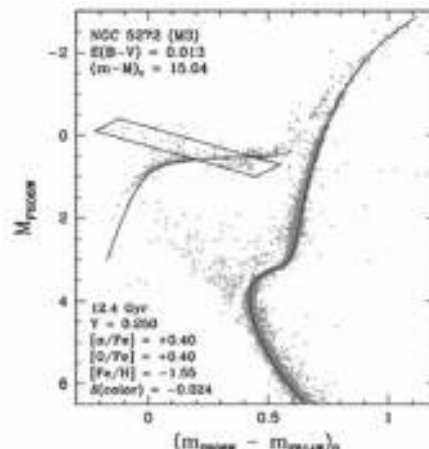
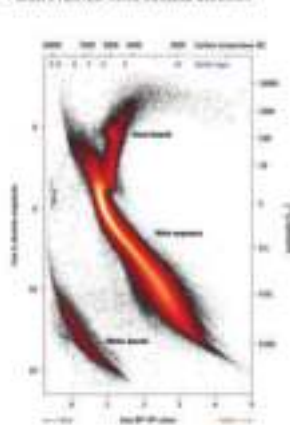


Figure 2 A large collection of stars and the Hertzsprung–Russell diagrams.

the timescales on which the units persist and how this relates to the timescales of interactions. If units mainly interact with a certain subset of other units over their entire lifespan, the system as a whole is relatively rigid, and it makes sense to use the methods and mathematics that are used for research into (complex) networks. Incidentally, the rigidity of that network structure does not imply anything about the great dynamism that can arise in signals that propagate over that network, such as infections with a virus or a conspiracy theory, or congestion over a road network.

On the other hand, it is also possible that parts of a system have frequent but fleeting contacts. In astronomy and statistical physics, computers are usually used to perform many-particle simulations of such systems. After many repetitions of simulations with slightly different initial conditions, or adding noise, the statistical properties of the system are then mapped out. In computational social sciences, the equivalent is called *agent-based modelling*. Thus, this kind of simulation approach is not primarily to predict the future of a system, but to examine how model parameters, i.e. the properties of particles or agents, determine the behaviour of the entire system.

Sometimes it makes sense to describe a system hierarchically. Detailed modelling of interactions at the microscopic level (human to human, or company to company) is abandoned, and in its place a much smaller system of blocks interacting with each other is modelled. Within each block, in the context of this framework, there are a large number of units that have a certain property in common, and the interaction between the blocks then concerns the average interaction between units belonging to those blocks. This reduction in the number of units in the model will have an effect on the modelling. Experience shows that there is a trade-off in the sense that the mathematical equations, which calculate how a system behaves, will receive more terms and in particular non-linear terms. For example, it can be considered that not only the mean of the population within each block returns as a variable in those equations, but also the variance, the skewness, and the kurtosis of properties within each block, or correlations between properties. I will come back to the importance of non-linearity later.

Since all three situations can occur in interactions between companies, or interactions between people, my research on complex systems will therefore also have different lines, one for each of these approaches: the theory of complex networks, agent based modelling, and dynamical system theory [9, 29, 30].

About solitons, bifurcations, and chaos

So far, I have bravely resisted the temptation to switch from English and speak a language in which it is easier to be precise and unambiguous; I mean the language of equations and formulas: mathematics. I will try to maintain that, but I still need it every now and then since I also want to be able to quantify. For example, what determines the value of the exponent in those power laws of distribution functions? Stepping over a network, how many steps are the minimum and maximum steps required to get from one unit to another? How fast do signals such as infections, or opinions, or innovations, or money travel across a network? As soon as we want to measure these indicators in society or the economy, and compare those measurements with explanatory models, it is necessary to convert the qualitative descriptions into numerical parameters and indicators.

I just mentioned that in the line of dynamical systems research, the mathematical formulation of the model of reality will often consist of a set of coupled differential equations. The description of the system as separate elements with their interactions is often referred to as a *microscopic* approach. Once I start grouping those elements and modelling the interactions as interactions between groups, I have what is called a *mesoscopic* approach. For the sake of completeness, I would like to mention that a *macroscopic* approach is one in which I would put all elements in one block and create equations for a set of properties of that entire set. The physicists among you recognize the macroscopic approach as thermodynamics, where that microscopic approach is the field of statistical physics. In the applications to Dutch society the analogy is somewhat flawed, because the systems of thermodynamics typically have of the order of 10^{24} elements, while Dutch society has only roughly $17.5 \cdot 10^6$ persons.

Each group, each block in the dynamic system, is fully described in this approach

by a number of group properties, these are the dependent variables $y_1, y_2, y_3, y_4, \dots, y_N$ in a model. For the sake of convenience, I will assume that these variables can take not only discrete values, but all values in an interval. Those properties can differ from block to block and can change over time. A change in time of a dependent variable is indicated as a rate or time derivative. Each of those time derivatives can be related to that set of variables themselves, or products thereof, or powers, or other non-linear combinations. It is even possible that local spatial gradients play a role in the development of time and therefore also derivatives with respect to a position x occur. For the sake of convenience, I put all those dependent variables into one vector $Y = (y_1, y_2, y_3, y_4, \dots, y_N)$, and summarize all those possible combinations of products, derivatives and so on, with $F(Y)$, so that the system of coupled non-linear differential equations takes the following innocent-looking shape:

$$\frac{\partial Y}{\partial t} = F(Y).$$

In practice, this can take on a very complicated form, so it is not useful to specify this in more detail now. I just want to show you a few examples of what we can possibly expect to see happen. I think it is appropriate to show a specific equation whose solution shows something interesting, and which will be very familiar to my colleagues from the University of Amsterdam in particular:

$$\frac{\partial y}{\partial t} + \frac{\partial^3 y}{\partial x^3} - 6y \frac{\partial y}{\partial x} = 0.$$

This is the Korteweg–de Vries equation, for one dependent variable y , which depends on time t and a spatial coordinate x . There is a lot to say about this equation, but that really goes too far afield. The point here is that it is an example of the kind of equations, with nonlinear terms, that we will also distil from descriptions of interactions between groups of people, or between groups of companies. The interesting solutions of this equation are running waves over the coordinate x . These are generated spontaneously in the system, even from a smooth initial situation, which a linear system will never do. It is also remarkable that two different wave solutions, which will have a different speed, can collide and emerge unscathed from that collision.

This is nothing special for linear equations, but very unexpected for equations with non-linear terms. These types of traveling wave solutions produced spontaneously in the system are referred to by the term *soliton*. A nice detail is that the real-world phenomenon was actually accurately described by a Scottish marine engineer John Scott Russell, some sixty years before the mathematical equation and analysis was published. I would like to remind anyone who is wondering how this could be of importance to the field of activity of Statistics Netherlands that there are sufficient examples, even in recent history, of social or ideological groups and political parties in the Netherlands, which at first sight appear to be completely homogeneous and yet spontaneously undergo a schism and move apart in subgroups. At the very least, it is interesting to research the circumstances or characteristics of groups that influence the likelihood of schisms and social polarization.

For a long time, it was common practice in both physics and economics to describe systems as equilibria and to approach changes over time as reversible processes. It is partly under the influence of Prof. Ilya R. Prigogine (1917–2003, Nobel Prize for Chemistry 1977) that research into dissipative systems and systems that are far out of equilibrium has boomed. A beautiful and very simple example of the latter is the sudden formation of crystals in super-cooled water. Under the right conditions, it is possible to cool water to well below 0 Celsius, while still remaining liquid. A very minimal disturbance can suddenly trigger a transition in that system, and crystal formation occurs on a very short time scale. For this behaviour, too, an equation can be formulated that describes the time evolution of the relative proportions of water and ice crystals, which indeed includes non-linear terms. Much the same formalism has also been used to describe traffic congestion, where the two phases, water and ice, are replaced by moving and stationary cars. We have probably all experienced sitting impatiently in a queue of stationary cars and finding that suddenly everything starts moving without any indications of what caused the traffic jam in the first place. Both are a manifestation of self-organizing behaviour. In 1972 Herman, Lam and Prigogine [13] showed that the statistics of journey times over certain routes in the US,

UK and Australia, and the amount of time that cars had to stand still on those routes, could be well explained by this model. The Netherlands not only has a high population density, and therefore car density; logistics and freight transport by road play an important role in the Dutch economy. It is therefore good for policy-making and planning in the field of road construction and the environment to know which parameters most effectively favourably influence the flow of traffic. It is therefore obvious that the values of precisely those parameters for traffic behaviour in the Netherlands should be monitored.

In the examples I discussed so far, the complex systems spontaneously showed certain unexpected behaviour as a function of time, while the model parameters of those systems retained certain fixed values. If in a model for a complex system the parameter values are varied, the solutions of the model naturally change, but in many cases such changes can be regarded as gradual, continuous, deformations. In some cases, however, something else happens. The example I want to quote here is the so-called logistic map (see Figure 3). It is sometimes also referred to as the predator-prey equation since it describes the precarious balance between these two in a closed system. This again describes the time evolution of a system with a dependent variable x , but in discrete steps instead of as a continuous function of time:

$$x_{t+1} = rx_t(1 - x_t).$$

The single parameter r controls the behaviour of this system. When r is less

than a certain limit, x tends to a single equilibrium value. However, as soon as that limiting value for r is exceeded, the behaviour of the system changes abruptly. Instead of converging to a single equilibrium value, the x jumps back and forth between two different values. At a second, somewhat larger limiting value, the system again abruptly changes its behaviour and jumps between four different values. These abrupt doublings of the number of values between which the system jumps keeps repeating at successive limiting values, up to a certain point. After this there are values for r for which x no longer shows any periodic behaviour. A diagram can be made of the equilibrium values obtained as a function of the value of the parameter r . Every splitting or fork in this graph is called a *bifurcation*. Mathematicians distinguish different types of bifurcations. For the larger values of r where random values for the dependent variable x succeed each other, they fill up the entire range of possible values. The exact order of values for x is extremely sensitive to the initial value for x . In mathematical terms this is called a *chaotic* system. There are macroeconomic models in which inflation and labour costs (or unemployment) are modelled in a similar way. The validity of such models is controversial, so I will not discuss them in detail. However, the behaviour of model systems that bifurcate or become chaotic for certain combinations of parameters is known and well researched for many different systems, including the climate of our planet, and is certainly of importance for understanding our economy.

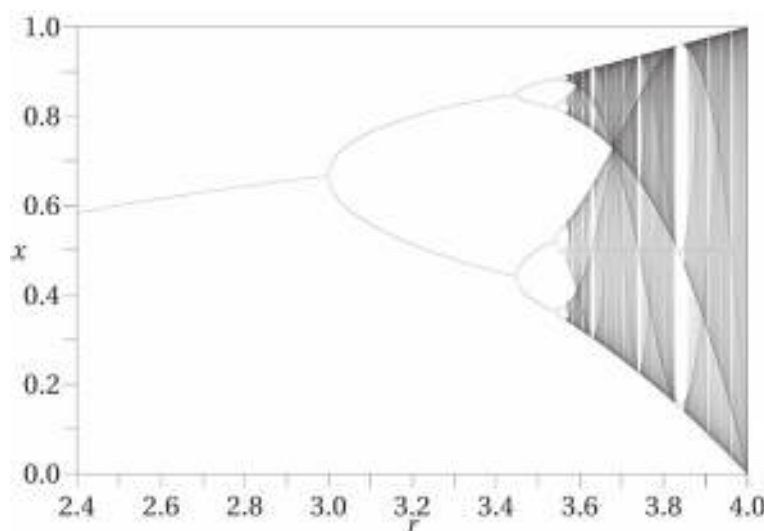


Figure 3 Logistic map.

One reason for this importance is fairly obvious. If an accepted economic model can display this type of behaviour, it is of course important to determine, from measurements, what exactly the value of the crucial parameters is, because planning bureaus need the correct values of that parameter, for example. In order to be able to make a good, accurate measurement, researchers at Statistics Netherlands must of course know how the model works, so that the correct data can be collected as input for unbiased statistical estimators of those parameters. The second reason is less obvious. Statistics Netherlands publishes many indicators, including economic indicators, on a monthly or annual basis, that is, at discrete times. Not only the planning offices, but also other parties that themselves play an active role in the economy, use these data to make estimates or predictions themselves. This means that decisions with economic consequences are also based on the time series published with a certain cadence. The example of the logistic map shows that if an unfortunate choice is made of the weight of the existing data in model predictions and the subsequent actions, the indicator in question can start to display chaotic, unpredictable behaviour with potentially disastrous economic consequences. This picture is less far-fetched than it seems.

Stock trading based on computer algorithms became fashionable in the 1990s. Since then, intra-day trading has evolved into high frequency trading where, for specialists in this field, even to have nanoseconds faster algorithms than competitors can generate enormous financial profits. In the early days of these algorithmic trading systems, there were not enough security measures in place to limit the strength of possible feedback. It is likely that this contributed to the 2010 flash crash [16], and it may also have caused more variability ('volatility') earlier on (the role of expectations in boundedly rational agents in the economy is discussed extensively in [14]). There is no unambiguous evidence that this still significantly affects the stock markets. Even though predictions for future developments in the economy fall outside the scope of Statistics Netherlands itself, it is important for public administration to be familiar with, and to be prepared for, such feedback effects.

Fractals everywhere?

In the course of my lesson, I have shown that complex systems that occur in nature have certain characteristic features that can be captured in, i.e. reproduced by, mathematical models that fall under the collective term non-linear dynamical systems. I haven't yet paid much attention to complex networks, so I'll get to that in a minute. As a bridge between the two, I would like to add another mathematical concept, namely that of the dimension of objects, or of spaces. I probably won't have to tell you that a point without dimensions has dimension 0, and a line has dimension 1, a plane or something in it such as a circle has dimension 2, and so on. I will not tease you with 4-dimensional spacetime and with curvature tensors. I do want to discuss some remarkable objects, which can be constructed recursively, for example. Recursive means: by repeating a certain simple recipe of steps infinitely often. Think for example of the Sierpinski carpet and the Menger-Sierpinski sponge. A tastier real-life example is Romanesco broccoli. There are many more variations of these types of objects associated with the names of famous mathematicians like Peano, Cantor, or Mandelbrot. There are several ways to precisely determine the dimension of an object mathematically. The Hausdorff dimension is a well-known way, and that dimension is neatly integer for the more ordinary objects, but not for the Sierpinski carpet and Menger-Sierpinski sponge. The Hausdorff dimension is fractional, which is where the name *fractal* for these types of objects originates. To make a connection with non-linear dynamics, think of the Lorenz butterfly, which is the path in a three-dimensional space that the solution of a non-linear dynamic system with three dependent variables over time follows. Obviously, that path isn't perfectly periodic, but it doesn't fill the whole space either. It is not uncommon for nonlinear dynamical systems to do such a thing, they have what is technically called a strange attractor and strange attractors have the property of having fractional dimensions. Within that strange attractor, that path does fill that particular sub-space and thus has the characteristics of chaos, which is also called *low-dimensional chaos*.

That brings me to the concept of a network. For the typical purposes of Statistics Netherlands, each circle can represent a

person or, for a different purpose, a company. The lines connect two circles if those two people also know each other. Statistics Netherlands has built up a network based on people who are related to each other according to the basic register of persons (BRP): parents, children, brothers and sisters, et cetera. In addition, a network can also be built on the basis of people being part of the same household, and on the basis of being neighbours, and on the basis of going to the same school or other educational institution, or having the same employer. All those networks are of course connected because they involve the same people: about 17.5 million of them. The data needed to record all these relationships had been available to Statistics Netherlands for a long time, but it had never been stored in this combined form before. There are of course also other ways in which people could know each other that Statistics Netherlands cannot detect. Friends and acquaintances on social media platforms, or from a neighbourhood cafe, gym or music or hobby association are not stored in the Statistics Netherlands' databases. Nor does Statistics Netherlands know that there are people you see every morning when you are waiting for that train to work in the early morning, and who, like you, are preparing for the day with a cup of coffee.

It is evident that not every resident of the Netherlands knows every other resident in this way, so far fewer lines run through that diagram than is maximally possible. It is also not the case that everyone knows roughly the same number of people. The distribution function that describes how many people have a relationship with only 1, or 2 others, or with 5, or with 100 or more, can also be described with such a power law that I also showed before for earthquakes. It is of course not for nothing that I have placed this description of networks under the heading fractals, so you probably already guessed, the exponent in that power law is something like a dimension of the network, and that dimension is fractional. This dimension for a network also follows a different definition than the Hausdorff dimension definition I just used. The Hausdorff dimension for networks can be constructed, but will generally not yield exactly the same value. Also, there are some practical limitations in dimension measurements in the sense that those

mathematical fractal objects, like the few I just showed, keep repeating themselves to an infinitesimal scale, and in the world around us there is always a smallest scale in space or time at some point.

There is a second problem with correctly estimating that dimension, or other measures of the interconnectedness in the social network of the Netherlands, and the cause of this I have just mentioned. Statistics Netherlands only has data for certain types of relationships and not for all types. That means that the real network of contacts between people is measured incompletely, and moreover that the missing relationships are not random. Selectivity and incomplete data are the worst enemy of official statistics, not only in sample-based surveys, but in all forms of data. An equally serious problem is that the relationships that Statistics Netherlands can establish are not necessarily a good reflection of actual contact between people. As an example, consider a large company with many different business locations. Two people can very well work for one and the same company, but one for a location in Groningen and the other for a location in Vlisningen. In that case it is not evident that these two people know or meet each other. At the very least, this must be taken into account in analyses. The intention is that Statistics Netherlands will publish reliable new statistics that provide information about the statistical properties of relationships between people. An example are statistics on the geographic distance between the place of residence of adults and the place of residence of their elderly and vulnerable relatives, for which they may at some future time have to provide informal care [8]. Not unimportant when publishing this new social-network based statistics is that this must be done under strict conditions of privacy protection, which has therefore also become the subject of Statistics Netherlands research projects.

In the case of relationships between companies, less data are available to Statistics Netherlands than there are for people. That relationship will typically be one in which companies are suppliers or buyers of services or goods from each other. Apart from the accounts of those companies themselves, there is no registration of individual transactions and there is also only very limited reporting, usually in the form of aggregates as annual sales. Those

annual turnovers follow a power law [24] and are therefore perhaps an expression of a self-organized critical system. Of course, every transaction between companies also involves money, so banks do have a partial view of corporate networks for their own customers. Discussions are currently underway on whether, how, and in what form statistical analyses by Statistics Netherlands on such banking data could be made possible. Even if that can ever be arranged, there is still a problem of selectivity there, partly because there is a very wide variety of business forms, with all kinds of peculiarities of ownership and administrative structures. There is great importance for public policy and therefore for official statistics to know more about the connections between companies within the Dutch economy. Greater connectivity may mean, for example, that if a particular company ceases to exist for whatever reason, there are other companies that can take over the role and the system as a whole is therefore relatively resilient and the flow of goods and services across that network remains stable. However, it can also mean that the bankruptcy of a particular company causes a whole cascade of bankruptcies through that network of associated companies. More concretely, Statistics Netherlands is currently investigating for a specific regional cluster of companies what dependencies between those companies play a role in facilitating a transition to using sustainable sources of energy [18].

It is certainly not impossible to take into account and correct for bias caused by incomplete data. This is a well-known field of activity for Statistics Netherlands, but the context of network data is new and more research is therefore needed to develop accurate estimators and good imputation methods.

As I just indicated, it is already important for official statistics to determine properties of that set of relationships between persons or between companies. It is therefore a small step to not only want to map the networks themselves, but also to measure the behaviour of dynamic processes on that network. How does the chance of cascades of bankruptcies depend on the connectivity of a business network? How quickly do innovations penetrate such a network? What is the probability that healthier lifestyles are contagious across a social network and how fast does that work? Does that also work with attitudes

towards conspiracy theories, or with the spread of infectious diseases?

Now I show a short animation of such a process that takes place on a network. It is only a toy model because it has very simple rules (see the video of this Inaugural Lecture on <https://youtu.be/w-SfnVfugM>). As you can see, spheres change from black to red if they connect to a sphere that is already red. Then the colour of the spheres slowly turns black again. Since this process only occurs when there is a connection, it is no surprise that the amount of connections will play a role in the speed at which red dots appear. But not only the average amount of connections plays a role. If there is a cluster of points that are interconnected, but have no connection to the outside, there is no mechanism to get red dots within that cluster. Very subtle details in a network of contacts can therefore have major consequences for distribution models. It is therefore important, for public safety, for public health, and for a robust economy, to know exactly which subtle properties of a network must be mapped by Statistics Netherlands. Only then can the planning offices be enabled to correctly calculate the effect of policy measures. In this context, policy measures are either the kind of measures that change the connectivity of the network, or measures that send a signal across the existing network: such as changing the colour of the dots. It is not at all self-evident that researchers at Statistics Netherlands already know what is important to measure in terms of Dutch society and the economy. That is precisely why knowledge about how models are constructed must be brought to Statistics Netherlands.

Complex networks are a good translation into mathematical objects and rules of how people or companies can form lasting relationships. In its most extreme form, all connections in the network are fixed, and research revolves around processes and signals that move through the system over those network connections. That is probably not a very realistic approach to reality. Not all contacts between people or companies are long-lasting. It is therefore desirable to be able to simulate more flexible systems, in which the timescale on which processes run through a system and the timescale on which connections appear or disappear in the network are more comparable. This requires different mathematical

approaches than when those time scales differ greatly, and thus also influences what Statistics Netherlands should measure in terms of society, when we translate those mathematical insights back into the field of official statistics.

That brings me to that third line of research, the particle simulations or agent-based models. Astrophysicists among others, have long resorted to the use of simulations, in which the particles are, for example, entire galaxies and the system the large-scale structure of the universe [26]. There are several reasons for resorting to this approach. An important reason is when little is known about the typical timescales of various interactions between the agents, or when those timescales are close to each other. In this case, it is more objective to specify the rules for interaction, as well as the rules necessary for the system to evolve one step ahead in time. It is then left to computers to perform a new simulation very often, with slightly different initial conditions each time, so that one can draw statistical conclusions from the ensemble of all those simulations. To investigate the influence of parameters of those rules for interactions, you repeat that process for a series of values of those parameters. You will understand that this is very computationally intensive, and progress in this area also depends on both faster computers and smarter computing algorithms. It is now within reach to conduct this type of research for models with tens of millions of agents at the same time. For me, the aim is to investigate the mechanisms underlying emergent social phenomena such as segregation and inequality with these tools.

Measurement data and model-building

Measurement data as a means of excluding models – model-building to determine what needs to be measured. It is often said, and inappropriately on more than a few of those occasions, that society or the economy has become more complex over the past century. Sometimes the only thing that is meant is that there have been changes and that old categorizations of the work people do, or their life course, no longer fit well with modern society and economy. An example of change in a system that genuinely can lead to complexity is through specialization. When a company grows, individual sectors of that company can become in-

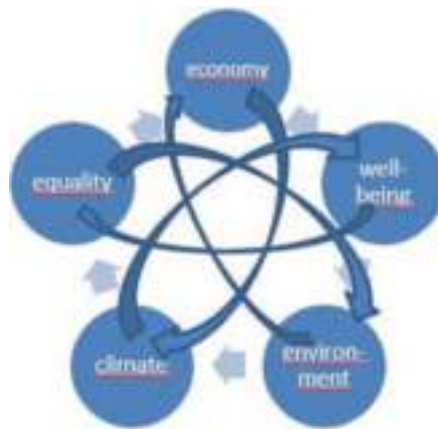


Figure 4 Sustainable development goals.

creasingly separated. These individual units can even separate completely and then independently enter into associations with other companies. So that means that in the entire economic system more autonomous units have appeared with interactions between some, but not all units. Successively mechanization, automation and computerization of production processes have indeed resulted in much more specialization over the past century. The concept of production chain is still used within Statistics Netherlands to indicate that there are a number of steps between extracting raw materials and selling an end product to a consumer. Perhaps it is now better to speak of production networks, or production paths within the enterprise network.

In other cases, the system has always been complex but its widespread recognition originated more recently. An example of this are the sustainable development goals (SDGs), which were drawn up on behalf of the United Nations in response to a report by famous economists, Stiglitz, Sen and Fitoussi [27]. See Figure 4. In the diagram I highlight a few areas by way of illustration, with which I certainly do not want to suggest that other goals in the SDGs are less important. What I want to point out is that economic activity has an impact on people's well-being, both favourable and unfavourable, on the living environment and the climate, and also on equality between people. Each of these also has an impact on each other and on economic activity. In recent years, economists have spoken of a worldwide slowdown in (production) growth [21]. If, for example, we look at easily measurable indicators such as the change in gross national products or such as inflation in most countries, this

does indeed seem justified. Since this is the collective economy of the whole world, that slowdown is something that is caused within that system itself. If the interaction between all elements in this system were only linear, this would not occur, so limitation to growth is quite direct evidence for non-linear effects between those areas mentioned in the SDGs. Feedback is also built into the entire system, in various ways. An example of direct feedback is that between equality and the well-being of persons. The skewed distributions of income and wealth, even in the most egalitarian countries, is at the very least an indication that socio-economic systems are in a self-organized critical state.

At the level of the United Nations, there is thus a recognition that these interactions are at least as important as the subjects themselves. Within the Netherlands, attention is already being paid to this at public policy level by having the 'monitor brede welvaart' [6] drawn up by Statistics Netherlands, in collaboration with other partners, and discussing it in a separate session in parliament. This monitor is certainly valuable and in my opinion one of the most important modern publications of Statistics Netherlands. However, out of necessity, it still pays mainly attention to units, rather than to the interactions between them. There are various models used by economists to explain correlations in various time series shown in that monitor. These models therefore presuppose parameterized mechanisms, and these should be tested. There may already be data of sufficient quality to rule out the validity of some of those models. In order to do this with sufficient expertise, it is essential that knowledge about modelling complex systems also comes to life within Statistics Netherlands, so that it becomes clear which model predictions are sufficiently distinctive to have the option of excluding models by means of statistical tests.

Another important alternative route is to test directly from time series whether correlation could also imply causation. In fact, the reverse is actually more feasible: can a hypothetical causation mechanism be falsified using cross-correlation data? In the context of official statistics, I have taken a first small step [7], but there is much more notable work [15]. I expect a lot from collaboration with UvA colleagues who have a lot of expertise in the field of testing causation.

I am almost ready to complete this public lesson, but there is one more concept that is important to enable building that bridge between measuring and knowing, namely ergodicity. I avoid spelling out the formal definition [19] (for an informal but somewhat more extensive description, see, e.g., [23]), but when a system is ergodic it means that the average of a time series of a system indicator — something that is measurable from the system — yields the same as when I take the average of that indicator over many realizations at a single point in time from exactly the same system. Although there are many systems in nature that meet this requirement, it is not a self-evident characteristic. For example, in the research line of agent-based modelling, the aim is to compare the average of certain

indicators over many realizations of a model system with averages of time series of the same indicators. This is only valid if we assume, or preferably can prove, that the system is ergodic. A striking example of a non-ergodic system is that of random multiplicative growth [2]: a gambling game in which, dependent on many repeated throws of a fair coin, at each toss you gain 50% of all your money or lose 40% of it. Ensemble averaging might suggest this is a sure win for the gambler, but time averaging of single realisations suggests otherwise.

The statement of the physicist Heike Kamerlingh Onnes from 1882 “Through measurement to knowledge” is evidently also applicable to society. My research plan therefore also fits in with, or is an extension of, Tinbergen’s tradition. National statistical

institutes such as Statistics Netherlands measure and report on society according to common standards with as much the same population demarcation as possible. The next step is to take new measurements to understand not only what society *looks like*, but also how society *works*. Ultimately, it is the task of Statistics Netherlands to support public policy with facts. If it is possible for Statistics Netherlands to demonstrate how the economic and social system works, or at least that certain assumptions on how it operates are not correct, this can be crucial for effective and meaningful governance. Via the SDGs, we now realize that society and the economy are complex systems. That makes the knowledge concerning complex models for Statistics Netherlands ‘need to know’ instead of ‘nice to know’.

References

- 1 D. Adams, *The Ultimate Hitchhiker’s Guide*, Wings Books, 1996, pp. 90–91.
- 2 A. Adamou, What is ergodicity? <https://youtu.be/VCbzAMN87cg>, 12 February 2021.
- 3 P. Bak, *How Nature Works: The Science of Self-organized Criticality*, Springer, 1996.
- 4 I.K. Baldry, K. Glazebrook, S.P. Driver, On the galaxy stellar mass function, the mass-metallicity relation and the implied baryonic mass function, *Monthly Notices RAS* 388 (2008), 945–959.
- 5 A. van den Bogaard, Het CBP, wiskunde en praktijk in wording, *Nieuw Archief voor Wiskunde* 5/1 (2000), 294–300.
- 6 CBS, *Monitor Brede Welvaart & de Sustainable Development Goals 2020*, cbs.nl.
- 7 G.E. Comi, R.J. Fitzner, S. Kolumban, F.P. Pijpers, R.M. Pires da Silva Castro, R.A.J. Post and A.J. Vromans, Causal effects of government decisions on earthquakes in Groningen, *Proceedings of the Study Group Mathematics with Industry*, 2018 (2019), swi-wiskunde.nl.
- 8 M. Das and E. de Jonge, Zelfredzaamheid van ouderen en gebruik van Wmo (2020), cbs.nl.
- 9 R.L. Devaney, *An Introduction to Chaotic Dynamical Systems*, Benjamin/Cummings, 1986.
- 10 C.M. Dobson, Protein folding and misfolding, *Nature* 426 (2003), 884–890.
- 11 B. Dost, F. Goutbeek, T. Eck, and D. Kraaijpoel, *Monitoring induced seismicity in the North of the Netherlands: Status report 2010, 2012*.
- 12 Gaia Data Processing and Analysis Consortium (DPAC), <https://www.cosmos.esa.int/web/gaia>; Carine Babusiaux, <https://www.whip.obspm.fr/~carine>.
- 13 R. Herman, T. Lam and I. Prigogine, Multilane vehicular traffic and adaptive human behavior, *Science* 179(4076) (1972), 918–920.
- 14 C. Hommes, *Behavioral Rationality and Heterogeneous Expectations in Complex Economic Systems*, Cambridge University Press, 2013.
- 15 G.W. Imbens and D.B. Rubin, *Causal Inference for Statistics, Social and Biomedical sciences: An Introduction*, Cambridge University Press, 2015.
- 16 A.A. Kirilenko, A.S. Kyle, M. Samadi and T. Tuzun, The flash crash: high-frequency trading in an electronic market, *Journal of Finance*, (2017), forthcoming.
- 17 I. Main, Earthquakes as critical phenomena: Implications for probabilistic seismic hazard analysis, *Bull. Seismological Soc. Am.* 85 (1995), 1299–1308.
- 18 C.E.S. Mattsson, F.W. Takes, E.M. Heemskerk, C. Diks, G. Buiten, A. Faber and P.M.A. Sloot, Functional structure in production networks, *Front. Big Data* (2021).
- 19 W.D. McComb, *The Physics of Fluid Turbulence*, Clarendon, Oxford, 1990, p. 39.
- 20 NASA, nasa.gov; ESA, esa.int; The Hubble Heritage, hubblesite.org.
- 21 OECD Interim Economic Outlook, 2019, <https://www.oecd.org/economy/outlook/interim-economic-outlook-march-2019>.
- 22 F.P. Pijpers and V. van Straalen, Trend changes in tremor rates in Groningen, CBS Technical Report (2018), <https://www.researchgate.net/publication/330797660>.
- 23 F.P. Pijpers, Five sessions on turbulence (1993), p. 10, <https://www.researchgate.net/publication/237581928>.
- 24 F.P. Pijpers, Applications of complexity theory in official statistics, CBS Discussion Paper (2018), <https://www.researchgate.net/publication/322581886>.
- 25 D. Sijacic, F. Pijpers, M. Nepveu and K. van Thienen-Visser, Statistical evidence on the effect of production changes on induced seismicity, *Netherlands Journal of Geosciences* 96 (2017), 27–38.
- 26 V. Springel et al., Simulations of the formation, evolution and clustering of galaxies and quasars, *Nature* 435 (2005), 629–636.
- 27 J. Stiglitz, A. Sen and J.P. Fitoussi, Report of the Commission on the Measurement of Economic Performance and Social Progress (CMEPSP) (2009), <https://www.researchgate.net/publication/258260767>.
- 28 D.A. VandenBerg, P.A. Denissenkov and M. Catelan, Constraints on the distance moduli, helium and metal abundances, and ages of globular clusters from their RR Lyrae and non-variable horizontal-branch stars. I. M3, M15, and M92, *AJ*. 827(2) (2016).
- 29 F. Verhulst, *Nietlineaire Differentiaalvergelijkingen en Dynamische Systemen*, Epsilon Uitgaven deel 4, 1985.
- 30 G.M. Zaslavsky, *Physics of Chaos in Hamiltonian Systems*, Imperial College Press, 1998.
- 31 <https://cbs.nl/dossier/ground-movements-in-groningen>.
- 32 <https://knmi.nl/nederland-nu/seismologie>.
- 33 <https://sodm.nl/sectoren/gaswinning-groningen>.

Wieb Bosma

IMAPP
Radboud Universiteit Nijmegen
bosma@math.ru.nl

Stoffelijke resten tastbare herinneringen aan wiskundigen

Belgische Beelden

Natuurlijk mag België niet ontbreken in deze rubriek, toch al geteisterd door beperkingen op internationaal reizen. Behalve het iconische Atomium te Brussel (recent opgepoetst) kende ik weinig wiskundig interessante objecten in Belgische plaatsen. Geen wonder, zo bleek toen ik de geschriften van de kenner, Dirk Huylebrouck, erop nasloeg: ook hij beklagde zich over het geringe aantal beelden van wiskundigen. Bovendien bleek een van zijn aanwijzingen een dwaalspoor!



Antwerpen

Ik begon mijn onderzoekingen nog pre-corona in Antwerpen. Met de gebruikelijke ruime interpretatie van 'wiskundig' erfoed troffen we daar twee interessante plaatsen. In de vloer van de Onze-Lieve-Vrouwekathedraal bevindt zich een dunne koperen lijn van (naar verluid) bijna 67 meter lang. Het is een van de 10 (van 41 geplande) meridiaanlijnen die Adolphe Quetelet in evenzovele Belgische steden na 1836 aanbracht, om vooral ten behoeve van het opkomende treinverkeer de tijdrekening in het land te uniformiseren. Wanneer de zon door het 'oculus' naar binnenviel, zouden de stralen precies langs deze meridiaanlijn vallen op het moment dat de zon in het zenith stond: noon, zonnetijd dus. Het oculus is hier een gat (in feite drie gaten), uiterst links in het grote gebrandschilderde glas-in-loodraam.





De tweede bezienswaardigheid is De Gulden Passer, thans het museum Plantijn-Moretus, waar dit drukkersgeslacht sinds halverwege de zestiende eeuw onder het motto 'Labore et Constantia' boeken drukte, uitgaf en verkocht. Veel wetenschappelijke boeken ook, waaronder vooral de uitgave van kaarten(boeken) een link met de wiskundige ontwikkelingen leverde.



Abraham Ortelius, geboren en overleden in Antwerpen (1527–1598) studeerde wiskunde (bij Gemma Frisius), latijn en grieks. Stelde als eerste een atlas samen, en maakte de observatie dat continenten in elkaar leken te passen. In het museum hangt een portret door Peter Paul Rubens uit 1633, en een veel later schilderij van Ortelius in zijn werkkamer, door Edouard Jans (1887). Ook vinden we hier portretten in gravures door Philips Galle van onder meer Tartaglia, Gemma Frisius en diens zoon Cornelius en leerlingen Mercator en Ortelius. In het schitterende exemplaar van de door Gemma Frisius bewerkte *Cosmographia* van Apianus staat de baanbrekende verhandeling over de driehoeksmeting waarmee Gemma vermaardheid verwierf.



Overall waren de geesten van Arithmetica en Geometria rond, tot in de vloer van de hal.



Leuven

De tweede trip vond vorige zomer plaats tijdens strenge corona-beperkingen: we mochten 48 uur in het land verblijven. Dit was nog voor een groot PR-offensief van het najaar, waarin Leuven zich afficheert als stad van de oerknal. Dit is gebaseerd op het werk van Georges Lemaître (Charleroi 1894 – 1966 Leuven), die wis- en natuurkunde studeerde, en daarna theologie (in 1923 tot priester gewijd). In 1931 publiceerde hij in *Nature* een artikel met daarin de theorie gebaseerd op dan nog recente natuurkundige inzichten dat het universum uitdijt en er een moment moet zijn geweest waarop het heelal uit een 'oeratoom' is ontstaan: de 'Big Bang'; dat noemde hij 'de dag zonder gisteren'. Elders in de stad vinden we beelden van Mercator en Erasmus, die beiden een tijd in de stad verbleven; nergens is het streng-katholieke verleden ver weg (Mercator werd door de Inquisitie gearresteerd, en Erasmus moest er de stad, waarin hij het Drietalencollege had opgericht, voor ontvluchten).



Pater Ferdinand Verbiest (Pittem 1623 – 1688 Peking) was al een verre voorloper van Lemaître in het combineren van religie (als jezuïet en missionaris) en astronomie. Een replica van zijn enorme hemelglobe, uit het (kennelijk nog steeds bestaande) observatorium te Peking (waar hij heen ging om in China het Christendom te introduceren), troffen we aan op de binnenplaats van het Atrecht-college. Verder wordt hij al meer dan een eeuw geëerd met een groot standbeeld bij de kerk van zijn geboortedorp Pittem.



Absoluut hoogtepunt van Leuven is het Stadhuis aan de Grote Markt. De bouw begon rond 1440, maar pas 400 jaar later verschenen de eerste beelden in de nissen, die het zo de moeite waard maken met open mond naar de gevel te staren. Volgens de kostelijke gids *Who's who* van Gilbert Huybens bevat de onderste rij 67 beelden van personages die zich in Leuven verdienstelijk hadden gemaakt — waaronder 25 professoren. De rij erboven bevat 41 beelden van heiligen, patriciers, ambachten, en de derde rij 41 beelden voornamelijk van vorsten.



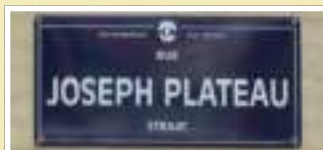
Naast Mercator en Erasmus, vinden we op de onderste rij ook beelden (na enig zoeken) van Adriaan van Roomen en Cornelius Gemma. Van Roomen (Leuven 1561 – 1615 Mainz) studeerde wiskunde en astronomie in Keulen, en medicijnen in Leuven, waar hij hoogleraar geneeskunde werd. Snellius studeerde bij hem, Viète loste een van zijn problemen op (het vinden van nulpunten van een polynoom van graad 45), en met van Ceulen werkte hij aan het benaderen van π . Cornelius Gemma (Leuven 1535 – 1578 Leuven) was de zoon van Gemma Frisius, en hield zich net als zijn vader met geneeskunde en astronomie bezig. Het graf van Gemma Frisius bevindt zich naar verluid in een kerk in Leuven, maar heb ik nog niet kunnen vinden.

Brussel

In een artikel in *EOS* (2012) beklaagt Dirk Huylebrouck zich erover dat België slechts 3 standbeelden van wiskundigen telt sinds het Antwerpse beeld van de Lazare Carnot werd verwijderd (en nog ergens weggeborgen lijkt te zijn): van Stevin en van Quetelet, die we nog zullen zien, en van Poncelet. De laatste was weliswaar een Fransman (net als Carnot) en telde daarom niet mee als Belgisch wiskundige. Ik vrees dat de werkelijkheid nog erger is: ik heb geen beeld van de wiskundige Jean-Victor Poncelet (meetkundige en ingenieur) gevonden, maar wel een opschrift 'M. Poncelet', dat verwijst naar Martin Poncelet, die in 1839 als directeur van de staalfabriek van John Cockerill in Luik werd aangesteld. Dit opschrift vormt, met de namen en beelden van diverse andere medewerkers van de staalmagnaat onderdeel van het aan Cockerill opgedragen beeld (nabij het Europese parlement).



De wiskundige Adolphe Quetelet (Gent 1796 – 1874 Brussel) was actief als astronoom (stichtte sterrenwacht van Brussel) en grondlegger van de statistiek, ook toegepast in sociale wetenschap (en is misschien wel het bekendst van de Quetelet-index, ook wel body-mass-index). Hij was lang secretaris van de Koninklijke Akademie van Wetenschappen en Kunsten, en kreeg dit enorme standbeeld in de tuin voor het Paleis der Academiën (waar vijf van de zeven Belgische academiën gevestigd zijn) in 1880 als eerbetoon.



Maar er bleek nog meer interessants te zien in Brussel: een monument opgedragen aan Joseph Plateau (Brussel 1801 – 1883 Gent), die wij kennen van het Plateauprobleem (over minimumoppervlakken, zoals gevormd door zeepbellen). Het monument herdenkt zijn bijdrage aan het ontstaan van de film, via zijn uitvinding van de fenakistiscoop, waarin de illusie van bewegend beeld ontstaat door draaiing voor een venster van een schijf met plaatjes die een beetje van elkaar verschillen (uitgebeeld op de vloer van het monument).



Ten slotte bevinden zich achter een enorm standbeeld van de graven Egmont en Horne (door Fraikin, de maker van het beeld van Quetelet) in het park Kleine Zavel een aantal mooie, manshoge 'arduinen' beelden, waaronder Philips de Zwijger, Marnix van Sint-Aldegonde en, voor ons interessanter, wederom Mercator (Gerard de Kremer, Rupelmonde 1512 – 1594 Duisburg) en Abraham Ortelius.



Woubrechtgem

In het wat onoglijke Woubrechtgem ligt een steen voor de wiskundige Gasparo Michel-Marie Pagani de la Torre (San Giorgio 1796 – 1856 Woubrechtgem), die was gevlucht uit Italië, en een aanstelling kreeg in Leuven. Hij zou beroemd geworden moeten zijn, (volgens Huylebrouck, die me door een artikel hierover op het spoor zette), voor de ontdekking van een meetkundige figuur, de triëder bij een ruimtekromme, die nu altijd naar Frenet en Serret wordt vernoemd. Pagani, die markies was, trouwde met Francisca Xaveria Coleta de Waepenaert de Termiddel-Erpen, in wier kasteeltje hij stierf. Zij richtte het getoonde monument voor hem op (waarop, na zijn verdiensten, de zin “il vecut trop peu pour les siens”: hij leefde te weinig voor de zijnen). Huylebrouck schrijft dat de gemeente Herzele het monument liet restaureren en een plaats gaf op het hernieuwde dorpsplein. Op zoek naar een graf in de nabijgelegen kerk, werden wij plotseling opgeschrikt door de stem van iemand ‘van altyddurende bijstand’ via de intercom, omdat kennelijk de beveiliging van het altaar iets te scherp was afgesteld. Gelukkig wisten we de stem van boven van onze goede wil te overtuigen.



Brugge

Eindpunt en misschien wel hoogtepunt: Brugge, voormalige wereldstad. Hier staat een triomfantelijk beeld van Simon Stevin (Brugge 1548 – 1620 Den Haag), nu de bekendste Vlaams-Nederlandse wiskundige. Het plein midden in de stad was al eerder naar hem vernoemd, maar in 1819 ontstond het idee voor een standbeeld, in het kader van een nationaal plan om grote Belgische mannen te eren. Stevin was toen nog niet alom bekend en er ontstond een hetze tegen het beeld voor een ‘middelmatig wetenschapper’, ketter en landverrader (in dienst van Willem van Oranje). Mede dankzij Quetelet kwam het beeld er toch, en ten tijde van de onthulling wist heel Brugge en omstreken in ieder geval wie Stevin was. Bij die onthulling in 1846 was het bronzen beeld nog niet af, en werd een gipsen kopie ingehuldigd. Mooie details van het beeld van Simonis tonen passer, ‘cloodcrans’, zeilwaggen, en hydrostatisch evenwicht.

Raf Bocklandt

Korteweg-de Vries Institute for Mathematics
University of Amsterdam
r.r.j.bocklandt@uva.nl

Interview Abel Prize laureate 2021 Avi Wigderson

A look at mathematics through the lens of computation

Last January the KNAW and CWI planned to organize the ‘Evening of the Abel prize’ to celebrate the work of the two laureates of 2021, László Lovász and Avi Wigderson. Unfortunately, due to the arrival of a new corona variant, the event has been postponed to the spring with the hope that no further mutations will spoil the fun. In the meantime, as an appetizer, Nieuw Archief arranged an online transatlantic interview with Avi Wigderson.

Growing up in Haifa

Born in 1956, Avi Wigderson grew up in Haifa, a major port in the North of Israel. He liked playing football and going to the beach with his friends, but already from a young age he developed an interest in solving mathematical problems.

“My father was an engineer who loved puzzles and riddles, and I think he transferred this love to me. His job consisted of fixing electrical problems in engines of ships for the navy. If something would stop working, he would think of it as a puzzle and he would tell me about the different diagnostic tests he would do to locate the problem. He also loved asking me riddles he got from old Russian books, which was infectious at least to me. My two brothers were interested in other things. One is a year younger than me. He was always interested in nature and he ended up as a biologist. My other brother was about six years younger. He was actually interested in engineering, so he liked it when my dad showed us how to fix things. I had no interest in the workings of physical appliances, like a washing machine or a car, but my youngest brother went for it and he became an engineer.

I went to a very good high school, the Hebrew Reali School, it was the only sort of semi-private school in Haifa and it had

some very good and inspiring teachers. It also produced some other renowned mathematicians and computer scientists, including Michael Rabin and Noga Alon.”

After high school Wigderson wanted to go to University but in Israel you have to go to the army first, which takes at least three years.

“The first year in the army I was in the flying course to be a pilot, but to my great joy I flunked because otherwise I would have had to serve seven years instead of three. The remaining two years I spent in a reasonably interesting office job. Now-

adays, with the rise of cybersecurity and cryptography, there are a lot more possibilities to do some intellectually challenging tasks in the army than in my time. Many Israeli researchers in mathematics and computer science that you might have heard of did do interesting things.”

After his army service Wigderson returned to his hometown Haifa and there he enrolled in Technion, the Israel institute of technology. Founded in 1912, it is the oldest university of the country and it is sometimes referred to as the MIT of Israel. Despite his early interest in mathematics, he opted for a degree in computer science.

“I was interested in mathematics but my parents, who were holocaust survivors, thought that I should have a good job. They convinced me to do computer science, where I would learn some math anyway. I was not from an academic family, so the idea of becoming a university professor was never in the consciousness of our family. I didn’t know about this, even when I was in college I didn’t realize that my teachers do much more than teaching.

The computer science department was a rather new department. Throughout the country many mathematics departments offered computer science programs already from the sixties, sometimes they were also offered in electrical engineering, but this probably was the first independent computer science department. We were a small class of maybe forty people. Most of our teachers were already researchers who did something in computer science, such as



Avi Wigderson

Photo: <https://www.heidelberg-laureate-forum.org/>



Photo: Technion

A view over the port of Haifa

operating systems, programming languages, databases and of course algorithms.

It was not just a theory program, we did a lot of practical things like programming classes, which in these days was still done using punch cards. Sometimes that could be very frustrating: I once wrote a program which consisted of a batch of maybe three hundred punch cards and just before I wanted to put it in the stacker, I dropped it."

From the East to the West Coast

During his studies at Technion, Wigderson met his wife Edna, a mathematics student. They got married in their final year of college and after their degree in Israel they wanted to pursue further studies in the United States. Avi ended up doing a PhD in computer science at Princeton, while Edna took a master in mathematics at Rutgers University.

"I applied to about ten universities and I was accepted by Princeton and Yale. My mentor at Technion, Shimon Even, said that Princeton is a nicer place to live, so we went to Princeton. My advisor Dick Lipton was interested in practically everything theoretical. He was interested in cryptography, complexity, algorithms, and in a variety of models of computation. I just followed him and I learned everything he was doing. I also collaborated quite a bit with my other you know classmates from gradu-

ate school. I wrote papers with classmates on different subjects and my thesis was just a collection of a few papers. It was not really a cohesive topic but my advisor was happy with it, so I was happy too. In the meantime my wife and I also had our first child, which is maybe a more impressive production than a PhD."

The young family stayed in the United States for three more years but moved to the other side of the country.

"I had three years of postdocs, two of them were in Berkeley and one at the IBM research institute in San Jose. You shouldn't think of IBM just as a company fabricating computers and software. Its research department did real pure theoretical research. At that time, the mid eighties, this institute functioned exactly like any other computer science or math department. There was a lot of freedom: nobody told anybody what to do, the staff members were top-notch theorists: Miklós Ajtai, Ron Fagin, Nicholas Pippenger, Larry Stockmeyer,... It was a phenomenal place to do a postdoc and I learned a lot there. Needless to say, my two years at Berkeley (one actually at MSRI) were fantastic for my professional development as well."

During that time he also met László Lovász, with whom he would later share the Abel Prize in 2021. The committee

awarded the prize "For their foundational contributions to theoretical computer science and discrete mathematics, and their leading role in shaping them into central fields of modern mathematics".

"Combinatorics, discrete math and computer science are closely related as you know from the Abel prize. I'm very happy to have received the prize together with Laci, not only because it made a lot of sense from a mathematical point of view, but also because he is one of my heroes and a longtime friend. We spent some time in the same places. We were in Berkeley together for a year in the eighties and we were in Princeton for a year in the nineties. During these times we talked a lot and we wrote a couple of papers together."

Proofs without knowledge

One of the lines of research that Wigderson pursued in the eighties and nineties was interactive proofs, and in particular the idea of zero-knowledge proofs. This concept formalizes the problem that arises when you want to convince someone that you have a method to do something, without revealing any information about the way it works or giving away the answer to the problem.

"The idea of proving things without providing any knowledge is something paradoxical and therefore very fascinating. I cannot imagine it will not peak anybody's interest once they hear about it. The proposal was made in 1985 by Shafi Goldwasser, Silvio Micali and Charles Rackoff [7]. The motivation they had came from cryptography. It's very natural in cryptographic settings that you would like to do something that depends on a secret, and the other party wants to make sure that you did things correctly without cheating. On the other hand, you don't want to show them how you did it because part of the input is your secret.

The most basic example, one that is done daily millions of times, is when people pick a public key. This often means that you pick two primes, multiply them together and then publish the result. If I give you such a number, why should you believe me that it's a product of two primes? Maybe it's a product of three primes, maybe I didn't do it correctly. How do I convince you? Well I can give you the factors but that would reveal my secret.



Avi and Laci, Oslo 2012

Photo: MFO, Gent-Martin Greuel

That was their question: is it possible for me to convince you that I have a proof of something — and here the proof is the two prime factors — without showing you the proof. Indeed, even without giving you any information whatsoever. For another example: how do I convince you that I have a proof of the Riemann hypothesis without showing you anything that you don't already know."

While the case of the Riemann hypothesis might be out of reach for this article, we can give an example of a zero-knowledge proof inspired by the problem of factoring numbers. Let us assume Peggy (the prover) knows that a number $n = pq$ is the product of two big primes p and q . From basic number theory we know that this means she can invert the function $x \rightarrow x^e \bmod n$ for any e which is coprime with $(p-1)(q-1)$ by calculating $d = e^{-1} \bmod (p-1)(q-1)$ and taking the d -th power of $x^e \bmod n$. While finding d for a given e , is not the same task as factoring n it is hypothesized to be computationally equivalent. (This is called the RSA assumption.)

Suppose that Peggy wants to convince Victor (the verifier) that she is indeed able to invert $x \rightarrow x^e \bmod n$ without revealing the primes p , q or d , she could allow Victor to pick random x 's and send her $y = x^e \bmod n$ while she returns $x = y^d \bmod n$. If this all reminds you strongly of the RSA algorithm for public key cryptography, this is not a

coincidence. (To turn this into a true zero knowledge proof, one has to be a bit more careful to prevent Victor from choosing very specific x 's that might reveal some information about p , q , d .)

"The mid-eighties was a period where there was an explosion in cryptography and the theory of cryptography was full of challenges of this type. There were lots of tasks that people came up with that look impossible to do, like public key encryption, how to sign a document digitally without anybody being able to forge it, or how to exchange a secret in the presence of untrusted parties. Even examples like: how do you play poker over the telephone while still following the rules, were studied. Not only did these challenges come up, but actually it turned out that they were possible in the world of cryptography, once you have a function that is easy to compute but difficult to invert, like multiplication (whose 'inverse' is factoring).

In my opinion the zero-knowledge challenge was maybe the best challenge ever because it seems totally contradictory to any human experience about what convincing is. I mean, how can I convince you of something (which you may not believe) without telling you anything that you don't already know. But it turns out to be not only possible, it's even universal. Everything that is provable at all can be proved in this way. When the idea of zero-knowl-

edge proofs was introduced, everyone was talking about it. It was a big thing because it would be extremely useful for cryptographic protocols, but it was not clear to which extent it was possible.

At that time most of the developments in cryptography were intellectual games. It was just a theory like in normal mathematics: you have some axioms and you're trying to see what you can deduce from them. In this case: which kind of tasks can you perform privately and securely, assuming you have so-called one-way, or trap-door functions, like multiplying integers? The protocols developed for many of these tasks were theoretically efficient but it was not clear that they were directly implementable. Nobody bothered about this and for a good reason: I always believe that practice will follow theory if it's good. It's not that you have to start by taking into consideration every practical detail. Instead you first want to understand the broad picture and develop general techniques before you adapt them to specific situations. Today we all experience the great practical consequences of this theory to electronic commerce, Internet security, et cetera."

Crossing boundaries

In 1986 Wigderson went back to his home country to take up a position at the Hebrew university in Jerusalem at the computer science department. He stayed in Israel for more than a decade before returning to Princeton as a professor at the Institute for Advanced Study, a position he still holds today.

"The computer science department at Hebrew university used to be a part of the mathematics department. The physical separation happened while I was a chair, but even after the split in two, the departments remained very close. Naturally, I had most contact with the combinatorialists such as Nati Linial, Gil Kalai and other computer science theorists. All the courses I taught were open for both mathematics and computer science students, especially the graduate courses. Students of mathematics came to my courses and some of my graduate students actually were math students, so we were one big family."

Just like his teaching and supervising, Wigderson's own research is also on the boundary between mathematics and com-

puter science. A lot of the problems that appear in complexity theory have their origin in abstract mathematics, most of which he did not encounter in his undergraduate studies.

“Most of the advanced math I needed I did not learn in an organized way. I think that’s a disadvantage. For a person working in theoretical computer science, especially today, it’s much better to get to know lots of basic math courses in school rather than later on. Since my education was not like that — I just learned the usual basics such as calculus and linear algebra — I had to learn the rest by myself, sometimes from books, sometimes from my colleagues.”

Coming from a different field often offers a fresh perspective on the material and allows one to approach problems from a different angle and ask questions that others might overlook or neglect. This can then lead to surprising new results.

“Part of the gut instinct or the DNA of a computer scientist is — not only in math but also in biology and physics — that when you face a theorem or a phenomenon, you want to know what is the process that makes it happen and how efficiently does it do that. Take for example Hilbert’s Nullstellensatz. It tells you that if some polynomials do not share a common zero then you can find a linear combination that gives you 1. As a computer scientist you immediately wonder what are these polynomial coefficients, how can I find them efficiently, and what is the complexity of doing this.

This is a fundamental question: an existence theorem of some object is nice but how can I generate it? I think this general question has been extremely fruitful and productive. There are many stories from research that illustrate this.”

Ramsey and randomness

A prime example of this comes from Ramsey theory. This branch of mathematics studies how certain nice substructures necessarily appear once a given structure gets large enough. In the case of graphs one can show that for any k there is a number $R(k, k)$ such that any graph with $n \geq R(k, k)$ nodes contains a complete subgraph of size k (a clique) or an independent set of that size (a set of nodes without any edges

between them). Determining these numbers is a notoriously hard problem.

In the forties Paul Erdős [5] gave a lower bound for n using a simple probabilistic argument. If you draw a random graph with n nodes then for every choice of k vertices the probability that it is complete or independent is $2 \cdot 2^{-\binom{k}{2}}$, so if $\binom{n}{k} 2^{1-\binom{k}{2}} < 1$ then there must be graphs without either of them. Fixing n and estimating k , one deduces that there must be graphs of size n , which do not have a clique or an independent set of size $O(\log n)$.

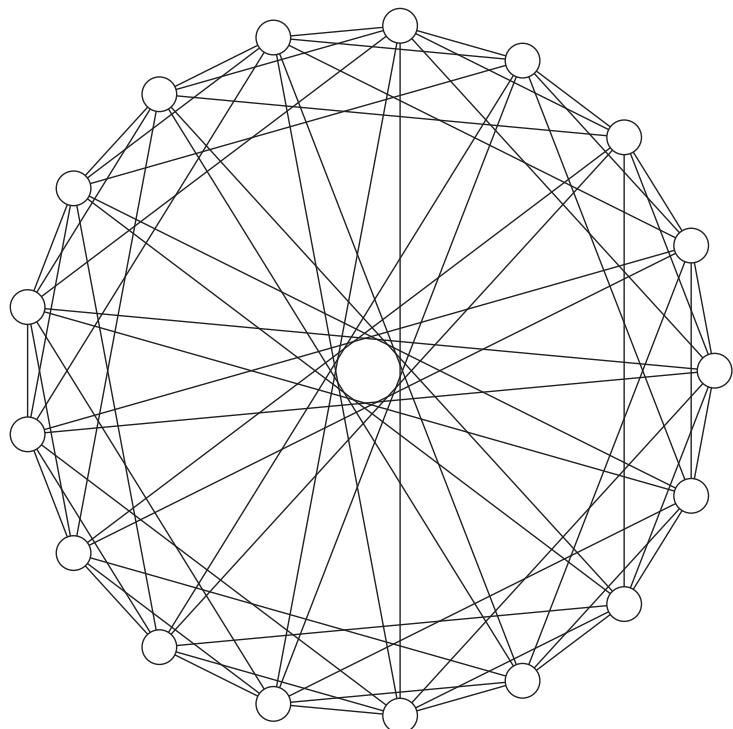
“People tried over many decades to construct graphs that don’t have small cliques or independent sets and it was pretty pathetic what they could do. The best that were known from combinatorics [6] are of the order $k = O(\exp(\sqrt{\log n}))$. Then came a series of works from computer science that used the idea of randomness extraction. This technology gets you down to clique sizes of $O(\log n^{\log \log n})$ or maybe a little better [2, 3], close to the optimal bound.”

A key notion in the study of randomness extraction is weak random sources [4]. These are random variables of binary strings with a fixed length n such that each individual string has a probability of at most 2^{-s} . The number $n - s$ is called the (min-)entropy of the source, if $n - s = 0$ the

random source is uniformly distributed and often called unbiased or pure.

“The study of randomness is something in which I invested a lot of my energy. It is a fascinating topic and has many sides and facets. One type of question is: how do you utilize a weak source of randomness? How do you utilize something that doesn’t look independent or unbiased, maybe stock market fluctuations or the output of some physical process like the weather. You expect that on the one hand it looks somewhat unpredictable — otherwise you could always buy and sell the right stocks — on the other hand it’s not like a completely random source.

Suppose I give you just a distribution that has some entropy in it, e.g. maybe every other bit is fixed by an adversary or I give you a distribution on n bits and $\sqrt{n}$ bits of entropy in it somewhere but you know nothing more. Can you use it in a probabilistic algorithm? It turns out that a theory developed over 25 years, the theory of randomness extraction or randomness purification, tells you how to do it, so the answer is yes. You can always purify weak random sources and use them in probabilistic algorithms, at least when you have some entropy. This is really quite surprising but we understand it very well today.”



A Ramsey graph with 17 nodes that contains no cliques or independent sets of size 4

Pure randomness is hard to come by, more often computers are restricted to use variables that look random but in reality are deterministic deep down. Surprisingly, pseudo-number generators based on computational complexity theory can be used to remove randomness from efficient probabilistic algorithms.

“Pseudo-randomness is another theory that I invested a lot of time in. This phenomenon requires a computationally hard function. Take for instance systems of quadratic equations. Nobody has any idea how to solve these efficiently. Even if you work over a finite field, we don’t know any algorithm better than exponential time. If you believe that any such natural hard problem requires at least exponential time, then you can eliminate randomness from any efficient probabilistic algorithm. That is another major understanding: that randomness is actually not as powerful as we think it is. Look at all the probabilistic algorithms that people use and that don’t seem to have any deterministic counterparts. The truth is they do and this is pretty remarkable.

This realization happened rather quickly. As a postdoc I wrote a paper with Miklós Ajtai at IBM where we did these kinds of things for a very limited class of algorithms that run very fast in parallel [1]. We already realized that any hard function for this class can serve as a basis for creating pseudo-random generators. This was also known in the cryptographic world, usually under stronger assumptions. Anyway, it was in the air that if you have a hard function you can generate pseudo-randomness from scratch. Then Noam Nisan, a graduate student at Berkeley, came to visit me for a semester at the Hebrew university and together we made this fundamental connection work for any efficient algorithm [8].

From the beginning, it was obvious to everybody that randomness is powerful, but signs that sometimes you can eliminate them began to crop up. We had all these examples and within a week or a couple of days we realized that it is very general and you can always do it. There were various parameters to make the result much cleaner and stronger. In a sense even though I was not consciously thinking it should be true, we were just pursuing the power of the paradigm that hardness can be converted into randomness.”

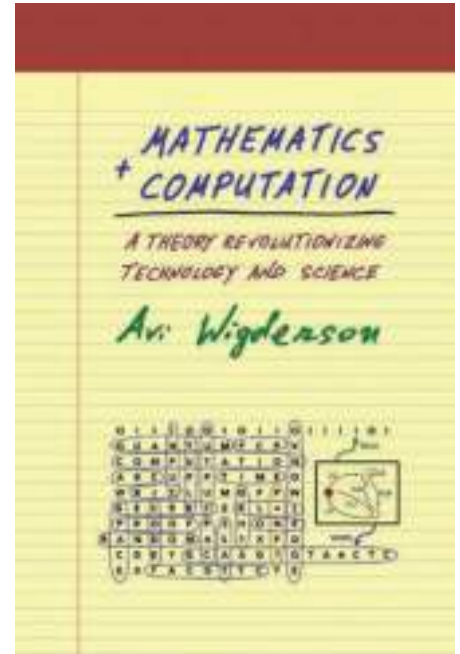
The computational lens

As illustrated by the examples above, looking at mathematics from a computational perspective can be a very fruitful endeavor and it inspired Wigderson throughout his whole career.

“I think that over forty years my understanding has evolved and improved a lot. Thirty years ago there were some glimpses, not just by me but by the whole community. We didn’t understand the full power of this computational lens. Twenty years ago it was much clearer. The algorithmic viewpoint kept improving and I collected many more examples to demonstrate.”

In 2019 Wigderson published a book [9] that offered a bird’s eye view of computational complexity theory, including all its connections and interactions with mathematics, the natural and social sciences, technology, and philosophy.

“The origin of the book is actually a funny story. I was hoping to write a popular book for the general public. I tried for several years and I didn’t get too far. I really had problems with finding the right level of presentation. I didn’t realize it was so difficult. I like giving popular lectures and I never had a problem with that, but a book



was a different challenge. So then Edna, my wife, suggested that maybe I should write a book I can finish.

I realized that I could finish a book that would be a little more technical but still accessible to the undergrads. I could write something high level, not a book with the proofs but a book about the ideas: the motivations for different parts of computational complexity, the main results and their overall consequences rather than the details.

It would not be a real textbook but it would explain many parts of computational complexity, how they relate to each other and how they connect to math, physics, biology and economics. I am very happy with the way it turned out.”

We wholeheartedly agree and recommend it to all our readers, especially those who prefer math books of a more generalist nature, that do not shy away from the bigger picture. ☞

References

1. M. Ajtai and A. Wigderson, Deterministic simulation of probabilistic constant-depth circuits, *Proceedings of the 26th FOCS*, October 1985, pp. 11–19.
2. B. Barak, A. Rao, R. Shaltiel and A. Wigderson, 2-source dispersers for $n^{o(1)}$ entropy, and Ramsey graphs beating the Frankl–Wilson construction, *Annals of Mathematics* 176(3) (2012), 1483–1543.
3. E. Chattopadhyay and D. Zuckerman, Explicit two-source extractors and resilient functions, in *Proceedings of the 48th annual ACM symposium on Theory of Computing*, ACM, 2016, pp. 670–683.
4. A. Cohen and A. Wigderson, Dispersers, deterministic amplification, and weak random sources, *30th Annual Symposium on Foundations of Computer Science*, IEEE Computer Society, 1989.
5. P. Erdős, Some remarks on the theory of graphs, *Bulletin of the American Mathematical Society* 53(4) (1947), 292–294.
6. P. Frankl and R. M. Wilson, Intersection theorems with geometric consequences, *Combinatorica* 1(4) (1981), 357–368.
7. S. Goldwasser, S. Micali and C. Rackoff, The knowledge complexity of interactive proof systems, *SIAM Journal on Computing* 18(1) (1989), 186–208.
8. N. Nisan and A. Wigderson, Hardness vs. randomness, *Journal of Computer Systems and Sciences* 49(2), (1994), 149–167.
9. A. Wigderson, *Mathematics and Computation*, Princeton University Press, 2019.

Ronald de Wolf

CWI, Amsterdam, and
ILLIC, University of Amsterdam
rdewolf@cwi.nl

Event Abel Prize 2021

Avi Wigderson's work and influence

The 2021 Abel Prize was awarded to Lászlo Lovász and Avi Wigderson “For their foundational contributions to theoretical computer science and discrete mathematics, and their leading role in shaping them into central fields of modern mathematics.” While Lovász is a mathematician whose work affects computer science, Wigderson is a computer scientist whose work affects mathematics. In this article Ronald de Wolf gives a brief overview of some highlights of Wigderson's wide-ranging work and influence.

Avi Wigderson was born in 1956 in Haifa, Israel, where he studied at the Technion before going to Princeton to obtain his PhD in 1983 under Richard Lipton. After several short-term positions in the US and a long period on the faculty of the Hebrew University in Jerusalem, in 1999 he joined the School of Mathematics of the Institute for Advanced Studies (IAS) in Princeton. There, despite being the only tenured computer scientist, he has created a thriving research environment for theoretical computer science and its interplay with mathematics and other areas. He is famous for his openness to everything interesting, his willingness to collaborate widely, and his ability to mentor young researchers.

Wigderson already received the 1994 Nevanlinna Prize for work on complexity theory, the 2009 Gödel Prize for work on graph products, and the 2019 Knuth Prize for his overall contributions to the foundations of computer science, but this year's well-deserved Abel Prize is arguably an even more prestigious honour.

Proofs, with and without knowledge

Mathematics is all about proofs, and because complexity theorists dislike hard-to-check proofs, much of their field focuses on proofs that are *efficiently verifiable*, i.e., checkable in polynomial time. The quintessential incarnation of this is the complexity class NP, which consists of those decision problems where the ‘yes-instances’ have a short and efficiently-verifiable certificate. Such problems may not always be efficiently solvable (that's what the famous $P \neq NP$ conjecture says), but at least we can efficiently verify a given solution.

One example of such a computational decision problem, at the very core of mathematics, is the set of statements that have a short proof (i.e., a proof with at most polynomially many derivation steps starting from the axioms in some fixed formal system). *Given* a purported proof of some statement, one can efficiently verify that the proof is correct by checking that it starts from the system's axioms, that each step follows the derivation rules of the sys-

tem, and that the conclusion is the claimed statement. However, deciding whether a given statement *has* such a proof or even *finding* such a proof may of course be much more difficult, keeping mathematicians busy in their daily life in creative ways that are very hard to automate.

The practice of mathematical proofs is often more complex than the simple “give me a proof and I'll verify it” scheme of NP. Proofs are often *interactive*: instead of a static proof that the prover gives to the verifier, in an interactive proof the verifier can ask questions, ask the prover to elucidate some points, et cetera. This involves back and forth communication until the verifier accepts or rejects the statement that the prover is trying to prove. For instance, this is the situation when a mathematician presents a proof to colleagues on a whiteboard or during a seminar with an active audience, or sometimes in the interaction with an anonymous referee when a paper is submitted to a journal. Such interactive proofs have been modelled mathematically in the complexity class IP: here the verifier is required to work efficiently while interacting with a prover who has unbounded computational power. A set L of strings has an interactive proof system if the prover can convince the verifier of each statement in L but of none of the state-

ments outside of L . A fundamental result in complexity theory says that $IP = PSPACE$ [19, 26, 27]: a set L has an interactive proof system iff there is a deterministic algorithm that uses polynomial space (and possibly much more time) for deciding if a given string is in L .

Of course, a proof of a statement, no matter whether interactive or not, typically gives us a lot of knowledge about *why* the statement is true. If $P \neq NP$ (as most researchers expect) then presumably it would have taken the verifier a lot of time to *find* that knowledge without the help of the prover. Rather amazingly, there are also proof systems *that give no knowledge* beyond the validity of the proved statement. These are known as *zero-knowledge* proofs.

An illustrative example is the problem of deciding whether two given n -vertex graphs, G_0 and G_1 , are isomorphic or not. This problem is clearly in NP : the proof is the isomorphism (easy to verify, though maybe hard to find). On the other hand, it's hard to think of a succinct proof that two graphs are *not* isomorphic, and we do not even know whether such succinct proofs exist (i.e., whether the graph non-isomorphism problem is in NP). However, here is a simple zero-knowledge proof system for checking with high confidence that G_0 and G_1 are *not* isomorphic: the verifier flips a random coin $b \in \{0, 1\}$, sends the prover a random permutation of the graph G_b , and asks if it came from G_0 or G_1 . In other words, the prover has to guess what b was. If the two graphs are non-isomorphic, then the prover can (in exponential time) determine whether the graph he received came from G_0 or G_1 and tell the verifier what b was. If, on the other hand, G_0 and G_1 were isomorphic then the prover just sees a random graph isomorphic to *both* G_0 and G_1 , and his best bet at guessing b is a random coin flip — which will be wrong half the time. Repeating this a few times, with the verifier choosing a new random bit b each time, the prover can correctly guess these bits b every time if G_0 and G_1 are not isomorphic, but he's very likely to guess wrong at least once if G_0 and G_1 are isomorphic.

Can we find zero-knowledge proof systems for other, more difficult problems than non-GI? We do not know an efficient algorithm for non-GI (the best is Babai's fairly recent algorithm [4]) but neither is

it believed to be among the hardest problems in NP : it is unlikely to be NP -hard. Rather amazingly, Wigderson and co-authors proved in [7, 11] that there is an efficient zero-knowledge proof system *for every problem in NP* . In particular, there is a way for a prover to convince a verifier that a certain statement in a formal system is provable *without revealing any information about that proof beyond the fact that it exists*. What does the latter mean, exactly? It means that the verifier can himself, without help from the prover, simulate the whole conversation if the statement is true. For example, in the earlier protocol for non-isomorphism of two graphs, the verifier already knows in advance what the prover will reply in the non-isomorphic case: the prover will just tell the verifier what b is — which the verifier already knew, since he chose b himself!

These results about zero-knowledge proofs and their further development are among the many ways in which Wigderson has impacted the closely related areas of computational complexity, proof theory, and cryptography.

Communication complexity

The area of *communication complexity* was introduced by Yao [29]. It studies a bare-bones version of distributed computing, where the only resource we care about is the amount of communication, while all local computation is for free. In its most basic two-party setting, Alice and Bob receive inputs x and y , respectively, and want to compute some function $f(x, y)$ that depends on both of their inputs. The function f is known to both players, but x is known only to Alice and y is known only to Bob, so they will have to communicate at least something if they want to compute $f(x, y)$. Of course, Alice could just send x to Bob or Bob could send y to Alice, but these may be long strings, and for many functions much more clever and communication-efficient ways of computing $f(x, y)$ exist. The goal here is to analyze the minimal number of bits of communication needed, on the worst-case input x, y .

The function f corresponds to a matrix M_f , with rows indexed by the possible x 's, columns indexed by the possible y 's, and entries $f(x, y)$. Since M_f is a complete description of f , its properties determine the communication complexity of f . Which properties exactly? Many connections have

been found between the communication complexity of f and mathematical properties of M_f , for instance combinatorial properties like the minimal number of 'monochromatic rectangles' (submatrices of M_f on which f is constant) needed to partition or to cover M_f , and algebraic properties such as various types of rank of M_f . A rich array of mathematical techniques can thus be deployed to analyze the communication complexity of a given function. Wigderson contributed much to this in a number of papers together with Noam Nisan [15, 20, 22].

Apart from being a basic model of distributed computation, communication complexity is also one of our main sources of lower bounds in many other models, ranging from area-time tradeoffs in chips to decision trees to data structures. One very surprising connection is due to Karchmer and Wigderson [16], who gave a very clean characterization of the minimal Boolean circuit depth of a given function in terms of the communication complexity of a related problem. In principle this allows us to prove lower bounds on circuit depth via communication complexity, and such circuit lower bounds could eventually lead to separation of complexity classes like P and NP . Unfortunately the resulting communication complexity problems are still quite hard to analyze, and this approach has not yet led to super-logarithmic lower bounds on circuit depth. It has, however, led to the first super-logarithmic lower bounds on circuit depth of *monotone* Boolean circuits for certain graph problems [16, 23].

Pseudorandomness and derandomization

Another important strand in Wigderson's research is the role of randomness in computation.

Computers, in Turing's definition, in actual hardware, and in the general public's perception, are supposed to be *deterministic* machines: one computational operation follows the previous one with perfect predictability. If anything makes the computer deviate from that one path, then that's called noise or a 'bug' (sometimes literally). However, since the 1970s *randomized* algorithms have become ubiquitous in theory and in some parts of practice (for instance in cryptography and in Monte Carlo simulations). Randomized algorithms are allowed to let their computational path depend on coin flips or other sources of randomness, and are typically allowed to have a small

error probability on each input. Usually that error probability can be reduced very efficiently to something extremely small by repeating the algorithm a few times and taking the majority output among those runs. So for most practical purposes, an efficient randomized algorithm is as good as an efficient deterministic one.

Here is a simple example from communication complexity where randomization really helps: suppose Alice and Bob have n -bit integers x and y , respectively, and they want to compute the 'equality' function, i.e., decide if $x = y$ or not. One can show that deterministic communication protocols need to send n bits across for this. In contrast, if Alice can flip a coin then she can do the following: she chooses a random prime number p of $O(\log n)$ bits, and sends both p and $x \bmod p$ to Bob. That's just $O(\log n)$ bits of communication. Bob receives these, computes $y \bmod p$, and compares it with $x \bmod p$. Clearly, if $x = y$ then the same is true $\bmod p$. But if $x \neq y$ then x and y will be different $\bmod p$ with high probability!

The above example shows that randomness can yield provable exponential savings in terms of communication: allowing the parties to flip coins and to have a tiny error probability reduces the communication complexity of the equality function from n to $O(\log n)$ bits. Randomness also helps to *hide* things from an adversary in cryptographic situations, as we saw for instance for zero-knowledge proofs. In fact, without the ability to use randomness to choose secret private keys, there would be no cryptography.

What about the power of randomness for the core concept of complexity theory: algorithmic runtime? Can randomization lead to an exponential speed-up compared to deterministic algorithms for some computational problems? After a wave of efficient randomized algorithms that we didn't (and in some cases still don't) know how to replace by an efficient deterministic algorithm, it seemed for a while quite plausible that the answer is 'yes'. In complexity-theoretic terms, this would mean that the class BPP of problems efficiently solvable by *randomized* algorithms would be strictly larger than the class P of problems efficiently solvable by *deterministic* algorithms. (Consider the following 'polynomial identity testing' (PIT) problem. Given a low-degree multivariate polynomial

$p(x_1, \dots, x_n)$ over some field, represented as an arithmetic circuit — i.e., a circuit acting on n inputs, whose internal nodes are addition and multiplication operations —, decide if p is identically equal to 0 or not. By the Schwartz–Zippel lemma, the value of the polynomial on a uniformly random input will be non-zero with reasonably high probability, unless the polynomial was identically equal to 0. This gives an efficient *randomized* algorithm for PIT: evaluate the arithmetic circuit on a random input, and see if you get value 0. Challenge: find an efficient *deterministic* algorithm...)

Turning this expectation around, a sequence of so-called *derandomization* papers in the 1990s, first by Nisan and Wigderson [21] and then by Impagliazzo and Wigderson [13, 14] showed that P and BPP are actually equal (meaning efficient randomized algorithms can be replaced by efficient deterministic ones) under quite plausible hardness assumptions, such as that there are problems solvable in deterministic time $2^{O(n)}$ that require Boolean circuits of size $2^{\Omega(n)}$. The magic of this approach is that the truth-table of such a hard function can be used to construct a *pseudorandom* generator g that efficiently stretches an $O(\log n)$ -bit uniformly random seed s to a polynomial-length 'pseudorandom' string $g(s)$. 'Pseudorandom' here means that an efficient algorithm cannot 'see' the difference between a truly random string and an equally-long pseudorandom string $g(s)$ that is generated from a small uniformly random seed s . Accordingly, the success probability of a randomized algorithm wouldn't change significantly if we fed it a pseudorandom string rather than the truly random string that it expects. But then the strategy to make a given randomized algorithm deterministic is obvious: a deterministic algorithm can, in polynomial time, go over all $2^{O(\log n)} = n^{O(1)}$ seeds s , run the no-longer-randomized algorithm on the string $g(s)$, and see which output value occurs most often among those polynomially-many runs. The upshot here is that, surprisingly and in contrast to the situation in communication complexity, randomness does not seem to confer much additional power in computational complexity.

Graphs, algebra and algorithms

The last broad area of Wigderson's research that I'd like to highlight here is research combining graph theory, algebra

and algorithmics. These connections work both ways: results from algebra and graph theory help design algorithms, and much of the work in algorithms and complexity leads to new insights in algebra and graph theory.

For example, Wigderson and co-authors developed efficient algorithms for graph-theoretic problems such as matching [17], whose analysis uses algebra. They also designed algorithms for algebraic problems such as matrix scaling [2, 18] and operator scaling [8, 10], where the analysis involves graph theory. Often the connection is through algebraic graph theory: the algebraic properties of a graph's adjacency matrix give crucial information about the graph, while conversely every $n \times n$ matrix can be viewed as the adjacency matrix of a weighted n -vertex graph.

Another example of such connections are the many uses of *expander graphs*. These are constant-degree graphs that are like a 'poor man's version' of the complete graph. On the one hand an expander shares many desirable properties with the complete graph, such as having short distances between any two vertices, and rapid mixing of random walks. On the other hand, because the graph has constant degree (degree 3 already suffices!) the number of required edges is only linear in the number of vertices instead of quadratic as in the complete graph. Such graphs have two equivalent definitions: a graph-theoretic one where we require every set of at most half the vertices to 'expand' (i.e., to be connected to many new vertices), and an algebraic one where we require the adjacency matrix's second eigenvalue to be somewhat smaller than the first. The interplay between these graph-theoretic and algebraic perspectives has been very fruitful. Wigderson has been instrumental in developing constructions and applications of such expander graphs, as well as of their cousins such as extractor and disperser graphs, which have their applications in derandomization and even in pure graph theory such as the construction of explicit Ramsey graphs [5]. See his beautiful survey [12] for much more.

The 'zig-zag product' of graphs of Reinhold, Vadhan and Wigderson [25] deserves to be mentioned here. This is a way to combine a large graph with a small graph to get an even larger graph that inherits the expansion properties of the small graph. It

was instrumental in two subsequent breakthroughs: Reingold's proof that deciding whether two vertices are connected on a given graph can be solved deterministically using only logarithmic space [24], and Dinur's new proof of the PCP theorem via gap-amplification [9]. (The PCP theorem [3] says that proofs for NP-problems can always be written in such a way that a randomized verifier can check them by looking at only a *constant* number of the bits of the proof! This is a deep and very surprising result about proof checking, which also has many applications for showing hardness of approximation problems.)

The zig-zag product has also led to progress in graph theory itself, including explicit constructions of almost-Ramanujan graphs [6] (i.e., nearly optimal expanders).

Together with Scott Aaronson, Wigderson [1] also proved some strong limitations on what algebraic methods can achieve

in complexity theory: the algebraic technique of writing functions as low-degree multivariate polynomials, which has been crucial for results like the aforementioned $IP = PSPACE$, by itself will not be enough to prove long-hoped-for results like $P \neq NP$.

TCS as a lens on other areas

In addition to the strands of research highlighted above, Wigderson has also worked on parallel computing, data structures, quantum computing, pure graph theory, and many other areas. He has a very broad perspective on the theory of computing, with a keen eye for how it can learn from, interact with, and illuminate other parts of science.

The fact that there are many links between TCS and mathematics, some obvious and some very surprising, is by now well-known, in part through Wigderson's many able and Abel contributions. How-

ever, TCS also has growing relevance for and impact on other areas such as physics (quantum computing and quantum information theory, threshold phenomena in statistical physics,...), biology (biocomputing, the view of DNA as an information-carrier,...), economics (design and analysis of auctions, the complexity of finding Nash equilibria,...), cognitive science (learning theory, neural networks,...) and many other areas. A synthesis of this broad perspective is Wigderson's recent book *Mathematics and Computation* [28], which is warmly recommended for anyone interested in theoretical computer science, both for its own sake and as a lens on mathematics and other sciences. $\diamond$

Acknowledgments

Thanks to Robbert Fokkink for some helpful feedback.

References

- 1 S. Aaronson and A. Wigderson, Algebrization: A new barrier in complexity theory, *ACM Transactions on Computation Theory* 1(1) (2009), 2:1–2:54. Earlier version in STOC'08.
- 2 Z. Allen-Zhu, Y. Li, R. Oliveira and A. Wigderson, Much faster algorithms for matrix scaling, in *Proceedings of 58th IEEE FOCS*, 2017, pp. 890–901.
- 3 S. Arora, C. Lund, R. Motwani, M. Sudan and M. Szegedy, Proof verification and the hardness of approximation problems, *Journal of the ACM* 45(3) (1998), 501–555. Earlier version in FOCS'92.
- 4 L. Babai, Graph isomorphism in quasipolynomial time, in *Proceedings of 48th ACM STOC*, 2016, pp. 684–697.
- 5 B. Barak, A. Rao, R. Shaltiel and A. Wigderson, 2-source dispersers for $n^{o(1)}$ entropy, and Ramsey graphs beating the Frankl–Wilson construction, *Annals of Mathematics* 176 (2012), 1483–1543. Earlier version in STOC'08.
- 6 A. Ben-Aroya and A. Ta-Shma, A combinatorial construction of almost-Ramanujan graphs using the zig-zag product, *SIAM Journal on Computing* 40(2) (2011), 267–290. Earlier version in STOC'08.
- 7 M. Ben-Or, S. Goldwasser, J. Kilian and A. Wigderson, Multi-prover interactive proofs: How to remove intractability assumptions, in *Proceedings of 20th ACM STOC*, 1988, pp. 113–131.
- 8 P. Bürgisser, C. Franks, A. Garg, R. Oliveira, M. Walter and A. Wigderson, Efficient algorithms for tensor scaling, quantum marginals, and moment polytopes, in *Proceedings of 59th IEEE FOCS*, 2018, pp. 883–897.
- 9 I. Dinur, The PCP theorem by gap amplification, *Journal of the ACM* 54(3) (2007), 12. Earlier version in STOC'06.
- 10 A. Garg, L. Gurvits, R. Oliveira and A. Wigderson, Operator scaling: theory and applications, *Foundations of Computational Mathematics* 20(2) (2020), 223–290.
- 11 O. Goldreich, S. Micali and A. Wigderson, Proofs that yield nothing but their validity or all languages in NP have zero-knowledge proof systems, *Journal of the ACM*, 38(3) (1991), 691–729. Earlier version in FOCS'86.
- 12 S. Hoory, N. Linial and A. Wigderson, Expander graphs and their applications, *Bulletin of the AMS* 43 (2006), 439–561.
- 13 R. Impagliazzo and A. Wigderson, $P = BPP$ if E requires exponential circuits: Derandomizing the XOR lemma, in *Proceedings of 29th ACM STOC*, 1997, pp. 220–229.
- 14 R. Impagliazzo and A. Wigderson, Randomness vs time: Derandomization under a uniform assumption, *Journal of Computer and System Sciences* 63(4) (2001), 672–688. Earlier version in FOCS'98.
- 15 M. Karchmer, I. Newman, M. Saks and A. Wigderson, Non-deterministic communication complexity with few witnesses, *Journal of Computer and System Sciences*, 49(2) (1994), 247–257. Earlier version in Structures'92.
- 16 M. Karchmer and A. Wigderson, Monotone circuits for connectivity require super-logarithmic depth, *SIAM Journal on Discrete Mathematics* 3(2) (1990), 255–265. Earlier version in STOC'88.
- 17 R. Karp, E. Upfal and A. Wigderson, Constructing a perfect matching is in random NC, *Combinatorica* 6(1) (1986), 35–48. Earlier version in STOC'85.
- 18 N. Linial, A. Samorodnitsky and A. Wigderson, A deterministic strongly polynomial algorithm for matrix scaling and approximate permanents, *Combinatorica* 20(4) (2000), 545–568. Earlier version in STOC'98.
- 19 C. Lund, L. Fortnow, H. Karloff and N. Nisan, Algebraic methods for interactive proof systems, *Journal of the ACM* 39(4) (1992), 859–868. Earlier version in FOCS'90.
- 20 N. Nisan and A. Wigderson, Rounds in communication complexity revisited, *SIAM Journal on Computing* 22(1) (1993), 211–219. Earlier version in STOC'91.
- 21 N. Nisan and A. Wigderson, Hardness vs. randomness, *Journal of Computer and System Sciences* 49(2) (1994), 561–570. Earlier version in FOCS'88.
- 22 N. Nisan and A. Wigderson, On rank vs. communication complexity, *Combinatorica* 15(4) (1995), 557–565. Earlier version in FOCS'94.
- 23 R. Raz and A. Wigderson, Monotone circuits for matching require linear depth, *Journal of the ACM* 39(3) (1992), 736–744. Earlier version in STOC'90.
- 24 O. Reingold, Undirected connectivity in log-space, *Journal of the ACM* 55(4) (2008), 17:1–17:24. Earlier version in STOC'05.
- 25 O. Reingold, S. Vadhan and A. Wigderson, Entropy waves, the zig-zag graph product, and new constant-degree expanders and extractors, in *Proceedings of 41st IEEE FOCS*, 2000, pp. 3–13.
- 26 A. Shamir, $IP = PSPACE$, *Journal of the ACM* 39(4) (1992), 869–877. Earlier version in FOCS'90.
- 27 A. Shen, $IP = PSPACE$: Simplified proof, *Journal of the ACM* 39(4) (1992), 878–880.
- 28 A. Wigderson, *Mathematics and Computation A Theory Revolutionizing Technology and Science*, Princeton University Press, 2019.
- 29 A.C.-C. Yao, Some complexity questions related to distributive computing, in *Proceedings of 11th ACM STOC*, 1979, pp. 209–213.

Peter H. van der Kamp

*Department of Mathematical and Physical Sciences
La Trobe University
p.vanderkamp@latrobe.edu.au*

Column Wiskundigen in den vreemde

Leuker kan het niet

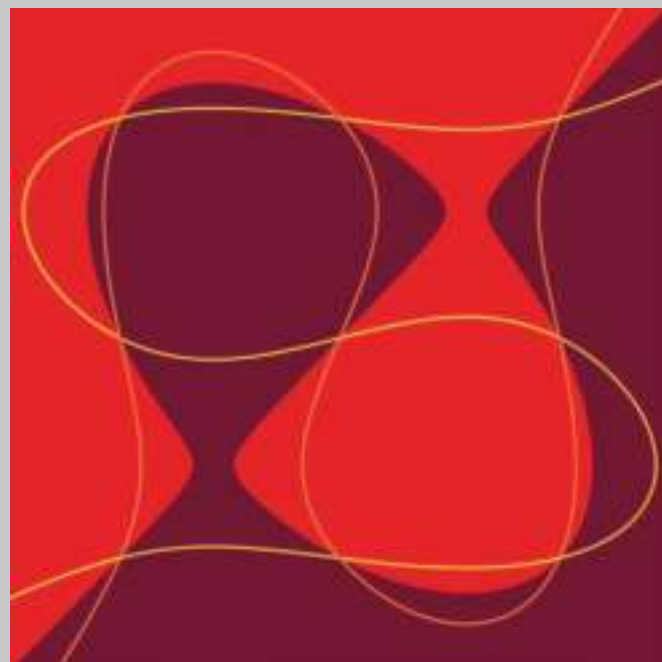
In deze rubriek doen wiskundigen verslag van hun ervaringen als wetenschapper in den vreemde. Peter van der Kamp ging als postdoc naar Engeland in 2003, en verblijft sinds 2006 in Australië, waar hij werkzaam is als universitair hoofddocent aan de La Trobe Universiteit in Melbourne.

Na mijn PhD, in 2003, besloot ik (op aandringen van mijn partner, Renske) mijn wetenschappelijke carrière voort te zetten in het buitenland, aan de Universiteit van Kent, Canterbury. Niet al te ver weg, maar toch een grote stap. Schaapjes voor de deur in Patrichtown, en een kilometer of vijf (we doen nog steeds geen mijlen) fietsen over glooiende heuvels naar de universiteit. Twee jaar en een dochter later kregen we opnieuw vlinders in onze buik bij het idee om tijdelijk naar Australië te emigreren. Moeders vond het prima: "Als je over twee jaar maar weer terug bent." Dat is nu zestien jaar geleden. Helemaal naar de andere kant van de wereld bleek niet héél anders dan het kanaal over. Met de (inmiddels emeritus) professor aan La Trobe University, Reinout Quispel, praat ik Nederlands, meubels kopen we bij de Ikea, en je kunt hier gewoon naar de Aldi.

Haaïen en krokodillen ben ik nog niet tegengekomen. Kangoeroes, pinguïns, goanna's, wombats en emo's wel. De meeste slangen en spinners zijn giftig. Spinners kun je doodslaan, voor slangen moet je een 'snake catcher' bellen, of je kan ze met rust laten. Naamgeving is heel eenvoudig hier. Ik was een keer tamelijk geschrokken omdat ik bespied werd door een slang vanuit een holle boomstam, minder dan een meter bij onze tent vandaan. Toen ik even later z'n uiterlijk beschreef aan een medekampeerder, "hij was zwart met een rode buik", leerde ik dat we de tent hadden opgezet naast de woning van een 'red-bellied black snake'. De kinderen (vier inmiddels) mochten niet meer om de tent heen lopen, maar we hebben er nog drie dagen gestaan. Het geluid van een kookaburra is erg aanstekelijk. Het gekrijs van sulphur-crested cockatoos is dat niet. Ook zijn die vogels

erg destructief. Daar kwamen we in 2012 achter, toen we (meer dan honderd) prachtige zonnebloemen hadden geplant in de rand naast onze oprijlaan. Hun was geen lang leven beschoren.

Sommige dingen zijn een beetje anders, en in een aantal opzichten loopt Australië wat achter op Nederland. Zo werken 'barbies' op gas in plaats van kooltjes, hebben de meeste huizen geen spouwmuren maar een geraamte van hout, en is dubbel



Eight implies nine, geïnspireerd op een stelling over derdegraadskrommen die bekend staat als de Cayley-Bacharach-stelling. Een derdegraadskromme die door acht gegeven punten gaat, gaat ook door een negende punt dat alleen afhangt van de gegeven acht punten. Hieruit volgt dat wanneer twee (of meer) derdegraadskrommen elkaar snijden in acht punten, ze elkaar ook snijden in een negende punt. Meer wiskunst van Peter H. van der Kamp is te vinden op <https://wiskun.de/mathematical-art>.

glas nog net niet standaard. In 2007 hebben we hard gelachen toen op het nieuws werd aangekondigd dat je in winkels zou kunnen gaan betalen met een bankpas en het intoetsen van een viercijferige code. Het leven was een stuk rustiger (en goedkoper) dan in Nederland toen. Wij hebben het lang volgehouden om met alleen mijn salaris rond te komen. We hebben een huis kunnen kopen en zelfs een 'investment property'. Dat laatste is een gangbare manier om zelf voor je oude dag te zorgen, en belastingtechnisch aantrekkelijk. Via 'negative gearing' mag je je verlies aftrekken van je inkomsten. Daarentegen mag je de rente die je betaalt op je eigen huis juist niet aftrekken. Australië is minder milieubewust dan we dachten en zouden willen. Zo rijden alle 'chippies' en 'sparkies' in benzineslurpende 'utes'. Aan de meeste afkortingen zijn we inmiddels wel gewend, zelfs aan 'Cab Sav' (rode wijn gemaakt van een ook in Nederland welbekende soort druiven).

La Trobe University is opgericht in 1964. Het is nu een van de zeven universiteiten van Melbourne. Het behoort niet tot de Go8 (een groep van acht toonaangevende universiteiten in Australië). De hoofdcampus ligt in de noordelijke wijk Bundoora, voor mij ongeveer een uur reizen (met de fiets en de trein) of iets korter (fietsend), of iets langer (hardlopend). De universiteit doet het best aardig in rankings. Erg trots is de universiteit op het feit dat ze nu twee jaar op rij vierde zijn geworden in de 'Times Higher Education Impact Ranking', voor hun contributie aan de duurzame ontwikkelingsdoelen van de Verenigde Naties. Het netto-nul-plan van La Trobe is om in 2029 CO₂-emissievrij te zijn, door hernieuwbare energieprojecten (in 2020 werden 7500 zonnepanelen geïnstalleerd), verbeteringen in energie-efficiëntie, en afvalvermindering. De universiteit en de overheid hebben flink geïnvesteerd in een nieuw sportcomplex (helaas voor mij zonder atletiekbaan) en dit wordt de thuisbasis voor 'the Matildas' (het nationale vrouwenvoetbalteam) en voor centers of excellence van Victoria voor Football (Australische regels, met ovale bal) en Rugby. Sport is erg belangrijk hier. De nationale sporten zijn wel gescheiden: Football of Cricket voor jongens en Netball voor meisjes, maar ons voetbal is in opkomst. Het sportcomplex maakt deel uit van de universiteitsstad-van-de-toekomst-visie dat ervoor moet zorgen dat La Trobe University vooroploopt op het gebied van gezondheid en welzijn.

Covid-19 heeft alle universiteiten in Australië zwaar getroffen, aangezien veel geld verdiend werd aan veel buitenlandse studenten die opeens het land niet meer in mochten. De overheid heeft weinig geholpen en La Trobe had het moeilijk. De vakbond heeft, na een stemming onder werknemers, geregeld dat iedereen een jaar lang een deel van zijn salaris moest inleveren zodat er geen koppen hoefden te rollen. Na een jaar was mijn salaris weer waar het zou zijn geweest, en rolden er alsnog koppen. Het twee-collegesmodel ging op de schop, en afdelingen binnen 'schools' werden opnieuw afgestemd op strategische doelen. De afdeling Wiskunde en Statistiek kwam er goed vanaf. Wij hebben



The Bertini incidence, met waarnemend directeur van de Diamond Creek East lagere school Stephen Cambell links, en wiskundige in den vreemde Peter van der Kamp rechts.

er natuurkunde bijgekregen, en heten nu de afdeling van 'Mathematical and Physical Sciences'.

Al geruime tijd is het aantal wiskundestudenten zorgwekkend aan het krimpen. Aangezien de universiteit niet langer kleine vakken (met minder dan dertig studenten) toestaat, zijn er al (te) veel wiskundevakken gesneuveld. Er ligt nu een plan om het hele curriculum om te gooien, te beginnen met het propedeusejaar; het moet leuker (lees: toegepast) worden. Ook qua onderzoek moeten we: ons meer richten op de industrie, samenwerken (en de politiek bepaalt; dus met India, niet meer met China), geld binnen halen, en vooral... *impact* hebben. Spannende tijden. Een klein lichtpuntje is data science, dat zit behoorlijk in de lift en daar klampen we ons hartstochtelijk aan vast (samen met computer science, bio-informatica en sport-analytics). Ik heb daarom een vak optimalisatie opgezet.

Tsja, hoe combineer je algebraïsche krommen met geld binnen halen, *impact* hebben, en leuker worden? En is wiskunde niet de ultieme vorm van uiterste schoonheid? Ik laat deze week de 'Bertini incidence' printen op een metalen plaat van 110 bij 110 cm. Het gaat zweven in een frame gemaakt van Tasmanian Oak, wat komt te hangen in het nieuwe wetenschapsgebouw van onze lokale lagere school in Diamond Creek. Leuker kan het niet.

In de Bertini incidence zien we een vierdegraadskromme (wit) met een tripelpunt en twee krommen (oranje en zwart) uit een palet van derdegraads krommen die allemaal dezelfde negen punten, inclusief het tripelpunt, gemeen hebben met de vierdegraadskromme. Aangezien $8 \times 1 + 1 \times 3 = 3 \times 4 - 1$ moet er nog één ander snijpunt zijn. Het blijkt dat de rechte lijn door dit snijpunt en het tripelpunt overeenkomt met de raaklijn aan de derdegraadskromme in het tripelpunt. Had ik al gezegd dat Australië een prachtig land is om kinderen te zien opgroeien?



Richard D. Gill

Mathematical Institute
Leiden University
gill@math.leidenuniv.nl



Society

An Italian CSI drama

Instead of the column of Piet Groeneboom on every day statistical topics, we this time publish an adjusted version of a blog of Richard Gill on a case of Daniela Poggiali, an Italian nurse suspected of having killed around ninety patients. When Gill read about this in the newspapers he offered her lawyer support on the statistics of the case.

Social media, a broken legal system, and Micky Mouse statistics

The title of my blog ‘An Italian CSI drama: social media, a broken legal system, and Micky Mouse statistics’ [4] might refer to the very, very famous trials of Amanda Knox in the case of the murder of Meredith Kercher. However, I am writing about a case that is much less known outside of Italy (neither victim nor alleged murderer was a rich American girl). This is the case of Daniela Poggiali, a nurse suspected by the media and accused by prosecution experts of having killed around ninety patients in a two-year killing spree terminated by her arrest in April 2014. She has just been exonerated after a total of three years in prison with a life sentence as well some months of pre-trial detention. This case revolved around statistics of an increased death rate during the shifts of a colourful nurse. I was a scientific expert for the defence, working with an Italian colleague, Julia Mortera (Roma Tre University), later assisted by her colleague Francesco Dotto [1].

Piet Groeneboom and I worked together on the statistics of the case of Lucia de Berk, see our paper in *Chance* [5]. In fact, it was remarkable that the statistical community in the Netherlands got so involved in that case. A Fokke & Sukke cartoon entitled ‘Fokke and Sukke know it intuitively’ (see Figure 2) had the exchange “The probability that almost all professors of statistics are in agreement ... is obviously very small indeed.” Indeed, it wasn’t. That was one of the high points of my career. Another was Lucia’s final acquittal in 2010, at which the judges took the trouble to say out loud, in public, that the nurses had fought heroically for the lives of their patients; lives squandered, they added, by their doctors’ medical errors.

At that point, I felt we had learnt how to fight miscarriages of justice like that, of which I rapidly became involved in several. So far, however, with rather depressing results. Till a couple of months ago. This story will not have much to do with mathematics. It will have to do with simple descriptive statistics, and I will also mention the phrases “ p -value” and “Bayes’ rule” a few times. I think it is important for mathematicians in general to know more about what statisticians can do — not so much through using deep and exciting mathematics, though that does happen too, of course — but because one of the skills of a professional statistician is the abstraction of messy real-world problems involving chance and data. It’s not for everybody. Many mathematical statisticians prefer to prove theorems, just like any other mathematician. In fact, I often do prefer to do that myself, but I like more being able to alternate between the two modes of activity, and I do like sticking my nose into other people’s business, and learning about what goes on in, for instance, law, medicine, or anything else. Each of the two activity modes is a nice therapy for the frustrations which inevitably come with the other.



Figure 1 Daniela Poggiali, on the day of her final (?) release, 25 October 2021.

Photo: Giampaolo Corelli



Figure 2 Fokke and Sukke do not believe that this is a coincidence.

Illustration: Reid, Geleijse & Van Tol

The case of Daniela Poggiali

The Daniela Poggiali case began, for me, soon after the 8th of April, 2014, when it was first reported in international news media. A nurse at the *Umberto I* hospital in the small town of Lugo, not far from Ravenna, had been arrested and was being investigated for serial murder. She had had photos of herself taken laughing, close to the body of a deceased patient, and these ‘selfies’ were soon plastered over the front pages of tabloid media. Pretty soon, they arrived in *The Guardian* and *The New York Times*. The newspapers sometimes suggested she had killed 93 patients, sometimes 31, sometimes it was other large numbers. It was suspected that she had used Potassium Chloride on some of those patients. An ideal murder weapon for a killer nurse since easily available in a hospital, easy to give to a patient who is already hooked up to an IV drip, kills rapidly (cardiac arrest – it is used in America for executions), and after a short time hard to detect. After death, it redistributes itself throughout the body where it becomes indistinguishable from a normal concentration of Potassium. Many features of the case reminded me strongly of the case of Lucia de Berk in the Netherlands. In fact, it seemed very fishy indeed. I found the name of Daniela’s lawyer in the online Italian newspapers, Google found me an e-mail address, and I sent a message offering support on the statistics of the case. I also got an Italian statistician colleague and good friend, Julia Mortera, interested. Daniela’s lawyer was grateful for our offer of help. The case largely hinged on a sta-

tistical analysis of the coincidence between deaths on a hospital ward and Daniela’s shifts there. We were emailed pdfs of scanned pages of a faxed report of around fifty pages containing results of statistical analyses of times of shifts of all the nurses working on the ward, and times of admission and discharge (or death) of all patients, during much of the period 2012–2014. There were a further fifty pages (also scanned and faxed) of appendices containing print-outs of the raw data submitted by hospital administrators to police investigators. Two huge messy Excel spreadsheets.

The authors of the report were Prof. Franco Tagliaro (University of Verona) and Prof. Rocco Micciolo (University of Trento). The two are respectively a pathologist/toxicologist and an epidemiologist. The epidemiologist Micciolo is a professor in a social science department, and member of an interfaculty collaboration for the health sciences. We found out that the senior and more influential author Tagliaro had published many papers on toxicology in the forensic science literature, usually based on empirical studies using data sets provided by forensic institutes. Occasionally, his friend Micciolo turned up in the list of authors and had supplied statistical analyses. Micciolo describes himself as a biostatistician. He has written Italian language textbooks on exploratory data-analysis with the statistical package ‘R’ and is frequently the statistician-coauthor of papers written by scientists from his university in many different fields including medicine and psychology. They both had decent H-indices, their publications were in decent journals, their work was mainstream, useful, ‘normal science’. They were not amateurs. Or were they?

Daniela Poggiali worked on a very large ward with very many very old patients, many suffering terminal illnesses. Ages ranged from 50 up to 105, mostly around 90. The ward had about sixty beds and was usually quite fully occupied. Patients tended to stay one to two weeks in the hospital, admitted to the hospital for reasons of acute illness. There were on average several deaths every week; some days none, some days up to four. Most patients were discharged after several weeks in hospital to go home or to a nursing home. It was an ordinary ‘medium care’ nursing department (i.e., not an Intensive Care unit).

Some very simple statistics showed that the death rate on days when Poggiali worked was much higher than on days when she did not work. A more refined analysis compared the rate of deaths during the hours she worked with the rate of deaths during the hours she was not at work. Again, her presence ‘caused’ a huge excess, statistically highly significant. A yet more refined analysis compared the rate of deaths while she was at work in the sectors where she was working with the rate in the opposite sectors. What does this mean? The ward was large and spread over two long wings of one floor of a large building, ‘Blocco B’, probably built in the sixties. See Figures 4 and 5.

Between the two wings were central ‘supporting facilities’ and a main stairwell above the main entrance. Each wing consisted of many rooms (each room with several beds), with one long corridor through the whole building, see the floor plan in Figure 6. Sector A and B rooms were in one wing, first A and then B as you went down the corridor from the central part of the floor. Sector C and Sector D rooms were in the other wing, opposite to one another on each side of the corridor. Each nurse was usually detailed in her shifts to one sector, or occasionally to the two sectors in one wing. While working in one sector, a nurse could theoretically easily slip into a



Photo: Stefan Schwehofer

Figure 3 An IV drip.



Figure 4 The long building at the top: 'Block B' of Umberto I hospital, Lugo.



Figure 5 Sector B of 'Blocco B', seen from the North.

room in the adjacent sector. Anyway, the nurses often helped one another, so they often could be found in the 'wrong sector', but not often in the 'wrong wing'.

Tagliaro and Micciolo (in the sequel: TM) went on to look at the death rates while Daniela was at work in different periods. They noticed that it was higher in 2013 than in 2012, even higher in the first quarter of 2014, then — after Daniela had been fired — it was much, much less. They conjectured that she was killing more and more patients as time went by, till the killing stopped dead on her suspension and arrest.

TM certainly knew that in theory, other factors might be the cause of an increased death rate on Poggiali's shifts. They were proud of their innovative approach of relating each death which occurred while Daniela was at work to the question of whether it occurred in Daniela's wing or in the other. They wrote that in this way they had controlled for confounders, taking each death to provide its own 'control'. (Similarly in the case of Lucia de B., statistician Henk Elffers had come up with an innovative approach. In principle it was not a bad idea though all it showed was that nurses are different). TM did not control for any other confounding factors at all. In their explanation of their findings to the court they repeatedly stated categorically that the *association* they had found must be *causal*, and Daniela's presence was the cause. Add to this that their clumsy explanation of *p*-values might have misled lawyers, journalists and the public. In such a case, a *p*-value is the probability of what you see (more precisely, of *at least* what you

see), assuming pure chance. That is not the same as the probability that pure chance was the cause of what you see — the fallacy of the transposed conditional, also known as 'the prosecutor's fallacy'.

Exercise to the reader: when is this fallacy not a fallacy? Hint: revise your knowledge of *Bayes' rule*: posterior odds equals prior odds time likelihood ratio. See Figure 7.

We asked Tagliaro and Micciolo for the original Excel spreadsheets and for the 'R' scripts [8] they had used to process the data. They declined to give them to us, saying this would not be proper since they were confidential. We asked Daniela's lawyer to ask the court to ask for those computer files on our behalf. The court declined to satisfy our request. We were finally sent just the Excel files by the hospital administration, a week before we were called to give evidence. Fortunately, with a combination of OCR and a lot of painstaking handwork, a wealthy friend of Daniela's lawyer had already managed to help us get the data files reconstructed. We performed a lot of analyses with the help of a succession of students because extracting what we needed from those spread-

$$\frac{\Pr(H_p | \text{Evidence})}{\Pr(H_d | \text{Evidence})} = \frac{\Pr(\text{Evidence} | H_p)}{\Pr(\text{Evidence} | H_d)} \times \frac{\Pr(H_p)}{\Pr(H_d)}$$

Posterior Odds Likelihood Ratio Prior Odds

Figure 7 Bayes rule in odds form. *p* and *d* stand for 'prosecution' and 'defence' respectively, *H* stands for 'Hypothesis'.



Figure 6 Plan of ward (from TM's report).

sheets was an extraordinarily challenging issue. One kept finding anomalies that had to be fixed in one way or another. Even when we had ‘clean’ spreadsheets, it still was a mess.

Garbage in, garbage out?

Next, we started looking for confounding factors that might explain the difference between Daniela and her colleagues, which certainly was striking and real. But was it perhaps entirely innocent?

First of all, simple histograms showed that death rates on that ward varied strongly by month, with big peaks in June and again in December (see Figure 8). That is what one should expect. The humid heat and air pollution in the summer; or the damp and cold and the air pollution in the winter, exacerbated by winter flu epidemics. Perhaps Daniela worked more at bad times than at good times? No. It was clear that sectors A+B were different from C+D. Death rates were different but also the number of beds in each wing was different. Perhaps Daniela was allocated more often to ‘the more difficult’ sections? It was not so clear. Tagliaro and Micciolo computed death rates for the whole ward, or for each wing of the ward, but never took account of the number of patients in each wing nor of the severity of their illnesses.

Most interesting of all was what we found when we looked at the hour of the time of death of patients who died, and the minute of the time of death of patients who died. Patients tended to die at times which were whole hours, ‘half past’ was also quite popular. There was however also a huge peak of deaths between midnight and five minutes past midnight! There were fewer deaths in a couple of hours soon after lunch time. There were large peaks of deaths around the time of handover between shifts: 7:00 in the morning, 2:00 in the afternoon, 9:00 in the evening. The death rate is higher in the morning than in the afternoon and higher in the afternoon than at night. When you’re dying (but not in intensive care, when it is very difficult to die at all) you do not die in your sleep at night. You die in the early morning as your vital organs

start waking up for the day. Now, also not surprisingly, the number of nurses on a ward is largest in the morning when there is a huge amount of work to do; it’s much less in the afternoon and evening; and it’s even less at night. This means that a full-time nurse typically spends more time in the hospital during morning shifts than during afternoon shifts, and more time during afternoon shifts than during night shifts. The death rate shows the same pattern. Therefore, for every typical full-time nurse, the death rate while they are at work tends to be higher than when they are not at work!

Nurses aren’t authorized to officially register times of death. Only a doctor is authorized to do that. He or she is supposed to write down the time at which they have determined the patient is no longer alive. It seems that they often round that time to whole or half hours. The peak just after midnight is hard to explain. The *date* of death has enormous financial and legal consequences. The peak suggests that those deaths may have occurred anywhere in a huge time window. Whether or not doctors come to the wards on the dot at midnight and fill in forms for any patients who have died in the few hours before is hard to believe.

What is now clear is that it is mainly around the hand-over between shifts that deaths get ‘processed’. Quite a few times of death are so hard to know that they are shunted to five minutes past midnight; many others are located in the hand-over period but might well have occurred earlier.

Some nurses tend to work longer shifts than others. Some conscientiously clock in as early as they are allowed, before their shift starts, and clock out as late as they can after their shift ends. Daniela was such a nurse. Her shifts were indeed statistically significantly longer than those of any of her colleagues. She very often stayed on duty several hours after the official end of the official ten-minute overlap between shifts. There was often a lot to do — one can imagine often involving taking care of the recently deceased. Not the nicest part of the job. Daniela was well known to be a rather conscientious and very hard worker, with a fiery temper, known to play pranks on colleagues or to loudly disagree with doctors for whom she had a healthy disrespect.

Incidentally, the rate of admissions to *Umberto I* hospital tumbled down after the news broke of a serial killer — and the news broke the day after the last day the serial killer was at work, together with the publication of the lurid ‘selfie’. The rate of deaths was slowly increasing over the two years up to then, as was in fact also the rate of admissions and the occupancy of the ward. A hospital getting slowly more stressed? Taking on more work?

No correlation without causation

If one finds a correlation between X and Y , it is a sound principle to suppose that it has a causal explanation. Maybe X causes Y , maybe Y causes X ,... and maybe W causes both X and Y , or maybe X and Y both cause Z and there has been a selection on the basis of Z . In the case of Lucia de B., her association between inexplicable incidents and her presence on the ward was caused by her, since the definition of ‘unexpected and inexplicable incident’ included her being there. She was already known to be a weird person and it was already clear that there were more deaths than usual on her ward. The actual reason for that was a change of hospital policy, moving patients faster from intensive care to medium care so that they could die at home, rather than in the hospital. If she was not present, then the medical experts always could come

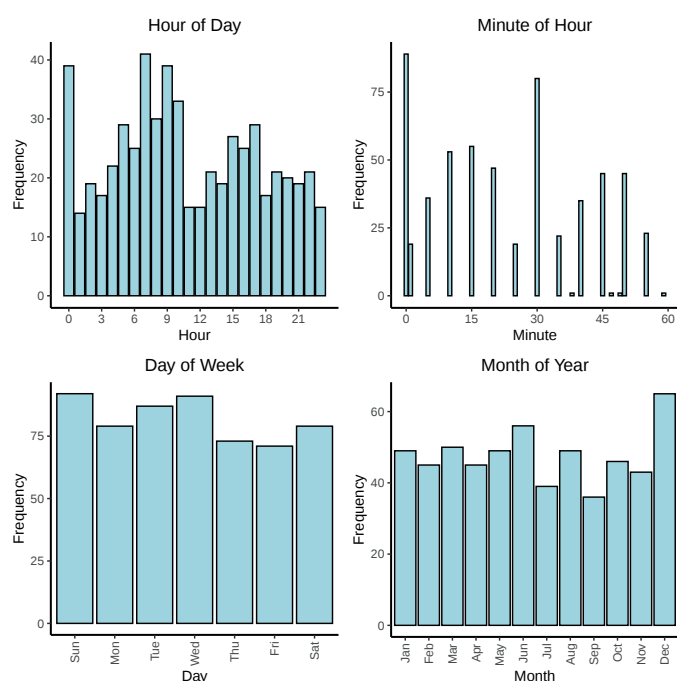


Figure 8 Minute, hour, weekday, month of deaths.

up with an explanation for why that death though perhaps a bit surprising at that moment, was expected to occur soon anyway. But if Lucia was there then they were inclined to believe in foul play because after all there were so many incidents in her shifts.

Julia and I are certain that the difference between Daniela's death rates and those of other nurses is to a huge extent explainable by the anomalies in the data which we had discovered and by her long working hours.

Some residual difference could be due to the fact that a conscientious nurse actually notices when patients have died, while a lazy nurse keeps a low profile and leaves it to her colleagues to notice, at hand-over. We have been busy fitting sophisticated regression models to the data but this work will be reported in a specialist journal. It does not tell us more than what I have already said. Daniela is different from the other nurses. All the nurses are different. She is extreme in a number of ways: most hours worked, longest shifts worked. We have no idea how the hospital allocated nurses to sectors and patients to sectors. We probably won't get to know the answer to that, ever. The medical world does not put out its dirty washing for everyone to see.

We wrote a report and gave evidence in person in Ravenna in early 2015. I did not have time to see the wonderful Byzantine mosaics though I was treated to some wonderful meals. I think my department paid for my air ticket. Julia and I worked '*pro deo*'. In our opinion, we totally shredded the statistical work of Tagliaro and Micciolo. The court however did not agree. "The statistical experts for the defence only offered a theoretical discourse while those of the prosecution had scientifically established hard facts." In retrospect, we should have used stronger language in our report. TM stated that they had definitively proven that *Daniela's presence caused* ninety or so extra deaths. They stated that this number could definitely not be explained as a chance fluctuation. They stated that, of course, the statistics did not *prove* that she had deliberately *murdered* those patients. We, on the other hand, had used careful scientific language. One begins to understand how it is that experts like Tagliaro and Micciolo are in such high demand by public prosecutors.

There was also toxicological evidence concerning one of the patients and involving K^+Cl^- , but we were not involved in that. There was also the 'selfie', there was character evidence. There were allegations of thefts of patients' personal jewellery. It all added up. Daniela was convicted of just one murder. The statistical evidence provided her motive: she just loved killing people, especially people she didn't like. No doubt a forensic psychologist also explained how her personality fitted so well to the actions she was alleged to have done.

Rapidly, the public prosecution started another case based largely on the same or similar evidence but now concerning another patient, with whom Daniela had had a shouting match, five years earlier. In fact, this activity was probably triggered by families of other patients starting civil cases against the hospital. It would also clearly be in the interest of the hospital authorities to get new criminal proceedings against Daniela started. However, Daniela's lawyers appealed against her first conviction. It was successfully overturned. But then the court of cassation overturned the acquittal. Meantime, the second case led to a conviction, then acquittal on appeal, then cassation. All this time Daniela was in jail. Cassations of cassations meant that Daniela had to be tried again, by yet an-

other appeal court, for the two alleged murders. Julia and I and her young colleague Francesco Dotto got to work again, improving our arguments and our graphics and our formulations of our findings.

Statistical modelling of a problem in toxicology

At some point, triggered by some discussions with the defence experts on toxicology and pathology, Julia took a glance at Tagliaro's quite separate report on the toxicological evidence. This led to a breakthrough, as I will now explain.

Tagliaro knew the post-mortem 'vitreous humour' potassium concentration of the last patient, a woman who had died on Daniela's last day. That death had somehow surprised the hospital doctors, or rather, as it later transpired, it didn't surprise them at all: they had already for three months been looking at the death rates while Daniela was on duty and essentially building up a dossier against her, just waiting for a suitable 'last straw'! Moreover, they already had their minds on K^+Cl^- , since some had gone missing and then turned up in the wrong place. Finally, Daniela had complained to her colleagues about the really irritating behaviour of that last patient, 73-year-old Rosa Calderoni.

'Vitreous humour' is the transparent, colourless, gelatinous mass which fills your eyeballs. While you are alive it has a relatively low concentration of potassium. After death, cell walls break down, and potassium concentration throughout the body equalises. Tagliaro had published papers in which he studied the hourly rate of increase in the concentration, using measurements on the bodies of persons who had died at a known time of causes unrelated to potassium chloride poisoning. He even had some fresh corpses on which he could make repeated measurements. His motivation was to use this concentration as a tool to determine the PMI (post-mortem interval) in cases when we have a body and a post-mortem examination but no time of death. In [7] (without Micciolo's aid) he did a regression analysis, plotting a straight line through a cloud of points (y = concentration, x = time since death). He had about sixty observations, mostly men, mostly rather young. In a second paper [6], now with Micciolo, he fitted a parabola, and moreover noted that there was an effect of age and of sex. The authors also observed the huge variation around that fitted straight line and concluded that the method was not reliable enough for use in determining the PMI. But this did not deter Tagliaro, when writing his toxicological report on Rosa Calderoni! He knew the potassium concentration at the time of post-mortem, he knew exactly when she died, he had a number for the natural increase per hour after death from his first, linear, regression model. With this, he calculated the concentration at death. Lo and behold: it was a concentration which would have been fatal. He had proved that she had died of potassium chloride poisoning.

Julia and Francesco used the model of the second paper and found out that if you would assume a normal concentration at the time of death (see Figure 9), and take account of the variability of the measurements and of the uncertainty in the value of the slope, then the concentration observed at the time of post mortem was maybe above average, but not surprisingly large at all.

Daniela Poggiali became a free woman. I wish her a big compensation and a long and happy life. She's quite a character. Aside from the 'couleur locale' of an Italian case, this case had incredibly much similarity with the case of Lucia de Berk. It has many similarities with quite a few other contested serial killer nurse cases,

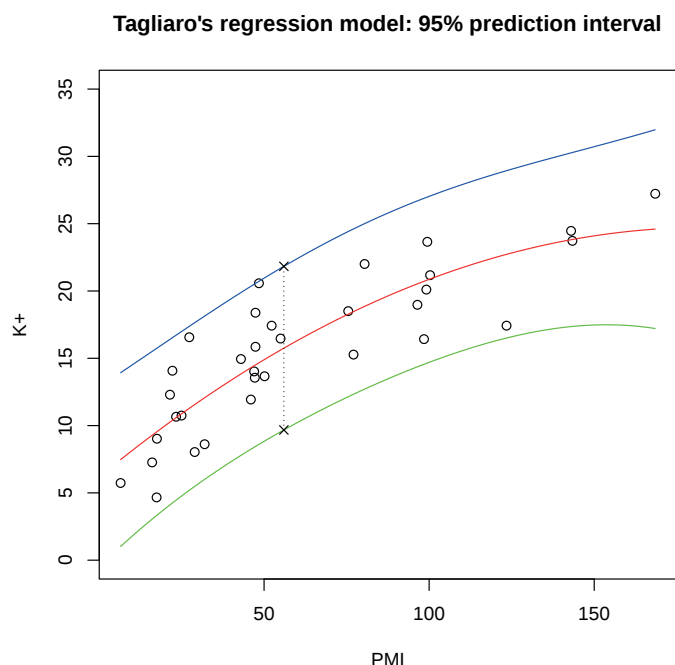


Figure 9 Prediction of vitreous humour K^+ concentration 56 hours after death without K^+ poisoning

in various countries. According to a Netflix series, in which a whole episode is devoted to Daniela, these horrific cases occur all the time. They are studied by criminologists and forensic psychologists who have compiled a list of 'red flags' intended to help warn hospital authorities. The scientific term here is 'health care serial killer', or HCSK. One of the HCSK red flags is that you have psychiatric problems. Another is that your colleagues think you are really weird. Especially when your colleagues call you an angel of death, that's a major red flag. The list goes on. These lists are developed in scientific publications in important mainstream journals, and the results are presented in textbooks used in university criminology teaching programs. Of course, you can only scientifically study convicted HCSKs. Your sources of data are newspaper reports, judges' summings up, the prosecution's final summary of the case. It is clear that these red flags are the things that convince judges and jurors to deliver a guilty verdict. These are the features that will first make you a suspect, which police investigators will look for, and which will convince the court and the public of your guilt. Amusingly, one of the side effects of the case of Lucia de Berk was contributing a number of entries to this list, for instance the

Stephen King horror murder novels she had at home and which were even alleged to have been stolen from the library. Her conviction for theft of several items still stands. As does Daniela's: this means that Daniela is not eligible for compensation. In neither case was there any real proof of thefts.

Embarrassingly, the case of Lucia de B. case had to be removed from the collections of 'known' HCSK cases after 2011, and the criminologists and forensic psychologists also now mention that statistical evidence of many deaths during the shifts of a nurse is not actually a very good red flag. They have learnt something, too. However, their lists still include many disputed cases.

The moral of the case

Interesting is also the incidence of these cases: less than one in a million nurses killing multiple patients per year, according to these researchers [3,9]. These are researchers who have the phenomenon of HCSKs as their life work, giving them opportunities to write lurid books on serial murder, appear in TV panels and TV documentaries explaining the terrible psychology of these modern-day witches, and to take the stand as prosecution witnesses. Now, that 'base rate' is actually rather important, even if only known very roughly. It means that such crimes are very, very unusual. In the Netherlands, one might expect a handful of cases per century; maybe on average one hundred deaths in a century. There are actually only about one hundred murders altogether in the Netherlands per year. On the other hand, more than *one thousand deaths* every year are due to medical errors. That means that evidence against a nurse suspected of being a HCSK should be very strong indeed before it could convince a rational person that they have a new HCSK on their hands. Lawyers, judges, journalists and the public are unfortunately perhaps not rational persons. They are certainly not good with probability, and not good with Bayes' rule. (It is not allowed to be used in a UK criminal court, because judges have ruled that jurors cannot possibly understand it).

I am still working on one UK case, Ben Geen [2]. I believe it is yet another example of a typical innocent HCSK scare in a failing hospital leading to a typical unsafe conviction based largely on the usual red flags and a little bit of bad luck. At least, I see no reason whatsoever to suppose that Ben Geen was guilty of the crimes for which he is sitting out a life sentence. Meanwhile, a new case is starting up in the UK: *Lucy Letby*! I sincerely hope not to be involved with that one.

Time for a new generation of nosy statisticians to do some hard work.

References

- 1 Francesco Dotto, Richard D. Gill and Julia Mortera, Statistical analyses in the case of an Italian nurse accused of murdering patients, submitted to *Law, Probability, Risk* (2022), https://gill1109.com/wp-content/uploads/2022/02/paper_dp.pdf.
- 2 Norman Fenton, Richard D. Gill and David Lagnado, Statistical issues in Serial Killer Nurse cases (2021), arXiv:2106.00758.
- 3 Alexander R.W. Forrest, Nurses who systematically harm their patients, *Medical Law International* 1(4) (1995), 411–421.
- 4 Richard D. Gill, An Italian CSI drama: social media, a broken legal system, and Micky Mouse statistics, blog, <https://gill1109.com>.
- 5 Richard D. Gill, Piet Groeneboom and Peter de Jong, Elementary statistics on trial – the case of Lucia de Berk, *CHANCE* 31(4) (2018), 9–15.
- 6 Covadonga Palacio, Rossella Gottardo, Vito Cirielli, Giacomo Musile, Yvane Agard, Federica Bortolotti and Franco Tagliaro, Simultaneous analysis of potassium and ammonium ions in the vitreous humour by capillary electrophoresis and their integrated use to infer the post mortem interval (PMI), *Medicine, Science and the Law* 61(1 suppl) (2021), 96–104.
- 7 Nicola Pigaiani, Anna Bertaso, Elio Franco De Palo, Federica Bortolotti and Franco Tagliaro, Vitreous humor endogenous compounds analysis for post-mortem forensic investigation, *Forensic Science International* 310 (2020), 110235.
- 8 R Core Team, *R: A Language and Environment for Statistical Computing*, R Foundation for Statistical Computing, 2013.
- 9 Elizabeth Yardley and David Wilson, In search of the 'angels of death': Conceptualising the contemporary nurse healthcare serial killer, *Journal of Investigative Psychology and Offender Profiling* 13(1) (2016), 39–55.

Rainer Kaenders

Hausdorff Center for Mathematics
Universität Bonn
r.kaenders@uni-bonn.de

Onderwijs

Meetkunde van de stang: rechte lijn en koppelkrommen

De *Vakantiecursus voor wiskundeleraren* is een initiatief van de Nederlandse Vereniging van Wiskundeleraren en wordt georganiseerd door het Platform Wiskunde Nederland. Sinds 1946 wordt hij jaarlijks gegeven op het Centrum Wiskunde en Informatica te Amsterdam, en later ook aan de Technische Universiteit Eindhoven, vanaf 2020 bij het Academisch Genootschap Eindhoven. Rainer Kaenders, naast Teun Koetsier en Theo Jansen docent van de 75ste vakantiecursus, probeert in een tweeledige bijdrage de rijkdom van de elementaire meetkunde uit de doeken te doen die zich bij de studie van stangenconstructies ontplooit.

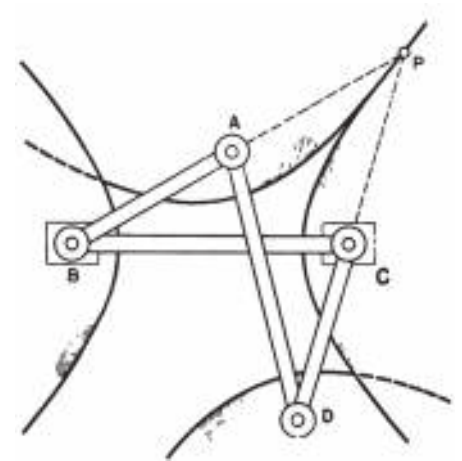
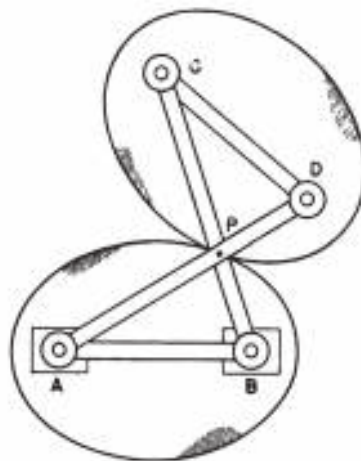
Hoe teken je een rechte lijn?

Hoe teken je een rechte lijn? Een cirkel is makkelijk met een touw of een stang te tekenen. Maar een lijn? Daarvoor heb je een liniaal nodig, maar hoe ga je die weer construeren? In deze bijdrage zal het gebied van stangenmeetkunde en de bijbehorende kinematica aan de hand van basismechanismen worden voorgesteld. Daarbij leren we beroemde schijnconstructies en echte oplossingen van kinematische problemen kennen. De constructie van een rechte lijn, een *rechtgeleiding*, werd in het jaar 1864 door de Franse officier Charles Peaucellier (1832–1919) [13, 14] en onafhankelijk in 1871 door Lipman Lipkin (1840–1876), een Litouws-Joodse student van Pafnuty Chebyshev (1821–1894) in Sint-Petersburg gevonden en in een Belgisch tijdschrift gepubliceerd [11] (vergelijk ook p. 424 in [3]). Ook zijn er twee oplossingen van Harry Hart (1848–1920) uit 1874 en er is een veralgemenisering, de *quadruplanar-inversor* uit 1875 van James Joseph Sylvester (1814–1897). *How To*

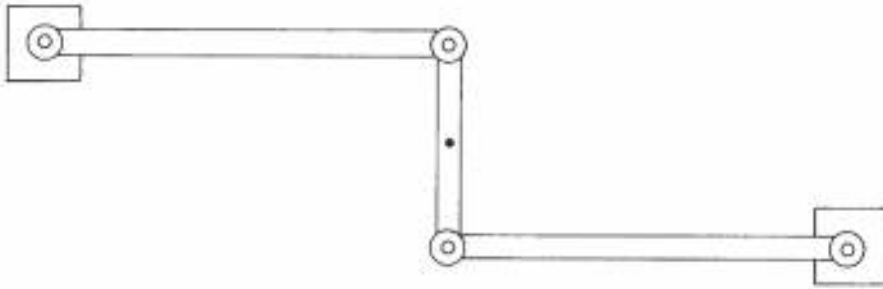
Draw A Straight Line: A Lecture On Linkages is de titel van een beroemd boek dat Alfred Bray Kempe (1849–1922) in het jaar 1877 publiceerde [10]. Het is tot de dag van vandaag een prachtig boek, waarin Kempe zijn fascinatie voor stangenconstructies met de lezer deelt en daarbij de klassieke basisconstructies laat zien.

Wat is een stangenconstructie?

Onder een *stangenconstructie* verstaan we een eindig aantal stangen die door scharnieren aan elkaar zijn verbonden. Soms zetten we één van de stangen vast in het vlak en laten alle stangen ten opzichte van dat vlak bewegen. Af en toe nemen we de stangenconstructie ook in de hand en beschouwen ze als zodanig. Bij een dergelijke constructie verbinden we een pen met een vaste plek op onze stangenconstructie en terwijl wij die constructie in het vlak bewegen, tekent die pen een figuur. Dat kan een deel van het vlak, een kromme of een verzameling van enkele punten zijn.



Figuur 1 Constructies voor ellips en hyperbool door schuivende snijpunten uit het boek van Robert C. Yates [19].



Figuur 2 James Watts pseudo-oplossing voor het rechte lijn probleem: 'Watt's parallel motion' uit het boek van Kempe.

Sommige constructies zijn wel stangenconstructies maar de daarmee vervaardigde tekeningen van krommen zijn niet door stangenconstructies getekende krommen in de strikte zin die we hier willen hanteren. Bijvoorbeeld de constructies [19, p.183] van Robert C. Yates in Figuur 1 bestaan beiden uit een *contra-parallelogram*, zoals Kempe dit noemde. Soms vindt men ook de benaming *anti-parallelogram*, of minder formeel *vliinderconstructie*, hiervoor. De mechanismen van Yates zijn wel uit te breiden met een tweetal onderling scharijende elementen op de snijdende stangen schuivende elementen waar de pen aan kan worden vastgemaakt. Het snijpunt P van AD en BC bij de constructie links tekent een ellips en het snijpunt P van BA en DC bij de constructie rechts tekent een hyperbool omdat $|AP| + |BP|$, respectievelijk $|PB| - |PC|$ telkens bij de beweging constant blijven. Je kunt ook makkelijk inzien, dat als AB in het plaatje links en BC rechts vast aan het vlak verbonden zijn, er een bewegelijke ellips rond een vaste draait of twee hyperbolen, een vaste en een bewegelijke, op elkaar afrollen. Het punt P van de pen is echter niet vast met een stang van de constructie verbonden — daarom is de kromme niet door een stangenconstructie getekend in de boven geformuleerde zin.

Tevergeefse pogingen voor een rechte lijn
Volgens de legende was het de befaamde James Watt (1736–1819) die als eerste het probleem opwierp om met een stangenconstructie een rechte lijn te tekenen. Dit probleem bleek lastiger dan verwacht. Vóór dat de oplossing van Peaucellier en Lipkin er was, bestonden er al een aantal pseudo-oplossingen van het probleem. Een van deze pseudo-oplossingen was de stangenconstructie van James Watt zelf (zie Figuur 2), die ook in de bijdrage van Teun Koetsier bij de constructie van de stoommachine een rol ging spelen.

Een ander voorbeeld van een dergelijk mechanisme is *Roberts' linkage*, vernoemd naar Richard Roberts (1789–1864), zie Figuur 3. De constructie bestaat uit een stangenconstructie $ABSR$, waarbij A en B vast aan het vlak verbonden zijn en er een vaste driehoek $\triangle PSR$ aan RS is vastgemaakt en star met RS meebeweegt. In de constructie van Roberts is $|AB| = 2|RS|$ en $|AR| = |RP| = |SP| = |SB|$. Natuurlijk is het mogelijk drie punten op de door het punt P getekende kromme te berekenen en vast te stellen dat ze niet op een lijn liggen. Meetkundig kunnen we dit ook door een argument inzien. Stel dat P op de lijn AB zou liggen. Dan tekenen we de symmetrieassen MR en NS van de altijd gelijkbe-

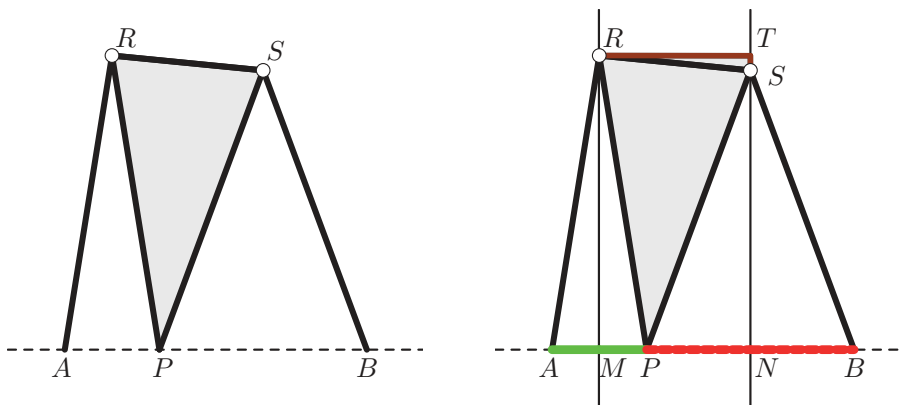
nige driehoeken APR en PBS en trekken de loodlijn door R af op lijn NS met snijpunt T . We zien dat $|MN| = |RT|$ en daarmee bij de rechthoekige driehoek $\triangle RST$ de korte zijde $\frac{1}{2}|AB| = |MN| = |RT|$ gelijk aan de lange zijde $|RS|$ zou moeten zijn, wat de aanname tegenspreekt dat A , P en B op een lijn liggen.

Andere pseudo-oplossingen van het rechte lijnprobleem komen van Chebyshev. Hij studeerde en ontwikkelde 39 jaar lang zulke bijna-rechtere lijnconstructies. Wij zullen er nu één van leren kennen, die in Figuur 4 te zien is, en later een tweede, die 'verwant' is aan deze. Ook wist hij de optimale afmeting voor een bijna-rechtgeleiding van deze constructie te bepalen. (Zie de berekeningen met 'Tschebyschew-systemen' in [17, pp.203–209].)

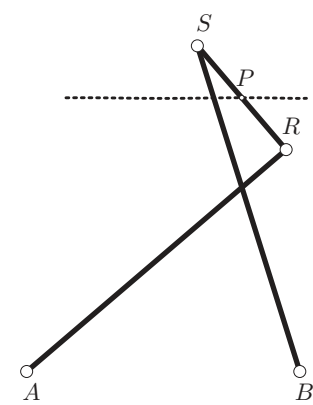
Een rechte lijn tekenen

Nu komen we aan Charles Nicolas Peaucellier en Yom Tov Lipman Lipkin en hun Peaucellier–Lipkin-stangenconstructie toe. Deze maakt gebruik van een basisconstructie, waarmee de spiegeling in een cirkel als volgt kan worden gerealiseerd. We nemen een stangenvierzijde $PPFE$ met vier even lange stangen van lengte $b := |PE| = |EP'| = |P'F| = |FP|$ (een stangenruit) en verbinden twee tegenoverliggende hoekpunten E en F met twee even lange stangen van lengte $a := |OE|$, die langer zijn dan de stangen van de stangenruit. De andere einden van deze twee stangen fixeren we in een vast punt O in het vlak (Figuur 5).

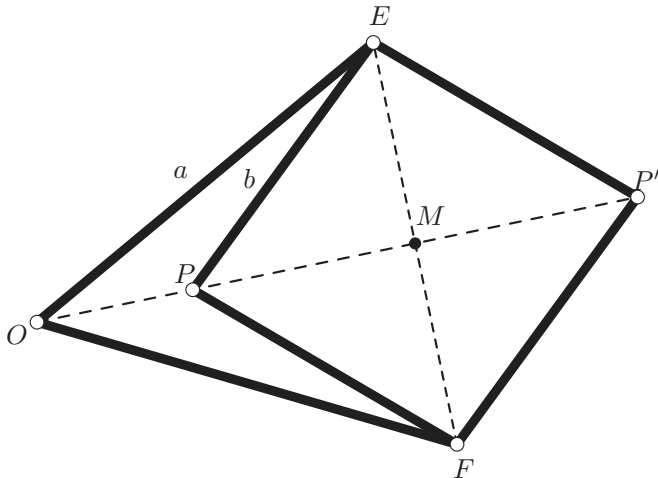
De positie van punt P bepaalt de positie van P' . De bewering is nu dat $|OP| \cdot |OP'|$ voor elke positie van P een constant getal is. Dat betekent dat P en P' elkaars gespiegelden in een zekere cirkel zijn. Een dergelijke stangenconstructie die in staat is vanuit een vast punt O voor elk punt P



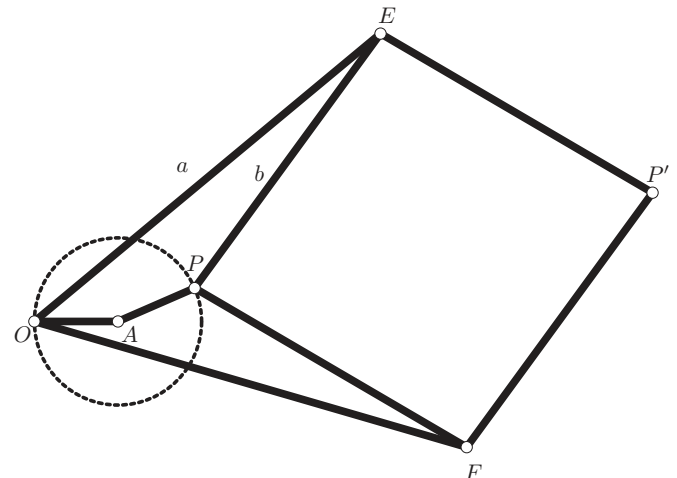
Figuur 3 Stangenconstructie van Richard Roberts.



Figuur 4 Stangenconstructie van Pafnuty Chebyshev.



Figuur 5 Een Peaucellier-Lipkin-inversor.



Figuur 6 Een Peaucellier-Lipkin-stangenconstructie voor een rechte lijn.

een punt P' aan te geven zodat $|OP| \cdot |OP'|$ constant is, heet een *inversor*. Bij een inversie in een cirkel rond O worden cirkels door O op rechte lijnen afgebeeld. De straal van de cirkel waarin wordt gespiegeld ligt in ons geval echter niet voor het oprapen. Hiervoor gebruiken we het volgende eenvoudige maar dikwijls handige lemma.

Lemma 1. Gegeven twee punten F_1 en F_2 en een derde punt L op de rechte lijn F_1F_2 . Wij noemen m de op F_1F_2 loodrechte lijn door L . Dan geldt voor een punt P :

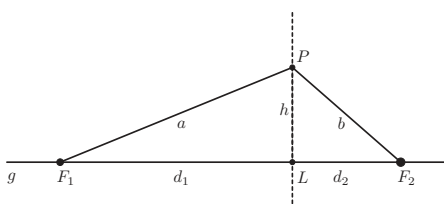
P ligt op m

$$\Leftrightarrow |PF_1|^2 - |PF_2|^2 = |LF_1|^2 - |LF_2|^2.$$

Bewijs. Wij noemen $a := |PF_1|$ en $b := |PF_2|$ en $d_1 := |LF_1|$ en $d_2 := |LF_2|$, zie Figuur 7. Er geldt: $a^2 = d_1^2 + h^2$ en $b^2 = d_2^2 + h^2$ waaruit volgt $a^2 - b^2 = d_1^2 - d_2^2$. $\square$

Kempe noemt de vorm $OFPE$ een *pijlpunt* en de vorm $OFP'E$ een *vlieger* en concludeert dat $|OP| \cdot |OP'|$ constant en gelijk aan $|OF|^2 - |PF|^2$ is, oftewel dat het volgende geldt.

Stelling 1. Bij de Peaucellier-Lipkin-inversor zijn de punten P en P' elkaars *gespiegelden* aan de cirkel met straal $\sqrt{a^2 - b^2}$ rond het punt O .



Figuur 7

Bewijs. Noem $r := |OP|$ en $R := |OP'|$. Het boven aangetoonde Lemma 1 levert:

$$a^2 - b^2 = \left(\frac{R+r}{2}\right)^2 - \left(\frac{R-r}{2}\right)^2 = R \cdot r. \quad \square$$

De cirkelinversie aan de cirkel rond O met de straal $\sqrt{a^2 - b^2}$ beeldt een cirkel, die door O verloopt, af op een rechte lijn. Een dergelijke cirkel kunnen we maken als we het punt P dwingen op een vaste cirkel door O met straal a en met een middelpunt A te lopen. En dat is precies wat het Peaucellier-Lipkin-mechanisme doet.

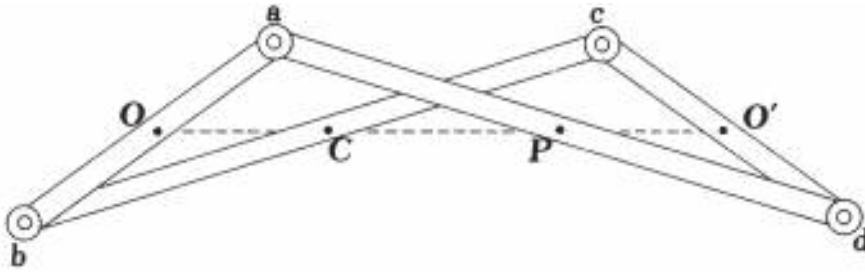
Stelling 2. Bij de Peaucellier-Lipkin-constructie doorloopt het punt P een recht lijnstuk.

Opmerking: De Eindhovense kunstenaar Ivo Schoofs heeft ter gelegenheid van het *Light art festival GLOW Eindhoven* een groot beeld gecreëerd, waarin de Peaucellier-Lipkin-stangenconstructie ingebouwd is. Het gaat om het beeld 'Just because you are a character, doesn't mean you have character', 2016, 22 m x 15 m x 16 m, 6600 kg (zie Figuur 8). Op ivoschoofs.com tref je een leuke video aan waarin hij vertelt hoe het beeld is ontstaan. Bij de vakantiecurus in Eindhoven was hij ook aanwezig.

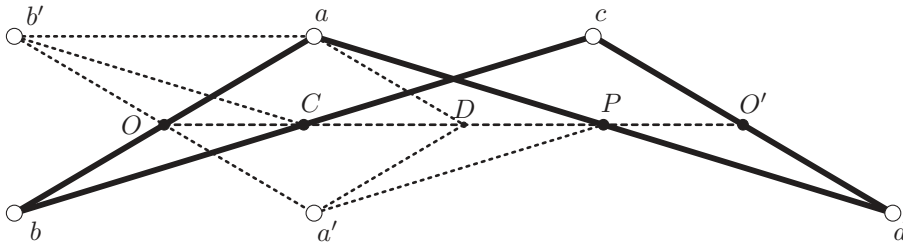
Een alternatieve aanpak voor de constructie van een rechte lijn is de naar Harry Hart (1848–1920) vernoemde *Hart inversor* en gevonden in het jaar 1874 [6,7]. Hij



Figuur 8 Kunstwerk 'Just because you are a character, doesn't mean you have character' van Ivo Schoofs.



Figuur 9 De inversor van Harry Hart, uit *How To Draw a Straight Line?* [10].



Figuur 10

heeft maar vier stangen in plaats van zes bij de Peaucellier–Lipkin-inversor. Wij ontdekken ook hier een *contra-parallelogram*. Voor het volgende nemen we de notatie over uit Figuur 9.

Stelling 3. *Bij de Hart inversor zijn de punten C en P elkaars gespiegelden aan de cirkel met straal $\sqrt{|Pa|^2 - |Oa|^2}$ rond het punt O .*

Bewijs. Zie Figuur 10. De driehoeken $\triangle bcd$ en $\triangle bad$ zijn congruent en hebben dus even grote hoeken en dezelfde hoogte op bd . Bovendien hebben ze dezelfde middenparallel evenwijdig aan bd . De punten $OCPO'$ liggen dus op een lijn s . Als we driehoek $\triangle OPa$ en de driehoek $\triangle OCb$ in s spiegelen, zo dat a op een punt a' en b op een punt b' terecht komt, dan zien we — net als bij Peaucellier–Lipkin — een pijlpunt $bCb'O$ en een vlieger $Oa'Pa$ ontstaan. Nu schuiven we het pijlpunt $bCb'O$ naar rechts, zodat C op P terecht komt.

Wij hebben dus dezelfde situatie als bij Peaucellier–Lipkin. Het is

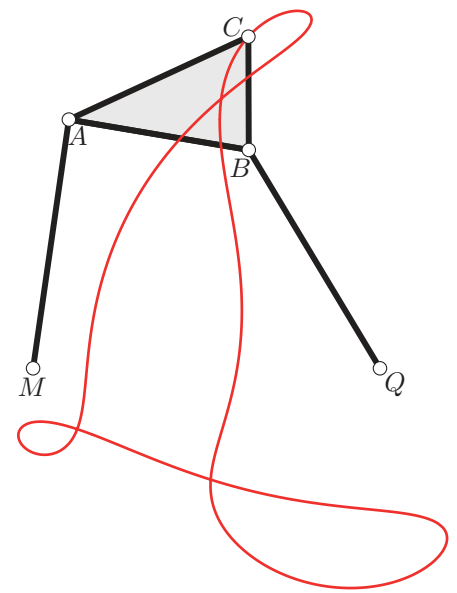
$$|PD| \cdot |PO| = |OC| \cdot |OP| = |Pa|^2 - |Oa|^2.$$

Deze term rechts is constant en daarmee is aangetoond, dat de constructie van Hart een inversor is. $\square$

Klassieke meetkunde van koppelkrommen

Alle voorgestelde bijna-rechteleijnoplossingen van Watt, Chebyshev en Roberts zijn voorbeelden van zogenaamde *koppelkrommen*. Een dergelijke constructie

bestaat uit een stangenvierzijde $MQBA$, waarbij de pivotpunten M en Q vast aan het vlak verbonden zijn en er een vaste driehoek $\triangle ABC$ aan AB is vastgemaakt en star met AB meebeweegt. (Het Franse woord ‘pivot’ betekent zoets als ‘draaipunt’. Zie de punten M en Q in Figuur 11.) Deze driehoek kan ook ontfaard zijn, dat wil zeggen dat C ook op de lijn AB mag liggen. De aan het vlak verbonden stang MQ heet *pivotstang*, de stang AB noemen we *koppelstang* en de door punt C getekende kromme, dat wil zeggen de meetkundige



Figuur 11 Een voorbeeld van een koppelkromme.

plaats van alle punten in het vlak, die door C bereikbaar zijn, heet *koppelkromme* met stangenvierzijde $MQBA$, pivotstang MQ en vaste driehoek $\triangle ABC$, zie Figuur 11. Al met al spreken we van een *koppelmechanisme*.

Koppelkrommen en pivotcirkel

Nu bestuderen we deze grote klasse van koppelkrommen. In toepassingen spelen deze krommen een belangrijke rol. In Figuur 12 zie je een voorbeeld van een lemniscaatkraan (uit [5]), een voorbeeld van een koppelmechanisme (meer informatie is te vin-

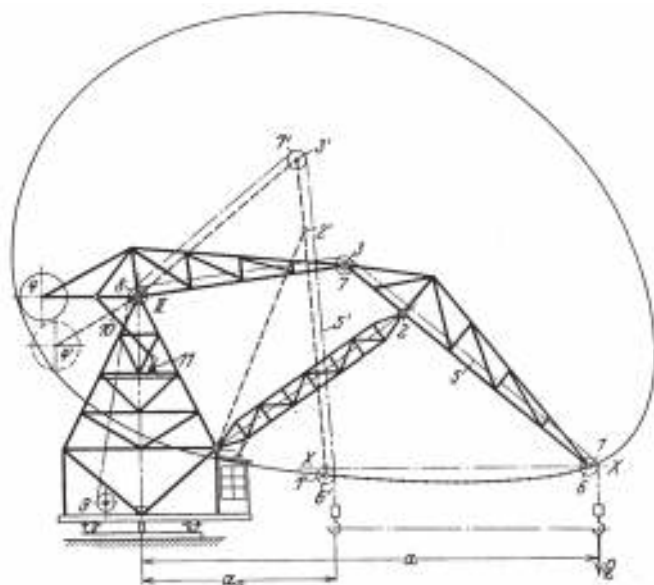
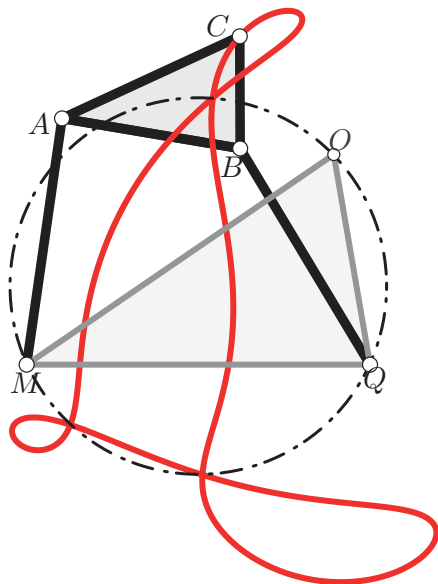


Abb. 882. Einziehdkraan mit Lemniskatenlenker. (Demag.)
1–2–3 Ausleger; 1–2, 11–3 Lenker; 4 Auslegergegendgewicht; 5 Hubseil;
6 Auslegerrolle; 7–8 Umlenkrollen zu 5; 9 Hubtrommel; 10 Zugstangen, den
angetriebenen Lenker mit den Kurbeln 12 des Einziehwerks verbindend;
1–1' benutzt Stütz der Lemniskate.

Figuur 12 Kraan met koppelkromme (lemniscaatsturing).



Figuur 13 Een koppelkromme en haar pivotcirkel.

den in [9]). In de jaren vijftig vervaardigden Hrones en Nelson een indrukwekkende atlas met ongeveer 10.000 koppelkrommen: een waar monnikenwerk [8]. (Koppelkrommen zijn delen van algebraïsche krommen van graad zes (zie [2, pp.152–154]), dat wil zeggen dat er een veelterm $\Phi(x,y)$ in twee variabelen van graad zes bestaat, zo dat alle punten $P = (x,y)$ op de koppelkromme voldoen aan $\Phi(x,y) = 0$. Wellicht is dit interessante informatie, maar het speelt voor ons hier op het moment verder geen rol.)

Een van de opmerkelijke eigenschappen van koppelkrommen is de ligging van hun dubbelpunten, zo die bestaan. Hiervoor kies je bij een gegeven koppelkromme een punt O zodat de driehoeken $\triangle MQO$ en $\triangle ABC$ gelijkvormig zijn. De omgeschreven

cirkel van $\triangle MQO$ heet de *pivotcirkel* van de koppelkrommenconstructie. Zie Figuur 13. In het boek van A.S. Hall [4] en vergelijkbare werken vinden we de stelling:

Stelling 4. *Bij een koppelkromme liggen alle dubbelpunten op de pivotcirkel en bij elk snijpunt van de kromme met de pivotcirkel hoort een dubbelpunt.*

Bewijs. Zie Figuur 14. Stel dat er een dubbelpunt op de koppelkromme ligt. Dan zijn er twee posities van de driehoek aan de koppelstang: $\triangle ABC$ en $\triangle A'B'C'$ waarbij $C = C'$. Het vaste punt M moet nu ergens op de deellijn liggen van $\angle ACA'$, omdat MA oftewel MA' mogelijke posities van dezelfde stang zijn. Evenzo moet Q op de deellijn liggen van $\angle BCB'$. Hieruit volgt dat $\angle MCQ$ óf gelijk is aan $\angle ACB$ óf aan het supplement $180^\circ - \angle ACB$. Als wij nu bij gegeven M en Q kijken naar de meetkundige plaats van alle punten S waarvoor $\angle MCQ$ óf gelijk is aan $\angle ACB$ óf aan het supplement van $\angle ACB$, dan vinden wij — als gevolg van de stelling over de omtrekshoek — de pivotcirkel. Deze constructie kan moeiteloos worden omgedraaid om te bewijzen dat bij een punt van de koppelkromme op de pivotcirkel twee verschillende driehoeken en daarmee een dubbelpunt behoort. $\square$

Panto- en plagiografen

Om koppelkrommen nog beter te begrijpen, kijken we naar twee basisconstructies. De eerste daarvan is de sinds het begin van de zeventiende eeuw bekende *pantograaf* [15]. Het is een gereedschap om tekeningen uit te vergroten, dat bestaat uit een parallellogram $PABC$, waarbij de zijden CB en AB

op een dergelijke manier verlengd zijn dat minstens in één stand O , P en P' op een lijn liggen. Het mechanisme wordt met het punt O aan het vlak verbonden (Figuur 16).

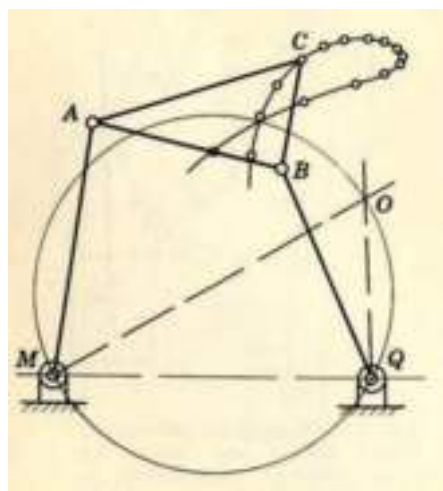
Stelling 5. *Voor elke stand liggen O , P en P' op een rechte lijn. En verder geldt voor het vaste getal $\lambda = \frac{|OB|}{|OC|}$ en elke stand van P , dat $|OP'| = \lambda |OP|$.*

Bewijs. Het bewijs berust direct op de gelijkvormigheid van de driehoeken $\triangle OP'B$ en $\triangle OPC$. $\square$

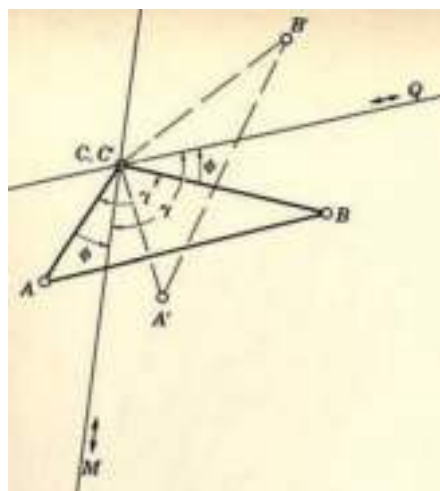
Een veel minder bekende veralgemenisering van de pantograaf is de zogenaamde *plagiograaf* (Figuur 15). Dat is een stangenconstructie bestaande uit een parallellogram $OABC$, waarbij O aan het vlak is vastgemaakt, en driehoeken $\triangle APB$ en $\triangle CBP'$ met punten P en P' , die vast aan de zijden AB en BC zijn verbonden. De driehoeken $\triangle APB$ en $\triangle CBP'$ zijn gelijkvormig en op dezelfde manier georiënteerd, zodat $\angle PAB = \angle BCP'$ is. De plagiograaf wordt ook in het boek van Kempe beschreven en hij vertelt [10, pp. 26–28] dat het gaat om een uitvinding van James Joseph Sylvester (1814–1897), die haar *Plagiograph* of *Skew Pantagraph* noemde.

Stelling 6. *Voor de boven beschreven plagiograaf is de afbeelding, die een punt P op een P' afbeeldt, een draaistrekking met strekfactor $\lambda := \frac{|AB|}{|AP|}$ vanuit het punt O met draaihoek $\theta := \angle PAB = \angle BCP'$.*

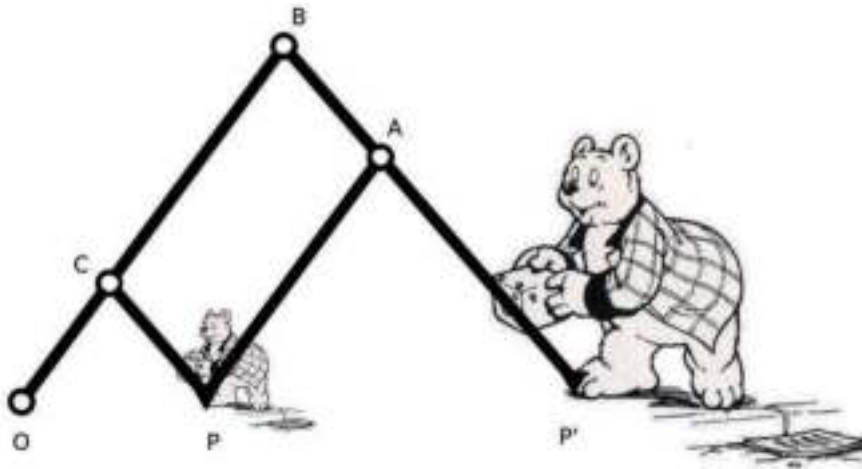
(Een draaistrekking is een draaiing rond O met hoek θ gevolgd door de vermenigvuldiging vanuit O met factor λ .)



Figuur 14 Definitie van een pivotcirkel en bewijsschets bij Stelling 4 (uit het boek van A.S. Hall [4]).



Figuur 15.



Figuur 16 Met een pantograaf kan een tekening worden uitvergroot.

Bewijs. De hoeken $\angle OCP'$ en $\angle PAO$ zijn gelijk omdat $\angle OCB$ en $\angle BAO$ gelijk zijn. De gelijkvormigheid van $\triangle APB$ en $\triangle CBP'$ impliceert

$$\frac{|AP|}{b} = |AP| : |AB| = |BC| : |CP'| = \frac{a}{|CP'|}.$$

Dus is $|AP| : a = b : |CP'|$. Hierdoor zijn ook de driehoeken $\triangle OP'C$ en $\triangle OAP$ omgekeerd georiënteerd gelijkvormig. Het is dus een strekking met een strekfactor van $\lambda = \frac{|AB|}{|AP|}$, dat wil zeggen de verhouding van de benen van de hoek θ , waarvan we nu laten zien dat het de draaihoek is. Noem $\alpha := \angle AOP = \angle CP'O$ als ook $\beta := \angle OPA = \angle P'OC$. De twee hoeken van het parallellogram $\varphi = \angle OCB$ en $\psi = \angle AOC$ voldoen aan $180^\circ = \varphi + \psi$. We vinden voor de draaihoek

$$\begin{aligned} \theta &= \psi - (\alpha + \beta) = 180^\circ - (\alpha + \beta) - \varphi \\ &= \angle PAB = \angle BCP'. \end{aligned} \quad \square$$

De door deze stelling gegeven afbeelding die P op P' afbeeldt is op zulke punten P in het vlak beperkt, die door de stangenconstructie kunnen worden bereikt. Maar de afbeelding kan op een unieke manier op het hele vlak worden uitgebreid tot de draaistrekking rond O met draaihoek θ en strekfactor λ , die we Φ_O noemen. Omdat een dergelijke afbeelding Φ een gelijkvormigheidsafbeelding is, geldt in het bijzonder dat zij lijnen op lijnen en cirkels met hun middelpunten op cirkels met de bijbehorende middelpunten afbeeldt.

Een mooie bron voor de inzet van pantograaf en plagiograaf in het wiskunde-onderwijs is het boek van Mareike Mink, *Geometrie entdecken in technischen Anwendungen – Lernumgebungen für MINT-Unterricht mit Alltagsbezug* [12].

Opmerking: Ook de loopconstructie van Theo Jansen getiteld 'The Legsystem'. Invented in 1991, a system based on the thirteen holy numbers' in Figuur 17 geeft aanleiding voor een plagiograaf in een koppelmechanisme – althans als wij het schijnbare parallellogram tot een echte parallellogram maken. De loopbaan van de voet is door deze verandering echter wel aanzienlijk minder geschikt om over obstakels te lopen dan de originele constructie van Jansen.

Koppelkrommen en hun verwanten

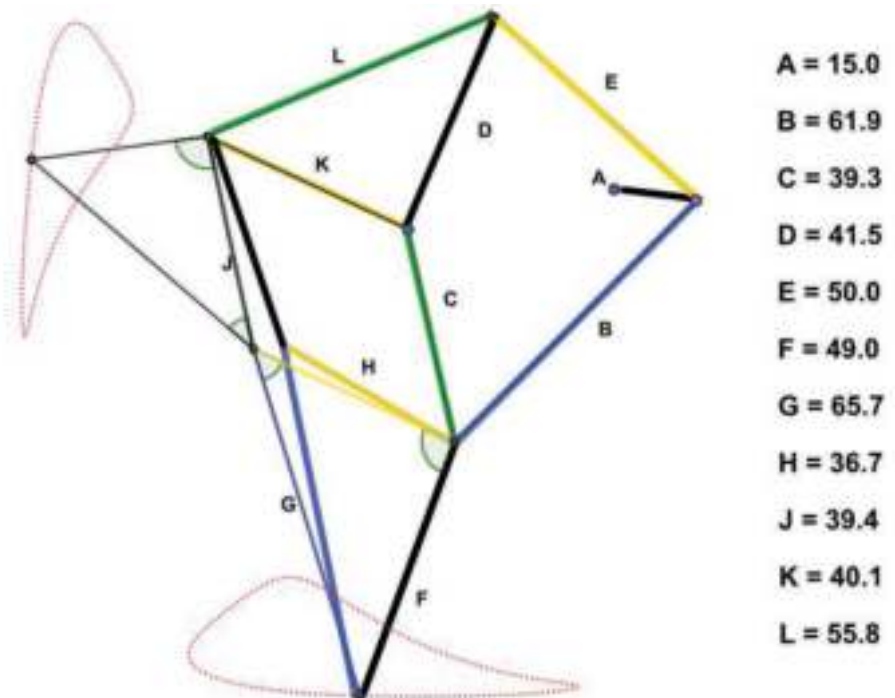
Alleen met elementaire meetkunde be-
wezen Roberts en Chebychev over zulke

koppelkrommen onafhankelijk van elkaar de volgende verrassende stelling (vergelijk [18], of zie ook [16]).

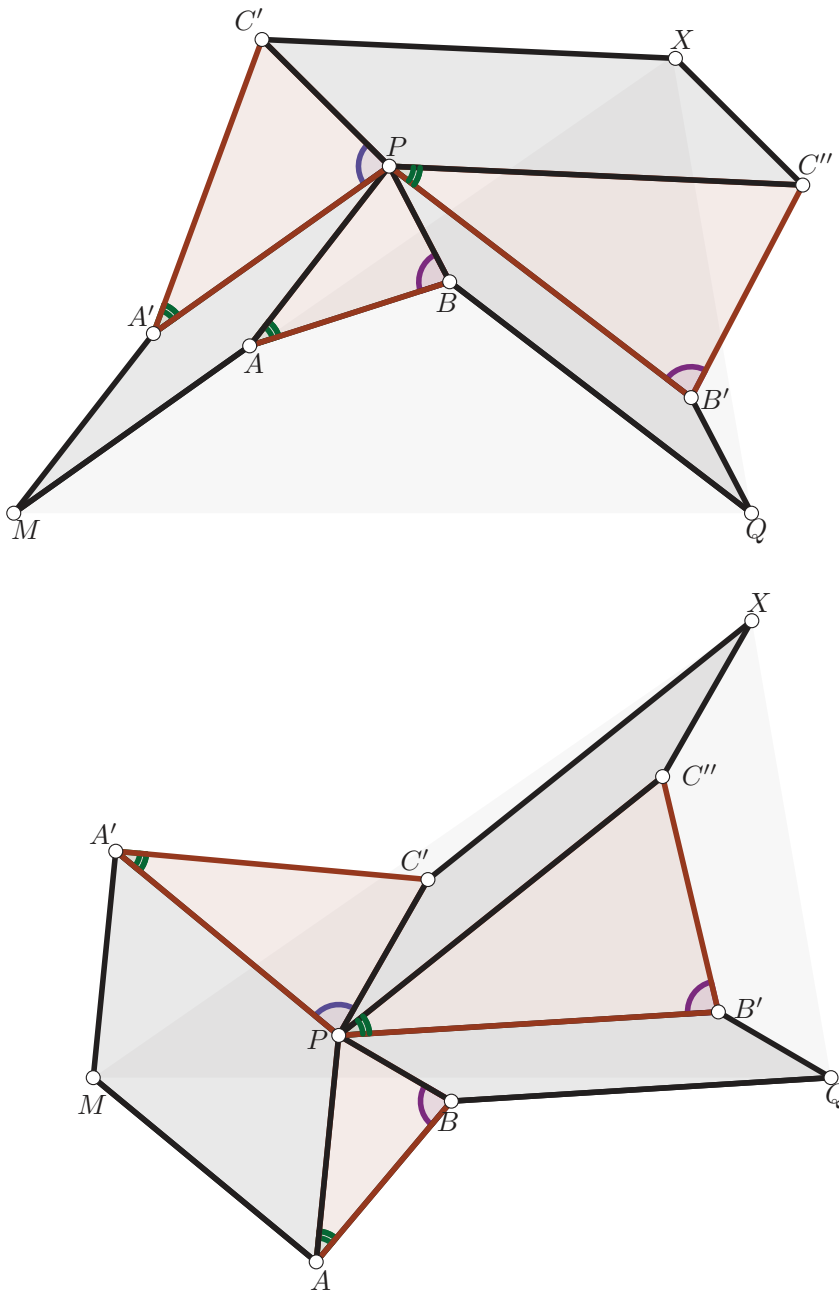
Stelling 7 (Roberts–Chebychev). *Voor een gegeven koppelkromme bestaan er drie koppelmechanismen, die deze koppelkromme voortbrengen.*

Deze drie koppelmechanismen worden *verwant* ('cognate') genoemd. Voor het bewijs is essentieel dat er in de constructie van Figuur 18 uiteindelijk een drietal plagiografen zitten. Wij kijken eerst naar de twee plagiografen met vast punt in M en in Q . Er is telkens een parallellogram met een hoekpunt in M respectievelijk Q en de driehoeken zijn dan juist die twee van de drie driehoeken, die allemaal gelijkvormig zijn met $\triangle ABP$ en aan dat parallellogram grenzen. Wij noemen $a := |BP|$, $b := |AP|$ en $c := |AB|$ als ook $\alpha := \angle BAC$ en $\beta := \angle PBA$. Voor M en Q hebben we dus

- ... de plagiograaf met centrum M . De bijbehorende (op het hele vlak uitgebreide) afbeelding Φ_M is een draaistrekking met draaihoek α en strekfactor $\lambda_M = \frac{b}{c}$ en beeldt B af op C' ,
- ... de plagiograaf met centrum Q . De bijbehorende (op het hele vlak uitgebreide) afbeelding Φ_Q is een draaistrekking met draaihoek β en strekfactor $\lambda_M = \frac{a}{c}$ en beeldt A af op C'' .



Figuur 17 Licht veranderd benenstelsel van Theo Jansens strandbeesten met een geplagiografeerde (maar minder optimale) loopbaan.



Figuur 18 Een koppelmechanisme heeft drie verwante koppelmechanismen.

Bewijs. Voor het bewijs laten we zien dat het punt X een vast punt bij de beweging is. Voor een moment laten we de stangen $C'X$ en $C''X$ uit de constructie weg omdat noch Φ_M noch Φ_Q deze stangen nodig hebben. Dan merken we op dat Φ_M het punt Q afbeeldt op een punt X , waarvoor geldt dat $\angle QMX = \alpha$ en $|XM| : |XQ| = \frac{b}{c}$. Tegelijkertijd geldt ook dat Φ_Q het punt M afbeeldt op een punt X' , waarvoor geldt dat $\angle XQM = \beta$ en $|XQ| : |MQ| = \frac{a}{c}$. Zowel X als ook X' zijn hierdoor gekarakteriseerd. Op grond van gelijkvormigheid geldt $X = X'$.

De lengtes a , b en c als ook de lengtes $|MA|$ en $|QB|$ bepalen via gelijkvor-

migheid alle verdere lengtes van de constructie. Hieruit volgt $|PC''| = \frac{b}{c} |QB|$ en $|PC'| = \frac{a}{c} |QB|$. Nu beeldt Φ_M de cirkel rond Q met straal $|QB|$ af op de cirkel rond X met straal $|XC'|$. En in het bijzonder wordt B op C' op deze cirkel afgebeeld. Dus is $|C'X| = \frac{b}{c} |QB| = |PC''|$.

Φ_Q beeldt de cirkel rond M met straal $|MA|$ af op de cirkel rond X met straal $|XC''|$. En in het bijzonder wordt A op C'' op deze cirkel afgebeeld. Dus is $|C''X| = \frac{a}{c} |QB| = |PC'|$. Daarmee is $PC''XC'$ een parallellogram en X is het eerder geconstrueerde punt. Dit punt blijft dus vast staan als de rest beweegt. $\square$

Nu dat we weten, dat bij elk koppelmechanisme twee verwante koppelmechanismen horen, die dezelfde koppelkromme voortbrengen, zou je kunnen denken, dat je bij elk van deze koppelmechanismen de pivotcirkel kunt tekenen en zodoende de dubbelpunten op de snijpunten van deze cirkels moeten liggen. Bij nader inzien echter zien we dat bij elk van de drie koppelmechanismen de pivotcirkel dezelfde is: het is altijd de omgeschreven cirkel om de driehoek $\triangle MQX$.

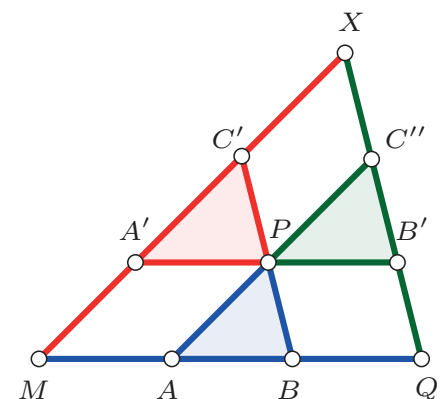
Verwante koppelmechanismen

In de stelling van Roberts en Chebychev is gebleken, dat we bij elke stangenconstructie nog twee andere zulke constructies kunnen vinden, die dezelfde kromme voortbrengen. Dit willen we nu in concrete gevallen bekijken.

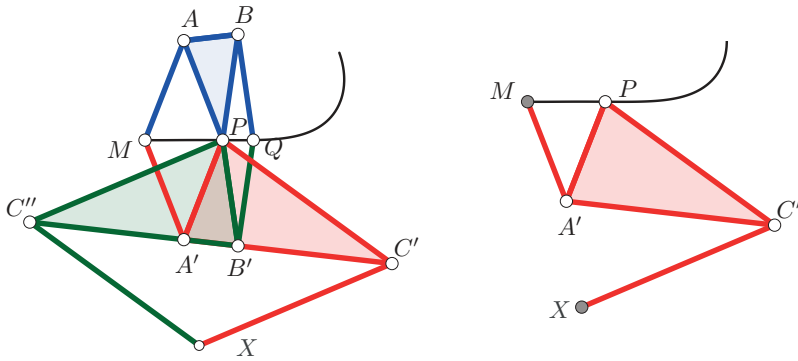
Hiervoor beschouwen we algemene koppelmechanismen. Dus gaan we weer uit van een stangenvierhoek $MQBA$, waarbij M en Q vast aan het vlak verbonden zijn en er een vaste driehoek $\triangle ABC$ aan AB is vastgemaakt en star met AB meebeweegt. Alle andere lijnstukken en punten van het gehele plaatje met de drie koppelmechanismen vinden we door eenduidig bepaalde lijnen. Daarbij houden we schematisch het patroon aan dat in Figuur 19 getoond wordt, een zogenaamd *Cayley-diagram*.

De constructie van Roberts voor een bijna-rechte lijn heeft twee verwante constructies, die elkaars gespiegelden zijn. De constructie gaat vanzelf als desbetreffende driehoeken gelijkvormig gekopieerd en de parallellogrammen volgens het schema gecompleteerd worden (zie Figuur 20).

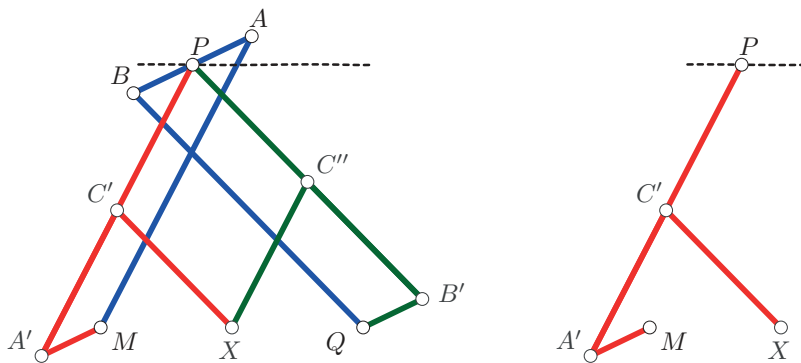
Ook het voorbeeld van Chebychev van een bijna-rechthoekconstructie was een koppelmechanisme en de vraag is, wat zijn twee verwante mechanismen zijn?



Figuur 19 Cayley-diagram.



Figuur 20 De verwante koppelmechanismen bij de bijna-rechthoekconstructie van Roberts.



Figuur 21 De verwante koppelmechanismen bij de bijna-rechthoekconstructie van Chebyshev.

Hierbij is de driehoek $\triangle ABP$ ontaard, dat wil zeggen dat P ook op de lijn AB ligt. Gaan we ook hier het boven beschreven procedé volgen, dan verkrijgen we de constructie in Figuur 21.

De ‘Chebyshev-schommelconstructie’ is dus verwant met een ‘kraanconstructie’ oftewel ‘ λ -mechanisme’. Zulke kranen hebben de eigenschap dat er een einde op een vrijwel rechte lijn beweegt.

De beroemde looppomp van Chebyshev berust op deze verwante constructie, waarvan voor het *MathFilm festival 2008* een prachtig geanimeerde film werd gemaakt [1]. In deze film wordt ook herkenbaar dat de snelheden van de draaiende kruk en van de bijna-rechte beweging enigszins evenredig zijn.

In de volgende bijdrage bestuderen we in het bijzonder hoe bekende krommen zoals kegelsneden en andere algebraïsche krommen door stangenconstructies kunnen worden geconstrueerd en beantwoorden uiteindelijk de vraag welke krommen überhaupt door een stangenconstructie te tekenen zijn. ☞

Referenties

- 1 Nikolai Andreev (reg.), Die Laufmaschine von Chebyshev, 2 min, in *MathFilm 2008 DVD – Eine Sammlung mathematischer Kurzfilme*, 60 min, K. Polthier, M. Aigner, T. Apostol, M. Emmer, H. C. Hege, U. Weinberg (eds.), Springer, 2008, <http://www.mathfilm2016.de/2008-15>.
- 2 Rudolf Beyer, *Kinematische Getriebesynthese – Grundlagen einer quantitativen Getriebelehre ebener Getriebe*, Springer, 1953.
- 3 Simona-Mariana Cretu, Gigi-Dragos, Cioici-Troaca Emil Soarece en Eugen Marian Paun, Mechanical models for anti-rhomb linkage, in Teun Koetsier and Marco Ceccarelli (eds.), *Explorations in the History of Machines and Mechanisms, Proceedings of HMM 2012*, Springer, 2012.
- 4 A.S. Hall, *Kinematics and Linkage Design*, Prentice-Hall, 1961.
- 5 R. Hänchen, *Winden und Krane, Aufbau, Berechnung und Konstruktion*, Springer, 1932.
- 6 H. Hart, On certain conversions of motion, in *Messenger of Mathematics*, N.S. Vol. 4, 1875, pp. 82–88, 97–100.
- 7 H. Hart, A parallel motion, in *Proceedings of the London Mathematical Society*, Vol. 6, 1874–1875, pp. 137–139.
- 8 J.A. Hrones en G.L. Nelson, *Analysis of the Four-Bar Linkage, I and II*, The Technology Press of MIT and Wiley, 1951.
- 9 R. Kaenders, Lemniscaten en kranen, *Nieuw Archief voor Wiskunde* 5/8(2) (2007), 112–118.
- 10 Alfred Bray Kempe, *How To Draw A Straight Line: A Lecture On Linkages*, 1877. Herdruk Kessinger Publishing, 2010.
- 11 Lipman Lipkin, Dispositif articulé pour la transformation rigoureuse du mouvement circulaire en mouvement rectiligne, *Revue Univers. des Mines et de la Métallurgie de Liège* 30(4) (1871), 149–150.
- 12 Mareike Mink, *Geometrie entdecken in technischen Anwendungen – Lernumgebungen für MINT-Unterricht mit Alltagsbezug*, Springer-Spektrum, 2018.
- 13 C.N. Peaucellier, *Nouvelles Annales de Mathématiques*, 21ème Serie 3 (1864), 414–415.
- 14 C.N. Peaucellier, *Mémoires de l'Officier du Génie* 25 (1876), 369–389.
- 15 C. Scheiner, *Pantographice seu Ars delineandi res quaslibet per parallelogrammum lineare seu cavum*, Rome, 1631.
- 16 John J. Uicker, Gordon R. Pennock en Joseph E. Shigley, *Theory of Machines and Mechanisms*, Oxford University Press, 2003.
- 17 G.R. Veldkamp, *Kinematica*, Serie Mechanica (2), Scheltema & Holkema, 1970.
- 18 Egbert Verstraten, Cognate linkages the Roberts–Chebyshev Theorem, in: Teun Koetsier and Marco Ceccarelli (eds.), *Explorations in the History of Machines and Mechanisms, Proceedings of HMM 2012*, Springer, 2012.
- 19 Robert C. Yates, *Curves and Their Properties*, Classics in Mathematics Education A Series, Volume 4, National Council for Teachers of Mathematics, 1974.

Francesca Arici

Mathematisch Instituut
Universiteit Leiden
f.arici@math.leidenuniv.nl

Clara Stegehuis

Faculteit EWI
Universiteit Twente
c.stegehuis@utwente.nl

Proof by example Portraits of women in Dutch mathematics

Elena Pulvirenti

Elena Pulvirenti is an Assistant Professor in the Applied Probability group at Delft University. Her main research interests are in mathematical statistical mechanics and probability.

What first got you interested in science?

“Since my school days, I have always been interested in scientific subjects, though as a kid, I had no real passion for mathematics. I think it was because I was very slow at computations — and to be honest, I still am very slow — and this always made me nervous. However, I did love geometry and afterwards, when I was in high school and numbers somehow were replaced by abstract concepts, I finally started to understand mathematics and realised it was a lot of fun.

At the same time, I was also fascinated by physics, by how it could explain phenomena around me, including those that I could not see, like currents or magnetic fields. So, when I had to choose what to study at university, I decided to go for physics, because I wanted to understand things better. In a sense, I was challenging myself.”

How did you end up pursuing a PhD in mathematics?

“I studied physics in Rome la Sapienza, a choice that has been essential for my career path. During my Master’s, I took a course in statistical mechanics. There, again, I was impressed and surprised by the possibility of explaining the macroscopic behaviour of thermodynamic

systems from a probabilistic point of view. This fusion of physics and mathematics was so interesting, and it also gave me great satisfaction to see that starting from a mathematical model one could rigorously obtain some of the first principles of physics, like the second law of thermodynamics. This really surprised me and gave me the same feeling one gets after putting the last piece in a jigsaw puzzle. At that point, I understood that I wanted to be a mathematician because I needed to complement my knowledge in physics with the rigour of mathematics.”

Somewhat your research still has physical motivations. What projects are you currently working on?

“At the moment, I am focusing on interacting particle systems, both in the discrete and in the continuum. All of these systems exhibit *phase transitions* and *metastability*, which is somehow the dynamical counterpart of phase transition. Metastability is a widespread phenomenon occurring in the dynamics of systems that are subject to random noise, and I am very interested in understanding it.”

Can you give us an example of metastability?

“Here is a simple experiment you can do at home. Put a bottle of distilled water in the freezer and then take it out after some time. Of course, you would expect the water to freeze and become solid. Instead, what you may see is that, even though its temperature is below zero, the water is still in a liquid phase. However, once you open the bottle and pour the water into a glass, then it freezes almost instantaneously.

This liquid state the water was in is called a metastable state. The system ‘would like to be’ in the solid phase, but for physical reasons, it stays in this metastable state for a long time.



Elena Pulvirenti

Mathematically speaking, the liquid phase is not a stable state. The system will eventually reach the real stable state — which is the solid phase. One can think of the metastable state as a local minimum of the functional: somehow the system gets stuck there, but eventually, it will evolve into a stable state. This may take a very long time and typically one is interested not only in making sense of the phenomenon of metastability itself but also in estimating the average time it takes the system to do this cross-over to the stable state.”

What kind of systems exhibiting metastability are you currently working on?

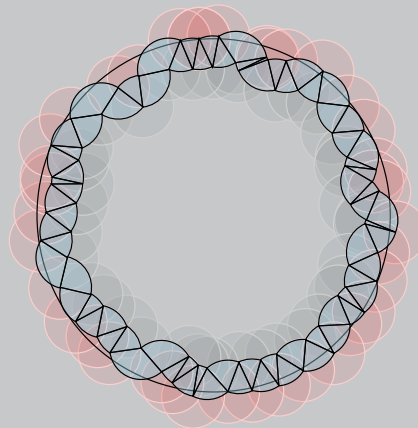
“Recently, I have been working on metastability for spin systems with ‘bond disorder’. In this case, we have two sources of randomness: one is the dynamics of the spin system, a spin-flip type of dynamics, and the second one is that the coupling between any pair of spins is random.

Again, what one would like to do is to estimate the average time that it takes for the system to go from a phase where the majority of the spins point down to a phase where the majority of the spins point up. The challenging part is that now the spins are interacting via random couplings. One of the reasons which make these random systems with bond disorder very appealing is their deep connection with the theory of random graphs, which lately have become very popular due to their application to real-world networks.”

Is there any results that you are particularly proud of?

“For many, many years, I have worked on a project concerning the study of metastability for a system in the continuum called the Widom–Rowlinson model. It is a model of fluid with a phase transition of the liquid-gas type.

Together with Frank den Hollander (Leiden), Sabine Jansen (Munich) and Roman Kotecký (Prague/Warwick), we obtained results that can be seen as a first step in understanding metastability. This involves a very sophisticated analysis of the so-called critical droplet of the system. The system, in this condensation process, creates a droplet of liquid in the



Example of a two-dimensional critical droplet for the Widom–Rowlinson model in the metastable regime.

gas space. We studied the fluctuations of the random boundary of this droplet. It is the first detailed analysis of the surface fluctuations down to both mesoscopic and microscopic precision. This result is also interesting because it provides a mathematical foundation for the theory of capillary waves. The idea of studying the fluctuation of the random boundary drop is the result I am most proud of, and the reason for that is that it was quite challenging to get to it: it required a lot of analysis and probability. In some sense, the things that I find difficult are the ones I like the most.”

What do you like the most about being a mathematician?

“I like very much having the freedom of working on the projects I find most interesting. Of course, like everybody else I think, I like the rewarding feeling of having proved a theorem, which is priceless. I also like the interactions with my colleagues, the never-ending conversations, the exchange of ideas, and, of course, the conferences, when it was still possible.”

How has your experience with remote working been so far?

“From a certain point of view, working remotely during the pandemic turned out positively for me. I started many new collaborations with people that I had not seen in years, just because at some point we wrote to each other and started to talk about maths. The whole situation might be alienating, of course, but, as said, has also had some positive effect on my research, as I have started to work more with people

that in the past I would have considered to live and work ‘too far away’.”

Is there anything you found difficult in your career as a mathematician?

“The answer is everything (laughs). One thing I have struggled with is the fact that sometimes one embarks on a very challenging and long term project which does not yield the expected results in a short time. This can be very challenging and frustrating, especially for someone at the beginning of their academic career. This is actually what happened with the results I am most proud of. Being stuck on a problem for a long time is of course difficult, but this is also the essence of being a mathematician.”

How do you experience being away from the place where you were born, and living in a different country?

“I like it living and working in the Netherlands: it is my second home! But, of course, I miss Rome, and I miss my family, and that did not get better during the pandemic. It has been a challenging time.”

Have you received any particular kind of support during your career that you are thankful for?

“I am lucky to have always been supported by every supervisor and collaborator, especially before becoming an assistant professor. But one thing that really made me feel supported happened while I was still living in Germany and I had a small baby. I wanted to go to a conference and I got financial support for paying the trip for my mother to come to help me during the event. Universities are trying to develop ways of supporting parents with child care responsibilities. Paying for someone trusted to come and take care of the child, as opposed to offering child-care, can make a huge difference. It is essential that one feels relaxed at a conference, and I found such initiatives a good way to support parents and allow them to make the best of the event they are attending. I would recommend to other mathematicians that have parenting responsibilities to explore all options and think outside the box: there may be something they are not aware of that could make a difference.”

Jop Briët

CWI, Amsterdam
j.briet@cw.nl

David Holmes

Mathematical Institute
Leiden University
holmesdst@math.leidenuniv.nl

Ross J. Kang

Department of Mathematics
Radboud University Nijmegen
r.kang@math.ru.nl

Research

Steps towards openness and fairness in scientific publishing

Open access is an important topic, but it can be hard to keep track of the requirements by different funding bodies, universities, et cetera. How do you ensure that you are in full compliance in the Netherlands? Jop Briët, David Holmes and Ross Kang give their view on this. Elsevier had been asked to comment on this article, but they declined.

Step 1: Add in your journal submission (preferably just before the bibliography) the line: “For the purpose of open access, a CC BY public copyright license is applied to any Author Accepted Manuscript (AAM) arising from this submission.”

Step 2: Post the last version of the paper that you send to the journal (the AAM, which is the accepted version without any copyediting or other journal finishing touches) on arXiv as soon as the paper is accepted.

Is this enough? As of 1 January 2021, these two steps ensure that your article fulfills ‘green open access’ (see sidebar Taxonomy of Open Access), and this is sufficient for the open access mandates of NWO and the ERC, for example. This ensures that everyone in the world has timely and free access to (at least a close approximation of) the published version of your article. However, this is only one of the tools that can help achieve a much-needed transformation of scientific publishing; read on to learn more...

Why is open access important?

For decades the development of technological infrastructure and software platforms has made communication/distribution ever cheaper, faster and easier; it now costs relatively little to set up and sustain a journal. (For an idea of how much it is to run a modern mathematical journal, one can for example consult the open accounting records of the journal *Quantum* [11].) Against this backdrop it is bizarre that most content is locked behind paywall and that prices have steadily increased.

The vast majority of reputable scholarly journal titles are wholly controlled by commercial publishers. The more prestigious the journal, the greater the income that can be garnered — either through library subscriptions or, more recently, through ‘article processing charges’ (APCs), sometimes both. On the other hand, these journals’ reputations are preserved by the tireless and often voluntary editorial/refereeing work of academics, almost all on public payroll. At the same time, libraries and funding agencies have little choice but

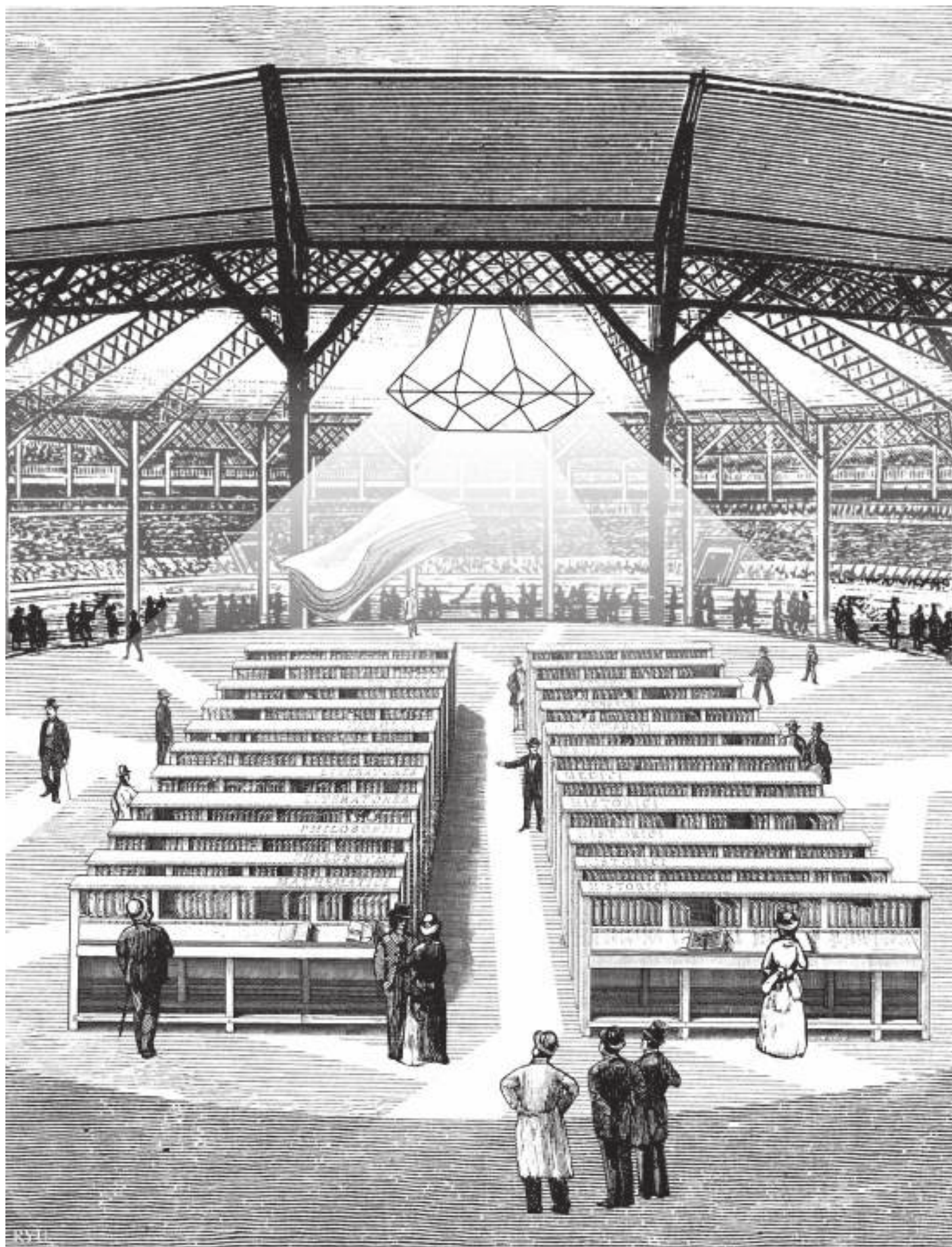
to pay the publishing fees: respectable institutes and researchers simply must have proper access to respectable research dissemination outlets. Moreover, due to the commercial ownership and extreme profitability of these titles, there is little to no competitive pressure on pricing: in simplistic terms, each publisher is an aggregation of monopolies. There is no contemporary parallel to this type of market.

Taxonomy of open access

Green: publishing in a subscription journal while simultaneously posting the last submitted version of the work (the Author Accepted Manuscript) on a public repository such as arXiv.org.

Gold: published articles freely available upon payment of an Article Processing Charge (APC) by the authors. Charges range from a few hundred to several thousand euros.

Diamond: publishing and reading are both entirely free. Such journals keep their costs as low as possible, but are still not free to run; many are sponsored by libraries or research institutes.



To illustrate how wasteful this has become in concrete terms, let us take a look at one Dutch example of a commercial academic publisher: Elsevier. According to their corporate financial reporting, Elsevier has consistently netted profit margins upwards of 30% (by comparison, Royal Dutch Shell, another financially successful partly-Dutch corporation, typically has had its net profit margins hovering around 5%). Currently, under a so-called ‘big deal’, Dutch universities collectively pay upwards of 16 million euros a year to Elsevier for journal access, meaning, roughly speaking, that an amount of at least around 5 million euros a year is going from Dutch tuition fees and government funds directly to the pockets of Elsevier shareholders. And this illustration considers merely one of several publishers, and only within the Dutch context.

(A prominent campaign, dubbed ‘The Cost of Knowledge’, against Elsevier’s practices in particular was instigated by Tim Gowers, which has led many mathematicians worldwide to publicly boycott their titles.)

What is Plan S?

Faced with such an intricate situation, one might wonder if one’s ‘mere’ individual efforts have any noticeable impact. Fortunately, systematic developments are afoot. Most prominently, Plan S is a coordinated effort launched in 2018 by a number of European funding agencies (including NWO) to combat unfair, closed practices in scientific publishing.

The open access mandate for NWO-funded research, that took effect on 1 January 2021, is one of the fruits of this labour. This helps to ensure that publicly-funded research is publicly accessible. Note that this mandate prompted our two-step recommendation above for posting your AAMs on arXiv.

Another development is the closing of numerous ‘big deals’ between national

university associations (VSNU in the Dutch landscape) and the largest publishers. On the one hand these deals allow many scientific researchers to publish their articles fully open access without (directly) paying APCs (see [10] to check which titles qualify for Netherlands-based researchers), while on the other hand they commit the publishers to ‘transformative’ actions towards more sustainable and transparent open access ideals.

What can you do?

Despite these as well as other welcome developments arising from Plan S and its forerunners, there remains much to be gained. Note that even after a full transition as envisaged in Plan S, APCs could remain exorbitantly high. (Given present incentive structures for academics, APC fee transparency does not in and of itself have a positive effect on price.) Indeed, one could aspire further to fair open access ideals; see [9] for a detailed discussion of one potential framework for sustainable and efficient open access in scientific publishing; see [6] for a list of journals adhering to fair open access principles.

From this perspective, there are still ways in which you as an individual can help, in addition to the two steps we outlined at the beginning. We note that those two steps contribute to your ‘good arXiv hygiene’ (already practiced by many mathematicians): consistently post your manuscript to arXiv prior to its submission to a journal, and keep the arXiv version updated through the pipeline. Aside from fulfilling the open access mandate, this significantly improves the visibility and prominence of your hard-fought research. Remind your colleagues, collaborators, and students to adopt such habits.

Read up on the issues around scientific publishing: take some references below as starting points. Talk to your colleagues, librarians, grant administrators, et cetera,

about open access. Educate your students, bring it up at staff meetings, and canvas your university administrators. Curiously, a 2017 worldwide survey on journal reform found that most mathematicians strongly favor change in scientific publishing, but also believe that this opinion is not shared by their colleagues [3]. Fairer publishing models thrive if career advancement is independent of being accepted to commercial ‘high impact’ journals. So lead by example: by supporting and publishing in fair journals, you increase their quality and sustainability. Convince your colleagues, collaborators, department heads, et cetera, to do the same.

If you are in a position to join an editorial board, give preference to a diamond open access or a community-owned journal. If you belong to a board, talk to the other editors about how to make the journal fairer and more open. Organizations like MathOA.org provide assistance (possibly including funding) to flip commercially-owned titles to fair open access models. Many online platforms exist that make starting or flipping a journal much easier than it used to be. And boards of established diamond open access titles are often more than happy to talk about their experiences, so there is no need to reinvent the wheel.

Closing thoughts

There have long been serious and difficult issues around scientific publishing and open access. Recent efforts and policy changes give hopeful progress. This article has given a brief account from the current outlook for Netherlands-based mathematicians. Although more can be done, we hope that we have collectively passed a tipping point towards more openness and fairness in science. ☞

For the purpose of open access, a CC BY public copyright license is applied to any Author Accepted Manuscript (AAM) arising from this submission.

References

- Jean-Sébastien Caux, Redressing the inverted pyramid of scientific publishing, *Europhysics News* 48(5–6) (2017), 25–28.
- Stephen J. Eglén, Primer on the rights re-tention strategy (2021), doi:10.5281/zenodo.4641752.
- Cameron Neylon, David M. Roberts and Mark C. Wilson, Results of a Worldwide Survey of Mathematicians on Journal Reform, *EMS Newsletter* (March 2017), 46–49.
- <https://arxiv.org/help/license>.
- <https://www.coalition-s.org/diamond-uneearthed-shining-light-on-community-driven-open-access-publishing>.
- <https://freejournals.org>.
- <https://markcwilson.site/scholarly-publication-reform>.
- <http://www.mathoa.org>.
- <http://www.mathoa.org/wp-content/uploads/2017/02/Proposal-for-editorial-boards-about-emancipating-their-journals.pdf>.
- <http://www.openaccess.nl>.
- <https://quantum-journal.org/about>.
- <https://sfdora.org>.
- <http://www.thecostofknowledge.com>.
- <https://www.theguardian.com/science/2017/jun/27/profitable-business-scientific-publishing-bad-for-science>.

Boekbesprekingen

| Book Reviews

Redactie: Hans Cuypers en Hans Sterk

Review Editors NAW - MF 5.092
Faculteit Wiskunde & Informatica
Technische Universiteit Eindhoven
Postbus 513
5600 MB Eindhoven
reviews@nieuwarchief.nl
www.win.tue.nl/wgreview



Antonio Fernández López

Jordan Structures in Lie Algebras

Mathematical Surveys and Monographs 240
American Mathematical Society, 2019

299 p., prijs \$129.00

ISBN 9781470450861

De auteur heeft als doel om de resultaten over Jordan-algebra's in te zetten voor onderzoek naar de structuur van Lie-algebra's. Hij is daar niet alleen goed in geslaagd maar heeft ook een origineel en goed leesbaar boek geschreven.

De titel van het boek geeft aan dat Jordan-algebra's en Lie-algebra's de centrale onderwerpen zijn. Wie op zoek is naar een goede inleiding in Lie-algebra's, heeft aan de klassieke inleiding *Introduction to Lie Algebras and Representation Theory* van James Humphreys (Springer, 1974) nog steeds een hele goede keuze. Wie het overeenkomstige doel voor ogen heeft voor Jordan-algebra's, raad ik het onderhoudende boek *A Taste of Jordan Algebras* van Kevin McCrimmon (Springer, 2004) aan, dat vol met geschiedenis en goed te volgen bewijzen staat.

Met zijn nieuwe boek doet Fernández López geen moeite om deze twee te overtreffen. Hij heeft een hele andere insteek. Hij ziet ervan af om de grote stellingen over Jordan-algebra's te bewijzen en hanteert een origineel uitgangspunt: hij wil laten zien hoe de resultaten uit de theorie van Jordan-algebra's gebruikt kunnen worden om de structuur van Lie-algebra's te bepalen.

Voor we verder ingaan op de inhoud even een micro-inleiding in de niet-associatieve algebra's uit de titel voor de geïnteresseerde leek. Laat A een associatieve algebra zijn over een commutatieve ring. Breek de vermenigvuldiging $x \cdot y$ van A op in een symmetrisch deel $x \cdot y = x \cdot y + y \cdot x$ en een anti-symmetrisch deel $[x, y] = x \cdot y - y \cdot x$. Hier betekent *symmetrisch* dat de identiteit $x \cdot y = y \cdot x$ (commutativiteit) geldt en *anti-symmetrisch* dat de identiteit $[x, x] = 0$ geldt. Elk van beide vermenigvuldigingen voldoet nog aan een andere belangrijke wet, respectievelijk de *Jordan-identiteit* $(x \cdot x) \cdot (y \cdot x) = ((x \cdot x) \cdot y) \cdot x$ en de *Jacobi-identiteit* $[[x, y], z] + [y, z], x + [z, x], y = 0$. Een *Jordan-algebra* is een niet-noodzakelijk associatieve algebra met een commutatieve vermenigvuldiging die aan de Jordan-identiteit voldoet en een *Lie-algebra* is een niet-noodzakelijk associatieve algebra met een anti-symmetrische vermenigvuldiging die aan de Jacobi-identiteit voldoet.

Terwijl Pascual Jordan het nut zag van Jordan-algebra's voor quantummechanica, waren de Lie-algebra's meer in trek bij wiskundigen, vooral omdat ze optreden als infinitesimale groepen. Lie-groepen en algebraïsche groepen kunnen goed aan de hand van Lie-algebra's bestudeerd worden. Jordan-algebra's staan minder centraal in de wiskundige belangstelling dan Lie-algebra's maar zijn nog steeds actueel in de fysica (zie bijvoorbeeld Michel Dubois-Violette en Ivan Todorov, 'Exceptional quantum geometry and particle physics II', in *Nuclear Physics. B. Theoretical, Phenomenological, and Experimental High Energy Physics. Quantum Field Theory and Statistical Systems* 938 (2019), 751–761). Mede dankzij de indrukwekkende structuurtheorie voor Jordan-algebra's en de steeds sterker aangehaalde band met Lie-algebra's, wordt het voor

veel Lie-algebraïci interessant om toch nog eens naar Jordan-algebra's te kijken.

Net als voor associatieve algebra's kunnen we voor niet-associatieve algebra's A met vermenigvuldiging $x \cdot y$ de begrippen *ideaal* I (een lineaire deelruimte met $A \cdot I \subseteq I$) en *enkelvoudig* (niet-commutatief en geen andere idealen dan 0 en A) invoeren. De aandacht voor Jordan-algebra's en Lie-algebra's gaat in eerste instantie uit naar enkelvoudige algebra's, omdat deze de interessante bouwblokken zijn van meer algemene exemplaren. Voor beide soorten bestaat, in het geval dat de dimensie van A eindig is en de ring van scalars Φ een algebraïsch afgesloten lichaam van bijna elke karakteristiek, een volledige classificatie.

Een belangrijke verbinding tussen Jordan-algebra's en Lie-algebra's is de in de jaren zestig verschenen Kantor–Koecher–Tits- (kortweg: KKT-) constructie. Deze maakt gebruik van het feit dat, voor elke niet-associatieve algebra J over Φ met vermenigvuldiging $x \cdot y$, de algebra $\text{Der}(J)$ van *derivaties*, dat wil zeggen: lineaire afbeeldingen $D: J \rightarrow J$ met $D(x \cdot y) = D(x) \cdot y + x \cdot D(y)$, een Lie-algebra is met vermenigvuldiging $[D, E] = D \circ E - E \circ D$, waarbij $\circ$ de samenstelling van afbeeldingen is. Als J een Jordan-algebra is, dan is de Lie-algebra $\text{Der}(J)$ uit te breiden tot een gegradeerde Lie-algebra $L = L_{-1} \oplus L_0 \oplus L_1$ over Φ . Hierbij wordt de *gradering* gekenmerkt door $[L_i, L_j] \subseteq L_{i+j}$ voor alle indices i, j met de conventie dat als een index k niet voorkomt in $\{-1, 0, 1\}$, de deelruimte L_k triviaal is. In de KKT-constructie zijn L_{-1} en L_1 kopieën van J en is L_0 (soms iets groter dan) een kopie (als Lie-algebra) van $\text{Der}(J)$.

Welke Lie-algebra's L zijn afkomstig van een KKT-constructie? Daarvoor is dus nodig dat L een gradering heeft. Uit de definitie van gradering volgt dat L_0 een deel-Lie-algebra van L is. Laten we eerst eens kijken naar L_1 . Vanwege symmetrie gedraagt deze zich net zo als L_{-1} . Een gevolg van de gradering is dat $[L, [L, L_1]] \subseteq L_1$. Een lineaire deelruimte L_1 met deze eigenschap heet een *inwendig ideaal*. Als a tot L_1 behoort, dan zal $[a, [a, [a, L]]]$ in $[a, L_1]$ liggen en dus gelijk aan $\{0\}$ zijn. We zeggen dan dat a *nilpotent van index ten hoogste 3* is. Niet elke Lie-algebra heeft dergelijke elementen. Laat Φ nu een algebraïsch afgesloten lichaam zijn van karakteristiek 0 of ten minste 5 en L enkelvoudig en eindig-dimensionaal. Dan heeft L een niet-triviaal nilpotent element van index ten hoogste 3. Afgezien van een klein 5-dimensionaal voorbeeld hebben we dan de volgende dichotomie: ofwel L heeft een *extremaal element* a (dit betekent $[a, [a, L]] = \Phi \cdot a$), ofwel L heeft een nilpotent element a van index 2 (dit betekent $[a, [a, L]] = 0$). In dit laatste geval is er de indrukwekkende classificatie van voornamelijk Premet en Strade ('Simple Lie algebras of small characteristic. VI. Completion of the classification', *Journal of Algebra* 320 (2008), 3559–3604), maar daar gaat het boek niet over en daar ga ik niet verder op in.

In het eerste geval levert de aanwezigheid van een extremaal element a in L over het algemeen een gradering $L = L_{-2} \oplus L_{-1} \oplus L_0 \oplus L_1 \oplus L_2$ met $L_2 = \Phi \cdot a$ op. Het hoofdbestanddeel in de constructie van deze gradering is het Jacobson–Morozov lemma, dat bij a een element b aanwijst met de eigenschap dat het lineaire opspannel van a , b en $h = [a, b]$ in L een enkelvoudige deel-Lie-algebra is. (Dit betekent dat de deel-Lie-algebra isomorf is met de Lie-algebra bestaande uit 2×2 -matrices over Φ met spoor 0, voorzien van de anti-symmetrische vermenigvuldiging beschreven in het begin van deze boekbespreking.) Vermenigvuldiging van links met het element h , vaak aangegeven met ad_h , levert namelijk

een derivatie op (dankzij de Jacobi-identiteit) die als eigenwaarden $-2, -1, 0, 1, 2$ heeft, en de deelruimten L_i zijn de eigenruimten hiervan. In deze situatie is een Jordan-algebra te vinden. Hier is een ultra-korte omschrijving van de constructie: Laat L_a de lineaire ruimte $L \ker(\text{ad}_a^2)$ zijn; dit is het quotiënt van L naar de kern van de lineaire afbeelding ad_a^2 . Geef met $\bar{x}$ voor $x \in L$ de projectie van x op L_a aan en definieer een vermenigvuldiging op L_a door $\bar{x} \cdot \bar{y} = \overline{[x, a], y}$. Dit maakt van L_a een Jordan-algebra als 6 invertierbar is in Φ . Het boek van Fernández López geeft aan welke rol deze Jordan-algebra kan spelen in de beschrijving van L en de gradering door middel van een gegeneraliseerde KKT-constructie.

Maar Fernández López beperkt zich niet tot eindig-dimensionale Lie-algebra's. De zojuist genoemde constructie werkt ook in het oneindig-dimensionale geval. Ik kreeg zelfs de indruk dat een hoofddoel van zijn boek niet zozeer bij eindig-dimensionale Lie-algebra's ligt maar bij Zelmanovs classificatie van oneindig-dimensionale enkelvoudige Lie-algebra's met een gradering

$$L = L_{-n} \oplus L_{-n+1} \oplus \cdots \oplus L_{-1} \oplus L_0 \oplus L_1 \oplus \cdots \oplus L_{n-1} \oplus L_n$$

voor een natuurlijk getal n over een lichaam Φ van karakteristiek 0 of groter dan $4n$ (zie E.I. Zelmanov, 'Lie algebras with finite gradation', *Matematicheskii Sbornik, Novaya Seriya* 124(166) (1984), 353–392). Dit grootse resultaat bewees Zelmanov een aantal jaren vóór het beperkte Burnside-vermoeden, dat over groepen gaat maar zowel Jordan-algebra's als Lie-algebra's gebruikt en waarvoor hij in 1994 een Fieldsmedaille kreeg. Een van de vroege stappen in het bewijs geeft een basis van nilpotente elementen van index 3. Deze leiden — als boven beschreven — tot Jordan-algebra's, die een centrale rol in het bewijs spelen. Gezien het bestaan van erg veel wilde oneindig-dimensionale enkelvoudige Lie-algebra's, moet er wel een extra voorwaarde als de gradering vervuld zijn om tot een classificatie te kunnen komen.

Ik kreeg de indruk dat Fernández López zijn boek graag gewijd had aan een goed leesbaar bewijs voor deze stelling. Hoewel veel ingrediënten daarvoor aanwezig zijn, geeft hij in zijn inleiding al aan dat zo'n bewijs er niet in zit. Ter compensatie, of als troost, is in het een-na-laatste hoofdstuk de uitdaging geformuleerd om de grotere klasse van Lie-algebra's opgespannen door nilpotente elementen van index 3 te classificeren (voor Φ een lichaam van karakteristiek 0).

Wat ik hierboven beschreven heb gaat vooral over 9 van de 15 hoofdstukken, die 215 van de 281 pagina's eigenlijk inhoud beslaan. De overige 6 hoofdstukken zijn dus voornamelijk kort en behandelen achtereenvolgens een eigenschap van vrije Lie-algebra's, idealen in Lie-algebra's die na uitdeling een Lie-algebra zonder nilpotente elementen van index 2 opleveren, een bewijs van een stelling van Zelmanov in 'Lie algebras with algebraic associated representation', *Matematicheskii Sbornik, Novaya Seriya* 121(163) (1983), 545–561, een Artin-eigenschap die gekoppeld is aan inwendige idealen, en een bewijs dat Banach–Lie-algebra's zonder nilpotente elementen van index 2 maar opgespannen door extremale elementen eindig-dimensionaal zijn. Steeds spelen Jordan-algebra's een rol die uit het bestaan van nilpotente elementen van index 3 (en generalisaties daarvan) een rol. Ook zo wordt het hoofddoel van het boek waargemaakt.

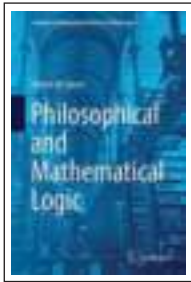
Fernández López geeft veel nuttige verbanden tussen nilpotente elementen van lage index in Lie-algebra's, graderingen, en Jordan-algebra's. Deze informatie geeft de benodigde handvatten

om de Tits-meetkunde van algebraïsche groepen te begrijpen aan de hand van inwendige idealen (zie mijn artikel ‘Inner ideals in Lie algebras and spherical buildings’, *Indag. Math.* 32 (2021), 1115–1138), maar geeft ook inzicht in inwendige idealen van oneindig-dimensionale Lie-algebra’s.

Het boek straalt plezier uit. Het uitgangspunt is een uitdaging die de schrijver zichzelf gesteld heeft maar waarin de lezer meegenomen wordt. Er is veel gedaan aan toegankelijkheid van het materiaal voor de lezer. In het eerste hoofdstuk zijn definities van begrippen voor non-associative algebra’s als eenheid, ideaal, primaliteit en integriteitsgebied, in grote algemeenheid ingevoerd. Het tweede hoofdstuk is een inleiding in Lie-algebra’s. De inleidingen van de hoofdstukken bestaan uit een goede beschrijving van wat er behandeld gaat worden en een motivatie waarom. Aan het eind van elk hoofdstuk wordt de lezer uitgedaagd door opgaven, waar soms later naar verwezen wordt.

De schrijfstijl is zeer vlot en de inhoud zeer goed volgbaar ondanks frequente kleine drukfouten. Voor degenen die meer willen weten over de interactie tussen Jordan- en Lie-algebra’s is het boek een aanrader.

Arjeh Cohen



Harrie de Swart

Philosophical and Mathematical Logic

Springer Undergraduate Texts in Philosophy
Springer, 2018

xx + 539 p., prijs €54,49

ISBN 9783030032531

Zoals bekend bieden de uitgaven in deze serie van Springer teksten die op gevorderd-undergraduate niveau vele gebieden van de wijsbegeerte behandelen. Van klassieke filosofie tot hedendaagse onderwerpen. Het voorliggende boek is een typerend voorbeeld van de keuze: hoort het tot de wiskunde, tot de wijsbegeerte of tot beide? Uiteindelijk is deze vraag niet zo belangrijk, laten we het maar op ‘beide’ houden. Het gaat immers alleen om de inhoud. En deze inhoud is in goede handen bij De Swart, emeritus van de universiteit van Tilburg. En bekend van diverse boeken (alleen en samen met anderen) op het terrein van (symbolische) logica, computerwetenschap, verzamelingenleer, wijsbegeerte van de wiskunde. Het volgende citaat aan het begin van het boek geeft duidelijk aan waar hij staat: “Logic is to improve human thinking in order to improve human existence.” (Andrzej Grzegorczyk)

Reflectie met het oog op verbeteren van het menselijke bestaan. Het menselijk bestaan staat hierin centraal; wijsgerig en wiskundig denken ondersteunen deze reflectie. En dan niet zoiets vaags als ‘het bestaan’, maar gerelateerd aan de onmiddellijke realiteit van ons dagelijks leven. “After all, the unparalleled development of the technique in a narrow sense, of the technical technique, one could say, is followed by a hardly less important development of the psychological technique, of the advertising technique, propaganda technique, in short, of means to influence people” en “Against all these known and unknown psychic influences we can forge a weapon by improving our thinking technique. And that such a rein-

forcement of our spirit is required, urgently needed, is my deepest conviction.” (David van Dantzig, 1938, inaugural lecture, Delft, vertaald uit het Nederlands)

De Swart laat er geen twijfel over bestaan dat hij, zoals wij allen, staat op de schouders van hen die ons voorgingen. Heel mooi brengt hij dit naar voren in een stukje ter herinnering aan “my friend and teacher” Johan J. de longh (1915–1999, Radboud Universiteit): “It is the main task of a philosopher to show people that things do not have to be the way they are, that they might be different and that in some cases they should be different.” (Johan de longh) Naast de velen op wiens schouders hij stond, was het bekend dat “He always started his lectures with a short prayer in Latin: Spiritus sancti gratia illuminet sensus et corda nostra [May the grace of the Holy Spirit illuminate our senses and our hearts]. And he always finished his lectures with the following prayer: Gratias tibi agimus, Domine, pro omnibus beneficiis tuis [We thank you, my Lord, for all your blessings]”. Kom daar nu nog eens om!

Na deze standpuntbepalingen wordt het tijd voor de inhoud van dit boek. Toch nog eerst een aantal adviezen aan de lezer hoe hij/zij dit boek moet bestuderen. Geen overbodige luxe, waar vele van hen waarschijnlijk niet gewend zijn om wiskundige teksten te bestuderen. Want de inhoud die volgt is niet te bestuderen op de wijze waarop men doorgaans filosofische en dergelijke werken bestudeert. Daar komt het vaak niet aan op de letterlijke tekst per zin/regel, maar om de inhoud die overgebracht wordt. In dit boek wordt van de lezer/student wiskundige precisie geëist zonder welke het gegarandeerd niet lukt. Om dit over het voetlicht te brengen citeert hij Lewis Carroll die in zijn *Symbolic Logic* and *The Game of Logic* didactische studiewerken geeft aan de student. Helder en to the point. Het ware te wensen dat ook vele van de hedendaagse scholieren en bachelorstudenten wiskunde dergelijke aanwijzingen zouden kennen en opvolgen. Het zou het beheersingsniveau van ons vak ten goede komen.

Het boek behandelt de volgende onderwerpen: propositionele logica; predicated logica; aritmetica en Gödels onvolledigheidsstelling; verzamelingen (eindige en oneindige); filosofische logica: modaal, epistemisch, deontisch, temporaal; taal filosofie; intuïtionisme en intuïtionistische logica; toepassingen van logica en verzamelingentheorie: logische programmering, relationele databases. Een rijke en op undergraduate niveau behoorlijk volledige inhoud. Maar ook een inhoud waarvoor een grote inzet van de student vereist is om zich deze eigen te maken. De didactische aanwijzingen zullen vruchten afwerpen wanneer men deze ter harte neemt en opvolgt.

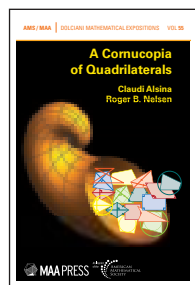
De Swart schenkt grote aandacht aan valide redeneringen en afleidbaarheid in termen van axioma’s, tableaux en natuurlijke deductie. Naïeve en formele verzamelingenleer komt aan de orde, Zermelo–Fraenkel en Löwenheim–Skolem, paradoxen, Peano. Natuurlijk komen de diverse denkrichtingen aan de orde zoals Platonisme, Intuïtionisme en dergelijke. Tot slot vinden we in dit boek beschouwingen over valkuilen en onzinnelijke discussiemethodes, een onderwerp dat we in vele soortgelijke boeken node missen.

Uiteraard zou het boek niet compleet zijn als opgaven, oefeningen en dergelijke zouden ontbreken. Talloze relevante oefeningen hebben hun plaats gevonden in dit boek. De oplossingen daarvan zijn eveneens in het boek opgenomen, hetgeen de studeerbaarheid van het werk heeft vergroot.

Het taalgebruik, de wijze van presentatie, de ‘nabijheid’ van de gepresenteerde tekst tot de student, het getuigt allemaal van de grote eruditie van de schrijver en van zijn vermogen om moeilijke zaken helder naar voren te brengen. Niet zodanig dat de student na lezing van een paragraaf zou denken ‘nu begrijp ik het’, vervolgens het boek dichtslaat en het toch niet kan navertellen wat hij/zij gelezen heeft. Integendeel, de tekst straalt begrip uit voor de moeite die de student moet doen om de inhoud de baas te worden en biedt een uitgestoken hand om hem of haar verder te helpen. Per onderdeel geven referenties de lezer aanwijzingen voor verdere studie en aan het eind is een uitvoerige index opgenomen.

Al met al een magistraal boek. De schrijver heeft er naar mijn mening goed aan gedaan om zijn eerdere boek te herzien en te vervolmaken. Het resultaat dat nu voor ons ligt verdient alle denkbare superlatieven.

Wim Kleijne



Claudi Alsina, Roger B. Nelsen

A Cornucopia of Quadrilaterals

MAA Press, 2020

xi + 292 p., prijs \$59.00

ISBN 9781470453121

Dit prachtige boek (u kunt de rest van de recensie overslaan en direct uw bestelling plaatsen) is voor vierhoeken wat *The Secrets of Triangles* (zie de recensie in NAW van maart 2018) was voor driehoeken, namelijk het boek dat op een systematische manier bij elkaar zet wat er zoal over een eenvoudige figuur als een vierhoek in de loop der eeuwen is bedacht (en dat blijkt heel erg veel te zijn) en dat bovendien voor velen van u vermoed ik voor een onverwacht groot deel onbekend zal zijn, althans zo verging het mij.

De opzet van het boek is in elk van de elf hoofdstukken telkens een klasse vierhoeken te behandelen (er worden bijna dertig verschillende typen vierhoeken gedefinieerd, zoals behalve alle bekende ook het mij onbekende Garfield-trapezium, het trilaterale trapezium en nog zo wat), waarvan vrijwel alle de ‘gewone’ convexe tweedimensionale vierhoek betreffen met uiteraard enkele uitstapjes naar ‘ongewone’ vierhoeken, zoals concave vierhoeken of complexe vierhoeken (met een paar elkaar snijdende zijden), maar ook vierhoeken waarvan de hoekpunten niet in een vlak liggen. Elk hoofdstuk bevat een uitdagende maar maakbare serie opgaven (challenges) die aan het einde van het boek gelukkig allemaal (dat is helaas vaak wel eens anders) volledig en kraakhelder worden uitgewerkt.

Een van de (vele) kwaliteiten van het boek is dat de schrijvers (Alsina en Nelsen, respectievelijk werkend in Barcelona, Spanje en Portland, USA) in elk hoofdstuk (of zelfs in vrijwel elke paragraaf) er dus in slagen zeer (in ieder geval voor mij) verrassende eigenschappen of stellingen uit de meer dan overvloedige literatuur (er worden meer dan negentig bronnen genoemd, van het terecht overbekende boek *The Penguin Dictionary of Curious and Interesting Geometry* van David Wells tot vrij obscure tijdschriftartikelen

aan toe) op te diepen, bijvoorbeeld in hoofdstuk 1 al direct de zogenaamde *Newton-lijn*. Als een punt P binnen een convexe vierhoek $ABCD$ (die geen parallellogram is) verbonden wordt met de vier hoekpunten A , B , C en D en de som van de oppervlakten van telkens twee tegenoverstaande driehoeken (dus PAB en PCD of PAD en PBC) gelijk is, dan liggen al die punten P op een lijn (de Newton-lijn dus). Spectaculair gevolg is dan ook nog eens dat elk paar overstaande hoekpunten (dus bijvoorbeeld A en C dan even ver af blijken te liggen van die Newton-lijn.

Nog een voorbeeldje van de rijkdom van dit boek (we zitten nog steeds in hoofdstuk 1) is de (eenvoudig te bewijzen, maar toch fijne) *tapijtenstelling*. Plaats twee elkaar deels overlappende tapijten in een kamer, dan is de oppervlakte van het overlappende deel gelijk aan de oppervlakte van de niet-bedeekte delen van die kamer dan en slechts dan als de oppervlakte van de kamer gelijk is aan de gezamenlijke oppervlakte van de twee tapijten. Zelfs uit te breiden naar meer dan twee tapijten mits nooit meer dan twee tapijten elkaar gelijktijdig overlappen.

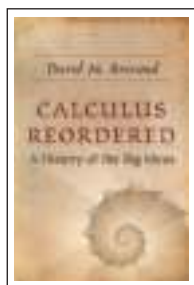
En, wie van u kent de *Stelling van Steiner*? Als in een convexe vierhoek Q (met opeenvolgende zijden a , b , c en d) geldt dat $a + c = b + d$ dan heeft Q een ingeschreven cirkel! Ook het bewijsje daarvan is een pareltje van elegant redeneren. Ik kende ook niet de *formule van Brahmagupta* voor de oppervlakte van een vierhoek (waarvan de mij wel bekende formule van Heron voor de oppervlakte van een driehoek een speciaal geval is met $d = 0$). Verder het *Varignon-parallellogram* dat ontstaat als je de vier middens van de zijden van elke willekeurige vierhoek (dus ook concaaf of complex of driedimensionaal) met elkaar verbindt.

Ik zal (voorlopig even) de verleiding moeten weerstaan te blijven citeren, dus vermeld ik nog dat de schrijvers niet alleen veel (fraaie) dwarsverbanden leggen tussen de hoofdstukken onderling maar ook tussen de gebruikte wiskundige methoden (tussen vectormeetkunde en analytische meetkunde — uiteraard zou ik zeggen — maar ook bijvoorbeeld tussen meetkundige bewijzen en Fibonacci-getallen, toch minder evident, en, ook niet te missen). Ook voor dit boek geldt weer dat de enthousiaste docent die het geluk heeft wiskunde D te mogen geven in bijvoorbeeld een 5 vwo- of 6 vwo-klas uit een enorme hoeveelheid materiaal kan kiezen om bijvoorbeeld de module bewijzen (in dit geval dan de meetkundige bewijzen) tot een hoogtepunt te maken van het curriculum voor het vak wiskunde, maar ik durf wel te stellen zelfs van het complete vwo-curriculum.

Nog enkele toegiften ten slotte. Een zeer verhelderend — bijna woordenloos — meetkundig bewijsje van de fameuze *paradox van Simpson* (je gemiddelde — bij honkbal bijvoorbeeld — is twee jaar achter elkaar hoger dan dat van je tegenstander, maar kan berekend over die twee jaar samen lager zijn). De vele bewijzen van de Stelling van Pythagoras worden lustig door het boek heen gestrooid. De zeer fraaie *vliinderstelling*. Verder, dat als een regelmatige vijfhoek, een regelmatige zeshoek en een regelmatige tienhoek alle drie een omgeschreven cirkel hebben met dezelfde straal en de zijden ervan een driehoek insluiten, die driehoek niet alleen rechthoekig is (!), maar dat de twee rechthoekszijden zich dan verhouden als de Gulden Snede (!). Als laatste het al eerder genoemde *Garfield-trapezium* en de daaruit voortvloeiende *Garfield-rechthoek* (niet vernoemd naar de kat, maar naar de in 1880 tot twaalfde president van de Verenigde Staten verkozen James Abram Garfield) die zijn opgebouwd uit drie respectievelijk vier

rechthoekige driehoeken, zeer handig in te zetten bij diverse getal-theoretische problemen en bij betegelingen.

Heel jammer blijft het mijns inziens (mijn enige puntje van kritiek) dat de prijs van zo'n beetje alle boeken van de American Mathematical Society en dus ook van dit (weliswaar fraaie en ook fraai uitgevoerde) boek weer aan de tamelijk hoge kant is (ook vergeleken met boeken van een soortgelijke kwaliteit van andere uitgeverijen) en even jammer is het om — financieel — gedwongen te worden juist dit boek als e-boek aan te schaffen, want je gunt het vooral iedere wiskundestudent en uiteraard andere (al dan niet minder-vermogende) geïnteresseerden zo'n boek op de plank te hebben staan en in de hand te kunnen nemen. *Joop van der Vaart*



David M. Bressoud

**Calculus Reordered
A History of the Big Ideas**

Princeton University Press, 2019
xvi + 224 p., prijs \$ 29.95
ISBN 9780691181318

Al sinds de jaren vijftig woedt er in de Verenigde Staten een debat over hoe calculus op colleges onderwezen moet worden. David Bressoud heeft daar een heel duidelijke mening over, die in dit boek helder naar voren komt. In zijn visie moet men calculus onderwijzen in de geest en min of meer de volgorde van de historische ontwikkeling. Een argument dat hij in het voorwoord en in de appendix van zijn boek aandraagt, is dat parallel aan die historische ontwikkeling het abstractieniveau toeneemt. Hij meent dat door op een vrij hoog abstractieniveau (= met limieten) te beginnen, veel studenten de draad en het plezier al snel kwijt raken.

In de eerste vier hoofdstukken van het boek beschrijft de auteur de geschiedenis van vier basisideeën van de calculus. Het vijfde en laatste hoofdstuk gaat over de ontwikkelingen in gang gezet na Cauchy. De intuïtie wordt in die periode aangevuld met meer formele bewijzen en een beter begrip en fundering van de reële getallen. Keuzeaxioma en continuïteitshypothese komen in het spel en de calculus wordt reële analyse. Bressoud bespreekt bijdragen aan die reële analyse van onder meer Cantor, Weierstrass, Riemann en Lebesgue. In de appendix bespreekt Bressoud zijn ideeën over calculusonderwijs.

Bressouds vier basisideeën van de calculus vinden we in: Hoofdstuk 1 'Accumulation', Hoofdstuk 2 'Ratios of Change', Hoofdstuk 3 'Sequences of Partial Sums' en Hoofdstuk 4 'The Algebra of Inequalities'. Hoofdstuk 1 gaat over integreren *avant la lettre*, begint met Archimedes' berekeningen van inhoud van de bol en oppervlak van de cirkel, en vervolgt met onder meer berekeningen van het volume van een paraboloid en het oppervlak onder $y = x^k$ volgens Fermat. Hoofdstuk 2 vangt aan met interpolatiemethoden die in India rond 500 A.D. werden ontwikkeld voor het maken van sinus- en cosinustafels. Via Napier, Descartes, Fermat, Wallis, Newton, Leibnitz en de Bernoulli's, eindigt dit hoofdstuk met de klassieke differentiaalvergelijkingen uit de mathematische

fysica. Hoofdstuk 3 behandelt de geschiedenis van reeksen en bevat secties over het werk van Taylor, Euler, D'Alembert, Lagrange en Fourier. Hoofdstuk 4 gaat over de ontwikkeling van het limietbegrip en continuïteit. Bressoud behandelt het werk van Cauchy en zijn voorgangers en besteedt aandacht aan de moeite die Cauchy had met uniforme continuïteit.

Het boek richt zich vooral tot collegestudenten en is levendig geschreven in een aantrekkelijke stijl. Bressoud legt veel van de wiskunde die hij bespreekt goed uit op het niveau van een eerstejaarscollege of even daaronder. Dat dit wat minder lukt bij meer geavanceerde onderwerpen als Fourieranalyse of de Lebesgue-integraal is niet vreemd. Voor studenten natuurwetenschappen en techniek die iets willen weten over de achtergrond en historie van de calculus die zij moeten leren, is dit een prachtig boek. Dat geldt ook voor hun docenten, ook als zij de opvattingen van Bressoud over onderwijs niet delen.

Calculus Reordered beperkt zich tot de geschiedenis van de calculus. Algebra en meetkunde worden nauwelijks besproken. Van Fermat komen alleen de bijdragen aan de analytische meetkunde aan de orde, Galois wordt niet genoemd en de rol van Gauss in de ontwikkeling van de wiskunde blijft sterk onderbelicht.

Mij stoorde het dat Bressoud ervoor kiest alle wiskundigen voor 1700 als *philosopher* aan te duiden, en die tussen 1700 en 1850 als *scientist*. Zijn argument is dat velen zichzelf ook als wijsgeer zagen, maar toch, op de grafsteen van Van Ceulen (1540–1610) staat echt 'professor in de wisconstige wetenschappen'.

In Hoofdstuk 5 staat een opmerkelijke fout: De Cantor-achtige verzameling die ontstaat door voortdurend in plaats van het middelste $1/3$ interval, het middelste $1/5$ interval te verwijderen, heeft nog steeds maat 0, en geen positieve maat. Op de webpagina van Bressoud staat een lijst met correcties, waar ook deze fout gecorrigeerd is. Deze kleine punten van kritiek nemen niet weg dat Bressoud een leuk en leeswaardig boek over de geschiedenis van de calculus heeft geschreven. *Jan Wiegerinck*



Jan Krajíček

Proof Complexity

Encyclopedia of Mathematics and its Applications 170
Cambridge University Press, 2019
xiv + 516 p., prijs £105.00
ISBN 9781108416849

When Alan Turing, in 1936, formulated a notion of 'computable' in terms of the machine which carries his name, he solved at the same time a problem posed by Hilbert, the so-called *Entscheidungsproblem*: decide by an algorithm whether a given formula of first-order logic is a tautology. Turing showed that no such algorithm can exist. Algorithms of the kind Hilbert asked for, are available for *propositional logic*.

Things are different if one considers the fine-structure of computability: restrictions on the consumption of time and memory space during computations lead to so-called 'complexity classes'; also, machines are allowed to operate in non-deterministic fash-

ion. The famous P versus NP problem, still unsolved, asks whether non-deterministic polynomial time computability is strictly stronger than its deterministic counterpart. The subject which studies classes of problems in terms of the resources necessary for their solution, is called complexity theory.

There is a strong connection between complexity theory and logic, and this was a fertile field of exploration between the 1960s and the early 2000s. However, as the author remarks in his Introduction: “For some years now [...] progress has been more in sharpening and generalizing earlier advances [...] but not in fact that much [...] in developing completely new ideas.” It seems the right time, therefore, to write an overview of the field.

One approach to the logical side of complexity theory is to study the lengths of proofs in some calculus (many combinatorial problems can be reduced to problems of this kind); another uses techniques of mathematical logic for the transformation of complexity issues into questions about proofs in propositional logic. A paradigmatic example of a mathematical principle which can

be stated in various forms as a statement about proofs, is the *pigeon-hole principle*.

This handbook is divided into 4 parts. Part 1, ‘Basic Concepts’, treats the fundamentals of both complexity theory and proof systems for different kinds of logic. The second chapter treats relations between proofs in so-called *bounded arithmetic* (theories of the rig structure on the natural numbers with only weak forms of induction) and propositional logic proofs. Part 3, ‘Lower Bounds’, is what the author calls the *royal subject of proof complexity*, as the fundamental problems are formulated as questions about lengths of proofs. Finally, in the fourth and last part, problems of a more tentative and wider perspective are discussed.

Each part is divided into chapters and a section ‘Bibliographical and Other Remarks’ concludes each chapter; so the reader can get a view of the development of the topic discussed in the chapter.

This book is in my view an excellent reference manual for a fundamental topic in mathematical logic and theoretical computer science.

Jaap van Oosten

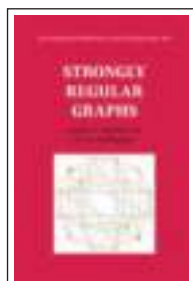
Recent verschenen publicaties. Als u een van deze boeken wilt bespreken of als u suggesties heeft voor andere boeken voor deze rubriek, laat dit dan per e-mail weten aan reviews@nieuwarchief.nl.



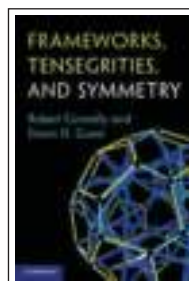
Joppe Bos, Martijn Stam
Computational Cryptography
Algorithmic Aspects of Cryptology
Cambridge University Press, 2021
ISBN 9781108854207
doi.org/10.1017/9781108854207



Hideaki Ikoma, Shu Kawaguchi, Atsushi Moriawaki
The Mordell Conjecture
A Complete Proof from Diophantine Geometry
Cambridge University Press, 2022
ISBN 9781108991445
doi.org/10.1017/9781108991445



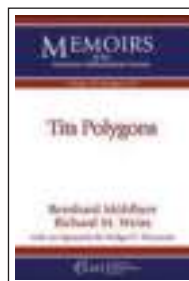
Andries E. Brouwer, H. Van Maldeghem
Strongly Regular Graphs
Cambridge University Press, 2022
ISBN 9781009057226
doi.org/10.1017/9781009057226



Robert Connelly, Simon D. Guest
Frameworks, Tensegrities, and Symmetry
Cambridge University Press, 2022
ISBN 9780511843297
doi.org/10.1017/9780511843297



Lev Bukovský, Eva Coplakova, Klaas Pieter Hart
Verzamelingen en van alles eromheen
Epsilon Uitgaven, deel 96, 2022
ISBN 9789050411905
epsilon-uitgaven.nl/wetenschappelijke-reeks



Bernhard Mühlherr, Richard M. Weiss
Tits Polygons
American Mathematical Society, 2022
ISBN 9781470451011
bookstore.ams.org/memo-275-1352

Problemen

| Problem Section

This Problem Section is open to everyone; everybody is encouraged to send in solutions and propose problems. Group contributions are welcome. We will select the most elegant solutions for publication. For this, solutions should be received before **15 April 2022**. The solutions of the problems in this issue will appear in one of the subsequent issues.

Problem A (proposed by Hendrik Lenstra)

Let R be a ring. We say $x \in R$ is a *unit* if there exists some $y \in R$ such that $xy = yx = 1$ and write R^* for the set of units of R . Show that $1 < \#(R \setminus R^*) < \infty$ implies $1 < \#R < \infty$.

Problem B (proposed by Hendrik Lenstra)

Let G be a group. For $n \in \mathbb{Z}_{>0}$ write $G[n] = \{g \in G \mid g^n = 1\}$ and $G^n = \{g^n \mid g \in G\}$.

1. Suppose G is abelian and $m, n \in \mathbb{Z}_{>0}$. Show that $G[n] \subseteq G^m$ if and only if $G[m] \subseteq G^n$.
2. Show that there exist $m, n \in \mathbb{Z}_{>0}$ such that the above is false when we drop the assumption that G is abelian.

Problem C (proposed by Onno Berrevoets)

Let $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ be a twice differentiable function. Suppose that $a < b < c$ are real numbers such that $f(a) = f(b) = f(c) = 0$. Prove that there exists $x \in (a, c)$ such that

$$f'(x) + f''(x) = f(x)^2 + 2f(x)f'(x).$$

Edition 2021-2 We received solutions from Rik Biel, Rob Eggermont and Sander Scholtus. The solution of Problem B will appear in a future issue.

Problem 2021-2/A (proposed by Onno Berrevoets)

A hot frying pan contains 2^{2021} potato slices. Each time we toss the slices, each slice has a chance of 0.5 to land on its other side. These probabilities are individually independent. How often do we need to toss the slices so that with probability at least 0.5 all slices will have lain on both sides?

Solution This solution is submitted by Sander Scholtus (also solved by Rik Biel). The answer is: 2022 times. Denote the probability that a potato slice has landed on both sides after tossing k times by p_k . It is clear that $p_0 = 0$ and $p_1 = \frac{1}{2}$. Generally, p_k equals 1 minus the probability that a potato slice has not flipped after tossing k times, i.e., we have $p_k = 1 - (1 - p_1)^k = 1 - 2^{-k}$ for all $k \in \{0, 1, 2, \dots\}$. By independence of the potato slices, we now find that all $N := 2^{2021}$ slices are flipped after tossing k times equals $p_k^N = (1 - 2^{-k})^N$. Hence, we are asked to find the minimal value of k for which we have

$$\left(1 - \frac{1}{2^k}\right)^N > \frac{1}{2}.$$

The left hand side is clearly a strictly increasing function of k . Now consider $k = 2021$. In this case, we have

$$\left(1 - \frac{1}{2^k}\right)^N = \left(1 - \frac{1}{N}\right)^N.$$

As N is very large, we can approximate this number sufficiently well with $1/e < \frac{1}{2}$ and

conclude that $k = 2021$ is too small to achieve our desired result. We try the next value $k = 2022$. In this case we find

$$\left(1 - \frac{1}{2^k}\right)^N = \left(1 - \frac{1}{2N}\right)^N = \sqrt{\left(1 - \frac{1}{N}\right)^N} \approx \sqrt{\frac{1}{e}} > \frac{1}{2}.$$

Hence $k = 2022$ is the desired number to toss the frying pan.

Justifications of the approximations in the previous argument can be found in the following inequalities:

$$\left(1 - \frac{1}{x}\right)^x < \frac{1}{e} < \left(1 - \frac{1}{x}\right)^{x-1}.$$

Indeed, in the limit $x \rightarrow \infty$, these inequalities become equalities. Moreover, $(1 - \frac{1}{x})^x$ and $(1 - \frac{1}{x})^{x-1}$ are respectively increasing and decreasing functions, which can be shown by taking the derivative and using the Mercator series of the logarithm.

Problem 2021-2/C (proposed by Onno Berrevoets)

Let R be a commutative ring, and consider the set X of R -ideals J with $J^2 \neq J$. Suppose that I is a maximal element of X (with respect to inclusion). Prove that I is a maximal ideal of R .

Solution This solution is submitted by Rob Eggermont. Without loss of generality, we may assume $I^2 = 0$. To prove I is maximal, it suffices to prove that for all $x \in R \setminus I$, x is invertible (mod I). Let $x \in R \setminus I$. By assumption of maximality, $(xR + I)^2 = xR + I$, so there are $r \in R$, $i \in I$ such that $x = rx^2 + ix$. Our aim is to show $rx = 1 \pmod{I}$. Write $u = 1 - rx$. Note that we may rewrite $x = rx^2 + ix$ as $xu = ix$. We claim that $u^3 = u^2$. Indeed, we have

$$u^3 = u^2(1 - rx) = u^2 - rxu^2 = u^2 - rxi^2 = u^2.$$

from which it follows that $u^2(1 - u) = 0$. As a consequence, we see that $(1 - u)R \cap u^2R = 0$: for any $r, s \in R$ with $(1 - u)s = u^2r$, we have $u^2r = u^4r = u^2(1 - u)s = 0$.

Consider the ideal J generated by u^2 and I . Observe that $J^2 = (u^2R + I)^2 = u^4R + u^2I = u^2R$. If $u^2 \notin I$, then $J^2 = J$ by our assumption on maximality, so then J equals u^2R , hence $I \subseteq u^2R$. In particular, we have $(1 - u)I = 0$ since $(1 - u)u^2 = 0$. Consider the ideal J' generated by $(1 - u)$ and I . We have $J'^2 \subseteq (1 - u)R$. Recall that $(1 - u)R \cap u^2R = 0$. Since I is not zero and contained in u^2R , it follows that J'^2 is strictly contained in J' , hence $J' = I$, so $1 - u \in I \subseteq u^2R$. From $(1 - u)R \cap u^2R = 0$ it now follows that $1 - u = 0$, so $u = 1$. However, this means $rx = 0$, and we find $x = ix$, contradicting our assumption that x is not in I . So we must have $u^2 \in I$. This yields $u^2 = u^4 = 0$.

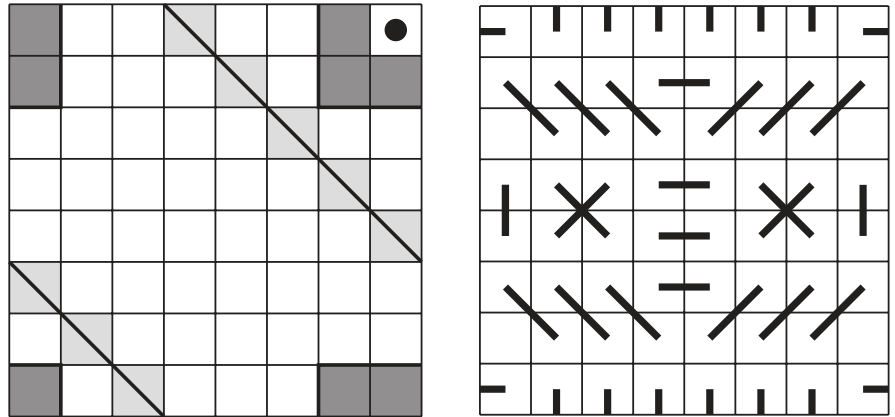
It is easy to see that $(uR + I)^3 = 0$, since $I^2 = 0$ and $u^2 = 0$. Since $uR + I$ is not zero, it follows that $(uR + I)^2$ is strictly contained in $uR + I$. Hence $u \in I$, and therefore $rx = 1 \pmod{I}$. So x is invertible (mod I), as was to be shown.

Edition 2021-3 We received solutions from Rik Biel, Mike Daas, Nicky Hekster, Thijmen Krebs and Wim Nuij.

Problem 2021-3/A (proposed by Daan van Gent)

Write $T = (\mathbb{Z}/8\mathbb{Z})^2$ for the *torus chessboard*. For every square $t \in T$ its *neighbours* are the squares in the set $\{t + d \mid d \in D\}$ for $D = \{-1, 0, 1\}^2 \setminus \{(0, 0)\}$. A *line* is a set of squares of the form $\{t + nd \mid n \in \mathbb{Z}\}$ for $t \in T$ and $d \in D$. The left figure on the next page gives an example of the neighbours (coloured dark grey) of the dotted square, as well as an example of a line (coloured light grey). Disprove or give an example: There exists a pairing of neighbouring squares, i.e. a partitioning of T into sets $\{s, t\}$ of size 2 such that s and t are neighbours, such that every line contains a pair.

Solution The right figure shows the solution by Thijmen Krebs (also solved by Wim Nuij):



Problem 2021-3/B (proposed by Hendrik Lenstra)

Write φ for the Euler totient function. Determine all infinite sequences $(a_n)_{n \in \mathbb{Z}_{\geq 0}}$ of positive integers satisfying $\varphi(a_{n+1}) = a_n$ for all $n \geq 0$.

Solution Let $(a_n)_{n \geq 0}$ satisfy $\varphi(a_{n+1}) = a_n$ for all $n \geq 0$. Write $X = \{2^a \cdot 3^b \mid a, b \in \mathbb{Z}_{\geq 0}\}$.

Claim: $(a_n)_n \subset X$.

Proof: We will prove this claim by contradiction, so assume that there exists an integer $N \geq 0$ for which $a_N \notin X$. Then for all $n \geq N$ we have that $a_n \notin X$, and without loss of generality $N = 0$. Then the sequence $(\text{ord}_2(a_n))_{n \geq 0}$ is weakly decreasing. Therefore, without loss of generality we may assume that the sequence $(\text{ord}_2(a_n))_{n \geq 0}$ is constant. Now by dividing the sequence $(a_n)_n$ by $2^{\text{ord}_2(a_0)-1}$ we may assume that $\text{ord}_2(a_n) = 1$ for all n . For every n , write $a_n = 2b_n$ with $b_n > 1$ odd. Then for every $n \geq 1$ we have that b_n is a prime power: otherwise $\text{ord}_2(a_{n-1}) = \text{ord}_2(\varphi(b_n))$ would be too large. Hence write $b_n = p_n^{c_n}$ with p_n an odd prime and $c_n \in \mathbb{Z}_{\geq 1}$. Then for every $n \geq 2$ we see that $\varphi(b_n)/2 = p_n^{c_n-1} \cdot (p_n-1)/2$ is a prime power, and since $p_n \neq 3$ we find that $c_n = 1$. Hence, $(b_n)_{n \geq 2}$ is a sequence of prime numbers satisfying $b_n = 2b_{n-1} + 1$. Then for all $n \geq 0$ we find that $b_{n+2} = 2^n(b_2 + 1) - 1$. Let p be any prime divisor of b_2 . Then p divides b_{n+2} whenever $2^n \equiv 1$ modulo p , so in this case $b_{n+2} = p$. This happens infinitely many times and is a contradiction since $(b_n)_n$ is strictly increasing. $\square$

By the previous claim we conclude that for all $n \geq 0$ we have $a_n \in X$. The sequences $(a_n)_n \subset X$ that suffice the relation $\varphi(a_{n+1}) = a_n$ for all $n \geq 0$ are precisely those $(a_n)_n$ for which $(a_{n+1}/a_n)_n$ is a weakly increasing sequence in $\{2, 3\}$.

Problem 2021-3/C (proposed by Hendrik Lenstra)

Let R be a ring. We say $x \in R$ is a *unit* if there exists some $y \in R$ such that $xy = yx = 1$, and $x \in R$ is *idempotent* if $x^2 = x$. Show that if every unit of R is central, then every idempotent of R is central.

Solution This solution is submitted by Mike Daas (also solved by Rik Biel and Nicky Hekster). Assume that every unit of R is central. Note that for every idempotent $e \in R$ it holds that $e(1-e) = (1-e)e = 0$.

Claim: $e \in R$ is a central idempotent if and only if $(1-e)Re = eR(1-e) = 0$.

Proof. If e is a central idempotent, then $(1-e)Re = (1-e)eR = 0$ and similarly $eR(1-e) = 0$. Now suppose $(1-e)Re = eR(1-e) = 0$. For any $x \in R$ we have $0 = (1-e)xe = xe - exe$ so $xe = exe$ and similarly $ex = exe$. Hence $xe = ex$ and e is central. Taking $x = 1$ in the above shows $e = e^2$, so e is idempotent. $\square$

Let $e \in R$ be idempotent. Suppose $x \in (1-e)Re$. Then $x^2 = 0$, so $1+x$ has inverse $1-x$. By assumption $1+x$ is central. As 1 is trivially central we conclude that x is central. Then $x = (1-e)xe = (1-e)ex = 0$, so $(1-e)Re = 0$. Similarly $eR(1-e) = 0$, so e is central by the above.