

Inhoud | Contents

Artikelen | Features

- Interview | Interview**
 146 László Lovász: On graphs and graphons
Raf Bocklandt, Nicos Starreveld
- De oplossing | The Solution**
 153 Easier variants of notorious math problems
Marijn J.H. Heule
- Onderwijs | Education**
 158 Bespreking examen vwo wiskunde B 2021: Hoe moeilijk kan het zijn?
Wim Caspers
- Column | Column**
 163 En flagrant délit
Piet Groeneboom
- Geschiedenis | History**
 170 Tic-tac geometry: A theorem in full swing
Nicolas Michel
- Geschiedenis | History**
 181 A testimonial of troubled times
Raf Bocklandt
- In Memoriam | Obituary**
 185 Arie Hordijk: Bevlogen wetenschapper met een diepgaand inzicht
Lodewijk Kallenberg, Ger Koole, Floske Spieksma
- Column | Column**
 191 Wiskundigen in den vreemde: De zon schijnt bijna altijd
Marten Wortel

Rubrieken | Departments

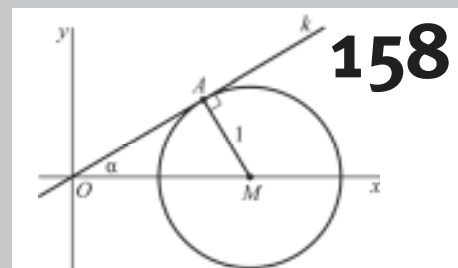
- 139 Redactioneel
Mark Timmer
- 140 Agenda
Nikki Levering
- 142 Nieuws
Nikki Levering
- 161 Proof by example: Aida Abiad
Francesca Arici, Clara Stegehuis
- 166 Stoffelijke resten: Covid-campussen
Cor Kraaikamp, Robbert Fokkink
- 179 Het keerpunt van Lowie van Oers
Daan Mulder
- 192 In de verdediging
Nicolaos Starreveld
- 195 Boekbesprekingen
Hans Cuypers, Hans Sterk
- 200 Problemen
Onno Berrevoets, Daan van Gent

Uitgelicht

146



Een interview met László Lovász, een van de twee winnaars van de Abelprijs 2021.



Het examen vwo wiskunde B 2021 wordt besproken door Wim Caspers.

Colofon

Het Nieuw Archief voor Wiskunde is een uitgave van het Koninklijk Wiskundig Genootschap en verschijnt vier maal per jaar. Het tijdschrift richt zich op eenieder die zich beroepsmatig met wiskunde bezighoudt, als academisch of industrieel onderzoeker, student, leraar, journalist of beleidsmaker. Het stelt zich ten doel te berichten over ontwikkelingen in de wiskunde in het algemeen en in de Nederlandse wiskunde in het bijzonder.

ISSN 0028-9825

Adres

Nieuw Archief voor Wiskunde
Centrum Wiskunde & Informatica
Postbus 94079, 1090 GB Amsterdam
tel. 020-5924288
redactie@nieuwarchief.nl
www.nieuwarchief.nl

Hoofredactie

Raf Bocklandt (r.r.j.bocklandt@uva.nl)
Robbert Fokkink (r.j.fokkink@tudelft.nl)

Eindredactie/Bladmanager

Fred Drissen (fred@nieuwarchief.nl)

Redactie

Francesca Arici (UL), Viktor Blåsjö (UU), Hans Cuypers (TU/e), Teun Koetsier (VU), Nikki Levering (UvA), Daan Mulder, Nicolaos Starreveld (UvA), Clara Stegehuis (UT), Hans Sterk (TU/e), Mark Timmer (UT)

Problemenrubriek (problems@nieuwarchief.nl)

Onno Berrevoets en Daan van Gent

Bureauredactie

Anne van Grinsven

Illustraties

Ryu Tajiri

Vormgeving

Susanne Laws (omslag, begeleiding binnenwerk)
Kitty Molenaar (ontwerp)

Druk

Veldhuis Media

Advertenties

advertenties@nieuwarchief.nl

Koninklijk Wiskundig Genootschap

www.wiskgenoot.nl

Platform Wiskunde Nederland

www.platformwiskunde.nl

European Mathematical Society

www.euro-math-soc.eu

International Mathematical Union

www.mathunion.org

Koninklijk Wiskundig Genootschap

Het Koninklijk Wiskundig Genootschap (KWG) is een landelijke vereniging van beoefenaars van de wiskunde. In 1778 opgericht onder de zinspreuk: 'Een onvermoeide arbeid komt alles te boven' is het 's werelds oudste nationale wiskundegenootschap. Leden ontvangen het Nieuw Archief voor Wiskunde als onderdeel van hun lidmaatschap.

Bestuur

Barry Koren (TU/e, voorzitter), Wioletta Ruszel (TUD, penningmeester), Willem Jan Palenstijn (CWI, secretaris), Danny Beckers (VU), Rogier Bos (UU), Marie-Collette van Lieshout (CWI), Michael Mäger (RU), Alef Sterk (RUG), Jan Wiegerinck (UvA).

Secretariaat

Koninklijk Wiskundig Genootschap, CWI
Postbus 94079, 1090 GB Amsterdam
wiskgenoot@wiskgenoot.nl

Ledenadministratie KWG / Abonnementen

admin@wiskgenoot.nl, tel. 020-5924008
Wijzigingen of opzegging kunt u ook doorgeven door in te loggen op www.wiskgenoot.nl.

Contributie

Tarieven per jaar (bij betaling per automatische incasso krijgt u €2,50 korting):

- gewoon lid: €97,50
 - reciprociteitslid: €77,50
 - gepensioneerden en werklozen: €52,50
 - aio's, oio's, studenten: €42,50 (max. 4 jaar)
 - lid zonder Nieuw Archief: €57,50
- Studenten en pas afgestudeerden kunnen een jaar lang gratis lid worden.

Voor verzending van het Nieuw Archief naar het buitenland wordt een portotoeslag van €10 in rekening gebracht.

Instituten in Nederland en buitenland kunnen zich abonneren op het Nieuw Archief voor Wiskunde voor €105 (Nederland), €115 (Europa) of €117,50 (buiten Europa).

Members of foreign societies

Members of SIAM, the *Société Mathématique de France*, the *Gesellschaft für Angewandte Mathematik und Mechanik*, the *Deutsche Mathematiker-Vereinigung*, and of the *American, Australian, Belgian, Indian, London, Spanish, and South-African Mathematical Societies* living outside of the Netherlands pay €77,50 instead of the full membership fee of €97,50 a year. Conversely, these foreign societies, as well as the VvS+OR and the NVORWO, have reduced membership fees for KWG members. A postage charge of €10 is added for members living abroad but in Europe, and a charge of €12,50 for members living outside of Europe.

Exchange subscriptions

Koninklijk Wiskundig Genootschap Library
Centrum Wiskunde & Informatica
P.O. Box 94079, NL-1090 GB Amsterdam
KWG-exchange@cw.nl

Informatie voor auteurs

Kopij

Kopij dient per e-mail te worden aangeboden aan kopij@nieuwarchief.nl. Voor meer informatie en auteursinstructies zie www.nieuwarchief.nl.

Volgende nummers

nummer	maand	verschijnen	deadline kopij
22(4)	december	2021	verstrekken
23(1)	maart	2022	01-11-2021
23(2)	juni	2022	01-02-2022
23(3)	september	2022	01-05-2022

Instituuts- en bedrijfsleden

De publicaties van het KWG worden mede mogelijk gemaakt door de bijdragen van de volgende instituten en bedrijven.

	Centrum Wiskunde & Informatica
	Universiteit van Amsterdam
	Vrije Universiteit Amsterdam
	Rijksuniversiteit Groningen
	Universiteit Leiden
	Radboud Universiteit Nijmegen
	Universiteit Utrecht
	Technische Universiteit Delft
	Technische Universiteit Eindhoven
	Universiteit Twente
	Elsevier
	ORTEC

Op het omslag

Met computers wordt gezocht naar oplossingen van al lang openstaande problemen, zoals *The Collatz conjecture*, *The Chromatic Number of the Plane* en *The Most Wanted Folkman Graph*. Lees het artikel van Marijn Heule op pagina 153. [Afbeelding: bewerking van de graaf G_{127}]

Verandering

Een stabiele factor in het wiskundeonderwijs is *verandering*. Reeds in de onderbouw maken leerlingen kennis met de richtingscoëfficiënt (de verandering in y als x één eenheid toeneemt). Later komen concepten als het differentiequotiënt en de afgeleide aan bod, uitgebreid naar differentiaalvergelijkingen in wiskunde D of het vervolgonderwijs. Ook in de statistiek komt veranderlijkheid aan bod.

Dat verandering/veranderlijkheid wiskundig bestudeerd kan worden, zal de gemiddelde leerling dus hopelijk wel duidelijk worden in de loop der jaren. Of dat inzicht ook komt betreffende de veranderlijkheid van de wiskunde zelf, is maar de vraag. Menig leerling lijkt te denken dat wiskunde altijd al heeft bestaan, nu eenmaal is zoals het is en niet meer aan verandering of ontwikkeling onderhevig is. “Een profielwerkstuk over wiskunde? Maar wat kan je daar nou aan onderzoeken dan?” Hier ligt voor de docent een mooie taak — door leerlingen een kijkje te geven in de geschiedenis van de wiskunde en/of de wetenschappelijke ontwikkelingen die nog steeds gaande zijn, wordt duidelijk dat wiskunde een levend vakgebied is dat is ontstaan door mensen en ook nog steeds door mensen wordt uitgebreid. Wellicht is het leuk om in de klas iets te vertellen over de winnaars van de Abelprijs van dit jaar, op basis van het interview met László Lovász in deze uitgave.

Minstens zo veranderlijk als de wiskunde zelf is het wiskundeonderwijs; de afgelopen decennia is het curriculum verscheidene malen gewijzigd. Bij de invoering van de Tweede Fase werden wiskunde A en B in 1998 veranderd in wiskunde A1, A12, B1 en B12, om in 2007 verder te evolueren in wiskunde A, B, C en D. Per 2015 werd ook de invulling van die vakken weer veranderd, met als grootste wijziging in wiskunde B de herinvoering van de analytische meetkunde. Dergelijke wijzigingen houden het ook interessant voor de docent, die zich om de zoveel jaar weer even mag verdiepen in de inhoud en didactiek van een ander stukje wiskunde. Het sluit bovendien goed aan bij het beeld dat wiskunde geen vaststaand geheel is maar nog altijd in ontwikkeling is. Het huidige curriculum is ook alweer uitgebreid onder de loop geno-

men. Eerst heeft een ontwikkelteam van Curriculum.nu voorstellen opgeleverd voor een vernieuwd curriculum (zoals in het juni-nummer van vorig jaar uitgebreid besproken door Maarten Müller), waar vervolgens in de afgelopen periode door een in de zomer van 2020 ingestelde wetenschappelijke curriculumcommissie weer adviezen over zijn uitgebracht. Naar verwachting zal er binnenkort een vakvernieuwingscommissie met onder anderen wetenschappers en docenten uit het voortgezet onderwijs en het vervolgonderwijs van start gaan om, met de adviezen van Curriculum.nu en de wetenschappelijke curriculumcommissie als uitgangspunten, een nadere uitwerking te gaan geven voor een nieuw curriculum voor de bovenbouw van havo/vwo. Uiteraard zullen we u hier in de toekomst weer van op de hoogte houden.

Ook de manier van lesgeven is door de jaren heen vanzelfsprekend niet constant geweest. Met name corona heeft de veranderingen op dit vlak noodgedwongen in een stroomversnelling gebracht. In korte tijd moest er vorig jaar worden overgestapt op online lessen, later vaak hybride. Enkele maanden geleden werd voor het eerst eindexamen gedaan door leerlingen die zijn onderworpen aan dergelijke onderwijsvormen, zoals u verderop kunt lezen in het artikel van Wim Caspers. Mijn leerlingen hebben zich gelukkig goed gevoegd naar alle veranderingen en de examens prima doorstaan. Niettemin zal het ook komend schooljaar weer een hele kluit worden om de nieuwe (examen)klassen op niveau te gaan krijgen, na zo'n 1,5 jaar aan suboptimale leerprocessen. Hoewel een online klas met dempbare leerlingen aan de ene kant wel lekker makkelijk lijkt, kijk ik in ieder geval weer erg uit naar volle klassen met levendige leerlingen — dat lijkt me een aangename verandering. ☼

Mark Timmer, redacteur

Wiskundedocent, Twents Carmel College, Oldenzaal, en
Vakdidacticus, ELAN, Vakgroep Docentontwikkeling, Universiteit Twente

Agenda

| Upcoming Events

september 2021

17 september 2021

Finale Nederlandse Wiskunde Olympiade

Nationale finale van de wiskundeolympiade voor middelbare scholieren.

plaats Technische Universiteit Eindhoven

info wiskundeolympiade.nl

23 september 2021

Junior Wiskunde Olympiade

Jaarlijks landelijke wiskundewedstrijd voor leerlingen van havo en vwo, georganiseerd door de VU in samenwerking met de Nederlandse Wiskunde Olympiade en W4Kangoeroe.

plaats eigen school

info wiskundeolympiade.nl

24 september 2021

Onderwijs meets onderzoek

Symposium waarbij wiskundedocenten en onderzoekers in wiskunde-educatie kijken naar de vraag wat educatie zelf en het onderzoek naar educatie voor elkaar kunnen betekenen.

plaats Vergadercentrum Domstad, Utrecht

info mathematischcongres.nl

24 september 2021

Wiskundetoernooi

Wiskundetoernooi voor teams van middelbare scholieren. Een team bestaat uit 4 of 5 leerlingen uit 5–6 vwo en een begeleider.

plaats Radboud Universiteit, Nijmegen

info ru.nl/wiskundetoernooi

27–29 september 2021

International Conference on Computational Logistics (ICCL2021)

Conferentie voor wetenschappers in operations research, business analytics en artificial intelligence.

plaats online

info iccl2021.nl

oktober 2021

2 oktober 2021

NVvW Geschiedenis-symposium

Symposium van de werkgroep Geschiedenis van de NVvW, met als thema 'Coryfeeën met ideeën'. Sprekers belichten de vakdidactische visie van vedettes uit het wiskundeonderwijs.

plaats online

info nvvw.nl

6–8 oktober 2021

45th Woudschoten Conference 2021

Een jaarlijkse conferentie van de Nederlands-Vlaamse Numerieke Analyse-groepen, georganiseerd door de Werkgemeenschap Scientific Computing (WSC).

plaats Woudschoten, Zeist

info wsc.project.cwi.nl/events

21–22 oktober 2021

Road Traffic Flow: Analysis, Optimization and Control

Tweedaagse workshop over wegverkeeronderzoek, met als doel samenwerking tussen de verschillende onderzoeksgebieden te bevorderen.

plaats Eurandom, Eindhoven

info eurandom.tue.nl

25–29 oktober 2021

Nonlocality in Analysis, Numerics and Applications

Lorentz workshop, mede georganiseerd door Carolin Kreisbeck (KU Eichstätt-Ingolstadt) en Harbir Antil (George Mason University).

plaats Lorentz Center@Snellius, Leiden

info lorentzcenter.nl

november 2021

1–5 november 2021

Computational Mathematics and Machine Learning

Lorentz workshop, mede georganiseerd door Wil Schilders (TU/e).

plaats Lorentz Center@Oort, Leiden

info lorentzcenter.nl

4 november 2021

CWI Lectures

Jaarlijkse lezingen, met dit jaar als thema 'Decision Making under Uncertainty'. Sprekers zijn onder anderen Dick den Hertog (UvA) en Pinar Keskinocak (Georgia Tech).

plaats Science Park Amsterdam en/of online

info cwi.nl

Suggesties voor deze agenda zijn welkom.

Redacteur: Nikki Levering

agenda@nieuwarchief.nl

6 november 2021

Jaarvergadering NVvW

Jaarlijkse vergadering en studiedag van de Nederlandse Vereniging van Wiskundeleraren.

plaats *nog te bepalen*

info nvvw.nl/jaarvergadering

12 november 2021

Prijsuitreiking Nederlandse Wiskunde Olympiade

De prijsuitreiking van de finale van de Nederlandse Wiskunde Olympiade.

plaats *Technische Universiteit Eindhoven*

info wiskundeolympiade.nl

12 november 2021

Voorronde Wiskunde A-lympiade

Voorronde van de jaarlijkse competitie voor leerlingen uit de bovenbouw havo/vwo met wiskunde A in hun pakket.

plaats *eigen school*

info wiskundeintams.sites.uu.nl

12 november 2021

Wiskunde B-dag

Een competitie voor leerlingen uit de bovenbouw havo/vwo, die wiskunde B in hun pakket hebben. Leerlingen werken in kleine teams de hele dag aan een wiskundig probleem.

plaats *eigen school*

info wiskundeintams.sites.uu.nl

15–19 november 2021

Quantum Probability and Non-Commutative Harmonic Analysis

Lorentz workshop, mede georganiseerd door Martijn Caspers (TU Delft).

plaats *Lorentz Center@Snellius, Leiden*

info lorentzcenter.nl

25–26 november 2021

Annual Meeting Dutch Inverse Problems Community

Eerste editie van de jaarlijkse bijeenkomst voor de Dutch Inverse Problems Community.

plaats *Congrescentrum De Werelt, Lunteren*

info cwi.nl

december 2021

13–17 december 2021

Safe, Anytime-Valid Inference

Eurandom workshop, georganiseerd door Peter Grünwald (CWI) en Aaditya Ramdas (Carnegie Mellon University).

plaats *Eurandom, Eindhoven*

info eurandom.tue.nl

januari 2022

17–27 januari 2022

Eerste ronde Nederlandse Wiskunde Olympiade

De eerste ronde van de jaarlijkse landelijke wiskundewedstrijd voor leerlingen uit de onderbouw van het havo en het vwo.

plaats *op eigen school*

info wiskundeolympiade.nl

20–21 januari 2022

40e Panama-conferentie

Conferentie met jubileumthema '40 x Panama: verleden, heden en toekomst'.

plaats *nog te bepalen*

info panamaconferentie.sites.uu.nl

24–26 januari 2022 (onder voorberhoud)

Winter School Mathematical Finance

Winterschool over financiële wiskunde met onder andere minicursussen van Jan Obloj (Oxford) en Gilles Pagès (Paris Diderot).

plaats *Congrescentrum De Werelt, Lunteren*

info staff.fnwi.uva.nl/p.j.c.spreij/winterschool/winterschool.html

28–29 januari 2022

Nationale Wiskunde Dagen

28ste editie van de tweedaagse conferentie voor wiskundeleraren.

plaats *Noordwijkerhout*

info uu.nl/onderwijs/nationale-wiskunde-dagen

februari 2022

16 februari 2022

OnderbouwWiskundeDag

Competitie voor leerlingen uit 3 havo/vwo. In teams wordt gedurende een dag aan een grote wiskundige (denk)opdracht gewerkt, waarin probleemoplossen centraal staat.

plaats *eigen school*

info wiskundeintams.sites.uu.nl

28 februari – 4 maart 2022

Machine-Checked Mathematics

Lorentz workshop, mede georganiseerd door Sander Dahmen en Robert Lewis (VU).

plaats *Lorentz Center@Oort, Leiden*

info lorentzcenter.nl

maart 2022

11 maart 2022

Tweede ronde Nederlandse Wiskunde Olympiade

De tweede ronde van de Nederlandse Wiskunde Olympiade speelt zich af op de universiteiten.

plaats *universiteiten van Nederland*

info wiskundeolympiade.nl

17 maart 2022

W4 Kangoeroe

WereldWijdeWiskundeWedstrijd voor basis- en middelbare scholieren.

plaats *op eigen scholen*

info w4kangoeroe.nl

25 maart 2022

Nationale Rekencoördinator Dag

Dag voor rekencoördinatoren en leerkrachten, waarop het rekenonderwijs van de basisschool centraal staat.

plaats *Utrecht*

info nrcd.sites.uu.nl

30 maart 2022

Grote Rekendag

Dag voor alle basisscholen in Nederland en Vlaanderen (groep 1 t/m 8) die helemaal in het teken staat van rekenen.

plaats *basisscholen Nederland en Vlaanderen*

info groterekendag.nl

Nieuws

| News

Deze rubriek is een kroniek van wiskundige activiteiten in Nederland. Toekomstige activiteiten worden aangekondigd en van voorbije activiteiten wordt verslag gedaan. Wilt u uw aankondiging of verslag in deze rubriek geplaatst zien? Stuur ons dan uw bijdrage, zo mogelijk met illustratie. De redactie behoudt zich het recht voor berichten te weigeren of in te korten.

Redacteur: Nikki Levering
 nieuws@nieuwarchief.nl

Wiskundige Anna Kiesenhofer wint goud op Olympische Spelen

Het was een van de verrassingen van de Olympische Spelen dit jaar: de Oostenrijkse Anna Kiesenhofer won, voor de Nederlandse Annemiek van Vleuten, het goud op de Olympische wegwedstrijd wielrennen bij de vrouwen. Het was met name opvallend omdat, in tegenstelling tot bijvoorbeeld de rensters van de Nederlandse ploeg, Kiesenhofer van beroep geen wielrenster is (ze heeft geen professionele ploeg of trainer), maar wiskundige. Kiesenhofer heeft een master wiskunde van de Universiteit van Cambridge en is in 2017 met haar proefschrift getiteld *Integrable systems on b-symplectic manifolds* cum laude gepromoveerd aan de Polytechnische Universiteit van Catalonië in Barcelona. Momenteel is Kiesenhofer een postdoc in de partiële differentiaalvergelijkingen-groep aan de Technische Universiteit van Lausanne (EPFL).

Anna Kiesenhofer is niet de eerste wiskundige die ook actief was op de Olympische Spelen. Zo speelde Harald Bohr in het Deense voetbalteam dat een zilveren medaille haalde op de Spelen van 1908. Alan Turing zou geprobeerd hebben zich te kwalificeren voor het Britse olympische marathon team van 1948, maar met een vijfde plaats net tekort zijn gekomen bij de kwalificatieronde.

platformwiskunde.nl, theguardian.com



Bijna vierhonderd tieners voor wiskunde

Op initiatief van Platform Wiskunde Nederland konden wiskundeleraars dit jaar voor hun leerlingen met een tien op de eindlijst een speciale oorkonde aanvragen. Docenten hebben hier veel gebruik van gemaakt en er zijn in totaal dan ook 385 oorkondes gemaakt. Er waren zelfs 33 leerlingen die tweemaal een tien voor wiskunde op hun eindlijst hadden (voor wiskunde A én B of wiskunde B én D). Voor leerlingen met een foutloos eindexamen kon er daarnaast ook een Rubik's cube worden aangevraagd. Hier zijn uiteindelijk 43 leerlingen blij mee gemaakt.

nvww.nl

Invitation to join the Dutch Combinatorics Network

As the presence of people with interests in combinatorics and its applications in the Netherlands continues to grow, further mechanisms for sharing enthusiasm and activities become desirable. To support this growth, there is a new online platform for combinatorics: the Dutch Combinatorics Network (DCN). The goal of the DCN is to advance high quality research activities, facilitate collaborations, and encourage greater participation in the area. To efficiently exchange information about combinatorics activities

in the country, the DCN has started with a listserv. All that are engaged in the field of combinatorics and its applications are invited to join the listserv, and share the possibility to join with others who may be interested. Via the listserv one will be able to post and find information about vacancies, local seminars, special events such as workshops or conferences, announcements of PhD defences, non-academic collaboration, internship opportunities and open problems. Some of the information naturally has some overlap with the worldwide DMANet, but other information, such as local weekly seminars and PhD defenses, can with the listserv of the DCN be shared on a national level. The link to the listserv of the DCN be shared on a national level. The link to the listserv is listserv.tudelft.nl/mailman/listinfo/dcn.

Jo Ellis-Monaghan

Nominatie Huibregtsenprijs voor Sandjai Bhulai en Rob van der Mei

Prof.dr. Sandjai Bhulai (VU) en prof.dr. Rob van der Mei (VU, CWI) zijn met hun onderzoeksproject 'Wiskunde voor een veiliger en gezonder Nederland' genomineerd voor de Huibregtsenprijs 2021. Deze prijs wordt jaarlijks uitgereikt op de Avond van Wetenschap & Maatschappij en is bedoeld voor een recent onderzoeksproject dat wetenschappelijke kwaliteit en vernieuwing combineert met een bijzondere maatschappelijke meerwaarde. Dit jaar heeft de zevenkoppige jury, met onder anderen prof.dr.ir. Ionica Smeets (UL), uit 31 inzendingen zes onderzoeken geselecteerd, waaronder dus het project van Bhulai en Van der Mei.

Sandjai Bhulai en Rob van der Mei werken al jaren samen aan wiskundige oplossingen voor maatschappelijke problemen. Zo ontwikkelden ze een nieuwe methode voor het inplannen van ambulances die het aantal te late aankomsten met 25 tot 30 procent verminderde. De methode, die ook ingezet kan worden voor het inplannen van brandweer en politie, wordt inmiddels in een aantal veiligheidsregio's toegepast. Ze werken daarnaast aan het snel herkennen van nieuws op sociale media, en ook daar worden hun methodes al toegepast, onder andere door nu.nl en het ANP. Andere projecten van Bhulai en Van der Mei met grote maatschappelijke waarde betreffen het reduceren van wachttijden in de ouderenzorg, zelfmoordpreventie en de bestrijding van cybercriminaliteit.

vu.nl, cwi.nl, avondwenm.nl



Rob van der Mei



Sandjai Bhulai

Monique Laurent gekozen als EUROPT Fellow 2021

Ieder jaar wijst de EURO Working Group on Continuous Optimization (EUROPT) een EUROPT Fellow aan, waarmee een excellente

onderzoeker binnen continue optimalisatie wordt geëerd. Dit jaar valt deze eer ten deel aan prof.dr. Monique Laurent (CWI, Universiteit Tilburg). Zij heeft de titel ontvangen op de EUROPT workshop, waar ze als Fellow 2021 ook een voordracht heeft mogen houden.

Monique Laurent werd eerder geselecteerd als lid van de Koninklijke Nederlandse Akademie van Wetenschappen en de Koninklijke Hollandsche Maatschappij der Wetenschappen. Ook is Laurent Fellow van de Society for Industrial and Applied Mathematics. In 2014 was ze een van de uitgenodigde sprekers op het International Congress of Mathematicians.

cwi.nl



Monique Laurent

Nederlandse medailles op IMO en BxMO

Op de Internationale Wiskunde Olympiade (IMO) heeft het Nederlandse team twee bronzen medailles weten te behalen. Alle zes Nederlandse deelnemers deden voor het eerst mee. De twee bronzen medailles waren dan ook een zeer knappe prestatie, waarmee Nederland op plek 47 van de 107 deelnemende landen eindigde. De twee medailles werden behaald door Hylke Hoozeveld (16) en Jelle Bloemendaal (17). Het Nederlandse team bestond verder uit Kevin van Dijk (17), Casper Madlener (16), Thian Tromp (18) en Kees den Tex (17). Kevin, Thian en Kees kregen voor het volledig oplossen van ten minste een van de zes opgaven een eervolle vermelding.

De IMO zou eigenlijk plaatsvinden in Sint-Petersburg, maar werd vanwege het coronavirus net als vorig jaar een wedstrijd op afstand met onafhankelijke waarnemers en videosurveillance vanuit Rusland. Het Nederlandse team voor de IMO werd begeleid door Ward van der Schoot (Universiteit van Cambridge), Johan Konter (Universiteit Stockholm) en Quintijn Puite (TU/e, Alberdingk Thijm College Hilversum).

Een deel van het Nederlandse team van de IMO deed eerder ook mee aan de Benelux Wiskunde Olympiade (BxMO), een wiskundewedstrijd voor middelbare scholieren uit België, Luxemburg en Nederland. Kevin van Dijk behaalde hier, samen met de Belgische Marie Determe, een score van 25 van de 28 punten en daarmee de gedeelde eerste prijs. Ook de rest van het Nederlandse team behaalde prachtige scores, waardoor het team met een totaalscore van 186 punten boven België (154 punten) en Luxemburg (42 punten) eindigde. Han Datema (17) en Kees den Tex hadden

beiden slechts één punt minder dan de winnaars en veroverden daarmee een gouden medaille. Zilveren medailles waren er voor Thian Tromp en Jelle Bloemendaal. Verder bestond het Nederlandse team voor de BxMO uit Merijn van Delft, Lars Pos en Eskil Dam (allen bronzen medailles), Hylke Hoogeveen (eervolle vermelding) en Rikkie Gieler. Het Nederlandse BxMO-team werd begeleid door Jeroen Huijben (UvA), Nils van den Berg (Universiteit van Cambridge) en Wietze Koops (RUG). *wiskundeolympiade.nl*



Clara Stegehuis een van de 30 onder 30

Clara Stegehuis, assistant professor aan de Universiteit Twente, is door *Elsevier Weekblad* (EW) geselecteerd als een van de 30 onder 30. De lijst, met dertig talenten onder de dertig waarvan verwacht wordt dat ze de toekomst van Nederland gaan bepalen, werd dit jaar voor de derde keer door jonge redacteurs van het EW opgesteld. Stegehuis bevindt zich met haar selectie in gezelschap van voetballer Ryan Gravenberch en schrijfster Lale Gül.

Het onderzoek van Clara Stegehuis richt zich op het ontwikkelen van statistische methoden voor het vinden van afwijkende kleinere subnetwerken binnen grote netwerken. Voor haar onderzoek heeft zij eerder al de KWG PhD-prijs en de Professor De Winterprijs mogen ontvangen. *ewmagazine.nl, utwente.nl*



Clara Stegehuis

Recordopbrengst meiveiling Wereldwiskunde Fonds

De mei-editie van de boekenveiling van het Wereldwiskunde Fonds (WwF) was vanwege het coronavirus opnieuw online, maar behaalde desondanks een recordopbrengst van maar liefst €4709,35. Van het aanbod van 717 boeken zijn uiteindelijk 650 boeken verkocht. De restanten van de veiling, aangevuld met nieuwe boeken uit voorraad, staan online voor de zomerverkoop van 2021, die loopt tot 26 september. Zoals gebruikelijk zal de opbrengst van zowel de meiveiling als de zomerverkoop volledig worden besteed aan projecten voor wiskundeonderwijs in ontwikkelingslanden. *nvvw.nl*

Onderscheiding brandwondenonderzoek Ginger Egberts

TU Delft-promovendus Ginger Egberts heeft voor haar presentatie over haar onderzoek naar brandwondenzorg een onderscheiding ontvangen op de internationale conferentie voor bio-informatica, computationele biologie en biomedische technologie. In de brandwondenzorg zijn er meerdere therapieën die ingezet worden om complicaties na brandwonden, als littekens en contractuur, te voorkomen. Egberts onderzoekt wiskundige modellen die het effect van deze therapieën in kaart brengt. Zo optimaliseert zij momenteel een bestaand wiskundig model, zodat het in de toekomst als een alternatief kan dienen voor patiënt- en dierexperimenten. *platformwiskunde.nl*

Miljoenenclaim tegen wiskundig econoom Andreu Mas-Colell

De American Mathematical Society (AMS) steunt een petitie die de zaak van wiskundig econoom Andreu Mas-Colell, voormalig professor aan Harvard en de Universiteit van Californië, Berkeley, onder de aandacht wil brengen. De zaak van Mas-Colell gaat over zijn positie als regiominiester van Economie in de Catalaanse regering, een positie die hij tussen 2010 en 2016 bekleedde. In 2017, het jaar van het Catalaanse onafhankelijkheidsreferendum, is de Spaanse Rekenkamer een onderzoek gestart naar het Catalaanse buitenlandbeleid vanaf het jaar 2011, waar met name werd gekeken naar buitenlandse uitgaven die op een of andere manier in verband kunnen worden gebracht met de promotie van het streven naar Catalaanse onafhankelijkheid. Voor zijn betrokkenheid bij de uitgaven die door de Rekenkamer als zodanig geclassificeerd zijn moet Andreu Mas-Colell nu een boete van €3,3 miljoen betalen, ondanks dat in het 18000 pagina's tellende document met beschuldigingen dat naar de Catalaanse ex-regering gestuurd is zijn rol niet gespecificeerd is. Er is dan ook veel steun van collega academici: naast het AMS is er een open brief verschenen die onder anderen ondertekend is door 33 Nobelprijswinnaars economie. *ams.org, De Groene Amsterdammer*

Studenten ontwikkelen model coronavaccinatie-planning

Vijf masterstudenten van de Vrije Universiteit (VU) hebben een wiskundig model ontwikkeld waarmee de planning van de coronavaccinaties in Nederland verbeterd is. De ontwikkeling van het model werd in gang gezet door de TKI DIALOG challenge, een competitie die was opgezet om de logistiek rondom een nationaal vaccinatieprogramma te plannen. De vijf studenten, Tara Zver, Berend

Markhorst, Nina Malbašić, Renze Dijkstra en Daan Otto, wonnen deze challenge en zijn daarna met financiële ondersteuning van de VU, CWI en GGD GHOR aan de slag gegaan met het ontwikkelen van een wiskundig model om de coronavaccinatie-planning te verbeteren. Dit deden ze onder begeleiding van prof.dr. Rob van der Mei (VU, CWI) en dr. Dennis Moeke (Hogeschool van Arnhem en Nijmegen). Sinds juni wordt het model van de studenten ingezet voor het slimmer verdelen van de vaccins over de priklocaties. Dit leidde tot een snellere vaccinatie van de Nederlandse bevolking, en bovendien tot meer gelijkheid in het vaccinatie-tempo tussen GGD-regio's. Momenteel wordt gekeken of het model verder verbeterd kan worden voor toekomstige vaccinatie-campagnes, door bijvoorbeeld na te denken over de plaatsing van de priklocaties.

vu.nl



Jan-Willem van Ittersum wint KWG PhD-prijs

Op 20 mei hebben zes finalisten in een online competitie om de KWG PhD-prijs gestreden, door in een korte voordracht hun PhD-onderzoek te presenteren aan een breed wiskundig publiek. De prijs, die bestaat uit een geldprijs en een wisseltrofee, is uiteindelijk gewonnen door Jan-Willem van Ittersum (UU). De winnende voordracht van Van Ittersum, over zijn onderzoek naar partities en quasimodulaire vormen en door hemzelf geïllustreerd, is unaniem door de jury verkozen. De vijf andere finalisten waren Stijn Cambie (RU), Yfke Dulek (CWI), Allard Hendriksen (CWI), Lotte Romijn (TU/e) en Rianne de Heide (CWI).

wiskgenoot.nl, uu.nl



Jan-Willem van Ittersum

ZonMw Parel voor onderzoek hersenchirurgie bij epilepsie

Prof.dr. Stephan van Gils en dr. Hil Meijer (Universiteit Twente) hebben op 20 mei een Parel van ZonMw ontvangen voor hun onderzoek naar computermodellen van het brein. Het onderzoek, dat tussen 2014 en 2019 is uitgevoerd, was een samenwerking tussen de Twentse onderzoekers en twee onderzoekers van het UMC Utrecht: neuroloog dr. Frans Leijten en medisch fysicus dr. Geert-Jan Huiskamp. De onderzoekers werkten aan computermodellen van het brein om de succeskans van hersenchirurgie bij epilepsiepatiënten te vergroten. Bij een deel van de patiënten is een dergelijke chirurgische ingreep nodig om epilepsieaanvallen te stoppen. De operatie is zwaar en levert lang niet altijd het gewenste effect. Van Gils en Meijer ontwikkelden computermodellen die de hersenstructuur van patiënten kunnen voorspellen en zo de meeste kansrijke operatietactiek kunnen deduceren.

utwente.nl, zonmw.nl

Koninklijk Wiskundig Genootschap

□ Onderwijs meets Onderzoek

Op vrijdag 24 september organiseren de NVvW, het Freudenthal Instituut en SLO in samenwerking met het NMC (in het kader van de NMC 2021 Series) de vierde aflevering van de conferentie 'Onderwijs meets Onderzoek' in vergadercentrum Domstad te Utrecht. Tijdens deze conferentie gaan wiskunde-leraren en onderzoekers van wiskundeonderwijs met elkaar in gesprek over de vraag wat onderwijspraktijk en onderwijs-onderzoek voor elkaar kunnen betekenen. Het thema van de middag is 'De toekomst van het statistiekonderwijs'. De openingslezing wordt verzorgd door Casper Albers, die zijn geheel eigen kijk op het statistiekonderwijs geeft. Voor meer informatie en aanmelden zie nvvw.nl.

□ Call for nominations for the N.G. de Bruijn Prize 2022

In 2022, the N.G. de Bruijn Prize will be awarded again during the Netherlands Mathematical Congress (NMC). The N.G. de Bruijn Prize is awarded tri-yearly at the NMC. The 2022 prize will be awarded for the best mathematical work that appeared in a peer reviewed journal in the years 2018 through 2021. The prize is provided by Elsevier, publisher of KWG's scientific journal *Indagationes Mathematicae*. Nominees for the prize have either the Dutch nationality, or live in the Netherlands, or are affiliated with a Dutch institute. The laureate receives a medal, a certificate and a cash prize of €4000. The laureate gives a plenary lecture at the NMC, and the *Nieuw Archief voor Wiskunde* (NAW) publishes an interview with the laureate or the laureate writes an article himself/herself for a broad mathematical audience, to be published in NAW.

Candidates are nominated through one or more nomination letters, which need to be with the jury ultimately 1 October 2021. Everybody is invited to nominate a candidate. Nomination letters are to be sent to the chair of the jury of the N.G. de Bruijn Prize: prof. Jan van Neerven, TU Delft, Faculty of Electrical Engineering, Computer Science and Mathematics, P.O. Box 5031, 2600 GA Delft, e-mail: j.m.a.m.vanneerven@tudelft.nl.

Raf Bocklandt

*Korteweg-de Vries Institute for Mathematics
University of Amsterdam
r.r.j.bocklandt@uva.nl*

Nicos Starreveld

*Korteweg-de Vries Institute for Mathematics
University of Amsterdam
n.j.starreveld@uva.nl*

Interview Abel Prize laureate 2021 László Lovász

On graphs and graphons

On the 17th of March the Norwegian Academy of Science and Letters awarded the Abel Prize for 2021 to László Lovász and Avi Wigderson for their contributions to discrete mathematics and theoretical computer science. Furthering our newly started tradition of interviewing prize winners, our editors Raf Bocklandt and Nicos Starreveld arranged a zoom meeting with László Lovász to talk about his ideas, proofs, algorithms and conjectures.

At the Gymnasium

László Lovász was born in Hungary in 1948. He grew up in Budapest and already at a young age he excelled in mathematics. This led him to enroll in the Fazekas Mihály Gimnázium, a school with a special program aimed at students interested in mathematics.

“Nobody in the family was a mathematician but when I was in 8th grade, that’s the last grade of elementary school in Hungary, I attended a math club. The leader of the club recommended that I go to a certain high school, which had just started a special math class. I was very excited to join this class and it turned out to be an absolutely great four years. Some of my classmates became quite important in mathematics, so it was an excellent group. We were good friends even though we were rivals at various mathematics competitions, such as the International Mathematical Olympiad and a math quiz on tv. This class not only got me hooked on mathematics for my whole life, but I also met my wife Katalin Vesztegombi

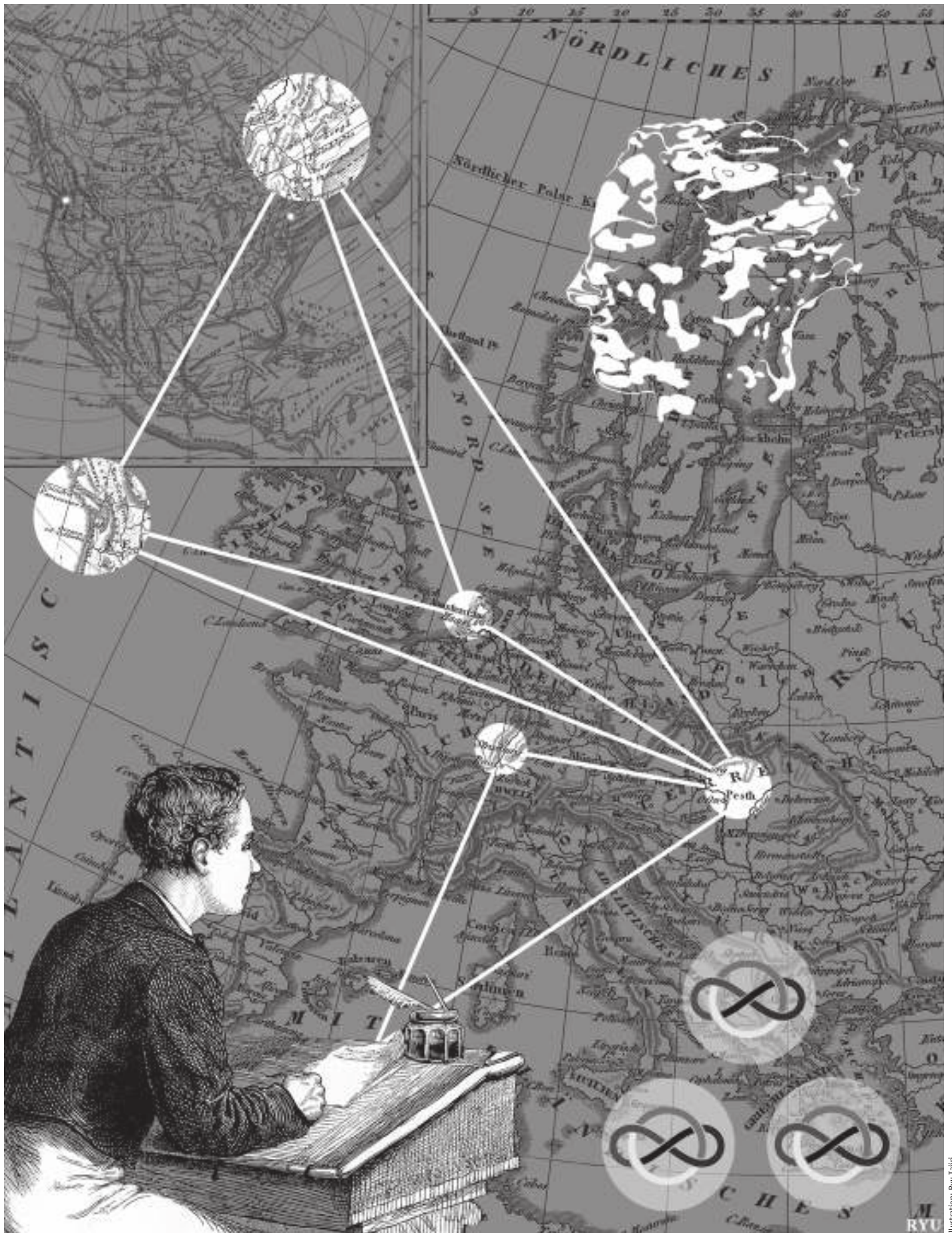
there, she was a classmate of mine and a very good mathematician too.

The school had a semi-formal connection with the university, so some people

from there — mainly young professors but also some senior ones — came to the school and gave lectures. Because the class was a novelty, people were very interested in meeting this group of students. Probably the most important among these people was Paul Erdős, who came and gave a couple of talks. He could give very elementary talks about a number of fascinating unsolved problems. Probably one of his



A young Lovász working in prime-time on a math problem



most important contributions was to recognize and advertise that elementary problems can be difficult and important, even though a high school student can understand what the problem is.

A few years earlier Erdős had already met one of my classmates, Lajos Pósa. They worked and they published some joint papers, which are important papers on graph theory and are still being cited. I got interested because this classmate challenged me to find a proof for a joint result he had with Erdős. In a day or two I could prove it, so I was introduced to Erdős and he listened to my solution. It was a very characteristic thing for him that he put a footnote in the paper saying that Lovász has independently proven this, although it's not really independent. I mean, if you know that something is true, it's much easier to prove. He always found it very important to make young people recognized and to help them along their career. Lajos Pósa became interested in math education and he is a very important person even until today."

Kneser's conjecture

One of the things Lovász is famous for, is his proof of Kneser's conjecture [8]. Formulated by Martin Kneser in 1955, it states that the graph whose vertices correspond to the k -subsets of a set with n elements and whose edges connect disjoint subsets has chromatic number $n - 2k + 2$, if $n \geq 2k$.

In 1978 Lovász proved this conjecture using a famous result from topology: the Borsuk–Ulam theorem. This tells us that for every continuous map from the n -sphere to $\mathbb{R}^n$ there are two opposite points on the sphere with the same image.

"Using topology in combinatorics also had to do with Erdős. He wrote a number of papers with András Hajnal, a very distinguished combinatorialist at that time. In particular they were interested in graphs which have a high chromatic number and do not contain short cycles, or an easier problem: they do not contain short odd cycles. Kneser graphs share this property together with Borsuk graphs. The latter are obtained by taking a sufficiently dense finite set of points on the sphere and connecting two of them if they are almost opposite. If you adjust the parameters, this graph has a high chromatic number due to Borsuk's theorem. On the other hand, it doesn't have short odd cycles because you have to move two steps to be close to a point again. So you had two constructions and one of them was only conjectured. The natural idea was to look at Borsuk's theorem and see whether it can be applied to the other case. I wrote my master's thesis in topology so I knew a fair bit of topology, not really the most cutting edge theories but sort of the basics like homology theory. It took a year or two to really work it out but in the end I succeeded."

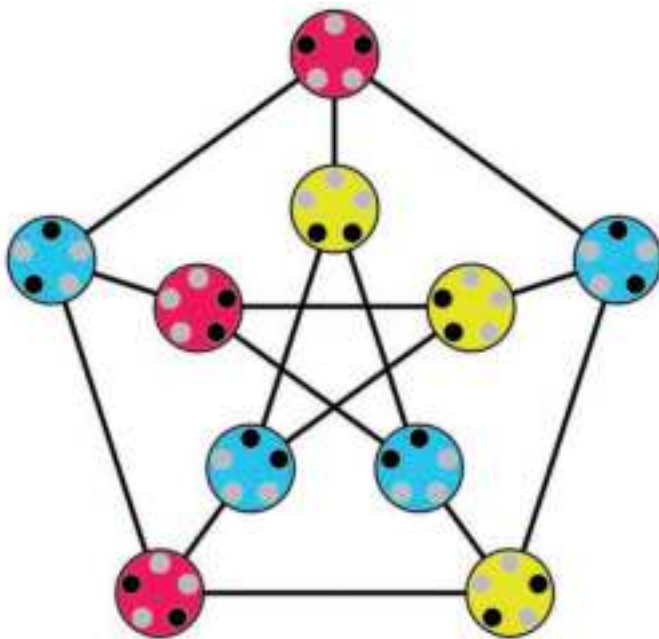


Figure 1 The Kneser graph with $(n,k) = (5,2)$ has chromatic number $n - 2k + 2 = 3$ [17].

The Dutch connection

Lovász has a strong connection with the Netherlands. He received the Brouwer Medal in 1993 and since 2006 he is a foreign member of the Royal Netherlands Academy of Arts and Sciences (KNAW). These close ties can be traced back to the late seventies and early eighties when he started collaborating with Lex Schrijver and Hendrik and Arjen Lenstra.

"When I was a professor at the university of Szeged, Lex Schrijver came to visit me and we shared an office for a year. We had a lot of common ideas which eventually resulted in many joint papers and a joint book. It's a very close research connection and a very close friendship.

There was one theorem we worked on, which had a sort of side condition which we didn't like. So the question was whether you can get rid of this side condition. I realized that this could work if we could do the classical Dirichlet's approximation theorem algorithmically. I mean not only show the existence of rational approximations of a real number with the same denominator but also provide an efficient construction. That's not an easy thing because the proof usually uses the pigeonhole principle and you really have to go through the whole list of elements until you find it."

Dirichlet's approximation theorem states that you can always approximate a real number r within a margin smaller than $1/qN$ by a fraction p/q with denominator $q \leq N$. This approximation can also be extended to higher dimensions and this turned out to be helpful in the study of lattices.

"I met Hendrik Lenstra in Bonn at a conference where he gave a talk about lattice reduction. The method he presented was a non-polynomial time method and it only worked in fixed dimension. I thought then that maybe this lattice reduction could be extended to higher dimensions so that its complexity only grows polynomially within a specific dimension. I began to experiment with different algorithms and eventually I managed to find an algorithm of which I could prove that it is polynomial.

I remember I was experimenting on a programmable calculator, I think it was a Texas Instruments 59, which calculated to thirteen decimal places, so you could get very accurate calculations. It was good for



Lex Schrijver, László Lovász and their coauthor Martin Grötschel

showing that certain ideas would not work. Faulty algorithms would quickly grind to a halt after using it two or three times. It was great when I first saw an algorithm that seemed to be working. I wrote to Hendrik that I had this algorithm and he answered that he just found out with his brother that if it worked then they could factor polynomials in polynomial time. This was of course a very nice open problem. So that's how this joint paper arose which we published in *Mathematische Annalen*."

The LLL-algorithm as it is known today is a cornerstone of modern computational mathematics. It has many applications in pure and applied mathematics but also in computer science and cryptography [13].

"We were not aware of the computer science applications at that time so the main application of our result was factoring polynomials. The real application, that came maybe a few years later, was discovered by Lagarias and Odlyzko [7] who ob-

served that they could apply the algorithm to break the so-called low-density knapsack code, so that's how it started to have applications in cryptography."

A new theory of large graphs

In 1999 Lovász moved to Microsoft Research with his wife, mathematician Katalin Vesztegombi, to work with the research group led by Jennifer Chayes.

"Together with Katalin we were invited to visit Microsoft Research, which was a new institution at that time. Jennifer Chayes was the head of the theory group, which consisted of maybe four people at that time. Later it grew to maybe 15 or 20 people. It was a very small but also a really excellent research group. There was no pressure doing anything useful, the only pressure was that they said that you have to keep your door open. Meaning that if somebody comes in, a software engineer for example, you had to listen and discuss if you had any ideas. In fact, quite soon after I arrived, maybe half a year later, somebody came with a really nice question which we managed to solve with some effort. Together with my wife Katalin and Van Vu, a postdoc back then and currently a professor at Yale University, we came up with an algorithm that software engineers were absolutely happy with. This increased the reputation of the group."

During the seven years in Microsoft, these research results were published in a series of articles [1,2,3,11] and summarized in a book written by Lovász [12]. These articles formed the foundations of the beautiful theory of graph-limits. One of the novelties of this theory is that it showed how large graphs could be studied using tools from functional analysis. The driving question was posed by Chayes: "How can you define convergence of a sequence of graphs and what can the limiting object be?" Lovász has been investigating this question for a long time. Some ideas behind the approach of the Microsoft team were born much earlier.

"It really goes back to my high school years, and even though I don't like to brag about this I really think it's nice to share. Graph theory was not really respected in those days and people thought it was just about puzzles. I wanted to make a more serious theory of graphs, in particular to



Peter van Emde Boas, László Lovász, Hendrik Lenstra and Arjen Lenstra in Bonn

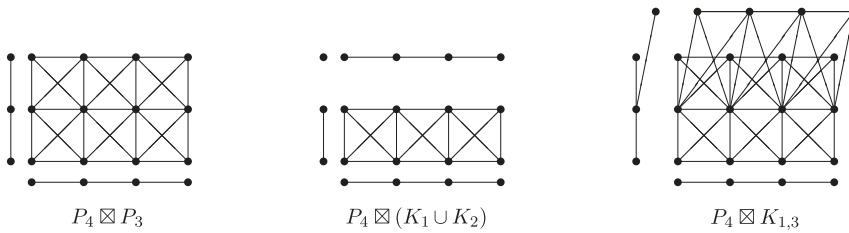


Figure 2 Examples of the strong product [15].

develop an algebraic approach to graph theory. A question that I was intrigued by was whether we can take a product of two graphs for example. Because if you have a product then you want to check whether it is commutative and associative or whether there is a cancellation law: consider graphs G, H and W and suppose that $G \boxtimes H$ is isomorphic to $G' \boxtimes W$ and G is isomorphic to G' , does this imply that also H and W are isomorphic? The product that I found back then, which was already known to mathematicians but I was unaware of this, was the strong product of graphs [9]. With some non-trivial amount of work I could prove a cancellation law for this product [10]. The key idea was to look at a sequence of numbers corresponding to homomorphisms, because that's a multiplicative sequence so you automatically have a cancellation law."

A graph $G = (V, E)$ can be seen as a set with a reflexive and symmetric relation by putting uRv if u and v are equal or joined by an edge. A homomorphism between two graphs is defined as a morphism between the relations (a map $\phi: V(G) \rightarrow V(H)$ such that $uRv \Rightarrow \phi(u)R\phi(v)$). In this setting the strong product of graphs $G \boxtimes H$ corresponds to the direct product of these relations $((u_1, u_2)R(v_1, v_2) \Leftrightarrow u_1Rv_1 \text{ and } u_2Rv_2)$ and therefore a morphism $\phi: F \rightarrow G \boxtimes H$ is determined by its projections onto G and H . This implies that

$$\begin{aligned} \# \text{Hom}(F, G \boxtimes H) \\ = \# \text{Hom}(F, G) \cdot \# \text{Hom}(F, H). \end{aligned}$$

In [10] Lovász showed that the sequence of numbers $\# \text{Hom}(-, G)$ determines G up to isomorphism. Furthermore they are all nonzero because you can map any graph to just one vertex of G . Therefore

$$\begin{aligned} A \boxtimes B &\cong A \boxtimes C \\ \Rightarrow \# \text{Hom}(-, A \boxtimes B) &= \# \text{Hom}(-, A \boxtimes C) \\ \Rightarrow \# \text{Hom}(-, A) \# \text{Hom}(-, B) &= \# \text{Hom}(-, A) \# \text{Hom}(-, C) \\ \Rightarrow \# \text{Hom}(-, B) &= \# \text{Hom}(-, C) \\ \Rightarrow B &\cong C. \end{aligned}$$

These homomorphism numbers can also be used to count more intricate things such as the number of embeddings of one graph into another.

"In the seventies we were investigating with Paul Erdős and Joel Spencer the possible numbers of triangles, numbers of pentagons, and so on; we wanted to understand how these numbers relate to each other in very large graphs. At that time we could only prove some starting results.

Around 2002 when I was at Microsoft Research, Michael Freedman was in the group and he was working on quantum computing. He was trying to use topological methods to improve the stability of quantum computation. He was interested in a statistical physical model with a specified partition function. Freedman's question could be translated to a problem of characterizing the sequence of homomorphism numbers of different graphs into a fixed graph. Together with Freedman and Lex Schrijver we solved this problem by formulating a semi-definiteness condition on these homomorphism numbers."

The concept of homomorphism density

$$t(G, H) = \# \text{Hom}(G, H) / \# V(H)^{\# V(G)}$$

which measures the probability that a ran-

dom map $\phi: V(G) \rightarrow V(H)$ is a homomorphism, combined with a suitable metric on graphs called the cut-distance, are the building blocks of the theory of graph-limits. During his time at Microsoft, Lovász managed to prove, together with Christian Borgs, Jennifer Chayes, Balázs Szegedy, Vera Sós and Katalin, that if a sequence of dense graphs $(G_n)_{n \geq 0}$, where the degree of each vertex scales as the size of the graph, has the property that for every fixed graph F , the homomorphism density $t(F, G_n)$ converges to a limit, then there is a natural 'limit object', namely a symmetric measurable function $W: [0, 1]^2 \rightarrow [0, 1]$ called a graphon [12].

"It was again a sort of a lucky coincidence, we were looking, maybe just sort of on a chatting level, at Albert-Barabási graphs. In Albert-Barabási graphs you keep adding vertices, so it's a growing graph sequence. Then we began to check in how many other ways you can let a graph grow. Jennifer asked if there is a kind of limit distribution of these graphs just like there is a limit distribution for numerical distributions."

By subdividing the interval $[0, 1]$ in $\# V(G)$ equal parts, you can represent every graph G as a symmetric function W_G defined on the unit square taking values 0 or 1 depending on whether the corresponding nodes are connected by an edge. All homomorphism densities $t(F, G)$ can be expressed as certain integrals in terms of the function W_G . The graphon associated to a sequence of dense graphs is a function $W: [0, 1]^2 \rightarrow [0, 1]$ that can be used to determine the limits of the homomorphism densities in the same way.

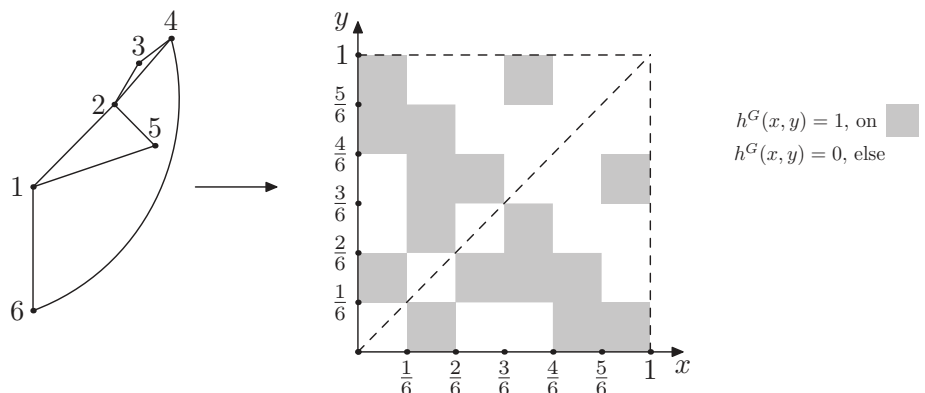


Figure 3 Turning a graph into a graphon [5].

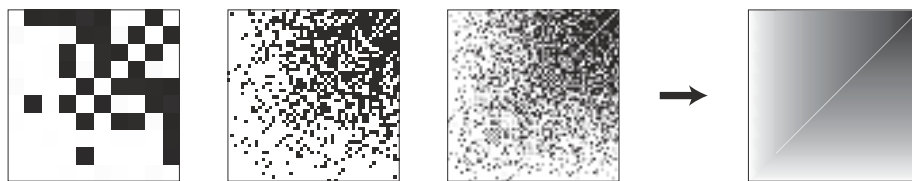


Figure 4 A graphon as a limit of graphs [4].

Math and politics

Apart from the fourteen years he spent in Yale and at Microsoft, Lovász spent most of his professional life in Hungary. During his career the political climate has changed quite drastically.

“In the communist era university life was mostly okay in mathematics. That was of course different in social sciences, where the ideology had to be observed. People who were religious were in principle not allowed to teach, but they could go to the research institutes. Of course, if they were sufficiently distinguished people then nobody really raised a question. It was well-known, for example, that there were two distinguished professors of mathematics at the university that were religious and went to the church, but nobody really wanted to make a note of this.

In mathematics the restrictions that mattered most were those for going abroad, which got more relaxed over the years. Actually, in a sense I should say these were not so bad, because it meant that many excellent mathematicians who lived in Budapest and other cities, did not travel much. Only once every two years they were allowed to go to a conference, so they had ample time to work with students and we got a lot of attention. I learned a lot from these people.

In 1968 I was invited to go to Oberwolfach as a young student. I had a lot of trouble and eventually I only arrived for part of the meeting, but nevertheless it was still very interesting and stimulating to meet people like Tarski. There was always a lot of paperwork in connection with every trip, but I almost never had trouble with traveling to conferences. You had to know that there is a limit: you don't want to ask to go to five conferences a year because that would have been impossible.”

A couple of years after the fall of the iron curtain Lovász moved to the United States. He returned to Budapest in 2006 where he

became the director of the Mathematical Institute at the Eötvös Loránd University and a professor in computer science. Until 2020 he was also the President of the Hungarian Academy of Sciences. In this role he had some first-hand experience with the new government that has come into power in the last decade.

“It's unclear what its effect on universities is. The universities are in bad shape because of all sorts of reasons such as under-financing and too much centralization. Financially the universities don't get enough support to actually do their job properly. Whether this will change or not, I don't know. I was the president of the Academy until a year ago and in the last two years the government decided to take away the research institutes from the Academy. Of course there are many models for research in the world. There are some countries without research institutes, while others do have them. Sometimes research belongs to the Academy, sometimes it does not.

Usually the price you pay for a drastic reorganization is too high. There are always things that were not considered in advance and then people lose. For two years the energy of everyone was focused on this reorganization. I think it was a bad idea also for us, it was a really unpleasant experience with the current government. I met Orbán once at some kind of award ceremony and afterwards we talked a little bit at the dinner party. He can be actually a charming person but I wish he had more patience to actually listen to other people's points and try to balance that. I know that's not easy because even within the Academy it was often difficult to balance different interests and different cultures.”

Coming up with conjectures

A couple of years ago Lovász started a cooperation with Albert-László Barabási who is very famous in network theory. This resulted in new research that actually became very relevant in light of the recent pandemic.

“Network science is becoming an important paradigm in all sorts of sciences: brain science, social sciences, et cetera, and the idea was that in essence graph theory and network theory are just two names of the same thing, so maybe we should find common grounds. One thing one has to realize is that the two areas have very different styles. A mathematician will not have an idea and in two weeks time write a paper about this, but in other areas that's the standard. We both had to accept that and work out some way of doing research together.

Then the epidemic came and since the topic of the project is the dynamics of large networks, the typical example of such dynamics is the spreading of a disease over a social network. I started research with a small mixed group of network scientists, physicists, computer scientists and mathematicians and that has been very useful. One thing I realized is that you have to do simulations. Without that you don't develop a feeling of what the questions are or what you can expect. To do a good simulation is a non-trivial question. For example you don't want to simulate on random graphs, you have to simulate things on graphs which have some resemblance to real life networks. To set up such a graph is again a non-trivial question. You can have simulations on all sorts of graphs, but from a mathematical point of view you really want something which works for all graphs, or all graphs which have desired properties. You want a general mathematical theorem and ideally also an algorithm.

There is a chain of events: you run simulations, you observe something strange or maybe unexpected and then you try to find a mathematical reason for that. It is quite interesting and I hope that eventually we can prove theorems that will be inspired by these observations.

Often it's not easy, to come up with the right question. It took half a year until we began to observe something, that was there from the beginning in the simulations. A simulation produces numbers, or maybe graphs, but to really gain understanding you also need theorems. I am sort of fighting a war on two fronts because I tried to say that simulations and computer experiments are very important if you want to deal with large-scale phenomena, but you cannot give up on obtaining rigorous results.

Maybe it takes a lot of time because you need to know the theory of random

graphs and all sorts of other related things. You have to combine the two and that's why I think both of them are justified. How the community will value one or the other is still an unsettled question. So I guess experimenting, looking for patterns and finding the right conjecture is an important part of mathematics."

Finding a good conjecture can come in many ways: through simulation on a computer, experimenting with pen and paper, or just a discussion among mathematicians at a party. A famous example of the latter is the Erdős–Faber–Lovász conjecture. It states that the union of k complete graphs, each with k vertices, for which every pair of complete graphs shares at most one vertex, can be properly colored with k colors.

This seemingly innocuous question posed at a party in 1972 remained open until this year when a solution was announced for large enough k by Dong Yeap Kang, Tom Kelly, Daniela Kühn, Abhishek Methuku and Deryk Osthus.

"In 1972 there was a month long summer school or seminar at Ohio State University and we were there. It focused on the idea that questions of graph theory often can be generalized to the hypergraphs or graphs where the edges have more than two endpoints. In particular the question is how many colors you need to color the edges of a hypergraph so that no two edges with the same color meet. We discussed this a lot and then somehow three of the participants were meeting a few weeks later in a completely different part of the US. We had this party and then this

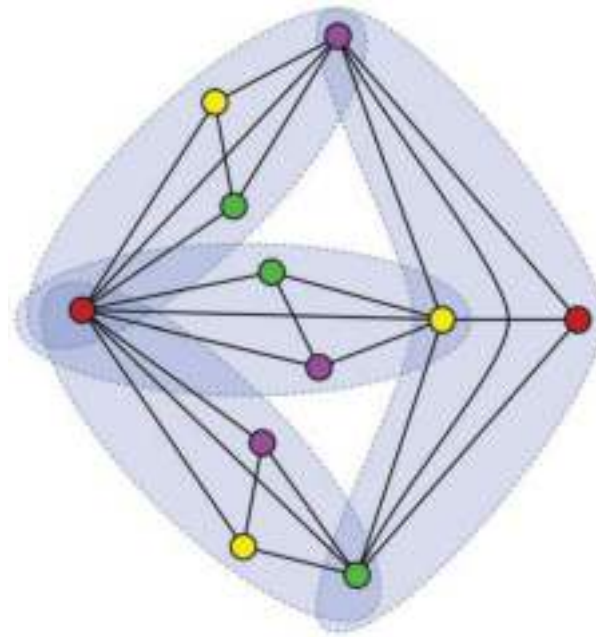


Figure 5 An example of the EFL-conjecture with $k = 4$ [16].

question came up. Erdős actually didn't believe it, I believed it a little bit more but I wouldn't have been surprised to come up with a trivial counter-example. But then you try this and try that, and you see that it remains true for this special case and that special case. The idea of a counter-example takes you exactly there but not beyond. You never know whether such a question will be easy or difficult.

Recently, Daniela Kühn gave an invited talk at the European Congress and now we know that it's true at least if the parameters are large enough. I always find it curious that you come up with a conjecture based on small values and later somebody finds proof that is valid for very large values. It's almost

paradoxical but that's how our current techniques work. Part of the method is probabilistic, which means there are error terms you have to estimate and control. This often only works for large values of the parameters."

Apart from the EFL-conjecture Lovász has three more tantalizing problems on offer: The Lovász conjecture (Every finite connected vertex-transitive graph contains a Hamiltonian path), the Kannan–Lovász–Simonovits conjecture (which recently saw a breakthrough [14]) and the Erdős–Lovász Tihany Conjecture. Enough challenges for motivated readers who want to prove, disprove or just nibble a small, large or even infinite chunk of the parameter space. ☞

References

- 1 C. Borgs, J.T. Chayes, L. Lovász, V.T. Sós and K. Vesztegombi, Graph limits and parameter testing, in *Proceedings of the Annual ACM Symposium on Theory of Computing*, 2006, pp. 261–270.
- 2 C. Borgs, J.T. Chayes, L. Lovász, V.T. Sós and K. Vesztegombi, Convergent sequences of dense graphs I: Subgraph frequencies, metric properties and testing, *Advances in Mathematics* 219(6) (2007), 1801–1851.
- 3 C. Borgs, J.T. Chayes, L. Lovász, V.T. Sós and K. Vesztegombi, Convergent sequences of dense graphs II. Multiway cuts and statistical physics, *Annals of Mathematics* 176(1), (2012), 151–219.
- 4 D. Glasscock, What is a graphon?, *Notices of the AMS* 62 (2015), 46–48.
- 5 F. den Hollander, M. Mandjes, A. Roccaverde and N.J. Starreveld, Ensemble equivalence for dense graphs, *Electronic Journal of Probability* 23 (2018), 1–26.
- 6 D.Y. Kang, T. Kelly, D. Kühn, A. Methuku and D. Osthus, A proof of the Erdős–Faber–Lovász conjecture (2021), arXiv:2101.04698.
- 7 J.C. Lagarias and A.M. Odlyzko, Solving low density subset sum problems, *Journal of the ACM* 32(1) (1985), 229–246.
- 8 M. de Longueville, 25 years proof of the Kneser conjecture: The advent of topological combinatorics, *EMS Newsletter* 53 (2004), 16–19.
- 9 L. Lovász, Über die starke Multiplikation von geordneten Graphen, *Acta Mathematica Academiae Scientiarum Hungaricae* 18(1–2) (1967), 235–241.
- 10 L. Lovász, On the cancellation law among finite relational structures, *Periodica Mathematica Hungarica* 1(2) (1971), 145–156.
- 11 L. Lovász and B. Szegedy, *Limits of Dense Graph Sequences*, Technical Report, Microsoft Research, 2004.
- 12 L. Lovász, *Large Networks and Graph Limits* American Mathematical Society, 2013.
- 13 P.Q. Nguyen and B. Vallee, *The LLL Algorithm*, Springer, 2010.
- 14 C. Yuansi, An Almost Constant Lower Bound of the Isoperimetric Co-efficient in the KLS Conjecture, *Geometric and Functional Analysis* 31 (2021), 34–61.
- 15 W. Zhao, F. Wang, X. Gao and H. Li, Bondage number of the strong product of two trees, *Discrete Applied Mathematics* 230 (2017), 133–145.
- 16 commons.wikimedia.org, Erdős–Faber–Lovász conjecture, David Eppstein.
- 17 commons.wikimedia.org, Kneser graph $KG(5,2)$, Tilman Pieske.

Marijn J. H. Heule

*School of Computer Science
Carnegie Mellon University, Pittsburgh
marijn@cmu.edu*

The Solution

Easier variants of notorious math problems

Computers have been used to solve several long-standing open math problems, including the Robbins conjecture (1996), the Boolean Pythagorean triples problem (2016), and Keller's conjecture (2020). Thanks to the continuing advances that are being made in the field of automated reasoning, we can be optimistic that many success stories will follow. However, the power of automated reasoning has its limitations, and thus computers are still far away from producing substantial mathematical achievements such as the proof of Fermat's last theorem. So what are the actual boundaries of automated reasoning? In this article, Marijn Heule discusses some easier variants of notorious math problems and pose them as challenges for both humans and computers.

Computer-assisted mathematics has a rich history with many exciting results. Major achievements range from Appel and Haken's proof of the Four Color Theorem [1] in 1976 to the success of Buzzard, Commelin, Massot and collaborators [3] in formalizing a complicated construction by Scholze just a year ago. Computers are better than humans in dealing with enormous case splits and in checking the details of mathematical proofs once properly formalized. My work in this direction focuses mostly on computer-assisted (frequently purely computer-reliant) mathematical discovery, trying to find proofs that would be practically impossible for humans to find. Although the proofs

found in this manner are often too large to be interpreted by humans, it is very well possible that for some of these problems a small and humanly understandable proof does not even exist.

Automated reasoning has been effective in mathematical discovery and has facilitated the resolution of various mathematical problems. Interesting new methods have been applied successfully in recent years, including the use of neural networks [14]. One may therefore wonder whether automated reasoning is ready to solve problems that have intrigued mathematicians for many decades. Although the answer is probably *no*, that does not mean we

should not try. The question is: What is the most promising way to pursue this endeavor?

I propose to study variants of three notorious mathematical problems: the Collatz conjecture [8], the Chromatic Number of the Plane (CNP) [13], and the most wanted Folkman graph [6]. The proposed variants are likely much easier than the original problems, but they are still unresolved. If we cannot even solve these easier variants, then the original problems are completely out of reach. In fact, disproving the proposed variants of Collatz or CNP would immediately solve the respective original problems. It is not evident whether these variants are more suitable for human or automated reasoning, although all variants can be formulated as search problems with existing techniques. I expect that they are a challenge for both humans and computers. Personally, I would gladly see them solved because they represent major roadblocks that currently stand in the way of progress on the original problems. To motivate research, I offer prizes for the solutions.

Collatz conjecture

The Collatz conjecture states that every natural number will eventually reach 1 when the following map, known as the Collatz map, is applied repeatedly: if the number is even, divide it by 2; if the number is odd, multiply it by 3 and add 1. For example, if we start with the number 3, then we follow the path $3 \rightarrow 10 \rightarrow 5 \rightarrow 16 \rightarrow 8 \rightarrow 4 \rightarrow 2 \rightarrow 1$. Once 1 is reached, the repeated application of the map results in the cycle $1 \rightarrow 4 \rightarrow 2 \rightarrow 1$. Most mathematicians believe that the conjecture holds, which is also supported by experimental evidence: computers were used to validate that all numbers up to 2^{68} will eventually reach 1. However, a proof of the conjecture still appears far away. Paul Erdős famously stated that “mathematics may not be ready for such problems”.

A couple of years ago, Scott Aaronson and I started a moonshot project to tackle the conjecture via automated reasoning. Scott designed a rewriting system that terminates on any input string if and only if the Collatz conjecture is true. The rewrite system consists of eleven rules. Unsurprisingly, state-of-the-art rewrite termination tools, such as AProVE, were not able to solve the termination problem. However, we were able to show termination of any subset of ten rules (proving termination of a strict subsystem is generally easier). Scott solved them by hand while I solved them via the help of satisfiability (SAT) solving — a crucial technique to prove hard termination problems. The subsystems were clearly easier than the full system, even though most of them were non-trivial. My initial approach required many hours

on a computer cluster for the hardest subsystems. However, an implementation by my PhD student Emre Yolcu can now solve these subsystems in mere seconds [15].

We also explored easier Collatz-like problems. Some turned out to be real challenges. For example, we studied whether the repeated application of the Collatz map will eventually reach a number $1 \pmod{8}$, i.e., a number that leaves the remainder 1 when divided by 8. However, for some numbers, the map avoids the numbers congruent to $1 \pmod{8}$ for many steps. Figure 1 shows the transitions across residue classes modulo 8 of the Collatz map. The figure shows that there are multiple cycles. Some cycles such as $6 \rightarrow 7 \rightarrow 6 \pmod{8}$ and $0 \rightarrow 0 \pmod{8}$ cannot be repeated indefinitely. As a consequence, the map cannot avoid the numbers congruent to $4 \pmod{8}$, which can also be shown using our automated approach. Unfortunately, similar reasoning cannot deduce that one will eventually reach a number congruent to $1 \pmod{8}$.

Studying the transition graph, arguably the easiest non-trivial variant, asks whether the Collatz map will eventually reach a number congruent to $5 \pmod{8}$ or $7 \pmod{8}$. Without $5 \pmod{8}$ and $7 \pmod{8}$, only two cycles remain: $1 \rightarrow 4 \rightarrow 2 \rightarrow 1$ and $1 \rightarrow 4 \rightarrow 6 \rightarrow 3 \rightarrow 2 \rightarrow 1$. The former cycle is decreasing, while the latter is increasing (any non-trivial variant needs at least one increasing cycle). Experiments also suggest that problem is easier: for the original Collatz, the observed worst case of the number of steps to termination is quadratic in the number of bits of the initial number, while for the variant without $5 \pmod{8}$ and $7 \pmod{8}$ it is linear [5]. The variant can also be expressed as a Collatz-like problem with the following map ($\perp$ denotes an undefined case at which the iterated application stops):

$$H(n) = \begin{cases} \frac{3n}{4} & \text{if } n \equiv 0 \pmod{4}, \\ \frac{9n+1}{8} & \text{if } n \equiv 7 \pmod{8}, \\ \perp & \text{otherwise.} \end{cases}$$

This map slightly increases the numbers congruent to $7 \pmod{8}$, decreases numbers congruent to $0 \pmod{4}$, and terminates on all other numbers. Reasoning about this map therefore seems significantly easier than the original Collatz conjecture as it terminates instantly on most numbers. However, there exist arbitrarily long sequences of map $H(n)$. Consider, for exam-

ple, the starting number 466032, which results in a sequence that first goes down for a few steps, then up, down, and up again, before terminating:

$$466032 \rightarrow 349524 \rightarrow 262143 \rightarrow 294911 \rightarrow 331775 \rightarrow 373247 \rightarrow 419903 \rightarrow 472391 \rightarrow 531440 \rightarrow 398580 \rightarrow 298935 \rightarrow 336302 \rightarrow \perp.$$

Showing termination of $H(n)$ is my first challenge:

Challenge 1 (\$500). *Prove or disprove that iteratively applying map $H(n)$ will eventually reach $\perp$ for all $n \geq 1$.*

A counterexample in the form of a number n such that the repeated application of $H(n)$ will never reach $\perp$ can be converted into a counterexample for the Collatz conjecture and is therefore unlikely to exist.

Chromatic Number of the Plane

The Chromatic Number of the Plane (CNP) asks how many colors are required in a coloring of the plane to ensure that there exists no monochromatic pair of points with distance 1. Early work on CNP showed that the chromatic number is between 4 and 7. The lower bound is due to the Moser spindle: a 7-vertex *unit-distance graph* with 11 edges. A unit-distance graph is formed by a set of points in the plane where two points are connected by an edge whenever the distance between them is exactly 1. The upper bound can be shown by a tessellation of the plane using hexagon tiles with an outer radius slightly smaller than 1. Tiles consist of a single color and tiles of the same color can be placed more than distance 1 from each other. Figure 2 shows the Moser spindle and the tessellation.

In a breakthrough in 2018, Aubrey de Grey improved the lower bound by constructing — with the help of automated-reasoning tools — a 1581-vertex unit-distance graph with chromatic number 5 [4]. This result triggered the Polymath-16 project in which mathematicians around the globe teamed up to make further progress on this problem. In the weeks and months afterwards, I was able to gradually reduce the size of the smallest unit-distance graph with chromatic number 5 using SAT techniques. My best result so far is a graph with 510 vertices. Jaan Parts has the current record with 509 vertices [11].

I also looked into improving the lower bound to 6. At some point, I was hope-

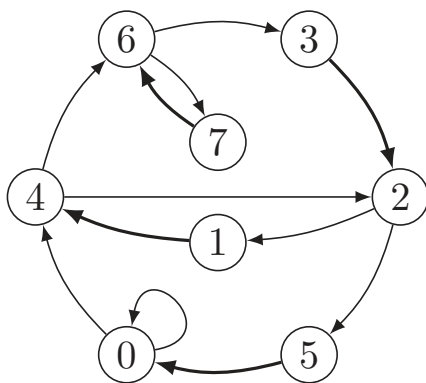


Figure 1 Transition graph of the iterates in the Collatz trajectories across residue classes modulo 8. Let $C(n)$ denote the Collatz map. The edge $u \rightarrow v$ is part of its transition graph if and only if there exists some $n \equiv u \pmod{8}$ such that $C(n) = v \pmod{8}$. Bold edges indicate transitions where $C(n) > n$.

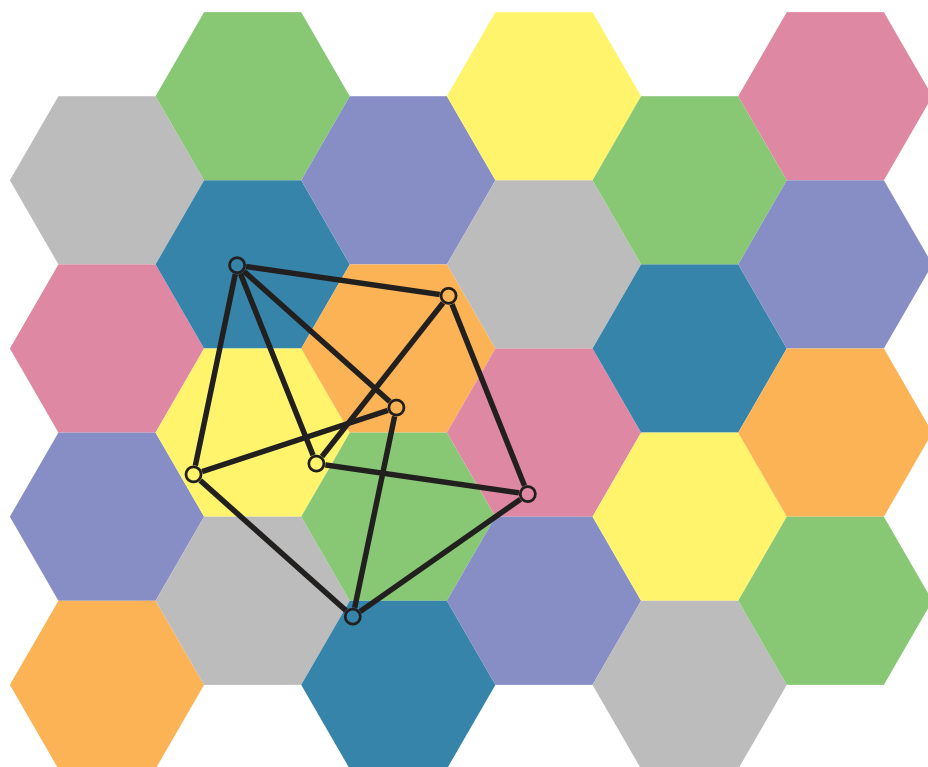


Figure 2 Visualizations of early bounds of CNP: The Moser spindle graph and a 7-color tessellation of the plane.

ful that I was close: I found several large graphs (around 100 000 vertices) for which SAT techniques were unable to find a valid 5-coloring. I tried to prove the absence of 5-colorings with massive parallel computation, but failed. Meanwhile, I was studying 4-colorings of dense unit-distance graphs and observed that points that are certain distances apart from each other always had a different color. This notion is also known as a virtual edge. There was a clear pattern in the found virtual edges: their length was an odd number divided by an odd number. In a later experiment I searched for colorings of the large graphs using edges for any distance that is an odd number divided by an odd number. Surprisingly, the solver was able to find valid 5-colorings. Hence the large graphs have chromatic number at most 5, because adding edges can only increase the chromatic number.

At this point I became intrigued by odd-distance graphs: two points are connected if they are an odd distance apart. Such graphs have been studied by Moshe Rosenfeld and various co-authors. One interesting result is that there exists an odd-distance graph with chromatic number 5 that consists of only 21 vertices [2], which is shown in Figure 3. Alexander Soifer conjectures that there are odd-distance graphs in the plane with an infinitely

large chromatic number [13]. However, no odd-distance graph with chromatic number 6 is known. Constructing one is therefore my second challenge.

Challenge 2 (\$500). Construct an odd-distance graph with chromatic number 6 or prove that none exists.

What makes odd-distance graphs with chromatic number 6 interesting? The patterns observed in 4-colorings of dense unit-distance graphs can also be observed in 4-colorings of odd-distance graphs with significantly fewer vertices (points). Therefore, knowing which points form an odd-distance graph with chromatic number 6 can be a big help in constructing a unit-distance graph with chromatic number 6 (if it exists). Note that if no odd-distance graph with chromatic number 6 exists, then there is clearly no unit-distance graph with chromatic number 6. Hence the chromatic number of the plane would be 5.

The Most Wanted Folkman Graph

Finally, let's consider another old but slightly more recent graph problem. It involves a graph property, called the monochromatic triangle property. A graph has this property if every coloring of its edges with two colors, say red and blue, includes a red or blue triangle. It is relatively easy to check that a fully connected graph with 6 vertices (i.e., a 6-clique) has the monochromatic tri-

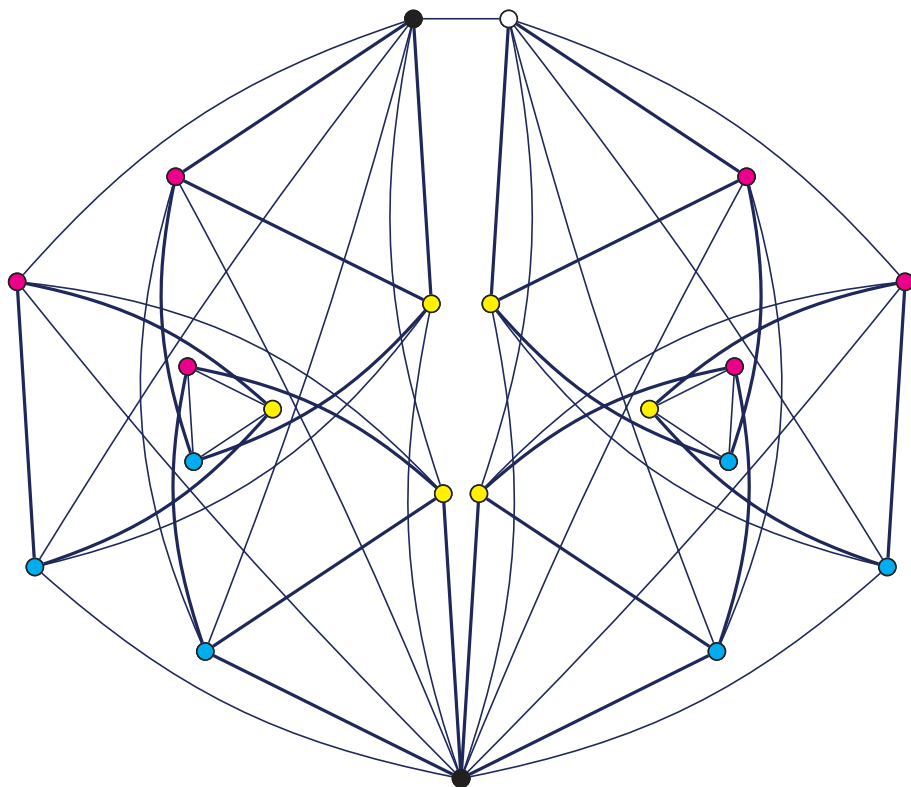


Figure 3 The smallest known odd-distance graph with chromatic number 5. The shortest edges have length 1 and the bold edges have length 3.

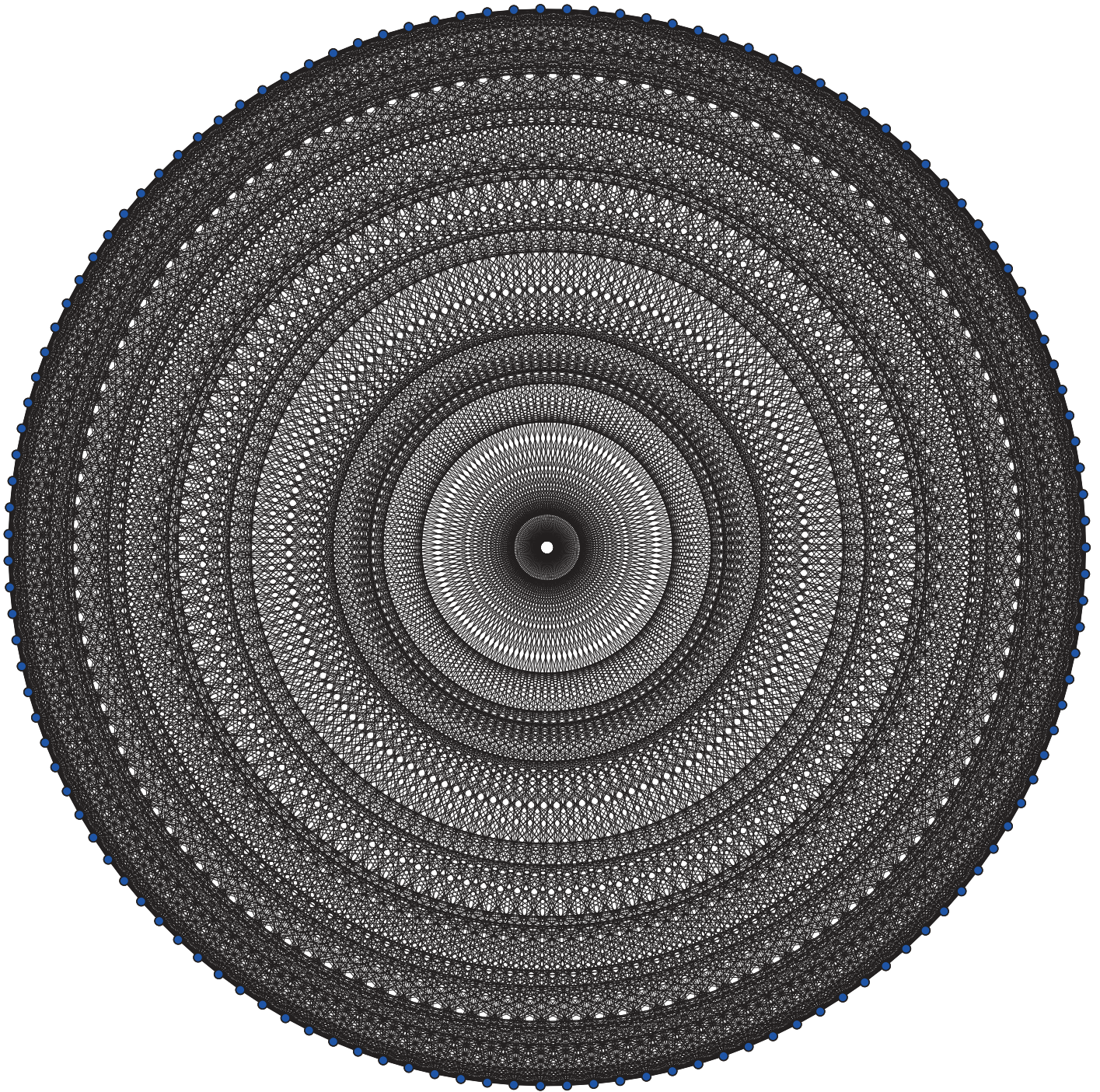


Figure 4 Graph G_{127} which is likely a Folkman graph.

angle property. This is also why Ramsey number $R(3) = 6$. In 1967, Erdős and Hajnal asked the following: does there exist a graph without a 4-clique as an induced subgraph that has the monochromatic triangle property? Folkman proved in 1970 that such graphs exist, but his argument involved graphs of enormous size. Graphs with the monochromatic triangle property that are 4-clique-free are known as Folkman graphs, and the Most Wanted Folk-

man Graph problem asks for the smallest such graph.

Erdős was the first to push for finding the smallest Folkman graph. He offered a cash prize of \$100 to the first person who could show the existence of a Folkman graph with fewer than 10 billion vertices. Spencer in 1988 received the prize by proving that there exist Folkman graphs with fewer than 3 billion vertices. Afterward, Erdős offered another cash prize of \$100

for showing that there exists a Folkman graph with fewer than a million vertices. Lu received that prize from Ronald Graham in 2007 after constructing a Folkman graph with just 9697 vertices [10]. Graham continued Erdős's quest by offering another cash prize of \$100 for showing the existence of a Folkman graph with fewer than a hundred vertices. The current record is a Folkman graph consisting of 786 vertices found by Lange, Radziszowski and Xu [9].

The search for the smallest Folkman graph ran into an interesting twist in recent years. While it has been difficult for many years to find Folkman graphs of modest size, there are several small candidates for Folkman graphs (around 100 vertices) for which we cannot prove the monochromatic triangle property. The potentially most effective automated method for proving the monochromatic triangle property of small graphs is the use of SAT techniques, which is one of the reasons why I became interested in this problem. The SAT approach to the problem works as follows: given a graph, a propositional formula is constructed asking whether the monochromatic triangles can be avoided. If this formula is unsatisfiable, it means that the property cannot be avoided and that it therefore holds. Although the SAT formulas of the small candidates are not large, they turn out to be very hard.

Let's consider one graph in particular: G_{127} [12]. As the name suggests, G_{127} has 127 vertices. Let's call them $v_1, \dots, v_{127}$. Two distinct vertices v_i and v_j are connected if and only if $|i - j| \equiv 5^k \pmod{127}$ for some $k \geq 0$, which leads to 2666 edges. Figure 4 shows G_{127} , which is 4-clique-free and believed to be a Folkman graph [12]. The SAT formula stating whether G_{127} has the monochromatic triangle property has several aspects in common with the SAT formula for the Pythagorean Triples problem [7], whose solution made me the proud recipient of a \$100 prize by Ronald Graham. For example, both formulas are similar in size, and all clauses in the two formulas are of length 3.

There is, however, a major difference: While local search techniques are able to quickly satisfy almost all clauses of the formula for the Pythagorean Triples problem, such techniques cannot get close to a satisfying assignment for the G_{127} formula. This would suggest that the G_{127} formula is very unsatisfiable (meaning that there are many potential ways to refute the formula) and that showing unsatisfiability (proving the monochromatic triangle property) should be relatively easy. However, in my experience, solving this formula with SAT techniques is much harder than the Pythagorean Triples problem, which required four CPU years and resulted in a proof of 200 terabytes [7]. Some other techniques might be more suitable for this problem, if they can exploit the observation that the formula is very unsatisfiable. Still, I consider it a serious challenge.

Challenge 3 (\$500). *Prove or disprove that any bi-coloring of G_{127} has a monochromatic triangle.*

Of the small candidates for Folkman graphs, G_{127} is interesting because of its many symmetries. It has also been observed by others [12] that many vertices can be dropped from G_{127} , likely preserving the monochromatic triangle property. Experimental evidence suggests that up to 33 vertices can be dropped, resulting in graphs with just 94 vertices. However, proving the monochromatic triangle property of these smaller graphs is expected to be more difficult than proving it for G_{127} .

Final remarks

The Collatz conjecture is famous not only because of its perceived hardness but also because of its elegance. Many variants have been proposed [8] and my first challenge is another one. What makes this challenge interesting is that it appears much easier while no obvious termination argument exists. For most other variants this is not the case: either they appear as hard as Collatz or an argument of (non-) termination is known. Successes on Collatz-like problems have been limited so far. Focusing on an easier variant could hopefully result in some interesting insights.

Out of the proposed variants, the second challenge is likely the easiest one. The main reason is that some progress is finally being made regarding the chromatic number of the plane. Before de Grey's breakthrough, practically no advances had been made in 68 years. I expect that smaller and smaller unit-distance graphs will be found with chromatic number 5 and that eventually also some interesting candidates for chromatic number 6 will be constructed. However, at that point, we might end up in a situation similar to the most wanted Folkman graph: proving that the chromatic number is 6 might become the hardest part.

The history of the most wanted Folkman graph is rich with lots of progress. If the third challenge can be met, then it might even be possible to prove the monochromatic triangle property of various of its subgraphs with less than 100 vertices (the challenge posed by Graham). The cash prizes by Erdős inspired many researchers in this direction. Let's continue this tradition. ☺

References

- 1 Kenneth Appel and Wolfgang Haken, Every planar map is four colorable. Part I: Discharging, *Illinois Journal of Mathematics*, 21(3) (1977), 429–490.
- 2 Hayri Ardal, Jan Manuch, Moshe Rosenfeld, Saharon Shelah and Ladislav Stacho, The odd-distance plane graph, *Discrete Comput. Geom.* 42(2) (2009), 132–141.
- 3 Kevin Buzzard, Johan Commelin and Patrick Massot, Formalising perfectoid spaces, in *Proceedings of the 9th ACM SIGPLAN International Conference on Certified Programs and Proofs, CPP 2020*, Association for Computing Machinery, 2020, pp. 299–312.
- 4 Aubrey D.N.J. de Grey, The chromatic number of the plane is at least 5, *Geombinatorics* 28 (2018), 5–18.
- 5 Matthew Alexander Denend, *Challenging Variants of the Collatz Conjecture*, Master's thesis, UT Austin, 2018.
- 6 Jon Folkman, Graphs with monochromatic complete subgraphs in every edge coloring, *SIAM Journal on Applied Mathematics* 18(1) (1970), 19–24.
- 7 Marijn J. H. Heule, Oliver Kullmann and Victor W. Marek, Solving and verifying the Boolean Pythagorean Triples problem via Cube-and-Conquer, *Theory and Applications of Satisfiability Testing – SAT 2016*, Springer, 2016, pp. 228–245.
- 8 Jerrey C. Lagarias, *The Ultimate Challenge: The $3x + 1$ Problem*, American Mathematical Society, 2010.
- 9 Alexander Lange, Stanisław P. Radziszowski and Xiaodong Xu, Use of MAX-CUT for Ramsey arrowing of triangles, arXiv:1207.3750, 2012.
- 10 Linyuan Lu, Explicit construction of small Folkman graphs, *SIAM J. Discret. Math.* 21(4) (2008), 1053–1060.
- 11 Jaan Parts, Graph minimization, focusing on the example of 5-chromatic unit-distance graphs in the plane, *Geombinatorics* 29 (2020), 137–166.
- 12 Stanisław P. Radziszowski and Xiaodong Xu, On the most wanted Folkman graph, *Geombinatorics* 16 (2007), 367–381.
- 13 Alexander Soifer, The Hadwiger–Nelson problem, in John Forbes Nash, Jr. and Michael Th. Rassias, eds., *Open Problems in Mathematics*, Springer, 2016, pp. 439–457.
- 14 Adam Zsolt Wagner, Constructions in combinatorics via neural networks, 2021.
- 15 Emre Yolcu, Scott Aaronson and Marijn J. H. Heule, An automated approach to the Collatz conjecture, in *Automated Deduction – CADE 28*, Springer, 2021, pp. 468–484.

Wim Caspers

Lyceum Ypenburg, Den Haag, en
Faculteit EWI en Lerarenopleiding, TU Delft
w.t.m.caspers@tudelft.nl

Onderwijs Bespreking examen vwo wiskunde B 2021

Hoe moeilijk kan het zijn?

In 2020 sloten leerlingen hun vwo-opleiding af zonder een Centraal Examen te hebben afgelegd. Voor de volgende lichting ging dat examen wel door. Overigens werden de spelregels aangepast. Kandidaten konden het examen spreiden over drie tijdvakken en bovendien mochten de examens van twee vakken herkanst worden in plaats van maar een. En bij de uitslagbepaling mocht een vak buiten beschouwing worden gelaten, afgezien van Nederlands, Engels en wiskunde. Maar de examens zelf, zijn die te vergelijken met de examens van de afgelopen jaren? Wim Caspers beschrijft wat hem opviel in het wiskunde B-examen van 2021.

De leerlingen in het examenjaar 2021 hebben zich onder bizarre en sterk wisselende omstandigheden moeten voorbereiden. Afgezien van persoonlijke omstandigheden (besmetting, quarantaine, ziekte en erger) werd de lesstof steeds op een andere manier aangeboden. Vanaf maart 2020 gebeurde dat eerst een periode met begeleiding op afstand en vervolgens door online onderwijs tot het einde van het voorexamenjaar. Het examenjaar begon normaal op school, maar vanaf december op anderhalve meter onderlinge afstand, veelal resulterend in hybride onderwijs; de helft van de week vanuit huis de les volgen en de andere helft van de week in het lokaal.

Het was voor docenten ingewikkeld om in de gaten te houden of hun leerlingen nog wel aan de gebruikelijk eisen voldeden. De traditionele manier of gebruikelijke frequentie van toetsen kon vaak niet gevolgd worden, dus het beeld werd vertroebeld. Aan het eind van het voorexamenjaar werden de gebruikelijke bevorderingsnormen minder streng gehanteerd en dus was het spannend om te zien hoe de kandidaten door het Centraal Examen zouden komen. Hoe zwaar zou hen het exa-

men wiskunde B vallen en zijn de examens in dit bijzondere jaar van hetzelfde niveau als anders?

Het inschatten van de moeilijkheidsgraad van een examen is een verraderlijke bezigheid. Wanneer je het examen een keer hebt doorgewerkt, lijkt het op het

tweede gezicht een stuk overzichtelijker, laat staan wanneer je een hele stapel uitwerkingen van leerlingen beoordeeld hebt. Door omstandigheden had ik het examen wiskunde B uit het tweede tijdvak nog niet gezien. Deze bespreking was dus een uitgelezen gelegenheid om het onbevange te bekijken en de moeilijkheidsgraad ervan in te schatten.

Gewaarschuwd door een N -term van 2,1 richten we ons eerst maar eens op de laatste opgave omdat daar het venijn zich pleegt op te houden. En inderdaad. In de opgave 'Driehoek in een cirkel' is sprake van een raaklijn k door de oorsprong O aan een

De N -term

Ieder examen wordt achteraf voorzien van een N -term: een getal tussen de 0 en (in principe) 2, waarmee de score van een kandidaat omgezet kan worden naar een cijfer. Ruwweg komt het erop neer dat een leerling die de helft van het aantal te behalen punten scoort in geval $N=0$ als cijfer een 4,5 krijgt toegekend, in geval $N=1$ een 5,5 en in geval $N=2$ een 6,5. Voor het examen wiskunde B uit het tweede tijdvak werd achteraf als N -term 2,1 vastgesteld, buitengewoon hoog. Het vaststellen van een N -term kende afgelopen jaar een bijzondere procedure. Normaal gesproken is het uitgangspunt daarbij, dat het vaardigheidsniveau van de kandidaten elk jaar hetzelfde is. Omdat dat in dit bijzondere jaar niet vanzelfsprekend was, werd ook de inschatting van de moeilijkheidsgraad door docenten in ogenschouw genomen, evenals de N -termen van de afgelopen jaren. Bovendien was er, als altijd, ruimte voor bijstelling vanwege onvolkomenheden in het examen. In dit tweede tijdvak waren de deelnemers kandidaten die het examen spreidden en dus wiskunde B voor het eerst maakten, gemengd met kandidaten die na deelname in het eerste tijdvak opgingen voor hun herexamen. Dit maakte het bepalen van een N -term nog wat ingewikkelder.

Voor wie precies wil weten hoe de N -term dit jaar bepaald werd:

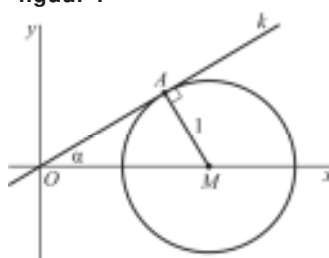
<https://www.examenblad.nl/nieuws/20210219/normering-centrale-examens-2021/2021>

Driehoek in cirkel

Een lijn k gaat door de oorsprong O en maakt een hoek α met de positieve x -as, met $0^\circ < \alpha < 90^\circ$.

Op de positieve x -as ligt een punt M zo dat de cirkel met middelpunt M en straal 1 lijn k raakt. Punt A is het raakpunt en hoek OAM is dus 90° .

figuur 1



In figuur 1 is de situatie voor een bepaalde waarde van α weergegeven.

De coördinaten van $A(x_A, y_A)$ kunnen worden uitgedrukt in α .

- 5p 15 Bereken de waarde van α waarvoor $x_A = \frac{1}{2}$. Geef je eindantwoord in hele graden.

Figuur 1 Vraag 15, onderdeel van de laatste opgave uit het examen vwo wiskunde B 2021.

cirkel met middelpunt M en straal 1, en een raakpunt A met $x_A = \frac{1}{2}$ (zie vraag 15 in Figuur 1). Nu ben ik vergeten te vertellen dat de hoek die k maakt met de positieve x -as α genoemd wordt. De vraag is om α te berekenen. Vlak ervoor wordt bij wijze van hint (?) uitnodigend opgemerkt dat de coördinaten van A kunnen worden uitgedrukt in α .

Als je figuur 1 uit de opgave probeert na te maken in bijvoorbeeld GeoGebra, ligt het niet voor de hand om te beginnen met het tekenen van de raaklijn. Het lijkt gemakkelijker om te beginnen met het kiezen van M , dan een cirkel met straal 1 te tekenen en een raaklijn door O aan de cirkel te tekenen. Aha, in plaats van de coördinaten van A uit te drukken in α , dringt zich een heel andere oplossing op. De poollijn van O ten opzichte van de cirkel is de lijn $x = x_A$ en in dit speciale geval dus $x = \frac{1}{2}$. Maar gebruikmakende van een vergelijking van de cirkel

$$(x - x_M)^2 + y^2 = 1$$

levert eerlijk delen als vergelijking van de poollijn

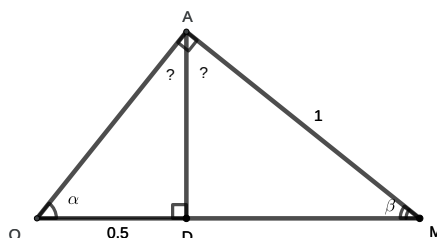
$$-x_M(x - x_M) = 1$$

en daarmee vind je

$$x_M = \frac{1}{4} + \frac{1}{4}\sqrt{17}$$

waarmee α snel te bepalen is.

De sturende opmerking om de coördinaten van A uit te drukken in α , leidt tot oplossingen waar geen raaklijn aan te pas komt. En inderdaad blijkt de situatie niet wezenlijk te veranderen wanneer je cirkel en raaklijn weglaat. Uiteindelijk komt het neer op het plaatje getoond in Figuur 2.



Figuur 2

Opeens wemelt het van de gelijkvormige driehoeken en vertoont het vraagstuk grote overeenkomsten met sommetjes uit de vierde klas, inderdaad op te lossen door OD uit te drukken in α , maar voor leerlingen met een goed geheugen misschien ook wel met verhoudingstabellen. Kortom, de opzet van deze opgave dwingt de kandidaat buitengewoon soepel door de verschillende domeinen van zijn kennis te bewegen. De tekening of juist de hint kunnen onbedoeld een rookgordijn opwerpen.

Dat het vraagstuk gesteld is uitgaande van een raaklijn, lijkt onhandig, maar blijkt

in de volgende vraag van de opgave goed uit te komen (zie vraag 16 in Figuur 3). Daarin laat men α naar 0 naderen en uiteindelijk mag de oppervlakte berekend worden van een gelijkbenige driehoek met tophoek 45° en gelijke zijdes van lengte 1. Dat is dan wel weer te doen.

Vlak ervoor, in vraag 14, werd de administratieve kracht van de kandidaten op de proef gesteld. Gegeven werd voor $x > 0$,

$$f(x) = e^{-\frac{1}{x}}$$

met afgeleide

$$f'(x) = \frac{1}{x^2} \cdot e^{-\frac{1}{x}}.$$

De raaklijn aan de grafiek van f in een punt P snijdt de x -as in een punt S . Gevraagd werd exact de maximale waarde van de x -coördinaat van S te berekenen. Veel kandidaten zullen ervoor gekozen hebben een vergelijking van de raaklijn aan de grafiek in het punt $P(p, e^{-\frac{1}{p}})$ op te stellen van de vorm

$$y = \frac{1}{p^2} e^{-\frac{1}{p}} \cdot x + b$$

om daarna x op te lossen uit

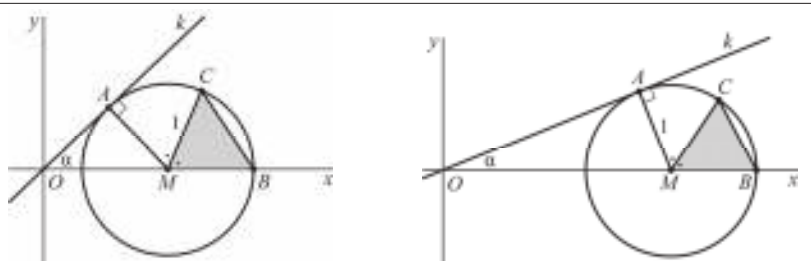
$$0 = \frac{1}{p^2} e^{-\frac{1}{p}} \cdot x + e^{-\frac{1}{p}} - \frac{1}{p^2} e^{-\frac{1}{p}} \cdot p.$$

Als je dan niet flink vereenvoudigt, loop je de kans daarna een redelijk ingewikkelde uitdrukking te maximaliseren door het nulstellen van een nare afgeleide. In het beoordelingsmodel wordt als vorm voor de vergelijking van de raaklijn gekozen voor

$$y - e^{-\frac{1}{p}} = \frac{1}{p^2} e^{-\frac{1}{p}} (x - p).$$

Het rekt in het vervolg net iets makkelijker. Ik ben bang dat leerlingen die vorm niet op grote schaal aangeleerd hebben gekregen. Toch maar eens mee beginnen.

Kandidaten die minder vertrouwd waren met het manipuleren van wortels en loga-



Als α nadert naar 0, neemt de oppervlakte van driehoek MBC af tot een grenswaarde.

- 5p 16 Bereken exact deze grenswaarde.

Figuur 3 Vraag 16, onderdeel van de laatste opgave uit het examen vwo wiskunde B 2021.

Kromme K

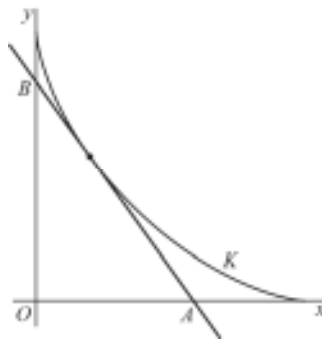
De kromme K is gegeven door de bewegingsvergelijkingen:

$$\begin{cases} x(t) = \cos^3(t) \\ y(t) = \sin^3(t) \end{cases} \text{ met } 0 < t < \frac{1}{2}\pi$$

In de figuur is kromme K getekend. Ook is voor een waarde van t in het bijbehorende punt van K de raaklijn aan K getekend.

De helling in het punt $(x(t), y(t))$ van K kan worden berekend met: $-\frac{\sin(t)}{\cos(t)}$

figuur



3p 1 Bewijs dit.

Een vergelijking van de raaklijn in het punt $(x(t), y(t))$ van K is:

$$y = -\frac{\sin(t)}{\cos(t)}x + \sin(t)$$

3p 2 Bewijs dat deze vergelijking juist is.

De raaklijn snijdt de x -as in punt A en de y -as in punt B .

3p 3 Bewijs dat de lengte van het lijnstuk AB constant is.

Figuur 4 De eerste opgave uit het examen vwo wiskunde B 2021.

ritmes hadden tegen die tijd al het nodige voor de kiezen gehad in de opgaven over wortelgrafieken en bankenformules. Onderwerp in de ene opgave waren de grafieken van $f(x) = 2\sqrt{x}$ en $g(x) = \sqrt{2x}$, leidend tot redelijk standaard rekenwerk met primitieven en afgeleiden van wortels. In de andere opgave werd de formule

$$T = \frac{\ln(2)}{\ln\left(1 + \frac{p}{100}\right)}$$

voor de verdubbelingstijd bij een groeipercentage van p beschouwd, en werden de benaderingen $T_1 = \frac{70}{p}$ en $T_2 = \frac{72}{p}$ met elkaar vergeleken.

En kandidaten die het onderwerp goniometrie voor het gemak maar buiten beschouwing gelaten hadden bij bestudering van de stof (ja, dat komt voor) waren in de eerste opgave al op de koffie gekomen. Zie Figuur 4. De ontdekking bij vraag 3 dat de kromme precies beschreven wordt door

een ladder van lengte 1 die langs de muur en over de grond naar beneden glijdt, zal aan hen voorbijgegaan zijn.

Het geheel overziend doen de kandidaten die dit examen voldoende maakten niet onder voor hun collega's uit voorgaande jaren. Het eerste tijdvak kende een qua spreiding in de onderwerpen vergelijkbaar examen, al bleven de uitdrukkingen in de berekeningen wat eenvoudiger. Als N -term werd 1,5 vastgesteld. Het derde tijdvak kreeg als N -term 1,6 mee. Ook daar weer een mooie spreiding over de verschillende domeinen van het examenprogramma, maar die versie kende weer wat ingewikkelder formulewerk. Zo werd bijvoorbeeld gevraagd te bewijzen dat

$$\frac{1}{2}(\sin(3x) - \sin(x)) = \sin(x)\cos(2x).$$

In de toen nog net niet actuele opgave over hoogwater werd gevraagd de afgeleide $\frac{dC}{dT}$ te bepalen van de capaciteit van de rivier, waarbij

$$C = a - b \ln\left(\ln\left(\frac{T}{T-1}\right)\right).$$

En er werd gevraagd te laten zien dat de functie f gegeven door

$$f(x) = x^3 + 6x^2 + 12x + 9$$

als inverse functie heeft

$$f^{\text{inv}}(x) = -2 + \sqrt[3]{x-1},$$

om gewapend met die kennis de inhoud van een omwentelingslichaam te berekenen dat ontstaat door wentelen van een vlakdeel om de y -as. Een mooi rijtje opgaven om het schooljaar 2021–2022 mee te beginnen. Dan weten ze meteen waar de lat ligt. $\diamond$

Francesca Arici

Mathematisch Instituut
Universiteit Leiden
f.arici@math.leidenuniv.nl

Clara Stegehuis

Faculteit EWI
Universiteit Twente
c.steghuis@utwente.nl

Proof by example Portraits of women in Dutch mathematics

Aida Abiad

Aida Abiad is a tenured Assistant Professor in Mathematics at the Mathematics and Computer Science Department of Eindhoven University of Technology (TU/e). She is also affiliated with Ghent University and Vrije Universiteit Brussel, supported by a personal postdoctoral FWO grant. She joined TU/e in January 2020 and before this she worked in Maastricht University, first as lecturer and after as assistant professor, and in Tilburg University, where she obtained her PhD in 2015.

When was it that you first realised you wanted to be a mathematician?

“My passion for mathematics and science was something that started quite early, but it took me a while to really make a final decision. During my high school studies, I chose the scientific track, with physics, chemistry, maths, biology. At that time, it was already clear that mathematics was the topic I enjoyed the most. Eventually, for my bachelor’s degree, I enrolled in the engineering program. This choice was motivated by a chat I had with one of my high school teachers, who mentioned that mathematics is everywhere in engineering and that such bachelor would provide many more job opportunities. I thought that it sounded very appealing, so I decided to give it a try. I chose electrical and telecommunication engineering for my degree, but I quickly realised that I did not enjoy it as much as I had expected. However, being as stubborn as I am, I decided to just continue it and complete that degree. Looking back at those years, it was clear that the courses I liked the most were the ones involving more math contents and fewer applications. So, after completing my bachelor’s degree, I decided to enrol myself in the mathematics master program at the Polytechnic University in Barcelona, and right away I felt that it was the right choice. For my master’s thesis I started working in the field of discrete mathematics, and I think that was the best choice for me, as proving results

in discrete mathematics did not require so much theory background as other math fields. On top of that, I really liked the topic I picked up and I wrote my master’s thesis on applications of linear algebra in spectral graph theory.”

You have a PhD from Tilburg University. What took you to the Netherlands?

“It was 2011, and Willem Haemers, who would become my future PhD supervisor, came to the Polytechnic University of Catalonia, in Barcelona, to teach a summer course on spectral graph theory and related topics. Back then, I was working on my master’s thesis on that same topic. Not only did my master’s supervisor (Miquel Anel Fiol) encourage me

to attend the lecture series, but he also mentioned my name to my future PhD supervisor, who was looking for students to join his group in the Netherlands, so I ended up moving to Tilburg.”

How do you look back at your move to the Netherlands?

“It has been almost ten years, and I am really enjoying my life here. To be honest, in the beginning, I felt a bit lonely and homesick, missing the life I had in Barcelona, which is a beautiful city, a lively metropolis. On top of that, I missed my research group and teaching colleagues at the university in Barcelona: we had a very nice community. So, on one hand, I was somehow sad to leave this behind, but at the same time, I saw my move as a challenge which would bring me new adventures. So I said to myself: ‘OK, let’s see if I can make a new life here, learn new things and learn from one of the best researchers in the field.’ What started as a challenge became an extremely positive experience: the PhD was going smoothly, I slowly started making new friends. I enjoyed my time, and after finishing my PhD, I realised that I actually did not want to leave the Netherlands. And because of not wanting to leave the Netherlands, instead of a postdoc offer in the US, I ended up accepting a lecturer position at Maastricht University. I still recall that some math colleagues mentioned that this would put my research career in risk.”

Can you tell us more about this?

“The lecturing position in Maastricht entailed 100 percent teaching duties. To the best of my possibilities, I still kept doing research and I kept going to conferences. The academic year 2015–2016 was quite a hectic one, but the Operations



Aida Abiad

Research group in Maastricht University, and my mentor Stan van Hoesel, were all very supportive, encouraging me to keep working on my ongoing research projects and replacing me when I was invited to give a talk in a conference. A year after, I became an assistant professor at Maastricht University, but my research had started to be affected by my teaching load, which was still pretty high. This is why, after discussing with Leo Storme, I decided to apply for a personal research grant from FWO in Belgium in order to join his research group in case of being successful. I was awarded the grant, and this allowed me to combine positions in both Maastricht and Ghent universities. In this way I could learn new topics like incidence geometry from my colleagues in Belgium, and at the same time this allowed to substantially reduce my teaching load at Maastricht University.”

What kind of problems are you currently thinking about?

“My research concerns algebraic graph theory, which means that I study graphs through the lens of the *spectrum* (eigenvalues of a certain associated matrix to a graph). Graphs are often used in real-life applications in order to model networks of different natures, from social networks to logistic or biological networks. In particular, I look at the spectrum of a graph and investigate which structural and combinatorial properties can be deduced from the graph spectrum.”

And can you actually ‘hear’ the shape of a graph?

“Unfortunately, the eigenvalues do not provide us with complete information about the graph: there are examples of different (non-isomorphic) graphs which share the same spectrum (cf. Figure 1). But not all is lost: in some cases, within certain graph families, eigenvalues are enough to completely characterize such graphs. So I believe that the spectrum is, for sufficiently large graphs, a unique fingerprint of a graph. My research aims to further the understanding of when one can use the spectrum to characterize graphs. For the cases where the spectrum does not fully characterize a graph, I am interested to find some other alternative graph invariants that complement it in

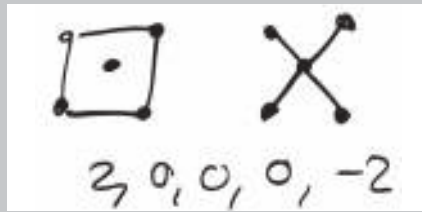


Figure 1 Smallest pair of non-isomorphic graphs having the same eigenvalues.

such a way that we can complete the picture and obtain full information.”

Do you also work on real-life applications of graphs?

“Very recently I was involved on an applied paper with people in industry, which was joint work with a former colleague from Maastricht, Alexander Grigoriev, and a master student, Stefanie Niemzok. This work was based on a real case study provided by a company, and the main goal was to improve a search engine for a database consisting of printed circuit boards. We showed that the information about the circuit boards can be stored in terms of graph invariants, like the graph spectrum or the degree sequence, which require much less memory and enable a quicker recognition of board equivalence. To me, this provided the perfect application to test the discriminating power of the spectrum to distinguish thousands of electric motherboards. It was a very nice practical experience, much more down to earth than my usual research.”

You were recently awarded a Klein-1 grant from NWO. Can you tell us about the project?

“The main goal of this NWO project is to develop new techniques to construct different graphs having the same spectrum. In some sense, we are still far from understanding which are the graph properties that the spectrum cannot detect. This research project will provide a step further in this direction.”

What do you like the most about being a mathematician?

“My main motivation for being a mathematician is that this job lets me spend most of my time learning new things, compared with some other jobs. I love the freedom it gives and the creativity it entails; I very much enjoy this aspect of my job. No two days are the same: I get

to work on a variety of problems, and every time the approach is different. When working on discrete mathematics problems, you need to think out of the box, come up with a new idea, develop new methods. To me, it is a very happy and rewarding moment when I first conceive a solution to a problem I have been working on for a while. And of course, there is also the beauty aspect: when you arrive to a nice proof after months of thinking, it is very satisfactory. I think that mathematicians are guided by the aesthetics as much as intellectual curiosity.”

Is there anything you found difficult in your career as a mathematician?

“To be honest, I look back to my PhD years with some nostalgia, since then I had plenty of time to focus on my research. Now there are many other things on my plate, some of which I enjoy a lot, like supervising students or teaching, and others less, such as bureaucratic tasks. As for obstacles, the process of applying for permanent positions was rather stressful. Compared to the amount of postdoctoral positions, there are not so many tenure-track positions. This process was a bit complicated by the fact that I wanted to stay in the Netherlands.”

Is there anything about your work that you are proud of?

“I think one result that I am proud of goes back to a combinatorics graduate workshop in the US that I attended it during my last PhD year. As participants, we had to propose problems to work on, and the most voted ones would be the ones we would work on for two weeks. Luckily, my problem was selected so we worked on it for two weeks. It was an old conjecture by Graham and Lovász on the coefficients of the characteristic polynomial of the distance matrix of a tree. To be honest, the conjecture was just the motivation for me to state several smaller problems on the distance matrix. But in the end, we ended up partially solving the conjecture, and publishing two papers. This was a really unexpected development. Looking back, the conjecture was actually quite easy to solve. But putting the proof ideas together is something that happened thanks to this collaboration. So that was very exciting and rewarding.”

Piet Groeneboom

Delft Institute of Applied Mathematics
TU Delft
p.groeneboom@tudelft.nl



Column Piet takes his chance

En flagrant délit

Piet Groeneboom regularly writes a column on everyday statistical topics in this magazine. This time, he writes about recent events at the Mathematical Institute in Leiden, as reported by the university magazine *Mare*. The former scientific director of the Mathematical Institute, Frank van der Duijn Schouten, as well as The Management of the MI and the current dean of the faculty of Science, Paul Wouters, dispute the picture that is painted in *Mare*. We have included their reactions alongside Groeneboom's column.

"La mémoire est l'avenir du passé" (Paul Valéry)
"Gossip is the essence of ethics" (Marcia Eaton)

A robbery

The year is 1986. Waking up, I see a man standing next to my bed. He says: "I am a policeman, you have to come with me to the police station." I ask: "Why?" He answers: "You are involved in a robbery." "A robbery, when?" He says: "Yesterday." "A robbery where?" He answers: "A robbery at the cinema Rembrandt. People at the cinema saw the robbers jump into your white Fiat Tipo, and jotted down your license number." I say: "Oh, so the new gangster car is a white Fiat Tipo and no longer the black Citroën?" He is not amused.

Of course the black Citroën was slightly anachronistic, but I had images of Jean Gabin in *Le rouge est mis*, waiting in his black Citroën for his 'complices', robbing a bank (in fact, I got the DVD of this movie as a birthday present not long ago; it did not completely live up to my memories). I am using the French word 'complices', because I am thinking of 'les deux complices en statistique' Pascal Massart and — Brouwer medalist — Lucien Birgé. My speech for them in 2018 is for some reason still on the 'deux complices' site of the meeting: see [4].

It was true that, taking a shortcut, I had driven on the so-called 'Old Canal' street in Utrecht along by the cinema Rembrandt the previous day, something which nowadays would not have been possible. Apparently I had driven by the cinema exactly at the time of the robbery.

I had to get dressed and go with the policeman to the police station, where I was questioned for half an hour. After this half hour they somewhat reluctantly told me that they did not think that I was involved in the robbery. They also had checked that I was professor at the Mathematics Institute of the University of Amsterdam and mentioned this to me, also saying: "If you had been a student, you would have spent a night in jail!" I tried: "Yes, but professor Moriarty?..." (no reaction), "the opponent of Sherlock Holmes?..." (did not seem to ring a bell either). Anyway, I was released and allowed to go home.

Navigating

We now move to the nineties. The first navigation systems for cars are on the market! For a person like me, who always gets lost, in life in general, but in particular behind the steering wheel of my car (due to a weak sense of orientation or a more general lack of intelligence), this was a great moment. I bought a new car, the men of the garage across the street installed the new system. My euphoria was very short-lived. The navigation system was stolen three times in a short period. I still remember coming out of the house in the morning and seeing the car door hanging sideways and knowing: "Yes, they did it again!"

After each theft I went to the police to report it and to fill out long forms. The police told me that they could do nothing unless I caught the thieves 'en flagrant délit' (in Dutch: 'een heterdaadje').

So what should I do? Stay up all night and watch from my darkened room my car on the street? And if I would see them do it, would the police be sufficiently fast on the scene?

Since I had to drive to Delft University in the morning (I had moved to Delft University in the mean time, but for other reasons than Aad van der Vaart recently), and actually not expecting the police to be sufficiently fast on the scene, I tried to sleep during the night. But when the owner of the garage across the street was installing the system for the third time, he noticed three boys watching him do it from the other side of the street and called the

police to give their description. But the police were not interested. Only if you see them do it, we can act, otherwise, bad luck (Dutch: “Geen heterdaadje? Dan kunnen wij op dit moment helaas niets voor u betekenen mijnheer”).

After my navigation system was stolen for the third time I gave up on having such a system (for the time being).

The Leiden events

Recently, rather remarkable events occurred at the Mathematics Institute of Leiden University. An account is given in the journal of the university, *Mare*, see [2]. Reading this article, I was reminded of the famous Taoist saying: “Only fools say about themselves: we are the best.” But saying “we are the best” (or in this case “we were the best”) is very ‘Leidenish’. Disregarding the (usual) Leidenish bragging, I found the account mostly in accordance with the information I gathered about the events from several other sources.

A reaction from abroad from my sister, who lives in England: “It is amusing to see that the Mathematics Institute blames the Russians and Chinese, whereas the mathematicians obviously have to blame themselves.” My sister also checks the English of my columns and then often says (if I make an idiomatic or other error): “Yes, perhaps one can say this in America (this because I lived for extended periods in the US), but we in Great Britain, say...” As they say, the two countries, divided by the same language.

Another member of my family who studied mathematics in Cambridge (‘Leiden on the Cam’) and who joined my sister in checking my English, wrote that he got the following impression about the events from [2]: “Apparently there was a minor issue with student feedback, but the university authorities assure us ‘that matter is now closed’. And of course the Leiden academics are the best in the Netherlands, we know that because they told us so.”

I’ll try to give a summary of the events, without using names. The ‘Leiden scandal’ started with irregularities in connection with teaching evaluations. Now, concerning teaching, I can say with confidence the following about myself: “I am certainly *not the best* (teacher).” Strangely enough, my ‘Nachwuchs’, if I may call them so, consists of very good teachers, for example Geurt Jongbloed, Rik Lophuä and Annoesjka Cabo. At present the coordination of the teaching of mathematics at Delft University is mainly in their hands, Geurt had the trophy of ‘*best teacher* of the year’, et cetera. They all had me as their teacher of Probability and Statistics. But my former student Marloes Maathuis once told me that I should preferably only teach courses for more advanced students. She might be right.

In his retirement speech [3] Fred Steutel talks about teaching evaluations, and says: “I was always there, I always knew what I was talking about, I prepared myself meticulously, the students were usually friendly — until the moment that they had to fill in the evaluation forms.” He thought the teacher is for the Dutch student a natural phenomenon, like the weather.

On the other hand he had also been teaching in the US, where the students wrote friendlier comments on their evaluation forms, and there even had been a girl who told him that he was *the best* teacher she ever had. Fred then comments: “She really must have had bad luck with her teachers!” But this is indeed also my experience, American students usually write rather friendly comments on their evaluation forms.

Be that as it may, according to *Mare* in Leiden more extreme things happened in connection with the evaluation forms. They disappeared! Ten students declared in conversations with two people from outside (a lawyer and a personnel officer) that they were very dissatisfied with the teaching of a particular teacher and also why. Moreover, evaluation forms on which comments had been written had disappeared! Also, the (low) grades students remembered having given in evaluating the course had vanished!

There is a certain type of mathematician that is oblivious to (mathematical) statistics and ‘blocks’ completely if people (like the journalists of the *Mare* article) say: “Statisticians would not be statisticians if they didn’t want to analyze the data.” The chairman of the Mathematics Institute at the time was also a statistician, and noticed, apart from the absence of comments on forms for this particular teacher (also in previous years, according to [2]) that grades had been changed in the evaluation.

The programme committee of the Master’s study Statistical Science set up a statistical experiment. The students received a text, saying that there was a problem with the earlier forms and that therefore a new evaluation was necessary. The evaluations were similar to the previous ones, except for the teacher who was responsible for handling the forms. Very few students gave this teacher a passing grade. On top of that there were 15 comments of explicit criticism on the teaching of this particular teacher (see [2]).

Based on the information in *Mare* there are ‘two camps’ on this issue. From here on I will paraphrase the opinions of these camps, refraining from giving a judgement myself.

Camp 1 (the camp of the chairman who accuses the Russians and Chinese). This experiment is a ‘cowboy experiment’ [apparently giving ‘cowboy’ a negative connotation here, PG]. There is no proof that any forms were lost! This is a witch hunt!

Camp 2 Don’t we have to believe the students who declared that comments on their forms had disappeared and that they gave lower grades for the teaching? Who made the strange changes on the forms?

Camp 1 The students are exciting themselves on WhatsApp and are obviously in the ‘kill the teacher’ mood! And we certainly do not want to speak with the gossip magazine *Mare* of our university. In fact, the university’s executive board has forbidden us to speak with them!

Aad van der Vaart moved from Leiden to Delft after these events, where he started his new job on June 1, 2021 (I can safely use his name here, because it is no secret that he moved).

This touches on a more general issue. We mathematicians primarily want a quiet spot to work on the problems we are really interested in. But this has become increasingly difficult to achieve. According to my sources, up to eight statisticians have recently left the Leiden department. The institute says: “Business as usual”, “nothing happened”, “we are still the best”, “the statisticians who left will of course be replaced”, et cetera. One wonders what the motives of this behaviour are. One also wonders what would have happened if instead of the statisticians, pure mathematicians had decided to leave. Would they have found other positions as easily as the statisticians?

It is true that the concepts used in probability and statistics are rather hard to grasp. It might be easier to explain to the Dutch

non-mathematicians that minus 1 times minus 1 equals plus 1 than to explain what probabilists and statisticians mean by ‘event’, ‘random variable’, et cetera. Both disciplines (probability and statistics) heavily rely on concepts from measure theory. In fact, I finally felt that I understood what these concepts meant myself when I read Chapter 9 of [1]. And even here there has been a (relatively) new development because of the infinite dimensional spaces one has to deal with in nonparametric statistics and the accompanying tension between topology and measure theory (continuous functions versus measurable functions).

References

- 1 Paul R. Halmos, *Measure Theory*, D. Van Nostrand Company, New York, 1950.
- 2 Mark Reid and Susan Wichgers, Fraud, disappearing evaluations and a toxic environment: how the best statistics group in the Netherlands fell apart, *Mare*, 24 June 2021, <https://www.mareonline.nl/en/background/fraud-disappearing-evaluations-and-a-toxic-environment-how-the-best-statistics-group-in-the-netherlands-fell-apart/2021>.
- 3 F.W. Steutel, *Laatste kansen* (Final Chances), Retirement speech, Mathematics and Computer Science, Eindhoven University of Technology, 1996.
- 4 Université Paris, Deux complices en statistique – Two days in honor of Pascal Massart and Lucien Birgé, <https://www.imo.universite-paris-saclay.fr/2complices>, 2018.

In the case of the events in Leiden there is no ‘flagrant délit’, people did not see anybody ‘do it’. They did not see robbers jump into a white Fiat Tipo. But it cannot be denied that there is a rather large amount of circumstantial evidence, together with ‘means, motive and opportunity’. Like the police in the case of the theft of my navigation system, ‘Camp 1’ can try to keep insisting on that they do not have a ‘flagrant délit’.

But finally, to make a variation on a saying in *The Importance of being Earnest* (Oscar Wilde): To lose one statistician may be regarded as a misfortune, to lose eight looks like carelessness. ❦

Fama crescit eundo

Against my custom not to react on columns, I make an exception for this one by Groeneboom, as it unjustly and negatively affects the reputation of colleagues at the Mathematical Institute (MI) of Leiden University.

Groeneboom draws wrong conclusions, both in the case of the ‘lost student evaluations’ as well as in making a connection between this case and the departure of several statisticians from Leiden.

To start with the latter, the main reason for the departure of the Leiden statisticians was not the issue of the ‘lost student evaluations’, but a substantial difference of opinion concerning several aspects of career development, ranging from the principles in hiring young professionals to the role emeriti should play. This gave rise to severe disputes between the Management Team of the institute and several statisticians which ultimately led to their departure from Leiden.

As far as the case of the lost student evaluations is concerned, I must stick to the *Mare* information, as Leiden University holds the principle, that an investigation of scientific integrity that is closed, will not be reopened unless new evidence becomes available. This principle was not respected by all persons involved as some of them deliberately leaked confidential information to the *Mare* reporter. Since the ‘facts’ mentioned in the *Mare* article

are provided by inner-circles and are not independently confirmed, I would have expected more reluctance by Groeneboom in drawing his firm conclusion that “it cannot be denied that there is a rather large amount of circumstantial evidence, together with means, motive and opportunity”. In doing so he places a person, who has been officially declared innocent, back into the benches of the accused.

By analyzing the available information from *Mare*, I personally would at least have kept open the option that this could be an example in which the concept of scientific integrity is misused to try to block the career of a colleague. In any case, I can take off the edge of the claim by Groeneboom that the person accused had good motives for her action: since over the years she has been active in various other education programs with positive evaluations, of which several were taken online, a motive to manipulate the student evaluation of this particular course is non-existent.

By letting the rumor go, Groeneboom deliberately tried to contribute to its growth. As a member of the Dutch mathematical community, I can’t generate any appreciation that NAW is used for this type of purposes.

Frank van der Duijn Schouten

Reaction of the MI Management and the dean of the faculty

We emphatically distance ourselves from the insinuations conveyed in this column. The lecturer in question is a highly valued teacher and researcher and we are proud that she is affiliated with the MI. Leiden University has twice investigated the allegations of missing comments on evaluation forms without assigning any blame. The case is closed. The previous interim scientific director professor Frank van der Duijn Schouten analyzed the conflict concerning unbalanced career policy within the MI that contributed to the departure of several staff members. He made a number of recommendations,

which are broadly supported among the staff of the MI. The first steps towards their implementation have already been taken. This effort will be supported from 1 September onwards by interim scientific director Frans de Haas (<https://www.universiteitleiden.nl/en/news/2021/07/frans-de-haas-appointed-scientific-director-quartermaster-at-the-mathematical-institute-mi>).

Floske Spieksma, Mieke Schutte and Hermen Jan Hupkes
(Management of the MI), and Paul Wouters on behalf of
the Faculty Board of the Science Faculty

Cor Kraaikamp*Delft Institute of Applied Mathematics
TU Delft
c.kraaikamp@tudelft.nl***Robbert Fokkink***Delft Institute of Applied Mathematics
TU Delft
r.j.fokkink@tudelft.nl***Stoffelijke resten** tastbare herinneringen aan wiskundigen

Covid-campussen

De Nederlandse Universiteiten staan er vanwege de covidcrisis een beetje verloren bij. Uitgestorven collegezalen en lege kantines. Niets kan deze doodse atmosfeer zo goed tot leven brengen als een bouwkundige beschrijving. Dertien universiteitsgebouwen, in de woorden van hun ontwerpers, met excuses aan Maastricht.



De Linneausborg in Groningen heeft de vorm van een reptiel dat zich opricht uit het maaiveld. Het gebouw heeft groene kunststof gevels en een grasdak. De menging van laboratoria, nevenruimten en kantoren leidt tot een praktisch en levendig geheel. Ontworpen door Rudy Uytenhaak, gespecialiseerd in contextuele, integrale, duurzame ontwerpen die dierbaar zijn en blijven. Ook betrokken bij het FNWI-gebouw van de UvA.



Het Snellius in Leiden staat er al zo lang, dat niemand meer weet wie het gebouwd heeft. Snellius zelf? Nee, want waterpas is het niet. Supernova Studio's toverde de wiskundebibliotheek om tot een venue van het Lorentz Center. De dynamische workshopruimte en de rustige bibliotheekzijde worden van elkaar gescheiden door een verdiepingshoge beschrijfbare krijtbordwand, die aan beide zijden intensief wordt gebruikt. Alleen nu dus even niet.



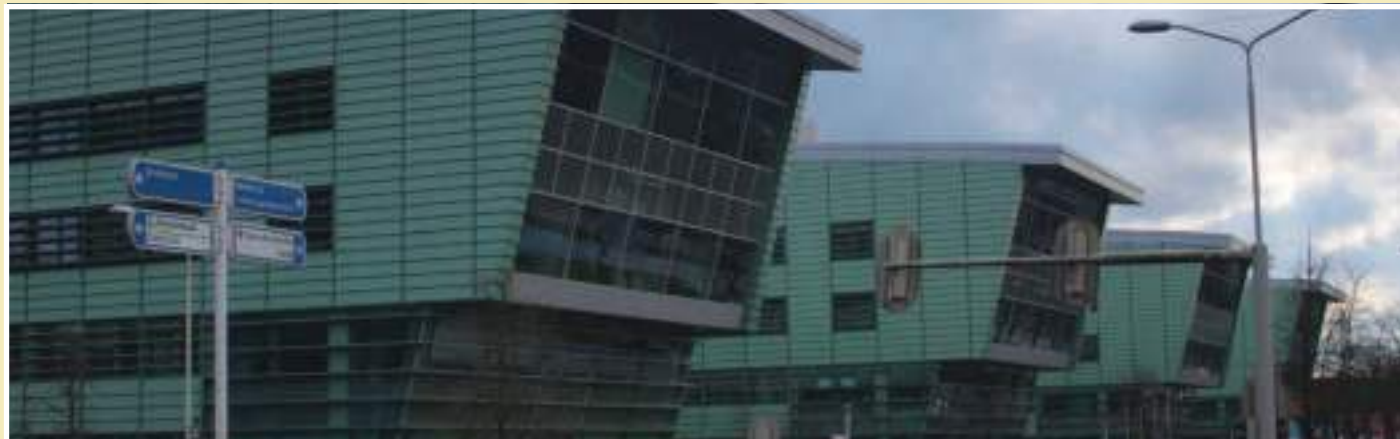
Denk je aan Balthasar dan denk je aan Delft. Studentenflat BalPol 3 staat aan de Balthasar van der Polweg. Een spierwit gebouw van architectenbureau De Zwarte Hond. De opvallende geluidwerende gevel omhult een intrigerende binnenwereld. Alle woningen liggen aan één doorgaande verticale binnenruimte. Naast een spectaculaire entree kent het complex ook een slimme oplossing voor alle fietsen. Delft, fietsen, natuurlijk!



Cubicus is het meest markante gebouw van de Universiteit Twente. Het interieur is geheel gerestyled met respect voor het oorspronkelijke brutalistische kleur-concept. Door het ontwerpen van een centraal icoon op de tweede vloer is er voor studenten en docenten een herkenningspunt gecreëerd welke op geheel spontane wijze bekend staat als 'the Cube'. Uitgevoerd door MAS architectuur, een van Nederlands oudste architectenbureaus.



University College Amsterdam ademt het dadaïstische design van multidisciplinair bureau Mecanoo. De transparante entree en de gegroefde Cor-Ten stalen gevel geven het vierkante gebouw een onderscheidende maar vriendelijke uitstraling. Diagonale daken die van noord naar zuid lopen, creëren een enorme zolder met een opvallend, gevouwen houten plafond. Onder deze plooien bevinden zich stille, verborgen studieplekken en de bibliotheek.



Het Huygensgebouw in Nijmegen heeft een gemeenschappelijke binnenstraat, met koffiecorners en kopieerfaciliteiten. Hier vindt de interactie plaats tussen leerstoelgroepen, docenten en medewerkers. Het interieur wordt gekenmerkt door een grote mate van transparantie, interactie en flexibiliteit. Met dank aan de masterplanners van AGS Architecten.



Een van de grootste groepen kwantitatieve wetenschappers in Europa zit in Wageningen. Gehuisvest in de Radix, een compact gebouw met houten lamellen, verdiepingshoge puien en groene zonwering. Pal voor het gebouw controleert de Arenlezer een plant op ziektes en insecten. Hij ligt er een beetje lusteloos bij. Het is een beeld van Cor van Kralingen, een vergeten kunstenaar, voor wie het menselijk gelaat een der grootste inspiratiebronnen betekende.



In de centrale hal van het Utrechtse Minnaertgebouw wordt regenwater opgevangen om het gebouw te koelen. De hal is onverwarmd maar voorzien van verwarmde alkoven. De gevel is afgewerkt met geplooid rood spuitbeton. De stalen letters 'MINNAERT' steunen het gebouw en vormen een soort moderne variant op de Griekse Kariatiden. Een ontwerp van Neutelings Rietdijk Architecten, gespecialiseerd in kunstgebouwen en musea.



Op de Zuidas vinden we het opleidingsinstituut voor Zorg en Welzijn, ontworpen door Jeanne Dekkers. De raamverdeling ondersteunt de verticaliteit en maakt meteen de transparantie en dynamiek van het interieur zichtbaar door een samenspel van vides. Lange zichtlijnen verkleinen het gebouw. Vanaf de plint is er zicht tot de zesde verdieping. Helaas is het nieuwe wiskundegebouw van de VU er onlangs naast gezet. “En weg is het effect dat Dekkers voor ogen had”, schrijft *Het Parool*.



Door optimaal hergebruik te combineren met state-of-the-art-materialen is Atlas, het stoere TU/e-hoofdgebouw, getransformeerd tot het duurzaamste onderwijsgebouw ter wereld. De stalen gevelconstructie is blijven staan en zo is het oorspronkelijke ontwerp van Sam van Embden, die ook de campussen van Abidjan en Singapore ontwierp, opnieuw te ervaren. In de vijver voor het gebouw steekt een hand een grillig groeisel uit het water: *Wording*, een beeld van Piet Killaars.



Na een langdurige worsteling nam Tilburg University in 2001 afscheid van het etiket ‘katholiek’. De religieuze band blijft zichtbaar. Het Z-gebouw heeft een ‘open katholieke signatuur’, een plek van rust voor mensen die in stilte willen vertoeven, ongeacht hun levensbeschouwing. Vernoemd naar Joannes Zwijssen, die in 1853 de eerste aartsbisschop van Utrecht werd sinds de vrede van Munster.



Dit tegeltableau van Karel Appel markeert de oude hoofdingang van de Nederlandse Economische Hogeschool. Kunst van Karel kreeg je niet voor een appel en een ei. Toen het budget van de NEH niet toereikend bleek, stak de NV Meelfabrieken der Nederlandse Bakkerijen de helpende hand toe. Nog altijd geeft de Erasmus Universiteit veel aandacht aan kunst. Er is een kunstwandeling langs maar liefst 53 objecten.



Breda. Stad waar Descartes werd bekeerd tot de wiskunde. Maar ook de stad met de oudste band met de Oranjes, vanwege het kasteel dat in 1403 in handen kwam van de familie. Tegenwoordig het hoofdgebouw van de KMA, met onder meer een Europese master in strategic border management, een actuele opleiding in deze coronatijd. Een dikke muur schermt het kasteel af van burgers en buitenlui. Alleen militairen hebben toegang.



Door het beloophare grasdak van de Delftse bibliotheek priemt een enorme kegel als symbool voor techniek. Een visitekaartje van Mecanoo. In Leiden wordt de krijtbordwand in het Lorentz Center nu maar weinig gebruikt. En Amsterdam Science Park, kortweg Assp, ligt er verlaten bij. Een beetje verscholen achter het FNWI-gebouw eert de UvA de regenboog. We are all friends of Dorothy. In Wageningen zien we de groene zonweringen van het Radixgebouw.



Bij de VU langs de Boelelaan geniet Desiderius van zijn friet. In Tilburg markeert het logo met de boom der kennis alle entrees van de universiteit. Bestaat er een aperiodieke vlakbetegeling met identieke tegels? Wiskundigen weten het niet. Economen wel, zoals te zien aan een voetpad op de EUR-campus in Rotterdam.

Nicolas Michel

*Mathematical Institute
Utrecht University
n.p.r.michel@uu.nl*

History

Tic-tac geometry: A theorem in full swing

When the French mathematician Michel Chasles expressed his ‘principle of correspondence’ in 1864, he claimed to have obtained a theorem from which one could derive a general and systematic method for the effortless obtention of an infinity of geometrical propositions. And yet, barely two decades later, this very theorem was widely regarded as a boring or uninteresting result, whose teaching in universities might ingrain noxious mathematical habits in the minds of young students. In this article, Nicolas Michel uses the principle of correspondence as an example to show how different social contexts for the practice and teaching of science shaped different ways of valuing and measuring the worth of a result.

Transient mathematics

Recent scholarship in the history and philosophy of mathematics has done much to dismantle what may be called the ‘cumulative myth’. Per this myth, it is the very nature of mathematical knowledge to monotonously increase all through history. Unlike the theories of the natural or social sciences, bound to be eventually falsified by some experiment and overtaken in dramatic revolutionary episodes, mathematical knowledge would supposedly be on a quiet upward trajectory, provided we ignore the ramblings of circle-squarers and other such pathological contributions to the perennial repository of theretofore secured theorems.

This seductive narrative, however, has now been breached from various angles. In the 1970’s already, philosophers such as Imre Lakatos forcefully argued that the development of mathematical knowledge is best described as a dialectical process consisting of vague conjectures, informal

proof-strategies, and nagging refutations, rather than a mere affair of axioms and undisputable inferences [17]. In parallel, many historical studies have shown that mathematical theories too can die, whether we attribute that death to sociological and external factors, scientific and internal ones, or a combination of both. One classic example is the theory of invariants studied by the sociologist Charles Fisher: a very active topic of research in the 1880’s and 1890’s, widely viewed as a promising prospect for the unification of various branches of mathematics, this theory had all but faded away by the 1940’s. In his account of this ‘death of a theory’, Fischer stresses the importance of viewing mathematical edifices not just as formal constructs, but also social categories, constructed and circulated by human and institutional agents. More recently, Alma Steingart has analyzed the ‘uninvention’ of the proof of the Classification Theorem for finite simple groups in relation with the techniques of interper-

sonal communication and socialization employed by experts in this field. Further from sociological methodologies, Henk Bos has described the decline of the theory of the construction of equations (that is to say, the geometrical construction of line segments whose lengths equal the roots of an equation) in the eighteenth century as the result of the emergence of an analytical and symbolic style [4, 12, 25].

Consequently, in recent years, many historians have proposed framing the historical unfolding of mathematical knowledge as a transformative rather than cumulative phenomenon: instead of piling up theorems, collectives of mathematicians are, in this view, in the business of constantly ‘rewriting’ (and, sometimes, willfully misinterpreting) what their predecessors had produced. Only in the rare instances when such transformative processes cease (for instance, when the need or desire to introduce a theory into textbooks call for stable and unified presentations) can a cumulative picture of this messy historical development float back to the surface, selectively and retrospectively eliminating from its fold unsuccessful attempts, forgotten techniques, and abandoned perspectives. This view has led to new and stimulating accounts of important episodes in the history of mathematics, such as the emergence of the concept of a point on a Riemann surface, the invention of the group-concept in

the wake of Galois's 1831 memoir on the resolvability of equations, or the development of Schwarz's theory of distributions [2, 11, 22].

In the following pages, I will highlight some of the insights such approaches can provide by retracing the short lifecycle of a particular geometrical theorem. Over the course of a couple of decades, the status of this theorem went from that of a general and systematic method for the effortless obtention of an infinity of geometrical propositions to a boring and uninteresting result whose unexamined teaching in universities might lead to the ingraining of bad mathematical habits. This downfall will demonstrate how different social contexts for the practice and teaching of science shaped different ways of valuing and measuring the worth of this result, as well as the importance of tacit, technical 'know-how' in the preservation or abandonment of a mathematical theory.

Chasles's principle of correspondence

The theorem in question is called the 'principle of correspondence'. First expressed in 1864 by the French geometer Michel Chasles (1793–1880), this result was the cornerstone of his 'theory of characteristics', a method for the enumeration of all conic sections in the plane that satisfy five given (independent) conditions. Though mostly forgotten today, this theory took Europe by storm in the 1860's: for it, Chasles was awarded the Copley Medal by the Royal Society; and later on it served as the basis for the development of Schubert's calculus and Hilbert's 15th problem [20, pp. 145–164, 228–233, 283–296].

Our starting point will be the notion of construction as it was conceived and mobilized by Chasles. As part of his attempt to renew the methods of projective geometry, Chasles had highlighted the importance of the concept of the cross-ratio. In particular, he had observed in 1855 that geometrical constructions that yield a one-to-one correspondence between the points of a straight line preserve cross-ratio: this he called 'the principle of anharmonic correspondence' [8]. For instance, suppose that from each point of a straight line L , we draw the two tangents to a given circle. Joining the two points of tangency, we get another straight line, which will intersect L at exactly one point. This is but one very simple case of a (1,1)-correspondence be-

tween the points of L ; and since duality reigned supreme over all things (projectively) geometrical, Chasles formed just as many correspondences between the rays that pass through a common point I . What Chasles discovered was that, in his day-to-day geometrical practice, many such correspondences naturally arose.

Geometrical constructions, here, encompass a wide variety of techniques (such as drawing a tangent, forming an intersection, or using pole/polar constructions); the delimitation of which he never explicitly spelt out. Whilst his constructions were always based on real figures, Chasles counted as valid some points and lines which cannot be represented or drawn on an actual diagram, such as points at infinity or pairs of conjugate imaginary lines. However, no transcendental curves were allowed. Therefore, these correspondences could always theoretically be translated into algebraic equations (with real coefficients) between the abscissas of the points of the straight line, with respect to an arbitrary origin. In the case of a one-to-one correspondence between the points of abscissas x and u of the line, this equation must be of the form:

$$xu + \lambda \cdot x + \mu \cdot u + \nu = 0.$$

Indeed, this is the general form of all algebraic equations such that, when a value x (respectively u) is fixed, the resulting polynomial in u (respectively x) be linear (that is, have only one root). By expressing u as a function of x in the equation above, we find that it must in fact be a homography of the (projective) line.

Building on his projective methods to study the generation of curves via intersections of homographic pencils, Chasles would go on in the 1860's to study more elaborate correspondences, borne out of constructions which map groups of points together, and not just individual points. Let us consider another elementary example, this time based on a correspondence between rays instead of points: let C be a conic and I a point in the plane. Any ray IX passing through I will intersect C at two points, which may potentially coincide or be imaginary conjugates. At these two points, let us draw the normals to C , each of which in turn also intersect C at another point. These two resulting points U and U' define two rays IU and IU' , which 'correspond' to IX . Conversely, we can use the same construction to associate two rays IX to any ray IU (see Figure 1).

This is an example of what we will call a (2,2)-correspondence between the rays passing through I ; and we can in this fashion, using more elaborate curves and instructions, construct (α,β) -correspondences between the rays passing through a point (or, per duality, the points on a line) for any two integers α and β . Now, because such correspondences derive solely from geometrical constructions, they can also be represented by algebraic equations $P(x,u) = 0$, where x and y represent the (sine of the) angle formed by IX and IU with respect to an arbitrarily chosen direction, or in the abscissas of the points x and u (with respect to an arbitrary origin once

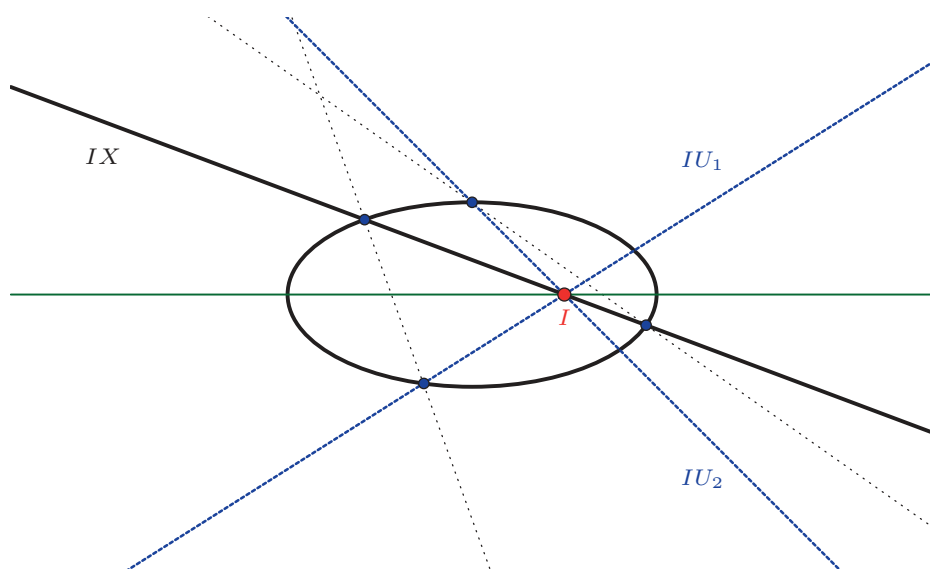


Figure 1 A (2,2)-correspondence.

again). However, this time, when a point x is fixed, the resulting polynomial in u will be of degree 2 (or α in the more general case); since that is the expected number of roots (and, since we allow complex roots, the Fundamental Theorem of Algebra applies). Conversely, P must be of degree 2 (respectively β) in u .

Chasles's principle gives us the number of 'coincidences' in a correspondence; that is to say, the number of points x that also belong to their own image under the correspondence. Such a point must be one of the points u which themselves correspond to x ; in other words, x must be a root of the equation $P(x, x) = 0$. From elementary properties of polynomials and the Fundamental Theorem of Algebra, Chasles drew the two following (dual) results:

Theorem 1 (Chasles's Principle of Correspondence). *When, on a straight line L , two series of points x and u are such that a points u correspond to a single point x , and that b points x correspond to a single point u , then the numbers of points x which coincide with corresponding points u is $(\alpha + \beta)$.*

When, around a point I , two pencils of straight line IX and IU are such that a lines IU correspond to a single point IX , and that b lines IX correspond to a single line IU , then the numbers of lines IX which coincide with corresponding lines IU is $(\alpha + \beta)$. [9, p. 1175]

In the simple example given above, this means that our correspondence yields $(2 + 2) = 4$ coincidences. In fact, these coincidences turn out to be all the normals to C which can be drawn from I . The principle of correspondence has thus provided a direct answer to a geometrical problem famously discussed at length in Book V of Apollonius of Perga's *Conics*, namely that of enumerating and drawing normals to a conic from a given point [13, pp. 146–177]. In this landmark text of ancient geometry, however, separation of cases was paramount; and Apollonius had found that the numbers of normals one can draw from a point could be either 2, 3, or 4 depending on the sort of conic (parabola, hyperbola, or ellipse) and the position of the point. In Chasles's modern projective geometry, however, such distinctions were eschewed in the name of generality — one unique method provided one unique answer in one fell swoop.

A theorem thrice virtuous

At this stage, this theorem might seem rather banal and of little geometrical interest. After all, it is but the simple application of elementary algebra. Yet in the wake of its enunciation of this principle in 1864, Chasles devoted the near totality of his scientific efforts to applying it to various systems of figures (polygons, curves, harmonic axes, et cetera) until his death in 1880. Most of his writings over this period of time consist in long lists of propositions for which the proofs are rarely given, but always attributed to the principle of correspondence (see Figure 2). In his scientific archives, preserved at the Paris Académie des Sciences, one can find myriad more such propositions hastily sketched on leaflets and postcards, all of which bear witness to a prolonged and intense exploration of the potentialities of this principle.

In one of his last articles, whilst reflecting upon this theorem with which he had been so busy and productive, Chasles identified three distinct features that made it so valuable to his eyes. The first of these

three virtues lies in its *simplicity*:

"The principle of correspondence can be applied, with very great ease, to an *infinity of questions*. This ease is such that, without having to express through any equation like in Analysis the conditions of the question, *we immediately put down two numbers* which satisfy these conditions and whose simple sum expresses the solution." [10, p. 577]

In other words, one can apply the principle of correspondence to any geometrical figure, and this application is always easy: it requires no computation nor any other complicated algebraic manipulation other than the sum of two numbers.

The second virtue of this principle is that it always leads to *general* theorems:

"By applying [this principle] to simpler questions, such as those left as exercises in the classical treatises, we immediately acknowledge that the reasoning will be absolutely the same in the case of the greatest generalization that the question can admit." [10, p. 578]

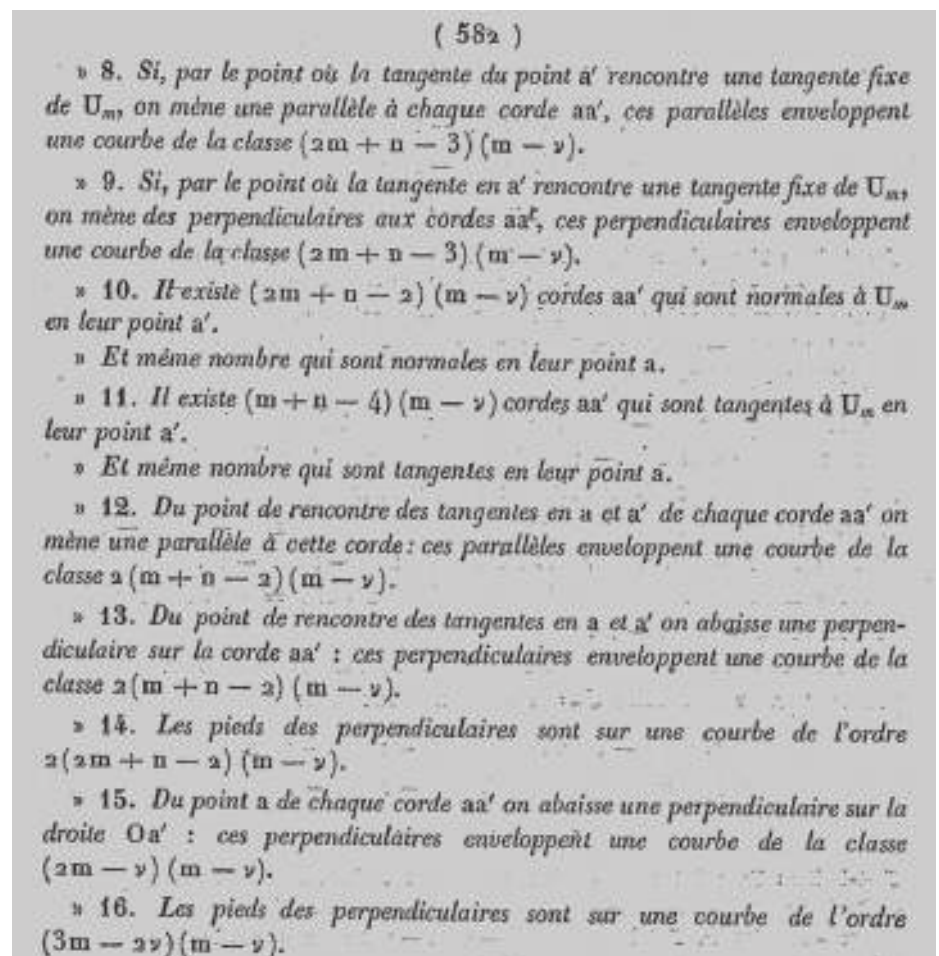


Figure 2 Chasles's monotonous lists of propositions [10, p. 588].

Lastly, Chasles notes that due to the simplicity and immediateness with which it yields propositions, this principle can serve as an *art of invention*:

“The principle of correspondences comprises such an ease of solution that, whatever the question we tackle... we immediately have the thought to apply this mode of spontaneous solution to various other questions related to the figure we have before our eyes. It is thus that, as I sought to treat some questions in the general theory of curves, I was left by the solutions to multiply by the hundreds different theorems.” [10, p. 578]

An example borrowed from Poncelet

To understand how Chasles came to see these three epistemic virtues as embodied in the principle of correspondence, we need to first understand how he employed it as an instrument for the obtention of geometrical propositions. In a particularly telling passage of the same paper, Chasles considered an old theorem given by Jean-Victor Poncelet in his 1822 *Traité des Propriétés Projectives*, that is to say one of the aforementioned ‘classical treatises’. Choosing Poncelet’s *Traité* as the basis of this discussion was by no means a neutral choice. Chasles and Poncelet had had a fraught relationship for decades, and by showing how easily he could generalize Poncelet’s results (in effect, even rel-

egating his magnum opus to the rank of a classical but outdated treatise), Chasles was effectively staking a claim to superior mastery of the methods of pure geometry. The theorem in question is the following (see Figure 3):

Theorem 2 (Poncelet’s chord theorem). *When an angle of constant magnitude α turns about its origin O , which lies on a conic C , the chord aa' this angle intercepts on the conic envelopes another conic. [21, p. 281]*

In fact, Chasles did not prove this theorem: as we shall see, he immediately tackled a more general version thereof, using a rather idiosyncratic language and style of exposition. For the sake of clarity, however, I will first adapt his arguments to provide a more explicit and detailed proof of Poncelet’s theorem using the principle of correspondence.

Proof. We show that from any fixed point I , one can draw two tangents to the envelope described in the theorem (let us call this locus $\mathcal{U}$); this is enough to show that it is a curve of class two, that is to say a conic. To that end, we consider the rays IX which turn around I and construct the following correspondence (see Figure 4).

A ray IX intersects C at two points a, b , to which we join O to form two straight lines Oa, Ob . We can then form the two

straight lines Oa', Ob' which stand at an angle α with them, and which intersect C at (respectively) a' and b' . Joining I to both of these points, we have constructed two rays IU , which we associate to the initial ray IX . Conversely, to a ray IU we can also associate two rays IX via the very same construction, except with angle $-\alpha$. Per the principle, there are $2 + 2 = 4$ coincidences in this correspondence.

But of these four coincidences, two are ‘foreign solutions’: they do not depend on the position of I (or C), and therefore should be discounted as mere computational artefacts. Indeed, any rotation about O fixes the same two imaginary points, namely the circular points at infinity E and F . These points, which in projective coordinates are represented by the two triplets $(1:\pm i:0)$, were then defined as the two intersections of the line at infinity and any (real) circle in the plane [21, pp. 48–49]. Thus, rotations about O map the rays OE and OF onto themselves. Now, if a is the intersection of OE and C (other than O), then $a = a'$; and Ia is a coincidence irrespective of where I lies. The same can be said of the intersection of OF and C .

Consequently, there are only two ‘real’ coincidences; and these are, per construction, the lines aa' passing through I such that $\widehat{aOa'} = \alpha$. By definition of the locus $\mathcal{U}$, these are also all the tangents to it one can draw from I . This proves that the class of $\mathcal{U}$ is two, and $\mathcal{U}$ is indeed a conic. $\square$

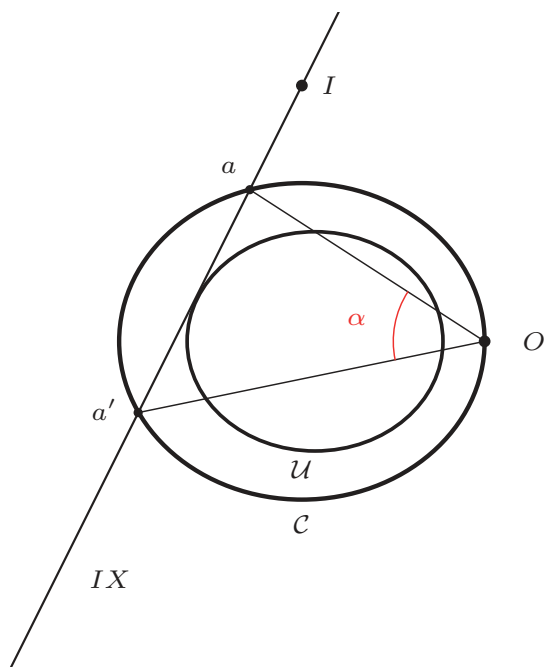


Figure 3 Poncelet’s chord theorem for conics.

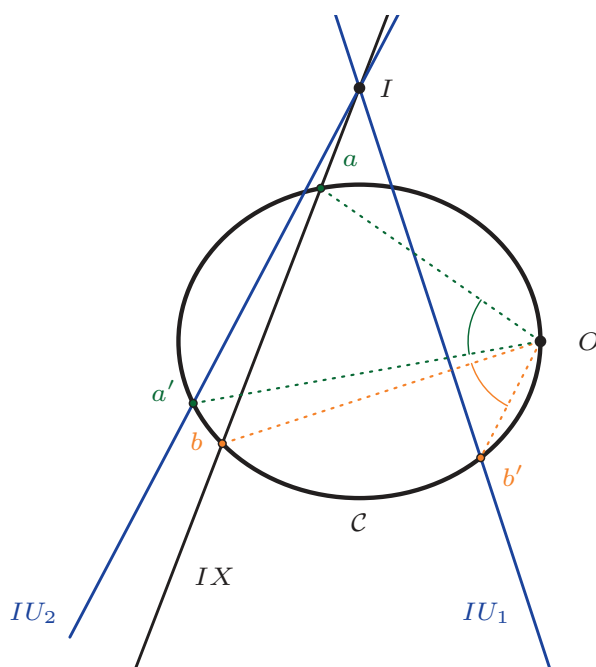


Figure 4 The (2,2)-correspondence used to prove Poncelet’s theorem.

One may object that this proof isn't exactly as simple as Chasles had made it out to be. After all, while no computation was required, we did not merely 'put down two numbers': we had to invent a correspondence and identify foreign solutions amongst its coincidences. However, the difficulty of these tasks is largely a consequence of our lack of familiarity with such constructions. Not only does this proof (and all other proofs obtained by Chasles with the principle of correspondence) require no computations, the construction of the correspondence itself follows a systematic pattern. When setting out to establish the class of a locus, that is to say the number of tangents to it which can be drawn from an arbitrary point, Chasles always fixes a point I and forms a correspondence between the rays IX whose coincidences are the tangents to said locus. For the order of a locus, that is to say the number of points an arbitrary straight line intersects on it, he fixes a straight line L and forms a correspondence between its points x whose coincidences are the intersections of L and the locus. In both cases, the number yielded by the principle is the geometrical number being sought. And as Chasles's lists demonstrate, these two strategies can be employed to systematically and easily obtain a plethora of results. The universality and simplicity of the principle of correspondence these lists demonstrate, however, hinges on the mastery of some tacit geometrical knowledge, a technical know-how which is not encapsulated in its formal statement — and which one can only obtain by in-depth acquaintance with these texts.

To illustrate the second virtue of the principle of correspondence, Chasles goes on to explain how Poncelet's theorem can be generalized in various regards. The given conic C can be replaced by a curve U_m of order m , and the fixed point O on the curve can be of multiplicity ν (instead of being a regular point). Furthermore, the requisite that the two lines form a constant angle can be replaced by that requisite that they form a constant cross-ratio with two arbitrary, fixed lines also passing through O . Indeed, if these two fixed lines pass through the two circular points at infinity E and F , then we are left with the original condition, namely that the two mobile straight lines form a constant angle α . This is because one can define the

angle between two lines L_1, L_2 (which intersect at point M) as $\frac{i}{2} \log[L_1, L_2, ME, MF]$. This result is sometimes called Laguerre's formula, and it is especially useful in computational geometry [14, pp.147–148]. Of course, in this much more general setting, the conclusion of Poncelet's theorem must be adapted as the chords envelope a more complex curve, and Chasles gives the following statement:

Theorem 3 (Poncelet's chord theorem generalized). *When, about a point O of multiplicity n of a curve U_m , two straight lines OA, OA' turn while maintaining a constant cross-ratio m with two fixed straight lines OE, OF , the chords aa' they intercept envelope a curve whose class is $2(m-1)(m-\nu)$. [10, pp.579–580]*

Note that, if $m = 2$ and $\nu = 1$, the class is $2 \times 1 \times 1 = 2$ as stipulated by the original theorem.

Chasles's key observation is that the proof of Poncelet's original theorem can be transposed in this new setting, simply substituting each term by its more general counterpart. By thus preserving the structure of the proof and simply altering its elements, one can immediately establish the more general theorem:

Proof. We fix an arbitrary point I , and we show that from I , one can draw exactly $2(m-1)(m-\nu)$ chords aa' . To that end, we construct the same correspondence as before, *mutatis mutandis*.

A ray IX intersects U_m at m points, all of which we denote a . Each point a can be joined to O by a straight line OA . The straight lines OA' , which form with OA, OE, OF the required cross-ratio, all intersect U_m at $m-\nu$ points a' (because O is of multiplicity ν). In total, this procedure yields $m(m-\nu)$ points a' , through which one can draw the same number of straight lines IU . Similarly, to each IU there correspond $m(m-\nu)$ straight lines IX . This is a $[m(m-\nu), m(m-\nu)]$ -correspondence, which consequently yields $2m(m-\nu)$ coincidences.

However, amongst these coincidences, $2(m-\nu)$ are foreign solutions caused by the lines OE and OF . Indeed, each of these two lines intersects the curve at $m-\nu$ points a , and when IX passes through one of these points, the line OA coincides with OE and therefore with OA' . Thus, a' co-

incides with a , and IU with IX , wherever the point I is. There are $m-\nu$ such foreign solutions, and the same goes for the coincidences of Oa and OF . And so there are in total $2(m-\nu)$ foreign solutions, and the remaining number of 'real' solutions is:

$$2m(m-\nu) - 2(m-\nu) = 2(m-1)(m-\nu).$$

Lastly, these real coincidences are all the chords aa' , because they are the straight lines which join two points A and A' on U_m such that OA and OA' form the required cross-ratio with OE and OF . Therefore the number of these coincidences is the class of the envelope described by the theorem. $\square$

Using the principle (and the tacit proof-strategies associated to it) to establish a classical result, Chasles immediately obtains a proof-structure which is stable under generalization of all its terms, without the need for any further reflection. Indeed, not only is the correspondence analog to the previous one, but even the argument for the enumeration of the foreign solutions stays intact (*modulo* a simple translation). The generality of this method, for Chasles, is only worthwhile insofar as it is a systematic and effortless generality; it has little to do with the extension of the domain of application of the method, and much more to do with how this application can be carried out in a uniform manner.

Lastly, Chasles demonstrates the third virtue of the principle of correspondence by proposing another kind of alteration to Poncelet's theorem. Having generalized it to the fullest, Chasles now shows how to modify it simply by considering other properties 'of the same figure': for instance, instead of forming the locus enveloped by the chords aa' , he considers the locus U' generated by the intersection of the two tangents to the curve at the points a and a' (see Figure 5, for the case where U_m is a conic C), for which he gives the following result:

Theorem 4 (Dual theorem). *U' is a curve of order $2(n-1)(m-\nu)$, where n is the class of the given curve U_m . [10, p.581]*

This theorem is a sort of dual version of the previous one, and thus a proof comes equally easily to Chasles via the construction of a dual correspondence. This time, I give Chasles's proof with his peculiar notations and style of presentation:

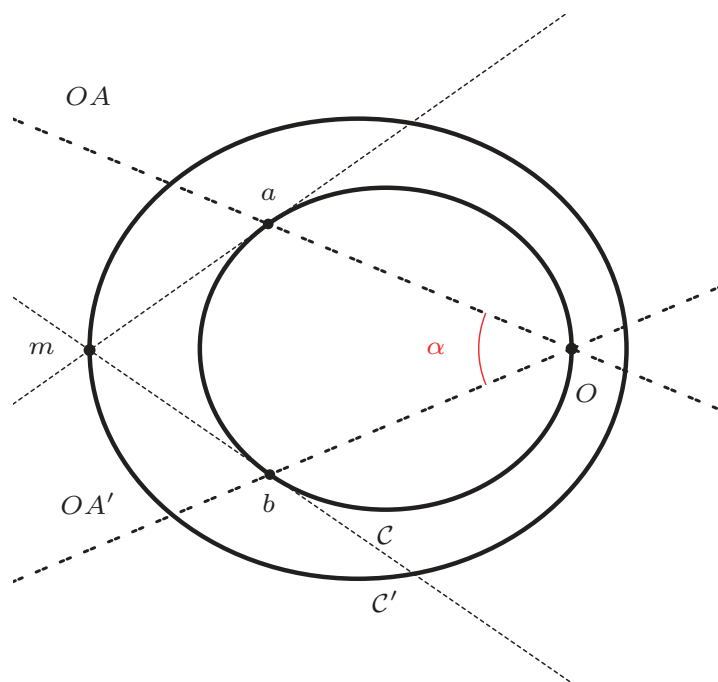


Figure 5 A dual theorem.

Proof.

$$\begin{aligned} &x, \quad n \, a, \quad n(m-\nu) \, a', \, u, \\ &u, \quad n \, a', \quad n(m-\nu) \, a, \, x, \\ &2n(m-\nu). \end{aligned}$$

That is to say: From a point x on a straight line L , we draw n tangents xa to U_m ; to the straight lines OA which pass through these points there correspond n straight lines OA' which intersect U_m at $n(m-\nu)$ points a' ; the tangents at these points intersect L at $n(m-\nu)$ points u . Similarly, a point u gives rise to $n(m-\nu)$ points x . Thus, there are $2n(m-\nu)$ points x coinciding to a corresponding point u .

But there are $2(m-\nu)$ coincidences which are foreign solutions; they are caused by the $2(m-\nu)$ intersections of the two straight lines OE and OF with U_m ; since, for such a point, a' coincides with a and x with u wherever the straight line L is; it is therefore a foreign solution. There remain $2(n-1)(m-\nu)$ solutions, which is therefore the order of the curve being sought. $\square$

Note the duality between this correspondence and the previous one: for instance, instead of considering the intersections of a straight line IX and the curve U_m , in this proof Chasles first considers the tangents to U_m drawn from a point x of a straight line L . Thus, the principle of correspondence allows for parallel alterations

to the theorem and to the proofs thereof, yielding once again further geometrical truths without requiring extra effort.

Genius made accessory

Chasles's insistence on the value of simple, general, and systematic methods both as a means to prove and to discover new geometrical truths largely predated his discovery of the principle of correspondence. In 1837 already, at the very end of his celebrated *Historical survey of the development of geometrical methods*, Chasles had prophesied a very optimistic future for his science of choice in terms strikingly similar:

"In ancient Geometry, truths were isolated. To imagine and to create new ones was a difficult task, and not everyone who so wished could become a geometer-inventor. Today, any one can come up, pick any known truth, and submit it to the various general principles of transformation; they will obtain from it other truths, different or more general; and on these ones one will be able to carry out similar operations; so that one may multiply, almost at infinity, the number of new truths deduced from the first one... Anyone who so wishes, in the current state of science, can generalize and create in Geometry; genius is no longer indispensable to add a brick to the edifice." [7, pp.268–269]

The principle of correspondence embodied the core virtues of an ideal for mathematical practice which had motivated Chasles for decades, namely uniformity, simplicity, and generality. While the principle of correspondence was first expressed in 1864, the scientific culture underlying its use and appreciation by Chasles was in fact already a thing of the past.

As intellectual historians of early nineteenth-century France have shown, these values were those shaped and transmitted in engineering schools such as the École Polytechnique, where Chasles trained between 1812 and 1814. Created in 1794, this latter school was intended to train engineers, military men, and civil servants for the young Republic. The teaching of mathematics in the first year of its existence, of which famous *savants* such as Gaspard Monge and Joseph-Louis Lagrange were in charge, was structured around an ideal of generality: students would learn at the École Polytechnique abstract principles, and only then learn how to apply them in dedicated 'écoles d'application'. These principles, characterized by their potentially universal domain of application and by the uniformity of their march, were viewed as the most valuable and pressing lesson to promulgate amongst this young scientific elites [1; 3, pp.114–118]. As Sylvestre-François Lacroix (1765–1843) would recount in his 1805 *Essays on teaching*:

"The various works which a great nation must have carried out, whether it be for its defense or the improvement of its territory... require the help of almost all arts and sciences... Only very extended preparatory studies could provide the resources to direct such works. These varied studies can be sorted out in a small number of divisions which embrace a multiplicity of details too great to be gathered in a single head, but whose *general principles* are the same. To isolate these principles and to make them the subject of general instruction,... such was the goals of the founders of the [École Polytechnique]." [16, pp.32–33]

Thus, a suitable teaching of geometry (as of any other sciences), for the *savants* of this milieu, ought to rely primarily on the exposition of these general principles, and then on that of the art of the systematic application thereof to any potential system of figures — a framework explicitly mod-

eled after a kind of ‘engineer epistemology’. Chasles was not merely paying lip service to old professors or classmates in invoking these same values: the *tableaux* he uses in the presentation of his proofs via correspondence, the uniformity of the language, and the organization of mathematical knowledge into principles and their applications all indicate how strongly his scientific practice was shaped by this shared culture. As we shall now see, to a reader foreign to this culture, the principle of correspondence in this form would quickly lose much of its appeal.

Cosmopolitan cafés and modern mathematics

Chasles’s methods initially found attentive and enthusiastic readers all over Europe: the principle of correspondence was taken up in the 1860’s and 1870’s by algebraic geometers Arthur Cayley and Adolf Hurwitz who expanded it to correspondences on curves of genus p instead of straight lines (in which case the number of coincidences becomes $\alpha + \beta + 2kp$ for some integer k), and who used it to prove, among other things, Poncelet’s famous porism (or ‘closure theorem’) [6; 19, pp. 264–265]. In Italy, Luigi Cremona contributed a great deal to the circulation of these methods in his teaching of geometry in Bologna. By the 1880’s, the principle of correspondence had become such an integral part of advanced mathematics curricula that some even began complaining about its omnipresence. Giovanni Guccia, for instance, privately lamented in 1888 that Italian geometers wrongly focused on “endless and monotonous applications of Chasles’s principle of correspondence, which [he] couldn’t bear anymore” [5, p. 36]. As it turns out, Guccia was not alone in finding much to fault with the widespread use and teaching of Chasles’s principle.

Corrado Segre (1863–1924) is a towering figure in the history of Italian mathematics, and his role in the shaping of modern algebraic geometry cannot be understated. After brilliant studies at the University of Turin, he was immediately hired by this institution to assist with the teaching of descriptive geometry. In 1888, he was made professor of higher geometry, a position he held for the rest of his career. Besides his own scientific contributions, Segre was an early and active promoter of Felix Klein’s *Erlanger Programm*, and he trained many of the most successful Italian mathemati-

cians of the early twentieth century, such as Gino Fano, Beppo Levi, or Francesco Severi. As historians have recently shown, Segre elected at an early stage to divert the bulk of his efforts away from publishing original research. Instead, he “devoted a large part of his time and activity to pushing his direct and distance disciples to produce original researches, which in a sense he ended up considering ‘as his own’” [18, p. 96].

Mathematics, in Segre’s circle, was a first and foremost a social affair. He maintained a large network of international friends, students, and colleagues, whom he often gathered in Turin. Among these, let us mention Felix Klein and Leopold Kronecker from Germany, William and Grace Young from England, René Baire and Gaston Darboux from France, and C.L.E. Moore and Ernest Wilczynski from the United States. Far from the vertical model that ruled Chasles’s conception of scientific knowledge, with elite *savants* producing general principles for other to apply effortlessly but mechanically, Segre sought to foster global collaboration and the expression of individual creativity. The school of geometry which Segre organized was “linked to a very precise local milieu, constituted by the University of Turin... [but also of] cultural cafés like *Giaccardi*, *Bergia*, and the *American Bar*... In his ‘little studio’ various disciples and colleagues were entertained, both Italians and foreigners.” Modern mathematics, for the Italian *Maestro*, was born out “conversation, and generally to all those vectors of scientific sociability... that were set alongside institutional education and, allowing greater freedom of expression and debate between the interlocutors, proved particularly useful in the creative phase of research activity” [18, pp. 117–118]. In this new locale, and under this new conception of mathematical teaching and research, Chasles’s principle lost its very *raison d’être*.

Against facility

Segre’s disapproval of Chasles’s mathematics is at its clearest in an address to his students, which he published in 1891 in the newly-created *Rivista di Matematica* (then edited by none other than Giuseppe Peano), and which was translated into English by John Wesley Young for the *Bulletin of the American Mathematical Society* in 1904, with Segre’s approval and

supervision [23, 24]. Surprisingly enough, this address opens on a lengthy quote of the concluding paragraphs of Chasles’s *Historical Survey*, that is to say Chasles’s aforementioned diagnosis on the superfluity of genius in modern geometry. Segre initially lists, in what may seem like an endorsement of this diagnosis, some of the most important advances made by geometers over the half-century that had elapsed since the publication of Chasles’s text. In many of these advances, he points to the importance of the concept of transformation, which he concedes Chasles had rightly highlighted. However, Segre is quick to correct Chasles’s enthusiasm for genius-free, methodical geometry:

“But facility is a bad counsellor; and often the work to which it leads the beginner, while it may serve as training, as preparation for original research, will not deserve to see the light... Geometric writings are not rare in which one would seek in vain for an idea at all novel... one finds [instead] *applications of known methods* which have already been made *thousands of times*; or *generalizations* from known results which are so *easily* made that *the knowledge of the latter suffices to give at once the former*, et cetera. Now such work is not merely useless; it is actually harmful because it produces a real incumbrance in the science and an embarrassment for more serious investigators; and because often it crowds out certain lines of thought which might well have deserved to be studied. Better, far better, that the student, instead of producing rapidly a long series of papers of such a nature, should work hard for a long time on *the solution of a single problem, provided it is important*: better one result fit to live than a thousand doomed to die at birth!” [24, p. 443]

The language in this passage is clear: Segre knew exactly what Chasles valued so ardently in his own research, and he outright rejected that these values held any merit for the modern student of mathematics. In the rest of his address, Segre would attempt to answer the question: “When is a question *important*?” In so doing, he outlined his own views regarding the principles a student of mathematics ought to keep in mind when selecting a topic to learn about and to research, and regarding

the norms that should rule this learning and this research.

In the seventh section of this text, Segre returned with these new aims in mind to algebraic correspondences and transformations, and in particular to Chasles's own contributions to modern geometry. In his analysis of the principle of correspondence, Segre showed once again undeniable familiarity with the method of proof discussed above:

"And so in general, just as it is easy to imagine new loci and new geometric transformations, so also is it easy to invent applications of correspondences to obtain new truths. We take a point A , join it to B , take the polar with regard to C , let it intersect with D , take the homologous point with regard to E , et cetera, and finally from A we obtain a point (or other element) A' ; to the elements A of the first set will thus correspond the elements A' of a

new set, and if A or A' is made to move in a certain way, A' or A will also move, et cetera. In this way a given figure or given property will be transformed into another, which will give rise to a third, and so on; and all *without the least difficulty, mechanically as it were, with the regularity with which a pendulum swings.*"

[In a footnote:] "Hence one of my teachers... used jokingly to call this kind of research *tic-tac-geometry*." [24, p.458]

Here, too, Segre knew Chasles's texts in and out. His description of the generation of correspondences is faithful to Chasles's practice, and so is his assertion regarding the simplicity and systematicity of this practice. But here again, Segre completely rejects any mathematical value to this methodical and simple pendulum-like geometry: "it is not with this sort of research that we should be engaged nowadays", he asserts. What, then, should one do with the

principle of correspondence, which Segre nonetheless included in his address and his teaching?

Segre's *Quaderni*: the principle's new clothes

To answer that question, one must look beyond this sole address. Fortunately, this is not the only extant trace of Segre's influential teaching. Researchers at the University of Turin have digitized some 40 notebooks (*Quaderni*) that Segre used to prepare and deliver his lectures, many of which dealt with algebraic geometry and, in particular, the principle of correspondence (see Figure 6) [15].

Correspondences figured prominently in these lectures, alongside a statement of Chasles's principle only marginally different from its 1864 antecedent (except for its generalization to correspondences on curves of genus p , which Chasles was also aware of). It would be easy to point to the many ways in which Segre was able to

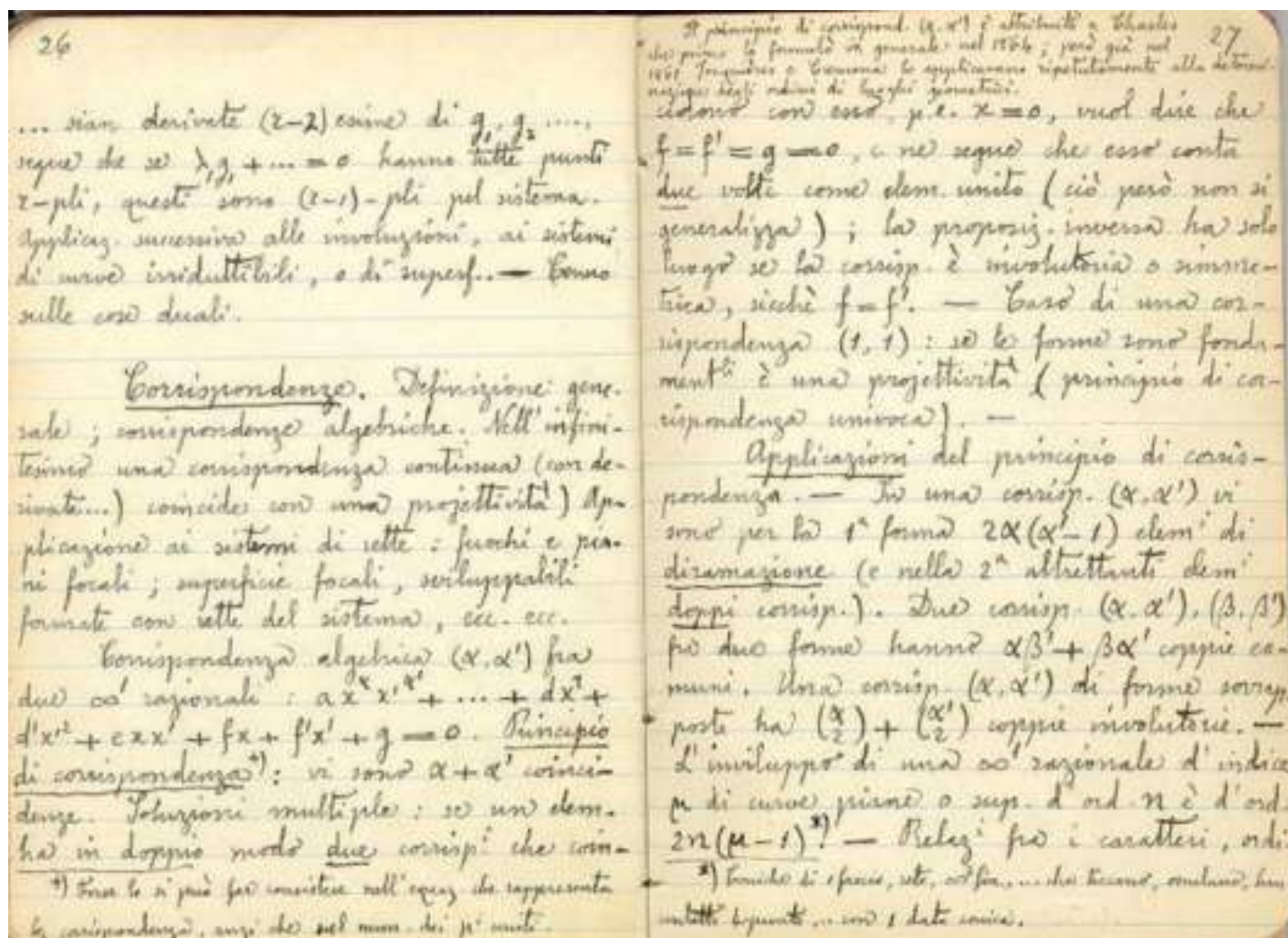


Figure 6 Fondo Corrado Segre, Library of the University of Turin, *Quaderni* 2 (1889-1890), pp. 26-27. Available at www.corradosegre.unito.it/quaderni.php.

apply the principle of correspondence to many new objects which Chasles could not have studied, such as surfaces in n -dimensional or non-Euclidean spaces. The real change, however, appears in the sorts of tasks which Segre expected his students to carry out with this principle.

In his courses on algebraic geometry, the very first applications of the principle of correspondence are always concerned with the theoretical properties of (α, α') -correspondences, for instance investigating pairs of coinciding points common to two different correspondences, or even considering the composition of several correspondences. Elsewhere, Segre described the role of correspondences to be that of the basis of the theory of birational transformations, which in turn was to provide tools for the study of higher singularities of skew curves and surfaces. While these questions might have made mathematical sense to

Chasles, they were completely foreign to his interests. The principle of correspondence, for Chasles, was an instrument to transform and multiply at will geometrical statements, but in itself it was no object of research. For Segre, by contrast, this mechanical multiplication was not a desirable form of mathematical life, and so he directed his students toward the study of the general properties of this new kind of transformation.

It is obvious from a mere glance at a recent textbook on algebraic geometry that Segre's viewpoint has won the cultural battle for what mathematical life should look like, as well as the mathematical battle that for what is worth discussing in Chasles's principle of correspondence. However, one may pause to reflect on the knowledge that has been lost in the process: Chasles's skillful constructions of correspondences, with which he has so enriched our understanding of algebraic curves and surfaces,

is completely forgotten now, even to those who may master the algebraic intricacies of the notion of correspondence. Segre was still in possession of this skill; and yet, he chose not to pass it down to his students, and to foster instead the study of other avenues for increasing the knowledge of geometrical correspondences. All of this points to the fact, hard-won by historians of mathematics in recent years, that a theorem is not just a formal statement, a predicate with a domain of validity or an absolute equation. It is also a set of associated practices and techniques, many of which are tacit – and therefore, susceptible to be forgotten, transformed, or to reappear unexpectedly. ☞

Acknowledgement

This research was funded by the Dutch Research Council (NWO): OCENW.KLEIN.222.

References

- 1 K. Alder, *Engineering the Revolution: Arms and Enlightenment in France, 1763–1815*, Chicago University Press, 1997.
- 2 M.J. Barany, Integration by parts: Wordplay, abuses of language, and modern mathematical theory on the move, *Historical Studies in the Natural Sciences* 48 (2018), 259–299.
- 3 B. Belhoste, *La formation d'une technocratie. L'École polytechnique et ses élèves de la Révolution au Second Empire*, Belin, 2003.
- 4 H. Bos, Arguments on motivation in the rise and decline of a mathematical theory; the 'construction of equations', 1637–ca. 1750, *Archive for History of Exact Sciences* 30 (1984), 331–380.
- 5 A. Brigaglia, Sur les relations des mathématiciens français et italiens au début du XXe siècle, *Cahiers du séminaire d'histoire des mathématiques* 5 (1984), 21–48.
- 6 A. Cayley, On the correspondence of two points on a curve, *Proceedings of the London Mathematical Society* 1 (1865), 77–84.
- 7 M. Chasles, *Aperçu historique sur l'origine et le développement des méthodes en géométrie, particulièrement de celles qui se rapportent à la géométrie moderne, suivi d'un mémoire de géométrie sur deux principes généraux de la science: la dualité et l'homographie*, Gauthier-Villars, 1837.
- 8 M. Chasles, Principe de correspondance entre deux objets variables, qui peut être d'un grand usage en Géométrie, *Comptes Rendus de l'Académie des Sciences* 41 (1855), 1097–1107.
- 9 M. Chasles, Considérations sur la méthode générale exposée dans la séance du 15 février, *Comptes Rendus de l'Académie des Sciences* 58 (1864), 1167–1175.
- 10 M. Chasles, Considérations sur le caractère propre du principe de correspondance, *Comptes Rendus de l'Académie des Sciences* 78 (1874), 577–585.
- 11 C. Ehrhardt, *Itinéraire d'un texte mathématique. Réélabérations d'un mémoire de Galois au XIXe siècle*, Hermann, 2012.
- 12 C.S. Fisher, The death of a mathematical theory: a study in the sociology of knowledge, *Archive for History of Exact Sciences* 3 (1966), 137–159.
- 13 M. Fried and S. Unguru, *Apollonius of Perga's Conica. Text, Context, Subtext*, Brill, 2001.
- 14 J. Gallier, *Geometric Methods and Applications: For Computer Science and Engineering*, Springer, 2011, 2nd ed.
- 15 L. Giacardi, The Corrado Segre Archive, *Historia Mathematica* 28 (2001), 296–301.
- 16 S.-F. Lacroix, *Essais sur l'Enseignement en Général, et sur celui des Mathématiques en Particulier*, Courcier, 1805.
- 17 I. Lakatos, *Proofs and Refutations*, Cambridge University Press, 1976.
- 18 E. Luciano and C.S. Roero, Corrado Segre and his disciples: the construction of an international identity for the Italian school of algebraic geometry, in G. Casnati, A. Conte, L. Gatto, L. Giacardi, M. Marchisio and A. Verra, eds., *From Classical to Modern Algebraic Geometry. Corrado Segre's Mastership and Legacy*, Birkhäuser, 2016, pp. 93–146.
- 19 F. Lê, The recognition and the constitution of the theorems of closure, *Historia Mathematica* 45 (2018), 237–276.
- 20 N. Michel, *Of Words & Numbers. The Writing of Generality in the Emergence of Enumerative Geometry*, PhD thesis, Université de Paris, 2020.
- 21 J.-V. Poncelet, *Traité des Propriétés Projectives des Figures*, Bachelier, 1822.
- 22 N. Schappacher, Rewriting points, in *Proceedings of the International Congress of Mathematicians (Hyderabad 2010)*, Vol. 4, World Scientific, 2010, pp. 3258–3291.
- 23 C. Segre, Su alcuni indirizzi nelle investigazioni geometriche. Osservazione dirette ai miei studenti, *Rivista di matematica* 1 (1891), 42–66.
- 24 C. Segre, On some tendencies in geometric investigations. Remarks addressed to my students. Translated by J.W. Young, *Bulletin of the American Mathematical Society* 10 (1904), 442–468.
- 25 A. Steingart, A group theory of group theory: Collaborative mathematics and the 'uninvention' of a 1000-page proof, *Social Studies of Sciences* 42 (2012), 185–213.

Daan Mulder
mulderdaan@live.nl



Het keerpunt van Lowie van Oers

Opeens openbaarde zich het mysterie van de wiskunde

Voor Lowie van Oers (1987) lopen wiskunde en theater al lang door elkaar. Na de vooropleiding voor de toneelschool ging hij wis- en natuurkunde studeren, maar na een jaar koos hij alsnog voor het toneel. Hij was de schrijver en acteur van de monoloog *TURING* (2016, vijf sterren in de *Theaterkrant*), waarin hij het tragische levensverhaal van Turing vervlocht met het idee van de Turingtest, en de vraag of er een verschil is tussen hoe je je voordoet, en hoe je werkelijk bent. Als ik hem opbel met de vraag of hij tijd heeft voor een interview, zegt hij: “Wat toevallig, ik heb me voor september weer ingeschreven in Leiden, om wiskunde en kunstmatige intelligentie te gaan studeren.” Niet echt een Keerpunt dus, dit keer, maar eerder de Slalom van Lowie van Oers.

Hoe ben je begonnen met theater: was dat op de middelbare school je droom?

“Nou, op de middelbare school speelde vooral mijn zus veel toneel. Zij is vier en een half jaar ouder en deed ook mee aan de schoolmusicals. Die waren — maar goed, dat zullen veel mensen zeggen over hun eigen schoolmusicals — heel erg leuk. Ik vond het ook leuk om zelf op een podium te staan. En ik had het idee dat ik er wel wat van begreep, van toneel-spelen. Mijn zus ging na de middelbare school naar de toneelschool, en toen dacht ik: ja, dat wil ik straks ook.

In de zesde klas speelde ik in mijn laatste schoolmusical. Het was een soort Faust-achtig verhaal over de duivel die wilde leren vioolspelen. De muziekdocent had aanvankelijk gezegd dat ik de hoofdrol, de duivel, mocht gaan spelen, maar na afloop van de eerste repetitie zei hij dat hij er toch over dacht om een andere jongen die rol te geven. Ik had al eens eerder de hoofdrol gehad, dus dat was

ook eerlijker. Toen was ik daar, nou ja, niet over in paniek, maar ik dacht ineens: dit mag ik me niet laten gebeuren. Dus



Lowie van Oers

ik heb uiteindelijk de muziekdocent zelfs thuis opgebeld om te vertellen dat ik die rol gewoon heel graag wilde spelen, en toen zei de docent: goed, dan mag jij de duivel spelen. Die andere jongen speelde uiteindelijk God, wat natuurlijk ook een prima rol is.”

Het betekende wel veel voor je?

“Ja, absoluut, het was echt belangrijk. Mijn zus kwam ook naar die schoolmusical kijken. Zij zat inmiddels op de toneelschool, en zei na afloop dat ik echt was ‘getransformeerd’. Dat maakte me ook wel nieuwsgierig.”

Je was niet met wiskunde of natuurkunde bezig?

“Nou ja, een beetje wel. Het liet me niet onverschillig: ik herinner me bijvoorbeeld dat het ging over energie, en dat ik erachter kwam dat kou eigenlijk niet bestond. Dat vond ik dan een heel groot inzicht. Of bij scheikunde, de mol, dat ik daar mijn hoofd niet omheen kon krijgen, tot ik erachter kwam dat dat gewoon een getal was. Dat was ook mindblowing: het is gewoon een getal, waardoor het helemaal ongevaarlijk werd. Ook bij wiskunde bleef ik erover nadenken, totdat ik eruit was. Juist ook over de simpele dingen. Ik heb later wel veel bijles gegeven en dan wilden bijlesleerlingen vaak het trucje leren om hun proefwerken goed te maken.

Dat interesseerde me eigenlijk echt niet. Ik vond het zelf vooral leuk om die proefwerken te doen en er dan gewoon eens echt voor te gaan zitten. Dat vond ik wel een aangename bezigheid.”

Maar je koos toch voor toneel?

“Ja, ik ging de vooropleiding voor de toneelschool doen, en daarna ook auditie. Ik had bedacht om alleen in Amsterdam auditie te doen. Mijn zus zat daar ook, en met een soort basisarrogantie dacht ik: dat gaat gewoon lukken. Ik kwam wel in de laatste ronde, maar werd afgewezen. Aanvankelijk was mijn plan om, met een vriend die ook was afgewezen, een baantje te zoeken en een jaar lang zoveel mogelijk toneel te spelen. Maar ik zag die zomer de aflevering van *Zomergasten* met Robbert Dijkgraaf, en dat vond ik echt magisch. Hoe hij over natuurkunde sprak, en dat fragment over Andrew Wiles met de laatste stelling van Fermat: de week erna heb ik me ingeschreven aan de UvA. En zo kwam het dat ik dat ging studeren, eerst natuurkunde en na een paar maanden ook wiskunde. Dat vond ik eigenlijk superleuk. Als ik thuiskwam maakte ik huiswerk en ging ik bijdehante mailtjes sturen naar werkcollegedocenten over symmetrieën, of waar we ook mee bezig waren. Het waren allemaal heel erg ingewikkelde sommetjes die op een gegeven moment overzichtelijk werden en een mooie helderheid kregen.

Ondertussen zat ik nog half in die pre-toneelschoolwereld van jongvolwassenen die toneelschool willen gaan doen maar nog niet zijn aangenomen. Ik ging weer auditie doen, weer alleen in Amsterdam, werd weer net niet aangenomen, en toen dacht ik: ik ga stoppen met studeren en toch een jaar lang werken, spelen, en zoveel mogelijk audities doen. Uiteindelijk werd ik toch op de toneelschool aangenomen, maar in Arnhem. Het theater trok meer aan me, alsof daar een groter mysterie lag. Ik begreep de wiskunde te goed. Dat is natuurlijk weer die arrogantie van de jeugd, maar ik dacht: dit zijn sommetjes, die worden wel ingewikkelder, maar in principe is er op elke som een oplossing. Als je er maar lang genoeg over nadenkt, kun je je hoofd eromheen vouwen, en is het binnen het bereik van je intuïtie.

Wel bleef ik op de toneelschool over wiskunde doordenken. We moesten bijvoorbeeld een presentatie houden over een kunstenaar die we bewonderden, en toen heb ik die documentaire over Andrew Wiles laten zien, om te betogen dat hij ook een kunstenaar was. Op een gegeven moment las ik het stripverhaal *Logicomix*, over Bertrand Russell. Dat maakte extreem veel indruk. Het gevoel dat er mensen — nou ja, mannen vooral, in dat boekje — op zoek gingen naar wat er nou eigenlijk achter al die sommetjes zit. Waar begint het? Ik kon helemaal invoelen dat zij zich daarover zo druk maakten. Toen ben ik ook *Gödel, Escher, Bach* gaan lezen, en dat vond ik echt fantastisch. De onvolledigheidsstellingen van Gödel: dat je blijkbaar kunt bewijzen dat het nooit zal lukken de hele wiskunde voor eens en altijd af te maken. Op eens openbaarde zich het mysterie van de wiskunde.

Het raakte me nog meer omdat het gaat over zelfreferentie: het gaat mis als de wiskunde iets over zichzelf moet zeggen. Met theater was ik daar ook veel mee bezig. Toen ik net begon in Arnhem zag ik een voorstelling van twee afstudeerders. Zij kwamen het toneel op en kregen ruzie omdat ‘het publiek aan de verkeerde kant zat’. De magie van meta-theater, het theater dat gaat over de theatrale situatie van dat moment, dat vond ik zo’n ontdekking. Ik dacht daarna: hier zou al het theater nou over moeten gaan! Dat je daar met zijn allen zit, dat er mensen opkomen en dat die iets beginnen te doen: die situatie op zichzelf is al zo wonderbaarlijk, waarom zou je het over oorlogen of dat soort dingen gaan hebben? Later ben ik er ook wel achter gekomen dat het heel moeilijk is om het goed te doen, en dat het juist heel erg vervellende voorstellingen kan opleveren.”

Hoe kwam de voorstelling TURING tot stand?

“Ik wilde al een keer een voorstelling maken over wiskunde, eigenlijk over Kurt Gödel. Toen ben ik meer over hem gaan lezen, en zo kwam ik op Turing. Dat was gewoon een veel beter levensverhaal, dus toen heb ik over hem een voorstelling gemaakt: *TURING*. Dat was de eerste keer dat ik zelf een hele theatertekst

schreef. Het heeft me veel gebracht. Niet alleen in de zin dat het goed ontvangen werd, en veel werd gespeeld; ik had iets gemaakt over iets wat belangrijk is voor mij, wat ik interessant vind, en het bleek dat ik daarmee met het publiek contact kon leggen.

Ik ben daarna steeds vaker gevraagd om dingen te schrijven. Dat vond ik de laatste jaren steeds zwaarder worden. Ik ben dan extreem kritisch op mezelf, omdat het een goed stuk moet worden. Een stuk dat iets zegt. Dat is natuurlijk heel ingewikkeld als het gaat om het mysterie van theater. Je gaat iets zeggen dat je niet direct kunt zeggen. Anders zou je het wel direct zeggen: het gaat hier en hier over. Dan zou je een lezing kunnen geven. Het is alsof alles in een kunstwerk of theaterstuk wijst naar hetzelfde punt, maar dat punt er zelf niet is.

Soms schrijf ik iets waarvan ik vind dat het goed is, dat voel ik dan ook sterk, dan raakt het mijzelf ook heel erg. Dat is bijna dezelfde ervaring als dat ik bij wiskunde ergens heel lang naar zit te kijken dat ik niet begrijp en dan ineens wel. Dat je denkt: dit klopt. Maar het stuk is uiteindelijk een samenwerking tussen verschillende disciplines: een vormgever, een componist, de acteurs, die allemaal iets meebrengen. Ik heb bij het schrijven het gevoel dat ik dat allemaal al in de tekst moet stoppen. Terwijl: het kan opeens iets worden wat je als schrijver nooit had voorzien.

Zo kwam de vraag toch weer omhoog: moet ik niet weer wiskunde gaan studeren? Je kan er toch niet eindeloos populair-wetenschappelijke boeken over lezen. Dit voorjaar heb ik me weer ingeschreven, voor wiskunde en kunstmatige intelligentie, in Leiden. Iedereen in theaterland denkt dat ik een soort wiskundigen ben, omdat ik ooit een paar vakken met enig succes gevolgd heb. Kan ook zijn dat ik na een half jaar denk: dit is echt geen goed idee. Dit is geweest, maar het is niet mijn pad. Ik hoop dat ik dat dan wel durf toe te geven.”

Goede suggesties voor een Nederlandse wiskundige met een keerpunt in zijn of haar carrière zijn welkom via keerpunt@nieuwarchief.nl.

Raf Bocklandt

Korteweg-de Vries Institute for Mathematics
University of Amsterdam
r.r.j.bocklandt@uva.nl

History

A testimonial of troubled times

Sometimes a theorem is more than just a mathematical statement, it can bear witness of a period in history, not only through its content but also through the mathematicians that are associated to it. The Krull–Remak–Schmidt theorem is a prime example of this. From a mathematical point of view it is a showcase for the rise of abstract algebra in the first half of the twentieth century, while the lives of the three mathematicians behind it got tangled into the political upheaval because of their markedly different backgrounds and the choices they made. In this article Raf Bocklandt gives a short description of this remarkable history.

A modern theorem with an ancient flavour

Splitting mathematical objects into its basic building blocks has been around since Euclid proved the uniqueness of prime factorization, but decomposition theorems only gained prominence in the beginning of the twentieth century with the arrival of abstract algebra. Among these, the Krull–Remak–Schmidt theorem generalizes the prime factorization theorem to the world of abstract groups. In this setting the glue used to stick groups together is the direct product. This construction takes two groups G, H and forms the group $G \times H$ of all pairs of elements with component wise multiplication. The most basic example, known to all students taking a first course in group theory, is Klein’s famous four-group, which is the direct product of $\mathbb{Z}_2$ with itself. See Table 1.

The direct product of two groups $G \times H$ contains two special subgroups, $G \times \{e_H\}$ and $\{e_G\} \times H$, which are disjoint apart from the unit element $e = (e_G, e_H)$, commute and generate the whole group. Vice versa, if we can find two proper subgroups in a group meeting these three requirements, then this group is isomorphic to the direct product of these two subgroups. Groups that don’t have such subgroups

are called *indecomposable* and they form the basic building blocks, analogous to the primes in the prime factorization theorem. For every prime number p there is indeed an indecomposable group of that order: the cyclic group $\mathbb{Z}_p$, but there are a lot more indecomposable groups: the first ones we encounter are $\mathbb{Z}_4$ together with all its cousins of the form $\mathbb{Z}_{p^n}$, the symmetric and dihedral groups, and the quaternion group Q_8 .

So indecomposability is a rather weak condition, but it is enough to show that any finite group can be written as a direct product of indecomposable groups. Moreover just like for prime factorizations this product is unique but here it becomes interesting: what do we precisely mean by unique? For the prime factorization of numbers the uniqueness is clear. If we have two factorizations into primes we can pair the primes occurring in both factorizations such that they are the same. In the case of groups the meaning of the same has to be changed to isomorphic, but it turns out that we can do a bit better.

To illustrate this, let us return to Klein’s four-group. This is the product of $\mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_2$,

+	(0,0)	(0,1)	(1,0)	(1,1)
(0,0)	(0,0)	(0,1)	(1,0)	(1,1)
(0,1)	(0,1)	(0,0)	(1,1)	(1,0)
(1,0)	(1,0)	(1,1)	(0,0)	(0,1)
(1,1)	(1,1)	(1,0)	(0,1)	(0,0)

Table 1

but if we put this group on the dissection table we see that it contains in fact three subgroups isomorphic to $\mathbb{Z}_2$:

$$\begin{aligned} G_1 &= \{(0,0), (1,0)\}, \\ G_2 &= \{(0,0), (0,1)\}, \\ G_3 &= \{(0,0), (1,1)\}. \end{aligned}$$

This means that we can write the four-group in six different ways as a direct product $G = G_i \times G_j$. Because all the G_i are isomorphic to $\mathbb{Z}_2$ these decompositions all look the same. But there is more: the four-group has six automorphisms (corresponding to the six invertible 2×2 matrices with coefficients in $\mathbb{Z}_2$) which work transitively on the pairs $(G_i, G_j)_{i \neq j}$, so the decompositions are the same in a very precise way: they can be turned into each other using automorphisms of the group. (In fact it suffices to use central automorphisms. These are the automorphisms that commute with the inner automorphisms.) This leads to the following formulation of the Krull–Remak–Schmidt theorem for finite groups.

Theorem. *Every finite group can be written as a direct product of indecomposable subgroups and the group of central automorphisms acts transitively on the decompositions.*

A recalcitrant rebel

The history of this theorem can be traced back to Joseph Wedderburn, a Scottish mathematician who wrote the first textbook on abstract group theory. In a short paper

of 1909 [4] Wedderburn discusses the notion of direct products of finite groups and states the theorem of the unique decomposition but only in the weak sense: the factors of two decompositions are pairwise isomorphic.

The stronger version dates from two years later and was proved by Robert Remak in his PhD thesis under the supervision of Georg Frobenius, another giant of the theory of finite groups [10]. Robert Remak was born in 1888 in Berlin into a family of Ashkenazy Jews [9]. His grandfather, a renowned embryologist with the same name, was the first Jew in Germany to be appointed as a professor without having to leave his Jewish faith. Robert himself also had academic ambitions, he first studied medicine and mathematics, but after his PhD he had a lot of difficulties to find a position at a university.

Remak was the kind of student that many professors fear in their classes, pretending to be asleep during the lecture, but eager to point out mistakes or imprecise statements as soon as they appeared on the blackboard [1]. Also on the political level he liked to poke holes into the arguments of his opponents and therefore he was often branded a communist, while this was not really correct. Remak was merely interested in the interplay between mathematics and economics and hoped that the math would indicate which politico-economic system was to be preferred. Later he turned these ideas into an essay on the question whether economic studies can become an exact science [5, 11]. Because of all his contrarian behaviour he was denied his habilitation twice and it took until 1929 until he was allowed to teach at the university and then only provided he remained within the bounds of pure mathematics.

Unfortunately he did not enjoy his academic position for a long time. When the Nazis rose to power in 1933 all Jews were expelled from university. Nevertheless Remak stayed in Berlin and kept on doing mathematical research. On Kristallnacht in 1938 he was arrested and put in a concentration camp but thanks to the efforts of his non-Jewish wife he was released with a permit to go to the Netherlands. So in April 1939 he set off to Amsterdam, on his own because his wife had filed for divorce, probably partly in order to save her own life.

In the Dutch capital he was helped out by his compatriot Hans Freudenthal, who was a lecturer at the University of Amsterdam. Again Remak's uncompromising personality caused much troubles, not only in the lectures he attended. Freudenthal also had to sort out endless problems with angry landlords to keep him from being expelled to Germany. The invasion in 1940 made matters even worse and soon Hans Freudenthal, who was also Jewish, was dismissed from the University and had to struggle for his own survival. Remak spent his final months in an apartment on the Admiraal de Ruijterweg near the Wiegbrug, until he was arrested by the Germans and sent to Westerbork. After a few weeks he was put on the train to Auschwitz where he was murdered on the 13th of November 1942.

A decorated explorer

Less than a year after Remak had published his PhD thesis, another young mathematician came up with a simplification of his proof [14, 15]. Otto Schmidt, born in 1891 in a poor family of mixed Latvian-German descent, studied at the University of Kiev, which was at that time the major center for algebra in the Russian empire [8]. Because he was a very gifted student and a hard worker, he was already given research problems in his second year of study and this resulted in three papers on group theory during his bachelor degree. He also wrote a textbook on abstract groups during his master. When he completed his studies in



Robert Remak (1888–1942) [9]



Otto Schmidt (1891–1956) [8]

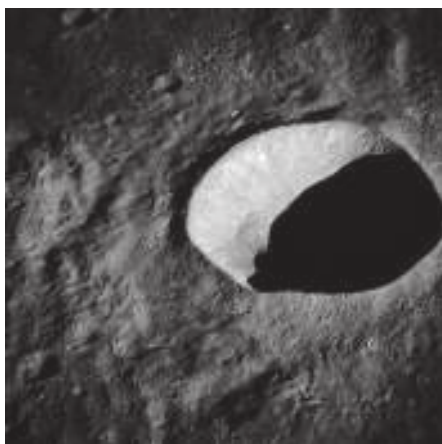
1916 he became a lecturer at the University but then the revolution happened.

In March 1917 the czar was forced to abdicate and half a year later the Bolsheviks staged a coup, turning the Russian empire into the first communist state. During that time Schmidt was already involved in several administrative functions in the city of Kiev and due to his revolutionary sympathies he got various official appointments such as leading functions in the People's Commissariat for Food and Higher Education, the head of the State Publishing House and editor-in-chief of the *Great Soviet Encyclopedia*.

But Schmidt had higher ambitions than just becoming a dull apparatchik in the administration. Instead of staying behind his desk in Moscow he wanted to explore the outer reaches of the newly founded Soviet Union. In 1928 he headed an expedition to the Pamirs, a high mountain range in what is now Tajikistan. The same year he was also put in charge of an icebreaker to explore Franz Joseph land, a vast archipelago in the Arctic that used to be under Austro-Hungarian control before the first world war. There he established a scientific base and two years later he ventured to an even remoter archipelago in search of a viable eastward passage through the Arctic sea. In 1932 this quest was successful when he reached Vladivostok with another icebreaker. A second trip however did not go according to plan. The ship was crushed by ice and the crew consisting of over a hundred people had to be rescued by airplanes from the ice sheet.

All these exploits turned Schmidt into a national hero and Soviet celebrity. He appeared in newspapers and magazines, on radio show and post stamps, girls even hung portraits of him in their rooms. His mathematical work did not stop when Schmidt started his expeditions. He kept on teaching courses at Moscow State University and published papers on group theory well into the thirties and forties, inspiring a new generation of mathematicians in Moscow. Apart from his mathematical work he also developed a theory on the origin of our solar system and published work on binary stars and the three body problem. He founded the Institute of Theoretical Geophysics and became the vice-president of the USSR Academy of Sciences.

One might think that a man that held so many and such high office in Stalin's



Schmidt Crater, named in honor of Otto Schmidt and a bunch of other Schmidts

communist regime must have been a close ally of the dictator, but the opposite is true. In fact Schmidt was one of the only critics of Stalin's malgovernance that survived the purges in the thirties. It has been suggested that his appointment to head the first expedition to the arctic was a convenient ploy by the Soviet leader to get rid of his opponent by letting him freeze to death. When Schmidt returned and also survived the follow-up expeditions, his celebrity status probably gave him some protection from the whims of the dictator. Nevertheless in 1942 he was stripped of his vice-presidency of the Academy, but by that time his health was also deteriorating, which spared him from further political punishment.

Otto Schmidt survived Stalin for just over three years and died of tuberculosis in 1956, an illness that had troubled him since his childhood. He is remembered as one of the most celebrated scientists of the Soviet union. He was decorated with three Orders of Lenin, two Orders of the Red Banner, an Order of the Red Star and several geographical and astronomical things are named after him: an island and a cape in the arctic, a peak in the Pamir, a crater on the Moon and even an asteroid in the asteroid belt. A truly stellar accomplishment.

An apolitical party member

Wolfgang Krull was born in Baden-Baden in 1899 as the son of a dentist [7]. He studied at the University of Freiburg and Rostock before moving to Göttingen in 1920. At that time Göttingen was the capital of the mathematical world and the home of many famous mathematicians such as a David Hilbert,

Felix Klein and Emmy Noether. These last two would prove very influential for Krull's later career. Noether had been recruited by Klein and Hilbert to work on the theory of invariants and its relation to Einstein's theory of relativity but had moved on to algebra, where she became the founding mother of modern abstract algebra. Crucial to this new research area was the axiomatic approach. Instead of proving results for well-known number systems such as the real or complex numbers, quaternions or polynomials, it aims to single out the most natural or powerful property an algebraic system should satisfy in order for certain desirable theorems to hold [2].

Noether was an expert in this and the property she is still famed for is the *ascending chain condition* or ACC for short. In an object that satisfies this condition, every increasing chain of subobjects becomes stationary.

$$S_1 \subset S_2 \subset S_3 \subset \dots \Rightarrow \exists r: \forall i, j > r: S_i = S_j.$$

In the case of abelian groups, $\mathbb{Z}$ satisfies ACC because every subgroup is of the form $k\mathbb{Z}$ and $k\mathbb{Z} \subset l\mathbb{Z}$ if and only if $l \mid k$. Therefore the ascending chain condition is equivalent to the fact that every number k has only a finite number of divisors. The additive group $\mathbb{Q}$ on the other hand does not satisfy the ascending chain condition because it contains the subgroups $2^i\mathbb{Z}$ for all $i \in \mathbb{Z}$. The ascending chain condition also has a sibling going in the opposite direction: the DCC or descending chain condition. Note



Wolfgang Krull (1899–1971) [7]

that $\mathbb{Z}$ does not satisfy the descending chain condition because we can find a decreasing set of subgroups of the form $2^i\mathbb{Z}$ with $i \in \mathbb{N}$.

Rings that satisfy the ascending chain condition for ideals are still called Noetherian rings and they share a lot of nice properties. Even today they are still heavily studied and form a basic ingredient of modern algebra and algebraic geometry, because you can squeeze a lot of juice out of this simple property. Algebraists sometimes parody Tolstoy's opening line from *Anna Karenina*:

"All Noetherian rings are alike, each nonnoetherian ring is nonnoetherian in its own way." [12]

Although Krull was not formally a student of Emmy Noether, he was heavily influenced by her and chains of ideals feature heavily in his work. His most famous contribution, the Krull dimension of a ring measures how long chains of prime ideals in a ring can get. Krull also used the ascending and descending chain conditions to offer a new perspective on the unique decomposition theorem [3]. Instead of working with finite groups, as Remak did, Krull focused on generalized abelian groups. These are abelian groups with extra linear operators attached to and they are close cousins of what we would nowadays call modules. Krull showed that they also have a unique

decomposition theorem if they satisfy both the ACC and DCC. This unifies a lot of unique decomposition theorems, such as the ones for representations of groups, algebras and Lie algebras and the Jordan decomposition of matrices.

After a brief spell in Göttingen, Krull returned to Freiburg where he obtained his PhD and became a professor in 1926. After two years he moved to the University of Erlangen where he had his most productive years, working on the interplay between commutative algebra and algebraic geometry. Among his students and collaborators Krull is known a meticulous worker who could be quite strict and demanding, but always with a human touch [6, 16]. He highly valued the intuition and the aesthetics behind mathematics. His aim was not only to present mathematically correct proofs but also to present the subject in such a way that the theorems seem self-evidently true. He was admired by his students as a cultured man with a broad knowledge outside mathematics but without much interest into the social life. He was also reputed to be uninterested in politics, which makes it all the more curious that Krull had a darker side.

Krull was an official member of the Nazi party. Already in 1933 he had joined the National Socialist Teachers League and when Otto Toeplitz was dismissed from the University of Bonn because of his Jew-

ish background, Krull was asked to take over his professorship and even became the dean of the mathematics and natural science faculty [13]. During the war he worked in the Marine observatory in Greifswald on problems relating with the weather, such as the speed of sound in the air, moisture in the air and artificial fog clouds. Near the end of the war he was taken prisoner and when he returned to Bonn he was briefly put on a list of politically incorrect professors because of his NSDAP membership. However, soon after he could take up his professorship again and he stayed in Bonn for the rest of his career until he death in 1971. We will probably never know Krull's motivations and thoughts during this episode in his life, as he was never been very vocal about it during the time or afterwards. Furthermore this aspect is barely touched upon in memorials and biographies and there is little material evidence available apart from his name appearing in membership lists.

With the rise of Nazism and communism and two world wars, the times in which our main protagonist lived were truly extraordinary and dangerous. Their fates were determined by their family roots, the places where they grew up, and their personalities, but today almost a century later these three different characters with three different backgrounds and three different lives, remain tied together by one theorem. ☞

References

- 1 H. Behnke, *Semesterberichte: e. Leben an dt. Univ. im Wandel d. Zeit*, Vandenhoeck und Ruprecht, 1978.
- 2 L. Corry, *Modern Algebra and the Rise of Mathematical Structures*, Birkhäuser, 2012.
- 3 W. Krull, Über verallgemeinerte endliche abelsche Gruppen, *Mathematische Zeitschrift* 23(1) (1925), 161–196.
- 4 J. MacLagan-Wedderburn, On the direct product in the theory of finite groups, *The Annals of Mathematics* 10(4) (1909), 173–176.
- 5 U.C. Merzbach, Robert Remak and the estimation of units and regulators, in *Amphora*, Springer, 1992, pp. 481–522.
- 6 J. Neukirch, Erinnerungen an Wolfgang Krull, *Wolfgang Krull: Gesammelte Abhandlungen*, Walter de Gruyter, 1999, pp. 47–52.
- 7 J.J. O'Connor and E.F. Robertson, Biography of Wolfgang Krull, in *MacTutor History of Mathematics*, 2000, <http://mathshistory.st-andrews.ac.uk/Biographies/Krull>.
- 8 J.J. O'Connor and E.F. Robertson, Biography of Otto Yulyevich Schmidt, in *MacTutor History of Mathematics*, 2011, http://mathshistory.st-andrews.ac.uk/Biographies/Schmidt_Otto.
- 9 J.J. O'Connor and E.F. Robertson, Biography of Robert Remak, in *MacTutor History of Mathematics*, 2013, <http://mathshistory.st-andrews.ac.uk/Biographies/Remak>.
- 10 R. Remak, Über die zerlegung der endlichen gruppen in direkte unzerlegbare faktoren, *Journal für die reine und angewandte Mathematik*, 1911(139) (1911), 293–308.
- 11 R. Remak, Xxi. Kann die Volkswirtschaftslehre eine exakte Wissenschaft werden? *Jahrbücher für Nationalökonomie und Statistik*, 131(1) (1929), 703–735.
- 12 L. Tolstoy, *Anna Karenina*, quote adapted by Bill Crawley-Boevey in Oberwolfach.
- 13 F. Schmaltz, *Kampfstoff-Forschung im Nationalsozialismus: Zur Kooperation von Kaiser-Wilhelm-Instituten, Militär und Industrie*, Vol. 11, Wallstein Verlag, 2017.
- 14 O. Schmidt, Über die Zerlegung endlicher Gruppen in direkte unzerlegbare Faktoren, *Prot. Fiz.-Matem ob-va Pri Kiev. Univ.*, 1912.
- 15 O. Schmidt, Sur les produits directs, *Bulletin de la Société Mathématique de France* 41 (1913), 161–164.
- 16 H. Schöneborn, In memoriam Wolfgang Krull, *Jahresbericht der DMV* 82 (1980), 51–62.

Lodewijk Kallenberg

Mathematisch Instituut
Universiteit Leiden
kallenberg@math.leidenuniv.nl

Ger Koole

Afdeling Wiskunde
Vrije Universiteit Amsterdam
ger.koole@vu.nl

Floske Spijksma

Mathematisch Instituut
Universiteit Leiden
spijksma@math.leidenuniv.nl

In Memoriam Arie Hordijk (1940–2021)

Bevlogen wetenschapper met een diepgaand inzicht

Op 6 april 2021 overleed op 81-jarige leeftijd Arie Hordijk, emeritus hoogleraar aan de Universiteit Leiden, prominent onderzoeker in de stochastische besliskunde. Professor Hordijk studeerde wis- en natuurkunde aan de Vrije Universiteit Amsterdam en deed op het Mathematisch Centrum promotieonderzoek op het gebied van de dynamische programmering. Tevens was hij in deeltijd wetenschappelijk medewerker aan de VU. In 1976 werd hij aangesteld als hoogleraar mathematische besliskunde aan de universiteit van Leiden. Daar was hij bijna dertig jaar werkzaam, tot zijn emeritaat in 2005. Lodewijk Kallenberg, Ger Koole en Floske Spijksma, drie van zijn elf promovendi, beschrijven zijn leven en werk.

Ouderlijk gezin en schoolopleiding

Arie Hordijk werd op 18 februari 1940 in Rockanje geboren, een badplaats op het Zuid-Hollandse eiland Voorne. De liefde voor het strand en de zee heeft zijn hele leven een grote rol gespeeld. Hij groeide op in een groot christelijk gezin van acht kinderen, waarvan Arie de vijfde was.

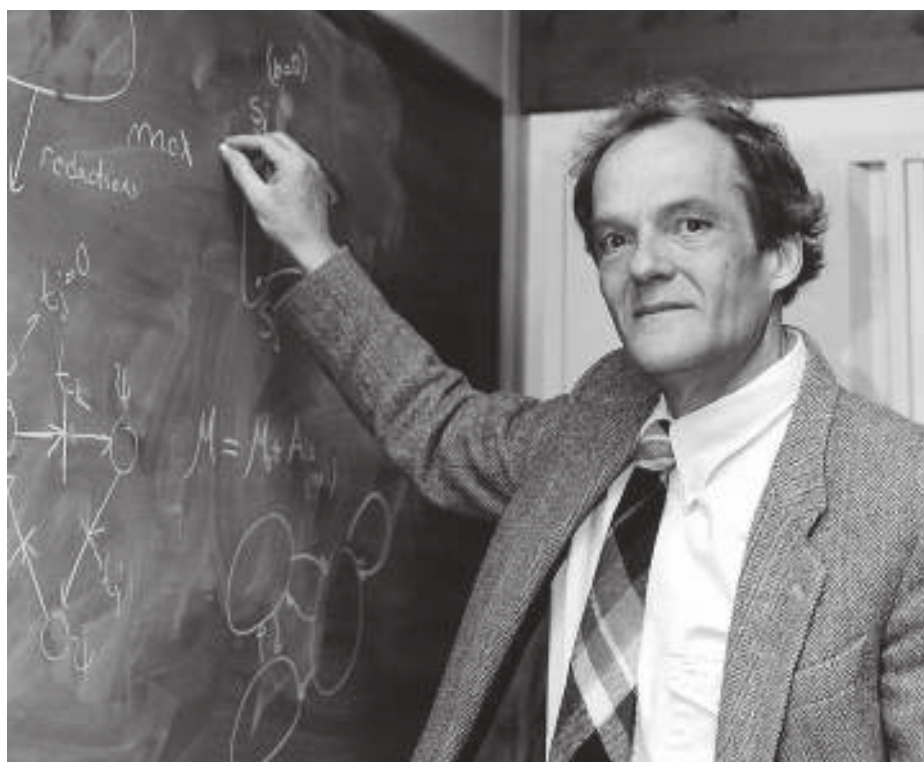
Arie ging in het nabijgelegen dorp Tinte naar de School met de Bijbel, een kleine tweemans lagere school, waarvan zijn vader hoofdonderwijzer was. Het gezin woonde op het terrein van de school, naast de gereformeerde kerk; als er geen dominee beschikbaar was dan stond vader Hordijk op de kansel. Toen vader hoofdonderwijzer werd in Krabbendijke (Zuid-Beverland), doorliep Arie daar de klassen 4, 5 en 6. Het gezin had het door langdurige ziekte van zowel vader als moeder financieel zwaar.

In Krabbendijke was als middelbaar onderwijs alleen een mulo. Reiskosten om in Goes of Middelburg naar een hbs te gaan kon het gezin niet opbrengen, zodat Arie in 1952 naar de christelijke mulo van zijn woonplaats ging.

De watersnoodramp van februari 1953 veranderde deze situatie. Met alle bewoners van het dorp werd ook het gezin Hordijk geëvacueerd. Vader had net begin 1953 een nieuwe baan aangenomen op een grotere school in Overschie bij Rotterdam, het

gezin keerde niet terug naar Krabbendijke maar werd tijdelijk verspreid over verschillende locaties in het land. Arie kwam terecht bij een oom en tante in Berkel en Rodenrijs en ging naar de eerste klas van de mulo in Rotterdam-Noord. Arie wilde graag

overstappen naar de hbs, maar dat vond zijn vader geen goed idee omdat Aries cijfers niet goed genoeg waren om toegelaten te worden tot de tweede klas van de hbs. Ook speelde het financiële aspect weer een rol omdat de hbs duurder zou uitpakken dan de mulo. Het lukte Arie, mede op voorspraak van zijn oudere broers, om zijn vader te laten instemmen met een overstap naar de hbs. Dat werd de Eerste Christelijke HBS in Rotterdam, waar Arie in de eerste klas moest beginnen. Inmiddels was het gezin weer herenigd en woonde het in Overschie. Arie kon de hbs met gemak aan en haalde op 9 juli 1958 het hbs B-diploma.



Arie Hordijk bij het schoolbord op zijn kamer, omstreeks 2003



Arie (rechts) met zijn broers en zussen

Studie

Vooral de wiskunde had Aries belangstelling en hij wilde graag wis- en natuurkunde gaan studeren aan de Vrije Universiteit te Amsterdam. Vader Hordijk vond echter de kosten van daar op kamers wonen te hoog en wilde Arie niet anders behandelen dan zijn andere kinderen, waarvan sommigen de kosten voor hun opleidingen zelf hadden gedragen en anderen, die gingen werken, een deel van hun inkomsten moesten afdragen voor het kostbare onderhoud van grote gezin.

Opnieuw op voorspraak van de oudere broers werd toen het compromis bereikt dat Arie toch kon gaan studeren, maar aan de Technische Hogeschool in Delft, op 10 km van hun woonplaats Overschie. Arie kon dan thuis blijven wonen, wat een stuk goedkoper was.

In eerste instantie nam Arie dit voorstel met genoegen aan en begon in Delft de studie technische natuurkunde. Al in de eerste weken had hij er grote moeite mee dat in Delft geen wiskundeopleiding was. Hij voelde zich helemaal niet thuis op de TH: de sfeer was te technisch, er werd wel wiskunde gegeven, maar deze was in zijn ogen niet fundamenteel genoeg en te veel op de toepassing gericht.

Daarom wilde hij weg uit Delft en toch naar de Vrije Universiteit. Daarbij speelde ook mee dat hij met zijn hobby's cultuur en muziek in Amsterdam veel meer aan zijn trekken zou komen. Mede op basis van advies van zijn wiskundedocent heeft hij toen—tegen de zin van zijn vader—besloten om de overstap te maken naar de studie wis- en natuurkunde aan de VU. Hier voelde Arie zich wel thuis, maar deze overstap leidde thuis tot een serieus conflict en heeft de verhouding

met zijn vader gedurende lange tijd ernstig verstoord.

In Amsterdam moest Arie zelf rond zien te komen. Hij leefde van een beurs en enkele baantjes, waaronder bijles wiskunde aan middelbare scholieren en vakantiewerk bij Wagon-Lits. Vanuit huis kreeg hij geen toelage, maar zijn moeder gaf hem wel de nodige levensmiddelen en kleding. De verstoorde relatie werd na enige tijd redelijk hersteld en Arie kwam daarna in de week-ends (liftend) naar huis, vooral toen hij verkering kreeg met zijn latere vrouw Marina.

De studie wis- en natuurkunde ging de leergierige Arie uitstekend af, met meer affiniteit voor de wiskunde dan voor de natuurkunde. De colleges die hem het meest boeiden waren die van de hoogleraren P.C. Baayen, die het nieuwe vak topologie doceerde, en J.P. van Rooijen, die numerieke wiskunde gaf. Voor Arie was er maar één wiskunde: een scheidslijn tussen zuivere en toegepaste wiskunde was er in zijn ogen niet, alleen 'goede' en 'slechte' wiskunde.

Zijn eerste zelfstandig onderzoek stamt uit 1966. Het betrof topologische halflichamen en verscheen in 1967 in het *Nieuw Archief voor Wiskunde* [10]. In 1967 behaalde Arie cum laude zijn doctoraal en stond voor de keuze "wat nu?" Hij besloot naar het Mathematisch Centrum in Amsterdam (het huidige CWI) te gaan, waar hij, na overleg met Baayen, koos voor de groep Statistiek en Operations Research, die onder leiding stond van de hoogleraar statistiek J. Hemelrijk.

Mathematisch Centrum

Op het Mathematisch Centrum kwam Arie in contact met Gijs de Leve, hoofd van de sectie Operations Research. De Leve deed als eerste in Nederland onderzoek op het nieuwe terrein van de Markovbeslissingstheorie en was bij Hemelrijk in 1964 gepromoveerd op het proefschrift *Generalized Markovian Decision Processes*. Gijs de Leve kan met Wim Cohen, de pionier op het gebied van de wachttijdtheorie, worden beschouwd als één van de twee 'founding fathers' van de stochastische besliskunde in Nederland.

Het onderwerp Markovbeslissingstheorie fascineerde Arie direct en hij bleef dit onderzoeksgebied zijn hele leven trouw. Daarnaast zou hij later ook andere onderdelen van de stochastische besliskunde intensief bestuderen en verrijken met diepe resultaten. Diepgang, niet alleen in wis-

kundig onderzoek maar ook op andere terreinen, was een kenmerkende eigenschap van Arie Hordijk.

Voor eindige toestandsruimten was de Markovbeslissingstheorie in het begin van de zestiger jaren al deels ontwikkeld, maar voor oneindige toestandsruimten lag het terrein grotendeels open. Eerst met Henk Tijms en later ook met Awi Federgruen, beiden ook verbonden aan het Mathematisch Centrum, stortte Arie zich met succes op dit onderzoek.

Naast zijn inspirerende werkkring op het Mathematisch Centrum werd Arie Hordijk in 1971 aan de Vrije Universiteit aangesteld als wetenschappelijk medewerker. Daar gaf hij colleges in kansrekening, statistiek en besliskunde.

Ook in Eindhoven werd aan Markovbeslissingstheorie gewerkt. Dit gebeurde in eerste instantie door Jaap Wessels, die in 1968 bij Jacques Benders was gepromoveerd op het proefschrift *Decision Rules in Markovian Decision Problems with Incomplete Known Transition Probabilities*. Hordijk, Tijms en Wessels zijn, na De Leve en Cohen, de wetenschappelijke tweede generatie van de Nederlandse stochastisch besliskundigen.

Promotie en Stanford

Het onderzoek van Hordijk leidde tot zijn dissertatie *Dynamic Programming and Markov Potential Theory* [11], dat hij onder supervisie van de hoogleraren Theo Runnenburg (UvA) en John Bather (University of Sussex) schreef en op 16 januari 1974 succesvol verdedigde. Het is met ruim 300 citaties het meest geciteerde werk van Hordijk. Dit proefschrift ging over de existentie van optimale strategieën voor verschillende optimaliteitscriteria, met name totale en gemiddelde opbrengsten. Hiervoor gebruikte Hordijk begrippen als excessieve en Lyapunov-functies en potentiaal. Ook werden in deze dissertatie communicerende en recurrente systemen en stoptijden bestudeerd.

Een van de stellingen bij zijn proefschrift was typerend voor Amsterdam in de zeventiger jaren en luidde: "De metrobouw in Amsterdam is een stadsondermijnende activiteit."

Hordijks resultaten betroffen onder andere een generalisatie van onderzoek van Arthur F. Veinott Jr. (Stanford University). Veinott nodigde Arie uit om in het najaar van 1974 als visiting associate professor

naar Stanford te komen. Dit leidde tot een verdere verdieping van Aries werk aan Lya-punov functies voor regeneratieve Markov-beslissingsproblemen [12]. Hier ontmoette hij ook Donald L. Iglehart en Rolf Schassberger, met wie Hordijk een van zijn meest geciteerde artikelen schreef [17]. Het betrof het gebruik van de regeneratieve methode om simulaties van continue Markovketens te analyseren.

Leiden

In 1976 werd Arie, als opvolger van Guus Zoutendijk, benoemd tot hoogleraar in de mathematische besliskunde aan de Rijksuniversiteit van Leiden. Hij zou tot aan zijn emeritaat in 2005 verbonden blijven aan het Mathematisch Instituut.

Onderwijs

Hordijk heeft niet alleen op het gebied van de besliskunde onderwijs gegeven, maar ook op dat van de grafentheorie en de discrete wiskunde.

Discrete wiskunde was in Leiden een nieuw vak en Arie heeft hiervoor samen met zijn in die tijd enige medewerker Lodewijk Kallenberg een dictaat gemaakt met onderwerpen als combinatoriek, enumeratie en matroïden. Ook voor het college grafentheorie werd door hen een nieuw dictaat samengesteld.

Op het gebied van de stochastische besliskunde werden door Hordijk de colleges wachttijdtheorie en stochastische dynamische programmering gegeven. Vooral dit laatste college had een echt 'state of the art'-karakter, waarvoor Arie een prachtig en met de hand geschreven dictaat had gemaakt. De deterministische besliskunde ging met name over lineaire en niet-lineaire programmering. Na haar promotie in 1990 kwam Floske Spieksma als medewerker de groep van Hordijk versterken.

Hoewel de absolute studentenaantallen in de periode 1975–2005 niet erg groot waren, was er relatief veel belangstelling van studenten voor de besliskunde. Op een gegeven moment was er zelfs sprake van een 'numerus fixus' voor het aantal afstudeerders. Arie heeft een groot aantal studenten begeleid bij het schrijven van hun bachelor- of doctoraal scriptie. Het zullen er tussen de 150 en 200 zijn geweest.

De colleges van Hordijk waren altijd uitstekend voorbereid en alles werd overzichtelijk in een fraai handschrift op het brede schoolbord uitgeschreven. Hij kwam per

trein naar Leiden, was meestal rond 9.30 uur op het instituut — colleges gaf hij daar om bij voorkeur pas na 11 uur — en vertrok weer rond 17.30 uur. Donderdag was zijn 'thuisdag', vooral ingesteld om in alle rust overdag te kunnen werken, waarna hij 's avonds met zijn vrouw Marina naar het zangkoor ging.

Onderzoek algemeen

Het onderzoek van Arie Hordijk was fundamenteel, breed en diepgaand. Het betrof het hele spectrum van de stochastische besliskunde, met de nadruk op Markov(beslissings)ketens, Markovspelen en wachttijdtheorie.

De onderliggende processen waren zowel discreet als continu, met zowel eindige als oneindige toestandsruimte. Zijn brede wiskundige achtergrond kwam daarbij uitstekend tot zijn recht. Ook wist hij snel nieuwe gebieden te doorgronden.

Wim Cohen, Arie Hordijk, Henk Tijms en Jaap Wessels hebben ervoor gezorgd dat Nederland vanaf het begin internationaal in de frontlinie een vooraanstaande rol speelde op het terrein van de stochastische besliskunde en de wachttijdtheorie. Zij, hun leerlingen en inmiddels al weer een volgende generatie hebben bewerkstelligd dat dit nog steeds het geval is.

Al in de zeventiger jaren hebben bovengenoemde pioniers via colloquia en de Lunteren-conferenties de Nederlandse community op dit gebied met elkaar in contact gebracht en gestimuleerd. Deze activiteiten bestaan nog steeds en werpen hun vruchten nog altijd af.

Promovendi

Het samenwerken met één andere onderzoeker deed Arie het liefst en zijn promovendi hebben hier dankbaar gebruik van kunnen maken. Wekelijks sessies van enkele uren voor het schoolbord op zijn kamer waren geen uitzondering. In de periode 1976 tot 2003 heeft hij elf promovendi gehad, dus ongeveer elke tweeënhalf jaar één.

Aries eerste promovendus was Frank van der Duyn Schouten [jaar van promotie: 1979], die als student zijn colleges kansrekening en statistiek volgde aan de Vrije Universiteit en vervolgens onder leiding van Arie in een promotieproject werkte aan Markovprocessen met een continue tijdsparemeter. Dit onderzoek [6] omvat de bestudering van zwakke convergentie van processen met discrete tijdsparemeter naar processen met een continue tijdsparemeter waardoor structuur van optimale strategieën kan worden overgedragen.

Lodewijk Kallenberg [1980] promoveerde op lineaire programmering voor eindige stochastische beslissingsproblemen, met name Markovbeslissingsproblemen voor diverse optimaliteitscriteria en Markovspelen, zowel zonder als met extra beperkingen [27]. Onder andere werd het openstaande probleem of het multichain-model met één LP-probleem kon worden opgelost bevestigend beantwoord.

Het onderzoek met Nico van Dijk [1983] was enerzijds een voortzetting van dat met Frank van der Duyn Schouten over convergentie-eigenschappen van discrete benaderingen voor continue processen.



1982: boven Arie Hordijk, Rommert Dekker, Lodewijk Kallenberg, Ted Hill, Nico van Dijk; onder Ad Ridder en de partner van Osaki (een gast van Hordijk die de foto heeft genomen).

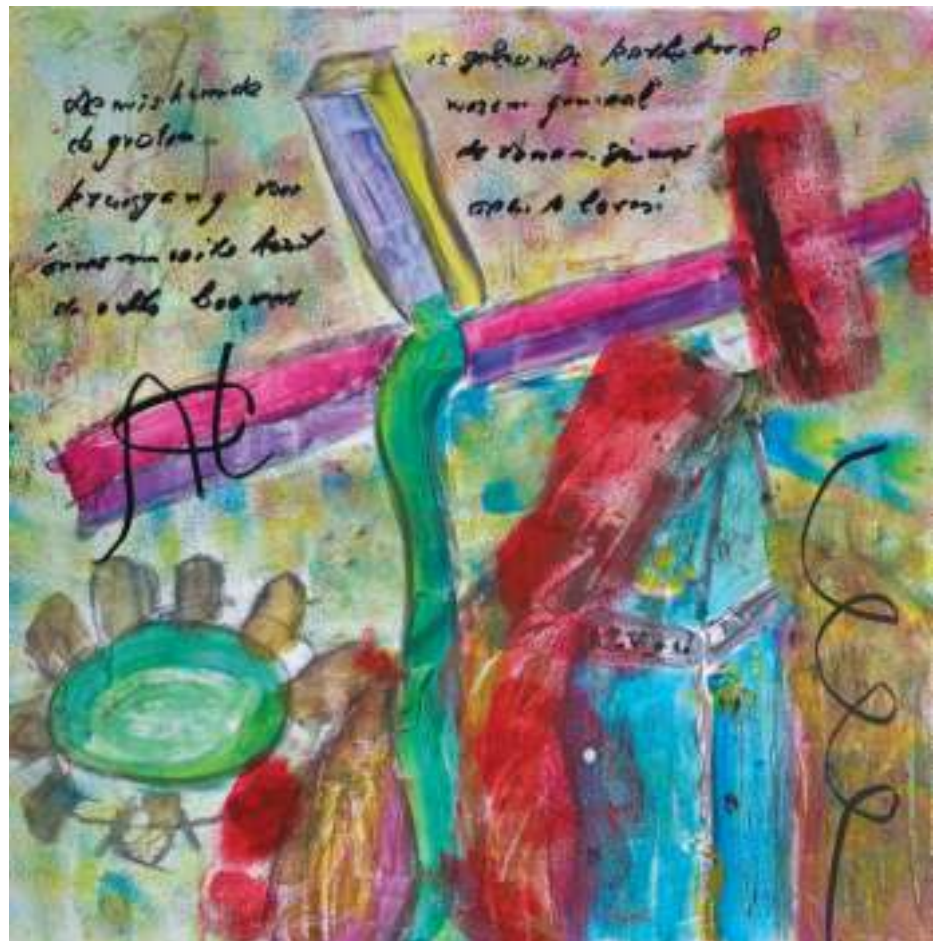
Daarnaast werden netwerken van wachtrijen bestudeerd, met name insentiviteits-eigenschappen [5].

Met Rommert Dekker [1985] werd een elegante theorie ontwikkeld, gebaseerd op bepaalde lineaire operatoren op geschikte Banachruimtes, voor problemen met aftelbare toestandsruimte, compacte actieverzamelingen, onbegrensde opbrengsten en met meer gevoelige criteria [4]. Hiervoor werd een Laurent-reeksontwikkeling opgesteld die lexicografisch werd geoptimaliseerd.

Het onderzoek met Ad Ridder [1987], zijn vijfde promovendus, betrof de wachttijdtheorie. Voor complexe systemen is het vaak ondoenlijk om bepaalde prestatiegrootheden exact te bepalen. Het vinden van (goede) afschattingen is in zo'n geval de uitdaging, waarbij stochastische ongelijkheden een oplossing kunnen bieden. Dit was het onderwerp van dit promotieonderzoek [35].

Met Floske Spieksma [1990] werkte Arie aan geometrische ergodiciteit voor aftelbare Markovketens en meerdimensionale wachtrijmodellen [36]. Hiervoor werd het begrip sterke convergentie ingevoerd en aangetoond dat uniform sterke convergentie equivalent is met uniform sterke recurrentie. Uitgaande van uniform sterke recurrentie werd de convergentie bewezen van de methode van successieve approximatie voor gemiddelde opbrengsten in multichain-modellen. Ook werd met een tegenvoorbeeld aangetoond dat limieten van verdisconteerde optimale strategieën niet altijd Blackwell-optimaal zijn.

Arie heeft met zijn promovendi niet alleen aan theoretische modellen gewerkt, maar ook aan toepassingen. Bij toepassingen is het van belang eenvoudig te hanteren optimaliteitsregels te vinden. Zo'n regel is bijvoorbeeld dat het bij wachttijdproblemen met één bediende en verschillende wachtrijen voor bepaalde kostenfuncties, zoals het verwachte aantal klanten in het systeem, optimaal is om prioriteit te geven aan de kortste (of langste) wachtrij. Een ander voorbeeld is de optimaliteit van de zogenaamde μc -regel, waarbij de klant met het hoogste product van een wegingsfactor c_i en een bedieningsparameter μ_i als eerste wordt bediend. Het onderzoek met Ger Koole [1992] is een mooi voorbeeld van zo'n toepassingsgericht onderzoek [28]. In zijn proefschrift worden zowel modellen waarin klanten aan een wachtrij



Een door Arie gemaakt schilderij met als titel 'Wiskunde'

moeten worden toegewezen als modellen waarin bedienden aan een bepaalde wachtrij worden toegewezen, besproken.

Bij Markovbeslissingsproblemen wordt in het algemeen aangenomen dat de relevante informatie over het proces volledig bekend is. In de praktijk is dat vaak niet (volledig) het geval. Het analyseren van dergelijke problemen met gedeeltelijke informatie was het onderzoek van Anneke Loeve [1995] [32]. Hierin wordt onder andere een successieve approximatiemethode opgesteld, waarmee een lokaal optimale periodieke strategie kan worden bepaald voor niet-verdisconteerde kosten. Dit resultaat wordt toegepast op modellen uit de wachttijdtheorie.

De negende promovendus was Olaf Passchier [1996], die Markovspelen bestudeerde. In zijn proefschrift [33] werd een algemene aanpak voor het twee-personen nul-somspel besproken en werd dit toegepast op een wachtrijprobleem. Een ander resultaat was dat de Puiseux-reeksontwikkeling voor verdisconteerde opbrengsten niet altijd bestaat.

Arie Hordijk, met medepromotor Rob Tijdeman, begeleidde Dinard van der Laan [2003] bij het bestuderen van het optimaal routeren van aankomende taken bij een wachtrijsysteem met parallelle wachtrijen, waarbij iedere wachtrij zijn eigen bediende heeft. Voor dit model zijn deterministische, statische routeringsstrategieën onderzocht. In dit proefschrift [29] spelen periodieke rijtjes met nullen en enen, en ook multimodulaire functies een belangrijke rol.

Met zijn elfde en laatste promovendus, Nicolay Popov [2003], bestudeerde Hordijk praktische methoden om *large deviation bounds* te berekenen voor meerdimensionale *random walks*. Hierbij speelden de door Arie gedurende zijn gehele loopbaan met veel succes toegepaste Lyapunov-functies weer een grote rol. De resultaten van dit onderzoek vinden toepassingen in de wachttijdtheorie [34].

Van het onderzoek met zijn promovendi heeft Arie zeer genoten. Het was vaak de klassieke meester-leerlingverhouding, waarin Arie zijn ruwe ideeën over een mogelijke oplossing van een bepaald probleem

schetste en er enorm van kon genieten als dat werd begrepen en uitgewerkt tot het gewenste resultaat. Hij stimuleerde zijn leerlingen en spoorde hen aan om samen met hem de resultaten te publiceren. Dit heeft geleid tot 78 artikelen, waarvan de meeste in vooraanstaande wetenschappelijke tijdschriften zijn verschenen. Ook was hij er trots op dat zes van zijn promovendi hoogleraar werden (Frank van der Duyn Schouten, Lodewijk Kallenberg, Nico van Dijk, Rommert Dekker, Ger Koole en recentelijk Floske Spijksma), hoewel de anderen hem evenzeer lief waren. Arie vond het leuk ook na hun promotie contact te houden met zijn wetenschappelijke kinderen. Zo organiseerde Arie een aantal keren een zeildag met hen, waarbij hij gekleed ging in een typisch zeventigerjaren spijkerpak.

Samenwerking met andere onderzoekers
Arie Hordijk heeft — naast met zijn promovendi — ook altijd met andere onderzoekers samengewerkt. In de eerste helft van de zeventiger jaren op het Mathematisch Centrum was dat vooral met Henk Tijms en Awi Federgruen. Zij onderzochten met name existentie en convergentie voor discrete en continue Markovbeslissingsprocessen met een aftelbare toestandsruimte en met gemiddelde opbrengsten. Dit onderzoek leidde tot een aantal artikelen, zoals [7].

Ook met buitenlandse collega's werd in die periode samengewerkt: met Paul Schweitzer (Rochester) aan het asymptotische gedrag voor aftelbare Markovbeslissingsprocessen met totale kosten [23], met de al eerder genoemde Donald Iglehart en Rolf Schassberger over simulatie [17] en met Karel Sladky (Praag) aan problemen met meer gevoelige optimaliteitscriteria [24].

Op het Mathematisch Centrum en in Eindhoven werkten jonge mensen als Kees van Hee, Jan van der Wal, Koos Vrieze en Gerard Wanrooij ook aan Markovbeslissingsprocessen en Markovspelen. De contacten die Arie met hen had, leidden tot diverse gezamenlijke publicaties op dat gebied.

Ted Hill (Georgia Tech) en Jean Lasserre (LAAS-CNRS, Toulouse) waren regelmatige bezoekers van het Mathematisch Instituut in Leiden. Arie werkte met Hill aan optimaal stopproblemen [9] en met Lasserre aan lineaire programmering voor Markovbeslissingsproblemen met aftelbare toestandsruimte [21]. Anderen die Leiden bezochten om met Hordijk samen te werken

waren Martin Puterman (British Columbia Canada) [22] en Ulrich Rieder (Ulm).

Arie bracht rond 1995 een jaar door in INRIA in het Zuid-Franse Sophia Antipolis, waar hij met Eitan Altman en Bruno Gaujal aan stochastische netwerken werkte. In dit onderzoek speelde het begrip multimodulariteit een cruciale rol. Deze samenwerking leidde niet alleen tot een aantal artikelen, maar ook tot een boek [14].

Na de perestrojka was het weer mogelijk om met Russische onderzoekers samen te werken. Alexander Gajrat kwam in 1997 uit Moskou als postdoc een jaar naar Leiden. Met hem deed Arie onderzoek naar zogenaamde *fluid approximations*, zowel voor Markovbeslissingsketens als voor wachtrijproblemen [8]. Bij dit werk speelden polyhedrale convexe kegels een essentiële rol.

In die periode pakte Arie met de Russische onderzoekers Alexander Yushkevich en Alexander Borovkov de draad weer op met onderzoek naar gevoelige criteria voor Markovbeslissingsproblemen. Met Yushkevich werden resultaten verkregen voor Blackwell-optimaliteit in problemen met een Borel-toestandsruimte en onbegrensde opbrengsten [26]. Met Alexander Borovkov deed Hordijk onderzoek naar ergodiciteit van Markovketens [3]. Ook Sheldon Ross behoorde tot Aries regelmatige gasten. Ross en Borovkov bezetten respectievelijk in 1989 en 1999 de Kloostermanleerstoel in Leiden.

De laatste persoon met wie Arie intensief heeft samengewerkt was Bernd Heidergott van de Vrije Universiteit. Dit contact begon rond de eeuwwisseling en duurde tot Aries laatste levensfase, waar zij samen in Castricum aan de keukentafel wiskunde beoefenden. Deze samenwerking was een klassieke meester-leerlingverhouding, zo liet Bernd ons weten, en heeft meer dan tien artikelen opgeleverd. Het onderzoek betrof onder andere de reeksontwikkeling en approximaties van de deviatiematrix voor continue Markovketens [31] en ook perturbatie-analyse voor wachttijden [30]. De laatste publicatie van Hordijk was met Heidergott en Aries neef Wim Hordijk. Dit laatste vond Arie heel bijzonder en deed hem veel genoegen [16].

Uit het bovenstaande blijkt het brede spectrum waarop Arie Hordijk werkzaam en productief is geweest. Dit heeft geleid tot een viertal boeken, waaronder een monografie en 150 publicaties. Van deze publi-

caties staan er 13 uitsluitend op zijn eigen naam, 76 samen met promovendi en 61 met andere co-auteurs. Zijn tien meest geciteerde artikelen zijn (in afnemende volgorde van het aantal citaties, dat van ruim driehonderd tot honderd loopt): [11, 18, 1, 2, 19, 17, 15, 20, 25, 14].

Tweehonderd jaar WG

In 1978 bestond het Wiskundig Genootschap tweehonderd jaar. Bij dit jubileum was Arie Hordijk een van de uitgenodigde sprekers. Zijn voordracht 'From linear to dynamic programming via shortest paths' [13] was een prachtig verhaal waarin het verband tussen lineaire programmering, dynamische programmering en kortste paden op originele wijze uit de doeken werd gedaan.

Van Dantzig Prijs

Op grond van zijn indrukwekkend onderzoek op het gebied van de Operations Research werd aan Arie Hordijk in 1980 de prestigieuze Van Dantzig Prijs toegekend, de hoogste onderscheiding binnen de Nederlandse Statistiek en Operations Research, die in 1970 is ingesteld en sindsdien eens in de vijf jaar wordt toegekend.

Redactiewerk

Hordijk was een zeer gewaardeerd redacteur van de tijdschriften *Mathematics of Operations Research*, *Applied Probability*, *Mathematical Methods of Operations Research* en *Probability in the Engineering and Informational Sciences*. Hij heeft dit werk vele jaren en uiterst consciëntieus gedaan.



Arie geeft een lezing, omstreeks 1980

Organisatorische zaken

Hordijk had een hekel aan de meeste organisatorische zaken, die hij maar zonde van zijn tijd vond. Hij zocht dit daarom bepaald niet op, maar als op hem een beroep werd gedaan en hij dat redelijk achtte, dan was hij bereid dit werk op zich te nemen.

Organisatorische zaken op het gebied van de stochastische beslis kunde deed hij wel met genoegen. Hij was projectleider van de Stochastische Beslis kunde binnen het Stieltjes Instituut, medeorganisator van drie workshops die op het Lorentz Centrum in Leiden werden gehouden en van drie Oberwolfach workshops Applied Probability (1994, 1998 en 2003). Bij deze laatste bijeenkomsten was Arie de initiatiefnemer van de populaire muziekavonden op de donderdag.

Privéleven

De diepgang die Arie aan de dag legde in de wiskunde was ook typerend voor de activiteiten die hij in zijn privéleven ontplooi de. Hij was een enthousiast fietser, wandelaar en liefhebber van de prachtige duinen, zee en strand in zijn woonomgeving. Kunst en cultuur, met name het zingen en later het schilderen en dichten, waren zijn echte passie. Vrijwel zijn hele leven zong Arie in een koor, samen met zijn vrouw Marina. Dit alles deed hij met een enorme intensiteit en ook op deze gebieden wilde hij het 'naadje van de kous' weten.

Rond zijn pensionering in 2005 werd Arie getroffen door de ziekte van Parkinson. Dit belemmerde hem niet vanuit zijn zo geliefde huis in Castricum actief te blijven in de wetenschap. Ook het zingen was in deze

moeilijke levensfase een grote steun. Toen hij niet meer naar het koor kon, liet hij een professionele zangeres thuis komen.

De laatste jaren van zijn leven ging Arie steeds meer op in zijn hobby's schilderen en dichten. Vele schilderijen heeft hij gemaakt, de meeste hadden als onderwerp 'duinen en zee'. Op de overlijdensannonce stond zijn gedicht *Op het stille strand*.

Met zijn heengaan verliezen wij een markante persoonlijkheid, een gedreven en excellent wetenschapper, die in zijn leven – van jong tot oud – zijn eigen, soms eigenzinnige, keuzes bewust en weloverwogen heeft gemaakt. ☾

Met dank aan Ad Hordijk (broer) en Erik Hordijk (zoon) voor informatie over Aries jeugd en voor enkele foto's.

Referenties

- 1 E. Altman, B. Gaujal en A. Hordijk, Multimodularity, convexity, and optimization properties, *Mathematics of Operations Research* 25 (2000), 324–347.
- 2 E. Altman, B. Gaujal en A. Hordijk, Balanced sequences and optimal routing, *Journal of the ACM* 47 (2000), 752–775.
- 3 A. A. Borovkov en A. Hordijk, Characterization and sufficient conditions for normed ergodicity of Markov chains, *Advances in Applied Probability* 36 (2004), 227–242.
- 4 R. Dekker, *Denumerable Markov Decision Chains: Optimal Policies for Small Interest Rates*, proefschrift Universiteit Leiden, 1985.
- 5 N. M. van Dijk, *Controlled Markov Processes: Time-Discretization; Networks of Queues*, proefschrift Universiteit Leiden, 1983.
- 6 F. A. van der Duyn Schouten, *Markov Decision Processes with Continuous Time Parameter*, proefschrift Universiteit Leiden, 1979.
- 7 A. Federgruen, A. Hordijk en H. C. Tijms, Denumerable state semi-Markov decision processes with unbounded costs, average cost criterion, *Stochastic Processes and their Applications* 9 (1979), 223–235.
- 8 A. Gajrat en A. Hordijk, Fluid approximation of a controlled multiclass tandem network, *Queueing Systems* 35 (2000), 349–380.
- 9 Th. P. Hill en A. Hordijk, Selection of order of observation in optimal stopping problems, *Journal of Applied Probability* 22 (1985), 177–184.
- 10 A. Hordijk, Axiom systems for topological semifields, *Nieuw Archief voor Wiskunde* 3/15 (1967), 140–145.
- 11 A. Hordijk, Dynamic programming and Markov potential theory, *Mathematical Centrum Tract* 51 (1974), second edition (1977).
- 12 A. Hordijk, Regenerative Markov decision models, *Mathematical Programming Studies* 6 (1975), 49–72.
- 13 A. Hordijk, From linear to dynamic programming via shortest paths, *Proceedings of the Bicentennial of the Wiskundig Genootschap, MC Tract* 101 (1979), 213–231.
- 14 A. Hordijk, E. Altman en B. Gaujal, *Discrete-Event Control of Stochastic Networks: Multimodularity and Regularity*, Lecture Notes in Mathematics 1829, Springer, Berlin, 2003.
- 15 A. Hordijk en N. van Dijk, Networks of queues, in: *Modelling and Performance Evaluation Methodology*, Lecture Notes in Control and Information Sciences 60 (1984), 151–205.
- 16 W. Hordijk, A. Hordijk en B. Heidegott, A genetic algorithm for finding good balanced sequences in a customer assignment problem with no state information, *Asia-Pacific Journal of Operational Research* 32 (2015), 1550015.
- 17 A. Hordijk, D. L. Iglehart en R. Schassberger, Discrete time methods for simulating continuous time Markov chains, *Advances in Applied Probability* 8 (1976), 772–788.
- 18 A. Hordijk en L. C. M. Kallenberg, Linear programming and Markov decision chains, *Management Science* 25 (1979), 352–262.
- 19 A. Hordijk en L. C. M. Kallenberg, Constrained undiscounted stochastic dynamic programming, *Mathematics of Operations Research* 9 (1984), 276–289.
- 20 A. Hordijk en G. Koole, On the optimality of the generalized shortest queue policy, *Probability in the Engineering and Informational Sciences* 4 (1990), 477–487.
- 21 A. Hordijk en J. B. Lasserre, Linear programming formulation of MDP's in countable state space: the multichain case, *Mathematical Methods of Operations Research* 40 (1994), 91–108.
- 22 A. Hordijk en M. L. Puterman, On the convergence of policy iteration in finite state undiscounted Markov decision processes: the unichain case, *Mathematics of Operations Research* 12 (1987), 163–176.
- 23 A. Hordijk, P. J. Schweitzer en H. C. Tijms, The asymptotic behavior of the minimal total expected cost for the denumerable state Markov decision model, *Journal of Applied Probability* 12 (1975), 298–305.
- 24 A. Hordijk en K. Sladky, Sensitive optimality criteria in countable state dynamic programming, *Mathematics of Operations Research* 2 (1977), 1–14.
- 25 A. Hordijk en F. Spieksma, Constrained admission control to a queueing system, *Advances in Applied Probability* 21 (1989), 409–431.
- 26 A. Hordijk en A. A. Yushkevich, Blackwell optimality, Chapter 8 in: *Handbook of Markov Decision Processes: Methods and Applications*, Kluwer, 2002.
- 27 L. C. M. Kallenberg, *Linear Programming and Finite Markovian Control Problems*, proefschrift Universiteit Leiden, 1980.
- 28 G. M. Koole, *Stochastic Scheduling and Dynamic Optimization*, proefschrift Universiteit Leiden, 1992.
- 29 D. A. van der Laan, *The Structure and Performance of Optimal Routing Sequences*, proefschrift Universiteit Leiden, 2003.
- 30 H. Leahu, Bernd Heidegott and Arie Hordijk: Perturbation analysis of waiting times in the G/G/1 queue, *Discrete Event Dynamic Systems* 23 (2013), 277–305.
- 31 N. Leder, B. Heidegott en A. Hordijk, An approximation approach for the deviation matrix of continuous-time Markov processes with application to Markov decision theory, *Operations Research* 58 (2010), 918–932.
- 32 J. A. Loeve, *Markov Decision Chains with Partial Information*, proefschrift Universiteit Leiden, 1995.
- 33 O. Passchier, *The Theory of Markov Games and Queueing Control*, proefschrift Universiteit Leiden, 1996.
- 34 N. V. Popov, *Analysis of Face-Homogeneous Random Walks on Low Dimensional Lattices*, proefschrift Universiteit Leiden, 2003.
- 35 A. Ridder, *Stochastic Inequalities for Queues*, proefschrift Universiteit Leiden, 1987.
- 36 F. M. Spieksma, *Geometrically Ergodic Markov Chains and the Optimal Control of queues*, proefschrift Universiteit Leiden, 1990.

Marten Wortel

*Department of Mathematics and Applied Mathematics
University of Pretoria
marten.wortel@up.ac.za*

Column Wiskundigen in den vreemde

De zon schijnt bijna altijd

In deze rubriek doen wiskundigen verslag van hun ervaringen als wetenschapper in den vreemde. Marten Wortel verblijft sinds 2014 in Zuid-Afrika, eerst als postdoc aan de North-West University in Potchefstroom en sinds 2018 als universitair docent aan de University of Pretoria.

In 2014 ben ik voor het eerst naar Zuid-Afrika gekomen, als postdoc bij de North-West University in Potchefstroom. De Potchefstroom campus is voortgekomen uit een theologische school, en deze wortels zijn nog zeer herkenbaar: Potchefstroom is voor Nederlandse begrippen extreem religieus. In Potchefstroom staat op ongeveer elke hoek van de straat een kerk, en de stafvergaderingen op het wiskundedepartement beginnen met een korte voorlezing uit de bijbel. De Potchefstroom campus is ook zeer Afrikaans. Alle colleges zijn in het Afrikaans, en bij elk college zit een tolk die het college vertaalt in het Engels, zodat de weinige studenten (ongeveer 10 procent) die Afrikaans niet machtig zijn toch het college kunnen meekrijgen via een koptelefoon. Afrikaans is overigens vrij makkelijk te leren, het is een zeer versimpelde versie van Nederlands. Na drie maanden in Potchefstroom was ik al comfortabel met de taal.

In 2018 ben ik begonnen als universitair docent (lecturer) bij de University of Pretoria. Alhoewel Pretoria het meest Afrikaanse gedeelte is van de Johannesburg-Pretoria-metropool (Johannesburg is Engelser), is het beduidend minder Afrikaans dan Potchefstroom. Ongeveer de helft van de studenten heeft een Afrikaanse achtergrond, en tot voor kort was de universiteit tweetalig, maar inmiddels zijn alle colleges uitsluitend in het Engels. Engels is voor de meeste mensen niet de moedertaal, maar bijna iedereen krijgt genoeg Engels mee op de middelbare school om goed genoeg Engels te spreken en te verstaan.

Het weer in Zuid-Afrika is erg prettig. Tussen mei en augustus is het koud als de zon onder is, maar overdag is het altijd warm, en de zon schijnt bijna altijd. Alleen in de zomer regent het af en toe. In de zomer wordt het overdag regelmatig rond de 35 graden, maar omdat het helemaal niet vochtig is, is dat prima uit te houden.

Zuid-Afrika schijnt erg onveilig te zijn, en dat kun je zien aan het feit dat elk huis omringd is door een hek met daarop vaak ook nog prikkeldraad. Maar ik heb zelf nog geen criminaliteit meegemaakt. Ik woon op ongeveer een half uur lopen van de universiteit, dus elke dag loop ik lekker in de zon van en naar de universiteit. Fietspaden zijn er helaas niet.

Vergeleken met andere universiteiten in Zuid-Afrika is onze universiteit heel goed, maar omdat het gemiddelde niveau van

de middelbare scholen bedroevend laag is in Zuid-Afrika, zijn de studenten minder goed dan in Nederland, maar wel beter dan de studenten op de University of Kent, een gemiddelde universiteit in Engeland waar ik eerder postdoc was. Veel wiskundevakken worden niet alleen aan wiskundestudenten gegeven, maar ook aan veel andere studenten van de faculteit natuurwetenschappen. Zo geef ik zelf al een paar jaar een tweedejaars calculusvak, met drie docenten voor ongeveer 450 studenten. Op de ingenieursfaculteit heb ik ook eens een eerstejaars calculusvak gegeven met zes docenten voor ongeveer 1400 studenten. Je geeft dan college voor rond de 300 studenten.

In het begin van de pandemie in 2020 zijn we overgeschakeld op online lesgeven, net zoals vele andere universiteiten in de wereld. Een groot probleem in Zuid-Afrika is echter dat veel studenten slecht of geen toegang hebben tot stabiel internet, en er zijn ook veel studenten die alleen een mobiele telefoon hebben, maar geen computer of laptop. Inmiddels heeft de universiteit veel studenten een laptop te leen gegeven, maar vooral in het begin was het om deze reden onmogelijk om verplichte online sessies te organiseren. Daarom hebben we in het begin vooral heel veel video's gemaakt en werden de online sessies voornamelijk gebruikt als vraag-en-antwoordsessies. Vanwege het slechte internet is het ook onmogelijk om tentamens online te surveilleren, waardoor de online tentamens natuurlijk erg onbetrouwbaar waren. Ik heb er dan ook voor gekozen om de tentamens van juli 2020 uit te stellen tot januari 2021, wat ook verre van een ideale oplossing bleek te zijn. Dit jaar was het plan om het onderwijs online te doen en het tentamen op de campus, maar de derde golf gooide roet in het eten en uiteindelijk moest het tentamen in juli 2021 toch online. In een poging om de betrouwbaarheid zo hoog mogelijk te maken hebben we toen een aantal verschillende versies van het tentamen geschreven, en het opgedeeld in drie delen, maar het blijft natuurlijk verre van waterdicht. ☼



Marten Wortel (rechts) speelt een spelletje op het gras voor de campus

In de verdediging

| In defence

Pas gepromoveerden brengen hun werk onder de aandacht. Heeft u tips voor deze rubriek of bent u zelf pas gepromoveerd? Laat het weten aan onze redacteur.

Redacteur: Nicolaas Starreveld
FNWI, Universiteit van Amsterdam
Postbus 94214
1090 GE Amsterdam
verdediging@nieuwarchief.nl



Statistical Inverse Problems for Population Processes

Birgit Sollie

In June 2021 Birgit Sollie from the Vrije Universiteit Amsterdam successfully defended her PhD thesis. Her thesis has title *Statistical Inverse Problems for Population Processes* and she carried out her research under the supervision of Prof.dr. Mathisca de Gunst (VU) and Prof.dr. Michel Mandjes (UvA).

During her PhD Birgit worked on population processes. In particular, she studied population processes where the parameters depend on a background process. She also developed a model, relying on quasi birth-death processes, to model RNA transcription.

A population evolving

Population processes describe how a population evolves over time by modelling their growth as a function of random events. Population processes can be used to study various kinds of populations, of people or animals, but also of molecules in a cell, or even the number of visits to a website. An example is a population where individuals die at rate μ and new individuals are born at rate λ . In this model, if $\mu > \lambda$ then the population will eventually die out since individuals die at a higher rate than new individuals are born.

Birgit studied population processes where the parameters depend on some unobserved *background* process. In general, populations evolve in an environment, think for example of micro-organisms living in the human body. Complete knowledge of the environment in which a population grows is in most cases unavailable, and measurements come mainly from the population. This is why in many models the environment is modelled as a background process which affects the population and is in principle considered to be unobservable.

In practical applications, where the environment affects the birth and death rates, the two-parameter model above may be inadequate. Think for example of a population of animals whose welfare depends on food availability. By adding a background process to the model this dependence can be taken into account. The background process could be considered to have two states, one for the case of high food availability and one for low. When the background process is in state 'low' then the birth parameter λ takes some value λ_1 and the death parameter some value μ_1 . When in state 'high' then these parameters are equal to λ_2 and μ_2 , respectively. This background process alternates between the two states at random moments in time. The time between two switches is considered to follow an exponential distribution. For the interested readers, the background process is thus a two-state Markov process. In Figure 1 below we present a realization of such a population process.

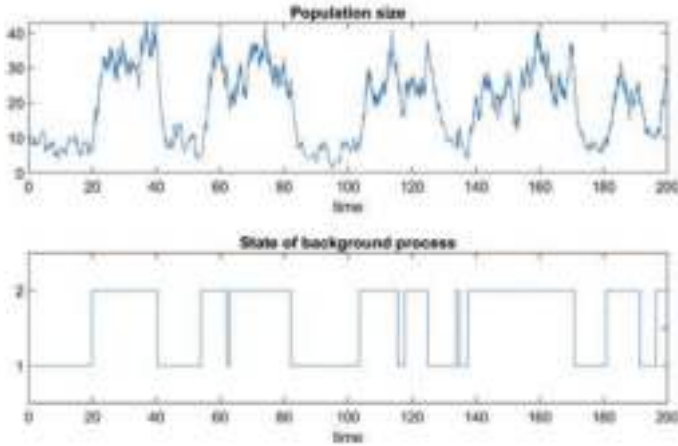


Figure 1 Upper panel: number of individuals in the population. Lower panel: state of the background process. Depending on the state of the background process the population process grows differently.

You can think of many more examples of external conditions, like temperature affecting the spread of bacteria or weather conditions affecting the mobility of individuals.

A Markovian world

Birgit worked with a class of models called Markov-modulated Independent Sojourn Processes (MMIS). These models resemble the model described above but are more general. In an MMIS the population process has two parameters, a birth parameter λ , which determines the rate of births of new individuals, and a lifetime parameter μ , which determines how long individuals live. Moreover, new individuals are born according to a Poisson Process with parameter λ and have a lifetime that follows an exponential distribution with parameter μ .

In an MMIS there is also a background process, which is called the modulating process. In Birgit's work the modulating process is considered to be a continuous time Markov-process, denoted by $\{X(t)\}_{t \geq 0}$, which takes values in a finite state space $\{1, \dots, d\}$. This process determines the value of the birth rate λ . As long as X is in state i , then new individuals are born according to a Poisson Process with parameter λ_i . In Birgit's research the lifetime parameter μ is taken to be constant, thus not varying as the background process changes.

The question that is central in Birgit's research is the following: if we have observations of the population process $\{M(t)\}_{t \geq 0}$, where $M(t)$ denotes the number of individuals in the population at time t , is it possible to make accurate estimates of the parameters λ_i , μ , and the parameters (transition rates and stationary probabilities) of the background process?

Birgit developed an algorithm, based on the Expectation-Maximization algorithm (EM), to determine such estimates. Let's have a look at the basic ideas behind the algorithm. All the parameters that need to be estimated, i.e. the rates λ_i and μ , the transition rates and the stationary probabilities of the background Markov process, are collected in one vector-parameter θ . Furthermore, only finitely many observations of the population process are available, denoted by $m_n = (M(t_1), M(t_2), \dots, M(t_n))$. Two more quantities are also considered, namely (X, A) , which describe the behavior of the background process and of all the births that occurred in the time intervals $[t_i, t_{i+1}]$, $i = 1, \dots, n-1$. These are both random variables

since they describe the unobserved behavior in between each pair of observations of the population process. The key in Birgit's analysis is to extract as much information as possible for (X, A) from the finitely many observations in m_n .

The EM algorithm works iteratively. Each iteration consists mainly of two steps, first considering an expectation and afterwards solving a maximization problem. The algorithm will work with a likelihood function which describes the joint probabilities of the observations m_n and the random variables (X, A) , namely,

$$\mathcal{L}(\theta | m_n, A, X) = P_\theta(M = m_n, A, X) = P_\theta(M = m_n | A, X)P_\theta(A, X).$$

This likelihood function is a function of the parameter θ , and it is also a random variable since (X, A) are random. As a reminder, the vector-parameter θ contains all the parameters of the model that need to be estimated from the observations. The addition of the random vector in the likelihood function is necessary. A typical likelihood function with respect only to m_n is not easy to work with in this model due to the unobserved data.

Each iteration of the algorithm will yield a better estimate for the parameter θ . In each iteration we start with an estimate θ' for θ , which is obtained from the previous iteration of the algorithm. Then an expectation of the log-likelihood function is estimated over the random variables (X, A) , but with respect to the new estimate θ' . This expectation is given below,

$$\mathbb{E}_{\theta'}(\log \mathcal{L}(\theta | m_n, A, X)). \quad (1)$$

This is a deterministic function of θ . In the maximization step the algorithm updates the estimate θ' to $\tilde{\theta}$, which will be used in the next iteration. The new estimate $\tilde{\theta}$ is determined as the solution to a maximization problem, namely,

$$\tilde{\theta} = \operatorname{argmax}_{\theta} (\mathbb{E}_{\theta'}(\log \mathcal{L}(\theta | m_n, A, X))). \quad (2)$$

The idea is thus to find the value of the parameter that maximizes the expected likelihood to obtain the observed data m_n under the assumption that the population evolves as an MMIS. For the exact technical steps in order to compute the expectation in (1) and the parameter $\tilde{\theta}$ in (2) we refer the interested reader to Birgit's thesis.

Populations come in contact

In the previous section we discussed the case of a single population which does not interact with other populations. In practice, populations interact with each other, as in the case of migration. Think for example of bacteria which can migrate from one cell to other cells. Birgit also studied a network-based model, where each node corresponds to a population process. Individuals from each node can migrate to other populations depending on the underlying structure of the network, namely, individuals can move between two populations if there is an edge connecting the corresponding nodes. The network-based model that Birgit studied is a discrete-time model, and not a continuous-time model as the single population model discussed above. In such a model a vector $\mathbf{M}(k) = (M_1(k), \dots, M_n(k))$ describes the population process at time k , and $M_j(k)$ describes the population process at time k and node j .

As before, in this network-based model there is a background process affecting the parameters of the population processes. The question is again to estimate the birth-lifetime parameters, and the transition rates and stationary probabilities of the background pro-

cess, solely from observations of the population process. Unfortunately, the EM algorithm described above can't be implemented because some additional complications arise due to the network structure. The major implication concerns estimating the transition probabilities of the vector-population process, defined as

$$t_i(\mathbf{m}' | \mathbf{m}) = P(\mathbf{M}(k+1) = \mathbf{m}' | \mathbf{M}(k) = \mathbf{m}, X = i), \quad i = 1, \dots, d, k = 1, 2, \dots, \quad (3)$$

where X denotes the background process which can be in one of the states $\{1, \dots, d\}$. To compute these probabilities for an arbitrary network all possible transitions between populations need to be taken into account. In single population processes this difficulty is absent, and in small-scale networks an exact analysis is possible. But as the size of the network grows, new techniques are needed in order to deal with the increasing complexity.

Birgit relied on the *saddlepoint method* to develop an accurate approximation for the probabilities $t_i(\mathbf{m}' | \mathbf{m})$, $i = 1, \dots, d$. Shortly stated, the saddlepoint method approximates a random variable's probability mass function through its moment generating function. When analyzing Markovian populations interacting on a network it is usually possible to determine such moment generating functions, which makes the saddlepoint method suitable to approximate the desired transition probabilities in (3).

Using a suitably defined likelihood function, and the approximation obtained from the saddlepoint method, estimates for the desired parameters can be obtained. The likelihood function used in the network-based model is the typical likelihood function with respect to the observations of the vector-population process. This is a major difference when compared to the likelihood function considered in the single population in continuous time, defined in (1). When using the EM algorithm, a likelihood function is used that is based on both observed and unobserved data. And the likelihood function is maximized iteratively. In the network-based model it is not possible to use the EM algorithm due to the complexity of the model. Hence the likelihood function is based only on the observed data, and maximized numerically to obtain the parameter estimates.

RNA transcription

An application that Birgit worked on concerns modelling the population of RNA molecules in single cells. The synthesis (or birth) of a single RNA molecule, which is called transcription, is a stochastic process regulated by an on/off mechanism and follows a sequential process consisting of multiple steps. These steps are the following:

- The molecule RNA polymerase binds to the DNA and slides along the DNA to find a transcription start site, called promoter.
- Once it has found a start site it binds firmly and the transcription begins.
- The RNA polymerase moves along the gene while copying the genetical code step by step.
- Once it reaches the stop site, it releases itself and the new RNA transcript from the DNA.

This process can be repeated to produce more RNA molecules. The RNA transcription can be controlled by a process called gene repression. The promoter can bind to repressors for a period of time in which RNA polymerase cannot reach the start site to initiate transcription. This causes the promoter to switch between an active state, free from repressors, and an inactive state, bound by repressors (which is the background on/off mechanism in the mathematical model). Using a class of models called quasi-random birth-death processes, which are similar to, but more general models than the MMIS described above, Birgit developed and analyzed a model for the dynamics of a population of RNA molecules in single living cells.

The more personal aspect

Before we conclude this article we would like to give the word to Birgit.

Birgit, would you like to share some memories with us?

"I have many nice memories from my PhD years. I enjoyed all the collaborations, and meeting so many nice people. I was lucky to be part of the NETWORKS program, where I have met a lot of fellow-researchers. I have nice memories of the various NETWORKS events, where I learned about interesting topics, but were also full of fun. We went for nice walks and played many boardgames together. I remember one training week in a conference center with bowling lanes. We played every night, which even caused me a sore wrist for a few months."

Were you also involved in some other activities you would like to share with the readers?

"I have been a board member of European Women in Mathematics – The Netherlands (EWM-NL). It was my first experience as a board member and I learned a lot from it. I co-organized for example a workshop on Work-Life balance, and I was coordinating the EWM-NL mentor network. Through this network, female mathematicians can sign up to be matched with a mentor for advice on things related to their career."

Concluding

Birgit's research focused on population processes where the parameters depend on a background process. She developed methods, relying on the Expectation-Maximization algorithm and the saddlepoint method, in order to estimate the parameters of both the population and the background process. Finally, Birgit developed and analyzed a model for RNA transcription using quasi birth-death processes.

Since April Birgit is working as a postdoctoral researcher at the Department of Epidemiology and Data Science of the Amsterdam UMC. Her current research focuses on HPV (human papillomavirus), which is a sexually transmitted virus that causes various diseases, most prominently cervical cancer. Birgit works on HPV transmission models and cost-effectiveness assessments of HPV vaccination strategies. We wish Birgit all the best with her further research. ☺

Boekbesprekingen

| Book Reviews

Redactie: Hans Cuypers en Hans Sterk

Review Editors NAW - MF 5.092
 Faculteit Wiskunde & Informatica
 Technische Universiteit Eindhoven
 Postbus 513
 5600 MB Eindhoven
reviews@nieuwarchief.nl
www.win.tue.nl/wgreview



A.A. Ivanov

The Mathieu Groups

Cambridge Tracts in Mathematics 214
 Cambridge University Press, 2018
 xi + 171 p., prijs £95.00
 ISBN 9781108429788

In het jaar 1873 (inderdaad, honderd-en-achtenveertig jaar geleden) zag het artikel ‘Sur la fonction cinq fois transitive de 24 quantités’ het licht in het *Journal de Mathématiques Pures et Appliquées* 18, pp. 25–46. De auteur was Émile Léonard Mathieu (1835–1890). Niet alleen ‘zijn’ groep M_{24} werd daarin geboren, maar ook over de kleinere M_{12} is daar het nodige te vinden. De groep M_{24} (met $2^{10} \cdot 3^3 \cdot 5 \cdot 7 \cdot 11 \cdot 23$ elementen) opereert vijfvoudig transitief op een verzameling van 24 symbolen. In een kort voorwoord zet Ivanov zijn bedoelingen betreffende het boek uiteen. Namelijk, dat M_{24} en diens ondergroepen deel uitmaken van de zogenaamde Ivanov–Shpektorov-theorie van meetkunde, zie *Nagoya Mathematical Journal* 176 (2004), pp. 19–98. Die theorie is ontwikkeld om grote sporadische simpele groepen te identificeren en te construeren; men denke aan het Baby Monster, de vierde Janko-groep en het Fischer–Griess Monster. De theorie droeg ook bij aan het definitieve bewijs van het zogeheten Y-vermoeden voor het Fischer–Griess Monster, lang ontoegankelijk via andere technieken. Wat betreft M_{24} , de bewuste theorie verbindt deze met bekende structuren van Steiner-systemen op 24 punten en de Golay-code, aldus resulterende in een frisse, nieuwe en vernieuwende kijk op bekende oudere zaken en structuren.

Beste lezer, bovenstaande regels geven een vrije vertaling weer van vrijwel het gehele voorwoord van Ivanovs boek. Nu wat dingen als smaakmaker. In hoofdstuk 1 staat dat M_{24} optreedt als automorfismengroep van de heden ten dage welbekende Golay-code. Het boek is doordrenkt van zogenaamde ‘incarnations’, dat wil zeggen een gegeven abstracte eindige groep wordt onder de loep genomen via verschillende zienswijzen en daaruit worden dan structuren opgediept. Denk bijvoorbeeld aan de Cayley-representatie van zo’n groep, aan trouwe met zo’n groep isomorfe matrixgroepen, aan het optreden van zo’n groep als permutatiegroep op een zeker aantal symbolen, en wat dies meer zij. Zogeheten ‘toevallige isomorfismen’ worden opgespoord, ontrafeld en verklaard. Bijvoorbeeld: het is al lang bekend dat de groepen $\text{PSL}(3,2)$ en $\text{PSL}(2,7)$ isomorf zijn, men zie onder andere Satz II.6.14(4) in Hupperts boek *Endliche Gruppen, I*. Maar een betreffende isomorfie afbeelding vinden en maken is een heikele kwestie! Aanvankelijk weten we namelijk dat elk van de simpele groepen $\text{PSL}(3,2)$ en $\text{PSL}(2,7)$ 168 elementen heeft, maar aantonen dat er (op isomorfie na) precies één zo’n groep met die orde 168 bestaat is een ander verhaal; zie de details daaromtrent in Satz 6.15 in Hupperts boek. En wat betekent die isomorfie nu eigenlijk? Ivanov vertelt het u. Ook bespreekt hij in hoofdstuk 3 een bijzonder automorfisme van het semidirecte product $2^3 : \text{PSL}(3,2)$, waarbij $\text{PSL}(3,2)$ op een elementair abelse groep van orde 8 opereert onder conjugatie-actie. En, wat verderop, te denken van sectie 3.5: ‘Another look at the isomorphism between $\text{PSL}(3,2)$ and $\text{PSL}(2,7)$ ’? Prachtig allemaal, maar niet eenvoudig. In hoofdstuk 3 wandelen we ook via de alter-

nerende groep A_7 op 7 symbolen en het Fano-vlak naar sectie 3.7, geheten (vertaald): ‘ $\text{PSL}(4,2)$ is isomorf met de alternerende groep A_8 op 8 symbolen’. Verderop in hoofdstuk 3 komen dan ‘point stabilizers’ aan de orde, alsmede het zogeheten ‘outer automorphism’ van de symmetrische groep S_6 op zes symbolen, ook zo’n ding dat heel bijzonder is. In hoofdstuk 6 vinden we beschrijvingen van de maximale ondergroepen van M_{24} , en in hoofdstuk 8 een up-to-date gebrachte beschrijving van de Held-simpele groep He , genoemd naar Dieter Held (1936), die hem vond bij de classificatie van de verzameling van de eindige simpele groepen waarbij de centralisator van een involutie isomorf is met die van een transvectie uit $\text{PSL}(5,2)$. Die verzameling bestaat uit de groepen $\text{PSL}(5,2)$, M_{24} en He .

Het boek bestaat uit tien hoofdstukken en is overal doordeseemd van constructies en optredende verbanden, zoals bijvoorbeeld ook met grafen, amalgamen, en universele completering. Het boek is te zien als een encyclopedie met uitgewerkte feiten. Zelfs K3-oppervlakken worden daarbij niet vergeten. Definities van begrippen, op welk niveau dan ook, zult u nauwelijks aantreffen. Ik vond het boek uniek in zijn soort; geschikt voor specialisten en (zeer) gevorderde studenten; vergelijk het boek ook eens met M. Aschbacher’s boek *Sporadic Groups*, ook uitgegeven bij Cambridge University Press. Maar als men zich in Ivanovs boek wil verdiepen, kijk dan in de index en zoek alle aldaar vermelde begrippen elders eerst op, op een eenvoudiger niveau. Dat verrijkt ongetwijfeld uw kennis en waardering voor de materie. Doe zulks ook door de bronnen in de ‘References’ ter hand te nemen.

Rob van der Waal



Judith R. Goodstein

**Einstein's Italian Mathematicians:
Ricci, Levi-Civita, and the Birth of General
Relativity**

American Mathematical Society, 2018
xiii + 211 p., prijs \$35.00
ISBN 9781470428464

In November of 1915 Albert Einstein found his famous equation

$$R_{\mu\nu} - \frac{1}{2}g_{\mu\nu}R + g_{\mu\nu}\Lambda = \kappa T_{\mu\nu}$$

for the Lorentzian metric tensor field of physical spacetime (although in his original version the cosmological constant Λ was taken zero). This enabled him to explain accurately the observed discrepancy of 43 arcseconds per century in the perihelion precession of Mercury. Einstein's work is rightfully considered a landmark in the history of physics, comparable with Newton's work on classical mechanics (deriving for example the three Kepler laws for planetary motion) or the fundamental work on quantum mechanics by Heisenberg, Born, Dirac, Pauli and Schrödinger (explaining for example the Bohr–Sommerfeld quantization rules for the hydrogen atom).

The mathematical language Einstein needed for general relativity was the differential geometry of Gauss (his Theorema Egregium for surfaces in Euclidean space) and Riemann (a purely intrinsic

approach for curvatures of metric spaces of arbitrary dimension). The habilitation lecture by Riemann in June of 1854 is like a beautiful impressionistic painting. It is brilliant, but there were no proofs and also hardly any formulas, partly due to the restrictions imposed on him to present a lecture for a fairly general audience.

In the autumn of 1858 the Italian mathematicians Enrico Betti, Francesco Brioschi and Felice Casorati (the former two mathematical friends and the latter student and assistant of Brioschi) traveled through Europe, visiting the mathematical centers of Berlin, Göttingen and Paris. The relationship between Betti and Riemann was deepened a few years later, when Riemann stayed for a longer period in the Mediterranean Pisa seeking relief for his declining health. The contact between Betti and Riemann has been a trigger in the formation of the famous Italian school of algebraic geometry (with illustrious names like Castelnuovo and Enriques), but likewise the Italian differential geometry was going to flourish (with protagonists like Ricci and Levi-Civita). Thus is suggested from the (partial) mathematical genealogy given in Figure 1.

The habilitation lecture of Riemann was published posthumously in 1867, and initial steps towards further understanding of what is now called Riemannian geometry were taken by Elwin Christoffel in 1869 before Ricci, Levi-Civita and Bianchi later joined. In 1875 Ricci completed in Pisa his dissertation on Fuchsian differential equations with Dini and a year later he finished his habilitation with Betti on a problem posed by Riemann concerning hypergeometric functions, as Levi-Civita writes in the obituary for Ricci. In 1878–1879 Ricci went to Munich as a postdoc with Felix Klein, and after another year in Pisa he got in 1880 a position as associate professor in Padova, where he was going to stay the rest of his life. The research of Ricci from that time on focuses on *The Absolute Differential Calculus (The Calculus of Tensors)* or *Der Ricci-Kalkül*, as the titles of the later text books by Levi-Civita from 1926 and by Schouten from 1924, respectively, used to call it.

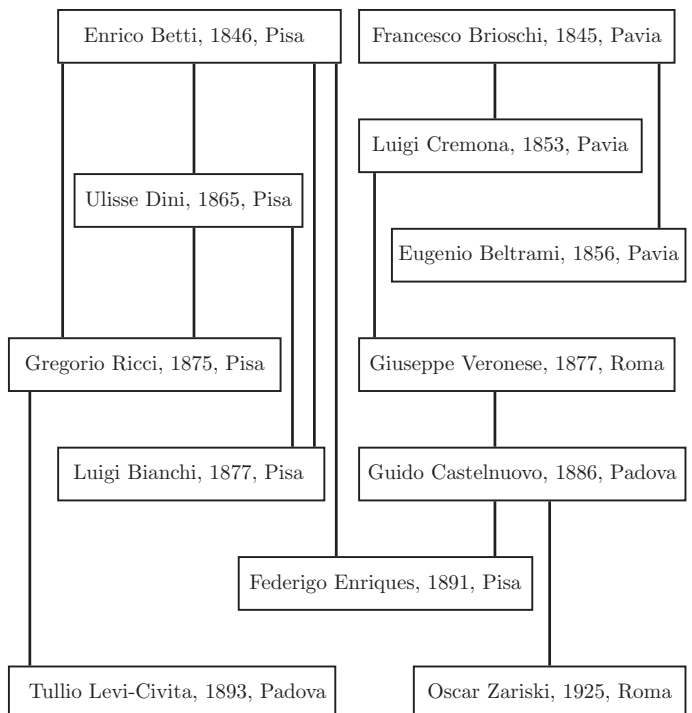


Figure 1

“The Ricci tensor was introduced by Ricci in 1904 with the hope that the integral curves for the principal directions of the Ricci tensor relative to the metric tensor would yield nice curves on the manifold, analogous to the lines of curvature on a surface in $\mathbb{R}^3$. For abstract Riemannian manifolds however Ricci was quite disappointed to find no good geometric interpretation of these Ricci curvature lines”, according to Marcel Berger in his *Panoramic View of Riemannian Geometry* of 2003. The differential (or second) Bianchi identities for the Riemann tensor were found (but not published) by Ricci in 1888, and were later rediscovered and published by Bianchi in 1902. In fact they had already been found before by Aurel Voss in 1880. The contracted Bianchi identities for the Ricci (or rather the Einstein) tensor were an important ingredient in understanding the ultimate form of the Einstein equation, because of the conservation of the energy-momentum tensor, as explained by Einstein in *The Meaning of Relativity* from 1921.

Levi-Civita wrote his dissertation on absolute invariants with Ricci in 1893. He was the only PhD student that Ricci would have. In 1897 Felix Klein invited Ricci to write a survey paper on absolute differential calculus for the *Mathematische Annalen*, which in fact appeared in collaboration with Levi-Civita in 1900. It would be the only joint paper for Ricci. In 1898 Levi-Civita was appointed as full professor in Padova, where he stayed until 1918 when he moved to Rome. Levi-Civita had a broad interest in mathematics and did for example important work in celestial mechanics (the Levi-Civita regularization for collisions in the three-body problem).

The focus of the book by Goodstein under review is primarily on the personal lives of Ricci (1853–1925) and Levi-Civita (1873–1941). The overall impression of Ricci is a family man (married with Bianca Bianchi in 1884, they got three children) and mathematically an original but also a rather introvert nature. Levi-Civita was mathematically the more extrovert one, with many international contacts, notably with Einstein in that remarkable year 1915, in a certain sense as successor of Marcel Grossmann, who had helped Einstein a few years before with mastering the necessary differential geometry (leading to the Entwurf theory). Levi-Civita married fairly late in 1914 with his former PhD student Libera Trevisani, who did work on the three-body problem. Despite her wish they did not have children together.

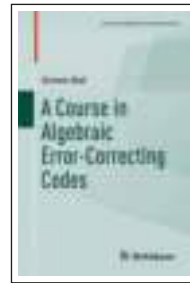
During his life Ricci had a rather difficult time getting recognition for his mathematics. He became full professor fairly late (age 37), and he engaged in several prize competitions, but was never successful. Levi-Civita had an easier start with his career and became full professor at the early age of 26. He travelled abroad quite often, and he had many international contacts. But things changed for both men towards the end of their lives.

In 1921 Einstein was invited by Enriques to lecture on general relativity. His three lectures took place in the prestigious University of Bologna. A few days later Einstein took the train to Padova, and gave a fourth lecture in the presence of Ricci, who had not been able to attend his talks in Bologna. “Introduced by Ricci, Einstein spoke for an hour, slowly, accurately, in Italian, with a scientific precision”, according to the local newspaper *Il Veneto*. Levi-Civita makes in his obituary for Ricci the comparison between Apollonius of Perga and Ricci. “The work of Apollonius on conics had to wait eighteen centuries before Kepler, Galileo and Newton made it of use for physics, while Ricci was more fortunate, in that he was able to witness the superb way in which his theories were put to work.”

For Levi-Civita the last years of his life were very difficult. In 1938, due to the racial laws of the Italian fascist regime of Mussolini, Levi-Civita was banished from the university for being Jewish. He found himself cut off from all that made life interesting to him. “The thing that left the strongest impression on my mother”, Libera Levi-Civita’s daughter Susanna Silberstein Trevisani (adopted by Libera in 1945) said decades later, “is that many mathematicians, even those with whom there had been a close bond of friendship, had ceased all contacts with Levi-Civita, as if they had never known him.” This was a hard blow for Levi-Civita, his health started declining and he died in December of 1941.

Susanna Silberstein was born probably in 1942, and died recently in April of 2020 in Rome according to her Memoria. Her entire family was murdered in Auschwitz in 1944. Through her Judith Goodstein got access to the scientific correspondence and private documents of Levi-Civita, as mentioned in the preface of the book.

I can certainly recommend the book by Judith Goodstein to those who are interested to read more about the personal lives of Gregorio Ricci and Tullio Levi-Civita. On their mathematics I found the book somewhat meager. But for example the obituaries for Ricci by Levi-Civita (luckily translated into English for people like me) and for Levi-Civita by William Hodge, added to the book in appendices, helped to compensate for that. *Gert Heckman*



Simeon Ball

A Course in Algebraic Error-Correcting Codes

Birkhäuser, 2020

xiii + 177 p., prijs €43,59

ISBN 9783030411527

The book offers an outstanding first course in algebraic coding theory and makes a very valuable contribution to the existing literature. It is conveniently organized into ten short chapters, each of which covers a different topic and has very distinctive learning objectives. The dependencies among chapters are summarized in a flow diagram at the beginning of the book, which greatly facilitates the lecturer in the course design process.

While the book was mainly designed as a first course, three of the ten chapters cover more advanced topics (codes from algebraic geometry, low density parity check codes, and codes over rings). These chapters can be efficiently used to spice up lectures or to encourage independent reading among students, making the book very ‘flexible’ and suitable for a large variety of curricula and for a broad readership. The students can easily determine which chapters can be read in autonomy thanks to the dependency diagram in the preface.

The book opens with a concise chapter on Shannon information theory, introducing the notions of entropy, channel, mutual information, and capacity. These foundational and fascinating concepts, which are often neglected in courses on algebraic coding theory, serve as a strong motivation for the study of error-correcting codes. They also show the link between probabilistic and alge-

braic methods in information technology, implicitly stressing the importance of interdisciplinary approaches to applied research and helping the students develop an open mindset.

The chapter on finite fields (Chapter 2) is particularly handy to ensure that students have the necessary background to understand and appreciate the theory of error-correcting codes. Even at universities where algebra dominates the undergraduate curriculum in mathematics, students greatly benefit from a recap on finite fields before seeing them into action.

The book is very clearly written and revisits even classical topics in an original way, offering concise and neat proofs. Both students and lecturers will greatly benefit from the clarity of exposition.

The author, Simeon Ball, is a prominent expert in coding theory, finite and real geometry, semifields, graph theory, and in the interactions among all these research areas. *Alberto Ravagnani*



Glen Van Brummelen

Trigonometry
A Very Short Introduction

Oxford University Press, 2020
xxii + 163 p., prijs £8.99
ISBN 9780198814313

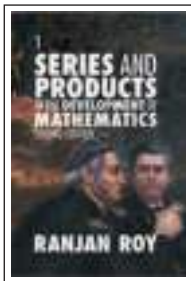
Dit boekje (het is inderdaad klein van formaat) is verschenen in de reeks *Very Short Introductions*, een reeks waarin al honderden ti-

tels op allerlei gebied zijn verschenen. Op wiskundegebied gingen in de reeks diverse wiskundigen Van Brummelen voor, zoals Timothy Gowers en Ian Stewart. Het boek is geen schoolboek goniometrie, zoals de titel misschien suggereert, maar een boek dat aan de hand van (wetenschappelijke) vragen uit het verleden ingaat op de rol en ontwikkeling van goniometrie en goniometrische functies. Het schakelt daarbij soepel tussen wiskundige en historische aspecten. De wiskundige uiteenzettingen schuwen de details niet en zijn geschreven in een heldere en goed toegankelijke stijl, ondersteund met vele illustraties. Bij elk hoofdstuk geeft de auteur per deelonderwerp aan waar de lezer verdere informatie kan vinden.

Het boek start met problemen bij Hipparchus (verduisteringen), Bressieu (de hoogte van een toren) en Sir William Thomson/Lord Kelvin (getijden), en bespreekt in de daarna volgende hoofdstukken de ontwikkeling van de relevante delen van de goniometrie, consequent de historische setting erbij betreffend: onder meer goniometrische formules, de rol van Taylorreeksen, de relatie met complexe getallen, bolmeetkunde, doorgaans inclusief elegante afleidingen.

Van Brummelen heeft al enkele uitvoeriger werken op zijn naam staan over verwante onderwerpen en mag wel tot de experts gerekend worden. Het is opmerkelijk hoe informatief dit boek in zo'n kort bestek weet te zijn. Ik denk dat het vooral van direct nut is voor leraren wiskunde. Het biedt hen op toegankelijke wijze (historische) achtergrond en context bij de leerstof waar ze vaak mee bezig zijn. In dit verband is vermeldenswaard dat de auteur bespreekt hoe rekenmachines goniometrische (functie)waarden berekenen. Ook kan het boek als ideeënbron voor leerlingenwerkstukken dienen. Het is voortreffelijk uitgegeven door Oxford University Press voor een uiterst vriendelijke prijs. *Hans Sterk*

Recent verschenen publicaties. Als u een van deze boeken wilt bespreken of als u suggesties heeft voor andere boeken voor deze rubriek, laat dit dan per e-mail weten aan reviews@nieuwarchief.nl.



Ranjan Roy

Series and Products in the
Development of Mathematics
Volume 1

Cambridge University Press, 2021
ISBN 9781108709453
[cambridge.org/9781108709453](https://www.cambridge.org/9781108709453)



Trevor Davis Lipscombe

Quick(er) Calculations

Oxford University Press, 2021
ISBN 9780198852650
global.oup.com/academic/product/quicker-calculations-9780198852650



James R. King

Geometry Transformed
Euclidean Plane Geometry Based on Rigid
Motions

American Mathematical Society, 2021
ISBN 9781470463076
bookstore.ams.org/amstext-51



Jean-Marie De Koninck, Nicolas Doyon

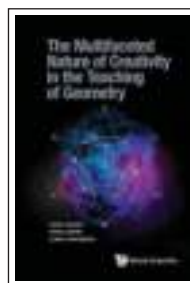
The Life of Primes in 37 Episodes

American Mathematical Society, 2021
ISBN 9781470464899
bookstore.ams.org/mbk-139



Raf Bocklandt
A Gentle Introduction to Homological Mirror Symmetry

Cambridge University Press, 2021
 ISBN 9781108728751
cambridge.org/9781108728751



Dorit Patkin, Atara Shriki, Ilana Levenberg
The Multifaceted Nature of Creativity in the Teaching of Geometry

World Scientific, 2020
 ISBN 9789811218743
worldscientific.com/worldscibooks/10.1142/11781



Kevin Broughan
Bounded Gaps Between Primes

Cambridge University Press, 2021
 ISBN 9781108836746
cambridge.org/9781108836746



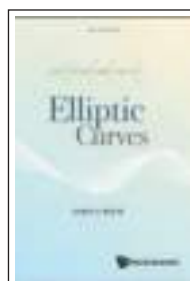
Jeremy Gray
Change and Variations
A History of Differential Equations to 1900

Springer, 2021
 ISBN 9783030705749
springer.com/9783030705749



Jessica Wynne
Do Not Erase
Mathematicians and Their Chalkboards

Princeton University Press, 2021
 ISBN 9780691199221
press.princeton.edu/books/hardcover/9780691199221/do-not-erase



James S. Milne
Elliptic Curves
2nd Edition

World Scientific, 2020
 ISBN 9789811221835
worldscientific.com/worldscibooks/10.1142/11870



Xuding Zhu, R. Balakrishnan
Combinatorial Nullstellensatz
With Applications to Graph Colouring

Chapman and Hall/CRC, 2021
 ISBN 9780367686949
routledge.com/9780367686949



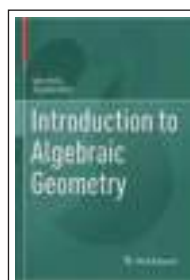
Benjamin Wardhaugh
Encounters with Euclid
How an Ancient Greek Geometry Text Shaped the World

William Collins, 2021
 ISBN 9780008299941
harpercollins.co.uk/9780008299941



Tom Chivers, David Chivers
How to Read Numbers

Weidenfeld and Nicolson, 2021
 ISBN 9781474619967
weidenfeldandnicolson.co.uk/titles/tom-chivers/how-to-read-numbers/
 9781474619967



Igor Kriz, Sophie Kriz
Introduction to Algebraic Geometry

Birkhäuser, 2021
 ISBN 9783030626433
springer.com/9783030626433

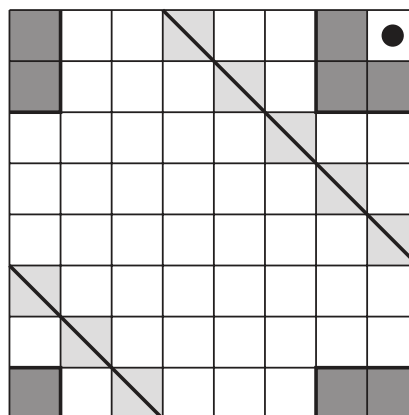
Problemen

| Problem Section

This Problem Section is open to everyone; everybody is encouraged to send in solutions and propose problems. Group contributions are welcome. We will select the most elegant solutions for publication. For this, solutions should be received before **15 October 2021**. The solutions of the problems in this issue will appear in one of the subsequent issues.

Problem A (proposed by Daan van Gent)

Write $T = (\mathbb{Z}/8\mathbb{Z})^2$ for the *torus chessboard*. For every square $t \in T$ its *neighbours* are the squares in the set $\{t+d \mid d \in D\}$ for $D = \{-1, 0, 1\}^2 \setminus \{(0, 0)\}$. A *line* is a set of squares of the form $\{t+nd \mid n \in \mathbb{Z}\}$ for $t \in T$ and $d \in D$. The following figure gives an example of the neighbours (coloured dark grey) of the dotted square, as well as an example of a line (coloured light grey). Disprove or give an example: There exists a pairing of neighbouring squares, i.e. a partitioning of T into sets $\{s, t\}$ of size 2 such that s and t are neighbours, such that every line contains a pair.



Problem B (proposed by Hendrik Lenstra)

Write φ for the Euler totient function. Determine all infinite sequences $(a_n)_{n \in \mathbb{Z}_{\geq 0}}$ of positive integers satisfying $\varphi(a_{n+1}) = a_n$ for all $n \geq 0$.

Problem C (proposed by Hendrik Lenstra)

Let R be a ring. We say $x \in R$ is a *unit* if there exists some $y \in R$ such that $xy = yx = 1$, and $x \in R$ is *idempotent* if $x^2 = x$. Show that if every unit of R is central, then every idempotent of R is central.

Edition 2021-2 The solutions of the June issue will appear in the December issue.

