

Inhoud | Contents

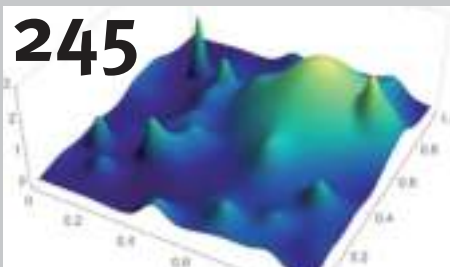
Artikelen | Features

- Onderwijs | Education**
 224 The state-of-the-art of mathematics teaching at the Dutch universities
Assessment panel for the cluster WO Mathematics
- Evenement | Event**
 230 The virtual EGMO: creative ways to address the disruption
Quintijn Puite, Sietske Tacoma
- De oplossing | The Solution**
 232 Parties a smidgen smaller
Ross J. Kang
- Onderzoek | Research**
 236 Stieltjes Prize 2018: Deformations and derived geometry
Joost Nuiten
- Column | Column**
 241 De Amerikaanse verkiezingen gepeild
Casper Albers
- Onderzoek | Research**
 245 Stieltjes Prize 2018–2019: Why stochastics? And why in Banach spaces? – Epidemic example
Ivan Yaroslavl'tsev
- Evenement | Event**
 251 The KWG PhD Prize
Raf Bocklandt
- Geschiedenis | History**
 258 Een wondermiddel tegen huichelarij, dweezucht, en ongebreidelde fantasie
Anne Por
- Geschiedenis | History**
 263 Roland Weitzenböck and World War II
Ineke Hilhorst, Teun Koetsier
- Evenement | Event**
 271 IMO 2020: Punten in de anderhalvemetersamenleving scheiden met een lijn
Jovan Gerbscheid
- Geschiedenis | History**
 274 A look at my paper with Hans, almost forty years later
F. Alberto Grünbaum

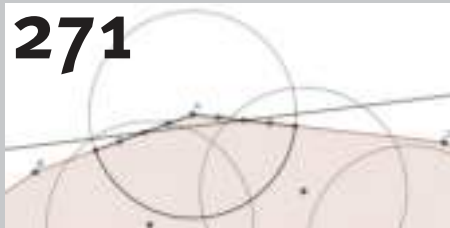
Rubrieken | Departments

- 219 Redactioneel
Raf Bocklandt
- 220 Agenda
Nikki Levering
- 221 Nieuws
Nikki Levering
- 240 Open podium
- 243 Proof by example: Annegret Burt-scher
Francesca Arici, Clara Stegehuis
- 254 Stoffelijke resten: Hofwijck
Cor Kraaikamp
- 261 Het keerpunt van Anjet Daanje
Daan Mulder
- 277 In de verdediging
Nicolaos Starreveld
- 280 Boekbesprekingen
Hans Cuypers, Hans Sterk
- 287 Problemen
Onno Berrevoets, Rob Eggermont, Daan van Gent

Uitgelicht



Ivan Yaroslavl'tsev, winnaar van de Stieltjes-prijs 2018–2019, vertelt over zijn onderzoek.



Jovan Gerbscheid, goudenmedaillewinnaar op de Internationale Wiskunde Olympiade, blikt terug op een van de opgaven.

Colofon

Het Nieuw Archief voor Wiskunde is een uitgave van het Koninklijk Wiskundig Genootschap en verschijnt vier maal per jaar. Het tijdschrift richt zich op eenieder die zich beroepsmatig met wiskunde bezighoudt, als academisch of industrieel onderzoeker, student, leraar, journalist of beleidsmaker. Het stelt zich ten doel te berichten over ontwikkelingen in de wiskunde in het algemeen en in de Nederlandse wiskunde in het bijzonder.

ISSN 0028-9825

Adres

Nieuw Archief voor Wiskunde
Centrum Wiskunde & Informatica
Postbus 94079, 1090 GB Amsterdam
tel. 020-5924288
redactie@nieuwarchief.nl
www.nieuwarchief.nl

Hoofredactie

Raf Bocklandt (r.r.j.bocklandt@uva.nl)
Robbert Fokkink (r.j.fokkink@tudelft.nl)

Eindredactie/Bladmanager

Fred Drissen (fred@nieuwarchief.nl)

Redactie

Francesca Arici (UL), Viktor Blåsjö (UU), Hans Cuypers (TU/e), Teun Koetsier (VU), Nikki Levering (UvA), Daan Mulder, Nicolaos Starreveld (UvA), Clara Stegehuis (UT), Hans Sterk (TU/e), Mark Timmer (UT)

Problemenrubriek (problems@nieuwarchief.nl)

Onno Berrevoets, Rob Eggermont en Daan van Gent

Bureau redactie

Claartje Ottens

Illustraties

Ryu Tajiri

Vormgeving

Susanne Laws (omslag, begeleiding binnenwerk)
Kitty Molenaar (ontwerp)

Druk

Veldhuis Media

Advertenties

advertenties@nieuwarchief.nl

Koninklijk Wiskundig Genootschap

www.wiskgenoot.nl

Platform Wiskunde Nederland

www.platformwiskunde.nl

European Mathematical Society

www.euro-math-soc.eu

International Mathematical Union

www.mathunion.org

Koninklijk Wiskundig Genootschap

Het Koninklijk Wiskundig Genootschap (KWG) is een landelijke vereniging van beoefenaars van de wiskunde. In 1778 opgericht onder de zinspreuk: 'Een onvermoeide arbeid komt alles te boven' is het 's werelds oudste nationale wiskundegenootschap. Leden ontvangen het Nieuw Archief voor Wiskunde als onderdeel van hun lidmaatschap.

Bestuur

Barry Koren (TU/e, voorzitter), Wioletta Ruszel (TUD, penningmeester), Marie-Colette van Lieshout (CWI, secretaris), Danny Beckers (VU), Theo van den Bogaart (HU), Sonja Cox (UvA), Marije Elkenbracht (ABN AMRO), Michael Müger (RU), Willem Jan Palenstijn (CWI), Jan Wiegerinck (UvA).

Secretariaat

Koninklijk Wiskundig Genootschap, CWI
Postbus 94079, 1090 GB Amsterdam
wiskgenoot@wiskgenoot.nl

Ledenadministratie KWG / Abonnementen

admin@wiskgenoot.nl, tel. 020-5924008
Wijzigingen of opzegging kunt u ook doorgeven door in te loggen op www.wiskgenoot.nl.

Contributie

Tarieven per jaar (bij betaling per automatische incasso krijgt u € 2,50 korting):

- gewoon lid: € 92,50
 - reciprociteitslid: € 72,50
 - gepensioneerden en werklozen: € 47,50
 - aio's, oio's, studenten: € 37,50 (max. 4 jaar)
 - lid zonder Nieuw Archief: € 52,50
- Studenten en pas afgestudeerden kunnen een jaar lang gratis lid worden.

Voor verzending van het Nieuw Archief naar het buitenland wordt een portotoeslag van € 10 in rekening gebracht.

Instituten in Nederland en buitenland kunnen zich abonneren op het Nieuw Archief voor Wiskunde voor € 100 (Nederland), € 110 (Europa) of € 112,50 (buiten Europa).

Members of foreign societies

Members of *SIAM*, the *Société Mathématique de France*, the *Gesellschaft für Angewandte Mathematik und Mechanik*, the *Deutsche Mathematiker-Vereinigung*, and of the *American, Australian, Belgian, Indian, London, Spanish, and South-African Mathematical Societies* living outside of the Netherlands pay € 72,50 instead of the full membership fee of € 92,50 a year. Conversely, these foreign societies, as well as the *VvS+OR* and the *NVORWO*, have reduced membership fees for KWG members. A postage charge of € 10 is added for members living abroad but in Europe, and a charge of € 12,50 for members living outside of Europe.

Exchange subscriptions

Koninklijk Wiskundig Genootschap Library
Centrum Wiskunde & Informatica
P.O. Box 94079, NL-1090 GB Amsterdam
KWG-exchange@cw.nl

Informatie voor auteurs

Kopij

Kopij dient per e-mail te worden aangeboden aan kopij@nieuwarchief.nl. Voor meer informatie en auteursinstructies zie www.nieuwarchief.nl.

Volgende nummers

nummer	maand	verschijnen	deadline kopij
22(1)	maart	2021	verstrekken
22(2)	juni	2021	01-02-2021
22(3)	september	2021	01-05-2021
22(4)	december	2021	01-08-2021

Instituuts- en bedrijfsleden

De publicaties van het KWG worden mede mogelijk gemaakt door de bijdragen van de volgende instituten en bedrijven.



Centrum Wiskunde & Informatica



Universiteit van Amsterdam



Vrije Universiteit Amsterdam



Rijksuniversiteit Groningen



Universiteit Leiden



Radboud Universiteit Nijmegen



Universiteit Utrecht



Technische Universiteit Delft



Technische Universiteit Eindhoven



Universiteit Twente



Elsevier



ORTEC

Op het omslag

Het wiskundeonderwijs aan de Nederlandse universiteiten blijft zich ontwikkelen terwijl de studentenaantallen toenemen. De visitatiecommissie voor het cluster WO Wiskunde heeft een state-of-the-art-rapport uitgebracht. Lees een aangepaste versie van dit rapport op pagina 224.

Mood swings

In tegenstelling tot vier jaar geleden ging ik nu toch niet met een gerust hart slapen. Hoewel de kaarten gunstig lagen — de website FiveThirtyEight gaf Biden 89 procent kans op de overwinning — was het niet ondenkbaar dat de peilingen het Trump-effect weer onderschat hadden. En ja hoor, toen ik 's ochtends de krant op mijn mobieltje checkte leek het weer van dat: de kaart van Amerika kleurde rood. De polls leken er opnieuw naast te zitten, maar ze hadden daar wel voor gewaarschuwd. Omdat veel Democraten met de post stemmen terwijl Republikeinen naar het stemhokje trekken, zouden in een aantal staten eerst voornamelijk Republikeinse stemmen geteld worden waarna er geleidelijk een Democratische blue shift zou optreden.

Net zoals in een vlakke etappe van de Tour de France lag een groep vroege vluchters op kop en zou het een kwestie van tijd zijn voor het Democratische peloton de Republikeinse kopgroep zou inhalen. Nu bleken er wel tien van zulke etappes tegelijkertijd aan de gang: van Wisconsin in het noorden tot Florida in het zuiden. In sommige staten zoals Florida was de voorsprong van Trump al zo groot dat hij daar al snel tot winnaar werd uitgeroepen. Moest ik me zorgen maken, of vertrouwen op de polls? Voornamelijk Pennsylvania baarde me zorgen. Met twee derde van de stemmen geteld lag Trump 15 procent voor op Biden. Dat leek me een enorme kloof maar uiteindelijk bleek de Democraat voldoende kracht in zijn kuit te hebben zodat ik zaterdag toch een zucht van opluchting kon slaken. Voorlopig.

Het Amerikaanse kiessysteem lijkt wel ontworpen om de presidentsrace zo spannend mogelijk te maken. Je hoeft geen meer-

derheid van de kiezers achter je te hebben om te winnen. Vaak is enkel een miniem stemmenoverschot in een cruciale swing state van belang. In dat opzicht lijkt het dus meer op een sportwedstrijd waar een bal tegen de lat of een millimetersprint het verschil tussen winst en verlies bepalen. Misschien is het daarom ook niet zo verwonderlijk dat Nate Silver, de oprichter van FiveThirtyEight en Amerika's gerenommeerdste verkiezingsvoorspeller, eerst furore maakte als analist van baseball games. Toen hij in 2008 de uitslag voor 49 van de 50 staten correct voorspelde, werd hij plotsklaps de belangrijkste stem in de poll-wereld. Maar hoge bomen vangen veel wind en sinds Trumps verrassende overwinning op Clinton krijgen hij en zijn medepollers heel wat kritiek. Kunnen we die polls en modellen wel vertrouwen, of is het beter je oor te leggen bij de man op de straat of af te gaan op je politiek buikgevoel?

In zijn column 'Casper grijpt een kans' gaat Casper Albers dieper in op deze vraag en neemt het op voor de pollers. Bezien vanuit de kansrekening doen zij het zeker niet slecht en veel van de kritiek op hen komt van verkeerde interpretaties van wat hun voorspellingen eigenlijk betekenen. Helaas is deze column de laatste in de reeks, want vanaf deze maand wordt Albers onderzoeksdirecteur bij het psychologisch instituut aan de Rijksuniversiteit Groningen. We wensen hem veel succes bij deze nieuwe baan en danken hem van harte voor de leuke en leerzame stukjes die hij de afgelopen jaren voor ons neerpende.

Raf Bocklandt, hoofdredacteur

Korteweg-de Vries Instituut, Universiteit van Amsterdam

Agenda

| Upcoming Events

7–11 december 2020

Hypergeometry, Integrability and Lie Theory
Workshop, georganiseerd door onder anderen Erik Koelink (RU).

plaats online

info lorentzcenter.nl

9 januari 2021

KWG Wintersymposium

Jaarlijks symposium van het KWG voor docenten en andere geïnteresseerden. Dit jaar is het thema 'Getaltheorie'.

plaats online

info wiskgenoot.nl

14–15 januari 2021

39e Panama-conferentie

Conferentie met thema 'Rekenen-wiskunde 3D'.

plaats online en op locatie

info panamaconferentie.sites.uu.nl

18–28 januari 2021

Eerste ronde Wiskunde Olympiade

De eerste ronde van de jaarlijkse landelijke wiskundewedstrijd voor leerlingen uit de onderbouw van havo en vwo.

plaats op eigen scholen

info wiskundeolympiade.nl

20 januari 2021

Zoveel spelletjes, zoveel kansen voor het rekenonderwijs

RC-NL-Masterclass van Anneke Noteboom (Reken-Impuls).

plaats online

info nrcd.sites.uu.nl

29–30 januari 2021

Nationale Wiskunde Dagen

Landelijke tweedaagse bijeenkomst voor wiskundeleraren.

plaats verschillende locaties in Nederland

info uu.nl/nationale-wiskunde-dagen

12 maart 2021

Tweede ronde Nederlandse Wiskunde Olympiade

De tweede ronde van de Nederlandse Wiskunde Olympiade speelt zich af op de universiteiten.

plaats universiteiten van Nederland

info wiskundeolympiade.nl

12 maart 2021

Nationale Rekencoördinator Dag

Dag voor rekencoördinatoren en leerkrachten, waarop het rekenonderwijs van de basisschool centraal staat.

plaats Utrecht

info nrcd.sites.uu.nl

18 maart 2021

W4 Kangoeroe

WereldWijdeWiskundeWedstrijd voor basis- en middelbare scholieren.

plaats op eigen scholen

info w4kangoeroe.nl

22–26 maart 2021

Graph Decompositions: Small Width, Big Challenges

Workshop, mede georganiseerd door Erik Jan van Leeuwen (UU).

plaats Lorentz Center@Oort, Leiden

info lorentzcenter.nl

24 maart 2021

Grote Rekendag

Dag voor alle basisscholen in Nederland en Vlaanderen (groep 1 t/m 8) die helemaal in het teken staat van rekenen. Het thema van deze 18de editie is 'Op rekenreis!'.

plaats basisscholen Nederland en Vlaanderen

info groterekendag.nl

6–7 april 2021

Nederlands Mathematisch Congres

Jaarlijks congres met een aantrekkelijk programma voor heel wiskundig Nederland.

plaats nog niet bekend

info mathematischcongres.nl

9–15 april 2021

European Girls' Mathematical Olympiad

Europese wiskundewedstrijd speciaal voor meisjes.

plaats Koetaisi, Georgië

info egmo.org

17–21 mei 2021

Multidimensional Continued Fractions and Euclidean Dynamics

Workshop, mede georganiseerd door Evgeny Verbitskiy (UL).

plaats Lorentz Center@Snellius, Leiden

info lorentzcenter.nl

Suggesties voor deze agenda zijn welkom.

Redacteur: Nikki Levering

agenda@nieuwarchief.nl

Nieuws

| News

Deze rubriek is een kroniek van wiskundige activiteiten in Nederland. Toekomstige activiteiten worden aangekondigd en van voorbije activiteiten wordt verslag gedaan. Wilt u uw aankondiging of verslag in deze rubriek geplaatst zien? Stuur ons dan uw bijdrage, zo mogelijk met illustratie. De redactie behoudt zich het recht voor berichten te weigeren of in te korten.

Redacteur: Nikki Levering
 nieuws@nieuwarchief.nl

Zes medailles op de Internationale Wiskunde Olympiade

De Internationale Wiskunde Olympiade zou eigenlijk plaatsvinden in juli te Sint-Petersburg, maar werd vanwege het coronavirus uitgesteld naar september. Het werd een wedstrijd-op-afstand met onafhankelijke waarnemers en videosurveillance vanuit Rusland, waarbij alle leden van het Nederlands team een medaille hebben bemachtigd. Jippe Hoogeveen (18) en Jovan Gerbscheid (17) behaalden beide 31 punten en daarmee een gouden medaille. Voor Jesse Fitié (18) was er een zilveren medaille, terwijl Rafaël Houkes (18), Tjeerd Morsch (18) en Hanne Sniijders (18) allemaal een bronzen medaille behaalden. Hiermee eindigde Nederland op de 29ste plaats van de 105 deelnemende landen. Het Nederlandse team werd begeleid door Birgit van Dalen (Universiteit Leiden en ISW Hoogeland Naaldwijk), Quintijn Puite (Technische Universiteit Eindhoven en Alberdingk Thijm College Hilversum) en Jeroen Huijben (Universiteit van Amsterdam). *wiskgenoot.nl*



Sem Borst aangewezen als Markov Lecturer 2020

Elk jaar wijst de Applied Probability Society van INFORMS een Markov Lecturer aan. Dit jaar valt deze eer ten deel aan Professor Sem Borst van de Technische Universiteit Eindhoven, die zijn Markov Lecture heeft mogen geven tijdens de INFORMS Annual Meeting van afgelopen november. Het doel van de Markov Lecture is zowel het eren van de spreker als het presenteren van relevant en actueel werk van het hoogste niveau. *thenetworkcenter.nl*



Virtuele prijsuitreiking KWG PhD-prijs en Stieltjesprijs

Op 6 oktober zijn tijdens een virtuele prijsuitreiking de KWG PhD-prijs en Stieltjesprijs uitgereikt. De Stieltjesprijs is de prijs voor het beste Nederlandse proefschrift dat verdedigd is aan een Nederlandse universiteit en is dit jaar uitgereikt aan Ivan Yaroslavstev (TU Delft), voor zijn proefschrift *Martingales and Stochastic Calculus in Banach Spaces*. Voor de KWG PhD-prijs waren er nog vijf finalisten. Zij mochten in een korte voordracht hun PhD-onderzoek presenteren. De prijs werd gewonnen door Emiel Lorst, voor zijn onderzoek naar de stochastische versies van de Calderón–Zygmundtheorie en de beroemde A_2 -stelling. *platformwiskunde.nl*

Miranda Cheng in ‘Grote vragen’

Mathematisch natuurkundige dr. Miranda Cheng (Universiteit van Amsterdam) was in oktober te zien in de aflevering ‘Kan wiskunde alles beschrijven?’ van het wetenschapsprogramma *Grote vragen* (VPRO). De documentaire gaat over de weg die zij volgde om uiteindelijk wetenschapper te worden, maar ook over haar onderzoek naar ‘umbrale maneschiñ’. Deze nieuwe theorie zou een verband leggen tussen de theorie van eindige groepen en mock-modulaire vormen enerzijds en snaartheorie en zwarte gaten anderzijds. *vpro.nl/programmas/grote-vragen*



Sir Roger Penrose krijgt Nobelprijs voor de Natuurkunde

De Britse wis- en natuurkundige Sir Roger Penrose, Emeritus Rouse Ball Professor of Mathematics aan de Universiteit van Oxford, is dit jaar een van de ontvangers van de Nobelprijs voor de Natuurkunde. Hij ontvangt deze Nobelprijs voor zijn onderzoek naar zwarte gaten. Met zijn onderzoek heeft hij onder andere aangetoond dat, onder de aanname dat Einsteins algemene relativiteitstheorie correct is, zwarte gaten bestaan. Dezelfde aanname en dezelfde technieken heeft hij in samenwerking met dr. Stephen Hawking gebruikt om aan te tonen dat het universum een begin moet hebben gekend. Naast dit ongekend belangrijke werk is hij ook bekend als uitvinder van de Penrose-betegeling, een betegeling van een oneindige tweedimensionale oppervlakte zonder herhaling in het patroon. Sir Roger Penrose was in 2018 in Nederland voor de

‘19th UK and European Meeting on the Foundations of Physics’, waar Nicos Starreveld en Raf Bocklandt, redacteurs van dit tijdschrift, hem hebben geïnterviewd (NAW 5/19(4), december 2018, pp. 241–245). *nytimes.com*

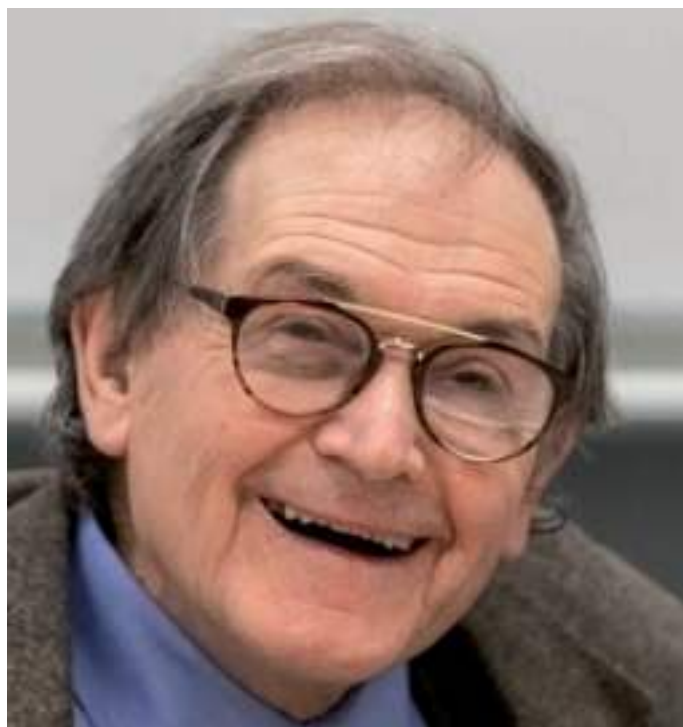


Foto: maastrichtuniversity.nl

Online boekenveilingen door Wereldwiskunde Fonds

Vanwege de coronacrisis was de jaarlijkse oktoberveiling van het Wereldwiskunde Fonds online. Naast deze veiling werd er van 1 tot 7 november een unieke online (100+1) boekenveiling gehouden. Op deze speciale veiling werden topboeken aangeboden over geschiedenis en recreatieve wiskunde, populaire wetenschappelijke boeken en zelfs ‘wiskundige’ romans. Zoals bij alle veilingen van het Wereldwiskunde Fonds zal de opbrengst volledig worden besteed aan projecten voor wiskundeonderwijs in ontwikkelingslanden. *wiskundepersdienst.nl*

90 jaar oud vermoeden opgelost met behulp van 40 computers

Het vermoeden van Keller, 90 jaar geleden geïntroduceerd door Ott-Heinrich Keller, is met behulp van een serie computers eindelijk opgelost. Het vermoeden zegt dat als een tweedimensionale ruimte betegeld wordt met tweedimensionale vierkanten, ten minste twee van deze vierkanten een zijde moeten delen. Het vermoeden gaat zelfs verder en zegt dat dit ook voor elke andere dimensie zou moeten gelden. In 1940 heeft Oskar Perron het vermoeden bewezen voor dimensies een tot en met zes. Het duurde daarna meer dan 50 jaar voor er weer progressie werd geboekt: in 1992 bewezen Jeffrey Lagarias en Peter Shor dat het vermoeden niet klopt voor dimensie tien en daarboven. In 2002 is bewezen dat hetzelfde geldt voor dimensies acht en negen, waardoor alleen dimensie zeven nog een open probleem was. Joshua Brakensiek (Stanford University, VS), Marijn Heule, John Mackey (Carnegie Mellon University, VS) en David Narváez (Rochester Institute of

Technology, VS) hebben nu een nieuwe doorbraak gemaakt en met behulp van 40 computers bewezen dat het vermoeden voor dimensie zeven klopt. Zij gebruikten in het bewijs een techniek die ook voor hogere dimensies werd gebruikt: het vinden van een clique in een zogeheten Kellergraaf. Ze hebben het probleem van het vinden van een dergelijke clique omschreven naar een representatie van dit probleem in de propositielogica. Door slim gebruik te maken van symmetrieën kon een SAT-solver dit probleem zeer efficiënt oplossen en zo bevestigen dat het vermoeden van Keller klopt voor dimensie zeven.

quantamagazine.org

Na 51 jaar toch een Hubbard Medal voor Katherine Johnson

Katherine Johnson was in 1939 de eerste Afro-Amerikaanse vrouw die werd toegelaten op de West Virginia University (VS), waar ze haar Master in wiskunde haalde. In 1952 ging ze bij NASA werken waar ze trajecten van ruimtevluchten met de hand berekende. Haar wiskundige inzichten leidden uiteindelijk tot grote successen voor de NASA. Zo rekende Johnson onder andere mee aan de trajecten van de Apollo 11 missie naar de maan. Voor deze missie kregen de astronauten allen de Hubbard Medal, toegekend door de National Geographic Society als onderscheiding in ontdekking en onderzoek. Voor haar bijdragen aan ruimteonderzoek heeft Katherine Johnson nu, 51 jaar na de Apollo 11 missie, de Hubbard Medal van 2020 toegekend gekregen. Johnson overleed in Februari van dit jaar op 101-jarige leeftijd en zal de prijs niet meer in ontvangst kunnen nemen.

nationalgeographic.com



Nederlandse doorbraak in energiezuinige kunstmatige intelligentie

Mede door de inbreng van onderzoekers van het CWI is er een doorbraak gekomen in het energiezuiniger worden van kunstmatige intelligentie. Met deze doorbraak kunnen toepassingen van kunstmatige intelligentie een factor honderd tot duizend energiezuiniger worden. Hierdoor wordt het mogelijk kunstmatige intelligentie in chips te stoppen. Toepassingen van kunstmatige intelligentie, zoals spraakherkenning en de classificatie van electrocardiogrammen, zouden dan kunnen draaien op een smartphone. Dit betekent dat het niet meer in de cloud hoeft te gebeuren en het daardoor ook privacy-vriendelijker is. De onderzoekers hebben een algoritme ontwikkeld voor gepulste neurale netwerken, wat

efficiënter is dan bestaande algoritmes voor deze netwerken. De twee wiskundige doorbraken zijn dat de neuronen in het netwerk veel minder met elkaar communiceren en dat elke neuron ook minder hoeft te rekenen. De gepulste neurale netwerken kunnen momenteel ongeveer duizend neuronen aan, wat genoeg is voor de genoemde toepassingen, maar minder dan klassieke netwerken aankunnen. De volgende uitdaging is dan ook het opschalen van de netwerken.

cwi.nl

Koninklijk Wiskundig Genootschap

□ KWG Wintersymposium

Het jaarlijkse Wintersymposium voor docenten en andere geïnteresseerden vindt plaats op zaterdag 9 januari 2021 en zal dit keer online zijn. Het thema is 'Getaltheorie'. Voor meer informatie en het programma zie: wiskgenoot.nl.

□ NMC 2021

Het Nederlands Mathematisch Congres 2021 zal plaatsvinden op 6 en 7 april. Het is nog niet bekend of het congres online zal zijn of fysiek. Het is in elk geval de bedoeling dat de vorig jaar uitgestelde Brouwerlezing (David John Aldous, Berkeley) en Beegerlezing (David Harvey, UNSW Sydney) gehouden zullen worden. Voor meer informatie zie: mathematischcongres.nl.

□ Tussentijds online evenement

Op 6 oktober vond een tussentijds online evenement plaats, waarin de Stieltjesprijs 2018–2019 en de KWG PhD-prijs uitgereikt werden (zie elders in het Nieuws). Doordat het NMC dit jaar niet door kon gaan, waren deze prijzen nog niet uitgereikt. Elders in dit blad staat een verslag van de PhD-prijs-competitie.

□ Digitalisering oude NAW-series

De vier oude series van het *Nieuw Archief voor Wiskunde* zijn nu volledig gedigitaliseerd en grotendeels online toegankelijk gemaakt via Delpher.nl. De digitalisering vond plaats in het kader van 'Metamorfoze', het nationale programma voor het behoud van papieren erfgoed. Het *Nieuw Archief voor Wiskunde* bestaat al sinds 1875. De huidige vijfde serie wordt zowel op papier uitgegeven als digitaal toegankelijk gemaakt op www.nieuwarchief.nl. De vier oude series bestonden alleen op papier en zijn nu dus ook digitaal beschikbaar. Alle nummers tot 1959 zijn reeds toegankelijk en begin 2021 zullen alle nummers tot 1969 toegankelijk zijn. De overige nummers zijn voorlopig alleen te raadplegen in de leeszaal van de Koninklijke Bibliotheek.

□ Fondsenwerving Brouwerarchief

De fondsenwerving voor de ontsluiting van het Brouwerarchief is nu compleet. Hierdoor kan er binnenkort daadwerkelijk met de ontsluiting worden begonnen.

Recent verschenen:

□ Indagationes Mathematicae (www.elsevier.com/locate/indag)

Special Issue dedicated to the memory of Wim Luxemburg, Ben de Pagter, Peter G. Dodds, Anton R. Schep (eds.), Volume 31, Issue 5, 2020.

□ Epsilon Uitgaven (www.epsilon-uitgaven.nl)

Giraf 2. Cryptografie – een doeboek vol codes en geheimtaal, Paul Durenkamp, € 7, 2020.

Zebra 60. Verdwijnpunt Prentententoonstelling van M.C. Escher opgelost, Rick Vooy, € 10, 2020.

Assessment panel for the cluster WO Mathematics:

Onno Boxma^a, Sterre den Breeijen^b, Sabine Jongerius^c, Rainer Kaenders^d, Henk Prins^e,
Duco van Straten^f, Lotte Weedage^g

^a o.j.boxma@tue.nl, ^b sterre.denbreeijen@tno.nl, ^c s.c.jongerius@student.tue.nl, ^d kaenders@math.uni-bonn.de, ^e h.j.prins@marin.nl,
^f straten@mathematik.uni-mainz.de, ^g l.weedage@utwente.nl

Education

The state-of-the-art of mathematics teaching at the Dutch universities

This is a slightly adapted version of the general report of the assessment panel for the cluster *WO Wiskunde*. In that report, the assessment panel for the cluster WO Wiskunde presented some impressions and observations regarding the state-of-the-art of mathematics teaching at the Dutch universities.

The general impression of the panel is very positive. The level of mathematics teaching overall is of a qualitatively high level. It features a very solid curriculum; teaching and assessments are organized in a professional and efficient way; and the lecturers are dedicated and competent. Furthermore, student numbers in the Bachelor and Master programmes of all involved mathematics departments have strongly increased in the past two decades (e.g., the total intake in the Bachelor Mathematics programmes was 153 in 2002, 673 in 2013, and 1007 in 2018). Nevertheless, all students still receive individual guidance in their Bachelor project and Master thesis and, without exception, students of all involved mathematics departments speak highly of their teachers, and in particular about their accessibility and eagerness to discuss mathematical problems. The quality of the Master theses ranges from reasonably good to excel-

lent; quite a few theses gave rise to publications. After completion of their Master study, the students almost invariably find employment very quickly. A considerable

percentage of them continues to do a PhD, either in Mathematics or in a closely related topic.

The panel has assessed 11 Bachelor and 13 Master programmes in nine universities; see the box below for the complete list. The panel is grateful to the various programme managements for the offered hospitality, the open attitude towards the

The assessed programmes

- Leiden University: Bachelor Wiskunde, Master Mathematics
- University of Groningen: Bachelor Technische Wiskunde, Bachelor Wiskunde, Master Applied Mathematics, Master Mathematics
- University Utrecht: Bachelor Wiskunde, Master Mathematische Wetenschappen
- Delft University of Technology: Bachelor Technische Wiskunde, Master Applied Mathematics
- Eindhoven University of Technology: Bachelor Technische Wiskunde, Master Industrial and Applied Mathematics
- University of Twente: Bachelor Applied Mathematics, Master Applied Mathematics
- University of Amsterdam: Bachelor Wiskunde, Master Stochastics and Financial Mathematics, Master Mathematics
- Vrije Universiteit Amsterdam: Bachelor Business Analytics, Bachelor Mathematics, Master Stochastics and Financial Mathematics, Master Business Analytics, Master Mathematics
- Radboud University Nijmegen: Bachelor Wiskunde, Master Mathematics

Composition of the assessment panel

- Prof. dr. ir. O.J. Boxma, full professor Stochastic Operations Research, Eindhoven University of Technology (panel chair)
- Prof. dr. R.H. Kaenders, full professor Mathematics and its Education, University of Bonn, Germany (panel member; panel chair for Eindhoven University of Technology)
- Prof. dr. D. van Straten, full professor Algebraic Geometry, Johannes Gutenberg University Mainz, Germany (panel member)
- Dr. ir. H.J. Prins, manager Research & Development, Maritime Research Institute Netherlands (panel member)
- Prof. dr. J. Molenaar, full professor Applied Mathematics, Wageningen University and Research (panel member for Eindhoven University of Technology)
- Drs. J. Poppelaars, senior manager, practice leader Advanced Analytics, BearingPoint (panel member for Vrije Universiteit Amsterdam, Business Analytics programmes)
- S.C. Jongerius BSc, student Master Industrial and Applied Mathematics, Eindhoven University of Technology (student member)
- S.R. den Breeijen MSc, recently graduated student Master Mathematics, Radboud University Nijmegen and presently junior scientist at TNO (student member)
- L. Weedage BSc, student Master Applied Mathematics, University of Twente (student member)

On behalf of the evaluation agency Certiked, drs. W. Vercouteren served as the process coordinator and secretary in the assessment process.

panel and the efforts to supply the panel with information. Preparing an extensive self-study as well as a site visit requires a huge effort. A positive effect of this effort is, as we have noticed, that those preparations oftentimes already expose some weaknesses in the curriculum, the teaching, the student guidance or the assessment procedures; quite often, such weaknesses were mentioned in the self-study, and improvement steps were outlined or already taken.

For each of the 24 reviewed programmes, the panel has given assessments for the programme as a whole, as well as for the following four standards:

Standard 1: Intended learning outcomes,
Standard 2: Teaching-learning environment,
Standard 3: Assessment,
Standard 4: Achieved learning outcomes.

The choice each time was between the four options *Unsatisfactory*, *Satisfactory*, *Good* and *Excellent*. In each case, the qualification was at least *Satisfactory*. In some rare cases, we gave the assessment *Good*. Since this may give the impression that there is much room for improvement, we would like to emphasize that we have given the qualification *Satisfactory* when everything was functioning well and ‘upto standard’, and that a programme receives the assessment *Good* for a standard if it systematically, and in full breadth, qualita-

tively exceeds the customary level for that standard.

The main purposes of the present report are (i) to present our global impressions of mathematics teaching at the Dutch universities, and in particular our views on a few topics that came up in almost all site visits, and (ii) to make a few statements regarding Mastermath, in view of its important role in the mathematics teaching at the Master level.

The remainder of this report is structured in the following way. The next section is devoted to Mastermath. Then follow a section that focuses on the Domain-Specific Framework of Reference, that lists the generic objectives and intended learning outcomes of the mathematics programmes under consideration; a section on professionalisation in the educational process; a section on intake, drop-out and student success rates; a section on teaching in English; and a section on the education of mathematics teachers. We close in the final section with a few thoughts about the future of mathematics teaching.

Mastermath

The panel has visited Mastermath on April 26, 2019, before any of the site visits of the nine mathematics departments took place. Mastermath has often been called one of the crown jewels of Dutch mathematics,

and that seems fully justified. Mastermath was started in 2003, at a time when student numbers in most mathematics departments were dangerously low. The mathematics departments joined forces, allowing Mastermath to offer a broad collection of national mathematics courses at the Master level, by leading Dutch experts. Those courses were given in Utrecht and Amsterdam, and students from all mathematics departments have been taking several such courses. As a side benefit, the need to prepare students for Mastermath courses has, to some extent, led to a national alignment of the Bachelor Mathematics teaching. Other benefits of Mastermath are the growing interaction between researchers, and also students, of various departments, and the fact that departments are now able to offer a significantly broader package of courses than before.

In the last decade, student numbers in the various Mathematics Master programmes have grown very significantly, and the present Bachelor inflow strongly suggests that this growth has not yet come to an end. In that same period, staff size has hardly grown, and Mastermath apparently now also plays a positive role in reducing the workload of staff members.

Despite all these remarkable accomplishments, there is presently a strong need for Mastermath to carefully design its medium-term strategy. There are several reasons for this. Firstly, because of the Sectorplan and some other developments, all mathematics departments are now hiring significant numbers of new staff members. This will allow the departments to offer a broader package of courses than before, reducing the need for Mastermath courses. Secondly, the large student numbers at some mathematics departments make it less desirable to encourage students to take mathematics courses outside one's own university. Thirdly, while all departments support Mastermath, there seems to be a growing uneasiness about Mastermath in a number of departments. Those departments are concerned about a lack of cohesion of their Master student population, as quite a few of those students spend part of the week attending Mastermath courses elsewhere. They also fear that their profile will be less pronounced because of the large role played by Mastermath in their Master curriculum.

Furthermore, some departments have indicated that the level of the Mastermath courses has increased in recent years, and that this is sometimes causing problems for their students. Several students, too, have some complaints, while overall being very positive about Mastermath; in particular, they sometimes have to travel long distances to Mastermath courses, also because for many Mastermath courses no good video recordings are available. Institutes located far away from Utrecht typically share this concern.

Fortunately, Mastermath is led in a professional way by a lean-and-mean Executive Board plus support staff, and is overviewed in a constructive way by the *Regieorgaan*, a committee composed of the nine educational directors of the participating institutes. Therefore, this panel is confident that Mastermath will be able to adapt its strategy in such a way that it will remain a strong asset of Dutch mathematics. We also would like to mention that Mastermath was evaluated in 2017 and that we, broadly speaking, support the recommendations made in the corresponding evaluation report.

Domain-Specific Framework of Reference

The joint Mathematics programmes in the Netherlands have drafted the Domain-Specific Framework of Reference (DSFR) for both Bachelor and Master Mathematics programmes. In this DSFR, the generic objectives and the generic intended learning outcomes for these programmes have been listed. These objectives and intended learning outcomes meet the international standards for mathematics of ASIIN in Germany. They also correspond to the Dublin descriptors and the Meijers' criteria. In addition, they are largely comparable to those of the mathematics programmes of some renowned universities abroad, such as ETH Zürich, KU Leuven and the University of Padua. DSFR allows some space for differences between the various programmes.

Each programme has drafted its own intended learning outcomes; mostly in line with the DSFR, but sometimes featuring minor adaptations, perhaps made to emphasize the unique character of a programme or the presence of a particular specialism or track. During the site visits, this has led to some discussions with programme managements.

Modus operandi of the assessment panel

All panel members and the secretary confirmed in writing being impartial with regard to the programmes to be assessed and observing the rules of confidentiality. NVAO have given their approval to the panel composition prior to the assessments. The panel studied the self-assessment reports of each of the programmes as well as the final projects of fifteen graduates of each of the programmes. On the days of the site visit, the panel studied course material and the examinations of a number of courses of the programme. Before the site visit dates, the panel met to go over the preliminary findings concerning the quality of the programmes. During these meetings, the preliminary findings of the panel members, including those about the final projects, were discussed. The procedures to be adopted during the site visit, including the questions to be put to the programme representatives on the basis of the list compiled, were discussed as well.

On the days of the site visits, the panel was given the opportunity to meet with faculty representatives, programme management, examinations committee members, lecturers and final projects examiners, students, and alumni. At the end of the site visit, the panel chair presented a broad outline of the considerations and conclusions to programme representatives. The panel members and the programme representatives met to conduct the development dialogue, this meeting being separated from the process of the programme assessment. The assessment report, finalised on the basis of the panel findings and considerations, was presented to programme management to be corrected for factual inaccuracies. Having been corrected, the report was sent to the University Board to accompany their request for re-accreditation of the programmes.

Attention for ethical aspects in mathematics was in some cases not included in the local intended learning outcomes for Master studies — although it is included in the DSFR. The panel strongly believes that such an omission should be corrected, and that each mathematics curriculum should pay proper attention to ethics. Staff and students should realize that mathematics is potentially harmful, the wrongful or careless use of data being just one aspect of this complex topic. In addition, plagiarism and proper referencing to used sources deserve ample attention.

Furthermore, we encountered the following problem. Several programmes offer a Major in *Science in Society* or in a comparable topic. Typically, about one of the two years in a Master programme is devoted to such a Major, and the Major involves an internship and/or Master project devoted to a non-mathematical topic, performed under the main responsibility of another department. Such a Master programme may have excellent merits and deliver valuable alumni to our society, but it should be observed that, formally, such a Master programme also cannot satisfy MC2 of the DSFR, viz.: *Graduates are able to act and behave like mature and professional mathematicians. They are able to acquire*

sufficient knowledge including of recent developments in subdisciplines, other than their own specialization. The panel has come to the conclusion that, to take care of this problem, it is necessary to make an adaptation to the DSFR. The purpose of such an adaptation, a diversification, is to maintain the profile of mathematics and make a clear distinction with programmes and tracks which are less mathematically oriented. This distinction should also be reflected in the text on the certificate.

Professionalisation

In almost all visited departments the panel has observed an increased professionalisation in the educational process. In fact, having read the detailed procedure descriptions in the self-studies, we feared that those procedures would lead to too much bureaucracy and too little freedom for individual lecturers. The site visits have shown us that, fortunately, that stage has not yet been reached — but it is important to be aware of the risk. A related issue is that the boards of some universities are imposing procedures which must hold in all departments — procedures which are not always suited for mathematics studies. The panel holds the opinion that the unique role of mathematics justifies a cer-

tain freedom of the mathematics department to make its own decisions.

Below we mention four types of educational procedures in which the panel noticed an increased professionalisation.

(i) The guidance of students has become more professional. Candidate Bachelor students are offered lots of opportunities to discover what studying mathematics comprises; they can take part in matching events, attend some classes, et cetera. In the first Bachelor year, students often get a mentor — a staff member or a more senior student. Furthermore, a study advisor is actively monitoring the study progress of individual students. Despite all these positive actions, the panel was informed in several departments that students have psychological problems, of various nature. Where appropriate, such problems should be handled by a professional.

(ii) Almost all staff members now are UTQ-certified (University Teaching Qualification), while new hirings have to obtain their UTQ within a few years after their appointment. This is a major change with respect to the previous accreditation.

(iii) The departments have refined their procedures for the assessment of exams. In most departments, the examinations and assessments are governed by the principles of *constructive alignment*, linking the course examinations to the intended learning outcomes of the programme. This development is a decision in favour of an output-oriented approach to learning processes, that fits well into administrative processes of learning management. However, individual development in students and student-teacher interactions are much less reflected and stimulated in this approach. It is important to keep some room for experimentation.

These assessment procedures typically are more strict than at the previous accreditation, routinely using four-eyes principles like demanding that another staff member carefully inspects a written exam before it is given, and that a second staff member is present at an oral exam. In only a few instances we noticed that procedures were not quite adequate, or that the procedures were not strictly adhered to. In a few institutes, student assistants who themselves still are Bachelor students are asked to check exams beforehand, or to mark exams without immediate supervision of the examiner. In our view, that is inappropriate.

(iv) The procedures regarding the assessment of Bachelor projects and Master theses also have been sharpened. In some institutes, a member of the examination board is routinely part of the examination committee of a Master thesis, or is even chairing that committee. In our view, that is a very good procedure.

Each Mathematics department now uses assessment forms for the Bachelor project and the Master thesis. Almost invariably, the forms contain rubrics (in some cases with over a hundred boxes) but very little text. This is an example where we feel the procedure sometimes has become too bureaucratic. The panel strongly feels that it would be much better to produce here a quite extensive text (at least one A4 page) in which, at least, the following topics are being discussed in an informative way: the choice of the project topic, the knowledge the student already had about the topic

before the start of the project, the literature provided by the advisor, the main results of the project, the student's own contribution, the creativity and depth of the work, and the quality of the writing and of the oral presentation. The mark should then naturally follow. Such a text is valuable for everybody involved — in particular for the student and the examination board.

Intake, drop-out and student success rates

Table 1 contains intake numbers and student success rates for all 24 programmes. Here student success rate is defined in the following way. For Bachelor students: percentage of students re-entering in the second year, who complete the programme within a total of four years; for Master students: percentage of intake who complete the programme in three years. There are minor differences in the number of years over which the averaging took place

Programme	Intake	Success
Leiden Bachelor Wiskunde	108	74%
Groningen Bachelor Technische Wiskunde	28	67%
Groningen Bachelor Wiskunde	110	54%
Utrecht Bachelor Wiskunde	130	63%
Delft Bachelor Technische Wiskunde	216	62%
Eindhoven Bachelor Technische Wiskunde	120	64%
Twente Bachelor Applied Mathematics	64	70%
UvA Bachelor Wiskunde	74	61%
VU Bachelor Business Analytics	119	80%
VU Bachelor Mathematics	58	50%
Radboud Bachelor Wiskunde	99	55%
Leiden Master Mathematics	40	50%
Groningen Master Applied Mathematics	6	70%
Groningen Master Mathematics	15	50%
Utrecht Master Mathematische Wetenschappen	34	59%
Delft Master Applied Mathematics	80	84%
Eindhoven Master Industrial and Applied Mathematics	40	84%
Twente Master Applied Mathematics	25	70%
UvA Master Mathematics	15	57%
UvA Master Stochastics and Financial Mathematics	12	58%
VU Master Business Analytics	59	70%
VU Master Mathematics	12	71%
VU Master Stochastics and Financial Mathematics	7	73%
Radboud Master Mathematics	37	60%

Table 1 Intake numbers 2018 and student success rates per programme; success rates are averaged over the last few years.

and in the underlying calculations; we have included the numbers because they present a rather informative overall picture.

Traditionally, a rather large percentage of Bachelor freshmen drops out during the first year of study or, with the present BSA (Binding Study Advice), is not able to collect enough EC to continue his/her studies. In most Bachelor programmes, the drop-out rate in year 1 still is above 30%, despite very significant efforts in providing candidate students with enough information, and in tutoring students in the first year of their studies. One explanation is that, with the increasing student numbers, it is likely that a smaller percentage than before is gifted enough in mathematics to pass the first year. Furthermore, there is a large gap between highschool mathematics and the mathematics taught in mathematics departments. For a sizable percentage of the students, the level of mathematical abstraction at the university is unattractive or simply too high. We have decided not to include drop-out rates in the table, because these rates are hard to specify, and may give the wrong impression; the drop-out rate may for example be relatively high when students have the option of combining a Bachelor in Mathematics with a Bachelor in another discipline, or when they can switch between Applied Mathematics and Mathematics (like in Groningen).

Students who pass the first year typically will obtain their Bachelor degree — although only few complete their Bachelor's within three years. After obtaining this degree, most students opt for a Master study; often a Mathematics Master in the same university, but they also sometimes switch to another Master programme in the same university, or move to another university. The drop-out rates in the Master programmes are in most cases rather low, but students often take considerably more time than two years to finish their studies. We have heard many different explanations for this, like: (i) most Master students have a part-time job (often as student assistant), (ii) the level of some courses, in particular from Mastermath, is much higher than that of the typical Bachelor course, (iii) students very much enjoy their studies and hence take several extra courses, and (iv) students often do not know yet what they would like to do after their studies, and therefore postpone the decision by delaying their studies.

Alumni invariably expressed their enthusiasm for their alma mater. In quite a few cases, they were not on a daily basis using the mathematics that they had learned, but they claimed to benefit a lot from the structured way of reasoning that was instilled in them in their studies. In almost all cases, the ties between department and alumnus seem rather loose — both parties do not make a big effort to regularly stay in touch. One can think of various reasons why it would be beneficial for a department to strengthen the ties with its alumni; e.g., the department could get feedback from alumni that is useful in fine-tuning the curriculum, and students could get a more accurate picture about the daily activities of a professional mathematician.

Teaching in English

All assessed Master programmes now are in English, and these programmes are attracting an international population of students. Most Bachelor programmes still are in Dutch, but everywhere the option of switching to the English language has been, or still is, a topic of discussion. The main reasons for switching to English are the following: (i) Education is research-driven, and English is the universal language for research. (ii) Most mathematics textbooks and literature are in English. (iii) A growing proportion of the staff — the potential lecturers — is non-Dutch speaking. (iv) An international programme could attract students from outside the Netherlands. (v) Opening the programme for international students results in a student population with a wider cultural and educational background, which not only poses challenges but also offers opportunities when it comes to training various skills and creating a stimulating study environment.

The main reasons for *not* switching to English are: (i) The added difficulty, in particular at the early stages of the study, that students will experience in grasping new mathematical concepts. (ii) Dutch teachers may find it hard to express themselves fluently and precisely in English. (iii) The feeling that one is forsaking his/her own language. (iv) To offer better opportunities to foreign students to get in touch with the rich Dutch mathematical culture and its history.

The panel has mixed opinions on this choice and hence presents no recommen-

dation; in fact, we welcome the diversity offered. For example, because the Vrije Universiteit Amsterdam has opted for English, we are pleased that the University of Amsterdam sticks to Dutch — although, as in many institutes, courses in the third Bachelor year often are given in English.

First degree and second degree education

Almost all Master programmes offer a specialization to mathematics teacher education leading to a first degree teacher qualification (*eerstegraads bevoegdheid wiskunde*) for prospective teachers. The inflow of these specializations is disappointingly small in almost all programmes.

The academical teacher education in mathematics is of great importance for Dutch mathematics in general. All Bachelor programmes are struggling with aspirant students having no clue what university mathematics is about, and there might be an even larger number of school graduates who would be interested in studying mathematics and would possibly be capable of it, if they would have had a role model of a high school teacher being an academical mathematician. The crisis of Dutch mathematics around the millennium change, when almost no students came to study mathematics, has shown the vulnerable dependence of Dutch mathematics from the mathematical culture at school. Internationalization is valuable, enriching and necessary, but it cannot compensate the need for an inflow from the Dutch high-schools.

Therefore, the panel values that nearly all universities created the possibility to become first degree mathematics teacher within the different mathematics Master programmes. However, offering a specialization in a Master programme has to be based on a research background in the respective specialization. Internationally, the specialization of mathematics education is a vivid academic research area with sizable national and international communities of researchers. Mathematics educational research on a scientific level goes back to the beginning of the 20th century. The epistemology of mathematics with its abstractions and concept development makes mathematics education different from general science education (*Bèta didaktiek*) and it cannot be covered by experts in science education as several Dutch universities try to do. Like any other

specialization, mathematics education, if it is offered in a Master programme, needs principal researchers, which are usually full professors.

Mathematics education is, next to history and philosophy of mathematics, one of the three reflective mathematical sciences and can be supported by the other two as it happens (with history) in Utrecht, Amsterdam (VU and UvA) and Twente. The panel is positive about any attempt to relate these reflective mathematical sciences to the mathematics programmes as they broaden the general mathematical formation, especially but not exclusively in teacher education.

Finally, in several of the Bachelor programmes there is the possibility to also do a minor in mathematics teacher education that can lead to a second degree teacher qualification (*tweedegraads bevoegdheid wiskunde*) for the Dutch school system. This option allows students who explicitly want to become maths teacher to just start with a study of mathematics. Those who discover during their Bachelor study that their interest in higher mathematics goes not as far as a Master in mathematics would require, then still have the possibility to follow their pedagogical ambitions and to become a mathematics teacher of second degree. These academically educated teachers are certainly especially qualified to teach in havo and in the early years of vwo, as these school forms lead to pre-university education. For these reasons, the panel recommends this engagement in mathematics teacher education.

The future of Mathematics teaching

Our society is presently witnessing revolutionary changes. We mention two changes which might affect mathematics teaching.

Firstly, the way people communicate with each other and exchange knowledge is changing in a dramatic way. Remarkably, this is only to a quite limited extent reflected in the teaching methods and curricula of the visited departments. Everywhere we saw a strong emphasis on classical methods of knowledge transfer. Most teachers and also almost all students expressed a preference for blackboard-and-chalk lectures (although several teachers experimented with concepts like ‘flipping the classroom’); and in guiding students in a Bachelor project or Master thesis, the classical one-on-one master-pupil relation invariably was in place, apparently to everyone’s satisfaction. The panel in principle strongly supports this; there are good reasons why the above-described common practice has been so effective in the past centuries.

A second revolutionary change is that data of various types are becoming available in many different forms and in unprecedented amounts. It is obvious that mathematics can make major contributions in dealing with such data: their storage, processing, statistical analysis and their use for optimization purposes (among others, in Artificial Intelligence) all give rise to deep mathematical problems. At the various site visits, however, we were often struck by the robustness of the mathematics curriculum. We saw a ‘cathedral’ with strong pillars (learning lines) like Analysis, Algebra and Geometry, Scientific comput-

ing and Stochastics. Again the panel had a natural tendency to support this. The mathematical building indeed can be viewed as a cathedral, with pillars which have proven their strength through the ages, and it is essential that a student of mathematics acquires fundamental knowledge about the key topics and methodologies, as well as becoming well versed in mathematical reasonings and proof techniques.

And yet, and yet... one cannot escape the feeling that quite possibly, twenty years from now, completely different methods of knowledge transfer will be in use in mathematics teaching, and a number of completely new topics will have been included in the curriculum — at the expense of some traditional topics. But one thing must and will definitely survive the times: the ability of mathematics students to think in a well-structured way, applying strictly logical lines of reasoning, will always be an important added value.

As a postscript we would like to add that twenty weeks after the completion of our general report, instead of twenty years, Covid-19 forced all mathematics departments to drastically change their teaching methods. The efficiency and effectiveness in which the various departments have dealt with this is truly impressive, and a testimony of the dedication, flexibility and quality of teaching directors and teachers alike. We hope that, after the crisis, the teachers can resume their proven teaching standards with face-to-face encounters, and enrich them by some new insights gained during this involuntary experiment. ☞



Quintijn Puite

*Eindhoven School of Education
Technische Universiteit Eindhoven
g.w.q.puite@tue.nl*

Sietske Tacoma

*Instituut voor Arbeid en Organisatie
Hogeschool Utrecht
sietske.tacoma@hu.nl*

Event EGMO 2020

The virtual EGMO: creative ways to address the disruption

The European Girls' Mathematical Olympiad (EGMO) 2020 was planned to be held in the Netherlands, in Egmond aan Zee. Eventually, the competition took place as a purely virtual event because of the COVID-19 pandemic. In this report, Quintijn Puite and Sietske Tacoma tell us more about how the transition to an online event and remote competition worked out.



Students sitting the paper

The European Girls' Mathematical Olympiad (EGMO) 2020 was planned to be held in the Netherlands, in Egmond aan Zee. Three years ago, we started our preparations for EGMO 2020: building up the organisation, getting the support of the Ministry of Education, Culture and Science, looking for sponsors and other funds, launching a preliminary website.

At the beginning of March, we were ready for hosting more than 500 people in hotel Zuiderduin in Egmond aan Zee. Our Logistics Committee had everything ordered and ready: backpacks with EGMO 2020-logo serving as goody bags, bloc-notes, water bottles, 15000 sheets of contest paper. The medals were on their way from China. Some members of the mathematical community would have helped as coordinators; their main task would have been correcting the work of the contestants on a particular problem and checking the marks with the leaders of these contestants. Apart from these 40 coordinators, more than 140 other volunteers would have been involved, as team guide, invigilator, crew, or organiser, to make sure the whole event would run smoothly for the more than 200 contestants and their 120 mentors.

On 13 March we had to take the decision to cancel the physical event. As Organising Committee, we took some time to come up with a plan B. Cancel the present edition of the EGMO and host it in another

EGMO

The European Girls' Mathematical Olympiad is an international mathematics competition similar in style to the International Mathematical Olympiad (IMO). The EGMO was initiated by the United Kingdom, where the first edition took place in Cambridge in 2012. The contest entails two papers, each consisting of three problems, taken on consecutive days. Participating countries send teams consisting of four female mathemati-

cians of school age. The EGMO was created to encourage more girls to discover and further develop their mathematical talent. The contest not only offers these girls the opportunity to excel at an international competition level, but also to meet other girls with a talent for mathematics. Both the competition and these encounters can contribute to these girls developing their mathematics talent and choosing, for example, a specialisation in science.



er year? Postpone the present edition until September? Or turn it into a virtual event? On 25 March, exactly three weeks before the start, we decided for this third option. Our main motivation was that it was far from sure that we could organise a physical event just a couple of months later, while at the same time more than 200 girls all over the world had qualified themselves to participate in this year's EGMO, not next year's.

Naturally, this implied that in this year's EGMO everything would be different. Many of the participants were encountering difficult times, being locked in their houses, worrying about relatives or friends. We did not ignore this background; this was the state of the world and all of us (contestants, leaders and organisers) had to deal with it. We are happy our sponsors kept supporting this new form of the EGMO.



Cube mosaic design contest

Our Ceremonies Committee turned the Opening and Closing Ceremony into very sparkling virtual versions. The team parade for the Opening Ceremony consisted of pictures that all delegations had sent in beforehand, yielding very creative contributions. Tom Verhoeff presented a lecture on Lehmer's dance, a theme that would have been present in the real Opening Ceremony as well. In the Closing Ceremony, Dutch minister of Education, Culture and Science Ingrid van Engelshoven encouraged participants to keep developing and enjoying their talent.

For the contest itself, many contestants sat the papers at their homes, one of their parents being in charge as invigilator under the responsibility of the team leader. After having received the scans of the participants' work, the leaders and deputy leaders could start marking the scripts. Our coordinators — still 20 coordinators were involved — came up with very elaborate marking schemes. Moreover, we had set up a forum on which leaders could ask questions, e.g. about how to mark certain scripts or how to interpret the marking schemes. The forum has been extensively used and played an indispensable role in the quality of the marking process.

After the contest, we organised a lot of online activities, such as a virtual visit to the flower gardens of the Keukenhof (a physical visit was planned in the original set up), a nail art challenge, a cube mosaic design contest and a bingo. For this bingo, contestants had to reach out to others, for instance via Instagram or using the contestant forum. Interviews with contestants were published on our YouTube-channel and our website, contestants could submit their favourite song to a radio EGMO playlist, and one of our sponsors organised a live chat

with contestants. For an impression of the whole week, take a look at our compilation video on our YouTube-channel [1].

We hope that this year's EGMO, although far from what everybody originally had been expecting, has brought some happiness. We believe that working on the extremely challenging maths problems was a nice distraction in these difficult times and that meeting other contestants and staying in touch via social media was fun (although not the same as physical encounters). We are very happy to have received so much positive feedback about the fact that EGMO was able to go on in this way and how we turned it into something to remember.

We thank all sponsors for their generous support: ING and Ministry of Education as gold sponsors; ASML, Diamant, IBM SPSS Fund, G-research, Optiver, STAR-cluster, University Leiden and W&I Outreach as silver sponsors; Cito, Freudenthal Institute, Jane Street, NDNS+-cluster, NVvW, Spinoza Fund, St. Michaël College and Keylane as bronze sponsors.

The winning countries of EGMO 2020 were Russian Federation, Serbia and Romania. The Dutch team became 31st out of 52 participating countries. Hanne Snijders (17, Rotterdam), Ana Mekerishvili (17, Den Haag) and Kati Overbeeke (17, Eindhoven) all won a bronze medal. In total 52 bronze medals were handed out, 41 silver medals and 19 gold medals, which have been shipped over the world last summer. ❦

An earlier version of this article appeared in the 33rd EWM newsletter [2].

References

- 1 EGMO compilation, youtu.be/reQBstWlw6c
- 2 European Women in Mathematics, Newsletter 33, <https://www.europeanwomeninmaths.org/newsletter/newsletter-33/>

Ross J. Kang

Department of Mathematics
Radboud University Nijmegen
ross.kang@gmail.com

The Solution

Parties a smidgen smaller

Recently Ashwin Sah, a precocious researcher at MIT, made small but significant progress in an old, difficult and important problem in combinatorics. Ross Kang describes this problem and the steps that have been made thus far.

There's been a rush of exciting results in Combinatorics recently, with many evidently immutable challenges suddenly yielding. When I was asked to write about one of these, I elected for what on the face of it appears to be relatively small progress, but for one of the oldest, most cherished, and most difficult challenges of them all.

Imagine hosting a party prior to the 9th of March of this year. Of course, as a conscientious host, you naturally wonder to yourself, are there 3 guests here all of whom have previously shaken hands with each other, or are there 3 no two of whom have ever shaken hands? Could it be that this is already guaranteed merely by dint of having sufficiently many houseguests? More specifically, what is the *minimum* number (if it exists) of houseguests to guarantee this, arguably curious, property?

The answer here is not 5, as you could have some 5 houseguests sat around a round table, each having shaken hands only with his or her two neighbours. And a routine case analysis will check that the minimum is indeed exactly 6, so perhaps a subdued affair. On the other hand, already

when the parameter 3 above is raised to, say, 5, the precise value of the corresponding minimum is a well-known open problem — the current best lower bound is 43, while the upper bound was recently lowered with extensive computer assistance to 48 by Angeltveit and McKay [1]. You quickly run out of room in your house, because the problem suffers so badly from ‘combinatorial explosion’.

The fact that when 3 is replaced by any fixed positive integer k , the corresponding minimum, call it $R(k)$, is always well-defined was shown by a Cambridge polymath of the early twentieth century, Frank Plumpton Ramsey (or ‘The man who thought too fast’ [6], according to a recent *New Yorker* piece). He established this fact as a lemma: he needed it for the decidability of some first-order logic statements in relation to a Hilbert problem [7]. This has become one of his namesakes: the $R(k)$ are known as *Ramsey numbers*.

One might better cast this in graph theoretic terms: associate a vertex of the graph to each guest; if two guests have ever shaken hands, include an edge be-

tween their respective vertices. Ramsey proved that, given a positive integer k , there is some least integer $R(k) < \infty$ such that in *any* graph on $R(k)$ vertices, one is guaranteed some k -vertex subset within which either all $\binom{k}{2}$ pairs of vertices are included as edges — it forms a *clique* — or none are — it forms a *stable set*. See Figure 1 for an example showing $R(4) > 17$. Cliques and stable sets are two of the tidiest graph structures possible, so one can view Ramsey's theorem as finding order within some arbitrary system, a common refrain in mathematics.

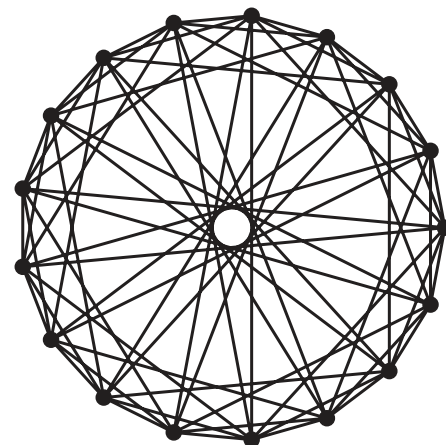


Figure 1 A Paley graph of order 17 has no cliques or stable sets of size 4.



While Ramsey was satisfied with the fact that each $R(k)$ exists (nevertheless in a footnote he wrote “But this value is, I think, still much too high.”), Paul Erdős and George Szekeres [5] soon after revisited Ramsey’s theorem, as one way towards a problem in discrete geometry, the fabled *Happy Ending Problem*. (Their work appeared in one of the first issues of *Compositio Mathematica*.) They produced the following argument for bounding $R(k)$. First, consider a more general definition, where $R(k, l)$ denotes the least integer such that in any graph on $R(k, l)$ vertices, one is guaranteed a clique of order k or a stable set of order l . Second, note that it is enough to verify, together with the trivial base cases $R(1, k) = R(k, 1) = 1$ and $R(2, k) = R(k, 2) = k$, that $R(k+1, l+1) \leq R(k, l+1) + R(k+1, l)$ for each $k, l \geq 1$. For then this class of upper bounds satisfies the recurrence for the binomial coefficients $\binom{k+l}{k}$. Third, take any graph with $R(k, l+1) + R(k+1, l)$ vertices, so that any vertex v must have either $R(k, l+1)$ neighbours or $R(k+1, l)$ non-neighbours, by the pigeonhole principle. In the former case, there is by definition a set of neighbours of v that forms either a k -vertex clique — so together with v is a $(k+1)$ -vertex clique — or an $(l+1)$ -vertex clique, and either way we are done. The latter case about $R(k+1, l)$ non-neighbours is symmetric. This yields that

$$R(k) = R(k, k) \leq \binom{2k-2}{k-1} = \left(\frac{1}{2\sqrt{\pi}} + o(1)\right) \frac{4^k}{\sqrt{k}} \quad (1)$$

as $k \rightarrow \infty$. Upon first witnessing such a short and basic argument, one might ask: why can’t this easily be beaten? But before that, the bound being exponential in k , could the Ramsey numbers really be so large?

A little over a decade later, Erdős addressed this latter question [3] and in doing so incidentally seeded the birth of two separate, though closely intertwined fields, namely Probabilistic Combinatorics and Random Graph Theory. In hindsight, his unexpected realisation was natural, that is, to use a ‘most arbitrary’ of systems, a binomial random graph. That is, take a collection of n vertices and, independently, for each of the $\binom{n}{2}$ pairs, toss a fair coin to determine whether or not the pair is included as an edge. By a straightforward estimation of the size of a largest clique or stable set in this probability space of graphs, together with a flourish of what is now called the *probabilistic method*, he proved the existence of graphs certifying an exponential lower bound:

$$R(k) \geq \left(\frac{1}{\sqrt{2}e} + o(1)\right) k \sqrt{2}^k$$

as $k \rightarrow \infty$. After more than seventy years and the growth of a mature, consistently active field around this result, which incorporates other perspectives from nearby areas such as probability, algorithms and network science, this remains, up to the leading constant, the best known lower bound.

Back to the question of improving upon the simple bound (1), it also turns out to be

a stubbornly enduring challenge. However, a natural idea for enhancing the Erdős–Szekeres inductive argument above was introduced by Andrew Thomason, also of Cambridge, in the late eighties [9]. Instead of considering some vertex v , one may consider some r -vertex clique (or, symmetrically, r -vertex stable set) and bound the number of ways it can be extended to a $(k+1)$ -vertex clique (respectively $(l+1)$ -vertex stable set) inductively. The catch is that to conclude, instead of using the pigeonhole principle as before, one must consider graphs that contain neither a $(k+1)$ -vertex clique nor an $(l+1)$ -vertex stable set, so-called *Ramsey graphs*, and carefully estimate how many r -vertex cliques and stable sets they contain. Thomason leveraged the case $r=3$ to obtain a polynomial factor improvement on (1).

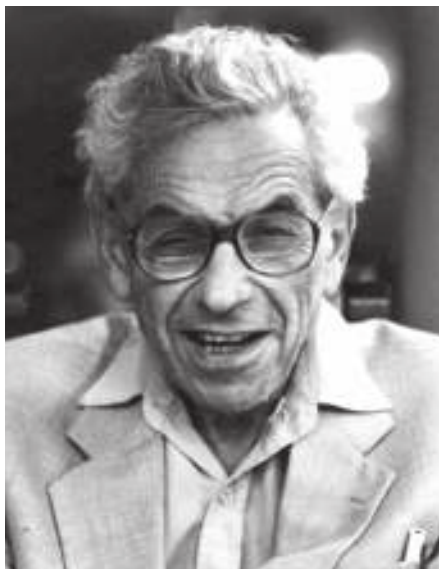
A good while later, we saw the last major advance. I recall it was my first professional visit to Hungary in 2006 when Ron Graham — the late mathematician and juggler extraordinaire — had completely regigged his plenary talk to tell the story of Ramsey numbers and, in particular, to eagerly discuss a circulating preprint by a then-Cambridge-PhD-student David Conlon. It eventually appeared in the *Annals of Mathematics* [2]. Conlon, building comprehensively upon the enhanced inductive strategy of Thomason’s, achieved a first superpolynomial improvement upon (1):

$$R(k) \leq \binom{2k-2}{k-1} \exp(-c(\log k)^2 / \log \log k)$$

for some absolute constant $c > 0$. Conlon



Frank Ramsey



Paul Erdős



Ron Graham



Ashwin Sah

did so by carrying out the clique and stable set counts for larger fixed r via a *quasi-random* framework: roughly speaking, by comparing Ramsey graphs to binomial random graphs.

Now fourteen years since the last breakthrough, it is another phenom, this time a young scholar based in *another* Cambridge (Massachusetts), having only this year completed his bachelor's degree, yet with

already an astonishing array of scientific contributions under his belt, Ashwin Sah. By incorporating techniques from the theory of Graph Limits — a modern, analytic descendant of Random Graph Theory — Sah has accomplished a more efficient, and nearly optimal, estimate of the required subgraph counts, effectively pushing the quasirandom framework to its limit [8]. This gives a further superpolynomial improvement on (1):

$$R(k) \leq \binom{2k-2}{k-1} \exp(-c(\log k)^2)$$

for some absolute constant $c > 0$.

So where are we now? At broader granularity, the current bounds yield

$$\sqrt{2} \leq \liminf_{k \rightarrow \infty} R(k)^{1/k} \leq \limsup_{k \rightarrow \infty} R(k)^{1/k} \leq 4,$$

but this is how it stood in 1947! Erdős [4] wrote, “I offer 250 dollars for a proof that

$$\lim_{k \rightarrow \infty} R(k)^{1/k} = c \quad (2)$$

exists and I offer 10000 dollars for a disproof. I am of course sure that (2) holds. I offer 250 dollars for the determination of c ... perhaps $c = 2$?” Sah’s progress has shown that there is some give, albeit tiny in relative terms, in this famous challenge. Will it precipitate sudden further progress? Or will it amount to an even more difficult barrier? $\zeta \cdots$

This article is dedicated in admiration of the life and achievements of Ron Graham (1935–2020).

References

- 1 V. Angelstveit and B.D. McKay, $R(5,5) \leq 48$, *J. Graph Theory* 89(1) (2018), 5–13.
- 2 D. Conlon, A new upper bound for diagonal Ramsey numbers, *Ann. of Math. (2)* 170(2) (2009), 941–960.
- 3 P. Erdős, Some remarks on the theory of graphs, *Bull. Amer. Math. Soc.* 53 (1947), 292–294.
- 4 P. Erdős, Problems and results in combinatorial analysis and graph theory, in *Proceedings of the First Japan Conference on Graph Theory and Applications (Hakone, 1986)*, Vol. 72, 1988, pp. 81–92.
- 5 P. Erdős and G. Szekeres, A combinatorial problem in geometry, *Compositio Math.* 2 (1935), 463–470.
- 6 A. Gottlieb, The man who thought too fast, *The New Yorker*, May 2020. <https://www.newyorker.com/magazine/2020/05/04/the-man-who-thought-too-fast>.
- 7 F.P. Ramsey, On a problem of formal logic, *Proc. London Math. Soc. (2)* 30(4) (1930), 264–286.
- 8 A. Sah, Diagonal Ramsey via effective quasirandomness, May 2020, arXiv:2005.09251.
- 9 A. Thomason, An upper bound for some Ramsey numbers, *J. Graph Theory* 12(4) (1988), 509–517.

Joost Nuiten

Institut Montpellierain Alexander Grothendieck
Université de Montpellier
joost-jakob.nuiten@umontpellier.fr

Research Stieltjes Prize 2018

Deformations and derived geometry

In 2018 Joost Nuiten has been awarded the Stieltjes Prize for one of the two best PhD theses in mathematics in the Netherlands. The prize was awarded for his thesis entitled *Lie Algebroids in Derived Differential Geometry*, which he completed at Utrecht University. After getting his PhD he became a postdoc at Université de Montpellier. In this article he describes his research on deformation theory and derived geometry.

Deformations and perturbations are studied in many different branches of mathematics.

- In dynamical systems, one may be interested in the various ways to perturb an orbit and how this affects its periodicity. On the other hand, one can also perturb the dynamical system itself, e.g. by adding higher order corrections to its Hamiltonian.
- In geometry, one can consider families of complex or algebraic varieties deforming a fixed variety X_0 .
- In a more algebraic setting, one can try to deform an associative product $\mu_0: A \times A \rightarrow A$ on a vector space into another associative product of the form

$$\mu_{\hbar}(a, b) = \mu_0(a, b) + \hbar \mu_1(a, b) + \hbar^2 \mu_2(a, b) + \dots$$

In all these different situations, one poses a similar kind of question: given a certain mathematical object X_0 , how many families $\{X_{\hbar}\}$ of ‘nearby objects’ around X_0 are there? In particular, can X_0 be deformed into something else or is it *rigid*, i.e. unchanged under any deformation?

To address such questions, a first step is to study the *formal* deformations of X_0 . Concretely, this means that we allow formal power series in $\hbar$, for example in the formula for the deformed product $\mu_{\hbar}$.

One can study such formal deformations inductively, by working up to terms

of order $\hbar^{n+1}$. More precisely, any formal deformation arises as the limit

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \{X_{\hbar}\}_{\hbar^{n+1}=0}$$

of a compatible sequence of n -th order infinitesimal deformations, i.e. deformations modulo $\hbar^{n+1}$. To produce formal deformations, one is therefore lead to the following question:

Question. Suppose we have found an infinitesimal deformation $\{X_{\hbar}\}_{\hbar^{n+1}=0}$ of order n , can we extend it to a deformation of order $n+1$? If yes, how many possible extensions are there?

When deforming an associative product μ_0 , this comes down to inductively finding the terms μ_n for which the resulting operation $\mu_{\hbar}$ is associative up to terms of order $\hbar^{n+1}$. The infinitesimal deformations of a variety are best described using the language of schemes: one deforms X_0 into a scheme over $\text{Spec}(\mathbb{C}[[\hbar]]/(\hbar^{n+1}))$.

In geometric situations like the last one, infinitesimal deformations have an additional local-to-global property: we can first deform X_0 *locally* (deform various small open subsets of X_0) and then try to glue all these local deformations together. We will come back to such ‘local’ deformation problems at the end of the text, where we discuss how they can be studied in terms of *Lie algebroids*.

Obstructions

In many different situations, the answers to the above question turn out to exhibit the same general pattern: one can write down a sequence of vector spaces $H^0, H^1, H^2, \dots$ that controls the infinitesimal deformations of X_0 in the following way:

1. There is a bijection between first order deformations of X_0 and the vector space H^1 .
2. There is a bijection between first order *automorphisms* of X_0 and H^0 .
3. Suppose that X_n is an n -th order deformation of X_0 . Then one can construct a canonical element

$$\text{ob}(X_n) \in H^2$$

called its *obstruction class*, with the following property: X_n can be extended to a deformation of order $n+1$ if and only if

$$\text{ob}(X_n) = 0.$$

In this case, there is a bijection between the set of possible $(n+1)$ -st order extensions and the cohomology group H^1 .

In fact, these vector spaces arise most naturally from a cochain complex of vector spaces

$$\dots \xrightarrow{d} \mathfrak{g}^{-1} \xrightarrow{d} \mathfrak{g}^0 \xrightarrow{d} \mathfrak{g}^1 \xrightarrow{d} \mathfrak{g}^2 \xrightarrow{d} \dots$$

(where $d \circ d = 0$) by taking cohomology groups

$$H^i(\mathfrak{g}) = \frac{\ker(d: \mathfrak{g}^i \rightarrow \mathfrak{g}^{i+1})}{\text{im}(d: \mathfrak{g}^{i-1} \rightarrow \mathfrak{g}^i)}.$$

For example, Kodaira and Spencer [3] have shown that the infinitesimal deformations of a complex manifold are controlled by the Dolbeault complex

$$\begin{array}{c} \Omega^{0,0}(X_0, T_{X_0}) \xrightarrow{\bar{\partial}} \Omega^{0,1}(X_0, T_{X_0}) \hookrightarrow \\ \hookrightarrow \Omega^{0,2}(X_0, T_{X_0}) \xrightarrow{\bar{\partial}} \dots \end{array}$$

The zeroth cohomology group of this complex consists of holomorphic vector fields: these are precisely the infinitesimal automorphisms of X_0 .

Similarly, the deformations of an associative algebra A are controlled by its Hochschild complex [1]: this cochain complex is given in degree i by the vector space of multilinear maps

$$A^{\otimes i-1} \longrightarrow A.$$

The differentials are built by composing with the multiplication μ_0 on A (using the Gerstenhaber bracket discussed below). The first Hochschild cohomology group consists of bilinear maps μ_1 such that $\mu_0(a, b) + \hbar \cdot \mu_1(a, b)$ is an associative product up to $\hbar^2$.

Lie algebras

The various complexes $\mathfrak{g}$ that thus appear in deformation theory tend to carry some additional algebraic structure. For instance, the obstruction to extending a first order deformation to a second order one gives rise to an additional operation

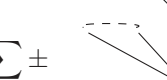
$$\mathrm{ob}_2: H^1(\mathfrak{a}) \rightarrow H^2(\mathfrak{a}).$$

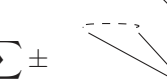
In practice, it turns out that the extra algebraic structure appearing naturally on $\mathfrak{g}$ is a binary operation

$$[-, -]: \mathfrak{q}^i \otimes \mathfrak{q}^j \rightarrow \mathfrak{q}^{i+j}$$

that makes it a differential graded *Lie algebra*.

For example, the Dolbeault complex $\Omega^{0,*}(X_0, T_{X_0})$ carries a Lie bracket coming from the commutator bracket of vector fields. The Hochschild complex carries the so-called Gerstenhaber bracket, a version of the commutator where we sum over all ways of inserting one map into the other:

$$[\alpha, \beta] = \sum_i \pm$$


$$- \sum_j \pm$$


The additional structure of the Lie bracket on $\mathfrak{g}$ can be used to explicitly compute the obstruction classes mentioned above. For example, the map ob_2 is simply given by

$$\text{ob}_2(x) = \frac{1}{2}[x, x].$$

There are more complicated formulas for the n -th order obstructions, in terms of operations resembling the Massey products from algebraic topology (and division by $n!$). This natural appearance of Lie brackets in deformation theory has lead to the following:

Principle (Deligne). *Every deformation problem over a field of characteristic zero is controlled by a differential graded Lie algebra.*

In fact, there is a very explicit mechanism by which a dg-Lie algebra $\mathfrak{g}$ controls deformations. Indeed, infinitesimal deformations of X_0 correspond bijectively to infinitesimal deformations of the element 0 in the space of elements $x \in \mathfrak{g}^1$ that satisfy the Maurer–Cartan equation

$$d(x) + \frac{1}{2}[x, x] = 0.$$

(One furthermore has to take the quotient by a certain equivalence relation; see [2] for more details.)

In this way, dg-Lie algebras provide an efficient tool to study deformation problems, sometimes with striking results. A famous example is Kontsevich' construction of a deformed (noncommutative) star-product on the algebra of functions on a Poisson manifold: this relies on the (difficult) algebraic fact that its Hochschild complex is formal [4].

On the other hand, the above heuristic by no means gives a concrete recipe to find the relevant dg-Lie algebra. Instead, one typically needs some creativity and skill to come up with the dg-Lie algebra controlling the deformation problem at hand. Deligne's principle therefore confronts us with the following challenge:

Problem. Given a deformation problem, construct in a natural way the dg-Lie algebra that controls it.

Geometric perspective

There has been a lot of work on giving a systematic solution to the above problem, in terms of geometry. The starting point

of these works is the following geometric idea: let us think about the object X_0 that we want to deform as a single point inside some space $\mathcal{M}$. From this perspective, a deformation of X_0 is simply a path inside the space $\mathcal{M}$.

Likewise, a first order deformation of X_0 should be an infinitesimal path in $\mathcal{M}$, i.e. a tangent vector. This gives a geometric interpretation of the vector space $H^1(\mathfrak{g})$, as the *tangent space*

$$H^1(\mathfrak{g}) = T_{X_0}\mathcal{M}.$$

This line of thought suggests a possible solution to the above problem: we may try to reconstruct the dg-Lie algebra controlling deformations of X_0 from the infinitesimal geometry of a putative *moduli space* $\mathcal{M}$.

Most algebro-geometric objects can indeed be organized into such moduli spaces. Probably the most classical example of a moduli space is projective space $\mathbb{P}^n(\mathbb{C})$, whose points are lines in $\mathbb{C}^{n+1}$. Likewise, an orbit of a dynamical system can itself be considered as a point in the *orbit space*, and an associative algebra can be thought of as a point in the ‘moduli space of associative algebras’.

We will be rather open-minded about the precise meaning of ‘moduli space’ (technically, it is best described as a functor of points). Instead of providing more details, let us just informally describe two ways to get examples:

- a. As solution sets of (polynomial) equations.
- b. As quotients where we (smoothly) glue together points.

For example, there is a moduli space of associative algebra structures on a vector space V , constructed as follows. We start with the vector space of all bilinear maps

$$\mu: V \otimes V \rightarrow V$$

and consider the (quadratic) function $\mu \mapsto \text{As}(\mu)$ sending each such μ to the trilinear map

$$\mu(\mu(a,b),c) - \mu(a,\mu(b,c)).$$

The solution set $\{\mu: \text{As}(\mu) = 0\}$ is precisely the subspace of associative multiplications. This is not quite the correct moduli space yet: in addition, we should identify two associative multiplications if they are related by a change of coordinates, i.e. by conjugating with some $T \in \text{GL}(V)$.

When Z is a regular subvariety of $\mathcal{M}$, we can again try to use a linear approximation: we can approximate $\mathcal{M}$ by the *normal bundle* of Z inside $\mathcal{M}$. In the singular setting, the theory of derived algebraic

geometry provides a certain cochain complex of sheaves on Z that refines the normal bundle.

Very informally, the derived normal bundle comes with a ‘Lie algebra structure depending smoothly on the basepoint $z \in Z$ ’. More precisely, one can prove that it naturally carries the structure of a *dg-Lie algebroid*: its local sections come equipped with a Lie bracket that satisfies the Leibniz rule

$$[v, f(z) \cdot w] = f(z) \cdot [v, w] + \mathcal{L}_v(f)(z) \cdot w$$

for any function f on Z . One can think of Lie algebroids as generalizations of the tangent bundle, which allow for the usual calculus of vector fields. As such, they appear in many parts of geometry, e.g. in Poisson geometry and the study of foliations and Lie group actions.

Theorem (Nuiten [8]). *The formal neighbourhood $\mathcal{M}_Z^\wedge$ is completely determined by the derived normal bundle, together with its dg-Lie algebroid structure.*

For each point $x \in Z$, the dg-Lie algebra $\mathbb{T}_x \mathcal{M}$ can then be recovered from the fiber of the normal bundle at x . Consequently, the above theorem describes how these various Lie algebras are glued together.

On the other hand, the (derived) *global sections* of the dg-Lie algebroid also form a dg-Lie algebra: this is precisely the dg-Lie algebra controlling the deformations of Z within $\mathcal{M}$. We can therefore use Lie algebroids to simultaneously study deformations by algebraic and local-to-global methods.

As a final remark, let us point out one of the nice features of derived algebraic geometry: the construction of the derived normal bundle requires no assumptions on

Example (Moduli of 2-dimensional algebras)

Let A be a 2-dimensional real unital algebra and pick a basis $1, x$. The multiplication on A is uniquely determined by the element $x^2 = a \cdot 1 + b \cdot x$. In fact, every pair of $a, b \in \mathbb{R}$ defines a unital associative product on A in this way.

We can also describe this same multiplication in a different basis $1, x'$. For example,

$$x' = x - \frac{b}{2} \cdot 1 \rightsquigarrow (x')^2 = a' \cdot 1$$

(where $a' = a + b^2/4$). Similarly,

$$x'' = \lambda \cdot x' \rightsquigarrow (x'')^2 = (\lambda^2 a') \cdot 1.$$

Since all bases (fixing 1) are related by these two transformations, the moduli space of 2-dimensional unital algebras is the quotient

$$\mathcal{M} = \mathbb{R}/\mathbb{R}^\times = \{a' \in \mathbb{R}\} / (a' \sim \lambda^2 a').$$

This has three points $a' = 0, 1, -1$. These correspond to the real algebras $\mathbb{R}[X]/X^2$, $\mathbb{R}[X]/(X^2 - 1)$ and $\mathbb{C}$.

The tangent complex at such a' is

$$\mathbb{T}_{a'}^{-1} \mathcal{M} = \mathbb{R} \xrightarrow{-2a'} \mathbb{R} = \mathbb{T}_{a'}^0 \mathcal{M}$$

where the differential is the derivative of $\lambda^2 \cdot a'$ at $\lambda = 1$. All Lie brackets are zero, except $\mathbb{T}^{-1} \times \mathbb{T}^0 \rightarrow \mathbb{T}^0$ which simply multiplies two real numbers. We invite the reader to compare this to the Hochschild complex mentioned before: the tangent complex is much smaller, but has the same cohomology.

When $a' \neq 0$, the tangent complex has zero cohomology. This expresses that the algebras $\mathbb{R}[X]/(X^2 - 1)$ and $\mathbb{C}$ are *rigid*: any formal deformation is isomorphic to the original algebra.

When $a' = 0$, the zeroth cohomology group is 1-dimensional. Indeed, the 1-parameter family of algebras $\mathbb{R}[X]/(X^2 - \hbar)$ gives a nontrivial deformation of $\mathbb{R}[X]/X^2$.

the map $Z \rightarrow \mathcal{M}$. In particular, we can take $\mathcal{M} = Z/\sim$ to be a (smooth) *quotient* of Z , as in (b). In this case, the dg-Lie algebroid $\mathfrak{g}$ provided by the theorem can be used to study the *global* geometry of $\mathcal{M}$, working over the (less singular) space Z . This is particularly useful in a differential-geometric setting, where the global geometry of $\mathcal{M}$ is related to the Lie algebroid $\mathfrak{g}$ by means of various integrability statements.

Further reading

The relation between deformation theory and dg-Lie algebras has a long history, of which we have omitted many chapters. The lecture notes of Manetti [7] provide an accessible account, discussing the work of Kodaira–Spencer in great detail. For treatments in terms of derived algebraic geometry, we recommend the talks of Lurie [5] and Toën [12].

References

- 1 M. Gerstenhaber, On the deformation of rings and algebras, *Ann. of Math. (2)*, 79 (1964), 59–103.
- 2 W.M. Goldman and J.J. Millson, The deformation theory of representations of fundamental groups of compact Kähler manifolds, *Inst. Hautes Études Sci. Publ. Math.* 67 (1988), 43–96.
- 3 K. Kodaira and D.C. Spencer, On deformations of complex analytic structures, I, II, *Ann. of Math. (2)* 67 (1958), 328–401, 403–466.
- 4 M. Kontsevich, Deformation quantization of Poisson manifolds, *Lett. Math. Phys.* 66(3) (2003), 157–216.
- 5 J. Lurie, Moduli problems for ring spectra, *Proceedings of the ICM*, Vol. II, Hindustan Book Agency, New Delhi, 2010, pp. 1099–1125.
- 6 J. Lurie, Derived algebraic geometry X: Formal moduli problems (2011), available at <https://www.math.ias.edu/~lurie>.
- 7 M. Manetti, Lectures on deformations of complex manifolds (deformations from differential graded viewpoint), *Rend. Mat. Appl.* 24(7) (2004), 1–183.
- 8 J. Nuiten, Koszul duality for Lie algebroids, *Adv. Math.* 354 (2019), 106750, 63.
- 9 J.P. Pridham, Unifying derived deformation theories, *Adv. Math.* 224(3) (2010), 772–826.
- 10 M. Schlessinger, Functors of Artin rings, *Trans. Amer. Math. Soc.* 130 (1968), 208–222.
- 11 B. Toën, Derived algebraic geometry, *EMS Surv. Math. Sci.* 1(2) (2014), 153–240.
- 12 B. Toën, Problèmes de modules formels, *Séminaire Bourbaki*, No. 1111, 2016.

Open podium

Brieven van lezers
redactie:
brieven@nieuwarchief.nl

Een antwoord op de vraag: “Wie weet wie Willem Wijthoff was?”

In het decembernummer van het *Nieuw Archief voor Wiskunde* uit het jaar 2016, van de hand van Robbert Fokkink, staat de prachtige, boeiende, bijdrage over het leven en werken van de wiskundige Willem Wijthoff (1865–1939) en onder anderen van diens zuster Anna Geertruida Wijthoff. Vóór het verschijnen ervan, was ik al bekend met de inhoud van de bronnen uit de Referenties welke aldaar vermeld staan onder de nummers 2, 3, 5, 6, 11, 12, 13, 17, 18 en 19. Maar behalve de zaken verwerkt in die bijdrage, valt er meer te vernemen over Willem Abraham Wijthoff. Men zie de volgende bibliografische opsomming, hier en daar voorzien van enig commentaar en bijzonderheden gerelateerd aan Fokkink's artikel.

1. Het uiterst merkwaardige, doch tegelijkertijd behoorlijk onbekende en naar mijn mening zeer belangrijke, boekwerkje: *De ontwikkeling der natuurwetenschappen in Nederland gedurende de laatste halve eeuw* [“Saamgesteld door verschillende schrijvers op verzoek van het comité tot voorbereiding van de wetenschappelijke afdeling in het Nederlandsche paviljoen der internationale tentoonstelling te Luik 1930”], uitgegeven bij S.C. van Doesburgh, Leiden, 1930. Het wiskundehoofdstuk staat op de pagina's 94 t/m 102. Op pagina 99 staat onder meer te lezen: “...Van Schoute's werk worde hier genoemd de beide deeltjes uit Sammlung Schubert: ‘Mehrdimensionale Geometrie’. Als inleiding hierin (en in de niet-Euclidische meetkunde) zijn ook bedoeld het elementair geschreven werkje: ‘de Vierde Dimensie’ door Hk de Vries, hoogleeraar te Amsterdam sinds 1906, en het veel te weinig bekende proefschrift van W. A. Wijthoff: ‘Het Biquaternion als Bewerking in de Ruimte van vier Afmetingen’ (Amsterdam, 1898), een axiomatisch gefundeerde studie over de vier dimensionele ruimte en de daarin mogelijke bewegingen.” Dit boekje had ik van mijn vader gekregen in het jaar 1958; voor een kwartje aangeschaft bij het antiquariaat van de Slegte te Den Haag.
2. W.W. Rouse Ball en H.S.M. Coxeter: *Mathematical Recreations*, de reprintuitgave uit 1959. Wijthoffs Game staat op pagina 91 en 92. in de voetnoot op pagina 158 wordt verwezen naar bovenvermelde bron 19.
3. N.L. Biggs, F.K.I. Loyd en R.J. Wilson: *Graph Theory 1736–1936*, Clarendon Press, Oxford, 1977. De bibliografische gegevens van Mantels probleem en Wijthoffs oplossing staan op pagina 230 vermeld in Appendix 3, geheten: ‘Bibliography 1736–1936’.
4. In het *Jaarboek van het Centraal Bureau voor Genealogie*,

deel 42, jaar 1988, staat op de pagina's 153 t/m 212 het artikel: ‘Vier generaties van een clan actief in de theecultuur op Java’, door N.P. van den Berg en K.A. van der Hucht. Op pagina 172 linkerkolom, komen we Anna Geertruida Wijthoff tegen en Ir. Julius Albertus Kerkhoven; op pagina 193, Willem Abraham Wijthoff, Anna Catharina Wijthoff, Clara Henriëtte Wijthoff, Anna Geertruida Wijthoff, hun ouders, enzovoort. Het hele artikel is een groot en grotesk, uitvoerig, volledig verhaal met biografische en genealogische gegevens.

5. Als kers op de taart noem ik Siobhan Roberts' boek: *King of Infinite Space* (Donald Coxeter, the Man Who Saved Geometry), House of Anansi Press, Toronto, Canada, 2007. Willem Abraham Wijthoff staat, met volledige voornamen, vermeld in de index op pagina 399. Op pagina 79 staan diens ‘mirrors with weights and props’ genoemd, gerelateerd aan de Coxeter diagrammen die op pagina's 91 en 92 ter sprake komen. Ook op die pagina 79 staat ‘Dutch mathematician William Abraham Wythoff’; met y in plaats van ij, evenals in de namen-index op pagina 399. Op pagina 94 staat in het onderschrift bij het plaatje van de geprojecteerde 600-cel Salomon van Oss als zijnde ‘German’ vermeld; op deze fout in Van Oss' nationaliteit maakte Fokkink me opmerkzaam. Dit boek, een biografie over Coxeters leven en werk, trof ik in 2008 aan in een boekwinkel te Victoria, de hoofdstad van Vancouver Island, Canada. Een absolute bestseller, zeer aanbevolen!
6. Het is vermeldenswaard op te merken dat S.L. van Oss, P.H. Schoute, W.A. Wijthoff en E.L. Elte vier Nederlandse meetkundigen zijn die als zodanig in een KNAW-herdenkingsnecrologie in 2003 betreffende Donald Coxeter genoemd worden. De schrijver van die necrologie, T.A. Springer, duidt dit viertal aan als Nederlandse wiskundigen die zich in het begin van de twintigste eeuw met meerdimensionele regelmatige lichamen hebben bezig gehouden. Springer merkt daarbij op (citaat) “dat hun werk in onze tijd min of meer vergeten lijkt te zijn geraakt”.

In de buitenlandse pers wordt Wijthoff vaak als Wythoff geschreven, soms ook met één f. Er zijn ooit in het verleden personen met die naam, naar ik aanneem in de negentiende eeuw of eerder, in de Verenigde Staten, Australië, of beide, terecht gekomen. In Nederland wonen nog personen met de achternaam Wijthoff. In New York bevindt zich het Wyckoff Memorial House (let op de c en de k), dat geldt als het oudst nog bestaande huis van de Verenigde Staten, naar men zegt; heeft dat qua familieverbanden te maken met Wijthoff? Interessant om uit te zoeken.

Robert van der Waall

Casper Albers*Psychometrie & Statistiek
Rijksuniversiteit Groningen
c.j.albers@rug.nl***Column** Casper grijpt een kans

De Amerikaanse verkiezingen gepeild

De verkiezingen in de Verenigde Staten waren amper voorbij, of de media rolden over elkaar heen met de ‘De peilers zaten er weer enorm naast!’-berichten. Klopt dat wel?

Ik schrijf deze column enkele dagen nadat de Amerikaanse media Joe Biden en Kamala Harris tot winnaar uitgeroepen hebben. Van twee staten (Georgia en North Carolina) hebben de media de winnaar nog niet aangewezen, maar Biden zit boven de 270 en heeft dus vooralsnog gewonnen. Wel met een slag om de arm: nog geen enkele staat heeft formeel de resultaten vastgelegd en team-Trump is nog druk bezig om via rechtszaken de uitslag te veranderen.

Trump had van tevoren al aangegeven dat zijn strategie zou zijn om *fraude* te roepen als de resultaten hem niet bevielen. Sterker nog, hij had in een debat met Clinton in 2016 al aangegeven de uitslag van de verkiezing alleen te accepteren als hij won. Die hoeven we dus niet serieus te nemen. Maar het verloop van de ‘tussenstand’ bij het tellen van de stemmen was natuurlijk wel opvallend. In veel *swing states* ging Trump steeds meer aan kop, totdat er een keerpunt kwam en Biden in ging lopen. Bij een aantal

staten was het inlopen onvoldoende om de staat blauw te laten kleuren, maar bij andere staten niet. Toen Biden genoeg punten had om het Commonwealth of Pennsylvania te winnen, werd hij tot winnaar uitgeroepen.

Maar hoe ongewoon is het, dat een kandidaat flink voorligt maar uiteindelijk toch verliest? Laten we die vraag beantwoorden door naar Pennsylvania te kijken. De einduitslag is nog niet bekend, maar wel de stand na het tellen van 99% van de stemmen – en laten we die voor nu dan maar als einduitslag interpreteren. Voor het gemak laten we de circa 90 duizend stemmen die op een andere kandidaat zijn uitgebracht of ongeldig zijn buiten beschouwing: het gaat om Biden versus Trump, de rest is bijzaak.

Kandidaat	Tussenstand	Stand na 99% tellen
Joe Biden	2 798 695	3 365 846
Donald Trump	3 118 571	3 320 510
Totaal	5 917 226	6 686 586



Van de eerste 5,9 miljoen stemmen kreeg Trump er 3,1 miljoen: met 52,7% een duidelijke meerderheid. Als alle stemmen in totaal willekeurige volgorde geteld worden, is de statistiek relatief eenvoudig.

Op de middelbare school komen regelmatig statistiekvragen langs als: “Uit een urn met in totaal N ballen, waarvan R rode en $B = N - R$ blauwe ballen worden willekeurig en zonder terugleggen n ballen getrokken. Wat is de kans dat X , het aantal blauwe ballen, gelijk is aan $b (\leq n)$?” Deze kans is te berekenen met de hypergeometrische verdeling:

$$P(X = b) = \frac{\binom{B}{b} \binom{R}{n-b}}{\binom{R+B}{n}}.$$

Met miljoenen stemmen is de kans op een heel specifiek aantal stemmen natuurlijk nagenoeg nul, interessanter zijn cumulatieve kansen: wat is de kans dat, bij $R = 3320510$ Trumpstemmen en $B = 3365846$ Bidenstemmen, er na het tellen van $n = 5917226$ stemmen er $b = 2798695$ of minder op Biden gegeven worden? Die kans is

$$P(X \leq b) = \sum_{k=0}^b P(k).$$

Deze kans is lastig te berekenen, omdat er astronomisch grote getallen in alle tellers en noemers staan. Wassili Hoeffding [1] heeft een bovengrens voor deze kans ontwikkeld:

$$P(X \leq b) = e^{-2t^2n},$$

waarbij t het verschil is in de proportie Bidenstemmen bij de eindstand (0,5034) versus die proportie bij de tussenstand (0,4730): $t = 0,0304$. Hiermee is de bovengrens

$$P(X \leq b) = e^{-10936},$$

oftewel een microscopische kans: er komen zo'n 25 nullen na de komma voordat er een ander getal komt. Soms vinden gebeurtenissen met microscopisch kleine kansen gewoon plaats, maar in dit geval is het veel logischer dat de verklaring is dat het model — dat impliceert dat het tellen van kansen in willekeurige volgorde gebeurt — niet klopt. En dat dan de kansen opeens totaal anders worden, spreekt voor zich. Stel je neemt je voor om eerst alle rode ballen te tellen en vervolgens pas alle blauwe. Dan heb je gegarandeerd een moment (mits $R > 0$) dat een tussenstand laat zien



Op 7 november, vier dagen na de verkiezingen, roept CNN Biden tot winnaar uit

dat 100% van de ballen rood zijn, zelfs als de blauwe ballen enorm in de meerderheid zijn.

Volgens team-Trump klopt het model niet omdat de Democraten massaal gefraudeerd hebben. Hier is, tot op het moment van schrijven van deze column, geen bewijs voor geleverd. Volgens team-Biden is de verklaring anders: Democraten stemmen (vanwege corona) veel meer per post en de poststemmen worden als laatste geteld. Dat dit een vertekening zou opleveren in de ‘tussenstanden’ werd van tevoren door de peilers al genoemd. Dat Pennsylvania superspannend zou worden ook: volgens de laatste pre-election-voorspelling van Nate Silvers FiveThirtyEight had Biden een 50,2% kans om deze staat te winnen.

En die andere staten? Dat ging eigenlijk grotendeels ook zoals voorspeld. Er waren wat uitzonderingen, zo kreeg Trump onverwachts veel stemmen in Florida, maar dat het spannend zou worden in staten als Arizona en Georgia was al bekend. Van tevoren gaf Nate Silver Trump een 10% kans op de overwinning, 1% kans op ‘gelijkspel’, en Biden dus 89% kans op winst. Als Biden ook nog Georgia in de wacht sleept, staat hij op 306 kiesmannen. In 26 van de 100 simulaties van Silver kwam Biden op minder uit, in 1 op exact 306 en dus in 73 hoger. De peilingen hadden Biden dus iets te hoog ingeschat, maar niks wat buiten de onzekerheidsmarges viel. Bij andere peilers vallen gelijksoortige conclusies te trekken. De hijgerige berichten die stelden dat de peilingen er meters naast zaten, waren niet meer dan dat: hijgerig en voorbarig. Wat dat betreft zijn de Democraten niet de enige winnaar van deze verkiezing: de peilingbureaus kunnen tevreden terugkijken.

Referentie

- 1 W. Hoeffding, Probability inequalities for sums of bounded random variables, *Journal of the American Statistical Association* 58(301) (1963), 13–30.

Francesca Arici

*Mathematisch Instituut
Universiteit Leiden
f.arici@math.leidenuniv.nl*

Clara Stegehuis

*Faculteit EWI
Universiteit Twente
c.steghuis@utwente.nl*

Proof by example Portraits of women in Dutch mathematics

Annegret Burtscher

Annegret Burtscher is assistant professor in Mathematics at Radboud University working on mathematical relativity. In 2019, she was awarded an NWO Veni grant to study the geometry of weak solutions of the Einstein equations.

When did you first realise you wanted to be a mathematician?

“I have always loved mathematics, starting right from ‘Rechnen’ in primary school. But still, I did not quite know what to do with this passion. This changed when at the age of fifteen I read Simon Singh’s popular book on Fermat’s last theorem. Immediately a whole new wonderful world opened up in front of me.

From then on I seriously played with the idea of becoming a mathematician. Initially, I still enrolled both in mathematics and in earth sciences in Vienna — the former for the fun and the latter to eventually get a ‘real’ job. That was my plan...”

And then something changed...

“While attending university, I realized that I was actually quite good at math. And for the first time, I saw mathematicians in real life and learned what they do all day long. So, naturally, the mathematics became more central and I started doing geology as a hobby. I decided to do a PhD in mathematics because I wanted to work in academia.”

Have you received any support in your decision to pursue a career in mathematics?

“To be honest, in the beginning, most of my friends and relatives discouraged me from studying math because they thought of it as an ivory-towerish concept with

a dead end. But my parents never really pushed me in any direction and just let me explore my own world, for which I am very grateful.”

You are working in the field of mathematical relativity, how did you end up in this field?

“I first heard about Einstein’s equations in a differential geometry class. I was immediately hooked by this interaction between analysis, geometry and physics. You see, the Einstein equations describe

the large-scale structure of our universe by relating its geometry to its matter content. The geometry is described in terms of the curvature of a Lorentzian manifold, so essentially a second derivative of the metric tensor, which from an analytic perspective turns the Einstein equations into a complicated system of non-linear partial differential equations.

This interaction of different types of math, physics and astronomy is something I still enjoy very much.”

Is there any result you are particularly proud of?

“That’s quite a difficult question... Well, I started out studying the solutions to the Einstein equations from the perspective of hyperbolic partial differential equations. My most important result there was to show that trapped surfaces can form during evolution when the Einstein equations are coupled to perfect fluids.

Trapped surfaces are crucial to understand singularities and black holes in general relativity. But singularities here mean something geometric, namely geodesic incompleteness. In the sixties, Penrose and Hawking formulated several singularity theorems that essentially establish that geodesic incompleteness is natural and central in general relativity. But it then took several more decades to show that singularities can also form dynamically, including my work, and it is still not entirely clear how generic black hole singularities actually are. This goes under the name of weak cosmic censorship conjecture.”



Annegret Burtscher

Photo: Radboud University / Dick van Aalst

And how does this relate to what you are working on these days?

“While the singularity theorems provide some geometric motivation for my earlier work, they can not directly be applied to the weak solutions coming from the theory of PDEs. In fact, one already has to be very careful when interpreting curvature distributionally. Something is still missing: there is not enough geometric interpretation of what these weak metrics entail, and over time I became increasingly interested in filling this gap.”

Can you tell us a bit more about some of these new geometric insights for Einstein's equations?

“The simplest way to understand the relation of curvature and regularity is via the geodesic equation, probably my most favorite ordinary differential equation. If the regularity of the metric tensor drops below the critical Hölder regularity $C^{1,1}$, then the Picard–Lindelöf Theorem no longer implies local uniqueness of geodesics, and below C^1 also the existence is at stake.

Since geodesics are crucial in general relativity, some of my work involves studying the implications and work-arounds of such issues. In Riemannian geometry, some nice properties of geodesics can be reinstalled by switching to the induced metric space structure and by imposing qualitative curvature bounds, e.g., via triangle comparison or by optimal transport.

Now, in the Lorentzian setting, none of this can really be done so easily, because the Lorentzian distance is not even a metric. But there are some exciting new ideas around that make use of other unique features that Lorentzian structures offer. Recently this study of non-smooth space-times has become a very active field of research.”

Being in an interdisciplinary field, do you often work with people in different areas?

“Of course, I talk to other mathematicians and physicists, at conferences and at my institute, and collaborate with some directly. I enjoy this interaction because it gets me back to, you know, studying something meaningful, not getting lost in the details, but forces me to always keep the bigger picture in mind.”

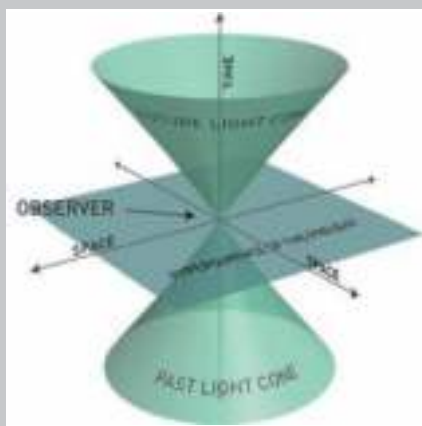


Illustration: Wikimedia Commons/Stib

Flat Minkowski spacetime $\mathbb{R}^{1,n}$ with the Lorentzian inner product $\eta(u, v) = -u_0 v_0 + u_1 v_1 + \dots + u_n v_n$ is the simplest solution of the Einstein equations, and the Lorentzian analogue of Euclidean space. Due to the indefinite nature of η , one can distinguish time-like, space-like and null (light-like) tangent vectors u depending on whether $\eta(u, u)$ is negative, positive, or zero. This light cone structure captures the physical observation that the speed of light is finite.

What do you like about being a mathematician?

“In an ideal world, our job comes with a lot of flexibility. You can think about a research question, a problem, whenever and wherever you want. I like it when I conceive a crazy idea, think about it and it eventually works out and turns into something real and meaningful. It's also nice to see when researchers can use some of my insights, and vice versa... I find this whole process of creating new mathematics exciting and deeply satisfying.

Teaching is also an enjoyable aspect I would say. Basically I just like talking about mathematics on different levels to all kinds of people.”

How has the current pandemic been affecting your research and work?

“Like most other people, in the first weeks I was totally overwhelmed. We had a full house and a lot of things to do: besides the abrupt switch to online teaching and supervision, I had too many collaborations going, and suddenly was supposed to homeschool the kids in Dutch. While having very little time for my own research at the same time I got more referee requests than ever before. Those were long days and weeks. This lockdown situation really made and makes me miss my quiet office and my colleagues, and also my family and friends in Austria. Of course, the pandem-

ic also involves lots of cancellations — of seminars, conferences and some carefully planned research visits...”

Was this the reason behind the online mathematical relativity seminar you just started?

“Although it is rather timely now, some of us organizers had actually started to discuss such a joint online seminar already last year. It is not really intended as a replacement for something that usually takes place in person, but rather a new kind of unifying seminar so that people around the globe have continuous access to good talks.”

You mentioned how the pandemic has also affected your work-life balance, having to care for your kids while teaching and doing research. How has your experience been otherwise, and what do you think still needs to change to increase the support for mathematicians with parenting responsibilities?

“I will start by first telling you about my experience... For me having kids at a relatively young age was a very deliberate choice, but of course, it was also exhausting, especially during my PhD and Postdoc years. The physical dependence alone, due to pregnancy and nursing, lasted for almost five years. On the other hand, having two kids never stopped me from actually doing anything: I moved a lot, travelled a lot, collaborated widely, et cetera. It was not always easy but I did it anyway. Now I am in a much more stable position which simplifies things a lot.

Generally, I think universities and research institutes should provide sufficient infrastructure, for example, for nursing mothers at work and during conferences, and full-time childcare on campus. And pay careful attention to dual-career couples. This is very important if we want to increase the number of female mathematicians and give progressive men a chance to equally share family responsibilities without having to sacrifice their own career.

But while on one hand, the practical support can be improved, I think what is even more important, particularly for young mothers, is to provide moral support.”



Ivan Yaroslavl'tsev

Max Planck Institute for Mathematics in the Sciences
Leipzig
yaroslavl'tsev.i.s@yandex.ru

Research Stieltjes Prize 2018–2019

Why stochastics? And why in Banach spaces? – Epidemic example

Ivan Yaroslavl'tsev was awarded the Stieltjes Prize for the academic year 2018–2019. His PhD thesis entitled *Martingales and stochastic calculus in Banach spaces* was done under supervision of Mark Veraar and Jan van Neerven in Delft and it was devoted to exploring new connections between stochastic analysis and geometry of Banach spaces. This is a very classical topic for the Delft Analysis group, which is interested in approaches solving stochastic PDEs, and many fundamental results in this direction have been obtained earlier by Mark and Jan (e.g., the theory of Wiener stochastic integrals in Banach spaces). During his PhD, Ivan Yaroslavl'tsev used to further extend this direction by working with general martingales. In particular, he discovered certain martingale decompositions, stochastic integral inequalities, Burkholder–Davis–Gundy inequalities, and weak differential subordination inequalities, all of which turned out to hold only for martingales with values in Banach spaces having the so-called UMD property. All this work was done both solely and in collaboration. Currently, Ivan Yaroslavl'tsev is doing his postdoc at Max Planck Institute for Mathematics in the Sciences (Leipzig, Germany) and his research is focused on stochastic dynamical systems.

Stochastic processes appear as an inherent important ingredient for many models. The reader can find a vast literature on applications of stochastics in various fields of physics, mechanics, economics, biology, et cetera., see, e.g., [2, 4]. Our goal here is not to describe all of these applications; instead we are going to focus on a currently more substantial topic as an illustration of stochastic approach: epidemics.

Assume that there is an epidemic of a certain disease spreading over a fixed population. (Poor reader, if you find the infection topic too dramatic, please presume that this ‘disease’ is nothing but the Pokémon Go game downloads or a number of gummy bears sold.) In this case we are definitely interested in predicting the number of infected people or, say, the infected area. Fortunately there have been done a lot in this direction during the past century, and

for instance we can exploit the so-called *SIR model* (Susceptible–Infected–Recovered model), described, e.g., in [15, Section 2.4 and 3.3]. In this model we have three functions over time: S , the number of healthy people in the population, which still did not have the disease; I , the number of infected people; and R , the number of recovered people, which now have an immunity and so will not be infected again. (The model has many branches exploited in various applications, see, e.g., [15], but for now such a simplified form is more than enough.) We assume that nobody is born and nobody dies, so $S + I + R = N$ is a constant and for a discrete time line (representing for example the number of days after the disease appearance) according to the SIR model we will have the following recurrence

$$S_{n+1} = S_n - \frac{\beta S_n I_n}{N}, \quad I_{n+1} = I_n + \frac{\beta S_n I_n}{N} - \gamma I_n, \quad R_{n+1} = R_n + \gamma I_n,$$

where β interprets the infectivity chance and γ stands for the recovery chance. Now, we will simplify this model a bit by supposing



Ivan Yaroslavl'tsev (on the left side)

that $S \approx N \approx \infty$ (i.e. the number of infected people is still pretty low comparing to the total population, this seems to hold, e.g., for HIV, SARS-CoV-1, MERS, et cetera), so we will have only

$$I_{n+1} = I_n + (\beta - \gamma)I_n. \quad (1)$$

Equation (1), though being useful for a small extremely densely populated society, does not tell us what happens if we have a big territory over which the infection spreads so the area effects start playing a role. Now we are going to make our model – hopefully – more realistic which would reflect such a setting.

1. We assume that we have a bounded domain $O \subset \mathbb{R}^2$ (designating the area where the disease spreads) and a process $I(t, x)$ corresponding to the *infection density* at point $x \in O$ in time $t \geq 0$.
2. We assume that the infection spreads not only in time, but in space, and we will use a special operator $\Delta = \frac{\partial^2}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2}{\partial x_2^2}$, also known as the *Laplacian*, in order to emulate this evolution. This operator generates the *heat semigroup* (see, e.g., (8)), which is used in particular for modelling how the temperature of an object distributes in time, so such an operator perfectly fits in our setting (see, e.g., [10]). The impact of the Laplacian in the disease spreading will be controlled by a constant $\lambda \geq 0$.
3. Our recovery chance γ seems to depend on I in reality: when I is small γ is a constant smaller than β , after getting a certain level of I we have a maximum of γ (infected people get a better help as the infection is noticed), and finally, when I is getting really big, γ again falls down to the almost initial level as the capacities of the hospitals are limited. (Note that in reality γ seems to depend on time as well. Indeed, as I is big, more pharmacy companies and research institutes work on the possible vaccines or treatments. But as such breakthroughs in treatment come discretely in time, one can assume that the research impact in γ is governed by a Poisson process with the intensity depending on I . Though such a model seems to be more precise, we will not consider it here due to technical complications.)
4. The same corresponds to β : it is quite big for small I , but when I is getting bigger, β is becoming smaller, as there are less healthy people around and quarantine measures could be undertaken. To sum up, we can assume that $\zeta = \beta - \gamma$ is a Lipschitz bounded function of I ($|\zeta(x) - \zeta(y)| \leq C|x - y|$ for some $C > 0$) so that

$$\zeta(0) > 0, \quad -\infty < \lim_{x \rightarrow \infty} \zeta(x) < 0$$

5. There are always randomly appearing fluctuations, disturbing our model. We will assume here that these fluctuations are generated by a *Wiener process* W_t depending on time. (Highly likely such oscillations depend on space as well, but for simplicity we will not consider space-time white noise.) If the reader is not acquainted with such a notion, please imagine a trajectory of a molecule in the air.
6. Sometimes researches discover new diagnosing methods, or it could be a dramatic change in the political situation, and the number of infected people drastically jumps. Or the other way around, a revolutionary treatment is found, and the infected number drops down. Nobody knows, when such changes happen. It is completely unpredictable, but everybody expects, that

such events will occur with a certain chance. Fortunately mathematics can model such phenomena with a *Poisson process* P_t : a process, which has jumps of size 1 happening at sudden random times which distribution is exponential, i.e.

$$\mathbb{P}(P_t - P_s = n) = \frac{(t-s)^n}{n!} e^{-(t-s)}, \quad n \geq 0, t \geq s.$$

(The *intensity* of P_t , i.e. the measure which indicates how many jumps happen in a particular time segment, which is defined by $\nu[s, t] := \mathbb{E}P_t - P_s$, could also depend on I . Nonetheless, here we assume that ν is Lebesgue.)

7. People do travel! Therefore we assume that our domain is divided into n ‘clusters’ $A_1, \dots, A_n$: within such a cluster every visiting infected ‘tourist’ increases the infection density by a constant. (It must not be specifically a tourist, but any traveler within the population.) As again we have no idea when such a traveler comes, the corresponding impact can be modeled by independent Poisson processes $P^1, \dots, P^n$ and the coefficients $\gamma_1(I(t)), \dots, \gamma_n(I(t))$, where we consider $I(t)$ as a function $x \mapsto I(t, x)$ on the whole O so that $\gamma_1(I(t)), \dots, \gamma_n(I(t))$, e.g., can have the following form:

$$\gamma_k(I(t)) = \psi_k \left(\int_O I(t, x) dx \right), \quad k = 1, \dots, n, \quad (2)$$

with $\psi_k(x)$ being of the order $\min\{1, x^{-1}\}$, so when the total infected number is small, each traveler infects about one-two persons, but when I is big, each traveler contacts less and hence infects less. (The intensity of these Poisson processes could depend on I as well due to travel restrictions acting when I is big.)

Recurrence (1) thus transforms to the following *stochastic partial differential equation*:

$$\begin{cases} dI(t, x) = [\lambda \Delta I(t, x) + \zeta(I(t, x))I(t, x)]dt + aI(t, x)dW_t + bI(t, x)dP_t \\ \quad + \sum_{k=1}^n \mathbf{1}_{A_k}(x) \gamma_k(I(t)) dP_t^k, \quad t \geq 0, x \in O, \\ I(0, x) = I_0(x), \quad x \in O, \end{cases} \quad (3)$$

where dI , dt , dW , dP , and dP^k are *differentials*, which could be imagined as ‘small changes of I , t , W , P , and P^k ’ respectively, a indicates how big is the impact of random fluctuations, b represents the dependence on P , $\mathbf{1}_{A_k}(x)$ is an indicator function of the cluster A_k which equals 1 when $x \in A_k$ and 0 when $x \notin A_k$, and the function I_0 is the distribution of the disease in the very beginning, which typically can be assumed as an indicator function of a subset of O (see for example Figure 1).

How can we understand that the epidemic is getting serious? Very often we tend to evaluate the reality by just one number, which is very convenient as we come up with the decision depending on how this number is big or small.

In particular, whatever positive functions f and g on O representing two possible infection densities are, we need to choose a parameter x such that

$$f \text{ is worse than } g \text{ if and only if } x(f) > x(g),$$

so we somehow order possible infection distributions. There are two obvious choices of such a parameter: either x stands for the total number of all infected people, i.e. $x(I) = x_1(I) := \int_O I(x) dx$, or x corresponds to the density maximum, i.e. $x(I) = x_\infty(I) := \max_{x \in O} I(x)$. Both approaches have their disadvantages: in the first case $x(I)$

can be incredibly big, though I can be smudged over the domain, so the infection is still not dangerous; in the second case there might be an extremely high (even infinite) pick in one point but there could be no infection outside a small surrounding of this point, and there is no need for panic yet. It turns out that there is a whole zoo of parameters which continuously interpolates between the two cases discussed above, the so-called L^p -norms:

$$\|f\|_p := \left(\int_O |f(x)|^p dx \right)^{1/p}.$$

Notice how wonderful they are! First, they have the promised limits:

$$\|f\|_p \rightarrow \int_O f(x) dx, \quad p \rightarrow 1, \quad \|f\|_p \rightarrow \max_{x \in O} f(x), \quad p \rightarrow \infty.$$

Second, $\|f\|_p$ combines together caring about the infection area, as x_1 , and taking huge picks into account, as x_∞ , and this dependence changes as p varies. Do you mind more about picks? Increase p ! Does the infection area play a major role? Simply drop p down.

Finally, $\|f\|_p$ is a *norm*, i.e. a nonnegative function acting on functions which satisfies the following three properties:

1. *triangle inequality*: $\|f+g\|_p \leq \|f\|_p + \|g\|_p$,
2. *homogeneity*: $\|af\|_p = |a| \|f\|_p$ for any $a \in \mathbb{R}$,
3. *positivity*: $\|f\|_p = 0$ if and only if $f = 0$.

(One can think of a norm as of a *distance function*.) We will call the space of all functions f with $\|f\|_p < \infty$ the L^p space and denote it by $L^p(O)$. This space is a *Banach space* (i.e. a linear space with a norm which is complete, see, e.g., [11]).

Thanks to the discussion above from now on we are interested only in $\|I(t)\|_p$. Fix $2 \leq p < \infty$ (we omit the case of $p = \infty$ as sometimes L^∞ spaces are terrible to work with, see, e.g., [8, Example 6.1.18] and [7,8] in general, and the case of $p < 2$ in order to avoid certain technical difficulties appearing later), and consider the equation (3) not pointwise in $x \in O$, but as an equation on processes with values in $L^p(O)$, i.e.

$$\begin{cases} dI(t) = [\lambda \Delta I(t) + \alpha(I(t))] dt + aI(t) dW_t + bI(t) dP_t \\ \quad + \sum_{k=1}^n \mathbf{1}_{A_k} \gamma_k(I(t)) dP_t^k, \quad t \geq 0, \\ I(0) = I_0 \in L^p(O), \end{cases} \quad (4)$$

where α is a Lipschitz function which acts from $L^p(O)$ to itself and $\gamma_1, \dots, \gamma_n$ are Lipschitz functions acting from $L^p(O)$ to $\mathbb{R}$, i.e. there exist positive constants C_α and C_γ such that for all f and g from $L^p(O)$,

$$\|\alpha(f) - \alpha(g)\|_p \leq C_\alpha \|f - g\|_p, \quad (5)$$

$$|\gamma_k(f) - \gamma_k(g)| \leq C_\gamma \|f - g\|_p \quad \text{for any } k = 1, \dots, n. \quad (6)$$

Exercise 1. Prove (5) and (6) given ζ is Lipschitz and assuming that γ_k is defined by (2) and the corresponding ψ_k is Lipschitz.

Now the question is: *Does (4) make sense?* Paper is patient, and one can write down any equation they want. But will this equation have a solution? In which sense? And is it unique, so that basing on it one can try to make forecasts?

Fortunately for us, there has been developed a massive amount of work concerning stochastic equations with values in Banach spaces. My point here is not to make an overview over all these results, but to demonstrate, so we will fix one approach, which provides us with the so-called *mild solution* (see, e.g., [3,9] and references therein):

$$\begin{aligned} I(t) &= S(\lambda t) I_0 + \int_0^t S(\lambda t - \lambda s) \alpha(I(s)) ds \\ &\quad + a \int_0^t S(\lambda t - \lambda s) I(s) dW_s + b \int_0^t S(\lambda t - \lambda s) I(s) dP_s \\ &\quad + \sum_{k=1}^n \int_0^t S(\lambda t - \lambda s) \mathbf{1}_{A_k} \gamma_k(I(s)) dP_s^k, \quad t \geq 0. \end{aligned} \quad (7)$$

Here $(S(t))_{t \geq 0}$ denotes the *heat semigroup*, a family of linear maps on $L^p(O)$ which is a semigroup (i.e. $S(t+s)f = S(t)S(s)f$ for any $f \in L^p(O)$) and which is generated by the Laplacian, i.e. for any smooth $f \in L^p(O)$,

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{S(t+\varepsilon)f - S(t)f}{\varepsilon} = \Delta S(t)f, \quad t \geq 0$$

(so the Laplacian is the ‘derivative’ of $S(t)$ in t). For example, if $O = \mathbb{R}^2$, then $S(t)$ has the following form:

$$S(t)f(x) = \frac{1}{4\pi t} \int_{\mathbb{R}^2} f(y) e^{-|x-y|^2/4t} dy, \quad x \in \mathbb{R}^2. \quad (8)$$

The key tool we are going to exploit in proving that there is only one process $I(t)$ satisfying (7) is the magic *fixed point argument* (aka the *Schauder theorem*):

Theorem 1. Let X be a Banach space with a norm $\|\cdot\|$. Assume that there is a function ϕ from X to itself and a constant $C \in [0,1)$ such that

$$\|\phi(x) - \phi(y)\| \leq C \|x - y\| \quad \text{for any } x, y \in X. \quad (9)$$

Then there exists a unique $x \in X$ satisfying $\phi(x) = x$.

In our setting, let X be a space of all $L^p(O)$ -valued processes on $[0, T]$ starting in I_0 and let ϕ be defined by

$$\begin{aligned} \phi(I)(t) &= S(\lambda t) I_0 + \int_0^t S(\lambda t - \lambda s) \alpha(I(s)) ds \\ &\quad + a \int_0^t S(\lambda t - \lambda s) I(s) dW_s + b \int_0^t S(\lambda t - \lambda s) I(s) dP_s \\ &\quad + \sum_{k=1}^n \int_0^t S(\lambda t - \lambda s) \mathbf{1}_{A_k} \gamma_k(I(s)) dP_s^k, \quad t \in [0, T]. \end{aligned} \quad (10)$$

(Such X is not a Banach space, but one can represent this as a Banach space by subtracting I_0 and setting the norm by (11).) Our aim is to find such $\|\cdot\|$ and T that (9) is satisfied (then we immediately get existence and uniqueness of I with $\phi(I) = I$, so the same would follow for the solution of the integral equation (7) on $[0, T]$). Luckily we know the proper $\|\cdot\|$ in advance, so we choose it to be

$$\|I\|_{p,T} := \mathbb{E} \sup_{0 \leq t \leq T} \|I(t)\|_p, \quad (11)$$

where $\mathbb{E}\xi$ means the *expectation* of a random variable ξ , i.e. the mean (or the integral) of all the values of ξ over all the randomness created by W and P (see, e.g., [1,12]).

Exercise 2. Prove that $\|\cdot\|_{p,T}$ is a norm. *Hint: think of $\mathbb{E}$ as of an integral.*

Now let us check the assumptions of Theorem 1. Let F and G be two processes with values in $L^p(\mathcal{O})$ such that $F(0) = G(0) = I_0$. Then by (10), (11), and by the triangle inequality

$$\begin{aligned} \|\phi(F) - \phi(G)\|_{p,T} &\leq \mathbb{E} \sup_{0 \leq t \leq T} \|S(\lambda t)F(0) - S(\lambda t)G(0)\|_p \\ &+ \mathbb{E} \sup_{0 \leq t \leq T} \left\| \int_0^t S(\lambda t - \lambda s) (\alpha(F(s)) - \alpha(G(s))) ds \right\|_p \\ &+ |a| \mathbb{E} \sup_{0 \leq t \leq T} \left\| \int_0^t S(\lambda t - \lambda s) (F(s) - G(s)) dW_s \right\|_p \\ &+ |b| \mathbb{E} \sup_{0 \leq t \leq T} \left\| \int_0^t S(\lambda t - \lambda s) (F(s) - G(s)) dP_s \right\|_p \\ &+ \sum_{k=1}^n \mathbb{E} \sup_{0 \leq t \leq T} \left\| \int_0^t S(\lambda t - \lambda s) \mathbf{1}_{A_k} (\gamma_k(F(s)) - \gamma_k(G(s))) dP_s^k \right\|_p. \end{aligned} \quad (12)$$

Let us now estimate each part of the right-hand side of (12). First note that $S(t)$ is linear, consequently

$$\begin{aligned} S(\lambda t)F(0) - S(\lambda t)G(0) &= S(\lambda t)(F(0) - G(0)) \\ &= S(\lambda t)(I_0 - I_0) = S(\lambda t)0 = 0. \end{aligned}$$

Thus

$$\mathbb{E} \sup_{0 \leq t \leq T} \|S(\lambda t)F(0) - S(\lambda t)G(0)\|_p = \mathbb{E} \sup_{0 \leq t \leq T} 0 = 0.$$

Now note that $S(t)$ is a *contraction* on $L^p(\mathcal{O})$ for any $t \geq 0$, i.e.

$$\|S(t)f\|_p \leq \|f\|_p \quad (13)$$

(we leave this as an exercise). Therefore by the triangle inequality (now applied for an integral)

$$\begin{aligned} \mathbb{E} \sup_{0 \leq t \leq T} \left\| \int_0^t S(\lambda t - \lambda s) (\alpha(F(s)) - \alpha(G(s))) ds \right\|_p &\leq \mathbb{E} \sup_{0 \leq t \leq T} \int_0^t \|S(\lambda t - \lambda s) (\alpha(F(s)) - \alpha(G(s)))\|_p ds \\ &\leq \mathbb{E} \sup_{0 \leq t \leq T} \int_0^t \|\alpha(F(s)) - \alpha(G(s))\|_p ds \\ &\stackrel{(*)}{\leq} C_\alpha \mathbb{E} \sup_{0 \leq t \leq T} \int_0^t \|F(s) - G(s)\|_p ds \\ &\stackrel{(**)}{\leq} C_\alpha \mathbb{E} \int_0^T \|F(s) - G(s)\|_p ds \leq C_\alpha T \|F - G\|_{p,T}, \end{aligned}$$

where for $(*)$ we used (5) and $(**)$ follows from the fact that any norm is nonnegative.

Next, let us move to the stochastic integral with respect to the Brownian motion. First note that thanks to the so-called *dilation trick* shown in [6] by Fröhlich and Weis we can think of $(S(t))_{t \geq 0}$ as of a *group*, not just a semigroup (though this group is different from $S(t)$ and acts on a different L^p space, but this does not play a big role for us here in this illustration) so that $S(t-s) = S(t)S(-s)$. Therefore in particular by (13) (though such a dilated $S(t)$ does not act on $L^p(\mathcal{O})$, it does have a bounded norm, see [6]) and by the linearity of $S(t)$,

$$\begin{aligned} \mathbb{E} \sup_{0 \leq t \leq T} \left\| \int_0^t S(\lambda t - \lambda s) (F(s) - G(s)) dW_s \right\|_p &= \mathbb{E} \sup_{0 \leq t \leq T} \left\| S(\lambda t) \int_0^t S(-\lambda s) (F(s) - G(s)) dW_s \right\|_p \\ &\leq \mathbb{E} \sup_{0 \leq t \leq T} \left\| \int_0^t S(-\lambda s) (F(s) - G(s)) dW_s \right\|_p. \end{aligned} \quad (14)$$

Now, as we have a proper stochastic integral (we call it *proper* as it has the form $\int F(s) dW_s$ but not $\int F(t,s) dW_s$, so it is a *local*

martingale, see, e.g., [13]), thanks to the work [13] of van Neerven, Veraar, and Weis on stochastic integration in Banach spaces (see also [14]) and using (13) we can estimate (14) in the following way exploiting the *square function*:

$$\begin{aligned} \mathbb{E} \sup_{0 \leq t \leq T} \left\| \int_0^t S(-\lambda s) (F(s) - G(s)) dW_s \right\|_p &\leq C_p \mathbb{E} \sup_{0 \leq t \leq T} \left\| \left(\int_0^t |S(-\lambda s) (F(s) - G(s))|^2 ds \right)^{1/2} \right\|_p \\ &= C_p \left\| \left(\int_0^T |S(-\lambda s) (F(s) - G(s))|^2 ds \right)^{1/2} \right\|_p, \end{aligned}$$

for some fixed constant C_p , where the latter integrals are taken pointwise in $\mathcal{O}$. By Hölder's inequality, the Fubini theorem, and (13) we get

$$\begin{aligned} &\left\| \left(\int_0^T |S(-\lambda s) (F(s) - G(s))|^2 ds \right)^{1/2} \right\|_p \\ &\leq \mathbb{E} \left\| T^{\frac{p-2}{2p}} \left(\int_0^T |S(-\lambda s) (F(s) - G(s))|^p ds \right)^{1/p} \right\|_p \\ &= T^{\frac{p-2}{2p}} \mathbb{E} \left\| \left(\int_0^T |S(-\lambda s) (F(s) - G(s))|^p ds \right)^{1/p} \right\|_p \\ &= T^{\frac{p-2}{2p}} \mathbb{E} \left(\int_0^T \|S(-\lambda s) (F(s) - G(s))\|_p^p ds \right)^{1/p} \\ &\leq T^{\frac{p-2}{2p}} \mathbb{E} \left(\int_0^T \|F(s) - G(s)\|_p^p ds \right)^{1/p} \\ &\leq T^{\frac{p-2}{2p}} T^{\frac{1}{p}} \|F - G\|_{p,T} = T^{\frac{1}{2}} \|F - G\|_{p,T}. \end{aligned}$$

Consequently, if we sum everything up

$$\mathbb{E} \sup_{0 \leq t \leq T} \left\| \int_0^t S(\lambda t - \lambda s) (F(s) - G(s)) dW_s \right\|_p \leq C_p T^{\frac{1}{2}} \|F - G\|_{p,T}.$$

Now we move to our last Poisson ingredients of (12). First similarly to (14) we notice that

$$\begin{aligned} \mathbb{E} \sup_{0 \leq t \leq T} \left\| \int_0^t S(\lambda t - \lambda s) (F(s) - G(s)) dP_s \right\|_p &\leq \mathbb{E} \sup_{0 \leq t \leq T} \left\| \int_0^t S(-\lambda s) (F(s) - G(s)) dP_s \right\|_p. \end{aligned}$$

Thanks to the work of Dirksen [5, Theorem 1.1] we can estimate such a stochastic integral with respect to the Poisson noise by

$$\begin{aligned} \mathbb{E} \sup_{0 \leq t \leq T} \left\| \int_0^t S(-\lambda s) (F(s) - G(s)) dP_s \right\|_p &\leq \mathbb{E} \sup_{0 \leq t \leq T} \left\| \int_0^t S(-\lambda s) (F(s) - G(s)) d(P_s - s) \right\|_p \\ &+ \mathbb{E} \sup_{0 \leq t \leq T} \left\| \int_0^t S(-\lambda s) (F(s) - G(s)) ds \right\|_p \\ &\leq C_p \mathbb{E} \sup_{0 \leq t \leq T} \int_0^t \|S(-\lambda s) (F(s) - G(s))\|_p ds \\ &+ \mathbb{E} \sup_{0 \leq t \leq T} \int_0^t \|S(-\lambda s) (F(s) - G(s))\|_p ds \\ &\stackrel{(*)}{\leq} (1 + C_p) \mathbb{E} \sup_{0 \leq t \leq T} \int_0^t \|F(s) - G(s)\|_p ds \\ &= (1 + C_p) \mathbb{E} \int_0^T \|F(s) - G(s)\|_p ds \\ &\leq (1 + C_p) T \|F - G\|_{p,T}, \end{aligned}$$

where $t \mapsto P_t - t$ is called a *compensated Poisson process* which is called so as

$$\mathbb{E} P_t - t = 0, \quad t \geq 0,$$

C_p is a constant depending only on p , and $(*)$ follows from the dilated analogue of (13), see [6]. (Integrals with respect to $P_t - t$

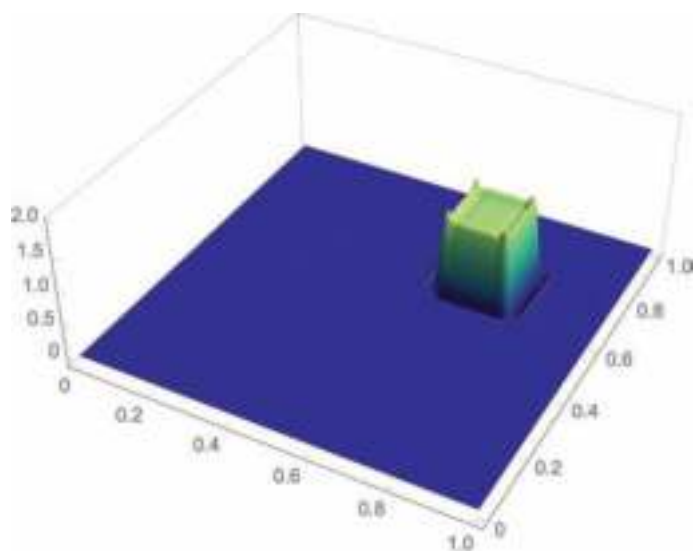


Figure 1 Here and later $O = [0, 1]^2$ is periodic, $I(t) = \mathbf{1}_{[0.6, 0.8] \times [0.6, 0.8]}$ for $t = 0$.

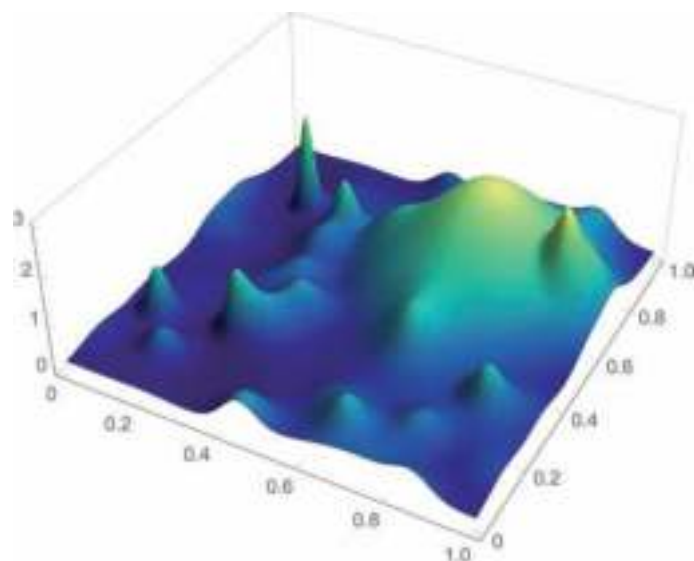


Figure 2 $I(t)$ for $t = 0.6$.

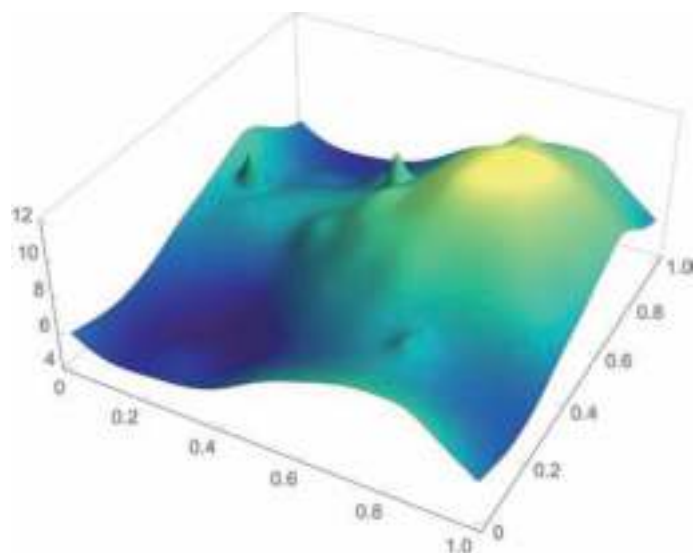


Figure 3 $I(t)$ for $t = 1.2$.

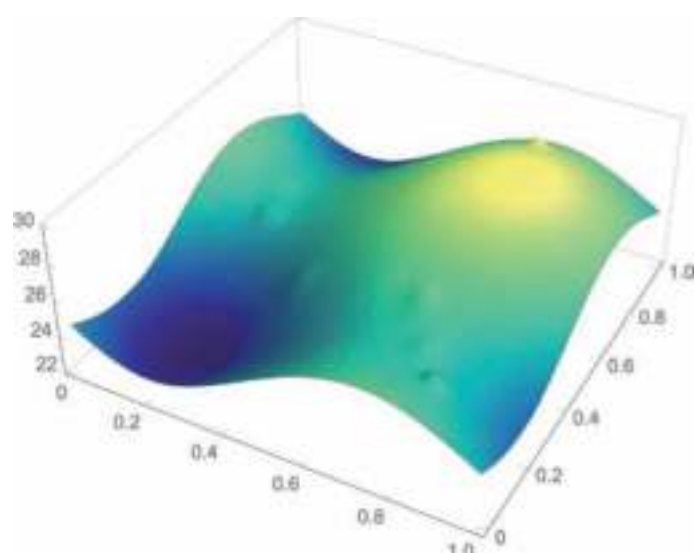


Figure 4 $I(t)$ for $t = 1.8$.

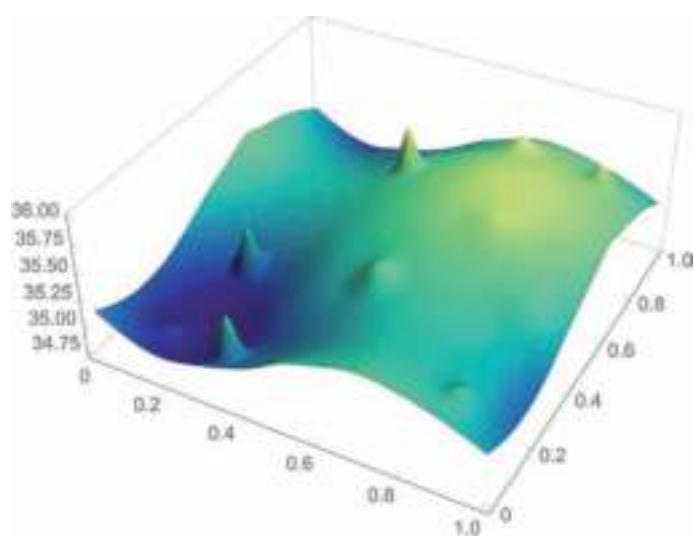


Figure 5 $I(t)$ for $t = 2.4$.

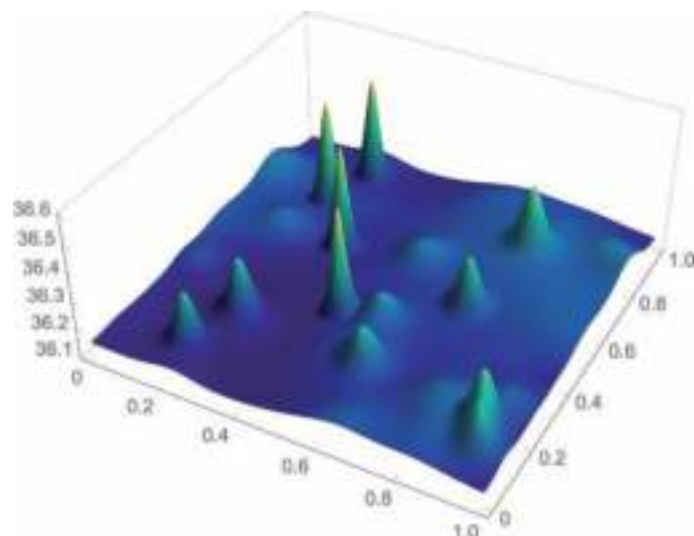


Figure 6 $I(t)$ for $t = 3$.

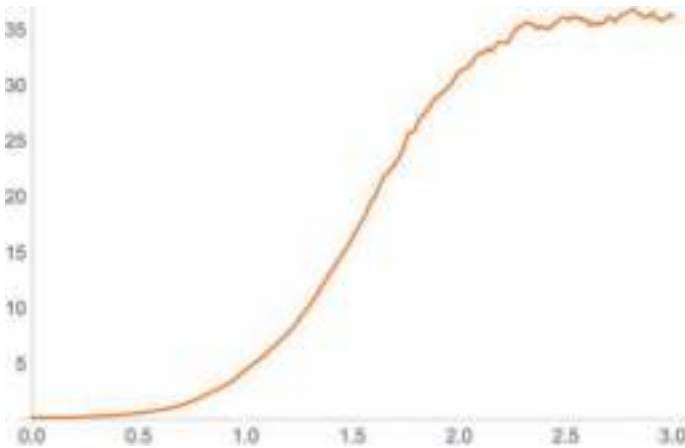


Figure 7 Evolution of $\|I(t)\|_2$, $0 \leq t \leq 3$.

and more general compensated Poisson random measures have been studied by Dirksen in [5].) Similarly, exploiting (6) one can show that

$$\mathbb{E} \sup_{0 \leq t \leq T} \left\| \int_0^t S(\lambda t - \lambda s) \mathbf{1}_{A_k}(\gamma_k(F(s)) - \gamma_k(G(s))) dP_s^k \right\|_p \leq (1 + C_p) C_\gamma T \|F - G\|_{p,T}.$$

If we sum up all the estimates, we get

$$\begin{aligned} & \|\phi(I) - \phi(G)\|_{p,T} \\ & \leq (C_a T + |a| C_p T^{\frac{1}{2}} + |b| (1 + C_p) T + (1 + C_p) C_\gamma T) \|F - G\|_{p,T}, \end{aligned}$$

so if we choose T small enough, the conditions of Theorem 1 are satisfied, and thus there is only one I so that (4) holds on $[0, T]$. Iterating the procedure (first constructing the solution on $[0, T]$, then starting in T on the segment $[T, 2T]$, et cetera), we obtain a unique solution of (4) on the whole $\mathbb{R}_+$.

Now, when we have that (4) has a unique solution (again, in some sense), we are able to ask further questions, such as

- For which t either $\|I(t)\|_p$ or $\mathbb{E}\|I(t)\|_p$ becomes small/big?
- What happens if we change the coefficients of (4)? What additional terms corresponding to the fight against the disease would with a high chance vanish $\|I(t)\|_p$ in time?
- Can we simulate the solution of (4) (see Figures 1–7)? Will this simulation converge to the solution? In which sense?
- How (4) and its solution are related to the real epidemic dynamics?
- What happens if we change (3) and (4) to the full SIR (or any other appropriate) model (likewise in [10])? Can we then obtain the existence and uniqueness of the solution using the tools exploited above?
- Do we have convergence of the disease distribution in some sense (see, e.g., Figures 1–7)?
- et cetera.

These questions are extremely challenging on their own and they require additional rigorous research, but at least we can guarantee that they are well-posed.

Example 3. Figures 1–7 present a simulation of the solution of (3) for $\mathcal{O} = [0, 1]^2$ being periodic (in this case the heat kernel has a simple form), $\lambda = 0.015$, $\zeta(x) = \max\{3.7 - 0.1x, \min\{-2, 0.1x - 6.5\}\}$, $a = 50$, $b = 5$, $(A_n)_{n=1}^{2500}$ is a partition of $\mathcal{O}$ into 2500 equal squares with the side length 0.02, $\gamma_k(x) = \min\{x, 4/(x + 0.1)\}$, and intensities of P^k are not Lebesgue measures, but $0.08\lambda_{\mathbb{R}_+}$. The simulation is made on the mesh of 50×50 points with the time differences of 0.01. Figures 1–6 show the graph of the infection density for times $t = 0, 0.6, 1.2, 1.8, 2.4, 3$, and Figure 7 demonstrates the evolution of $\|I(t)\|_2$ over $t \in [0, 3]$. $\dashv\dots\dashv$

References

- 1 P. Billingsley, *Probability and measure*, Wiley Series in Probability and Mathematical Statistics, Wiley, 1995, third edition.
- 2 R.A. Carmona and B. Rozovskii, eds., *Stochastic Partial Differential Equations: Six Perspectives*, Mathematical Surveys and Monographs, Vol. 64, American Mathematical Society, 1999.
- 3 P.-L. Chow, *Stochastic Partial Differential Equations*, Advances in Applied Mathematics, CRC Press, 2015, second edition.
- 4 S. Cox, Stochastic partial differential equations, *NAW* 5/15(2) (2014), 119–121.
- 5 S. Dirksen, Itô isomorphisms for L^p -valued Poisson stochastic integrals, *Ann. Probab.* 42(6) (2014), 2595–2643.
- 6 A.M. Fröhlich and L. Weis, H^∞ calculus and dilations, *Bull. Soc. Math. France* 134(4) (2006), 487–508.
- 7 T. Hytönen, J. van Neerven, M. Veraar and L. Weis, *Analysis in Banach Spaces, Vol. I. Martingales and Littlewood-Paley Theory*, *Ergebnisse der Mathematik und ihrer Grenzgebiete, 3. Folge. A Series of Modern Surveys in Mathematics*, Vol. 63, Springer, 2016.
- 8 T. Hytönen, J. van Neerven, M. Veraar and L. Weis, *Analysis in Banach Spaces, Vol. II. Probabilistic Methods and Operator Theory*, *Ergebnisse der Mathematik und ihrer Grenzgebiete, 3. Folge. A Series of Modern Surveys in Mathematics*, Vol. 67, Springer, 2017.
- 9 C. Knoche, Mild solutions of SPDE's driven by Poisson noise in infinite dimensions and their dependence on initial conditions (2005).
- 10 N.N. Nguyen and G. Yin, Stochastic partial differential equation SIS epidemic models: modeling and analysis, *Commun. Stoch. Anal.* 13(3) (2019), Art. 8, 22.
- 11 W. Rudin, *Functional Analysis*, McGraw-Hill Series in Higher Mathematics, McGraw-Hill, 1973.
- 12 A.N. Shiryaev, *Probability 1*, Graduate Texts in Mathematics, Vol. 95, Springer, 2016, third edition. Translated from the fourth Russian edition by R.P. Boas and D.M. Chibisov, 2007.
- 13 J.M.A.M. van Neerven, M.C. Veraar and L. Weis, Stochastic integration in UMD Banach spaces, *Ann. Probab.* 35(4) (2007), 1438–1478.
- 14 M.C. Veraar and I.S. Yaroslavl'tsev, Pointwise properties of martingales with values in Banach function spaces, in *High Dimensional Probability VIII*, Springer, 2019, pp. 321–340.
- 15 E. Vynnycky and R. White, *An Introduction to Infectious Disease Modelling*, Oxford University Press, 2010.

Raf Bocklandt

Korteweg-de Vries Institute
University of Amsterdam
r.r.j.bocklandt@uva.nl

Event

The KWG PhD Prize

Last October the Royal Dutch Mathematical Society (KWG) hosted the PhD Prize competition. Normally this event would have taken place during the Dutch Mathematical Congress (NMC) in April but due to the corona outbreak this meeting was cancelled and the competition postponed. As the prospects of organizing a real live event in the autumn slimmed, the organizers decided to hold a virtual zoom-meeting instead. On 6 October five candidates for the prize, selected from a longlist of fifteen, were each given the opportunity to present their work in a twenty minute online public talk followed by a five minute question and answer session. Based on their performances a jury of four mathematicians (Kees Oosterlee, Maria Vlasiou, Ronald de Wolf and Raf Bocklandt) awarded the prize to Emiel Lorist for his clear presentation, fitting use of multimedia and good handling of the questions. The jury was impressed by the quality of all five presentations and to give you an idea of the broad range of interesting topics that were covered, we asked the candidates to provide us with a nice picture drawn from their slides accompanied with a little explanation.

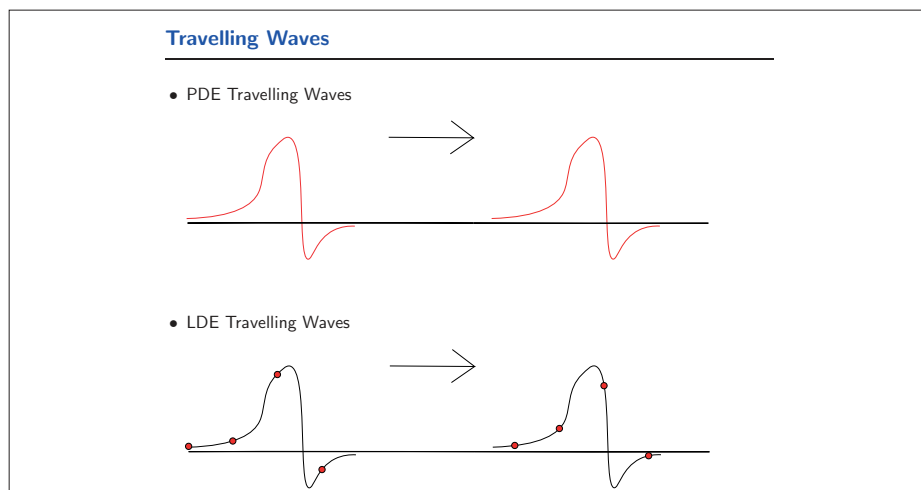
Willem Schouten-Straatman

Willem Schouten-Straatman finished his PhD under the supervision of Hermen Hupkes at the University of Leiden in the field of lattice differential equations. These differential equations are used to describe the dynamics of semiconductors, liquid crystals and networks of interacting neurons. In his thesis he established the existence and stability of travelling wave solutions for the

discrete FitzHugh–Nagumo equation.

Schouten: “Here you see a schematic view of travelling waves for a partial differential equation (PDE), i.e. a spatially continuous setting, and for a lattice differential equation (LDE), i.e. a spatially discrete setting. Even though the wave profile for LDEs remains continuous, we note that at fixed points in time we only see a discrete subset of the wave profile. In my

research, we established the existence and nonlinear stability of travelling wave solutions for several types of FitzHugh–Nagumo LDEs. These systems aim to model the propagation of electrical signals through nerve fibers. We constructed these waves by viewing them as perturbations of simpler systems, such as the corresponding FitzHugh–Nagumo PDE, for which the existence of travelling waves is already known.”



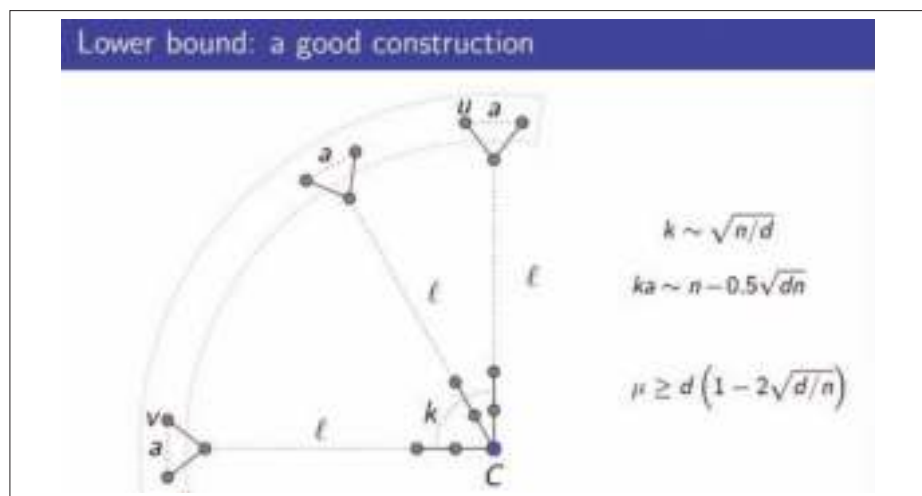
Stijn Cambie

Stijn Cambie is working on a PhD with Ross Kang at the Radboud University in Nijmegen. His main subject is graph theory and in his first year he gave an asymptotic solution to a longstanding problem by Jan Plesník about average distance in graphs.

Cambie: “The problems presented originated from 1984. They asked for the

minimum and maximum average distance a graph can attain when you know the order (number of dots) and the diameter of the graph. For the minimum, this was solved in 1984. But the maximum problem was harder. Over 35 years, many people tried to solve it, but only minor progress was made. Due to that and as it only deals with fundamental

concepts, it has been recognized as one of the central problems on graphical indices (a subfield of combinatorics). In the talk, I gave an idea about the asymptotic solution of that problem, i.e. a rough sketch of the optimal structure was given and the intuition about the proof for the upperbound was given as well.”



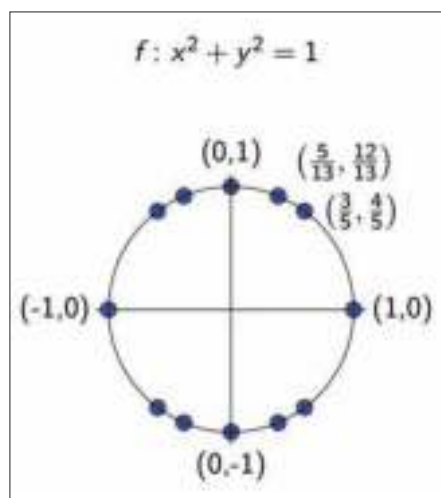
Rosa Winter

Rosa Winter completed her PhD in alge-

braic geometry at the University of Leiden under the supervision of Martin Bright and

Ronald van Luijk. Together with Julie Desjardins she proved the density of rational points for a specific family of del Pezzo surfaces of degree 1.

Winter: “In the picture you see some rational points (points where both entries are fractions) on the circle with radius one. These rational points are related to Pythagorean triples. This circle contains infinitely many rational points, and they are ‘nicely’ distributed everywhere on it. While this is well-known for objects like the circle, for certain surfaces we do not know if the rational points are similarly distributed everywhere, or all clustered together. In my research I studied rational points on a certain type of surfaces. I gave necessary and sufficient conditions for the rational points on these surfaces to be distributed everywhere.”



Emiel Lorist

During his PhD at the Delft University of Technology under the supervision of Mark Veraar, Emiel Lorist worked on an open problem in stochastic differential equations and harmonic analysis. He developed stochastic versions of the

Calderón–Zygmund theory and the famous A_2 -theorem.

Lorist: “If we zoom in on a polycrystalline material, for example an alloy like bronze, we can see that the material is not uniform. It actually consists of microscopic grains or crystals. In each of these grains

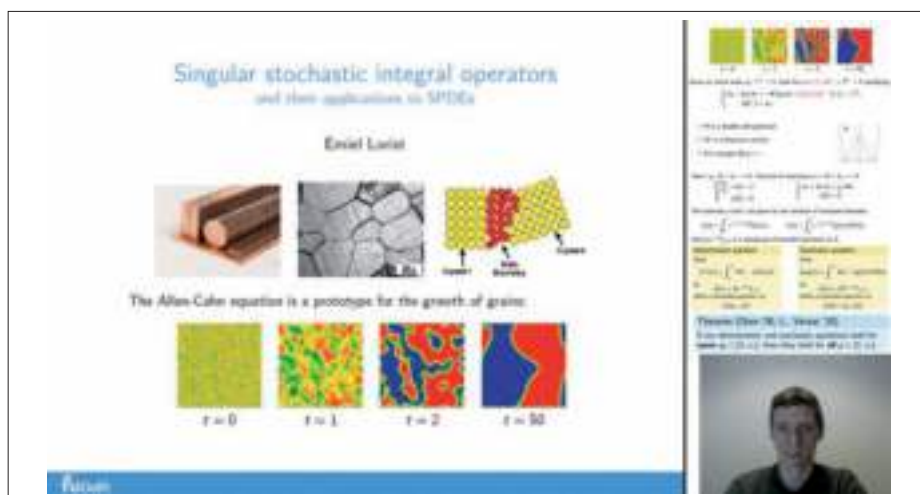
the atoms form a lattice, but the lattices between two grains are not compatible, which is illustrated on the slide. A prototypical equation that models the growth of such grains is the Allen–Cahn equation. It is a phase field model, in which we assume that there are two phases, or

in the case of grain growth two crystal orientations. When we start with a mixture of these two phases, these two phases first quickly separate into two distinct regions. Afterwards, over a longer period of time, the length of the boundary between the two phases is minimized. A simulation of this process can be seen on the slide.

The Allen–Cahn equation is a nonlinear partial differential equation. When one wants to account for thermal fluctuations,

one can add a noise term to the equation. This gives rise to the stochastic Allen–Cahn equation, which is a nonlinear stochastic partial differential equation. One way to analyse such equations, is to reformulate it as a stochastic evolution equation. One then disguises the equation as a stochastic differential equation (without the ‘partial!’) and employs fixed point arguments to obtain existence and uniqueness of solutions. The crucial ingredient for these fixed point arguments is a deep understanding

of the linearized problem, which can be expressed in terms of the boundedness of certain integral operators with singular kernels. While these operators have been thoroughly studied in the deterministic setting, an abstract theory for such singular integral operators in the stochastic setting was completely absent. In my work I made the first steps towards such a theory, which has implications for stochastic partial differential equations like the stochastic Allen–Cahn equation.”



Harry Smit

Harry Smit completed his PhD at the University of Utrecht under the supervision of Gunther Cornelissen. His main area of research is arithmetic geometry, in particular L -series for global fields, but he also works on graphs and complexity theory.

Smit: “For our purposes, elliptic curves are equations of the form $y^2 = f(x)$, where

$f(x)$ is a cubic polynomial with algebraic coefficients. Sometimes two nonisomorphic elliptic curves have the same number of solutions modulo p for almost every prime p . In that case the elliptic curves are isogenous, which means there exists a surjective map with finite kernel between the elliptic curves. An example is given in the picture, where the black box

is an oracle that counts all the solutions modulo p . In my research, I looked at a related invariant called the L -series of an elliptic curve and asked the question what the L -series tells us about the elliptic curve. I proved that two elliptic curves for which the L -series of their quadratic twists match in a nice way are necessarily isogenous.”



Same output does not imply isomorphic elliptic curves!

$$E: y^2 = x^3 + x^2 + x$$

$$E': y^2 = x^3 - 2x^2 - 3x$$

↓

p	$\#E(\mathbb{F}_p)$
3	.
5	8
7	8
11	16
13	16
17	16
19	16
23	16
.	.
.	.

E and E' are not isomorphic: they have different j -invariants.

Cor Kraaikamp

Delft Institute of Applied Mathematics

TU Delft

c.kraaikamp@tudelft.nl

Stoffelijke resten tastbare herinneringen aan wiskundigen

Hofwijck, een paradijs in Voorburg





Nederland kent een aantal historische plekken die direct verband houden met natuurwetenschappen en wiskunde. Een van de allermooiste plekken is het vroegere 'tuinhuis' Hofwijck van de beroemde dichter, diplomaat, geleerde, componist en luitist Constantijn Huygens (1596–1687). Huygens ontwierp Hofwijck in 1641 om te kunnen ontsnappen aan zijn drukke diplomatieke werkzaamheden als secretaris van twee stadhouders en prinses van Oranje: Frederik Hendrik en Willem II.

Constantijn trouwde in 1626 met Suzanna van Baerle ('Sterre'), en samen hadden zij vier zonen (Constantijn, Christiaan, Lodewijk en Philips) en een dochter (Suzanna). Enkele maanden na de geboorte van Suzanna sloeg het noodlot voor Huygens toe, en stierf zijn Sterre. Toch moet het voor de kinderen van Huygens zeer opwindend zijn geweest om Constantijn als vader te hebben gehad; niet alleen was hij zeer begaafd in bijna alles wat hij deed, ook had hij een opwindende kennissenkring waar bijvoorbeeld Descartes, P. C. Hooft en Rembrandt toe behoorden. Constantijn had een scherp oog voor de talenten van zijn kinderen; zo bracht hij Christiaan niet alleen in contact met Descartes, maar ook met Marin Mersenne, met wie Christiaan op jonge leeftijd een briefwisseling begon.

Voor de wiskunde en natuurkunde is Hofwijck de plek waar Christiaan Huygens (1629–1695) het laatste deel van zijn leven gewoond heeft en veel van zijn latere werk verricht en geschreven heeft. Na omzwervingen in Londen en Parijs (in 1663 werd hij lid van de Royal Society, en in 1666 verhuisde hij naar Parijs, waar hij onderzoeksdirecteur werd bij de Franse Academie van Wetenschappen, en een appartement had in de bibliotheek van de academie), keerde Christiaan pas in 1681 terug naar Nederland, en woonde eerst bij zijn vader in diens huis aan het Plein in Den Haag. Dit late tijdstip is opvallend, want in 1672 verklaarde de 'Zonnekoning' Lodewijk XIV de oorlog aan Nederland. Pikant voor Huygens, want zijn vader en een van zijn broers werkten als diplomaten voor de Oranjes.

Ongeveer een jaar na de dood van Constantijn, in april 1688, ging Christiaan op Hofwijck wonen. Christiaan Huygens overleed op 8 juli 1695, en liet zijn wetenschappelijke archief na aan de Universiteit Leiden. Zijn instrumenten en lenzen bleven in het bezit van de Huygens-familie, maar werden later bij opbod verkocht. Toch kunnen nog een aantal lenzen en een prachtig planetarium gezien worden in museum Boerhaave in Leiden.



Niet alleen is het 'tuinhuis' op Hofwijck meer dan de moeite waard om te bezichtigen, ook de omringende tuin is prachtig. Jammer genoeg is dit in het verleden niet altijd zo gezien; zo loopt de spoorlijn van Den Haag richting Utrecht dwars door de tuin. Bij het ontwerpen van Hofwijck werd Constantijn Huygens geïnspireerd door de Romeinse architect Vitruvius; de bouwprincipes zijn die van de Renaissance: symmetrisch en met harmonieuze maatverhoudingen. De vorm van de tuin is die van een menselijk lichaam, waarbij het buitenhuis het hoofd is, de lanen de armen en de tuin met fruitbomen de buik. Het buitenhuis heeft Constantijn in samenspraak met Jacob van Campen ontworpen, de architect van het Mauritshuis dat kort daarvoor gebouwd was, en het stadhuis in Amsterdam dat later zou volgen. Hoewel het een van de kleinere buitenhuizen is in Nederland maakt het – in al zijn eenvoud – een monumentale indruk.





Een bezoek aan Hofwijck, dat al meer dan een eeuw in het bezit is van de Vereniging Hofwijck, is zeer de moeite waard! Hofwijck ligt naast station Voorburg, en is dus zeer eenvoudig te bezoeken met het openbaar vervoer. www.hofwijck.nl

Anne Por

Instituut voor Geschiedenis
Universiteit Leiden
a.s.por@hum.leidenuniv.nl

Geschiedenis Wiskunde als remedie tegen wetenschappelijke ondeugden

Een wondermiddel tegen huichelarij, dweepzucht, en ongebreidelde fantasie

In 1847 publiceerde Karl Hermann Scheidler, destijds hoogleraar filosofie in Jena, alweer zijn derde editie van zijn *Grundlinien der Hodegetik oder Methodik des akademischen Studiums und Lebens*. Het lesboek ondersteunde de lezingen die hij gaf aan eerstejaars studenten. Hodegetische vakken en bijbehorende lesboeken voorzagen net gearriveerde studenten van advies over de studie en de rest van het academische leven. Het genre van de *Hodegetik* (van ὁδός, de weg, en ἄγω, wijzen) wees hen letterlijk de weg tot moreel en wetenschappelijk verantwoord gedrag. Het hebben van een goed begrip van wetenschap en de universiteit werd door de docenten en auteurs als een belangrijk middel tegen incompetentie gezien. Aan de hand van hodegetische vakken werden studenten gewaarschuwd voor wetenschappelijke, epistemologische ondeugden, zoals het voortijdig trekken van conclusies of het selectief lezen van bronmateriaal, en werden hen handvatten aangereikt om deze ondeugden uit de weg te gaan. Een van deze handvatten, zo geeft Scheidler aan, is te vinden in de wiskunde. Anne Por vergelijkt de ideeën van Scheidler met die van Pieter van Geer, hoogleraar wis- en natuurkunde in Leiden van 1867 tot 1902.

Karl Hermann Scheidler stelt enerzijds dat de wiskunde, vanwege de helderheid van haar concepten en de nauwkeurige aanwetteling van haar beoordelingen en conclusies, meer dan elk ander vakgebied geschikt is om inzicht te bieden in de wetenschap in zijn geheel [5]. Naast deze formele kwaliteiten, die Scheidler als algemeen bekend veronderstelt, wijst hij anderzijds op nog een andere verdien-

ste van de wiskunde: haar invloed op de ontwikkeling van de rest van ons denken. In de woorden van de wiskundige Moritz Wilhelm Drobisch stelt hij zijn lezers een reeks retorische vragen. De realisatie dat geen andere wetenschap haar beoefenaars in eenzelfde mate ‘het genot van de volledige overtuiging’ kan bezorgen, koppelt hij aan een meer algemene menselijke staat van zijn. Hij vraagt zijn lezers:

“Stijgt het besef van het kunnen ontdekken van de waarheid niet uit boven het gevoel van menselijke zwakheid en onvolmaaktheid dat ons zo vaak dreigt te onderdrukken?” (Erhebt hier nicht das Bewußtseyn, Wahrheit entdecken zu können, über das Gefühl menschlicher Schwäche und Unvollkommenheit, das uns sonst so häufig niederzudrücken droht?) [5, p. 326] Het besef de waarheid te kunnen ontdekken kan volgens Drobisch dus een zeer gunstige invloed hebben. Bij jonge beoefenaars wekt het een moedig zelfvertrouwen op, wat leidt tot een sterk karakter, een behoedzame en bedachtzame wijze van besluiten, en een duidelijke en vastberaden wijze van handelen. Een sterk karakter en evenwichtige wijze van oordelen zijn echter niet de enige pedagogische voordelen van de wiskunde. De door de wiskunde vereiste abstractie zorgt er volgens Drobisch voor dat de leerling zijn verbeeldingskracht op een gezonde manier leert gebruiken. Daarmee helpt de wiskunde om de “verderfelijke dromerijen, die vaak

het binnenste van de jeugd vergiften” te voorkomen [5, p. 326].

Naast dat Drobisch de wiskunde als preventief middel tegen onopzettelijke dwalingen presenteert, laat hij ook zien hoe zij meer opzettelijke vormen van misleiding, voortkomend uit ondeugden als ijdelheid en egoïsme, weerstaat. Hij beschrijft hoe, bij filologisch-historische en filosofische wetenschappen, ‘een goede aankleding’ of ‘een prettige voorstelling’ zwakke, halfwaarsachtige ideeën geloofwaardigheid kunnen verlenen. Met retorische kunstgrepen kunnen meningen die verdedigd worden uit ijdelheid of egoïsme plausibel gemaakt worden [5, pp. 326–327]. De geometrie en de algebra daarentegen kennen deze opsmuk van welsprekendheid niet; hun figuren en getallen zijn vrij van dergelijke driften. Door het vermogen van de wiskunde om huichelarij te ontmaskeren en te ontmoedigen, heeft zij volgens Drobisch een zeer gunstige uitwerking op haar jongere beoefenaars. Hij concludeert, nog steeds in vragende (oftewel, retorische) vorm:

“Vervreemden deze eigenschappen van de wiskunde niet het gemoed van de jongeling, die haar met ijver dient, van elke leugen, van elke pretentie, en vervullen zij hem niet met een warme liefde voor waarheid en waarachtigheid? Wordt niet elke hang naar sofistieke huichelarij in de kiem gesmoord als men er altijd zeker van kan zijn dat de oneerlijkheid van de inspanning niet lang onveroordeeld zal blijven?” [5, p. 327]

(Sollten diese Eigenschaften der Mathematik das Gemüth des Jünglings, der ihr mit Eifer obliegt, nicht jeder Lüge, jederstellungskunst entfremden und mit warmer Liebe zur Wahrheit und Wahrhaftigkeit erfüllen? Wird nicht jeder Hang zu sophistischer Gleisnerei im Keime erstickt, wenn man immer gewiß seyn kann, der Unlauterkeit der Bestrebung nicht lange unüberführt zu bleiben?)

Na deze lofzang op de wiskunde en haar deugdzaam eigenschappen, geeft Scheidler aan dat, als we een zeker deel van de literatuur over de wiskunde mogen geloven, toch ook wiskundigen niet volledig deugdzaam zijn, maar geplaagd worden door een bepaalde, aan de wiskunde verbonden ondeugd. Het studeren van wiskunde zou namelijk leiden tot eenzijdigheid, waarbij vooral de esthetische en de morele opleiding in het nauw komen



Hypatia wordt door Parabolani en monniken vermoord onder een Christusbeeld in het koor van een kerk. Ze weet zich nog eenmaal los te maken uit de menigte. Illustratie van Lee Woodward Zeigler uit [3, pp. 164–165].

en een sterke neiging bestaat om alles aan berekening te onderwerpen. Scheidler citeert Goethe, die zich op dit vlak sterk uitdrukt. In 1822 schreef hij: “De wiskunde kan geen vooroordeel wegnemen, zij kan de koppigheid niet verlichten, de partijgeest niet kalmeren. Zij slaagt in niets van al het morele.” (Die Mathematik vermag kein Vorurtheil wegzuheben, sie kann den Eigensinn nicht lindern, den Parteigeist nicht beschwichtigen, nichts von allem Sittlichen vermag sie.) Scheidler veegt deze aantijgingen met weinig woorden van tafel. Alhoewel hij de tendens herkent, beschrijft hij dat dit geen gevolg is van een inherente eigenschap van de wiskunde, maar eerder

voorkomt uit een gebrekkig begrip van de wetenschap en het beroep van de geleerde [5, pp. 330–331]. Oftewel, door studenten ook op dit vlak te onderwijzen, zoals met een hodegetisch vak, kan eenzijdigheid gemakkelijk voorkomen worden.

Kortom, Scheidler pleit voor het gebruiken van het onderwijs in de wiskunde ter ontwikkeling van het denken, maar geeft ook aan dat een breed begrip van wetenschap en geleerdheid noodzakelijk is om de morele vruchten te plukken van dit onderwijs. Het is een weinig origineel pleidooi, waarmee hij zich aansluit bij de bekende, vroegmoderne ideeën over de deugden en ondeugden van de wiskunde [2, pp. 1–2].

De wiskunde en haar lijdensweg

In 1904, in zijn rede uitgesproken bij zijn aanstelling als privaattoecent, presenteert ook de Leidse oud-hoogleraar in de wiskunde Pieter van Geer wiskunde en ongegronde, maar succesvol gepropageerde ideeën als natuurlijke vijanden, ditmaal zeer expliciet. Hij begint zijn rede met de woorden die kalif Omar in 640 bij het vernietigen van de bibliotheek van Alexandrië uitgesproken zou hebben. Samengevat: boeken anders dan de Koran waren schadelijk en dienden verbrand te worden. Kalif Omar en de zijnen waren volgens Van Geer echter niet als enige schuldig aan deze teloorgang van kennis. Ook andere groepen hadden daar aan bijgedragen. Hij schrijft: “Hoewel reeds vroeger een deel daarvan door dweepzieke christenhorden was vernietigd, ging hiermede de hoge beschaving der Griekse oudheid ten gronde, en werd een onherstelbare slag aan de wetenschap toegebracht.” [1, p. 1]

Naast het afbranden van de bibliotheek van Alexandrië, beschrijft hij ook de moord op de vrouwelijke wiskundige Hypatia als kantelpunt. Volgens Van Geer werd zij, aangespoord door bisschop Cyrillos, door een christenbende op gruwelijke wijze vermoord. (Van Geer noemt het bekende werk *Hypatia – or, New Foes with an Old Face* van Charles Kingsley [3].) Hij noemt haar “de laatste voorstandster der in het fanatisch christendom ondergaande paganistische wijsheid”, en beschrijft hoe, deels door de invloed van het toenemende christendom, een dichte duisternis de wetenschap overviel. Volgens Van Geer verduisterde “de nieuwe religie van mysticisme en wondergeloof” “de glans van de Griekse ontwikkeling.” Na de moord op Hypatia overheerste het dogmatisme eeuwenlang, zo schrijft hij [1, pp. 6–9].

Met het aanvoeren van Hypatia voorziet hij zijn luisteraars niet alleen van een martelaar voor de wiskunde en de wetenschap (“haar beeld blijft voortleven in onze herinnering”), maar voegt hij bovendien een opvallende genderdimensie toe aan zijn rede. Dat Hypatia zowel beoemd was door haar schoonheid, bevaligheid, en reinheid van zeden, als door haar geleerdheid, toont volgens Van Geer aan dat beoefening van wetenschap door een vrouw wel degelijk met “bevalligheid en reinheid van zeden” gepaard kan gaan. Zijn vrouwelijke (oud)leerlingen wijst hij op haar voorbeeld. Van de verschillende wetenschappen acht hij in het bijzonder de wiskunde als geschikt voor vrouwen. (“Geen studie acht ik zoo geschikt voor de vrouw van hoogen verstandelijken aanleg als die der mathesis.” [1, p. 7]) Enerzijds omdat de wiskunde “den geest boven de stoffelijke wereld met haar genietingen van lager allooï” verheft, en het zedelijke leven van de studente dus niet in gevaar wordt gebracht door haar studie. Anders dan bij een studie medicijnen of letterkunde, geeft het studeren van wiskunde geen aanleiding tot ‘onreine voorstellingen’ of ‘zinnelijke gedachten’. Docenten hoeven de te leren stof niet te censureren en studentes hoeven nooit “de blikken blozend neer te slaan” [1, pp. 7–8]. Anderzijds meent Van Geer dat de wiskunde een zeer geschikte studie kan zijn voor vrouwen vanwege een bepaalde eigenschap die hij de vrouw toedicht. Volgens Van Geer wordt de vrouw namelijk zeer aangetrokken tot “het grenzelooze terrein der bespiegeling”, maar dwaalt zij daar ook gemakkelijk af. Door middel van de wiskunde kan haar op dit zowel aantrekkelijke als gevaarlijke terrein ‘vasten voet’ gegeven worden, kan haar tot dwalen leidende fantasie ingeperkt worden [1, p. 8].

Het is opvallend dat Van Geer meent dat het beoefenen van de wiskunde het welzijn van de vrouw bevordert en met haar bevalligheid gepaard kan gaan. In Kirchhoffs *Die akademische Frau* [4], geven een aantal professoren weliswaar expliciet blijk van vertrouwen in de intellectuele capaciteiten van vrouwelijke wiskundigen, maar wordt wel betwijfeld of de wiskunde een vrouw werkelijk gelukkig kan maken. Het veeleisende werk zou tot ‘rode ogen’ en een ‘gerimpeld voorhoofd’ leiden, wat het vinden van een man en burgerlijke deugd zou verhinderen. Volgens de professor Georg Weyer schreef de bekende vrouwelijke wiskundige Kovalevsky zelfs dat het “een waar ongeluk is, wetenschappelijk begaafd te zijn, in het bijzonder voor een vrouw, die met geweld wordt voortgedreven in een werkgebied waar zij het geluk niet vinden kan.” (ein wahres Unglück [ist es], wissenschaftlich begabt zu sein, besonders für eine Frau, welche gewaltsam fortgetrieben wird in eine Thätigkeitssphäre, wo sie das Glück nicht finden kann.) [4, pp. 253–254]

Lof der wiskunde

Scheidler meent dat de wiskunde opzettelijke huichelarij, voortkomend uit ijdelheid en egoïsme, tegengaat; Van Geer stelt haar tegenover dweepzucht. Beiden geven ze aan dat de wiskunde onopzettelijke dwaalingen als gevolg van een grote fantasie, vooral aanwezig bij jongeren en vrouwen, voorkomt. Als klap op de vuurpijl is het volgens Van Geer, in tegenstelling tot andere wetenschappen, voor vrouwen mogelijk om de wiskunde te beoefenen met behoud van reinheid van zeden. De wiskunde als wondermiddel tegen huichelarij, dweepzucht, en ongebreidelde fantasie, zo beschrijven zij het vakgebied in al hun enthousiasme. De wiskunde: het lijkt haast of ze er mee dwepen. ☞

Referenties

- 1 Pieter van Geer, *De herleving der mathematische wetenschappen*: rede, uitgesproken tot opening zijner academische lessen als privaattoecent, A.W. Sijthoff, Leiden, 1904.
- 2 Matthew L. Jones, *The Good Life in the Scientific Revolution: Descartes, Pascal, Leibniz, and the Cultivation of Virtue*, University of Chicago Press, Chicago, 2006.
- 3 Charles Kingsley, *Hypatia – Or, New Foes With an Old Face*, J.F. Taylor and Company, New York, 1899, <https://hdl.handle.net/2027/inu.30000115323200>.
- 4 Arthur Kirchhoff, *Die akademische Frau: Gedanken hervorragender Universitätsprofessoren, Frauenlehrer, und Schriftsteller über die Befähigung der Frau zum wissenschaftlichen Studium und Berufe*, Hugo Steinitz Verlag, Berlin, 1897.
- 5 K.H. Scheidler, *Grundlinien der Hodegetik oder Methodik des akademischen Studiums und Lebens*, Cröker, Jena, 1847.

Daan Mulder

mulderdaan@live.nl



Het keerpunt van Anjet Daanje

Alleen als er ordening in je hoofd bestaat, kun je een verhaal van je eigen leven maken

Begin dit jaar haalde Anjet Daanje — pseudoniem van Anjet den Boer — met haar roman *De herinnerde soldaat* de longlist van de Libris Literatuurprijs. Het boek kreeg lovende recensies en er kwam een tweede, derde tot aan vijfde druk. Behalve negen andere romans schreef Daanje ook scenario's, verhalen en — veel langer geleden — een doctoraalscriptie in de wiskunde.

Wat trok je aanvankelijk om wiskunde te gaan studeren?

“Wat mij het meeste trok in wiskunde was het idee dat wiskunde een eigen wereld is die geheel door mensen is bedacht. Die wereld is niet zoals bij natuurkunde of scheikunde of biologie gebaseerd op de werkelijkheid, maar bestaat op zichzelf. Het is een vorm van fictie, door de mens in het leven geroepen, zoals een roman of een film. Het grote voordeel van wiskunde boven literaire fictie is dat er een vaststaande waarheid is in de wiskunde. Bij literaire fictie kun je eindeloos discussiëren of een roman of een personage of een verhaallijn goed of slecht is, niemand heeft aantoonbaar gelijk. Vroeger vond ik dat frustrerend, maar tegenwoordig zie ik er een vorm van vrijheid in, die wiskunde me niet kon bieden. Binnen de wiskunde moet je je houden aan wat je voorgangers hebben bewezen, je moet je aan de regels houden en aan de wiskundige waarheid. Eigenlijk is wiskunde een keurslijf, zoals ook de werkelijkheid dat is. Soms zou het voor een bepaald bewijs of algoritme veel mooier of interessanter zijn als een bepaalde eigenschap waar was, maar die is onwaar, en dus kun je hem niet gebruiken. In een roman is dat nooit het geval. Als ik met alle geweld wil dat iets gebeurt, dan kan ik het verhaal of de personages altijd zo aanpassen dat het mogelijk is. Schrijven is de ultieme vrijheid.

Ik vond vooral het schrijven van mijn doctoraalscriptie erg leuk. Ik studeerde af aan de Universiteit Utrecht in numerieke wiskunde in combinatie met geschiedenis van de wiskunde, waardoor ik ook historisch onderzoek moest doen, wat ik erg interessant vond. Mijn scriptieonderwerp was de Jacobi-methode voor het benaderen van de eigenwaarden van een matrix. Ik bestudeerde de methode en zijn ontwikkelingen van 1845 tot 1990. Tijdens dat historische onderzoek vond ik een door Jacobi in 1845 beschreven methode om de diagonalisatie van een matrix te



Anjet Daanje

versnellen, die daarna in de vergetelheid was geraakt. Enkele jaren geleden hoorde ik van professor Henk van der Vorst dat hij, mede door de herontdekking van die versnellingsmethode in mijn doctoraalscriptie, de Jacobi-Davidson-methode had kunnen ontwikkelen. Wat een hele verrassing voor mij was, want ik had toen al bijna twintig jaar niets meer aan wiskunde gedaan. [Zie ook de afscheidsrede van Henk van der Vorst, *NAW* 5/8(4), december 2007, p. 258.]

Na mijn doctoraal wiskunde ben ik een jaar aio geweest aan de Technische Universiteit Eindhoven, in het kader van de opleiding Wiskunde voor de Industrie. Het was toen dat ik besepte dat alle banen die ik met numerieke wiskunde zou kunnen krijgen niet wilde. Ik zou les kunnen gaan geven aan scholen of de universiteit, wat ik niet kon en niet wilde. Ik zou in de industrie kunnen gaan werken, wat me ook niet beviel. Mijn ouders waren allebei bioloog en ik had dus een wetenschappelijke onderzoekende manier van denken meegekregen van huis uit, ik had niet het idee dat die manier van denken iets was wat in de industrie werd gewaardeerd.

Ik had al tijdens het eerste jaar van mijn studie wiskunde in Utrecht de eerste versie van mijn eerste roman geschreven, en die in een later jaar herschreven. Toen ik aio was studeerde ik een aantal maanden aan de universiteit van Kaiserslautern in Duitsland, en toen schreef ik de derde versie van die eerste roman. Nadat ik, na één jaar aio te zijn geweest, besloot om te stoppen, vond ik al gauw een uitgever. Het was een kleine uitgeverij en mijn ouders betaalden de helft van

de uitgavekosten, maar ik wist inmiddels wel dat ik wilde kijken of het mogelijk zou zijn om van schrijven mijn werk te maken.

Het verband tussen mijn studie wiskunde en wat ik schrijf is voornamelijk te zien in mijn voorkeur voor logische verhaalstructuren. Het duidelijkste voorbeeld daarvan is de 7-delige televisieserie die ik heb geschreven: *De geheimen van Barslet*. Iedere aflevering speelt zich af in hetzelfde tijdsbestek, je ziet dus zeven maal dezelfde gebeurtenissen, maar gezien vanuit zeven verschillende hoofdpersonen. Alle gebeurtenissen uit de verschillende afleveringen moesten als een enorme puzzel in elkaar passen. Een vereiste bij dit soort verhaalstructuren is dat je als schrijver je desnoods in allerlei ingewikkelde bochten kunt wringen om de structuur te laten kloppen, maar dat de kijker of lezer daar niets van mag merken. De structuur mag, hoe ingewikkeld ook, het verhaal nooit in de weg zitten, en zeker niet gaan overheersen.

Als ik schrijf, zie ik handelingen en personages alleen vaag voor me, ik denk meer in woorden dan in beelden. Ik heb van 2001 tot ongeveer twee jaar geleden naast romans ook filmscenario's geschreven. Toen viel me vaak op dat filmregisseurs, heel veel meer dan ik, in beelden zonder verhaallijn dachten, in beelden alleen vanwege de beelden. Ik denk in psychologische ontwikkelingen, plotelementen, enzovoort. Dus in woorden en verhaalstructuren. Iets waarin je een overeenkomst met wiskundig denken kunt zien."

Hoe ben je bij het schrijven van 'De herinnerde soldaat' te werk gegaan?

"Bij *De herinnerde soldaat* ben ik uitgegaan van een bestaand historisch gegeven: een soldaat die terugkomt van het front en zijn hele geheugen is verloren, en de talloze vrouwen die zich melden omdat ze denken dat het hun man is. Daarna heb ik schematisch een verhaal en personages bedacht, waardoor duidelijk werd voor welke onderdelen van het verhaal ik historisch onderzoek zou moeten doen. Tijdens het doen van dat historische onderzoek kreeg ik veel nieuwe ideeën voor het verhaal en de personages, en kreeg het verhaal zo meer vorm

en diepgang. Tijdens het schrijven van de eerste versie van de roman stuitte ik vaak op kleine zaken waarvoor ik nog wat historisch onderzoek moest doen — bijvoorbeeld: hoe steek je een kolenfornuis aan? — dat zocht ik dan tussen het schrijven door uit.

Toen ik de schrijfstijl vond die het beste bij het onderwerp paste, wist ik dat het een goed boek zou worden. De schrijfstijl van een roman is altijd belangrijk voor mij, als ik begrijp hoe ik het moet opschrijven, begrijp ik pas echt wat voor soort boek het moet worden. Ik zou de schrijfstijl van *De herinnerde soldaat* omschrijven als een gedachtestroom, iedere zin roept een volgende op en het gaat maar door, zoals ook de gedachten in je hoofd nooit stoppen, zelfs niet als je slaapt. Met het telkens terugkerende woordje 'en' kon ik alle gebeurtenissen en gedachten van hoofdpersoon Amand aan elkaar gelijkschakelen, of het nu grote of kleine dagelijkse zaken zijn. Door dat woordje 'en' lijken ze voor hem allemaal even belangrijk te zijn, wat zijn mentale verwarring weergeeft, want ordening geeft houvast in een chaotische wereld. Alleen als er ordening in je hoofd bestaat, kun je een verhaal van je eigen leven maken, waardoor het een doel en een zin lijkt te krijgen. Dat is waarnaar Amand op zoek is.

Ik had de eerste versie van de roman in een archiefprogramma geschreven dat werkte met digitale archiefkaarten, en ik had daardoor geen idee hoe lang de tekst werd. Ik had om de een of andere reden het gevoel dat hij te kort werd, maar toen ik de eerste versie af had en besloot om te berekenen hoe dik de gedrukte versie van de roman zou worden, kwam ik tot de schrikbarende conclusie dat hij 1200 bladzijden zou worden. Ik heb een paar dagen in zak en as gezeten, maar er zat niets anders op dan helemaal overnieuw te beginnen en die tweede versie drastisch in te korten. Ik heb uiteindelijk de roman tot de helft weten in te korten, en achteraf gezien is hij daar vele malen beter van geworden, maar dat wist ik op dat moment natuurlijk niet.

Een van mijn belangrijkste drijfveren van het schrijven is dat ik het fantastisch zou vinden om een tijdje een ander dan mezelf te kunnen zijn. Dat kan natuurlijk

niet echt, maar tijdens het schrijven kom ik er wel zo dicht mogelijk bij. Terwijl ik schrijf leef ik op een bepaalde manier een alternatief leven waarin ik als een God alles onder controle heb. Wat ik het liefst met mijn romans op een lezer wil overbrengen is dat hij zich in de roman verliest, dat hij begrijpt hoe anders een ander mens tegen de wereld aankijkt, hoe het voelt om een ander te zijn. Een pleidooi voor tolerantie, nuance en begrip voor de medemens zijn mijn romans eigenlijk altijd, een boodschap die in deze tijden van polarisatie naar mijn idee niet overbodig is."

Hoe kijk je tegen het succes van 'De herinnerde soldaat' aan?

"Het is natuurlijk leuk dat recensenten en lezers *De herinnerde soldaat* hebben ontdekt, maar zelf heb ik niet het gevoel dat er daardoor bijzonder veel is veranderd. Ik heb altijd geschreven wat ik zelf wilde, en daar gaat het me toch om, en op die manier schrijf ik nog steeds, succes of geen succes.

Ik heb me nooit miskend gevoeld, eerder bevoorrecht dat ik met een talent ben geboren waarmee ik niet alleen mezelf gelukkig kan maken, maar waarvan ik ook in financieel opzicht kan leven. Het was natuurlijk wel eens frustrerend als ik naar mijn eigen gevoel echt een goede roman had geschreven en hij niet door recensenten werd opgemerkt, maar daar heb ik me altijd snel weer overheen gezet. Het heeft ook zo zijn voordelen om een onbekende schrijver te zijn, je bent vrij om te schrijven wat je wilt, slecht, goed, vreemd, onbegrijpelijk, het maakt niet uit wat je schrijft, want niemand verwacht iets van je. Wat dat betreft is het na het succes van *De herinnerde soldaat* moeilijker om een nieuwe roman te schrijven, iedereen zal hem met *De herinnerde soldaat* vergelijken en omdat die roman de hemel in is geprezen, kan de volgende eigenlijk alleen tegenvallen. Ik ben blij dat dit succes me pas later in mijn carrière is overkomen, nu heb ik zoveel ervaring dat ik ondanks die druk een eigenwijs goede roman kan schrijven."

Goede suggesties voor een Nederlandse wiskundige met een keerpunt in zijn of haar carrière zijn welkom via keerpunt@nieuwarchief.nl.

Ineke Hilhorst

documentairemaker
hilhorst@telfort.nl

Teun Koetsier

Afdeling Wiskunde
Vrije Universiteit
t.koetsier@vu.nl

History

Roland Weitzenböck and World War II

In their recent book, *Het Dorp, De Oorlog, De Mensen*, about the village of Laren in World War II, Ineke Hilhorst and Teun Koetsier devote a chapter to the Austrian, Roland Weitzenböck, at that time professor of mathematics at the University of Amsterdam. The chapter was translated by Bas and Tina Jongeling for the NAW and the authors added a note on Weitzenböck's mathematical work.

Bombardment in 1940

There is a sickle moon and the sky is overcast. In addition the Netherlands is blacked out. In the night of Saturday 5 to Sunday 6 November 1940 the street lighting is off, as always. No light is allowed to escape from any houses. Early in the night scores of bombers take off from England. Many of them are Hampdens. The Handley Page Hampden is a middle-sized two-engine bomber that can carry four high-explosive bombs of 250 kgs each.

Already in 1940 the Royal Air Force carries out many bombing flights over the continent. Harbours, aerodromes, factories, anything that the German army may use to

advance the war is eligible as a target. The Hilversum aerodrome is one of them. One of the Hampdens has, according to the *Royal Air Force Operations Record Book, Bomber Command Operations, 1936–1940*, as a target: 'Bussum Airport'. Bussum Airport must be interpreted as Hilversum Airport, as Bussum has no airport.

The navigator who is seated in the nose of the plane, finds it difficult to orient himself. At 23.05 English time, that is 00.05 Dutch time, the navigator drops four bombs. He then sees three explosions. 'Three bursts' the log says. The Hampden briefly circles round and then returns to base. Around that time eye witnesses on

the ground observe an English plane over Laren and Blaricum. Around midnight the plane comes into action. It skims over the centre of Laren heading in a north-easterly direction and at the 'Hut van Mie' drops four bombs, in a straight line. The first bomb explodes at the intersection of Melkweg-Kruislaantje, just behind the Hut van Mie. The bomb makes a deep crater and uproots several trees. The second bomb falls close to the garage of the villa 't Lânhus' at Melkweg 15 in Blaricum, which is badly damaged. The third bomb hits the villa Orion at number 13. The fourth falls in a garden.¹

There isn't much left of the villa Orion at Melkweg 13. Emergency workers find the principal resident, distraught, next to the debris. By accident he wasn't at home at the time of the bombardment. His wife is found dead under the rubble. His son Richard has been flung out of his bedroom



The last sentences concern the bombing of 'Bussum aerodrome', 5/6 October 1940



Villa Orion after the bombing

Source: RAF Operations Record Book, Bomber Command Operations 1936-1940, The National Archives London

Source: Gebe van der Woude

and is lying in the woodland with a gaping wound on his head. He can't be saved. The other son, Willy, is in Munich.² The maid-servant is unhurt.

The inhabitant of the villa is Roland Weitzenböck, professor of mathematics at the University of Amsterdam (UvA).

It is overwhelmingly likely that the bomber arrived over Laren and Blaricum by accident as a result of navigational problems. Although precision bombardments were not possible in those days, Weitzenböck is convinced that the bombardment is meant as an intentional attempt at his and his family's life.

The professor and the Laren artists

Since October 1921 Weitzenböck lectures in mathematics at the University of Amsterdam. He commutes daily by steam-tram from Blaricum via Laren to the capital. His most important book on mathematics is published in 1923: *Invariantentheorie* (Theory of Invariants). This theory can be applied in Einstein's general theory of relativity. In the years 1928–1929 Weitzenböck and Einstein are actually corresponding with each other. Many students follow Weitzenböck's lectures. His book is a kind of bible for them.³ In 1924 he becomes a member of the Koninklijke Academie van Wetenschappen (Royal Academy of Sciences) in Amsterdam.

Weitzenböck is popular and supervises several PhD students. One of the

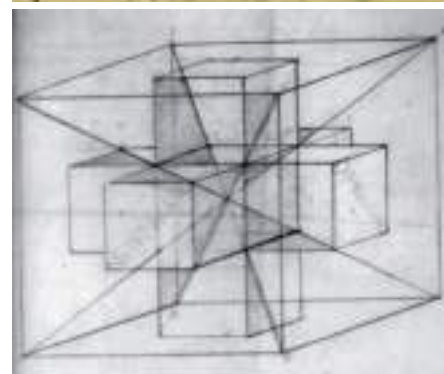
first — and certainly the best-known — is the chess player Max Euwe, who takes his doctorate with him in 1926. In 1929 Weitzenböck publishes *Der Vierdimensionale Raum* (Four-dimensional space).⁴ It is a well-written book for a wide audience.

The idea of a four-dimensional space also appeals to certain artists. Mondrian is staying in Laren because the First World War has prevented him from returning to Paris, and Bart van der Leek⁵ also settles in the Gooi area in those years. They are both in contact with the artist, writer and typographer Theo van Doesburg.

After a visit to Mondrian in 1916, Van Doesburg writes to Van der Lek: "Laren seems to be a delightful place for thinking quietly. There are quite a few people living there who occupy themselves with abstract life."⁶ Four-dimensional space inspires them in their abstract approach to art. In the magazine *De Stijl*, founded by himself, Mondrian and Bart van der Leek, Van Doesburg writes in 1920: "Life mathematics. What we have to learn from mathematics is the system of extension."⁷ And then he compares the development that will be required with the way mathematicians construct four-dimensional space.⁸

The idea of four-dimensional space also plays a role in the realm of ideas of the artists in the Gooi area in a different way. In the first decades of the twentieth century some artists are interested in spiritism, getting into contact with the spirits of the dead. Karel Schmidt,⁹ for example, paints "auras, visions, deceased souls, karmic portraits, astral bodies and also feelings and sounds."¹⁰ Lien Heyting writes about him: "As a painter-preacher-writer and clairvoyant he appealed enormously to the imagination and he was certainly the most peculiar figure ever to walk around in Laren en Blaricum."¹¹

Around the turn of the century spiritists entertain the idea that the three-dimensional world might be embedded in a four-dimensional world, in the same way that a two-dimensional flat surface can be part of a three-dimensional space. The spirits that the spiritists believe in might have their being in the four-dimensional space and display wonderful phenomena in our three-dimensional world. One of the people from whom this idea derives is the German Professor Friedrich Zöllner,¹² who has published extensively about it. In his work he is trying to find experimental confirmation



Source: Kröller-Müller Museum

Theo van Doesburg, 'Tesseractic study' 1924–1925 (top), and 'Tesseract in cube' 1925–1929 (bottom). A tesseract is a four-dimensional cube.

for his ideas. To this end he works together with the American medium Henry Slade,¹³ who is capable of making spirits write messages on a slate. Zöllner's claims are radically rejected by Weitzenböck. In his book on four-dimensional space he states that Slade is unfortunately a swindler and Zöllner a naïve professor who is all too keen to believe in his own fantasies.

Professionally Weitzenböck is very successful in the thirties. In 1938 he is awarded an honorary doctorate by the University of St. Andrews in Scotland. In May 1940, just before the war starts, he is appointed a corresponding member of the Academy of Sciences in Berlin.

Nieder mit den Franzosen

Weitzenböck is born in Kremsmünster, Austria, on 26 May 1885. He moves to the Netherlands because of his appointment as professor on 11 October 1921. Why Weitzenböck is chosen over other available candidates is not known. Bertus Brouwer,¹⁴ who is living in Blaricum, has the decisive voice in Amsterdam. Although Weitzenböck is a very good mathematician, there are better ones on the market, such as for example Jan Schouten¹⁵ from Delft. Malicious



Weitzenböck's book on four-dimensional space from 1929

tongues claim that Brouwer opts for Weitzenböck in order to keep the strong personality of Schouten out of the faculty.¹⁶

Weitzenböck chooses his domicile in Blaricum from 22 September 1921. His villa at Melkweg is just across the boundary with Laren. He is married and has a daughter, Grete, and two sons, Richard and Willy. All three of them are born in Blaricum. The family strikes roots quickly. Weitzenböck is a member of the Laren Chess Club, of which he becomes president in 1931. The club plays in the society hall of Hotel Hamdorff in Laren. His former PhD student Max Euwe becomes world champion in 1936. Already in the twenties Euwe is by far the best chess player in the Netherlands and he is very well-known. In 1924 he plays simultaneous chess in Laren on 24 boards. Euwe wins on 22 of the 24 boards. Weitzenböck is undoubtedly one of the players, but he is not one the winners.¹⁷

Weitzenböck is also for some time on the board of governors of the Gooische School, and he is a member of the board of the Public Library Laren-Blaricum. His son Willy, a good swimmer who is an excellent water polo player, is a member of the Laren Swimming Club 'De Kwakers'. In 1937 Weitzenböck's wife, Leopoldine Höfler, dies. He marries again on 21 April 1939.

It seems as if Weitzenböck is not interested in politics, but appearances are deceptive. The first letters of the sentences of the foreword of his book *Invariantentheorie* together form the words "Nieder mit den Franzosen"—"Down with the French". Obviously, with these words Weitzenböck expresses something that he feels very strongly about. It is a sentiment that derives from his experiences in the First World War and its frustrating outcome.

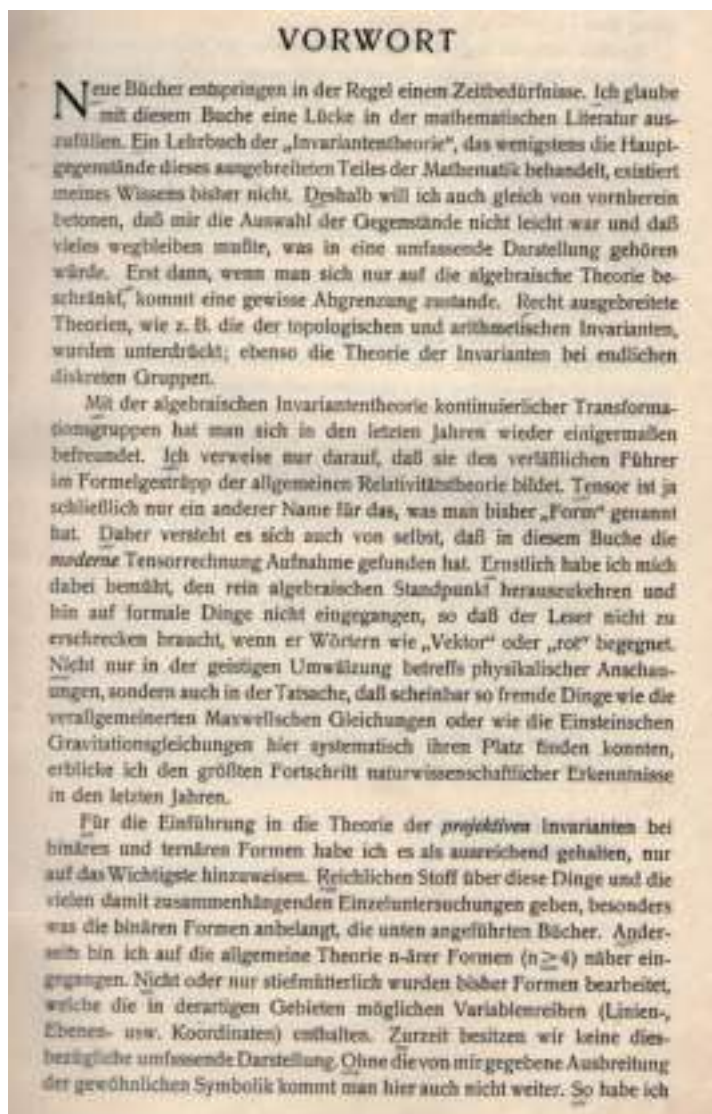
Weitzenböck in WW I

The occasion for the First World War is the murder of Archduke Franz Ferdinand in Sarajevo, the capital of Bosnia. Franz Ferdinand is shot by the 19-years old Serbian student Gavrilo Prinzip. That deed is a reaction to the annexation of Bosnia by Austria-Hungary, six years before. The murder leads to a chain reaction that plunges Europe into a devastating war. Supported by Germany, Austria-Hungary declares war on Serbia on Tuesday, 28 July. A week later the whole of Europe is aflame. The Russians support the Serbs. As a result Germany declares war on Russia. But first they attack France through



The Laren chess club in Hotel Hamdorff, around 1930. Chairman Weitzenböck sitting in the middle.

Source: The Laren chess club



The preface of *Invariantentheorie*. The first letters of the sentences form "Nieder mit den Franzosen".



Source: Kriegsmuseum Wien, courtesy of Dr. Gerhard Artl

Weitzenböck (right) on the Serbian front



Source: Kriegsmuseum Wien, courtesy of Dr. Gerhard Artl

Weitzenböck on the Serbian front

Belgium and Luxembourg, because of the French alliance with Russia. Because the British have guaranteed Belgian neutrality, Great Britain declares war on Germany on Tuesday, August 4.

Weitzenböck has personally experienced the fighting of WW I. When Austria-Hungary declares war on Serbia, he serves as a first lieutenant in the 13th engineering battalion (Sappeurbataillon 13). He is then already a mathematician holding a doctorate. The battalion advances to the river Drina, between Serbia and Bosnia. There, from 6 September to 4 October, the Battle on the Drina takes place, which claims 17 500 casualties.¹⁸ After a month of fighting the battle ends in a deadlock and the two parties entrench themselves.

The Austro-Hungarian soldiers take revenge for the assassination of their arch-duke. Insufficiently restrained by their superiors they commit numerous war crimes. In several Serbian villages unarmed men, women and children are shot or hanged. Soldiers declare later that during that first phase of the war anything is permitted. Buildings, houses and churches may be set on fire, and civilians may be murdered.¹⁹ The involvement of Weitzenböck is unknown. It seems likely that he was aware of the massacres.

After the battle Weitzenböck is promoted to captain. He is transferred from the frontline to the military academy at Mödling to teach. Next he is appointed commander of a company of the 7th Engineering Battalion. The battalion is sent to the Italian front, near the river Isonzo.²⁰ From 1915 to 1917 twelve battles take place there. In total 300 000 soldiers are killed

at the Isonzo front. A couple of days after the beginning of the 12th battle, during the so-called Flitsch-Tolmein breakthrough, Weitzenböck is seriously injured.

The defeat suffered by Germany and Austria in 1918 and the Versailles Treaty that clearly has the intention to punish the defeated adversary, lead to strong anti-French feelings in many Germans and Austrians. One of the clauses in the treaty stipulated that the allies would occupy the Rhineland for fifteen years. The fact that the French deployed thousands of men from their colonial army, amongst them many Senegalese, is experienced as particularly humiliating by the Germans. All this suggests that Weitzenböck also thinks that a great injustice has been done. He considers France to be the villain. With this view he is a representative of the German revanchism that develops after the war. Many nationalist Germans are convinced that the country has to have its revenge, particularly on France. That idea is also vividly present among many Austrians, among them Adolf Hitler. A year after the publication of Weitzenböck's *Invariantentheorie*, Hitler expresses it in *Mein Kampf*: "Der unerbittliche Todfeind des deutschen Volkes ist und bleibt Frankreich" – The implacable mortal enemy of the German people is and will always be France.

Weitzenböck's aversion against the French probably finds additional fuel in the fact that French mathematicians refuse to admit German and Austrian colleagues at the congress of the International Mathematical Union (IMU) in Strassburg. The German philosopher Schopenhauer (1788–1860) writes in his *The Art of Being Offensive*

about Europe and the French: "The other continents have monkeys. We have the French. That keeps each other in balance." That is humour, be it German humour. Weitzenböck's "Down with the French" isn't.

Weitzenböck is behind Hitler

Weitzenböck may have felt sympathetic towards the National Socialists as early as 1933. In 1936 he takes the initiative to acquire Dutch citizenship. His colleague Bertus Brouwer thinks that the request to be naturalized is probably made to prevent his sons from being called up to fight in the Austrian army against Germany.²¹

After the 'Anschluss' which incorporates Austria into Germany, Weitzenböck makes it clear that he supports Hitler's policies. When colleagues express their dismay about the annexation of Austria, they are amazed and bewildered to see that Weitzenböck is solidly behind Hitler's ideas. He believes in the ideal of a Greater Germanic Reich, which in his view is the best guarantee against the danger of bolshevism.²² In 1938 Weitzenböck refuses to shake hands with the Jewish mathematician Walter Ledermann.²³

His son Willy, who has enrolled in the Dutch air force and is doing his pilot training at the air base of Soesterberg, makes no secret of his sympathy for Hitler. That doesn't make him popular with the other pilots in training. Even before the war Weitzenböck writes to the English mathematician Herbert Turnbull²⁴ that the British will certainly lose the war, a prospect on which he offers his condolences before the event.²⁵ The fact that the entire family is behind Hitler leads to their isolation.

Weitzenböck joins the NSB

In May 1940 Weitzenböck is interned in Amsterdam. He is there in the company of Germans, NSBers and others of whom it is suspected that they might collaborate with the Germans. He meets a number of NSBers who make a positive impression on him. After his release he joins the NSB. His son Willy enrolls in the SS.

The chess club, of which Weitzenböck has by then been president for nearly ten years, ceases to exist in May 1940, because the members refuse to be in a club with an NSBer.

In September 1940 the Dutch-German Cultural Community is founded. Weitzenböck attends the meeting and encounters the Reich Commissioner, Seys-Inquart, the highest German representative in the country, and Hanns Albin Rauter, the highest SSer in the Netherlands. They are both Austrians. There is one aspect of the occupation that bothers Weitzenböck. The Netherlands has been invaded without an actual declaration of war beforehand. He thinks that was incorrect. He later corresponds with the Reich Commissioner about this point, but he doesn't receive a clear answer.²⁶ After the war Weitzenböck writes about this point: "Initially this was a most unpleasant surprise to me, but later I had to reconcile myself to the necessity of the attack as part of the campaign against France. At that moment I saw the realization of the German victory as essential for Europe."²⁷

When Weitzenböck's house is bombed in 1940, many people don't believe that it happened by accident. There is a rumour that an hour earlier that same evening a meeting had taken place at his home of NSBers and high German officers. That was supposedly the reason for the bombardment. Weitzenböck himself suspects that colleagues of his son, the pilot, who have escaped to England, are behind it. Later he says about the bombardment: "The circumstances under which this happened were such that a mistake was out of the question; obviously the house of the undersigned was intentionally targeted. As a result he was bound to gain the impression that the Dutch Government viewed him as an enemy who had to be killed, even if other inmates of the house would fall victim. Under those circumstances it is perhaps not excusable, but yet understandable that the undersigned, seriously

affected as he was, considered the link that had been established by his lengthy sojourn in the Netherlands and by his naturalization as severed."²⁸

The villa is rebuilt. On 20 May 1941 the local newspaper *De BEL* reports that the professor has a new telephone number: 3552. In May 1941 Weitzenböck requests an interview with Rauter. During the meeting he applies for German citizenship for his son Willy. He also discusses the release of his neighbour, the engineer Westenek of Melkweg 15, who has been arrested. Westenek lives in the villa 't Lânhus, the garage of which has been destroyed in the bombardment. A third request concerns a German Jew who had been awarded the Iron Cross 1st class in WW I. Weitzenböck asks if permission can be granted for the man to migrate to America, to which Rauter reacts saying that Weitzenböck better not get involved with Jews.²⁹ In September 1941 Weitzenböck resigns his NSB membership.³⁰ In 1942 he acquires German citizenship, but he doesn't join the NSDAP, the German Nazi party. On at least one occasion he puts out the swastika flag: on Hitler's birthday.

As a reserve captain of the former Austrian army, he is automatically given the same rank in the German army. As a, by now, elderly reserve captain he is attached

to a Schützgruppe in Hilversum. This reserve unit limits its activities to exercises and does little else. Weitzenböck does not participate in the exercises.

Only in 1944 does the Schützgruppe become active. The group has to expropriate houses on behalf of the Wehrmacht. Dressed in a captain's uniform, including a pistol, Weitzenböck knocks at people's doors. The expropriations make him a figure of hate throughout the Gooi area. The house of the painter Douwe Komter is expropriated several times. Before the war he was a member of the same chess club and at the time he boycotted Weitzenböck. Komter therefore views the expropriations as an act of personal revenge.³¹

Weitzenböck pays a high price for his ideals. His son Willy is killed on 13 February 1944 at the Russian front.

On 30 April 1945 Hitler commits suicide in his bunker in Berlin. The next day the German radio announces that Hitler has died a heroic death in the defence of Berlin, and that he is succeeded as state president and as commander of the armed forces by Admiral Dönitz. To the bitter end Weitzenböck fulfils his duty as an officer in the German army. While on 4 May 1945 it is more than obvious that Germany has lost the war, in the reading room of the public library in Hilversum Weitzenböck swears the oath of allegiance to Dönitz.³² The next day the Netherlands is liberated.

After the liberation

Weitzenböck is arrested on 19 May 1945.³³ The University of Amsterdam discharges him dishonourably, without the right to a pension. His membership of the Royal Academy of Sciences is also taken from him.³⁴ Because his possessions have been impounded he has to live on a periodical remittance by the Nederlands Beheersinstituut (Dutch Administration Institute) paid out of his own savings.³⁵ It seems that he is free for some time during that period, for on 9 March 1946 he is arrested again.³⁶ On 23 April 1947 he is interned in the camp Proromo in Naarden. The camp consists of four barracks within the walled town, where hundreds of people are accommodated who are accused of collaboration with the Germans, both men and women. He may have been held there before.

It is the intention that Weitzenböck will be tried in Hilversum. On 27 January 1947 a request arrives there to give the



Captain Roland Weitzenböck in his German uniform

Source: Nationaal Archief

case priority because it “concerns a man of science with an international reputation.” It seems that the court ignores this. On 10 June 1947 he is transferred to Fortress Veldhuis, the Detention and Internment Camp in Uitgeest. Soon after he is moved to Camp Laren. The situation in these internment camps is on the whole very poor. The guards are regularly guilty of assaulting alleged or real traitors. Cases come to light where guards withhold food and water from inmates. On 13 August 1947 Weitzenböck’s lawyer, K. Jansma, submits a request that his client be relocated to Fortress Veldhuis. The argument advanced by Jansma is the age of 62-year-old Weitzenböck.

The political investigation service makes the following accusations against Weitzenböck: abandoning his Dutch citizenship at his own request; enlisting in the German army on 1 September 1944; wearing a German uniform and pistol; participating in courses and exercises with anti-tank shells on the Crailo heath; putting out the swastika flag on Hitler’s birthday; the expropriation of the houses of L.A. Insinger and D. Komter in Laren on behalf of the Wehrmacht.³⁷

During the court case the prosecutor says: “Everybody in Blaricum knew you were a great friend of the Germans! Why did you become, in 1942, an outspoken enemy of the country that had once warmly taken you in? Why did you adopt German citizenship in 1942?” Weitzenböck replies: “I felt attracted to the Greater Germanic idea, but politically I was actually a child. I was of the opinion that political peace and quiet would only be possible in Europe if the political boundaries corresponded with the boundaries between nations.”³⁸

Weitzenböck adduces the bombardment on his house which he only survived because he happened to be away from home, as another reason to acquire German citizenship. He views it as a personal attack on himself and his family.

Several mathematicians urge a lenient treatment of Weitzenböck. There is a letter from Herbert Turnbull of the University of St. Andrews in Scotland, which had awarded Weitzenböck an honorary doctorate. Turnbull describes him as a ‘man of honour’ and a great scientist. He appeals for clemency, also in view of his age. Two colleagues from the University of Amsterdam, Bertus Brouwer and Gerrit Mannoury, also plead for a mild sentence. Mannoury describes Weitzenböck “as a man of strict devotion to duty and a highly developed sense of honour, who towards his students (also towards the Jewish students among them) displayed great readiness to help and meticulous impartiality, and that it therefore seems inconceivable to him that Prof. W. would ever have engaged in espionage or other dishonourable acts, but that he thinks it, by contrast, entirely understandable that Prof. W. (who, as far as known to the undersigned, had dual citizenship at the outbreak of the war and therefore still held the rank of German reserve officer) felt obliged, in the conflict between his original fatherland and the Netherlands, to choose the side of the first, that any other attitude would for him have meant treason in the highest, i.e. the moral sense of the word.” The chess master Max Euwe also writes a favourable testimony about Weitzenböck.

On 15 December 1948 the cantonal court in Hilversum gives its verdict. It sentences Weitzenböck to:

- Detention for a period equal to the time he has been interned.
- Disfranchisement.
- Deprivation of the right to hold the office of professor.
- Sequestration of his assets, extending to and limited to one tenth of these assets.

The cantonal court also decides that within three months of the sequestration having taken effect the management of Weitzenböck’s assets shall come to an end.

The High Authority in Amsterdam considers the sentence too light. On appeal the Cantonal Court in Amsterdam passes sentence on 3 March 1949. The verdict is the same. Weitzenböck, who in the meantime has been transferred to the Internment Camp Vught, is released on 26 April 1948. According to the administration of the registrar’s office he takes up residence at Prins Hendriklaan 89 in Bloemendaal on 11 May 1948. On 12 February 1949 he moves to an apartment in Amsterdam-Zuid, at Johannes Verhulststraat 183. When the Free University in Berlin offers him a professorship in 1949, in the context of the Special Jurisdiction that still applies to him, the authorities do not allow Weitzenböck to leave the country.³⁹

On 15 May 1951 Weitzenböck moves to Zelhem in the Achterhoek, close to the German border, to the property with cadastral number F116, now Petersdijk 2. For his daughter Grete, who works as a nurse in Germany, it is easier to visit him there.

In May 1955 he finishes work on a revised edition of his book on four-dimensional space. It is not clear whether the printed version has come into his hands. Professor Roland Weitzenböck dies in Zelhem on 25 July 1955 at the age of 70. ☞

A note on Weitzenböck’s legacy

The Weitzenböck connection and Weitzenböck spacetime

Weitzenböck was a good mathematician but he worked essentially in an area of mathematics, the theory of invariants, of which the development would soon stagnate.⁴⁰ Weitzenböck’s *Invariantentheorie* was an excellent textbook, albeit about a theory that had reached its peak. After the twenties the number of publications on invariant theory gradually decreases and after WW II invariant theory had become a dead subject for most mathematicians. At the end of the twentieth century, there was however, a resurgence of the theory.⁴¹

Yet Weitzenböck’s name is not forgotten. In the literature there are Weitzenböck identities, Weitzenböck formulas and there is the Weitzenböck curvature. We haven’t found precise references to his work. As for the identities, according to the relevant Wikipedia item it is uncertain whether they ever appeared in Weitzenböck’s work.⁴² We will not discuss these notions and restrict ourselves to two other examples of Weitzenböck’s mathematical work. The first example concerns the general theory of relativity.

Once Einstein had formulated his theory of gravitation as a manifestation of spacetime geometry, he started the search for a unified field theory, the unification of gravitation with Maxwell’s theory of electromagnetism.

From the summer of 1928 until the spring of 1931 Einstein worked on an approach in which the notion of distant parallelism (Fernparallelismus), also referred to as absolute or teleparallelism, is central. Einstein used a field of orthonormal bases of the tangent spaces on the four-dimensional manifold, a tetrad field. The idea was to define the tetrad field in such a way that it would accommodate both gravity and the electromagnetic field. The tetrad field would have to allow the distant comparison of the direction of tangent vectors at different points of the manifold, hence the name distant parallelism.⁴³ This requires a connection that is such that when a vector issuing from a point A is transported parallel to itself along different routes to a point B the result is the same vector. This particular connection of the parallelization is often called the *Weitzenböck connection*. Its Riemann curvature is zero. And indeed, Weitzenböck presents it in a purely mathematical context in his *Invariantentheorie* of 1923.

It all started with two short notes by Einstein published in June 1928 in the *Sitzungsberichte* of the Prussian Academy.⁴⁴ They are original pieces of work written without interaction with other mathematicians or physicists. Einstein thought that he had come up with a completely new geometry of distant parallelism and he asked Max Planck whether mathematicians might be familiar with the notions he was developing. Planck had said then that the physical content was important enough to warrant immediate publication.

However, after the publication of the two notes, several men reacted. One of them was Weitzenböck. On 1 August 1929, he wrote to Einstein: “The connection components that you denote [...] by $\Delta_{\mu\sigma}^\nu$ were published first (1921) in my encyclopedia article III E 1 in note 59 with No. 18; more explicitly in my *Invariantentheorie* (1923) (Groningen, Noordhoff), p. 317.”⁴⁵ In other words: “already in 1921 I discovered this geometry of yours.” He also mentioned some other results that might be useful to Einstein and offered to write a note for the Prussian Academy. Einstein reacted immediately on 3 August. In his letter he welcomed the idea that Weitzenböck would write a note. Weitzenböck sent it on 8 August. Einstein presented it to the Academy and it appeared on 28 November 1928.

Elie Cartan, who had already worked on the geometry of distant parallelism in 1922 and 1923, also reacted to Einstein's notes. He mentioned his own papers and he wrote that when Einstein visited Paris in March/April 1922 in order to give a talk at the Collège de France, he, Cartan, had, at Hadamard's place, talked about them and that he had given Einstein a simple example of a Riemannian space with ‘Fernparallelismus’.⁴⁶

Einstein seemed to have forgotten the conversation, but in his 10 May 1929 letter to Cartan he admitted Cartan's priority and he excused himself by referring to the fact that Weitzenböck in his note had omitted Cartan among his 14 references as well.⁴⁷

This was not a convincing excuse, because, as Cartan pointed out in his answer to Einstein, one of Weitzenböck's references is a paper by Bortolotti in which Bortolotti refers several times to Cartan.⁴⁸ Einstein had forgotten the conversation with Cartan or he had not fully understood Cartan. Yet when he needed distant

parallelism the idea surfaced in his mind. We do not know what happened in Weitzenböck's mind. He may have decided consciously not to mention the Frenchman's work, after all “Nieder mit den Franzosen”.

Einstein solved the embarrassing situation by asking Cartan to write a historical note on distant parallelism.⁴⁹ In his paper Cartan pointed out that he himself in 1921 and Weitzenböck in 1923 had made the same discovery in a purely formal context. These formal operations could not be viewed as the discovery of absolute parallelism from his point of view.⁵⁰ The notion of absolute parallelism had only been explicitly introduced by Cartan himself in 1922 and 1923, he wrote. He did not deny though that Weitzenböck's theoretical contributions were valuable.

Although Einstein mentioned Weitzenböck three times in later papers the two men don't seem to have had any further contact. Yet Einstein never fully accepted Cartan's priority claim and continued to mention Weitzenböck as one of the mathematicians who had discovered absolute parallelism before he did.

It seems that Weitzenböck never referred to Cartan,⁵¹ although he must have been aware of the Frenchman's work. For example, Cartan and J.A. Schouten wrote two papers that were presented in 1926 to the Dutch Academy of Sciences in Amsterdam.⁵² The title of one of them is ‘On Riemannian geometries admitting an absolute parallelism’. The papers were presented by Jan de Vries, Weitzenböck's colleague in Amsterdam.⁵³ We also know that Weitzenböck read French, because in 1913 he published a (positive) review in *Monatshefte für Mathematik* of a Belgian textbook on determinants written in French. Lluís Bel may be right when he writes: “Weitzenböck is known for disliking Frenchmen in general and E. Cartan in particular.”⁵⁴

Weitzenböck's opus magnum *Invariantentheorie* has almost been forgotten, but his name lives on in the literature on relativity theory in the Weitzenböck connection and the Weitzenböck spacetime that is defined by it.⁵⁵

Weitzenböck's inequality

In 1919 Weitzenböck published a nice result in elementary geometry that is called Weitzenböck's inequality.⁵⁶ It is worth mentioning. The inequality states that for a triangle with sides having lengths a , b , c and area F , the following inequality holds:

$$a^2 + b^2 + c^2 \geq 4\sqrt{3}F \quad \text{or} \quad \frac{\sqrt{3}}{4}a^2 + \frac{\sqrt{3}}{4}b^2 + \frac{\sqrt{3}}{4}c^2 \geq 3F.$$

The second version of the inequality has an elegant geometrical interpretation: the sum of the areas of equilateral triangles erected over the sides of a triangle is greater or equal to three times the area of the original triangle. Equality occurs if and only if the triangle is equilateral. In his paper Weitzenböck gave three analytical proofs. He also gave generalizations to a polygon with n sides and a tetrahedron. The results are less elegant, but they demonstrate Weitzenböck's analytical skills.

For a short analytical proof we refer to Bottema [3, pp. 42–43]. The Wikipedia entry on Weitzenböck's inequality has a nice synthetic proof using the Fermat point of the triangle. There are references to several generalizations.

Notes

- 1 According to eyewitnesses, the plane returns after 45 minutes, ignites the landing lights briefly and disappears in a westerly direction. Those three quarters of an hour correspond to the log that says the plane is still circling for more than half an hour.
- 2 At the time of the bombing, his daughter Grete Edda Maria lives in Vienna. See *De BEL* of 11 October 1940, p. 2.
- 3 Van Dalen [8, p. 643].
- 4 Weitzenböck [27].
- 5 Bart van der Leek (1876–1958).
- 6 Source <https://museumtv.nl/bart-van-der-leek>, accessed on 7 October 2020.
- 7 Theo van Doesburg (writing under the name I. K. Bonset), *De Stijl*, August 1920.
- 8 The original text in Dutch is: “Willen wij van uit het punt-ik een overlichamelijk-uitgebreid ik (R4-ik) construeeren dan moeten wij beginnen ons van punt-ik (een toestand van geheel in zichzelf afgesloten individualisme) tot lijn-ik, van lijn-ik tot vlak-ik, van vlak-ik tot lichaam-ik, van lichaam-ik tot overlichamelijk-uitgebreid-ik, te ontwikkelen. Dit gaat niet zonder dat wij ons voorgaand ik gedurig in liquidatie brengen. Deze mathematische evolutie, deze vermenigvuldiging van levensassen is den modernen mensch noodzakelijk.” Van Doesburg makes several works of art stimulated by the idea of four-dimensional space. See Van Doesburg [11, pp. 393–395].
- 9 Karel Schmidt (1880–1920).
- 10 Heyting [15, pp. 160–161].
- 11 Heyting [15, p. 159].
- 12 Friedrich Zöllner (1834–1882).
- 13 Henry Slade (1835–1905).
- 14 Luitzen Egbertus Jan (Bertus) Brouwer (1881–1966).
- 15 Jan Arnoldus Schouten (1883–1971).
- 16 Van Dalen [8, p. 351].
- 17 The players who won against Euwe were Van Groningen (Laren) and Kokje (Blaricum).

References

- 1 G. Alberts and H. J. Zuidervaar, *De KNAW en de Nederlandse wetenschap tussen 1930 en 1960*, KNAW Press, 2009.
- 2 Lluís Bel, Connecting connections, A bricklayer view of general Relativity, arXiv:0805.0846
- 3 O. Bottema, R. Ž. Djordjević, R. R. Janić, D. S. Mitrinović and P. M. Vasić, *Geometric Inequalities*, Wolters-Noordhoff, 1969.
- 4 E. Cartan and J. A. Schouten, On Riemannian geometries admitting an absolute parallelism, *Proc. Royal Academy Amsterdam* 29 (1926), 933–946.
- 5 E. Cartan and J. A. Schouten, On the group-manifold of simple and semi-simple groups, *Proc. Royal Academy Amsterdam* 29 (1926), 803–815.
- 6 E. Cartan, Notice historique sur la notion de parallélisme absolu, *Mathematische Annalen* 102 (1930), 698–706.
- 7 A. Cogliati and P. Mastrolia, Cartan, Schouten and the search for connection, *Historia Mathematica* 45 (2018), 39–74.
- 8 Dirk van Dalen, L. E. J. Brouwer, *Topologist, Intuitionist, Philosopher, How Mathematics is Rooted in Life*, Springer, 2013.
- 9 R. Debever, ed., *Elie Cartan—Albert Einstein: Lettres sur le parallélisme absolu 1929–1932*, Académie Royale de Belgique.
- 10 D. H. Delphenich, ed., *Selected Papers on Teleparallelism*, Neo-classical Press, 2013, www.neo-classical-physics.info/uploads/3/0/6/5/3065888/selected_papers_on_teleparallelism.pdf,

- See the *Algemeen Handelsblad* of 30 March 1924, p. 10.
- 18 In 1915 Weitzenböck wrote a booklet on the battle with the Serbians [22].
- 19 Anton Holzer [16, pp. 45–74]. See: www.fotogeschiede.info. Short version: <http://www.kakanien-revisited.at/beitr/fallstudie/AHolzer1.pdf>
- 20 The location of the fighting is now in north-western Slovenia.
- 21 Van Dalen [8, p. 667]. Weitzenböck later confirmed this during his trial. See *Trouw* of 7 December 1948.
- 22 Nationaal Archief, Archival item CABR 94347 (PRA Hilversum 4409A).
- 23 Van Dalen [8, p. 666].
- 24 Herbert Westren Turnbull (1885–1961).
- 25 Van Dalen [8, pp. 666–667].
- 26 Nationaal Archief, Archival item CABR 94347 (PRA Hilversum 4409A).
- 27 Van Dalen [8, p. 699].
- 28 Nationaal Archief, Archival item STPD 239 (Amsterdam-Zuid).
- 29 Nationaal Archief Archival item CABR 94347 (PRA Hilversum 4409A).
- 30 Nationaal Archief, Archival item STPD 239 (Amsterdam-Zuid).
- 31 Nationaal Archief, Archival item CABR 94347 (PRA Hilversum 4409A).
- 32 Van Dalen [8, p. 699].
- 33 Nationaal Archief Archival item CABR 94347 (PRA Hilversum 4409A).
- 34 For the details of the procedure we refer to Knechtmans [17, pp. 30–31]. He is not included in the academy's historical membership database. Apparently one must die as a member to be listed there.
- 35 The Dutch Administration Institute is an institution charged with managing the assets of traitors in the period 1945–1967. The institute also dealt with the assets of Jews who died during the war.
- 36 Nationaal Archief Archival item CABR 94347

accessed on 7 October 2020.

- 11 Els Hoek, red., *Theo van Doesburg, Oeuvre catalogus*, Centraal Museum Utrecht – Kröller-Müller Museum Otterlo, 2000.
- 12 A. Einstein, Neue Möglichkeit für eine einheitliche Feldtheorie von Gravitation und Elektrizität, *Sitzber. Preuss. Akad. Wiss.* 17, (1928), 224–227.
- 13 Charles S. Fisher, The death of a mathematical theory: a study in the sociology of knowledge, *Archive for History of Exact Sciences* 3 (1966), 137–159.
- 14 Hubert Goenner, On the history of unified field theories, *Living Reviews in Relativity* 2004-2. <https://link.springer.com/article/10.12942/lrr-2004-2#FN186>, accessed on 7 October 2020.
- 15 Lien Heyting, *De wereld in een dorp, Schilders, schrijvers en wereldverbeteraars in Laren en Blaricum 1880–1920*, Meulenhoff, 1994.
- 16 Anton Holzer, Augenzeugen, der Krieg gegen Zivilisten, Fotografien aus dem Ersten Weltkrieg, *Fotogeschiede, Beiträge zur Geschichte und Ästhetik der Fotografie* 22 (2002), H. 85/86.
- 17 Peter Jan Knechtmans, De Akademie tijdens de bezetting, in Alberts et al. [1, pp. 13–38].
- 18 Tomás Ortín, *Gravity and Strings*, Cambridge University Press, 2004.
- 19 Gian-Carlo Rota, Two turning points in invariant theory, *The Mathematical Intelli-*

(PRA Hilversum 4409A).

- 37 Archiefstuk CABR 94347, PRA Hilversum 4409A.
- 38 *Trouw* of 7 December 1948, p. 3.
- 39 Van Dalen [8, p. 715].
- 40 Fisher [13].
- 41 Rota [19].
- 42 en.wikipedia.org/wiki/Weitzenböck_identity, accessed on 7 October 2020.
- 43 Much of this section is based on Sauer [20].
- 44 Einstein [12]. For an English translation of this paper and the main other papers on distant parallelism from 1928–1930 see Delphenich [10].
- 45 “Die von Ihnen [...] genannten Zusammenhangskomponenten finden sich zuerst (1921) in meinem Enzyklopädie-Artikel III E 1 in Anmerkung 59 bei No. 18; ausführlicher in meiner Invariantentheorie (1923) (Groningen, Noordhoff), p. 317ff.” Weitzenböck to Einstein, 1 August 1929, EA 23-367. Quoted from Sauer [20, p. 410].
- 46 Goenner [14].
- 47 See Goenner [14]. Goenner refers to Debever [9].
- 48 “[...] il indique dans sa bibliographie une note de Bortolotti dans laquelle il se réfère plusieurs fois à mes travaux.” Quoted in Goenner [14].
- 49 Cartan [6]. For an English translation of this paper and the main other papers on distant parallelism from 1928–1930, see Delphenich [10].
- 50 “Mais on ne peut voir dans cette opération purement formelle la première apparition de la notion de parallélisme absolu.”
- 51 Scholtz [21].
- 52 Cartan and Schouten [4, 5].
- 53 Cogliati and Mastrolia [7].
- 54 Bel [2, p. 1].
- 55 Ortín [18, p. 19].
- 56 Weitzenböck [23].

gencer 21 (1999), 20–27.

- 20 Tilman Sauer, Field equations in teleparallel spacetime: Einstein's Fernparallelismus approach towards unified field theory, *Historia Mathematica* 33 (2006), pp. 399–439. See arXiv:physics/0405142, accessed on 7 October 2020.
- 21 Erhard Scholtz, E. Cartan's attempt at bridge-building between Einstein and the Cosserats—or how translational curvature became to be known as torsion, *European Physical Journal H* 44 (2019), 47–75.
- 22 Roland Weitzenböck, *Neun Monate gegen Serbien: 1914/1915*, Jaffé, 1915.
- 23 Roland Weitzenböck: Über eine Ungleichung in der Dreiecksgeometrie, *Mathematische Zeitschrift* 5 (1919), 137.
- 24 Roland Weitzenböck, Neuere Arbeiten der algebraischen Invariantentheorie, in: *Encyclopädie der mathematischen Wissenschaften mit Einschluss ihrer Anwendungen*, III E 1, Teubner, 1921.
- 25 Roland Weitzenböck, *Invariantentheorie*, Noordhoff, 1923.
- 26 Roland Weitzenböck, Differentialinvarianten in der Einsteinschen Theorie des Fernparallelismus, *Preussische Akademie der Wissenschaften, Sitzungsberichte* (1928), 466–474.
- 27 Roland Weitzenböck, *Der Vierdimensionale Raum*, F. Vieweg & Sohn, 1929. (A revised edition appeared in 1956.)

Jovan Gerbscheid

student wiskunde University of Cambridge
jovan.gerbscheid@gmail.com

Evenement Internationale Wiskunde Olympiade 2020

Punten in de anderhalvemetersamenleving scheiden met een lijn

Bij de Internationale Wiskunde Olympiade (IMO) 2020 heeft het Nederlandse team twee gouden, een zilveren en drie bronzen medailles in de wacht gesleept. Deze prestigieuze wiskundewedstrijd voor middelbare scholieren zou in juli in Sint-Petersburg, Rusland, worden georganiseerd, maar werd in plaats daarvan half september als wedstrijd-op-afstand in alle deelnemende landen gehouden. Leerlingen werkten op twee achtereenvolgende wedstrijddagen individueel aan in totaal zes opgaven van voor hen hoog wiskundig niveau; op elke wedstrijddag kregen ze hiervoor vier en een half uur de tijd. Goudenmedaillewinnaar Jovan Gerbscheid (17), inmiddels student wiskunde in Cambridge, wist de moeilijkste opgave volledig op te lossen, wat in totaal slechts vier van de 616 deelnemers lukte. In dit artikel blikt hij terug op deze opgave over punten die onderling voldoende afstand houden en hoe je die kunt scheiden met een lijn. Inderdaad, een opgave geïnspireerd op de anderhalvemetermaatregel, gecreëerd toen net de hele wereld in een lockdown ging.

Tijdens de tweede dag van de IMO had ik nog ongeveer twee uur over toen ik opgave 4 en 5 had opgelost. Ik was toen al heel blij omdat ik dacht dat ik een zilveren medaille zou halen. (In 2018 en 2019 zat ik ook in het IMO-team en beide keren behaalde ik een bronzen plak.) Ik had nog nauwelijks aan opgave 6 gewerkt. Ik had vervolgens redelijk snel een zwakker resultaat gevonden dat één punt bleek op te leveren. Uiteindelijk had ik een heel grof bewijs gevonden voor de opgave zelf. Ik ging toen met tijdnood een netversie schrijven

waarbij ik nog heel wat details moest toevoegen. Gelukkig bleek ik precies genoeg te hebben opgeschreven voor een volledige oplossing. Met $7+3+0$ punten op dag 1 en $7+7+7$ punten op dag 2, kwam ik in totaal uit op 31 punten: precies genoeg voor een gouden medaille.

Opgave 6 (zie kader) was bedacht toen de wereldwijde lockdown begon en de punten die onderling afstand 1 van elkaar houden zijn geïnspireerd op mensen die onderling afstand houden. Bij de opgave mag je de constante c helemaal zelf kie-

zen, dus resultaten voor kleine n zeggen niet zoveel omdat je c willekeurig klein kunt kiezen. Het gaat juist om willekeurig grote n , waarbij het extra lastig is dat de functie $f(n) = cn^{-1/3}$ heel langzaam daalt, dus $cn^{-1/3}$ relatief groot is als je een heel grote n neemt. Omdat het hier alleen om ordes van grootte gaat, kan ik bij berekeningen constanten in principe weglaten.

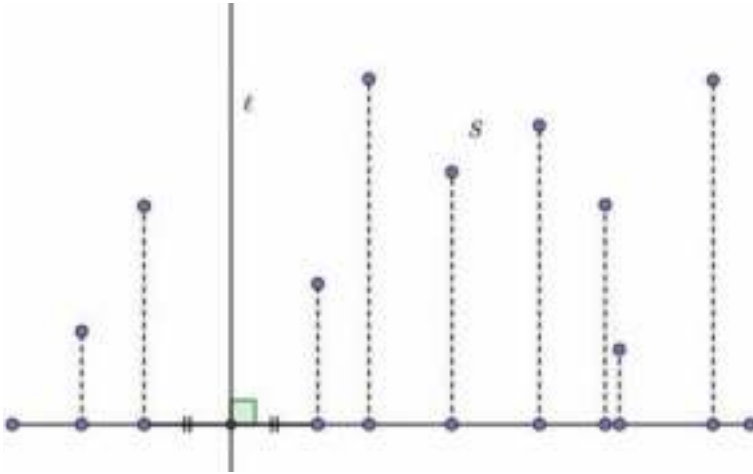
Projecties in een bepaalde richting

Om een beetje gevoel te krijgen voor het probleem, ben ik wel begonnen om een paar kleine gevallen te bekijken. Als $n=2$, dan zijn er twee punten met afstand minimaal 1 en ik moet een lijn vinden tussen die twee punten zodat de afstand tussen de lijn en het dichtstbijzijnde punt maximaal is. Dit kan ik bereiken met een middelloodlijn, die afstand minimaal $\frac{1}{2}$ heeft tot de twee punten. Het geval $n=3$ is al wat lastiger. Dan heb je een driehoek met zijden van lengte minimaal 1. Als de driehoek scherphoekig is, dan kun je als lijn ℓ een middelparallel nemen van de driehoek en de afstand van die lijn tot alle drie de punten is dan $\frac{1}{2}h$, met h de lengte van de corresponderende hoogtelijn in de driehoek. Dit komt echter niet goed als bijvoorbeeld alle drie punten op een lijn liggen, want dan is de hoogte $h=0$. In dat geval kun je een middelloodlijn nemen van twee van de drie punten.

Ik probeerde eerst de lijnen ℓ te bekijken in een bepaalde richting en in een bepaald gebied, en daarvan de lijn te nemen

Opgave 6. Bewijs dat er een positieve constante c bestaat zodanig dat de volgende uitspraak waar is. Beschouw een geheel getal $n > 1$ en een verzameling S van n punten in het vlak zodanig dat de afstand tussen elke twee verschillende punten in S minstens 1 is. Dan is er een lijn ℓ die S scheidt zodanig dat de afstand van elk punt van S tot ℓ minstens $cn^{-1/3}$ is. (Een lijn ℓ scheidt een verzameling punten S als er een lijnstuk tussen punten van S is dat ℓ snijdt.)

Opmerking. Zwakkere resultaten waarbij $cn^{-1/3}$ vervangen is door $cn^{-\alpha}$ kunnen beloond worden met punten afhankelijk van de waarde van de constante $\alpha > 1/3$.



Figuur 1

met de grootste afstand tot de punten uit S . Dit kun je als volgt bekijken. Je projecteert alle punten uit S loodrecht op een lijn die loodrecht op de lijnen ℓ staat. De afstand van een lijn ℓ tot een punt uit S is dan gelijk aan de afstand tussen de projectie van dat punt en de projectie van de lijn ℓ . Je bent dan op zoek naar een gat tussen twee geprojecteerde punten uit S dat zo groot mogelijk is, want het punt in het midden van zo'n gat heeft een grote afstand tot de geprojecteerde punten uit S . Als je nu de lijn ℓ kiest die door dat punt gaat, heb je een lijn gevonden met diezelfde grote afstand tot de punten van S . Zo vind je in deze richting de ℓ met de grootste afstand tot S , zie Figuur 1.

Als je m punten hebt in een strook met breedte b , krijg je dat de m geprojecteerde punten een lijnstuk met lengte b verdelen in hoogstens $m+1$ intervallen. Als er een punt op de rand van de strook ligt of als twee punten samen vallen bij de projectie, wordt dit minder dan $m+1$, maar dat maakt het alleen maar makkelijker om een groot interval te vinden. Het grootste interval hiervan heeft dus minimaal lengte $\frac{b}{m+1}$, dus kun je een ℓ construeren met minimaal afstand $\frac{b}{2(m+1)}$ tot de punten uit S en dat is van de orde van grootte $\frac{b}{m}$. Om aan de voorwaarde te voldoen dat ℓ een scheidende lijn is, moet ook nog gelden dat aan beide kanten van de strook een punt van S ligt (niet noodzakelijk op de rand van de strook).

Je kunt de opgave dus als volgt zien: er moet een richting zijn, zodat als je daarin de punten van S loodrecht projecteert, er tussen de punten een relatief groot gat is, namelijk van de orde van grootte $cn^{-1/3}$. Vanwege de voorwaarde dat de punten

minimaal afstand 1 hebben tot elkaar, moeten ze wel een stuk uit elkaar liggen. Daarmee kon ik als volgt de opgave bewijzen voor $\alpha = \frac{1}{2}$. Omdat de punten afstand 1 van elkaar houden, is er rond elk punt een cirkel met straal $\frac{1}{2}$ zodat die oppervlakte alleen hoort bij dat ene punt, dus de minimale oppervlakte van een gebied dat al deze cirkeltjes bevat is $\frac{1}{4}\pi n$ en is dus evenredig met het aantal punten n .

Noem R de straal van de kleinste omgeschreven cirkel van S (alle punten van S liggen binnen of op deze cirkel) en D de grootste afstand tussen twee punten uit S . Er geldt dat $R \leq D \leq 2R$, want je kunt altijd een cirkel construeren met als middelpunt een punt van S en als straal D en die cirkel bevat alle punten van S , dus $R \leq D$. Daarnaast is de maximale afstand tussen twee punten in een cirkel gelijk aan de diameter, $2R$, dus $D \leq 2R$. We concluderen dat D en R dus van dezelfde orde van grootte zijn.

Ik weet nu dat $\pi(R + \frac{1}{2})^2$ minimaal evenredig is met n , dus R is minimaal evenredig met $n^{1/2}$, dus ook D is minimaal evenredig met $n^{1/2}$. Ik kan nu alle lijnen ℓ bekijken die loodrecht staan op het lijnstuk van lengte D tussen twee punten uit S . Er zijn dan n punten en dus is de orde van grootte van de afstand die ik kan bereiken tussen de lijn ℓ en de punten van S minimaal van de orde van grootte $\frac{D}{n} = \frac{n^{1/2}}{n} = n^{-1/2}$. Merk op dat dit inderdaad een scheidende lijn is. Hiermee hebben we het geval $\alpha = \frac{1}{2}$ bewezen en dit zwakkere resultaat was 1 van de 7 punten waard. Wat ik hier heb gebruikt is dat de 'breedte' van S minimaal van de orde van grootte $n^{1/2}$ is, dus het grootste gat is minimaal van de orde van grootte $\frac{n^{1/2}}{n} = n^{-1/2}$.

Punten aan de rand afsnijden

In het geval dat D , de grootste afstand tussen twee punten, van de orde van grootte minstens $n^{2/3}$ is, kunnen we nu de opgave oplossen zoals hierboven, want dan vind ik een ℓ met een afstand van de orde van grootte $\frac{n^{2/3}}{n} = n^{-1/3}$. Resteert het geval dat D juist kleiner is dan $n^{2/3}$.

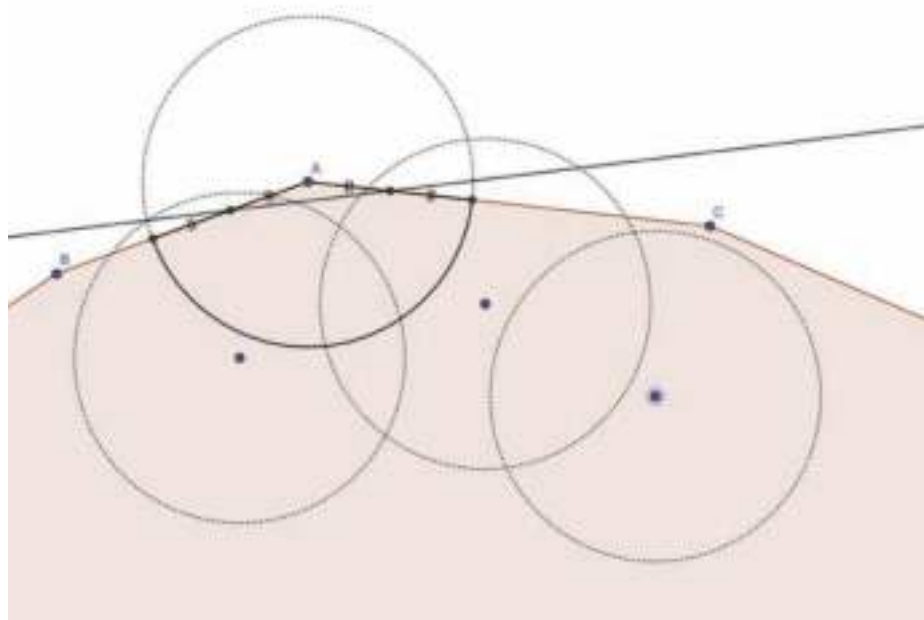
Vervolgens bedacht ik dat een lijn ℓ die S in twee ongeveer even grote groepen verdeelt, minder makkelijk een grote afstand heeft tot de punten van S dan een lijn ℓ die maar een paar punten van S afsnijdt van de rest. Je kunt je de verzameling S voorstellen als een cirkel die gevuld is met allemaal punten. Dan kun je zien dat een lijn door het midden langs veel meer punten moet gaan dan een lijn die alleen een klein stukje van de cirkel afsnijdt.

Ik probeerde eerst de lijnen ℓ te bekijken die maar één punt afsnijden van de andere punten van S . Dit kan natuurlijk alleen met de punten die 'aan de buitenkant' van S zitten: de punten uit de rand van het convexe omhulsel van S . Ik bekeek een punt A van die rand en de hoek $\angle BAC$ van het omhulsel bij dat punt. Je kunt dan een lijn ℓ construeren, zodat die de lijnstukken AB en AC snijdt op afstand $\frac{1}{2}$ van punt A ; zie Figuur 2. De afstand van deze lijn tot A is dan gelijk aan

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} \cos\left(\frac{1}{2}\angle BAC\right) &= \frac{1}{2} \sin\left(\frac{1}{2}\pi - \frac{1}{2}\angle BAC\right) \\ &\approx \frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}\pi - \frac{1}{2}\angle BAC\right). \end{aligned}$$

Doordat alle punten uit S minstens afstand 1 tot A hebben, kunnen die niet dichter bij ℓ liggen dan A . Omdat de hoeken $\angle BAC$ van het convexe omhulsel heel stomp zijn, terwijl de zijden minimaal lengte 1 hebben, kun je een minimum vinden van de grootte van het convexe omhulsel en dus voor de lengte D . Dat was precies wat ik zocht, maar helaas bleek dit niet sterk genoeg om het geval $\alpha = \frac{1}{3}$ te bewijzen.

Vervolgens probeerde ik om meerdere punten van het convexe omhulsel tegelijk af te snijden met een lijn ℓ . Dit leek wel de gezochte orde van grootte te geven, maar het lukte niet om hier een bewijs van te maken, omdat je last hebt van punten die binnen het convexe omhulsel liggen maar wel vlak bij de lijn ℓ kunnen zitten. Bij de uiteindelijke oplossing heb ik dus niet meer apart gekeken naar de rand van het convexe omhulsel.



Figuur 2

Een strook van breedte 1

Omdat ik wist dat het convexe omhulsel erg stompe hoeken moest hebben, stelde ik me voor dat het bij benadering een cirkel moest zijn. Vervolgens bekeek ik alle lijnen ℓ in een smalle strook aan de zijkant van deze cirkel, met breedte 1. Ik kan in een bewijs natuurlijk niet zeggen dat S ongeveer een cirkel is, dus ik bekeek de omgeschreven cirkel van S en een strook die de cirkel overlapt en raakt in een punt P van S , zie Figuur 3.

Ik neem hier aan dat $R > 1$, zodat het cirkelsegment dat wordt afgesneden door de strook minder dan de helft van de cirkel is. Ik wist al dat voor willekeurig grote n

ook R willekeurig groot moet worden, dus er zijn eindig veel n waarbij $R \leq 1$ mogelijk is. Voor die n kan ik het getal c klein genoeg vinden zodat deze n ook voldoen aan de opgave.

De helft van de lengte van de strook zit in een rechthoekige driehoek waarvan de andere zijdes lengte R en $R-1$ hebben, dus dan geeft Pythagoras $\sqrt{R^2 - (R-1)^2} = \sqrt{2R-1}$ voor die derde zijde. De lengte van de strook waar punten van S in kunnen zitten, is dus $2\sqrt{2R-1} = \sqrt{8R-4}$. Om hiermee het aantal punten in die strook af te schatten, verdeelde ik de strook in twee delen van breedte $\frac{1}{2}$. Als twee punten elkaar volgen met een afstand van minder

dan $\frac{1}{2}$ binnen een dergelijke strook, is hun onderlinge afstand maximaal $\frac{1}{2}\sqrt{2} < 1$ en dat mag niet, dus het aantal punten in de twee smallere stroken samen is maximaal $2 \cdot (2\sqrt{8R-4} + 1) = 4\sqrt{8R-4} + 2$. Dat is van de orde van grootte $\sqrt{R}$, dus ik kan een lijn ℓ vinden met afstand tot S van de orde van grootte minimaal

$$\frac{b}{m} = \frac{1}{\sqrt{R}} = R^{-1/2}.$$

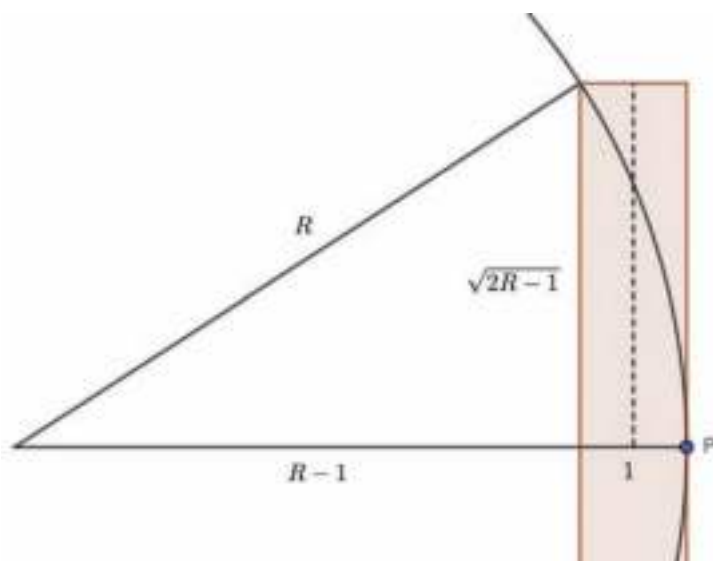
Het is duidelijk dat dit een scheidende lijn is: aan een kant is er al het punt P en aan de andere kant moet ook wel een punt liggen. Immers, als er daar geen punt zou liggen, dan zouden alle punten van S binnen het afgesneden cirkelsegment moeten liggen. Maar dan bestaat er een kleinere omgeschreven cirkel, namelijk met als middellijn de zijde van het cirkelsegment, en die cirkel heeft straal $\sqrt{2R-1}$, wat kleiner is dan de straal R van de kleinste omgeschreven cirkel van S . Dit geeft een tegenspraak, dus ℓ is een scheidende lijn.

Als $R \leq n^{2/3}$, kan ik hiermee de opgave oplossen, want dan is $R^{-1/2}$ minstens $n^{-1/3}$ en dus minstens van de orde van grootte $cn^{-1/3}$. Anderzijds had ik al gevonden wat ik moet doen als $R \geq n^{2/3}$, want dan is ook $D \geq n^{2/3}$ en dan kan ik de strook bekijken loodrecht op het lijnstuk met lengte D . Ik heb dus bij $R \leq n^{2/3}$ en bij $R \geq n^{2/3}$ een constructie om de opgave op te lossen. $\square$

Vier jaar training

Ik was uiteraard heel blij met de 7 punten voor deze opgave en ik was heel erg verbaasd dat zo weinig anderen de opgave hadden opgelost, terwijl ik hem wel had opgelost. Het feit dat synthetische meetkunde mijn favoriete onderdeel bij de olympiade is, verklaart dit wellicht, ook al was dit eigenlijk meer combinatorische meetkunde.

Als voorbereiding op de IMO heb ik vier jaar lang meegedaan aan het trainingsprogramma van de Nederlandse Wiskunde Olympiade. Die training bestaat uit huiswerkopgaven, een aantal trainingsdagen en -weekenden en een hele trainingsweek begin juni. Dertig middelbare scholieren doen daaraan mee en daaruit worden elk jaar de zes IMO-teamleden gekozen. Ik heb heel erg veel geleerd van de training en het gaat zeker helpen bij mijn studie wiskunde. Daar ben ik inmiddels mee begonnen: sinds september studeer ik wiskunde in Cambridge.



Figuur 3

F. Alberto Grünbaum

Department of Mathematics
University of California, Berkeley
grunbaum@math.berkeley.edu

History

A look at my paper with Hans, almost forty years later

It has been ten years since Hans Duistermaat passed away. To commemorate this sad and sudden loss for the Dutch mathematics community, *Indagationes Mathematicae* dedicates the first issue of 2021 to the mathematical legacy of this extraordinary mathematician. At *Nieuw Archief voor de Wiskunde* we asked his collaborator and dear friend Alberto Grünbaum to look back on their joint paper ‘Differential equations in the spectral parameter’. With the help of some personal letters from Hans’ own hand, he tells us how this landmark paper came into being and discusses some problems and research directions that originated from it.

Hans immediately, just before the end of the year and eventually got an answer by mail dated 27 January 1982.

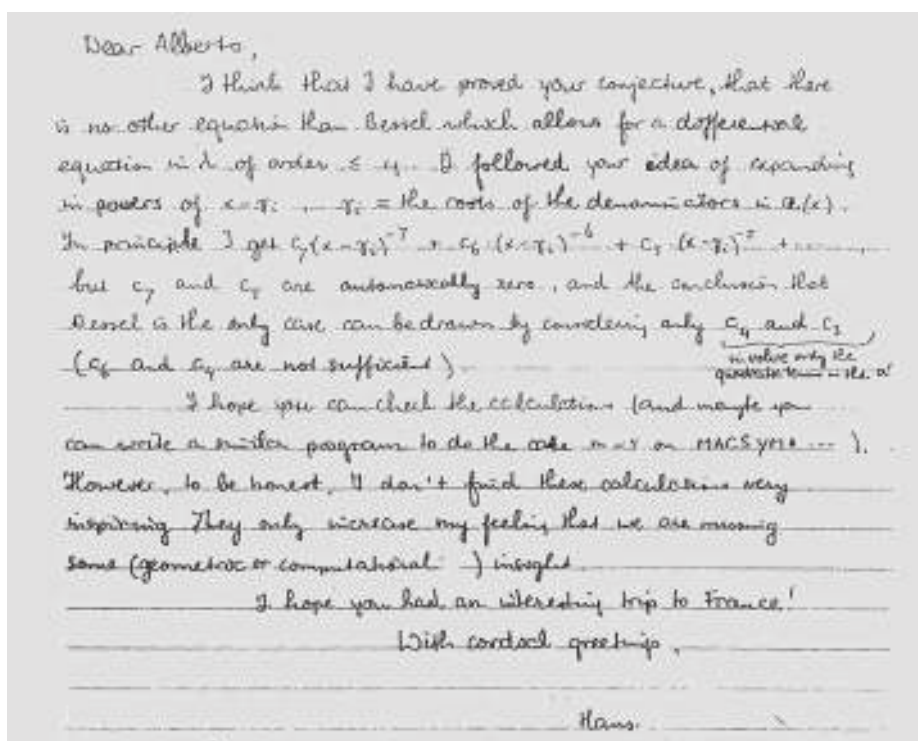
After this a long period followed that included several visits of mine to Odijk, where I would stay with Hans and his wonderful family at their home. I would show to Hans

The paper with Hans

The year 1981 was a very special one for me. Hans Duistermaat came to teach a class in Berkeley and at the end of November I gave a seminar on some problem in analysis motivated by signal processing. Hans attended the talk and a few days later told me that he had found a tool that might help us solve the problem I had posed. We spent one full afternoon working with the new tool at a coffee house and failed to find any solutions besides the classical ones that I had mentioned in my talk: they dealt with Bessel and Airy functions.

Hans left for Holland shortly after that and in a few days sent me a letter, dated 15 December 1981, ‘proving’ my conjecture that there was nothing beyond these classical cases. Fortunately my conjecture was wrong and even Hans could make small computational mistakes as we will see.

In the meantime I had been doing these computations not by hand, as Hans had, but using the symbol manipulator Maxima (the only one that I still use). I had obtained a certain nonlinear ode that had to be solved and after some more playing around and looking for its rational solutions I almost fell to the floor when I saw that the first nontrivial rational solution of the Korteweg-de Vries equation satisfied our nonlinear ode. I then tried the next few ones in the hierarchy contained in a by then recent paper [1]. And I could not believe that we were so lucky. I wrote to



Dear Alberto,

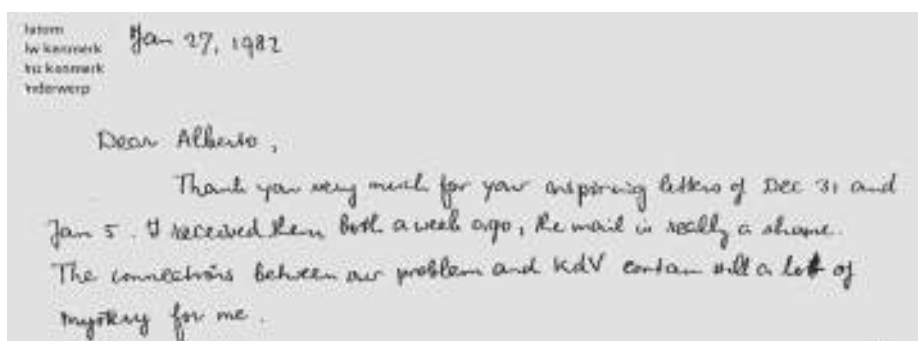
I think that I have proved your conjecture, that there is no other equation than Bessel which allows for a differential equation in λ of order ≤ 4 . I followed your idea of expanding in powers of $x - x_0$. x_0 = the roots of the denominator $w(x)$. In principle I get $c_7(x-x_0)^{-7} + c_6(x-x_0)^{-6} + c_5(x-x_0)^{-5} + \dots$ but c_7 and c_6 are automatically zero, and the conclusion that Bessel is the only case can be drawn by considering only c_4 and c_3 (c_6 and c_5 are not sufficient). (in value only the quadratic term = the 0)

I hope you can check the calculations (and maybe you can write a similar program to do the code on MACSYMA ...). However, to be honest, I don't find these calculations very inspiring. They only increase my feeling that we are missing some (geometric or computational) insight.

I hope you had an interesting trip to France!

With cordial greetings,

Hans



Jan 27, 1982

Dear Alberto,

Thank you very much for your inspiring letters of Dec 31 and Jan 5. I received them both a week ago, the mail is really a shame. The connections between our problem and KdV contain still a lot of mystery for me.

Dear Alberto,

When I was suggested that you write the article under your name only, then it is not because I consider it of too low level, but because you have worked so much more on it than me! If I would think harder and read more, I could maybe reach a better understanding (However, I have been so busy with this project!).

where our project was going and he would listen with interest and make insightful remarks but kept saying that he was tied up with other things. When it was time to write things up he tried to push me to do it all by myself, and I protested saying that this was a joint effort from the beginning. His remarks are in a letter from September 1983.

In response to this letter I made a simple proposal: you come to Berkeley for one month and stay at my home; if you get excited again then we write a joint paper, otherwise I go my own way.

Hans came to Berkeley with his tennis racket and swimming shorts but he did not

get to use them even once. We would start working at 8am and finish almost with no interruptions at 10pm, day in and day out for an entire month. I had succeeded in getting him fully back into the project, and his newly found enthusiasm was a thing to watch. In a few more months and by regular mail we had what I thought was a decent paper. I was ready to publish and I am sure that Hans would have preferred to keep working till "we had nothing else to say". But I prevailed. I wrote an introduction explaining what had motivated me to undertake this problem. Hans objected to this introduction in a letter dated 30 November 1984.

30 November 1984

Dear Alberto,

Yesterday I got your letter from Paris, concerning the Introduction, p. 2 from the middle, top of p. 3, p. 5 l. 13-16.

I did not comment too much on it when you were in Odigh, but I am still unhappy with the extensive reference on p. 2 and the last of p. 3 to the "miraculous existence of a second order differential operator which commutes with a certain integral operator". You now propose even more of that: "here again the possible existence of a local operator commuting with the integral one is of paramount importance".

My objection is that we do not consider the problem of finding commuting operators in this paper. More or less as a consequence, our results cannot (yet) be applied to that problem. Furthermore, I think it is not wise to emphasize too much that we do not openly say the things to the problems which motivated us. It once got a paper rejected ^{and others} on the ground that I did not apply the results to the problem which motivated originally the subject of the paper.

My preference is to mention that the question arose in your studies of the "limited angle tomography", followed by a reference. Then mention that in such problems one has to study eigenfunctions $\psi(x, \lambda)$ of more general second order differential operators as a function both of x and λ , on some sort of "equal footing".

Here again one or two references.

Because we do not have the aforementioned applications, I think it is better to, basically, let our question and its answer stand on its own.

Things that came later

The main point of this note is to show that although he was correct in objecting, after all these years my initial motivation has yielded some fruits. It is clear to me that without Hans this entire enterprise would not have succeeded. He was extremely inspirational, and even now after so many years when I am looking for answers to some of my questions I think of asking him first.

On the one hand the 'bispectral problem' (as the work that we did with Hans is now known) has been considered in many different incarnations, and by several different people. They are too many to mention here. Let me just say that there are not only continuous-continuous versions (as Hans and I had) but also discrete-continuous as well as discrete-discrete ones. There are scalar as well as matrix valued versions.

On the other hand there has been significant progress in the original problem of 'time-and-band limiting', i.e. in the construction of a differential operator of low degree that commutes with a naturally appearing integral one. Many years ago I managed to push this in the case of the 'even family' in the terminology of [6], see [7]. But the KdV case resisted my efforts for a long time. This has recently changed completely as one can see in [3, 4]. For matrix valued versions of work that can be traced back to my paper with Hans, see for instance [2, 8-11].

An example

I will include now a single example. This is in the spirit of our paper with Hans, whose last section is a collection of examples which I have found extremely useful over many years. There are many other examples produced in the same fashion.

It shows how the KP hierarchy, see [12], which contains the KdV one as a special case gives examples of integral operators for which one can explicitly construct commuting differential operators. This was the ultimate goal in this project that I undertook with Hans a long time ago. The fact that it took such a long time to reach this goal, makes Hans' reluctance to talk about these things back in 1986 well justified.

I consider an instance of the KP hierarchy resulting from the $\tau(x)$ function (they were called $\theta(x)$ in our paper) given by

$$\frac{x^4}{12} + \frac{x^3}{3} + x^2 - p_3 x + 2x - p_3 + p_2^2 + 1.$$

This gives rise to a bispectral situation: the wave function constructed out of τ satisfies a differential equation in x (of order four) with eigenvalue given by z^4 . The wave function is built in the manner discovered by M. Sato [14] back in 1981, the year of Hans' visit to Berkeley. This topic was later considered by people like G. Segal and G. Wilson [15] and many others. The τ function given above is an appropriate linear combination of characters, along the lines of M. Sato. In all of this my debt to the work of G. Wilson, see [17, 18] is huge.

The coefficients of the differential operator are rational functions of x and they are too messy to record here.

It also satisfies a differential equation in this spectral parameter of the form indicated in the paper with Hans and coefficients $b_i(z)$ given by

$$\begin{aligned} b_0 &= \frac{(p_3 - 2)z^3 + (2 - 2p_2)z^2 - 2}{z^5}, \\ b_1 &= -\frac{(p_3 - p_2^2 - 1)z^3 + 2z - 2}{z^3}, \\ b_2 &= -\frac{(p_3 - 2)z^3 + 2z - 2}{2z^3}, \\ b_3 &= \frac{z^2 - 1}{3z^2}, \\ b_4 &= \frac{1}{12}, \\ b_5 &= \frac{1}{60}. \end{aligned}$$

Now we come to the really new result: out of this τ function one builds a kernel for an integral operator that acts on $L^2(t, \infty)$ and depends on a parameter s .

The kernel of this integral operator is built in a canonical way from the τ function at hand.

This integral operator can be seen to commute with a differential operator of the form

$$R_{s,t}(z, \partial_z) = \sum_{m=0}^4 \partial_z^m f_m(z) \partial_z^m,$$

with coefficients given as follows

$$\begin{aligned} f_0(z) &= s^2 z^2 (s^6 z^6 - 4ts^6 z^5 + 6t^2 s^6 z^4 - 64s^4 z^4 \\ &\quad - 4t^3 s^6 z^3 + 176ts^4 z^3 + t^4 s^6 z^2 - 168t^2 s^4 z^2 \\ &\quad + 456s^2 z^2 + 64t^3 s^4 z - 672ts^2 z - 8t^4 s^4 \\ &\quad + 240t^2 s^2 - 96), \\ f_1(z) &= -4s^2(z-t)(s^4 z^7 - 3ts^4 z^6 + 3t^2 s^4 z^5 \\ &\quad - 36s^2 z^5 - t^3 s^4 z^4 + 60ts^2 z^4 - 24t^2 s^2 z^3 \\ &\quad + 84z^3 - 12tz^2 - 12t^2 z - 12t^3), \\ f_2(z) &= 6(z-t)^2 (s^4 z^6 - 2ts^4 z^5 + t^2 s^4 z^4 - 16s^2 z^4 \\ &\quad + 8ts^2 z^3 + 4t^2 s^2 z^2 + 4z^2 + 8tz + 12t^2), \\ f_3(z) &= -4z^2(z-t)^3 (s^2 z^3 - ts^2 z^2 - 4z - 4t), \\ f_4(z) &= z^4(z-t)^4. \end{aligned}$$

The reader will notice that the differential operator does not depend on the free parameters p_2, p_3 .

A question that is still open

In our paper there are two families of solutions to our problem. The first one involves

the characters of representations of $GL(N)$. For the second family we identify appropriate τ functions. Is there a group floating around?

My huge debt to the Dutch

I came into the problem of 'time-and-band-limiting', see [13, 16] because of my work on X-ray tomography. Here one tries to reconstruct a function in $\mathbb{R}^2$ from its line integrals. Few people know that this problem (for $\mathbb{R}^3$) was apparently first considered by Hendrik Lorentz, the celebrated Dutch physicist. See page 3 of [5] for more references. I learned of this from one of my teachers at Rockefeller University, George Uhlenbeck, another distinguished Dutch physicist who in 1925 — the same year of his paper with S. Goudsmit on the spin of the electron — extended the work of Lorentz to an arbitrary dimension. At Rockefeller I wrote a thesis, as a student of H. P. McKean, on some mathematical problems arising from the Boltzmann equation of statistical mechanics. If I remember correctly Hans wrote a PhD thesis on statistical mechanics too. Boltzmann had as one of his students Paul Ehrenfest who went to Leiden because Lorentz was there, and Uhlenbeck was a student of Ehrenfest from whom he inherited his life long interest in statistical mechanics. Please notice that in this short description of my debt to the Dutch I have not mentioned Korteweg and his student de Vries. ☞

References

1. H. Airault, H. P. McKean and J. Moser, Rational and elliptic solutions of the Korteweg-de Vries equation and a related many-body problem, *Comm. Pure Appl. Math.* 30 (1977), 95–148.
2. M. Castro and F. A. Grünbaum, Time-and-band limiting for matrix orthogonal polynomials of Jacobi type, *Random Matrices: Theory and Applications* 6(4) (2017).
3. W. R. Casper, F. A. Grünbaum, M. Yakimov and I. Zurrián, Reflective prolate-spheroidal operators and the KP/KdV equations, *Proc. Natl. Acad. Sci. USA* 116(37) (2019), 18310–18315.
4. W. R. Casper, F. A. Grünbaum, M. Yakimov and I. Zurrián, Reflective prolate-spheroidal operators and the adelic Grassmannian, arXiv:2003.11616v1
5. S. Dean, *The Radon Transform and Some of its Applications*, Wiley, 1983.
6. J. J. Duistermaat and F. A. Grünbaum, Differential equations in the spectral parameter, *Comm. Math. Phys.* 103 (1986), 177–240.
7. F. A. Grünbaum, Band-time-band limiting integral operators and commuting differential operators, *Algebra i Analiz* 8 (1996), 122–126.
8. F. A. Grünbaum, I. Pacharoni and J. A. Tirao, Matrix valued spherical functions associated to the complex projective plane, *J. Functional Analysis* 188(2) (2002), 350–441.
9. F. A. Grünbaum, I. Pacharoni, J. A. Tirao, Matrix valued orthogonal polynomials of the Jacobi type, *Indag. Mathem.* 14(3,4) (2003), 353–366.
10. F. A. Grünbaum, I. Pacharoni and I. Zurrián, Bispectrality and Time-Band-Limiting: Matrix-valued polynomials, *IMRN* 2020(13) (2020), 4016–4036.
11. M. E. H. Ismail, ed., *Univariate Orthogonal Polynomials*, Encyclopedia of Special Functions — The Askey–Bateman Project, Vol. 1.
12. I. M. Krichever, Rational solutions of the Kadomcev–Petviashvili equation and the integrable systems of N particles on a line, *Funk. Anal. i. Prilozh.* 12 (1978), 76–78.
13. H. J. Landau and H. O. Pollak, Prolate spheroidal wave functions, Fourier analysis and uncertainty. II, *Bell System Tech. J.* 40 (1961), 65–84.
14. M. Sato, The KP hierarchy and infinite dimensional Grassmann manifolds, *Proc. Sympos. Pure Math.*, Vol. 49, Part 1, Amer. Math. Soc., 1989, pp. 51–66.
15. G. Segal and G. Wilson, Loop groups and equations of KdV type, *Publ. Math. Inst. Hautes Études Sci.* 61 (1985), 5–65.
16. D. Slepian, Some comments of Fourier analysis, uncertainty and modeling, *Siam Review* 23(3) (1983).
17. G. Wilson, Bispectral commutative ordinary differential operators, *J. Reine Angew. Math.* 442 (1993), 177–204.
18. G. Wilson, Collisions of Calogero–Moser particles and an adelic Grassmannian (with an appendix by I. G. Macdonald), *Invent. Math.* 133 (1998), 1–41.

In de verdediging

| In defence

Pas gepromoveerden brengen hun werk onder de aandacht. Heeft u tips voor deze rubriek of bent u zelf pas gepromoveerd? Laat het weten aan onze redacteur.

Redacteur: Nicolaos Starreveld
FNWI, Universiteit van Amsterdam
Postbus 94214
1090 GE Amsterdam
verdediging@nieuwarchief.nl



Statistical Analysis of the Relation Between Metallic Microstructures and Mechanical Properties

Martina Vittoriotti

In July 2020 Martina Vittoriotti from the Delft University of Technology successfully defended her PhD thesis with the title *Statistical Analysis of the Relation Between Metallic Microstructures and Mechanical Properties*. Martina carried out her research under the supervision of prof.dr.ir. G. Jongbloed, and prof.dr.ir. J. Sietsma.

During her PhD Martina developed methods that can be used to test whether a real steel microstructure can be simulated by a specific stochastic model. Following two different approaches, according to the use or not of periodic boundary conditions, Martina proposed three different model tests. Furthermore, relying on stochastic models Martina studied the relations between the intricate 3D features of metallic microstructures and the mechanical properties of the corresponding material.

At the moment Martina is a postdoc at the Delft University of Technology in the DENS project (Digitally Enhanced New Steel Product Development). This project involves more than ten PhD students and postdocs which work closely together at Tata Steel Europe, Delft University of Technology, Eindhoven University of Technology, University of Twente and the Max Planck Institut für Eisenforschung in Düsseldorf (Germany). The aim of the project is to develop a fitting computational model to shorten the time to market without compromising the quality of the steel. In her postdoc Martina plans to further extend the work done during her PhD, considering dynamic models for representing the evolution of microstructures during (virtual) mechanical tests.

Microstructural features and mechanical problems

Starting from the atomic scale, metals can be described as regular aggregations of atoms held together by *metallic bonds*. Atoms form symmetrical three-dimensional aggregations which are characterized by a so-called unit cell. The unit cell completely reflects the symmetry and structure of the entire crystal, which is built up by repetitive translation of the unit cell along its principle axes.

Microstructure is the very small scale structure of a material, defined as the structure of a prepared surface of material as revealed by an optical microscope above $25\times$ magnification. Metallic microstructures usually contain more than one crystal, of one or multiple phases, with a specific orientation and possible imperfections or defects. These phases have different properties and in general, various mechanical properties of the material depend on them. For example the strength, toughness, ductility, hardness, corrosion resistance and so forth. Examples of different metallic microstructures are shown in Figure 1.

Metaphorically speaking one can say that the microstructure forms the DNA of materials and hence contains all the necessary information determining their properties. Ideally, being able to *genetically modify the DNA* of the material means that it is pos-

sible to obtain a product with some desired properties. For example, materials such as Advanced High-Strength Steels (AHSS) are of great interest for high-tech applications because of their higher strengths compared to conventional steels. In the automotive industry this higher strength enables lightweight, fuel-efficient designs, which are also safer than those using conventional materials. In order to develop new AHSS, and more generally new materials, steel industries make use of multi-scale microstructure modelling to predict mechanical properties from information about the microstructure. Unfortunately, in reality the quantitative identification of the relation between microstructural features and mechanical properties is very hard..

During her PhD Martina developed statistical techniques that make it possible to infer relations between the intricate 3D features of metallic microstructures and the mechanical properties of the corresponding material.

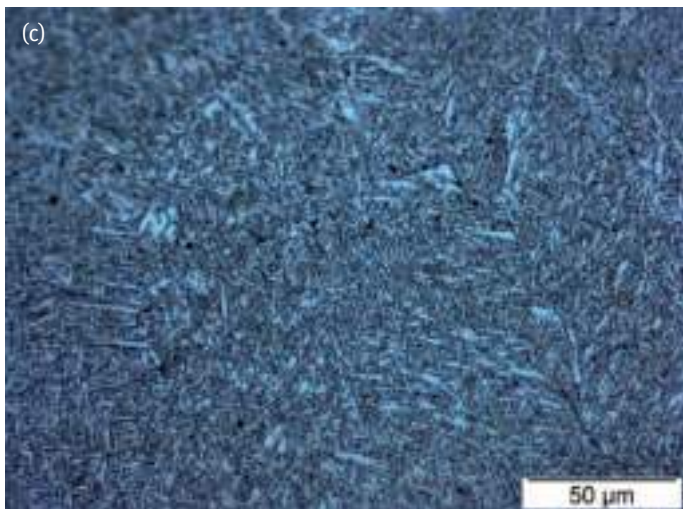
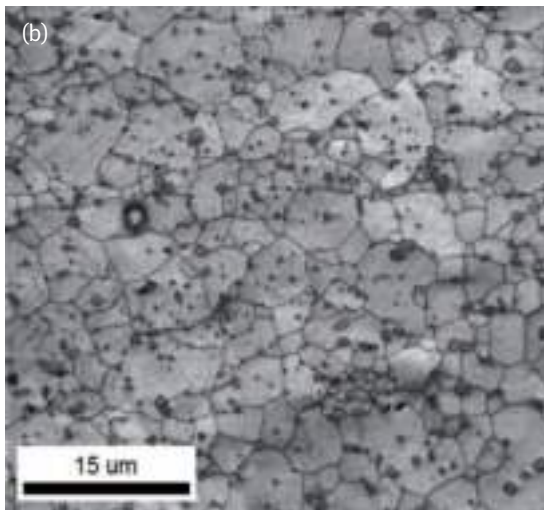
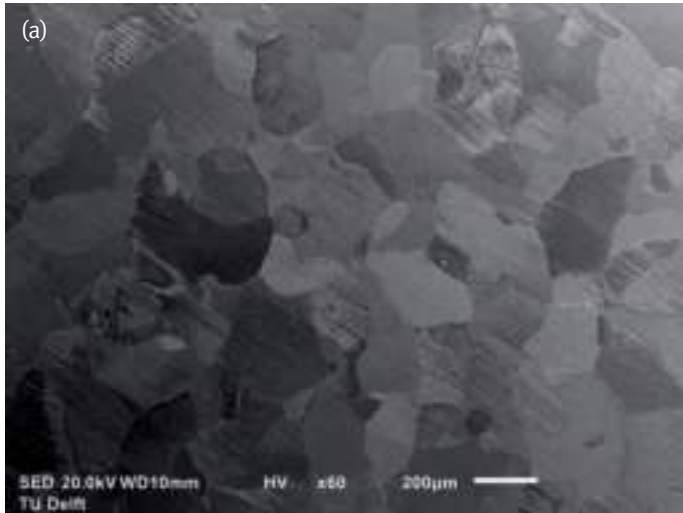
Poisson–Voronoi diagrams

The most common technique to gather microstructural information is by analysing 2D images taken using suitable tools, such as optical microscopes or electron microscopes. This means that an intrinsically three-dimensional object is reduced to a two-dimensional plane. This can also be viewed as a statistical problem, considering that the 2D picture must be a representative sample of the 3D microstructure. We will refer to this as the representation problem. The aim is to gather in one 2D image all the characteristic features of the microstructure and then relate them to the original 3D structure. In her research Martina used microstructural modelling relying on Poisson–Voronoi diagrams to simulate the behaviour of multi-phase microstructures.

3D Poisson–Voronoi diagrams

Intuitively, for defining a 3D Poisson–Voronoi diagram, a random set of points (also called generator points, sites or nuclei) is generated in a finite volume. Afterwards spheres having these points as centres are grown at the same time and with the same speed; once two spheres touch a face between them appears. This results in a space-filling configuration made of convex polyhedra, also called cells or grains. In the Poisson–Voronoi diagram the nuclei, or sites, are generated by a homogeneous Poisson process with intensity parameter λ . Poisson–Voronoi diagrams are suitable when studying single-phase microstructures, see Figure 1(a), but not so suitable when studying multi-phase microstructures, Figure 1(b,c). In order to study multi-phase microstructures Tata Steel developed an algorithm based on the generation of a so-called Multi-Level Poisson–Voronoi diagram. A visualization of such a diagram is shown below in Figure 2, for the exact definition the interested reader can have a look at Martina's thesis.

(Multi-level) Poisson–Voronoi diagrams have been commonly employed for representing (multi-)single-phase steel microstructures. More specifically, Martina used Multi-level Poisson–Voronoi diagrams to represent the microstructure of AISI420 stainless steel with M₂₃C₆ carbides precipitation (two phases), Figure 1(b), and Figure 3 below. A challenging statistical question that arises is whether Poisson–Voronoi diagrams offer an adequate microstructure model, given the data observed from the 2D images. We will refer to this question as the *Poisson–Voronoi assumption*.



Illustrations: Wei Li, Javier Hidalgo and Aravind Babu

Figure 1 (a) Single-phase steel microstructure, (b) AISI stainless steel with M₂₃C₆ carbides precipitation (two phases), (c) Multi-phase steel microstructure.

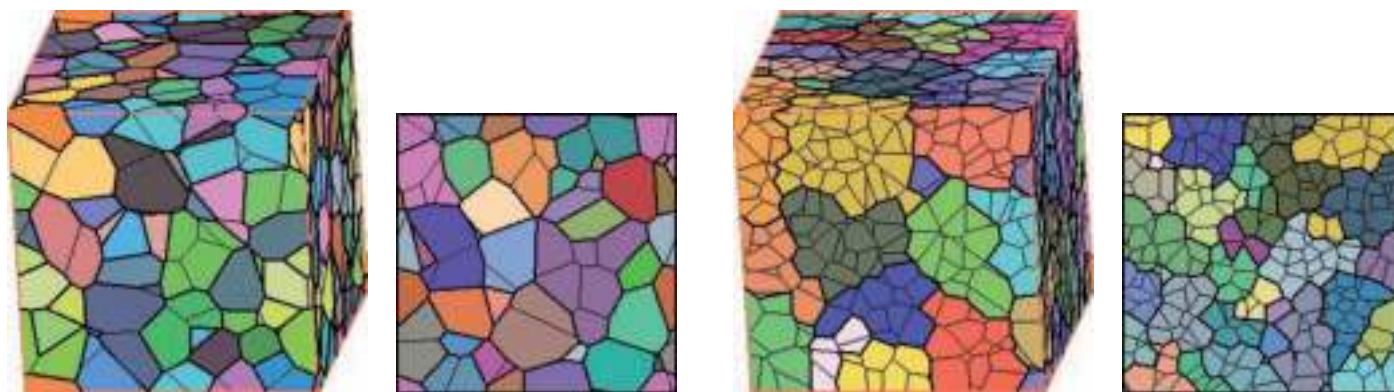


Figure 2 3D Multi-Level Poisson-Voronoi diagrams and corresponding 2D sectional Multi-Level Poisson-Voronoi diagrams with different intensity parameters.

Where there is matter there is statistics

In her PhD Martina developed a general framework for testing the Poisson-Voronoi assumption based on images of two dimensional sections of real metals. Martina extended already existing statistical tests including more accurate measures based on recently developed tools provided by Topological Data Analysis. In cases in which the Poisson-Voronoi diagram hypothesis is rejected then more complex models have to be developed and used.

Besides the representation problem Martina also worked on the mechanical problem, which concerns the inference of mechanical properties of the material given information on the microstructure. To give an example, strain development in metallic alloys is critically affected by the microstructural characteristics. In her thesis Martina investigated the properties of a AISI420 stainless steel with $M_{23}C_6$ carbides precipitates, see Figure 1(b).

For this she performed a virtual tensile test. The basic idea of such a test is to firstly generate a so-called digital twin microstructure on which a virtual tensile test is performed. In order to create the digital twin microstructure for this specific material Martina used a Multi-level Poisson-Voronoi diagram with two phases. Then, the virtual tensile test was performed using a program called DAMASK. The Düsseldorf Advanced Material Simulation Kit (DAMASK) is an open source software based on a Crystal Plasticity methods which allows to conduct advanced microstructural and mechanical property simulations. The main outcomes of the experiments are stress-strain curves corresponding to the different microstructures.

The most commonly used test is the uniaxial tensile test in which force is applied to the test sample with respect to just one specific axis causing deformation of the material, temporarily (elastic behaviour) and permanently (plastic behaviour) and eventually its fracture. Tensile testing is one of the most common ways for investigating strength, ductility and in general loadability (the ability of a material to support a stress) of metallic materials. Martina's virtual experiments suggest that as the concentration of $M_{23}C_6$

carbides increases the metallic material becomes more resilient to high stress.

The more personal aspect

Behind all dissertations there is always a person, with flesh and bones, who has endured the long path of a PhD trajectory and has produced the work at hand.

Were you also involved in some other activities and events during your PhD?

"I've been an organiser of the PhD seminar for the Probability and Statistics group of the department of Applied Mathematics of Delft University of Technology. During my PhD I also kept working on my Master Thesis project with my previous university, University of Palermo, on a different area: Social Statistics.

And something not related to research, I was the organiser of the PhD Christmas party. I love the cultural diversity that you encounter in the department of applied mathematics of TU Delft. Therefore, some days before Christmas holiday, I was asking all the PhD's of the department to join the Christmas party bringing something to eat or drink (preferably typical dish of their country) and did my best to persuade them to wear something red. The party was 'secret' but everybody started to suspect when everybody was wearing red."

Are there some nice memories from the last four years you would like to share?

"I remember the day in which I received the call from the HR department of TU Delft to arrange the Skype interview for the PhD position. It was the day of my Master graduation and I was celebrating with my family and friends. At one point my phone started to ring and I saw that the call was from The Netherlands. So I asked everybody to keep quiet and I answered the phone. When I heard that they were interested in interviewing me I was doubly happy." ❖

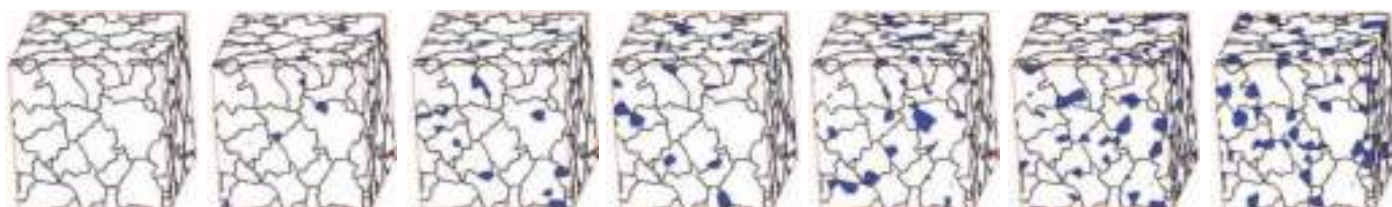


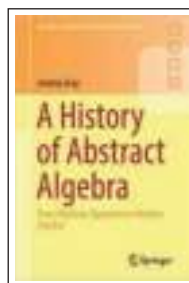
Figure 3 3D Multi-Level Poisson-Voronoi diagram with two phases that Martina used to represent the microstructure of AISI420 stainless steel with $M_{23}C_6$ carbides, from left to right the intensity of the parameter corresponding to the $M_{23}C_6$ carbides is increased.

Boekbesprekingen

| Book Reviews

Redactie: Hans Cuypers en Hans Sterk

Review Editors NAW - MF 7.092
Faculteit Wiskunde & Informatica
Technische Universiteit Eindhoven
Postbus 513
5600 MB Eindhoven
reviews@nieuwarchief.nl
www.win.tue.nl/wgreview



Jeremy Gray

A History of Abstract Algebra From Algebraic Equations to Modern Algebra

Springer Undergraduate Mathematics Series
Springer, 2018

xxiv + 415 p., prijs €41,41

ISBN 9783319947723

In dit boek worden in dertig hoofdstukken en tien appendices twintig onderwerpen beschreven in de ontwikkeling van de ‘moderne algebra’. Dit boek is ontstaan uit verschillende colleges gegeven door de auteur aan de University of Warwick. Het biedt prachtige hoofdstukken, analyses van historische bronnen, en uitvoerige besprekingen van teksten over de geschiedenis van dit onderwerp. Op pagina xv wordt deze lijst van onderwerpen besproken. Aparte hoofdstukken geven mooie beschrijvingen van historisch materiaal. Ik beperk me tot een paar aspecten die in dit boek duidelijk naar voren komen.

De auteur richt zich vooral tot studenten. Bijvoorbeeld: “A good way to test your understanding as your study progresses would be to ask yourself if you have understood these results both as pieces of mathematics and as turning points in the history of mathematics.” We zien prachtig materiaal om tot een historisch besef te komen. “There is a particular issue to do with how you handle information when it might be wrong. [...] the more important distinction is between facts and opinions.” (pagina xiii).

De auteur geeft instructieve voorbeelden en een mooie discussie “when does a widely shared opinion simply become a fact?” Een dergelijke proces van historische bewustwording zou elke wiskundestudent moeten doormaken.

We vinden hier: “Fermat had shown that odd prime numbers of the form $x^2 + y^2$ are precisely those of the form $4k + 1$ ” (pagina vi). Het is een feit dat Fermat deze bewering deed, en dat we in zijn nagelaten werk niet een bewijs van deze bewering kennen; het lijkt mij onjuist om dit als stelling aan Fermat toe te schrijven als we niet meer informatie hebben; het is goed om hier een *feit* en een *mening* uit elkaar te houden. Voor zover ik weet is het eerste, gepubliceerde bewijs afkomstig van Euler.

In deze bespreking beperk ik me tot een paar onderdelen, om de lezer een indruk te geven wat, naar mijn mening, de sterke en de zwakke aspecten van dit boek zijn.

Een deel van het boek wordt besteed aan de (on)mogelijkheid van constructies met passer en liniaal. Een resultaat is: *een regelmatige n-hoek is te construeren dan en slechts dan als $n = 2^a \times p_1 \times \dots \times p_t > 2$ met $a \geq 0$ en $t \geq 0$ waar $p_1 < \dots < p_t$ Fermat-priemgetallen zijn, dat wil zeggen priemgetallen van de vorm $2^{2^j} + 1$, met $j \geq 0$; voorbeelden 3, 5, 17, 257, 65537, ...?* Dit wordt gewoonlijk de Gauss-Wantzel-stelling genoemd. Deze bewering vinden we in Gauss’ *Disquisitiones arithmeticae*, §366. Op pagina 107 van het boek dat we bespreken vinden we: “It is true that Gauss’s claim was not accompanied by a proof, only a hint that the construction of other polygons [...]. But nor is there any evidence that anyone doubted it, and nor has anyone doubted that Gauss knew how to prove the claim.” Is dit een feit of een mening van de auteur dat niemand getwijfeld heeft of Gauss een bewijs had? Hoe kan de lezer hiermee

omgaan? Onvoldoende informatie is verstrekt om dit verder te onderzoeken.

We geven wat details. Op 18-jarige leeftijd loste Gauss dit probleem op in een speciaal geval: de regelmatige 17-hoek is zo te construeren (een fascinerende gebeurtenis in de geschiedenis van de wiskunde). Dit wordt vermeld in de eerste aantekening in zijn *Notizenjournal* op 30 maart 1796; de laatste aantekening, nummer 146, in die verzameling van gedachten die hem invielen, was op 9 juli 1814 (ook een fascinerende tekst: deze ‘Last Entry’ legt de kiem voor de Weil-vermoedens). Nergens vinden we in deze aantekeningen van Gauss vermelding van de generalisatie naar willekeurige n . Onze auteur Jeremy Gray kent dit materiaal heel goed, hij schreef in 1984 een prachtig commentaar op een Engelse vertaling ervan, maar een verwijzing naar het *Notizenjournal* ontbreekt in dit boek. Gauss schreef zijn baanbrekend werk *Disquisitiones arithmeticae* in 1798 op 21-jarig leeftijd en het werd gepubliceerd in 1801; daarin beschrijft Gauss details en voorbeelden over de constructie van de regelmatige 17-hoek, §345 en verder, en ten slotte bewijst Gauss een *voldoende* conditie op n , in de uitspraak zoals boven vermeld. In dit werk vinden we *geen bewijs van het feit dat de conditie ook nodig is* (dat andere waarden van n niet een construeerbare n -hoek geven). Waarom behandelt Gauss dit niet in zijn *Disquisitiones arithmeticae*? Ik ken geen tekst van Gauss waar de Gauss–Wantzel-stelling volledig bewezen wordt. Daarom ben ik het niet eens met de bewering van de auteur: “nor has anyone doubted that Gauss knew how to prove the claim”. Is dit een feit of een mening van de auteur?

Van mijn collega Henk Bos heb ik veel geleerd, onder andere: *trek geen conclusies die je niet kunt maken op grond van de geschreven tekst van de auteur*. We hebben de neiging te concluderen dat de grote wiskundigen, waar we iets van bestuderen, iets niet konden missen wat we nu zo evident vinden. In al het bekende werk van Gauss vinden we wel de uitspraak, maar niet een compleet bewijs van de Gauss–Wantzel-stelling. Wantzel publiceerde een bewijs in 1837 (kleine lacunes werden later aangevuld). Wat was de reactie van Gauss daarop?

In 1829–1830 publiceerden Nikolai Ivanovich Lobachevsky en in 1832 János Bolyai onafhankelijk van elkaar de beginselen van de hyperbolische meetkunde. Gauss vertelde aan de vader van Bolyai dat hij deze al ontwikkeld, maar nooit gepubliceerd had. Echter, ik ken geen reactie van Gauss op het werk van Wantzel. Daarom kan ik alleen maar concluderen dat de volledige omvang van de Gauss–Wantzel-stelling vermoed werd door Gauss en mogelijk pas later bewezen werd. Ik denk dat lezers veel zouden leren als deze details vermeld zouden zijn in dit boek.

Een gangbare mening is: “Gauss stated without proof that this condition was also necessary, but never published his proof.” Een prachtig onderwerp voor historisch onderzoek; helaas geeft dit boek onvoldoende details en niet genoeg verwijzingen omtrent deze fascinerende vraag om tot verder onderzoek en conclusies te komen. Wat begreep Gauss van wat later de Galoistheorie zou heten?

Ik vind een van de meest fascinerende aspecten van beschouwingen over de geschiedenis van de wiskunde dat je lijnen van ontwikkeling beschrijft, en ziet hoe eerdere ideeën een kiem kunnen zijn voor een nieuwe theorie, de ‘flow of mathematics’. Naar mijn mening komt dit aspect te weinig aan de orde, worden grote lijnen te weinig uitgewerkt. Ik geef twee voorbeelden.

In Hoofdstuk 13, Jordan’s *Traité*, pp. 149–161, lezen we: “The book that established group theory as a subject in its own right in mathematics [...]”. De auteur beschrijft dit werk vanuit één aspect: “Although there was a great deal more to Jordan’s ‘Traité’ than a discussion of Galois theory, it will help to stay close to the study of quartic and quintic equations.” We zien de expert bij uitstek die hier aan het woord is, mooi om te lezen.

Onder de veelbelovende titel van 13.2 ‘Early group theory’ wordt naar mijn smaak niet voldoende verteld wat er vóór dit invloedrijke boek van Jordan aan groepentheorie werd gedaan. De abstracte definitie van een groep is niet van Jordan afkomstig: op pagina 282, pas in Hoofdstuk 27 van dit boek vind ik: “The first person to try to axiomatise the group concept was Cayley in 1849” (zonder een verwijzing in Hoofdstuk 13). Het was goed geweest om aan te geven wat er aan berekeningen in groepen en beschouwingen vóór Jordan gedaan was (een prachtig onderwerp, met veel aspecten) en hoe Jordan daar op verder bouwde; kruisverwijzingen tussen verschillende hoofdstukken zouden helpen. De focus op één aspect geeft informatie, maar geeft onvoldoende perspectief over dit onderwerp. De historische, grote lijn wordt verbrokkeld gegeven, een paar keer begonnen, zonder kruisverwijzingen, en niet afgemaakt in dit boek.

Een ander voorbeeld. In 27.3 ‘Dickson’s classification of finite simple groups’, pp. 286–288, wordt beschreven hoe reeds in 1901 dit aspect van abstracte algebra van een indrukwekkende literatuurlijst en van prachtige classificaties voorzien werd. Magnus schreef daarover in 1958: “a milestone in the development of modern algebra”. Waarom geeft de auteur niet aan wat er daarna aan dit onderwerp gedaan is? Een verwijzing naar zijn eigen artikel (Gray, 1999) had hier gegeven kunnen worden; de lezer had de informatie kunnen krijgen dat volgens sommige specialisten de genoemde classificatie nu nog steeds niet compleet is (er zijn heel goede verwijzingen). Deze historische, grote lijn wordt niet afgemaakt in dit boek. Een gemiste kans om dit fascinerende onderwerp in volle omvang te belichten.

Zeker een boek bedoeld voor ‘students’ moet een voorbeeld zijn van wiskundige precisie. Een zin als: “Fermat had indeed shown that there were no integer solutions to $x^4 + y^4 = z^4$ ” (pagina vi) geeft pas de juiste informatie als je de beperking tot *positieve* gehele getallen maakt. Bij de notatie van een equivalentierelatie treffen we zowel $\bmod n$ als $\text{mod } n$, als $(\text{mod } n)$, als (n) , als $(\text{mod } n)$ aan; hoe kan iemand een analyse schrijven over werk van Gauss met deze wirwar van notaties? Wat is de boodschap die deze auteur heeft voor zijn lezers: “You will have to absorb mathematical terms and definitions [...]” terwijl elementaire precisie ontbreekt?

In Appendix H ‘Curves and projective space’ behandelt de auteur in vier pagina’s een onderwerp waar een heel leerboek aan gewijd kan zijn, waar je een heel semester onderwijs over kunt geven. Voor iemand die dit onderwerp begint te bestuderen is dit warrige verhaal hier onbegrijpelijk. Mededelingen worden gedaan over begrippen die niet goed gedefinieerd zijn. Een ontsporing als “intersection points with multiplicity, so a point of tangency is counted twice” maakt de chaos compleet.

Ook hier een gemiste kans: snijpuntsmultipliciteiten is een prachtig onderwerp. Met elementaire middelen kom je al heel ver. Een elementaire tekst over het geval van vlakke algebraïsche krommen is eenvoudig en precies te geven. Een volledig begrip in het algemene geval werd pas met moeite verkregen: prachtige klas-

sieke en moderne lijnen door elkaar heen; complete verwijzingen zijn niet moeilijk te geven. Waarom niet óf Appendix H weglaten, óf een correcte, meer bescheiden tekst met een paar verwijzingen naar voortreffelijke leerboeken die hierover geschreven zijn, en die juiste uitspraken doen en correcte bewijzen leveren?

Conclusie: Dit boek geeft materiaal voor het bestuderen van episodes uit het ontstaan van de ‘moderne algebra’. Aparte hoofdstukken geven een mooi inzicht in het materiaal dat daarin behandeld wordt. Helaas ontbreekt in veel gevallen het verband tussen verschillende hoofdstukken. Hetzelfde geldt voor de grote, historische lijn. Ook ontbreken vaak verwijzingen. De auteur behandelt onderwerpen vaak uit het te beperkte perspectief van een concreet voorbeeld. Bovendien ontbreekt een index op onderwerpen en trefwoorden. Het boek biedt een mooie uitdaging om historisch inzicht te ontwikkelen, al is het nodig om dit werk kritisch te lezen.

Frans Oort



Mircea Pitici (ed.)

Best Writing on Mathematics 2019

Princeton University Press, 2019

xvi + 272 p., prijs \$ 24.95

ISBN 9780691198354

The *Best Writing on Mathematics 2019* is het tiende deel uit een reeks van boeken met Mircea Pitici als editor. Het boek bundelt 18 in 2018 gepubliceerde artikelen, bedoeld voor een breed lezerspubliek, over de rol, het belang en de dynamiek van wiskunde in de hedendaagse maatschappij. Achter in het boek staat een lange lijst ‘Notable Writings’ van artikelen die het net niet gehaald hebben.

Het eerste artikel, van Moon Duchin, gaat over ‘Gerrymandering’, de in de Verenigde Staten voorkomende praktijk van het veranderen van de grenzen van kiesdistricten om verkiezingsuitslagen te manipuleren. Een probleem met interessante combinatorische aspecten. Het 18e en laatste artikel is van de hand van Melvyn Nathanson. Hij bespreekt Erdős’ laatste levensdagen en zijn eulogie uitgesproken in 1996 en een heroverweging hiervan ter gelegenheid van Erdős’ 100ste geboortedag in 2013.

Het achtste en langste (30 pagina’s) van de 18 artikelen is van Neil Sloane met als titel ‘The On-Line Encyclopedia of Integer Sequences (OEIS)’. Sloane is al in 1965, als student, met EIS begonnen. In 1973 verscheen een boek over EIS, en sinds 1995 is EIS online te bezoeken (en werd het dus OEIS). Vanaf 2010 is er een gemodereerde wiki die onderhouden wordt door vrijwilligers. Alle ingangen hebben een 6-cijferig nummer voorafgegaan door de letter ‘A’. Toen de teller de kwart miljoen begon te naderen, hebben de editors van OEIS bepaald welk rijtje te beurt viel voor ingang A250000. De winnaar werd het rijtje ‘Peacable Queens’, met ‘Circles in the plane’ als tweede. Beide worden uitgebreid besproken in de bijdrage van Sloane aan dit boek.

A250000 is het rijtje waarvan de n -de term het grootste gehele getal m is om op een $n \times n$ -schaakbord m witte en m zwarte konin-

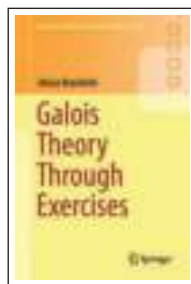
ginen te kunnen plaatsen zo dat geen der koninginnen door een koningin van de andere kleur wordt aangevallen. Alleen de eerste dertien termen van A25000 zijn bekend.

Een van de vele andere door Sloane besproken rijtjes is A173426. Het gaat hier om priemgetallen waarvan de decimale representatie oploopt van 1 tot m en daarna weer afloopt van $m-1$ tot 1. Zo is 12345678910987654321, als term van A173426 met $m=10$, een priemgetal van twintig cijfers. De volgende in het rijtje heeft $m=2446$, de daaropvolgende term is nog onbekend.

Het volgende artikel is ‘Mathematics for Big Data’ dat door Alessandro Di Bucchianico et al. — het Big Data Team van het 4TU Applied Mathematics Institute — gepubliceerd is in NAW 5/19(4), december 2018, pp. 282–286. De auteurs merken op dat de invloed van wiskunde op de toename van kennis en begrip wat onderbelicht is, terwijl hier het effect van gebruik van slimme wiskunde zeker zo groot is als de wet van Moore in de micro-elektronica. De auteurs beschrijven een aantal voorbeelden van wiskunde voor ‘Big Data’: zoekmachines, virtuele prototyping voor fabricage, data assimilatie, ‘web data analytics’, ‘compressed sensing’ bij MRI-beelden in de gezondheidszorg, en ‘recommender systems’ zoals door Amazon en Bol.com gebruikt worden. De nadruk in dit artikel ligt op toepassingen, waarbij betoogd wordt dat wiskunde toepassingen nodig heeft en omgekeerd.

Het is een interessante bundel met voor elk wat wils.

Ronald Aarts



Juliusz Brzeziński

Galois Theory Through Exercises

Springer Undergraduate Mathematics Series
Springer, 2018

xvii + 293 p., prijs € 36,39

ISBN 9783319723259

Zoals bekend gaat de klassieke Galoistheorie over de voorwaarden waaronder er radicale oplossingen bestaan voor de nulpunten van polynomen in één onbekende. De meeste leerboeken over Galoistheorie starten bijvoorbeeld met de formules van Cardano en Ferrari voor radicale oplossingen voor polynomen van graad drie en vier en vervolgens wordt dan de vraag gesteld of er ook radicale oplossingen zijn voor polynomen van hogere graden. Na invoering van een heel begrippenapparaat en het bewijzen van een aantal stellingen komt men vrij snel tot het bewijs van de hoofdstelling van de Galoistheorie die het bijtief verband vastlegt tussen de deellichamen van een Galoisuitbreiding en de ondergroepen van de Galoisgroep. Het beantwoorden van de voornoemde vraag is dan in principe een toepassing van deze hoofdstelling.

Men kan de leerboeken ordenen naar de mate waarin ze naast de Galoistheorie voorbeelden, opgaven en antwoorden bevatten. Welnu, er zijn zeker twee uitersten: aan de ene kant het boek *Galois Theory* van Emil Artin en aan de andere kant het hier besproken boek van Juliusz Brzeziński. Het boek van Artin is eigenlijk

geschreven door twee auteurs. Artin schrijft zelf het gedeelte dat de hoofdstelling bevat en laat het schrijven van de toepassing over aan Arthur Milgram. De formules van Cardano of Ferrari vindt men niet in dit boek. Afhankelijk van de druk zult u zien dat de voorbeelden in dit boek op één hand te tellen zijn en dat het geen enkele opgave bevat. Dat het boek *Galois Theory Through Exercises* van Brzeziński het andere uiterste is, doet de titel al vermoeden. Er is overigens ook een relatie met het boek van Artin. In het voorwoord schrijft Brzeziński dat hij in de jaren zestig van de vorige eeuw al colleges gaf en dat men toen noodgedwongen vaak gebruikmaakte van het boek van Artin of een gedeelte uit het bekende algebraboek van Van der Waerden. Beide boeken blinken niet uit door voorbeelden en opgaven. Brzeziński heeft destijds voor zijn studenten sets van opgaven met uitwerkingen gemaakt en deze presenteert hij nu samen met de Galoistheorie in boekvorm. Een prima idee.

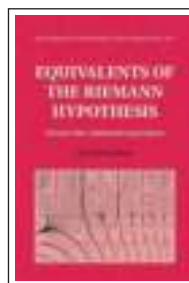
Het boek van Brzeziński bestaat uit negentien hoofdstukken en een appendix. Het appendix bevat de benodigde basiskennis. De eerste vijftien hoofdstukken behandelen de volgende onderwerpen: het oplossen van algebraïsche vergelijkingen, uitbreidingen van lichamen, polynomen en irreducibiliteit, algebraïsche uitbreidingen, splijtlichamen, automorfismengroepen van lichamen, normale uitbreidingen, separabele uitbreidingen, Galoisuitbreidingen, cyclotomische uitbreidingen, Galoismodules, oplosbare groepen, oplosbaarheid van vergelijkingen, meetkundige constructies en het berekenen van Galoisgroepen. Dit zijn de onderwerpen die men tegenwoordig in de meeste boeken over Galoistheorie aantreft.

Kenmerkend voor de eerste vijftien hoofdstukken is dat die elk uit twee delen bestaan: het eerste deel bevat definities en stellingen *zonder* bewijzen en het tweede deel bestaat uit opgaven waaronder ook een gering aantal opgaven met een softwarepakket. Het totaal der opgaven is nagenoeg 200.

Hoofdstuk 16 bevat nog eens circa 100 extra opgaven met soms een aanwijzing of een verwijzing. De bewijzen van alle stellingen vindt men in hoofdstuk 17. De oplossingen van de opgaven vindt men in de hoofdstukken 18 en 19; in hoofdstuk 18 staan aanwijzingen en antwoorden en in hoofdstuk 19 voorbeelden en geselecteerde oplossingen. Voor elke opgave moet men beide hoofdstukken raadplegen. Het zal wel duidelijk zijn dat men bij het doorwerken van het boek veelvuldig bladert van het ene naar het andere hoofdstuk. Ik denk dat het boek *rustiger* was geworden als de bewijzen van de stellingen gewoon bij elk hoofdstuk stonden en als de oplossingen van de problemen niet gesplitst waren over twee aparte hoofdstukken. Op sommige plekken in het boek kan men ook gebruikmaken van het softwarepakket Maple; het is maar een heel klein gedeelte van het boek. Ik denk dat het beter was geweest het boek niet te verbinden met een specifiek softwarepakket omdat het dan het risico loopt snel te verouderen op dat punt en dat is in dit geval zeker jammer omdat de rest als het ware eeuwigheidswaarde heeft.

Ik heb enkel kritiek op de vorm van het boek; op de inhoud valt niets af te dingen. Alles is zeer goed te volgen en uitgewerkt. Het bestuderen van de Galoistheorie in wisselwerking met veel voorbeelden en opgaven met uitwerkingen (de oplossingen van de oefeningen beslaan ongeveer tachtig pagina's, een derde van het boek zonder het appendix) is zeer nuttig en voor zo'n aanpak is dit boek zeker geschikt.

Math Dicker



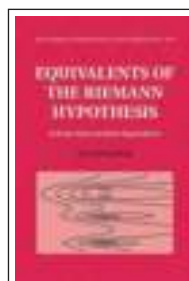
Kevin Broughan

**Equivalents of the Riemann Hypothesis
Volume 1: Arithmetic Equivalents**

Cambridge University Press, 2017

xx + 325 p., prijs £99.99

ISBN 9781107197046



Kevin Broughan

**Equivalents of the Riemann Hypothesis
Volume 2: Analytic Equivalents**

Cambridge University Press, 2017

xix + 491 p., prijs £120.00

ISBN 9781107197121

These two volumes give a survey of conjectures equivalent to the Riemann Hypothesis (RH). The first volume deals largely with statements of an arithmetic nature, while the second part considers more analytic equivalents.

The Riemann zeta function, is defined by

$$\zeta(s) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^s}, \quad (1)$$

with $s = \sigma + it$ a complex number having real part $\sigma > 1$. It is easily seen to converge for such s . By analytic continuation the Riemann zeta function can be uniquely defined for all $s \neq 1$. In $s = 1$ it has a simple pole. In 1859 Bernhard Riemann published 'Über die Anzahl der Primzahlen unter einer gegebenen Grösse'. This only 9-pages-long paper, the only published work of Riemann on number theory, is without doubt the most important paper ever written in analytic number theory; indeed it is foundational, as Riemann makes essential use of s being a complex variable (allowing methods of complex analysis to be applied), whereas a century earlier Leonhard Euler only considered $\zeta(s)$ for real values of s .

The uniqueness of prime factorization of the integers finds its analytic counterpart in the identity $\zeta(s) = \prod_p (1 - p^{-s})^{-1}$ valid for $\sigma > 1$ (where the product extends over all the primes p). Given this identity it is perhaps not so surprising that the behaviour of $\zeta(s)$ is very closely related to the distributional properties of the primes. The Riemann Hypothesis (formulated in the 1859 paper) states that all the zeros in the critical strip $0 < \sigma < 1$ are on the line $\sigma = \frac{1}{2}$. If true, it implies that the prime counting function $\pi(x)$, that counts the primes $p \leq x$, behaves in a fairly regular way. Indeed, Helge von Koch proved in 1901 that the RH is equivalent with $\pi(x) = \int_2^x du / \log u + O(\sqrt{x} \log x)$. The celebrated prime number theorem says that $\pi(x)$ asymptotically behaves as $x / \log x$. That is a much weaker statement and is equivalent with there being no zeta zeros on the line $\sigma = 1$. That there are no zeros with $\sigma > 1$ is a consequence of the prime product identity for $\zeta(s)$.

It would go too far here to discuss all chapters and I will limit myself to some chapters that are either close to my mathematical expertise or those discussing some of the most famous RH equivalences. Most of the criteria have their own chapter devoted to

them, Chapter 10 has various criteria that are discussed more briefly. A nice example is Redheffer's criterion. It states that RH holds true if and only if for every $\epsilon > 0$, we have $\det(R_n) \leq C_\epsilon n^{1/2+\epsilon}$, where $R_n = (r_{ij})$ is the $n \times n$ matrix with $r_{ij} = 1$ if $j = 1$ or i divides j , and $r_{ij} = 0$ otherwise.

In Chapter 4, after some chapters on history, basic properties of $\zeta(s)$ and one with derivations of some basic estimates involving prime numbers, Schoenfeld's criterion is proved. It says that the RH is equivalent to the inequality that $|\psi(x) - x| \leq \sqrt{x}(\log x)^2/(8\pi)$ for $x \geq 74$, where $\psi(x) = \sum_{p^n \leq x} \log p$. The sum is over all prime powers $p^n \leq x$ and each of those chips in a weight $\log p$. The function $\psi(x)$ turns out to be easier to study than $\pi(x)$, on the other hand usually results on $\psi(x)$ can be easily translated to results on $\pi(x)$.

Schoenfeld's criterion is important, but not very surprising. More surprising is Robin's criterion which states that, for $n > 5040$,

$$\sum_{d|n} \frac{1}{d} < e^\gamma \log \log n, \quad (2)$$

if and only if the Riemann Hypothesis holds true (where γ denotes Euler's constant). Traditionally (2) is written as $\sigma(n) < e^\gamma n \log \log n$, where $\sigma(n) = \sum_{d|n} d$ denotes the sum of divisors of n . The author speaks of the Ramanujan–Robin criterion as Ramanujan proved that (2) holds, under RH, for all n sufficiently large. Chapter 8 opens with a discussion of a paper on this criterion, where we (Choie, Lichiardopol, the reviewer and Solé) establish that the inequality holds for a large class of integers. We showed, for example, that all odd integers > 9 satisfy (2) (thus to wit: we solved half of RH!). In addition we showed that all 5-free integers > 5040 satisfy (2), where an integer is said to be k -free if no k^{th} power of an integer > 1 divides it (otherwise it is said to be k -full). It then continues to discuss various improvements of our work (the author and Trudgian showed for example that the inequality holds for 11-free integers). Not discussed, but fresh on the arXiv is the result of Morrill and Platt that RH is true if and only if (2) holds for all 20-full integers.

We say that N is a colossally abundant number if for some $\epsilon > 0$ the function $\sigma(n)/n^{1+\epsilon}$ attains its maximum at N . It is not difficult to see that if a counterexample to (2) exists for some $n > 5040$, there exists a colossally abundant counterexample. Chapter 9 is devoted to a study of these numbers and some variations.

An inequality closely related to that of Robin is

$$\frac{n}{\varphi(n)} < e^\gamma \log \log n. \quad (3)$$

This is now called the Nicolas inequality. The intriguing work of mostly Nicolas related to his inequality and refinements thereof are discussed in Chapter 5.

About five chapters in total are devoted to this and closely related material, thus making it one of the main topics discussed in Volume 1.

I will now discuss Volume 2, which draws on a rather broader spectrum of mathematical methods and ideas than Volume 1.

Marcel Riesz showed in 1916 that RH is equivalent to

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{(n-1)! \zeta(2n)} x^n \leq C_\epsilon x^{1/4+\epsilon}.$$

This implies that the values of $\zeta(s)$ at all even integers determine the truth of RH. Hardy and Littlewood proved a variation where

all the values of $\zeta(s)$ at odd integers > 1 appear. In 2005 Luis Báez-Duarte unified and generalized the existing series equivalences, giving rise to a very large family. Chapter 2 provides the details.

One of the most beautiful and surprising equivalences to the Riemann Hypothesis is related to Banach and Hilbert space methods. By $[r]$ we denote the entire part of a real number r . Bertil Nyman in 1950 in his PhD thesis (!) proved that RH is true if and only if the linear span of the functions $k_\alpha(x) := [\alpha/x] - \alpha[1/x]$ is dense in the Hilbert space $L^2(0,1)$ of square integrable functions on the interval $(0,1)$, where $0 < \alpha \leq 1$. Arne Beurling, the PhD supervisor of Nyman, extended the criterion to L^p -spaces. These intriguing results are discussed in Chapter 3.

Put

$$\lambda_k := \sum_{\rho} \left(1 - \left(1 - \frac{1}{\rho}\right)^k\right),$$

where the sum is over the non-trivial Riemann zeta zeros. Li's celebrated criterion says that RH is true if and only if $\lambda_k > 0$ for every $k \geq 1$. Note that $\lambda_1 = \sum_{\rho} 1/\rho$. It was already known to Riemann that $\lambda_1 = 1 + \gamma/2 - \log(4\pi)/2$. Li's result inspired a lot of follow up work.

The Riemann zeta function after multiplication by some simple factors can be made real on the line $\sigma = \frac{1}{2}$. This function can be written as the Fourier transform $\int_{-\infty}^{\infty} \Phi(u) e^{izu} du$, with $\Phi(u)$ completely explicit. George Pólya considered the family of deformations

$$\Theta_\lambda(z) := \int_{-\infty}^{\infty} e^{\lambda u^2} \Phi(u) e^{izu} du.$$

RH is equivalent with $\Theta_0(z)$ having only real zeros. It can be shown there is a unique finite real number Λ such that $\Theta_\lambda(z)$ has only real zeros if and only if $\lambda \geq \Lambda$. The constant Λ is now called the de Bruijn–Newman constant. RH is equivalent with $\Lambda \leq 0$. De Bruijn showed in 1950 that $\Lambda \leq \frac{1}{2}$. Newman showed that Λ exists, i.e. that $\Lambda > -\infty$. The lower bound was improved many times over the years and the best we know currently is that $-10^{-11} < \Lambda < \frac{1}{2}$.

Chapter 6 concerns a criterion of 2006 from Cardon and Robert which in essence is about approximation of $\zeta(\frac{1}{2} + iz)$ by a particular sequence of orthogonal polynomials.

Amoroso showed that if $A_N(x) = \prod_{n \leq N} \Phi_n(x)$ is the product of the first N cyclotomic polynomials, then its so-called height, for any $\epsilon > 0$, is bounded above by $C_\epsilon N^{\lambda+\epsilon}$ (with C_ϵ a constant) if and only if $\zeta(s)$ has no zero with real part exceeding λ . This result is proved in Chapter 7.

Chapter 9 concerns Weil's version of the explicit formula. For a large class of test functions this relates a sum involving Riemann zeros to a sum involving primes and some remaining terms that can be regarded as associated with the so-called prime at infinity. By a judicious choice of test functions this allows one to prove many results.

Weil's work on explicit formulae has been very influential and also was an input for a proof of the RH for curves over finite fields (in the case of elliptic curves a proof is given here). It has been the goal of many to use this approach for RH and generalizations thereof. Even though Weil provided a bridge between the two cases and meanwhile vast and deep new mathematical theories have been developed, Weil's bridge remains to be crossed...

The book concludes with several appendices, giving more background material, for example on the Fourier, Laplace and Mellin transform. There is also a manual for a set of functions written to

assist the reader to reproduce and possibly extend, calculations mentioned in the book.

The first volume falls mostly in the realm of computational number theory and the author rederived some results, for example some of the classical ones of Rosser and Schoenfeld. The second volume draws on much more areas of mathematics and everybody, I think, will be in for some surprises there. For the results stated mostly proofs are given. This requires a broad range of mathematical tools to be used. Sometimes the author cleaned up some of the original proofs.

All in all these books serve as a good introduction to a wide range of mathematics related to the Riemann Hypothesis and make for a valuable contribution to the literature. They are truly encyclopedic and I am sure will entice many a reader to consult some literature quoted and who knows, eventually make an own contribution to the area.

I thank Alexandre Kosyak for helpful comments on several earlier versions of this review.

Pieter Moree



Jennifer Beineke, Jason Rosenhouse (eds.)

**The Mathematics of Various Entertaining Subjects
Volume 3: The Magic of Mathematics**

Princeton University Press, 2019

xxi + 325 p., prijs \$49.95

ISBN 9780691182582

Dat recreatieve wiskunde heel vaak aan de basis heeft gestaan van belangrijke wiskundige doorbraken zal bij een ieder van u inmiddels wel bekend zijn. Minder bekend (althans bij mij) is dat er sinds 2013 een tweejaarlijkse MOVES (Mathematics of Various Entertaining Subjects) Conference wordt georganiseerd door het MOMATH (Museum of Mathematics) dat sinds 2012 zijn deuren heeft geopend in New York. Ook van de meest recente MOVES-conferentie (in 2017 georganiseerd, met het thema The Magic of Mathematics) is nu dus een boek verschenen (net als de delen 1 en 2 samengesteld door math-professors Beineke en Rosenhouse) waar de afwezige alsnog (en de aanwezige wederom) zijn/haar hart kan ophalen aan in dit geval 18 artikelen (respectievelijk zes, vijf, vier en drie in de vier hoofdcategorieën ‘Puzzles and Brainteasers’, ‘Games’, ‘Algebra and Number Theory’ en ‘Geometry and Topology’), waarbij een artikel uiteraard telkens uitvoerig een onderwerp behandelt in een van de genoemde categorieën. Soms is een artikel niets anders dan een serie problemen, gelukkig met oplossingen die — nog gelukkiger — vrijwel direct geplaatst staan achter de problemen, dus geen nodeloos geblader de hele tijd, en onder andere dat maakt dit tot een prettig, helder opgebouwd en sowieso zeer leesbaar boek.

Een eerste voorbeeld van een intrigerend probleem met een verrassende oplossing (zie verder) — uit de deelcategorie ‘Probability in Your Head’ — is het probleem ‘Random Rice’. In de plaatselijke rijstwinkel staat een machine die door de knop een keer in te drukken telkens een willekeurige (uniform verdeelde) hoeveelheid rijst tussen 0 en 1 beker levert. Hoe vaak gemiddeld moet je de knop indrukken om in totaal tenminste 1 volle beker rijst te heb-

ben? Het antwoord hierop is (uiteraard) niet het wellicht verwachte twee keer.

Minstens zo intrigerend is het probleem er direct achter (‘Six with No Odds’), namelijk hoe vaak moet je met een gewone dobbelsteen gooien tot je een 6 gooit, als je op weg naar die 6 nooit een oneven aantal ogen gooit? Even verrassend is het weer dat het antwoord niet het verwachte aantal 3 is.

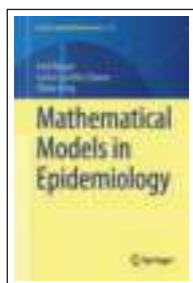
Verrast te worden is prettig in elk boek — zeker in een boek als dit — en gelukkig gebeurt dat heel vaak. Inherent aan de gekozen opzet is de kans al vrij klein dat je van het onderwerp al wat af weet (want vaak geheel nieuw), laat staan dat je een in een artikel genoemd probleem zelf al zou kennen. Maar zelfs als je een liefhebber of zelfs een kenner zou zijn van bijvoorbeeld balansproblemen dan kom je (in de deelcategorie ‘Coins and Logic’; lees ook de boeken van de uiteraard ook in het boek genoemde grootmeester van de logica Raymond Smullyan) toch vaak weer iets tegen wat je nog niet kende. Voor dit (derde) probleem definiëren we allereerst een *reverse scale* (als tegenhanger van een *true scale*) als een weegschaal die bij twee gelijke gewichten in balans is maar bij twee verschillende gewichten de lichtste aanwijst als zwaarste en andersom (heel eenvoudig te detecteren door 1 munt op een van de twee schaaltes te leggen). Nu het probleem. Er zijn drie identiek uitzijnde en even zware weegschalen die *true* of *reverse* kunnen zijn. Je hebt de beschikking over minstens drie munten en precies één daarvan is vals en lichter dan de andere munten. Wat is het kleinste aantal wegingen dat nodig is om erachter te komen van welk type (*true* of *reverse*) elke weegschaal is? Ook hier weer een uiterst verrassend antwoord en een nog verrassender redenering.

Ook al zijn sommige artikelen wat theoretischer van aard, altijd wordt de lezer (net als de toeschouwer bij de oorspronkelijke presentaties mag ik aannemen) meegenomen door het geven van geschikte instap- of tussenproblemen en het bewijzen van toepasselijke lemma’s. Verder is de benodigde wiskundige kennis op een enkel uitstapje na maximaal die van een eerstejaarsstudent wiskunde.

Ik zal de verleiding moeten weerstaan een samenvatting te geven van of interessante problemen te citeren uit elk van de 18 artikelen, maar ik denk dat het noemen van nog wat meer onderwerpen die in dit boek de revue passeren meer dan genoeg uw interesse kan opwekken en dat dit fraaie boek heel veel denk- en leesplezier zal genereren. Welnu, mocht u iets meer (en vooral iets nieuws) willen weten over flexagons, Japanse KenKen-puzzels, bingo-paradoxen, het getal 142857, de spel-app Khalou, het kortste route-probleem in een driehoekig rooster, partities van kwadraten in positieve natuurlijke getallen waarvan de omgekeerden som 1 hebben, balansproblemen en LEGO-bouwwerken en nog veel meer en bovendien over een aantal meer dan verbluffende kaarttrucs wilt beschikken (en tevens iets wilt weten over de (kaart)magie van Charles Sanders Peirce, één van de grootste zo niet de grootste van alle Amerikaanse logici), dan is dit het boek. Ongetwijfeld zijn de mij niet bekende eerder verschenen delen (Volume 1 en Volume 2) op dezelfde manier samengesteld en even onderhoudend als dit derde deel in een serie die wat mij betreft nog heel lang mag doorlopen. Wilt u het fijne weten van het hoe en waarom van de antwoorden op de drie hierboven geformuleerde problemen (respectievelijk e , $1\frac{1}{2}$ en 1), dan zult u tot aanschaf moeten overgaan.

Joop van der Vaart

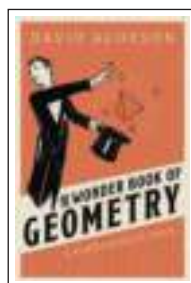
Recent verschenen publicaties. Als u een van deze boeken wilt bespreken of als u suggesties heeft voor andere boeken voor deze rubriek, laat dit dan per e-mail weten aan reviews@nieuwarchief.nl.



Fred Brauer, Carlos Castillo-Chavez, Zhilan Feng

Mathematical Models in Epidemiology

Springer, 2019
ISBN 9781493998289
springer.com/9781493998265



David Acheson

**The Wonder Book of Geometry
A Mathematical Story**

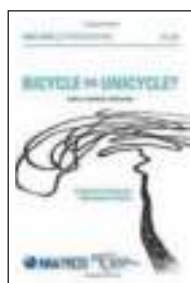
Oxford University Press, 2020
ISBN 9780198846383
global.oup.com/academic/product/9780198846383



Allan Bickle

Fundamentals of Graph Theory

American Mathematical Society, 2020
ISBN 9781470453428
bookstore.ams.org/amstext-43



Daniel J. Velleman, Stan Wagon

**Bicycle or Unicycle?
A Collection of Intriguing Mathematical
Puzzles**

American Mathematical Society, 2020
ISBN 9781470447595
bookstore.ams.org/prb-36



Ciro Ciliberto

**Classification of Complex Algebraic
Surfaces**

American Mathematical Society, 2020
ISBN 9783037192108
bookstore.ams.org/emsserlec-31



Michael E. Taylor

Introduction to Complex Analysis

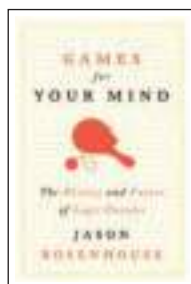
American Mathematical Society, 2019
ISBN 9781470452865
bookstore.ams.org/gsm-202



Peter Scholze, Jared Weinstein

Berkeley Lectures on p -adic Geometry

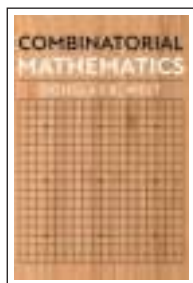
Princeton University Press, 2020
ISBN 9780691202082
press.princeton.edu/books/paperback/9780691202082/berkeley-lectures-on-p-adic-geometry



Jason Rosenhouse

**Games for Your Mind
The History and Future of Logic Puzzles**

Princeton University Press, 2020
ISBN 9780691174075
press.princeton.edu/books/hardcover/9780691174075/games-for-your-mind



Douglas B. West

Combinatorial Mathematics

Cambridge University Press, 2020
ISBN 9781107058583
cambridge.org/9781107058583



François Digne, Jean Michel

**Representations of Finite Groups of Lie
Type
Second Edition**

Cambridge University Press, 2020
ISBN 9781108722629
cambridge.org/9781108722629

This time we do not have new problems, and the solutions of the problems in the September issue will appear in the next issue. Instead we have some additional solutions to the problems in the March and June issue. For these issues we missed some submissions by Thijmen Krebs and by Reinier Sorgdrager and Jim Wittebol. As an apology, we provide some of their approaches to a few problems that are different from the solutions posted before.

Thijmen Krebs provided a more direct solution to part b of problem A of the March 2020 problem section, which we would like to share. The problem was the following:

Problem 2020-1/A (proposed by Hendrik Lenstra)

For every positive integer n , we write $[n] := \{0, 1, \dots, n-1\}$. For every integer m , we let $T(m) := m(m+1)/2$ be the m -th triangular number. Let $\tau: [n] \rightarrow [n]$ be the map given by $m \mapsto T(m) \bmod n$.

- For which n is τ a permutation?
- For these n , determine the sign of τ as a function of n .

Solution to part b In part a, we showed that n has to be a power of 2. The case $n = 1$ is trivial, so suppose that $n \geq 2$ is a power of 2. Observe that for all $m \in [n/2]$, we have

$$\begin{aligned} T(n-1-m) &= (n-1-m)(n-m)/2 \\ &= (m+1-n)(m-n)/2 \\ &\equiv T(m) \pmod{n/2}. \end{aligned}$$

Recall that an inversion of a permutation π on $[n]$ is a pair $(i, j) \in [n]^2$ satisfying $i < j$ and $\pi(i) > \pi(j)$. We find that $(m, n-1-m)$ with $m \in [n/2]$ is an inversion precisely if $\tau(m) \geq n/2$, which is the case precisely if $T(m) - (T(m) \bmod n/2)$ is an odd multiple of $n/2$.

The number of inversions of this form modulo 2 is therefore

$$\frac{2}{n} \sum_{m \in [n/2]} T(m) - (T(m) \bmod n/2) = \frac{2}{n} \sum_{m \in [n/2]} T(m) - m = \frac{2}{n} \sum_{m \in [n/2]} T(m) = \left(\frac{n}{2} - 2\right) \left(\frac{n}{2} - 1\right) / 6.$$

The first equality above uses that T induces a permutation mod $n/2$, the second uses that $\sum_{m \in [n/2]} m = T(n/2)$ and the third uses knowledge of the tetrahedral numbers (where in the case $n = 2$, we let $[0] = \emptyset$). Observe that $(\frac{n}{2} - 2)(\frac{n}{2} - 1)/6 \equiv T(n/2 - 2) \pmod{2}$.

Switching all these inversions (a permutation of sign $(-1)^{T(n/2-2)}$) and applying τ afterwards gives us a permutation σ with the property $\sigma(m) \in [n/2]$ and $\sigma(n-m-1) = n/2 + \sigma(m)$ for all $m \in [n/2]$. If $i < n/2 \leq j$, then (i, j) is clearly not an inversion, and if $i, j \in [n/2]$ with $i < j$, then (i, j) is an inversion if and only if $(n-i-1, n-j-1)$ is not an inversion. In particular, σ has $\binom{n/2}{2} = T(n/2 - 1)$ inversions, so it has sign $(-1)^{T(n/2-1)}$. We have $T(n/2 - 2) + T(n/2 - 1) = (n-2)(n/2 - 1)/2 = (n/2 - 1)^2$, which is even precisely if $n = 2$. This means the sign of τ is even when $n = 2$ and odd for all higher powers of 2.

Thijmen also provided a more direct solution to Problem C of the March edition.

Problem 2020-1/C (proposed by Hendrik Lenstra)

Let $n \geq 4$ be an integer and let A be an abelian group of order 2^n . Let σ be an automorphism of A such that the order of σ is a power of 2. Then the order of σ is at most 2^{n-2} .

Solution Denote $N = 2^n$, and let $G = \langle \sigma \rangle$ act on A . Since the length of each orbit divides the order of σ and the orbits partition A , those lengths divide N and the order of σ equals the length of a maximal orbit. As σ is an endomorphism, 0 is necessarily a fixed point, so orbits are at most of size $N/2$.

Suppose on the contrary that $|G \cdot x| = N/2$. Then all other orbits are strictly smaller. Let $B := A \setminus (G \cdot x)$, and note that $B = \{y \in A \mid \sigma^{N/4}(y) = y\}$. For $x, y \in B$, we find that $\sigma^{N/4}(y - x) = \sigma^{N/4}(y) - \sigma^{N/4}(x) = y - x$, hence B is a subgroup of A and we have $G \cdot x = x + B$. Let $y := \sigma(x) - x$ and let $s_k: B \rightarrow B$ be given by $s_k(z) = \sum_{i=0}^{k-1} \sigma^i(z)$. Then for all $k \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$ we find (using a telescoping sum) that

$$\sigma^k(x) = x + s_k(y).$$

We show that B has exponent 2. Since $-x \in G \cdot x$, we have $-x = \sigma^j(x)$ for some $j \in \mathbb{Z}_{>0}$. Because $\sigma^{2j}(x) = x$, we find that $N/4 \mid j$. Observe that $\sigma^j(\sigma^k(x)) = -\sigma^k(x)$ for any k as well. Since $G \cdot x = x + B$, we can write any $z \in B$ as $x - \sigma^k(x)$ for some k . Since $\sigma^j(z) = z$, we find that $-z = -x + \sigma^k(x) = \sigma^j(z) = z$, so $2z$ has order at most 2, so B has exponent at most 2 (and exactly 2 since $|B| > 1$).

Consequently, if $|G \cdot y|$ divides $N/8$, then we find that $\sigma^{N/4}(x) = x + s_{N/4}(y) = x + 2s_{N/8}(y) = x$, a contradiction. So we must have $|G \cdot y| = N/4$.

By a similar argument to the one that showed $\sigma^k(x) = x + s_k(y)$, we now find that for $z := \sigma(y) - y \in B \setminus (G \cdot y)$, we have $\sigma^k(y) = y + s_k(z)$ for all $k \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$. In particular, $|G \cdot z|$ divides $N/8$. But then

$$\begin{aligned} \sigma^{N/4}(x) &= x + \sum_{i=0}^{N/4-1} \sigma^i(y) \sigma^{N/4}(x) = x + \sum_{i=0}^{N/4-1} \sigma^i(y) = x + \sum_{i=0}^{N/4-1} y + s_i(z) \\ &= x + \sum_{i=0}^{N/8-1} 2y + s_i(z) + s_{N/8+i}(z) = x + \sum_{i=0}^{N/8-1} s_i(z) + (s_i(z) + \sigma^{N/8}(s_{N/8}(z))) \\ &= x + \sum_{i=0}^{N/8-1} s_{N/8}(z) = x + N/8 s_{N/8}(z) = x. \end{aligned}$$

Here, the last step uses that $N/8$ is even (and $s_{N/8}(z)$ has order 2), the only place we use that $n \geq 4$.

Reinier Sorgdrager and Jim Wittebol provided solutions to all exercises of the June 2020 problem section. Their solution to Problem B mentions an interesting property of square submatrices of Vandermonde matrices:

Problem 2020-2/B. (proposed by Onno Berrevoets)

Let $n \geq 1$ be an integer, and let $p_1, \dots, p_{n-1}$ be pairwise distinct prime numbers. Suppose that $(v_1, \dots, v_n)^T \in \mathbb{Z}^n$ is a non-trivial element of the kernel of

$$\begin{pmatrix} 1^{p_1} & 2^{p_1} & \dots & n^{p_1} \\ 1^{p_2} & 2^{p_2} & \dots & n^{p_2} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1^{p_{n-1}} & 2^{p_{n-1}} & \dots & n^{p_{n-1}} \end{pmatrix}$$

Prove that

$$\max_k |v_k| \geq \frac{2}{n^2 + n} \prod_{i=1}^{n-1} p_i.$$

Solution The matrix

$$M = \begin{pmatrix} 1 & 2 & \dots & n \\ 1^{p_1} & 2^{p_1} & \dots & n^{p_1} \\ 1^{p_2} & 2^{p_2} & \dots & n^{p_2} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1^{p_{n-1}} & 2^{p_{n-1}} & \dots & n^{p_{n-1}} \end{pmatrix}$$

is a square submatrix of a Vandermonde matrix with distinct positive eigenvalues. A property of such matrices is that they are invertible. Some details can be found on <https://math.stackexchange.com/questions/1781867/>.

The vector v is non-trivial, so it does not lie in the kernel of M . Hence $\sum_{k=1}^n kv_k \neq 0$. Reducing modulo p_i , we find that $p_i \mid \sum_{k=1}^n kv_k$ for all $i \in \{1, 2, \dots, n-1\}$ and therefore

$$\binom{n+1}{2} \max_k |v_k| \geq \left| \sum_{k=1}^n kv_k \right| \geq \prod_{i=1}^{n-1} p_i.$$

Note from the editors: Since there are some details missing on proving this interesting property of square submatrices of Vandermonde matrices with distinct positive eigenvalues, we do not consider this a complete solution. Finding said details however is a good reason to look into Schur polynomials.