

Inhoud | Contents

Artikelen | Features

- Column | Column**
 81 Coronastatistiek *Casper Albers*
- Onderzoek | Research**
 84 Hoe mens en wiskunde hand in hand het coronatijdperk kleuren *Steven Abrams e.a.*
- Interview | Interview**
 90 Edwin van den Heuvel: Data-analyse COVID-19 *Nicolaos Starreveld, Hans Sterk*
- Onderwijs | Education**
 93 Corona op de campus *Slawi Dimitrov, Vera Moerbeek, Jos van Willigen*
- Geschiedenis | History**
 95 Lockdown mathematics: A historical perspective *Viktor Blåsjö*
- In Memoriam | Obituary**
 99 John Horton Conway: Briljante inspirator, entertainer en docent *Arjeh Cohen*
- Evenement | Event**
 105 NWD: Dagen met sterren *Rob van Oord*
- Oratie | Inaugural lecture**
 114 Practical combinatorial optimization *Frits C.R. Spijksma*
- Evenement | Event**
 123 De Avond van de Abelprijs: Een kijkje in de toekomst van de wiskunde *Nicolaos Starreveld*
- Interview | Interview**
 125 Barbara Gentz: "Parents should get the support needed to make it possible to reconcile family and career" *Francesca Arici*
- Onderwijs | Education**
 129 Op weg naar een nieuw curriculum *Maarten Müller*

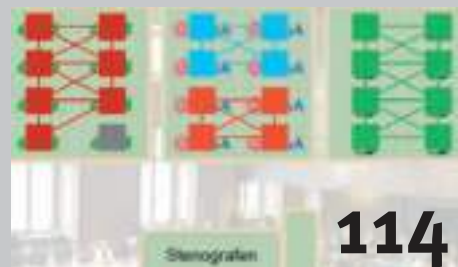
Rubrieken | Departments

- 75 Redactioneel *Raf Bocklandt*
- 76 Agenda *Margriet Oomen*
- 77 Nieuws *Margriet Oomen*
- 103 Het keerpunt van Marie Beth van Egmond *Daan Mulder*
- 110 Stoffelijke resten: Berlijn *Wieb Bosma*
- 134 In de verdediging *Nicolaos Starreveld*
- 136 Boekbesprekingen *Hans Cuypers, Hans Sterk*
- 142 Problemen *Onno Berrevoets, Rob Eggermont, Daan van Gent*

Uitgelicht



Veel corona in dit nummer, te beginnen met een column van Casper Albers over coronastatistiek.



Frits Spijksma gebruikt de verdeling van stoelen in een parlement als voorbeeld van een optimaliseringsprobleem.

Colofon

Het Nieuw Archief voor Wiskunde is een uitgave van het Koninklijk Wiskundig Genootschap en verschijnt vier maal per jaar. Het tijdschrift richt zich op eenieder die zich beroepsmatig met wiskunde bezighoudt, als academisch of industrieel onderzoeker, student, leraar, journalist of beleidsmaker. Het stelt zich ten doel te berichten over ontwikkelingen in de wiskunde in het algemeen en in de Nederlandse wiskunde in het bijzonder.

ISSN 0028-9825

Adres

Nieuw Archief voor Wiskunde
Centrum Wiskunde & Informatica
Postbus 94079, 1090 GB Amsterdam
tel. 020-5924288
redactie@nieuwarchief.nl
www.nieuwarchief.nl

Hoofredactie

Raf Bocklandt (r.r.j.bocklandt@uva.nl)
Robbert Fokkink (r.j.fokkink@tudelft.nl)

Eindredactie/Bladmanager

Fred Drissen (fred@nieuwarchief.nl)

Redactie

Viktor Blåsjö (UU), Hans Cuypers (TU/e), Teun Koetsier (VU), Daan Mulder, Margriet Oomen (UL), Nicolaos Starreveld (UvA), Hans Sterk (TU/e), Mark Timmer (UT)

Problemenrubriek (problems@nieuwarchief.nl)

Onno Berrevoets, Rob Eggermont en Daan van Gent

Bureau redactie

Claartje Ottens

Illustraties

Ryu Tajiri

Vormgeving

Susanne Laws (omslag, begeleiding binnenwerk)
Kitty Molenaar (ontwerp)

Druk

Veldhuis Media

Advertenties

advertenties@nieuwarchief.nl

Koninklijk Wiskundig Genootschap

www.wiskgenoot.nl

Platform Wiskunde Nederland

www.platformwiskunde.nl

European Mathematical Society

www.euro-math-soc.eu

International Mathematical Union

www.mathunion.org

Koninklijk Wiskundig Genootschap

Het Koninklijk Wiskundig Genootschap (KWG) is een landelijke vereniging van beoefenaars van de wiskunde. In 1778 opgericht onder de zinspreuk: 'Een onvermoeide arbeid komt alles te boven' is het 's werelds oudste nationale wiskundegenootschap. Leden ontvangen het Nieuw Archief voor Wiskunde als onderdeel van hun lidmaatschap.

Bestuur

Barry Koren (TU/e, voorzitter), Wioletta Ruszel (TUD, penningmeester), Marie-Colette van Lieshout (CWI, secretaris), Danny Beckers (VU), Theo van den Bogaart (HU), Sonja Cox (UvA), Marije Elkenbracht (ABN AMRO), Michael Müger (RU), Willem Jan Palenstijn (CWI), Jan Wiegerinck (UvA).

Secretariaat

Koninklijk Wiskundig Genootschap, CWI
Postbus 94079, 1090 GB Amsterdam
wiskgenoot@wiskgenoot.nl

Ledenadministratie KWG / Abonnementen

admin@wiskgenoot.nl, tel. 020-5924008
Wijzigingen of opzegging kunt u ook doorgeven door in te loggen op www.wiskgenoot.nl.

Contributie

Tarieven per jaar (bij betaling per automatische incasso krijgt u € 2,50 korting):

- gewoon lid: € 92,50
 - reciprociteitslid: € 72,50
 - gepensioneerden en werklozen: € 47,50
 - aio's, oio's, studenten: € 37,50 (max. 4 jaar)
 - lid zonder Nieuw Archief: € 52,50
- Studenten en pas afgestudeerden kunnen een jaar lang gratis lid worden.

Voor verzending van het Nieuw Archief naar het buitenland wordt een portotoeslag van € 10 in rekening gebracht.

Instituten in Nederland en buitenland kunnen zich abonneren op het Nieuw Archief voor Wiskunde voor € 100 (Nederland), € 110 (Europa) of € 112,50 (buiten Europa).

Members of foreign societies

Members of *SIAM*, the *Société Mathématique de France*, the *Gesellschaft für Angewandte Mathematik und Mechanik*, the *Deutsche Mathematiker-Vereinigung*, and of the *American, Australian, Belgian, Indian, London, Spanish, and South-African Mathematical Societies* living outside of the Netherlands pay € 72,50 instead of the full membership fee of € 92,50 a year. Conversely, these foreign societies, as well as the *VvS+OR* and the *NVORWO*, have reduced membership fees for KWG members. A postage charge of € 10 is added for members living abroad but in Europe, and a charge of € 12,50 for members living outside of Europe.

Exchange subscriptions

Koninklijk Wiskundig Genootschap Library
Centrum Wiskunde & Informatica
P.O. Box 94079, NL-1090 GB Amsterdam
KWG-exchange@cw.nl

Informatie voor auteurs

Kopij

Het Nieuw Archief voor Wiskunde is een geredigeerd tijdschrift. Kopij dient per e-mail te worden aangeboden aan kopij@nieuwarchief.nl. Uitgebreide informatie en auteursinstructies kunt u vinden op www.nieuwarchief.nl.

Volgende nummers

nummer	maand	verschijnen	deadline kopij
21(3)	september	2020	verstreken
21(4)	december	2020	01-08-2020
22(1)	maart	2021	01-11-2020
22(2)	juni	2021	01-02-2021

Instituutsleden

De publicaties van het Koninklijk Wiskundig Genootschap worden mede mogelijk gemaakt door de bijdragen van de volgende instituten.



Centrum Wiskunde & Informatica



Rijksuniversiteit Groningen



Universiteit van Amsterdam



Universiteit Leiden



Vrije Universiteit



Universiteit Utrecht



Technische Universiteit Eindhoven



Eurandom



Technische Universiteit Delft



Universiteit Twente



Radboud Universiteit Nijmegen



Freudenthal Instituut

Op het omslag

Een vijver met waterlelies wordt vaak gebruikt om het begrip 'exponentiële groei' uit te leggen. In de coronacrisis die de wereld momenteel in zijn greep houdt, is exponentiële verspreiding de kern van het probleem. Lees in dit nummer een aantal bijdragen over wiskunde in coronatijd.

Never waste a good crisis

Toen ik donderdag 12 maart naar huis terugkeerde, dacht ik niet dat dit de laatste keer zou zijn dat ik dit academiejaar voet op Nederlandse bodem zou zetten, maar zo ziet het er inmiddels wel naar uit. Plots was alles anders, iedereen werd aangemaand om thuis te werken en op enkele dagen tijd verhuisde de hele campus naar het wereldwijde web.

Mijn zolderkamer werd mijn leslokaal en de studenten op de eerste rij krompen ineen tot een reeks postzegeltjes op mijn laptop, die stilzwijgend toekeken hoe ik mijn colleges krijtte op een eigenhandig getimmerd en geschilderd schoolbord. Met zo weinig feedback was deze manier van lesgeven in het begin een eenzame bedoening, maar geleidelijk aan verloren mijn online toeschouwers hun schroom om mij te onderbreken en groeide er een modus operandi die iets van het klassieke hoorcollege terugbracht. Toch snak ik na twee maanden quarantaine naar een goed ouderwets college waar ik tijdens de pauze met de studenten gewoon een praatje kan maken zonder telkens te moeten vragen of hun microfoon wel aanstaat.

Ook het *Nieuw Archief voor de Wiskunde* bleek niet immuun voor de invloed van het virus. Onze redactievergadering op 19 maart viel uiteraard in het water, maar ook iets grotere evenementen zoals het Nederlands Mathematisch Congres of de centrale examens

werden afgelast, waardoor een aantal bijdragen wegvielen. Andere stukken verschoven naar latere nummers omdat de auteurs nu wel hun handen vol hebben met dringendere zaken. Het zag er dus naar uit dat het juninummer wel wat beademing kon gebruiken.

Maar onder Churchills mom van 'Never waste a good crisis', bracht de coronacrisis hier ook redding. In dit nummer belichten we een aantal wiskundige facetten van de huidige pandemie. Casper Albers in zijn column en het SIMID-team van de Universiteiten van Hasselt en Antwerpen nemen de verschillende modellen die gebruikt worden bij de studie van infectieziekten onder de loep. Wij hebben een interview met Edwin van de Heuvel van de Technische Universiteit Eindhoven die samen met zijn team coronadata analyseert. Enkele bachelorstudenten berichten over hun ervaringen op de virtuele universiteit, Viktor Blåsjö vertelt ons hoe de geschiedenis van de wiskunde door lockdowns beïnvloed is en Arjeh Cohen heeft een In Memoriam geschreven over John Conway, die helaas in april overleed aan de gevolgen van COVID-19.

Kortom, voldoende leesvoer voor als je, zoals we dat in België zeggen, nog even in je kot moet blijven. ☘

Raf Bocklandt, hoofdredacteur

Korteweg-de Vries Instituut, Universiteit van Amsterdam

Agenda

| Upcoming Events

Voorbehoud in verband met coronacrisis

Vanwege de maatregelen omtrent de coronacrisis zijn alle evenementen de afgelopen maanden afgelast geweest of, zoals de EGMO 2020, naar het web verplaatst. Ook de komende tijd is het voor veel evenementen nog onzeker of ze door kunnen gaan. Sommige organisaties bekijken de mogelijkheid om een evenement online te organiseren, andere zoeken een nieuwe datum. Wij hebben een kleine selectie gemaakt van evenementen die bij het ter perse gaan van dit blad nog op het programma stonden. Kijk altijd even op de website van een evenement voor de laatste stand van zaken.

10–14 augustus 2020

□ Symplectic Dynamics Beyond Periodic Orbits

Workshop over nieuwste ontwikkelingen op het grensgebied tussen dynamische systemen en symplectische topologie.

plaats Lorentz Center@Oort, Leiden

info lorentzcenter.nl

21–22 augustus 2020 en 28–29 augustus 2020

□ Vakantiecursus 2020

Vakantiecursus van PWN voor leraren, studenten van lerarenopleidingen en voor andere belangstellenden. Dit jaar is het thema ‘Speltheorie: van strategisch beslissen tot ‘eerlijke’ oplossingen’.

plaats CWI Amsterdam en TU Eindhoven

info platformwiskunde.nl/vakantiecursus

24–28 augustus 2020

□ Modeling Shape and Size in Biological Development

Workshop mede georganiseerd door Roeland Merks.

plaats Lorentz Center@Oort, Leiden

info lorentzcenter.nl

31 augustus – 4 september 2020

□ Current Debates in Forensic Statistics

Workshop over het gebruik van forensische statistiek, voor zowel wiskundigen als juristen, mede georganiseerd door Ronald Meester.

plaats Lorentz Center@Oort, Leiden

info lorentzcenter.nl

11 september 2020

□ Finale Nederlandse Wiskunde Olympiade

Nationale finale van de wiskundeolympiade voor middelbare scholieren.

plaats Technische Universiteit Eindhoven

info wiskundeolympiade.nl

16–26 september 2020 (verplaatst van juli)

□ International Mathematical Olympiad (IMO)

Internationale wiskundecompetitie voor middelbare scholieren.

plaats Sint-Petersburg, Rusland

info imo-official.org

26 september 2020

□ Junior Wiskunde Olympiade

Wiskundewedstrijd voor de beste 200 leerlingen die deelnamen aan de W4 Kangoeroe-wedstrijd.

plaats Vrije Universiteit Amsterdam

info wiskundeolympiade.nl

27–30 september 2020

□ International Conference on Computational Logistics (ICCL2020)

Conferentie voor wetenschappers in operations research, business analytics en artificial intelligence.

plaats U Parkhotel, Enschede

info iccl2020.nl

1 oktober 2020

□ Symposium Retirement Jos Baeten

Symposium ter ere van het met pensioen gaan van Jos Baeten als algemeen directeur van het CWI en hoogleraar theory of computing aan het ILLC.

plaats Turingzaal, CWI Amsterdam

info cwi.nl

5–9 oktober 2020

□ Post-Quantum Cryptography for Embedded Systems

Workshop mede georganiseerd door Andreas Hülsing (TU/e), Tanja Lange (TU/e) en Simona Samardjiska (RU).

plaats Lorentz Center@Oort, Leiden

info lorentzcenter.nl

6 november 2020

□ Prijsuitreiking Nederlandse Wiskunde Olympiade 2020

Feestelijke bijeenkomst waarbij in elke categorie de beste vijf deelnemers aan de Wiskunde Olympiade hun prijs in ontvangst mogen nemen.

plaats Technische Universiteit Eindhoven

info wiskundeolympiade.nl

7–11 december 2020

□ Hypergeometry, Integrability and Lie Theory

Workshop georganiseerd door Erik Koelink (RU).

plaats Lorentz Center@Oort, Leiden

info lorentzcenter.nl

Suggesties voor deze agenda zijn welkom.

Redacteur: Margriet Oomen

agenda@nieuwarchief.nl

Nieuws

| News

Hillel Furstenberg en Gregory Margulis winnen de Abelprijs

De Abelprijs 2020 is toegekend aan Hillel Furstenberg en Gregory Margulis. Beide wiskundigen krijgen de prijs voor hun werk waarin ze met behulp van random walk-technieken grote open problemen wisten op te lossen in de groepentheorie, getaltheorie, combinatoriek en grafentheorie. De jury roemde Furstenberg en Margulis in het bijzonder omdat zij met hun nieuwe technieken de toegepaste wiskunde met de pure wiskunde wisten te verbinden. Met hun nieuwe probabilistische methoden, toonden Furstenberg en Margulis het bestaan van aritmetische progressies van priemgetallen aan, analyseerden ze structuren van roosters in Lie-groepen en construeerden ze expandergrafen. Expandergrafen spelen een belangrijke rol in de informatica en de communicatietechnologie.

Hillel Furstenberg werd in 1935 in Berlijn geboren. Met zijn Joodse familie vluchtte hij in 1939 naar de Verenigde Staten, waar hij opgroeide in een Joods orthodoxe buurt in New York. In 1965 verhuisde Furstenberg van de Verenigde Staten naar Israël, waar hij tot zijn pensioen in 2003 verbonden zou blijven aan de Hebrew University of Jerusalem. Furstenberg ontving eerder in zijn wiskunde-carrière ook de Wolfprijs.

Gregory Margulis werd in 1946 geboren in Moskou. In 1978, slechts 32 jaar oud, won hij de Fieldsmedaille, maar het Sovjet-regime gaf hem geen visum om zijn prijs in Helsinki in ontvangst te nemen. Vanwege zijn Joodse afkomst kreeg Margulis geen positie aan een prestigieuze Russische universiteit, maar een positie aan het Institute for Problems in Information Transmissions. Pas in 1979 kreeg Margulis de vrijheid om als wetenschapper naar Europa en Amerika te reizen. Sinds 1991 is hij hoogleraar aan Yale University. Margulis ontving eerder ook al de Wolfprijs.

Door het leeftijdsverschil tussen Margulis en Furstenberg en de reisrestricties van het Sovjetregime, werkten Margulis en Furstenberg nooit officieel samen. Met hun wiskundige artikelen hebben ze elkaar echter wel beïnvloed.

abelprize.no



Foto: Yosef Adest

Hillel Furstenberg



Foto: Dan Rezzetti

Gregory Margulis

Deze rubriek is een kroniek van wiskundige activiteiten in Nederland. Toekomstige activiteiten worden aangekondigd en van voorbije activiteiten wordt verslag gedaan. Wilt u uw aankondiging of verslag in deze rubriek geplaatst zien? Stuur ons dan uw bijdrage, zo mogelijk met illustratie. De redactie behoudt zich het recht voor berichten te weigeren of in te korten.

Redacteur: Margriet Oomen

nieuws@nieuwarchief.nl

Online wiskunde-seminars

Door de coronamaatregelen kunnen veel wiskundebijeenkomsten helaas niet doorgaan. Gelukkig zijn er in de internationale wiskundegemeenschap veel online seminars opgestart. Op de website mathseminars.org staat een overzicht van seminars die online te volgen zijn. In het bijzonder zijn er voor veel vakgebieden binnen de wiskunde zogeheten One-World-seminars opgezet, waarin toonaangevende wiskundige presentaties houden over hun onderzoek.

mathseminars.org

Opt Art, een boek vol optimalisatiekunst

Robert Bosch, wiskundige aan het Oberlin College in Ohio, heeft als hobby om met behulp van lineaire optimaliseringstechnieken kunstwerken en afbeeldingen na te maken. In zijn nieuwe boek *Opt Art* introduceert hij lineaire optimalisatie en laat hij zien hoe je daarmee kunst kunt maken. Zo maakt hij met behulp van het Traveling Salesman-probleem op 100.000 punten een *Mona Lisa* getekend uit één lijn, gebruikt hij sets van dominostenen om Obama te portretteren en kan hij een rennende kat à la Eadweard Muybridge animeren met behulp van Conways *Game of Life*. En enkel middelbareschoolwiskunde is genoeg om dit prachtige geïllustreerde boek van Bosch te kunnen begrijpen. press.princeton.edu



Mona Lisa getekend uit één lijn

Foto: Robert Bosch

Moeilijke Sudoku's oplossen

Afgelopen maand is het boek *Moeilijke sudoku's oplossen* van Wil Schilders uitgekomen. Schilders is hoogleraar numerieke wiskunde aan TU/e en directeur van Platform Wiskunde Nederland. *Moeilijke sudoku's oplossen* is de opvolger van *Los elke sudoku op*, het boek dat Schilders in 2009 schreef. Het was een hulpboek voor het grote publiek, waarmee Schilders hoopte mensen op een hoger Sudoku-niveau te brengen. In *Moeilijke sudoku's oplossen* bespreekt hij oplossingen van (extreem) moeilijke sudoku's tot in detail. Het eerste sudokuboek van Schilders is inmiddels in het Engels en Duits vertaald en er komen ook een Franse, een Spaanse en een Portugese editie. cursor.tue.nl

Paul Vitányi wint 2020 McGuffey Longevity Award

Paul Vitányi (Centrum Wiskunde & Informatica) heeft samen met zijn collega Ming Li (University of Waterloo in Canada) een van de zeven 2020 McGuffey Longevity Awards gewonnen voor hun boek *An Introduction to Kolmogorov Complexity and Its Appli-*

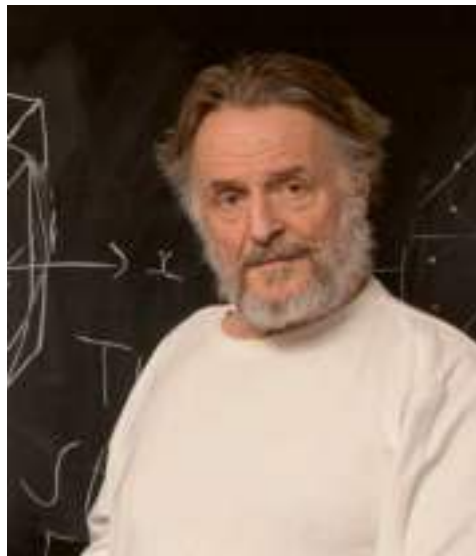
cations. De McGuffey Longevity Awards zijn prijzen voor auteurs van toonaangevende tekstboeken en worden uitgereikt door de Textbook & Academic Authors Association. Kolmogorov complexity is een belangrijk begrip in de informatica dat gaat over de hoeveelheid informatie van een object. *An Introduction to Kolmogorov Complexity and Its Applications* geldt inmiddels als het standaardwerk over Kolmogorov complexity voor zowel studenten en promovendi in de informatica als voor onderzoekers in verschillende vakgebieden. Het boek behandelt de fundamentele theorie achter Kolmogorov complexity en geeft daarnaast belangrijke toepassingen en didactische voorbeelden. De 2020 McGuffey Longevity Awards zullen uitgereikt worden tijdens de Textbook & Academic Authors Association's 33rd Annual Textbook & Academic Authoring Conference in San Diego, California op 12 juni 2020. cwi.nl

Harry Buhrman treedt toe tot KNAW

Quantumonderzoeker Harry Buhrman is gekozen tot lid van de Koninklijke Nederlandse Academie van Wetenschappen. Buhrman is hoofd van de onderzoeksgroep Algorithms and Complexity van het CWI en hoogleraar informatica aan de UvA. Daarnaast is Buhrman oprichter en directeur van het onderzoeksinstituut QuSoft, dat onderzoek doet naar software voor quantumcomputers en toepassingen van quantumcomputers en quantumnetwerken. cwi.nl

John Conway overleden

De wiskundige John Horton Conway is op 82-jarige leeftijd overleden. Conway leverde grote bijdragen aan de groepentheorie, getaltheorie, algebra, geometrische topologie, theoretische natuurkunde, combinatorische speltheorie en geometrie. Onder collega's stond Conway bekend als een extrovert genie en voor studenten was hij de charismatische professor. Behalve door zijn wiskunde genoot Conway bekendheid door de vele spellen die hij gedurende zijn leven ontwikkelde en bij niet-wiskundigen werd Conway beroemd door zijn *Game of Life*. Verderop in dit nummer vindt u een In Memoriam, geschreven door Arjeh Cohen. princeton.edu



John Conway

Foto: Denise Applewhite, princeton.edu

Finale Wiskunde A-lympiade

Op 13 en 14 maart is in Garderen de 31ste internationale finale van de wiskunde A-lympiade gehouden. Vanwege de coronamaatregelen konden alleen Nederlandse en Duitse teams deelnemen, de teams uit Iran, Japan, Kroatië, Denemarken en de Caraïben moesten helaas thuisblijven. De teams bestudeerden twee dagen lang dobbelspellen met verschillende soorten dobbelstenen en verschillende scoresystemen. Eindopdracht was om zelf een dobbelspel te ontwikkelen. Aan het eind van het weekend werden alle zelfbedachte dobbelspellen gespeeld. Ondanks de kleinere schaal, was het een geslaagde finale.

uu.nl



Deelnemers finale wiskunde A-lympiade

Drie bronzen medailles voor Nederland tijdens de EGMO 2020

Het Nederlandse team heeft drie bronzen plakken gehaald op de European Girls Mathematical Olympiad (EGMO). Ana Mekerishvili uit Den Haag, Hanne Sniijders uit Rotterdam en Kati Overbeeke uit Eindhoven wonnen alle drie een bronzen medaille. Dit jaar zou de negende editie van de EGMO van 15 tot 21 april in Egmond aan Zee plaatsvinden, maar door het coronavirus vond de wedstrijd online plaats. In totaal namen er 200 meiden tussen de 13 en 18 jaar uit 13 verschillende landen deel aan de EGMO 2020. Behalve dat de deelnemers twee keer 4,5 uur aan pittige wiskundeopgaven werkten, waren er online ook allerlei leuke wiskundige activiteiten, zoals puzzels, lezingen en een pubquiz.

wiskundeolympiade.nl

Goud voor Nederland op de Benelux Wiskunde Olympiade

Rafaël Houkes heeft een gouden medaille op de Benelux Wiskunde Olympiade gehaald. De Benelux Wiskunde Olympiade is een jaarlijkse wedstrijd voor wiskundetalent uit België, Nederland en Luxemburg. Wegens de coronamaatregelen vond de wedstrijd dit jaar online plaats. Casper Madlener, Jelle Bloemendaal en Tjeerd Morsch haalden alle drie een zilveren medaille. Brons was er voor Hylke Hoozevee, Merijn van Delft, Charlie Tang, Kevin van Dijk en Thian Tromp.

wiskundeolympiade.nl

Nieuwe podcastafleveringen van De fascinatiefolger

Er zijn weer twee nieuwe afleveringen van de podcast *De fascinatiefolger*. In deze afleveringen interviewt Judith Lengkeek de wiskundigen dr. Floris van Doorn (University of Pittsburgh) en professor Hinke Osinga (University of Auckland, NZ).

podcastluisteren.nl

Van Dantzigprijs voor Daniel Dadush en Marloes Maathuis

Daniel Dadush en Marloes Maathuis hebben de Van Dantzigprijs 2020 gewonnen. Dit werd bekendgemaakt tijdens de jaarvergadering van de VVSOR, de Nederlandse Vereniging voor Statistiek en Operations Research, in Utrecht. De Van Dantzigprijs wordt om de vijf jaar uitgereikt door de VVSOR aan een wetenschapper, jonger dan 40 jaar, die een belangrijke bijdrage heeft geleverd aan de ontwikkelingen op het gebied van statistiek en operations research. Dadush ontving de prijs voor zijn werk op het gebied van 'smoothed analysis for the simplex method, algorithmic discrepancy bounds for integer programming and algorithms for optimization on lattices'. Maathuis kreeg de prijs voor haar werk aan causal inference, graphical models, high-dimensional statistics, en de interdisciplinaire toepassingen op het grensgebied tussen biologie, epidemiologie en statistiek. Tijdens de jaarvergadering van de VVSOR werd ook bekend gemaakt dat Willem Feijen de Jan Hemelrijk Award 2020 heeft gewonnen. De Jan Hemelrijk Award wordt elk jaar uitgereikt voor de beste masterscriptie op het gebied van statistiek of operations research.

cwi.nl

Teun Koetsier Officier in de Orde van Oranje-Nassau

Ons redactielid Teun Koetsier is benoemd tot Officier in de Orde van Oranje-Nassau. De burgemeester van Laren verraste Koetsier met bloemen en taart voor zijn huis in Laren. Vanwege de coronamaatregelen zal het bijbehorende lintje later worden opgespeld. Teun krijgt de onderscheiding voor zijn bijdrage aan de wiskundige gemeenschap. Naast redactielid van het NAW, is Teun ook ere-lid van de International Federation for the Promotion of Machine and Mechanism Science (IFTOMM), voorzitter van de Commissie Persoonlijke Archieven van Wiskundigen en bestuursvoorzitter van Stichting Epsilon. Daarnaast was Teun voor zijn pensioen associate professor wiskunde aan de VU en voorzitter Landelijk Werkcontact Geschiedenis en Maatschappelijke Functie van de Wiskunde (GMFW). Momenteel is hij ook nog secretaris bij de Historische Kring Laren en betrokken bij het onderzoeksproject 'Laren in WOII'. Samen met Ineke Hilhorst schreef Teun Koetsier een trilogie over de Tweede Wereldoorlog in Laren.

laardercourant.nl



Teun Koetsier

Foto: Bob Awtick

Erratum

In de gedrukte versie van het maartnummer is in 'Het keerpunt' de laatste regel van het gedicht van Samuel Vriezen weggefallen. Die luidde: "Zal jullie naam zijn voor het schandaal dat 'alle mensen' niet mocht bestaan?"

NASA-wiskundige Katherine Johnson overleden

Katherine Johnson, jarenlang als wiskundige werkzaam bij NASA, is op 101-jarige leeftijd overleden. Johnson berekende onder andere de precieze baan van de Apollo 11 naar de maan, waar Neil Armstrong de eerste maanwandeling van de geschiedenis zou maken. Katherine Johnson werkte 33 jaar lang op de Flight Research Division van NASA en was een van de eerste vrouwen bij NASA die officieel auteur werd van een technisch artikel. Johnson behoorde ook tot de groep vrouwelijke Afro-Amerikaanse wiskundigen bij NASA waarover de film *Hidden Figures* uit 2016 gaat.

Katherine Johnson groeide op in White Sulphur Springs. Omdat ze van Afro-Amerikaanse afkomst was, kon ze in White Sulphur Springs niet naar een middelbare school. Haar familie verhuisde naar het 200 kilometer verderop gelegen Institute in West Virginia om te zorgen dat Katherine en haar broers en zussen naar een middelbare school konden. Al op 14-jarige leeftijd behaalde Katherine Johnson haar highschooldiploma en toen ze 19 was studeerde ze summa cum laude af in wiskunde en Frans aan het

zwarte West Virginia State College. Helaas kon ze niet naar een reguliere universiteit vanwege haar Afro-Amerikaanse afkomst en ook een carrière als wiskundige bleek niet mogelijk. Johnson werd docent. In 1940 werd ze, bij hoge uitzondering, alsnog toegelaten aan een blanke universiteit. Echter, na een jaar verliet ze de universiteit, omdat ze zwanger was.

In 1952 vernam Johnson dat NASA op zoek was naar vrouwelijke wiskundigen. In 1953 begon ze haar succesvolle carrière bij NASA, waar ze tot haar pensioen in 1986 met veel plezier zou werken. In 2015 kreeg Johnson van president Obama de Presidential Medal of Freedom, de hoogst haalbare Amerikaanse onderscheiding voor burgers. Ze ontving de medaille voor haar werk bij NASA, waarbij ze de grenzen van het menselijke kunnen verlegde zonder zich te laten tegenhouden op grond van haar ras en geslacht.

nytimes.com



Katherine Johnson

Foto: nasa.gov

Koninklijk Wiskundig Genootschap**❑ NMC 2020 geannuleerd**

Het Nederlands Mathematisch Congres (NMC 2020) dat op 14–15 april zou plaatsvinden, heeft geen doorgang kunnen vinden vanwege de coronacrisis. De organisatie had het evenement al in een vroeg stadium geannuleerd. Mensen die zich al geregistreerd hadden, hebben het deelnamebedrag teruggekregen. Er zal gekeken worden of het programma behouden kan worden voor als er betere tijden aanbreken waarin we weer congressen kunnen organiseren.

❑ Algemene ledenvergadering

De jaarlijkse Algemene ledenvergadering van het KWG die plaats zou vinden tijdens het NMC is online gehouden. De leden waren per e-mail uitgenodigd om deel te nemen. Op de vergadering is Jan Wiegerinck afgetreden als voorzitter. Barry Koren is verkozen tot zijn opvolger. Nieuw toegetreden tot het bestuur is Willem Jan Palenstijn (CWI).

❑ Mathematics without Borders

Op 20 september is het precies honderd jaar geleden dat de International Mathematical Union (IMU) werd opgericht in Straatsburg. Dit wordt gevierd met een tweedaags congres op 28 en 29 september in Straatsburg, getiteld 'Mathematics without Borders – The Centennial of the International Mathematical Union'. Voor meer informatie zie mathunion.org.

Recent verschenen:

❑ Epsilon Uitgaven (www.epsilon-uitgaven.nl)

95. *Ruimte, tijd, materie – Hoe de moderne natuurkunde ons voorbij de intuïtie laat kijken*, Roel Andringa-Boxum, € 40, 2020.

Had Caruana voordeel tijdens het TATA Steel Schaaktoernooi?

In februari schaken jaarlijks de beste schakers ter wereld tegen elkaar tijdens het TATA Steel Schaaktoernooi in Wijk aan Zee. Ook Magnus Carlsen, de huidige nummer 1 van de wereld, en Fabiano Caruana, de nummer 2 van de wereld, namen dit jaar deel aan het toernooi. De titel ging naar Caruana, die in totaal zeven van de dertien wedstrijden won en geen enkele verloor. Hoewel Caruana natuurlijk een fantastische prestatie leverde, maakte een wiskundig onderzoek van de TU/e duidelijk dat Caruana voordeel had bij het schema van de wedstrijd. Dit kwam door de zogeheten hoge *carry-over effect value* (COE-value) van het wedstrijdprogramma. De TU/e onderzoekers vonden ook een methode voor een eerlijker wedstrijdprogramma met gebruik van integer programming.

networkpages.nl

Casper Albers

Psychometrie & Statistiek
Rijksuniversiteit Groningen
c.j.albers@rug.nl



Column Casper grijpt een kans

Coronastatistiek

Sinds het begin van de coronacrisis, vliegen de statistieken en grafieken ons om de oren. Casper Albers bekijkt enkele epidemiologische modellen en benoemt de mogelijkheden én limitaties die statistiek in deze crisis kan bieden.

Als een vlinder met haar vleugels klapt in Brazilië, veroorzaakt zij een tornado in Texas. Deze zin — en vele variaties daarop — beschrijven het vlindereffect. Dit effect beschrijft hoe bij (deterministische) niet-lineaire systemen microscopisch kleine verschillen in de beginvoorwaarden kunnen leiden tot gigantische verschillen in een later stadium. Hetzelfde geldt, in grote lijnen, ook voor complexe stochastische systemen waar een klein verschil in parameterwaarden uiteindelijk tot gigantische verschillen kunnen leiden.

Dit is natuurlijk enorm relevant bij de huidige coronacrisis. Op 15 april legde de Duitse bondskanselier Merkel dit duidelijk uit: als de reproductiefactor R (het gemiddeld aantal personen dat een ziek iemand besmet) 1,1 is, dan zou Duitsland pas in oktober de grenzen van de zorgcapaciteit bereiken. Bij een reproductiefactor die 1,2 is (dus slechts 0,1 hoger) is die grens al drie maanden eerder in zicht.

Die redenatie gaat uit van exponentiële groei: de eerste geïnfecteerde besmet R personen, die besmetten elk ook weer R personen zodat je met R^2 besmettingen zit en na t stappen heb je R^t besmettingen. In een blad voor wiskundigen hoef ik verder niet uit te leggen hoe dat explodeert; en ook hoe dat snel tot onrealistische voorspellingen leidt: bij een populatiegrootte N heb je na $\log(N)/\log(R)$ stappen meer voorspelde besmettingen dan dat er personen zijn. Voor een Nederlandse bevolking van een kleine 18 miljoen inwoners en $R \approx 2,5$, zit je daar binnen 16 stappen al. Zo'n exponentieel model is dus enkel geschikt om de beginfase van de pandemie te modelleren. Maar zelfs daar gaat exponentiële groei te snel. Een besmet iemand kan zijn/haar partner infecteren, maar deze kan vervolgens niet zijn/haar partner infecteren: die is

al besmet. Omdat de meeste mensen doorgaans toch met betrekkelijk weinig anderen in aanraking komen, en voornamelijk steeds dezelfde — gezin, collega's, burens, enzovoort — vlakt de groei al snel af.

Voor die beginfase van de groei zijn er honderden verschillende wiskundige modellen. Deze modellen zijn ontwikkeld naar aanleiding van andere epidemieën, zoals ebola en hiv/aids, en de onderliggende ideeën zijn ook bruikbaar voor COVID-19. De manier hoe er in de modellen wiskunde wordt bedreven, de ene keer via deterministische differentiaalmodellen en de andere keer juist via stochastische modellen, laat goed zien hoe multidisciplinair dit vakgebied is. Voor wie meer wilt weten: Chowell en collega's [2] hebben recent een toegankelijk overzichtsartikel over epidemiologische groeimodellen geschreven. Een algemener achtergrondswerk, met ook de nodige informatie over de wiskundige modellen, is het boek van Anderson en May [1].

Gegeneraliseerd groeimodel

Veel modellen zijn een submodel of variant van het *generalized growth model* [4]:

$$\frac{dC(t)}{dt} = rC(t)^p.$$

Hier is $C(t)$ het cumulatief aantal besmettingen tot aan tijd t en de afgeleide $dC(t)/dt$ de incidentie; $r > 0$ beschrijft de groeisnelheid en $p \in [0, 1]$ beschrijft de zogenaamde groeivertraging. Als $p = 0$ hebben we lineaire groei en als $p = 1$ het exponentiële groeimodel dat al in 1798 door Thomas Maltus beschreven werd. Als $0 < p < 1$ dan is er sprake van sub-exponentiële groei en kan het model herschreven worden tot een polynomiaal groeimodel met groeifactor $1/(1-p)$ [2, 4].

Dat de groeifactor langzaam afremt is iets dat ook bij de huidige corona-ontwikkelingen te zien is — en ook al te zien was voor-

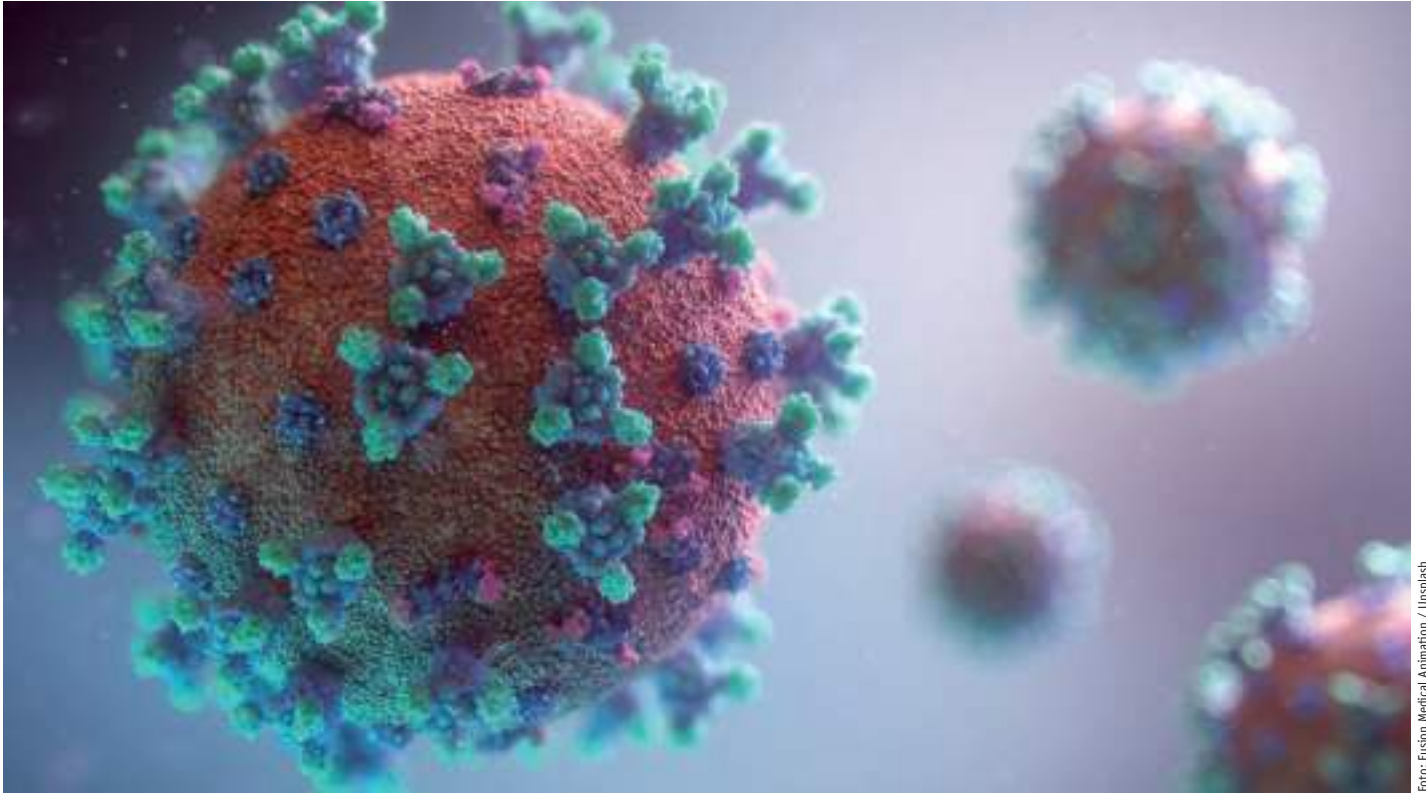


Foto: Fusion Medical Animation / Unsplash

dat de afname toe te schrijven kon zijn aan de lockdown(achtige) maatregelen die in verschillende landen genomen zijn: zelfs in de beginfase is de groei lager dan dat van een puur exponentieel groeimodel.

Het elegante van het gegeneraliseerde groeimodel is dat het een (relatief) eenvoudig en elegant model is. Die eenvoud is tegelijkertijd haar achilleshiel: als je de complexe werkelijkheid wilt beschrijven met een te eenvoudig model, sla je de plank al snel mis.

Het standaard SIR-model

Een stap ingewikkelder dan het gegeneraliseerde groeimodel is het SIR-model, wat de afkorting is van *Susceptible* ('vatbaar'), *Infected* ('geïnfecteerd'), *Recovered* ('hersteld'). In dit model, wordt de gehele populatie opgedeeld in deze drie categorieën (de 'recovered' categorie bevat zowel degenen die genezen zijn als de overledenen; beiden kunnen geen anderen meer besmetten), middels notatie $S(t)$, $I(t)$ en $R(t)$ voor het aantal personen in deze categorieën op tijdstip t . Het meest eenvoudige SIR-model neemt aan dat de totale populatiegrootte, $N = S(t) + I(t) + R(t)$, constant is en dat de overgangskansen van $S \rightarrow I$ en $I \rightarrow R$ dat ook zijn. Dan is het model te schrijven in drie differentiaalvergelijkingen:

$$\begin{aligned}\frac{dS(t)}{dt} &= -\beta \frac{S(t)I(t)}{N}, \\ \frac{dI(t)}{dt} &= \beta \frac{S(t)I(t)}{N} - \gamma I(t), \\ \frac{dR(t)}{dt} &= \gamma I(t).\end{aligned}$$

Met β wordt de overgang van vatbaar naar geïnfecteerd gemodelleerd; β is het product van het gemiddeld aantal contacten dat iemand op een bepaald tijdstip heeft en de kans van overdracht

van de ziekte bij contact. Met γ wordt de overgang van geïnfecteerd naar niet meer geïnfecteerd (= weer gezond + overleden) gemeten. Deze β en γ samen leiden tot het beroemde reproductiegetal R_0 dat de mediaberichten domineert:

$$R_0 = \beta/\gamma.$$

Als $R > 1$, dan is er sprake van een epidemie.

Ook het SIR-model is natuurlijk te eenvoudig. Zo is N niet constant in de tijd — er worden mensen geboren en er sterven mensen aan andere oorzaken; en zijn β en γ ook niet constant (zeker wanneer er lockdown-maatregelen zijn zal β dalen, en bij betere medische behandeling zal γ stijgen). Daarnaast sluit dit model uit dat herstelde personen nogmaals ziek worden ($R \rightarrow S$ is uitgesloten).

Wellicht het grootste gebrek van dit model is dat het aanneemt dat het ziekteverloop bij iedereen identiek is. R_0 wordt bij corona geschat op ongeveer 2,5, wat betekent dat elke besmette persoon *gemiddeld* 2,5 anderen besmet. Echter, helemaal niemand besmet 2,5 anderen, simpelweg omdat aantallen integers moeten zijn. De ene zit het grootste deel van de week thuis en gaat alleen soms naar buiten voor een boodschap; terwijl de ander dagelijks een uur in de trein zit en vaak op feestjes komt (dit wordt contactheterogeniteit genoemd). Ook de incubatieduur is niet voor iedereen gelijk en een aantal andere factoren ook niet. Er is dus een model nodig dat met individuele verschillen om kan gaan. En dan biedt de statistiek uitstekende mogelijkheden.

Het stochastische SEIR-model

Een interessante uitbreiding van het SIR-model is het SEIR-model: de categorie *Exposed* ('blootgesteld') wordt toegevoegd. Er is bij veel infecties, waaronder corona, namelijk een incubatieperiode waarin men al wel is blootgesteld maar nog niet besmettelijk is.

Middels een extra differentiaalvergelijking kan je het $S \rightarrow E \rightarrow I \rightarrow R$ -proces beschrijven en dan heb je een model dat zeer vergelijkbaar is met het SIR-model. Het kan echter ook via stochastische vergelijkingen, zoals Lekone en Finkenstädt [3] laten zien.

Het aantal vatbare personen op dag $t+1$ is het aantal vatbare personen op dag t , minus het aantal nieuwe besmettingen op dag t : $S(t+1) = S(t) - B(t)$. Het aantal blootgestelde personen stijgt dagelijks met die $B(t)$ en daalt met $C(t)$, het aantal besmette personen dat overgaat naar de geïnfecteerde categorie. Het aantal geïnfecteerden stijgt dagelijks met die $C(t)$ en daalt met $D(t)$, het aantal overgangen naar de restcategorie $R(t)$. Ook dit model neemt aan dat N constant is in de tijd.

De dagelijkse aantallen $B(t)$, $C(t)$ en $D(t)$ worden gemodelleerd via binomiale verdelingen:

$$\begin{aligned} B(t) &\sim \text{Bin}(S(t), P(t)), \\ C(t) &\sim \text{Bin}(E(t), p_C), \\ D(t) &\sim \text{Bin}(I(t), p_R). \end{aligned}$$

Hierbij is de kans $P(t)$ tijdsafhankelijk,

$$P(t) = 1 - \exp\left(-\beta(t) \frac{I(t)}{N}\right)$$

en de andere twee kansen niet,

$$p_C = 1 - \exp(-\rho), \quad p_R = 1 - \exp(-\gamma).$$

Oftewel, $\beta(t)$ kan gezien worden als de tijdsafhankelijke overdrachtssnelheid, $1/\rho$ de gemiddelde incubatieduur en $1/\gamma$ de gemiddelde lengte van infectie. Deze kansen zijn een logisch gevolg van de aanname dat de duur van verblijf in een van de compartimenten exponentieel verdeeld is. Het fijne van exponentiële verdelingen is dat deze compleet worden vastgelegd door hun gemiddelde: hoewel je dus maar één parameter gebruikt, bied je toch de mogelijkheid om individuele verschillen te erkennen in je model.

Door $\beta(t)$ tijdsafhankelijk te maken, kan je het in het model verwerken als er maatregelen om overdracht tegen te gaan genomen worden. De beroemde R_0 is daardoor ook tijdsafhankelijk:

$$R_0(t) = \frac{\beta(t)}{\gamma} \frac{S(t)}{N} \approx \frac{\beta(t)}{\gamma}$$

(de stap met $\approx$ volgt uit dat $S(t) \approx N$ in de beginfase van elke epidemie). Middels simulatiestudies laten [3] zien dat dit model vrij accuraat de parameters van het model, inclusief R_0 kan schatten,

zelfs wanneer er betrekkelijk weinig data beschikbaar is. Tevens laten de auteurs hun model los op een aantal ebola-datasets. Omdat statistische methodologie wordt gebruikt, worden alle schattingen automatisch vergezeld van onzekerheidsmarges. Dergelijke modellen kunnen dus zeer bruikbaar zijn om zowel het verloop van de ziekte en het (vermoede) effect van maatregelen te schatten, alsmede om aan te geven hoe nauwkeurig de schattingen zijn.

Statistische beschouwingen

Zoals George Box al zei: “All models are wrong (but some models are useful).” Het grote probleem dat coronamodellen onderscheidt van andere takken van statistisch modelleren is dat als er nu fouten gemaakt worden er direct doden vallen. Maar eerst afwachten totdat we een beter model en meer en betere data hebben is nóg dodelijker.

Vanzelfsprekend zijn er nog meer complicaties te bedenken die om een ingewikkelder model schreeuwen. Iemand uit Uden zal niet zo snel iemand uit Appingedam infecteren, simpelweg omdat er maar weinig mensen vanuit Uden naar Appingedam, en vice versa, gaan; en modellen die toegerust zijn met een spatiale component kunnen hiermee omgaan. Daarnaast: het is onmogelijk om voor iedereen te meten of zij in de S-, E-, I- of R-groep behoren (zouden we dit wel makkelijk kunnen meten, dan konden we korte metten met het virus maken). Zelfs het aantal overledenen door corona is niet exact, en zelfs niet met een marge van kleiner dan circa 25%, vast te stellen. Dit, gecombineerd met het feit dat we nu nog steeds slechts enkele maanden aan dagelijkse metingen hebben, zorgt er voor dat het gewoon onmogelijk is om bepaalde zaken nauwkeurig te schatten.

Hier komt bovenop dat we het model loslaten op de werkelijkheid en niet op een mooi opgezette *randomised controlled trial*. Mocht straks het aantal infecties stijgen, dan is het — op basis van statistiek — onmogelijk om te stellen dat dit komt door de heropening van de basisscholen of die van de kappers: beiden vonden ongeveer tegelijk plaats en het is niet mogelijk hun effecten los te meten.

Het is dus zaak om de statistiek en wiskunde in deze geen grotere rol te geven dan welke zij verdiend: die van hulpwetenschap. Daadwerkelijk zinnige interpretaties zijn niet puur *data driven* te trekken; je ontkomt er niet aan om de cijfers in de juiste virologische, epidemiologische en sociale context te plaatsen. De coronacrisis is één grote schreeuw om meer interdisciplinaire wetenschap.

Referenties

- 1 R. M. Anderson en R. M. May, *Infectious Diseases of Humans: Dynamics and Control*. Oxford University Press, 1991.
- 2 G. Chowell, L. Sattenspiel, S. Bansal en C. Viboud, Mathematical models to characterize early epidemic growth: A review, *Physics of Life Reviews* 18 (2016), 66–97.
- 3 P. E. Lekone en B. F. Finkenstädt, Statistical inference in a stochastic epidemic SEIR model with control intervention: Ebola as a case study, *Biometrics* 62 (2006), 1170–1177.
- 4 C. Viboud, L. Simonsen en G. Chowell A generalized-growth model to characterize the early ascending phase of infectious disease outbreaks, *Epidemics* 15 (2016), 27–37.

Steven Abrams^{a,b}, Pietro Coletti^a, Christel Faes^a, Tapiwa Ganyani^a, Sereina Herzog^c, Cécile Kremer^a, Elise Kuylen^c, Pieter Libin^a, Signe Mogelmose^a, Oana Petrof^a, Sarah Vercruysse^a, James Wambua^a, Lander Willem^c, Philippe Beutels^c, Niel Hens^{a,c}

^a Data Science Institute, I-BioStat, Universiteit Hasselt

^b Global Health Institute, Department of Epidemiology and Social Medicine, Universiteit Antwerpen

^c Centre for Health Economics Research and Modelling Infectious Diseases, Vaxinfectio, Universiteit Antwerpen

steven.abrams@uhasselt.be, steven.abrams@uantwerpen.be

Onderzoek

Hoe mens en wiskunde hand in hand het coronatijdperk kleuren

Voor de liefhebbers van wiskunde en statistiek biedt de dagelijkse rapportering over de COVID-19 ziektecijfers en het (over)aanbod van voorspellingen, al dan niet door experts ter zake, stof tot nadenken. Maar ook wie wiskunde en statistiek doorgaans als iets abstracts beschouwt, als iets ver van zijn of haar bed, zit er eigenlijk midden in. Elke voorspelling in de vorm van een cijfer, gaat immers over een zoon, dochter, man, vrouw, opa, oma, buurman, beste vriend(in),... die getroffen werd door of genezen is van COVID-19. Omgekeerd bepaalt ons gedrag mee hoeveel kans het virus krijgt om zich te verspreiden in de bevolking, en bepalen we met z'n allen hoe de cijfers eruitzien nu en in de toekomst. Met andere woorden: wij allen zijn en drijven de cijfers. Het SIMID-team, een samenwerking van onderzoekers van de Universiteit Antwerpen en Universiteit Hasselt, adviseert beleidsmakers over de gevolgen van coronamaatregelen en exitstrategieën.

De SARS-CoV-2/COVID-19-pandemie startte in Wuhan, China waarbij de eerste patiënten ernstige ademhalingsproblemen vertoonden door een zware longontsteking tussen 8 december 2019 en 2 januari 2020. Nadat gevallen werden gerapporteerd in Wuhan verspreidde deze ziekte zich over heel de wereld en werd deze epidemie officieel een pandemie genoemd op 11 maart 2020. In verschillende landen, waaronder België, werken sindsdien onder anderen wiskundigen, (bio)statistici, epidemiologen, virologen, zorgverleners en beleidsmakers aan een oplossing voor deze ernstige gezondheids crisis.

Zo helpen wiskundige en statistische modellen om inschattingen en voorspellingen te maken van belangrijke epidemiologische uitkomsten zoals het aantal

besmette gevallen, het aantal ziekenhuisopnames en opnames op intensive cares of het aantal sterfgevallen [8]. Deze inschattingen en voorspellingen worden volgens verschillende scenario's berekend, en helpen onderzoekers zoals deze in het inter-universitaire SIMID-team (Universiteit Antwerpen en Universiteit Hasselt, België) om advies te verlenen aan beleidsmakers over de gevolgen van maatregelen of exitstrategieën. Dit advies is vaak gebaseerd op inzichten vanuit verschillende modellen want elk model heeft zijn sterktes en zwaktes. Er bestaat dus niet zoiets als 'hét juiste of beste ziektevoorspellingsmodel'. Elk model geeft een stukje van de puzzel weer.

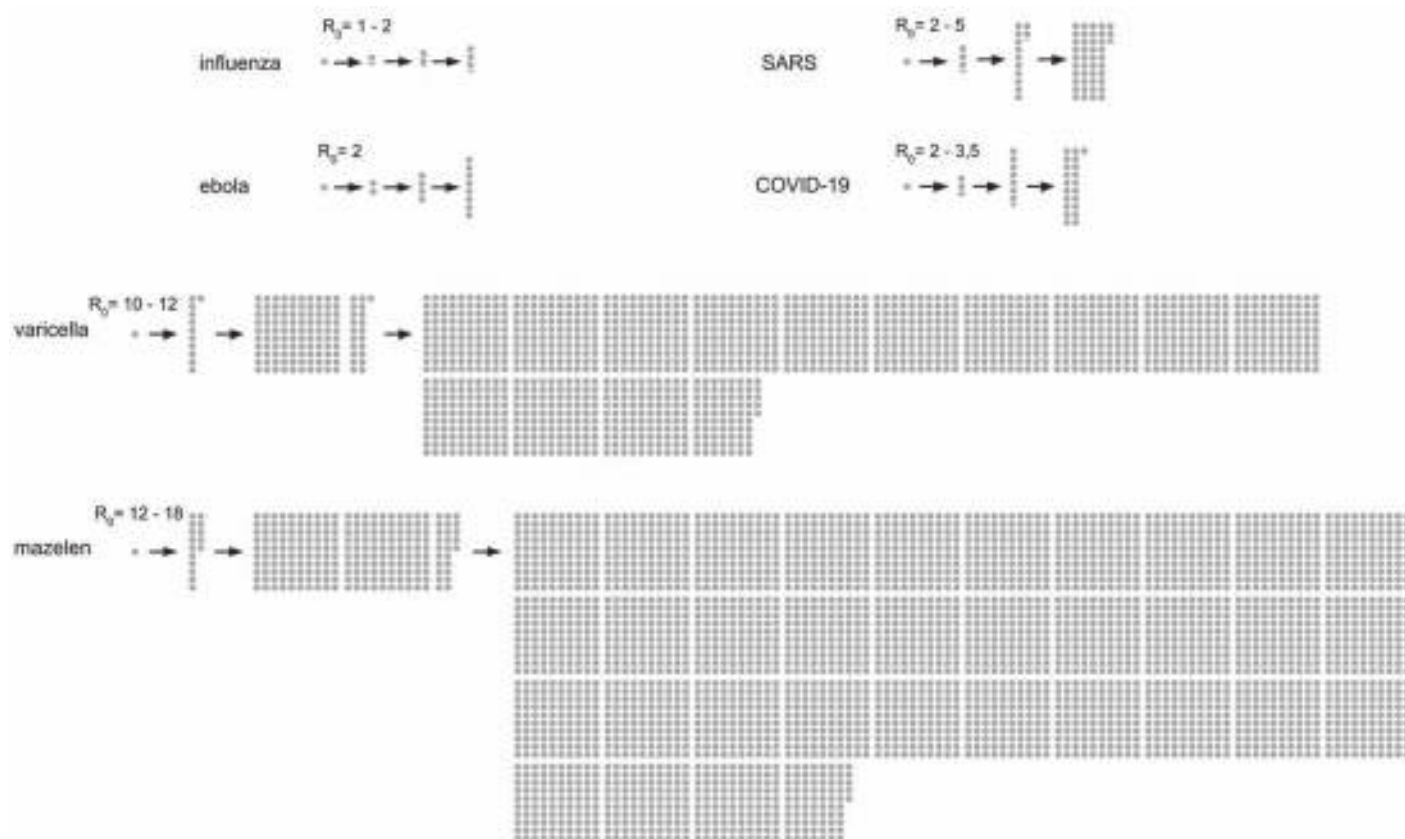
In dit artikel lichten we beknopt toe hoe elk van deze modellen verschillende aspecten van onszelf (als individu en als

groep) en van ons gedrag opneemt. We geven hierbij ook de nodige wiskundige onderbouwing, en leggen uit welke onderliggende veronderstellingen of keuzes gemaakt worden. We zien dit niet als een uitputtende lijst van mogelijke modellen of modelvarianten die in de strijd tegen het COVID-19-virus gebruikt kunnen worden, maar als een smaakmaker waarna u meer diepgaande literatuur kan raadplegen.

Belangrijke epidemiologische parameters

Allereerst definiëren we een aantal belangrijke epidemiologische parameters die de besmettelijkheid van een virus en het karakter en de kracht van een epidemie uitdrukken:

- Het basis-reproductiegetal R_0 is het gemiddeld aantal personen die een 'typische' geïnfecteerde persoon besmet gedurende zijn/haar hele besmettelijke periode in een volledig vatbare populatie (met andere woorden zonder bestaande immuniteit ten gevolge van vaccinatie of eerdere circulatie van het pathogeen). Hoe hoger R_0 , zoals bijvoorbeeld bij mazelen of varicella (zie Figuur 1), hoe sneller het virus zich verspreidt in een situatie waarin de hele bevolking vatbaar is.



Figuur 1 Illustratie van het basis reproductiegetal van een aantal gekende infectieziekten (varicella is de naam van het virus dat windpokken/waterpokken veroorzaakt).

- Het effectieve reproductiegetal R is het gemiddeld aantal personen die een ‘typische’ geïnfecteerde persoon besmet gedurende zijn/haar hele besmettelijke periode in een populatie waarin reeds gedeeltelijke immuniteit is opgebouwd. Een effectief reproductiegetal groter dan 1 impliceert dat na (her-)introduktie van het pathogeen in de populatie een uitbraak zal plaatsvinden, terwijl een effectief reproductiegetal kleiner dan deze grenswaarde ervoor zorgt dat het pathogeen zich niet uitvoerig kan verspreiden.
- De infectiedruk $\lambda(t)$ geeft aan hoe snel een vatbaar persoon de ziekte krijgt op tijdstip t . Typisch hangt de infectiedruk af van kalendertijd en/of karakteristieken van de vatbare persoon, zoals bijvoorbeeld zijn/haar leeftijd. Een grotere infectiedruk zorgt, samen met andere beïnvloedende factoren, voor een grotere waarde van het effectief reproductiegetal.
- Het seriële interval is de tijd tussen het begin van de symptomen bij persoon B ten opzichte van het ontstaan van symptomen bij besmetter A (zie Figuur 2).

- Het generatie-interval is de tijd tussen twee gekoppelde besmettingen (zie Figuur 2).

Groeimodellen

Groeimodellen helpen om trends op te pikken in ziektecijfers zoals het aantal ziekenhuisopnames dat dagelijks gerapporteerd wordt. Zien we een stijgende lijn, naderen we een piek of plateau of zijn we zo’n piek gepasseerd? Groeimodellen zijn vooral data-gedreven, dat wil zeggen, ze laten vooral de gegevens spreken zonder al te veel structuur op te leggen. In het slechtst denkbare scenario zou de stijging in het

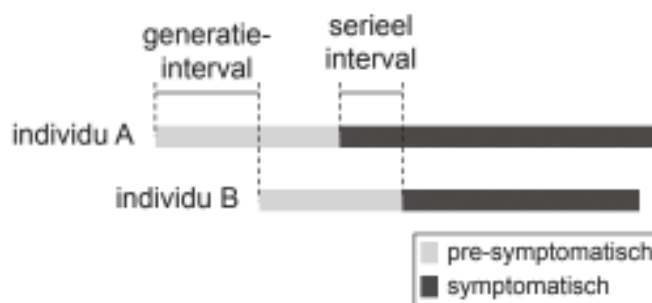
aantal ziekenhuisopnames ten gevolge van COVID-19 een exponentiële groei kennen:

$$\mu(t) = \alpha \exp(pt)$$

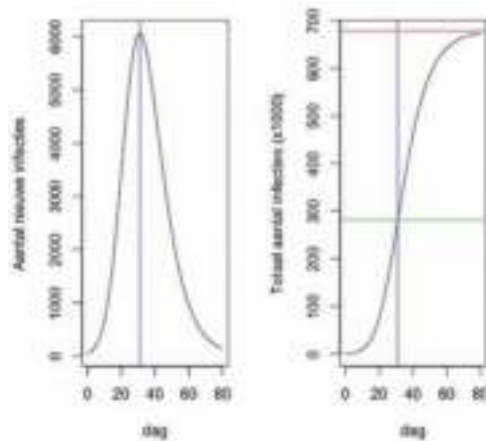
met p de groeisnelheid en α een parameter gerelateerd aan het initieel aantal gevallen. Een logistische groei zou echter betekenen dat er een plafond in zicht is [11]:

$$\mu(t) = \frac{\alpha k}{a + (k - \alpha) \exp(-pt)},$$

waarin p de initiële groeisnelheid is en k het aantal nieuwe gevallen wanneer het plafond bereikt is. De parameter α is opnieuw gerelateerd aan het initieel aantal gevallen.



Figuur 2 Illustratie van het verschil tussen het seriële interval en het generatie-interval.



Figuur 3 Richards groeimodel met aantal nieuwe infecties (links) en cumulatief aantal infecties (rechts). De blauwe lijn toont de dag van maximale groei in het totaal aantal (dag = η); de rode lijn toont het totale aantal op het einde van de uitbraak (k); de groene lijn toont het totale aantal op de piek van de uitbraak.

Het meest realistische scenario voor België wordt op dit moment beschreven aan de hand van de gegeneraliseerde logistische groeicurve van Richards (zie Figuur 3) [10] die de evolutie in de cijfers (bijvoorbeeld het aantal ziekenhuisopnames per dag) ook na het bereiken van de piek kan opnemen:

$$\mu(t) = p\mu^R(t) \left(1 - \left(\frac{\mu^R(t)}{k}\right)^\alpha\right)$$

met

$$\mu^R(t) = \frac{k}{[1 + \alpha \exp(-p(t - \eta))]^{1/\alpha}}.$$

Dit model is asymmetrisch, en laat dus toe dat de stijging sneller gebeurt dan de daling.

Zoals in het logistische model, is de parameter p gerelateerd aan de groeisnelheid en α aan het initieel aantal gevallen. De parameter η stelt de maximale groei voor tijdens de uitbraak en k geeft het totaal aantal gevallen op het einde van de uitbraak.

Met deze groeimodellen kunnen we voorspellingen maken tot vijf dagen verder in de tijd en inschatten hoe de groeifactor verandert door de tijd heen. Groeimodellen of statistische (niet-mechanistische) modellen kunnen niet gebruikt worden voor langere-termijnvoorspellingen, of voor het inschatten van de gevolgen van interventies op het verloop van de curve. Nochtans blijkt het gezien de huidige COVID-19-pandemie in sommige politieke kringen verleidelijk om net dit soort statistisch gefitte modellen aan te wenden om beleidsbeslissingen op langere termijn te onderbouwen of motiveren. Beruchte voorbeelden hiervan zijn het IHME-model [7], en het andere

Witte Huis-model [13], beiden in de Verenigde Staten.

Transmissiebomen

Transmissiebomen proberen de aaneenschakeling van besmettingen tussen personen in kaart te brengen, als nieuwe takjes die aan een boom groeien. Om te weten waar een nieuwe besmetting vandaan komt, kan je kijken naar de genetische gelijkenis van het virus waarmee personen besmet zijn of gebruik maken van *contact tracing*. Contact tracing voor COVID-19 werd vooral in het begin van de epidemie toegepast om te monitoren door wie of in welke regio iemand een besmetting had opgelopen en deze strategie kan helpen om in een latere fase, als onderdeel van een exit-strategie waarin lockdown-maatregelen worden versoepeld, nieuwe opflakeringen sneller en bij de bron in de kiem te smoren.

Transmissiebomen dienen niet om met een beschuldigende vinger te wijzen naar personen die het virus mogelijk hebben doorgegeven, maar kunnen helpen om het seriële interval en het generatieinterval [9] te schatten door rekening te houden met transmissielinken in koppels van besmettende en besmette personen:

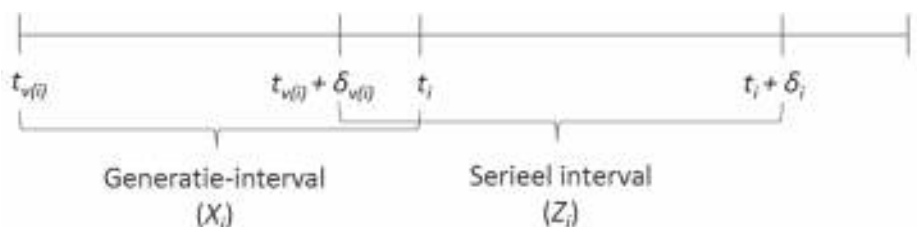
$$\begin{aligned} Z_i &= (t_i + \delta_i) - (t_{v(i)} + \delta_{v(i)}) \\ &= (t_i - t_{v(i)}) + (\delta_i - \delta_{v(i)}) \\ &= X_i + Y_i, \end{aligned}$$

waarbij X_i het generatieinterval is (dat is $t_i - t_{v(i)}$), Y_i het verschil in incubatietijd (dat is $\delta_i - \delta_{v(i)}$), en Z_i het seriële interval (zie Figuur 4).

Met de informatie uit contact tracing kunnen we voor elk ‘koppel’ een (of meerdere) persoon $v(i)$ aanduiden als (mogelijke) besmetter van persoon i , en zo een gemiddelde waarde voor het seriële en generatie-interval verkrijgen. Dit zijn belangrijke parameters, omdat ze weergeven hoe snel de ziekte zich verspreidt. Een belangrijk verschil tussen het seriële en het generatie-interval is de variantie, welke groter is voor het seriële interval [3]. Wanneer we dus gebruikmaken van het seriële interval (als proxy voor het generatie-interval) voor het schatten van het effectieve reproductiegetal R , zal dit een vertekend beeld geven vanwege de variantie die hierin een rol speelt:

$$R = e^{r\mu - \frac{1}{2}r^2\sigma^2}.$$

met r de groeisnelheid, μ het gemiddelde generatie-interval, en σ^2 de variantie van het generatie-interval. Gebruikmakend van gegevens over de COVID-19-epidemie in China en Singapore, toonde het SIMID-team in samenwerking met onderzoekers uit Nederland [4] aan dat inschatten van het effectieve reproductiegetal R op basis van het generatie-interval hoger liggen dan wanneer deze op het seriële interval gebaseerd zijn. Bovendien toonden we aan dat presymptomatische transmissie mogelijk is. Dit zijn belangrijke inzichten aangezien adviezen voor het nemen of afbouwen van maatregelen op een zo juist mogelijke schatting van R moeten worden gebaseerd en rekening moeten houden met verschillende transmissiefases. Om presymptomatische verspreiding tegen te gaan, blijft het bewaren van een sociale afstand essentieel.



Figuur 4 Relatie tussen het seriële interval en het generatie-interval.



Figuur 5 Schematisch overzicht van een compartimenteel SEIR-model waarbij personen bewegen van (1) vatbaar (S) naar blootgesteld (E) met snelheid $\lambda(t)$, van (2) blootgesteld (E) naar besmettelijk (I) met snelheid γ en van (3) besmettelijk (I) naar hersteld (R) met snelheid σ .

Het compartimenteel transmissiemodel

Compartimentele transmissiemodellen kunnen worden gebruikt om de ziekteverspreiding van COVID-19 te modelleren [1, 5, 6]. Een compartimenteel model deelt de populatie op in verschillende subpopulaties (of compartimenten) waartussen mensen bewegen (zie Figuur 5).

Deze complexe flows worden beschreven aan de hand van een systeem van differentiaalvergelijkingen: één differentiaalvergelijking per groep van vatbare, blootgestelde, besmette of genezen personen om precies te zijn (of voor elk van de mogelijke componenten gespecificeerd in het onderliggend model). Het volgende systeem beschrijft de dynamiek in een zogeheten S (susceptible)- E (exposed)- I (infected)- R (recovered) mathematisch model:

$$\frac{dS(t)}{dt} = -\lambda(t)S(t),$$

$$\frac{dE(t)}{dt} = \lambda(t)S(t) - \gamma E(t),$$

$$\frac{dI(t)}{dt} = \gamma E(t) - \sigma I(t),$$

$$\frac{dR(t)}{dt} = \sigma I(t),$$

waarbij $S(t)$, $E(t)$, $I(t)$ en $R(t)$ het aantal vatbare, blootgestelde (en dus besmet maar nog niet besmettelijk), besmettelijke en herstelde personen voorstelt op tijdstip t en de model-parameters γ en σ de instantane kans aangeven om op dat tijdstip besmettelijk te worden na blootstelling of om te herstellen per tijdseenheid. De tijdsafhankelijke infectiedruk $\lambda(t)$ geeft aan hoe snel een vatbaar persoon de ziekte krijgt en is van cruciaal belang voor de bepaling van onder andere R_0 . Een grotere infectiedruk impliceert immers dat het gemiddeld aantal personen besmet door een 'typische' geïnfecteerde persoon gedurende diens hele besmettelijke periode groter zal zijn. Met andere woorden $\lambda(t)$ hangt af van het aantal geïnfecteerde personen op tijdstip t in de populatie alsook de kans op transmissie gegeven een contact tussen een geïnfecteerde en vatbare persoon.

Het aantal vatbare personen op een tijdstip t in de populatie kan worden gebruikt om de prevalentie van de ziekte uit te drukken. Meer specifiek, op basis van de eerste differentiaalvergelijking, en onder de beginvoorwaarde dat $S(0) = N$, geldt dat

$$S(t) = N \exp\left(-\int_0^t \lambda(u) du\right).$$

De prevalentie op tijdstip t is dan gelijk aan $\pi(t) = 1 - S(t)$.

De compartimentele modellen die in de praktijk gebruikt worden om de verspreiding van COVID-19 in kaart te brengen zijn, omwille van verschillende redenen, complexer dan het hierboven beschreven SEIR-model. Naast het definiëren van een groep van blootgestelde personen, beschouwen we een pre-symptomatische fase waarin iemand besmettelijk kan zijn vooraleer zich symptomen ontwikkelen of alvorens een formele diagnose uitsluitsel geeft. Daarnaast houdt het model rekening met asymptomatische gevallen die eveneens bijdragen aan de verdere verspreiding van de ziekte zonder dat mensen op de hoogte zijn van het feit dat ze besmettelijk zijn. Spijtig genoeg sterven heel wat mensen aan deze nieuwe infectie, mogelijk na hospitalisatie (met isolatie), en dus zullen er compartimenten nodig zijn voor hospitalisatie en ziekte-specifieke mortaliteit.

Bovendien drukken de differentiaalvergelijkingen in het complexere model de beweging tussen groepen (de verschuiving van individuen van het ene naar het andere compartiment) uit in functie van zowel tijd (kalenderdag) als leeftijd. Het contactgedrag van mensen, de verdeling van het aantal mensen per leeftijdscategorie en leeftijd-specifieke mortaliteit worden in rekening gebracht om realistische en valide kortetermijnvoorspellingen te maken.

Tot slot werken we met een stochastische versie van het deterministische model om rekening te houden met de extra variabiliteit in het verspreidingsproces ten gevolge van onder andere interventie maatregelen.

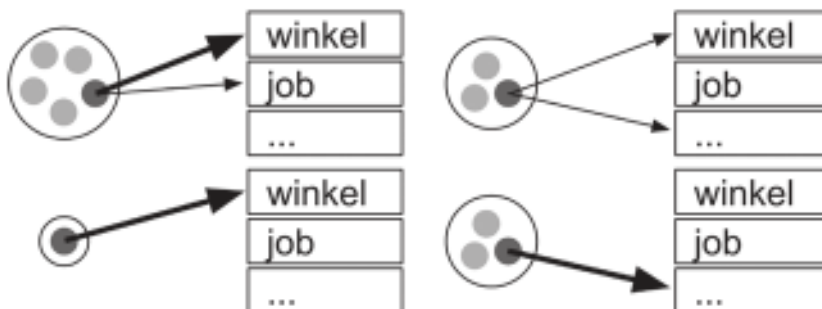
Het individu-gebaseerde model

Het individu-gebaseerd model (IBM) STRIDE simuleert de interactie tussen individuen die behoren tot huishoudens, werkplaatsen, schoolklassen en hun woonomgeving en laat in deze virtuele wereld het SARS-CoV-2-virus los. Aan de hand van accurate transmissie- en vatbaarheidsparameters zal het model een voorspelling geven van de dagelijkse evolutie van de epidemie hetgeen leidt tot het aantal leeftijdsspecifieke hospitalisaties dat we ook in het echte België dagelijks observeren. Op die manier slaagt STRIDE er goed in om de COVID-19-verspreiding in kaart te brengen en scenario's voor het versoepelen van maatregelen, de zogenaamde exit-strategieën te bestuderen.

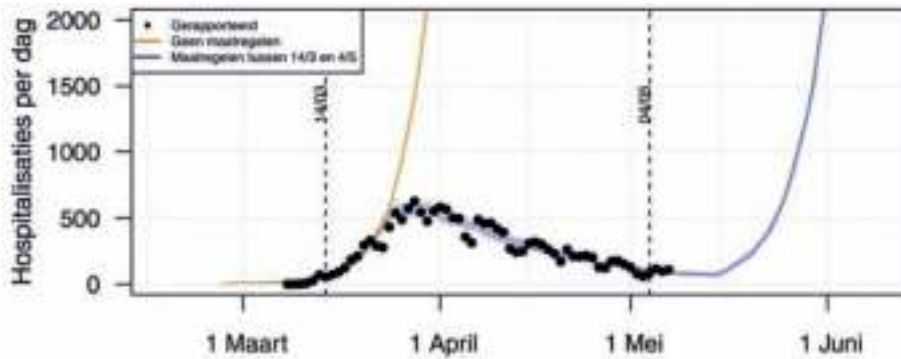
In een IBM wordt elk individu toegewezen aan een gezin, een schoolcategorie, een type werkplaats en een woonomgeving. Die toewijzing gebeurt op basis van beschikbare cijfers over schoolinschrijvingen en tewerkstelling (zie Figuur 6).

Het model bootst het gedrag van individuen na van dag tot dag en houdt rekening met natuurlijke veranderingen in gedrag tijdens weekdagen ten opzichte van weekenddagen en vakanties; maar ook met veranderingen door opgelegde maatregelen zoals het sluiten van scholen en verminderd sociaal contact [12].

In het onderzoek naar de gevolgen van exit-strategieën (bijvoorbeeld het heropenen van scholen en werkplaatsen), bekijken we ook hoe groot de meerwaarde van contact tracing kan zijn om nieuwe besmettingen te monitoren en tegen te gaan. Eén



Figuur 6 Illustratie van hoe in individu-gebaseerde modellen, individuen bekeken worden in hun eigen context. Bijvoorbeeld de grootte van hun gezin (in de figuur: een gezin met drie kinderen, een alleenstaande en twee gezinnen met twee kinderen), en hoe intens hun contacten zijn bijvoorbeeld in een winkel of op hun werk.



Figuur 7 Aantal gerapporteerde en volgens een IBM voorspelde ziekenhuisopnames.

ding is zeker: alle maatregelen in één keer loslaten, is geen goed idee want dan krijg je opnieuw een opflakking van het aantal besmettingen, het aantal personen dat hierdoor opgenomen wordt in het ziekenhuis alsook het aantal sterfgevallen ten gevolge van een COVID-19-infectie. Figuur 7 toont op een indrukwekkende manier hoe het aantal ziekenhuisopnames fors was toegenomen indien er in België geen maatregelen waren genomen op 14 maart 2020 of wanneer we ons vanaf 5 mei 2020 exact hadden gedragen zoals voor de pandemie.

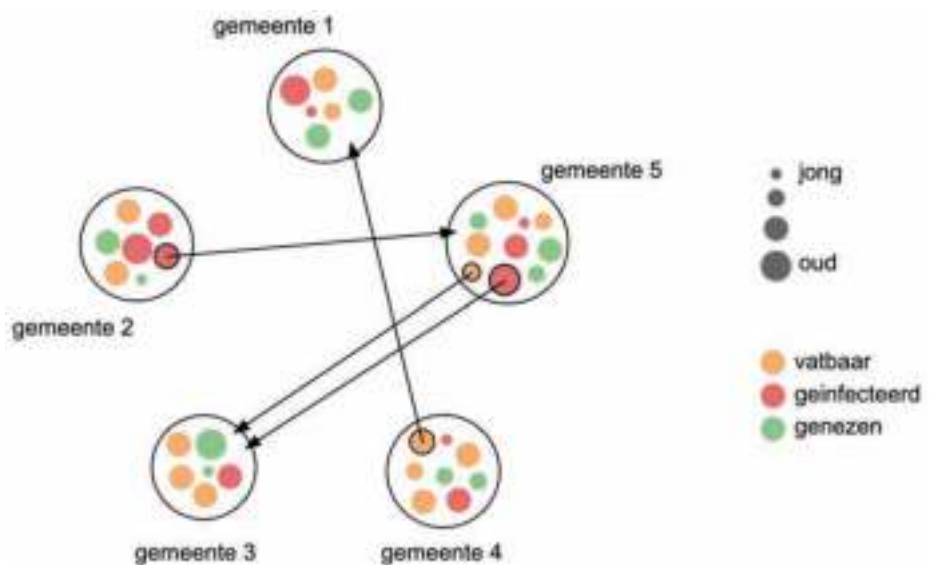
De verspreiding van het virus en verdere bewegingen van mensen door verschillende ziektestaten heen is in dit model, alsook in het stochastische compartimentele model (zie vorige paragraaf) en het metapopulatie model (zie volgende paragraaf), gebaseerd op kansberekening, bijvoorbeeld voor overdracht kijken we naar de kans dat een vatbare en een besmettelijke persoon elkaar tegenkomen én er een infectie plaatsvindt. De kans op contact is afhankelijk van de relatie die de personen tot elkaar hebben (huisgenoten, collega's, klasgenoten,...) en is gebaseerd op een dagboekstudie omtrent sociale contacten. De kans op overdracht herschalen we zodat het gemiddeld aantal besmettingen per geïnfecteerde persoon overeenkomt met het geobserveerde reproductiegetal. Door de kans op contact op bepaalde locaties te verminderen tijdens een 'lockdown' of terug te verhogen tijdens een 'exit', kunnen we de ziektelast inschatten wanneer bedrijven, winkels of scholen sluiten of weer openen.

Het metapopulatie model

Een metapopulatiemodel is een robuust model op grote schaal, dat toelaat de mobiliteit van mensen in rekening te brengen. Het deelt de bevolking op in groepen vol-

gens leeftijdscategorieën, woonplaats,... Iedere groep volgt een onderliggend wiskundig ziekte-verspreidingsmodel waarbij personen toegewezen worden aan subgroepen ('compartimenten') van (1) vatbare personen, (2) vatbare personen die in contact zijn gekomen met een besmette persoon, (3) besmette personen en (4) genezen personen die (tijdelijk) immuun zijn voor het virus (zie ook compartimentele modellen en Figuur 8).

Door interactie tussen deze groepen na te bootsen volgens verschillende scenario's (bijvoorbeeld veel of weinig contact met mensen buiten het gezin, of veel of weinig mobiliteit tussen gemeenten) kan men inschatten hoe het aantal mensen in de categorie van besmette personen verandert door middel van korte- en lange-termijnvoorspellingen.



Figuur 8 In een metapopulatiemodel worden individuen bekeken op het niveau van bijvoorbeeld de gemeente of een andere geografische eenheid. Er wordt vervolgens bekeken hoeveel mensen van een bepaalde gemeente vatbaar zijn of niet (bijvoorbeeld omdat ze al genezen zijn), wat hun leeftijden zijn, et cetera. Ook wordt er beschreven welke subgroepen van individuen zich bewegen tussen de verschillende gemeenten.

Belangrijke bronnen van informatie zijn het aantal en type van sociale contacten dat mensen in verschillende leeftijdsgroepen maken en het verplaatsingsgedrag van mensen tussen de verschillende regio's, evenals in welke mate de maatregelen een invloed hebben op dat gedrag (dit laatste wordt onder andere gedocumenteerd door de wekelijkse grote coronastudie [14]).

Een metapopulatie model (zie Figuur 9, aangepast op basis van [9]) wordt eveneens beschreven aan de hand van een systeem van differentiaalvergelijkingen, één voor elke 'patch' (woonplaats) i in het model:

$$\frac{dS_i(t)}{dt} = -\lambda(t)S_i(t) + \Omega_i^S,$$

$$\frac{dE_i(t)}{dt} = \lambda(t)S_i(t) - \gamma E_i(t) + \Omega_i^E,$$

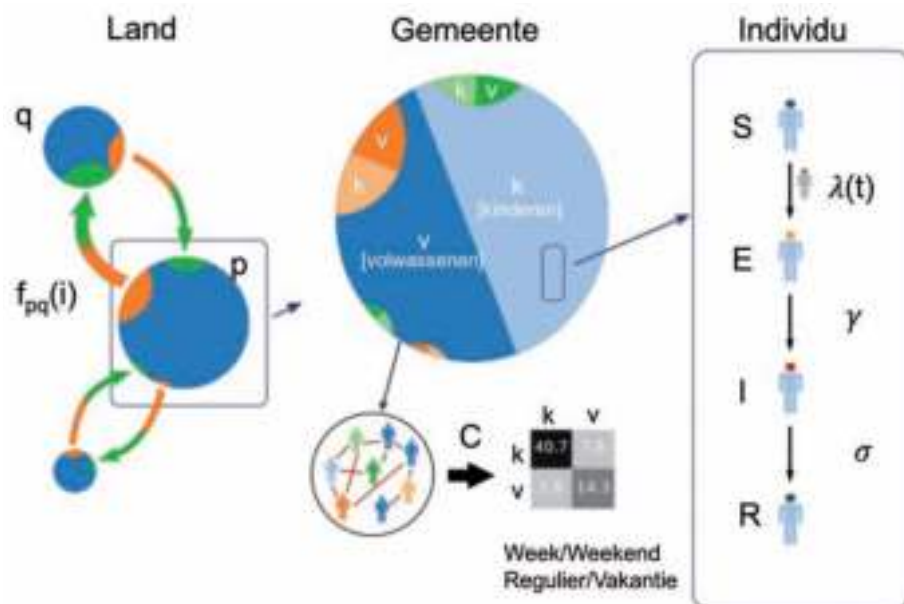
$$\frac{dI_i(t)}{dt} = \gamma E_i(t) - \sigma I_i(t) + \Omega_i^I,$$

$$\frac{dR_i(t)}{dt} = \sigma I_i(t) + \Omega_i^R,$$

waarbij $S_i(t)$, $E_i(t)$, $I_i(t)$, $R_i(t)$ dezelfde interpretatie hebben als voorheen, en Ω_i^S , Ω_i^E , Ω_i^I , Ω_i^R stellen de flux van individuen voor ten gevolge van mobiliteit. Elke term Ω_i^X heeft twee bijdragen:

$$\Omega_i^X = \omega_{in}^{X,i} - \omega_{out}^{X,i}$$

met $\omega_{in}^{X,i}$ de individuen in compartiment X die reizen naar patch i en $\omega_{out}^{X,i}$ individuen in compartiment X die patch i verlaten.



Figuur 9 Schematische voorstelling van het metapopulatiemodel gebaseerd op [9] met twee leeftijdsgroepen, te weten kinderen en volwassenen. Dit metapopulatiemodel bestaat uit drie lagen. Op het hoogste niveau wordt België gemodelleerd als een verzameling van patches (aangegeven met p en q), die overeenkomen met gemeenten. Deze gemeenten worden gekoppeld door middel van verkeer van personen $f_{pq}(i)$, dat plaatsvindt tussen patch (gemeente) p en q , van de i -de leeftijdsgroep. Binnen elke gemeente wordt de populatie opgedeeld in twee leeftijdsgroepen, kinderen (k) en volwassenen (v), waartussen er contacten plaatsvinden zoals gedefinieerd in de contactmatrix C . Individuen die in patch p wonen en individuen die naar deze patch p pendelen maken op hun beurt contacten. De figuur geeft als voorbeeld de contactmatrix (C) die overeenkomt met een gewone weekdag. De pendelfrequentie en de hoeveelheid contacten die plaatsvinden hangen af van het type dag (gewone werkdag versus vakantie, weekdag versus weekend). De COVID-19-ziekteprogressie wordt gemodelleerd door middel van een SEIR-compartmenteel model, waarbij $\lambda(t)$ aangeeft hoe snel iemand besmet raakt, γ bepaalt hoe snel na infectie individuen besmettelijk worden en σ bepaalt hoe snel het herstel plaatsvindt.

Slotbedenkingen

In dit artikel hebben we getracht om een kort overzicht te geven van verschillende modellen die momenteel worden gebruikt binnen het SIMID-team om de verspreiding van het COVID-19-virus in kaart te brengen en te evalueren wat de gevolgen zijn van interventie maatregelen in termen van aantal nieuwe hospitalisaties en sterftege-

vallen. Echter, dit overzicht is geen volledige opsomming van alle mathematische en statistische oefeningen die dezer dagen worden gemaakt, noch binnen het SIMID-team noch daarbuiten. Voor een meer gedetailleerd overzicht van de wetenschappelijke output gegenereerd door ons team, verwijzen we de lezer graag door naar de website www.simid.be.

Verschillende doelstellingen en onderzoeksvragen vereisen verschillende mathematische en statistische modellen, zoals hierboven vermeld, waarbij (kwaliteitsvolle) data uitermate belangrijk is om deze modellen te informeren en kalibreren. Op die manier trachten we tot realistische voorspellingen te komen die nodig zijn om het hoofd te bieden aan deze crisis zonder het gezondheidssysteem te overbelasten en de economische gevolgen te minimaliseren. Ook met betrekking tot de economische gevolgen doet het team onderzoek (zie website).

De wiskunde achter de gebruikte modellen is vaak complex maar het is stimulerend om elke dag opnieuw in een multidisciplinaire omgeving mee te helpen aan het overwinnen van deze coronacrisis. ☘

Dankwoord

De auteurs danken professor Jan Aerts (UHasselt) voor het voorzien van illustraties ter ondersteuning van de beschrijving van de modellen. De auteurs zijn dankbaar voor de financiering vanwege het Fonds Wetenschappelijk Onderzoek (FWO subsidienummer 1234620N, auteur LW), en het H2020 onderzoek- en innovatieprogramma van de Europese Unie (ERC TransMID-project met subsidienummer 682540, auteurs PC, SH, SM en NH en SC1-PHE-CORONAVIRUS-2020-project EpiPose met subsidienummer 101003688, auteurs PB, NH, PL). Het SIMID-team (www.simid.be) is een zeer interdisciplinair onderzoeksteam onder leiding van professor Niel Hens en professor Philippe Beutels. SIMID ontwikkelt methodologie en maakt toegepaste analyses om de verspreiding, controle en preventie van infectieziekten beter te begrijpen. De auteurs van dit artikel werken momenteel specifiek op het modelleren van COVID-19, maar danken ook alle andere SIMID-leden voor hun wetenschappelijke bijdragen.

Referenties

- 1 R.M. Anderson en R.M. May, *Infectious Diseases of Humans: Dynamics and Control*, Oxford University Press, 1991.
- 2 D.E. te Beest, J. Wallinga, T. Donker en M. Van Boven, Estimating the generation interval of influenza A (H1N1) in a range of social settings, *Epidemiology* 24(2) (2013), 244–250.
- 3 T. Britton en G. Scalia-Tomba, Estimation in emerging epidemics: biases and remedies, *Journal of The Royal Society Interface* 16(150) (2019), pii=20180670.
- 4 T. Ganyani, C. Kremer, D. Chen, A. Torneri, C. Faes, J. Wallinga en N. Hens, Estimating the generation interval for coronavirus disease (COVID-19) based on symptom onset data, *Eurosurveillance* 25(17) (2020), pii=2000257.
- 5 N. Hens, Z. Shkedy, M. Aerts, C. Faes, P. Van Damme en Ph. Beutels, *Modeling Infectious Disease Parameters Based on Serological and Social Contact Data: A Modern Statistical Perspective*, Springer, 2012.
- 6 L. Held, N. Hens, Ph. O'Neill en J. Wallinga, *Handbook of Infectious Disease Data Analysis*, Chapman & Hall/CRC, 2020.
- 7 N.P. Jewell, J.A. Lewnard, B.L. Jewell, Caution warranted: using the Institute for Health Metrics and Evaluation Model for Predicting the Course of the COVID-19 Pandemic, *Annals of Internal Medicine*, 2020.
- 8 M.J. Keeling en P. Rohani, *Modeling Infectious Diseases in Humans and Animals*, Princeton University Press, 2007.
- 9 G.D. Luca, K.V. Kerckhove, P. Coletti e.a., The impact of regular school closure on seasonal influenza epidemics: a data-driven spatial transmission model for Belgium, *BMC Infectious Diseases* 18 (2018), 29.
- 10 F.J. Richards, A flexible growth function for empirical use, *Journal of Experimental Botany* 10 (1959), 290–300.
- 11 P.F. Verhulst, Notice sur la loi que la population poursuit dans son accroissement, *Correspondance mathematique et physique* 10 (1838), 113–121.
- 12 L. Willem, F. Verelst, J. Bilcke e.a., Lessons from a decade of individual-based models for infectious disease transmission: a systematic review (2006-2015), *BMC Infectious Diseases* 17 (2017), 612.
- 13 <https://www.businessinsider.com/white-house-economic-adviser-hassett-model-coronavirus-deaths-zero-10-days-2020-5?r=US&IR=T>.
- 14 <https://corona-studie.shinyapps.io/corona-studie>.

Nicolaos Starreveld

FNWI
Universiteit van Amsterdam
n.j.starreveld@uva.nl

Hans Sterk

Faculteit Wiskunde en Informatica
Technische Universiteit Eindhoven
h.j.m.sterk@tue.nl

Interview Edwin van den Heuvel

Data-analyse COVID-19

Edwin van den Heuvel, hoogleraar statistiek aan de Technische Universiteit Eindhoven, aarzelde niet toen de corona-epidemie om zich heen greep, en ging met zijn teamleden aan de slag. Ze verzamelden dagelijks data, evalueerden de data, beoordeelden de data op betrouwbaarheid, bouwden en sleutelden aan hun model en gebruikten het om vooruit te kunnen kijken. De dagelijkse voorspellingen die Van den Heuvel en zijn team maakten, bleken zeer accuraat te zijn, en leidden tot samenwerking met meerdere ziekenhuizen die de uitkomsten gebruikten om de benodigde capaciteit beter in te schatten. Op 8 mei spraken onze redacteurs Nicolaos Starreveld en Hans Sterk met Van den Heuvel die in dit interview het verhaal van de afgelopen weken vertelt.

Je bent dus begonnen met het verzamelen van data. Waar haal je die data vandaan?

“Daar hebben we meerdere bronnen voor gebruikt, we begonnen met de data die de Johns Hopkins University publiceert op haar website. Maar al snel zijn we ook naar andere bronnen en allerlei officiële websites gaan kijken. Bijvoorbeeld naar de websites van het RIVM en van vergelijkbare instanties in landen als Frankrijk en Italië. Die bronnen bekeken we allemaal, ook om te zien of er geen tegenstrijdigheden zaten in de cijfers. Die tegenstrijdigheden bleken we inderdaad wel tegen te komen.”

Hoe beoordeel je de kwaliteit van de data?

“Dat is lastig. We hebben een aantal dingen wel een keer gezien. Op een gegeven

moment zagen we bij Johns Hopkins opvallende verdubbelingen; die verdubbelingen traden op omdat ze vanaf zeker moment ook alle verzorgingshuizen mee waren gaan tellen. Die stonden dus niet in de officiële cijfers, maar wel in de cijfers van Johns Hopkins. Daar hebben we toen niet voor gekozen. We hebben dus keuzes moeten maken om te zien wat we zouden modelleren.”

En wat voor middelen gebruiken jullie om de data te analyseren?

“We gebruiken twee softwarepakketten, R en SAS. En dat komt omdat we in het begin gezien hebben dat als je niet te veel data hebt, de schattingen met onze modellen redelijk gevoelig zijn voor start-

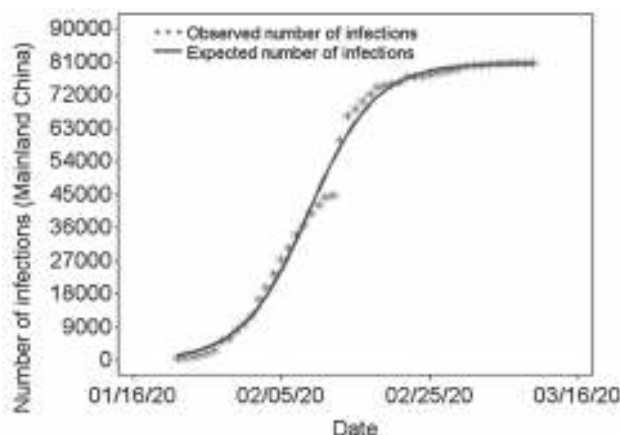
waardes. Om uiteindelijk de parameters te kunnen schatten moet je een optimalisatieprobleem oplossen. En de verschillende methodes zijn relatief gevoelig voor keuzes die je daarin maakt. We draaiden altijd met verschillende pakketten en met verschillende numerieke methoden binnen die pakketten om uit te sluiten dat een gevonden optimum op een toevalligheid berustte.”

En wat voor modellen gebruiken jullie?

“In het begin zijn we gestart met de ‘Verhulst-curve’, dit betreft een model met drie parameters. Eén parameter is het maximum, de waarde waarop de curve is afgevlakt, wat we proberen te schatten. Er zit een parameter in die de toename beschrijft, de groeisnelheid. En er zit nog een derde parameter in, het tijdstip waarop je halverwege bent. We zijn ermee begonnen omdat China liet zien dat je eigenlijk geen complexere modellen zou hoeven nemen dan Verhulst. Maar later, toen we bezig waren met Europa, kwamen we erachter dat dat voor Europa toch niet het geval was. In het begin leek Europa redelijk de Verhulst-curve te volgen, maar de manier



Edwin van den Heuvel en zijn teamleden Marta Regis (postdoc), Zhuozhao Zhan (UD) en Richard Post (PhD)



Figuur 1 Model toegepast op data uit China.

waarop de afvlakking in Europa plaatsvond, gebeurde niet volgens Verhulst. Het Verhulst-model is symmetrisch, maar in Europa zie je deze symmetrie niet. Toen we op het eind van die curves kwamen,

Het Verhulst-model

Genoemd naar de Belgische wiskundige Pierre François Verhulst. Het Verhulst-model of ook wel de logistische functie, is een model dat gebruikt wordt in de populatiegroei-dynamica om het verloop van de omvang van een populatie $Y(t)$ in de tijd te beschrijven. In het geval van een epidemie waar een individu vatbaar of besmet kan zijn, beschrijft $Y(t)$ bijvoorbeeld het aantal mensen dat besmet is geraakt. In het Verhulst-model is de verandering van $Y(t)$ zowel evenredig met het aantal individuen dat besmet is, dus $Y(t)$, maar ook met het aantal individuen dat nog vatbaar is, dus $M - Y(t)$. De parameter M beschrijft het maximale aantal individuen dat besmet kan raken in de populatie. Formeel beschreven is het Verhulst-model een differentiaalvergelijking van de vorm

$$Y'(t) = kY(t)\left(1 - \frac{Y(t)}{M}\right), \quad (1)$$

waar k de groeisnelheid representeert. Een oplossing van deze vergelijking is gegeven door

$$Y(t) = \frac{M}{1 + Me^{-k(t-t_c)}},$$

waar t_c het 'turning point' van de curve is. De twee factoren aan de rechterkant van (1) modelleren respectievelijk de fractie vatbare individuen en het aantal besmettelijke individuen, beide factoren moeten hoog zijn voor het virus om zich snel te verspreiden.

zagen we dat de afvlakking die Verhulst voorspelde veel sneller gaat dan wat er eigenlijk in werkelijkheid gebeurde. Dus toen hebben we andere logistische curves gepakt die meer parameters hebben, om ook dat fenomeen te kunnen volgen en voorspellen. Voor het geval van Europa hebben we twee parameters toegevoegd in het model. We begonnen met Verhulst, maar toen we tekortkomingen constateerden, voegden we twee parameters toe, en vervingen beide factoren door een macht, deze extra parameters zijn dus een soort power-parameters.

$$\tilde{Y}'(t) = k\tilde{Y}(t)^\gamma \left(1 - \frac{\tilde{Y}(t)}{M}\right)^\eta, \quad \gamma, \eta > 0. \quad (2)$$

Toen we begonnen waren vonden de meeste mensen die ons werk zagen het leuk, en waren ze enthousiast over het inzicht in de groei die het verschaftte. Maar er waren ook mensen die zeiden 'hallo, je trekt er een soort S-je doorheen en je vindt het volgende punt, je trekt er dus alleen een lijntje door en dat is het.' Mensen zeiden ook: 'Is dit nou wetenschap?' Maar het ligt dus echt wel iets ingewikkelder. Deels is het waar wat ze zeggen, maar dat 'door-trekken' valt nog niet mee."

Hoe voerde je die discussie?

"We hebben diverse e-mailwisselingen gehad met mensen, maar we hebben op onze website ook een technisch document geplaatst, om onze werkwijze toe te lichten. En toen zeiden ook mensen die eerst wat negatief waren, dat ze zagen dat er meer achter zat dan ze verwacht hadden. En dat heeft de discussie wat getemperd. Maar je kunt er nog steeds een heleboel van vinden. En in het bijzonder ook van de data, hoe goed is de data? Dat blijft een zorg."

Ben je zelf tevreden met wat jullie met de data konden?

"We zijn er eigenlijk zo maar ingestapt, niet wetende waar we in waren gestapt, meer van: we moeten iets doen. Het is sowieso informatief gebleken voor een heleboel mensen. Er kwamen mensen dagelijks terug om te kijken hoe het ervoor stond. Wat ik eigenlijk het belangrijkste vind is dat onze voorspellingen ook zijn gebruikt als input voor ziekenhuisopnames. We hebben met een aantal ziekenhuizen in Nederland samengewerkt, waarbij we probeerden iets verder vooruit te voorspellen, zodat zij konden inschatten of ze moesten opschalen. En dat heeft in ieder geval bij een aantal ziekenhuizen geholpen. Daar heeft het ook echt betekenis gehad. Dat vind ik het belangrijkste, dat we iets in de praktijk hebben kunnen bijdragen."

Hoe zou je verder willen?

"We willen inderdaad verdergaan en zijn ook aan het zoeken naar financieringsmogelijkheden. Een van de dingen die we zouden willen doen, of beter zouden willen doen, is kijken of we misschien een soort dashboard kunnen maken waardoor we precies kunnen zien wat er gebeurt met de verspreiding in het land. Op welke parameters moet je goed letten en kun je gecombineerde parameters gebruiken om te zien of er iets verandert? We hebben intussen ook een analyse gedraaid om te kijken wat de invloed is geweest van beslissingen van de overheid om tot de lockdown over te gaan. Heeft dat invloed gehad op de verspreiding? Nou, dat heeft het. En de verschillen tussen landen zijn ook interessant. We willen de data ook analyseren om de invloed van maatregelen te kunnen duiden. Voor het moment willen we kijken of de verspreiding onder controle blijft als we de overheidsmaatregelen terugdraaien."

Wil je jullie werk ook in het onderwijs gebruiken?

"We zijn een soort capita selecta begonnen in deze onderwijsperiode, we hebben uiteraard geen colleges over dit onderwerp. Er zijn drie studenten bezig en die zijn nu naar literatuur aan het kijken, ze proberen wat zaken diepgaander te begrijpen, en ze onderzoeken ook andere modellen. Dat konden we onmogelijk allemaal zelf doen. En als dit succesvol is, dan moeten we er misschien wel een vak van maken. Ook wel aardig om te zeggen: we hadden in een vroeg

stadium een bachelorstudent van wiskunde die een bachelorproject wilde doen over COVID-19; die student hebben we gelijk in het team getrokken. Die voert nu ook simulaties uit en doet wat onderzoekjes.”

Je leest veel in de krant en in het nieuws over het model, over het reproductiegetal, over hoe het mis kan gaan. Wat denk je dat het publiek, ook academici, hierover moet weten? Is het nuttig om te weten hoe een model werkt, hoe een model gebouwd wordt, of hoe je statistiek doet, of is dat te ingewikkeld?

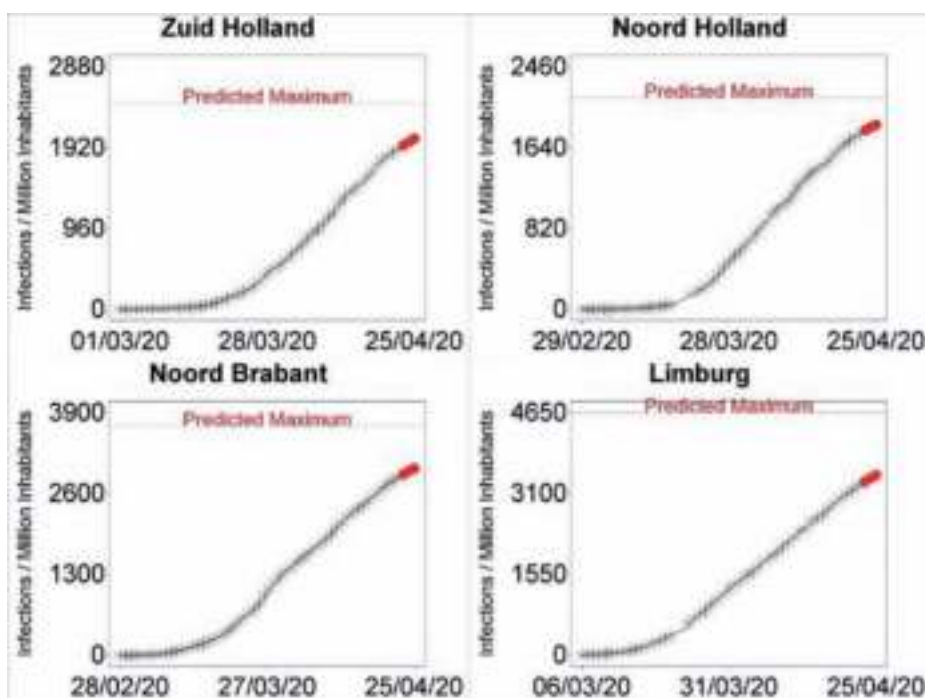
“Wie ben ik om daar iets over te zeggen? Het is lastig om de juiste balans te vinden in informatievoorziening. Het RIVM bijvoorbeeld kijkt ook op subgroepniveau en gebruikt ook leeftijdsgebonden informatie, dat hebben wij niet, maar zou ik zeker ook willen gebruiken. Het is denk ik echter heel moeilijk aan het publiek uit te leggen wat voor complexiteiten er allemaal spelen. Het Verhulst-model is nog wel uit te leggen, maar zodra je ingewikkelder modellen en ‘epidemic disease models’ gebruikt, wordt uitleggen al een stuk lastiger.

Een college op TV zoals Robbert Dijkgraaf wel eens deed voor De Wereld Draait Door?

“Ik heb laatst een webinar gegeven bestemd voor artsen, om uit te leggen wat je met die getallen kunt. Nou denk ik dat het webinar iets te lastig was, omdat je de modellen toch echt wel nodig hebt als je de getallen wilt interpreteren. En een van de dingen die ik van belang vind bij de modellen is dat je je niet op één model moet fixeren, omdat de data niet wordt verzameld op een manier die goed past bij een gegeven model. Dat gaat dan toch iets meer de richting op van data science dan van zeg maar de fundamentele wiskunde. Je kunt zeker het een en ander uitleggen hoor, in al die modellen zitten parameters die te begrijpen zijn. Als we van *susceptible* naar *infected* gaan, dat heeft te maken met het aantal contacten en de kans dat je besmet raakt tijdens zo’n contact, dat is prima uit te leggen. Maar zo’n heel model? Ik denk dat zo’n college à la Robbert Dijkgraaf een goed idee zou zijn.”

Het reproductiegetal R is een redelijk simpel product van drie getallen, is dat misschien te simpel?

“Ik maak me daar wel wat zorgen over. Het getal heeft een heldere interpretatie, maar



Figuur 2 Verbeterd model toegepast op data in Nederland.

de schatting van dat getal is toch niet zo triviaal, want dat heeft ook te maken met het model dat er onder zit en als je daar andere aannames bij maakt, verandert de schatting. En we hebben gezien in een aantal analyses dat sommige aannames behoorlijk invloed hebben op het schatten van bepaalde parameters in dat model, dus je moet goed weten welke aannames goed zijn en welke niet. Dat is iets waar het RIVM mee worstelt, en wij zelf ook. Nou heeft het RIVM wel iets meer informatie, dus dat kan nog helpen. Ik denk dat als je focust op één model of één getal, dat dat toch wel iets te beperkt is met deze data, dus dat je daar heel voorzichtig mee moet zijn.”

Het is nu een product van drie getallen die R . Is het denkbaar dat het een ingewikkelder expressie zou moeten zijn?

“Nee, dat denk ik niet. Ik denk wel dat je naar dit soort dingen moet blijven kijken, maar ik denk dat je moet aanvullen. Je moet het aanvullen met andere karakteristieken om te zien of je consistent bezig bent. Zo’n R kan zeggen dat het de goede kant uit gaat, maar andere signalen staven dat misschien niet. Dus het is goed naar verschillende signalen te kijken in die data: Ik zie dit gebeuren en dat lijkt de goede kant uit te gaan, ik zie daar een soort confirmatie, okay dat geeft me al wat meer vertrouwen. We hebben ook gekeken of we vergelijkbare patronen in andere landen zien. Wat

we nu zien in Nederland, zien we dat ook in landen die net iets ‘voor’ zijn. Dan begin je vertrouwen te kweken. Dat is een beetje de aanpak die wij volgen.”

In je team heb je statistici, met hun eigen specialisaties. Heb je behoefte aan een breder samengesteld team?

“Ja, we zouden zeker baat hebben gehad bij een breder samengesteld consortium: een epidemioloog bijvoorbeeld, die vanuit zijn expertise zou kunnen kijken, en de medische kant meeneemt. En wat ook nuttig zou zijn geweest, was iemand die handiger is in het verzamelen van de data van de diverse bronnen. Het zou zeker handig zijn geweest met een breder team, maar je doet het met de middelen die je hebt.”

Laatste vraag: die gaat over het reproductiegetal. Ik lees wel dat je door die 1,5 m afstand het aantal contacten die iemand heeft beïnvloedt, en een ander artikel dat juist de kans op besmetting benadrukt. Er zijn verschillende meningen over. Is dat erg?

“In die modellen zitten de ‘effective contact rates’, dat is waar het over gaat. Het product van de kans dat je besmet raakt en het aantal contacten dat je hebt. Het gaat uiteindelijk om die effective contact rates, en of die naar beneden gaan. Voor het effect maakt het niet uit, welke factor daarvoor verantwoordelijk is, want het is toch het product waar je naar kijkt.”

Slawi Dimitrov*derdejaars wiskunde en natuurkunde
Universiteit van Amsterdam***Vera Moerbeek***derdejaars wiskunde en natuurkunde
Universiteit van Amsterdam***Jos van Willigen***derdejaars wiskunde en natuur- en sterrenkunde
Universiteit van Amsterdam*

Onderwijs

Corona op de campus

Wie had begin dit jaar kunnen voorspellen dat het leven aan de universiteit op zo een korte tijd zo drastisch zou veranderen? Waar begin maart de studenten nog relaxed op de campus rondkuierden, liggen de universiteitsgebouwen er nu verlaten bij. Drukke collegezalen hebben plaatsgemaakt voor de beslotenheid van de woon- of slaapkamer en al het contact tussen de docenten en studenten is plots virtueel geworden. Om te zien welke impact dit heeft op het studentenleven gingen we te rade bij Slawi Dimitrov, Vera Moerbeek en Jos van Willigen, drie bachelorstudenten uit de opleiding wis- en natuurkunde aan de Universiteit van Amsterdam. Zij geven ons enkele impressies van hun ervaringen in de voorbije weken.

Zoom-colleges en Zoom-borrels

Ik kreeg het nieuws van de 'intelligente lockdown' op donderdag 19 maart. Het was een mooie dag, ik kwam net de sport-school uit, waar ik tijdens mijn dagelijkse training nog onbezorgd grapjes maakte over dat sporten met corona gevaarlijk was. Bijna elk gesprek waar ik aan meedeed ging over corona. Een klein deel van de mensen was toen nog maar bezorgd. Het grootste deel dacht nog dat het een soort 'Griep II' was. De mensen met administratieve taken leken het meest bang; de trainers in de sportschool, het bestuur van de studievereniging, mijn scriptiebegeleider. Die avond kwam het nieuws binnen dat de universiteit alle (fysieke) colleges zou stopzetten voor de nabije toekomst, en als kers op de taart gingen ook alle sportscholen dicht. Leuk...

Eerst was het niet eens duidelijk of er die vrijdag nog colleges zouden zijn. Hoewel ik zelf geen college had die dag, moest ik wel een werkcollege 'basiswiskunde in de psychobiologie' geven. Na wat nerveuze WhatsApp-berichten en een stortvloed aan e-mails had ik eindelijk een beetje de logistiek door. Er zouden wekelijkse hoor- en werkcolleges gegeven worden via Zoom,

een of ander videoconferentieprogramma waar ik nog nooit van gehoord had. De UvA ging blijkbaar allemaal tablets vergoeden zodat we een soort online whiteboard zouden hebben. Wonder boven wonder merkte ik in de werkcolleges die ik later volgde dat het nog eens werkte ook. Mijn taken als werkcollegedocent waren vrij gelimiteerd, nog meer dan die van mijn collega's en mijn eigen werkcollegedocenten. Ik hoefde niet eens aanwezig te zijn tijdens de massale Zoom-calls die nu als vervanging voor echte werkcolleges dienden, ik hoefde alleen maar af en toe op een online forum de vragen van mijn studenten beantwoorden. Mijn eerste vak als werkcollegedocent was veranderd in het glorieuze werk van een parttime math.stachexchange browser. Veel keus had ik niet, en uiteindelijk zou ik er ook aan wennen. Bovendien had ik wel belangrijkere dingen aan mijn hoofd.

Voor de lockdown was ik altijd bezig en zelden thuis, als ik niet een van mijn vijf vakken aan het volgen was, was ik aan het sporten, en als ik niet aan het sporten was, was ik bezig met een van de commissies van de NSA (mijn studievereniging). Ik had meegekregen dat heel veel mensen zich

verveelden, maar dat was mij niet gelukt. In mijn eeuwig talent voor stress was ik elke weekdag vrij constant mijn vakken bij aan het (proberen te) houden. Of ik was uit bed meteen een Zoom-college binnengerold, of ik was huiswerk aan het doen. Later in de dag zat ik meestal aan de gewichten, of ik was bezig met de kleine activiteitencommissie, een van de commissies van de NSA. Hoewel het me niet gelukt was om mijn pre-corona-schema aan te houden, ik deed mijn best om ten minste mijn taken te voltooien.

Hoeveel online trivia-avonden of -lezingen we ook organiseren met de vereniging, hoeveel Zoom-borrels we ook hebben om het leven in 'studentenleven' bij te houden, het is niet hetzelfde. Ik mis het laagdrempelige sociale contact dat zo makkelijk te vinden is in de kamer van de studievereniging, ik mis het magnesium op de gewichten in de sportschool, en ik mis de stimulatie van samen opgaven maken. Hoewel de opleiding, de vereniging en mijn leven op een of andere manier toch doorgaan, hoop ik dat dit snel over is zodat ik terug kan naar normaal. *Slawi Dimitrov*

Take home-tentamens en Coronachallenges

Tijdens wat mijn laatste fysieke college van dit jaar zou worden, moesten we allemaal een presentatie geven. Ik had nog niks door, omdat ik het nieuws niet goed genoeg volgde in die tijd, en was nog in de waan dat het allemaal wel los zou lopen. Na afloop van het college grapte de docent dat het werd aangeraden om colleges online te gaan geven, en dat hij er erg te

genop zag om de opgenomen colleges van vorig jaar terug te gaan kijken om te zien of er fouten inzaten.

Toen we naar buiten liepen, zag ik dat de kleine bijeenkomst waar ik na de les naartoe had willen gaan was afgelast, en had ik een appje van een lid van de studentenvereniging waar ik bestuurslid van ben of “het al bekend was wat het effect van corona op de ASAC zou zijn”. Ik had het erover met een medestudent. “Hoe serieus is het nou eigenlijk?” “Het lijkt me dat het allemaal wel meevalt”, zei ze. “Dat we niet meteen alles hoeven af te lassen.” Ik appte mijn voorzitter, dat we het er maandag op de vergadering maar even over moesten hebben.

De volgende ochtend overtuigden de artikelen die in alle appgroepen werden rondgestuurd me er steeds meer van dat de regels van de overheid niet alleen terecht waren, maar mogelijk zelfs te slap. Vrijdag rond drie uur kregen we het hoge woord binnen van de NKBV waar wij uiteindelijk als klimvereniging onder vallen en die er hetzelfde over dachten: alle evenementen en bijeenkomsten moesten afgelast worden, ook die van minder dan honderd personen.

Een week later vertrok ik uit Amsterdam, waar niks meer was, naar mijn ouders en ik heb de afgelopen zes weken bijna niemand anders fysiek gesproken. Digitaal echter zijn na een week al een heleboel sociale en universiteitsactiviteiten hervat. In het algemeen was ik positief verrast hoe goed het mogelijk was om via alle digitale kanalen contact te houden. De opleiding wiskunde was er erg snel bij met online colleges. We moesten een verslag schrijven over onduidelijkheden in onze presentaties en kregen take home-tentamens. Omdat mijn ouders overdag ook werken, valt het me relatief makkelijk om mee te doen met hun ritme. Na een week waarin iedereen nog een beetje verbluft lijkt door zijn of haar lege agenda, komen ook sociale activiteiten weer op gang. We spelen Drawful, ons favoriete tekenspel dat via screensharing makkelijk online gespeeld kan worden. Iemand van de klimvereniging die veel programmeert voor haar werk besluit een van onze andere favoriete spellen, bijgenaamd ‘het spel met de slakom’, te programmeren. Later volgt ook Dixit. De Sportcommissie en de Activiteitencommissie komen met Coronachallenges en zowel mijn hardlopgroep als mijn oude turnclub komen met online workouts.

Na een paar weken besluit een internationale student en goede vriend van mij terug te gaan naar Slowakije. “Daar kan ik misschien klimmen,” vertelt hij, “en in mijn eentje in een studentenkamertje in Diemen word ik echt gek.” Ik rijd naar Amsterdam met mijn ouders’ auto om zijn autosleutel, die ik eerder had geleend, terug te geven. Het is mogelijk dat ik hem nooit meer zal zien, aangezien hij na dit studiejaar sowieso van plan was om uit Nederland te verhuizen. “Tot de ASAC-week,” zeg ik hem, verwijzend naar de klimweek die de ASAC elk jaar organiseert in de Alpen en waar ik ook een andere vriend die naar Duitsland is verhuisd en die we met Pasen zouden bezoeken, hoop te zien. Volgende vergadering gaan we samen met de Alpencommissie beslissen of dat nog doorgaat – de kans is klein. De werkelijke beloning van het bestuursjaar – de sociale kant, de lol van de klimweekenden – is ingeruild voor het goede voornemen achterstallig administratief werk in te halen. *Vera Moerbeek*

Discord-lessen en Bob Ross-video

Ik werkte aan mijn scriptie in een volle ruimte die bedoeld is voor studie en vrije tijd op de universiteit. Vlak daarvoor besprak ik met mijn begeleider dat het nog spannend zou kunnen worden of de tentamens van een paar weken later kunnen doorgaan. Terwijl ik daar zat, kreeg ik het nieuws te horen van de lockdown.

Direct stonden een aantal WhatsApp-groepen roodgloeiend. Vooral van mijn scoutingvereniging, maar ook van vrienden en mijn studie. Het was duidelijk dat er veel zou veranderen en dat er veel onduidelijk was. Vanuit mijn rol als secretaris bij mijn scoutingvereniging heb ik direct alle leden een mail moeten sturen dat scouting voor een tijdje niet meer fysiek door kon gaan. We gingen online verder. Hoe lang was nog niet bekend, maar het zou best wel eens even kunnen duren.

Ook de UvA gaf aan dat de lessen niet meer door zouden gaan. De meeste vakken maakten ook de overstap naar online. Dat werd per vak apart aangegeven, dus het kon wel even duren voordat het helemaal duidelijk was hoe mijn studie nu zou verlopen.

Zelf geef ik ook les als tutor en werd mij direct gevraagd hoe de tutores de lessen zouden aanpakken. Ik was zelf al bekend met het platform Discord, en stelde voor om daarmee de lessen te geven. De

andere tutores vonden dat goed, dus wij deden onze lessen zo. Al snel bleek dat meer mensen een goed idee hadden. Die goede ideeën verschilden nog wel eens van elkaar, wat als resultaat had dat de lessen per vak, of zelfs per docent, anders zouden verlopen. Om die verwarring op te lossen kwam er vanuit de opleiding een aantal richtlijnen. Ook werden student-assistenten gevraagd om te helpen met de technische problemen die andere (vaak oudere) docenten konden hebben. Zo werd ik aangewezen als ‘Discord-expert’ van de opleiding wiskunde.

Momenteel zijn de meeste problemen opgelost en zijn de meeste lessen via Zoom. Dat werkt goed, alleen blijft het wat afstandelijker dan college in ‘het echt’ natuurlijk. Ook vind ik het lastiger om vragen te stellen en merk ik dat docenten het moeilijker vinden in te schatten of studenten het begrijpen. Over de nieuwe manier van werkcolleges geven ben ik eigenlijk best tevreden, of die nou via Zoom of Discord zijn. Je kunt samenwerken met mensen, zonder dat je last hebt van een naburig groepje dat niet rustig kan blijven.

Het leven bestaat gelukkig niet alleen maar uit studeren. Ook de andere dingen die ik normaal in een week zou doen, kunnen nu doorgaan, al dan niet op een andere manier. Zo heb ik elke zaterdag via Discord mijn scoutingopkomsten, waar ik leider ben. De scouts moesten bijvoorbeeld opdrachten doen, of we gingen samen een Bob Ross-video kijken en meeschilderen, ieder vanuit zijn/haar eigen huis. Verder spreek ik ook veel online af met vrienden. Ik ben blij dat we de middelen hebben om elkaar toch te kunnen blijven zien, ook al zit iedereen thuis.

Ik ben erg blij verrast hoe snel iedereen binnen mijn sociale kring heeft weten over te schakelen naar het online leven. Ook zijn er online veel leuke ideeën te vinden van dingen die je thuis kunt doen tegen de verveling. Zeker in de eerste paar weken was ik erg onder de indruk van de inzet die mensen toonden en de vindingrijkheid die ze hadden om het thuisleven leuker te maken. Ondanks dat ik me wel vermaak thuis, kan ik niet wachten weer naar de uni te gaan, mensen te spreken zonder een wegvallende verbinding, scouting weer in het bos te kunnen doen en het leven niet meer via een scherm te moeten beleven. *Jos van Willigen*

Viktor Blåsjö

Mathematical Institute
Utrecht University
v.n.e.blasjo@uu.nl

History

Lockdown mathematics: A historical perspective

In a time of coronavirus isolation measures, Viktor Blåsjö looks at historical episodes where mathematicians found themselves working in lockdown conditions.

Isolation and productivity

“A mathematician is comparatively well suited to be in prison.” That was the opinion of Sophus Lie, who was incarcerated for a month in 1870. He was 27 at the time. Being locked up did not hamper his research on what was to become Lie groups. “While I was sitting for a month in prison..., I had there the best serenity of thought for developing my discoveries,” he later recalled. [11, pp. 147, 258]

Seventy years later, André Weil was to have a very similar experience. The circumstances of their imprisonments — or perhaps the literary tropes of their retellings — are closely aligned. Having travelled to visit mathematical colleagues, both found themselves engrossed in thought abroad when a war broke out: Lie in France at the outbreak of the Franco-Prussian War, and Weil in Finland at the onset of World War II. They were both swiftly suspected of being spies, due to their strange habits as eccentric mathematicians who incessantly scribbled some sort of incomprehensible notes and wandered in nature without any credible purpose discernible to outsiders. Both were eventually cleared of suspicion upon the intervention of mathematical colleagues who could testify that their behaviour was in character for a mathematician and that their mysterious notebooks were not secret ciphers. [11, pp. 13–14, 146–147; 13, pp. 130–134]

Weil was deported back to France, where he was imprisoned for another few months for skirting his military duties. Like Lie, he had a productive time in prison. “My mathematics work is proceeding beyond my wildest hopes, and I am even a bit worried — if it’s only in prison that

I work so well, will I have to arrange to spend two or three months locked up every year?” “I’m hoping to have some more time here to finish in peace and quiet what I’ve started. I’m beginning to think that nothing is more conducive to the abstract sciences than prison.” “My sister says that when I leave here I should become a monk, since this regime is so conducive to my work.”

Weil tells of how colleagues even expressed envy of his prison research retreat. “Almost everyone whom I considered to be my friend wrote me at this time. If certain people failed me then, I was not displeased to discover the true value of their friendship. At the beginning of my time in [prison], the letters were mostly variations on the following theme: ‘I know you well enough to have faith that you will endure this ordeal with dignity.’... But before long the tone changed. Two months later, Cartan was writing: ‘We’re not all lucky enough to sit and work undisturbed like you.’” And Cartan was not the only one: “My Hindu friend Vij[ayaraghavan] often used to say that if he spent six months or a year in prison he would most certainly be able to prove the Riemann hypothesis. This may have been true, but he never got the chance.”

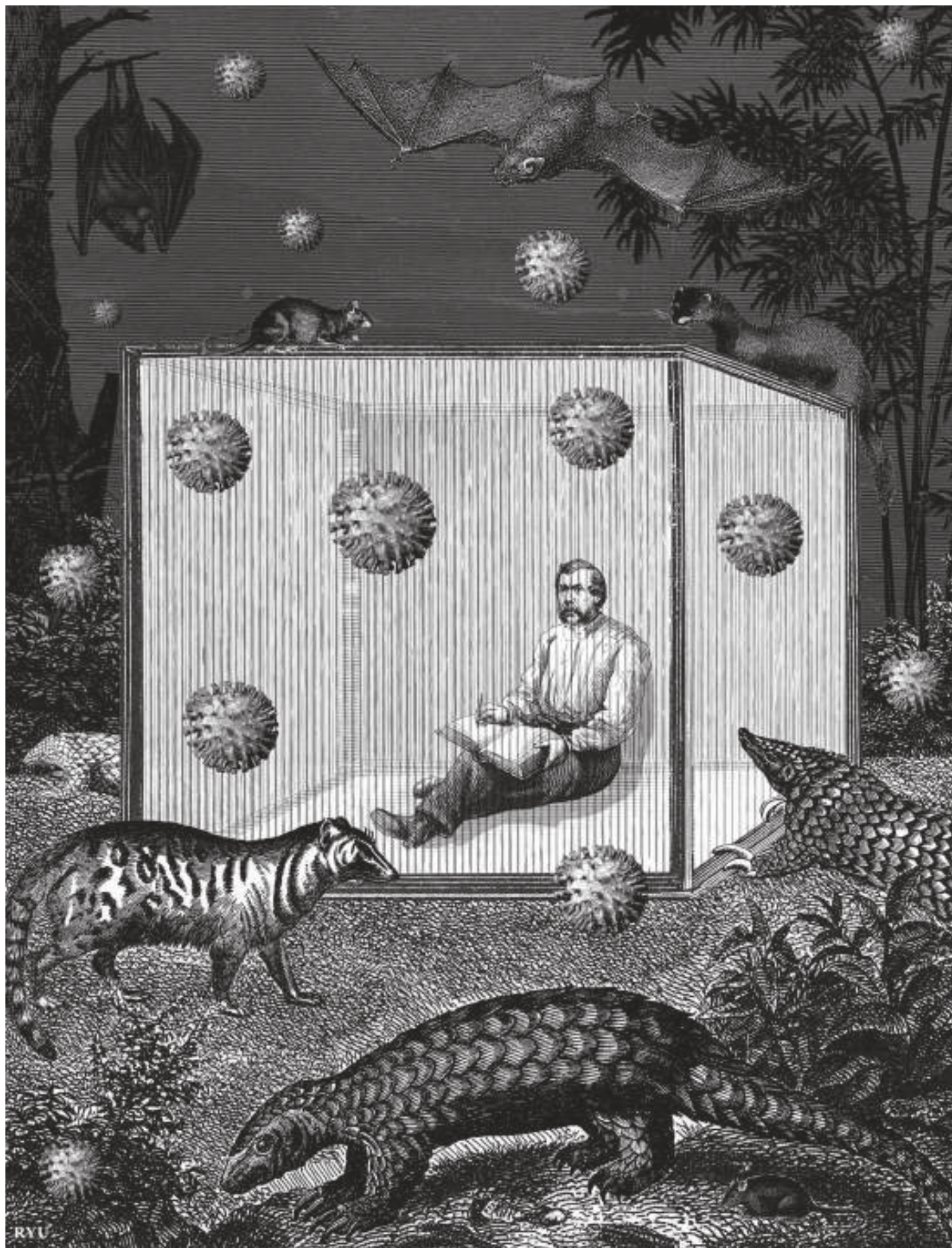
But Weil grew weary of isolation. He tried to find joy in the little things: “[In the prison yard,] if I crane my neck, I can make out the upper branches of some trees.” “When their leaves started to come out in spring, I often recited to myself the lines of the *Gita*: ‘Patram puspam phalam toyam...’ (A leaf, a flower, a fruit, water, for a pure heart everything can be an offering).” Soon he was reporting in his letters that: “My mathematical fevers have abated; my con-

science tells me that, before I can go any further, it is incumbent upon me to work out the details of my proofs, something I find so deadly dull that, even though I spend several hours on it every day, I am hardly getting anywhere.” [13, pp. 142–50]

Judging by these examples, then, it would seem that solitary confinement and a suspension of the distractions and obligations of daily life could be very conducive to mathematical productivity for a month or two, but could very well see diminishing returns if prolonged. Of course it is debatable whether coronavirus lockdown is at all analogous to these gentleman prisons of yesteryear. When Bertrand Russell was imprisoned for a few months for pacifistic political actions in 1918, he too “found prison in many ways quite agreeable.... I read enormously; I wrote a book, *Introduction to Mathematical Philosophy*.” But his diagnosis of the cause of this productivity is less relatable, or at least I have yet to hear any colleagues today exclaiming about present circumstances that “the holiday from responsibility is really delightful.” [9, pp. 29–30, 32]

Mathematics shaped by confinement

“During World War II, Hans Freudenthal, as a Jew, was not allowed to work at the university; it was in those days that his interest in mathematics education at primary school level was sparked by ‘playing school’ with his children — an interest that was further fueled by conversations with his wife.” This observation was made in a recent editorial in *Educational Studies in Mathematics* [1] — a leading journal founded by Hans Freudenthal. Coronavirus lockdown has put many mathematicians in a similar position today. Perhaps we should expect another surge in interest in school



mathematics among professional mathematicians.

Freudenthal's contemporary Jakow Trachtenberg, a Jewish engineer, suffered far worse persecution, but likewise adapted his mathematical interests to his circumstances. Imprisoned in a Nazi concentration camp without access to even pen and paper, he developed a system of mental arithmetic. Trachtenberg survived the concentration camp and published his calculation methods in a successful book that has gone through many printings and has its adherents to this day [12].

Another Nazi camp was the birthplace of "spectral sequences and the theory of sheaves...by an artillery lieutenant named Jean Leray, during an internment lasting from July 1940 to May 1945." The circumstances of the confinement very much influenced the direction of this research: Leray "succeeded in hiding from the Germans the fact that he was a leading expert in fluid dynamics and mechanics. ... He turned, instead, to algebraic topology, a field which he deemed unlikely to spawn war-like applications." [10, pp. 41–42]

An earlier case of imprisonment shaping the course of mathematics is Jean-Victor Poncelet's year and a half as a prisoner of war in Russia. Poncelet was part of Napoleon's failed military campaign of 1812, and was only able to return to France in 1814. During his time as a prisoner, he worked on geometry. Poncelet had received a first-rate education in mathematics at the *École Polytechnique*, and his role in the military was as a lieutenant in the engineering corps. In his Russian prison he did not have access to any books, so he had to work out all the mathematics he knew from memory. Perhaps it is only because mathematics lends itself so well to being reconstructed in this way that Poncelet ended up becoming a mathematician; other scientific or engineering interests would have been harder to pursue in isolation without books. The absence of books for reference would also naturally lead to a desire to unify geometrical theory and derive many results from a few key principles in Poncelet's circumstances. This is a prominent theme in early nineteenth-century geometry overall; it was not only the imprisoned who had this idea. But it is another sense in which Poncelet could make a virtue out of necessity with the style of mathematics he was confined to during his imprisonment.

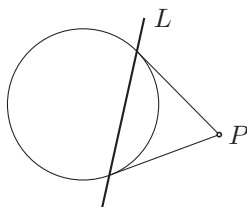


Figure 1 Polar reciprocation with respect to a circle: simplest case. Points P outside the circle are put in one-to-one correspondence with lines L intersecting the circle.

The same can be said for another characteristic of early nineteenth-century geometry, namely the prominent role of visual and spatial intuition. This too was a movement that did not start with Poncelet, but was fortuitously suited to his circumstances. Consider for instance the following example from the *Géométrie descriptive* of Monge, who had been one of Poncelet's teachers at the *École Polytechnique*. Monge was led to consider the problem of representing three-dimensional objects on a plane for purposes of engineering, but he quickly realised that such ideas can yield great insights in pure geometry as well. For instance in the theory of poles and polars, which is a way of realising the projective duality of points and lines. The foundation of this theory is to establish a bijection between the set of all points and the set of all lines in a plane. Polar reciprocation with respect to a circle associates a line with every point and a point with every line as follows. Consider a line that cuts through the circle (Figure 1). It meets the circle in two points. Draw the tangents to the circle through these points. The two tangents meet in a point. This point is the pole of the line. Conversely, the line is the polar of the point.

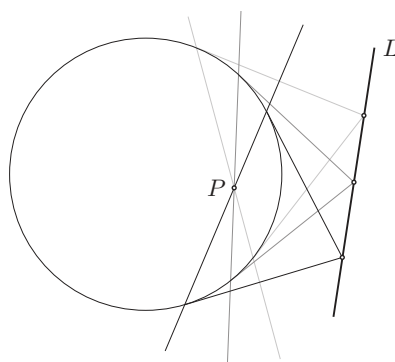


Figure 2 Polar reciprocation with respect to a circle: trickier case. Points P inside the circle are put in one-to-one correspondence with lines L that don't intersect the circle. The mapping works because of the collinearity of the meeting points of the tangents: a non-trivial result that becomes intuitively evident by introducing the third dimension and viewing the figure as the cross-section of a configuration of cones tangent to a sphere.

But what about a line outside the circle (or, equivalently, a point inside the circle; Figure 2)? Let L be such a line. For every point on L there is a polar line through the circle, as above. We claim that all these polar lines have one point in common, so that this point is the natural pole of L . Monge proves this by cleverly bringing in the third dimension. Imagine a sphere that has the circle as its equator. Every point on L is the vertex of a tangent cone to this sphere. The two tangents to the equator are part of this cone and the polar line is the perpendicular projection of the circle of intersection of the sphere and the cone. Now consider a plane through L tangent to the sphere. It touches the sphere at one point P . Every cone contains this point (because the line from any point on L to P is a tangent to the sphere and so is part of the tangent cone). Thus, for every cone, the perpendicular projection of the intersection with the sphere goes through the point perpendicularly below P , and this is the pole of L , and L is the polar of this point. QED

One is tempted to imagine that Poncelet was forced to turn to this intuitive style of geometry due to being deprived of pen and paper, just as Trachtenberg had to resort to mental arithmetic. But this is a half truth at best, for Poncelet evidently did have crude writing implements at his disposal: the prisoners were allocated a minimal allowance, for which he was able to obtain some sheets of paper, and he also managed to make his own ink for writing [5, p. 20].

Ibn al-Haytham is another example of a mathematician starting out as an engineer and then turning increasingly to mathematics while in confinement. Early in his career he devised an irrigation scheme that would harness the Nile to water nearby fields. When his plans proved unworkable, "he feigned madness in order to escape the wrath of the Caliph and was confined to a private house for long years until the death of the tyrannical and cruel ruler. He earned his livelihood by copying in secret translations of Euclid's and Ptolemy's works." [7, p. 156] Euclidean geometry and Ptolemaic astronomical calculations are certainly better suited to house arrest scholarship than engineering projects. One may further wonder whether it is a coincidence that Ibn al-Haytham, who was forced to spend so many sunny days indoors, also discovered the camera obscura and gave it a central role in his optics.

From these examples we can conclude that if coronavirus measures are set to have an indirect impact on the direction of mathematical research, it wouldn't be the first time lockdown conditions have made one area or style of mathematics more viable than another.

Newton and the plague

Isaac Newton went into home isolation in 1665, when Cambridge University advised “all Fellows & Scholars” to “go into the Country upon occasion of the Pestilence,” since it had “pleased Almighty God in his just severity to visit this towne of Cambridge with the plague.” [14, p. 141] Newton was then twenty-two and had just obtained his bachelor's degree. His productivity during plague isolation is legendary: this was his *annus mirabilis*, marvellous year, during which he made a number of seminal discoveries. Many have recently pointed to this as a parable for our time, including for instance the *Washington Post* [3]. The timeline is none too encouraging for us to contemplate: the university effectively remained closed for nearly two years, with an aborted attempt at reopening halfway through, which only caused “the pestilence” to resurge.

It is true that Newton achieved great things during the plague years, but it is highly doubtful whether the isolation had much to do with it, or whether those years were really all that much more *mirabili* than others. Newton was already making dramatic progress before the plague broke out, and was on a trajectory to great discoveries regardless of public health regulations. Indeed, Newton's own account of how much he accomplished “in the two plague years of 1665 & 1666” attributes his breakthroughs not to external circum-

stances but to his inherent intellectual development: “For in those days I was in the prime of my age for invention & minded Mathematicks & Philosophy more then at any time since.” [15, p. 32]

‘Philosophy’ here means physics. And indeed in this subject Newton did much groundwork for his later success during the plague years, but the fundamental vision and synthesis that we associate with ‘Newtonian mechanics’ today was still distinctly lacking. His eventual breakthrough in physics depended on interactions with colleagues rather than isolation. In 1679, Hooke wrote to Newton for help with the mathematical aspects of his hypothesis “of compounding the celestial motions of the planetts of a direct motion by the tangent & an attractive motion towards the centrall body.” At this time “Newton was still mired in very confusing older notions.” To get Newton going, Hooke had to explicitly suggest the inverse square law and plead that “I doubt not but that by your excellent method you will easily find out what that Curve [the orbit] must be.” Only then “Newton quickly broke through to dynamical enlightenment ... following [Hooke's] signposted track.” [2, pp. 35–37, 117]

Newton later made every effort to minimise the significance of Hooke's role. Indeed, Hooke was just one of many colleagues who ended up on Newton's enemies list. This is another reason why Newton's plague experience is a dubious model to follow. Newton could be a misanthropic recluse even in normal times. When Cambridge was back in full swing, Newton still “seldom left his chamber”, contemporaries recalled, except when obligated to lecture — and even that he might as well have done in his chamber for “ofttimes he did in a manner, for want of hearers, read to the

walls.” [4, n.11] He published reluctantly, and when he did Newton “was unprepared for anything except immediate acceptance of his theory”: “a modicum of criticism sufficed, first to incite him to rage, and then to drive him into isolation.” [14, pp. 239, 252] With Hooke, as with so many others, it may well be that Newton only ever begrudgingly interacted with him in the first place for the purpose proving his own superiority. But that's a social influence all the same. Even if Hooke's role was merely to provoke a sleeping giant, the fact remains that Newton's *Principia* was born then and not in quarantine seclusion.

In mathematics, it is accurate enough to say that Newton “invented calculus” during the plague years. But he was off to a good start already before then, including the discovery of the binomial series. In optics, Newton himself said that the plague caused a two-year interruption in his experiments on colour that he had started while still at Cambridge [6, p. 31]. Perhaps this is another example of pure mathematics being favoured in isolation at the expense of other subjects that are more dependent on books and tools.

Home isolation also affords time for extensive hand calculations: a self-reliant mode of mathematics that can be pursued without library and laboratory. Newton did not miss this opportunity during his isolation. As he later recalled, “[before leaving Cambridge] I found the method of Infinite series. And in summer 1665 being forced from Cambridge by the Plague I computed y^e area of y^e Hyperbola ... to two & fifty figures by the same method.” [14, p. 98] Newton's notebook containing this tedious calculation of the area under a hyperbola to 52 decimals can be viewed at the Cambridge University Library website [8].

References

- 1 Arthur Bakker and David Wagner, Pandemic: lessons for today and tomorrow?, *Educational Studies in Mathematics*, 2020, <https://doi.org/10.1007/s10649-020-09946-3>.
- 2 Zev Bechler (ed.), *Contemporary Newtonian Research*, Reidel, 1982.
- 3 Gillian Brockell, During a pandemic, Isaac Newton had to work from home, too. He used the time wisely, *Washington Post*, 12 March 2020.
- 4 I. Bernard Cohen, *Newton, Isaac*, Dictionary of Scientific Biography, Vol. 10, Charles Scribner's Sons, 1974.
- 5 Isidore Didion, *Notice sur la vie et les ouvrages du Général J.-V. Poncelet*, Gauthier-Villars, 1869.
- 6 A. Rupert Hall, *Isaac Newton: Adventurer in Thought*, Cambridge University Press, 1992.
- 7 Max Meyerhof, Ali al-Bayhaqi's Tatimmat Siwan al-Hikma: A biographical work on learned men of the Islam, *Osiris* 8 (1948), 122–217.
- 8 Isaac Newton, MS Add.3958, 79r ff., <https://cudl.lib.cam.ac.uk/view/MS-ADD-03958/151>.
- 9 Bertrand Russell, *The autobiography of Bertrand Russell: 1914–1944*, Little Brown and Company, 1968.
- 10 Anna Maria Sigmund, Peter Michor and Karl Sigmund, Leray in edelbach, *Mathematical Intelligencer* 27 (2005), 41–50.
- 11 Arild Stubhaug, *The Mathematician Sophus Lie: It was the Audacity of My Thinking*, Springer, 2002.
- 12 Jakob Trachtenberg, *The Trachtenberg Speed System of Basic Mathematics*, Doubleday and Company, 1960.
- 13 André Weil, *The Apprenticeship of a Mathematician*, Birkhäuser, 1992.
- 14 Richard S. Westfall, *Never at Rest: A Biography of Isaac Newton*, Cambridge University Press, 1983.
- 15 D.T. Whiteside, Newton's Marvellous Year: 1666 and All That, *Notes and Records of the Royal Society of London* 21(i) (1966), 32–41.

Arjeh Cohen

Faculteit Wiskunde en Informatica
Technische Universiteit Eindhoven
a.m.cohen@tue.nl

In Memoriam John Horton Conway (1937–2020)

Briljante inspirator, entertainer en docent

De briljante en markante wiskundige John Horton Conway is op 11 april 2020 gestorven aan de gevolgen van corona. Arjeh Cohen herdenkt hem met een kort overzicht van zijn wiskundige resultaten, zijn levensloop en zijn betekenis voor anderen.

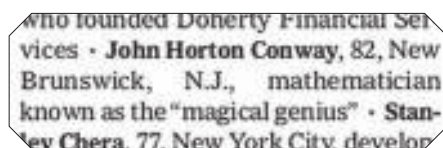
John Horton Conway is op 11 april 2020 op 82-jarige leeftijd gestorven na besmetting met COVID-19. Hij was een zeer markant wiskundige, niet alleen briljant in zijn vak maar ook als inspirator, entertainer en docent. Ik heb hem, volgens mijn beste herinneringen, het eerst gezien op de Technische Universiteit Eindhoven. Hij gaf daar een voordracht in het Combinatorial Theory Seminar van Jack van Lint en Jaap Seidel. Dat optreden vergeet ik niet gauw. Hij begon door drie titels op het bord te schrijven en ons te vertellen dat hij koffie uit de automaat verder op de gang ging halen en bij terugkomst van ons verwachtte te horen welke titel we gekozen hadden. De zaal was er op tijd uit wat ze wilde horen. In zijn blog dat snel na Conways overlijden verscheen, beschreef Peter Cameron [2] een vergelijkbaar optreden van de veelzijdige spreker.

Naast Peter Cameron (die hem een polymath noemde), hebben ook Terence Tao [18] (die hem beschreef als een extreem punt in het convex omhulsel van alle wiskundigen) en Gil Kalai [15] (die spreekt over een verbazingwekkende wiskundige held) aandacht besteed aan Conways bijzondere leven. Kranten als *NRC* en *de Volkskrant* en tijdschriften als *The Economist* hebben boeiende biografieën over hem gepubliceerd. Eerder zijn al veel anekdotes over Conway beschreven in het boek van Marcus du Sautoy over het Monster [19]. In dat licht zal ik niet veel meer doen dan een kort overzicht geven van zijn levensloop en wiskundige werk, vermengd met een paar persoonlijke indrukken.

Er zijn al veel artikelen en zelfs boeken geschreven over Conway. De meest uitge-

breide autobiograaf tot nu toe, Siobhan Roberts [17], noemt Conway een *Genius At Play* en typeert hem met een combinatie van eigenschappen van Archimedes, Mick Jagger, Salvador Dalí en Richard Feynman. Deze indrukwekkende lijst kan ik onderschrijven, al valt bijvoorbeeld ook te denken aan John Lennon (originaliteit in gedrag en creativiteit, afgezien van de gemeenschappelijke geboorteplaats) en Pablo Picasso (obsessie voor schoonheid van eigen werk in een combinatie van eenvoud en verrassing, en fascinatie voor vrouwen). Ik kreeg als een van de velen in een paar seconden na het noemen van mijn geboortedatum van John te horen op welke dag van de week ik geboren was. Ook ik ben door hem getrokken in spelletjes die niet te winnen waren.

De laatste keer dat ik John Conway zag was in 2013 bij het Nederlands Mathematisch Congres in Nijmegen, tijdens en na een optreden voor een breed publiek dat hij betrok in een onderzoek hoe je kon rekenen met bepaalde oneindige rijen. John kon niet meer alle spieren in zijn rechterarm goed aansturen (gevolg van een beroerte), maar liet zich daar totaal niet door uit het veld te slaan. Bij de pannenkoek daarna aan de Kromme Rijn vertelde hij onder andere veel plezier te beleven aan vergelijkbare voordrachten in de wijde omgeving van Princeton, waartoe hij nog regelmatig werd uitgenodigd.



The New York Times vulde op 24 mei de hele voorpagina met een selectie van de toen bijna 100.000 Amerikaanse coronadoden. John Conway was één van hen.

Levensloop

John Conway is op 26 december 1937 in Liverpool geboren. Al vroeg kwam zijn wiskundig talent boven. Op 4-jarige leeftijd hoorde zijn moeder hem al machten van 2 benoemen. Zeven jaar later vatte hij al de ambitie op om als wiskundige aan de universiteit van Cambridge te werken.

In 1964 promoveerde John bij de getaltheoreticus Harold Davenport in Cambridge. Aanvankelijk was de opdracht van Davenport om een speciaal geval van de Hilbert–Waring-stelling expliciet te maken door te bewijzen dat elk natuurlijk getal te schrijven is als de som van ten hoogste 37 vijfde machten van natuurlijke getallen. Na veel uitstelgedrag (gevuld met het oplossen van andere problemen) besteedde Conway een zomer in Liverpool aan hard werken om dit te bewijzen. Maar Chen Jingrun was hem in publicatie voor en Davenport vond Conways methoden geen tweede publicatie waardig. Daarop verschoof Conway zijn aandacht naar de logica, het uiteindelijke onderwerp van zijn proefschrift *Homogeneous Ordered Sets*.

Een jaar na zijn promotie werd Conways ambitie verwezenlijkt door een aanstelling als fellow en lecturer in de wiskunde aan het Sidney Sussex College van de universiteit van Cambridge. Zijn sociale vaardigheden en speelsheid leidden tot een even interessante als losgevochten dynamische groep studenten om hem heen. Als je in het wiskundegebouw kwam om een medewerker te bezoeken, liep je vanzelf langs de lage stoelen in de lounge waar je gemakkelijk in de groep rond Conway getrokken kon worden om mee te doen met de spellen (als *Phutball* en *Hackenbush*) en mee te denken over de wiskundige (vooral groepentheoretische en combinatorische) problemen die daar bijna letterlijk op tafel lagen.

Conway werd sociaal zeer actief en kwam in het begin moeilijk op gang met



John Conway in actie tijdens het NMC in Nijmegen, 2013

Foto: Cor Kraaijkamp

de wiskunde. Maar uit alles wat zijn luis-terend oor optekende, kwam de vraag van Leech over een interessant modulair rooster in 24 dimensies erg goed aan. John Conway had enkele malen de ideeën van Leech over dit rooster zonder vectoren op afstand 2 van de oorsprong aangehoord en was aan het denken geslagen. Hij stelde vast (zie [3, 4]) dat de automorfismengroep van het rooster een eindige groep van orde $8.315.553.613.086.720.000$ is en dat, na uitdeling van de scalarvermenigvuldiging met -1 , een enkelvoudige groep ontstaat die half zo groot is en tot dan toe nog onbekend was. De groep staat nu bekend als de Conway-groep Co_1 . Door naar stabilisatoren van vectoren uit het rooster te kijken bracht hij nog twee tot dan toe onbekende eindige enkelvoudige groepen naar voren. Deze drie enkelvoudige groepen behoren tot het exclusieve lijstje van de 26 zogenaamde sporadische groepen, de enige eindige enkelvoudige groepen die niet in langer bekende reeksen voorkomen.

Naast deze bijdrage aan de groepentheorie is de *Atlas of Finite Simple Groups*

[7] erg bekend geworden. Het papieren resultaat is een boek dat in elke bibliotheek makkelijk te vinden was door zijn grote vorm (420×300 mm), kersenrode kleur en spiralen binder. In de atlas zijn beschrijvingen van alle eindige enkelvoudige groepen te vinden, concrete constructies (in de vorm van voortbrengende matrices, presentaties met behulp van voortbrengers en relaties, permutatievoorstellingen en automorfismengroepen van combinatorische objecten als grafen en roosters) en karaktertabelen. Eigenlijk is het meer een project dan een boek. Al jaren voor verschijning in 1985 liepen Conway en zijn coauteurs rond met computer print-outs vol aantekeningen. Tegenwoordig bestaan er websites met updates van de *Atlas* en uitbreidingen, bijvoorbeeld naar concrete lineaire representaties (waaronder modulaire). De vier coauteurs van Conway aan de *Atlas of Finite Groups* zijn discipelen van Conway die vaak in de lounge te vinden waren. Ten eerste Richard Parker, ontwerper van talloze slimme algoritmen voor industrie, de genoemde *Atlas* en het groe-

pentheoretische softwarepakket GAP. Ten tweede Simon Norton, de inmiddels overleden expert van *Monstrous Moonshine* en het spel *Phutball*, die de inhoud van de *Atlas* even goed in zijn hoofd had zitten als het rooster van de Engelse openbare bussen, hoofdpersoon in het boek *The Genius in my Basement* [16]. Ten derde Robert Wilson, die later ook de online atlas opzette — zie [22] — en doorging met Conways aanpak van uiterst korte constructies van gecompliceerde enkelvoudige groepen. Ten slotte Rob Curtis, die onder andere de *Miracle Octad Generator* ontwierp volgens Conways richtlijnen voor speelse constructies die je uit het hoofd kunt reproduceren.

Eind jaren zeventig kwam de classificatie van de eindige enkelvoudige groepen in zicht, zoals blijkt uit de proceedings van de conferentie over eindige groepen in de zomer van 1979 in Santa Cruz [19]. Het bestaan van het Monster, de grootste van de 26 sporadische groepen, werd vermoed, maar werd pas bewezen in het artikel getiteld 'Friendly giant' van Griess uit 1982 [13]. Niettemin was ten tijde van de

conferentie al een spectaculair verband vermoed (vooral op grond van de karakters, de sporen van elementen in lineaire voorstellingen van het Monster, die al langer bekend waren) tussen het Monster en modulaire functies. Deze door een opmerking van John McKay ontstane studie kreeg de naam *Monstrous Moonshine*. John Conway preciseerde met Simon Norton de tot dan toe vage vermoedens, zie [10]. Later, in 1992, heeft Johns leerling Richard Borcherds [1] deze vermoedens bewezen.

‘Spel en wiskunde’ werd zijn handelsmerk. Een van de meest bekende voorbeelden uit die tijd is het spel *Game of Life*, dat vandaag de dag via apps te bewonderen is op bijna elke smartphone. Na achttien maanden uitproberen met veel gezelschappen, maar vooral in de genoemde lounge, kwam dit spel voor nul spelers uit. Conway ontwikkelde een voorkeur voor zeer toegankelijke onderwerpen met grote diepgang. Het tastbare bewijs van de interactie van spel met echte wiskunde is het boek *On Numbers and Games* [6] geworden, dat in 1976 verscheen. De surrealistische getallen die hier tot stand kwamen doen inderdaad aan Dalí denken.

In 1989 vertrok Conway naar Princeton. Hij werd daar de Von Neumann professor in toegepaste en computationele wiskunde. De Cambridge-groep rond Conway viel vrij snel daarna uiteen. Op de nieuwe plek kwam een groep als in Cambridge niet meer van de grond. Daar staat tegenover dat hij een steeds groter publiek bereikte. Ook in Princeton zijn jonge briljante wiskundigen (waaronder Manjul Bhargava) dankbaar voor zijn positieve invloed. Op persoonlijk vlak gebeurt er veel, een derde huwelijk, een grote depressie, hartproblemen en een beroerte.

Vanaf 2004 ging hij ook weer aan de slag in de logica of misschien wel de filosofie. Met zijn collega van Princeton wees hij in 2006 de Vrijewilstelling (Free Will Theorem, zie [8,9]). Onder drie aannamen (SPIN en TWIN over het gedrag van spin 1-deeltjes, en FIN over een eindige bovengrens aan de snelheid van informatieoverdracht) werd bewezen dat als de keuze van richtingen waarin spin 1-experimenten uitgevoerd worden geen functie is van de informatie die de experimentatoren tot hun beschikking hebben, de respons van de deeltjes evenmin een functie is van de informatie die hen ter beschikking staat. Het bewijs van de stelling wordt niet

in twijfel getrokken maar de interpretatie van vrije wil geeft aanleiding tot veel discussie met onder anderen filosofen en natuurkundigen. Misschien is Conways aansprekende naamgeving hier veel collega's te ver gegaan, maar zeker is dat het veel aandacht kreeg.

In Princeton bleef Conway actief. Hij schreef er boeken en veel kleine artikelen, vaak over combinatoriek, getaltheorie, puzzels of spellen, vaak met co-auteurs. Soms ook overzichten, die voortkwamen uit voordrachten.

Wiskunde en spel

Conway was een vrijgevochten persoon. Uit interviews komt hij naar voren als iemand die in het begin ietwat verlegen en onzeker was en pas zelfvertrouwen kreeg na de vondst van de drie sporadische groepen aan de hand van het Leech-rooster. Zeker is in ieder geval dat hij daarna zeer zelfbewust werd. Ook was zijn gedrag daarna grotendeels in overeenstemming met zijn voornemen zich niet langer te laten leiden door wat van hem verwacht werd, maar door wat hem boeide. Die fascinatie voor spelletjes leidde niet alleen tot *Game of Life* (zie [23] voor een saluut aan Conway in zijn eigen spel) maar ook tot de eerder aangestipte interpretatie van getallen als spellen [6]. Dit is een van zijn meest indrukwekkende en meest wijd verspreide resultaten.

Een nauw verwant favoriet onderwerp van John was kristallijne combinatoriek, vooral de ontdekking van zeldzame discrete-wiskundige objecten. Daarnaast had hij een groot vermogen om bekende systemen fundamenteel te analyseren en inzichtelijker, toegankelijker, en spannender te maken. John stond ook open voor allerlei niet-wiskundige ideeën. Op de genoemde Santa Cruz-conferentie van 1979 was er een conferentie op de campus over ‘New Ways of Being’, en als vanzelfsprekend was John Conway een keer te vinden in een grote zaal waar de deelnemers een meditatie sessie hielden.

Conway was speels. De vrijheid die hij zichzelf toestond gaf zijn wiskunde een speels karakter. Dat is al te zien in de naamgeving die hij koos bij zijn favoriete objecten. Hij gaf de naam *Monster* aan de grootste sporadische groep en noemde een kleinere het *Babymonster*. De naam *Monstrous Moonshine* (met een verwijzing naar illegaal alcoholgebruik) is ook

van hem. De zeven 2-dimensionale Frieze patronen die de International Union of Crystallography aanduidt met $p1$, $p1m1$, $p11g$, $p11m$, $p2$, $p2mg$ en $p2mm$ zijn door Conway benoemd als *hop*, *sidle*, *step*, *jump*, *spinning hop*, *spinning sidle* en *spinning jump* en voorzien van tekeningen van voetafdrukken [21] die deze bewegingen in het zand nalaten. Hoe kun je de patronen nog vergeten na deze beeldende benamingen?

Ook in notatie was John buitengewoon creatief. Het getal 1 wordt in *Numbers and Games* geschreven als $\{0|\}$. Andere voorbeelden zijn bekend geworden voor orbifolds (quotiënten van variëteiten naar discrete groepen) en voor knopen. Veel van deze notatie lijkt niet alleen erg vanzelfsprekend, maar is ook nauw verbonden aan diepere eigenschappen die van de objecten. Als voorbeeld waar ik zelf mee te maken kreeg noem ik nog de Livingstone graaf op 266 punten [5]. Het is een zogenaamde afstands-reguliere graaf, wat in dit geval tot gevolg heeft dat elk punt van de graaf precies 11 burens heeft, en verder precies 110, 132 en 12 op de afstanden 2, 3 en 4. De constructie begint met de gebroken lineaire groep $PSL(2,11)$ van automorfismen van de projectieve lijn over het lichaam met 11 elementen. De projectieve lijn Ω heeft 12 elementen, en dus heeft de groep een permutatievoorstelling op Ω , maar de groep heeft ook een permutatievoorstelling op een verzameling S van 11 elementen. Fixeer nu een punt 0 in S . Conway construeert de Livingstone-graaf door als punten op afstand 1, 2, 3 en 4 van 0 te nemen i, ij, xi, x voor $i, j \in S$ met $i \neq j$ en $x \in \Omega$. Bovengenoemde aantallen punten op gegeven afstand tot 0 zijn onmiddellijk duidelijk. Met deze notatie zijn er dan eenvoudige regels voor de verbondenheid van twee verschillende punten van de graaf en is af te leiden dat het patroon van afstanden ten opzichte van elk ander punt dan 0 er hetzelfde uitziet.

Conway was erg communicatief voor een wiskundige. Naast zijn originele resultaten moet zijn charisma een belangrijke reden geweest zijn waarom hij zo beroemd geworden is. Niet alleen zijn vrijgevochten omgang met personen speelde daarbij een rol, maar ook zijn talenten als docent en entertainer. Een voordracht was een uitdagend spel met het publiek. Een individuele ontmoeting maakte hij vaak interessant door een touwtje, een cent, een kaart of

een stel dobbelstenen uit zijn broekzak te halen om een experiment, of gewoon een spelletje met je op te zetten. Als mensen het schrijven van artikelen niet zien zitten, gaat dat vaak samen met de moeite die het hen kost om een resultaat goed op papier te krijgen. Van Conway kreeg ik de indruk dat hij heel goed kon schrijven, maar gewoon de voorkeur gaf aan menselijke interactie.

In de individuele contacten heeft hij voor veel wiskundigen ook een grote betekenis gehad als meedenker en inspirator. Naast de elf proefschriften in Cambridge met hem als promotor, zijn nog zeker vier andere tot stand gekomen door Johns informele bemoeienis. Op een namiddag van de genoemde Santa Cruz-conferentie gaf hij wat aandacht aan mijn vraag hoe de ringen van gehelen over de octaven eruit zien. Voor de gewone ring van gehele getallen heeft Coxeter een mooi voorbeeld gegeven. John was enthousiast en opperde een paar ideeën. Later heb ik de vraag met Plesken en Nebe goed uit kunnen werken. Ik kan me voorstellen dat John Conway zo vaker te werk ging. Hij was vaak zelf aan het woord, maar kon ideeën van anderen goed herformuleren en op potentie beoordelen.

Conway was ambitieus. Hoewel het succes van zijn optredens hem meer bevrediging leek te geven dan het schrijven van boeken en artikelen en hij genereus was in het aandragen van ideeën aan anderen, was hij niet gespeend van wiskundig eergevoel. Het werd eind van de jaren zeventig duidelijk dat het 8-dimensionale unimodulaire rooster E_8 gezien kon worden als een eendimensionaal rooster over een ring van gehele quaternionen over het getallenlichaam $\mathbb{Q}(\sqrt{5})$. Dit leidde al gauw tot de vraag of een 3-dimensionale uitbreiding hiervan niet gezien kon worden als het Leech-rooster (van dimensie $24 = 3 \times 8$). Zowel Conway als Tits gaven een bevestigend antwoord, ieder op zijn eigen wijze. Tits [20] schreef een kort artikel dat voor het verre nageslacht geschreven was, maar voor gewone stervelingen moeilijk te ontleiden is (niet ver van Bourbaki). Conway gaf er spectaculaire voordrachten over, maar een artikel van zijn hand hierover bleef uit. De volgende zorgvuldig geformuleerde zin van Tits in [20] moet hier iets mee te maken gehad hebben: “....the point of this paper lies less in the actual results, often well known, than in the approach which I hope to be new, at least in print (I have little doubt that other people have worked

out for themselves at least some of the arguments presented here).” In het boek [11] met Smith over quaternionen en octaven kwam Conway hier deels op terug in die zin dat hij de benodigde theorie prachtig heeft uitgelegd.

Een grote wens van Conway was om het Monster ‘echt’ te begrijpen. Trots als hij was op zijn leerling, zag Conway de constructie van de gegradeerde algebra waarmee Borchers het verband tussen het Monster en de modulaire vormen legde, niet als een bevredigend antwoord op de vraag naar de reden voor het bestaan van dit gigantisch kristallijne object. We weten nu dat hij dat antwoord nooit gekregen heeft.

Conway beschreef als succesformule dat hij zes ballen in de lucht probeerde te houden. Hij bedoelde daarmee dat hij naast elk onderwerp waaraan hij werkt nog vijf bij de hand had om steeds te kunnen wisselen naar wat op dat moment het meest opleverde. Deze en zijn weloverwogen strategieën bij voordrachten geven aan hoe zeer hij bezig was er het meeste van te maken. Ik denk dat hij een van de beste popularisatoren van de wiskunde in de afgelopen halve eeuw geweest is, en ben dankbaar getuige geweest te zijn van zijn boeiende Life of Games. ☞

Referenties

- Richard E. Borcherds, Monstrous moonshine and monstrous Lie superalgebras, *Inventiones Mathematicae* 109 (1992), 405–444.
- Peter Cameron, blog <https://cameroncounts.wordpress.com/>.
- J.H. Conway, A perfect group of order 8,315,553,613,086,720,000 and the sporadic simple groups, *Proceedings of the National Academy of Sciences of the United States of America* 61 (1968), 398–400.
- John H. Conway, A group of order 8,315,553,613,086,720,000, *The Bulletin of the London Mathematical Society* 1 (1969), 79–88.
- J.H. Conway, Three lectures on exceptional groups, in *Finite simple groups (Proc. Instructional Conf., Oxford, 1969)*, 1971, pp. 215–247.
- John H. Conway, *On Numbers and Games*, London Mathematical Society Monographs, No. 6, Academic Press [Harcourt Brace Jovanovich], 1976. Second edition, A K Peters, 2001.
- John H. Conway, R.T. Curtis, S.P. Norton, R.A. Parker en R.A. Wilson, *Atlas of Finite Groups, Maximal Subgroups and Ordinary Characters for Simple Groups*, with Computational assistance from J.G. Thackray, Oxford University Press, 1985.
- John Conway en Simon Kochen, The free will theorem, *Foundations of Physics. An International Journal Devoted to the Conceptual Bases and Fundamental Theories of Modern Physics* 36(10) (2006), 1441–1473.
- John H. Conway en Simon Kochen, The strong free will theorem, *Notices of the American Mathematical Society* 56 (2009), 226–232.
- John H. Conway en S.P. Norton, Monstrous moonshine, *The Bulletin of the London Mathematical Society* 11 (1979), 308–339.
- John H. Conway en Derek A. Smith, *On Quaternions and Octonions: Their Geometry, Arithmetic, and Symmetry*, A K Peters, 2003.
- Marcus Du Sautoy, *Het symmetrie-monster*, Uitgeverij Nieuwezijds, 2009.
- Robert L. Griess Jr., The friendly giant, *Inventiones Mathematicae* 69 (1982), 1–102.
- Interview of John Horton Conway, Life, Death and the Monster, Numberphile, <https://youtu.be/xOCe5HUObD4>.
- Gil Kalai, blog <https://gilkalai.wordpress.com>.
- Alexander Masters, *The Genius in my Basement*, Fourth Estate, 2011.
- Siobhan Roberts, *Genius At Play: The Curious Mind of John Horton Conway*, Bloomsbury, 2015.
- Terence Tao, blog <https://terrytao.wordpress.com/2020/04/12/john-conway>.
- The Santa Cruz Conference on Finite Groups, *Proceedings of Symposia in Pure Mathematics* 37, Cooperstein, Bruce and Mason, Geoffrey (eds.), held at the University of California, Santa Cruz, CA, June 25–July 20, 1979, American Mathematical Society, 1980.
- Jacques Tits, Quaternionen over $\mathbb{Q}(\sqrt{5})$, Leech's lattice and the sporadic group of Hall-Janko, *Journal of Algebra* 63 (1980), 56–75.
- Voetafdrukken voor Frieze-patronen, https://en.wikipedia.org/wiki/Frieze_group.
- Robert Wilson, P. Walsh, J. Tripp, I. Suleiman, R. Parker, S. Norton, S. Nickerson, S. Linton, J. Bray en R. Abbott, *ATLAS of Finite Group Representations - Version 3*, <http://brauer.maths.qmul.ac.uk/Atlas/v3>.
- xkcd, saluut aan Conway in de vorm van een Game of Life, <https://xkcd.com/2293>.

Daan Mulder

mulderdaan@live.nl



Het keerpunt van Marie Beth van Egmond

Je moet ook een beetje jezelf ergens in verliezen

Het is misschien wel toepasselijk dat ik Marie Beth van Egmond, Junior Crypto Specialist bij de afdeling Cyber Security & Robustness van onderzoeksorganisatie TNO niet in levende lijve spreek, maar via Skype. Het is *lockdown*, tenslotte. “Ik las in je eerdere Keerpunten dat je graag thee drinkt,” zegt ze, terwijl ze zichzelf achter de computer een kop inschenkt. Zelf loop ik ook nog even naar de keuken om een kop thee te halen, voor we met interview beginnen.

Hoe zag je werkdag eruit voordat de hele corona-toestand uitbrak?

“Heel erg gevarieerd eigenlijk. Ik werk nu zo’n anderhalf jaar bij TNO. Daar doen we onderzoek in samenwerking met bijvoorbeeld banken of zorgverzekeraars. Wij kijken wat er allemaal mogelijk is met de technologie die zij over een jaar of vijf willen inzetten. Ik maak er dan een demonstratie van — een ‘demo’ — in Python. En ik maak en geef ook veel presentaties. Eigenlijk zit ik het meest van mijn tijd in Powerpoint te werken.

Een project gaat bijvoorbeeld over witwasdetectie. Dat gaat over hoe banken fraudeurs kunnen detecteren door op een privacy-vriendelijke manier data uit te wisselen. Daarvoor kun je een techniek gebruiken waar wij veel onderzoek naar doen, Secure Multi-Party Computation (MPC).

Bij zo’n project komen ook heel veel ingewikkelde juridisch dingen kijken, waar ik dan zelf geen verstand van heb. Maar ik kan daar dan wel uit technisch oogpunt over meedenken. Dus dan zit ik aan tafel met allemaal, tja, mannen die daarover praten: fraude-experts van de Rabobank, mensen van compliance, die weten heel veel van die wettelijke dingen.”

Hoe is het om nu thuis te moeten zitten?

“Eigenlijk gaat alles gewoon door. Ik merk alleen wel dat de dingen die ik heel

leuk vind, er nu veel minder zijn. Zoals met collega’s praten, en samen nadenken over dingen. Het is toch wel een bepaald soort energie die je samen hebt; soms zat ik gewoon een hele dag met mensen in een kamertje te werken.”

Waar overleg je dan over, over hoe je het moet programmeren?

“Meer over concepten. Met MPC, bijvoorbeeld, zijn er allerlei cryptografische oplossingen mogelijk. Wiskundig gezien

kun je wel elke mogelijke berekening maken, in de praktijk is het anders omdat een heel ingewikkeld algoritme gewoon erg veel rekentijd kost. Welk protocol is dan het meest geschikt?

Het idee van MPC is dat je met meerdere partijen een berekening kunt uitvoeren, zonder dat je je eigen data deelt. Je kunt bijvoorbeeld zo getallen optellen: stel ik ben met A en B samen en we willen ons gemiddelde salaris berekenen, zonder dat we elkaar ons salaris vertellen. Dat kan via een algoritme: we kiezen elk drie getallen die opgeteld gelijk zijn aan ons eigen salaris. Eén van die getallen geef ik aan A, een ander getal geef ik aan B, de derde houd ik zelf. Zij doen hetzelfde met hun drie getallen. Dan tellen we elk de drie getallen die we hebben bij elkaar op en die uitkomsten delen we met elkaar. Daar berekenen we het gemiddelde van: zo weet niemand elkaars salaris, maar weten we wel het gemiddelde.

Maar als twee van die mensen hun salaris wél met elkaar delen, weten ze ook wat die derde verdient. Wiskundig gezien zijn er allerlei waarschuwingen: als je een protocol kiest, hoort er een getal bij dat iets zegt over of het nog veilig is als een bepaald aantal deelnemers onderling data deelt. En je moet altijd bedenken dat hoe meer berekeningen je samen doet, hoe meer je over de data van de anderen kan achterhalen.

Wat er met witwassen vaak gebeurt, is dat er geld naar verschillende banken wordt gestuurd. Die banken mogen hun transactienetwerken niet zomaar met elkaar delen. Wij proberen een algoritme te verzinnen dat die fraude kan detecteren,



Marie Beth van Egmond tijdens het Skype-interview

en te bedenken hoe je daar een veilig MPC-protocol van kunt maken.”

Heb je het gevoel dat er goed met privacy om wordt gegaan?

“Ja, op zich wel. Dat wij dit onderzoek doen, kun je op twee manieren benaderen. Je kan zeggen dat MPC iets slechts is: ‘Waarom moet die data überhaupt op één of andere manier bij elkaar komen?’ Tegenovergesteld kun je natuurlijk ook zeggen: ‘In plaats van dat die data echt bij elkaar wordt gezet, hebben we een techniek waardoor we er toch mee kunnen rekenen.’ Tot nu werkt men bijvoorbeeld in de zorg met een trusted third party, een partij die de berekeningen doet, maar belooft verder niks met die data te doen. MPC is een technische vervanging daarvoor, en privacytechnisch gezien een verbetering.”

Was het wennen om in zo’n werkritme te komen?

“Ja, best wel. Wat ik het moeilijkste vond, is dat het zo afgebakend is. Als je studeert, ben je met je vrienden op een universiteit, je gaat daarna misschien met ze eten, en daarna nog wat huiswerk maken, en zo rolt dat verder. Nu moet ik heen en weer reizen naar Den Haag, heb ik vaste werktijden. Dat vond ik heel lastig. Wel fijn dat je in het weekend niets te doen hebt, maar ik sliep niet zo goed doorde- weeks en ging dan in het weekend tot in de middag slapen. Maar dan moest ik de week erna weer vroeg op. Ik kon er de eerste maanden echt niet mee omgaan.”

Is het erg een mannencultuur?

“Het wordt wel wat minder; het aantal vrouwen is afgelopen jaar verdubbeld. Van 3 naar 6, van de 60; nouja, een deel van de afdeling werkt in Groningen, maar alle vrouwen zitten in Den Haag. Voor mij in het dagelijks leven eerder 6 op 30 dus. Ik merk er zelf eigenlijk niet zo heel veel van. Wel een keer dat ik mijn zorgen ergens over had uitgesproken, en dat een collega zei: ‘Ja, jullie vrouwen maken jullie ook overal zorgen over, je moet naar de mannen kijken.’ Moet ik me nu per se als man gaan gedragen? Maar de meeste zijn heel zachte aardige nerds, hoor.

Wat een collega zei, wat ik wel herkenbaar vond, is dat we als security-mensen

als beroepsdeformatie hebben dat mensen ook bij elkaar de zwakke plek gaan zoeken. Zoals je dat bij een algoritme ook doet. Als je samen koffie aan het drinken bent, wordt er het hardst gelachen als je een zwakte bij iemand hebt ontdekt, en daar een grapje over weet te maken.”

Denk je dat je hier over tien jaar nog werkt?

“Ik weet het niet zeker. Ik mis de echte wiskunde weleens: het gevoel dat je had als je een nieuw boek opensloeg en dat je dan dacht: ik snap hier HE-LE-MAAL niks van, en dat je na een paar maanden langzaam begon te begrijpen waar het over ging. Dat voelt wel heel krachtig. Ik vond wiskunde wel altijd heel erg leuk, maar ik had nooit het gevoel van: dit is nou iets waar ik heel goed in ben. Nu merk ik in mijn werk dat er dingen zijn waar ik wél goed in ben, zoals leiding geven of nadenken over concepten, en daar kritisch op zijn.”

Waarom ben je eigenlijk wiskunde gaan studeren?

“Ik heb eerst bèta-gamma gedaan, een brede studie waar je na een jaar je ‘major’ kiest. Toen deed ik daar een vak logica, dat vond ik heel erg leuk. Ik had denk ik nooit wiskunde gekozen toen ik direct van de middelbare school kwam. Ik wist wel dat je dat kon studeren, maar ik had geen tien voor wiskunde, ik had gewoon een acht.

Ik weet nog dat ik de eerste weken wel eens huilend boven mijn huiswerk zat. Het was denk ik de eerste keer in mijn leven dat ik dacht: dit gaat misschien wel helemaal niet lukken. Daarvoor was alles een beetje leren, en dan lukt het wel. Ik weet nog heel goed dat we bezig waren met de epsilon-delta-definitie, en dat ik het gewoon niet snapte. De werkcollegedocent had een aantekening gemaakt in mijn schrift over een van die sommen, waar ik een hele avond naar gekeken heb tot ik dacht: oh, oké, zo zit het! Toen dacht ik: ik kan dit dus wel begrijpen, maar ik moet hiervoor wel heel hard werken. Als ik een slechte werkcollegedocent had gehad dat eerste halfjaar, was ik misschien wel met de studie gestopt.”

Kom je uit een wiskunde-gezin?

“Nee, helemaal niet. Mijn ouders zijn psychiaters. Mijn twee broers en mijn zus doen wel allemaal iets technisch: oogarts en lucht- en ruimtevaarttechniek, en mijn zus doet theoretische natuurkunde. We houden wel allemaal van puzzelen, maar dat is vooral iets van de laatste jaren.

Mijn vader was cum laude afgestudeerd van zijn studie geneeskunde, maar hij zei daarover: cum laude afstuderen is het domste wat je kunt doen, dan heb je eigenlijk iets te makkelijk gekozen. Hij heeft ons wel altijd gepusht — nouja gepusht klinkt zo negatief — ‘gestimuleerd’ om dingen te doen die boven je macht liggen. Bij TNO gaat het er meer om je krachten te vinden en te versterken; waar je goed in bent, dat moet je uitbuiten. Dus dan moet ik aan mijn vader denken, als ik bezig bent met iets waar ik gewoon goed in ben: is dit niet een beetje saai?

Toen ik aan mijn scriptie begon, leefde mijn vader nog. In het begin dacht ik bij het schrijven: voor wie doe ik het nu eigenlijk? Met andere vakken heb je nog een docent, of andere mensen die het ook doen, maar die scriptie voelde echt alsof ik het helemaal uit mezelf moest halen. Toen dacht ik: de enige die het echt erg zou vinden als ik met mijn scriptie zou stoppen is mijn vader.

Wat ook wel betekent dat er iets wegviel toen hij overleed — dat klinkt een beetje gek — in een positieve zin, van een bepaalde druk om te presteren. Het was ook een heel klein beetje bevrijdend. Ik vind het moeilijk uit te leggen. Toen ik bijvoorbeeld een half jaar naar Portugal ging, op uitwisseling, vond hij dat wel prima, maar hij was wel heel bang dat ik mijn studie niet zou afmaken. Dat ik het allemaal net zo lang zou uitsmeren tot ik op een gegeven moment geen zin meer zou hebben.

Uiteindelijk denk ik wel dat mijn ouders allebei heel veel vertrouwen hadden in ons, dat we het zo ver zouden schoppen. Ik geloof er nog steeds niet in dat je altijd moet doen waar je goed in bent. Je moet ook een beetje jezelf ergens in verliezen, door een barrière van weerstand heen. Dan kom je toch steeds verder. ☞

Goede suggesties voor een Nederlandse wiskundige met een keerpunt in zijn of haar carrière zijn welkom via keerpunt@nieuwarchief.nl.

Rob van OordWaddinxveen
robvanoord@tiscali.nl**Evenement 26ste Nationale Wiskunde Dagen**

Dagen met sterren

Op vrijdag 31 januari en zaterdag 1 februari vonden voor de 26ste keer de Nationale Wiskunde Dagen plaats. Na vorig jaar uitgeweken te zijn naar Veldhoven was het evenement dit jaar weer terug in de Leeuwenhorst in Noordwijkerhout. Een verslag van Rob van Oord.

Voor mij begonnen de NWD al op donderdag 30 januari, in Schoonhoven. Sjaak Kamerling gaf via de WiskundeE-brief te kennen dat hij liefhebbers bij hem op het Willem de Zwijgercollege wilde laten kennismaken met NeoTrie. Dit is een nieuwe benadering van meetkunde met virtual reality. Ik wist niet dat de volgende dag dit in een workshop van de NWD te gebeuren stond. De maker van deze software José Rodríguez was er ook. Ik legde José uit wat voor soort ster in mijn workshop getoond gaat worden (zie Figuur 1). Of hij die ook in de virtuele wereld kon maken. Deze uitdaging ging hij aan en na wat uitproberen van de mogelijkheden met spiegelen, knip-

pen en plakken in zijn virtuele villa kwam mijn ster tevoorschijn (zie Figuur 2). We waren allebei blij. Op zijn website is nu te zien hoe hij de ster in de virtuele wereld construeert. Zie youtu.be/Y13cOyvJG10.

Al liep de bijeenkomst een uur uit, ik had wel mijn eerste virtuele ervaring, met een VR-bril en twee joysticks waarmee ik mijn eerste virtuele ruimtefiguur in elkaar klikte. Ik liet hem draaien, kleurde hem in en ging er in staan. Voor kinderen die vaak gamen is dit een prachtige nieuwe manier om met (meetkundige) wiskunde bezig te zijn. Sjaak heeft er al werkbladen voor gebruik in de klas voor gemaakt.

Netwerken

Vrijdagochtend om 9.05 uur pikte ik een collega-vriend van mijn oude school op en reden we met een volle auto en vol verwachting naar Noordwijkerhout. Zeker nu ik wist dat het zebraboekje 59, *Optimaliseren in Netwerken*, waar ik lang aan gewerkt heb samen met Jan Schrik en Steven Wepster, eindelijk in de stand van Epsilon ligt. Dat deze tak van wiskunde super actueel is bleek al meteen in de eerste lezing.

De aftrap van de NWD werd gegeven door Don Satijn met Tall Tales Company. Op het ritme van muziek lieten drie jongleurs ballen door de lucht gaan met een puur wiskundig patroon. Elke 'worp' heeft zijn eigen code, dus 121412131 is daarmee een vast werppatroon met de ballen. Het was een mooie synchrone performance.

In de startlezing van de NWD legde Nelly Litvak ons uit hoe je onderzoek kunt doen aan grote netwerken zoals Facebook, Twitter en Instagram. Met beperkte sets van data kun je er al snel uithalen wie de topers in deze internetwereld zijn. De data worden gekoppeld in grafen. De graad van een knooppunt geeft aan hoe belangrijk die is. In de graaf zijn deze personen snel te zien als sterren. Zie Figuur 3.

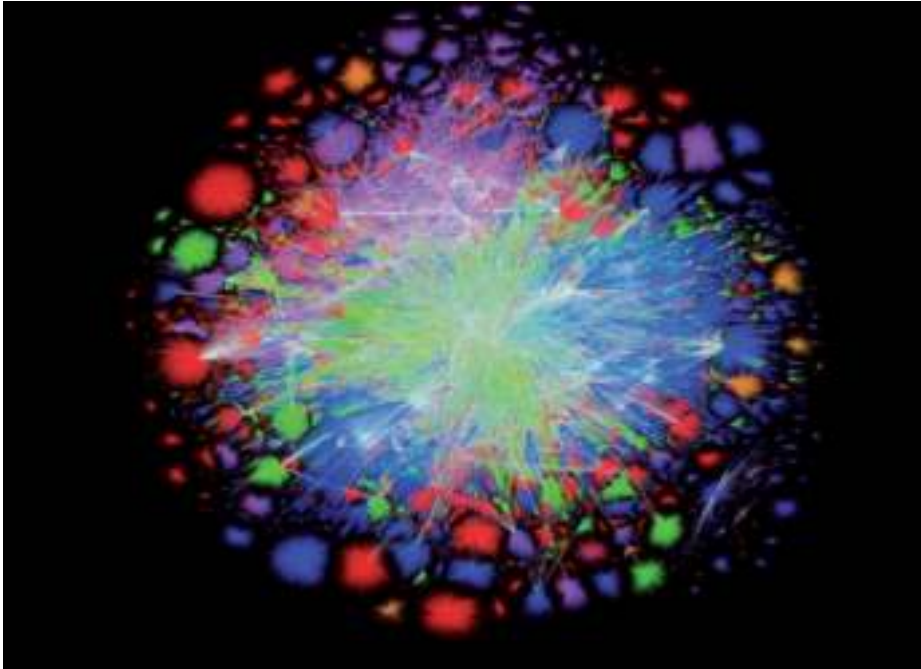
Een veelvoorkomende fout wordt gemaakt als je jezelf gaat vergelijken met anderen om je populariteit te berekenen. De zogenaamde vriendschapsparadox. Als



Figuur 1 Dodecater.



Figuur 2 Dodecater in NeoTrie.



Figuur 3 Sociaal netwerk, voorbeeld uit de lezing van Nelly Litvak.

je gaat berekenen hoeveel vrienden al je vrienden gemiddeld hebben op het netwerk waar je zelf erg veel vrienden hebt, dan tel je zelf relatief vaak mee in de berekening van het gemiddelde van je vrienden, terwijl je jezelf niet meetelt bij het berekenen van het gemiddelde van je eigen vrienden. Je vrienden zullen daardoor denken dat ze populairder zijn dan werkelijk het geval is, en een populair iemand zal zich minder populair voelen dan hij of zij werkelijk is. Er staan verschillende filmpjes op YouTube waarin dit effect wordt uitgelegd. Dus: vergelijk jezelf niet met anderen! Iedereen is uniek.

Door steeds snellere computers worden algoritmen waarmee je (schaalvrije) netwerken bestudeert ook steeds sneller. Steeds rapper kunnen kwetsbaarheden en storingen in netwerken worden opgespoord.

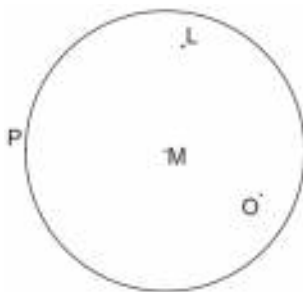


Figuur 4 Weerspiegelpasser.

Spiegelen

In mijn eerste workshop was ik te gast bij Henk Hietbrink. Hij had in oude manuscripten een tekening gevonden van een instrument dat je kunt gebruiken om lichtstralen van lichtbron naar oogpunt te tekenen bij spiegelen in een lijn en bij spiegelen via de binnenkant van een cirkel, of via de buitenkant van een cirkel. We maakten een soort passer (van karton) waarmee we snel het punt op de lijn of op de cirkel konden vinden, waarin de lijn van lichtbron naar oogpunt gespiegeld wordt. Zie Figuur 4.

Soms zijn er binnen een cirkel vier mogelijke spiegellijnen van lichtbron naar oogpunt te tekenen. Je kunt dit begrijpen als je bijvoorbeeld met GeoGebra alle mogelijke weerspiegelpunten tekent, waarbij je ervoor zorgt dat de bissectrice van de spiegellijnen door het middelpunt van de cirkel gaan. Deze kromme snijdt de cirkel



Figuur 5 Werkblad in GeoGebra.

vaak in vier punten. Zie Figuur 5. In dat geval verwachtte Henk dus meer dan twee oplossingen te zien bij ons deelnemers.

Dit is het recept voor de constructie van de kromme van de spiegelpunten: gegeven zijn de cirkel met middelpunt M , en daarbinnen de punten O (oog) en L (lichtbron). Teken voor een willekeurig punt P op de cirkel de lijn PM . Teken het spiegelbeeld L' van L bij spiegelen in lijn PM . S is het snijpunt van lijn $L'O$ en lijn PM . Zet het spoor aan van S terwijl je P over de cirkel beweegt.

Overal waar dit spoor de cirkel doorsnijdt is het punt S een gevraagd punt waarbij de lichtstraal uit L in de cirkel weerspiegeld wordt naar het oog O . In Figuur 6 zie je vier van deze mogelijke spiegelpunten op de cirkel.

Kettingbreuken en tennisballen

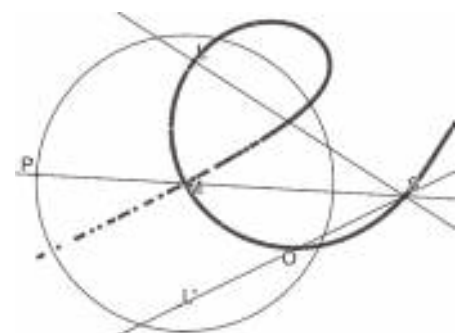
Voor blok 2 ging ik snel naar C32 waar Hans van Lint en Jeanne Breeman net een doe-workshop hadden gegeven met schieten met knikkers tegen gebogen biljartranden en vormen van zeepvliezen in draadmodellen.

Marjan Botke en ik hadden een kwartier om al onze spullen klaar te leggen voor onze workshop. Naast werkbladen met rekensommen en vouwblaadjes in allerlei kleuren werden met hulp van collega's die al kwamen opdagen de overige materialen over de tafels verdeeld.

Na wat leuke rekenoefjes zoals $ab \times cb = ddd$ en een rekensudoku lieten we de deelnemers bepalen tot welk getal een kettingbreuk nadert waarin ze hun leeftijd moesten invoeren. Eerst oefenen met de kettingbreuk

$$a = 1 + \frac{1}{2 + \frac{1}{2 + \frac{1}{2 + \dots}}}$$

Je kunt a schrijven als



Figuur 6 Spiegelpuntenkromme.

$$a = 1 + \frac{1}{1+a},$$

waaruit volgt dat a gelijk is aan $\sqrt{2}$.

Voor de lezer de uitdaging om je leeftijd pq (bijvoorbeeld 43 jaar heeft $p = 4$ en $q = 3$) in een kettingbreuk te zetten bijvoorbeeld als

$$1 + \frac{p}{1 + \frac{q}{1 + \frac{p}{\dots}}}$$

of

$$p + \frac{1}{q + \frac{1}{p + \frac{1}{\dots}}}$$

of

$$1 + \frac{1}{p + \frac{1}{q + \frac{1}{p + \dots}}}$$

Met behulp van recursievergelijkingen bij de optie SEQ op de grafische rekenmachine zie je al snel dat de eerste decimalen van de benadering in de volgende stappen gelijk blijven.

Soms komt er een rationaal of geheel getal uit je kettingbreuk. Bijvoorbeeld bij 43 wordt een van de breuken

$$1 + \frac{4}{1 + \frac{3}{1 + \frac{4}{\dots}}}$$

Dan krijg je

$$a = 1 + \frac{4}{3 + \frac{1}{a}},$$

dit geeft $a^2 + 2a - 3 = 4a$ ofwel $a = 3$. Maar

$$a = 4 + \frac{1}{3 + \frac{1}{4 + \dots}}$$

geeft

$$a = 4 + \frac{1}{3 + \frac{1}{a}}.$$

Oplossen geeft $(a-4)(3a+1) = a$, met $D = 3 \cdot 64$ geeft $a = 2 + 4/\sqrt{3}$. En

$$a = 1 + \frac{1}{4 + \frac{1}{3 + \frac{1}{4 + \dots}}}$$

geeft

$$a = 1 + \frac{1}{4 + \frac{1}{2+a}}.$$

Dan krijg je $(a-1)(9+4a) = 2+a$, met $D = 3 \cdot 64$ is $a = -\frac{1}{2} + \sqrt{3}$.



Figuur 7 Stapel tennisballen

Tijd voor actie. Hoe hoog wordt een stapel met honderd tennisballen? Vragen die eerst beantwoord moeten worden: Hoe stapel je de ballen? Hoeveel ballen zitten er in een laag en hoeveel in een (complete) stapel? Hoe groot is de diameter van een tennisbal? Hoe bereken je de hoogte van een stapel? Hoe stapel je de ballen?

Als je uitgaat van een stapel met lagen van ballen in driehoeken dan is het aantal ballen in een stapel van n lagen $\frac{1}{6}n^3 + \frac{1}{2}n^2 + \frac{1}{3}n$. De hoogte van een piramide van vier ballen bereken je door de hoogte h van de piramide die gevormd wordt door de middelpunten te berekenen. Deze is $h = \frac{1}{3}a\sqrt{6}$ met afstand a tussen de middelpunten (= diameter van een tennisbal). Voor een stapel van n lagen wordt de hoogte $(n-1) \cdot h$. Dan nog een straal onderaan en bovenaan erbij. Dus de totale

hoogte is dan $a + (n-1) \cdot h$. Op je telefoon zoek je dan op dat de gemiddelde diameter van een tennisbal 67 mm is.

In een stapel van zeven lagen passen $1 + 3 + 6 + 10 + 15 + 21 + 28$ (of met de formule $\frac{1}{6} \cdot 7^3 + \frac{1}{2} \cdot 7^2 + \frac{1}{3} \cdot 7$) = 84 ballen. Dus voor 100 ballen heb je de stapel van 8 lagen nodig. Zie Figuur 7. Bedenk dat voor 100 tennisballen alleen de onderste 4 lagen ($36 + 28 + 21 + 15 = 100$) nodig zijn. De stapel wordt dan 23 cm hoog.

Vervolgens werden in de groepjes ruiten gevouwen om daarna samen een twaalf-ruitenvlak te kunnen maken. De flappen aan de ruiten moesten op een juiste manier in de openingen in de ruiten worden geschoven. Met van vier kleuren elk drie ruiten kun je een mooi symmetrisch gekleurd ruitentwaalfvlak knutselen. Zie Figuur 8.

Daarna werd ontdekt dat het ruitentwaalfvlak in feite is opgebouwd door zes piramides op de zijanten van een kubus te plaatsen. Aan het vouwen van de kubussen met een deuk kwamen we niet meer toe. Dat bewaar ik voor volgend jaar. Als apotheose liet ik sterren uit een doosje komen. Deze dodecaster ontstaat als holte door bij een regelmatig twaalfvlak zes 'dakpunten' af te zagen en in de kubus te klappen die je overhoudt na het afzagen. Zie ook de hand-out van onze workshop van de NWD 2019. Henk Hietbrink was zo aardig geweest om voor ons met zijn 3D-printer een flink aantal van die sterren te maken. Hij had ook in allerlei kleuren een grote voorraad met kleine sterren met gaatjes als oorbel geprint. Met ringetjes en oorhangertjes konden liefhebbers een setje van deze unieke sieraden aanschaffen. Zie Figuur 9.



Figuur 8 Ruitentwaalfvlak



Figuur 9 Dodecaster oorbellen

FUNRUN en Busy Beaver

Er was dit jaar niet alleen een FUN-RUN (om 7 uur zaterdagochtend) maar de Belg David Eelbode gaf op vrijdagavond een vermakelijke show met FUN-damentele wiskunde. Hij begon met de barbierparadox. In het dorp scheert de barbier iedereen die zichzelf niet scheert. Scheert hij zichzelf of niet? In Vlaanderen is dit probleem opgelost met een vrouwelijke barbier. Hij maakte wat grappen waartoe logica kan leiden als je niet precies weet wat je aan moet met OF. Het inclusieve OF (OR), het exclusieve OF (XOR) en het verboden OF (NOR). Dit doet zich voor als er twee vrouwen in het spel zijn.

Daarna ging de lezing over het Busy Beaver-probleem. Hoe groot is het maximaal aantal enen die een n -state Turing-machine kan printen als je begint met alleen maar nullen? Hij legt de 3-state Turing-machine uit aan de hand van een grote rij lege doosjes. Per stap bekijk je of een doosje leeg (0) is of vol (1). Afhankelijk van de kleur T-shirt (wit, geel of rood) wat je aan hebt (= de instructie die je moet volgen) doe je een pingpongballetje in het doosje (1) en ga je dan een doosje naar rechts dan wel links. Uiteindelijk stopt dit proces bij zes enen. We schrijven $\Sigma(3) = 6$. Ik heb de slides van zijn lezing nog goed bestudeerd, maar helemaal snappen doe ik het nog niet. De boodschap is duidelijk: wiskunde is niet af. Op internet kon ik geen duidelijke omschrijving vinden van wat het probleem van de Busy Beaver precies is. Misschien is er een lezer die me dat kan uitleggen?

Andere wiskunde van Busy Beaver vond ik terug op het mooi verdiende T-shirt, zie Figuur 10.

Ik heb ontcijferd dat de laatste rij nullen en enen 11111100100 precies 2020 digitaal geschreven is ($4 + 32 + 64 + 128 + 256 + 512 + 1024 = 2020$) en 11010 (26 digitaal van-



Figuur 10 T-shirt FUNRUN.



Figuur 11 Berenpark.

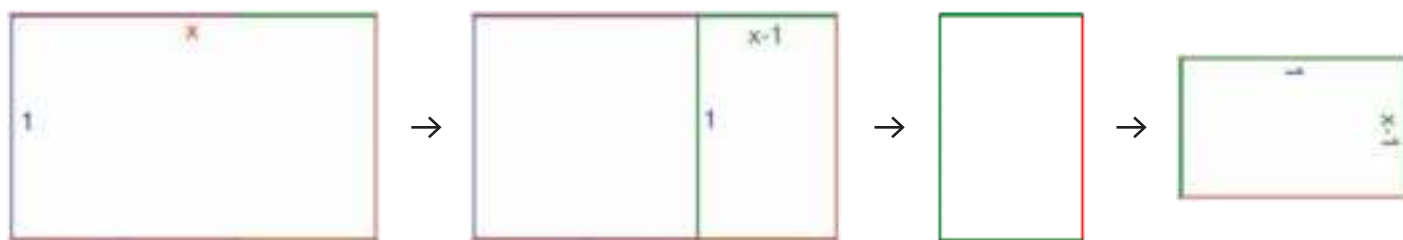
wege 26ste NWD), maar de 10110010 (44 digitaal) kon ik zo gauw niet thuisbrengen. Na enig nadenken en een hint van Fred, de eindredacteur van dit blad, kwam ik tot de Nederlandse versie van FUNRUN: lolloop.

Berenkuilen en veelvlakken

Onder het genot van enkele biertjes heb ik in de hal met de spelletjes veel plezier beleefd aan het leggen van Berenkuilen, zie Figuur 11. Bij het zien van de puzzelstukjes van dit spel moest ik denken aan Odette de Meulemeester (die warempel ook nog steeds een workshop verzorgt) met haar pentomino's. Er moeten dierenparken worden gebouwd. Door in je beurt de bouwstenen strategisch neer te leggen kun je punten vergaren. Toiletten, kiosken en waterpartijen waren op zich niets waard, maar onmisbaar om een parkdeel compleet te kunnen maken. Ik heb het spel gekocht en al een aantal maal met vrienden gespeeld. Aan dansen ben ik helaas niet toegekomen.

De zoveelste reis die mijn vrouw en ik naar Italië zouden maken om daar de eeuwenoude cultuurproducten te (be)zoeken, is uiteraard uitgesteld. Enkele jaren geleden waren we in Sansepolcro. Daar is een museum geweid aan Luca Pacioli, een monnik en vroegrenaissance wiskundige, en zijn studies over perspectief tekenen. Daar en in de omgeving zijn ook prachtige fresco's van Piero della Francesca te be-

wonderen. Naast de Geschiedenis van het Ware Kruis in de kathedraal van Arezzo is verreweg het mooiste fresco, Madonna del Parto, in een oude school in Monterchi te vinden. Hij werkte samen met Luca Pacioli en gebruikte uitzonderlijk goed perspectief in zijn fresco's. Om die reden wilde ik graag horen wat Dirk Huylebrouck ging vertellen. Hij was de volgende professor uit Vlaanderen die een vermakelijke lezing gaf. Hij vertelde over Leonardo da Vinci en zijn kijk op veelvlakken. Onder zijn redactie was het vijftiende-eeuwse boek *Divina Proportione* van Luca Pacioli met tekeningen van Leonardo da Vinci door Emma Grootveld vertaald in het Nederlands. Als spreker op de NWD kregen we een exemplaar van dit prachtige boek. Dirk was kwistig met het uitdelen van zijn boek. Als je een vraag van hem goed wist te beantwoorden kreeg je meteen ook het boek. Behalve de vijf platonische lichamen staan er ook tal van tekeningen in van half regelmatige lichamen en sterren. Dirk liet zien hoe je afgezaagde delen van veelvlakken naar binnen kunt klappen. Surprise! Daar zat ook de dodecaëder bij uit mijn eigen workshop. Maar de ster die het gat vormt in de kubus gevuld met de 'dakpunten' van het twaalfvlak kende hij niet. Ik gaf hem later op de dag een van mijn 3D-modellen. Dirk heeft al vaak de mythe van de gulden snede proberen te ontzenuwen. Maar de Vlaamse televisie blijft hardnekkig vasthouden aan



Figuur 12 De goddelijke verhouding.

de gangbare opvattingen dat overal in de kunst (onder andere bij de Mona Lisa) bewust de goddelijke verhouding zou zijn aangebracht. Dit getal ($\phi \approx 1,618$) is terug te vinden in een regelmatige vijfhoek als verhouding tussen diagonaal en zijde. Het is hetzelfde getal als de verhouding van de langste en de kortste zijde van een rechthoek die als je er een vierkant met de kortste zijde afknijpt een rechthoek overlaat die gelijkvormig is met de grote rechthoek. Noem de zijden van de grote rechthoek x en 1, zie Figuur 12. Dan geldt bij de genoemde restrictie $x:1 = 1:(x-1)$. Hieruit volgt dat $x = \frac{1}{2} + \frac{1}{2}\sqrt{5}$.

Aansluitend op de lezing van Dirk, kwam Rinus Roelofs aan het woord. Hij heeft de plaatjes in het net genoemde boek verzorgd. Al doende kwamen ze er ook achter dat er heel wat foute tekeningen in het oorspronkelijke boek staan. Rinus liet met schitterende animaties zien hoe door draaiingen van driehoeken, vierkanten, vijfhoeken, enzovoorts, je van het ene half regelmatige lichaam naar het an-

dere kunt transformeren. Als je dan geen dichte vormen maar alleen de randen gebruikt, dan komen de in elkaar gevlochten veelvlakken beter tot uiting. Dit heeft Escher in zijn tekeningen van allerlei sterren ook gedaan. Daarnaast liet hij zien hoe de zogenaamde Kepler–Poinsot-veelvlakken zijn opgebouwd. Op lange tafels in het Atrium lagen tal van Rinus' voorwerpen tentoongesteld. Stuk voor stuk fascinerende objecten vanuit de wiskunde bedacht. Zie Figuur 13.

KI en EGMO

Elk jaar kun je in juni de tuinenroute in de Wieringermeer fietsen. Toen mijn vrouw en ik vorig jaar bij een van de adressen met de eigenaars/kunstenaars over onderwijs te praten kwamen, raadde de heer des huizes me aan het boekje *Plusen en Minnen* van Stefan Buijsman eens te lezen. In heel begrijpelijke taal legt hij de rol van wiskunde in de maatschappij uit. Wat een toeval dat hij de slotlezing van de NWD verzorgde. Hij liet zien wat er gebeurt als

je met kunstmatige intelligentie foto's op Tinder laat zetten. Of als je door KI verzonden interviews laat maken. Dat leidt tot hilarische artikelen die nergens over gaan. Volgens hem hoeven we niet bang te zijn dat het menselijk brein door computers wordt overgenomen.

Voordat we naar huis gingen lieten de vijf slimste meisjes van Nederland zien waarom ze waren geselecteerd voor de European Girls Math Olympiade (EGMO) dit jaar niet geheel toevallig in Egmond aan Zee. Met de extra training door Quintijn Puite en Sietske Tacona moeten Anke, Femke, Kati, Lisa en Naomi wel hoge ogen gaan gooien. Ik vind het opvallend dat Gabriëlle, de oudere zus van Naomi, in 2017 ook al aan de olympiade mee deed (zilveren medaille). Ik had haar toen als leerlinge in 5 vwo.

Dit jaar heb ik overduidelijk ervaren hoe je door de NWD wordt geïnspireerd en hoe je anderen ook kunt inspireren. Ik ben vast van plan om volgend jaar weer te gaan en materiaal en ideeën mee te nemen in mijn volgende workshop. ✨



Figuur 13 Modellen van Rinus Roelofs.

Wieb Bosma

IMAPP
Radboud Universiteit Nijmegen
bosma@math.ru.nl

Stoffelijke resten tastbare herinneringen aan wiskundigen

Berlijnse beelden

Voor een wereldstad zo prominent en zo vol kunst en monumenten, heeft Berlijn eigenlijk relatief weinig herinneringen aan wiskundigen.



Ja, we vonden er Euclides en Archimedes, geschilderd door Luca Giordano (1634–1705) rond 1650, gebroederlijk naast elkaar hangen in de Gemäldegalerie aan het Kulturforum, Abel was hier ooit (nou ja, 'hier': er staat nu een modern gebouw), en Euler woonde en werkte waar nu de vertegenwoordiging van Beieren staat.



Maar wellicht is 'de man zonder eigenschappen' de bekendere wiskundige bij de argeloze voorbijganger. Het Eulercafé aan de Eulerstraat bleek helaas opgeheven, maar Einstein werkt klaarblijkelijk beter als uithangbord voor koffie.



Nog beter werkt het beeld van een vrouw in combinatie met wiskunde, in de reclame, in de stad waar kennis vier muren nodig heeft, en waar je meer wiskunde hoort als je denkt; wiskunde voor alles dat telt. Dit was in de Technische Universität, waar buiten in het plaveisel π is te vinden... maar de Freie Universität in Dahlem geeft de eerste 314 decimalen.



De 'eerste Verzamelingenleer-klok ter wereld' werd door Dieter Binnering (1938-1991) op 17 juni 1975 op de Kurfürstendamm onthuld. De ronde lamp knippert om de 2 seconden; de bovenste 4 'bits' geven ieder 5 uur aan, de vier eronder ieder nog een uur. Daaronder 11 bits voor 5 minuten elk, gevolgd door 4 voor ieder 1 minuut. Niet alle lampjes leken te werken (om 18:56 uur), dus maar goed dat de ontwerper zich om redundantie niet bekommerde. Wel ironisch, want Binnering verongelukte in een privé-vliegtuigje enkele dagen na de aankoop van een fabriek die zijn 'eeuwig-brandende' gloeilampen moest gaan vervaardigen. Dat de woorden 'Berlin clock' versleuteld op Kryptos, het cryptografische beeldhouwwerk uit 1990 van Jim Sanborn op het terrein van de CIA staan, in het laatste, onontcijferde deel, geeft nog meer voedsel tot heerlijke speculatie over samenzweringen. Maar het is ook mogelijk dat de passage in het cryptogram verwijst naar de Urania wereldklok, in de vorm van een regelmatige 24-hoek met daarop de belangrijkste steden in de 24 tijdzones. Deze klok werd ontworpen door Erich John (1932) en op 30 september 1969 in werking gesteld aan de Alexanderplatz in wat toen het Oost-Duitse deel van Berlijn was.



Aan de andere kant van het plein vinden we nog het mozaïek door Walter Womacka (1925–2010) aan het Haus des Lehrers, ontworpen door Hermann Henselmann (1905–1995), uit het begin van de jaren 1960, en onlangs gerestaureerd. Het bevat vele verwijzingen naar klassieke wetenschappelijke kennis.

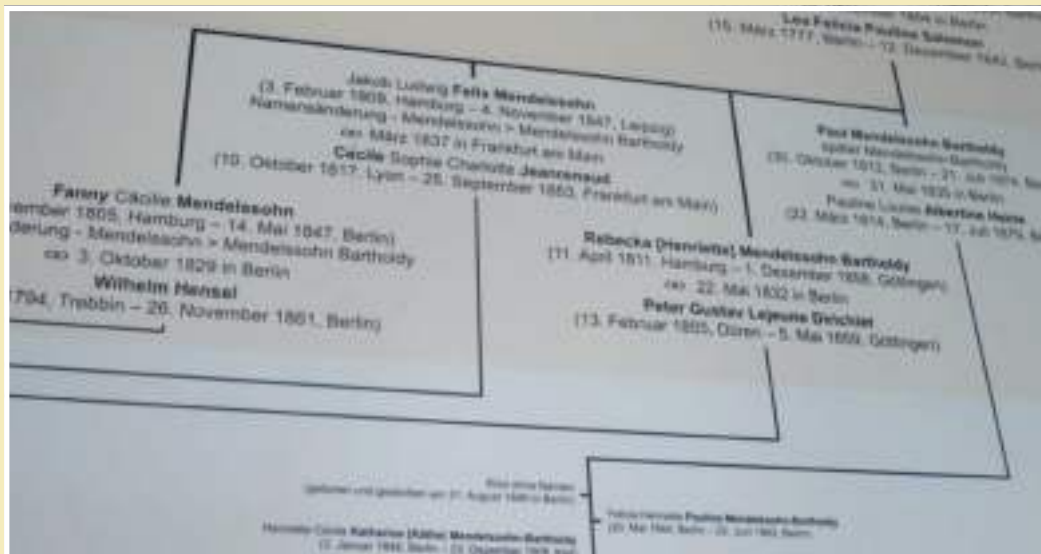


Misschien moeten we toegeven dat Berlijn een centrum van *toegepaste* wiskunde was en is: stad van Werner von Siemens (1816–1892), die wel een beeld ten voeten uit kreeg. Van Konrad Zuse (1910–1995) die een van de eerste programmeerbare rekenmachines bouwde, te vinden in het Techniekmuseum. En van Eugene Wigner (1902–1995), wiskundige en natuurkundige, die groepentheorie op de kwantummechanica toepaste, en in Berlijn een graad in de toegepaste scheikunde haalde.





Maar om nog een glimp van wiskundige coryfeeën op te vangen, ontkomen we niet aan een tocht langs minstens vier grote Berlijnse begraafplaatsen. We vonden er de graven van Karl Wilhelm Borchardt (1817–1880), Immanuel Lazarus Fuchs (1833–1902), Carl Gustav Jacob Jacobi (1804–1851), van Hermann Minkowski (1864–1909), Karl Weierstrass (1815–1897), Gustav Robert Kirchhoff (1824–1887), en het monumentale graf van Leopold Kronecker (1823–1891) en zijn vrouw. Allemaal bekende wiskundigen die hopelijk geen toelichting behoeven maar veel meer ruimte verdienen. Buitenbeentje is misschien Kirchhoff, die we waarschijnlijk mathematisch fysicus zouden moeten noemen, en die bekend is door zijn elektriciteitswetten. Hij was student van Jacobi en van Richelot, trouwde met dochter Clara van de laatste, en kreeg vijf kinderen met haar, voordat zij op 30-jarige leeftijd stierf. Haar vader, Friedrich Julius, noemen we hier graag als de eerste die de constructie van de regelmatige 257-hoek met passer en liniaal uitvoerig beschreef (in 1832).



Het absolute hoogtepunt: het familie-grafmonument van de Mendelssohns. Alle afstammelingen van de intrigerende figuur Moses Mendelssohn (1729–1786), die een bestseller schreef 'Over de onsterfelijkheid van de ziel', maar ook interesse in wiskunde had. We zien een wandvullende stamboom en diverse vitrines in een soort mausoleum op het Dreifaltigkeits Kirchhof, waar beroemdste telg Felix Mendelssohn Bartholdy ook ligt. Onder de aangetrouwde familieleden vinden we Eduard Kummer, Hermann Amandus Schwarz, Roland Percival Sprague, Kurt Hensel, en Gustav Lejeune Dirichlet (wiens graf we reeds in Göttingen aantreffen).

Frits C.R. Spieksma

Combinatorial Optimization Group
Eindhoven University of Technology
f.c.r.spieksma@tue.nl

Inaugural lecture

Practical combinatorial

In his inaugural lecture, delivered on 21 February 2020, Frits Spieksma illustrates the presence of combinatorial optimization in different parts of today's society. From improving the lives of patients with kidney failure to constructing schedules for sports competitions and from finding a seating arrangement in parliaments to scheduling inland waterway traffic, combinatorial optimization plays an instrumental role in all these fields. He sketches these applications, and shows that there is an increased need for incorporating dynamics, fairness and environmental considerations. Scientific research helps in providing satisfying answers to these challenges.

Prologue

This is a set of stories. Each of these stories intends to illustrate the relevance of *combinatorial optimization* in practice. Each of these stories also aims to illustrate the power of mathematical rigor. One story describes how techniques from the field of combinatorial optimization impact the lives of patients with kidney failure for the better. Another story shows how combinatorial optimization can help us to arrive at an objective seating arrangement for newly-elected members of parliament. Yet another story describes how transportation over inland waterways is affected by locks; here, it is shown that the solutions of mathematical models can help in deciding upon the optimal speeds of freight ships, thereby decreasing (CO₂) emissions.

A final story features the perhaps mundane subject of scheduling thousands of soccer matches; again, tools from combinatorial optimization allow efficient schedules to be constructed.

Jointly, these stories illustrate the pervasiveness of combinatorial optimization in today's society. From designing train timetables to scheduling classes at high schools and universities, from organizing conferences to analyzing social networks, our world is filled with discrete decisions. The stories that I chose to include here concern recent topics that I have worked on. Many colleagues have been involved, and it was a pleasure and a privilege working with them. And actually, dear reader, after you have read this text, I not only hope to have convinced you that combinatorial

optimization is relevant but also to have shown that there is as much relevance as there is fun!

Introduction

While this text may serve as an appetizer to the field of combinatorial optimization, it is neither an introduction to it nor does it contain proofs or theorems. There are excellent books that achieve these goals; I refer to the sources at the end of this section.

It is good, however, to have a basic understanding of combinatorial optimization (CO). The field of CO can be seen as a collection of problems sharing particular characteristics. Two well-known examples of such problems are the assignment problem and the traveling salesman problem; books have been devoted to each of these problems. Here, I use the assignment problem as our leading example to illustrate what the field of CO is about. Indeed, if ever there is a single problem that signifies the success of CO, it is the assignment problem.

In the assignment problem, one is given two n -sets L and R ($n \in \mathbb{N}$) and, for every



Frits Spieksma

optimization

pair of elements $(\ell, r) \in L \times R$, a cost-coefficient $c_{\ell, r}$ is given. The problem is to select n pairs, each consisting of an element from L and an element from R , such that each element of $L \cup R$ is present in some selected pair while the sum of the cost-coefficients of the selected pairs is minimal. The number of solutions for an assignment problems equals $n!$. This property of the assignment problem, i.e. having a finite number of solutions, is in fact the defining property of combinatorial optimization problems: an optimization problem is a *combinatorial optimization problem* when the number of solutions is finite. That means that finding a best solution, i.e. a solution with minimum cost, may not be a trivial task: indeed, enumerating all solutions, even for moderate values of n and using the fastest processor, can be quite impractical, i.e. may take too much time. We have arrived at the basic challenge associated with each CO problem: amidst a finite yet huge number of solutions, we must find a good solution as fast as possible. Returning to the assignment problem, it is an example of a problem that is efficiently solvable: there

exists an algorithm that finds an optimum solution in kn^3 computational steps for some $k \in \mathbb{N}$.

In the next four sections, four stories will unfold. As different as the forthcoming stories are, their common denominator is that (i) the optimization problems behind them possess a defining characteristic: the presence of a finite, yet huge number of solutions; and that (ii) the challenge is to find a good solution as fast as possible.

Sources

The trilogy by Schrijver [46] is a landmark in the field. Other books that give an overview of CO are Cook et al. [11], Nemhauser and Wolsey [37], and Korte and Vygen [27]. Although CO is a relatively young field of science, it has a rich history — an account of that history is given in Schrijver [47].

In particular, there is a fascinating story behind the assignment problem that goes back to works of Carl Gustav Jacob Jacobi (1804–1851). I refer to Kuhn [28] for a description of this history, and to Burkard et al. [10] for a book on the assignment problem. A classic book on the traveling salesman problem is the one edited by Lawler et al. [30]; a more recent one is the book by Applegate et al. [2].

An overview of open problems in the field is given by Woeginger [54].

Story 1: kidney exchange

Kidney failure is a disease that affects one in ten persons worldwide. In the age category 65+, it is estimated that one in five persons suffer from kidney failure, explaining why aging societies have a higher prevalence of kidney failure than other societies. In the Netherlands, over 2000 patients are on a waiting list to receive a kidney. The waiting list maintained by EuroTransplant contains over 10000 patients waiting for a kidney.

The last stage of this disease is called End Stage Renal Disease (ESRD), and a person with ESRD cannot survive without either dialysis or a kidney transplant. The two main causes of kidney failure are diabetes and high-blood pressure; the increasing prevalence of both diabetes and high-blood pressure (caused by lifestyle habits that are only slowly changing), as well as the absence of artificial kidneys, unfortunately ensures that ESRD is a serious, growing disease not likely to disappear.

As it happens, a healthy individual has two kidneys, and can live a normal life with a single kidney. This is a unique

feature of this organ and opens the door for the donation of a kidney by a healthy, living individual to a patient with ESRD. The presence of individuals willing to donate a kidney and the presence of patients in need of one gives rise to an allocation problem; I will now describe how the application of sophisticated techniques from CO allows us to redistribute available kidneys from living donors in order to improve the quality of many patients' lives. As a disclaimer, let me point out that gross simplifications are made in this description; more precise and elaborate descriptions can be found in the sources at the end of this section.

Let us consider a person with ESRD, referred to as the patient. In many cases, a patient has found a person (a family member, or a close friend) willing to donate her or his kidney to the patient, opening up the possibility of significantly improving the patient's quality of life. However, a donor must be compatible with the patient in order for the intended transplant to be possible. Compatibility is determined by blood type and by immunological properties of the patient-donor pair. In case the patient-donor pair is incompatible, they may decide to enter a so-called Kidney Exchange Program (KEP). In fact, they may decide to enter a KEP even if they are compatible. Such a program consists of a pool of patient-donor pairs. The idea is that, when viewed from the entering pair (let's call them pair A), there is a possibility that there is one pair present among the donor-patient pairs currently in the pool (let's call them pair B) whose donor is compatible with the patient of pair A, and whose patient is compatible with the donor of pair A. Then, an exchange is possible: the patient of pair A receives a kidney from the donor of pair B, and the patient of pair B receives a kidney from the donor of pair A. The first actual exchange of this type occurred in 1992 in South Korea; since then, this practice has steadily become more popular.

An exchange of this type is called a 2-cycle. Indeed, when building a graph that has a node for each patient-donor pair in the pool and an arc from one node to another node if the donor of the first node is compatible with the patient of the other node, it becomes clear that a set of disjoint 2-cycles in this graph represents a set of exchanges that leave the patients

(who correspond to nodes in the graph) with a kidney (and their donors donating one). In fact, a moment of reflection will convince the reader that there is no reason to restrict one's attention to 2-cycles: any cycle in this graph represents a feasible set of transplants.

In practice, however, there are arguments that favor short cycles. Also, in practice, there are persons who are willing to donate a kidney to any patient (so-called non-directed donors), and instead of cycles, this leads to the feature of chains of interest in the graph. An important difference between a chain and a cycle is temporal: while the exchanges that follow from a cycle need to be carried out simultaneously, the exchanges that follow from a chain offer the opportunity to choose well-suited moments for each individual exchange.

Let us now turn to a formal definition of a basic version of the optimization problem in a KEP. An instance of the problem is defined by a simple, directed graph $G = (V, A)$, and by an integer K (denoting the maximum cycle length). Each vertex in V represents a patient-donor pair; an arc $(i, j) \in A$ represents a possible transplant of a kidney from the donor associated with vertex $i \in V$ to the patient associated with vertex $j \in V$. Let C be the set of all directed cycles of, at most, length K and let w_c be the length of cycle c in G . The optimization problem is now to select a set of vertex-disjoint cycles in G which maximizes the total number of arcs contained in the selected cycles. Clearly, this is a problem in CO as the number of solutions is finite. Solving this problem, and its generalizations (which include non-directed donors, weights and uncertainty) is of paramount relevance, and is being done by several (supra-)national institutions, hospitals and special-purpose organizations.

Here is a mathematical formulation of the problem using binary variables z_c , which equal 1 if and only if cycle $c \in C$ is selected.

$$\text{Maximize } \sum_{c \in C} w_c z_c \quad (1)$$

$$\text{subject to } \sum_{c: i \in c} z_c \leq 1 \text{ for each } i \in V, \quad (2)$$

$$z_c \in \{0, 1\} \text{ for each } c \in C. \quad (3)$$

Notice that different formulations exist. The one chosen here is the one that I find most elegant to state; it is not the one most suited for computational purposes.

There are many, many challenges in this field. Apart from ethical and medical considerations, it is a fact that different countries have wildly differing rules for organ donation. For instance, only 2-cycles are allowed in France and some countries allow the inclusion of compatible pairs whereas other countries don't. Such issues are relevant as there is an increasing awareness that allowing exchanges across borders may have a positive impact on the quality of the solutions. And, of course, the set of precise rules that govern the exchanges has a huge impact on the solutions possible.

When it comes to mathematical optimization, at least three challenges exist:

- *Dynamics.* A crucial question is: how often should one try to find a set of transplants, i.e. with what frequency should one solve model (1)? Once every month? Or after a sufficient number of changes to the pool? The answer to this question depends on the frequency with which the pool changes; the phenomenon is referred to as 'thickening the market'. Of course, one argument to wait is that after some time, more changes may improve the quality of the solution. An argument not to wait is that any opportunity to realize an additional transplant should not be missed. A fast-growing amount of literature analyzes this situation under various assumptions — it seems that a greedy approach (i.e. solving whenever the situation has changed) is preferable.
- *Recourse.* As described above, the absence of an arc does indeed mean that there is no compatibility between the donor of one pair and the patient of another pair. However, the presence of an arc does not guarantee compatibility; it basically means that there is a good chance that there is compatibility. An in-depth screening of the two persons involved may reveal that the two are incompatible after all. This opens the door to many questions. One variant associates a probability to each arc, representing the likelihood of compatibility. Then, prior to identifying a set of exchanges, one needs to determine which arcs to screen in depth in order to determine their status. Finding these arcs is an optimization question in itself and when the true status of in-depth

screened arcs is revealed, it will have implications for the final solution, i.e. recourse is needed to arrive at a feasible set of exchanges.

- *Fairness.* As the quality of a match depends on properties of a patient, the absence or presence of certain properties may benefit a particular class of patients. More concretely, it has been observed that patients with blood type O have disadvantages in the allocation of kidneys. Also, ethnic imbalances in the allocation may result. Improving models and methods while taking into account an accepted notion of fairness is a major challenge.

Sources

Facts about the prevalence of ESRD can be found in Heaf [23] and on the following sites: <https://www.kidney.org/kidneydisease/global-facts-about-kidney-disease> and <http://www.healthdata.org>.

Statistics about the number of kidney transplants are tracked by the World Health Organization [55], <https://www.who.int/transplantation/gkt/statistics/en>. Numbers for the Dutch situation are maintained by the Dutch Transplant Foundation, see: <http://www.transplantatiestichting.nl/publicaties-en-naslag/nts-jaarverslagen>.

Elaborate descriptions of the working of a KEP can be found in Gentry et al. [16] and Anderson et al. [1]. For an overview of kidney exchange programs in Europe, see Biró et al. [8]. Mathematical formulations of the optimization problem are surveyed in Mak-Hau [32], see also Glorie et al. [18] and Dickerson et al. [13].

The computational complexity and approximability of the underlying optimization problem is studied in Biró et al. [6].

The issue of thickening the market is discussed in Ashlagi et al. [3] and Ashlagi et al. [4]. Recourse has received attention in Blum et al. [9] and Smeulders et al. [48]. Fairness issues, as well as the impact of a new kidney allocation system employed by UNOS on racial/ethnic disparities in waiting times, are investigated in Glander et al. [17] and Melanson et al. [34].

This story is based on Smeulders et al. [48].

Story 2: seating members of parliament

A key institute in old and modern democracies is the parliament: a collection of persons that have been elected to represent the people and whose main task is to control legislative power. Let us refer to these elected persons as members of parliament or MPs. Almost always, members of parliament are grouped into different parties and members of the same party share a basic point of view on how society should be organized. To exercise their right and duty of controlling power, there is a physical location where the members of parliament

meet, discuss, vote, gossip and do all the things that members of parliament are supposed to do. I assume that each MP receives a particular seat in the parliament; this is actually common practice in many parliaments (but not in all: notable exceptions are the House of Representatives in the USA and the House of Commons in the UK. In these parliaments, there is a first-come-first-serve policy for every meeting). The question is how to distribute MPs over the seats in the parliament so as to optimize the functioning of the parliament; let us refer to a distribution of MPs over seats as a *seat-allocation*.

While at first sight the question of who sits where may appear an innocent one, there have been intense debates and rows about this matter in recent years. In fact, it has been argued that as voters become more and more polarized, the views of their chosen representatives seem to diverge more and more. In a number of cases, the discussions have indeed already started with the particular seating that the parliament opts for in a newly-elected parliament. In other words, finding a seat-allocation may be a source of intense debates. In such a belligerent atmosphere, a model-based proposal for the seating of the parliament has a huge advantage over human-made proposals: neutrality.

Another interesting observation which underlines how seat-allocations are far from innocent is the following. The voting behavior of an MP is influenced by the voting behavior of the MP's physical neighbors. Indeed, in Iceland (the country with the oldest parliament functioning today), seats for MPs are allocated randomly, independent of party affiliation. This has created the opportunity to statistically test whether neighbors of an MP have an impact on the MP's voting behavior, and it turns out that the answer is affirmative: not only voting behavior, but even the choice of words is influenced by one's neighbors (see sources at the end of this section).

Let us list a number of properties present in almost all seat-allocations in parliaments all over the world:

- MPs from the same party are seated in clusters. This reflects how communication between MPs of the same party should be an important factor when determining a seat-allocation. More concretely, members of the same party

should be seated in each other's vicinity; this allows them to pass information and notes quickly and discreetly. Thus, to facilitate intra-party communication, neighboring seats (to be defined later) are as much as possible allocated to MPs of the same party.

- Not all seats are equally important. Seats in the front have more visibility and allow direct access to the debating spot. Usually, large parties (i.e. parties with more MPs than others) occupy one or more front seats. Seats in the back may be considered less important, while seats with access to a corridor may be preferred over seats between other seats. Note that there are parliaments in which each seat has access to a corridor.
- Many democracies have parties that are labeled somewhere on a 'left-right' spectrum. This left-right positioning is often reflected in the allocation of seats. Phrased more generally, MPs from different parties that are considered to hold similar views are allocated to neighboring positions in the parliament.
- Historical habits: particular seats that are allocated to a specific MP of some party for historical or traditional reasons.

In some parliaments, clear rules exist that yield a seat-allocation. For instance, in the US Senate, senators are ordered by seniority and, starting with the oldest senator, each senator gets to choose a seat with Republicans on the right and Democrats on the left side of the chamber; in Iceland, as mentioned above, a draw determines which MPs sit where. Most parliaments, however, do not have an explicit rule to arrive at a seat-allocation.

I now propose a mathematical model to find a seat-allocation. In doing so, let us primarily focus on the amount of intra-party communication that is possible. However, the model is flexible and can take all kinds of parliament-specific wishes and constraints into account. Thus, the objective here is to find a seat-allocation with maximum communication. A way to precisely model communication between different seats in a parliament is to define the concept of neighboring seats. Let us call two distinct seats *neighboring* when direct contact (in the form of whispering or passing notes) between two MPs in these

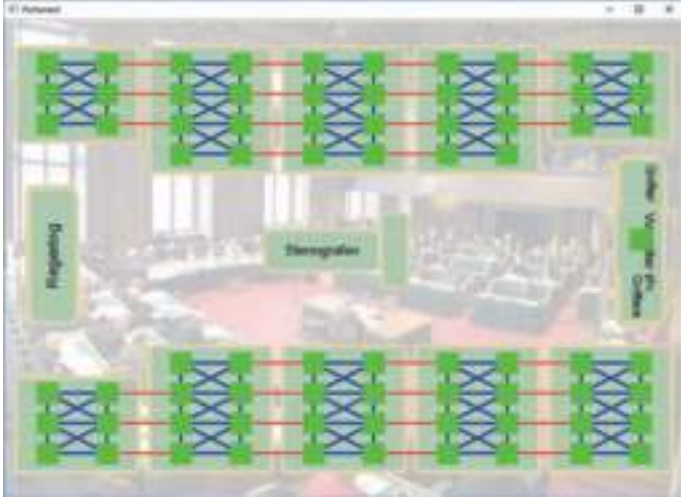


Figure 1 Eerste Kamer, where connections in blue (red) indicate easy (fair) communication.

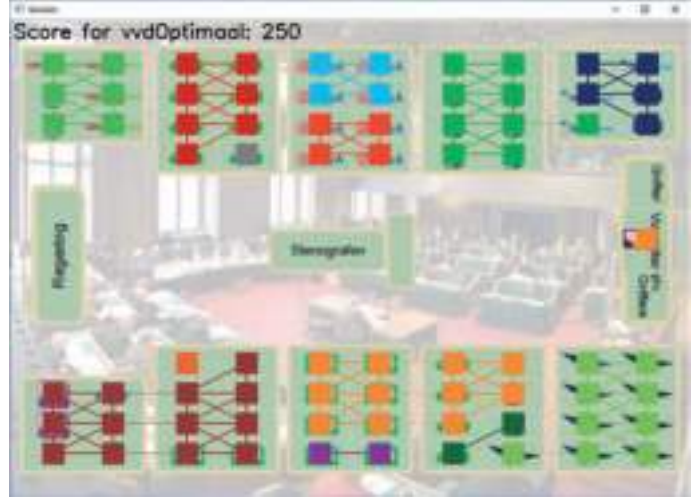


Figure 2 Optimum seat-allocation of the Eerste Kamer.

seats is possible. In practice, this means that two seats that are positioned next to each other on the same row or that are positioned such that one seat is directly behind another seat are called neighboring. Of course, deciding whether two seats are neighboring can be a debatable choice in some cases.

Let P stand for the set of parties and let S denote the set of seats in the parliament. Party $p \in P$ must receive s_p seats in the parliament. Let us use N to denote the set of pairs of seats that are neighbors, i.e.

$$N = \{(s, t) \in S \times S \mid \text{seats } s \text{ and } t \text{ are distinct neighboring seats}\}.$$

Additionally, let us use binary variables $y_{(s,t),p}$ to indicate whether neighboring seats s and t are assigned to party p and binary variables $x_{s,p}$ to denote whether seat $s \in S$ is assigned to party $p \in P$.

$$\text{Maximize } \sum_{(s,t) \in N} \sum_{p \in P} y_{(s,t),p} \quad (4)$$

$$\text{subject to } \sum_{p \in P} x_{s,p} \leq 1 \quad \forall s \in S, \quad (5)$$

$$\sum_{s \in S} x_{s,p} = s_p \quad \forall p \in P, \quad (6)$$

$$y_{(s,t),p} \leq \min(x_{s,p}, x_{t,p}) \quad (7)$$

$$\forall s, t \in S \text{ with } (s, t) \in N, p \in P,$$

$$x_{s,p} + x_{t,p} - y_{(s,t),p} \leq 1 \quad (8)$$

$$\forall s, t \in S \text{ with } (s, t) \in N, p \in P,$$

$$x_{s,p} \in \{0, 1\} \quad \forall s \in S, p \in P. \quad (9)$$

This model is an integer programming model that maximizes a particular objective function representing intra-party communication. Objective (4) attempts to allocate pairs of neighboring seats to members

of the same party. Let me point out that one may hypothetically wish to achieve an opposite objective in order to counterbalance polarization. Then, one might want to minimize the given objective function (see the discussion above). Furthermore, constraints (5)–(9) ensure that a feasible seat-allocation is found. If desired, many other constraints can be added. Also, one may use more fine-grained ways to define the concept of neighboring seats.

A crucial advantage of a model-based proposal for a seat-allocation is its neutrality; once there is agreement on the basic principles that should guide the seat-allocation, the outcome of the corresponding model should be perceived as unbiased. Admittedly, as far as I am aware, no existing parliament uses optimization techniques to find a seat-allocation; however, the tools are there!

Sources

Seat-allocations have been contested, see an article in the *NRC* [53] or the ‘seat wars’ described by the BBC [5]. The impact of neighboring MPs on the voting behavior of Icelandic MPs has been described in Saia [45], see also Harmon et al. [22].

Let us illustrate the above by considering a specific parliament: on 20 March 2019 there were provincial elections in the Netherlands. As a consequence, 75 fresh members of the so-called Eerste Kamer were chosen on 27 May 2019; they had their first meeting in mid-June. Here, the following question will be answered: who will sit where? In other words, when maximizing intra-party communication, which member of parliament (MP) will receive which chair?

This question is approached as follows. First, let us determine which pairs of seats in the parliament facilitate easy communication (repre-

sented by blue links in Figure 1) and which pairs of seats facilitate fair communication (represented by red links in Figure 1). When two seats facilitating easy (fair) communication are assigned to members of the same party, 2 (1) points are gained. Of course, the idea is that seat-allocations with more points are better (in terms of communication) than seat-allocations with fewer points. Our objective is to find a seat-allocation with a maximum number of points.

Given the results of the elections for the Eerste Kamer, Figure 2 displays an optimum seat-allocation. This seat-allocation was found by solving an integer program; optimality of the solution was proved using combinatorial arguments. Additional conditions or preferences can easily be incorporated into this integer program, see Tuin [52].

It should be clear that this idea can be applied to any parliament where MPs have a fixed seat. It is interesting to observe that the particular physical lay-out of the seats in the parliament matters for this objective; most parliaments have a (half-)circular shape in which sets of seats are separated by corridors. A very nice overview of the shape and other properties of existing parliaments around the world is found in [56].

This story is based on Spijksma [49].

Story 3: transportation via inland waterways

Since ancient times, rivers have been used as a way of transporting goods and people. History lessons from high school describe how a tribe called the Batavi, while moving along the Rhine, populated a delta around 40 BC now known as the Netherlands. Much older examples exist: documents from before 2500 BC show that the river Nile was routinely used for transporting goods.

And in fact, the Rhine, the Nile and many other rivers and canals are still being used today as means to bring goods and

persons from their origin to their destination. Of course, the emergence of motorized transport like cars, trucks, trains and aviation has allowed for much faster and (seemingly) more efficient ways of transporting goods than transport over inland waterways (we will use the phrase ‘inland waterways’ to denote the set of rivers and canals over which transportation is possible). Yet in recent decades, some advantages of transportation over inland waterways have become more pronounced. Here are some of these advantages (see the end of this section for sources providing more information).

- *Predictability.* While transportation by truck may be hampered by unexpected traffic jams, causing large variations in travel times, inland waterway transportation is extremely reliable. In contrast to transportation over roads where congestion has become the norm, the capacity of rivers and canals has not been reached by far, and there is potential for a significant increase in additional traffic.
- *Safety.* The number of fatal accidents that arise in inland waterway transportation is dwarfed by the deaths arising from road transportation, train transportation and even transportation by air. Transportation over inland waterways is simply the safest mode of transport.

- *Sustainability.* Emissions caused by freight ships are quite low compared to other modes of transportation. The average load capacity of a freight ship equals around 1500 tons; this is equivalent to 60 trucks. As a consequence, the energy consumption of transport over water is less than 20% of that of road transport. It is clear that transport over inland waterways can play a prominent role in the attempts to mitigate the effects of climate change.

These advantages explain the rising amount of transport over inland waterways; this also induces a greater pressure on the associated infrastructure, notably locks. On many inland waterways, locks are required to ensure a suitable water level for navigation and to give ships the opportunity to overcome the difference in water level. In addition, locks can be used to bypass obstacles such as waterfalls or dams, and may serve as protection against floods; the latter type of lock is often found in harbors.

The presence of locks is usually taken for granted. Only when something is amiss does the (economic) relevance of locks become clear. I will give two examples:

- On 3 January 2012 a door of a lock in the Twente Canal (the Netherlands) fell down unexpectedly due to metal fatigue. This resulted in economic dam-

age estimated in millions of euro’s per week.

- Delayed repairs to the locks in the Mississippi caused an unexpected closure of Lock 52 in the Mississippi river in September 2017, leading to 475 ships being unable to pass. The total costs were estimated at 640 million dollars.

However, even under normal circumstances, locks act as bottlenecks when the waterway traffic density is high and may induce waiting time for ships that pass through these canals and waterways. Efficient lock schedules can contribute to the attractiveness of waterway transport and help to maximize the impact of expensive infrastructural investments.

An optimization problem thus arises when a set of ships has to pass a series of locks along a waterway. A precise description of the corresponding situation is as follows.

Consider a set of $\mathcal{L} = \{1, 2, \dots, L\}$ locks indexed consecutively along a canal or a river. These locks partition the waterway into $L - 1$ segments. Each lock $\ell \in \mathcal{L}$ has a capacity C_ℓ , indicating how many ships the lock can hold, and has a lockage time P_ℓ , denoting the time that lock ℓ needs to transfer ships through the lock. The distance between locks ℓ and $\ell + 1$ is denoted by R_ℓ for each $\ell \in \mathcal{L} \setminus \{L\}$.

Ships arrive at lock 1 and need to pass all locks, with their final lock being lock L ; let us use $\mathcal{S}$ to denote the set of ships. Each ship $s \in \mathcal{S}$ arrives at lock 1 at arrival time A_s and must have passed through lock L by the deadline D_s . There is a minimum speed ($V_s^{\min}$) and a maximum speed ($V_s^{\max}$) for each ship $s \in \mathcal{S}$. A ship can pick an individual speed on each segment of the waterway; within a segment, a constant speed of each ship is assumed.

The emissions of a ship are a function of its speed: the faster the ship travels, the more emissions it produces. Literature suggests this relation is cubic; here, I simply assume that there is a given function $E_s(v)$ that describes the emission in tons per kilometer for ship $s \in \mathcal{S}$ that travels with speed v . The goal is to minimize total emissions by selecting a speed for each individual ship while identifying feasible lockages and ensuring that each ship meets its deadline. Time is discretized; let us use $\mathcal{T}$ to denote the set of times at which lockages can start.



Figure 3 The lock at Ternaaien.

Let us use the following variables. Let $v_{s,\ell}$ denote the speed of ship $s \in \mathcal{S}$ at segment $\ell \in \mathcal{L} \setminus \{L\}$. Further, let $x_{s,\ell,t}$ denote a binary variable that equals 1 if lock ℓ starts a lockage containing ship s at time t .

Minimize

$$\sum_{\ell \in \mathcal{L} \setminus \{L\}} R_\ell \sum_{s \in \mathcal{S}} E_s(v_{s,\ell}) \quad (10)$$

subject to

$$\sum_{t \in \mathcal{T}} tx_{s,1,t} \geq A_s \quad \forall s \in \mathcal{S}, \quad (11)$$

$$\sum_{t \in \mathcal{T}} (t + P_L) x_{s,L,t} \leq D_s \quad \forall s \in \mathcal{S}, \quad (12)$$

$$\sum_{t \in \mathcal{T}} x_{s,\ell,t} = 1 \quad \forall s \in \mathcal{S}, \ell \in \mathcal{L}, \quad (13)$$

$$\sum_{t \in \mathcal{T}} tx_{s,\ell+1,t} - \sum_{t \in \mathcal{T}} tx_{s,\ell,t} \geq P_\ell + \frac{R_\ell}{v_{s,\ell}} \quad \forall s \in \mathcal{S}, \ell \in \mathcal{L} \setminus \{L\}, \quad (14)$$

$$x_{s_1,\ell,t_1} + x_{s_2,\ell,t_2} \leq 1 \quad \forall s_1, s_2 \in \mathcal{S}, \ell \in \mathcal{L}, \quad (15)$$

$$\forall t_1 \neq t_2 \text{ with } |t_2 - t_1| \leq 2P_\ell - 1,$$

$$\sum_{s \in \mathcal{S}} x_{s,\ell,t} \leq C_\ell \quad \forall \ell \in \mathcal{L}, t \in \mathcal{T}, \quad (16)$$

$$V_s^{\min} \leq v_{s,\ell} \leq V_s^{\max} \quad \forall s \in \mathcal{S}, \ell \in \mathcal{L} \setminus \{L\}, \quad (17)$$

$$x_{s,\ell,t} \in \{0,1\} \quad \forall s \in \mathcal{S}, \ell \in \mathcal{L}, t \in \mathcal{T}. \quad (18)$$

Notice that the model is nonlinear: both the objective function (10) and the constraints (14) are nonlinear.

Observe that the above model can be generalized to include all kinds of practical situations: travel in two directions, the possibility of not allowing ships to overtake one another, locks having multiple chambers. In addition, other objectives, such as flow time, can be modelled.

Sources

The potential of inland waterways for environmentally friendly transport has been addressed in reports of the European Commission (see [15]) and in a report on the New York State Canal System (see Goodban Belt LLC [19]) for the state of New York.

Data concerning the economic damage of lock failures can be found in *The Economist* [14].

Mathematical optimization techniques applied to the scheduling of a single lock can be found in Passchyn et al. [40]; the complexity of scheduling a sequence of locks is addressed in Passchyn and Spieksma [42]. In practice, optimization techniques have been applied to the Welland Canal (Petersen and Taylor [43]), the Kiel Canal (Lübbecke et al. [31], Meisel and Fagerholt [33]) and to the Mississippi (Nauss [36]); see Passchyn [39] for more examples.

This story is based on Passchyn et al. [41].

	Rounds													
	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14
h_1	H	A	H	A	H	A	H	A	H	A	H	A	H	A
h_2	A	H	H	A	H	A	H	H	A	A	H	A	H	A
h_3	A	H	A	A	H	A	H	H	A	H	H	A	H	A
h_4	A	H	A	H	A	A	H	H	A	H	A	H	H	A
h_5	A	H	A	H	A	H	A	H	A	H	A	H	A	H
h_6	H	A	A	H	A	H	A	A	H	H	A	H	A	H
h_7	H	A	H	H	A	H	A	A	H	A	A	H	A	H
h_8	H	A	H	A	H	H	A	A	H	A	H	A	A	H

Table 1 A HAP-set for a league consisting of eight teams.

Rounds						
1	2	3	4	5	6	7
1 vs 2	3 vs 1	1 vs 4	5 vs 1	1 vs 6	7 vs 1	1 vs 8
8 vs 3	5 vs 7	2 vs 3	6 vs 8	2 vs 5	5 vs 3	2 vs 7
7 vs 4	2 vs 6	7 vs 6	4 vs 2	3 vs 4	8 vs 2	3 vs 6
6 vs 5	4 vs 8	8 vs 5	7 vs 3	8 vs 7	6 vs 4	4 vs 5

Table 2 The first seven rounds of a schedule compatible with the HAP-set from Figure 4 where team i has been assigned to h_i , $i = 1, \dots, 8$.

Story 4: scheduling multiple leagues

Driving around the country on a Saturday or Sunday morning, one is amazed by the amount of activity on sport fields. Soccer, hockey, korfbal... thousands of youngsters compete against one another in a seemingly very organized way: referees are present, coaches are present, the teams are present, and everybody seems to fill the right role at the right time. To give an impression of the numbers involved: in the Netherlands alone, there are approximately 500 000 male youngsters and 100 000 female youngsters associated with the Royal Dutch Football Association (KNVB); corresponding numbers for the Royal Dutch Hockey Association (KNHB) are 105 000 female youngsters and 45 000 male youngsters. A large number of these youngsters find their way to the sporting pitch every weekend.

This observation leads to the following question: how does every individual know where to go? How are all these matches chosen on a particular weekend morning? How does one ensure that there aren't six matches scheduled for teams of a club that only has five pitches available?

Clearly, some amount of planning is needed to realize a satisfying competition. A satisfying competition is one that features matches between teams of simi-

lar strengths, has limited travel times and ends with a champion and relegation. In this story, a problem is identified that focuses on the capacity of a club, measured by the number of matches that can take place simultaneously at the club's venue.

As testified above, the challenge here is to deal with the dimensions of the problem: thousands of teams belonging to hundreds of clubs need feasible schedules that allow the club's capacities to be satisfied. In order to cope with this huge number of matches, a league organizer typically uses the following approach (see sources at the end of this section). First, a league format and a league size are chosen. Usually, a so-called Double Round Robin format is preferred (meaning that each pair of teams meet twice), with a league size consisting of 6, 8, 10 or 12 teams. Indeed, leagues of even sizes make sense, as otherwise there is a team in each weekend that cannot play. Second, all teams are clustered into leagues of the chosen size. Although it is true that the total number of teams need not be an exact multiple of the league size, an even league size allows the vast majority of the teams to play each round. Furthermore, it is common practice to (i) use a kind of geographical clustering in order to avoid excessive travel distances, (ii) ensure that teams of the same strength/age

category are in a same league, and (iii) to avoid teams of the same club being present in the same league. Thirdly, and most crucially for this story, the league organizer assigns teams to so-called Home-Away Patterns (called a HAP-set, see Table 1 for an illustration). From this assignment, a feasible schedule follows. As an illustration of the latter procedure, consider the HAP-set depicted in Table 1; it reflects a specific HAP-set for a league consisting of eight teams. Although a priori, different schedules (or none) might be compatible with the given HAP-set, Table 2 simply gives one such schedule which is compatible with the HAP-set from Table 1.

To summarize this discussion: in order to efficiently find schedules for many leagues, the league organizer (assuming a given partition of teams into leagues, and the presence of a HAP-set) uses a two-step approach:

- Step 1: assign teams to HAPs.
- Step 2: next, use a table such as the one depicted in Table 2 to find the actual schedule.

Here, the focus is on Step 1. Since an assignment of teams to HAPs dictates when each team plays home, a solution to Step 1 specifies how many matches are played at the club's venue in each round for each club. This is important as the capacity of a club in terms of the number of matches it can host in a round is typically bounded. In fact, it is assumed that a capacity is given for each club in each round; in practice, this number follows from the number of available pitches, the set of possible starting times and the availability of material and referees. The goal is to find, for each league, an assignment of teams to HAPs which minimizes the total capacity violation across the clubs.

We describe the problem formally. A set T of teams ($n = |T|$), a set L of leagues ($m = |L|$) and a set C of clubs are given. Also given are two partitions of the set T : one partition $\{\tilde{T}_1, \dots, \tilde{T}_m\}$ of the set T indicates which teams belong to which league; notice that, for each $\ell \in L$, $|\tilde{T}_\ell| = k$, with k even since each league consists of the same even number of teams. Another partition of the set T is $\{\hat{T}_1, \dots, \hat{T}_{|C|}\}$, describing which teams belong to which club. In addition, k HAPs are given, each of length $2(k-1)$, which jointly form a feasible, complementary HAP-set denoted by $\mathcal{H}$. The

set of rounds is $\{1, 2, \dots, 2(k-1)\}$ and is denoted by R . Finally, each club $c \in C$ has a given capacity $\delta_{c,r}$, which corresponds to the number of matches club c can host in round r .

Capacity violations happen whenever the number of teams of a club that play home in some round exceeds the club's capacity in that round. The violation of a club in a round is measured by a scalar value that is either zero (if there is no violation) or equal to the number of teams that play home in that round minus the club's capacity (if there is a violation).

The multi-league sports scheduling problem (MSP) is now to find an assignment of teams to HAPs, such that the total capacity violation (i.e. the summation of violations over all clubs and all rounds) is minimized.

Let us introduce binary variables $x_{t,h}$, which equal one if team $t \in T$ is assigned to HAP $h \in \mathcal{H}$ and zero otherwise, and auxiliary variables $z_{c,r}$ that represent the amount of violations for club $c \in C$ in round $r \in R$. An assignment is feasible if and only if the teams in each league are assigned to different HAPs. Given the set of HAPs and the set of rounds, one can compute (in a pre-processing step) parameters $U_{h,r}$, which equal one if the team assigned to HAP $h \in \mathcal{H}$ plays home in round $r \in R$ and zero otherwise. The following mixed integer program formulates MSP.

$$\text{Minimize } \sum_{c \in C} \sum_{r \in R} z_{c,r} \quad (19)$$

subject to

$$\sum_{t \in \tilde{T}_\ell} x_{t,h} = 1 \quad \forall \ell \in L, h \in \mathcal{H}, \quad (20)$$

$$\sum_{h \in \mathcal{H}} x_{t,h} = 1 \quad \forall t \in \tilde{T}_\ell, \ell \in L, \quad (21)$$

$$z_{c,r} \geq \max \left(\sum_{t \in \hat{T}_c} \sum_{h \in \mathcal{H}} x_{t,h} U_{h,r} - \delta_{c,r}, 0 \right) \quad \forall c \in C, r \in R, \quad (22)$$

$$x_{t,h} \in \{0, 1\} \quad \forall t \in T, h \in \mathcal{H}. \quad (23)$$

Various extensions of this model can be relevant as well. The presence of HAP-sets that are league-specific, the existence of leagues of different sizes or existing constraints between specific teams of a club are all examples of meaningful extensions.

Sources

Information about membership numbers can be found in KNVB [25] and KNHB [24]. Toffolo et al. [50] discuss the problem of grouping teams into leagues. The issue of deciding whether a

schedule exists for a given HAP-set is a well-researched topic, see Miyashiro et al. [35] and Goossens and Spieksma [21].

Optimization techniques that schedule a single league have been used abundantly in practice, most notably in professional soccer (Goossens and Spieksma [21]) and baseball (Trick et al. [51]), see Knust [26] for an overview of this literature.

The HAP-set portrayed in Table 1 is an example of a so-called flexible HAP-set, see Lambers et al. [29].

This story is based on Davari et al. [12].

Epilogue

A field of science which is relevant is neither immune nor oblivious to developments in practice. The last decade has seen a tremendous increase in the availability of data and in the power to infer structures and insights from these data. In fact, one could argue that the continuous dissemination of rational/scientific solutions to address needs in society has sparked this growth in data availability.

In any case, these detailed data offer the potential to compute solutions that incorporate, more so than before, properties from at least two themes: (i) dynamics and (ii) fairness. Receiving routing advice on your daily commute in order to circumvent a traffic jam caused by an accident that happened ten minutes ago, for instance, is an example of the inclusion of dynamic properties. Likewise, detailed knowledge about the properties of the existing allocation procedures in kidney exchange can help to establish what fairness means in this context and offers a way to increase fairness in kidney allocation.

In the four stories above, I have shown how practical combinatorial optimization can be. However, this should not be taken as an argument against theory. To achieve relevance, a deep understanding of the theoretical properties of combinatorial optimization problems is needed. Indeed, the perceived quality of solutions used in practice will depend on our ability to incorporate new aspects such as dynamics and fairness. To be able to do so, we require new insights and new theory on what it means to be fair and/or dynamic. Models will be fine-tuned and new techniques (such as machine learning) will be investigated and better understood. I am looking forward to working with the members of the Combinatorial Optimization Group to further contribute to these developments!

References

- 1 R. Anderson, I. Ashlagi, D. Gamarnik, M. Rees, A. Roth, T. Sönmez and M. Ünver, Kidney exchange and the alliance for paired donation: Operations research changes the way kidneys are transplanted, *Interfaces* 45 (2015), 26–42.
- 2 D. Applegate, R. Bixby, V. Chvátal and W. Cook, *The Traveling Salesman Problem. A Computational Study*, Princeton University Press, 2006.
- 3 I. Ashlagi, A. Bingham, M. Burq, V. Manshadi, D. Gamarnik, C. Murphey, A. Roth, M. Melcher and M. Rees, Effect of matchrun frequencies on the number of transplants and waiting times in kidney exchange, *American Journal of Transplantation* 18 (2018), 1177–1186.
- 4 I. Ashlagi, M. Burq, P. Jailleta and V. Manshadi, On matching and thickness in heterogeneous dynamic markets, *Operations Research* 67 (2019), 927–949.
- 5 BBC, <https://www.bbc.com/news/uk-scotland-scotland-politics-32802374> (2015), accessed at 2 January 2020.
- 6 P. Biró, D. Manlove and R. Rizzi, Maximum weight cycle packing in directed graphs, with application to kidney exchange programs, *Discrete Mathematics, Algorithms and Applications* 1 (2009), 499–517.
- 7 P. Biró, B. Haase-Kromwijk, T. Andersson, E. Ásgeirsson, T. Baltesová, T. I. Boletis, C. Bolotinha, G. Bond, G. Böhmig, L. Burnapp, K. Cechlárová, P. Di Ciaccio, J. Fronek, K. Hadaya, A. Hemke, C. Jacquelinet, R. Johnson, R. Kieszek, D. Kuypers, R. Leishman, M. Macher, D. Manlove, G. Menoudakou, M. Salonen M, B. Smeulders, V. Sparacino, F. Spieksma, M. de la Oliva Valentín Muñoz, N. Wilson and J. van de Klundert, Building kidney exchange programmes in Europe—an overview of exchange practice and activities, *Transplantation* 103 (2019), 1514–1522.
- 8 P. Biró, J. van de Klundert, D. Manlove, W. Pettersson, T. Andersson, L. Burnapp, P. Chromy, P. Delgado, P. Dworczak, B. Haase, A. Hemke, R. Johnson, X. Klimentova, D. Kuypers, A. Costa, B. Smeulders, F. Spieksma, M. Valentín and A. Viana, Modelling and optimisation in European kidney exchange programmes, to appear in the *European Journal of Operational Research* (2019).
- 9 A. Blum, J. Dickerson, N. Haghtalab, A. Procaccia, T. Sandholm and A. Sharma, Ignorance is almost bliss: Near-optimal stochastic matching with few queries, *Proceedings of the Sixteenth ACM Conference on Economics and Computation* (2015), 325–342.
- 10 R. Burkard, M. Dell'Amico and S. Martello, *Assignment Problems*, SIAM, 2009.
- 11 W. Cook, W. Cunningham, W. Pulleyblank and A. Schrijver, *Combinatorial Optimization*, Wiley, 1998.
- 12 M. Davari, D. Goossens, J. Beliën, R. Lambers and F.C.R. Spieksma, The multi-league sports scheduling problem, or how to schedule thousands of matches, *Operations Research Letters* 48 (2020), 180–187.
- 13 J. Dickerson, D. Manlove, B. Plaut, T. Sandholm and J. Trimble, Position-indexed formulations for kidney exchange, *Proceedings of the 2016 ACM Conference on Economics and Computation* (2016), 25–42.
- 14 *The Economist*, Take me to the river, October 2017.
- 15 European Commission, Promotion of inland waterway transport, <http://ec.europa.eu/transport/inland/promotion/promotion-en.htm> (2015).
- 16 S. Gentry, R. Montgomery and D. Segev, Kidney paired donation: Fundamentals, limitations, and expansions, *American Journal of Kidney Diseases* 57 (2011), 144–151.
- 17 P. Glander, K. Budde, D. Schmidt, T. Florian Fuller, M. Giessing, H. Neumayer and L. Liefeldt, The ‘blood group O problem’ in kidney transplantation—time to change?, *Nephrology Dialysis Transplantation* 25 (2010), 1998–2004.
- 18 K. Glorie, B. Haase-Kromwijk, J. van de Klundert, A. Wagelmans and W. Weimar, Allocation and matching in kidney exchange programs, *Transplant International* 27 (2014), 333–343.
- 19 Goodban Belt, New York state canal system—modern freightway, Technical Report, New York State, 2010.
- 20 D. Goossens and F.C.R. Spieksma, Breaks, cuts, and patterns, *Operations Research Letters* 39 (2011), 428–432.
- 21 D. Goossens and F.C.R. Spieksma, Soccer schedules in Europe: an overview, *Journal of Scheduling* 15 (2012), 641–651.
- 22 N. Harmon, R. Fisman and E. Kamenica, Peer effects in legislative voting, Working paper, 2018.
- 23 J. Heaf, Current trends in European renal epidemiology, *Clinical Kidney Journal* 10 (2017), 149–153.
- 24 KNHB, Cijfers en plannen, <https://www.knhb.nl/over-knhb/cijfers-en-plannen> (2018), in Dutch.
- 25 KNVB, KNVB in cijfers 2017/18, <https://www.knvb.h5mag.com/jaarverslag-2018-18/de-knvb-in-cijfers> (2018), in Dutch.
- 26 S. Knust, Classification of literature on sports scheduling, <http://www2.informatik.uni-osnabrueck.de/knust/sportssched/sportlit-class> (2019).
- 27 B. Korte and J. Vygen, *Combinatorial Optimization: Theory and Algorithms*, Springer, 2006.
- 28 H.W. Kuhn, A tale of three eras: The discovery and rediscovery of the Hungarian Method, *European Journal of Operational Research* 219 (2012), 641–651.
- 29 R. Lambers, D. Goossens and F.C.R. Spieksma, On the flexibility of Home-Away pattern sets (2019), submitted for publication.
- 30 E. Lawler, J.K. Lenstra, A. Rinnooy Kan and D. Shmoys, eds., *The Traveling Salesman Problem*, Wiley, 1985.
- 31 E. Lübbecke, M. Lübbecke and R. Möhring, Ship traffic optimization for the Kiel Canal, *Operations Research* 67 (2019), 791–812.
- 32 V. Mak-Hau, On the kidney exchange problem: cardinality constrained cycle and chain problems on directed graphs: a survey of integer programming approaches, *Journal of Combinatorial Optimization* 33 (2017), 35–59.
- 33 F. Meisel and K. Fagerholt, Scheduling two-way ship traffic for the Kiel Canal: Model, extensions and a heuristic, *Computers & Operations Research* 106 (2019), 119–132.
- 34 T. Melanson, J. Hockenberry, L. Plantinga, M. Basu, S. Pastan, S. Mohan, D. Howard and R. Patzer, New kidney allocation system associated with increased rates of transplants among black and hispanic patients, *Health Affairs* 36 (2017), 1078–1085.
- 35 R. Miyashiro, H. Iwasaki and T. Matsui, Characterizing feasible pattern sets with a minimum number of breaks, in: *Proceedings of the 4th International Conference on the Practice and Theory of Automated Timeta-*
- 36 R. Nauss, Optimal sequencing in the presence of setup times for tow/barge traffic through a river lock, *European Journal of Operational Research* 187 (2008), 1268–1281.
- 37 G. Nemhauser and L. Wolsey, *Integer and Combinatorial Optimization*, Wiley, 1988.
- 38 NTS, Jaarverslag 2018—Nieuwe kansen omarmeren, <http://www.transplantatiestichting.nl/publicaties-en-naslag/nts-jaarverslagen> (2018), in Dutch.
- 39 W. Passchyn, *Scheduling Locks on Inland Waterways*, PhD thesis, KU Leuven, 2016.
- 40 W. Passchyn, D. Briskorn, S. Coene, J. Hurink, F.C.R. Spieksma and G. Vanden Berghe, The lockmaster's problem, *European Journal of Operational Research* 251 (2016), 432–441.
- 41 W. Passchyn, D. Briskorn and F.C.R. Spieksma, Mathematical programming models for lock scheduling with an emission objective, *European Journal of Operational Research* 248 (2016), 802–814.
- 42 W. Passchyn and F.C.R. Spieksma, Scheduling parallel batching machines in a sequence, *Journal of Scheduling* 22 (2019), 335–357.
- 43 E.R. Petersen and A.J. Taylor, An optimal scheduling system for the Welland Canal, *Transportation Science* 22 (1988), 173–185.
- 44 R. Rasmussen and M. Trick, Round robin scheduling: A survey, *European Journal of Operational Research* 188 (2008), 617–636.
- 45 A. Saia, Random interactions in the Chamber: Legislators' behavior and political distance, *Journal of Public Economics* 164 (2018), 225–240.
- 46 A. Schrijver, *Combinatorial Optimization*, Springer, 2003.
- 47 A. Schrijver, On the history of combinatorial optimization (till 1960), homepages.cwi.nl/~lex/files/histco.pdf.
- 48 B. Smeulders, V. Bartier, Y. Crama and F.C.R. Spieksma, Recourse in kidney exchange programs, 2019, submitted.
- 49 F.C.R. Spieksma, Who sits where in the Senate?, <https://www.networkpages.nl/who-sits-where-in-the-senate>, *The Network Pages*, (2019).
- 50 T. Toffolo, J. Christiaens, F.C.R. Spieksma and G. Vanden Berghe, The sport teams grouping problem, *Annals of Operations Research* 275 (2019), 223–243.
- 51 M.A. Trick, H. Yildiz and T. Yunes, Scheduling major league baseball umpires and the traveling umpire problem, *Interfaces* 42 (2012), 232–244.
- 52 D. Tuin, *Seating the parliament*, Bachelor Thesis, Eindhoven University of Technology, 2019.
- 53 P. Wijnen, Stoelendans in nieuwe Tweede Kamer blijft stuiten op bezwaren Denk en Forum, NRC, <https://www.nrc.nl/nieuws/2017/03/22/stoelendans-in-nieuwe-tweede-kamer-blijft-stuiten-op-bezwaren-denken-en-forum-7516272-a1551485>, 2017.
- 54 G.J. Woeginger, Some easy and some not so easy geometric optimization problems, in: *Proceedings of the 16th International Workshop on Approximation and Online Algorithms (WAOA2018)*, 2018, pp. 1–12.
- 55 World Health Organization, Global knowledge base on transplantation, <https://www.who.int/transplantation/gkt/statistics/en>, 2019.
- 56 XML, *Parliament*, parliamentbook.com/book.

Nicolaos Starreveld

FNWI

Universiteit van Amsterdam

n.j.starreveld@uva.nl

Evenement De Avond van de Abelprijs

Een kijkje in de toekomst van de wiskunde

Op 30 januari 2020 vond de Avond van de Abelprijs plaats in de Tinbergenzaal van de KNAW, op de Kloveniersburgwal in Amsterdam. Dit evenement was een eerste try-out van de KNAW om de Abelprijs in de schijnwerpers te zetten. Onze redacteur Nicolaos Starreveld was blij om erbij te zijn en keek uit naar de voordrachten.

De Avond van de Abelprijs was een kijkje in de toekomst van de wiskunde. Een stukje van die toekomst zag het licht door het werk van Karen Uhlenbeck. Zij ontving in 2019 de Abelprijs voor haar baanbrekende werk aan geometrische partiële differentiaalvergelijkingen, ijktheorie en integreerbare systemen.

Het idee om dit evenement te organiseren kwam van Frank den Hollander, vice-voorzitter van het Domeinbestuur van NTW, en Ella Uijtdewilligen, beleidsmedewerker van de KNAW. De KNAW organiseert elk jaar de avond van de Nobelprijzen, waarin het vakgebied wiskunde dus ontbreekt. De taak van het organiseren van deze avond lag bij Jan van Neerven. Hij heeft dit prachtige evenement mogelijk gemaakt. Het programma behelsde vier voordrachten, drie over het werk van Karen Uhlenbeck zelf en één over vrouwen in de wiskunde. De vier sprekers waren Antonella Marini, Fabian Ziltener, Rob van der Vorst en Barbara Gentz.

Lezing 1. Karen Uhlenbeck's work, the present and the future of mathematics, door Antonella Marini

Marini kent Uhlenbeck heel goed natuurlijk. De meer persoonlijke verhalen kwamen dus ook aan bod. Ze beschreef haar promotor als toegankelijk, een echte femi-

nist die op een persoonlijk unieke manier wiskunde bedrijft. "It would be very surprising if Karen Uhlenbeck's contributions to the field on geometric analysis, and her compactness theorems in gauge theories and partial differential equations wouldn't play a significant role first in the solutions to the mass gap problem and secondly in the analysis of the Yang-Mills energy function as a Morse function."

Lezing 2. De Abelprijs voor Karen Uhlenbeck: zeepfilms en ijktheorie, door Fabian Ziltener:

De tweede voordracht werd gegeven door Fabian Ziltener, universitair docent verbonden aan de Universiteit Utrecht. Ijktheorie was het onderwerp van zijn voordracht. Hij ging iets dieper in op dit gebied, waar Uhlenbeck zeer actief is geweest. Ijktheorie is de theorie van connecties op hoofdvezelbundels en is belangrijk omdat de succesvolle veldentheorieën in de natuurkunde die de elementaire deeltjes verklaren van dit type zijn. De kwantumelektrodynamica is een abelse ijktheorie en de Yang-Mills-



Antonella Marini



Figuur 1 Paden op een torus, van de presentatie van Rob van der Vorst.

theorieën zijn een voorbeeld van ijktheorieën met een symmetriegroep die niet-abels is. Door middel van zeepfilms en stationaire oppervlakken heeft Ziltener een paar van Uhlenbecks resultaten geschetst. Een voorbeeld daarvan is de volgende stelling.

Stelling (L.M. Sibner, R.J. Sibner en K. Uhlenbeck). *Er bestaat een niet-triviale Yang–Mills-connectie op de triviale $SU(2)$ -hoofdvezelbundel over de vier-dimensionale bol.*

Lezing 3. Variationele analyse: de basis-principes, door Rob van der Vorst

De derde voordracht werd gegeven door Rob van der Vorst, hoogleraar analyse verbonden aan de Vrije Universiteit. De variationele analyse was het onderwerp van zijn voordracht. In de variationele analyse is een typisch probleem het kortste pad vinden op een oppervlak. Variationele problemen komen vaak tevoorschijn in de wiskunde en de natuurkunde. In hogere dimensies zijn er nog veel open problemen, bijvoorbeeld vraagstukken over gesloten geodeten in hoog-dimensionale Riemann-variëteiten. Karen Uhlenbeck heeft een significante bijdrage geleverd aan het zogenaamde *harmonic map problem*, een onopgelost probleem in de variationele analyse in hogere dimensies.

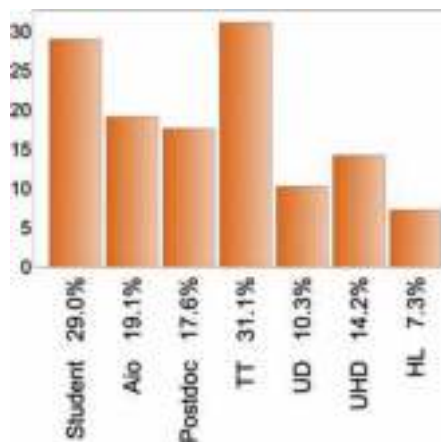
Lezing 4. Woman mathematicians breaking the glass ceiling—and what whistling Vivaldi has to do with it, door Barbara Gentz

Barbara Gentz, hoogleraar wiskunde aan de universiteit van Bielefeld in Duitsland, begon haar voordracht met een vraag: “Kunnen jullie vijf bekende vrouwelijke wiskundigen noemen?” Je hoorde van het publiek “Emily Noether, Sophie Germain, Maryam Mirzakhani” en “Karen Uhlenbeck” natuurlijk. Na een korte stilte hoorde je ook “Sofia Kovalevskaya”. Misschien waren er nog een paar benoemde namen, maar ik ben ze zelf

vergeten; excuses hiervoor. In de twintigste eeuw hebben vrouwelijke wetenschappers veel minder erkenning gekregen in vergelijking met hun mannelijke collega's. Deze erkenning rechtzetten kan veel betekenen voor toekomstige wetenschappers.

Gentz sprak ook over ‘leaky pipeline’ in de academische wereld. Dat betekent dat, naarmate we naar hogere functies kijken binnen de universiteiten, er relatief minder vrouwen zijn (zie Figuur 2). Gentz liet de statistieken van NWO zien, gemaakt door Nikolai Saqi van NWO. Twee voorbeelden ervan betreffen het percentage vrouwen dat een onderzoekspositie heeft in Nederland in de wiskunde (zie Figuur 2) en het percentage vrouwen dat een hoogleraarspositie heeft aan een universiteit in Europa (zie Figuur 3).

Er worden wel acties ondernomen om meer gelijkheid te creëren binnen de wetenschap in het algemeen, en specifiek ook binnen de wiskunde, bijvoorbeeld mentorprogramma's voor vrouwelijke wiskundigen en een meer egalitair ouderschapsverlof. Misschien zijn we nog niet waar we willen zijn, maar het feit dat we ons steeds meer bewust zijn geworden van



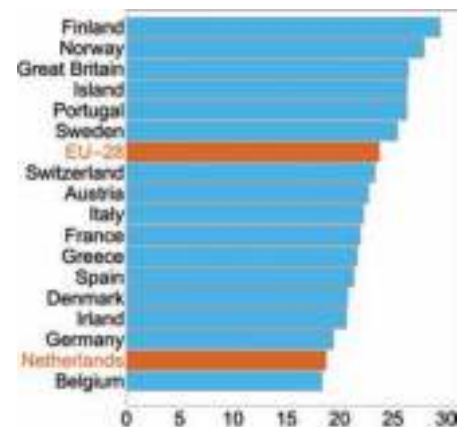
Figuur 2 Data van NWO, 2017.

de problematiek is in ieder geval een stap vooruit. “Seeing the next generation of mathematicians, men and women, I have every reason to be optimistic!”

Conclusie

Wanneer ik een evenement bijwoon (een film in de bioscoop, een lezing, een concert of een college), dan observeer ik altijd een paar minuten het publiek, nog voordat het betreffende evenement begint. Het is een gekke gewoonte van mij. Wat me opgevallen was tijdens de Avond van de Abelprijs was dat de zaal bijna vol was, wat heel positief is. Ik ben opgeleid als stochasticus, dus ik wil graag een paar statistische eigenschappen van het publiek met de lezer delen. De gemiddelde leeftijd was rond de 60, met een standaarddeviatie van ongeveer 10 en met een paar outliers rond de 30. Ook te merken dat er vooral mannen aanwezig waren.

Misschien kunnen we door middel van meer gerichte reclame deze statistieken proberen op te schuiven volgend jaar? Een gemiddelde leeftijd van 50, met een standaarddeviatie van 20 bijvoorbeeld, lijkt me een haalbaar doel. Het is ook goed als meer jongeren een kijkje in de toekomst van de wiskunde nemen. Volgend jaar zullen Frank Redig en Evgeny Verbitskiy het programma voor de Avond van de Abelprijs samenstellen, een programma over het werk van Hillel Fustenberg en Gregory Margulis: de twee Abelprijswinnaars van 2020 die de prijs toegekend hebben gekregen voor hun baanbrekend onderzoek rond het gebruik van methoden uit de kansrekening en de dynamica in de groepentheorie, de getaltheorie en de combinatoriek. Tot volgend jaar!



Figuur 3 ‘She figures 2018’ van de Europese Commissie en het Rathenau Instituut.

Francesca Arici

Mathematisch Instituut
Universiteit Leiden
f.arici@math.leidenuniv.nl

Interview Barbara Gentz

“Parents should get the support needed to make it possible to reconcile family and career”

Barbara Gentz is a professor of Mathematics at Bielefeld University, working on Random Dynamical Systems and Stochastic Processes in the Sciences. In January 2020 she was invited to the Evening of the Abel Prize organised by KNAW at the Trippenhuis in Amsterdam, where she talked about ‘Woman mathematicians breaking the glass ceiling—and what whistling Vivaldi has to do with it’. Afterwards she was interviewed by Francesca Arici.

My first encounter with Barbara happened online, a couple of years ago, when we started co-organising the 2019 meeting of the German branch of European Women in Mathematics (EWM), the European association of professional women mathematicians, at the Max Planck Institute for Mathematics in the Sciences in Leipzig (DE). After our conference last October, this is the second time we meet in person. Barbara jokes that this visit was part of her ‘Dutch year’: she came in April 2019 as keynote speaker for the Nederlands Mathematisch Congres, then in the summer she visited Leiden for the Equadiff conference, and now the KNAW meeting.

Let’s start with that, how was your experience last year at the NMC?

“I liked it very much. The talks were really interesting. And this conference is bringing everyone together from all across the country. When I was in the central courtyard, I could see groups of people discussing in the sunshine, and smaller groups sitting at the tables, working together with pencil and paper or on the computer. Such a meeting which is embraced by everyone is something very valuable for the scientific community. In my experience, such a for-

mat does not work equally well in Germany, which is too big of a country for that. Even at the specialised German meetings of the Special Interest Group for Probability and Statistics, there are several hundred participants and a large number of parallel sessions, which makes it hard to connect with people you do not know yet.”



Barbara Gentz

The Equadiff conference in Leiden was another big event you attended, how was your experience there?

“The Equadiff conference series sets a good example for large-scale conferences. Not only are the plenary speakers excellent, but the quality of the parallel sessions is also amazing. You have to be invited to organise such a session. In Leiden, Christian Kuehn and I had the opportunity to organise a session on Stochastic Dynamics with eight speakers, and we were very pleased with the talks we had in this session. The organisers of the Equadiff in Leiden did a fantastic job. Everything appeared to work without a glitch. And Leiden is a wonderful city, full of history. Walking from my hotel along the Nieuwe Rijn to the conference venue was a great way to start the day. The plenary sessions and the morning coffee breaks took place in the Hooglandse Kerk which was constructed in 1500! It was the ideal location for such a large crowd. The conference had more than 500 participants, and nevertheless I had the feeling of attending a long-awaited happy family gathering. It was easy to move around and to (re-)connect with people between the talks.”

Speaking of differential equations, in your research you study the role of noise in dynamical systems, with a focus on SDEs (stochastic differential equations). Can you tell us more about that?

“I am interested in the effect of small random perturbations on continuous-time dy-

namical systems. If the underlying deterministic dynamics have a stable solution, the stochastic dynamics will typically stay for an exponentially long time close to the deterministic solution. Things get interesting when the stochastic dynamics approaches a bifurcation of the deterministic system. In this case you may observe transitions to other regions of the phase space which you would not see in deterministic dynamics. I am particularly interested in the quantification of these effects. How likely are such transitions and when do they typically happen? As it turns out, for precise results we often have to carry out a rather fine analysis of the deterministic behaviour before tools from stochastic analysis can be used to quantify the effect of noise.”

Could you describe an example of such a system where noise plays a big role?

“A good example is the stochastic-resonance paradigm. Consider the overdamped motion of a Brownian particle in a double-well potential which is modulated periodically in time in such a way that during one period of time, the potential goes continuously from a deeper lefthand well to a deeper righthand well and back again. The speed at which the potential changes is a small parameter, so that the dynamics has time to relax towards the bottom of the well in which it finds itself. While the deterministic dynamics can never leave the well it starts in, the behaviour of the randomly perturbed dynamics depends on the interplay of three small parameters, namely the noise intensity, the speed of modulation and the parameter which measures the minimal barrier height. With Nils Berglund, we obtained a very precise description in terms of concentration results for the stochastic dynamics with sharp estimates on the small probability that the dynamics exits from the region of concentration [2]. Depending on how the small parameters scale, the stochastic dynamics either follows the deterministic dynamics for an exponentially long time, or periodic transitions between wells can be observed with high probability. This is something we studied a long time ago, but it is still my favourite example because it is the simplest example illustrating the effects I am studying in my work.”

Is there a result that you are particularly proud of?

“I really like a work with Nils Berglund on the effect of random perturbations in the Allen–Cahn equation on a finite interval [3]. When the length of this interval increases, the PDE exhibits more and more stationary states while there are always the same two global minima of the energy functional. We investigated, how the stochastic dynamics realises transitions between these stable states and derived a Kramers-type law for the metastable transition times. We were actually coming from a discrete model: a system of n particles, coupled on a ring, which is something we analysed earlier with Nils and Bastien Fernandez [4], and treating the Allen–Cahn equation as a scaling limit of that system, we could transfer these earlier results to the stochastic PDE. This is the work I like best, because many different ideas came together. We were using our knowledge of the deterministic system, combined with potential theory, large deviations theory, and stochastic analysis.”

Can you tell us a bit about your journey to becoming a mathematician? And specifically what took you to this field of study?

“In school I have always liked the hard sciences. I was interested in mathematics, physics and computer science, and it was clear early on that I would go in that direction. When I had to decide what to study, I excluded physics first because that would have required to spend my summer doing practical work, learning how to file, sand and grind properly, and I honestly did not want to do that. At that time, in the mid eighties, computer science seemed to be the future. So the truth is that I intended to study computer science. However, I finished school in January and I could not have started computer science before autumn. So I decided to start in April with one semester of mathematics at the Technical University in Berlin — and I loved it. So much that I never considered changing.

Since I entered university in April, I had a restricted choice of courses and I started with real analysis II and linear algebra I. Since that seemed too little, I picked elementary probability in addition. I quickly noticed that I had to work really hard for my class in real analysis while I was well prepared for the other two classes. So I was doing probability from the first semester on, and I loved it so much that I continued immediately with increasingly advanced courses.”

Then you moved to Switzerland for your PhD...

“I was finishing my diploma with Manfred Breger when Erwin Bolthausen moved back to Switzerland and offered me a PhD position at the University of Zürich. I was one of the three people who had the opportunity to go to Zürich with him. From a personal viewpoint, the experience of moving to Zurich was very interesting. One would not think that, because the language is almost the same, but the culture in Switzerland is very different from what I was used to in Berlin. The biggest difference was in the way people interacted. Being a German I was far too frank! Scientifically, Zurich was a great place to be. With two excellent math departments in the city, the scientific life was so rich.

My first postdoc position was at ETH, a fantastic place to be as a young researcher... However, I soon came to realise that there was little hope to stay in Switzerland on a permanent basis. I could see young Swiss colleagues who did not want to go abroad moving from temporary position to temporary position. Switzerland is a small country, and my feeling has always been that the universities ensure the quality of their departments by expecting their professors to prove themselves internationally first. For a young scientist with family roots in Switzerland this system can be very hard, but if we look at the level of Swiss math departments we cannot deny that this approach to hiring is very successful.

When I had the opportunity to join Anton Bovier’s group at the Weierstrass Institute, I went back to Berlin. Anton was the second referee on my thesis, and I was happy to have the chance to join his group. He turned out to be a very good mentor in this crucial time of my career. Anton is somebody who really knows what is important, scientifically and careerwise. I was still a rather young postdoc when I was invited to a review panel at National Science Foundation in the US. I honestly did not feel I was up to it. But Anton said: ‘Of course you go!’ This kind of support and encouragement is essential. At such a delicate stage in your career, you need someone who tells you that you can do it.”

You just mentioned Anton Bovier’s role as a mentor in the postdoctoral phase of your career. Is there any other support you received that you consider essential in your development?

“My parents never wavering in their support of my interests was pretty crucial. I always wanted to do little experiments, I was interested in technical things, and my parents never gave me the feeling that there was something I should do, or anything I could not do. They were supporting me financially at the beginning of my studies, until I had a position that paid enough. It was always important for them to make sure I could concentrate on my studies. These things mean a lot and should not be taken for granted.

Last, but not least, there is my advisor. Erwin’s way to look at mathematics has had a strong influence on me, and his ‘Do you really need this?’ is excellent advice whenever you are stuck with a proof... I try to pass this on to my own students.”

Women in mathematics

At what point in your career have you become involved with the European Women in Mathematics association?

“A fellow PhD student told me about EWM. At that time we had e-mail, but web browsers just came into existence and information was not readily available on the internet. The members of the German section were taking turns in buying the weekly edition of *Die Zeit*, which had all the job advertisements for positions in academia. Someone would make a summary of all the positions in mathematics and send it out by e-mail. Even today, we still have a mailing list with job announcements.

In 2011, colleagues in Aachen organised the first German EWM meeting after a long time. I attended this meeting, and, sure enough, I found myself organising the next one. Since then, we have had regular meetings, on average every two years. But the German Branch is much less active than the Dutch one. I was quite impressed when I saw how many activities you have here with EWM-NL! You should keep it up, in particular the strong involvement of younger people.”

How was your experience as a woman in mathematics, especially at the beginning of your career?

“When I started university, approximately 50 percent of the students in mathematics were women, maybe even more. But one has to keep in mind that prospective teachers are studying together with the other



Barbara Gentz during the EWM conference at the Max Plank Institute in 2019

Photo: Max Planck Institute for Mathematics in the Sciences

students. Later, when I had more specialised classes in probability, maybe a quarter were women. At that time, I was not paying much attention to that. I was once in a computer science class on complexity theory, and I was sitting down somewhere in first quarter of the lecture hall, so I could not see the room behind me. When the professor asked two people to come to the front to demonstrate something he asked for one man and one woman. I remained seated because I was not even aware that I was the only woman in the room.”

In your address at the ‘Avond van de Abel-prijs’ you talked about measures currently implemented in an effort to improve gender equality in mathematics, and you referred to them as ‘the good, the bad and the ugly’. I found that this was a very apt definition. Could you elaborate a bit on that?

“This is how I personally like to categorise the measures which are implemented by the administration. First of all, there are the good measures like childcare, dual-career programs, and so on. Measures which can help families and do not hurt any one.

Then there are measures which are meant to guarantee women equal participation in committees but at the same time require this participation, leading to an above average workload for female scientific staff. This is in particular true for hiring committees. Serving on a hiring committee in Germany is extremely time consuming, and some studies even suggest that having more women on a hiring committee does not lead to more women hires, see, e.g., [1]. We also have to document our evaluation of all applicants in detail, choosing our words very carefully, because we know that someone will be looking at

the protocols of the meetings with a purely bureaucratic eye. This can be annoying at times, but certainly contributes to fairness. These measures take up a lot of our time, but they are also still needed to keep us on our toes, raise awareness and help preventing unconscious bias against women or other minorities.

And then there are those measures that I consider *ugly*. For me, those are the measures which involve people outside of the university where they are implemented. In our university there is a strong pressure to get outside expertise in the form of evaluations of theses or job candidates, and 50 percent of that expertise should come from women. However, in mathematics, there are not so many women professors, and achieving this percentage is simply not realistic. It is not appropriate to ask female colleagues from other universities to serve significantly more often than their male colleagues.”

How does it work for you in practice?

“It is not easy. In our department, we have only a few women, but our male colleagues understand that it is simply not possible to have a 50/50 representation in all committees. So we do as much as we reasonably can, and when it is not possible to achieve equal representation, the department documents that we at least tried.

When I organise a workshop, I start by writing down the names of possible speakers — and end up with roughly 20 percent women. So I sit down and focus on adding as many women colleagues as I can in an attempt to achieve a more balanced list of speakers. In my experience, when you start sending out invitations, more women than men decline. I can think of several explanations, and I tend to believe that not only family obligations play a big role in this but that women nowadays get many more invitations because everyone is trying to invite the same few female speakers who are already well-established.

In our International Research Training Group, a graduate program which is funded by the DFG, the German Research Foundation, we made a commitment that a fixed percentage of PhD positions shall be filled with female students, and it was not easy to do so. There were simply not enough qualified applications from women and we had to reserve positions to fill them at a later time. When it comes to hiring of professors, there is a huge competition between departments for the rising stars among the young women mathematicians. When asking female colleagues whether they would consider applying to Bielefeld, I have heard more than once that they had been moving almost every year for quite some time and now want to settle and build a group at their current location. In any case, I very much hope that this trend of paying close attention to promising young female researchers continues and will finally lead to an increased percentage of women professors in the departments.”

Do you see a difference in the general attitude to this issue, especially compared to when you started out in your career?

“Things are really changing. I am involved in the SIAM Activity Group on Dynamical Systems, and I noticed that SIAM must be doing something right. If you look at their committees, you see that many committees had at least 50 percent of female officers elected, which is pretty amazing. And, if I counted correctly, more than 20 percent of the SIAM journals now have a female editor-in-chief.

I can see that by now everyone is looking really carefully at applications from qualified women, and nobody puts such an application aside just because they do not know the candidate. This is an important progress because it gives candidates fair consideration, independently of the networks they and their mentors belong to. But implicit bias is still a problem. Al-

though I have been involved with EWM for many years now, I know I am not immune. We should remind committee members regularly of this problem.

I also noticed a change in society reflected in my younger male colleagues. They spend much more time taking care of their children. And they are the ones who are objecting to meetings scheduled at times which are not family friendly. This looks minor, but it is an important step. Only when it becomes normal that mother and father spend a comparable amount of time with the kids and in the household, women can find an equal amount of time for their research.

When you go to a conference and take your children, the conference organisers nowadays often offer childcare on location. But a better solution for most families would be to take a nanny or a grandparent with them. It would be helpful if grants would generally allow to reimburse the extra cost.”

In preparing your talk, you went through recent data about women in science in the Netherlands. What was your impression about the situation in the Netherlands?

“When I saw the data I started wondering whether the percentage of women in science is so low because of prejudice against women, if the Dutch system is even more in conflict with starting a family than the German one or if an academic career is simply not attractive for Dutch women. It is easy to say that we should aim at 50 percent of female mathematicians in our countries, but maybe we will never achieve this goal because there might not be a sufficiently high percentage of women willing to pay the price of spending so much time on research. What we need to do is to make sure that the women who do want to go all the way are encouraged and have a fair chance at a career. Parenting scientists should get all the support needed to make it possible to reconcile family and career.”

References

- 1 M. Bagues, M. Sylos-Labini and N. Zinovyeva, Does the Gender Composition of Scientific Committees Matter?, *American Economic Review* 107(4) (2017), 1207–1238.
- 2 N. Berglund and B. Gentz, A sample-paths approach to noise-induced synchronization: Stochastic resonance in a double-well potential, *Ann. Appl. Probab.* 12 (2002), 1419–1470.
- 3 N. Berglund and B. Gentz, Sharp estimates for metastable lifetimes in parabolic SPDEs: Kramers’ law and beyond, *Electron. J. Probab.* 18 (2013), 1–58.
- 4 N. Berglund, B. Fernandez and B. Gentz, Metastability in interacting nonlinear stochastic differential equations I: From weak coupling to synchronisation and II: Large- N behaviour, *Nonlinearity* 20 (2007), 2551–2581 and 2583–2614.

Maarten Müller

Scholengemeenschap Marianum

Groenlo

m.muller@marianum.nl

Onderwijs

Op weg naar een nieuw curriculum

In ieder land ter wereld wordt er op gezette tijden bekeken of het curriculum nog voldoet aan de eisen die de huidige maatschappij stelt aan leerlingen. Ook in Nederland is recentelijk weer zo'n proces in gang gezet en loopt er sinds 2017 een traject om te komen tot modernisering van de kerndoelen en examenprogramma's van primair onderwijs en voortgezet onderwijs. Dit traject heet curriculum.nu en kan ook op de website met die naam gevolgd worden. Net als voor acht andere leergebieden is er voor rekenen en wiskunde een ontwikkelteam samengesteld uit leraren die als taak kregen bouwstenen te ontwikkelen voor nieuwe curricula. Een verslag van Maarten Müller, lid van het ontwikkelteam en zelf eerstegraads docent wiskunde op scholengemeenschap Marianum te Groenlo.

Na een proces waarin iedereen in verschillende rondes feedback kon leveren, werd op 10 oktober 2019 het eindproduct aangeboden aan minister Slob, waarna nu de politiek aan het woord is over hoe het vervolg eruit zal zien. Door de coronacrisis zit er op dit moment even geen schot in de zaak, dus het is nog onbekend wanneer er duidelijkheid komt over dat vervolg. Het eindproduct heeft wel een andere status dan in het begin beoogd werd. Zo is het niet gelukt om binnen de gestelde tijd een curriculum voor het gehele primair en voortgezet onderwijs te schrijven. Voor de bovenbouw van havo en vwo is op dit moment een aantal aanbevelingen gedaan, maar er is nog veel te bespreken voordat de examenprogramma's daadwerkelijk geactualiseerd kunnen worden. In een vervolgtraject zal het curriculum voor de bovenbouw van havo en vwo alsnog nader ingevuld worden. Uiteraard kan dit ook weer gevolgen hebben voor de on-

derbouw van havo en vwo en het primair onderwijs. Bovendien moeten nog andere aspecten bekeken worden die ook invloed kunnen hebben op het curriculum. Hierbij valt te denken aan het onderzoeken van de haalbaarheid van de voorgestelde modernisering door middel van pilots. Ook moet nagedacht worden over toetsing van de nieuw opgestelde leerdoelen.

In dit artikel wil ik, als lid van het ontwikkelteam Rekenen & Wiskunde van curriculum.nu, antwoord geven op de vraag wat we kunnen verwachten aan veranderingen in de onderbouw van het voortgezet onderwijs en alvast enkele vragen neerleggen die in een vervolgtraject beantwoord moeten worden. Ik zal me in dit artikel beperken tot havo en vwo, met de kanttekening dat er nog een hoge mate van onzekerheid is over hoe het geheel er uiteindelijk uit zal zien. De richting van de modernisering is wel al zichtbaar en die toon ik u in dit artikel.

Ik begin met een beschrijving van de problemen die het curriculum beoogt op te lossen, waarna de achterliggende overwegingen om tot praktische invulling te komen besproken worden. Ik sluit af met voorbeelden van voorgestelde wijzigingen in twee wiskundige kennisdomeinen en twee wiskundige denk- en werkwijzen.

Problemen en oplossingen

Het ontwikkelteam heeft eerst een visiedocument opgesteld. Daarin is een aantal redenen opgesomd om voor het vakgebied rekenen en wiskunde tot een nieuw curriculum te komen. Deze zijn

1. De veranderende positie van wiskunde in de maatschappij [12].
2. Een dalend beheersingsniveau bij de betere leerlingen [7,8].
3. Manco's in de doorlopende leerlijnen (in het bijzonder van primair onderwijs naar voortgezet onderwijs en van vmbo naar havo [14].
4. Gebrek aan samenhang en afstemming met andere vakken [10,13].
5. Gebrek aan motivatie onder leerlingen voor het vak wiskunde [7,8].

De genoemde redenen hebben geleid tot doelstellingen die met het nieuwe curriculum behaald moeten worden. Ik heb hierbij zelf het volgende lijstje gemaakt. Dit zijn niet de enige zes doelstellingen, maar voor

mij persoonlijk wel de meest in het oog springende

- Een goede balans tussen wiskundige kennisdomeinen en wiskundige denk- en werkwijzen.
- Zowel aandacht voor formele wiskunde als voor functionele wiskunde en de juiste balans daartussen.
- Het introduceren van reken- en wiskundeconcepten binnen de vakken rekenen en wiskunde voordat ze nodig zijn bij andere vakken.
- Een basis aan wiskunde voor iedereen, met daarin rekenen, verbanden en statistiek.
- Op elkaar aansluitende en vloeiend in elkaar overgaande leerlijnen en 'opstroomlijnen' (bijvoorbeeld van vmbo naar havo).
- Voldoende mogelijkheden tot uitdaging voor alle leerlingen op elk moment in hun onderwijsloopbaan.

Voor een uitvoerige bespreking van deze doelstellingen en mogelijke consequenties voor het curriculum, verwijs ik naar het eindproduct van het ontwikkelteam [3]. De reden om ze hier toch te noemen is dat de inhoudelijke keuzes die gemaakt zijn volgen uit deze doelstellingen.

Visie op wiskundeonderwijs

Wij vonden in het wiskundeonderwijs veel overeenstemming over de visie dat het doel van wiskundeonderwijs enerzijds is dat leerlingen de basiskennis beheersen en anderzijds ervaren 'hoe wiskunde werkt'

en hoe ze dat in leven en beroep kunnen toepassen. In lijn daarmee heeft het ontwikkelteam gekozen voor een raamwerk dat recht doet aan beide aspecten: de leerlingen leren de nodige basiskennis op beheersingsniveau, maar krijgen ook vaardigheden om op een wiskundige manier te werk te gaan in bijvoorbeeld kwantitatieve probleemsituaties en toepassingen. Dit raamwerk wordt zichtbaar in het wiskundeweb in Figuur 1.

In het wiskundeweb is de inhoud, ingedeeld in dertien domeinen, zichtbaar. De lijnen geven aan dat alle inhoud in samenhang kunnen worden aangeboden. In echte situaties is het nauwelijks mogelijk om geheel binnen één domein te blijven. Deze domeinen hebben in het rapport de naam 'grote opdrachten' gekregen.

De wiskundige kennisdomeinen zijn soms doel, terwijl de wiskundige denk- en werkwijzen middel zijn. Op andere momenten is dit precies andersom.

De wiskundige kennisdomeinen (in het donkerblauw) kennen een traditionele indeling. De indeling in de denk- en werkwijzen (in het lichtblauw) verenigt de toetskaders van TIMSS [9] en PISA [11], het Referentiekader rekenen [5] en de wiskundige denkactiviteiten uit de bovenbouw van havo en vwo [2].

Voor veel leerkrachten en docenten is dit niet nieuw, maar Drijvers en Kodde-Buitenhuis [4] beschrijven dat het toch erg lastig is om de denk- en werkwijzen blijvend prominent in de examens terug te zien. Dat maakt dat het belangrijk blijft

om ze te noemen en expliciet op te nemen in het curriculum. Zeker ook omdat het onderwijs zich in sterke mate richt op hetgeen getoetst wordt.

Voor een meer uitvoerige beschrijving van de wiskundige kennisdomeinen en de wiskundige denk- en werkwijzen wil ik wederom verwijzen naar het eindproduct van het ontwikkelteam [3] en naar de voorbeelden die volgen in het tweede deel van dit artikel.

Leidend bij het maken van keuzes is steeds geweest wat de veranderende maatschappij vraagt van toekomstige deelnemers aan deze maatschappij in zowel hun werk- als hun privéomgeving. Ook dit maakt dat de expliciete aandacht voor wiskundige denk- en werkwijzen van belang is en hiermee wordt ook aangesloten bij eerder ingezette ontwikkelingen, zowel in Nederland als internationaal.

De veranderende maatschappij

In de huidige maatschappij is het minder van belang goed cijferend te kunnen rekenen of standaardprocedures te kunnen uitvoeren. Dat betekent dat de reden om zich deze vaardigheden eigen te maken een andere is dan voorheen. De balans verschuift daarmee van louter procedurele kennis naar meer conceptuele kennis over bewerkingen.

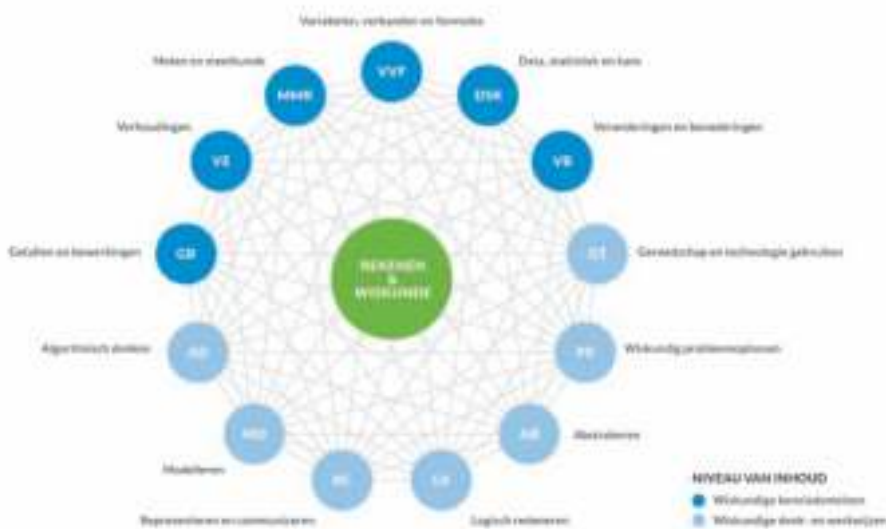
Om vervolgstappen te kunnen maken, is het van groot belang een solide procedurele basis te hebben die gebaseerd is op begrip. Als je bijvoorbeeld de regels van algebra goed wilt kunnen toepassen, moet je eerst goed snappen hoe je met getallen kunt rekenen. Hieronder twee voorbeelden.

Voorbeeld 1

Om $6 \cdot \frac{x-2}{3}$ te kunnen herleiden tot $2(x-2)$, is het belangrijk dat leerlingen weten dat je de volgorde van de bewerkingen vermenigvuldigen en delen kunt omdraaien en op welke manier je dat doet. Ze zullen zich er dus bijvoorbeeld bewust van moeten zijn dat $12 \times 43 : 6$ veranderd mag worden in $12 : 6 \times 43$.

Voorbeeld 2

Het herleiden van $\frac{x+3}{\frac{x-2}{4+x}}$ tot $\frac{(x-1)(x+3)}{(x-2)(4+x)}$ lukt alleen als leerlingen weten dat je teller en noemer van een breuk met dezelfde factor mag vermenigvuldigen of dat delen door een breuk hetzelfde is als vermenigvuldigen met het omgekeerde van een breuk.



Figuur 1 Twee typen leerdoelen volgens het ontwikkelteam Rekenen & Wiskunde van curriculum.nu [3].

De basis moet op orde zijn om het netwerk van wiskundige kennis verder op te bouwen. Probleemoplossend vermogen, wiskundig modelleren en abstraheren worden echter steeds belangrijker voor de burger en voor de beroepsbeoefenaar. In de beschrijving van het curriculum komen deze dus ook prominenter naar voren dan bij eerdere beschrijvingen, zoals door Commissie Toekomst Wiskunde Onderwijs [2].

Gebruik van digitale hulpmiddelen

Alvorens toe te komen aan de veranderingen binnen de wiskundige kennisdomeinen wil ik nog iets zeggen over de rol van ICT binnen het nieuw beschreven curriculum. De toenemende mogelijkheden van het gebruik van ICT bieden namelijk veel voordelen. Een voorbeeld uit mijn eigen lespraktijk in 5 vwo wiskunde B maakt dit mooi duidelijk.

Bij het introduceren van het concept integreren was het voorheen noodzakelijk om leerlingen te leren primitiveren. Pas als leerlingen konden primitiveren, kon je beginnen met de verschillende toepassingen van integreren, ervan uitgaande dat je leerlingen ook met die toepassingen wilde laten oefenen.

Ik heb nu in de eerste les dat we het over dit onderwerp hadden, mijn leerlingen met een Riemannsom de inhoud van een piramide laten bepalen. In de tweede les hebben ze kennis gemaakt met de integraalnotatie, de betekenis daarvan en het gebruiken van de grafische rekenmachine. Ze hebben in die les samen met mij oppervlaktes tussen grafieken en de x -as of y -as bepaald en ook al de inhoud van omwentelingslichamen bepaald bij wentelen om beide assen. Hierna konden ze er een tweetal lessen zelf mee aan de slag. Het primitiveren kwam pas in les vijf.

Op deze manier kon ik al mijn leerlingen gezamenlijk door het concept integreren loodsen, waar dat waarschijnlijk niet gelukt zou zijn als ik eerst het primitiveren had gedaan, omdat de voortgang van de leerlingen dan al snel uiteen zou zijn gaan lopen. In dit geval is het natuurlijk een didactische keuze en daar gaat curriculum nu niet over, maar het geeft wel aan dat er mogelijkheden zijn om belangrijke concepten al eerder voorbeeldmatig en begripmatig te introduceren, voordat de bijbehorende formele notaties en procedures ingesleten hoeven te zijn. Dit biedt als extra voordeel dat het beter mogelijk is om

concepten binnen rekenen en wiskunde te introduceren voordat ze nodig zijn bij andere vakken.

Daarnaast is dit een mooi voorbeeld om te laten zien hoe de wiskundige denk- en werkwijzen en de wiskundige kennisinhouden samen optrekken. De grote opdrachten ‘Veranderingen en benaderingen’ (hoe moet ik integreren en primitiveren?), ‘wiskundig probleemoplossen’ (welke integraal moet ik eigenlijk berekenen?) en ‘gereedschap en technologie gebruiken’ (doe ik dit met primitiveren of zet ik software in om de integraal te berekenen?) komen hier aan bod. Verder is het zo dat leerlingen hebben geleerd dat het integreren om een oppervlakte te bepalen en het integreren om een inhoud te bepalen beide terug te brengen zijn tot het optellen van oneindig veel infinitesimaal kleine getallen (‘abstraheren’).

Variabelen, verbanden en formules

Een van de grote opdrachten die door het ontwikkelteam beschreven is, heeft de naam ‘Variabelen, verbanden en formules’. Deze benaming is gekozen om recht te doen aan de verschillende niveaus (vmbo, havo en vwo) en de verschillende varianten van wiskunde (A, B, C en D). Verbanden hebben verschillende verschijningsvormen. Hierbij moet gedacht worden aan een beschrijving in tekst, een tabel (numeriek), een grafiek (grafisch) en een formule (symbolisch). Algebra is hier een onderdeel van.

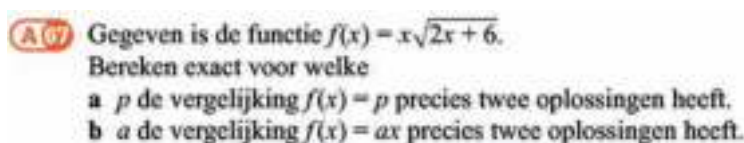
Op dit moment is er, met name in de onderbouw van het voortgezet onderwijs, in de meeste methodes vooral aandacht voor procedurele kennis met betrekking tot deze grote opdracht. De denk- en werkwijzen kunnen daarbij onderbelicht blijven. Leerlingen leren bij een formule tabellen en grafieken maken volgens vaste stappenplannen, maar er worden weinig vragen gesteld waarbij het nodig is flexibel te zijn in het kiezen van de juiste representatie van het verband. In de bovenbouw zie je af en toe wel dit soort vragen. Een mooi voorbeeld hiervan uit *Getal & Ruimte* zien we in Figuur 2.

In de onderbouw hebben leerlingen geleerd dat je het aantal oplossingen van een vergelijking kunt vinden door de discriminant te bepalen en deze te vergelijken met 0, maar dat werkt uiteraard niet bij deze vergelijking.

Hier is de geijkte aanpak om van de symbolische beschrijving over te stappen op de grafische. Als leerlingen dan gezien hebben dat ze iets moeten met de raaklijn aan de grafiek, kunnen ze weer terugschakelen naar de symbolische beschrijving. Hier komen minimaal drie grote opdrachten samen; ‘variabelen, verbanden en formules’ (vergelijkingen oplossen), ‘veranderingen en benaderingen’ (differentiëren) en ‘wiskundig probleemoplossen’; dit is immers geen routineopgave. Overigens is het bij deze opgave ook mogelijk om volledig in het symbolische te blijven. Het is mooi om de leerlingen te laten zien dat er wat te kiezen valt. Leerlingen moeten al veel stappen in het ‘abstraheren’ gemaakt hebben, voordat ze toe zijn aan dit soort opgaven. Let daarbij op de verschillende betekenissen van het isgelijktteken. De eerste keer dat de leerlingen ‘ $f(x) =$ ’ lezen wordt er een functie gedefinieerd, terwijl de andere twee uitdrukkingen een vergelijking voorstellen. Ook is het belangrijk dat ze snappen dat x in de eerste regel een variabele is en in de laatste regel een onbekende, terwijl a een parameter is.

Het ontwikkelteam beschrijft in de voorstellen dat er expliciete aandacht moet komen voor het verschil tussen een onbekende, een variabele en een parameter en ook de verschillende betekenissen van het isgelijktteken, zoals beschreven door Arcavi, Drijvers en Stacey [1]. Dit is een belangrijke stap in het abstraheren. Wie veel ervaring heeft met algebra zal zich niet eens meer bewust zijn van dit onderscheid, maar voor leerlingen kan dit tot veel verwarring leiden.

In het eindproduct van het ontwikkelteam [3] staat beschreven dat leerlingen ook al in de onderbouw ICT kunnen inzetten om te kiezen tussen een numerieke, grafische of algebraïsche wijze van oplossen.



Figuur 2 Flexibel omgaan met verschillende verschijningsvormen van verbanden in *Getal & Ruimte* (2015).

Ook bij het oplossen van vergelijkingen is het op dit moment zo dat er voornamelijk procedurele kennis gevraagd wordt. Leerlingen leren de uitgebreide balansmethode, kruiselings vermenigvuldigen, ontbinden in factoren en de *abc*-formule (en sommige leerlingen ook kwadraatsplitsen). Overige technieken komen in de bovenbouw aan de orde. Vergelijkingen worden vaak ingedeeld in categorieën lineair, macht, gebroken en wortel. In de bovenbouw komen daar dan nog exponentieel, logaritmisch en goniometrisch bij.

Het ontwikkelteam pleit voor een andere benadering van het indelen en oplossen van vergelijkingen. Vergelijkingen waarbij de variabele maar op één plek voorkomt, kunnen alle op een soortgelijke manier worden opgelost. Bij de grote opdracht 'Getallen en bewerkingen' wordt al om meer aandacht gevraagd voor inverse bewerkingen. Conceptuele kennis over bewerkingen kan hier ingezet worden om al dit soort vergelijkingen op te lossen.

Door goed te kijken naar de structuur van vergelijkingen kunnen nog veel meer vergelijkingen opgelost worden. Het betreft dan vergelijkingen van de vorm $A \cdot B = 0$, $\frac{A}{B} = 0$ en $f(A) = f(B)$, zoals $\sqrt{x-2} = \sqrt{4-x}$ of $(x^2 + 2)^2 = 9$.

Door op deze manier naar vergelijkingen te kijken, kunnen leerlingen op het oog heel verschillende vergelijkingen samenbrengen tot één klasse van vergelijkingen. Ook dit is weer een mooie stap in het abstraheren.

Ook de samenhang tussen de lineaire, exponentiële, logaritmische en machtsverbanden wordt beschreven in de voorstellen, waarbij in een tabel mooi te zien is dat bij elk van deze vier verbanden geldt dat het beschreven kan worden met 'als de onafhankelijke variabele toeneemt met een vaste hoeveelheid/factor, neem de afhankelijke variabele met een vaste hoeveelheid/factor toe of af'.

Data, statistiek en kans

In de grote opdracht met de naam 'Data, statistiek en kans' worden alle onderwerpen al op een eerder moment geïntroduceerd bij de leerlingen dan nu het geval is. Daarnaast wordt voorgesteld statistiek aan te bieden aan alle leerlingen, dus ook aan leerlingen met wiskunde B.

In het primair onderwijs moeten leerlingen op een speelse manier kennis maken met combinatoriek in relatie tot kansen.

Ook worden ze al uitgedaagd om na te denken over steekproef en populatie, opzet van een onderzoek en het trekken van conclusies (onder andere *fact checking*). Bij elk van de genoemde onderwerpen is het een eerste kennismaking. Het is belangrijk dat leerlingen zien welke zaken allemaal een rol spelen, zonder dat ze al allerlei ingewikkelde berekeningen uit kunnen voeren.

In het voortgezet onderwijs gaan leerlingen vooral ook praktisch aan de slag met het doen van statistisch onderzoek, waarbij beschrijvende statistiek een belangrijke rol speelt. Ook maken ze vervolgstappen in het beoordelen van gedaan onderzoek door anderen (onder andere *fact checking*).

Over de invulling van de bovenbouw is nog veel onduidelijk. De tijd om de bovenbouw goed uit te werken was niet toereikend. Er zijn contacten gelegd met de VVSOR (Nederlandse Vereniging voor Statistiek en Operations Research), die hebben aangeboden aangesloten te willen blijven bij een eventueel vervolgtraject. In dat vervolgtraject moet een en ander verder uitgewerkt worden. De keuzes die tot nu toe zijn gemaakt sluiten aan bij de aanbevelingen van de VVSOR [15]. Of het daadwerkelijk deze kant op gaat, moet nog blijken.

Het ontwikkelteam heeft beschreven dat de nadruk zou moeten liggen op het leren begrijpen wanneer getallen in een context wel en niet kloppen of betrouwbaar zijn. Dit vanwege het feit dat iedereen in het dagelijks leven steeds meer te maken krijgt met kwantitatieve uitspraken. Slechts een deel van deze uitspraken blijkt te kloppen door allerlei verschillende fouten die gemaakt worden.

Het gevoel krijgen voor onzekerheid zou volgens de VVSOR veel beter gaan door zelf gegevens te verzamelen met meerdere steekproeven, dan via het rekenen aan bijvoorbeeld betrouwbaarheidsintervallen

of het vergelijken van Cramers Phi met een waarde van 0,4 om te concluderen dat het verschil tussen twee groepen groot is. Het platslaan van statistisch denken tot stappenplannen met vuistregels moet dus verdwijnen, als het aan het ontwikkelteam ligt.

Wiskundig modelleren en probleemoplossen

Er is een grote discrepantie tussen hoe wiskunde er in schoolboeken en in het echte leven uit ziet. Wolfram [17] weet dit inspirerend te verwoorden in een TEDtalk. Hij doet hierin een tweetal interessante observaties, die relevant zijn in de context van dit artikel. Deze zijn:

1. In de wiskundelessen focussen we ons heel veel op het uitvoeren van berekeningen, terwijl dat slechts een klein deel is van wat wiskunde is.
2. We voeren deze berekeningen vaak uit met de hand, terwijl in het echte leven juist voor dit deel ICT wordt ingezet.

De tweede observatie van Wolfram betekent overigens niet dat leerlingen berekeningen niet meer met de hand moeten kunnen uitvoeren. Dit is nodig om vervolgstappen te kunnen maken binnen de wiskunde en ook om te voorkomen dat de ICT die ingezet wordt, een toverdoos wordt en wiskunde verwordt tot een knoppencursus. Om ICT goed in te kunnen zetten is het van belang de achterliggende wiskunde goed te beheersen.

Eerder beschreef ik hoe de wiskundige kennisdomeinen op het ene moment doel en op het andere moment middel kunnen zijn. Op die momenten dat ze middel zijn, is het het overwegen waard om de berekeningen uit te besteden aan ICT, zodat de focus op de denk- en werkwijzen ligt; in het bijzonder op het wiskundig probleemoplossen en modelleren.

In de Figuren 3 en 4 staat de beschrijving van deze grote opdrachten volgens

Bij wiskundig probleemoplossen gaat het om toepassen van reken-wiskundige (basis)kennis en vaardigheden, het gebruiken van vuistregels en ervaring (heuristieken) en soms ook om wiskundig modelleren. Kenmerkend voor een probleem is dat het voor de oplosser niet direct duidelijk is hoe het kan worden opgelost. Dit kenmerk is relatief: wat voor de een een probleem is, kan voor een ander een routinematig oplosbaar vraagstuk zijn. Bovendien kan wat eerst een probleem vormt voor iemand, na verloop van tijd routinematig oplosbaar zijn. Wiskundig probleemoplossen vraagt om een analyse van de probleemstelling, ontwikkeling van een oplossingsstrategie en de uitvoering daarvan. Vervolgens om aan de hand van de uitkomsten daarvan een oplossing te geven en te controleren of die past bij de probleemstelling. Wiskundig probleemoplossen gaat over problemen in de wiskunde zelf én over toepassingsproblemen, al dan niet uit andere leergebieden.

Figuur 3 Wiskundig probleemoplossen volgens curriculum.nu [3].

curriculum.nu [3]. Binnen probleemoplossingen wordt er gesproken over verschillende heuristieken. Het maken van een wiskundig model kan gezien worden als één van deze heuristieken, maar het is ook meer dan dat. Binnen modelleren passen ook grote open vraagstukken.

Wolfram geeft een beschrijving van wiskundig modelleren (met inzet van ICT). Hij onderscheidt in het proces vier fasen, waarin 'computation' slechts één van de vier fasen is, terwijl er in ons wiskundeonderwijs relatief weinig aandacht is voor de andere fasen. Het ontwikkelteam heeft beschreven dat het curriculum meer omvat dan alleen deze fase. In de beschrijving wat leerlingen moeten kennen en kunnen binnen de grote opdracht 'modelleren' staat onder andere:

- Keuzes te maken welke variabelen wel en niet meegenomen worden in de beschrijving van een model.
- Een uitkomst binnen het model te vinden, terug te vertalen naar de werkelijke situatie en kritisch te beschouwen of de juiste keuzes gemaakt zijn bij de keuze van de variabelen en het ontwerpen van het model. Op basis van de kritische beschouwing kan het model aangepast worden.

Modelleren gaat over het beschrijven van een situatie met behulp van schematische voorstellingen en/of wiskundige verschijningsvormen zoals formules, vergelijkingen, grafieken, meetkundige figuren en kansverdelingen. Een spreadsheet met formules is een voorbeeld van een wiskundig model. Leerlingen leren een situatie weer te geven in een passend wiskundig model. Zo'n model kan vervolgens gebruikt worden om een probleem op te lossen, een voorspelling te doen of een beslissing te nemen.

Figuur 4 Modelleren volgens curriculum.nu [3].

In de aanbevelingen voor de bovenbouw wordt benadrukt dat de aansluiting met andere vakken gezocht moet worden.

Binnen het wiskundeonderwijs verschaffen de wiskundeonderbouwdag, de wiskunde A-lympiade en de wiskunde B-dag mooie voorbeelden van modelleeropdrachten. Binnen deze opdrachten krijgen leerlingen in de aanloop nog flink wat sturing, maar de eindopdrachten zijn open opdrachten waar leerlingen zelf veel keuzes kunnen maken.

Een greep uit de opdrachten [16] levert onderwerpen op als

- Inrichten van een woonwijk (wiskundeonderbouwdag).
- Omgaan met weersvoorspellingen (wiskunde A-lympiade).
- Ontwerpen van een aanmeldsysteem voor scholen (wiskunde A-lympiade)
- Het analyseren van verscheidene spellen (Wiskunde B-dag).

Tot besluit

Al met al kan gesteld worden dat er in de wiskundige kennisdomeinen geen wereldschokkende wijzigingen staan, maar dat er belangrijke accentverschuivingen voorgesteld worden, die vooral beschreven staan in de wiskundige denk- en werkwijzen. Het uitvoeren van het nieuw voorgestelde curriculum zal van sommige docenten grotere veranderingen vragen dan van anderen.

Het is nu afwachten wat de politiek besluit. Daarna zullen de nieuwe examenprogramma's ontworpen moeten worden en vervolgens is het afwachten wat de methodemakers en examenmakers ermee doen.

Ik hoop in ieder geval dat het eindproduct veel houvast zal bieden voor docenten om zelf vorm te geven aan het schoolcurriculum en dat zij minder angstvallig vast zullen houden aan de methodes in hun strijd tegen de overladenheid van het programma. ☺

Referenties

- 1 A. Arcavi, P. Drijvers en K. Stacey, *The Teaching and Learning of Algebra: Ideas, Insights and Activities*, Routledge, 2017.
- 2 Commissie Toekomst Wiskunde Onderwijs, *Denken en doen, wiskunde op havo en vwo per 2015. Eindrapport van de vernieuwingscommissie wiskunde cTWO*, Freudenthal Instituut, 2013.
- 3 Curriculum.nu, *Uitwerking voorstel curriculum.nu voor rekenen en wiskunde*, 2019, geraadpleegd van <https://www.curriculum.nu/voorstellen/rekenen-wiskunde/uitwerking-rekenen-wiskunde>.
- 4 P. Drijvers en H. Kodde-Buitenhuis, Wiskundig denken in de centrale examens Wiskunde B van havo en vwo, *Nieuw Archief voor Wiskunde* 5/20(4) (2019), 252–258.
- 5 Expertgroep Doorlopende Leerlijnen taal en rekenen, *Over de drempels met rekenen*, SLO, 2008.
- 6 Getal & Ruimte, 11e editie vwo wiskunde B deel 2, Noordhoff, 2015.
- 7 M. van Graft, B. van Leeuwen en M. van Zanten, *Leerplankundige verkenning van TIMSS-trends*, SLO, 2017.
- 8 M. van der Hoeven, V. Schmidt, J. Sijbers, G. van Silfhout, E. Woldhuis en B. van Leeuwen, *Leerplankundige analyse PISA 2015*, SLO, 2017.
- 9 I.V.S. Mullis en M.O. Martin (red.), *TIMSS 2019 Assessment Frameworks*, TIMSS & PIRLS International Study Center en IEA, 2017.
- 10 J.M. Nelissen, Recent onderzoek naar transfer, *Reken-wiskundeonderwijs: onderzoek, ontwikkeling, praktijk* 26(1) (2007), 11–18.
- 11 Organization of Economic Development, *PISA for Development Assessment and Analytical*, 2018.
- 12 Platform Wiskunde Nederland, *Formulas for Insight and Innovation, Mathematical Sciences in the Netherlands – Vision document* 2025, 2012.
- 13 D. Rijborz, Op zoek naar een vakoverstijgende didactiek voor rekenen-wiskunde en aardrijkskunde op de lerarenopleiding basisonderwijs, *Volgens Bartjens–Ontwikkeling en Onderzoek* 47(5) (2018), 41–50.
- 14 V. Schmidt, *Aansluiting in perspectief*, SLO, 2018.
- 15 VVSOR, *VVSOR reactie Curriculum.nu voorstel Rekenen & Wiskunde*, 2019, geraadpleegd van <https://www.vvsor.nl/wp-content/uploads/2019/08/Reactie-VVSOR-op-Curriculum.nu-voorstel-Rekenen-Wiskunde.pdf>.
- 16 Wiskunde in teams, z.d., geraadpleegd van: <https://wiskundeinteamssites.uu.nl/oude-opdrachten>.
- 17 C. Wolfram, *Conrad Wolfram: Teaching Kids Real Math with Computers*, video, juli 2010, geraadpleegd op https://www.ted.com/talks/conrad_wolfram_teaching_kids_real_math_with_computers.

Pas gepromoveerden brengen hun werk onder de aandacht. Heeft u tips voor deze rubriek of bent u zelf pas gepromoveerd? Laat het weten aan onze redacteur.

Redacteur: Nicolaos Starreveld
 FNWI, Universiteit van Amsterdam
 Postbus 94214
 1090 GE Amsterdam
verdediging@nieuwarchief.nl



Numerical Methods for Nonlinear Elliptic Boundary Value Problems with Parameter Dependence

Sehar Iqbal

In January 2020 Sehar Iqbal from Utrecht University successfully defended her PhD thesis with the title *Numerical Methods for Nonlinear Elliptic Boundary Value Problems with Parameter Dependence*. Sehar carried out her research under the supervision of Prof. dr. R. H. Bisseling and dr. P. A. Zegeling.

During her PhD Sehar worked on numerical methods for nonlinear elliptic partial differential equations with parameter dependence, such as the Gelfand–Bratu model, and singularly perturbed convection-diffusion-reaction equations. After completing her PhD Sehar got interested in and is searching for a job in Data Science.

Nonlinear elliptic partial differential equations

Second order PDEs have the general form

$$Au_{xx} + 2Bu_{xy} + Cu_{yy} + Du_x + Eu_y + F = 0.$$

Suppose first that all the coefficients are constant, in this case such a PDE is called elliptic if

$$B^2 - AC \leq 0.$$

Examples of elliptic PDEs are the Poisson equation $\Delta u = u_{xx} + u_{yy} = f(x, y)$, for some function f , with the Laplace equation $\Delta u = u_{xx} + u_{yy} = 0$ as a special case. In general, the coefficients of the PDEs don't have to be constant. In case they are linear functions, the PDE is called elliptic if the principal symbol is non-zero away from the origin. In case they are non-linear functions, then the PDE is called elliptic if it is elliptic at every solution u ; where being elliptic at a solution u means that its linearization is elliptic at u .

Nonstandard finite difference schemes

The majority of differential equations (both linear and nonlinear) can't be solved exactly in terms of elementary functions. As a consequence, a variety of numerical methods has been constructed to find approximate solutions. One of the traditional numerical methods is the finite difference method (FD). Unfortunately, numerical instabilities may arise when using finite difference approximations.

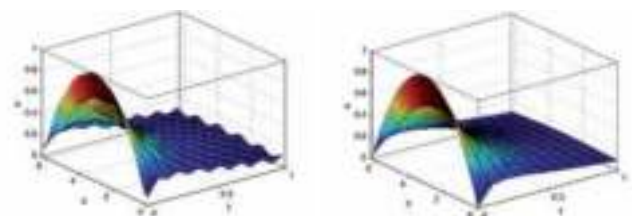


Figure 1 Numerical solutions using a standard FD method and a nonstandard FD method. The solution on the right remains stable (nonstandard), whereas the solution on the left possesses numerical instabilities (standard).

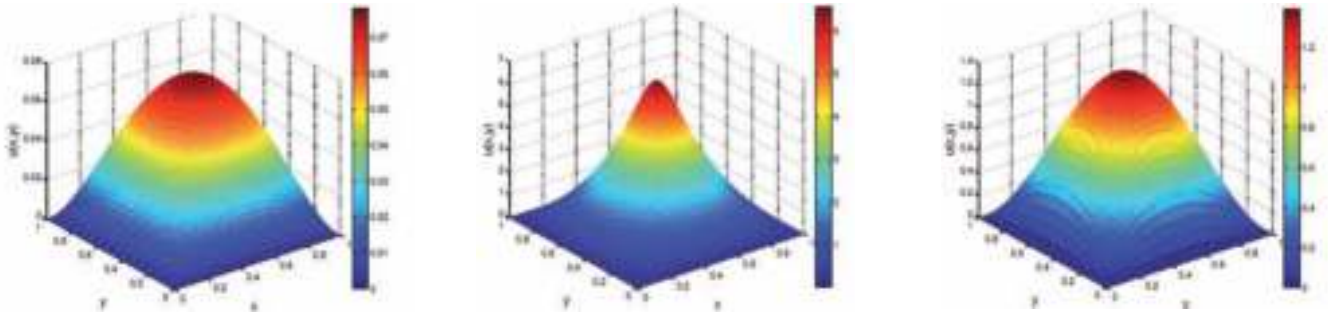


Figure 2

Normally, numerical instabilities can be recognized as the solutions to the discrete finite difference equations that do not correspond to any solution of the original differential equations. To eliminate or minimize such difficulties so-called nonstandard finite difference methods (NSFD) have been developed.

The Gelfand–Bratu model

The Gelfand–Bratu model is an elliptic partial differential equation. Traditionally, the names Bratu and, sometimes, Gelfand are coupled to this model. However, in historical literature, Picard was the first one who actually introduced this model in 1898, showing it does not possess non-unique solutions. The Gelfand–Bratu model simulates a thermal reaction process in a rigid material, where the process depends on a balance between chemically generated heat addition and heat transfer by conduction. Originally, the Gelfand–Bratu problem appears in the study of the quasilinear parabolic problem

$$T_t = \Delta T + \lambda(1 - \epsilon T)e^{\frac{T}{1+\epsilon T}}, \quad x \in \Omega \subset \mathbb{R}^n, n = 1, 2, 3,$$

$$T = 0, \quad x \in \partial\Omega.$$

Note that for $\lambda = 0$ we obtain the heat equation. Here $\lambda > 0$ is known as the Frank–Kamenetskii parameter, T is the temperature, Δ is the Laplacian, $\frac{1}{\epsilon}$ is the activation energy, t is time, m is the mass of a single molecule and Ω is a bounded domain (for example, a bounded container).

PDEs of this kind appear also in other applications and models, such as fluid dynamics at high Reynolds numbers, aerodynamics, atmospheric models, in elasticity theory (membrane buckling), in astronomy (gravitational equilibrium of polytropic stars and the Chandrasekhar model of the expansion of the universe), in thermo-electro-hydrodynamic models and in nanotechnology (electrospinning processes).

In her research Sehar focused on numerical methods for this type of PDEs. For the Gelfand–Bratu model numerical results indicate the existence of infinitely many solutions. These solutions are either periodic or semi-periodic. In her thesis Sehar demonstrates that the convergence of all solutions, namely, unique, lower, upper, periodic and semi-periodic, is obtained for small values of the dependence parameter λ . Particularly, the non-linear multigrid full approximation storage (FAS-MG) method is found to be more efficient than the other nonlinear multigrid methods.

Furthermore, the numerical bifurcation behavior of the Gelfand–Bratu problem in three dimensions shows the existence of two new turning points. For even higher dimensions, numerical experiments show the existence of several types of solutions. Bifurcation curves confirm the theoretical results of the higher-dimensional

Gelfand–Bratu problem as presented in the literature. Moreover, in her thesis Sehar proposes a higher order non-uniform finite difference grid in order to solve singularly perturbed boundary value problems with steep boundary-layers. She also sheds light on various theoretical properties concerning the extremum values and the asymptotic value at the right boundary point. In this line of research accuracy of the numerical schemes is essential. In her research 6th-order accuracy is established by considering only three-point central non-uniform finite differences. Numerical results illustrate that to achieve the 6th-order of accuracy, the proposed method needs approximately a factor of 5–10 fewer grid points than the uniform case.

In Figure 2 we present two solutions of the Gelfand–Bratu model in $\mathbb{R}^2$ for $\lambda = 1$ (left and middle panel) and the unique solution close to the critical value $\lambda = \lambda_c \approx 6.808124423$ (right panel) using the non-linear multigrid full approximation storage (FAS-MG) method on 161×161 grid points.

The more personal aspect

Behind all dissertations there is always a person, with flesh and bones, who has endured the long path of a PhD trajectory and has produced the work at hand.

Were you also involved in some other activities and events during your PhD?

“I really enjoyed participating in the meetings and conferences of the Dutch–Flemish Scientific Computing Society (SCS). The SCS has as a goal to unite researchers in and users of numerical mathematics and scientific computing. With some PhD colleagues at the Mathematical Institute at Utrecht University we also started the SIAM Student Chapter, an initiative which aims at increasing interaction among PhD and master students working in applied mathematics. This was in 2017. I served as secretary of this SIAM Student Chapter for two years (2017–2019).

Moreover, I am an active member of European Women in Mathematics–Netherlands (EWM–NL), a platform for all female professional mathematicians working in the Netherlands. EWM–NL forms the Dutch branch of EWM.”

Would you like to share some memories from the last four years?

“During the last four years I interacted with many people from different parts of the world, I learned a lot of this interaction. It was an amazing experience to present my research work in local and international conferences. The most fascinating part of my PhD was the teaching I had to do for the mathematics programs at Utrecht University. I taught and assisted in many mathematics courses.” ☞

Boekbesprekingen

| Book Reviews

Redactie: Hans Cuypers en Hans Sterk

Review Editors NAW - MF 7.092
Faculteit Wiskunde & Informatica
Technische Universiteit Eindhoven
Postbus 513
5600 MB Eindhoven
reviews@nieuwarchief.nl
www.win.tue.nl/wgreview



Godfried Kruijtzter

Een idee van Kansrekening met Tellen en Teken

Delft Academic Press, 2018

79 p., prijs €9,50

ISBN 9789065624291

Het woord kans wordt in het dagelijkse leven vaak en gemakkelijk in de mond genomen: er is kans dat het vannacht gaat sneeuwen, een voetballer benut een mooie kans of mist er juist een, de kans dat het evenement doorgaat is fifty-fifty, enzovoort. Vaak heeft het woord kans een positieve uitstraling, alhoewel men het ook wel heeft over goede en slechte kansen. In alle gevallen is er een duidelijke mate van toeval en onzekerheid in het spel. De kansrekening is bedoeld om ondanks de grilligheid van het toeval daar toch enige grip op te krijgen. We willen op een verantwoorde wijze met onzekerheden omgaan en zodanige keuzes maken dat het eindresultaat 'meestal' goed uitpakt ('altijd' lukt nu eenmaal per definitie niet). Dit geldt bij een spelletje poker, maar ook bij serieuze beslissingen over bijvoorbeeld de hoogte van dijken in Nederland. We hebben dan behoefte aan scherpe, eenduidige definities en strikt logische rekenregels, kortom aan een wiskundig opgezette kansrekening. Over dat onderwerp zijn al veel boeken geschreven, maar die zijn vaak nogal theoretisch van aard en voor veel mensen niet of moeilijk te lezen.

In het boekje *Een idee van Kansrekening* probeert de auteur Godfried Kruijtzter hier een tussenweg te vinden. Geen strenge opbouw met axioma's, lemma's en lange bewijsvoeringen, maar een rustige opbouw die aansluit bij het intuïtieve begrip dat iedereen over dit onderwerp toch heeft. Langs die weg passeren belangrijke maar tegelijkertijd toch lastige begrippen als afhankelijkheid en onafhankelijkheid, uitsluiten en insluiten, voorwaardelijke en onvoorwaardelijke kansen enzovoort, de revue.

De ondertitel 'met Tellen en Teken' slaat op de wijze waarop de stof uit de doeken wordt gedaan, te weten via een groot aantal eenvoudige voorbeelden uit de wereld van dobbelstenen en vazen met ballen. Bij deze uitleg heeft Godfried Kruijtzter gekozen voor een opzet die aansluit bij het proefschrift van Pieter Talsma (Utrecht, 1921). Zowel ten behoeve van de definitie van kans als bij de verklaring van de rekenregels wordt, in navolging van Talsma, het begrip 'speelruimte' geïntroduceerd en worden de bewerkingen aanschouwelijk gemaakt met eenvoudige diagrammen.

Het blijft in dit boek echter niet alleen bij uitleg en voorbeelden op het niveau van rode en blauwe ballen. Er worden ook doorkijkjes gegeven naar de mogelijke professionele toepassingen in bijvoorbeeld de medische sector, de rechtspraak of de betrouwbaarheid van technische systemen. En passant blijkt dan ook dat men bij al te luchthartige beschouwing gemakkelijk op het verkeerde spoor kan zitten. Kansrekening blijft, zoals in navolging van Jacob Bernoulli de tweede ondertitel luidt, een 'Kunst van (het) Vermoeden'.

Zeer leeswaardig is ten slotte het laatste hoofdstuk waar de relatie wordt gelegd tussen kansrekening en het thermodynamische begrip wanorde (entropie). Kansrekening als middel om de natuur beter te begrijpen. Kansrekening als onmisbaar onderdeel van de natuurkunde.

Ton Vrouwenfelder



Karin Verouden

De grenzen van het getal
Wiskundigen aan het woord

ISVW Uitgevers, 2019

160 p., prijs €24,95

ISBN 9789492538451

De titel suggereert dat niet alles in getallen is uit te drukken, dat er meer waardevolle perspectieven zijn dan het kwantitatieve alleen. Dit vermoeden wordt bevestigd, want deze gedachte komt in dit boek inderdaad aan de orde. De ondertitel 'Wiskundigen aan het woord' dekt de lading minder. Het boek bevat 17 interviews: slechts zeven met wiskundigen; zeven met exacte wetenschappers van andere disciplines, bij wie wiskunde een grotere of kleinere rol speelt in hun werk; drie met sporters en danskunstenaars. De achterflap geeft deze variatie beter weer en daar zien we ook dat de auteur als lerarenopleider zelf een wiskundige achtergrond heeft.

Voor het lezerspubliek van Nieuw Archief lijkt me ongeveer de helft van de verzameling interviews zeer de moeite waard. Er passeren mooie voorbeelden van wiskundig modelleren en de maatschappelijke betekenis daarvan. Een eerste voorbeeld: het voorspellen van het verloop van epidemieën en het effect van tegenmaatregelen (zeer actueel op het moment dat ik dit schrijf), een tweede voorbeeld: het kantelpunt in de gezondheid van een koraalsysteem (of zelfs een menselijk mentaal systeem), een derde voorbeeld: het optimaliseren van de treindienstregeling (denk ook aan de heisa destijds bij de NS-problematiek van 'het rondje om de kerk') en een vierde voorbeeld: statistiek bij gebruik van DNA-databanken voor forensische vraagstukken.

De wetenschappers bespreken de dilemma's verbonden aan hun werk. Zoals bij het eerste voorbeeld: mensen hebben het recht vaccinatie af te wijzen, maar dat verhoogt het risico voor anderen. Bij het tweede voorbeeld: er is grote zorg over de druk op het ecosysteem door vervuiling, maar een wetenschapper moet zich neutraal opstellen. Als dilemma bij het derde voorbeeld wordt genoemd: de conclusies van een model worden als feiten gepresenteerd, maar een model is nooit helemaal waardevrij. En bij het laatste voorbeeld: verplicht afstaan van DNA kan de veiligheid vergroten, maar gaat ten koste van de privacy, ieder krijgt de rol van verdachte. Aan politieke discussie wagen de meesten zich echter niet; daar trekken ze de grens.

Ook voor het onderwijs aan wiskundestudenten is dit deel van het boek bruikbaar: om te bespreken waar ze hun eigen grenzen willen trekken. Bovendien kan het feit dat de modellen alleen met woorden beschreven worden — er staat geen enkele formule in het boek — worden uitgebuit middels de opdracht de modellen erbij te zoeken en aan de tekst te toetsen. Ik denk hierbij aan een plek tegen het einde van het bachelor-curriculum, na niet alleen veel wiskunde maar ook ervaring met een paar modelleerprojecten, zoals ik dat aan de TU Eindhoven vele jaren meemaakte.

De rest van het boek was voor mij moeilijker te plaatsen. De sociaalgeneeskundige beschouwingen over aanraakrobots, telecare en e-health vond ik op zich interessant, maar behandelen eerder de grenzen van de techniek in de medische zorg dan de grenzen van het getal. Ook in de beide hoofdstukken over sport is de wis-

kunde soms ver te zoeken. In hoofdstuk 1597 ten slotte ontmoeten we een door de Fibonacci-getallen geïnspireerde choreografe. De auteur raakte daarop kennelijk op haar beurt zo geïnspireerd, dat ze besloot de hoofdstukken met de Fibonacci-getallen te nummeren. Eerlijk gezegd vind ik de natuurlijke getallen daarvoor toch meer geschikt.

Jacob Perrenet



K. van Harn, P.J. Holeyijn

Waarschijnlijkheidsrekening
Maattheoretische uitgangspunten en fundamentele eigenschappen

VU University Press, Amsterdam, 2019

x + 286 p., prijs €34,90

ISBN 9789086597949

Mijn enthousiasme om een technisch boek in de kansrekening te reviewen was in eerste instantie niet hoog, maar dat veranderde toen ik het boek zag. Tot mijn verbazing betrof het namelijk een Nederlandstalig kansrekeningboek, dat bovendien spiksplinter-nieuw is. Wie doet dat tegenwoordig nog?

Mijn interesse was dus gewekt. Later bleek dat de auteur Piet Holeyijn vlak voor het verschijnen van het boek gestorven is (zie het In memoriam, NAW september 2019, geschreven door coauteur Klaas van Harn). We hebben het hier dus ook over een stukje nalatenschap. Door veel Nederlandse wiskundigen bij wie ik informeerde over de auteurs en dit boek, werd ik overspoeld met romantische herinneringen aan het vak 'Grondslagen van de waarschijnlijkheidsrekening' aan de Vrije Universiteit Amsterdam. Behalve hun nostalgische gevoelens, vertelden zij mij ook dat het vak 'veel vroeg van de student.' Dit klinkt alsof het een spannend en uitdagend vak was.

Het boek *Waarschijnlijkheidsrekening* is een uitmuntende bundeling van college- en oefenstof die zo te zien jaar op jaar verfijnd is. Het is een ode aan de dictatencultuur die vroeger bestond aan Nederlandse universiteiten; een cultuur waar ook ik als student nog dankbaar gebruik van heb kunnen maken.

Het boek behandelt een breed scala aan basisonderwerpen in de kansrekening. Het begint met een stevige maattheoretische ontwikkeling van kansruimten, en eindigt met bewijzen voor onder andere recurrentie en transiëntie van discrete stochastische wandelingen. Het boek is grondig (bijna alles wordt bewezen), en ik heb maar één luttel foutje ontdekt (zoveel perfectionisme is ongebruikelijk in een eerste druk). Wat ik verder indrukwekkend vind, is dat alle paragrafen vernuftig op elkaar voortbouwen. In andere technische boeken zie ik vaak dat latere hoofdstukken toegevoegd zijn als een soort staartje; weinig hoofdstukken refereren naar eerdere resultaten, en veel van de bewijzen daarin worden weglaten. Met uitzondering van misschien de laatste paragrafen in het hoofdstuk over stochastische wandelingen in dit boek, had ik dit gevoel echter nergens. De eerste hoofdstukken waarin de ontwikkeling van kansruimten, -maten en -verdelingen op basis van maattheorie centraal staat zijn wel een sleur om te lezen, maar de kans is groot dat het onredelijk van mij is om te hopen dat lesmateriaal van zo'n hoge technische kwaliteit als dit als een novelle leest. De meeste

bekende kansverdelingen worden behandeld, maar in tegenstelling tot de onderliggende theorie staan deze niet centraal. Dat vind ik verfrissend. Moderne lesboeken voor het universitair onderwijs lijken in plaats daarvan steeds vaker te kiezen voor een meer pragmatische behandeling van de kansrekening. Misschien zag ik zelf nog graag behandelingen van Markov-ketens en vernieuwings-theorie en dergelijke, en besprekingen van relaties naar bijvoorbeeld de informatietheorie en combinatoriek, maar het boek vormt momenteel al een mooi geheel. Bovendien hebben de auteurs ook al een ander boek met de titel *Markov-ketens in discrete tijd* geschreven. Als een soort proefkonijnen heb ik zowel een klas eerstejaarsstudenten als meerdere collega's in de wiskunde één van de oefenopdrachten uit *Waarschijnlijkheidsrekening* gegeven. Bijna iedereen werd een dag of twee gegrepen door hun nieuwsgierigheid over wat het antwoord nou eigenlijk kan zijn (als ook gefrustreerd omdat velen het antwoord niet 1-2-3 zagen). Prachtig!

Samenvattend: ik noem met overtuiging *Waarschijnlijkheidsrekening* een mooie toevoeging aan de 'Nederlandse literatuur der wetenschappelijke wiskundeboeken'. Het is bijna zeker dat dit een van de allerlaatste Nederlandstalige wiskundeboeken is die op academisch niveau geschreven gaan worden. Nu kom ik dan ook bij the elephant in the room: haar Nederlandse taal. Zolang onze universiteiten vasthouden aan de wens om te internationaliseren, en zij alle langzamerhand overschakelen op Engelstalig onderwijs, kan ik dit boek niet aanraden voor onze onderwijsprogramma's. Ik raad liefhebbers van de wiskunde, verzamelaars van technische teksten, en Nederlands-sprekende experts in de stochastiek dit boek wel van harte aan. Het gaat in ieder geval een prominente plaats in mijn boekenkast innemen, en het inspireert mij nu al in mijn werk.

Jaron Sanders



June Barrow-Green, Jeremy Gray, Robin Wilson

**The History of Mathematics:
A Source-Based Approach, Volume 1**

MAA Press, 2019
xiii + 488 p., prijs \$89.00
ISBN 9781470443528

Dit boek is geschreven door experts op het vakgebied, en is bedoeld voor de 'algemeen wiskundig geïnteresseerde lezer'. De titel wekte mijn interesse omdat we op de lerarenopleiding van de Hogeschool Utrecht graag werken met historische bronnen tijdens onze cursus Geschiedenis van de wiskunde.

Op het eerste oog voldoet het boek aan de belofte van de titel: de geschiedenis van de wiskunde tot ±1650 wordt besproken aan de hand van historische bronnen zoals papyri, kleitabletten en teksten. Veel van de gebruikte bronnen komen ons bekend voor, zoals de Rhind-papyrus, het kleitablet Plimpton 322, de beschrijving van het getal 0 door Brahmagupta, de *Ars Magna* van Cardano, enzovoorts. Veel van deze bronnen worden voorzien van vragen die goed passen bij een college over de geschiedenis van de wiskunde. Dat maakt het voor ons een geschikt naslagwerk waaruit we kunnen putten. Wat dit boek toevoegt ten opzichte van eerdere

standaardwerken zoals *The Mathematics of Egypt, Mesopotamia, China, India, and Islam: A Sourcebook* samengesteld door Victor Katz, licht ik graag toe.

Dit boek is geschreven om te worden gebruikt tijdens een cursus Geschiedenis van de wiskunde aan de Open University. Bij deze cursus hanteren de auteurs een aantal uitgangspunten, die een bijzondere insteek geven voor het boek.

Ten eerste wordt de nadruk gelegd op de *historische ontwikkeling* van de wiskunde, en niet op de wiskunde zelf. Wie deed wiskunde en wat waren hun drijfveren, welke stijl werd daarbij gehanteerd, en wat was de invloed van een wiskundig werk op de geschiedenis van de wiskunde?

Ten tweede gaan de auteurs ervan uit dat het de taak is van de historicus om zich te baseren op (primaire, secundaire, tertiaire) bronnen en op basis daarvan een onderbouwde mening te geven over de geschiedenis van de wiskunde. Deze mening kan dus in de loop der tijden worden herzien.

Bij nader inzien blijkt bijvoorbeeld dat de keuze van de bronnen door deze uitgangspunten wordt beïnvloed: we zien de *Meno* van Plato voorbij komen, de inleiding van de *Ars Magna* van Cardano over de historie van de algebra en een tekst van Recorde over de *Commodities of geometry*. De auteurs lijken systematisch te hebben gezocht naar wiskundigen die zelf praten over de geschiedenis en het belang van de wiskunde, en dat is een interessante aanvulling ten opzichte van de meer wiskundig inhoudelijke bronnen.

Ook mooi is de ruimte die wordt gegeven aan verschuivende historische interpretaties van de bronnen. Een voorbeeld hiervan is de *historical case study* over Plimpton 322, waarin rivaliserende interpretaties van Neugebauer (1969), Buck (1980) en Robson (2002) voorbijkomen. Moderne historische inzichten geven op die manier een meerwaarde aan dit boek. In dezelfde trant wordt de mythe dat Descartes een revolutie in de wiskunde heeft veroorzaakt genuanceerd, en traceren de auteurs de oorsprong van deze mythe. En ten slotte is er een hoofdstuk gewijd aan de ontwikkeling van de sterrenkunde sinds de tijd van Copernicus en het belang daarvan voor de ontwikkeling van de wiskunde. De belangrijkste gevolgen hiervan voor de wiskunde — het ontstaan van calculus — wordt helaas wel uitgesteld naar Volume 2 van dit boek, dat nog niet beschikbaar is.

In een appendix staan schrijfoopdrachten voor studenten (inclusief instructies voor het vermijden van plagiaat) die gaan over essays op micro/meso/macroniveau van wiskundige onderwerpen. De nadruk ligt bij die opdrachten op de context en de historische betekenis van zo'n onderwerp, en het is prettig dat er voorbeelduitwerkingen zijn opgenomen om studenten te laten zien wat er zo'n beetje van ze wordt verwacht. Op deze manier wordt de lezer aangespoord om samen met de auteurs de ontwikkeling van de wiskunde historisch te duiden.

Naast al dit moois heeft het boek ook een paar tekortkomingen. De Chinese en Indiase wiskunde komen er bijvoorbeeld met slechts één gezamenlijk hoofdstuk nogal bekaaid vanaf in dit westerse georiënteerde boek. Ook hadden we graag — in een boek dat zich source-based noemt — meer primaire bronnen gezien waar nu secundaire, of zelfs tertiaire Engelstalige bronnen worden gebruikt. De vele afgedrukte titelbladen van oude boeken hadden daarvoor best plaats mogen maken.

Ook denk ik dat niet alle relevante recente historische inzichten in dit boek zijn verwerkt. Het was bijvoorbeeld mooi geweest als

de ontdekking uit 2016 van Matthieu Ossendrijver, hoe de Babyloniërs de baan van Jupiter berekenden met een vroege vorm van integraalrekening, in het boek was meegenomen. Dat benadrukt nog eens de grote rol die de sterrenkunde speelde voor de ontwikkeling van de wiskunde én zou nog beter laten zien waarom het goed is dat steeds weer met een nieuwe bril naar de geschiedenis van de wiskunde wordt gekeken.

Al met al is dit een goed boek voor studenten geschiedenis van de wiskunde en de beoogde algemeen wiskundig geïnteresseerde lezer. Wij als docenten zijn blij met de bronnen en de opdrachten, waar we zeker uit kunnen putten. De experts op het vakgebied zullen misschien geen dringende reden zien om dit boek aan te schaffen.

Luuk Hoevenaars



Mircea Pitici (ed.)

The Best Writing on Mathematics 2018

Princeton University Press, 2019

xvii+250 p., prijs £22.00

ISBN 9780691182766

Elk jaar vanaf 2011 wordt er door Mircea Pitici een jaaroverzicht gepubliceerd van de in zijn ogen interessante artikelen waar wiskunde bij betrokken is. In elk van de bundels vindt men dan onder andere een inspirerend voorwoord, een stuk of wat artikelen die 'verbatim' uit de originele bronnen zijn overgenomen, en nog heel veel meer.

Welnu, alle artikelen die Pitici in de hier besproken bundel van 2018 volledig heeft overgenomen, zijn verschenen in 2017. Het betreft achttien bijdragen. Ik geef de auteurs en de titels en van een aantal bijdragen een ultra-korte beschrijving.

(1) F. Su: 'Mathematics for human flourishing'. De secties hebben de volgende koppen: play, beauty, truth, justice, love. De inhoud heeft betrekking op de sociale verhoudingen in de wereld naar de wiskunde toe en omgekeerd.

(2) M. Wertheim: 'How to play mathematics'. De auteur beschrijft het 'uitoefenen' van wiskunde door levende organismen en artefacten in het oproepen van meetkundige en algebraïsche patronen. Denk hierbij aan fractals, maar bijvoorbeeld ook aan teksten uit Alice in Wonderland, aan filosofische beschouwingen, aan planologische formaties aangetroffen in oorspronkelijke Afrikaanse dorpen.

(3) R.S.D. Thomas: 'Beauty is not all there is in aesthetics in mathematics'. Wat betekent het, dat (oplossingen van) bepaalde wiskundige problemen mooi, diep, interessant, elegant, kort, inzichtelijk, belangrijk, zijn?

(4) M.J.H. Heule en O. Kullman: 'The science of brute force'. Recente ontwikkelingen in *automatic reasoning* en *supercomputing* heeft ervaring gebracht in het vakgebied van de *brute force*. In het artikel wordt dit uitgelegd aan de hand van het Boole'se *Pythagoras-Triple-Problem* uit de Ramsey-theorie; het ei van Columbus bleek SAT te zijn, dat is volgens de auteurs, "a disruptive reasoning technology in industry and science". Aanbevolen.

(5) P.J. Denning: 'Computational thinking in science'.

(6) R. Dijkgraaf: 'Quantum questions inspire new math'. De auteur schrijft over ontwikkelingen, eertijds vanuit de wiskunde naar de natuurkunde toe, en later, misschien verrassend, ook andersom, van de natuurkunde naar de wiskunde toe.

(7) E.D. en M.L. Demaine, A. Hesterberg, Q. Liu, R. Taylor en R. Uehara: 'Tangled triangles'. (in J. Beineke en J. Rosenhouse, eds., *The Mathematics of Various Entertaining Subjects: Research in Games, Graphs, Counting and Complexity*, Vol. 2). Dit is het eerste wiskundeartikel waar vlees aan zit, in de goede zin van het woord en een lust voor het oog. Het gaat over *Tangle Toy*, een topologisch manipulatief speelgoed dat kan draaien in allerlei richtingen, daarbij aanleiding gevend tot verscheidene meetkundige configuraties, zowel drie- als ook tweedimensionaal. Veel plaatjes, veelal in kleur, prachtig!

(8) J. Grime: 'The bizarre world of nontransitive dice'. Net zo als bij het vorige item wordt dit onderwerp uitstekend gebracht en beschreven via wiskunde en plaatjes.

(9) A. Benjamin, J. Kiesenwether en B. Weiss: 'The bingo paradox'. Als een groot aantal mensen bingo speelt, is het veel waarschijnlijker dat de winnende kaart een volledig ingevuld horizontaal rijtje heeft dan een dito verticaal rijtje. Hoe kan dit? Uitleg met behulp van permutaties, reeksen en kansrekening wordt gedemonstreerd.

(10) P. Winkler: 'The sleeping beauty controversy'. Uitleg, verklaring, nadere informatie (ook door anderen) wordt gegeven rond het volgende probleem (onvertaald): "Sleeping Beauty agrees to the following experiment. On Sunday, she is put to sleep, and a fair coin is flipped. If it comes up Heads, she is awakened on Monday morning; if Tails, she is awakened on Monday morning and again on Tuesday morning. In all cases, she is not told the day of the week, is put to sleep shortly after, and will have no memory of any Monday or Tuesday awakenings. When Sleeping Beauty is awakened on Monday or Tuesday, what — to her — is the probability that the coin came up Heads?"

(11) J. Ferreirós: 'Wigner's "Unreasonable Effectiveness" in context'.

(12) C. Arney: 'Learning and teaching interdisciplinary modeling'.

(13) N.E. Kress: 'Six essential questions in problem solving'.

(14) B.J. Braun, P. Bremser, A.M. Duval, E. Lokwood en D. White: 'What does learning mean for mathematicians?'.

(15) D. Mansfield en N.J. Wildberger: 'Written in stone: the world's first trigonometry revealed in an ancient Babylonian tablet'. De klei-tablet Plimpton 322 bevat onder meer wat nu heet Pythagoreïsche tripels in tabellen. Kijken we naar bepaalde trigonometrische verhoudingen daaromtrent, dan valt te beargumenteren, dat dergelijke grootheden uitgedrukt in het sexagesimale stelsel beter en exact uitdrukbaar zijn dan in het decimale stelsel het geval is. De auteurs werken dit kort uit; een relevante literatuurlijst is bijgevoegd.

(16) I.M. Serrano, L.H. Odom en B.D. Suceavă: 'Quadrivium: the structure of mathematics as described in Isidore of Seville's Etymologies'. Isidore van Seville (560–4 april 636) leefde in Spanje onder de Visigoten. Zijn hoofdwerk, de Etymologieën, dateert uit het begin van de zevende eeuw. Het bleef lang in gebruik, en werd gedrukt in 1472. Het is een encyclopedisch werk. De auteurs geven een uiteenzetting van de vaardigheden die erin staan, betrekking hebbende op algebra, meetkunde, muziek, sterrenkunde, ook in verband met Griekse en Romeinse techniek en wiskunde (denk aan *De Elementen*).

(17) M.J. Barany: 'The world war II origins of mathematics awareness'. Barany beschrijft heel nauwkeurig zijn doel zoals bedoeld in de titel; de American Mathematical Society en de Mathematical Association of America, politiek, John Rockefeller, Andrew Carnegie, Mina Rees, Marshall Stone, James Conant, Frank Jewett passeren onder andere de revue.

(18) C. Yoon: 'The writing mathematician'.

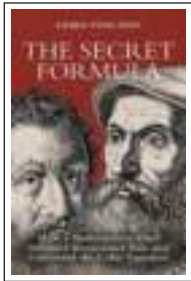
Maar dat is lang niet alles! Pitici meldt: 'Books mentioned', 68 stuks uit 2017; een lijst met de CV's van de boven genoemde auteurs; en verder zogeheten 'Notable writings', 'Notable Book Reviews and Review Essays', 'Notable Teaching Tips', 'Notable Interviews', 'Notable Lines in Mathematics', 'Notable Journal Essays'.

Al die items staan stikvol met vermeldingen aangaande namen van auteurs, titels van artikelen en bronnen. Dit alles is in 2017 verschenen.

Alles overziende constateren we dat deze anthologie over het jaar 2017 artikelen geeft over speltheorie, statistische beschouwingen, didactische zaken, geschiedenis van wiskunde en het nut van wiskunde buiten het vakgebied zelf. Zelf ben ik toch meer enthousiast over de selecties die Pitici in eerdere bundels heeft gehanteerd. Zie de recensies in NAW van maart 2015, pagina 87 (over 2013), december 2016, pagina's 303 en 304 (over 2014 en 2015) en ten slotte maart 2019, pagina's 68 en 69 (over 2016 en 2017).

Rob van der Waall

Recent verschenen publicaties. Als u een van deze boeken wilt bespreken of als u suggesties heeft voor andere boeken voor deze rubriek, laat dit dan per e-mail weten aan reviews@nieuwarchief.nl.



Fabio Toscano

The Secret Formula
How a Mathematical Duel Inflamed
Renaissance Italy and Uncovered the Cubic
Equation

Princeton University Press, 2020
ISBN 9780691183671
[press.princeton.edu/books/hardcover/
9780691183671/the-secret-formula](http://press.princeton.edu/books/hardcover/9780691183671/the-secret-formula)



David J. Hand

Dark Data
Why What You Don't Know Matters

Princeton University Press, 2020
ISBN 9780691182377
[press.princeton.edu/books/hardcover/
9780691182377/dark-data](http://press.princeton.edu/books/hardcover/9780691182377/dark-data)



Glen Van Brummelen

Trigonometry
A very Short Introduction

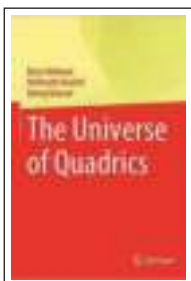
Oxford University Press, 2020
ISBN 9780198814313
[global.oup.com/academic/product/
trigonometry-a-very-short-introduction-
9780198814313](http://global.oup.com/academic/product/trigonometry-a-very-short-introduction-9780198814313)



Bruno Kahn

**Zeta and L-Functions of Varieties and
Motives**

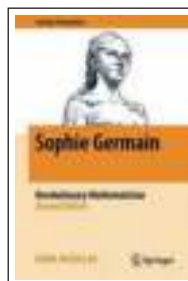
Cambridge University Press
ISBN 9781108703390
cambridge.org/9781108703390



Boris Odehnal, Hellmuth Stachel, Georg
Glaeser

The Universe of Quadrics

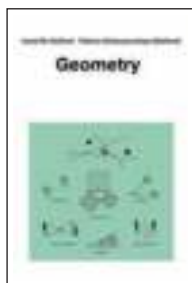
Springer, 2020
ISBN 9783662610527
springer.com/9783662610527



Dora Musielak

Sophie Germain
Revolutionary mathematician

Springer, 2020
ISBN 9783030383749
springer.com/9783030383749



Israel M. Gelfand, Tatiana Alekseyevskaya
(Gelfand)

Geometry

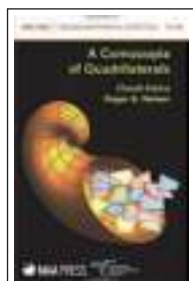
Springer, 2020
ISBN 9781071602973
[springer.com/9781071602973](https://www.springer.com/9781071602973)



David A. Cox

Applications of Polynomial Systems

American Mathematical Society, 2020
ISBN 9781470451370
bookstore.ams.org/cbms-134



Claudi Alsina, Roger B. Nelsen

A Cornucopia of Quadrilaterals

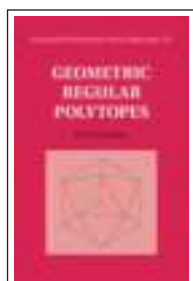
American Mathematical Society, 2020
ISBN 9781470453121
bookstore.ams.org/dol-55



John W. Morgan (ed.), Dusa McDuff, Mohammad Tehrani, Kenji Fukaya, Dominic Joyce

Virtual Fundamental Cycles in Symplectic Topology

American Mathematical Society, 2019
ISBN 9781470450144
bookstore.ams.org/surv-237



Peter McMullen

Geometric Regular Polytopes

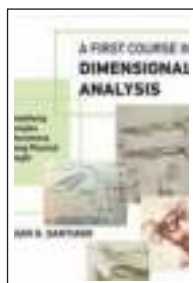
Cambridge University Press, 2020
ISBN 9781108489584
[cambridge.org/9781108489584](https://www.cambridge.org/9781108489584)



Jan Krajíček

Proof Complexity

Cambridge University Press, 2019
ISBN 9781108416849
[cambridge.org/9781108416849](https://www.cambridge.org/9781108416849)



Juan G. Santiago

A First Course in Dimensional Analysis Simplifying Complex Phenomena Using Physical Insight

MIT Press, 2019
ISBN 9780262537711
mitpress.mit.edu/books/first-course-dimensional-analysis



Simeon Ball

A Course in Algebraic Error-Correcting Codes

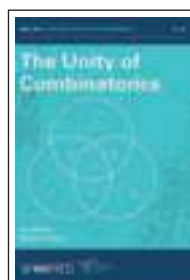
Springer, 2020
ISBN 9783030411527
[springer.com/9783030411527](https://www.springer.com/9783030411527)



Richard P. Stanley

Conversational Problem Solving

AMS, 2020
ISBN 9781470456351
bookstore.ams.org/mbk-130



Ezra Brown, Richard K. Guy

The Unity of Combinatorics

AMS, 2020
ISBN 9781470452797
bookstore.ams.org/car-36

Problemen

| Problem Section

This Problem Section is open to everyone; everybody is encouraged to send in solutions and propose problems. Group contributions are welcome. We will select the most elegant solutions for publication. For this, solutions should be received before **15 July 2020**. The solutions of the problems in this issue will appear in the next issue.

Problem A (proposed by Hendrik Lenstra)

Let R be a ring, and write $R[[X, X^{-1}]]$ for the set of formal expressions $\sum_{i \in \mathbb{Z}} a_i X^i$ with all $a_i \in R$.

- a. Suppose that $R[[X, X^{-1}]]$ has a ring structure with the following three properties.
 - i. The sum is given by $(\sum_{i \in \mathbb{Z}} a_i X^i) + (\sum_{i \in \mathbb{Z}} b_i X^i) = \sum_{i \in \mathbb{Z}} (a_i + b_i) X^i$,
 - ii. For two formal power series in X , the product is the regular product of power series, and likewise for two formal power series in X^{-1} .
 - iii. For $1 := X^0$, we have $X \cdot X^{-1} = 1$.
 Prove that R is the zero ring.
- b. Prove that for every ring R , there exists a ring structure on $R[[X, X^{-1}]]$ satisfying properties I and II.

Problem B (proposed by Onno Berrevoets)

Let $n \geq 1$ be an integer, and let $p_1, \dots, p_{n-1}$ be pairwise distinct prime numbers. Suppose that $(v_1, \dots, v_n)^T \in \mathbb{Z}^n$ is a non-trivial element of the kernel of

$$\begin{pmatrix} 1^{p_1} & 2^{p_1} & \dots & n^{p_1} \\ 1^{p_2} & 2^{p_2} & \dots & n^{p_2} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1^{p_{n-1}} & 2^{p_{n-1}} & \dots & n^{p_{n-1}} \end{pmatrix}.$$

Prove that

$$\max_k |v_k| \geq \frac{2}{n^2 + n} \prod_{i=1}^{n-1} p_i.$$

Problem C (proposed by Onno Berrevoets)

Let $n, m, k \geq 2$ be positive integers. n students will attend a multiple-choice exam containing mk questions and each question has k possible answers. A student passes the exam precisely when he/she answers at least $m+1$ questions correctly.

- a. Suppose that $n = 2k$. Show that the students can coordinate their answers such that it is guaranteed that at least one student passes the exam.
- b. Suppose that $n = 2k - 1$. Does there exist a k for which the students can coordinate their answers such that it is guaranteed that at least one student passes the exam?

Edition 2020-1 We received solutions from Hendrik Reuvers and Jaap Spies. The solution deadline was supposed to be 15 April rather than 15 March. We apologize for the mistake, and thank Jaap Spies and Hendrik Reuvers for pointing it out. Since there were a few questions about the deadline: We try to accept solutions that arrive (shortly) after the deadline as well. In Problem 2020-1/A there was a small typo in part b; the letter T should have been τ . We thank Henry Ricardo for paying attention.

Problem 2020-1/A (proposed by Hendrik Lenstra)

For every positive integer n , we write $[n] := \{0, 1, \dots, n-1\}$. For every integer m , we let $T(m) := m(m+1)/2$ be the m -th triangular number. Let $\tau: [n] \rightarrow [n]$ be the map given by $m \mapsto T(m) \bmod n$.

- a. For which n is τ a permutation?
- b. For these n , determine the sign of τ as a function of n .

Solution We received a partial solution from Hendrik Reuvers.

For part a, we prove that τ is a permutation if and only if n is a power of 2.

Suppose n is not a power of 2, say $n = n_1 n_2$ with n_1 odd and n_2 a power of 2. Suppose that $n_1 > 1$. We find $0 \leq m_1 < m_2 \leq n-1$ with $\tau(m_1) = \tau(m_2)$. If $2n_2 \geq n_1 + 1$, let $m_1 = (2n_2 - n_1 - 1)/2$ and $m_2 = (2n_2 + n_1 - 1)/2$. Otherwise, we have $2n_2 \leq n_1 - 1$, and we let $m_1 = (n_1 - 1 - 2n_2)/2$ and $m_2 = (2n_2 + n_1 - 1)/2$. In both cases, we find $0 \leq m_1 < m_2 \leq n-1$ and $\tau(m_1) = \tau(m_2)$. So n must be a power of 2.

Conversely, suppose that n is a power of 2, and suppose that $m(m+1)/2 = m'(m'+1)/2 \pmod n$ with $m, m' \in [n]$. Since 2 is not invertible mod n , this is the case if and only if $m(m+1) = m'(m'+1) \pmod{2n}$. We can reduce this to $(m-m')(m+m'+1) = 0 \pmod{2n}$. Since precisely one of $m-m'$ and $m+m'+1$ is even, we find that either $m = m' \pmod{2n}$ or $m+m'+1 = 0 \pmod{2n}$. This second case is not possible since $0 < m+m'+1 < 2n$, hence $m = m' \pmod{2n}$, and in particular $m = m'$. This shows that τ is injective and hence a permutation.

The answer to part b is that τ has sign 1 if $n = 1$ or $n = 2$ (can be verified immediately), and sign -1 if $n = 2^k$ with $k \geq 2$.

Suppose that $n = 2^k$ with $k \geq 2$. Define $s: [n] \rightarrow [n]$ by $s(2x) = x$ and $s(2x+1) = n-x-1$ for $x \in [n/2]$. Observe that for $x \in [n]$, we have $\tau[x] = s(x)(1+2s(x)) \pmod n$. We first show that s is an even permutation of $[n]$. It is clear that $s(x)$ is a permutation. For $1 \leq i \leq n-2$, we let s_i be the permutation of $[n]$ obtained by fixing $0, \dots, i-1$ and mapping x to $n-1+i-x$ otherwise. Observe that $s_{i+1} \circ s_i$ fixes $0, \dots, i-1$, maps $n-1$ to i , and maps x to $x+1$ otherwise. This is an even permutation if i is odd. We readily verify that $s_{n-2} \circ s_{n-1} \circ \dots \circ s_1 \circ s = \text{id}_{[n]}$. From this, we conclude that s is an even permutation.

To show that τ is an odd permutation, it now suffices to show that $\tau \circ s^{-1}$ is an odd permutation. Since $\tau(x) = s(x)(1+2s(x))$, we find that $\tau \circ s^{-1}(x) = x + 2x^2 \pmod n$ for all $x \in [n]$. The following lemma then finishes the proof.

Lemma. Let $f(X) = aX^2 + bX + c \in \mathbb{Z}[X]$ be a polynomial and suppose that a is even and b is odd. Let $n \geq 4$ be a power of 2. Then the map $f_n: \mathbb{Z}/n\mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$ defined by $x \mapsto f(x)$ is a permutation and has sign

$$\epsilon(f_n) = a + b + 2c \pmod 4,$$

where we identify the group of signs $\{\pm 1\}$ with the subgroup of order 2 in $\mathbb{Z}/4\mathbb{Z}$.

Proof. We prove this by induction on n . First note that for $n = 2$ the sign of such a polynomial permutation is 1 if and only if c is even.

We first prove the base case $n = 4$. We can verify that the translation $X \mapsto X + c$ has sign $1 + 2c$, so we may assume without loss of generality that $c = 0$. Now 0 and 2 are fixed elements of f_4 . Moreover, we have that $1 \mapsto 1 \pmod 4$ if and only if $a + b \equiv 1 \pmod 4$ (and $1 \mapsto 3$ otherwise), and $3 \mapsto 3 \pmod 4$ if and only if $a + b \equiv 1 \pmod 4$ (and $3 \mapsto 1$ otherwise).

Now let $N > 4$ be a power of 2 and assume that the lemma is true for all $n < N$. Again, we may assume that $c = 0$. Indeed, the translation $X \mapsto X + 1$ is simply an N -cycle and hence an odd permutation; all other translations are simply repeated applications of this translation.

The sets $2\mathbb{Z}$ and $2\mathbb{Z} + 1$ are invariant sets of the polynomial function f . Consider the polynomials $g(X) := f(2X)/2 \in \mathbb{Q}[X]$ and $h(X) := (f(2X+1) - 1)/2 \in \mathbb{Q}[X]$. Then

$$g(X) = 2aX^2 + bX, \quad h(X) = 2aX^2 + (2a+b)X + \frac{a+b-1}{2}.$$

We see that $g(X), h(X) \in \mathbb{Z}[X]$ both satisfy the posed conditions of the lemma on f . Therefore, they respectively induce permutations $g_{N/2}, h_{N/2}: \mathbb{Z}/(N/2)\mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{Z}/(N/2)\mathbb{Z}$. Notice that $g_{N/2}$ and $h_{N/2}$ have the same sign as the permutation of f_N on the set $\{0, 2, \dots, N-2\} \subset \mathbb{Z}/N\mathbb{Z}$ (even classes) and $\{1, 3, \dots, N-1\}$ (odd classes) respectively. Hence, we find that $\epsilon(f_N) = \epsilon(g_{N/2})\epsilon(h_{N/2})$. By applying the induction hypothesis on $g_{N/2}$ and $h_{N/2}$ we see that

$$\begin{aligned} \epsilon(g_{N/2})\epsilon(h_{N/2}) &= (2a+b) \cdot (2a+(2a+b)+(a+b-1)) \\ &\equiv b(a+1) \equiv a+b \pmod 4. \end{aligned}$$

This proves that $\epsilon(f_N) = a + b \pmod 4$. This concludes the proof of the lemma. We conclude that τ has odd sign if $n = 2^k$ with $k \geq 2$.

Problem 2020-1/B (proposed by Onno Berrevoets)

Let G be a finite group of order n . A map $f: G \rightarrow \mathbb{R}$ is called a near-homomorphism if for all $x, y \in G$, we have $|f(xy) - f(x) - f(y)| \leq 1$.

- Show that for every near-homomorphism f from $G \rightarrow \mathbb{R}$, we have $\text{diam}(f[G]) := \sup_{x, y \in G} |f(x) - f(y)| \leq 2 - 2/n$.
- Show that if G is cyclic, then there exists a near-homomorphism $f: G \rightarrow \mathbb{R}$ with $\text{diam}(f[G]) = 2 - 2/n$.

Solution We received a partial solution from Hendrik Reuvers.

For part a, let f be a near-homomorphism from G to $\mathbb{R}$, and let $a, b \in G$ with $f(b) - f(a) = \text{diam}(f[G]) =: D$. For all $x \in G$, we have

$$\begin{aligned} f(bx) - f(ax) &= (f(bx) - f(b) - f(x)) - (f(ax) - f(a) - f(x)) + f(b) - f(a) \\ &\geq -2 + f(b) - f(a) = D - 2. \end{aligned}$$

Summing over x , we find

$$\begin{aligned} 0 &= \sum_{x \in G} f(bx) - f(ax) = f(b) - f(a) + \sum_{x \in G \setminus \{1\}} f(bx) - f(ax) \\ &\geq D + (n-1) * (D-2) = nD - 2(n-1). \end{aligned}$$

This reduces to $D \leq 2 - 2/n$ as required.

For part b, if G is cyclic with generator g , the function $f: G \rightarrow \mathbb{R}$ given by $f(g^k) := (2k - n)/n$ for $k \in \{0, 1, \dots, n-1\}$ is a near-homomorphism satisfying the requirements.

Problem 2020-1/C (proposed by Hendrik Lenstra)

Let $n \geq 4$ be an integer and let A be an abelian group of order 2^n . Let σ be an automorphism of A such that the order of σ is a power of 2. Then the order of σ is at most 2^{n-2} .

Solution Hendrik Reuvers and Jaap Spies submitted partial solutions. The current solution was provided by Hendrik Lenstra.

Consider the subring of $\text{End}(A)$ generated by $\epsilon = \sigma - 1$. This subring is commutative. Note that both 2 and ϵ are nilpotent, the latter because $\epsilon^{2^k} \equiv \sigma^{2^k} - 1 \equiv 0 \pmod{2}$ for k sufficiently large. This means that the ideal $m = (2, \epsilon)$ satisfies $m^k = 0$ for k sufficiently large. Let k be minimal such that $m^k = 0$. Then the chain of subgroups $m^i A$ is strictly descending for $i = 0, \dots, k$. In particular, $A/m^i A$ has order at least 2^i for $i \leq k$. Moreover, we find $k \leq n$, meaning $m^n = 0$.

We first prove that $A/(2\epsilon(2-\epsilon)A)$ has order at least 2^4 . Since $2\epsilon(2-\epsilon) \in m^3$, this is obvious if $A/m^3 A$ has order at least 2^4 . So suppose that the latter only has order 2^3 . Then we also find $A/m^i A$ has order 2^i for $i = 1, 2, 3$. For $r \in \{2, \epsilon, 2-\epsilon\}$, consider the group homomorphism $f_r: A/mA \rightarrow mA/m^2A$ (both of these are groups of order 2) sending $a + mA$ to $ra + m^2A$. Because $f_2 - f_\epsilon = f_{2-\epsilon}$, these three cannot all be isomorphisms, so at least one of the three is 0. For this r , we find $rA \subseteq m^2A$, and multiplying with the other two gives us $2\epsilon(2-\epsilon)A \subseteq m^4A$, so we find that $A/(2\epsilon(2-\epsilon)A)$ has order at least 2^4 .

Finally, we use this to prove that $\sigma^{2^{n-2}} - 1 = 0$. The former equals $(1 + \epsilon)^{2^{n-2}} - 1$. We use Newton's binomial to expand $(1 + \epsilon)^{2^{n-2}}$. Note that if $i = 2^k u$ with u odd, then the number of factors 2 in $\binom{2^{n-2}}{i}$ equals $n - 2 - k$ if $0 < i < 2^{n-2}$. This tells us that all terms with $i > 2$ in the expansion of $(1 + \epsilon)^{2^{n-2}}$ lie in m^n and hence equal 0. It follows that

$$\begin{aligned} (1 + \epsilon)^{2^{n-2}} - 1 &= 2^{n-2}\epsilon + 2^{n-3}(2^{n-2} - 1)\epsilon^2 \\ &= 2^{n-2}\epsilon - 2^{n-3}2\epsilon^2 \\ &= 2^{n-4}2\epsilon(2 - \epsilon). \end{aligned}$$

Above, we showed that $2\epsilon(2 - \epsilon)A$ has order at most 2^{n-4} . We find that $2^{n-4}2\epsilon(2 - \epsilon)A = 0$, from which we conclude $\sigma^{2^{n-2}} - 1 = 0$.

