

Inhoud | Contents

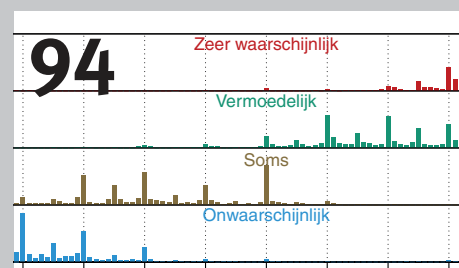
Artikelen | Features

- Evenement | Event**
 89 NWD: Kop of munt? Groep of individu? Knots of Lint? *Rob van Oord*
- Oratie | Inaugural Lecture**
 94 Toegepaste statistiek: van ontwikkeling tot communicatie *Casper Albers*
- Interview | Interview**
 101 Sanne Blauw: Het beste interview ooit (met het Nieuw Archief) *Nicolaos Starreveld, Hans Sterk*
- Onderzoek | Research**
 103 Waarom p -waardes niet gebruikt mogen worden als statistisch bewijs *Ronald Meester*
- Reis naar het bewijs | Trip to the Proof**
 110 Lineaire vormen en de vergelijking van Catalan *Rob Tijdeman*
- Geschiedenis | History**
 118 Shreds of memory of Paul Erdős *Vilmos Komornik*
- Evenement | Event**
 127 Impressie NMC 2019 *Wil Schilders*
- De oplossing | The Solution**
 131 De vervloekte kromme *René Schoof*
- In Memoriam | Obituary**
 135 Ruth Curtain: Een scherp oog voor nieuwe ontwikkelingen *Hans Zwart*
- Onderwijs | Education**
 137 Wiskunde als complex netwerk *Harun Cetin, Robert Kooij*

Rubrieken | Departments

- 83 Redactioneel *Raf Bocklandt*
- 84 Agenda *Margriet Oomen*
- 86 Nieuws *Margriet Oomen*
- 114 Stoffelijke resten: Göttingen *Wieb Bosma*
- 125 Het keerpunt van Lukas Verburgt *Daan Mulder*
- 144 In de verdediging *Nicolaos Starreveld*
- 146 Boekbesprekingen *Hans Cuypers, Hans Sterk*
- 151 Problemen *Onno Berrevoets, Rob Eggermont, Daan van Gent*

Uitgelicht



Casper Albers, hoogleraar Toegepaste Statistiek en Datavisualisatie in Groningen, sprak op 19 maart zijn oratie uit.



Vilmos Komornik haalt herinneringen op aan Paul Erdős.

Colofon

Het Nieuw Archief voor Wiskunde is een uitgave van het Koninklijk Wiskundig Genootschap en verschijnt vier maal per jaar. Het tijdschrift richt zich op eenieder die zich beroepsmatig met wiskunde bezighoudt, als academisch of industrieel onderzoeker, student, leraar, journalist of beleidsmaker. Het stelt zich ten doel te berichten over ontwikkelingen in de wiskunde in het algemeen en in de Nederlandse wiskunde in het bijzonder.

ISSN 0028-9825

Adres

Nieuw Archief voor Wiskunde
Centrum Wiskunde & Informatica
Postbus 94079, 1090 GB Amsterdam
tel. 020-5924288
redactie@nieuwarchief.nl
www.nieuwarchief.nl

Hoofredactie

Raf Bocklandt (r.r.j.bocklandt@uva.nl)
Robbert Fokkink (r.j.fokkink@tudelft.nl)

Eindredactie/Bladmanager

Fred Drissen (fred@nieuwarchief.nl)

Redactie

Viktor Blåsjö (UU), Hans Cuypers (TU/e), Teun Koetsier (VU), Daan Mulder, Margriet Oomen (UL), Nicolaos Starreveld (UvA), Hans Sterk (TU/e), Mark Timmer (UT)

Problemenrubriek (problems@nieuwarchief.nl)

Onno Berrevoets, Rob Eggermont en Daan van Gent

Bureau redactie

Claartje Ottens

Illustraties

Ryu Tajiri

Vormgeving

Susanne Laws (omslag, begeleiding binnenwerk)
Kitty Molenaar (ontwerp)

Druk

Veldhuis Media

Advertenties

advertenties@nieuwarchief.nl

Koninklijk Wiskundig Genootschap

www.wiskgenoot.nl

Platform Wiskunde Nederland

www.platformwiskunde.nl

European Mathematical Society

www.euro-math-soc.eu

International Mathematical Union

www.mathunion.org

Koninklijk Wiskundig Genootschap

Het Koninklijk Wiskundig Genootschap (KWG) is een landelijke vereniging van beoefenaars van de wiskunde. In 1778 opgericht onder de zinspreuk: 'Een onvermoeide arbeid komt alles te boven' is het 's werelds oudste nationale wiskundegenootschap. Leden ontvangen het Nieuw Archief voor Wiskunde als onderdeel van hun lidmaatschap.

Bestuur

Jan Wiegerinck (UvA, voorzitter), Marije Elkenbracht (ABN AMRO, penningmeester), Marie-Colette van Lieshout (CWI, secretaris), Danny Beckers (VU), Theo van den Bogaart (HU), Sonja Cox (UvA), Barry Koren (TU/e), Michael Mürger (RU), Wioletta Ruszel (TUD).

Secretariaat

Koninklijk Wiskundig Genootschap, CWI
Postbus 94079, 1090 GB Amsterdam
wiskgenoot@wiskgenoot.nl
www.wiskgenoot.nl

Ledenadministratie KWG / Abonnementen

admin@wiskgenoot.nl, tel. 020-5924008
Wijzigingen of opzegging kunt u ook doorgeven door in te loggen op www.wiskgenoot.nl.

Contributie

Tarieven per jaar (bij betaling per automatische incasso krijgt u € 2,50 korting):

- gewoon lid: € 92,50
- reciprociteitslid: € 72,50
- gepensioneerden en werklozen: € 47,50
- aio's, oio's, studenten: € 37,50 (max. 4 jaar)
- lid zonder Nieuw Archief: € 52,50

Studenten en pas afgestudeerden kunnen een jaar lang gratis lid worden.

Voor verzending van het Nieuw Archief naar het buitenland wordt een portotoeslag van € 10 in rekening gebracht.

Instituten in Nederland en buitenland kunnen zich abonneren op het Nieuw Archief voor Wiskunde voor € 100 (Nederland), € 110 (Europa) of € 112,50 (buiten Europa).

Members of foreign societies

Members of *SIAM*, the *Société Mathématique de France*, the *Gesellschaft für Angewandte Mathematik und Mechanik*, the *Deutsche Mathematiker-Vereinigung*, and of the *American, Australian, Belgian, Indian, London, Spanish, and South-African Mathematical Societies* living outside of the Netherlands pay € 72,50 instead of the full membership fee of € 92,50 a year. Conversely, these foreign societies, as well as the *VvS+OR* and the *NVORWO*, have reduced membership fees for KWG members. A postage charge of € 10 is added for members living abroad but in Europe, and a charge of € 12,50 for members living outside of Europe.

Exchange subscriptions

Koninklijk Wiskundig Genootschap Library
Centrum Wiskunde & Informatica
P.O. Box 94079, NL-1090 GB Amsterdam
KWG-exchange@cwi.nl

Informatie voor auteurs

Kopij

Het Nieuw Archief voor Wiskunde is een geredigeerd tijdschrift. Kopij dient per e-mail te worden aangeboden aan kopij@nieuwarchief.nl. Uitgebreide informatie en auteursinstructies kunt u vinden op www.nieuwarchief.nl.

Volgende nummers

nummer	maand	verschijnen	deadline kopij
20(3)	september	2019	verstreken
20(4)	december	2019	01-08-2019
21(1)	maart	2020	01-11-2019
21(2)	juni	2020	01-02-2020

Instituutsleden

De publicaties van het Koninklijk Wiskundig Genootschap worden mede mogelijk gemaakt door de bijdragen van de volgende instituten.



Centrum Wiskunde & Informatica



Rijksuniversiteit Groningen



Universiteit van Amsterdam



Universiteit Leiden



Vrije Universiteit



Universiteit Utrecht



Technische Universiteit Eindhoven



Eurandom



Technische Universiteit Delft



Universiteit Twente



Radboud Universiteit Nijmegen



Freudenthal Instituut

Op het omslag

De Nationale Wiskunde Dagen vonden dit jaar voor de 25ste keer plaats. Maar liefst 900 leraren en andere belangstellenden bezochten deze jubileumeditie op vrijdag 1 februari en zaterdag 2 februari in Veldhoven. Lees het verslag van Rob van Oord op pagina 89.

Hogere algebra voor het klimaat

Met de priemende blik van Greta Thunberg in mijn achterhoofd zat ik onlangs thuis in de sofa te mijmeren over het klimaat. Vrolijk word je daar niet van, vooral als je nagaat wat er allemaal nodig is voor een succesvolle omschakeling naar een hernieuwbare, CO₂-vrije samenleving. Een gigantische opdracht die bovendien zo snel mogelijk moet gebeuren.

Verzonken in gedachten, viel er mij een aspect op dat in het publieke debat onderbelicht is en toch van groot belang kan zijn voor het bepalen van de juiste strategie: niet-commutativiteit. Het cruciale aan een goede oplossing is namelijk niet dat die zo snel mogelijk wordt geïmplementeerd, maar dat alle stappen gebeuren in een volgorde die zo weinig mogelijk CO₂ uitstoot. Laat me dit even illustreren met twee voorbeelden uit België, omdat ik als jullie zuiderbuur daar het meest vertrouwd mee ben.

Veel Belgen krijgen van hun werkgever een auto als onderdeel van hun loon. Die auto mogen ze ook gebruiken in hun vrije tijd en alle benzine wordt betaald door het bedrijf. Dit zorgt voor veel fileproblemen en luchtvervuiling en het is logisch dat zulke loonwagens op termijn best zouden verdwijnen. Maar daarnaast moet ook het hele Belgische wagenpark elektrisch worden. Er moeten dus twee dingen gebeuren en de volgorde waarin je ze doet is van belang voor de uitkomst.

Als je eerst de bedrijfswagens afschaft en dan het wagenpark elektrificeert, lijkt het alsof je minder wagens moet vervangen en de klus dus eenvoudiger wordt. Aan de andere kant is het gemakkelijker bedrijfswagens te elektrificeren omdat die sneller vervangen worden en vaker in een hogere prijsklasse zitten. Wanneer je de loonwagens onmiddellijk afschaft, zullen veel gezinnen zelf een benzine-auto kopen, waarmee ze bovendien nog veel langer zul-

len rijden. Eerst afschaffen dan elektrificeren ($E \circ A$) of omgekeerd ($A \circ E$) maakt wel degelijk een verschil en voor er beslist wordt in welke volgorde we te werk gaan, is het raadzaam na te rekenen wat het minste uitstoot. In het politieke debat komt dit echter niet aan bod en de partijen die het meest met het klimaat begaan zijn, zijn ervan overtuigd dat afschaffen de topprioriteit moet zijn.

Een tweede, controversiële voorbeeld gaat over de kerncentrales. In België wordt de helft van de elektriciteit opgewekt door kernenergie. Op termijn zullen deze kerncentrales moeten sluiten, maar de vraag is wanneer? Je kan ze sluiten voor we voldoende wind- en zonne-energieparken hebben uitgebouwd, of erna. Sluiten na uitbouwen ($S \circ U$) of omgekeerd ($U \circ S$): wederom een geval van niet-commutativiteit want bij de tweede keuze moet je het elektriciteitsstekort opvangen met extra gascentrales. Dit is de weg die de groene partij wil volgen en zo zitten ze in de absurde situatie dat hun klimaatplan zal leiden tot veel meer CO₂-uitstoot in België dan de plannen van de politici die zij klimaattreuzelaars noemen. De groenen sussen dan wel hun geweten door te zeggen dat dit niks uitmaakt omdat de CO₂-uitstoot Europees wordt vastgelegd, maar als elk land zo zou reageren zal van dat Europees plan niks in huis komen.

Zo zie je maar: een abstract wiskundig concept uit de algebra is wel degelijk van toepassing op een succesvol klimaatbeleid, maar het blijft natuurlijk de vraag of we de politiek en het algemeen publiek voor deze niet-commutatieve kijk op de problematiek ‘warm’ kunnen maken...

Raf Bocklandt, hoofdredacteur

Korteweg-de Vries Instituut, Universiteit van Amsterdam

Agenda

| Upcoming Events

1 januari – 31 december 2019

❑ Spelen met wiskunde

Doe-tentoonstelling. Maak zelf een draaikolk en bouw je eigen brug. Ontdek hoe geluid eruitziet en speel als een kunstenaar met perspectief. Wiskunde is écht overal.

plaats Rijksmuseum Boerhaave, Leiden

info rijksmuseumboerhaave.nl

juni 2019

2–7 juni 2019

❑ MAPSP 2019

Tweejaarlijkse workshop over scheduling.

plaats Hotel De Zeeuwse Stroom, Renesse

info sbe.maastrichtuniversity.nl/mapsp2019

7 juni 2019

❑ Mark Kaç

Maandelijks seminar voor onderzoekers in kansrekening en statistische mechanica, met sprekers Jan Wehr (Tucson Arizona) en Cyril Lucas (Parijs).

plaats Utrecht

info www.win.tue.nl/markkac

11–14 juni 2019

❑ 50 Years of Random Cluster Model

Workshop georganiseerd door Aernout van Enter (RUG) en Frank den Hollander (UL) ter ere van het vijftigjarig bestaan van het random cluster model.

plaats Lorentz Center@Oort, Leiden

info lorentzcenter.nl

12–14 juni 2019

❑ DynStoch 2019

Workshop georganiseerd door DynStoch network (Statistical methods for dynamical stochastic models) over statistische analyse van stochastische processen.

plaats Delft

info dutiosb.twi.tudelft.nl/dynstoch2019

17–21 juni 2019

❑ Statistics Conference

Statistiekconferentie ter ere van de 60ste verjaardag van Aad van der Vaart.

plaats Marekerk, Leiden

info pub.math.leidenuniv.nl/~schmidthieberaj/aadbirthday

30 juni – 5 juli 2019

❑ ACM SIGMOD/PODS 2019

Jaarlijkse internationale conferentie voor database-onderzoekers, ontwikkelaars en datascience-beoefenaars met als doel het uitwisselen van resultaten, nieuwe technieken en ervaringen.

plaats Beurs van Berlage, Amsterdam

info sigmod2019.org

juli 2019

1–3 juli 2019

❑ 17th Cologne-Twente Workshop (CTW 2019) on Graphs and Combinatorial Optimization

Workshop over discrete algoritmen, grafen en combinatorische structuren.

plaats Enschede

info wwwhome.math.utwente.nl/~ctw

1–5 juli 2019

❑ Data Science for Dynamical Systems

Workshop mede georganiseerd door Hermen Jan Hupkes (UL) en Martina Chirilus-Bruckner (UL).

plaats Lorentz Center@Oort, Leiden

info lorentzcenter.nl

1–5 juli 2019

❑ Geometry and Quantum Theory: Graduate School and Colloquium

Summerschool en colloquium georganiseerd door Raf Bocklandt (UvA), Martijn Kool (UU) en Maarten Solleveld (RU).

plaats Ernst Sillem Hoeve, Den Dolder

info gqt.nl/colloquium

1–5 juli 2019

❑ Workshop on Calculus of Variations

Workshop met als doel het bij elkaar brengen van experts en jonge onderzoekers om te discussiëren over de ontwikkelingen en toepassingen van de moderne variatierekening.

plaats Dorpshuis, Schiermonnikoog

info calcvar2019.sites.uu.nl

8–12 juli 2019

❑ Equadiff 2019

Bijeenkomst in het kader van een serie internationale meetings over de theorie en toepassingen van differentiaalvergelijkingen.

plaats Hooglandse Kerk, Leiden

info universiteitleiden.nl/equadiff2019

Suggesties voor deze agenda zijn welkom.

Redacteur: Margriet Oomen

agenda@nieuwarchief.nl

14–22 juli 2019

International Mathematical Olympiad (IMO)

Internationale wiskundecompetitie voor middelbare scholieren.

plaats Bath, Verenigd Koninkrijk

info imo2019.uk

15–17 juli 2019

Workshop on Mathematics of the Economy and Climate

Workshop in het kader van een samenwerkingsverband tussen de Universiteit Utrecht en de Universiteit van Sydney.

plaats Kontakt der Kontinenten, Soesterberg

info mathplanetearth.nl/econclim.html

28 juli–3 augustus 2019

International Mathematics Competition for University Students 2019

Internationale wiskundewedstrijd voor studenten.

plaats Blagoevgrad, Bulgarije

info imc-math.org.uk

augustus 2019

19–30 augustus 2019

Summerschool Mathematics Education

Internationale summerschool over de recente ontwikkelingen op het gebied van wiskundeonderwijs en het onderzoeken van wiskundeonderwijs.

plaats Universiteit Utrecht

info utrechtsummerschool.nl

23–24 augustus 2019

Vakantiecursus 2019

Vakantiecursus van PWN voor leraren, studenten van lerarenopleidingen en voor andere belangstellenden. Dit jaar is het thema ‘Deep Learning’.

plaats Technische Universiteit Eindhoven

info platformwiskunde.nl/vakantiecursus

30–31 augustus 2019

Vakantiecursus 2019

Vakantiecursus van PWN voor leraren, studenten van lerarenopleidingen en voor andere belangstellenden. Dit jaar is het thema ‘Deep Learning’.

plaats CWI, Amsterdam

info platformwiskunde.nl/vakantiecursus

september 2019

13 september 2019

Finale Nederlandse Wiskunde Olympiade

Nationale finale van de wiskundeolympiade voor middelbare scholieren.

plaats Technische Universiteit Eindhoven

info wiskundeolympiade.nl

16–20 september 2019

Machine Learning in Heliophysics

Workshop over hoe machine- en deep learning-technieken, informatietheorie en Bayesiaanse analyse worden gebruikt in allerlei problemen in het ruimteonderzoek.

plaats Koninklijk Instituut vd Tropen, Amsterdam

info event.cwi.nl/ml-helio-2019

20 september 2019

Wiskundetoernooi

Internationaal wiskundetoernooi waaraan leerlingen uit 4/5 vwo in teams kunnen deelnemen. De wedstrijd vindt tegelijkertijd plaats in Nijmegen, Bonn en Leuven.

plaats Radboud Universiteit, Nijmegen

info ru.nl/wiskundetoernooi

28 september 2019

Junior Wiskunde Olympiade

Jaarlijks landelijke wiskundewedstrijd voor leerlingen van havo en vwo, georganiseerd door de VU in samenwerking met de Nederlandse Wiskunde Olympiade en W4Kangoeroe.

plaats Vrije Universiteit Amsterdam

info beta.vu.nl/nl/scholieren

30 september – 4 oktober 2019

ENUMATH 2019

The European Conference on Numerical Mathematics and Advanced Applications (ENUMATH). Conferentie over numerieke wiskunde.

plaats Hotel Zuiderduin, Egmond aan Zee

info enumath2019.eu

oktober 2019

9–11 oktober 2019

44rd Woudschoten Conference 2019

Een jaarlijkse conferentie van de Nederlandse en Vlaamse Numerieke Analyse-groepen, georganiseerd door de Werkgemeenschap Scientific Computing (WSC).

plaats Woudschoten, Zeist

info wsc.project.cwi.nl/events

november 2019

2 november 2019

Jaarvergadering NVvW

Jaarlijkse vergadering en studiedag van de Nederlandse Vereniging van Wiskundeleraren.

plaats Ichthus College, Veenendaal

info nvvw.nl

8 november 2019

Prijsuitreiking Nederlandse Wiskunde Olympiade 2019

De prijsuitreiking van de finale van de Nederlandse Wiskunde Olympiade.

plaats Technische Universiteit Eindhoven

info wiskundeolympiade.nl

11–13 november 2019

Stochastics Meeting Lunteren 2019

Bijeenkomst van stochastiek- en statistiek-groepen uit heel Nederland.

plaats Congrescentrum De Werelt, Lunteren

info homepages.cwi.nl/~colette/lunteren

22 november 2019

Voorronde Wiskunde A-lympiade 2019

Voorronde van de jaarlijkse competitie voor leerlingen uit de bovenbouw havo/vwo met wiskunde A in hun pakket.

plaats middelbare scholen in Nederland

info wiskundeinteamssites.uu.nl

22 november 2019

Wiskunde B-dag

De Wiskunde B-dag is een 1-daagse opdracht voor op school voor teams uit 5 havo en 5/6 vwo met wiskunde B in hun profiel.

plaats middelbare scholen in Nederland

info wiskundeinteamssites.uu.nl

Nieuws

| News

Deze rubriek is een kroniek van wiskundige activiteiten in Nederland. Toekomstige activiteiten worden aangekondigd en van voorbije activiteiten wordt verslag gedaan. Wilt u uw aankondiging of verslag in deze rubriek geplaatst zien? Stuur ons dan uw bijdrage, zo mogelijk met illustratie. De redactie behoudt zich het recht voor berichten te weigeren of in te korten.

Redacteur: Margriet Oomen
 nieuws@nieuwarchief.nl

Karen Uhlenbeck wint als eerste vrouw de Abelprijs

Karen Uhlenbeck heeft de Abelprijs gewonnen. De Abelprijs wordt gezien als de Nobelprijs voor de wiskunde en wordt jaarlijks uitgereikt door de Noorse academie van wetenschappen en letteren. Uhlenbeck krijgt de Abelprijs voor haar belangrijke rol in de ontwikkeling van de ijktheorie, geometrische partiële differentiaalvergelijkingen en integrable systems. De resultaten van Uhlenbeck zijn fundamenteel voor de moderne analyse, geometrie en mathematische fysica. Uhlenbeck is de eerste vrouw die de Abelprijs wint. In 1990 was zij ook de tweede vrouw, na Emmy Noether in 1932, die een plenaire voordracht hield tijdens het International Congress of Mathematicians. Begin jaren negentig was Uhlenbeck mede-oprichtster van het Women and Mathematics-programma aan het Institute for Advanced Study in Princeton. Uhlenbeck is momenteel visiting Senior Research Scholar aan de Universiteit van Princeton en visiting Associate bij het Institute for Advanced Study (IAS). De feestelijke uitreiking van de prijs vond plaats op dinsdag 21 mei in Oslo.

abelprize.no



Foto: abelprize.no

Onno Boxma krijgt koninklijke onderscheiding

Professor Onno Boxma (TU/e) is benoemd tot Ridder in de Orde van de Nederlandse Leeuw. In zijn huis in Nuenen kreeg Boxma zijn lintje uitgereikt door burgemeester Maarten Houben in het bijzijn van familie en naaste collega's. Onno Boxma krijgt de onderscheiding voor de belangrijke initiatieven die hij nam voor wiskundig Nederland. Zo was Boxma tussen 2005 en 2011 directeur van Eurandom en wist in die functie vele getalenteerde jonge wiskundigen over te halen om naar Eindhoven te komen. Daarnaast was hij de eerste directeur van het cluster STAR en vice-decaan van de Faculteit Wiskunde en Informatica tussen 2009 en 2013.

cursor.tue.nl

Stieltjesprijs 2018 voor Souvik Dhara en Joost Nuiten

Tijdens het Nederlands Mathematisch Congres is de Stieltjesprijs 2018 uitgereikt aan Souvik Dhara (TU/E) en Joost Nuiten (UU). Het proefschrift van Souvik Dhara, getiteld *Critical Percolation on Random Networks with Prescribed Degrees* gaat over random grafen waarbij het aantal buizen van een punt inhomogeen verdeeld is. De resultaten die Dhara beschrijft in zijn proefschrift zijn niet alleen nieuw, maar lossen ook fundamentele problemen op in de random grafentheorie.

Joost Nuiten schreef het proefschrift *Lie Algebroids in Derived Differential Geometry*. Een van de belangrijkste resultaten die Nuiten in zijn proefschrift beschrijft is een correspondentie tussen deformaties van een bepaald type meetkundige objecten en differentieel geïntegreerde ('dg') Lie-algebroiden. De jury was onder de indruk van Nuitens buitengewoon elegante bewijs van deze correspondentie en van de hoeveelheid theorie die voor het bewijs nodig is.

platformwiskunde.nl

33 is de som van drie derdemachten

Andrew Booker, wiskundige aan de universiteit van Bristol, heeft ontdekt dat 33 de som is van drie derde machten. Met een handig algoritme en een supercomputer vond hij dat

$$(8\,866\,128\,975\,287\,528)^3 + (-8\,778\,405\,442\,862\,239)^3 + (-2\,736\,111\,468\,807\,040)^3 = 33.$$

Sinds 1955 proberen wiskundigen voor een geheel getal k de vergelijking $k = x^3 + y^3 + z^3$ op te lossen, waarbij x , y en z gehele getallen zijn. Het is bekend dat als $k/9$ restterm 4 of 5 heeft er geen x, y en z bestaan die aan deze vergelijking voldoen. Al 64 jaar waren wiskundigen op zoek naar drie getallen die tot de derde macht verheven en opgeteld 33 geven. Met dit resultaat is 42 het enig overgebleven getal onder de 100 waarvan wiskundigen nog niet weten of het als de som van drie derde machten geschreven kan worden. Echter tussen de 101 en 1000 zijn er nog eens elf getallen waarvan niet bekend is of ze de som van drie derde machten zijn en boven de 1000 zijn er nog oneindig veel meer van zulk soort getallen. Hoewel de specifieke oplossing niet veel inzicht geeft in welke getallen als som van drie derdemachten geschreven kunnen worden, bevestigt de oplossing wel het wiskundig vermoeden dat elk natuurlijk getal dat gedeeld door 9 niet rest 4 of 5 heeft, de som is van drie derde machten. Andrew Booker vertelt zelf in een interessante video van Numberphile over de zoektocht naar zijn resultaat. numberphile.com

Sem Borst nieuwe directeur van Eurandom

Per 1 april volgt prof.dr.ir. Sem Borst (TU/e), Remco van der Hofstad op als wetenschappelijk directeur van Eurandom. Eurandom is een instituut aan de TU/e dat workshops organiseert op het gebied van stochastiek. Daarnaast biedt Eurandom buitenlandse wiskundigen de mogelijkheid om de TU/e te bezoeken en intensief met Nederlandse wiskundigen samen te werken.

eurandom.nl

Monique Laurent en Ionica Smeets benoemd tot lid van de KHMW

Monique Laurent (CWI en TU) en Ionica Smeets (UL) zijn toegetreden tot de Koninklijke Hollandse Maatschappij der Wetenschappen (KHMW). De KHMW bestaat al sinds 1752 en beoogt een brug te slaan tussen wetenschap en samenleving door het uitschrijven van prijsvragen, het bekronen van wetenschappelijke prestaties en het organiseren van lezingen en conferenties. Monique Laurent is hoogleraar combinatorische optimalisering aan de universiteit van Tilburg en onderzoeker en managementteamlid aan het Centrum Wiskunde & Informatica. Ionica Smeets is hoogleraar wetenschapscommunicatie aan de Universiteit Leiden en is onder andere bekend van haar wiskundecolumns in *de Volkskrant*.

khw.nl

Nederlandse teams sterk tijdens internationale olympiades

Op de European Girls' Mathematical Olympiad (EGMO) in Kiev heeft de 17-jarige Floor Beks uit Grou een zilveren medaille gewonnen. Hanne Snijders uit Rotterdam en Siëna van Schaick uit Woerden behaalden beide een bronzen medaille. Ana Mekerishvili uit Den Haag verdiende een eervolle vermelding voor het foutloos oplossen van een opgave. Tijdens de prijsuitreiking mocht het Nederlandse team niet alleen de medailles in ontvangst nemen, maar kreeg het ook de officiële EGMO-vlag overgedragen van het Oekraïense team. Volgend jaar zal de EGMO namelijk in Egmond aan zee plaatsvinden.

Op de Benelux Wiskunde Olympiade die dit jaar in Valkenswaard werd gehouden, haalde het Nederlandse team maar liefst drie zilveren en vier bronzen medailles. Dit was genoeg voor een tweede plek, net achter België, maar ruim voor Luxemburg. Richard Wols, Tim Vogels en Szabi Buzogany wonnen alle drie een zilveren medaille, Jonathan Zandee, Liam van den Berg, Tjeerd Morsch en Jelle Bloemendaal gingen met een bronzen medaille naar huis. Daarnaast kreeg Charlie Tang een eervolle vermelding.

wiskundeolympiade.nl



Wolfprijs voor le Gall and Lawler

Jean Francois le Gall en Gregory Lawler hebben de Wolfprijs voor de wiskunde gewonnen. De Wolffoundation rijkt de Wolfprijs jaarlijks uit in Israël. Na de Fieldsmedaille en de Abelprijs is de Wolfprijs een van de belangrijkste onderscheidingen in de wiskunde. Jean Francois le Gall krijgt de prijs voor zijn bijdragen aan de theorie van stochastische processen. Le Galls werk aan de gedetailleerde eigenschappen van de Brownse beweging loste veel problemen op. Momenteel is le Gall professor aan de Université Paris-Sud in Orsay.

Gregory Lawler ontvangt de Wolfprijs voor zijn werk in de kansrekening. Net als le Gall bewees ook Lawler veel speciale eigenschappen van de Brownse beweging. Daarnaast introduceerde Lawler de Loop Erased Random Walks (LERW). LERW zouden later de basis vormen voor SLE-krommen. Gregory Lawler is momenteel George Wells Beadle Distinguished Service Professor aan de University of Chicago.

wolffund.org.il

Erratum

In de Nieuwsrubriek van het maartnummer was in de gedrukte versie de naam van Jean Bourgain verkeerd gespeld.

Tentoonstelling 'De wondere wereld van El Pintor'

Vanaf 3 juni 2019 is in het Verzetsmuseum Amsterdam de tentoonstelling 'De wondere wereld van El Pintor' te zien, voor kinderen van 4 tot 10 jaar. Centraal staan de kinderboeken en spellen die Jaap Kloots en zijn vrouw Galinka Ehrenfest vanaf 1941 publiceerden onder de schuilnaam El Pintor. Galinka Ehrenfest was de dochter van de beroemde natuurkundige Paul Ehrenfest en zus van de wiskundige Tatjana Pavlovna Ehrenfest. Zowel Galinka als Jaap werden vervolgd vanwege hun Joodse afkomst. De boeken van El Pintor bevatten prachtig geïllustreerde verhalen en waren razend populair in Nederland. Zelfs in Duitsland werden de boeken van El Pintor verkocht. Met een deel van de opbrengst hielpen Jaap en Galinka onderduikers.

verzetsmuseum.org



Illustratie: verzetsmuseum.org

Kevin Duisters wint United Nations Fellowship

PhD-student Kevin Duisters (UL) is geselecteerd voor het *United Nations Global Pulse*-programma. Het doel van dit programma is om big data in te zetten voor duurzaamheidsprojecten en humanitaire hulp. Kevin Duisters is een van de onderzoekers die vrijwillig zijn kennis op het gebied van big data gaat gebruiken om de Verenigde Naties te helpen.

universiteitleiden.nl

Dietmar Gallistl wint Richard von Misesprijs

Dietmar Gallistl (UT) heeft de prestigieuze Richard von Misesprijs gewonnen. De prijs wordt jaarlijks uitgerijkt door de International Association of Applied Mathematics and Mechanics (GAMM). Gallistl krijgt de prijs voor zijn baanbrekende werk op het gebied van "discretization of elliptic problems of higher order". Gallistl is een assistent professor in de Mathematics of Computational Science (MACS)-groep aan de Universiteit Twente.

utwente.nl

Supersnel vermenigvuldigingsalgoritme gevonden

De wiskundigen David Harvey (University of New South Wales) en Joris van der Hoeven (French National Center for Scientific Research) hebben een algoritme gevonden dat slechts $n \times \log n$ stappen nodig heeft om twee getallen van n -digits met elkaar

te vermenigvuldigen. Ter vergelijking, met de vermenigvuldigingsmethode die op de basisschool wordt aangeleerd kost het n^2 stappen om het product van twee n -cijferige getallen te berekenen. Omdat vermenigvuldigen de basis vormt voor een grote klasse van algoritmes is de snelheid van het vermenigvuldigen belangrijk. Zo zijn bijvoorbeeld het algoritme dat de decimalen van π berekent en het algoritme dat op zoek gaat naar de grootste priemgetallen gebaseerd op vermenigvuldigen. Lang dachten wiskundigen dat de basisschoolmethode de snelste vermenigvuldigingsmethode was. Pas in 1960 ontdekte de 23-jarige Russische wiskundige Karatsuba een snellere vermenigvuldigingsmethode. Door een vermenigvuldigingsstap in een optelling veranderen had Karatsuba's methode slechts $n^{1.58}$ stappen nodig. In 1971 bedachten Arnold Schönhage en Volker Strassen een algoritme gebaseerd op *fast Fourier transform*-processen. Met dit algoritme waren nog slechts $n \times \log n \times \log(\log n)$ vermenigvuldigingsstappen nodig. Strassen en Schönhage vermoedden echter dat vermenigvuldigen in $n \times \log n$ stappen zou moeten kunnen. Het duurde 37 jaar voordat de wiskundige Fürer het snelheidsrecord van Strassen en Schönhage in 2007 brak. Vervolgens werd in het afgelopen decennium het ene na het andere snelheidsrecord gebroken, maar geen van de algoritmes kon vermenigvuldigen in $n \times \log n$ stappen. Nu hebben Harvey en Van der Hoeven de magische grens van $n \times \log n$ bereikt. Of $n \times \log n$ inderdaad de snelst mogelijke vermenigvuldigingsmethode is, is nog niet bewezen. Voor de snelheid van moderne computers maakt het snelheidsrecord helaas niet veel uit. De hardware van computers is de afgelopen jaren zo veel verbeterd dat de snelheidswinst van het nieuwe algoritme marginaal is. Echter in de wereld van de algoritmes is het snelheidsrecord van Harvey en Van der Hoeven een onbetwistbare overwinning.

quantamagazine.org

Peter Koymans wint KWG PhD-prijs

Peter Koymans (UL) heeft op het Nationaal Mathematisch Congres de KWG PhD-prijs gewonnen. De jury had uit elf kandidaten vier finalisten geselecteerd. Elk van de finalisten mocht in een korte voordracht zijn of haar PhD-onderzoek presenteren. Koymans doet onderzoek naar het Cohen-Lenstra-vermoeden, dat de factorisatie-eigenschappen van getalringen beschrijft.

universiteitleiden.nl

Koninklijk Wiskundig Genootschap

Wijzigingen bestuur KWG

Op de Algemene Ledenvergadering van 23 april zijn er drie nieuwe bestuursleden gekozen: Barry Koren (TU/e), Michael Mürger (RU) en Wioletta Ruszel (TUD). Afgetreden zijn André Ran, Erik van der Ban en Mark Veraar.

Adopteer een lid!

Elk lid kan jaarlijks een collega voordragen ter adoptie. De collega krijgt het abonnement dan het eerste jaar gratis. Aanmelden via www.wiskgenoot.nl, in het formulier optie 2 kiezen.

Recent verschenen:

□ **Epsilon Uitgaven** (www.epsilon-uitgaven.nl)

94. Zo is het – De bewijzen van Laplace, Cees Andriess, € 17, 2019.

Rob van Oord

Waddinxveen
robvanoord@tiscali.nl

Evenement 25ste Nationale Wiskunde Dagen

Kop of munt? Groep of individu? Knots of Lint?

Op vrijdag 1 februari en zaterdag 2 februari vonden voor de 25ste keer de Nationale Wiskunde Dagen plaats. Omdat de Leeuwenhorst in Noordwijkerhout niet beschikbaar was vanwege een verbouwing werd voor deze jubileumeditie uitgeweken naar de Koningshof in Veldhoven. Een persoonlijke impressie van Rob van Oord.

Hoe verzin je een pakkende titel bij een verslag van de 25ste Nationale Wiskunde Dagen? Het design op de achterkant van het FUNRUN-T-shirt suggereert $1 + 3 + 5 + 7 + 9 = 25$ (hardlopers, zie foto). Daarmee zou ik $\sum_{n=0}^4 2n + 1$ als titel kunnen nemen. Of: 25 jaar wiskundedagen, en het worden er steeds meer! Deze werden het niet.

De echte reden van de titel is dat er drie mensen op de NWD waren die ze alle 25 hebben meegemaakt: Peter Kop, Job van de Groep en Hans van Lint.

De start van deze NWD werd verzorgd door de oprichter van de NWD, Jan de Lange. Op de voor hem typerende manier, vol anekdotes en verrassende kwinkslagen werd duidelijk waarom deze NWD in Veldhoven plaatsvonden en niet in Noordwijkerhout. Wie naar het noorden zoekt met zijn iPhone, krijgt een andere richting dan wie zoals een echte padvinder een kompas gebruikt. Het magnetische noorden heeft te maken met een voortdurend bewegende declinatie ten opzichte van het geografische noorden. Dit jaar is die van $1^{\circ}34'$ in 1994 naar $1^{\circ}09'$, dus 25 minuten, opgeschoven. Dus is het logisch dat we nu na 25 jaar naar Veldhoven zijn doorgeschoven.

Vervolgens kregen we in een betoog van Sjoerd Verduyn Lunel over zijn onderzoek aan de Universiteit Utrecht en het Radboud UMC naar het kunnen vaststellen of een patiënt lijdt aan astma of aan COPD. Hierbij wordt een (vrij nieuwe) techniek van wiskundige analyse van dynamische data gebruikt. Het gaat hierbij niet om het

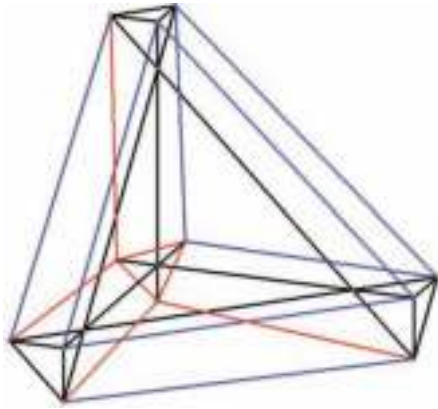
oplossen van een vergelijking, maar om het stellen van de juiste vraag. Longartsen hebben door metingen van trillingen in de longen veel data gegenereerd. Het blijkt dat het gebruik van gemiddelden geen verschil laat zien tussen beide soorten patiënten. Maar als je groepjes data bij elkaar neemt dan kun je via een plaatje van een kansverdeling een attractor zoeken. Die blijkt verschillend bij beide longaandoeningen. Er verschenen bekende plaatjes met bifurcaties op het scherm zoals die van de Lorenz-attractor, die voldoet aan de logistische vergelijking $x_{n+1} = rx_n(1 - x_n)$ met $0 < x < 1$ en $2,4 < r < 4,0$. Kortom uit een chaos aan data kun je met wiskundige analyse van dynamische systemen toch iets zinvol uit die data halen.

Cake en pizza snijden

Na de lunch mocht ik aanschuiven bij Bert Wikkerink over 'de driehoek van getallen'. Naast even, oneven, priemgetallen, kwadraten, driehoeksgetallen en volmaakte getallen wist ik niet veel andere soorten. Maar met de aanpak van Bert kwamen we op rijtjes getallen die je krijgt als je een cake, pizza, banketstaaf met een rechte snee in steeds meer stukken verdeelt. Bij het snijden van een cake komt het neer op in hoeveel delen je de ruimte verdeelt met telkens een vlak erbij dat niet parallel is met de gekozen vlakken en ook niet door een al bestaand punt gaat. Nul vlakken geeft nog

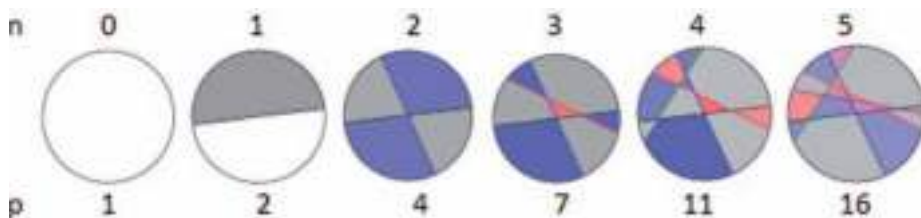


FUNRUN-T-shirt van de 25ste NWD



Figuur 1 Vier vlakken verdelen de ruimte.

geen delen, dus één ruimte-‘deel’, één vlak verdeelt de ruimte in twee delen, een tweede erbij maakt vier delen, een derde geeft acht ruimtedelen, denk aan de drie vlakken Oxy , Oxz en Oyz . Drie (niet evenwijdige) vlakken snijden elkaar wel in één punt, in dit geval de oorsprong. Maar het vierde vlak mag dan niet door O gaan. Rijtje 1, 2, 4, 8, ... Je zou 16 verwachten als volgende getal in de rij, maar het volgende getal is 15. Met behulp van een ruimtelijk model kun je die 15 vlakdelen wel zien. Zie Figuur 1. Bert had voor ons een kartonnen model van deze figuur gemaakt. Daarmee kun je snappen hoe de 15 delen rondom die vier vlakken zitten. Allereerst de piramide (holte) gevormd door de coördinaatvlakken en het schuine vlak (1). Dan op elke zijde een naar buiten galmend volume (4). Op elke ribbe zie je een trogvormig volumedeel (6). Ten slotte vanuit elk hoekpunt nog een driehoekige toeter (4). Bedenk dat de piramide begrensd is en dat de volumes aan de buitenkant eigenlijk oneindig ver uitdijen. Dus totaal $1 + 4 + 6 + 4 = 15$ volumedelen. Een tabel met $n =$ aantal keer snijden en het aantal volumedelen (v) leidt tot de volgende rij (n, v): (0, 1) (1, 2) (2, 4) (3, 8) (4, 15) (5, 26) ... Bij een vijfde vlak ontstaan er nieuwe holtes maar ook nieuwe oneindige volumes aan de buitenkant. Ik moet nog eens gaan nadenken hoe ik dit met redeneren, eventueel aan de hand van een kartonnen model kan begrijpen.

Figuur 2 Pizzagetallen (n, p).

1	$0 + 0 + 0 + 1 = 1$
1 1	$0 + 0 + 1 + 1 = 2$
1 2 1	$0 + 1 + 2 + 1 = 4$
1 3 3 1	$1 + 3 + 3 + 1 = 8$
1 4 6 4 1	$1 + 4 + 6 + 4 = 15$
1 5 10 10 5 1	$1 + 5 + 10 + 10 = 26$
$\vdots \vdots \vdots \vdots \vdots \vdots$	

Tabel 1 De rij van de cakegetallen.

De getallen vinden we terug in de driehoek van Pascal. Als je van elke horizontale rij uit de rij de eerste vier optelt krijg je precies de cakegetallen. Neem in de eerste drie rijen voor de getallen die er niet staan even 0. Zie Tabel 1. Neem nu een aantal maal de verschilrij:

nummer	0	1	2	3	4	5	...
cakegetal	1	2	4	8	15	26	...
eerste verschil		1	2	4	7	11	...
tweede verschil			1	2	3	4	...
derde verschil				1	1	1	...

Het derde verschil blijft constant 1. Je zou kunnen zeggen dat de ‘derde afgeleide’ constant is. Als er een formule is voor de rij dan zal dat een derdegraads moeten zijn:

$$c(n) = \frac{1}{6}n^3 + \frac{5}{6}n + 1$$

lijkt het te doen. $n = 0$ geeft $c = 1$, $n = 1$ geeft $c = \frac{1}{6} + \frac{5}{6} + 1 = 2$, $n = 2$ geeft $c = \frac{8}{6} + \frac{10}{6} + 1 = \frac{18}{6} + 1 = 4$, $n = 3$ geeft $c = \frac{27}{6} + \frac{15}{6} + 1 = \frac{42}{6} + 1 = 8$, enzovoort. Maar als je bedenkt dat de driehoek van Pascal is opgebouwd uit combinatiegetallen $\binom{n}{k}$, dan kun je met de eerste vier combinatiegetallen de formule vinden:

$$\begin{aligned} c(n) &= \binom{n}{0} + \binom{n}{1} + \binom{n}{2} + \binom{n}{3} \\ &= 1 + n + \frac{1}{2}n(n-1) + \frac{1}{6}n(n-1)(n-2) \\ &= \frac{1}{6}n^3 - \frac{1}{2}n^2 + \frac{1}{3}n + \frac{1}{2}n^2 - \frac{1}{2}n + n + 1 \\ &= \frac{1}{6}n^3 + \frac{5}{6}n + 1. \end{aligned}$$

Als je een pizza doorsnijdt langs telkens een andere lijn die alle vorige snijdt, dan

krijg je de rij van pizzagetallen: 1, 2, 4, 7, 11, 16 (zie Figuur 2); daarvan is het tweede verschil al constant. De directe formule van de pizzarij is dan

$$\binom{n}{0} + \binom{n}{1} + \binom{n}{2} = \frac{1}{2}n^2 + \frac{1}{2}n + 1.$$

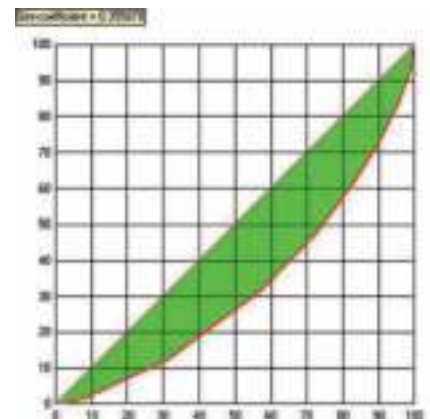
Lorenzkromme

De tweede workshop die ik heb bijgewoond werd gegeven door Johan Deprez. Een collega uit België, werkzaam aan de lerarenopleiding aan de KU Leuven. We werden aan het denken gezet over de Lorenzkromme bij de inkomensverdelingen (van de Belgen). Hierbij wordt het cumulatieve percentage van het inkomen uitgezet tegen het cumulatieve percentage van de bevolking van laag naar hoog inkomen. Zie Figuur 3. Zo kun je aflezen dat de minst verdienende 50% van de bevolking slechts 18% van het bruto nationaal inkomen verdient. En de rijkste 10% verdient 30% van het totale inkomen. De punten op de grafiek van de Lorenzkromme liggen zodoende altijd onder de diagonaal. Alleen bij een maatschappij waarin iedereen evenveel verdient is de Lorenzkromme gelijk aan de diagonaal. In feite bestaat de Lorenzkromme uit een aantal punten die uit de gegevens van een tabel gehaald worden, verbonden door rechte lijntjes.

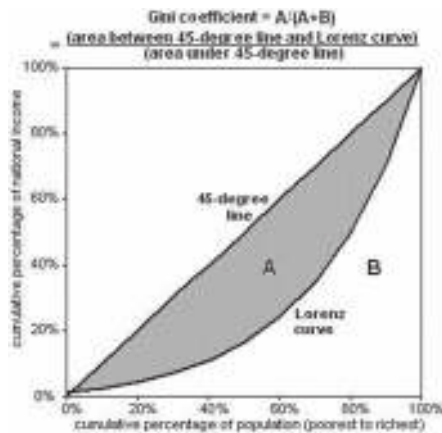
De Gini-coëfficiënt (g) is het quotient van enerzijds de oppervlakte van het vlakdeel tussen de diagonaal en de Lorenzkromme, en anderzijds de oppervlakte van de driehoek onder de diagonaal (het halve vierkant). Zie figuur 4:

$$g = \frac{A}{A+B}.$$

Omdat $A+B = \frac{1}{2}$ geldt $g = 2A$, met $0 \leq g \leq 1$. Hoe groter de Gini-coëfficiënt,



Figuur 3 Lorenzkromme inkomensverdeling België.



Figuur 4

des te groter de verschillen tussen de inkomens.

Wanneer de hogere inkomens relatief meer belasting betalen dan de lagere, dan zal de Lorenzkromme van het netto inkomen iets boven die van bruto liggen. De inkomens zijn dan iets eerlijker verdeeld.

Om meer wiskundig met de Gini-coëfficiënt te kunnen bezig zijn is het soms handig om een formule bij de Lorenzkromme te vinden. De oppervlakte kan dan met een integraal worden berekend. Na een discussie over welke krommen (op een werkblad gegeven) wel of geen Lorenzkromme kunnen zijn, probeerden we functievoorschriften te vinden die een goede benadering kunnen zijn van een Lorenzkromme. De kromme gaat in elk geval door (0,0) en (1,1). Een uitdaging voor je leerlingen om te laten bedenken welke formules grafieken kunnen opleveren die aan de voorwaarden van de Lorenzkromme moeten voldoen. De kromme lijkt op de grafiek van een machtsfunctie of een exponentiële functie. $f(x) = x^n$ en $f(x) = a \cdot e^{bx} - a$ zijn dan voor de hand liggende benaderingen. Er geldt: $b = \ln((a+1)/a)$ of $a = 1/(e^b - 1)$. Als je de Gini-coëfficiënt (g) weet, dan kun je variabelen a en b of n berekenen. Een mooie oefening voor wiskunde B of D.

$$g = 2A = 2 \left(\frac{1}{2} - \int_0^1 x^n dx \right)$$

geeft

$$\frac{1}{2} - \frac{1}{2}g = \left[\frac{1}{n+1} x^{n+1} \right]_0^1 = \frac{1}{n+1}.$$

Hieruit volgt

$$n = \frac{1+g}{1-g}.$$

Merk op dat $n > 1$ is. Zo ook

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} - \frac{1}{2}g &= \int_0^1 a(e^{bx} - 1) dx \\ &= a \left[\frac{1}{b} e^{bx} - x \right]_0^1 \\ &= a \left(\frac{1}{b} e^b - 1 - \frac{1}{b} \right) \\ &= \frac{1}{e^b - 1} \left(\frac{1}{b} (e^b - 1) - 1 \right) \\ &= \frac{1}{b} - \frac{1}{e^b - 1} \\ &= \frac{1}{b} - a. \end{aligned}$$

Voor de kromme van België ($g = 0,36$) krijg je dan $b = 2,352$ en $a = 0,105$ of $n = 2,125$.

Wortel 3

Het is voor mij natuurlijk niet mogelijk om meer dan twee workshops/lezingen bij te wonen. Maar ik heb zo links en rechts wat informatie ingewonnen. Ook heb ik enkele hand-outs en slides bekeken.

De dia's van de lezing van Martin Kindt (ik ben fan van Martin, onder andere vanwege zijn nimmer aflatende reeks artikelen in de *Nieuwe Wiskrant* en *Euclides*, zoals laatst over de stelling van Napoleon) riep bij mij herinneringen op aan mijn studietijd. In 1972 deed ik een bijvak geschiedenis van de exacte wetenschappen bij professor R. Hooykaas. In een bijgebouwtje tegen de Janskerk in Utrecht bestudeerden we de exhaustiemethode (uitputtingsmethode) van Archimedes om π te benaderen door middel van insluitende en omhullende veelhoeken. Uitgaande van de zeshoeken en dan steeds het aantal verdubbelen (6-, 12-, 24-, 48- en 96-hoek), ofwel de bijbehorende middelpuntshoek halveren. Wat ik niet wist is dat ik samen met mijn toekomstige rector (op dat moment nog geschiedenisdocent, en als belangstellende deelnemer aan dit college) de sommen aan het maken was. Hoe groot was de verrassing toen ik twee jaar later bij mijn sollicitatie tegenover Maarten Verhoog zat. Wie weet gaf de prettige herinnering aan ons gezamenlijke college de doorslag dat ik werd aangenomen op de school waar ik veertig jaar ben gebleven.

Martin laat zien hoe je $\sqrt{3}$ kunt benaderen met een webgrafiek van

$$f(x) = \frac{1}{2} \left(x + \frac{3}{x} \right),$$

nodig voor de sinus van 60° . Uiteindelijk leidt de methode van Archimedes ertoe dat π tussen $3\frac{10}{71}$ en $3\frac{1}{7}$ ligt. Een onwaarschijnlijk goede benadering voor die tijd.

Vliegtuigjes en spelletjes

De avond begon traditioneel met een optreden. Dit keer mochten er vliegtuigjes met vragen en woorden op het toneel gegooid worden. Jan Beuving en Ionica Smeets wisten die op hilarische wijze af te handelen. Met af en toe een lied. Het lied over de sinus en de cosinus die een kwart periode achter elkaar lopen (en ook zo gezongen werd) vroeg weer de nodige concentratie. Ook de breeklijnen van de chocoladerepen van Tony's Choclonely werden kritisch ontleed.

Ook dit jaar heb ik tijdens de avondsessie weer met plezier enkele nieuwe spelletjes bekeken en uitgeprobeerd. Enkele kakelende collega's deden het Regenwormenspel. Een soort Yahtzee waarbij je fiches met wormen moet sparen. Ik vroeg me al af waarom er geen 6 gegooid werd. Dom, op die zijde van de dobbelstenen staan wormen. Een erg gemakkelijk spel waarbij je ook van andere spelers een worm mag afpakken.

Zelf speelde ik Laser Maze (zie Figuur 5), een logicaspel waarbij kaarten met startopstelling en einddoel in oplopend niveau moeten worden uitgespeeld. Bij het drukken op de laserknop moeten als het goed is via een doolhof van spiegeltjes en schermpjes de signaallampjes gaan branden.

Elke deelnemer kreeg als cadeau een speciaal voor de NWD-deelnemers ontworpen spel mee naar huis, RESOLF. Het spel RESOLF is (zelfcorrigerend) leermateriaal waarin leerlingen door creatief en probleemoplossend te denken, de reken-wiskunde-puzzel (willen) oplossen. Het boekje met opgaven om mee te beginnen kun je vinden op www.resolf.nl.

Over spelletjes gesproken. Hoewel Odette De Meulemeester vorig jaar haar 'laatste workshop' gaf, kwam ze donderdagavond gelijktijdig met mij aan in Veldhoven. Ook dit jaar had ze weer een karrevracht aan



Figuur 5 Laser Maze.

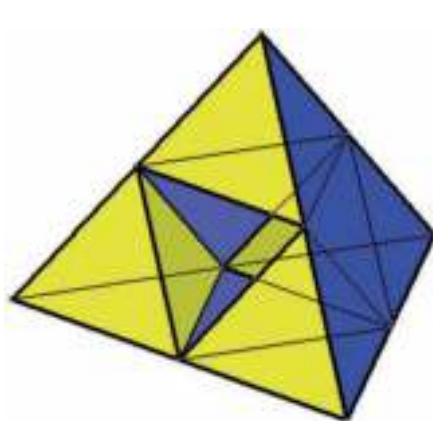


Figuur 6 NWD-puzzel.

spelletjes uitgezocht en gemaakt, samen met Matthijs Coster. Ze gaf me een puzzel: 9 stukjes die 3 bij 3 de letters N, W en D vormen, moeten in een vierkant gelegd worden (waarin je dan 25 zou kunnen lezen). Zie Figuur 6. De mooiste puzzel die ze gemaakt had was van een rombische tricontaëder die helemaal gevuld kon worden met parallellepiped.

Wiskunde, daar zit wat in

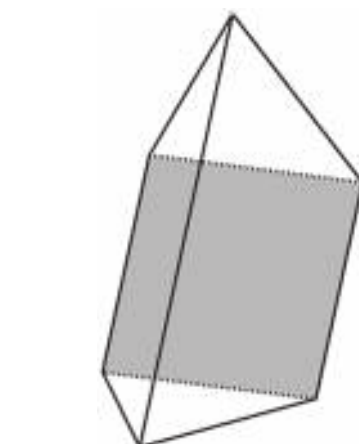
Op zaterdag om 9.00 uur begon onze workshop 'Wiskunde, daar zit wat in'. Marjan en ik hadden thuis al veel bouwplaten en ruimtelijke modellen gemaakt zodat de deelnemers lekker door konden met de opdrachten. Ook stonden er grote felgekleurde kartonnen modellen klaar om waar nodig de workshop te illustreren. Eerst werden regelmatige viervlakken gevouwen. Vier kleine en een dubbel zo grote. Als je de vier kleine in de hoeken van de grote stopt houd je een gat over. Wat is de vorm van dat gat? Zie Figuur 7. Er lagen ook modellen en bouwplaten van halve tetraëders. Zie Figuur 8.



Figuur 7 Het gat in een viervlak.

Twee van die helften vormen 'de kleinste puzzel van de wereld'. Ik heb die puzzel altijd op de openhuisavond van school liggen. Maar veel ouders kunnen hem niet zo maar even oplossen. Daarna moest in een tekening van een kubus de ligging van een tetraëder in een kubus worden getekend waarbij de ribben van het viervlak zijvlak-diagonalen van de kubus zijn. Zie Figuur 9.

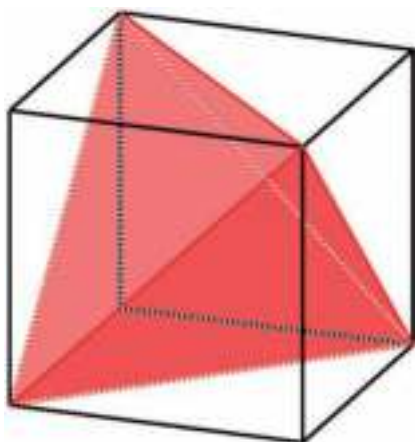
Als je diagonaalvlakken van een ico-saëder bekijkt dan kun je drie onderling loodrechte zeshoeken ontdekken. In elk diagonaalvlak zitten rechthoeken die als zijden twee tegenover elkaar liggende ribben van het twintigvlak hebben en twee lichaamsdiagonalen, die met de ribben de verhouding van de gulden snede hebben. Op de campus van de Universiteit Twente staat een kunstwerk, een zogeheten tensegrity-figuur, in de volksmond 'het ding' genoemd, waar de zes diagonalen zichtbaar zijn opgehangen in kabels. De uiteinden van de palen vormen precies de twaalf hoekpunten van het twintigvlak. Zie Figuur 10. Vijf minuten voor het begin van onze work-



Figuur 8 Halve tetraëder.

shop werd ik door mijn vrouw gebeld dat onze kleindochter, Bo, was geboren. Ik ontving een hartelijk applaus van de deelnemers en liep vervolgens de hele tijd met een blijde lach op mijn gezicht rond. Toen we er op kraamvisite heen gingen zag ik dat ze een speeltje had gekregen precies zoals 'het ding', van The Manhattan Toy Company ('Rammelaar', €22,95). Thuis heb ik het ding met houten stokjes en draad na een paar mislukte pogingen om het zelf in elkaar te flansen in een hoek gegooid.

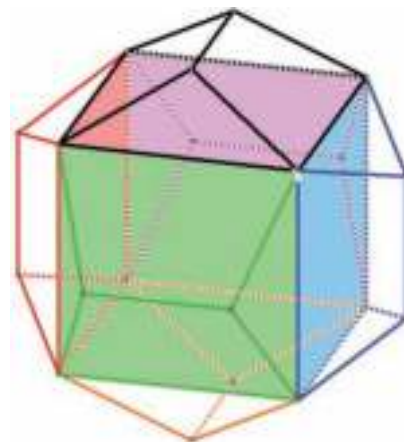
De deelnemers konden sleuven knippen in drie voorgetekende rechthoeken en daarna proberen die in elkaar te schuiven. Als het goed is kregen ze dan een model met de drie rechthoeken die onderling loodrecht staan dat precies in het door ons op tafel gezette 20-vlak past. Als apotheose werd de dodecaëder onder de loep genomen. Op de buitenkant van de bouwplaat kun je twaalf diagonalen tekenen die precies een draadmodel van een kubus vormen. Zie Figuur 11. Als je de (zes) 'dakpunten' van het 12-vlak afzaagt dan kun je die aan elkaar



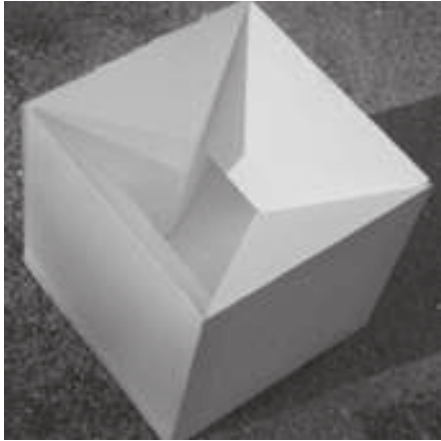
Figuur 9 Viervlak in een kubus.



Figuur 10 20-vlak tensegrity.



Figuur 11 12-vlak met dakpunten.



Figuur 12 Het gat in de kubus.

plakken tot een bouwplaat van een kubus. Klap je de zes dakpunten naar binnen dan vormen de vierkante bodems van die ‘zolders’ precies de buitenkant van een kubus. Maar er zit een gat in. Wat is de vorm van dat gat? Zie Figuur 12. Aan de deelnemers is het om thuis de bouwplaat van deze mooie ster in elkaar te zetten. De tijd was te kort om dat ook nog in deze workshop voor elkaar te krijgen. Uiteraard liet ik de deelnemers zien hoe de ster uit het gat tevoorschijn komt. De *apotheoze!* In de hand-out (deel 1) kun je lezen hoe je kunt berekenen dat dit gat ongeveer 20% van de kubus beslaat. Bedenk dat de ribben van het 12-vlak de randen zijn van regelmatige vijfhoeken. De ribben van de genoemde kubus zijn diagonalen in die vijfhoeken en vormen met de zijden van de vijfhoek de gulden snede. Als je de formule van de inhoud van een 12-vlak op Wikipedia gebruikt, dan krijg je

$$I_{\text{dodecaeder}} = \frac{1}{4}z^3(15 + 7\sqrt{5});$$

zijde van de kubus = diagonaal d van de vijfhoek met zijden z ; met $d = 1$ is

$$z = \frac{1}{2}\sqrt{5} - \frac{1}{2}.$$

Daarmee

$$I_{\text{dakpunten}} = I_{12\text{-vlak}} - I_{\text{kubus}},$$

dus

$$\begin{aligned} I_{\text{gat}} &= I_{\text{kubus}} - I_{\text{dakpunten}} \\ &= I_{\text{kubus}} - (I_{12\text{-vlak}} - I_{\text{kubus}}) \\ &= 2 \cdot I_{\text{kubus}} - I_{12\text{-vlak}}. \end{aligned}$$

Met $z^2 = 1 - z$ (formule van de gulden snede) krijg je

$$z^3 = z(1 - z) = z - z^2 = z - (1 - z) = 2z - 1.$$

Dus

$$\begin{aligned} I_{\text{gat}} &= 2d^3 - \frac{1}{4}z^3(15 + 7\sqrt{5}) \\ &= 2d^3 - \frac{1}{4}(2z - 1)(15 + 7\sqrt{5}) \\ &\text{(nu invullen } d = 1 \text{ en } z = \frac{1}{2}\sqrt{5} - \frac{1}{2}) \\ &= 2 \cdot 1^3 - \frac{1}{4}\left(2\left(\frac{1}{2}\sqrt{5} - \frac{1}{2}\right) - 1\right)(15 + 7\sqrt{5}) \\ &= 2 - \frac{1}{4}(\sqrt{5} - 2)(15 + 7\sqrt{5}) \\ &= 2 - \frac{1}{4}(\sqrt{5} + 35 - 30) \\ &= 2 - \frac{5}{4} - \frac{1}{4}\sqrt{5} = \frac{3}{4} - \frac{1}{4}\sqrt{5} \\ &= 0,19! \end{aligned}$$

Dansen, standup en logaritmen

Na de workshopronde zagen we hoe je wiskunde kunt gebruiken om een choreografie voor een dans te definiëren. Tom Verhoeff onderzoekt hoe je alle permutaties van n dingen (zeg de getallen van 1 t/m n) kunt krijgen door enkel verwisselingen van twee naasten. Dit zijn de zogenaamde sporen van Lehmer. Het ‘spoor’ van één blauw, twee groen en twee rood werd in beeld gebracht door de dansgroep van Roos van Berkel. Zie Figuur 13. De dansers hadden T-shirts in overeenkomstige kleuren aan, en voerden al dansend de wisselingen van twee naasten uit naar telkens een andere permutatie van deze vijf. Op het grote scherm kon je de dans volgen door gelijktijdige wisselingen van gekleurde blokjes. Tom heeft uitgezocht dat je voor de permutaties van $n = 4$ niet met 23 wisselingen in een keer alle permutaties kunt krijgen. Er zijn onderweg 2 keer 2 extra wisselingen

nodig om aan het eind alle 24 volgordes te hebben gehad.

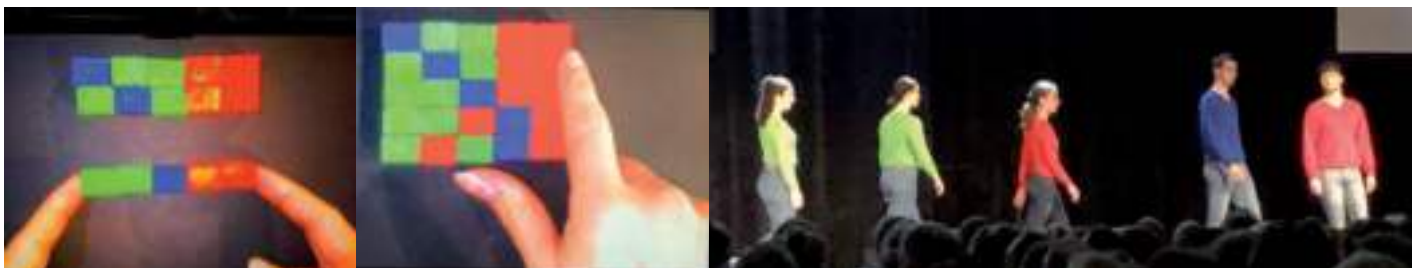
Met Matt Parker is weer een inspirerende Brit (geboren in Australië) gestrikt voor de slotlezing. Hij is een standup-mathematician die op de BBC en op scholen optreedt met op wiskunde stoelende grappigheden. Voorspellen van het laatste getal van een barcode, tegenwerkende radertjes op een munt, het maken van een spreadsheet van een digitale foto (je krijgt een veld vol blauwe, groene en rode pixels, alle met een intensiteit van 0 (= zwart) tot 255). En ja hoor bij het inzoomen zie je zijn olijke hoofd opdagen. Op YouTube promoot hij zijn boek *Humble Pi* over fouten die met wiskunde gemaakt zijn.

Steven Wepster vertelde me tijdens de afsluitende lunch dat er in zijn workshop flink vermenigvuldigd was door optellen van logaritmen. Indertijd was het voor astronomen (eind zestiende eeuw, Tycho Brahe) erg belangrijk om snel en nauwkeurig met sinussen te kunnen rekenen. Omdat er door sterrenkundigen al behoorlijk nauwkeurig hoeken in de hemelsfeer gemeten konden worden, kon men met behulp van voor hen bekende sinusformules nauwkeurig plaats en tijd bepalen op aarde. Maar door het ontbreken van rekenmachines nam men bij die berekeningen hun toevlucht tot sinustabellen en logaritmetabellen. Aanvankelijk gebruikte men de prostaphaerese methode met de formule

$$\begin{aligned} \sin p \cdot \sin q &= \frac{1}{2}(\sin(90^\circ - p + q) - \sin(90^\circ - p - q)), \end{aligned}$$

totdat het gemak van rekenen met logaritmen algemeen bekend werd. In *Pythagoras* van september 2017 heeft hierover ook al een mooi artikel gestaan, geschikt om met je leerlingen eens door te nemen.

Zo kwam er een eind aan deze speciale NWD. Ik blijf alleen nog zitten met de vraag: wat ga ik 31 januari en 1 februari 2020 doen? ☺



Figuur 13 Permutaties in een spoor van Lehmer.

Casper Albers

Psychometrie & Statistiek
Rijksuniversiteit Groningen
c.j.albers@rug.nl

Oratie

Toegepaste statistiek: van ont

Dit is een licht bewerkte versie van de rede uitgesproken door Casper Albers op dinsdag 19 maart 2019 bij de aanvaarding van het ambt van hoogleraar in de Toegepaste Statistiek en Datavisualisatie aan de Rijksuniversiteit Groningen.

Mijn promotor, Willem Schaafsma, heeft mij met grote regelmaat meegegeven dat de wetenschapper zich moet laten leiden door drie platonische principes, te weten de waarheid, schoonheid en goedheid. Met die waarheid, schoonheid en goedheid zit het wel goed binnen de wiskunde en de wiskundige statistiek. Dat wiskundige bewijzen 'waar' zijn, staat buiten kijf. Dat de wiskunde ons veel goeds heeft gebracht, moge ook duidelijk zijn. De schoonheid van de wiskunde en wiskundige statistiek is mijns inziens ook duidelijk.

Neem als voorbeeld de welbekende normale verdeling. Carl Friedrich Gauss bestudeerde astronomische data en stelde vier criteria op waaraan de verdeling van meetfouten van die data moest voldoen [2]:

1. Kleine meetfouten zijn waarschijnlijker dan grote meetfouten.
2. De verdeling van meetfouten is symmetrisch.
3. De verdelingscurve moet een vloeiende vorm hebben (differentieerbaar zijn).

4. Als je een bepaalde kwantiteit meermalen gemeten hebt, is het gemiddelde van de metingen de meest voor de hand liggende schatter.

Het elegante van de normale verdeling is dat deze vier ogenschijnlijk eenvoudige criteria compleet voldoende zijn om de vorm van de verdeling exact te bepalen. Dus ook de schoonheid is aanwezig.

Maar dan de toegepaste statistiek. De waarheid, schoonheid en goedheid lijken overboord gekieperd te worden. Je weet als toegepast statisticus immers nooit zeker of je daadwerkelijk het juiste antwoord geeft, je werkt doorgaans met aannames waarvan je weet dat ze eigenlijk niet waar zijn en helaas zijn de *questionable research practices* aan de orde van de dag. Dit zijn onderzoekspraktijken waarin een loopje genomen wordt met statistische technieken, met het doel de resultaten mooier weer te geven dan ze zijn. Hier later meer over.

U zult zich wellicht afvragen waarom ik dan de overstap van de wiskundige naar

de toegepaste statistiek gemaakt heb. Welnu, dat die waarheid, schoonheid en goedheid binnen de toegepaste statistiek zo veel moeilijker te bereiken zijn, maakt het naar mijn mening juist een uitdagender vakgebied.

De toepassing in de psychologie is een extra uitdaging. Voordat ik bij psychologie kwam werken, werkte ik bij de Open University in Engeland aan modellen om de verkeersstromen op Britse snelwegen te voorspellen [13, 14, 53]. Per rijstrook wisten we per minuut van de dag, en dat maandenlang, hoeveel voertuigen er overheen reden. Tellen hoeveel auto's ergens rijden is simpel. Zo simpel dat we computers het werk kunnen laten doen. Dat gaat binnen de psychologie een stuk uitdagender. Emoties, attitudes en zelfs gedrag laten zich een stuk lastiger langs de meetlat leggen. En net zoals dat een automobilist mogelijk de snelheid aanpast als er een verkeerscamera op de auto gericht is, past een mens zijn gedragingen aan als hij of zij gemeten wordt (het bekende Hawthorne-effect). Die extra complexiteit is tevens een extra uitdaging.

Een tweede reden waarom ik de statistiek graag toepas, is dat ik daarmee een bijdrage kan leveren aan het oplossen van



Casper Albers

wikkeling tot communicatie

grote vraagstukken waar de maatschappij voor staat. Daar kom ik graag mijn wiskundige safe zone voor uit. Vandaag wil ik twee toepassingsgebieden waarin ik speciale interesse heb, met u bespreken.

Psychopathologie

Ten eerste, de psychopathologie en ontwikkelingspsychologie. Een op de vijf volwassenen krijgt psychische problemen. Depressie en angststoornissen zijn hiervan de meestvoorkomende problemen [61]. Suicide is doodsoorzaak nummer 1 onder Nederlandse jongeren. Empirisch onderzoek op dit gebied is enorm belangrijk maar ook ingewikkeld.

Er is namelijk een ingewikkeld samenspel van veel variabelen. Zo is het om goed te voorspellen hoe ernstig iemands winterdepressie is, onvoldoende om alleen te kijken naar de hoeveelheid zonlicht. Een combinatie van maar liefst negen meteorologische variabelen is nodig om een goed beeld te krijgen van de situatie [55].

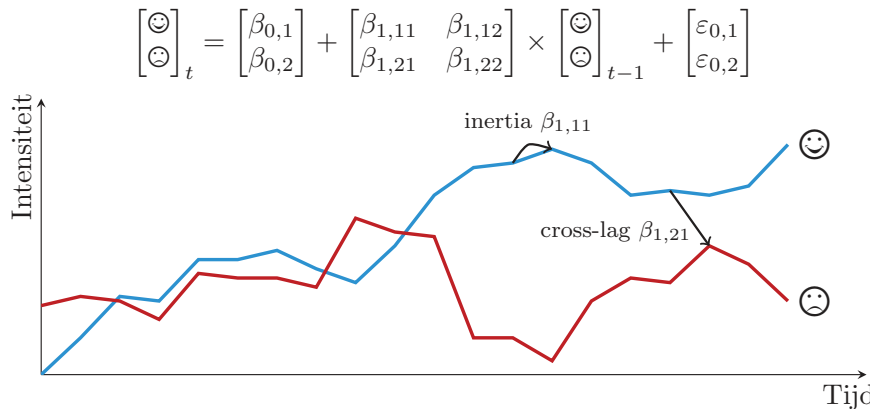
Veel variabelen tegelijk meten is voor dit soort modellen niet eens voldoende. Je moet ze ook nog eens met grote regelmaat meten. Πάντα ρεῖ (panta rhei), een uitspraak toegeschreven aan de Griekse fi-

losoof Heraclitus, betekent ‘alles stroomt’. Alles verandert continu, zo ook de mens. Om goed de processen die ten grondslag aan menselijk gedrag liggen te begrijpen, is het dus van vitaal belang om regelmatig dezelfde variabelen bij dezelfde personen te meten. Dit is nodig om inzicht te verkrijgen in de gecompliceerde aspecten van menselijk gedrag. Die complexiteit uit zich door fluctuaties in gedrag en emotionele gesteldheid over de tijd. Deze fluctuaties hangen af van de context, van interindividuele verschillen, en van toevallige verstoringen. Het begrijpen van de dynamiek van een psychologisch proces is een essentiële voorwaarde om het proces zelf te begrijpen.

Tot voor kort was het om praktische redenen onmogelijk of, op zijn minst, enorm moeilijk om bijvoorbeeld bij depressieonderzoek met voldoende regelmaat de mentale toestand van proefpersonen te meten. Dankzij technologische vooruitgang is dit nu wel mogelijk. Sinds een jaar of tien wordt de *experience sampling method* en de *ecological momentary assessment*-methode steeds meer gebruikt. Via deze methodes vullen deelnemers aan een onderzoek meerdere keren per dag via hun

smartphone een korte vragenlijst in. Er wordt bijvoorbeeld vijf keer per dag gevraagd om een viertal emoties te kwantificeren. Op die manier wordt intensieve longitudinale data verkregen. Vervolgens wordt via een regressiemodel bekeken hoe de emotie op tijdstip t samenhangt met die op het vorige tijdstip, $t-1$. Bij een enkele emotie verkrijgt je het zogenaamde AR(1)-model en bij het modelleren van meerdere variabelen tegelijk het VAR(1)-model (zie Figuur 1).

Met Tanja Krone en Marieke Timmerman zijn de prestaties van verschillende varianten van deze modellen vergeleken [42, 43]. Voor gebruik in de praktijk zijn (V)AR-modellen doorgaans te elementair en wordt er gebruikgemaakt van ingewikkeldere modellen, maar het AR- en VAR-model liggen wel aan de basis van deze methoden. Deze modellen voor intensieve longitudinale data laten zien dat niet alleen hoe iemand zich gemiddeld gesproken voelt van belang is om iets over iemands welzijn te kunnen zeggen; de temporele dynamiek geeft ons inzichten die we niet uit de gemiddeldes kunnen halen [26, 32, 40]. Tevens geeft het bestuderen van trajecten over de tijd de onderzoeker de mogelijk-



Figuur 1 Het bivariate VAR(1)-model.

heid om bijvoorbeeld te voorspellen of en wanneer een depressieve patiënt een terugval kan verwachten [45,57], zodat de therapeut pro-actief kan optreden.

De kracht van deze modellen zit hem in de mogelijkheid om tegelijkertijd inter-individuele en intraindividuele uitspraken te doen, oftewel zowel iets te zeggen over de vergelijking tussen personen als de dynamiek van een individu. Als het aantal deelnemers aan een studie te groot wordt, wordt de hoeveelheid individuele modellen onoverzichtelijk en biedt het meerwaarde om personen met gelijksoortige dynamiek te clusteren. Een ad-hoc-aanpak [41] is uitgegroeid tot het lopende promotietraject van Anja Ernst [28,29].

De meeste tijdreeksmodellen maken een onrealistische aanname van stationariteit, namelijk dat de zogenaamde emotionele inertia niet kan wijzigen over de tijd. Zeker wanneer de metingen tot doel hebben een patiënt te volgen die onder behandeling staat, is dit een groot probleem. Immers, het hele doel van de behandeling is om de interne dynamiek van de patiënt te wijzigen. Die dynamiek kan zowel geleidelijk [21] wijzigen als abrupt [33]. Met Laura Bringmann wordt momenteel de laatste hand gelegd aan een nieuw model [7,20] dat beide types verandering tegelijk aan kan. De komende jaren dient dit model uitgebreid te worden om ook multivariate veranderingen aan te kunnen, alsmede om bruikbaar te zijn in de context van psychologische netwerken en clusteringsmethoden.

De afgelopen jaren zijn de modellen voor intensieve longitudinale psychologische data als paddenstoelen uit de grond geschoten. Doorgaans zijn deze modellen gebaseerd op enkele verstandige aan-

names waarna via uitgebreide computersimulaties is aangetoond dat die modellen, binnen een bepaalde context, goed werken. Dat is uiterst nuttig maar uiteindelijk gaat het erom dat de modellen in de praktijk ook bruikbare antwoorden opleveren. Benchmarking-onderzoeken zijn een standaardmethode binnen onder meer de informatica, maar nog niet binnen de psychologie. Wij hebben een studie opgezet [15] waarbij twaalf geselecteerde teams, bestaande uit zowel methodologische als klinische experts, elk exact dezelfde dataset moesten analyseren. Momenteel liggen de antwoorden van de verschillende aanpakken nog zodanig ver uit elkaar dat ze slechts van beperkt praktisch nut zijn. Tot nu toe wint de statistische predictie het dus niet van de klinische predictie [47] en het is nog maar de vraag of dit in de toekomst anders kan zijn.

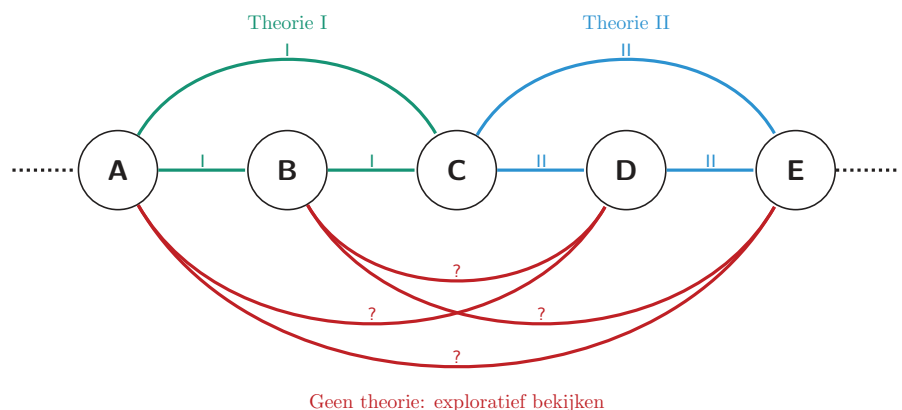
Het is ook de vraag of dit überhaupt wenselijk is. Mijns inziens kunnen dit soort statistische modellen het beste gebruikt worden om het klinische oordeel te verbe-

teren en niet om deze vervangen. Dit verbeterde oordeel zal leiden tot verbeterde klinische diagnostiek en dus tot verbeterde behandeling van de meest kwetsbare personen in de samenleving.

Omgevingspsychologie

Het tweede toepassingsgebied dat ik met u wil bespreken, is de energietransitie en dan met name de omgevingspsychologische kant er van. Rapport na rapport [36] laat zien dat er enorme veranderingen moeten plaatsvinden, willen we de opwarming van de aarde beperken tot 1,5°C. Met alleen technologische innovaties en extra windmolens redden we het niet; een gedragsverandering is nodig. Voordat op gedragsverandering aangestuurd kan worden, is het van belang dat gedrag te begrijpen. Samen met Linda Steg, en promovendi Nitin Bhushan, Maliheh Namazkhan en Mark Verschoor bestudeer ik het gedrag van huishoudens rond hun energieverbruik en wat de determinanten zijn van opvattingen rond klimaatverandering.

Hierbij spelen meerdere sociaal-psychologische en economische theorieën een rol [46,52,66]. Elke theorie afzonderlijk bestudeert een onderdeel van het geheel, bijvoorbeeld hoe attitudes en zelfeffectiviteit invloed hebben op intenties en hoe dit weer invloed heeft op gedrag. Je kan de theorieën afzonderlijk bestuderen, in een energiecontext, maar het is veel interessanter ze gelijktijdig te bestuderen (zie Figuur 2). Je kan dan zowel confirmatief kijken naar de reeds bestaande getheoretiseerde verbanden als exploratief kijken naar verbanden die individuele theorieën overstijgen. Zo'n geïntegreerde aanpak leidt dus tot inzichten die zonder deze



Figuur 2 Schematisch overzicht van de koppeling tussen meerdere theorieën. Theorie I postuleert de onderlinge verbanden tussen A, B en C; Theorie II die tussen C, D en E. Over de in rood weergegeven verbanden, bijvoorbeeld die tussen A en D, is (nog) geen theorie.

grootschalige aanpak niet verkregen kunnen worden. Omdat voor deze methoden veel data tegelijk geanalyseerd dient te worden, zijn goede *data warehousing*-faciliteiten essentieel.

Uiteindelijk is het doel om de psychologische variabelen te koppelen aan het energieverbruik. Omdat energieverbruik vanzelfsprekend ook afhangt van tal van andere variabelen, zoals bouwtechnische aspecten van de woning, sociaal-economische variabelen en het weer [50] is dit geen gemakkelijke klus. Het is als het op elkaar proberen te zetten van twee LEGO-blokjes van verschillend formaat en hiertoe dienen op maat gemaakte statistische modellen ontwikkeld te worden.

Omdat met deze aanpak het aantal gemeten variabelen snel stijgt, raakt het model snel onoverzichtelijk. Het psychologische netwerkmodel, tot nu toe met name binnen de psychopathologie gebruikt, biedt een visuele uitkomst om door de bomen toch een bos te zien.

Eerste analyses, waarin we hebben gekeken naar een geïntegreerd beeld van relevante theorieën, maar nog niet naar de koppeling met individueel energieverbruik, zijn veelbelovend. Zowel de analyse van een grootschalig Nederlands buurtinitiatief [16] als die van Ronde 8 van de European Social Survey [63] laten zien dat dergelijke netwerkmodellen van toegevoegde waarde zijn binnen de omgevingspsychologie. Tevens zien we dat verbanden tussen variabelen in de meeste Europese landen zeer overeenkomstig zijn. Dit laatste is van belang omdat dit impliceert dat beleidswijzigingen in alle landen een vergelijkbaar effect zullen hebben [19].

De vervolgstap in dit onderzoek is om de dynamiek binnen huishoudens te onderzoeken. Wie en wat binnen een huishouden kan er voor zorgen dat het energiegedrag groener wordt? Momenteel verzamelen we data in verschillende Europese landen bij verschillende typen huishoudens, zoals gezinnen en studentenhuizen, om antwoord op deze vragen te krijgen.

Communicatie

Ik heb twee toepassingsgebieden met u besproken. Ik heb verteld wat de toegepaste statistiek daar de afgelopen jaren betekend heeft en de komende jaren kan betekenen. Het ontwikkelen van een statistisch model is maar het halve verhaal. De andere helft is er voor zorgen dat het mo-

del, en haar uitkomsten, door de belanghebbenden goed begrepen wordt. Deze belanghebbenden zijn doorgaans zelf geen statisticus, maar sociaal-wetenschapper, beleidsmaker, therapeut of patiënt. Zonder goede statistische communicatie geen toegepaste statistiek. Juist in deze tijd van *fake news* en *framing* [6] kan een goede communicatie van wetenschappelijke resultaten niet meer gezien worden als een fijne bonus, maar dient het een essentieel ingrediënt van de wetenschappelijke methode te zijn.

En statistiek is niet altijd even makkelijk uit te leggen. Nobellaureaat Daniel Kahneman onderscheidt twee denksystemen [39]: *thinking fast*, waarbij moeiteloos en intuïtief wordt gedacht, en *thinking slow*, waarbij analytisch wordt gedacht. Bij statistische vraagstukken is uit de context niet altijd duidelijk dat er analytisch gedacht moet worden, waardoor het brein in de verkeerde modus staat. En dan is statistiek inderdaad moeilijk.

Deze moeite met statistiek, die zelfs door hoogopgeleide wetenschappers wordt ervaren, is een van de hoofdoorzaken van de replicatiecrisis [51] die sinds een aantal jaar de psychologie, en daarna ook de andere empirische wetenschappen, in haar greep heeft. Kort samengevat behelst de crisis dat onderzoekers vaak methodologisch onverantwoorde stappen zetten in de wetenschapscyclus, waardoor de gevonden resultaten vertekend en daarmee onjuist zijn. Deze onverantwoorde stappen, of *questionable research practices* [37], worden in uitzonderlijke gevallen — gevallen van fraude — opzettelijk gemaakt, maar doorgaans komen zij door een onvoldoende methodologisch inzicht van de wetenschapper. Hoewel methodologen als Paul Meehl [48,49], Adriaan de Groot [31] en Jacob Cohen [24,25] een halve eeuw geleden al waarschuwden voor weeffouten in het wetenschappelijk proces, lijkt er het afgelopen decennium pas echt momentum te zijn om de crisis aan te pakken. Het is de taak van de statisticus om een actieve rol hierbij te spelen. Dit kan op meerdere manieren, waaronder:

1. Het onder de aandacht brengen van minder bekende bestaande methodologische kennis [27,44].
2. Het wijzen op methodologische fouten in gepubliceerde *high-impact* artikelen [1,22].

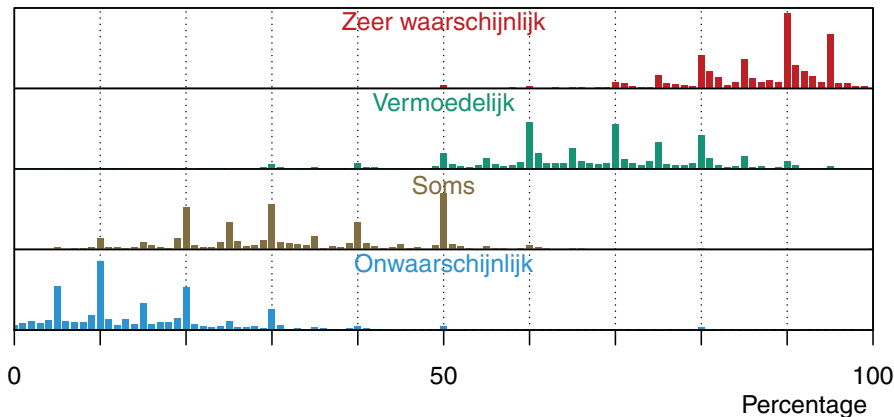
3. Het actief meewerken aan de introductie van technieken die de weeffouten in de wetenschap kunnen verkleinen, zoals pre-registratie [70] en *open science* [4,62].
4. Het ontwikkelen en aanbieden van open access methodologisch onderwijs aan wetenschappers en het algemeen publiek.

Deze taken leiden niet direct tot nieuwe wetenschappelijke kennis en zouden door de purist dus niet als taak van de onderzoeker bestempeld worden. Echter, de wetenschapper heeft ook een onderwijsstaak en die dient zich zeker niet tot alleen het klaslokaal te beperken.

Terug naar de moeilijke statistiek. Er is veel onderzoek gedaan naar welke statistische vraagstukken mensen moeilijk vinden. Het driedeukenprobleem is een overbekend voorbeeld. Het blijkt dat zelfs duiven beter te trainen zijn in het oplossen van dit probleem dan mensen [5,34].

Er is echter nog verrassend weinig onderzoek gedaan naar *waarom* mensen dit soort vragen zo moeilijk vinden, noch naar welk type mens er extra moeite mee heeft of wat men kan doen om de moeilijkheden weg te halen. Het is bijvoorbeeld erg interessant om te kijken vanaf welke leeftijd de intuïtie men de verkeerde kant op stuurt bij vragen als het driedeukenprobleem. Als duiven het beter kunnen dan mensen, omdat duiven niet gehinderd worden door menselijke intuïtie, dan kunnen kinderen het mogelijk beter dan volwassenen; maar tot welke leeftijd?

Samen met Sanne Willems en Ionica Smeets heb ik onlangs uitgezocht hoe het zit met de interpretatie van Nederlandstalige kanswoorden [69] (zie Figuur 3). Net als bij soortgelijk Engelstalig onderzoek vonden wij dat de ene persoon een woord als 'meestal' totaal anders interpreteert dan de ander. Dit heeft vergaande gevolgen voor risicocommunicatie, bijvoorbeeld in flyers met informatie over ziekten. Wat wij ook onderzocht hebben is of statistici, die beroepsmatig met kanswoorden bezig zijn, homogener zijn in hun interpretaties van kanswoorden dan leken. Dit bleek niet het geval. Uitgebreide kanstraining zorgt dus niet voor een eenduidiger kansbegrip, althans niet wanneer het kansbegrip omgezet wordt in woorden. Welke variabelen dan wel een rol spelen bij deze heterogeniteit is iets dat ik de komende jaren zal onderzoeken.



Figuur 3 Verdeling van de interpretatie van vier kanswoorden [68].

Visualisatie

Een belangrijk onderdeel van statistische communicatie is datavisualisatie. Met John Gower heb ik verschillende bijdragen geleverd aan de visualisatie van zogenaamde triadditieve tabellen [8,9]. Hoewel dit een zeer interessante exercitie in de lineaire algebra was, was het toepasbaar nut beperkt: zelfs met geavanceerde visualisaties, blijven interpretaties van drieweg-interacties ingewikkeld.

Het gebruik van visualisaties om kwantitatieve informatie inzichtelijk te maken, gaat eeuwen terug [30]. Door technologische vooruitgang, de beschikbaarheid van softwarepakketten zoals *R* [54] en *ggplot2* [67] en de mogelijkheid tot animaties en interactieve visualisaties maar ook door de opkomst van ingewikkeldere statistische datasets en modellen zijn datavisualisaties aan een opmars bezig in de sociaal-wetenschappelijke literatuur.

Om te weten of de boodschap die via een statistische grafiek wordt uitgedragen goed overkomt, moeten we weten hoe mensen grafieken interpreteren. Er zijn uitgebreide richtlijnen omtrent goede datavisualisatie [68]. Er is ook enig onderzoek gedaan naar hoe grafieken geïnterpreteerd worden [23,56,59].

Echter, er is verrassend weinig onderzoek gedaan naar waarom het op die ma-

nier geïnterpreteerd wordt. Zo schatten mensen kansen anders in wanneer deze via horizontale staafdiagrammen worden gepresenteerd dan wanneer deze via verticale staafdiagrammen worden gepresenteerd, ook al is de informatie wiskundig gezien equivalent (zie Figuur 4). We weten niet goed waarom. Er is literatuur over de psychologische aspecten van het verwerken van grafische informatie [65]. Maar hoe dit in een statistische context in zijn werk gaat, is onvoldoende bekend.

Welke visualisatietechniek optimaal is, hangt vanzelfsprekend ook van de context af: moet snel een oppervlakkig inzicht verkregen worden, of moet het juist een boodschap zijn die goed blijft hangen? Is de boodschap vrij eenvoudig of juist gecompliceerd en genuanceerd? De keuze hangt ook af van de doelgroep die men wil bereiken, bijvoorbeeld medewetenschappers of patiënten [58].

Neem het toepassingsgebied van de psychopathologie, waarin netwerkvisualisaties, en zelfs netwerkanimaties, een prominente rol innemen. Er worden technisch gezien vernuftige visualisaties gemaakt, maar of de boodschap uit de grafiek ook goed overkomt bij de therapeut en de patiënt is nog maar de vraag [18]. Indien er structureel verkeerde interpretaties gemaakt worden, kan dit leiden tot subop-

timale behandelingen of zelfs verkeerde klinische diagnoses. Kortom, het maken van de visualisatie is de ene helft van het verhaal, zorgen dat de visualisatie goed begrepen wordt de andere helft.

De komende jaren wil ik me richten op het slaan van een brug tussen het statistische model en het gebruik ervan. Dit houdt in dat ik wil bijdragen aan het verbeteren van de wetenschappelijke cultuur om *questionable research practices* tegen te gaan. Tevens wil ik me storten op de vragen rond de interpretatie en communicatie van kansen, onzekerheden en risico's. Ten slotte wil ik middels nieuw onderzoek meewerken aan een cultuurverschuiving richting het gebruik van visualisaties die bewezen effectief zijn. Dit zal er voor zorgen dat de toegepaste statistiek van waarde blijft voor de toepassing.

Het academisch onderzoeksklimaat

Om goed onderzoek te kunnen doen is een goede onderzoeksomgeving onontbeerlijk. Hoewel er ontzettend veel goed gaat aan deze universiteit, wil ik er toch op wijzen dat de academische omgeving, zowel voor studenten als medewerkers, beter kan en beter moet.

De focus ligt nu te veel op rendement, wat een nadelig effect heeft. Het klopt dat de karige bijdrage van de overheid aan wetenschap en hoger onderwijs niet helpt, maar dit is zeker niet de enige schuldige. Om tegenwoordig promovendus te kunnen worden, dien je eigenlijk wel een research master-opleiding gedaan te hebben. En om zo'n opleiding te kunnen volgen, is het zeker een voordeel als je in de bacheloropleiding deelnam aan een *honours college*. En daar kom je eigenlijk niet binnen zonder uitstekende cijfers en extra-curriculaire activiteiten gedurende de middelbare school.

Wanneer je een academische carrière ambieert moet je hier dus al rond je zestiende mee bezig zijn. Laatbloeiërs, zij-instromers en twijfelaars wordt het moeilijk gemaakt. Dit systeem sorteert erop voor dat er te veel homogeniteit is aan de universiteit, zowel qua type persoonlijkheden als qua achtergrond. Dit zie je het duidelijkst terug in de vertekende genderbalans. Los van de evidente wenselijkheid van diversiteit van ideeën, is het voor het draagvlak van het hoger onderwijs en de wetenschap van belang dat de maatschappij zich vertegenwoordigd ziet binnen de academie. Hoewel er qua diversiteit aan de



Figuur 4 Drie verschillende visuele representaties van dezelfde verhoudingen.

universiteit voortgang geboekt wordt, gaat het te traag.

Het zogenaamde Tenure Track-systeem heeft zeker goede punten — het is een van de redenen dat ik vandaag hier kan staan — maar ook minder goede kanten. De lijst met Tenure Track-eisen staat vol met targets die behaald moeten worden en dan geldt natuurlijk de wet van Goodhart [60]: “Als een maatstaf een doel wordt, is het geen goede maatstaf meer.” De succeskans bij beursaanvragen van NWO is erg laag. Dit komt omdat het aantal aanvragen het afgelopen decennium flink gestegen is terwijl de financiële middelen niet meebewogen. Die vele aanvragen komen niet uit een sterk gegroeide intrinsieke motivatie maar vooral omdat men beurzen moet binnenhalen van het systeem. Het niet binnenhalen van beurzen wordt als een mislukking gezien, terwijl het gezien de succeskans juist de *default* is dat dit niet lukt [3]. Bijkomend probleem is dat ook dit systeem de homogenisering in de hand werkt: iedereen moet exact dezelfde targets halen en moet dus dezelfde kwaliteiten in huis hebben. De targets zijn ook

nog grotendeels solo-targets, samenwerking wordt onvoldoende beloond. Dit leidt tot een toxisch competitief systeem.

Een alternatief systeem, waarbij de medewerker punten kan verdienen met bijvoorbeeld publicaties en media-optredens, en vervolgens vanaf een bepaald aantal punten op kan gaan voor bevordering, zal al helpen die homogenisering tegen te gaan. Immers, de ene academicus zal punten verzamelen omdat zij succesvolle beursvoorstellen schrijft, de ander omdat hij een brug slaat tussen academie en maatschappij.

Het Tenure Track-systeem dwingt medewerkers om continu nèt harder te bewegen dan wenselijk. Immers, de medewerker moet niet alleen aantonen dat hij of zij goed werk levert, het moet ook in een korte tijdsperiode aangetoond. Deze dwang zorgt niet alleen voor onnodige werkstress onder de medewerkers, maar remt ook de creativiteit af. Zoals de Jedi-meester Yoda zei, “The greatest teacher, failure is.” [38] De ruimte om fouten te kunnen maken is essentieel voor succes, zowel voor studenten als voor medewerkers. Die ruimte moet je dan ook krijgen.

Tot slot

In het voorgaande heb ik u meegenomen in het statistische universum [12]. Haar ongrijpbare zekerheid [11] kan worden ingezet bij tal van maatschappelijke problemen. Dit vereist niet alleen goede wiskunde en goede methodologie, maar ook goede communicatie.

Ik heb u uitgebreid verteld over de statistische toepassing in de psychopathologie en omgevingspsychologie. Ik heb het voorrecht gehad om aan nog veel meer toepassingsgebieden te werken, zoals de effectiviteit van innovaties in het hoger onderwijs [17], de normering van psychologische tests [64], en de optimale inrichting van kantoorruimtes [10, 35]. Door die toepassingen leer ik dagelijks bij over nieuwe onderwerpen buiten de statistiek. Ik ben uw hoogleraar maar ook uw student en dat is een dubbele eer.

John Tukey zei ooit “The best thing about being a statistician is that you get to play in everyone's backyard.” John Tukey sloeg de spijker op z'n kop.

Ik heb gezegd.



Referenties

- Albers, C.J. (2015), Dutch research funding, gender bias, and Simpson's paradox, *Proceedings of the National Academy of Sciences* 112(50), E6828–E6829.
- Albers, C.J. (2018), De Moivre–Gauss–Laplace: extraordinarily normal, *Nieuw Archief voor Wiskunde* 5/19(1), 37–38.
- Albers, C.J. (2018), Mislukking, *UKrant Groningen*, 20 november.
- Albers, C.J. (2018), Valid reasons not to participate in open science practices, Twitter, 21 februari.
- Albers, C.J. (2019), Aan intuïtie heb je weinig bij het oplossen van statistische puzzels, *De Volkskrant*, 22 januari.
- Albers, C.J. (2019), Klimatsceptici geven antwoord op niet-relevante vragen, *De Volkskrant*, 20 februari.
- Albers, C.J. en Bringmann, L.F. (2019), The time-varying change point autoregressive model. Ingediend voor publicatie.
- Albers, C.J. en Gower, J.C. (2014), A contribution to the visualisation of three-way arrays, *Journal of Multivariate Analysis* 132, 1–8.
- Albers, C.J. en Gower, J.C. (2017), Visualising interactions in bi- and triadditive models for three-way tables, *Chemometrics and Intelligent Laboratory Systems* 167, 238–247.
- Albers, C.J., Vermue, C.E., Wolff, T. de en Beldhuis, H.J.A. (2018), Modelbased academic dismissal policies; a casestudy from the Netherlands, *PsyArXiv preprints*, osf.io/6agcz.
- Albers, W. (1985), De ongrijpbare zekerheid, Oratie, Rijksuniversiteit Limburg, 27 juni.
- Albers, W. (2012), Het statistische universum, Afscheidsrede, Universiteit Twente, Memorandum 1987, 21 september.
- Anacleto, O., Queen, C.M. en Albers, C.J. (2013), Forecasting multivariate road traffic flows using Bayesian dynamic graphical models, splines and other traffic variables, *Australian and New Zealand Journal of Statistics* 55(2), 69–86.
- Anacleto, O., Queen, C.M. en Albers, C.J. (2013), Multivariate forecasting of road traffic flows in the presence of heteroscedasticity and measurement errors, *Journal of the Royal Statistical Society, Series C: Applied Statistics* 62(2), 251–270.
- Bastiaansen, J.A., Kunkels, Y.K., ..., Albers, C.J. en Bringmann, L.F. (2019), Time to get personal? The impact of researchers' choices on the selection of treatment targets using the experience sampling methodology. Ingediend voor publicatie.
- Bhushan, N., Mohnert, F., Sloot, D., Jans, L., Albers, C.J. en Steg, E.M. (2019), Using a Gaussian graphical model to explore relationships between items and variables in environmental psychology research. Geaccepteerd door *Frontiers in Psychology: Environmental Psychology*.
- Boevé, A.J., Meijer, R.R., Bosker, R.J., Vugteveen, J., Hoekstra, R. en Albers, C.J. (2017), Implementing the flipped classroom: an exploration of study behaviour and student performance, *Higher Education* 74(6), 1015–1032.
- Bos, F.M., Snippe, E., Bruggeman, R., Wichers, M.E. en Kieke, L. van der (2018), Will the experience sampling methodology deliver on its promise for psychiatric care? Ingediend voor publicatie.
- Bouman, T., Verschoor, M., Steg, E.M., Böhm, G., Fisher, S., Poortinga, W., ..., Albers, C.J. (2019), When worry about climate change leads to climate action and policy support. Ingediend voor publicatie.

- 20 Bringmann, L.F. en Albers, C.J. (2019), Inspecting gradual and abrupt changes in emotion dynamics with the time-varying change point autoregressive model. Ingediend voor publicatie.
- 21 Bringmann, L.F., Hamaker, E.L., Vigo, D.E., Aubert, A., Borsboom, D. en Tuerlinckx, F. (2017), Changing dynamics: Timevarying autoregressive models using generalized additive modeling, *Psychological Methods* 22(3), 409–425.
- 22 Brown, N.J.L., Albers, C.J. en Ritchie, S.J. (2017), Contesting the evidence for limited human lifespan, *Nature* 546, E6–E7.
- 23 Cleveland, W.S. en McGill, R. (1984), Graphical perception: Theory, experimentation, and application to the development of graphical methods, *Journal of the American Statistical Association* 79(387), 531–554.
- 24 Cohen, J. (1962), The statistical power of abnormal-social psychological research: a review, *Journal of Abnormal Social Psychology* 65, 145–153.
- 25 Cohen, J. (1994), The earth is round ($p < 0.05$), *American Psychologist* 49, 997–1003.
- 26 Cramer, A.O.J., Borkulo, C. van, Giltay, E.J., Maas, H.L.J. van der, Kendler, K.S., Scheffer, M. en Borsboom, D. (2016), Major depression as a complex dynamical system, *PLoS ONE* 11(12), e0167490.
- 27 Ernst, A.F. en Albers, C.J. (2017), Regression assumptions in clinical psychology research practice—a systematic review of common misconceptions, *PeerJ* 5, e3323.
- 28 Ernst, A.F., Timmerman, M.E., Jeronimus, B.F. en Albers, C.J. (2018), Probabilistic time series clustering by vector autoregressive metric—a filtering method for dynamic clustering. Ingediend voor publicatie.
- 29 Ernst, A.F., Timmerman, M.E., Jeronimus, B.F. en Albers, C.J. (2019), Inter-individual differences in multivariate time series: dynamic adaptive cluster modelling based on finite mixtures of vectorautoregressive processes. Ingediend voor publicatie.
- 30 Friendly, M. (2006), A Brief History of Data Visualization, in C. Chen, W. Härdle en A. Unwin (Red.), *Handbook of Computational Statistics: Data Visualization (Deel 3)*, Springer, Heidelberg.
- 31 Groot, A.D. de (1961), *Methodologie*, Mouton & Co., Den Haag.
- 32 Hamaker, E.L., Ceulemans, E., Grasman, R. en Tuerlinckx, F. (2015), Modeling affect dynamics: State of the art and future challenges, *Emotion Review* 7(4), 316–322.
- 33 Hamilton, J.D. (1989), A new approach to the economic analysis of nonstationary time series and the business cycle, *Econometrica* 57, 357–384.
- 34 Herbranson, W.T. en Schroeder, J. (2010), Are birds smarter than mathematicians? Pigeons (*Columba livia*) perform optimally on a version of the Monty Hall dilemma, *Journal of Comparative Psychology* 124, 1–13.
- 35 Hoendervanger, J.G., Been, I. de, Yperen, N.W. van, Mobach, M.P. en Albers, C.J. (2016), Flexibility in use: Switching behaviour and satisfaction in activity-based work environments, *Journal of Corporate Real Estate* 18(1), 48–62.
- 36 IPCC (2018), Global warming of 1.5 °C, IPCC, Geneva, Switzerland.
- 37 John, L.K., Loewenstein, G. en Prelec, D. (2012), Measuring the prevalence of questionable research practices with incentives for truth telling, *Psychological Science* 23, 524–532.
- 38 Johnson, R. (regie/scenario) (2017), *Star Wars: Episode VIII—The Last Jedi*, Lusasfilm, San Francisco.
- 39 Kahneman, D. (2011), *Thinking Fast and Slow*, Farrar, Straus en Giroux, New York.
- 40 Koval, P. en Kuppens, P. (2012), Changing emotion dynamics: Individual differences in the effect of anticipatory social stress on emotional inertia, *Emotion* 12(2), 256–267.
- 41 Krone, T., Albers, C.J., Kuppens, P. en Timmerman, M.E. (2018), A multivariate statistical model for emotion dynamics, *Emotion* 18, 739–754.
- 42 Krone, T., Albers, C.J. en Timmerman, M.E. (2017), A comparative simulation study of AR(1) estimators in short time series, *Quality & Quantity* 51(1), 1–21.
- 43 Krone, T., Albers, C.J. en Timmerman, M.E. (2016), Comparison of estimation procedures for multilevel AR(1) models, *Frontiers in Psychology: Quantitative Psychology and Measurement* 7.
- 44 Lakens, D., Adolfs, F.G., Albers, C.J.,... en Zwaan, R. (2018), Justify your alpha, *Nature Human Behaviour* 2, 168–171.
- 45 Leemput, I. van de, Wichers, M., Cramer, A.O.J., Borsboom, D., Tuerlinckx, F., Kuppens, P.,... Scheffer, M. (2014), Critical slowing down as early warning for the onset and termination of depression, *Proceedings of the National Academy of Sciences* 111(1), 87–92.
- 46 Linden, S.L. van der (2017), Determinants and measurement of climate change risk perception, worry, and concern, in *The Oxford Encyclopedia of Climate Change Communication*, Oxford University Press.
- 47 Meehl, P.E. (1954), *Clinical Versus Statistical Prediction: A Theoretical Analysis and Review of the Evidence*, University of Minnesota Press.
- 48 Meehl, P.E. (1978), Theoretical risks and tabular asterisks: Sir Karl, Sir Ronald and the slow progress of soft psychology, *Journal of Consulting and Clinical Psychology* 46, 806–834.
- 49 Meehl, P.E. (1990), Why summaries of research on psychological theories are often uninterpretable, *Psychological Reports* 66, 195–244.
- 50 Namazkhan, M., Albers, C.J. en Steg, E.M. (g.d.), The role of environmental values, socio-demographics and building characteristics in setting room temperatures in winter, *Energy* 171, 1183–1192.
- 51 Open Science Foundation (2015), Estimating the reproducibility of psychological science *Science* 349, aac4716.
- 52 Poortinga, W., Whitmarsh, L., Steg, E.M., Böhm, G. en Fisher, S. (2019), Climate change perceptions and their individual-level determinants: a cross-European analysis, *Global Environmental Change* 55, 25–35.
- 53 Queen, C.M. en Albers, C.J. (2009), Intervention and causality: Forecasting traffic flows using a dynamic Bayesian network, *Journal of the American Statistical Association* 104(486), 669–681.
- 54 R Core Team (2018), R: A language and environment for statistical computing, R Foundation for Statistical Computing, Vienna, Austria.
- 55 Saran, C., Albers, C.J., Sachon, P. en Meesters, Y. (2017), Meteorological analysis of symptom data for people with seasonal affective disorder, *Psychiatry Research* 257, 501–505.
- 56 Simkin, D. en Hastie, R. (1987), An information-processing analysis of graph perception, *Journal of the American Statistical Association* 82, 454–465.
- 57 Slofstra, C., Nauta, M.H., Bringmann, L.F., Klein, N.S., Albers, C.J., Batalas, N.,... Bockting, C.L.H. (2018), Individual negative affective trajectories can be detected during different depressive relapse prevention strategies, *Psychotherapy and Psychosomatics* 87, 243–245.
- 58 Smeets, I. (2014), *Het exacte verhaal. Wetenschappscommunicatie voor bèta's*, Nieuwezijds, Amsterdam.
- 59 Spence, I. (1990), Visual psychophysics of simple graphical elements, *Journal of Experimental Psychology: Human Perceptions and Performance* 16, 683–692.
- 60 Strathern, M. (1997), Improving ratings: audits in the British university system, *European Review* 5, 305–321.
- 61 Trimbos Instituut (2016), *Depressie: enkele cijfers*, Factsheet, INFO16.
- 62 Universiteitsbibliotheek Groningen (2018), Open peer review. An interview with Casper Albers, *Open Science Newsletter* 28 maart.
- 63 Verschoor, M., Albers, C.J., Poortinga, W., Böhm, G. en Steg, E.M. (2019), Attributes to climate change and energy: A network analysis of the European Social Survey. Ingediend voor publicatie.
- 64 Voncken, L., Albers, C.J. en Timmerman, M.E. (2018), Improving confidence intervals for normed test scores: Include uncertainty due to sampling variability, *Behavior Research Methods*. Geaccepteerd voor publicatie.
- 65 Wagemans, J., Elder, J.H., Kubovy, M., Palmer, S.E., Peterson, M.A., Singh, M. en Heydt, R. von der (2012), A century of Gestalt psychology in visual perception: I. Perceptual grouping and figureground organization, *Psychological Bulletin* 138, 1172–1217.
- 66 Werff, E. van der en Steg, E.M. (2015), One model to predict them all: Predicting energy behaviours with the norm activation model, *Energy Research & Social Science* 6, 8–14.
- 67 Wickham, H. (2016), *ggplot2: Elegant Graphics for Data Analysis*, Springer, New York.
- 68 Wilkinson, L. (2005), *The Grammar of Graphics*, Springer, New York, 2de ed.
- 69 Willems, S.W., Albers, C.J. en Smeets, I. (2019), Variability in the interpretation of Dutch probability phrases – a risk for miscommunication, arXiv:1901.09686.
- 70 Williams, M. en Albers, C.J. (2018), Dealing with distributional assumptions in preregistered research, PsyArXiv preprints, osf.io/ab5tk.

Nicolaos Starreveld*FNWI
Universiteit van Amsterdam
n.j.starreveld@uva.nl***Hans Sterk***Faculteit Wiskunde & Informatica
Technische Universiteit Eindhoven
h.j.m.sterk@tue.nl***Interview Sanne Blauw**

Het beste interview ooit *

*met het Nieuw Archief

Sanne Blauw is wetenschapsjournalist bij *De Correspondent*. Vorig jaar verscheen bij dat journalistieke platform haar boek *Het bestverkochte boek ooit (met deze titel)*. In dit boek wil zij laten zien dat cijfers lang niet zo objectief zijn als ze lijken. Onze redacteurs Nicolaos Starreveld en Hans Sterk zochten haar op en stelden haar enkele vragen.

We ontmoeten Sanne in Amsterdam op het redactie-adres van *De Correspondent*. Een modern vormgegeven ruimte waar een kantoortuin, zithoeken, een keuken en aparte kamers elkaar afwisselen. We nemen plaats in de ruime keuken op de bovenverdieping. Onze aandacht wordt getrokken door haar recent verschenen *Het bestverkochte boek ooit (met deze titel)*, geschreven voor een breed publiek en verschenen bij De Correspondent.

Sanne promoveerde in de econometrie en richt zich in haar huidige werk als wetenschapsjournalist onder meer op de rol van cijfers in de maatschappij. Aanvankelijk begon zij met de studies economie en rechten. Al snel werd duidelijk dat ze een stevige wiskunde-component miste en zo werd het econometrie. Daar groeide haar interesse voor de maatschappelijke rol van cijfers. Bij het verzamelen en verwerken van cijfers groeide ook het besef van de betrekkelijkheid van die cijfers. Voor haar promotieonderzoek onderzocht ze 'geluk' in Bolivia.



Sanne Blauw

Hoe kijk je terug op dit onderzoek en hoe gaf het richting aan je latere werk?

"Ik onderzocht 'geluk' in Bolivia en wel hoe iemands geluk samenhangt met hoe die persoon zich vergelijkt met zijn omgeving. Daarbij bekeek ik ook hoe je dient om te gaan met cijfers die mensen in het onderzoek gaven voor geluk. Is de 7 van de een ook een 7 voor de ander? Uit het onderzoek kwam uiteindelijk naar voren dat mensen die het gevoel hadden beter af te zijn dan hun omgeving zich gelukkiger voelden. Achteraf gezien heb ik vooral veel geleerd van het onderzoek, het heeft zeker als eyeopener gefungeerd. Het keerpunt voor mij was het moment dat ik data ging verzamelen. Toen realiseerde ik me hoe moeilijk het is om de werkelijkheid in een spreadsheet te duwen. Het heeft me ertoe aangezet naar het verhaal achter de cijfers te kijken."

In je boek heb je het vaak over correlatie en causaliteit.

"Correlatie en causaliteit worden vaak door elkaar gehaald. Je ziet vaak dat instanties iets zeggen als 'als we dit doen dan gebeurt dat'. In voedingsonderzoek zie je bijvoorbeeld hoe gemakkelijk er geconcludeerd wordt dat iets gezond voor

je is. Er zijn dan twee groepen met elkaar vergeleken en de ene groep kwam er met product X beter uit. Ik probeer dan aan te geven dat er misschien variabelen over het hoofd gezien zijn. Het verwarren van correlatie en causaliteit is een schadelijke fout, omdat de stap naar actie gemakkelijk gemaakt is als je een oorzakelijk verband veronderstelt. Ik heb in mijn werk geleerd hoe lastig het is om oorzakelijkheid te achterhalen.”

In het laatste hoofdstuk van je boek laat je zien dat meer kennis niet de enige oplossing is.

“Inderdaad speelt er meer. Je eigen psychologie en overtuigingen spelen een grote rol bij het interpreteren van cijfers. Als je iets leest wat strookt met je overtuigingen, dan ben je misschien minder kritisch. Kennis van je eigen onderbuik kan erg helpen. In het boek beschrijf ik ook fouten die te maken hebben met de macht van politici en bedrijven. Processen — bijvoorbeeld in de tabaksindustrie — zijn zo complex en spelen zich gedeeltelijk achter de schermen af dat een gewone burger, ondanks zijn of haar kennis, dat niet zomaar kan doorgronden. Journalisten spelen hier een belangrijke rol om context te bieden bij de cijfers. Ook als consument kun je proberen verder te kijken dan de gepresenteerde cijfers. Wat is het héle verhaal? Neem een grote aankoop als een ebike. Bij een reclame voor ebikes zou bijvoorbeeld één type ebike als beste van Europa uit de test zijn gekomen. In feite waren er een heleboel categorieën en was de ‘beste’ ebike slechts nummer 1 in één van die categorieën.”

Maar dat is niet iedereen gegeven en ook niet altijd mogelijk.

“Uiteindelijk moet je ook kunnen vertrouwen op wetenschappelijke en publieke organisaties, want je kunt inderdaad niet alles zelf uitzoeken. Als je in de klimaatwetenschap iets beter wilt begrijpen, merk je dat je een stap erna ook weer iets verder moet uitzoeken. Dat kan gauw te complex worden. Het is inderdaad een worsteling uit te vinden wanneer je welke club vertrouwt. Het gevaar bestaat dat je overal sceptisch over wordt. Daar ben ik ook bang voor bij mijn boek: dat mensen na het lezen geen enkel cijfer meer vertrouwen. Ik wil de lezer een middenweg wijzen, tussen scepsis en vertrouwen.”



Sanne Blauw, *Het bestverkochte boek ooit* (met deze titel) — *Hoe cijfers ons leiden, verleiden en misleiden*, De Correspondent, 2018, 208 p., ISBN 9789082821642, € 20,-.

Kan het vaak niet beter gezegd worden met woorden? Waarom zoveel getallen?

“Getallen hebben het aura van objectiviteit, het zijn getallen, dus ze zijn waar. Een uitspraak als ‘Staat op nummer 1 op Tripadvisor’ slaat meer aan. Maar het gaat inderdaad meer om het verhaal achter de statistiekregeltjes. Mijn missie is om cijfers op hun plek te zetten, naast woorden!”

Je lijkt met je boek in de traditie te staan van het bekende boek uit de jaren vijftig ‘How to Lie with Statistics’ [1].

“Darrell Huffs boek gaat alleen over statistiek, en gaat bijvoorbeeld niet in op machtsverhoudingen. Ik kies voor verhalen die een hoofdstuk dragen, meer lagen hebben, en bouw ook een historische en filosofische component in. Huff is briljant wanneer hij vertelt wat een gekke grafiek kan betekenen. Ik vertel ook hoeveel invloed zo’n grafiek heeft op je leven en wat voor belangen erachter schuilgaan.”

Recent verscheen ‘Weapons of Math Destruction’ van Cathy O’Neill [2]. Heeft dat boek je beïnvloed?

“Ik was al bezig met mijn boek toen dat verscheen, maar het heeft me zeker beïnvloed. O’Neills boek heeft ook een iets andere focus. Zij schrijft alleen over big data en gaat minder in op statistische fouten en kwesties rondom causaliteit en correlatie.”

Worden mensen zich ook meer bewust van wat er gebeurt?

“Dat is wel wat mensen zeggen die het boek hebben gelezen. Ze zijn anders naar getallen in de krant gaan kijken. Mensen sturen me berichten toe en vragen wat ik er van vind. Er is een zeker bewustzijn gecreëerd, hoop ik. Ook bij de voordrachten die ik geef, bijvoorbeeld bij bedrijven maar ook op een ministerie, hoop ik mensen zo ver te brengen dat ze eerder durven vragen naar de betekenis van cijfers. Het getal moet het begin van de discussie worden, niet het doel op zich. Het is niet synoniem met de realiteit, er is ook een context waarin dat getal bestaat. Mijn doel was om mensen zelf de handvatten te geven om cijfers op waarde te kunnen schatten en niet afhankelijk te zijn van mij of fact-checkers.”

Je boek leest heel vlot en is laagdrempelig geschreven. Hoeveel moeite heeft het je gekost om het zo toegankelijk te krijgen?

“Het heeft best wel moeite gekost om het zo te krijgen, bijvoorbeeld bij de uitleg van de *p*-waarde. Je wilt het toegankelijk maken, maar op zo’n manier dat experts zeggen dat je er nog veel meer over kunt schrijven, maar dat wat er staat wel klopt. Tegelijkertijd wilde ik geen schooljuf worden of in jip-en-janneketaal schrijven. Uiteindelijk was de truc van het boek om goeie verhalen te vinden die mensen meeslepen. Ook als je niet van getallen houdt moet je in de verhalen getrokken worden; het moet niet als huiswerk voelen, het moet ook leuk zijn. Toen die verhalen er waren werd het gemakkelijker. Je wilt dat de lezer het gevoel krijgt dat hij er zelf achter komt. Mijn redacteur heeft me prima geholpen en er bijvoorbeeld voor gezorgd dat de informatiedichtheid niet te groot werd.”

We ronden het gesprek af. We stippen nog wat onderwerpen aan: het onderwijs, haar inspiratiebronnen voor het schrijven, de omslag en de geweldige titel van het boek. We nemen afscheid van Sanne en lopen naar het station op deze mooie winteravond.

Referenties

- 1 Darrell Huff, *How to Lie with Statistics*, Penguin Books, 1991. Recent in het Nederlands uitgeven als *Liegen met cijfers*, Nubiz, 2018.
- 2 Cathy O’Neill, *Weapons of Math Destruction*, Penguin Books, 2017.

Ronald Meester

Afdeling Wiskunde
Vrije Universiteit Amsterdam
r.w.j.meester@vu.nl

Onderzoek

Waarom p -waardes niet gebruikt mogen worden als statistisch bewijs

Het toetsen van hypothesen is een van de belangrijkste onderdelen van elke inleidende cursus in de statistiek. Soms word je geconfronteerd met twee elkaar beconcurrerende hypothesen H_1 en H_2 en word je op de een of andere manier geacht een keuze te maken op basis van de data die tot je beschikking staat. Maar soms is niet het maken van een keuze het uiteindelijke doel, maar om te bepalen of de data op de een of andere manier bewijs geeft dat een specifieke hypothese waar is. Het onderscheid tussen enerzijds keuzes maken en anderzijds bewijs vinden wordt vaak vergeten en niet herkend, maar het is een wezenlijk verschil. In dit artikel dat gebaseerd is op zijn voordracht op het KWG Wintersymposium van 12 januari belicht Ronald Meester het begrip ‘statistisch bewijs’.

In deze bijdrage gaat het mij om statistisch bewijs. Wat maakt dat bepaalde gegevens bewijs geven voor het waar zijn van een bepaalde hypothese? En wat is dat eigenlijk, statistisch bewijs? De meeste lezers zullen zich wel de colleges of cursussen in de statistiek herinneren die ze in het verleden hebben gevolgd, en ik vermoed ook dat de meesten een onmiddellijke associatie met significantie-toetsen en p -waardes hebben. Natuurlijk, sluitend bewijs dat een bepaalde hypothese waar is zal de statistiek niet vaak kunnen geven, maar we kunnen, zo is de algemene gedachte, wel procedures beschrijven die de kans op foutieve claims klein maken. Door het kiezen van een geschikt *significatieniveau* α (meestal 0,01 of 0,05, maar dat is in wezen volkomen arbitrair) en het uitvoeren van een significantietest, kunnen we ervoor zorgen dat we in hooguit een klein en gecontroleerd aantal gevallen een foutieve beslissing nemen door bewijs te

claimen terwijl de hypothese eigenlijk niet waar is. Een dergelijke procedure zou dan de bewijskracht voor een bepaalde hypothese moeten kwantificeren, middels de van tevoren vastgestelde α .

Het is precies die laatste uitspraak die ik in deze bijdrage wil onderzoeken, en zal verwerpen. Ik zal dat langs verschillende lijnen doen. Ik begin met het precies omschrijven van de klassieke statistische procedure, samen met de bijbehorende logica, rationale, en intuïtie. Vervolgens zal ik aan de hand van een geruchtmakende rechtszaak laten zien dat deze procedure ervoor heeft gezorgd dat mensen op ondeugdelijke gronden schuldig zijn bevonden aan moord. Op zichzelf geldt in de wiskunde natuurlijk het adagium dat zodra er één geval bekend is waarbij een procedure faalt, de hele procedure als ondeugdelijk moet worden beschouwd, en kennelijk niet in algemeenheid kan worden geaccepteerd. Ik zou het dan ook kunnen laten bij dit

ene, schokkende, tegenvoorbeeld. Maar om meer gevoel te krijgen voor wat er aan de hand zou kunnen zijn, zal ik het falen van de procedure illustreren met een aantal gevallen waarin het volgen ervan tot absurditeiten leidt. De conclusie zal zijn, onontkoombaar, dat deze manier van statistisch bewijs leveren niet deugt. Een veelgeciteerd artikel van Ioannidis [1] claimt dat ongeveer 80% van de statistisch ondersteunde wetenschappelijke resultaten onjuist is. Deze conclusie, zeg ik er dan maar onmiddellijk bij, is het directe gevolg van falende statistische methodes. Dat is een tamelijk schokkende conclusie als je bedenkt dat onze leerboeken ermee vol staan, dat wij onze studenten en leerlingen dit ook leren, en dat in de wetenschappelijke praktijk deze methode schering en inslag is. Ik denk dat de *reproductiecrisis* waar de wetenschap volgens velen middenin zit, het rechtstreekse gevolg is van collectief onbegrip van wat statistisch bewijs eigenlijk is.

Maar om niet alleen maar kritiek te leveren, zal ik in dit artikel ook kort pleiten voor een totaal andere visie op bewijs, waarbij bewijs slechts relatief van aard kan zijn. Ik zal betogen dat er niet zoiets bestaat als bewijs voor hypothese H , maar dat je in plaats daarvan altijd moet spreken over bewijs voor hypothese H_1 *ten opzichte van* hypothese H_2 , waarbij weliswaar H_1 en H_2

elkaar dienen uit te sluiten, maar waar- bij het niet nodig is dat ze elkaars complement zijn. Deze visie is niet nieuw, en wordt al decennialang gepropageerd door verschillende van mijn collega's, in soms zeer overtuigend proza, en vanuit verschillende perspectieven bezien. En toch lukt het maar niet om de wetenschappelijke wereld ervan te overtuigen dat het zo niet verder kan met de nog steeds dominante visie dat p -waardes iets te maken hebben met statistisch bewijs. Over het waarom daarvan kan ik alleen maar gissen, maar ik heb daar wel enkele ideeën over die ik ook met de lezer zal delen.

Klassieke procedure en eerste kritiek erop

Stel je bent wetenschapper en je wilt graag een bepaalde hypothese verwerpen. Dat 'graag' is natuurlijk een tikje vilein, want horen wij wetenschappers niet neutraal te zijn? In theorie wel, maar zo werkt het meestal niet. Een farmaceut wil bijvoorbeeld dat het nieuwe medicijn beter is dan het oude, dus zal hij of zij graag de hypothese verwerpen dat dat niet zo is. Goed, er is dus een hypothese H , en er is data E . We zien die data als een stochastische grootheid en schrijven e voor een realisatie ervan. Vervolgens is er een toetsings-grootheid T . Deze T is een functie van E , en dus zelf ook weer een stochastische grootheid. Bij elke realisatie e van E hoort een realisatie t van T . We kiezen T zo dat we de kansverdeling van T op zijn minst bij benadering kennen als we aannemen dat H waar is. Een onschuldig voorbeeld maakt hopelijk veel duidelijk: Stel H is de hypothese dat een bepaalde munt zuiver is, en E is het resultaat van 100 worpen. Een geschikte T is nu bijvoorbeeld het aantal keer dat we kop hebben gegooid. Onder de aanname dat H waar is, heeft T een bekende verdeling, namelijk binomiaal met parameters 100 en $\frac{1}{2}$.

Men wil nu een uitspraak doen over het al dan niet waar zijn van hypothese H , en de procedure gaat als volgt. We definiëren een *kritiek gebied* K , een deelverzameling van de mogelijke uitkomsten van T , met de eigenschap dat de kans dat T onder H in K terecht komt klein is. Hoe klein? Dat bepalen we van tevoren, en meestal wordt hiervoor 0,01 of 0,05 genomen. De keuze wordt doorgaans aangegeven met α . De uiteindelijke instructie luidt nu als volgt: "Verwerp H als de toetsingsgrootheid T in K terecht is gekomen." In het voorbeeld

van zojuist wordt K doorgaans gedefinieerd als het grootste gebied van de vorm $K_R := \{n: |n - 50| \geq R\}$, waarvoor geldt dat de kans onder H dat $T \in K_R$ hooguit α is. Met andere woorden, je verwerpt H als het aantal keren kop te groot of te klein is, en dat is natuurlijk heel intuïtief.

Een equivalente variant op deze procedure is dat men geen kritiek gebied kiest, maar simpelweg de kans uitrekent dat onder H de uitkomst van T meer afwijkt van 50 (in bovengenoemd voorbeeld) dan de daadwerkelijk waargenomen afstand. Als deze kans, een p -waarde genoemd, kleiner is dan α , dan wordt dat als bewijs voor het onwaar zijn van H opgevat, en opnieuw wordt de bewijskracht dan gekwantificeerd met α . Deze versie is zoals gezegd equivalent aan de eerste, maar heeft volgens velen het voordeel dat het noemen van de p -waarde extra informatie geeft. Een p -waarde van 0,0001 lijkt sterker bewijs te geven voor het complement H^c van H dan een p -waarde van 0,02. Ik zal me verder vooral op p -waardes richten.

De logica achter deze procedures is bedrieglijk eenvoudig: als de kans onder H op de waarneming die we hebben gedaan *of op een nog extremere waarneming* erg klein is, dan geloven we niet langer dat H waar is. Meestal wordt het verwerpen van H nu opgevat als *bewijs* dat H niet waar is, en de grootte van de bewijskracht wordt dan doorgaans op α gesteld. Men verwerpt H dan op *significantieniveau* α .

Op dit punt aangekomen is er al onmiddellijk een interessant punt van kritiek te formuleren op deze gang van zaken. Statistisch bewijs voor het al dan niet waar zijn van H zou gebaseerd moeten zijn op wat we waarnemen, op de data E dus. Neem nu twee hypothesen H_1 en H_2 , en stel dat de data zodanig is dat deze twee hypothesen precies dezelfde kansen toekennen aan alle waargenomen data. Een redelijke notie van statistisch bewijs zou geen onderscheid kunnen maken tussen H_1 en H_2 . Immers, als een wetenschapper beweert dat de data een bepaalde bewijskracht heeft voor H_1 (wat dat ook precies moge betekenen) dan kan een andere wetenschapper zeggen dat deze bewijskracht ook voor H_2 moet gelden, want de kansverdelingen van H_1 en H_2 zijn identiek op de waargenomen data. Alleen de waargenomen gegevens zouden mogen worden gebruikt om een uitspraak te doen over de bewijskracht van de data voor een specifieke hypothe-

se. Zelf-evident als dit principe klinkt, het wordt in een p -waardeprocedure wel degelijk geschonden. Immers, als we even bij het voorbeeld van H_1 en H_2 blijven, dan zien we dat de p -waardes die bij H_1 en H_2 horen helemaal niet hetzelfde hoeven te zijn, omdat ze afhangen van de kansen op niet-waargenomen uitkomsten, en die kansen kunnen verschillend zijn onder H_1 en H_2 . In de evaluatie van forensisch DNA-bewijs komt deze situatie echt voor, maar het gaat te ver om die voorbeelden hier te bespreken.

Dus als we p -waardes op de een of andere manier willen zien als kwantificering van statistisch bewijs, dan moeten we accepteren dat deze kwantificering afhangt van niet waargenomen data. Dat lijkt mij niet acceptabel.

Laten we nog eens verder kijken naar de keuze van het kritieke gebied, want het verhaal is nog niet helemaal af. In plaats van H verwerpen als de uitkomst van T te veel afwijkt van wat je verwacht, zou je wiskundig net zo goed kunnen afspreken dat je H verwerpt als T te *dicht* bij die verwachting ligt. Als je bijvoorbeeld 10.000 keer gooit met een zuivere munt, dan is de kans dat het aantal koppen tussen 4.998 en 5.002 (inclusief) ligt gelijk aan 0,03988. Deze kans is kleiner dan 0,05, dus we kunnen ook afspreken om H te verwerpen als het aantal keren kop te *dicht* ligt bij wat je verwacht. Dat zal niemand willen doen, omdat het natuurlijk vreemd klinkt om H te verwerpen als T doet wat je verwacht onder H . Het punt hierbij is dat er zeker verschillende kritieke gebieden te bedenken zijn die onder H kans ten hoogste α hebben, maar dat die verschillende gebieden zich niet allemaal hetzelfde gedragen als H niet waar is. Als H niet waar is wil je juist met zo groot mogelijke kans in het kritieke gebied terecht komen, en men probeert dan ook om deze zogenaamde *power* bij *gegeven* α zo groot mogelijk te maken.

Terug naar de logica van p -waardes. Fisher, een van de grondleggers van de moderne statistiek, formuleerde het als volgt [2]:

"Belief in the [null] hypothesis as an accurate representation of the population sampled is confronted by the logical disjunction: Either the hypothesis is untrue, or the value of [the test statistic] has attained by chance an exceptionally high value."

Met andere woorden: hetzij H is onjuist of er heeft zich iets heel bijzonders voorgedaan. Hoewel deze disjunctie behoorlijk overtuigend klinkt, is het in tegenstelling tot wat Fisher beweert helemaal geen logische disjunctie. Het zou namelijk best zo kunnen zijn dat de waargenomen waarde van de toetsingsgrootte T onder H^c ook *zeer onwaarschijnlijk* is. (Het hoeft natuurlijk helemaal niet zo te zijn dat de verdeling van T onder H^c zomaar bepaald kan worden, maar het gaat me hier om het principe.) Het feit dat T een extreme waarde heeft aangenomen onder H kunnen we voorlopig voor kennisgeving aannemen, want zonder verdere kennis over het gedrag van T onder een alternatief is er helemaal niets te concluderen. Als de uitkomst van T onder H^c ook extreem is, dan kunnen we alleen maar zeggen dat hetzij (1) H is waar en er heeft zich iets bijzonder voorgedaan, hetzij (2) H^c is waar en er heeft zich iets bijzonders voorgedaan. Uit deze disjunctie is, uiteraard, geen enkele conclusie te trekken want ze is feitelijk niet meer dan een tautologie. We kunnen concluderen dat de rationale achter de hele procedure gemankeerd is. Fisher zat er eigenlijk dus gewoon naast.

Een schokkend voorbeeld

De disjunctie van Fisher leidde twee decenia geleden tot een schokkende uitspraak in een geruchtmakend proces in Engeland. Sally Clark was op een gegeven moment alleen thuis met haar eerste zoon van drie maanden, toen het kind in de nacht overleed, zonder enige aanwijzing over de oorzaak van het overlijden. Dit sterfgeval werd toegeschreven aan wiegendood. Twee jaar later echter gebeurde precies hetzelfde met haar tweede zoon, op dat moment ook ongeveer drie maanden oud. Na dit tweede sterfgeval werd Sally Clark aangeklaagd en veroordeeld voor dubbele moord. Deze veroordeling hield stand in hoger beroep, en was vooral (of eigenlijk uitsluitend) gebaseerd op de berekening van de medicus (!) Sir Roy Meadow die had aangevoerd dat de kans op een dubbele wiegendood, onder de aanname van onschuld, gelijk was aan 1 gedeeld door 72 miljoen. Op basis van dit getal werd Sally Clark veroordeeld. Immers, volgens de disjunctie van Fisher is ze of schuldig of er heeft zich iets zeer bijzonders voorgedaan, namelijk een gebeurtenis met de astronomisch kleine kans van 1 op 72 miljoen.

Het getal van 1 gedeeld door 72 miljoen is overigens zeer discutabel, omdat het uitgaat van onafhankelijkheid tussen de twee gevallen van wiegendood. Echter, er is ruime eensgezindheid onder artsen dat er ook een genetische component moet zijn die samenhangt met wiegendood, en dit feit maakt de onafhankelijkheidshypothese aanvechtbaar.

Mijn punt van kritiek heeft echter niet zozeer met dat getal te maken als wel met de logica. Laten we deze situatie eens iets wiskundiger beschrijven. Laat M de gebeurtenis zijn dat Sally Clark een dubbele moord heeft begaan, en laat W de gebeurtenis zijn van een dubbele wiegendood. We schrijven E voor de gebeurtenis dat er twee gestorven kinderen zijn, en we gaan er voor het gemak even van uit dat er geen andere acceptabele verklaringen zijn dan moord en wiegendood. Deze aanname betekent dat $E = W \cup M$, en mag gezien de omstandigheden realistisch genoemd worden. Natuurlijk geldt ook dat $W \cap M = \emptyset$, zie Figuur 1.

Welnu, de instructie van Fisher luidt dat we ons moeten concentreren op $P(E|M^c)$, de kans dat E optreedt onder de aanname dat Sally Clark onschuldig is. Als deze kans te klein wordt, aldus Fisher, dan hebben we geen keus en moeten we M^c , de onschuldshypothese, verwerpen. Deze kans is gelijk aan

$$\begin{aligned} P(E|M^c) &= \frac{P(E \cap M^c)}{P(M^c)} \\ &= \frac{P(W)}{P(W) + P(E^c)}. \end{aligned} \quad (1)$$

Dat deze conditionele kans klein is wekt geen verbazing, aangezien $P(W)$ ongetwijfeld een stuk kleiner is dan $P(E^c)$, in Figuur 1 enigszins geïllustreerd door de verhoudingen.

Maar het vreemde is dat we uiteindelijk niet in het minst geïnteresseerd zijn in $P(E|M^c)$. We zijn geïnteresseerd in de kans dat Sally Clark een dubbele moord heeft begaan, gegeven het bewijs E . Deze kans is een hele andere, namelijk

$$P(M|E) = \frac{P(M \cap E)}{P(E)} = \frac{P(M)}{P(E)}.$$

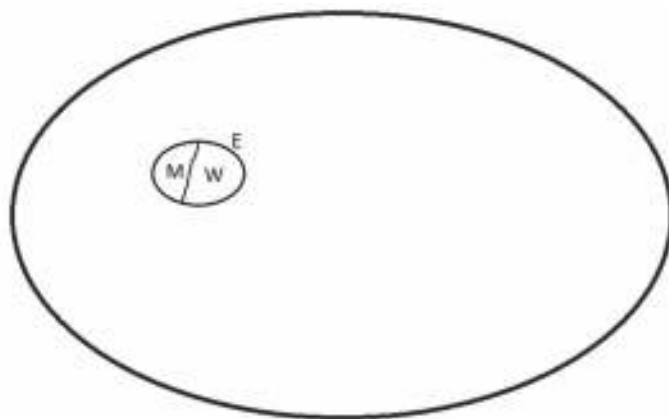
De kans dat Sally Clark onschuldig is gegeven het bewijs E is dan

$$P(M^c|E) = \frac{P(M^c \cap E)}{P(E)} = \frac{P(W)}{P(E)},$$

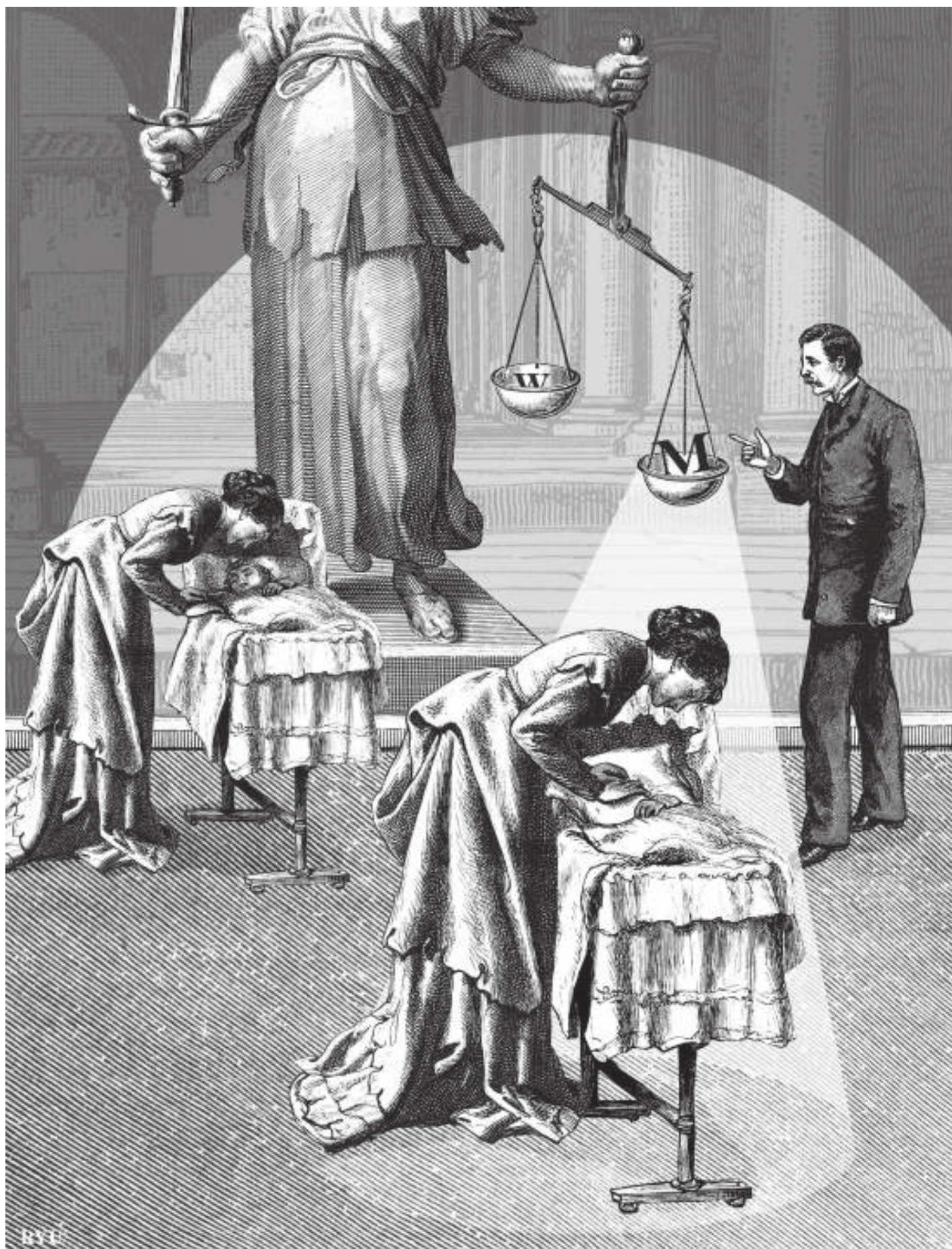
dus de kansverhouding tussen schuld en onschuld wordt volledig bepaald door de verhouding tussen $P(M)$ en $P(W)$. De berekening van Sir Roy Meadow had op deze verhouding geen betrekking, en was voor de schuldvraag dus simpelweg niet relevant. Ondanks het feit dat de kans in (1) extreem klein is, is met de beste wil van de wereld dat niet op te vatten als bewijs voor M .

Misschien dat de lezer bovenstaand argument niet helemaal overtuigend vindt vanwege het feit dat we spreken over de kans op W en de kans op M . Maar ook als je niet bereid bent om aan die kansen een betekenis toe te kennen gaat het mis. Immers, het bewijs E heeft zowel onder aanname van W als M conditionele kans 1: $P(E|W) = P(E|M) = 1$. Ook in die zin zien we dus dat het bewijs E *geen enkel onderscheid* kan maken tussen M en W . Het waargenomen bewijs is immers onder beide hypothesen even waarschijnlijk, in dit geval zelfs met een kans gelijk aan 1.

We kunnen op dit punt aangekomen dus rustig concluderen dat de procedure als voorgesteld door Fisher geen kwantificering van statistisch bewijs oplevert. Het



Figuur 1 Een Venn-diagram met alle relevante gebeurtenissen in de zaak Sally Clark.



heeft daar in feite eigenlijk weinig mee te maken. Het feit dat zich iets bijzonders heeft voorgedaan is in zichzelf nooit reden tot veel zorg. Als ik morgen de Staatsloterij win is dat ook een bijzondere gebeurtenis, en de kans dat ik win gegeven dat ik niet vals speel is erg klein. Maar dat feit impliceert natuurlijk niet dat ik waarschijnlijk gefraudeerd zal hebben.

Wat zegt een p -waarde dan wel?

Je kunt je met recht afvragen hoe het mogelijk is dat p -waardes toch als kwantificering van statistisch bewijs gezien worden. Hoe kunnen voorbeelden als zojuist gegeven aan de aandacht van al die wetenschappers zijn ontsnapt? Deze vraag heeft denk ik geen enkelvoudig antwoord, maar misschien komen we iets verder door na te gaan wat een p -waarde dan *wel* zegt.

Een p -waarde vertelt de onderzoeker wat de kans is dat onder aanname van hypothese H de uitkomst ten minste zo extreem is als wat is waargenomen. Als de p -waarde onder een van tevoren afgesproken drempel blijft, het significantieniveau α , dan vindt men de uitkomst dermate extreem onder H dat H niet langer geloofd wordt, en dus moet worden verworpen.

Ik merkte al eerder op dat er nog een ander type fout bestaat, namelijk H ten onrechte niet verwerpen. Er is geen wiskundige reden waarom het ene type fout anders behandeld zou moeten worden dan het andere type, en de asymmetrie is een keuze van 'de' wetenschap, of van verdere ethische of morele overwegingen. Het feit dat de kans op onterechte verwerping van H gecontroleerd moet worden, terwijl de kans op onterecht accepteren alleen maar zo klein mogelijk moet worden gemaakt binnen de ruimte die de eerste eis nog toelaat, duidt er op dat men bijzondere betekenis toekent aan het eerste type fout. Deze bijzondere betekenis is dat men simpelweg denkt dat α een maat voor het *bewijs* voor het complement van H is. Met die interpretatie is het logisch dat men die fout wil kunnen controleren omdat wetenschappelijk bewijs hoge standaarden vereist. Een eventueel juiste conclusie niet kunnen concluderen vanwege *gebrek aan bewijs* is minder erg dan een onterechte conclusie vanwege misleidend bewijs. In een juridische context staat H vaak voor de onschuldhypothese van de verdachte. Deze zal alleen verworpen worden als er echt bewijs is, en ook in deze situatie

wordt onterecht verwerpen van H erger gevonden dan het niet verwerpen van H terwijl H niet waar is. Dat is maatschappelijk heel begrijpelijk, en is misschien een van de redenen van de populariteit van p -waardes.

Als een onderzoeker de geschetste procedure volgt, dan weet hij of zij dat in hooguit een fractie α van de keren dat H waar was, deze ondanks dat toch wordt verworpen. Dat is een frequentistische uitspraak, die iets zegt over de kwaliteit van de procedure als geheel. Wat echter cruciaal is, is dat als het experiment eenmaal uitgevoerd is en de data verkregen, er niet zomaar een uitspraak gedaan kan worden over de kans dat je in *dat geval* de juiste beslissing hebt genomen. Een p -waarde is gericht op de procedure, terwijl statistisch bewijs zich juist op de specifiek verkregen data moet richten van een enkel experiment. Op die manier bezien richt een p -waarde zich gewoon op een andere vraag dan de vraag naar statistisch bewijs.

Een kansuitspraak over de juistheid van de beslissing kan alleen gegeven worden als je bereid en in staat bent om van tevoren vast te stellen wat de kans is dat H optreedt. In het voorbeeld van Sally Clark zoals ik dat boven beschreef lijkt dat zeker niet onredelijk. Je kunt je immers afvragen hoe groot de kans is dat een moeder haar twee kinderen ombrengt door, bijvoorbeeld, naar statistieken te gaan kijken. Maar bij veel situaties lijkt een uitspraak over de kans op H niet zinvol. Als H bijvoorbeeld de hypothese is dat een nieuw medicijn niet beter werkt dan een oud, hoe zou je dan de kans daarop moeten inschatten? In feite is het formalisme van Fisher en de hele p -waarde-technologie juist ook ontworpen om een statistische uitspraak te kunnen doen zonder daar rekening mee te moeten houden, maar we zien dat dit dus niet zo goed werkt.

Een p -waarde is dus primair een uitspraak over de procedure, en geen uitspraak die in een specifiek geval veel zegt. In het voorbeeld van Sally Clark zagen we dat om een kansuitspraak te doen over de schuldvraag gegeven het bewijs, het simpelweg onvoldoende is om de p -waarde te berekenen. Bij een gegeven realisatie van het experiment kunnen we met een p -waarde niet uitdrukken wat de kans is dat we het goed hebben gedaan, en als kwantificering van bewijswaarde zijn p -waardes

dus totaal ongeschikt. In de wetenschap is dat natuurlijk een belangrijke conclusie, maar in het recht zijn de catastrofale gevolgen van statistisch onbegrip misschien nog wel ernstiger. Als een kleine p -waarde als bewijs tegen de onschuldhypothese wordt opgevat, dan wordt de p -waarde voor bewijsdoeleinden gebruikt waar ze niet geschikt voor is.

Er is nog een gevaar bij het gebruik van p -waardes. Ik schreef al dat onderzoekers graag de p -waarde vermelden van hun resultaten. Wat men dan vaak doet is gewoon melden dat, bijvoorbeeld, de p -waarde 0,004 is. Deze uitspraak suggereert dat het significantieniveau op 0,004 gezet kan worden, maar dat is onjuist. Het significantieniveau kies je van tevoren en is een getal dat iets zegt over de kwaliteit van de gehele procedure, en als je die eenmaal hebt gekozen, dan is dat wat het is. Als je de gerapporteerde p -waarde per experiment verandert, dan pleeg je dus eigenlijk wetenschappelijke fraude omdat je een bewijswaarde claimt die niet klopt.

Paradoxen

Ik heb tot nu toe enkele argumenten gegeven tegen het gebruik van p -waardes als kwantificering van sterkte van bewijs. Het is instructief en onderhoudend om te zien wat er zou gebeuren wanneer je een dergelijke interpretatie wel toe zou staan. Ik zal met drie voorbeelden laten zien dat dit tot absurde situaties leidt. Dat is niet verwonderlijk, want als je uitgangspunt onjuist is, dan kun je alles verwachten.

Stiekem kijken

Stel een wetenschapper wil hypothese H ontkrachten. Laten we voor het gemak aannemen dat hij wil aantonen dat de succeskans van een bepaald experiment niet gelijk is aan $\frac{1}{2}$. Stel hij doet 20 experimenten en stel dat dit tot 14 successen leidt. Laten we $\alpha = 0,05$ nemen. Wat is de kans dat, onder de aanname H dat de succeskans $\frac{1}{2}$ is, de afwijking van wat we verwachten (in dit geval 10) minstens 4 is? Een kleine berekening met de binomiale verdeling laat zien dat deze kans gelijk is aan 0,115, dus te groot om H te verwerpen. Echter, de wetenschapper merkt op dat als hij 15 successen zou hebben gezien, de bijbehorende p -waarde 0,041 geweest zou zijn, en dat is wel klein genoeg om H te verwerpen. Het verwerpen van H is dus eigenlijk net niet gelukt.

De wetenschapper besluit hierop om 20 extra experimenten te doen. Stel nu eens dat die tweede serie voor hem een stuk beter verloopt, en dat hij maar liefst 19 successen ziet. Zijn gezamenlijke score is nu 33 successen in 40 experimenten, en de bijbehorende p -waarde is 0,0000423, zoals weer eenvoudig is uit te rekenen. De wetenschapper concludeert nu dat de gezamenlijke score van de twee series zodanig is dat H (ruimschoots) kan worden verworpen.

Is dit een correcte gang van zaken? Nee. Al zou de wetenschapper een tweede serie van 100.000 experimenten hebben gedaan met daarin 100.000 successen, dan nog zou hij volgens het p -waardeparadigma niet hebben mogen concluderen dat H verworpen kan worden. Waarom? Wel, de wetenschapper dient voorafgaand aan het experiment het kritieke gebied te bepalen. Dit kritieke gebied moet zodanig zijn dat de kans om er onder H toch in terecht te komen, hooguit α is. Maar aangezien de wetenschapper H al verworpen zou hebben als er na 20 experimenten aanleiding toe was geweest, was de kans om dat na 20 experimenten ten onrechte te doen al 0,05. Na de tweede serie kan die kans alleen maar groter worden, en zal dus uiteindelijk groter zijn dan de toegestane α .

Nu begrijpt natuurlijk iedereen dat een serie van 100.000 worpen met alleen maar successen bewijs *moet* zijn tegen de hypothese H dat de succeskans $\frac{1}{2}$ is. Het feit dat deze procedure dan toch niet toestaat om H te verwerpen is dan ook geen gevolg van een slechte intuïtie, maar van een ondeugdelijke procedure. Elke redelijke procedure zou dit als overweldigend bewijs tegen H moeten zien, maar de procedure met p -waardes doet dat niet. De ondeugdelijkheid van p -waardes als bewijswaarde is hiermee opnieuw geïllustreerd.

Meerdere hypotheses

Als $q \leq \alpha$ de kans voorstelt op onterecht verwerpen van H , dan zal zo'n een op de $1/q$ correcte hypotheses toch verworpen worden. Stel je wilt aantonen dat iemands favoriete kleur van invloed is op zijn of haar kans om kop te gooien met een gegeven munt. Het is eenvoudig uit te rekenen dat onder de hypothese dat de kans op kop $\frac{1}{2}$ is, de kans om 0, 1, 9 of 10 keer kop te gooien ongeveer 0,0215 is, en dus vormt $\{0,1,9,10\}$ een geschikt kritiek gebied voor iedere afzonderlijke kleur. Stel

we kiezen $1/0,0215 \approx 47$ mensen uit, die elk een andere favoriete kleur hebben, en iedereen gooit 10 keer met dezelfde munt. Er zal dan naar verwachting één persoon zijn die in dit kritiek gebied terecht komt. Als dat toevallig de persoon is die van groen houdt, dan kan de wetenschapper publiceren dat groen als favoriete kleur de kans op kop bij het gooien van een munt beïnvloedt. De hypothese H dat iemand die van groen houdt kans $\frac{1}{2}$ heeft op het gooien van kop wordt dan verworpen.

Natuurlijk is dit een anekdotisch voorbeeld, maar onderschat het niet. De neiging om alleen te publiceren als het een keertje lukt om een hypothese te verwerpen leidt tot *publication bias*, waarmee de geloofwaardigheid van de wetenschap in het algemeen in het geding komt. De problemen zijn eigenlijk zelfs nog groter dan dat. We kunnen ook de hypothese H' onderzoeken dat de succeskans $\frac{1}{2}$ is bij *alle* kleuren. Het gebied waarin iemand 0, 1, 9 of 10 keer kop ziet is nu veel te groot: de kans dat iemand van de twintig personen daarin terecht komt is ongeveer $\frac{1}{3}$ zoals je makkelijk kunt uitrekenen. Een correct en redelijk kritiek gebied wordt nu gevormd door die uitkomsten waarbij er *niemand* is die alleen maar kop of alleen maar munt gooit. Inderdaad is de kans daarop ongeveer 0,04, en daarmee dus kleiner dan het significantieniveau $\alpha = 0,05$. Maar stel nu eens dat de persoon die groen mooi vindt 9 keer kop ziet en alle anderen nooit alleen maar kop of alleen maar munt. Als we alleen maar kijken naar wat groen heeft gegooit, dan wordt de hypothese H verworpen, zoals we net zagen. Maar als we nu alle andere kleuren ook in beschouwing nemen, dan zien we dat de hypothese H' *niet* verworpen wordt. Dat is op zijn zachtst gezegd vreemd: we kunnen H' niet verwerpen, dus we verwerpen niet dat *niemand* een afwijkende succeskans heeft, maar tegelijkertijd leidt concentreren op groen ertoe dat we wel verwerpen dat groen een afwijkende succeskans heeft. Vooral voor de groene persoon is dat nogal merkwaardig: zijn eigen data is onveranderd, maar puur en alleen omdat anderen ook aan het gooien zijn geslagen moet de conclusie over groen ook aangepast worden.

Deze merkwaardige situatie illustreert andermaal dat p -waardes eigenschappen hebben die op gespannen voet staan met enkele elementaire principes waaraan statistisch bewijs zou moeten voldoen.

Eenzijdig versus tweezijdig

Stel opnieuw dat we geïnteresseerd zijn in de onbekende succeskans p van een bepaald experiment. Als we het experiment 100 keer uitvoeren en we nemen significantieniveau $\alpha = 0,05$ dan leert een eenvoudige berekening dat we de hypothese H dat $p = \frac{1}{2}$ verwerpen als het aantal keer succes minstens 61 of hoogstens 39 is. Soms echter is er reden om *eenzijdig* te toetsen. We nemen dan de hypothese H' dat $p \leq \frac{1}{2}$ en we verwerpen H' als het aantal successen te hoog is. Een korte berekening laat zien dat een geschikt kritiek gebied nu gegeven wordt door $\{59, 60, \dots, 100\}$, want de kans om onder H' in dit gebied terecht te komen is maximaal als $p = \frac{1}{2}$ en dan kleiner dan 0,05.

Welnu, wat gebeurt er nu als het aantal waargenomen successen gelijk is aan 60? In dat geval verwerpen we $p = \frac{1}{2}$ niet maar we verwerpen *wel* dat $p \leq \frac{1}{2}$. Dat is onbegrijpelijk, want $p = \frac{1}{2}$ is een veel sterkere hypothese dan $p \leq \frac{1}{2}$. Maar het is wel het gevolg van een procedure die nog steeds door het wetenschappelijk establishment wordt geaccepteerd.

Een alternatief

Is er een alternatief voor de p -waarde als maat voor statistisch bewijs? Het antwoord is ja, maar dit antwoord komt wel met een prijs. De notie van statistisch bewijs die ik hier kort wil introduceren veronderstelt namelijk dat statistisch bewijs *uitsluitend relatief* is. In plaats van te zeggen dat data E al dan niet bewijs voor H oplevert, stelt deze benadering dat je alleen kunt zeggen dat de data E bewijs voor of tegen H_1 op kan leveren ten opzichte van een andere hypothese H_2 .

Wat een *likelihood* benadering van statistisch bewijs concreet behelst, is het uitrekenen van het quotiënt

$$LR_{H_1, H_2}(E) := \frac{P(E | H_1)}{P(E | H_2)},$$

oftewel de verhouding van de kans op de geobserveerde data E onder H_1 en de kans hiervan onder H_2 . Als dit quotiënt groter is dan 1, dan ondersteunt de data H_1 ten opzichte van H_2 , en als het kleiner is dan 1, dan ondersteunt de data H_2 ten opzichte van H_1 . Als het quotiënt gelijk is aan 1 is de data neutraal en geeft de data geen manier om onderscheid te maken tussen H_1 en H_2 .

We hebben in deze bijdrage al een voorbeeld gezien van een dergelijke *likelihood*

ratio. In het voorbeeld van Sally Clark zagen we dat $P(E|W) = P(E|M) = 1$, zodat de likelihood ratio gelijk is aan 1, en de data E dus geen enkele informatie geeft over W versus M . Deze conclusie hadden we al eerder getrokken.

Waarom insisteert deze benadering op het relatief zijn van statistisch bewijs? Een eenvoudig voorbeeld helpt om dit te begrijpen. Stel we hebben een vaas met 100 ballen, allemaal wit of zwart. Hypothese H_1 zegt dat er 90 witte en 10 zwarte ballen zijn, hypothese H_2 zegt dat er 50 witte en 50 zwarte ballen zijn, en hypothese H_3 zegt dat alle ballen wit zijn. Stel we trekken 10 ballen met teruglegging, en deze 10 ballen zijn allemaal wit. Geeft deze data E bewijs voor bijvoorbeeld H_1 ? Om hier iets over te zeggen berekenen we $P(E|H_1) = (9/10)^{10}$, $P(E|H_2) = (\frac{1}{2})^{10}$ en $P(E|H_3) = 1$. We vinden dan

$$LR_{H_1, H_2}(E) \approx 357$$

en

$$LR_{H_1, H_3}(E) \approx 0,349.$$

De data ondersteunt H_1 meer dan H_2 , maar H_3 meer dan H_1 . De vraag of de data bewijs voor H_1 oplevert is dus simpelweg niet te beantwoorden, omdat het ervan afhangt waar je H_1 mee wilt vergelijken.

Ook in een juridische context is het ontzettend belangrijk om het bewijs in een bepaalde zaak te beschouwen vanuit de schuldhypothese, maar ook vanuit de onschuldhypothese, dit ter voorkoming van een tunnelvisie zoals we in het voorbeeld van Sally Clark al hebben gezien. Het gebruik van een likelihood ratio in die context is inmiddels gelukkig standaard.

Is een likelihood ratio nu een goede afspiegeling van het bewijs voor H_1 ten opzichte van H_2 ? We kunnen hier enig inzicht in krijgen door na te gaan of de bezwaren tegen p -waardes die ik heb aangedragen bij likelihood ratio's niet bestaan. Allereerst merk ik op dat een likelihood ratio alleen afhangt van de waargenomen data E , dus het eerste bezwaar tegen p -waardes dat ik aanvoerde geldt hier niet. Het gaat immers precies om de kans op E gegeven de twee hypotheses.

Wat betreft het 'stiekem kijken': dat bezwaar valt weg bij het gebruik van likelihood ratio's. De onderzoeker kan gerust zijn of haar gehele data gebruiken, en er is geen reden om bijzondere maatregelen te nemen omdat hij of zij halverwege het

proces al eens eerder naar de data heeft gekeken. Natuurlijk kan de onderzoeker proberen om net zo lang door te gaan met experimenten tot de likelihood ratio de gewenste kant op wijst. Maar dat is wezenlijk anders dan het stiekem kijken wat ik eerder beschreef. Bij het stiekem kijken speelt de onderzoeker vals doordat hij geen volledige openheid geeft over de statistische procedure zoals deze is uitgevoerd. De bewijskracht (in termen van de p -waarde) hangt af van eerdere afspraken die niet te controleren zijn, en waarbij ook te goeder trouw makkelijk fouten worden gemaakt. Als een onderzoeker stopt als de likelihood ratio de gewenste kant op wijst, dan is het simpelweg zo dat de bewijswaarde is wat hij is. Dat is dus niet vals spelen, want het is echt waar wat de likelihood ratio zegt en iedereen kan dat controleren. Het aardige van likelihood ratio's is overigens dat als een onderzoeker H_1 met H_2 wil vergelijken, de kans dat de likelihood ratio *ooit*, na hoeveel pogingen ook, meer dan een factor k de verkeerde kant op zal wijzen, kleiner is dan $1/k$.

Het probleem dat bij de beschouwing van meerdere hypotheses ontstond, bestaat simpelweg niet bij likelihood ratio's. Natuurlijk kan een likelihood ratio de verkeerde kant op wijzen, en bijvoorbeeld kleiner dan 1 zijn terwijl toch H_1 waar is. Dat is geen fout van de methodiek maar een logisch gevolg van het feit dat het om kanstheoretische zaken gaat waarin bewijs gewoon 'toevallig' de verkeerde kant kan op wijzen. Dat is de natuur der dingen en kan en hoeft niet ondervangen te worden.

De paradox die we tegenkwamen bij het verschil tussen één- versus tweezijdig toetsen ten slotte, bestaat bij likelihood ratio's ook niet. Wat we wel zien, en dat zou als zwakte maar net zo goed als kracht gezien kunnen worden, is dat we bij het bepalen van een likelihood ratio geen samengestelde hypothese kunnen nemen zoals $H': p \leq \frac{1}{2}$. We moeten $H: p = \frac{1}{2}$ vergelijken met een specifieke keuze voor het alternatief.

In de praktijk wordt het werken met een likelihood ratio vaak ingebed in de zogenaamde *odds*-vorm van de regel van Bayes:

$$\frac{P(H_1|E)}{P(H_2|E)} = \frac{P(E|H_1)}{P(E|H_2)} \times \frac{P(H_1)}{P(H_2)},$$

waarin de *posterior odds* $P(H_1|E)/P(H_2|E)$ uitgedrukt worden als het pro-

duct van de likelihood ratio en de *prior odds* $P(H_1)/P(H_2)$. Om deze reden wordt het werken met de likelihood ratio ook wel 'Bayesiaanse kansrekening' genoemd, maar dat is feitelijk nogal vreemd, want kansrekening impliceert de regel sowieso. Deze naamgeving is bovendien des te ongelukkiger omdat ze verwarring met Bayesiaanse statistiek in de hand werkt. Wel is het zo dat het gebruik van de regel doorgaans impliceert dat kansen subjectief geïnterpreteerd dienen te worden en niet frequentistisch. Statistisch bewijs is in deze visie een kwestie van informatie: als er meer informatie beschikbaar is, verandert de waarde van het bewijs, en zal de likelihood ratio dus anders worden.

Over deze interpretatie, de eigenschappen van de likelihood ratio en het gebruik ervan is ongelooflijk veel te vertellen. In 2020 publiceer ik hier samen met Klaas Slooten een boek over [3]. Hopelijk helpen al deze inspanningen om het gebruik van p -waardes als bewijs terug te dringen, en om met andere ogen naar statistisch bewijs te gaan kijken. Het zou heel goed zijn als de p -waarde uit het curriculum van de middelbare school, hogeschool en universiteit gehaald zou worden, of op zijn minst zou worden genuanceerd. Ik begrijp natuurlijk dat dit niet op heel korte termijn zal gebeuren, en dat het voorlopig nog zo zal zijn dat we leerlingen en studenten methodes meegeven die niet geschikt zijn voor de geclaimde doeleinden. Mijn advies is om dan zo goed en zo kwaad als het gaat het belang van deze p -waardes te nuanceren. Zolang de procedure op het examen gevraagd kan worden moeten we uitleggen *hoe* het werkt. Maar het lijkt me dat we best kritisch mogen zijn over *wat* de procedure doet. De enige route die ik niet acceptabel vind, is net doen alsof er niets aan de hand is. ☞

Referenties

- 1 J.P.A. Ioannidis, Why Most Published Research Findings are False, *PlosMed* 2(8) (2005), e124.
- 2 R.A. Fisher, *Statistical Methods for Research Workers*, Vol. 13, Oliver and Boyd, 1925.
- 3 R. Meester en K. Slooten, *Theory and Philosophy of Statistical Evidence in Forensic Science*, Cambridge University Press, verwacht in 2020.

Rob Tijdeman

Mathematisch Instituut
Universiteit Leiden
tijdeman@math.leidenuniv.nl

Reis naar het bewijs

Lineaire vormen en de vergelijking van Catalan

In onderstaand verhaal laat Rob Tijdeman zien hoe een succes het gevolg was van een lange reeks opeenvolgende gebeurtenissen waarbij hij het geluk had telkens met een probleem geconfronteerd te worden op een moment waarop hij voldoende kennis had om het op te lossen. Waarschijnlijk komt zo'n proces veel vaker voor.

Mijn wiskundestudie

In 1961 begon ik met een studie wiskunde aan de Universiteit van Amsterdam. Het was in die tijd een zeer sterk bemand instituut met onder anderen Beth, De Groot, Hemelrijk, Heyting, Kuiper, Lauwerier, Oort, Popken en Van Wijngaarden. In mijn eerste studiejaar schoof ik aan bij een seminarium van Beth en Heyting over de Turing-machine waarvoor volgens de aankondiging geen voorkennis vereist was. Het bleek voor kandidaten (vierdejaars en ouder) bedoeld te zijn en na een paar weken moest ik afhaken. In mijn vierde studiejaar werd een dergelijk seminarium, waarbij de deelnemers om beurten een deel van de theorie behandelden, aangekondigd onder leiding van Popken en Jager. Ditmaal kon ik het helemaal volgen. Jager was in 1963/64 een half jaar bij Turán in Boedapest geweest en het seminarium betrof de theorie van Turán's hoofdstellingen en open problemen op dat gebied. Het lukte me een elementair probleem van Erdős en Turán over machtsommen op te lossen en dit resulteerde in een scriptie voor mijn doctoralexamen en mijn eerste artikel [11]. Het

daaropvolgende jaar werd ik assistent bij Jager wat in die tijd een 0,5 fte-functie was waarvoor je hand- en spandiensten moest verrichten. In 1967 deed ik doctoraalexamen en kreeg ik een aanstelling als wetenschappelijk medewerker met een kleine onderwijstaak en de opdracht promotieonderzoek te verrichten.

Mijn promotieonderzoek

Dit betrof nulpunten van exponentiaalpolynomen $f(z) := \sum_{k=1}^l P_k(z) e^{\omega_k z}$ waarbij $\omega_k \in \mathbb{C}$ en $P_k(z)$ een polynoom van graad $\rho_k - 1$ is voor $k = 1, 2, \dots, l$ en z een complexe variabele. In 1960 had Turán bewezen dat het aantal nulpunten van $f(z)$ in een vierkant met zijdelengte L niet groter is dan

$$6L\Delta + n \log\left(2 + \frac{n}{\delta L}\right) + \log(2n)$$

waarbij $\Delta = \max_k |\omega_k|$, $\delta = \min_{k \neq j} |\omega_k - \omega_j|$, $n = \sum_{k=1}^l \rho_k$ en hij aannam dat de P_k 's constanten zijn. Vier jaar later bewezen Dancs en Turán een dergelijk resultaat zonder laatstgenoemde beperking en Coates en Van der Poorten bewezen verwante

resultaten. Door combinatie van Jensens ongelijkheid en Turán's eerste hoofdstelling lukte het me om resultaten te bewijzen die de bovengrens

$$3(n-1) + 3L\Delta$$

impliceren [12]. Het volgt uit een asymptotisch resultaat van Pólya uit 1920 dat dit resultaat op een constante factor na best mogelijk is. Merk op dat de afhankelijkheid van δ uit de bovengrens verdwenen is.

Ik werd uitgenodigd voor een getaltheorieconferentie in Oberwolfach in mei 1968. Daar ontmoette ik vele getaltheoretici voor het eerst, zoals Pál Turán en zijn vrouw Vera Sós, Alan Baker, John Coates, Hugh Montgomery, Harold Stark, Wolfgang Schmidt, Theodor Schneider, Harold Davenport, Wilhelm Ljunggren, Louis Mordell. Overigens de drie laatstgenoemden ook voor het laatst. Tijdens deze conferentie vertelden Baker, Coates en Stark over hun nieuwe resultaten waarover later meer. In die tijd ontwikkelde Wolfgang Schmidt zijn Subspace Theorem. Het was een gouden tijd voor de theorie van diofantische approximaties. Voor mij was belangrijk dat Coates me meenam naar de bibliotheek om een stelling in een boek van Gelfond aan te wijzen waarin bovengenoemde δ nog een rol speelde [3]. Volgens John kon die met mijn stelling verwijderd worden.

Hij had zelf dit kunnen uitwerken. Ik ben hem nog steeds dankbaar dat hij mij die kans gaf. Het resulteerde in een artikel waarin stellingen van het volgende type bewezen worden:

Stel zowel de getallen $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ als de getallen η_1, η_2, η_3 zijn lineair onafhankelijk over de rationale getallen. Dan heeft het lichaam van rationale getallen uitgebreid met de twaalf getallen $\alpha_k, e^{\alpha_k \eta_j}$ ($k, j = 0, 1, 2$) ten minste transcendentiegraad 2. [13]

Tijdens de conferentie vroeg Turán me het volgende academische jaar naar Boedapest te komen. Volgens mijn promotoren, Popken en Jager, mocht ik deze kans niet missen. Met onder anderen Erdős, Turán en Rényi was Boedapest toen een centrum voor getaltheorie, discrete wiskunde en kansrekening. Mijn vrouw was weinig enthousiast. Na twee en een half jaar op een inwoning geleefd te hebben, hadden we juist die maand een flat gekregen, met geiser, toilet en douche! Toch wilde ze met me meegaan. Met dank aan NWO die op korte termijn een beurs beschikbaar stelde, reden we in september 1968 naar de hoofdstad van Hongarije, achter het ijzeren gordijn, de laatste vijftig kilometer tussen de militaire voertuigen die terugkeerden



Pál Turán met zijn vrouw Vera Sós, Moskou, 1966

uit Tsjecho-Slowakije na het einde van de Praagse lente. In Boedapest woonden we weer bij mensen in huis. Hier voltooide ik mijn proefschrift waarop ik in november 1969 promoveerde.

Verblijf aan Institute of Advanced Study

Kort na mijn promotie meldde Kuiper vanuit Princeton dat er het volgende academische jaar een speciaal getaltheorieprogramma zou zijn aan het Institute of Advanced Study en dat dit voor mij een gelegenheid was die ik niet mocht missen. Popken drong erop aan dat ik zou gaan. Tot mijn grote verdriet overleed hij in augustus 1970. Ik kreeg een Fulbrightbeurs en een maand later vlogen mijn vrouw, onze half jaar oude dochter en ik naar New York en vandaar naar Princeton.

Het verblijf in het complex van het Institute of Advanced Study in Princeton was heel anders van karakter dan dat in Boedapest. Hier hadden we een eigen woning en waren we met veel gezinnen die hier ook een half of heel jaar doorbrachten. Hier had ik de tijd om een aantal collega's goed te leren kennen: Alan Baker, Enrico Bombieri, Sarvadaman Chowla, Christopher Hooley, Hugh Montgomery, Wolfgang Schmidt, Atle Selberg, Jean-Paul Serre, Eduard Wirsing. Het belangrijkste voor mij was K. Ramachandra. Hij hielp me de methode van Baker te doorgronden (zie kader). Ramachandra vertelde me ook dat je eerste vijf artikelen de belangrijkste zijn en dat de rest er eigenlijk niet veel toe

Foto: Archives of the Mathematisches Forschungsinstitut Oberwolfach, Konrad Jacobs, Erlangen

Lineaire vormen in logaritmen en transcendentie

Een complex getal heet *algebraïsch* als het nulpunt is van een niet-triviaal polynoom met gehele coëfficiënten en anders *transcendent*. De getallen $\sqrt{2}$ en i zijn algebraïsch, want ze zijn nulpunt van respectievelijk $z^2 - 2$ en $z^2 + 1$. De transcendentie van e werd in 1873 door Hermite bewezen. Met een verwante methode bewees Lindemann in 1882 dat e^c transcendent is als $c \neq 0$ algebraïsch is. Dit impliceert de transcendentie van $c \neq 0$ als e^c algebraïsch is. In het bijzonder volgt de transcendentie van π vanwege de relatie $e^{\pi i} = -1$.

In 1934 bewezen Gelfond en Schneider beiden dat a^c transcendent is als a en c algebraïsche getallen zijn met $a \neq 0, 1$ en c irrationaal. Voorbeelden zijn $2^{\sqrt{2}}$, waarvan transcendentie al in 1930 door Kuzmin bewezen was, en $e^\pi = (-1)^{-i}$. Wegens $a^{\log b / \log a} = b$ kan het dus niet zo zijn dat $a(\neq 0, 1), b$ en $\log b / \log a (\notin \mathbb{Q})$ alle algebraïsch zijn. Met hun stelling is dus equivalent dat $\log b / \log a$ voor algebraïsche getallen a, b met $a, b \neq 0, 1$ hetzij rationaal hetzij transcendent is.

Een *transcendentiemaat* is een functie die een ondergrens in termen van n en H aangeeft voor de afstand tussen een vast transcendent getal en een algebraïsch getal waarvan het minimaalpolynoom graad n heeft en alle coëfficiënten in absolute waarde kleiner dan H zijn. Het geeft dus aan hoe dicht je een transcendent getal met algebraïsche getallen kunt benaderen. In het door Coates aan mij getoonde boek leidt Gelfond

transcendentiematen af voor bovengenoemde a^b en $\log b / \log a$. Baker generaliseerde dit tot producten $e^{b_0 a_1^{b_1} a_2^{b_2} \dots a_n^{b_n}}$ en lineaire vormen $b_0 + b_1 \log a_1 + \dots + b_n \log a_n$ waarbij $a_1, \dots, a_n$ en $b_0, \dots, b_n$ algebraïsche getallen zijn. Hij bewees dat zulke lineaire vormen in logaritmen van algebraïsche getallen hetzij 0 hetzij niet heel erg klein zijn. Verder toonde hij aan hoe hiermee onder generieke voorwaarden bovengrenzen gegeven kunnen worden voor de geheeltallige oplossingen x, y van de Thue-vergelijking $F(x, y) = m$ waarbij F een homogeen polynoom van graad ≥ 3 en m een geheel getal $\neq 0$ is, en voor de hyperelliptische vergelijking $y^m = f(x)$ waarbij $m \geq 2$ een geheel getal en f een polynoom met gehele coëfficiënten is met ten minste twee verschillende nulpunten als $m \geq 3$ en ten minste drie verschillende nulpunten als $m = 2$. Coates bewees p -adische versies van Bakers resultaten. De eindigheid van het aantal oplossingen was in deze gevallen al eerder bewezen door Thue, Siegel en Mahler, maar met hun aanpak konden geen bovengrenzen voor de oplossingen worden afgeleid. Een van de meest spectaculaire toepassingen van de lineaire-vormen-methode was het bewijs dat er niet meer imaginair kwadratische getallenlichamen met klassegetal 1 bestaan dan de negen reeds lang bekende, overigens een resultaat dat Stark onafhankelijk van Baker ongeveer gelijktijdig met een methode van Heegner bewees. Voor zijn resultaten kreeg Baker in 1970 de Fieldsmedaille. Zie voor zijn methode [1] en [5].

doet. Financieel gezien zou dat ook voor mij opgaan.

Ik leerde veel in Princeton, maar kreeg weinig klaar. Iemand vertelde me dat dit meer voorkomt. Je hebt het gevoel: “Nu verkeer ik onder ideale omstandigheden, nu gaat het gebeuren.” Maar goede ideeën kun je niet afdwingen. Een morele opper kreeg ik toen ik werd uitgenodigd een voordracht te geven in State College. Daar leerde ik Dale Brownawell kennen die in zijn proefschrift een resultaat van R. Spira gebruikt had waarvan later het bewijs fout bleek te zijn. Door in plaats daarvan mijn nulpuntenstelling te gebruiken was zijn proefschrift gered.

Aanstelling in Leiden

Tijdens mijn verblijf in Princeton kreeg ik het bericht dat ik in Leiden tot lector was benoemd. Kort daarna werd aan lectoren het promotierecht gegeven. Vanwege de dood van Popken en mijn interesse in transcendentie vroeg mijn studievriend Piet Cijssouw of hij bij me kon promoveren; hij had daarvoor een jaar vrij gekregen. In een hoog tempo leidde hij de ene na de andere transcendentia af en een jaar later promoveerde hij bij mij, terwijl ik daarvoor nog nooit in een promotiecommissie had gezeten en de gebruiken als de commissie zich terugtrekt niet kende. Zelf was ik in deze periode zeer productief waarbij ik een aantal keren de theorie over lineaire vormen toepaste. Daarmee

verbeterde ik schattingen van Erdős voor de afstand tussen opeenvolgende getallen die zijn samengesteld uit een verzameling vaste priemgetallen, en verkreeg ik samen met Ramachandra en zijn leerling Tarlok Shorey schattingen in verband met een ook nu nog open vermoeden van Grimm (zie kader).

Een belangrijke observatie betrof de eenvoudige Thue-vergelijking $ax^n - by^n = m$ met a, b, m constant en ongelijk aan 0. Zoals eerder aangegeven kunnen voor gegeven a, b, m, n met $n \geq 3$ door toepassing van lineaire vormen bovengrenzen voor x, y worden afgeleid. De voor de hand liggende corresponderende ongelijkheid hierbij is

$$|\log(a/b) + n \log(x/y)| < cy^{-n}$$

voor een constante c . Bakers theorie geeft dat het linker lid groter moet zijn dan $y^{-c' \log n}$ voor een constante c' . Door beide ongelijkheden te combineren vinden we $n < c'' \log n$. Hieruit volgt een bovengrens voor n . De theorie over lineaire vormen maakte het dus mogelijk om ook de exponent n af te schatten!

In deze periode kreeg ik nog te maken met een opmerkelijke ingreep van een staatssecretaris. Deze hield mijn benoeming tot hoogleraar tegen, omdat ik als 31-jarige onvoldoende levenservaring zou hebben. Dit betrof al zulke voorstellen van mensen die nog geen 35 jaar waren. Het jaar daarop, toen er nieuwe salarisschalen waren, kon de benoeming wel doorgaan.

De vergelijking van Catalan

Toen ik ergens het vermoeden van Catalan tegenkwam dat $8 = 2^3$ en $9 = 3^2$ de enige opeenvolgende positieve gehele getallen zijn die beide een zuivere macht zijn, zette dat me aan het nadenken. De corresponderende diofantische vergelijking is $x^m - y^n = 1$. De vergelijking bleek zowel voor $m \leq 4$ als voor $n \leq 4$ al opgelost te zijn.

Het is daarom zonder verlies van algemeenheid dat ik in het vervolg aanneem dat m en n oneven priemgetallen zijn. Toepassing van Bakers schatting op de voor de hand liggende ongelijkheid

$$|m \log x - n \log y| < \frac{1}{y^n}$$

geeft geen nieuwe informatie. We kunnen echter ontbinden:

$$y^n = (x-1)(x^{m-1} + x^{m-2} + \dots + 1)$$

waarbij de grootste gemene deler van de twee factoren rechts een deler van m is. Dat houdt in dat $x-1$ op een mogelijke factor m na zelf een n -de macht is. Evenzo is $y+1$ op een mogelijke factor n na een m -de macht. Stel $n < m$. Het andere geval gaat analoog. Als een van beide ggd's gelijk aan 1 is, volgt als boven dat voor zekere constanten c_1, c_2 geldt dat $n < c_1 (\log m)^{c_2}$. De moeilijkheid treedt op als beide ggd's ongelijk aan 1 zijn. De oplossing voor dit probleem kwam pas in me op toen we ontspannen met vakantie waren in Spanje en

Het vermoeden van Grimm

Een vermoeden van C.A. Grimm [4] is dat als $n+1, n+2, \dots, n+g$ alle samengesteld zijn, er g priemgetallen $p_1, p_2, \dots, p_g$ bestaan zó dat $p_j | n+j$ voor $j = 1, 2, \dots, g$. Bijvoorbeeld kunnen we voor 24, 25, 26, 27, 28 als priemdelers respectievelijk 2, 5, 13, 3, 7 kiezen. Het vermoeden is nog open.

De beginstappen zijn elegant. Eerst passen we een stelling van Philip Hall uit 1935 toe, die wel de huwelijksstelling wordt genoemd, en die als volgt kan worden geformuleerd:

Op een datingsite heeft elk persoon uit een verzameling A een aantal personen uit een verzameling B aangegeven waarmee hij/zij wel wil daten. Dan kan aan de personen uit A onderling verschillende personen uit B worden toegekend als en alleen als voor elke k geldt dat het totale aantal personen dat door welke k personen uit A ook genoemd is ten minste gelijk is aan k .

Het is duidelijk dat deze voorwaarde nodig is. Het punt is dat deze voorwaarde ook voldoende is.

In onze toepassing is $A = \{n+1, n+2, \dots, n+g\}$, is B de verzameling priemgetallen en kiest elk getal uit A zijn priemde-

lers. Als dan een toekenning zoals Grimm dat vraagt onmogelijk is, zijn er kennelijk getallen $1 \leq i_0 < i_1 < \dots < i_k \leq g$ zó dat $(n+i_0)(n+i_1) \dots (n+i_k)$ niet meer dan k priemdelers heeft. Kies voor elk van die priemgetallen p het getal $n+j$ ($1 \leq j \leq g$) dat p tot de hoogste macht deelt. Dan is er een getal $n+j$ dat niet gekozen wordt, wat betekent dat elke priemdelers van $n+j$ nog een ander getal $n+h$ ($1 \leq h \leq g$) ten minste tot dezelfde macht deelt. Die priemmacht deelt ook het verschil van $n+h$ en $n+j$ en is dus ten hoogste g . Omdat er niet meer dan k priemdelers zijn, volgt dat $n < n+j \leq g^k < g^g$, een resultaat van Grimm zelf. Erdős en Selfridge bewezen het iets scherpere $g > c \log n$ voor een constante $c > 0$, Ramachandra gebruikte Bakers methode om nog een factor kleiner dan $(\log \log n)^{1/2}$ te winnen. Cijssouw en ik bewezen dat $g > c (\log n)^2 / (\log \log n)^6$ en vervolgens Ramachandra, Shorey en ik dat $g > c (\log n)^3 / (\log \log n)^3$ waarbij Shorey een nieuwe schatting voor lineaire vormen introduceerde. Zie [8]. Het laatstgenoemde resultaat houdt in dat Grimms vermoeden waar is als Cramér's vermoeden waar is dat de afstand tussen opeenvolgende priemgetallen p en q voor zekere $c > 0$ nooit groter is dan $c(\log p)^2$. Maar ook dat vermoeden is nog open.

ik me even teruggetrokken had. Stel bijvoorbeeld dat

$$x-1 = m^{-1}\rho^n, y+1 = n^{-1}\sigma^m \quad (\rho, \sigma \in \mathbb{Z}).$$

Dan zou de ongelijkheid

$$|n \log n - m \log m + mn \log(\rho\sigma)| < \frac{3m^2}{\rho^n}$$

wellicht wat opleveren. Als het een beetje meezat zou ook hier volgen dat $n < c_1(\log m)^{c_2}$ met wellicht andere constanten c_1, c_2 . Als n zo klein was zouden we hem wellicht als constante kunnen opvatten en een lineaire-vorm-afschatting kunnen toepassen op de lineaire vorm

$$\left| n \log n + m \log \frac{p^{-1}\rho^n + 1}{\sigma^n} \right| < \frac{2n^2}{\sigma^p}.$$

Dat zou leiden tot een ongelijkheid $m < c_3(\log m)^{c_4}$ voor constanten c_3, c_4 . Zo zou volgen dat m en daarmee n begrensd zijn. Vervolgens zouden we voor elk resterend paar m, n een hyperelliptische vergelijking $y^n = x^m - 1$ hebben en met de bekende Bakerse theorie bovengrenzen voor x en y krijgen. Zo precies lukte het natuurlijk niet in Spanje, maar het is wel opmerkelijk dat het idee me in gedachten schoot toen ik me ontspande. Weer terug in Nederland bleek dat ik wel een uitbreiding van de beschikbare lineaire-vorm-ongelijkheid nodig had om mijn plan uit te voeren. Gelukkig bleek het mogelijk Bakers ongelijkheid zo te verfijnen dat het argument kloppend gemaakt kon worden. Van een 130 jaar oud vermoeden had ik aangetoond dat alle oplossingen onder een te berekenen grens moesten liggen, zie [14] of [10].

Latere ontwikkelingen

Ik deed geen pogingen om de bovengrens uit te rekenen, wetende dat deze heel erg groot zou zijn. Kort daarna bereken-



Preda Mihăilescu

de Michel Langevin met mijn methode dat $m, n < 10^{107}$ en

$$|x^m|, |y^n| < 10^{10^{10^{320}}}.$$

Deze grens werd in stappen verbeterd. Zo bewees Mignotte in 1992 dat $m, n < 1,31 \cdot 10^{18}$. Anderzijds bewezen Mignotte en Roy 1995–1997 dat $\min(m, n) \geq 10^5$. Het gat tussen onder- en bovengrens bleef te groot om te hopen het met computerberekeningen te kunnen overbruggen. Een nieuwe aanpak was nodig. Die werd ontwikkeld door Preda Mihăilescu met behulp van de theorie van cyclotomische lichamen. In 1999 bewees hij

$$m^{n-1} \equiv 1 \pmod{n^2}, \quad n^{m-1} \equiv 1 \pmod{m^2}.$$

Dit stelde Mignotte in staat om de gren-

zen te verscherpen tot $10^7 \leq \min(m, n) \leq 7,2 \cdot 10^{11}$, $\max(m, n) \leq 7,8 \cdot 10^{16}$. Eind 2001 zond Mihăilescu een manuscript met een volledig bewijs van het vermoeden van Catalan naar Yuri Bilu. Deze herschreef het bewijs zodat het beter toegankelijk werd. Aanvankelijk speelden lineaire vormen nog een rol [6], maar uiteindelijk wist Mihăilescu het bewijs zo aan te passen dat er geen lineaire vormen of computers meer aan te pas kwamen [7]. Voor een goede beschrijving van alle ontwikkelingen rond het vermoeden van Catalan, zie [2].

Overigens zijn er nauwelijks toepassingen van de Catalan-vergelijking. Dat ligt anders voor een andere toepassing van lineaire vormen op exponentiaalvergelijkingen, de stelling van Schinzel en mij [9]. Deze zegt:

Als een polynoom $P(x)$ met rationale coëfficiënten ten minste twee verschillende nulpunten heeft, dan bestaat een constante $c(P)$ zó dat de vergelijking $y^m = P(x)$ met $x, y \in \mathbb{Z}, |y| > 1$ impliceert dat $m < c(P)$.

Aanvankelijk was ook hier de bovengrens voor m zo groot dat de schatting niet gebruikt kon worden voor het bepalen van alle oplossingen m, x, y van een hyperelliptische vergelijking. Maar nadat Benne de Weger [15] en anderen erin geslaagd waren een idee van Baker en Davenport om de bovengrens voor m ruwweg door zijn logaritme te vervangen hadden gegeneraliseerd, konden bovengrenzen voor m teruggebracht worden tot een paar honderd en was het in bepaalde gevallen mogelijk alle oplossingen te bepalen. Daarnaast zijn er tegenwoordig Chabauty en modulaire methoden beschikbaar waarmee verwante exponentiaalvergelijkingen opgelost kunnen worden. $\square$

Referenties

- 1 A. Baker, *Transcendental Number Theory*, Cambridge University Press, 1975.
- 2 Y.F. Bilu, Y. Bugeaud en M. Mignotte, *The Problem of Catalan*, Springer, 2014.
- 3 A.O. Gelfond, *Transcendental and Algebraic Numbers*, Dover Publ., 1960.
- 4 C.A. Grimm, A conjecture on consecutive composite numbers, *Amer. Math. Monthly* 76 (1969), 1126–1128.
- 5 D. Masser, Alan Baker 1939–2018, *Notices AMS* 66(1) (2019), 32–35.
- 6 P. Mihăilescu, Primary cyclotomic units and a proof of Catalan's conjecture, *J. reine angew. Math.* 572 (2004), 167–195.
- 7 P. Mihăilescu, On the class groups of cyclotomic extensions in the presence of a solution to Catalan's equation, *J. Number Th.* 118 (2006), 123–144.
- 8 K. Ramachandra, T.N. Shorey en R. Tijdeman, On Grimm's problem relating to factorisation of a block of consecutive integers, *J. reine angew. Math.* 273 (1975), 109–124.
- 9 A. Schinzel en R. Tijdeman, On the equation $y^m = P(x)$, *Acta Arith.* 31 (1976), 199–204.
- 10 T.N. Shorey en R. Tijdeman, *Exponential Diophantine Equations*, Cambridge University Press, 1986.
- 11 R. Tijdeman, On a problem of Erdős and Turán, *Indag. Math.* 28 (1965), 374–383.
- 12 R. Tijdeman, On the number of zeros of general exponential polynomials, *Indag. Math.* 33 (1971), 1–7.
- 13 R. Tijdeman, On the algebraic independence of certain numbers, *Indag. Math.* 33 (1971), 146–162.
- 14 R. Tijdeman, On the equation of Catalan, *Acta Arith.* 29 (1976), 197–209.
- 15 B.M.M. de Weger, *Algorithms for Solving Diophantine Equations*, CWI-Tract 65, CWI Amsterdam, 1989.

Wieb Bosma

IMAPP

Radboud Universiteit Nijmegen

bosma@math.ru.nl

Stoffelijke resten tastbare herinneringen aan wiskundigen

Grafwandeling in Göttingen



Ooit was Göttingen de onbetwiste wiskundehoofdstad van de wereld. Veel huizen laten zien welke beroemdheden er woonden.



Prominent in de stad op het centrale marktplein staat de befaamde Ganzenhoedster, die zich het zoenen door alle jonge Doctors van de universiteit moet laten welgevallen. Iets terzijde staat Georg Christoph Lichtenberg (1742–1799), ten voeten uit in brons gegoten. Uit Albanees brons dat werd verkregen door het omsmelten van beelden van Lenin, Stalin en Hoxha. Elders in de stad, bij de universiteitsbibliotheek, zit ook nog een bronzen Lichtenberg bij opengeslagen boeken. Experimentalphysiker, Mathematiker, Astronom, zegt een begeleidend bordje. Waarom is hij en niet Gauss hier de meest geëerde wiskundige? Een atheïstische dwerg met een bochel en een seksleven waarvoor je tegenwoordig in de gevangenis zou komen, die aan de wiskunde weinig origineels heeft bijgedragen, zo werd hij wel omschreven. Nu was hij sinds 1769 hoogleraar in de experimentele natuurkunde (de fractale Lichtenbergfiguren die elektrische ontladingen vormen zijn nog naar hem vernoemd), maar hij schreef en doceerde wel over kansrekening, meetkunde, integraalrekening. Beroemd is hij in Duitsland echter vooral als schrijver van aforismen, als satiricus, fan en uitlegger van de gravures van William Hogarth, en ook als onderwerp van een geromantiseerde beschrijving (uit 1993, door Gert Hofmann) van zijn verhouding met een 'bloemenmeisje' waarmee hij van haar dertiende tot haar dood op achttienjarige leeftijd samenwoonde; Lichtenberg zelf was toen bijna 40.

De aforismen schreef hij in Kladboeken (die mij deden denken aan de Ideeën van Multatuli), gepubliceerd na zijn dood (behoudens een dubieus deel). Ze variëren van grapjes als “Der Esel kommt mir vor wie ein Pferd ins Holländische übersetzt” tot overpeinzingen als “Ist es nicht sonderbar, daß die Menschen so gerne für die Religion fechten, und so ungerne nach ihren Vorschriften leben?” en ook zelfkritiek: “Ich hatte in meinen Universitätsjahren viel zu viel Freiheit, und leider etwas überspannte Begriffe von meinen Fähigkeiten, und schob daher immer auf, und das war mein Verderben.” Tenslotte was “Ein Grab ist doch immer die beste Befestigung wider die Stürme des Schicksals” een goede aansporing op zoek te gaan naar zijn graf. Aan de opschriften op de overigens identieke kruisen op zijn graf en dat van zijn vrouw, zien we dat zij 17 jaar jonger was dan hij, en hem nog 49 jaar heeft overleefd.



Op deze Bartholomäus-begraafplaats vinden we nog meer interessante wiskundigen: Kästner (rechtsboven), Dirichlet (onder) en Clebsch (links). Abraham Gott-helf Kästner (1719–1800) was leermeester van Lichtenberg en voorganger van Gauss, en werd ook bekend als schrijver van epigrammen; Gauss omschreef hem als “de beste dichter onder de wiskundigen en de beste wiskundige onder de dichters”. Peter Gustav Lejeune Dirichlet (1805–1859; de familienaam verwijst naar een plaats in België, ‘de Richelette’) was in 1855 de opvolger als hoogleraar van Gauss in Göttingen, en groot kenner van diens werk. Hij werkte lang in Berlijn, waar hij was getrouwd met de begaafde Rebecca Mendelssohn Bartholdi. Zij overleed plotseling, 47 jaar oud. Hij bezweek een half jaar later aan de gevolgen van een hartaanval. Een steenworp verder ligt Rudolf Friedrich Alfred Clebsch (Konigsbergen 1833–Göttingen 1872). Met een portret in reliëf, inclusief de karakteristieke baard, en het opschrift Mathematiker. Geen spoor van zijn vrouw, met wie hij 4 zonen kreeg, hoewel zij niet ouder dan 28 jaar werd. Hij heeft belangrijke bijdragen geleverd aan de mathematische fysica, functietheorie, invariantentheorie en als pionier aan de algebraïsche meetkunde, ondanks het feit dat hij zelf ook jong stierf (aan difterie). Tevens is hij belangrijk als medeoprichter (met zijn vriend, en zoon van zijn promotor, Neumann) van de *Mathematische Annalen*. Helaas geen afbeelding van het Clebsch-oppervlak met de 27 lijnen.





Daarvoor bezoeken we het Mathematisch Instituut. In de hal vinden we een plaquette die herinnert aan de aanwezigheid van Emmy Noether (hieronder links), voordat ze door de nazi's het land uit werd gejaagd. Felix Klein en David Hilbert staren elkaar vanaf hun beroemde schilderijen aan in een mooie collegezaal, die grenst aan een zaal met een prachtige collectie modellen en rekenapparatuur. De twee iconen liggen beiden begraven op de uitgestrekte stadsbegraafplaats, waar we meer graven van vooraanstaande wiskundigen vinden. En van natuurkundigen en chemici — inclusief een hele Nobelprijsgalerij (hieronder rechts, en onderaan de pagina de grafzerken van Max Born en David Hilbert, en de spreuk op die laatste).





Ten slotte vinden we het graf van Carl Friedrich Gauss (1777–1855) op weer een ander kerkhof, tegen een heuvel, vlakbij de kerk die hij frequenteerde. Gelukkig herinneren nog minstens drie andere plekken aan hem: het ‘Gauss-Weber Denkmal’ (links), het beginpunt van de eerste telegraaflijn (nabij de zittende Lichtenberg), en het eindpunt bij de voormalige sterrenwacht.



Vilmos Komornik

College of Mathematics and Computational Science, Shenzhen University, and
Département de mathématique, Université de Strasbourg
komornik@math.unistra.fr

History

Shreds of memory of Paul Erdős

Paul Erdős has not been among us for more than twenty years. Vilmos Komornik, who had written various papers with Erdős, was asked by several friends to recall some of his memories: maybe they can shed light on his personality from a new perspective.

Zürich, 2–9 August 1994

I first met Paul Erdős personally at the International Congress of Mathematicians (ICM). We already had two joint papers, but they were done by correspondence through our third co-author István Joó. He was sitting in the middle of a large room surrounded by a lot of friends and interested people. I didn't dare to bother him. He suddenly stood up and came straight to me (he probably asked about me, and someone in the company showed him where I was): "Hello! Excuse me for not having greeted you before, but you know my memory of faces is not good. We already have two joint papers, don't we? How are the problems?" I almost sank in shame. We talked for a few minutes and he offered to continue our research collaboration.

Strasbourg, 20–24 October 1994

He sent me a message by e-mail that he would like to visit Strasbourg if I felt like it and had time to work with him. I seized the opportunity. Uncle Paul arrived from Nancy on Thursday afternoon. He waited on the platform of the railway station, smiling, and holding a small suitcase and a nylon bag. I took him home. He quickly got to know my family and wanted to work right away. We went into the room reserved for him. He closed the door, sat in the armchair, and asked me to tell him a new proof I had found.

I was secretly proud of my good teaching skills. He thought differently: "I do not understand. I do not understand a word. Have you ever explained mathematics to someone in your life? Write down your two

lemmas without proof and then I will read them."

What could I do? I started to write. Then my 11 year old daughter Tímea appeared, who couldn't bear to be out of the room. She asked me to look at her German homework. Uncle Paul impatiently interrupted, "I'll look, I know German, you just write the two lemmas." See Figure 1. He ran through the two pages in half a minute, then said to Tímea: "Here is an error: not *der*, but *das*. The rest is good, you can leave." My daughter was outraged to be sent away so quickly, surely leaving many other mistakes in her homework (the next day it turned out that there were no more). Meanwhile, I had written down the two lemmas. Uncle Paul read them, they seemed right to him, and he calmed down.

By then dinner was ready. While eating, he asked my wife what her profession was

and what was the subject of her master thesis. After her answer — "The press coverage of the Mexican campaign of Emperor Miksa" — she continued to explain what this campaign was, because she herself did not know anything about it before obtaining her university assignment, but Paul Erdős stopped her: "I know, Napoleon III appointed him to be an emperor there and he was executed in Mexico in 1867."

The next morning we worked at the department. I had an idea to improve our results by modifying the 'two lemmas'. "It doesn't work", he said. "But I feel it does", I insisted and began to count. In half an hour, I gave up, "Unfortunately, it doesn't work." "I told you", he replied calmly.

At noon I had to bring my son Zsolt home from school for lunch; Uncle Paul stayed in my office. In front of the school, another dad, a high school math teacher, told me that he and his colleagues had been trying to prove for weeks that all real fractions can be written as the sum of Egyptian fractions. I had never heard about Egyptian fractions before. Returning to the office, I repeated the question to Uncle Paul, who put a piece of paper in front of him, and quickly wrote down the proof: "I wrote an article on the subject, I remember it."

We went home for lunch. Returning to the library, Paul Erdős forgot the name of a mathematician who found a simple proof of one of his theorems with Szekeres. But he remembered that the article was published in 1959 in the *Journal of the London Mathematical Society*, and so he immediately found the name of Seidenberg. I also found his article about the Egyptian fractions in the library: it was written in 1950, and he remembered the proof word by word.

Erdős–Szekeres

Erdős and Szekeres proved that every sequence $x_1, x_2, \dots, x_{n+1}$ of distinct real numbers contains either an increasing or a decreasing subsequence of length $> \sqrt{n}$. Seidenberg's proof associates with each x_k an integral vector (k^+, k^-) recording the lengths of the longest increasing and decreasing subsequence ending at x_k . If $j \neq k$, then $(j^+, j^-) \neq (k^+, k^-)$. Since the box $[1, \sqrt{n}] \times [1, \sqrt{n}]$ contains at most n integral vectors, one of the (k^+, k^-) has to be out of the box.

In the afternoon, he gave a lecture at our department on “some of my favorite problems in number theory, in combinatorics, and in geometry”. So many people came to listen to him that we had to change the room. Luckily, the big lecture hall was free, although it was unheated. Paul Erdős held his presentation in a coat. He spoke in English, but he repeated the statements in French. It had a big impact on the audience, who until then knew almost only the radically different Bourbaki style.

We went to the city on Saturday. I showed him a memorial plate that the French national anthem, the *Marseillaise*, was first sung here. “Rouget de l’Isle had a difficult life: I read about it from Stefan Zweig”, he replied. I knew nothing about Rouget de l’Isle’s life until then.

When we arrived at the Cathedral he did not like going up the tower: “I’ve been there twenty years ago, I remember it.”

There were mendicants in the square. He gave money to everyone, then they returned to him, and he gave again. I had to take him away before he distributed all his money.

I suggested to look at the organ of the St. Thomas Church on which Mozart played two centuries ago. He was interested. We sat in a car and I maneuvered for twenty minutes before I finally found a nearby parking place. But we didn’t spend half a minute in the temple. He went straight to the organ, looked up, read the brochure, then turned around and went out: “Let’s go back to work.” I was sure he learned the text of the tutorial by heart.

In the evenings, he liked to listen to music, usually the Brandenburg concertos from Bach. When he traveled to Lyon on Monday, he borrowed from us István Díószegi’s book on the history of diplomacy: *In the Shadow of Two World Wars*, that he found on our bookshelf. We gave it to him a little bit afraid, because it would have been difficult to get another copy, but in two weeks he sent it back to us from Sao Paulo. (This was his only visit to South America, at the age of 81.)

Budapest, 3 August 1995

Paul Erdős gave a lecture at SZTAKI (Institute for computer science and control of the Hungarian Academy of Sciences). The small room was full of people but, despite the heat wave, all windows were shut so that the noise of the outside road repair

did not interfere with the talk. He talked about one of his results with Zsolt Tuza, when Zsolt interrupted him: “This is the proof of the other direction.” “Yeah, of course”, he replied and wanted to start the other proof, but he suddenly stopped and began to feel dizzy. The organizers emptied the room, opened the windows, laid Uncle Paul on four chairs and called an ambulance. As a result of the fresh air, he came to himself, “Is Tuza here?” he asked in a dying voice. They called Zsolt. “How was the proof?” he asked. Zsolt began to talk to him, and Uncle Paul, lying on the chairs, became more and more revitalized. He told the arriving rescuers that he was all right now, and it was very difficult to convince him to go with them for a medical check.

Strasbourg, 23–26 September 1995

At the beginning of September, he phoned me at home while I was at the university. My wife wanted to give him my office phone number. “Thank you, but I remember the phone number”, he replied, and then he called me. He hadn’t forgotten the phone number since last year.

He arrived on Saturday afternoon. In the apartment, my daughter received him saying that she already knows German. Uncle Paul immediately switched to German, talking to her. Timi had a hard time to understand him, and he was wondering: “Why do you say you know German if you don’t know?”

Uncle Paul didn’t find his sandals: either left in Nancy or left on the train. He called

Tenenbaum, who found them under a chair. “Shall I send them to you?” he asked. “No, I just wanted to know where I lost them. Throw them away, they were already old”, he replied. We worked after dinner, and after 11 pm he asked, “Is it true that you have a key to the library?” True, I replied and we were there 15 minutes before midnight. Paul was browsing the freshly-received journals with great attention. He stepped out of the library at 1 am with satisfaction.

We spent the Sunday morning in my office. He wrote several letters that I forwarded by fax or e-mail to the addresses provided. He asked one of his colleagues to send 25 dollars in his name to the ‘American Friends Service Committee’ (see Figure 2). Almost every day, he made small donations for humanitarian purposes or to promote mathematics.

In the afternoon he found *Set Theory* by Hajnal and Hamburger on my bookshelf and read it carefully. Suddenly he exclaimed, “Yeah, there’s a mistake!” I was incredulous: remembering András Hajnal’s precise and elegant university lectures, I couldn’t imagine that there might be a mistake in the book. But he persisted: “They write that Gödel proved in 1939 that the continuum hypothesis is consistent with the usual set theory axioms. But it was in 1938, not in 1939. I remember because I was sitting in a café with him in Vienna when he told me and it was in 1938.”

In the evening we celebrated my son’s birthday together.

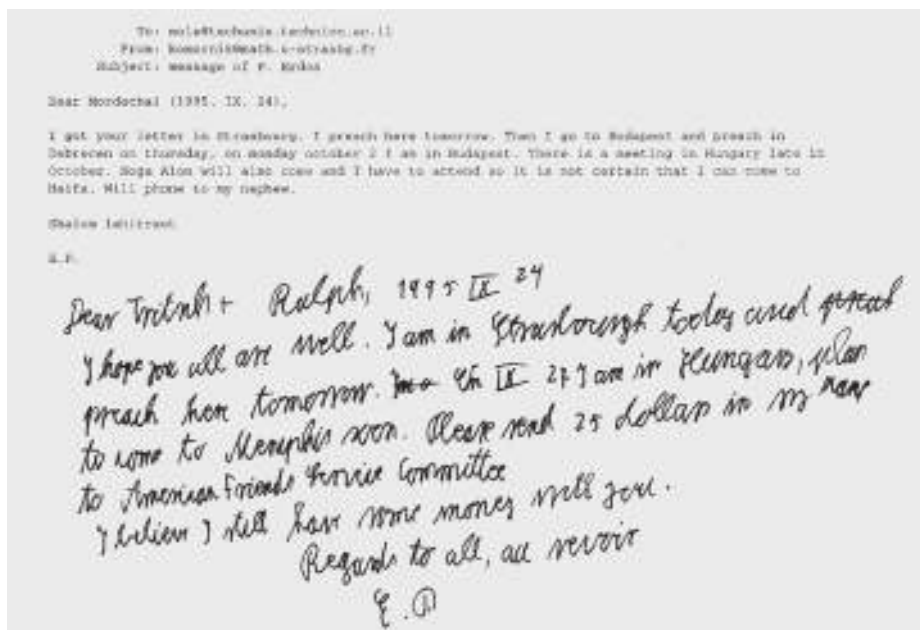


Figure 2 Letter from Paul to Patricia and Ralph Faudree outlining his itinerary and asking to donate 25 dollars on his behalf.



Figure 3 Scraps of work done in Strasbourg on expansions in base q . For $1 < q < 2$, we investigated $\liminf y_{n+1} - y_n$ and $\limsup y_{n+1} - y_n$ where (y_n) is the increasing sequence of the polynomials of q with coefficients 0 and 1. For example, $y_0 = 0$, $y_1 = 1$, $y_2 = q$ and $y_3 = q^2$ or $y_3 = q + 1$ depending on whether $q \leq (1 + \sqrt{5})/2$ or $q \geq (1 + \sqrt{5})/2$.

We had lunch together with my German colleague Petra Wittbold on Monday. After Uncle Paul learned that she was from Essen, he switched from English to German (which I don't speak) for a few minutes. Later Petra said that Paul Erdős had told her several interesting stories about medieval Essen in perfect German. And she was very ashamed because she knew almost nothing about the history of her hometown. In the afternoon, Uncle Paul gave another talk with great success at the department. The royalties were just enough

to buy his flight ticket to Budapest the next day. In the evening, he escorted us to the ping pong club of my son Zsolt, and he played with him.

On Tuesday morning we went to Germany to buy him new Birkenstock sandals. He found a pair: they weren't really comfortable, but he bought them anyway. I paid for him in marks, and he immediately gave me the amount in francs. Later, I checked that it was correct to a penny. Meanwhile, he told me that András Hajnal once reacted to his constant complaints: "If we were able to send people to the Moon, we can make comfortable shoes for you!" "Now in this, Hajnal was wrong", Uncle Paul commented.

Strasbourg, 5–8 April 1996

On 3 April, he suddenly called me to ask whether he could spend the Easter weekend with us and arrived two days later. I showed him a new proof I had found for the Erdős–Mordell inequality: it seemed to him new and simpler than the earlier ones. In his book *Geometric Inequalities*, written in 1961, Kazarinoff meditated on how

Essen

The town of Essen grew around an abbey for wealthy women that was founded around 845. Interestingly, celibacy was not mandatory. In 1216, Holy Roman Emperor Friedrich II declared the abbess to be a Reichsfürstin, which led to a power struggle between abbess and city council that lasted for centuries. Coal mines opened up in 1450 and the town quickly became a centre of the weapons industry, ruled by the Krupp family dynasty since the end of the sixteenth century.



Essen coat of arms



Figure 4 Letter from Paul dated Dec. 22, 1995. It says: "Dear Vili, For the time being I do not make progress with the paper but I will think more about the problems. If we will still be alive in Spring, we may meet and talk about everything. Is the following theorem true: $\sum_{i=1}^n \epsilon_i q^i$, $1 \leq n < \infty$. Let $n \leq T$. Is it true that we always get exponentially many different numbers? We should have $(2 - \epsilon)^n$ different numbers, maybe even $2^{n/2}$, in our case $p < 2$, but maybe $2^{n/2}$ is always true. Maybe it is trivial and I overlook something. Happy New Year to everybody, E.P. You can write c/o Ralph Faudree, Univ. of Memphis Math. Dept., Memphis Tennessee 38152."

Paul Erdős discovered this theorem: "One possibility is that he generalized Euler's Inequality $R \geq 2r$." To my question, Uncle Paul answered that he had discovered the inequality in 1932, after having drawn a lot of triangles to find new laws. Interestingly, neither Kazarinoff, nor anyone else asked him about it during more than sixty years. How much more could we have learned from him if we only had asked!

"Did Einstein believe in God?" I asked once. "No," he replied categorically. "How do you know?" I asked again. "I asked him once."

He had to take his train to Marseille on Sunday morning. But when I went to his room in the morning, he said he didn't feel good, he couldn't go: "It's not a serious thing, just lie back and continue to sleep." Half an hour later, when it was too late to reach the train, he suddenly got better and got up.

But after breakfast, he said there was a problem: "The train will arrive in Lyon in the afternoon and András Sárközi will join the train as planned. If he doesn't find me on the train, he'll panic." Somehow Sárközi should be notified that Erdős was unable to travel, but there was nothing

Erdős–Mordell

The Erdős–Mordell inequality says that for any internal point P of a triangle, the sum of its distances to the sides is at most half the sum of its distances to the vertices.

Komornik’s proof of the inequality, which can be found in issue 104 of the *American Mathematical Monthly* (1997), is as follows. The areas of the colored triangles sum up to

$$\frac{r_a a + r_b b + r_c c}{2}.$$

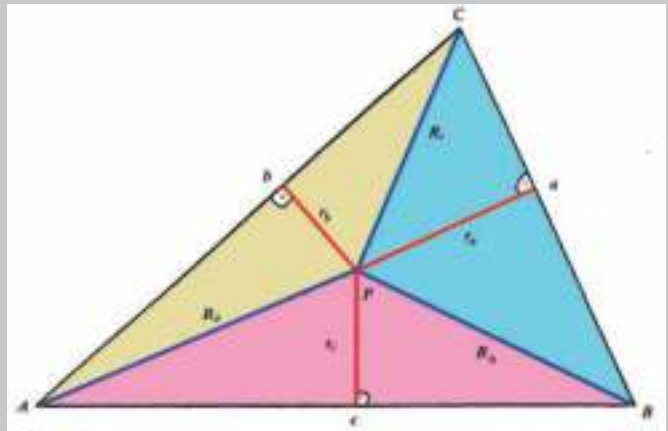
The distance between vertex A and side a is bounded by $R_a + r_a$. Therefore the area of the entire triangle is bounded by $(R_a + r_a)a/2$ and we get that

$$R_a a \geq r_b b + r_c c.$$

Here’s the trick. We leave it to the reader to verify that this inequality remains valid for any P that is inside the sector $\angle(BAC)$, even if P is outside the triangle. If we reflect P in the bisector of $\angle(BAC)$ then r_b and r_c are switched while all other quantities remain the same. We get that

$$R_a a \geq r_b c + r_c b.$$

By symmetry, this holds if we permute a, b, c and we find



Distances r of P to the sides are red. Distances R to the vertices are blue.

$$R_a + R_b + R_c \geq r_a \left(\frac{b}{c} + \frac{c}{b} \right) + r_b \left(\frac{a}{c} + \frac{c}{a} \right) + r_c \left(\frac{a}{b} + \frac{b}{a} \right) \geq 2r_a + 2r_b + 2r_c,$$

where we have used that $x + \frac{1}{x} \geq 2$. Which solves the problem on the triangle but leaves us with the question: what is the Erdős–Mordell inequality for the simplex?

serious. “He may travel to Marseille without feeling anxious, and then I call him by phone in the evening.” There were no cell phones yet, so I called a friend in Lyon: “You should go to the Lyon Perrache railway station at noon, find a mathematician named András Sárközi and pass him on the following message...” I didn’t know how he did it, but my friend solved it. (I learned it from Sárközi twenty years later: he went to the math department in the morning, and my friend found him there.)

Meanwhile, we had lunch at home and Uncle Paul looked out of the window. “What are those things there? Mountains? Are they far away?” “Yes, the Black Forest in Germany, at about 20–30 kilometers from here.” “Could we go there?” We sat in the car and went on a trip.

During this time the train arrived in Marseille. Sárközi, having traveled very nervously for five hours, ran to the first phone and called us. “Uncle Paul went on a trip with my husband to the Black Forest”, my wife replied. In the evening, after we got back, the phone rang again. Vera T. Sós, Sárközi and Hajnal cut into each other’s words to tell Uncle Paul to stop kidding: everybody was waiting for him at the conference, he should take the first flight the next morning. I escorted him to the airport on Monday. He was cheerful after a good weekend break with my family and the Sun-

day excursion. He checked his suitcase containing all his material possessions (he did not have an apartment), including a pair of boots: it weighed 9.40 kilograms.

Strasbourg, 27 April to 2 May 1996.

Two weeks later he called from Paris and he arrived to Strasbourg the following Saturday afternoon, after a stop in Nancy. He wore the sandals that he lost a year before. Tenenbaum kept them for him.

Uncle Paul was intransigent on moral issues. He sent a letter to the University of Waterloo for a colleague who he thought was disproportionately punished for a small mistake. He suggested that if they do not find a suitable solution, he would resign his honorary degree. (He did this after the university’s response, see Figure 5.)

He complained about his heart on Monday. His usual medication had not arrived from the USA. I called our doctor. Fortunately, the drug was also available in France. The doctor gave him a prescription, but also advised him to stay and relax for at least one week because of his heart. “It’s impossible!” Uncle Paul exclaimed, “people are waiting for me everywhere. Thanks for the medicines, I’ll take them and everything will be fine.” Then I talked to the doctor in private. “If he were not allowed to continue traveling, his condition would only deteriorate further. We have to

let him travel, though he’ll die one day because of it”, he said to me.

On Tuesday, he gave another lecture on “my favorite problems in number theory, combinatorics, geometry and analysis”. In the evening, during the dinner, my daughter told us that her French teacher was trying

Erdős pairs

Suppose $n > 11$. If $\{1, 2, \dots, n-1\}$ is partitioned into two disjoint subsets, then one of these contains distinct elements that sum up to n . There exists a maximum number m such that $\{m, m+1, \dots, n-1\}$ still has this property. This maximum is denoted by $l_2(n)$ and if $m \leq l_2(n)$ then (m, n) is called an *Erdős pair*. In 1992, Erdős posed the problem of determining $l_2 = \liminf l_2(n)/n$. It is quite easy to convince oneself that $l_2 \leq \frac{1}{4}$. In 1993, Bollobás and Jin proved that $l_2 = \frac{1}{4}$. The general problem of determining l_p , for partitions into p parts, remains open.

Marie-Paule Muller proved that $l_2(n)$ is equal to the integer part of $(n-3)/4$ for every $n \geq 56$. She also proved that $l_p \leq \frac{1}{2p}$. Her results appeared in 1998 in the *Annales Universitatis Scientiarum Budapestinensis*.

to persuade her pupils to take her ancient Greek class next year. “The famous mathematicians of ancient times were Greeks. If you do not study Greek, you cannot become a good mathematician”, she told the best mathematician in the class. “What a stupid thing”, Uncle Paul commented, and then quietly stirred his soup.

He continued his travel to Berlin on Thursday.

Several months later, a colleague of mine from Strasbourg, Marie-Paule Muller, contacted me. She said that she had practically stopped research more than five years ago, but Paul Erdős gave such an appealing presentation that she began thinking about one of the unsolved questions that he mentioned and she had managed to solve it partially. Her paper was published in 1998 in Hungary.

During his visits to Strasbourg, we talked a lot during walks or trips. Any topic could be raised: family, politics, history.

On a weekend I took him to the Sainte-Odile Mountain, with a beautiful view of the Alsatian plain from the old monastery there. On the road, we met surprisingly few cars. On the hilltop, however, many hundreds of cars were parked on each other's

back, it was very difficult to find a parking place. “The whole Alsace came here”, Uncle Paul said laconically.

According to his long-time acquaintances, Paul Erdős was much faster at his youth than in his last years. But I still had to well prepare myself for his visits. Sometimes he was wrong. “The old man is stupid,” he said.

Once we were walking on the riverbank of the Rhine, and I asked him about old Hungarian mathematicians. “What kind of a man was Leopold Fejér?” I asked. “He was... slow”, he replied. It was a joke, of course: Uncle Paul was very fond of joking but never at the expense of others. I heard that Fejér found it hard to follow the quick explanations by Paul Erdős, who on his turn had no patience to listen to the slowly talking Fejér. Often, Paul's friend Turán interpreted between them. (Later, as a first-year undergraduate in 1973, I learned number theory from the wonderful lectures of Paul Turán.) “But speed is not important, the important thing is to prove a big theorem”, he added. “It does not matter whether it takes a month or ten years, the main thing is to find an important result. Fejér was an excellent mathematician and a wonderful



Figure 6 Paul is proving two theorems.

person”, he continued. (Erdős, Turán and Alfréd Rényi were very close friends. Rényi is also known for his definition of a mathematician as “a machine for turning coffee into theorems”. Once all three were together at a conference in the USA, where coffee is known to be much weaker than in Europe. As Turán remarked: “With this coffee we can only prove lemmas.”) “And what kind of a man was Riesz?”, I continued to ask. “Oh,” Uncle Paul replied, “Riesz was... less slow.”

“Didn't it hurt you that you didn't get a Fields Medal?” I once asked him. “No. I have received many other awards. But the prizes are not important: what is important is to try to prove a result that will be remembered 500 years from now.”

“Did you physically suffer during the war?” I asked him another time. “Of course”, he replied instantly. “Once I was walking on a beach in America in 1942. Because of the blackout, I walked into a lamp post, and I had a pain in my knee even the next day.”

Budapest, 21–27 July 1996

I last met him during the European Mathematical Congress. He invited me to lunch at the Hotel Astoria. I asked him what had happened in the last 2–3 months. “Nothing worthwhile”, he replied, and then turned to discuss mathematics. “Don't wait any longer, let us submit our paper for publication.” I wanted to solve a pending issue first, but I promised to finish the article during his next visit of Strasbourg in October. Only a long time later I heard about his sickness in June and the implantation of a pacemaker.

The next day or the third day my parents invited us to lunch. At noon, we were waiting at the bus stop next to the conference site, but Uncle Paul lost his patience after

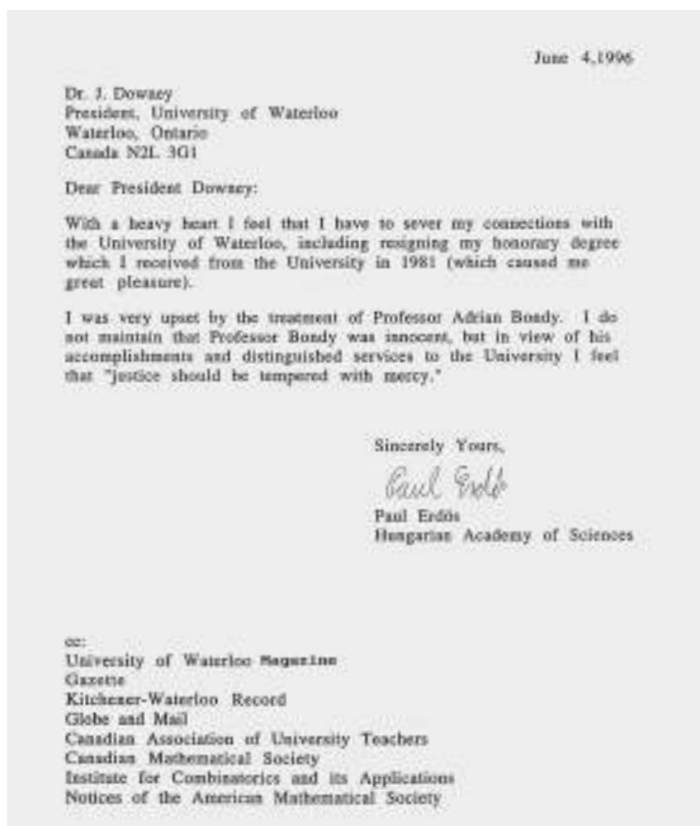


Figure 5 In 1996 Erdős famously resigned his honorary degree of the university of Waterloo after an infamous dispute between the university and one of its employees.



Figure 7 At the congress in Budapest.

two minutes: “It doesn’t seem like this bus goes. Let’s go by taxi!” We only had to take five or six stops by bus, and I didn’t like to pay for a taxi. “It will come very soon”, I answered. Erdős went to ask two other men waiting at the stop. “Is this bus going?” After finding that they were not Hungarians, he repeated the question in other languages, but they still did not understand. Uncle Paul came back annoyed: “They don’t speak any language.” I saw on their badge that they were Russian conference participants, so I replied that he didn’t speak Russian either. “That’s true”, he replied, and calmed down as the bus appeared at that moment. We got in, we sat down on a double seat, the bus started. Then he turned to me, and began to speak in Russian. It was a long text, though I did not understand its relevance. “Do you know Russian?” I asked quite surprised. “No, but in 1966, when the ICM was organized in Moscow, I thought I should learn it a little bit, and then I dealt with it a little.” Thirty years later, he still remembered the first pages of the textbook.

We ate goulash soup and pancakes for lunch, and he was pleasantly talking to everyone. He asked my parents how they had survived the war.

There was the conference banquet in the evening. He noticed a baby girl in a pram with their parents, and he had been trying for a long time until she accepted without crying that Paul stood near her. (Norbert A’Campo, the baby’s father, recently told me: I came across Erdős by chance near the congress building. He told me not to have children and he was vis-

ibly happy to push the pram. We looked at Clara — the baby — and I did not really look at that very friendly man in that bit of a worn suit. He asked me what I was doing and I quickly understood that he was very comfortable with mathematics. To learn his name was a huge surprise to me.)

The last afternoon, a film about him was screened at the congress. “I have seen the movie, and you too, let’s stay outside and talk”, he suggested. We walked up and down the empty corridor and talked about everything. Suddenly he stopped and looked at me seriously. “You know, I think I made a mistake by not having set up a family”, he said. Then we stood there silently for a while. That was the last time I saw him. The next morning he traveled to Sárospatak, a town about 250 km from

Budapest, and he called me three times from there in the afternoon. He felt alone.

I received his last greetings via e-mail at the end of August, when he met the Rudins in Budapest. He would have come to Strasbourg in early October. But his heart couldn’t stand it.

After all newspapers announced the news in the headlines, one of the secretaries asked me at the department: “Was he really that kind old man who always walked so modestly in the corridor? I would have never thought that he was famous.”

His funeral was on 21 October 1996. Very moving farewell talks were made by his colleagues and friends, and mathematical societies from distant countries were also represented by a wreath, sometimes even by a person. I later mentioned to Ákos Császár my surprise over the Hungarian state’s absence. “I don’t think it was disturbing,” he replied, “he did not consider these things important. What was really painful for me is that the Presidency of the Hungarian Academy of Sciences was not represented. I asked them to do it, but they replied that Paul Erdős was not a member of the Presidency, so it was not necessary by the protocol.” ☞

Acknowledgement

This text is based on the translation from Hungarian of the author’s paper “Emlékfoszlányok Erdős Pálról”, *Érintő – Elektronikus Matematikai Lapok* 1 (2016). The author thanks Norbert A’Campo, István Berkes, Robbert Fokkink, Marie-Paule Muller, Péter Pál Pálffy, François Sigrist, Miklós Simonovits and the editors for their help in preparing the manuscript.



Figure 8 Paul Erdős (left) at the conference banquet in Budapest with Norbert A’Campo, baby Clara A’Campo, François and Monique Sigrist and on the right Vilmos Komornik with behind him Annette A’Campo-Neue, the mother of the baby.

Daan Mulder

mulderdaan@live.nl



Het keerpunt van Lukas Verburgt

Accepteren dat je niet de hele tijd kan werken

Lukas Verburgt (1989) laat zich op veel manieren omschrijven: als filosoof, als historicus, en ook een beetje als wiskundige. Tijdens zijn studie filosofie is hij zich meer en meer gaan interesseren voor geschiedenis van de wiskunde, met name die van de negentiende en begin twintigste eeuw. Daar doet hij nu met een Veni-beurs als postdoc onderzoek naar aan de Universiteit Utrecht. Ook is hij vertaler: in 2016 verscheen zijn vertaling van *Naming Infinity, In de naam van oneindigheid*. Dit boek, geschreven door Graham Loren en Michel Kantor, gaat over de Russische wiskunde ten tijde van de Revolutie. En sinds begin dit jaar is hij ook vader: zijn vrouw Judith en hij kregen hun eerste kind, Johanna.

Gefeliciteerd! Hoe gaat het nu?

“Dat ben ik ook nog aan het uitvinden. Waar je vanaf het begin van doordrongen bent, is dat er iets is gebeurd dat nergens anders mee te vergelijken is. Als je heel hard onderzoek doet, kun je wel eens op gelukkige inzichten komen en denken: dit is geweldig. Maar dat er een nieuw mens op de wereld komt, dat is echt van een andere orde. Ik dacht altijd dat je alleen academisch werk kon doen als je twaalf uur per dag onderzoek deed. De afgelopen jaren heb ik steeds meer geprobeerd dat achter me te laten. Als je een dochter krijgt, of als je iemand hebt waar je van houdt, dan wil je ook met diegene zijn, en accepteren dat je niet de hele tijd kan werken.”

Lukt het nu om de taken te verdelen?

“Ik probeer te doen wat ik kan doen. Dat Judith borstvoeding geeft, maakt dat je al gebonden bent aan een planning. Ik neem Johanna 's avonds, en dan gaat Judith alvast naar bed, en maak ik Judith wakker als Johanna honger heeft, en dan ga ik slapen. Als Johanna om 6 uur 's ochtends weer wakker wordt, neem ik haar weer, en om 9 uur ga ik Judith weer wakker maken. Ik wil niet in een soort typische man-vrouwverhouding terecht komen, maar je voelt dat je echt je best moet doen en heel bewust moet leven om ervoor te zorgen dat dat niet gebeurt. Ik denk dat we het best wel goed doen. Het is ongelooflijk om te zien hoe Judith

dat kan. Hoe rustig zij blijft, hoe geduldig en aandachtig. Ik ben daarvan zo onder de indruk dat ik denk: man, ik moet nog beter mijn best doen.”

Hoe kwam je van filosofie bij geschiedenis van de wiskunde terecht?

“Op een gegeven moment, in 2013 of zo, las ik iets van Aristoteles over toeval en waarschijnlijkheid. Hij zegt zoiets als ‘toeval is dat wat per definitie aan het menselijk kennen ontsnapt’. Dat is volgens hem de essentie ervan. Tegelijkertijd kwam ik een boek van de Russische wiskundige Kolmogorov tegen, *Grundbegriffe der Wahrscheinlichkeitsrechnung*, uit 1933.



Lukas Verburgt

Dat is maar 60 pagina's. Daar heb je op eens iemand die zegt: dit zijn een paar wiskundige stellingen, dit is waarschijnlijkheid, daar is niks mysterieus, niks filosofisch diepers aan dan dat. Dat is best wel opvallend. Waarschijnlijkheid was iets wat tweeduizend jaar lang zo ongrijpbaar leek, iets wat niet helemaal causaal is, wat niet helemaal te voorspellen is, te vatten is. Dat riep bij mij wat vragen op: wat moet er in al die eeuwen gebeurd zijn dat de mens is gaan accepteren dat we sommige dingen die eerst ongrijpbaar leken, in wiskundige termen kunnen vatten?”

En zo kwam je op 'Naming Infinity' uit?

“Het verhaal is nog iets langer dan dat. Ik las in een boek van Jan van Plato, *Creating Modern Probability*, dat die Kolmogorov en zijn collega Khinchin heel erg geïnteresseerd waren in het werk van L.E.J. Brouwer. Dat er in het Moskou van de jaren twintig discussies waren over het werk van Brouwer, en dat er weerstand bestond tegen het formalisme en het bewijstheoretisch programma van David Hilbert. Toen ontstond er dus een onderzoeksvraag, omdat ik dus dat boekje van Kolmogorov had, een puur formalistische definitie van waarschijnlijkheid, en tegelijkertijd wist ik dat Kolmogorov rond die tijd affiniteit voelde met dat intuïtionisme.

In een voetnoot verwees Jan van Plato naar artikelen die nooit gepubliceerd waren, maar waar hij wel zijn uitspraken op stoelde. Die kon ik natuurlijk nergens vinden, dus ik heb Jan van Plato een bericht gestuurd: ‘Heb jij die artikelen?’ Hij zei: ‘Ik heb nog wel ergens een doos liggen, ik zal er nog wel eens in kijken.’ Begin jaren tachtig was hij afgereisd naar Moskou en Leningrad, en was daar die artikelen tegengekomen in archieven. Ik hoorde heel lang niks meer van hem, tot

ik opeens een mail terugkreeg: 'Ik heb ze gevonden, ik stuur ze wel naar je op.' Toen deed het vrij humoristische geval zich voor dat ik een envelop kreeg met daarin twee artikelen en gek genoeg toen pas besepte: die artikelen zijn in het Russisch, en ik kan absoluut geen Russisch.

Ik heb met heel veel omwegen iemand gevonden, Olga Hoppe-Kondrikova, een Russische vrouw die in Nederland is komen wonen, gepromoveerd in theologie, en ook geïnteresseerd in exactere dingen. Toen dacht ik: ik ben wel volkomen gek, want ik moest het zelf betalen. Er was natuurlijk niemand die dacht: ik ga deze jongen eens even geld geven om een stel obscure Russische artikelen te laten vertalen. Het was een lang proces waarin zij vertaalde, en ik dan weer terugmailde om te vragen: 'Zou het ook dit of dit kunnen zijn?' En dan moest zij weer kijken: 'Ja, dat zou wel kunnen maar ik weet het niet zeker.' Achteraf was het helemaal volslagen belachelijk, want zij was vertaalster maar geen wiskundige en ik was filosoof-historicus en ook geen wiskundige, en samen gingen we een Russisch wiskundig artikel vertalen.

Een van die artikelen is uiteindelijk verschenen in *Historica Mathematica*. Terwijl ik onderzoek deed om er een contextualiserende inleiding voor te schrijven, kwam ik dat boek *Naming Infinity* tegen. Wat de schrijvers, Graham en Kantor, in dat boek beweren is dat drie Russische wiskundigen, Florensky, Egorov en Luzin, een bepaalde mystieke Orthodoxe stroming aanhingen, 'Naamaanbidding'. Dat zou hen op een of andere manier geholpen hebben bij het voortbrengen van hun wiskundige doorbraken. Ik vond het wel een goed verhaal. In mei 2015 was ik klaar met mijn promotie, en op 1 oktober moest ik mijn proefschrift verdedigen. Dan heb je zo'n zomer ertussen. Mijn moeder was heel ziek, dus ik wilde absoluut niet bezig zijn met nieuw onderzoek opzetten. Vertalen was toen echt een uitkomst. Het was wel mijn stille hoop natuurlijk om zo ook aandacht te krijgen voor deze onderwerpen. Uiteindelijk heeft *de Volkskrant* me erover geïnterviewd, en *Trouw* en *NRC* hebben het gerecenseerd. Dan zie je ineens in de kranten: 'Hoe Jezus naam de wiskunde reddde'. Dat vond ik erg grappig om mee te maken.

Een van de eerste dingen waar je achterkomt als je onderzoek doet naar Russische wiskunde uit die tijd: het was na 1917 en je hebt te maken met de Sovjet-context. Ze wilden na die revolutie de maatschappij opnieuw opbouwen. Je had collectivisering in de landbouw, bijvoorbeeld. In de wiskunde was de vraag: hoe kunnen wij vanuit het marxisme kritiek leveren op de wiskunde die gedaan wordt in het Westen, in bourgeois-landen? En hoe kunnen we onze eigen marxistische wiskunde bedrijven? Een uitgangspunt van marxisme is dat al het geestelijke zijn oorsprong vindt in de materiële realiteit. In die jaren van Lenin — grofweg — hadden wiskundigen zoals Khinchin en Kolmogorov redelijke vrijheid om te doen wat ze wilden. Het was dus niet zoals later onder Stalin zou zijn — dat Khinchin moest vrezen voor zijn leven als hij iets verkeerd zou schrijven.

Bijvoorbeeld Khinchin had nog de relatieve vrijheid om te zeggen: Brouwer is eigenlijk best een interessant figuur. We weten dat hij westers is, maar laten we kijken wat we op onze eigen gronden kunnen waarderen. Hij doet alsof Brouwer naar een wiskunde gebaseerd op materiële zaken streeft, op de observeerbare werkelijkheid. Dat is precies niet wat Brouwer zegt: Brouwer was een idealist — het tegenovergestelde van wat ze in Rusland wilden. Maar als je je best doet, zou je Brouwer wel op die manier kunnen proberen te interpreteren. Er zit bij Khinchin dus authentieke wiskundige interesse, maar ook tact. In de loop van de jaren dertig, veertig en vijftig wordt de politieke druk steeds heviger. Als het over de statisticus Von Mises gaat, bijvoorbeeld, wordt het dus niet meer een artikel waarin hij zegt: 'Hartstikke interessant, hij is wel een aanhanger van de positivist Mach, dus dat is een beetje een probleem, maar daar kunnen we omheen werken.' In plaats daarvan schrijft hij in 1954: 'We moeten strijd voeren tegen Von Mises, want hij is een aanhanger van Mach en dat moeten we met de grond gelijk maken.'

Geloof jij die transformatie?

'Dat is het moeilijke. Vaak weet je het gewoon niet. Je weet niet of Khinchin iets schrijft omdat hij dat echt gelooft, of omdat hij het idee heeft dat hij het

moet schrijven, onder druk. In algemene zin kun je dat grondslagende debat niet begrijpen zonder hun filosofische positie in overweging te nemen. Nu kom ik op het gebied van wat het betekent om geschiedenis van de wiskunde te doen. En ik bedoel dit niet als een scherpe opmerking, maar de relatie van wiskundigen tot hun eigen vakgebied is wel uitzonderlijk. Veel dingen die de afgelopen decennia zijn gebeurd op het gebied van de geschiedenis van de natuurwetenschappen, zijn volgens mij nog niet gebeurd binnen de geschiedenis van de wiskunde. Het is nu volkomen gemeenplaats om te zeggen, als je bijvoorbeeld Galileo onderzoekt, of Faraday, dat je dan onderzoek doet naar de politieke, culturele omstandigheden waarin ze dat deden. In de geschiedenis van de wiskunde ligt dat toch anders. Volgens mij heeft dat ermee te maken dat filosofie en geschiedenis van de wiskunde onlosmakelijk met elkaar verbonden zijn, veel meer dan in de geschiedenis van de natuurkunde. Wat je filosofische opvatting is over wiskundige objecten, heeft heel veel invloed op hoe je de geschiedenis van de wiskunde schrijft. Als je bijvoorbeeld platonist bent, heb je het idee dat wiskundige objecten onafhankelijk bestaan van ons. Het is een veel gebezigde positie, maar wat moet je dan met de context waar die wiskunde vandaan komt? Dat wordt een bijzaak.

Op een gegeven moment organiseren wij een debat over *Naming Infinity*. Het eerste wat wordt gezegd: ja oké, Naamaanbidding, Russische orthodoxie, religie, dat kan allemaal zo zijn, maar sec genomen voor hun wiskundige inzichten maakt dat niet uit. Je mag naamaanbidden wat je wilt, maar als je goede wiskundige artikelen schrijft, dan lezen wij gewoon die artikelen en dan doe jij verder maar waar je zin in hebt. Maar wat die Graham en Kantor zeggen, en waar ik het mee eens ben: je ziet de relatie tussen wiskunde, religie en filosofie daar zo prominent aanwezig. Als we de geschiedenis, de *historiciteit*, van de wiskunde willen beschrijven, dan moeten we daar dus naar kijken."

Goede suggesties voor een Nederlandse wiskundige met een keerpunt in zijn of haar carrière zijn welkom via keerpunt@nieuwarchief.nl.

Wil Schilders

directeur PWN

w.h.a.schilders@tue.nl

Evenement 55ste Nederlands Mathematisch Congres (NMC 2019)

Impressie NMC 2019

Voortbordurend op het succes van NMC 2018 'nieuwe stijl', mede mogelijk gemaakt door een genereuze financiële injectie van NWO en bijdragen van 4TU.AMI, 'Networks' en 'QSC', werd op 23 en 24 april het 55ste Nederlands Mathematisch Congres gehouden in congrescentrum Koningshof te Veldhoven. De meivakantie zorgde voor wat minder deelname dan in het voorgaande jaar, desondanks waren er toch meer dan tweehonderd deelnemers die genoten van een divers en dynamisch programma. Het merendeel hiervan had ook gekozen voor een overnachting, hetgeen leidde tot een gezellige sfeer en een late afsluiting in de Abdijbar waar nieuwe contacten werden gelegd, en bestaande werden verdiept, vaak onder het genot van een heerlijk abdijbiertje. Een impressie van Wil Schilders, directeur PWN en lid van het organisatiecomité.

Het lokale organisatiecomité, dat de avond tevoren al een welkomstdiner had gehad met de uitgenodigde sprekers, was op dinsdagmorgen al vroeg in touw met de voorbereidingen. Standhouders waren druk bezig met het inrichten van de stands. Vanaf 9 uur druppelden mondjesmaat de eerste deelnemers binnen, maar de topdrukte begon toen de bussen vanaf station Eindhoven aankwamen. Na ontvangst van de conferentiebescheiden was er koffie met cake, en waren er broodjes als toegift op het ongetwijfeld vroege ontbijt van veel deelnemers. Het wat latere aanvangstijdstip, 10.30 uur, werd als aangenaam ervaren.

Opening en plenaire lezing

De opening werd wederom verzorgd door drie sprekers: Jan Wiegerinck, voorzitter van het Koninklijk Wiskundig Genootschap opende het congres officieel, gevolgd door mooie woorden van Bas Zwaan, portefeuillehouder wiskunde in het bestuur van het

domein Exacte en Natuurwetenschappen (ENW) van NWO. Hij gaf aan dat het Domeinbestuur veel belang hecht aan nationale congressen van hoog niveau voor alle disciplines van het domein ENW, en dat het bestuur daarom de vernieuwing van het NMC van harte ondersteunt. Janne Brok, directeur van Sioux LIME (Laboratory for Industrial Mathematics Eindhoven) sloot dit

gedeelte af door een fascinerende indruk te geven van hetgeen zij met wiskunde allemaal kunnen doen voor hun klanten. De zaal was al goed gevuld voor de opening!

Daarna was het de beurt aan de eerste plenaire spreker, Jan Hesthaven van EPFL, die sprak over 'Structure preserving reduced order models'. Hij gaf een mooi overzicht van waar gereduceerde modellen allemaal voor gebruikt worden, middels een presentatie van het werk van medewerkers uit zijn groep. Tijdens de onmiddellijk hierna volgende uitgebreide lunch, inclusief warme hapjes, kon hierover nagepraat worden. Of men koos voor de traditionele jaarvergadering van het KWG. Blijkens onderstaande foto was het enerzijds een gelegenheid die tot vrolijkheid stemde, anderzijds moest men zich af en toe ook achter de oren krabben...



De jaarvergadering van het KWG



Foto: Martijn Anthonissen

De drukbezochte sessie van 4TU.AMI



Foto: Martijn Anthonissen

Dion van Gijswijt krijgt de N.G. De Bruijn-prijs uitgereikt door Jan van Neerven

Parallele sessies

Meteen na de middag begonnen de eerste parallelle sessies, die goed werden bezocht: een sessie georganiseerd door de wiskundecusters DIAMANT en GQT over 'Arithmetic and Geometry' en een sessie georganiseerd door NDNS+ en STAR over 'Numerics meets Statistics'. Beide sessies benadrukten het vervagen van de grenzen tussen disciplines c.q. clusters, in lijn met hetgeen in het vorig jaar verschenen 'Sectorbeeld' wordt beargumenteed (*Een nieuw fundament: beeld van de bètasector*, te vinden op de website van NWO). Ook was er een drukbezochte sessie van 4TU.AMI over 'Mathematical Aspects of Machine Learning', in lijn met de nieuwe onderzoeksposities welke in het Sectorplan Bèta (dat momenteel wordt gefinancierd) worden voorgesteld.

MSc-prijs en De Bruijn-lezing

Er was door de congresorganisatie geprobeerd om de pauzes vrij te houden, maar dat was toch niet helemaal gelukt. In de lunchpauze was er al de jaarvergadering van KWG geweest, in de koffiepauze na de parallelle sessies vonden de voordrachten plaats voor de nieuwe MSc-prijs van de

PWN-commissie Innovatie. Uit de inzendingen waren drie genomineerden geselecteerd, deze hielden een korte voordracht over uiteenlopende onderwerpen: De prijsuitreiking zou nog dezelfde middag plaatsvinden, waardoor de jury slechts kort de tijd had om zich te beraden. Uiteindelijk viel de keuze op Tineke School, die de prijs van 1000 euro in ontvangst mocht nemen alsmede de felicitaties van Vivi Rottschäfer, voorzitter van de PWN-commissie Innovatie.

Om 15.30 uur was het tijd voor de 'De Bruijn lecture', waarbij Jan van Neerven een mooie laudatio uitsprak voor Dion Gijswijt, die vervolgens een prachtige voordracht hield over zijn prijswinnende artikel 'On large subsets of $\mathbb{F}_q^n$ with no three-term arithmetic progression'. Het artikel verdiende de prijs dubbel en dwars, met name omdat het niet alleen heel veel aandacht genereerde onder wiskundigen, maar ook onder journalisten en het grote publiek. Voor een samenvatting, zie het programma-boekje of de website van NMC 2019.

Tweede plenaire lezing en speeddates

Na een korte pauze volgde de laatste plenaire lezing van de dag door Barbara Gentz

van de Universiteit Bielefeld over 'Noise in coupled dynamics—friend or foe'. Wederom veel belangstelling, het was goed om te zien dat velen het volledige programma volgden en dus was de zaal ook bij de plenaire lezingen goed bezet. Kennis nemen van ontwikkelingen in andere dan de eigen discipline is ook nuttig, en kan leiden tot nieuwe inzichten dan wel onvermoede samenwerkingen.

De laatste plenaire lezing betekende zeker niet het einde van de eerste congresdag. Van 18.00–19.00 uur vond de speed dating met de industrie plaats, waarvoor ditmaal zeven bedrijven waren geselecteerd: ABN AMRO, ASML, Compumatica, Optiver, Signify (voorheen Philips Lighting), Sioux LIME (directeur Janne Brok was betrokken bij de opening van NMC 2019) en VORtech. Er was volop belangstelling, zodanig zelfs dat we lang niet alle wensen van geïnteresseerden konden honoreren. Het was weer een zeer dynamisch gebeuren, na zes minuten klonk luid een fietsbel, en dan werd er gewisseld.

Tegelijkertijd was er ook een sessie van de Nederlandse tak van European Women in Mathematics, waarbij ook de twee vrouwelijke invited speakers aanwezig waren.



Foto: Martijn Anthonissen

Speeddating met bedrijven



Foto: Martijn Anthonissen

EWM-NL-sessie met Anke van Zuylen, Barbara Gentz en Svetlana Dubinkina

Diner, dans en napraten

Tijdens de speeddating en de sessie van EWM-NL was er al gelegenheid om een drankje te nuttigen, als aperitief voor het diner dat om 19.00 uur stipt begon. Zo'n 170 deelnemers, inclusief mensen van de aan de speeddating deelnemende bedrijven, genoten van een uitgeserveerd driegangendiner. Een uitstekende gelegenheid om met allerlei collega's van gedachten te wisselen, de eerste congresdag te bespreken, of zaken te doen.

Er was niet alleen een toetje tijdens het diner, maar ook, evenals vorig jaar, een toetje na het diner. Ditmaal was gekozen voor een 'lecture performance' inclusief dans, geïnspireerd op de zogenaamde 'spurs' van Lehmer. Om dit mogelijk te maken was de zaal op Paasmaandag omgebouwd. Tom Verhoeff (TU/e, Wiskunde en Informatica) en choreografe Roos van Berkel waren de bedenkers van deze eneroverende voorstelling, die alom hoog werd gewaardeerd. Aan het einde van de show was er ook nog een actieve rol weggelegd voor het publiek! Tijdens de Nationale Wiskunde Dagen (NWD), vooral bezocht door wiskundeleraren, had deze voorstelling ook plaatsgevonden, en ook daar spraken er zeer lovend over. Dat er relaties zijn tussen wiskunde en kunst werd vorig jaar al onderstreept bij de avondvoorstelling van Ars en Mathesis (toen geïnspireerd op het bekende boek over Gödel, Escher en Bach), dit jaar dus nog maar weer eens. Mochten er overigens ideeën zijn voor komend jaar, dan houdt de lokale organisatiecommissie zich van harte aanbevelen.

Napraten over de voorstelling, alsmede over vele andere zaken, wiskunde alsmede wereldproblemen en de 'personal touch',

gebeurde in de gezellige Abdijbar, waar het trappistenbier velen goed smaakte en het nog behoorlijk laat werd alvorens de laatste deelnemers vertrokken... Binnendoor naar de kamer, en dan genieten van een welverdiende nachtrust.

Derde plenaire lezing en strategiesessie

Het ontbijt op de tweede dag was een drukte van belang, met veel Indiase, Chinese en Japanse hotelgasten die echter al vroeg geacht werden met hun bussen mee te gaan naar de volgende bestemming ergens in Europa. Uitgebreid konden men genieten van de vele lekkernijen, waarna om 09.00 uur de volgende plenaire lezing begon. Ditmaal was het de beurt aan Anke van Zuylen, en wat velen meteen dachten bij het zien van haar naam: inderdaad, ze is Nederlandse, ook al woont ze al geruime tijd in de Verenigde Staten. Ze was zelfs op de fiets van Hilvarenbeek naar Veldhoven gekomen maandagavond! Haar lezing was getiteld 'Improved tours and paths for the traveling salesman', en zij gaf een bijzonder mooi en compleet overzicht van de ontwikkelingen op dit terrein. Met genoegen constateerden we dat ook bij deze lezing de zaal weer helemaal gevuld was.

Evenals vorig jaar was er ook nu weer tijd ingeruimd voor de presentatie van een aantal zaken die belangrijk zijn voor alle Nederlandse wiskundigen. Ditmaal waren de prominente zaken het 'Sectorplan Bèta en Techniek', alsmede de evaluatie van de wiskundeclusters door een internationale commissie onder leiding van Rob Tijdeman. De strategie-sessie werd (in)geleid door Sjoerd Verduyn Lunel, voorzitter van PWN, gevolgd door een betoog van Frank van der Duyn

Schouten over het werk van de Wiskunderaad, en in het verlengde hiervan het Sectorplan. Op alle wiskunde-instituten zullen nieuwe posities worden gecreëerd, hetgeen zowel de onderwijslast zal verlagen, als een positief effect zal hebben op het Nederlandse wiskundeonderzoek. Hierna was het de beurt aan Rob Tijdeman, die de conclusies uit het rapport van de cluster-evaluatie uit de doeken deed, met het predicaat 'Excellent' voor alle vier clusters. Een prachtig resultaat natuurlijk. Vervolgens namen Arjen Doelman en Christiane Klöditz namens NWO het woord, om duidelijk te maken wat de plannen zijn met betrekking tot de clusters. Er ontspon zich hierna een discussie over de financiering van de clusters, waar nog enige onduidelijkheid over bleef bestaan, vooral omdat 'clusters' uniek zijn voor het vakgebied wiskunde, andere vakgebieden kennen dit niet. De hoop is natuurlijk dat het uitermate positieve rapport zal leiden tot hernieuwde en adequate financiering van de wiskundeclusters.

De strategiesessie werd afgesloten door Vivi Rottschäfer, die licht liet schijnen over de verschillende activiteiten van de PWN-commissie Innovatie. Belangrijk hierbij zijn onder andere de jaarlijkse Studiegroep Wiskunde met de Industrie (SWI), waarvoor ook een mooie nieuwe website beschikbaar is (www.swi-wiskunde.nl). Daarna nam Quintijn Puite, groot instigator achter de verschillende wiskundeolympiades in Nederland, nog even het woord om te vertellen over een belangrijk evenement in 2020: de EGMO, ofwel de European Girls' Mathematical Olympiad, te houden in Egmond aan Zee (de overeenstemming van de eerste vier letters is vast geen toeval) in april 2020.



Dans, geïnspireerd op de 'spurs' van Lehmer



Rob Tijdeman over de cluster-evaluatie



Foto: Martijn Anthonissen

Siëna van Schaick, genomineerde voor de Pythagorasprijs



Foto: Martijn Anthonissen

De uitreiking van de Stieltjesprijs 2018 aan Joost Nuiten en Souvik Dhara

Parallele sessies tweede dag

Na een koffiepauze met allerlei lekkernijen (de variatie was groot) waren er vervolgens om 11.30 uur weer parallelle sessies, ditmaal zelfs vijf in totaal! Wederom twee sessies georganiseerd door een paar clusters, te weten een sessie van DIAMANT en STAR over 'Stochastics meets Optimization', en een door GQT en NDNS+ met de titel (al bijna voorspelbaar na het lezen van de vorige titels van door paren clusters gezamenlijk georganiseerde sessies) 'Geometry and Dynamics'. Daarnaast een leuke sessie over geschiedenis van de wiskunde, georganiseerd door (wie anders...) Gerard Alberts: 'History of Differential Geometry'. Ook de beide sponsorende zwaartekrachtprojecten, 'Networks' en 'QSC' ('Qusoft'), organiseerden een sessie. Men had dus voldoende te kiezen, en de keuze viel sommigen best zwaar... Maar dit is gebruikelijk wanneer er parallelle sessies worden georganiseerd.

Prijzen

Van 13.00-14.00 uur was de lunch, het middagprogramma stond vervolgens voor een groot deel in het teken van prijswinnaars van de diverse prijzen die de Nederlandse wiskunde inmiddels rijk is. Allereerst was het de beurt aan de winnaars van de Stieltjesprijzen voor 2017 en 2018; zoals juryvoorzitter Frans Oort uitlegde, had een inhaalslag plaatsgevonden vanwege het feit dat de prijzen nu tijdens het NMC worden uitgereikt, en het een tikkeltje vreemd is om op NMC 2019 de Stieltjesprijs 2017 nog uit te reiken. Er werd dus tevens de prijs voor 2018 uitgereikt, hetgeen de jury een tweede ronde kostte waarvoor we hen zeer dankbaar zijn gezien de grote hoeveelheid werk. En op NMC 2020 zal dus gewoon de Stieltjesprijs voor het beste proefschrift

uit 2019 worden uitgereikt. Ook werd in de eerste sessie na de lunch de competitie gehouden welke verband houdt met de KWG PhD-prijs. De jury had de middagkoffiepauze tot haar beschikking om tot een winnaar te komen.

Docentendag

Parallel aan de eerste middagsessie vond ook de traditionele 'Docentendag' plaats. Deze begon met een mooi, didactisch uitstekend in elkaar stekend, verhaal van Jeanine Daems (vroeger een van de wiskundemeisjes, samen met Ionica Smeets). Het publiek kreeg vouwblaadjes waar ze van alles mee moesten doen, hetgeen al meteen de aandacht vestigde. Vervolgens was het de beurt aan leden van de PWN-commissie Onderwijs, onder leiding van Jan Karel Lenstra, die verhaalde over curriculum.nu en over de beroepsstandaard voor wiskundedocenten. De sessie werd afgesloten met een aantal presentaties door de genomineerden voor de Pythagorasprijs voor het beste profielwerkstuk wiskunde, onder de bezielande leiding van Derk Pik. Overigens was een van de genomineerden Siëna van Schaick, die recent bij de EGMO 2019 in Kiev een bronzen medaille behaalde (zie foto linksboven).

Laatste plenaire lezing en prijsuitreikingen

Om half 5 's middags was het de beurt aan de laatste plenaire spreker, Gábor Lugosi, die een voordracht hield getiteld 'Many questions and a few answers in network archeology'. Diverse malen refereerde de spreker aan het werk dat hiervoor ook in Nederland plaatsvindt, onder andere binnen het zwaartekrachtprogramma 'Networks'. Gábor is dan ook een goede bekende van de leiding van dit programma.

Om 17.30 uur, al redelijk laat in de middag, was dan de allerlaatste sessie waarin de prijzen werden uitgereikt voor de KWG PhD-prijs, de Stieltjesprijzen 2017 en 2018, en de Pythagorasprijs. Steeds met een trefend en lovend woord van de betreffende voorzitter, en een daverend applaus van het nog steeds in volle getale aanwezige publiek.

Video en podcast

Al met al kunnen we terugkijken op een zeer geslaagd NMC, voortbordurend op de in 2018 geïntroduceerde nieuwe stijl, met een aanzienlijk (in het licht van de meivakantie) aantal deelnemers, veel overnachtingen, nieuwe ingrediënten die in de smaak vielen en ook veel nuttige en waardevolle informatie voor wiskundigen. Nieuw was dat er een camerateam rondliep gedurende het gehele congres, dat interviews maakte met deelnemers en sprekers. De door dit team gemaakte video-impressies zijn te zien op de website van het KWG, alsmede van NMC 2019 (www.nmc2019.nl). Ook was er een journaliste aanwezig die interviews hield met diverse wiskundigen, welke als podcast zullen worden gepubliceerd. Ook dit zullen we via de genoemde websites bekend maken. (Een eerste podcast met prof.dr. Eric Opdam is te beluisteren via <https://soundcloud.com/user-864747685>). Evenals in 2018 vindt er momenteel een evaluatie plaats van het congres, en dit zou eventueel tot aanpassingen kunnen leiden. Dat zult u zeker vernemen dan, maar wat wel zeker is zijn de dagen waarop het NMC 2020 zal worden gehouden: 14 en 15 april 2020! Zet dit alvast in uw agenda, en kom volgend jaar luisteren kijken, en actief deelnemen, want het is echt de moeite waard!

René Schoof

Dipartimento di Matematica
Università di Roma "Tor Vergata"
schoof@mat.uniroma2.it

De oplossing

De vervloekte kromme

De wat oudere Ajax-fan kent de vervloekte kromme eigenlijk al jaren. Dat is de Feyenoord-speler Willem van Hanegem. Van Hanegem had de bijnaam 'de kromme', omdat hij de bal zo mooi in een curve kon schieten. Hij was een van de beste voetballers die Nederland ooit gekend heeft. Helaas voor Ajax speelde hij bij Feyenoord. Dit artikel gaat over een andere vervloekte kromme. Namelijk deze: $(-3y+1)x^3 + 2(y^2-y)x^2 + (y^2+y-1)x - y^3 + 2y^2 - y = 0$. In dit artikel legt René Schoof eerst uit waarom deze kromme, net als Willem van Hanegem trouwens, een hele interessante kromme is. Dan legt hij uit waarom hij vervloekt werd en ten slotte waarom hij inmiddels vervloekte kromme af is.

Het uniformiteitsvermoeden van Serre

In de tweede helft van de twintigste eeuw zijn *elliptische krommen* een steeds grotere rol gaan spelen in getaltheoretisch onderzoek. Een hoogtepunt was het bewijs in 1995 van Andrew Wiles van één van de hoofdvermoedens in de theorie en de toepassing hiervan op de Laatste Stelling van Fermat. Er zijn nog steeds veel belangrijke open vragen. De bekendste is misschien wel het vermoeden van Birch en Swinnerton-Dyer. Het staat naast het Riemannvermoeden in de lijst van zeven 'million dollar problems' van het Clay Institute.

Het jaar 1972 was belangrijk voor de ontwikkeling van de theorie. In dat jaar publiceerde de Franse wiskundige Jean-Pierre Serre — Fields-medaille, ICM Amsterdam 1954 — een artikel dat grote invloed zou hebben [8]. Serre bewees in dit artikel een stelling over torsiepunten van elliptische krommen. Torsiepunten hebben eindige orde in de groep van punten op een elliptische kromme E . Ze spelen een belangrijke rol in de theorie. Dit geldt in het

bijzonder voor de punten van priemorde l . Deze l -torsiepunten vormen een ondergroep $E[l]$, die isomorf is met $\mathbb{Z}/l\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}/l\mathbb{Z}$.



Willem van Hanegem

Zelfs als de elliptische kromme een vergelijking heeft met coëfficiënten in $\mathbb{Q}$, zijn de l -torsiepunten in het algemeen *niet* rationaal. Ze worden gepermuteerd door de Galoisgroep. Deze werkt via de automorfismengroep $\mathrm{GL}_2(\mathbb{Z}/l\mathbb{Z})$ op $E[l]$. Als het beeld van de Galoisgroep in $\mathrm{GL}_2(\mathbb{Z}/l\mathbb{Z})$ triviaal is, dan betekent dat precies dat de punten in $E[l]$ rationale coördinaten hebben. Als het beeld klein is, dan zijn de coördinaten algebraïsche getallen van kleine graad. Voor een speciale klasse van elliptische krommen, de zogenaamde *CM-krommen*, is het beeld inderdaad klein. Dit wordt veroorzaakt door de extra symmetrieën die CM-krommen hebben. De Galoisgroep moet deze respecteren.

Maar in het algemeen is het beeld van de Galoisgroep in $\mathrm{GL}_2(\mathbb{Z}/l\mathbb{Z})$ juist heel groot. De stelling van Serre maakt dit precies: voor een gegeven elliptische kromme die niet een CM-kromme is, het beeld van de Galoisgroep voor grote priemgetallen l , *gelijk* is aan $\mathrm{GL}_2(\mathbb{Z}/l\mathbb{Z})$. De stelling van Serre bevestigt de filosofie die zegt dat als er geen evidente restricties op het beeld van de Galoisgroep zijn (zoals bij CM-elliptische krommen), het beeld meestal zo groot mogelijk is. Het beeld van de Galoisgroep in $\mathrm{GL}_2(\mathbb{Z}/l\mathbb{Z})$ is voor heel veel elliptische krommen en priemmen uitgerekend. Voor kleine priemmen l gebeurt het regelmatig dat het strikt kleiner is dan $\mathrm{GL}_2(\mathbb{Z}/l\mathbb{Z})$, maar voor grote l komt dat heel zelden voor. Serre stelde de vraag of er

een uniforme grens bestaat, zodat voor *alle* elliptische krommen en alle priemen groter dan die grens, het beeld van de Galoisgroep gelijk is aan $GL_2(\mathbb{Z}/l\mathbb{Z})$. Dit is het ‘uniformiteitsvermoeden’ van Serre.

Modulaire krommen

Modulaire krommen zijn 1-dimensionale parameterruimten. Ze parametriseren isomorfiëklassen van elliptische krommen, eventueel met wat extra structuur die met torsiepunten te maken heeft. Het eenvoudigste voorbeeld is de j -lijn. Elke elliptische kromme E heeft een zogenaamde j -invariant. Dat is een complex getal, dat E karakteriseert als kromme over $\mathbb{C}$. Daarom parametrizeert de j -lijn alle elliptische krommen over $\mathbb{C}$. Andere voorbeelden zijn de krommen $X(l)$. Deze parametriseren elliptische krommen samen met een basis voor de 2-dimensionale $\mathbb{Z}/l\mathbb{Z}$ -vectorruimte $E[l]$ van l -torsie punten.

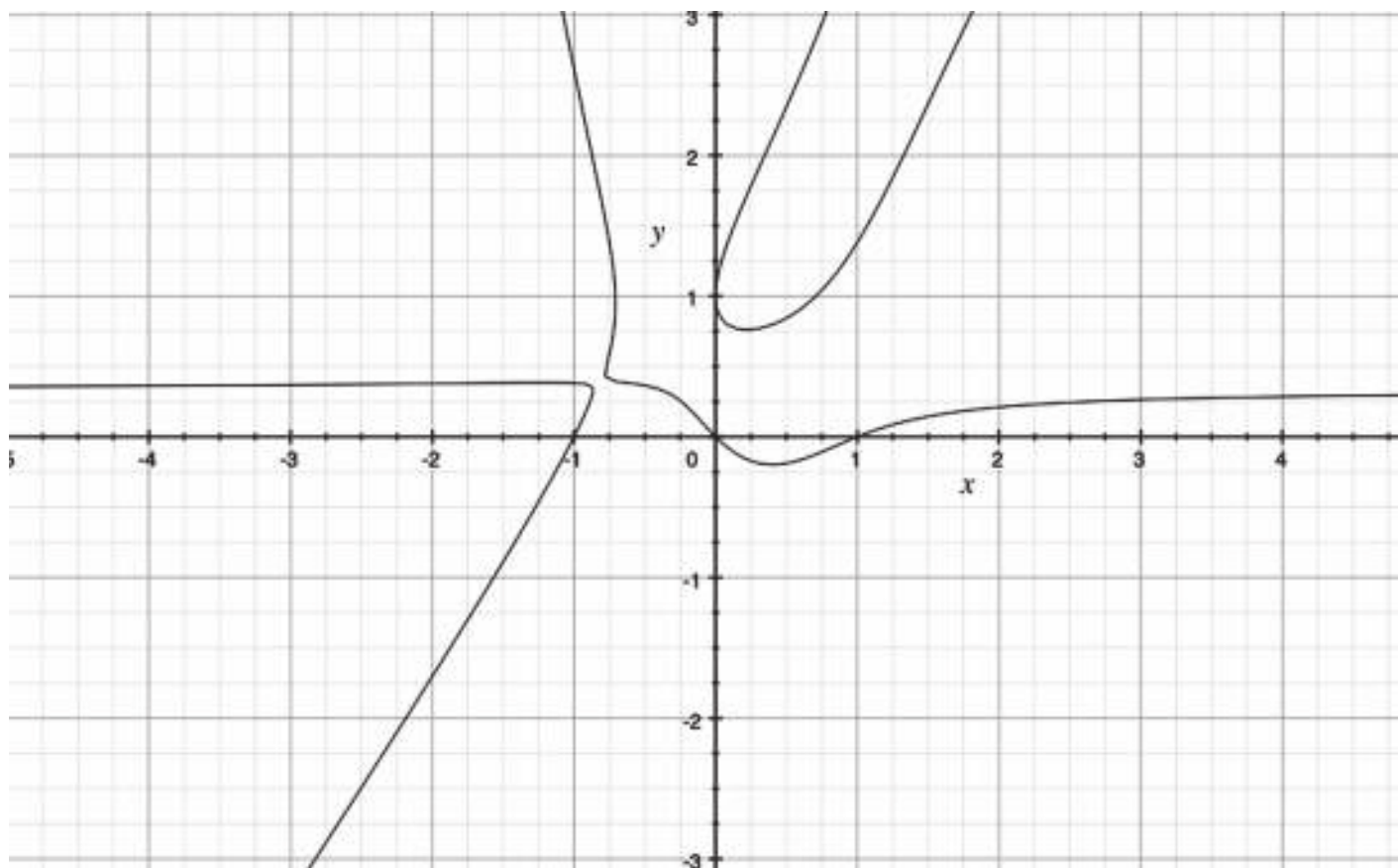
Elliptische krommen waarvoor de l -torsiepunten de eigenschap hebben dat het beeld van de Galoisgroep in $GL_2(\mathbb{Z}/l\mathbb{Z})$ klein is, geven aanleiding tot rationale punten op zekere modulaire krommen die

gerelateerd zijn aan de krommen $X(l)$. De modulaire krommen die relevant zijn voor het uniformiteitsvermoeden van Serre hebben vergelijkingen met rationale coëfficiënten. Meestal hebben ze evidente rationale punten, zoals spitsen of CM-punten. De laatste worden ook wel *Heegnerpunten* genoemd en corresponderen met CM-elliptische krommen. Het uniformiteitsvermoeden van Serre laat zich nu vertalen in een diofantisch probleem. De vraag is namelijk of deze modulaire krommen ook *exotische* rationale punten hebben. De verwachting is, dat als er geen evidente redenen zijn voor het bestaan van extra rationale punten, dat ze ze dan, op eindig veel uitzonderingen na, ook niet hebben.

Het vermoeden van Serre valt op een natuurlijke manier uiteen in drie gevallen: drie families van modulaire krommen. Deze trichotomie vinden we al in het bewijs van de stelling van Serre uit 1972. Elke familie bestaat uit oneindig veel krommen: één kromme voor elk priemgetal l . De krommen worden steeds ingewikkelder naarmate l groter wordt. In het bijzonder groeit het geslacht met l .

De eerste familie bestaat uit de bekende modulaire krommen $X_0(l)$. De methoden ontwikkeld door Mazur in zijn studie van de krommen $X_0(l)$ in het ‘Eisenstein ideal’-artikel [7] uit 1977 bleken in staat om ook het eerste geval van het uniformiteitsvermoeden van Serre te bewijzen. De methode van Mazur is een uiterst verfijnde versie van de klassiek descent-methode. Deze methode om diofantische vergelijkingen op te lossen gaat terug op Fermat. Mazur kreeg eerst de Coleprijs voor zijn artikel, en een paar decennia later ook de Steeleprij.

Aan de status van het probleem voor de andere twee families — split Cartan en non-split Cartan — veranderde in de jaren na 1977 niet veel. Pas in 2012 gebeurt er weer iets. Dan bewijzen Yuri Bilu en Pierre Parent [2], dat er ook in het split Cartan geval een uniforme grens is. Zij gebruikten een methode van Runge. Carl Runge was een toegepast wiskundige uit het begin van de vorige eeuw. In het enige artikel dat hij ooit over getaltheorie publiceerde, beschrijft hij een efficiënte methode om *gehele* oplossingen van vergelijkingen te vinden. Omdat Mazur, Momose, Bilu en Parent al hadden



Figuur 1 De vervloekte kromme $(-3y+1)x^3+2(y^2-y)x^2+(y^2+y-1)x-y^3+2y^2-y=0$.



Carl Runge



Claude Chabauty



Alan Baker



Barry Mazur

bewezen dat in het split Cartan-geval alle rationale oplossingen vanzelf geheel moesten zijn, konden Bilu en Parent de methode van Runge toepassen.

De vervloekte kromme

Na 2012 was er dus alleen nog het derde geval, de non-split Cartan-familie over. Dit leek tot voor kort hopeloos. Alle methoden die gebruikt waren in de andere twee gevallen, konden om hele fundamentele redenen niet werken in dit geval. Er is een natuurlijke manier om de rationale punten van een kromme C te zien als deelverzameling van de *groep* van punten van de Jacobi-variëteit van C . Als die groep klein is, dan zijn er methoden om de rationale punten op de kromme C te bepalen. In het derde geval van het uniformiteitsvermoeden van Serre, is die groep echter vreselijk groot.

De descent-methode van Mazur is daarom bijvoorbeeld onbruikbaar. Hetzelfde geldt voor de klassieke p -adische methode die Claude Chabauty [3], een van de vroege leden van de Bourbaki-groep, in de jaren veertig van de vorige eeuw ontwikkelde. In het derde geval is er ook geen a priori-reden om aan te nemen dat de rationale punten geheel zouden zijn. Daarom is de methode van Alan Baker (linear forms in logarithms) niet geschikt. Het is ook een van de redenen waarom de methode van Runge niet kan werken. En met deze vier methoden is het lijstje van beschikbare methoden wel zo'n beetje uitgeput...

Deze wanhopige situatie is perfect terrein voor de experimentele computationale getaltheoreticus. Als we het niet kunnen bewijzen, dan gaan we de kleinste niet-triviale gevallen doorrekenen. In het non-split Cartan-geval hebben we te maken met een oneindige familie diofantische vergelijkingen. Voor elk priemgetal l is er een kromme

$X_{ns}(l)$ en de vraag is of er, afgezien van de voorspelbare CM-punten, nog andere, exotische, rationale punten zijn.

Voor de kleine priemmen $l = 2, 3, 5, 7, 11$ is de situatie eenvoudig en helemaal onder controle. Er zijn dan oneindig veel rationale exotische punten. Voor $l \geq 13$, heeft elke kromme $X_{ns}(l)$ maar eindig veel rationale punten en het is niet onredelijk te vermoeden dat dit alleen maar CM-punten zijn.

Het eerste interessante geval is $X_{ns}(13)$. Dit is de kromme die David Zureick-Brown een paar jaar geleden de 'vervloekte kromme' is gaan noemen. Het is een vierdegraads kromme in het vlak. De vergelijking is in 2010 uitgerekend door Burcu Baran. De grafiek staat in Figuur 1. Er zijn vier evidente rationale punten: $(0,0)$, $(0,1)$, $(1,0)$ en $(-1,0)$. Er zijn ook nog drie rationale punten in oneindig. Deze worden zichtbaar als we de kromme in het projectieve vlak inbedden. Deze zeven punten zijn allemaal CM-punten. De vraag is of er ook nog exotische rationale punten zijn. In 2016 kon dit probleem met geen enkele bekende methode opgelost worden.

Niet-abelse Chabauty

In 1983 bewees Gerd Faltings het vermoeden van Mordell: een kromme van geslacht $g \geq 2$ heeft maar eindig veel rationale punten. Dit spectaculaire resultaat bezorgde Faltings in 1986 de Fieldsmedaille. Toch is het niet het laatste woord over deze materie. De stelling van Faltings is namelijk niet effectief. Dat wil zeggen dat, gegeven een expliciete kromme, zijn bewijs geen grens geeft op het aantal rationale punten of op de grootte van hun coördinaten.

De klassieke methode van Chabauty, die we al eerder noemden, is *wel* effectief. Maar helaas werkt deze niet altijd. Het idee is als volgt. We kiezen een priemgetal p en werken in de $\mathbb{Q}_p$ -vectorruimte $J(\mathbb{Q}_p) \otimes \mathbb{Q}_p$.

Hier is J de Jacobiaan van de kromme X en staat $\mathbb{Q}_p$ voor het lichaam van de p -adische getallen. We nemen aan dat X minstens één rationaal punt heeft en gebruiken dat om X via de Abel-Jacobi-afbeelding in J in te bedden. Dan krijgen we een commutatief diagram:

$$\begin{array}{ccc} X(\mathbb{Q}) & \hookrightarrow & J(\mathbb{Q}) \otimes \mathbb{Q}_p \\ \downarrow & & \downarrow \\ X(\mathbb{Q}_p) & \hookrightarrow & J(\mathbb{Q}_p) \otimes \mathbb{Q}_p \end{array}$$

De $\mathbb{Q}_p$ -vectorruimte $J(\mathbb{Q}_p) \otimes \mathbb{Q}_p$ rechtsonder heeft dimensie g . Wegens de stelling van Mordell-Weil is $J(\mathbb{Q})$ een eindig voortgebrachte abelse groep van, zeg, rang r . De dimensie van $J(\mathbb{Q}) \otimes \mathbb{Q}_p$ is dus op zijn hoogst r . Als het nu zo is dat $r < g$, dan is het beeld van $J(\mathbb{Q}) \otimes \mathbb{Q}_p$ een *echte* deelruimte van $J(\mathbb{Q}_p) \otimes \mathbb{Q}_p$. Dat betekent dat er een niet triviale lineaire vorm f bestaat, die nul is op het beeld van $J(\mathbb{Q}) \otimes \mathbb{Q}_p$ en dus ook op het beeld van de verzameling $X(\mathbb{Q})$ van rationale punten. Omdat de groep voortgebracht door de p -adische punten van $X(\mathbb{Q}_p)$ dicht ligt in de p -adische topologie van $J(\mathbb{Q}_p) \otimes \mathbb{Q}_p$, is f ook niet-triviaal op $X(\mathbb{Q}_p)$ en heeft maar eindig veel nulpunten in de 1-dimensionale verzameling $X(\mathbb{Q}_p)$. Als er nu een expliciete lineaire vorm f voorhanden is, dan kan men de nulpunten van f in $X(\mathbb{Q}_p)$ bepalen en checken of het punten in $X(\mathbb{Q})$ zijn.

De conditie $r < g$ is cruciaal. Echter, de krommen $X_{ns}(l)$ uit de derde familie van het uniformiteitsvermoeden van Serre, voldoen hier geen van alle aan. Dat geldt in het bijzonder voor de vervloekte kromme $X_{ns}(13)$. In dat geval is r gelijk aan g . Minhyong Kim, wiskundige in Oxford, liep al jaren rond met ideeën om de Chabauty-methode te modificeren, zodat deze ook zou kunnen werken als $r \geq g$. Zijn idee was om in een ruimte te werken die *groter* is dan



Minhyong Kim

$J(\mathbb{Q}_p) \otimes \mathbb{Q}_p$, zodat het beeld van $X(\mathbb{Q})$ toch weer in een *echte* deelruimte terechtkomt. Dit betekent dat de rationale punten van X dus weer in de eindige verzameling nulpunten van een p -adisch analytische functie op $X(\mathbb{Q}_p)$ bevat zijn. Omdat de Jacobiaan gerelateerd is aan het abelse stuk van de étale fundamenteelgroep, zocht en construeerde Kim zo'n ruimte in de fundamenteelgroep. Zie [4, 5, 6].

Na jaren werk is de methode van Kim nu eindelijk toegepast op een expliciete kromme, en wel op de vervloekte kromme $X_{ns}(13)$, waarvoor alle bekende methoden faalden. In een recente preprint [1] beschrijven Jennifer Balakrishnan, Netan Dogra, Steffen Müller, Jan Tuitman en Jan Vonk de berekeningen die ze met Kims methode gedaan hebben om de rationale punten op de modulaire kromme $X_{ns}(13)$ te bepalen.

Het zijn inderdaad precies de zeven voorstelbare CM-punten.

Terwijl de klassieke methode van Chabauty gebruikmaakt van een *abelse quotiënt* van de fundamenteelgroep, werken Balakrishnan, Dogra, Müller, Tuitman en Vonk met het eenvoudigste niet-abelse unipotente quotiënt. Deze aanpak heet *quadratic Chabauty*. Het is belangrijk dat r precies gelijk is aan g , en dat de Jacobiaan van $X_{ns}(13)$ een grote endomorfismenring heeft. De auteurs kiezen $p = 17$. De berekeningen worden uitgevoerd in termen van de p -adische hoogtes van Jan Nekovář en met behulp van computerprogramma's om p -adische differentiaalvergelijkingen op te lossen. En het werkt! Dit is een spectaculaire stap in de theorie van de diofantische vergelijkingen.

Toevallig hebben alle auteurs van [1] wel iets met Nederland te maken. Jan Tuitman is zelfs een Nederlander. Hij werkt in Leuven. Jennifer Balakrishnan was een studente van Kiran Kedlaya, die een student van onze Johan de Jong was, toen die nog bij MIT werkte. Steffen Müller is UD in Groningen en Netan Dogra was een paar jaar geleden post-doc in Nijmegen. Jan Vonk ten slotte, is een Vlaamse zuiderbuur, die volgend jaar in Leiden komt werken. ☺



Jennifer Balakrishnan



Netan Dogra



Steffen Müller



Jan Tuitman



Jan Vonk

Referenties

- 1 J. Balakrishnan, N. Dogra, S. Müller, J. Tuitman en J. Vonk, Explicit Chabauty–Kim for the Split Cartan Modular Curve of Level 13, *arXiv:1711.05846* (2017).
- 2 Yu. Bilu en P. Parent, Serre's uniformity problem in the split Cartan case, *Ann. Math.* 173 (2011), 569–584.
- 3 C. Chabauty, Sur les points rationnels des courbes algébriques de genre supérieur à l'unité, *C. R. Acad. Sci* 212 (1941), 882–884.
- 4 M. Kim, The motivic fundamental group of the projective line minus three points and the theorem of Siegel, *Invent. Math.* 161 (2005), 629–656.
- 5 M. Kim, The unipotent Albanese map and Selmer varieties for curves, *Publ. Res. Inst. Math. Sci.* 45 (2009), 89–133.
- 6 M. Kim, Galois Theory and Diophantine Geometry, in *Non-abelian Fundamental Groups and Iwasawa Theory*, J. Coates, M. Kim, F. Pop, M. Saïdi en P. Schneider (eds.), LMS Lecture Notes Series 393, Cambridge University Press, 2012, pp. 162–187.
- 7 B. Mazur, Modular curves and the Eisenstein ideal, *Publ. Math. de l'IHÉS* 47 (1977), 33–186.
- 8 J.-P. Serre, Propriétés galoisiennes des points d'ordre fini des courbes elliptiques, *Invent. Math.* 15 (1972), 259–331.

Hans Zwart

Faculteit EWI, Universiteit Twente

Faculteit Werktuigbouwkunde, Technische Universiteit Eindhoven

h.j.zwart@utwente.nl, h.j.zwart@tue.nl

In Memoriam Ruth Curtain (1941–2018)

Een scherp oog voor nieuwe ontwikkelingen

Op 19 maart 2018 overleed Ruth Curtain, emeritus hoogleraar systeem- en regeltheorie aan de Rijksuniversiteit Groningen. Hans Zwart, die bij haar promoveerde en met haar bezig was om een gezamenlijk boek uit 1995 te herzien, blikt terug op haar leven en werk.

Melbourne–Groningen

Op 16 juli 1941 werd Ruth als eerste van vier kinderen, allen meisjes, geboren te Melbourne. Ze groeide op in een gewoon arbeidersgezin, vader huisschilder, moeder huisvrouw. In die tijd was het voor meisjes uit een arbeidersgezin zeer normaal om op 14-jarige leeftijd de school te verlaten om aan het werk te gaan. Haar vader was die mening ook toegedaan. Het is haar moeder geweest die heeft gezorgd dat ze verder mocht gaan leren, al was dat wel na een fikse echtelijke ruzie [9]. Na haar was het pleit thuis beslecht, en al haar zussen hebben de middelbare school afgemaakt en doorgeleerd.

Ofschoon het pleit thuis beslecht was, was het dat op school nog niet. Wiskunde werd meisjes afgeraden want de meesten zouden toch maar zakken. Voor Ruth was dit een extra uitdaging om nog meer haar best te doen, en ze slaagde dan ook als beste. Haar eindexamen gaf haar toelating tot de universiteit, en met een beurs ging ze dan ook studeren. Haar beurs had de voorwaarde dat je na je universitaire studie drie jaar lang als leraar ging werken. Ruth had het geluk dat ze aan deze voorwaarde kon voldoen door als tutor te werken op de universiteit. Dat gaf haar ook de gelegenheid om haar master te halen. Ze deed dit op een onderwerp uit de algebra, maar dat kon haar maar matig boeien. Al tijdens haar (bachelor) studie had ze zowel natuurkunde als wiskunde als haar specialisatie. Ze miste de natuurkunde tijdens haar master. Het nieuwe vakgebied regeltheorie trok haar aandacht, en omdat er

in Australië, en bij de doorgaans gekozen universiteiten Oxford en Cambridge, nog geen onderzoek naar werd gedaan, vertrok ze naar Brown University om daar aan haar promotieonderzoek te beginnen. Ze promoveerde in 1969 op stochastische partiële differentiaalvergelijkingen. Na nog 18 maanden ervaring te hebben opgedaan in Purdue, en een kort bezoek aan Melbourne, ging ze werken bij het nieuw opgezette *Control Theory Center* bij de University of Warwick. Ofschoon ze het een zeer inspirerende omgeving vond, waren de carrièremogelijkheden beperkt. Daarom vertrok ze na zes jaar naar de Rijksuniversiteit Groningen. Haar bedoeling was om maar een

aantal jaren te blijven, maar ze is tot aan haar pensioen werkzaam gebleven bij de wiskundeafdeling aldaar [1]. Ook na haar pensionering is ze in Groningen gebleven.

Systeemtheorie

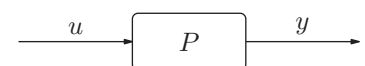
Zoals de naam al aangeeft, onderzoekt systeem- en regeltheorie hoe een systeem aan te sturen opdat het doet wat men ervan verwacht/eist. De standaard pictogram die daarbij hoort is gegeven in Figuur 1. Hierin staat u voor de ingang (de te ontwerpen functie) en y voor de uitgang (de systeemvariabele waarin men geïnteresseerd is). Het verband tussen de functies u en y , hier symbolisch weergegeven door P , kan beschreven worden door een gewone of partiële (mogelijk niet-lineaire) differentiaalvergelijking. Onder andere door het werk van Kalman kwam daar een andere beschrijving bij, namelijk de toestandsbeschrijving. Voor lineaire differentiaalvergelijkingen met constante coëfficiënten wordt deze gegeven door

$$\begin{aligned}\dot{x}(t) &= Ax(t) + Bu(t), \\ y(t) &= Cx(t) + Du(t), \\ x(0) &= x_0,\end{aligned}$$

met A , B , C en D matrices. De variabele x heet de toestand. Elke lineaire differentiaalvergelijking met constante coëfficiënten kan in deze vorm geschreven worden. Voor partiële differentiaalvergelijkingen is deze beschrijving ook mogelijk, mits de matrices worden vervangen door operatoren en de x niet gekozen wordt uit $\mathbb{R}^n$ maar uit een oneindigdimensionale Hilbert- of Banachruimte. De dan recente theorie van sterk



Ruth Curtain promoveerde in 1969 aan de Brown University



Figuur 1 Een algemeen systeem.

continue halfgroepen maakt dat de theorie voor eindigdimensionale zich laat uitbreiden naar oneindigdimensionale systemen [8,12]. Op deze systeemklasse heeft Ruth haar onderzoek gedaan. Een probleem is het optimaal regelen van het systeem. Dat wil zeggen, vind voor elke beginvoorwaarde x_0 in een gegeven Hilbertruimte, een u zodanig dat de volgende integraal (kosten) worden geminimaliseerd:

$$J(x_0, u) = \int_0^{t_f} \|y(t)\|^2 + \|u(t)\|^2 dt.$$

Dit was door Kalman opgelost voor eindigdimensionale systemen, en rond 1970 is dit resultaat uitgebreid naar oneindigdimensionale systemen door Lions, Magenes, Pritchard en Zabczyk. Vanaf midden jaren zeventig heeft Ruth, eerst samen met Tony Pritchard, veel aan dit probleem en verwante problemen gewerkt. Zeker het oneindige-horizonprobleem, dat wil zeggen $t_f = \infty$ heeft aanleiding gegeven tot vele onderzoeksvragen. De optimale u wordt dan gegeven door $u(t) = -B^*Qx(t)$, waarbij Q de kleinste niet-negatieve oplossing is van de algebraïsche Riccati-vergelijking:

$$A^*Q + QA - QBB^*Q + C^*C = 0.$$

De minimale kosten worden ook gegeven met behulp van deze oplossing, namelijk

$$\min_u J(x_0, u) = \langle x_0, Qx_0 \rangle.$$

Een van Ruth haar laatste artikelen gaat over een iteratieve benadering van deze operator [5].

Gedurende haar carrière heeft Ruth een scherp oog gehad voor nieuwe ontwikkelingen binnen het vakgebied, en ze heeft dan ook regelmatig resultaten uitgebreid van eindig- naar oneindigdimensionale systemen. Mooie voorbeelden daarvan zijn het werk met Keith Glover en Jonathan Par-



Ruth Curtain in 2006 bij haar afscheidsrede in Groningen

tington over het benaderen van oneindigdimensionale systemen door eindigdimensionale [7], en haar werk met Akira Ichikawa en haar promovendi Job Oostveen en Mark Opmeer op het Nehari-probleem [2,11,10]. Al haar promovendi, naast de twee hierboven genoemde en ondergetekende zijn dat: Jan Bontsema, Bert van Keulen, Carlos Kubrusly, Amol Sasane en Martin Weiss, kregen uitdagende onderwerpen. Daarbij konden ze altijd rekenen op haar ondersteuning en zeer goede kennis van het vakgebied. Zij heeft alleen maar mannelijke promovendi gehad. In het interview [9] zegt ze daarover: “Het geloof dat vrouwen niet goed zijn in wiskunde zit nog heel diep in de Nederlandse cultuur.” Daar betwijfelt ze ook of ze als oudere ongetrouwde vrouw (“Trouwden kwam er gewoon niet van”) wel een inspirerend voorbeeld is geweest voor jonge vrouwen.

Boeken

Na haar pensionering kwam ze niet meer zo vaak op het mathematisch instituut, maar werkte thuis aan problemen die ze interessant vond. Verder maakte ze vele reizen. In plaats van een kaartje, verstuurde ze met kerst een lange e-mail vergezeld door foto's gemaakt tijdens de reis van dat jaar. Ze hield ervan om over wiskunde/

regeltheoretische zaken te discussiëren. Teamspirit was een leerdoel tijdens haar schooltijd, en dat heeft zeker haar weerslag gehad in haar onderzoek. Een snelle telling binnen MathSciNet leert dat ze ongeveer twee derde van haar artikelen met coauteurs heeft geschreven. Een groot belang hechtte ze ook aan goede leerboeken. Met Tony Pritchard had ze al in 1978 een boek geschreven over oneindigdimensionale systeemtheorie [4]. Omdat zij begrepen dat de achterliggende wiskunde, zoals functionaalanalyse en operatorentheorie niet bekend konden worden verondersteld, ging dit boek gepaard met een ander boek geheel gewijd aan functionaalanalyse voor systeemtheorie [3]. Na mijn promotie in 1988 vroeg ze of ik met haar een nieuwe versie van deze boeken wilde schrijven. Dit zou dan ook meer een leerboek moeten worden, met opgaven, et cetera. Na zeven jaar konden we ons project met de publicatie van dit gezamenlijke boek afsluiten [6]. Net zo als haar eerdere boeken werd dit boek ook snel een standaard referentie voor onderzoekers binnen het vakgebied, en de laatste jaren waren we bezig dit boek grondig te herzien. Naast contact middels vele telefoontjes en e-mails, ben ik ook regelmatig bij haar thuis geweest om veranderingen, aanvullingen, et cetera te bespreken. We waren al heel ver gevorderd, en de uitgever was akkoord met de hernieuwde versie, maar helaas heeft ze de voltooiing van het boek niet meer mee mogen maken. In de vroege zomer van 2017 werd bij haar longkanker in een vergevorderd stadium ontdekt, waaraan ze op 19 maart 2018 is overleden.

Na haar overlijden hebben zowel vrouwelijke als mannelijke wetenschappers mij laten weten dat Ruth echt een voorbeeld en steun voor hun is geweest. Dus haar twijfel hierover was ongegrond. ☹

Referenties

- 1 R. Curtain, Een Australische terugblik, *NAW* 5/7(4) (2006), 242–248
- 2 R. F. Curtain en A. Ichikawa, The Nehari problem for infinite-dimensional linear systems of parabolic type, *Integral Equations Operator Theory* 26(1) (1996), 29–45.
- 3 R. F. Curtain en A. J. Pritchard, *Functional Analysis in Modern Applied Mathematics*, Mathematics in Science and Engineering, Vol. 132, Academic Press, 1977.
- 4 R. F. Curtain en A. J. Pritchard, *Infinite-Dimensional Linear Systems Theory*, Lecture Notes in Control and Information Sciences, Vol. 8, Springer, 1978.
- 5 R. F. Curtain, H. Zwart en O. V. Iftime, A Kleinman–Newton construction of the maximal solution of the infinite-dimensional control Riccati equation, *Automatica J. IFAC* 86 (2017), 147–153.
- 6 R. F. Curtain en H. J. Zwart, *An Introduction to Infinite-Dimensional Linear Systems Theory*, Texts in Applied Mathematics, Nr. 21, Springer, 1995.
- 7 K. Glover, R. F. Curtain en J. R. Partington, Realisation and approximation of linear infinite dimensional systems with error bounds, *SIAM J. Control and Optim.* 26 (1988), 863–898.
- 8 E. Hille en R. S. Phillips, *Functional Analysis and Semigroups*, Amer. Math. Soc. Coll. Publ., Vol. 31, AMS, 1957.
- 9 Als enige vrouw in de wiskunde val je wel op, *NRC*, 15 augustus 2015, <https://www.nrc.nl/nieuws/2015/08/15/als-enige-vrouw-in-de-wiskunde-val-je-wel-op-1523725-a657945>.
- 10 M. Opmeer en R. F. Curtain, The suboptimal Nehari problem for well-posed infinite-dimensional systems, *SIAM J. Control and Optimization* 44 (2005).
- 11 J. Oostveen en R. F. Curtain, The Nehari problem for nonexponentially stable systems, *Integral Equations Operator Theory* 31(3) (1998), 307–320.
- 12 K. Yosida, *Functional Analysis*, Springer, 1966.

Harun Cetin

Montessori Scholen Amsterdam
h.cetin@msa.nl

Robert Kooij

iTrust Centre for Research in Cyber Security,
Singapore University of Technology and Design, and
Faculteit EWI, Technische Universiteit Delft
r.e.kooij@tudelft.nl

Onderwijs

Wiskunde als complex netwerk

Het NWO-programma *Wiskundeleraar in Onderzoek* stelt eerstegraads wiskundeleraars in staat om naast hun reguliere onderwijsfunctie zes tot twaalf maanden een dag per week onderzoek te doen bij een universitaire afdeling. In dit kader hebben Harun Cetin en Robert Kooij het project 'Wiskunde als complex netwerk' uitgevoerd aan de TU Delft. Hierbij hebben zij zich gericht op het ontwikkelen van een semantisch netwerkmodel voor wiskundige kennis, met als use case het vwo-vak wiskunde A (examenjaar 2018). Zij laten zien hoe de specifiek-toetsbare leerdoelen gebruikt kunnen worden om een netwerkstructuur van concepten en begrippen te construeren. Vervolgens hebben zij het verkregen netwerk geanalyseerd en geclassificeerd als *small-world* en *scale-free*. Het small-world-effect kenmerkt zich door een hoge clusteringcoëfficiënt en kleine gemiddelde kortste padlengte, terwijl het scale-free-effect verwijst naar het voorkomen van enkele knopen met veel verbindingen en heel veel knopen met relatief weinig verbindingen. Als laatste demonstreren zij hoe een dergelijk netwerkmodel gebruikt kan worden om de effectiviteit van verschillende leerstrategieën te kwantificeren. Hierbij leggen zij de nadruk op de relatie tussen de zogenaamde *netwerkcentraliteit* van een leereenheid/knoop en zijn *context*. Zij hebben aangetoond dat het verwerven van nieuwe kennis sneller gaat, wanneer de volgende leereenheid van de leerroute wordt bepaald op basis van zijn centraliteit ten opzichte van de zogenaamde *groepsstructuur* van het netwerk.

Netwerken zijn overal. Internet, sociale netwerken, transportnetwerken, energienetwerken, biologische- en semantische netwerken zijn daar slechts enkele voorbeelden van. Deze netwerken zijn niet random; ze worden *complex* genoemd, omdat ze eigenschappen vertonen die niet voorkomen in volledig reguliere en volledig willekeurige netwerken [18]. Omdat de structuur van deze complexe netwerken altijd de functie ervan beïnvloedt, bestaat er binnen allerlei gebieden van de wetenschap een behoefte om de structuur van deze netwerken te begrijpen en te karakteriseren [11].

Onderwijs is ook niet los te zien van deze wereld van netwerken. In het onderwijsveld is er een groot scala aan onderwijsparadigma's waarin een centrale rol is weggelegd voor het opsporen en het

karakteriseren van relaties: curriculaire samenhang binnen vakken en tussen vakken, doorlopende leerlijnen per vak of leergebied [7], de koppeling van de individuele leeropbrengsten van de leerstof voor gedifferentieerd en adaptief onderwijs. Netwerken beginnen de rol van traditionele tabellen, schema's en syllabi over te nemen. Netwerken zijn wiskundige objecten, die niet alleen helpen om attributen en relaties binnen het onderwijs in kaart te brengen, maar deze ook te kunnen kwantificeren [21].

Dit artikel presenteert een semantisch netwerkmodel voor wiskundige kennis, met als use case het vwo-vak wiskunde A (examenjaar 2018). De interesse in semantische netwerken als kennismodel is aanzienlijk toegenomen met de recente ontwikkelingen binnen de netwerkwetenschap [4, 14].

Semantische netwerken worden gedefinieerd als "een onderling verbonden reeks entiteiten die betekenis dragen", waarbij elke entiteit/knoop overeenkomt met een woord (of begrip) [3]. De knopen worden met elkaar verbonden door de relaties en associaties tussen de woorden. Er zijn verschillende manieren om dergelijke verbanden te definiëren [4].

In dit artikel gebruiken we de specifiek-toetsbare leerdoelen van het wiskundeonderwijs om de knopen en de associaties te bepalen. Voor de use case wiskunde A demonstreren we ook hoe een dergelijk netwerkmodel gebruikt kan worden om de effectiviteit van verschillende leerstrategieën te kwantificeren.

Modelleren wiskundekennis als netwerk

In het wiskundeonderwijs worden de manieren van wiskundig denken gestimuleerd, met aandacht voor het opbouwen van betekenisrijke, samenhangende cognitieve schema's. Over het algemeen worden cognitieve schema's omschreven als een netwerk van kennis en vaardigheden. In wiskundendidactiek wordt soms ook het begrip 'relatienetwerk' gebruikt om naar cognitieve schema's te verwijzen. In de ontwikkeling van een cognitief schema wordt het maken van een kennisgraaf gezien als de eerste stap voor de structurering (kennis in kaart brengen). In zo'n kennisgraaf (mindmap, conceptmap) krijgen verschillende aspecten van het onderwerp een plaats [6].

Het concept 'netwerk' in de vakdidactiek roept echter twijfels op vanuit een netwerktheoretisch oogpunt. Volgens de wiskundendidactici moeten de centrale con-

cepten het fundament vormen van de cognitieve schema's zodat op die manier de samenhang wordt gegarandeerd tussen de kennisgrafen die als functionele eenheden dienen van het uiteindelijke netwerk [5, 16]. Volgens de netwerktheorie is het echter zo dat de belangrijkheid, oftewel de centraliteit van een knoop binnen een netwerk, afhankelijk is van het hele patroon van verbindingen [12]. De gebruikelijke aanpak in netwerktheorie is daarom om de centraliteiten van knopen te bepalen zodra de netwerkstructuur in zijn geheel te voorschijn komt. Het zal op zijn best speculatief zijn om vooraf te vertellen hoe centraal een concept staat. In het verlengde hiervan is het belangrijk op te merken dat men ook niet stilstaat bij de onderlinge relaties tussen de kennisgrafen van alle wiskundedomeinen tezamen. Zo'n concept van 'het netwerk van de netwerken' of een concept dat hierop lijkt, komt immers niet nadrukkelijk naar voren in de literatuur van de vakdidactiek. In plaats daarvan beoogt men steeds een rijk cognitief schema van kennisgrafen rondom een bepaald domein, bijvoorbeeld meetkunde. De links tussen de kennisgrafen van verschillende domeinen kunnen echter zeer interessant zijn, qua lokale en globale eigenschappen van het netwerk. Een voorbeeld hiervan is de cirkel, die zowel in vlakke meetkunde als in goniometrie een 'centrale' plaats inneemt.

Hierbij stellen we daarom een neutrale aanpak voor de netwerkconstructie voor, die niet uitgaat van een bepaalde a priori-aanname over hoe centraal de knopen zijn. Als gevolg hiervan kunnen niet alleen de centraliteiten maar ook overige eigenschappen van het netwerk als zelfoptredende verschijnselen verder bestudeerd worden.

Een andere kritiek op de traditionele kennisgrafen kan zijn dat de kennis die ze dragen niet per se specifiek-toetsbaar is. De rationale achter de woordassociaties met het *centraal concept* is namelijk niet bekend. Daarom hebben wij in dit onderzoek gebruikgemaakt van de specificaties die door het College voor Toetsen en Examen (CvTE) in Nederland zijn vastgelegd om de exameneisen te beschrijven. Een specificatie brengt verschillende items (concepten, begrippen, feiten, formules) met elkaar in verband. In dit onderzoek hebben we ons beperkt tot de specificaties van het vwo-vak wiskunde A die in de vorm van een syllabus zijn gepubliceerd voor het examenjaar 2018 [1].

In het wiskundige kennisnetwerk dat we hebben gevormd, correspondeert iedere knoop met een item van een specificatie. Doordat de items van een specificatie samen de noodzakelijke ingrediënten van hetzelfde leerdoel zijn, zijn ze onderling met elkaar verbonden in de vorm van een ongerichte volledige subgraaf, een zogenaamde kliek. Onze aanpak hierbij is geïnspireerd door [9], waarin een semantisch netwerk wordt gevormd van de trefwoorden in titels van wetenschappelijke artikels over wiskundeonderwijs. Ons netwerkmodel is ook een soort semantisch netwerk waarbij de voorwaarde om verbonden te zijn is dat items samen in een specificatie voorkomen. Een specificatie in onze aanpak is dus analoog met een titel in de aanpak van [9].

Toepassing op wiskunde A

Om het totale netwerk te bouwen uit de specificaties van wiskunde A, zijn de volgende stappen gevolgd: (1) de identificatie van de knopen in de databron (syllabus);

(2) het importeren van de knopen/items van elke specificatie van de syllabus naar NetworkX, zodat elke specificatie een kliek wordt; (3) het opbouwen van de volledige kennisgraaf met behulp van NetworkX, op basis van het toepassen van stap 2 voor alle specificaties. (NetworkX is een Python library voor de analyse en visualisatie van grafen en netwerken.)

Als voorbeeld bekijken we de volgende drie specificaties:

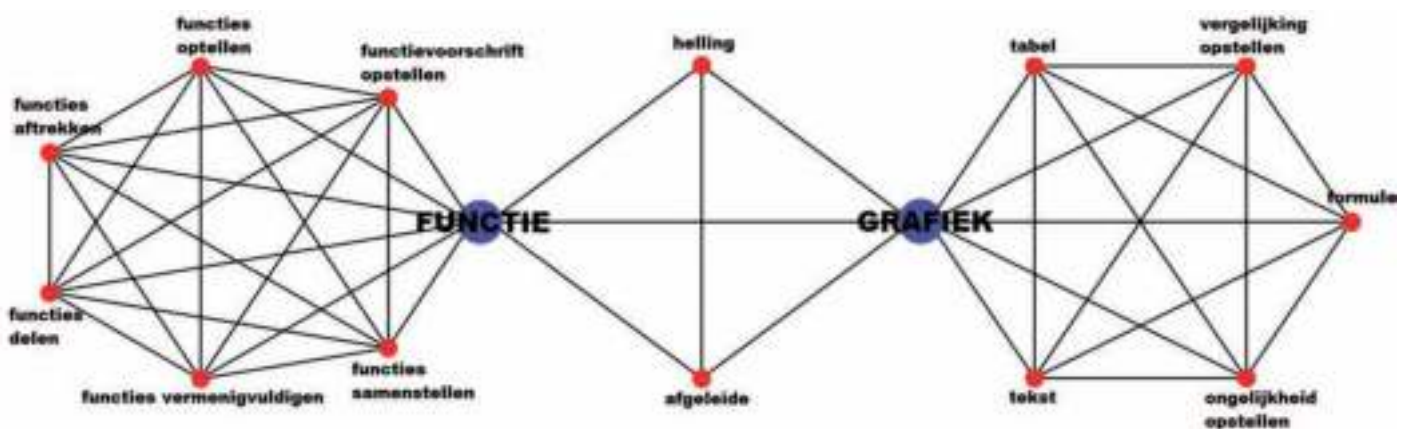
Specificatie 1. Productieve vaardigheden 7: De kandidaat kan een vergelijking of een ongelijkheid opstellen aan de hand van een tabel, formule, grafiek of tekst.

Specificatie 2. Productieve vaardigheden 10: De kandidaat kan functievoorschriften opstellen door twee functies op te tellen, af te trekken, te vermenigvuldigen, te delen of samen te stellen.

Specificatie 3. Parate vaardigheden 4: De kandidaat kan een verband leggen tussen de afgeleide van een functie en de helling van de grafiek van die functie in een gegeven punt van de grafiek.

De eerste twee specificaties zijn afkomstig uit Subdomein C2: Functies, grafieken, vergelijkingen en ongelijkheden. De derde specificatie komt uit Subdomein D3: Afgeleide.

Volgens de bovenbeschreven aanpak resulteert elk van deze specificaties in een ongerichte volledige subgraaf in de vorm van een kliek. Figuur 1 laat de samengestelde kennisgraaf zien die ontstaat als gevolg van samenvoeging van de drie klieks. Specificaties 1 and 2 corresponderen met respectievelijk de linker- en de rechterkliek. De middelste kliek komt overeen met de derde specificatie.



Figuur 1 Kennisgraaf op basis van drie specificaties.

De kennisgraaf is slechts gebaseerd op drie specificaties en is dus nog verre van compleet. Zo is de knoop 'formule' eigenlijk via een andere specificatie rechtstreeks verbonden met de knoop 'functie'. Indien we alle specificaties gebruiken voor de samengestelde kennisgraaf voor wiskunde A, krijgen we een complex netwerk, zie Figuur 2. Een complex netwerk zoals in Figuur 2 is een wiskundig object dat gepresenteerd kan worden als een graaf $G(N, \mathcal{L})$, waarbij N een verzameling van $|N| = N$ knopen is en $\mathcal{L}$ een verzameling van $|\mathcal{L}| = L$ verbindingen. De theorie van complexe netwerken is namelijk oorspronkelijk uit de grafentheorie ontstaan. De focus van deze nieuwe theorie ligt echter op de analyse van de statistische eigenschappen van netwerken zoals linkdichtheid, gradenverdeling, gemiddelde padlengte, enzovoort [2]. In deze sectie bepalen we dergelijke eigenschappen voor het wiskunde A-netwerk.

Een verbonden component van een ongerichte graaf is een subgraaf waarin elke twee knopen met elkaar zijn verbonden via een pad en die niet verbonden is met overige knopen in de gehele graaf. We geven het totaal aantal verbonden componenten aan als V . In een netwerk kunnen er knopen zijn waarvan het verwijderen het aantal verbonden componenten doet toenemen. Deze knopen heten cutpoints. Het aantal cutpoints N_{cut} is dus een indicatie voor de fragiliteit voor wat betreft de verbondenheid van het netwerk. We geven het aantal verbonden componenten dat overblijft na het verwijderen van de N_{cut} cutpoints aan als V_{cut} .

Het aantal buurknopen waarmee een knoop i rechtstreeks verbonden is, heet de graad d_i van knoop i . De uitdrukking

$$E[d] = \frac{1}{N} \sum_i d_i$$

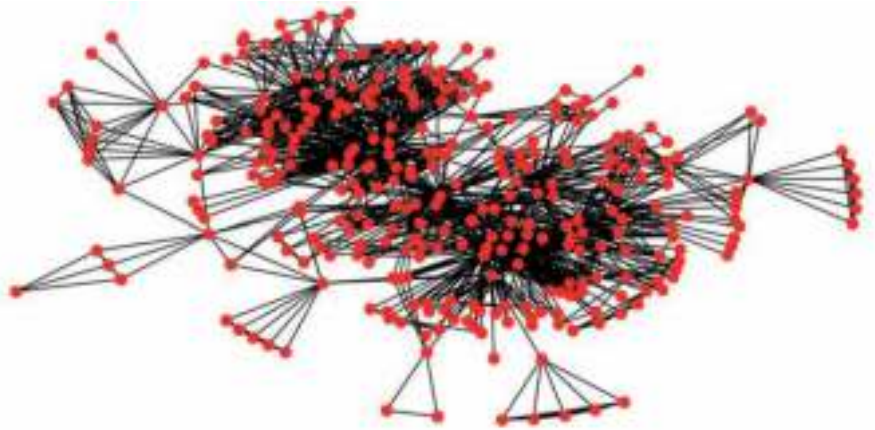
geeft de gemiddelde graad per knoop. De linkdichtheid

$$S = \frac{2L}{N(N-1)}$$

is gedefinieerd als de verhouding van het aantal bestaande verbindingen L tot het maximaal mogelijke aantal verbindingen in het netwerk. De clusteringcoëfficiënt

$$\bar{C} = \frac{1}{N} \sum_i C_i$$

is de gemiddelde clustering van alle knopen waarbij de clustering



Figuur 2 Wiskunde A-netwerk.

$$C_i = \frac{2L_i}{d_i(d_i-1)}$$

van een knoop i de verhouding aangeeft van het aantal bestaande verbindingen L_i tussen de buurknopen van knoop i tot het maximaal mogelijke aantal verbindingen tussen deze buurknopen. Een andere netwerkgraagtheid is de gemiddelde kortste padlengte

$$\bar{l} = \frac{1}{N(N-1)} \sum_{i \neq j} l_{ij},$$

waarbij l_{ij} de kortste padlengte is tussen de knopen i en j . Strikt genomen is de gemiddelde kortste padlengte alleen gedefinieerd voor verbonden netwerken.

Tabel 1 geeft een overzicht van de eigenschappen van het wiskunde A-netwerk. Omdat het gehele netwerk verbonden is ($V = 1$) is de gemiddelde kortste padlengte goed gedefinieerd.

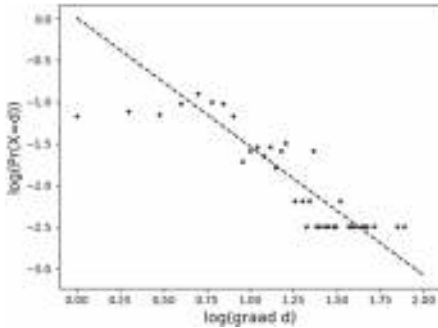
Het is bekend dat complexe netwerken een aantal niet-triviale structurele eigenschappen bezitten, zoals het small-world-effect en het scale-free-effect, die niet

voorkomen in random netwerkenmodellen zoals het Erdős-Rényi-model [2]. Een small-world-netwerk karakteriseert zich door een hoge clusteringcoëfficiënt en kleine gemiddelde kortste padlengte. Hiertoe wordt het netwerk $G(N, L)$ vergeleken met random netwerken met dezelfde N - en L -waarden. Voor een small-world-netwerk geldt: $\bar{C} \gg \bar{C}_{\text{random}}$ en $\bar{l} \geq \bar{l}_{\text{random}}$ [19]. Het verkregen wiskunde A-netwerk met $\bar{C} = 0,74$ en $\bar{l} = 3,28$ wordt daarom gekarakteriseerd als small-world, aangezien de bijbehorende random netwerken met $N = 312$ en $L = 1402$ resulteren in $0,020 \leq \bar{C}_{\text{random}} \leq 0,038$ en $2,83 \leq \bar{l}_{\text{random}} \leq 2,86$. De resultaten zijn gebaseerd op de realisatie van duizend random netwerken.

Het scale-free-effect kenmerkt zich door het voorkomen van enkele knopen met veel verbindingen en heel veel knopen met relatief weinig verbindingen. Wiskundig gezien komt dat overeen met een gradenverdeling waarbij de kans op knopen met hoge graden afneemt volgens een machtsverband in de vorm van $\Pr(X = d) \sim d^{-\gamma}$

Symbol	Grootheid	Waarde
N	Aantal knopen	312
L	Aantal links	1402
V	Aantal verbonden componenten	1
N_{cut}	Aantal cutpoints	21
V_{cut}	Aantal componenten na verwijderen cutpoints	44
$E[d]$	Gemiddelde graad	8,99
S	Linkdichtheid	0,03
$\bar{C}$	Clusteringcoëfficiënt	0,74
$\bar{l}$	Gemiddelde kortste padlengte	3,28
γ	Macht gradenverdeling	1,55

Tabel 1 Eigenschappen van het wiskunde A-netwerk.



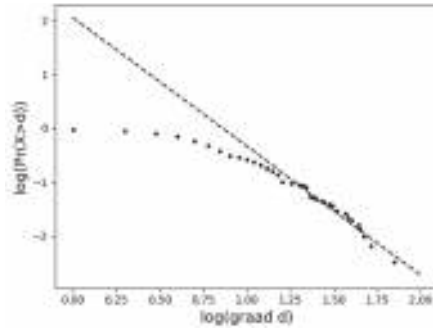
Figuur 3 Log-log-plot van de gradenverdeling van het wiskunde A- netwerk.

waarbij γ de macht is van de gradenverdeling [2]. Dit machtsverband, ook wel *power law* genoemd, toont zich als een rechte lijn op een dubbel logaritmische schaal. Naast de gradenverdeling, wordt ook vaak gebruikgemaakt van de cumulatieve gradenverdeling $\Pr(X > d)$. Deze verdeling beperkt de ruis als gevolg van de statistische afwijkingen bij hoge graden. Figuren 3 en 4 laten zien dat de gradenverdeling van het wiskunde A-netwerk een power law volgt. Het wiskunde A-netwerk is dus een scale-free netwerk.

Leerprocessen op netwerken

Zoals eerder beschreven, speelt het identificeren van centrale concepten in kennisstructuren een cruciale rol in de vakdidactiek. Het semantische netwerkmodel dat in de vorige paragraaf is geïntroduceerd, kan gebruikt worden om de belangrijkheid, oftewel centraliteit, van een knoop/concept te kwantificeren. Wat de centraliteit van een knoop hierbij precies inhoudt, heeft te maken met de achterliggende wiskundige formulering. Zo kan een dergelijke formulering betrekking hebben op het aantal buurknopen van de knoop i (*graad-centraliteit*), het aantal kortste paden dat door de knoop i loopt (*betweenness-centraliteit*), de som van de inverse padlengtes, oftewel de afstanden vanaf de knoop i naar alle overige knopen in het netwerk (*closeness-centraliteit*), het i -de element van de eigenvector behorend bij de grootste eigenwaarde van de verbindingsmatrix (*eigenvector-centraliteit*), enzovoort. Van deze vier basismetrieën is de graad-centraliteit het meest eenvoudig te bepalen.

In het kader van adaptief en gepersonaliseerd leren heeft [20] deze vier basismetrieën onderzocht naar hun geschiktheid om de 'belangrijkheid' van de concepten uit te drukken. Hiervoor is er gebruikgemaakt



Figuur 4 Log-log-plot van de cumulatieve gradenverdeling van het wiskunde A-netwerk.

van een semantische graaf van concepten behorende tot het universitaire vak Management Information Systems. In het onderzoek is er onder 247 studenten gekeken naar de leeropbrengst als gevolg van het selecteren van het 'volgende concept' gebaseerd op de netwerkcentraliteit. Door antwoord te geven op de in totaal 165 gestelde vragen doorloopt elke student een leerroute van 61 verschillende concepten/knopen. Hierbij wordt geconcludeerd dat een hogere centraliteit voor een gegeven knoop een rol kan spelen bij het voorspellen van de volgende knoop in de leerroute. Het is echter niet eenduidig welke centraliteitsmetriek (of combinatie van de metrieken) de grootste voorspellende waarde heeft.

Op basis van de graad-centraliteit hebben Rodi e.a. [15] laten zien dat zwak-verbonden knopen, dat wil zeggen knopen met een lage graad, een belangrijke rol kunnen spelen in het leerproces. Volgens het door hen ontwikkelde framework zorgen de kennisstructuren die scale-free en small-world zijn ervoor dat de verworven kennis duurzamer wordt en het leerproces sneller verloopt. Hierbij wordt als *context* van de knopen hun directe omgeving (dat wil zeggen de buurknopen) aangenomen.

In dit onderzoek hebben we het leermodel van [15] toegepast op ons wiskunde A-netwerk met een uitbreiding van het kader: we herdefiniëren de *context* van een knoop i aan de hand van de informatie over de zogenaamde *groepen* waartoe de buurknopen van de knoop i behoren. Net als het scale-free-effect en small-world-effect is het voorkomen van groepen knopen in vele complexe netwerken algemeen aangetroffen. Groepen in een netwerk zijn structuren die intern dichter zijn verbonden dan met de rest van het netwerk [17]. Het nadeel van het definiëren van context aan de hand van de graad-centraliteit is name-

lijk dat de buurknopen gelijk worden behandeld: een knoop j met drie buurknopen die allemaal in dezelfde groep zitten, heeft duidelijk een andere status dan een knoop i waarvan (een deel van) de drie buurknopen zich in verschillende groepen bevinden. Het identificeren van de groepen knopen kent vele heuristieken en methoden. In dit werk gebruiken we de zogenaamde *Q-modulariteit*, één van de eerste en bekendste methoden om de groepsstructuur in complexe netwerken te vinden (zie kader op de volgende pagina).

In het leermodel van [15] doorloopt een hypothetische leerling een opgegeven leerroute/leerplan van de leereenheden/knopen. De leerroute kan volgens een bepaalde strategie worden samengesteld: bijvoorbeeld via een random selectie volgens een uniforme kansverdeling. Tegelijkertijd is er een stochastisch proces gaande dat een subtiel evenwicht impliceert tussen de introductie van nieuwe leereenheden en de herhaling van de oude leereenheden. Op elk discreet tijdstip t is er steeds sprake van één van de volgende events: (a) de hypothetische leerling boekt vooruitgang en krijgt een nieuwe leereenheid aangeboden die nog nooit eerder geïntroduceerd is; (b) een al eerder geïntroduceerde leereenheid wordt *te vroeg* herhaald; (c) een al eerder geïntroduceerde leereenheid wordt *op tijd* herhaald; (d) een al eerder geïntroduceerde leereenheid wordt *te laat* herhaald, waardoor het vergeten wordt; (e) de leerling haalt een vergeten leereenheid weer op. Door de mislukkingen in het leerproces (dat wil zeggen inefficiënt herhalen, vergeten) verloopt het leren trager. Het aantal afzonderlijke leereenheden $n(t)$ dat per tijdstip t geïntroduceerd (en nog niet vergeten) is, is daarom een indicatie voor de efficiëntie van het leerproces. De hypothetische leerling gaat door totdat alle N leereenheden/knopen beklijven. De tijd t_N die hiervoor nodig is, heet de *dekkingstijd* (dat wil zeggen $n(t_N) = N$). In de volgende paragraaf gebruiken we $n(t)$ en t_N als simulatieparameters om de efficiëntie van het leerproces te evalueren dat uitgaat van de groepsstructuur als context van de leereenheden.

Het leeralgoritme in dit framework is gebaseerd op een klassiek werk van Ebbinghaus (1885) over het zogenaamde spacing- en lag-effect. Het spacing-effect verwijst naar het spreiden van het leren over meerdere sessies, zodat de verworven kennis duurzamer wordt. Het interval

tussen twee leermomenten blijkt ook van invloed te zijn op de efficiëntie van het leerproces. In plaats van leerintervallen met vaste lengte is het efficiënter om met intervallen te leren die met de herhalingsen mee expanderen. Dit verschijnsel wordt lag-effect genoemd.

Rodi e.a. [15] genereren leerplannen/routes binnen de netwerkstructuur volgens drie verschillende leerstrategieën. Telkens wordt er volgens een kansproces een nieuwe knoop gekozen uit het deel van het netwerk dat overblijft. Wanneer alle knopen klaar zijn, gaat een stochastisch leerproces van start met de bijbehorende herhaalprocessen (zie kader op de volgende pagina). De drie leerstrategieën zijn als volgt:

Random leren (RL): Elke nieuwe knoop i wordt random geselecteerd met een kans die uniform is verdeeld.

Preferentiële acquisitie (PA): Elke nieuwe knoop i wordt geselecteerd met een kans die evenredig is met de graad d_i van knoop i . De knopen met een hoge graad hebben

duis een grotere kans om in aanmerking te komen.

Random surfen (RS): Elke nieuwe knoop i wordt met een kans p gezocht onder de buurknopen van de laatst geïntroduceerde knoop of er wordt met een kans $1-p$ een random sprong gemaakt in het netwerk om een andere knoop te selecteren volgens een PA-stap.

Deze leerstrategieën maken geen gebruik van de groepen van een netwerk die belangrijke informatie kunnen bevatten over de context van de knopen. We voegen hieraan een nieuwe leerstrategie toe die onderscheid maakt tussen de buurknopen die uit verschillende groepen afkomstig kunnen zijn. Hierdoor levert elke andere buurknoop mogelijk een andere bijdrage op aan de context van de knoop i . De bijdrage van een buurknoop j uit een buurgroep q wordt gekenmerkt door het product $w_q m_{pq}$, waarbij w_q het aantal knopen in groep q voorstelt en m_{pq} het aantal verbindingen tussen de groep q en de

groep p waar de knoop i in zit. Wiskundig gezien houdt dat in dat de centraliteit van de knoop i niet meer door de graad d_i (het aantal verbindingen van knoop i) wordt gekenmerkt, maar door de gewogen som van de verbindingen. Een dergelijke grootheid wordt ook wel de sterkte (strength) s_i van knoop i genoemd in plaats van de graad d_i [22]. De wiskundige beschrijving daarvan ziet er als volgt uit (zie kader hierboven):

$$s_i = \sum_{q \in M} d_{iq} \tilde{w}_q \tilde{m}_{pq}.$$

Hierin is s_i de sterkte van knoop i gebaseerd op de groepsstructuur, d_{iq} het aantal buurknopen in buurgroep q én $\tilde{w}_q$ en $\tilde{m}_{pq}$ zijn de genormaliseerde versies van w_q en m_{pq} . M is de verzameling van alle groepen in het netwerk.

Groepsstructuur-gebaseerd leren (GL) wordt nu als volgt gedefinieerd. Een nieuwe knoop i wordt geselecteerd met een RS-stap waarbij niet d_i maar s_i de kans bepaalt om in aanmerking te komen in de leerroute.

Groepsstructuur

De groepsstructuur onthult belangrijke informatie over de hiërarchische organisatie van de knopen en beïnvloedt allerlei dynamische processen op het netwerk. Een van de eerste en bekendste methoden om de groepsstructuur in complexe netwerken te vinden maximaliseert de zogenaamde Q -modulariteit van het netwerk [8]. Elke opdeling in groepen komt overeen met een bepaalde Q -waarde. Het is bij vele complexe netwerken aangetoond dat opdelingen bij hogere Q -waarden leiden tot statistisch aanvaardbare resultaten: groepen die intern dichter verbonden

zijn dan met de rest van het netwerk. In dit opzicht overtreft het maximaliseren van Q alle tot dan bekende traditionele methoden [10]. De Q -modulariteit wordt uitgedrukt als:

$$Q = \sum_{q=1}^K \frac{L_q}{L} - \left(\frac{d_q}{2L} \right)^2.$$

Hierin is K het aantal groepen; L , het totale aantal links in het netwerk en L_q , het aantal links in groep q . De parameter d_q geeft de som van de graden van alle knopen in groep q aan.

Het karakteriseren van de zogenaamde centraliteit van een knoop ten opzichte van de groepsstructuur is een actief onderzoeksdomein binnen de netwerkwetenschap. Een recente aanpak drukt de centraliteit van een knoop u_i uit in index c_i [23]:

$$c_i = \sum_{q \in M} d_{iq} \frac{w_q}{N}.$$

Hierin is d_{iq} het aantal buurknopen (graad) van knoop i in groep q , w_q het aantal knopen in groep q , N totale aantal knopen in het netwerk en M is de verzameling van alle groepen.

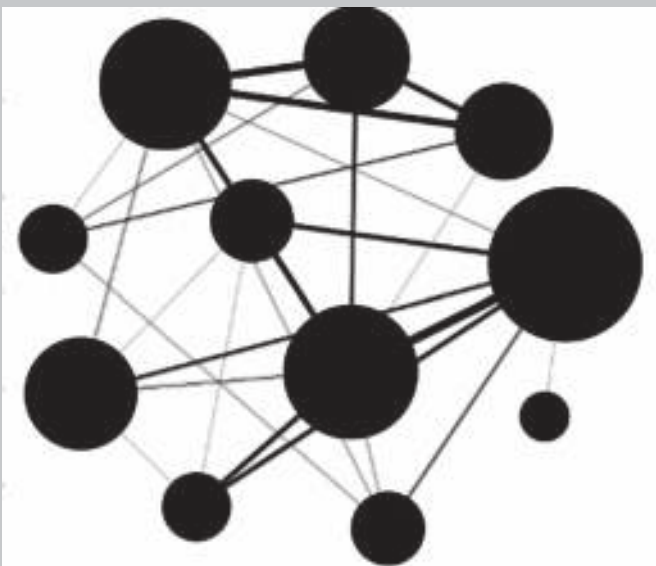
Voor gewogen grafen zoals de groepsstructuur van wiskunde A geldt bovendien [22]:

$$s_q = \sum_{p \in M} w_p m_{pq}.$$

Hierin is s_q de zogenaamde *sterkte* (strength) van de groep q en m_{pq} het aantal tussenverbindingen tussen de groep p en groep q .

Om de centraliteit/belangrijkheid van een knoop ten opzichte van de groepsstructuur aan te geven, combineren we deze formules tot:

$$s_i = \sum_{q \in M} d_{iq} \frac{w_q}{N} \frac{m_{pq}}{L} = \sum_{q \in M} d_{iq} \tilde{w}_q \tilde{m}_{pq}.$$



Figuur 5 Groepsstructuur van het wiskunde A-netwerk.

Leermodel van de hypothetische leerling

Uitgaande van een verzameling onafhankelijke leereenheden doorloopt de hypothetische leerling een leerplan/leerroute $u_1, u_2, u_3, \dots, u_N$ waarbij elke leereenheid/knoop u_i opnieuw ‘bezoekt’ kan worden volgens een serie randvoorwaarden. De randvoorwaarden hangen af van het discrete tijdstip a_k waarop de k -de introductie van u_i plaatsvindt en het discrete tijdstip b_k waarna u_i vergeten wordt. Als een leereenheid u_i niet wordt herhaald binnen het gestelde tijdsinterval $[a_k, b_k]$, dan is het dus te laat en wordt het vergeten. De grenswaarden van randvoorwaarden $[a_1, b_1], [a_2, b_2], \dots, [a_k, b_k]$ met $a_k \leq b_k$, waarbij k een positief geheel getal is, expanderen met de tijd mee zodat $a_k \leq a_{k+1}$ en $b_k \leq b_{k+1}$, overeenkomend met het eerder beschreven lag-effect. De voordelen veranderen in nadelen als de $(k+1)$ -ste herhaling van item u_i te laat (na b_k) of te vroeg (vóór a_k) optreedt.

Uitgaande van deze implementatie van [13] bouwt [15] hierop voort door te stellen dat de leereenheden niet onafhankelijk zijn, maar dat ze een netwerk vormen met de afhankelijkheidsrelaties (verbindingen) tussen de leereenheden. In deze aanpak worden

de grenzen van de randvoorwaarden afhankelijk gemaakt van de sterkte (knowledge strength) S_i van leereenheid u_i , zodat $[a_{S_i(t)}, b_{S_i(t)}]$. Hierbij is S_i een index die afhangt van de omgeving/ buurknopen waarmee de knoop u_i direct verbonden is. Net als bij [13] moeten de twee opeenvolgende voorkomens van dezelfde leereenheid u_i binnen een bepaald interval $[a_{S_i(t)}, b_{S_i(t)}]$ optreden. Op elk discreet tijdstip t wordt er — voor elke leereenheid u_i onder de $n(t)$ al verworven leereenheden — de afstand $\Delta_i t = (t - t_i)$ berekend, waarbij t_i het laatste moment is waarop de leereenheid u_i in de leerroute was opgenomen. Als $\Delta_i t > b_{S_i(t)}$ is, dan wordt u_i vergeten en daarom in de wachtrij geplaatst van vergeten leereenheden. Als $\Delta_i t \leq b_{S_i(t)}$ is, dan bepaalt een monotoon stijgende functie $F_{S_i(t)}(\Delta_i t)$ de kans dat u_i herhaald wordt:

$$F_{S_i(t)}(\Delta_i t) = \frac{1}{2} \left(\tanh \left(\frac{LR}{b_{S_i}} \left(\Delta_i t - \frac{b_{S_i}}{2} \right) \right) + 1 \right).$$

Hierin staat LR voor *Learning Rigidity*. Het is een vrije parameter die de helling van de functie $F_{S_i(t)}(\Delta_i t)$ regelt en dus ook de snelheid waarmee nieuwe leereenheden worden geïntroduceerd.

Toepassing op het wiskunde A-netwerk

In deze paragraaf passen we de bovenbeschreven leerstrategieën toe op het wiskunde A-netwerk. We evalueren telkens de efficiëntie van het leerproces in termen van het aantal afzonderlijke leereenheden $n(t)$ dat per discrete tijdstip t geleerd is en de gemiddelde dekkingstijd $\langle t \rangle$. De verkregen resultaten zijn gebaseerd op de realisatie van vijftig simulaties en zijn genormaliseerd met de netwerk grootte N .

In Figuur 6a is te zien dat de groepsstructuur-gebaseerde leerstrategie GL een kortere dekkingstijd heeft en dus sneller leert dan de overige drie leerstrategieën. De performances van de leerstrategieën worden ook vergeleken met de resultaten die zijn verkregen uit een equivalente verzameling N volledig-ontkoppelde knopen. In Figuur 6a liggen deze resultaten op de rode kromme met de aanduiding ‘geen net-

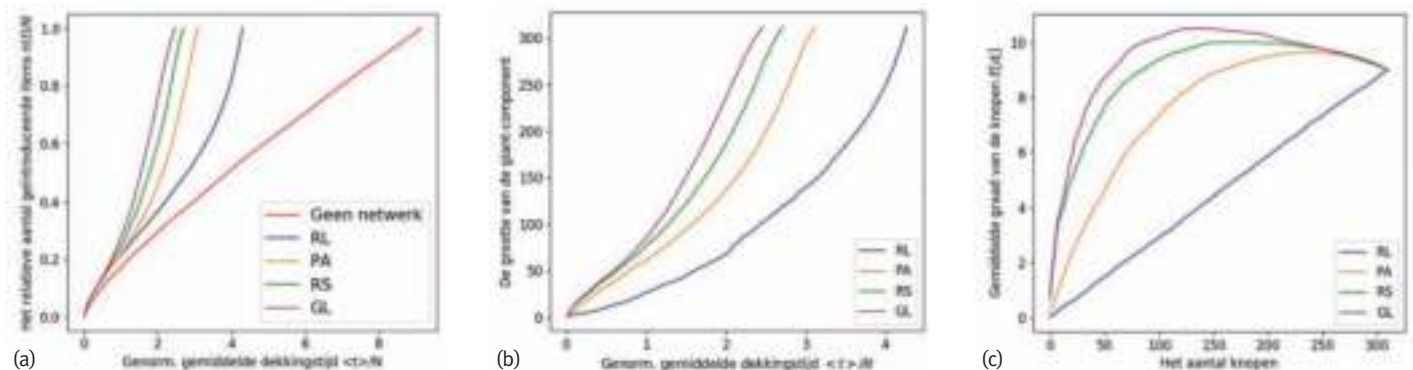
werk’. Het verloop van deze rode kromme komt overeen met de wet van Heap (Heap’s law) voor de onafhankelijke leereenheden. Volgens deze wet geldt $n(t) \simeq t^\beta$ met $\beta < 1$ [15]. In ons geval is dat $n(t) \simeq t^{0.81}$. Tabel 2 geeft de betrouwbaarheidsintervallen voor de waargenomen dekkingstijden aan. Hierin is te zien dat er een significant verschil is tussen de performances van de leerstrategieën. Hoe kleiner de dekkingstijd van een leerstrategie ten opzichte van het geval ‘geen netwerk’ is, is een indicatie voor hoe efficiënter de afhankelijkheidsrelaties in het netwerk door die leerstrategie worden benut om het leerproces te versnellen, dat wil zeggen versnellen door de kans op inefficiënt herhalen en vergeten te beperken. Tabel 2 laat zien dat deze kans door GL significant beter wordt beperkt.

Om verder in te zoomen op het mechanisme achter de verschillende leerstrate-

gieën hebben we telkens per leerstrategie gekeken naar de ontwikkeling van de zogenaamde *giant-component*: terwijl de hypothetische leerling de leerroute volgt, leidt het leerproces tot het ontstaan van een of meer verbonden componenten. De giant-component is de grootste component, die meestal opvallend groter is dan alle andere componenten. Figuur 6b laat de ontwikkeling zien van de giant-component per leerstrategie. Hier is te zien dat het leerproces met GL steeds een grotere giant-component tot gevolg heeft. Figuur 6c laat zien dat bij GL ook de gemiddelde graad per knoop tijdens dit groeiproces sneller toeneemt.

Conclusies en verder onderzoek

In dit werk hebben we ons gericht op het ontwikkelen van een semantisch netwerkmodel voor wiskundige kennis, met als



Figuur 6 Vergelijking van de leerstrategieën. De resultaten zijn gebaseerd op de realisatie van vijftig simulaties: (a) Het relatieve aantal geïntroduceerde knopen $n(t)/N$ oftewel de snelheid waarmee de nieuwe knopen worden geïntroduceerd. (b) De grootte van de giant-component in termen van het aantal knopen waaruit de giant-component bestaat. (c) De verandering van de gemiddelde graad $E[d]$ per knoop naarmate de leerprocessen zich voortzetten.

Geen netwerk	RL	PA	RS	GL
[9.124, 9.156]	[4.181, 4.278]	[3.074, 3.109]	[2.683, 2.714]	[2.443, 2.478]

Tabel 2 95%-betrouwbaarheidsintervallen voor $\langle t \rangle / N$.

use case het vwo-vak wiskunde A (examenjaar 2018). We hebben laten zien hoe het wiskunde A-netwerk volgens onze methodiek wordt opgebouwd uit specifiek-toetsbare leerdoelen. Vervolgens hebben we het verkregen netwerk geclassificeerd als scale-free en small-world. Het wiskunde A-netwerk bezit dus eigenschappen die algemeen voorkomen bij complexe netwerken. Voorts hebben we getoond hoe een dergelijk netwerkmodel gebruikt kan worden bij het kwantificeren van de effectiviteit van de leerstrategieën om nieuwe kennis te verwerven. Een belangrijk resultaat is dat groepsstructuur-gebaseerd leren (GL) de kans op het vergeten en inefficiënt herhalen beter beperkt dan andere leerstrategieën en dat het leerproces hiermee sneller gaat. In de onderwijspraktijk komt dat erop neer dat de context van individuele concepten afhankelijk kan zijn van verschillende domeinen en dat de bijdragen van verschillende domeinen aan de centraliteit/belangrijkheid van een individuele concept niet gelijk hoeven te zijn. De kracht van onze aanpak is dat zelfs deze individuele bijdragen aan de context hiermee gekwan-

tificeerd kunnen worden tot een wegingsfactor.

De resultaten zijn gebaseerd op het leren van een hypothetische leerling die, uitgaande van het spacing- en lag-effect, een stochastisch proces doorloopt. Om het uiteindelijke model te valideren is er echte leerdata nodig van de leerling-leer-materiaal-interacties. Het gaat hierbij om zeer grote hoeveelheden interactiedata die alleen door digitale en intelligente leerplatformen bijgehouden kunnen worden. De twee veelgebruikte wiskundemethoden *Getal & Ruimte* en *Moderne Wiskunde* zijn in die richting het hele wiskundecurriculum stap voor stap, leerjaar voor leerjaar aan het implementeren in hun adaptieve en gepersonaliseerde digitale leerplatformen.

Hoewel het gebruik van semantische netwerkmodellen vaak voorkomt bij het bestuderen van allerlei kennisbronnen, is ons werk — voor zover we weten — het eerste concrete voorbeeld van het vernetwerken van wiskundige kennis op basis van curriculumkenmerken. Hierbij is het belangrijk op te merken dat dit mede mogelijk was dankzij de door CvTE gespecificeerde eindtermen van wiskunde. Even-

als cognitieve schema's kan een dergelijk netwerk in de toekomst nog verder verrijkt worden met de kerndoelen en tussendoelen van het wiskundeonderwijs, wanneer ze ook gespecificeerd worden zoals de eindtermen. De voorgestelde methodiek voor de netwerkconstructie kan ook verder ontwikkeld worden door de specificaties aan te scherpen maar ook aan te vullen met de karakteristieke uitgangspunten van een leerplatform. We bepleiten dat netwerkenmodellen een belangrijke rol kunnen spelen bij het vergroten van curriculum-samenhang, het inrichten van doorlopende leerlijnen, bij het ontwikkelen van adaptieve en intelligente leerplatformen en bij het monitoren en bijsturen van het leergedrag in het kader van learning analytics. Wanneer de informatie over hoe een bepaalde content functioneert beschikbaar is, dan kunnen de docenten namelijk op een andere maar efficiëntere manier omgaan met de diversiteit in hun klas door de instructie, oefening en feedback aan te passen aan de persoonlijke behoeften. In dit werk hebben we met behulp van de tools uit de netwerkwetenschap aangetoond dat de karakteristieke groepsstructuur van de content het functioneren van de individuele leerelementen kan beïnvloeden. We hebben een methode gedemonstreerd waarmee deze invloed gekwantificeerd kan worden. ☞

Referenties

- 1 Syllabus 2018 Wiskunde A, vwo. <https://www.examenblad.nl/examen/wiskunde-a-vwo-2/2018/vwo>.
- 2 R. Albert en A.L. Barabasi, Statistical mechanics of complex networks, *Reviews of Modern Physics* 74(1) (2002), 47.
- 3 Michael E. Bales en Stephen B. Johnson, Graph theoretic modeling of large-scale semantic networks, *Journal of Biomedical Informatics* 39(4) (2006), 451–464.
- 4 Javier Borge-Holthoefer en Alex Arenas, Semantic networks: Structure and dynamics. *Entropy* 12(5) (2010), 1264–1302.
- 5 J. van Dormolen, *Didactiek van de wiskunde*, Oosthoek, 1974.
- 6 P. Drijvers, A. van Streun en B. Zwanneveld (red.), *Handboek wiskundendidactiek*, Epsilon Uitgaven, deel 72, 2013.
- 7 E. Folmer, A. Koopmans van Noort en W. Kuiper (red.), *Curriculumspiegel 2017*, <https://slo.nl/@4586/curriculumspiegel-1>.
- 8 S. Fortuna en M. Barthelemy, Resolution limit in community detection, *PNAS* 104(1) (2007), 36–41.
- 9 Trazbulo Henrique, Inacio de Sousa Fadigas, Marcos Grilo Rosa en Hernane Borges de Barros Pereira, Mathematics education semantic networks, *Social Network Analysis and Mining* 4 (2014), 1–9.
- 10 M.E.J. Newman, Modularity and community structure in networks, *Proceedings of the National Academy of Sciences*, 103(23) (2006), 8577–8582.
- 11 M.E.J. Newman, The structure and function of complex networks, *SIAM Review* 45(2) (2003), 167–256.
- 12 V. Nicosia, R. Criado, M. Romance, G. Russo en V. Latora, On the properties of small-world network models, *Nature Scientific Reports* 2 (2012), 218.
- 13 T.P. Novikoff, J.M. Kleinberg en S.H. Strogatz, Education of a model student, *PNAS* 109(6) (2012), 1868–1873.
- 14 H.B.B. Pereira, I.S. Fadigas, V. Senna en M.A. Moret, Semantic networks based on titles of scientific papers, *Physica A: Statistical Mechanics and its Applications* 390(6) (2011), 1192–1197.
- 15 G.C. Rodi, V. Loreto, V.D.P. Servedio en F. Tria, Optimal learning paths in information networks, *Nature Scientific Reports* 5(1286) (2015).
- 16 R. Skemp, *Wiskundig denken*, Aula 501, 1971.
- 17 C. Stegehuis, Netwerken met groepsstructuren, *NAW* 5/19(2) (2018), 97–100.
- 18 Remco van der Hofstad, Random networking: between order and chaos, *NAW* 5/8(1) (2007), 18–24.
- 19 Duncan J. Watts en Steven H. Strogatz, Collective dynamics of 'small-world' networks, *Nature* 393 (1998), 440–442.
- 20 Christian Weber, *Creating a Concept Importance Measure for Domain Knowledge in the Context of Learning*, PhD thesis, Budapesti Corvinus Egyetem, 2017.
- 21 Karen E. Willcox en Luwen Huang, Network models for mapping educational data, *Design Science* 3 (2017), e18.
- 22 D.C. Zemp, M. Wiedermann, J. Kurths, A. Rammig en J.F. Donges, Node-weighted measures for complex networks with directed and weighted edges for studying continental moisture recycling, *Europhysics Letters* 107(5) (2014), 58005.
- 23 Zhiying Zhao, Xiaofan Wang, Wei Zhang en Zhiliang Zhu, A community-based approach to identifying influential spreaders, *Entropy* 17(4) (2015), 2228–2252.

In de verdediging

| In defence

Pas gepromoveerden brengen hun werk onder de aandacht. Heeft u tips voor deze rubriek of bent u zelf pas gepromoveerd? Laat het weten aan onze redacteur.

Redacteur: Nicolaos Starreveld
 FNWI, Universiteit van Amsterdam
 Postbus 94214
 1090 GE Amsterdam
verdediging@nieuwarchief.nl



An Elevator Ride With Knizhnik and Zamolodchikov *Kayed Al Qasimi*

On the 18th of April 2019 Kayed Al Qasimi from the University of Amsterdam successfully defended his PhD thesis with title *An Elevator Ride With Knizhnik and Zamolodchikov*. Kayed carried out his research under the supervision of Prof.dr. Jasper Stokman from the Korteweg-de Vries Institute of Mathematics and Prof.dr. Bernard Nienhuis from the Institute of Theoretical Physics.

The elevator ride

When we want to study physical systems we rely on measurements of physical quantities. The physical quantities that can be measured are called *observables*. Observables are like buildings, they often contain multiple floors which you need to visit in order to have a global view of the whole building. And buildings are always part of some city!

I spent my time in the city called *loop models* and all the attention was focused on two buildings on a particular street. These observables, the two buildings I mentioned, are called the *current* and the *nesting number*. However when you arrive at a building for the first time you have to take the stairs, and in the buildings I was interested in taking the stairs is very exhausting and time consuming. What we need is an elevator, a master elevator that would allow anyone to reach any floor at the push of a button. These elevators need to be built, but it is no simple task. Building such a master elevator was my ultimate goal. I could only achieve my goal when I realized that the city my buildings were located in was part of a larger world, this world is called the *skein category of the annulus*. Using the structure of this world and a blueprint for building elevators I was able to achieve my result and finally build the master elevator. The blueprint bears the names of two Russian physicists, Vadim Knizhnik and Alexander Zamolodchikov!

On the boundary of mathematics and physics

One of the joys of conducting research in mathematical physics is the discovery of new connections between different branches of mathematics and physics. Doing a mathematics and physics PhD (having both a mathematics and physics supervisor) I learned that mathematicians and physicists speak different languages. A lot of energy was spent just in translating the language and trying to learn to speak to my supervisors. While one (the mathematician) wanted precision and rigor, the other (the physicist) would ask why I was making things so complicated.

The city–Loop models

Loop models have emerged from the study of phase transitions and critical phenomena in statistical mechanics. They are a class



Figure 1 Local configurations.

of two-dimensional models defined on a lattice. The states of the models consist of continuous paths in space, that is the lattice, which do not end, except possible at the boundary. Paths may or may not intersect or overlap. A weight τ is also assigned to each loop. Configurations of the lattice are build up from the simple local configurations as shown in Figure 1.

Loop models have applications to τ -vector models, also known as $O(\tau)$ models. These are models where spins are unit vectors with τ -components. The name $O(\tau)$ refers to the fact that the spins have the symmetry of the orthogonal group. In physics, loop models have applications to condensed matter, can be used to model polymers in a bath and have connections to conformal field theory.

We were interested in the *dense loop model* with loop weight equal to one, on an $n \times \infty$ square lattice with periodic boundaries so that the lattice lies on the surface of an infinite cylinder with a circumference n . In particular we prove closed form expressions for two observables; the *current* and the *nesting number*. The current is the mean value that a specific type of path crosses a particular edge and the nesting number gives the probability that a point on the lattice is surrounded by a number of loops.

Proving the expressions for the observables amounts to proving recursion relations that connect the loop model of different sizes. One particular connection is the braid recursion which connects the model of lattice width n and $n+1$. Studying the braid recursion has led to a new connection between loop models, skein theory and quantum Knizhnik–Zamolodchikov (qKZ) equations. To understand the braid recursion I use skein theory to reinterpret the configurations of the model so that paths can cross each other. The result is the link-pattern tower, which describes how to connect configurations associated to the model of size n and $n+1$. To prove the braid recursion we show that the ground state of the model satisfies the qKZ equations and forms a qKZ tower of solutions. Constructing qKZ towers is though non-trivial (and existence is not guaranteed).

The closed form expression of the nesting number is a generating function for the probability of having a number of loops around a point on the lattice. A closed form expression means expressing it in terms of special functions (such as Schur functions or matrix determinants) that are indexed by the system size of the model. The ground state of the dense loop model is a function that takes values in some vector space v_n . I show it is a qKZ tower of solutions. This proves that the ground state satisfies the braid recursion. It describes how two solutions of different rank (n and $n+1$) are connected. In the solution of higher rank, that is $n+1$, we set the last variable equal to zero and we view this as a decent of the solution. For the solution of smaller rank, that is n we lift the representation space using an intertwiner. This is viewed as lifting the solution. The lift and descent connect the solutions giving the braid recursion.

The world–Skein theory

Skein theory originated from knot theory, where knot theory is an area of topology that studies knots. To study knots we use 2-di-

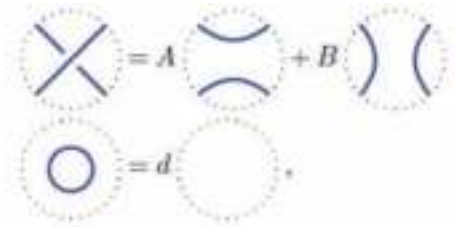


Figure 2 Kauffman rules.

dimensional diagrams. These are obtained by projecting the knot onto the plane $(x, y, 0) \subset \mathbb{R}^3$ while keeping the information about the crossings appearing in the knot. An important step is to be able to distinguish and classify knots. One approach is to construct knot invariants.

Louis Kauffman introduced the bracket polynomial which allows to construct knot invariants based on elementary combinatorial rules on knot diagrams in which crossings are replaced by their two possible smoothings. The rules are often depicted as in Figure 2, where the disc shows the local neighborhood where the diagrams differ. The bracket polynomial $\langle K \rangle$ of a knot diagram K is obtained by recursively applying the two rules above to the knot diagram and is invariant under Reidemeister moves R2 and R3, see Figure 3, if $B = A^-$ and $d = -A^2 - A^{-2}$. Under this specialization the relations are called *skein relations*. Moreover, the bracket satisfies R1 up to a scalar. Multiplying the bracket polynomial by an appropriate factor involving the writhe of oriented knot diagrams one obtains an oriented knot invariant, which is the Jones polynomial.

In general, skein theory is the study of knots in 3-manifolds modulo the Kauffman skein relation and the loop removal relation. We deal with the 3-manifold $A \times [0, 1]$, with A the annulus in the complex plane; the resulting geometry is a thickened cylinder.

This is the world in which our city, loop models, is located. And in the city, on some street, the two buildings, the current and the nesting number have been equipped with a master elevator allowing us to reach any floor with a click!

After completing the PhD project Kayed is planning to return to the United Arab Emirates with his family and start a career. Leaving the studying life and returning to the non-academic world will be a challenge, we wish the best to Kayed! At least in the UAE there will be no more winters!

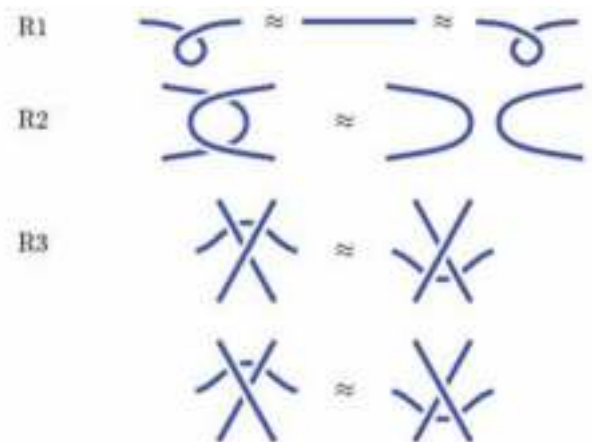


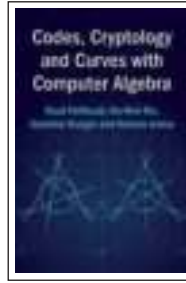
Figure 3 The Reidemeister moves.

Boekbesprekingen

| Book Reviews

Redactie: Hans Cuypers en Hans Sterk

Review Editors NAW - MF 7.092
 Faculteit Wiskunde & Informatica
 Technische Universiteit Eindhoven
 Postbus 513
 5600 MB Eindhoven
reviews@nieuwarchief.nl
www.win.tue.nl/wgreview



Ruud Pellikaan, Xin-Wen Wu, Stanislav Bulygin, Relinde Jurrius

Codes, Cryptology and Curves with Computer Algebra

Cambridge University Press, 2017
 xii + 597 p., prijs £49.99
 ISBN 9780521520362

This book gives a comprehensive, thorough, and self-contained introduction to algebraic coding theory primarily written from the point of view of a mathematician. Moreover, several links with related areas of mathematics and computer science such as combinatorics, complexity theory, cryptology, and algebraic geometry are touched upon. Apart from classical results in algebraic coding theory, the book also contains more recent research results, some of which obtained by the authors themselves.

The first six chapters are meant as the material for a master course in coding theory for students with a background in elementary algebra. Let me therefore first discuss these six chapters. Apart from a thorough (and at times somewhat terse) introduction to the basic concepts in coding theory (Chapters 1 and 2), classical topics such as cyclic codes (Chapter 4), evaluation codes (called polynomial codes, Chapter 5) and decoding Reed–Solomon and related codes using the key equation (Chapter 6) are discussed. The third chapter includes material on weight enumerators with applications to estimating error-probability after decoding. Two decoding methods are presented in Chapter 6, namely decoding using error-correcting pairs and list decoding. The level of detail both when defining the central objects and when proving central results is on the whole excellent. Covering all material in the first six chapters in a master course may be ambitious, but it is easy to leave out specific topics, if needed, without interrupting the general flow. In every chapter, many exercises of varying difficulty are given. A list of answers is not provided. It is suggested by the authors that the students use a computer algebra package to perform calculations. Chapter 12 is meant to facilitate this and several concrete examples are given for the usage of the computer algebra packages SINGULAR, MAGMA, GAP, and SAGE. All in all I found the first six chapters of the book very suitable as teaching material for a first year master course for students having a background in elementary algebraic structures such as groups, rings, and (finite) fields.

Chapters 7 through 11 contain an introduction to topics on the border of coding theory and other areas. More precisely, they contain material on the interplay of coding theory with complexity theory (Chapter 7), combinatorics (Chapter 8), cryptology (Chapter 9), Gröbner bases (Chapter 10), and algebraic curves (Chapter 11). The authors suggest that these chapters could be used as a second year master course, read as part of a special course, or used as the starting point of a project or assignment. The level of difficulty of these chapters is more advanced than that of the first six. Moreover, the exposition is at times more condensed, while some chapters do not contain as many exercises as before (with Chapter 11 not containing any exercises). Mature and motivated students could certainly study these chapters in a special course, project, or assignment. As material for a second year master course, some of the chapters

should in my opinion be supplemented with other material. The authors themselves have indicated various references in each chapter, which is very helpful in this respect. It may have been a missed opportunity not to include exercises in Chapter 11, since it is difficult to come to grips with algebraic geometry codes without them.

As always in a book, choices needed to be made by the authors to leave out certain topics. Nevertheless, I was impressed by the scope of the book: many topics in algebraic coding theory are addressed and now collected in one book. Someone reading the entire book, will obtain a very good overview of algebraic coding theory from the mathematical point of view and of its interplay with other areas of mathematics and computer science. All in all, I can highly recommend this book.

Peter Beelen



Remco van der Hofstad

**Random Graphs and Complex Networks
Volume 1**

Cambridge University Press, 2017

xvi + 321 p., prijs £44.99

ISBN 9781107172876

Random graph theory is by now a relatively mature area of math research going back well over half a century. The seminal work of Erdős and Rényi around 1960 is usually considered the start of the subject, but in fact random graphs already featured in a proof of a deterministic result in combinatorics by Erdős via ‘the probabilistic method’, over a decade earlier. The study of complex networks in contrast is a far younger subject that started just before the turn of the millennium when Barabási-Albert and several others noticed that many real-world networks of diverse origins share certain characteristics. These include short distances, a ‘power law degree sequence’, meaning that the proportion of nodes that have k neighbours decays like a negative power of k , and ‘clustering’, roughly speaking meaning that knowing that two nodes have a common neighbour makes it likely that they have a direct link as well. These findings sparked considerable interest and since then many different models of random graphs have been proposed that generate graphs with the mentioned characteristics. Still, to this date there is no consensus on which model is preferred and what the best explanation for the occurrence of these characteristics is.

This book is aimed at master students and above and is based on the lectures notes of Prof. Van der Hofstad’s own MSc course on this subject. It introduces the subject basically from scratch, including all the necessary tools from probability theory that go beyond a standard first year course, such as stochastic ordering, branching processes and martingales. As a result only very mild prerequisite knowledge is needed. The treatment is completely rigorous, but still the book remains very readable.

The book begins by discussing at some length the background of complex networks including how various data sets on real-world networks were generated and analyzed. After that there are two chapters with prerequisites from probability theory followed by two chapters on the classical Erdős–Rényi model of random graphs. In

the last three chapters of the book, three well-studied models for complex networks, generalized random graphs, the configuration model and the preferential attachment model, are discussed in detail.

I really like this book. The writing is of a high standard. I would certainly recommend it to a starting graduate student, even if their first degree was not mathematics. I should however perhaps point out that the book focusses on complex networks so that, naturally, some attractive facets of modern random graph theory do not get treated.

Tobias Müller



Pierre Colmez, Jean-Pierre Serre (eds.)

Correspondance Serre–Tate

Volume I+II

Documents Mathématiques 13+14

Société Mathématique de France, 2015

xxviii + 448 p., prijs €80,00

xvi + 521 p., prijs €80,00

ISBN 9782856298022, 9782856298039

“...your letters would offer a clear alternative for students who wished to gain access rapidly to the core of your ideas.”

Mumford aan Grothendieck, 26-XII-1985

Wat een rijkdom: veel van de correspondentie tussen vier grote wiskundigen op het gebied van de algebraïsche meetkunde en getaltheorie, John Tate (1925), Jean-Pierre Serre (1926), Alexander Grothendieck (1928–2014) en David Mumford (1937), is nu in boekvorm verschenen. We bespreken hier de laatste van deze ‘trilogie’: bijna duizend pagina’s, in twee delen, met alle brieven tussen Serre en Tate in de periode 1956–2009.

Beiden schrijven zowel in het Frans als in het Engels, en in deze uitgave is dat onvertaald gelaten. Bijvoorbeeld 17-II-1966: “La réponse est si belle que j’ai envie de l’écrire en Français” waar Tate beschrijft wat hij later in zijn prachtige artikel over endomorfismen-algebra’s van abelse variëteiten zal bewijzen. En Serre die op 15-XI 1969 aan Tate schrijft, die net chairman in Harvard geworden is: “Bonjour, cher cherman!”

Elk van de drie collecties Grothendieck–Mumford (G-M; *Selected Papers*, Volume II, On algebraic geometry, including correspondence with Grothendieck. Ching-Li Chai, Amnon Neeman en Takahiro Shiota (eds.), Springer, New York, 2010), Grothendieck–Serre (G-S; *Correspondance Grothendieck–Serre*, Pierre Colmez en Jean-Pierre Serre (eds.), Société Mathématique de France, 2001; er is ook een Engelse vertaling door Catriona Maclean en Leila Schneps uitgegeven bij de AMS) en Serre–Tate (S-T) geeft een prachtig beeld van de ontwikkelingen. Soms begrijp je een gedachte beter uit een van de brieven dan uit de uiteindelijke, uitgewerkte versie. Ze bieden veel materiaal om te gebruiken als startpunt voor onderzoek, voor inspiratie, en voor verwondering over deze vier wiskundigen.

De drie collecties met brieven G-M, G-S, S-T, zijn zeer verschillend, vooral omdat de band tussen schrijver en ontvanger in elk van de gevallen in de drie combinaties onderling zo verschillend is. Grothendieck had bij Serre en bij Mumford een prachtig klankbord voor zijn gedachten: naast het beschrijven van een ontwikkeling van een nieuwe theorie schreef hij een vraag; zowel Serre als Mumford gaven vaak een antwoord met een eenvoudig of een ingewikkeld

tegenvoorbeeld; dat bespaarde Grothendieck de moeite om die gedachte als uitgangspunt voor een nieuwe theorie te nemen. Waar Grothendieck zo origineel en sterk was in het herkennen van een algemene structuur, kenden daarnaast Serre en Mumford hun voorbeelden en bijzondere gevallen als weinig anderen. Een prachtige kijk in deze wereld: gedachten, suggesties en nieuwe theorie flitsen heen en weer. Het zijn documenten om te lezen en te herlezen.

We geven eerst wat commentaar op Grothendieck–Serre en op Grothendieck–Mumford. De briefwisseling (1955–1969 en 1984–1987) tussen Grothendieck en Serre verscheen in 2001, in het Frans, en daarna ook in een Engelse vertaling. Voor een bespreking, zie het lange artikel van L. Schneps, *The Grothendieck–Serre Correspondence* (in: *Alexandre Grothendieck: A Mathematical Portrait*, L. Schneps (Ed.), International Press, 2014) en zie: J. Tate, *Correspondance Grothendieck–Serre*, NAW 5/5(1) (2004), 42–44.

(G-S) In zijn fascinerende manuscript *Récoltes et semailles. Réflexions et témoignage sur un passé de mathématicien*, 1986, 1250 pp., schrijft Grothendieck (pagina 210) “toujours lui”: hoe een idee van Serre hem inspireert; een mooie samenvatting zou dit kunnen zijn van dit aspect van de briefwisseling.

We zien hoe Grothendieck een revolutionaire gedachte deelt met Serre en daar een prachtig commentaar of voorbeeld op terugkrijgt. Deze briefwisseling is om te lezen en te herlezen. Je voelt alsof je er echt bij bent, bij deze revolutie in de algebraïsche meetkunde.

We geven een voorbeeld hoe deze briefwisseling ook te gebruiken is. Grothendieck vraagt of elke variëteit gedomineerd wordt door een product van krommen, commentaar van Serre 145.1 op pagina 271: “Grothendieck avait eu l’espoir de démontrer les conjectures de Weil en prouvant que toute variété est birationnellement un quotient d’un produit de courbes.” Serre geeft op 31-III-1964 een prachtig voorbeeld van een oppervlak dat hier niet aan voldoet (en merkt later op dat er ongetwijfeld hoger-dimensionale tegenvoorbeelden zijn); hiermee is voor Grothendieck deze weg naar een bewijs van de Weil vermoedens afgesloten. De vraag blijft verder liggen, maar niet bij Schoen, die deze discussie toen nog niet kende, maar in 1996 over precies deze vraag een prachtig artikel publiceerde: ‘Varieties dominated by product varieties’ (*Int. J. of Math.* 7 (1996), 541–571).

Een mooie aanzet voor verder onderzoek: welke vragen uit de drie collecties zijn door anderen (mogelijk in een andere context) bestudeerd en (deels) beantwoord?

Een prachtige kijk in deze wereld: gedachten, suggesties en nieuwe theorie flitsen heen en weer, documenten om te lezen en te herlezen. Gesprekspartners die hun gedachten delen en steeds afsluiten met “Salut et fraternité.”

(G-M). De brieven van Grothendieck en Mumford hebben een heel andere toon. Een (klein) deel van de brieven tussen Grothendieck en Mumford vinden we in Mumfords eerder genoemde *Selected Papers*.

Grothendieck schrijft aan Mumford 25-IV-1961: “It seems to me that, because of your lack of some technical background on schemata, some proofs are rather awkward and unnatural, and the statements you give not as simple and strong as they should be.” Maar vijf jaar later, op 9-V-1966, schrijft Grothendieck: “I found it kind of astonishing that you should be obliged to dive so deep and so far in order to prove a theorem whose statement looks so simple-minded.” Niet vaak zie je het verschil in benadering tussen pure theorie enerzijds en ervarings-gefundeerde bewijzen zo mooi verwoord. In de brief van Grothendieck aan Mumford 9-I-1986: “You are explaining to me, but perhaps rather explaining to yourself as a way to re-

assure yourself, about the pendulum of fashion or moods swinging back and forth between the ‘concrete’ and the ‘abstract’...” Mumford schrijft 26-XII-1985 dat hij veel geleerd heeft van de brieven die hij kreeg van Grothendieck, maar dat “...I find the style of the finished works, esp. EGA, to be difficult and unreadable because of its attempt to reach a superhuman level of completeness.” Een prachtig uitgangspunt om de abstracte theorie van Grothendieck je eigen te maken, en tegelijkertijd de aanpak van Serre en van Mumford als uitleg, motivatie en uitgangspunt te nemen.

(S-T) De brieven van Serre en Tate hebben weer een heel andere toon. Wiskundevrienden die hun grappen, ervaringen maar vooral ook wiskundige ideeën met elkaar delen. Ook veel niet-wiskundige onderwerpen komen aan bod, van de Red Sox tot de oorlog in Vietnam, van de wijn die besteld is tot het welzijn van wederzijdse familie.

Tate die zeer lovend over verschillende promovendi en hun werk rapporteert, en ook zegt: “He dislikes characteristic p , poor fellow.” Zo iets kan alleen maar onder goede vrienden die het op de juiste waarde weten te schatten. In maart 1960 is Tate nog “vous”, en in september 1960 “tu” in de brieven van Serre.

Teksten en voordrachten van Serre zijn glashelder. Tate daarentegen heeft een heel andere manier van werken, 23-X-1966: “My course is ‘dragging’ along. ...I am so confused that I am going rather slowly.” (Ik was bij dat college, herinner me hoe Tate voor het bord heen en weer liep, zich hardop afvragend “what am I trying to say”, en tot onze verbazing stond er even later een complete, nieuwe, verrassende stelling op het bord.) Dit aspect komt in hun discussie steeds naar voren, beiden met fascinerend nieuwe gedachten en suggesties, door elk op een andere manier benaderd.

Van al deze brieven heb ik er één eerder gezien. Op 18-XII-1966 schrijft Serre een lange brief aan Tate waarin hij een vermoeden van Manin bewijst (later opgenomen in de Honda–Tate-theorie), glashelder en duidelijk; die prachtige brief eindigt hij dan met “Pas grand-chose à signaler.” (Ik was destijds verbaasd en verbijsterd.)

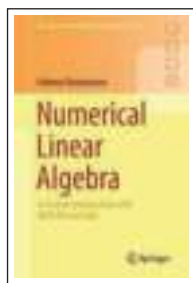
Colmez bespreekt in detail een aantal wiskundige aspecten van deze briefwisseling (P. Colmez, *Tate’s work and the Serre–Tate correspondence*, *Bull. AMS* 54 (2017), 559–573).

Elk van de onderwerpen van discussie in die vele jaren tussen Serre en Tate is het bestuderen, overwegen en uitwerken waard. Of het nu hun prachtige artikel ‘Good reduction of abelian varieties’ (*Ann. of Math.*, 1968) is, of Tate’s artikel ‘The arithmetic of elliptic curves’ (*Invent. Math.*, 1974), samen met die commentaren in hun brieven daarover, geven ze een prachtig beeld, zowel van de wiskunde als van het onderzoek in die tijd. Zo schrijf je wiskunde, zoals in deze invloedrijke artikelen.

Bij de brieven van Serre en Tate is er een prachtig en uitvoerig commentaar van 80 pagina’s, een literatuurlijst daarbij van 30 bladzijden, een thematische index, en een complete lijst van namen van alle wiskundigen genoemd in brieven of commentaar. Wat een precisie.

Dit prachtige werk is een historisch document, geeft inzicht in hoe wiskundevrienden met elkaar omgaan en het schetst ontwikkelingen in dit veelzijdige vakgebied, aan de hand van inzichten, suggesties en uitleg van deze twee grote wiskundigen. Het is voor iedereen een groot genoegen om deze teksten te lezen, ook als dit niet het eigen vakgebied is. Voor studenten is het een bron van informatie en voor specialisten een uitdaging om bestaande stellingen en structuren beter te begrijpen, maar ook om nieuw onderzoek op te starten langs deze lijnen, uitgezet door deze indrukwekkende persoonlijkheden.

Frans Oort



Folkmar Bornemann

Numerical Linear Algebra
A Concise Introduction with MATLAB and Julia

Springer, 2018

$x + 153$ p., prijs €40,32

ISBN 9783319742212

Dit boek is ontwikkeld voor een undergraduate cursus voor wiskundestudenten van de Technische Universiteit München. De stof wordt behandeld in twee lessen per week. Het doel van het vak en boek is om algoritmisch en numeriek denken over te dragen ten aanzien van de fundamentele vragen binnen de numerieke lineaire algebra. Een van de uitgangspunten van het boek is om de operaties niet te beschouwen op componenten van vectoren en matrices, maar in een bloksgewijze opdeling van de vectoren en matrices. Dit geeft niet alleen een eenvoudiger notatie maar deze aanpak leidt ook tot een aanzienlijke versnelling van de algoritmen op de huidige computerarchitecturen (vectorcomputers, GPU's en hiërarchische geheugenopbouw).

De schrijver gaat heel diep in op een gedegen foutanalyse. De motivatie om dit te doen is een beter begrip van de behandelde algoritmen. De ontwikkelde algoritmen worden ook beschreven met behulp van MATLAB-programma's. In een appendix staan ook Julia-versies van deze algoritmen. Elk hoofdstuk wordt afgesloten met een aantal vraagstukken. Daarnaast zijn er extra e-learningtools beschikbaar.

Het boek bestaat uit vijf hoofdstukken gevolgd door zes appendices. In het eerste hoofdstuk wordt gestart met een introductie: wat is numerieke analyse? Verder wordt MATLAB geïntroduceerd en er is een uitleg over rekentijden en verschillende vormen van BLAS-routines. In de laatste twee secties worden driehoeksmatrices en unitaire matrices behandeld. Deze zijn van groot belang voor de methoden die in latere hoofdstukken aan de orde komen.

In het tweede hoofdstuk worden matrixfactorisaties behandeld. Onderwerpen zijn: LU-decompositie, afrondfouten, kleine pivots, partial pivoting en het aantal benodigde flops voor de gegeven algoritmen. Daarna komen meer specialistische factorisaties aan de orde: Cholesky-ontbinding, QR-ontbinding, (modified) Gramm Schmidt-proces en Givens-rotaties.

Hoofdstuk drie is geheel gewijd aan foutanalyse. De schrijver gaat hier heel grondig te werk. Eerst worden vector- en matrixnormen ingevoerd. Daarna wordt het conditiegetal gegeven en de fout in matrixproducten en het oplossen van lineaire stelsels onderzocht. Nadat *floating point*-getallen zijn ingevoerd wordt het effect van afrondfouten besproken. De gevoeligheid voor afrondfouten wordt onderzocht voor de ontwikkelde rekenschema's. Een aantal voorbeelden illustreert de ontwikkelde theorie. Het hoofdstuk sluit af met een foutanalyse van het oplossen van grote lineaire stelsels en het verbeteren van de nauwkeurigheid van de oplossing met behulp van iteratief naverfijnen.

Het vierde hoofdstuk is relatief kort en gaat over het oplossen van kleinstekwadratenproblemen. Er worden twee methoden beschreven: het oplossen van de normaalvergelijkingen en orthogonalisatie. In het laatste geval wordt de QR-ontbinding gebruikt om het kleinstekwadratenprobleem op te lossen.

Het vijfde en laatste hoofdstuk gaat over de numerieke benadering van eigenwaardeproblemen. Eerst worden de basisconcepten behandeld. Daarna komen de *companion matrix*, perturbatietheorie en de conditionering van eigenwaardeproblemen voor normale matrices aan bod. Omdat voor matrices met afmetingen groter dan 7×7 er geen directe oplosmethoden zijn om eigenwaarden te bepalen wordt een aantal iteratieve methoden behandeld. Eerst wordt de Power-methode besproken, samen met de convergentieanalyse en inverse iteratie voor het benaderen van de kleinste of inwendige eigenwaarden. Daarna komt de meer geavanceerde QR-methode aan bod. Ook worden shift-strategieën besproken en een analyse gegeven van de convergentie.

De appendices hebben de volgende titels: MATLAB Intro, Julia, Normen, Householder, Allerlei en Extra Opgaven. Verder is het boek voorzien van een lijst van notaties en een index. De verwijzingen worden meestal als voetnoot gegeven. Persoonlijk stel ik een referentielijst aan het einde van een boek op prijs.

Het boek is kort en bondig. Dat maakt het handig in gebruik. Het betekent wel dat de studenten het boek zorgvuldig moeten bestuderen omdat de informatiedichtheid erg hoog is. De foutanalyse is heel grondig maar misschien had het ook met minder gekund. Ik vind de hoeveelheid en diversiteit van onderwerpen aan de hoge kant voor een undergraduate cursus. Naast MATLAB en Julia wordt tegenwoordig ook veel Python gebruikt. Python implementaties zouden een nuttige aanvulling op het boek geven. Afsluitend: een prima boek dat met verstand gebruikt moet worden. *Kees Vuik*



James Carlson, Stefan Müller-Stach, Chris Peters

Period Mappings and Period Domains
Second Edition

Cambridge Studies in Adv. Math. 168

Cambridge, 2017

xiv + 562 p., prijs £40.99

ISBN 9781316639566

Like the first edition, this monograph provides an excellent introduction to Hodge theory and its applications to complex algebraic geometry. Taken together with *Mixed Hodge Theory* by Chris Peters and Joseph Steenbrink (*Ergebnisse der Mathematik und ihrer Grenzgebiete*, Vol. 52, Springer, 2008) these two volumes provide an overview of the modern foundations of Hodge theory. The inclusion of well selected problems makes this text an excellent choice for an introductory graduate course on the subject.

In terms of topics covered, the main addition to this version are the last three chapters (Part IV) which cover Mumford–Tate groups, Shimura varieties and their applications to the study of moduli problems. Such objects arise naturally whenever one considers a family of smooth projective varieties with automorphisms (or more generally extra Hodge tensors). The case of Shimura domains and varieties is outlined, including the theory of bounded symmetric domains and the basic examples of CM points, elliptic modular curves and the modular surfaces of Hilbert and Picard. This outline culminates in the description of the moduli space of cubic surfaces as a Shimura variety.

Among the other changes in the second edition are the inclusion of discussions of derived functors, the Leray spectral sequence and the algebraicity of the Gauss–Manin connection. A short account of some counterexamples to the infinitesimal Torelli theorem has also been added. Parts of the exposition on the differential geometry of period domains have also been revised.

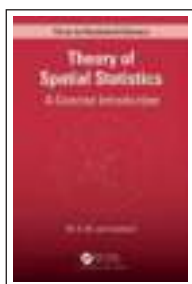
Aside from the changes noted above, the rest of Parts I–III are similar to the first edition: Part I begins with the Hodge theory of curves and double planes before introducing the mapping cone. After further elaboration, the authors describe the Hodge structure on smooth projective hypersurfaces via residues and introduce the Abel–Jacobi map. Part I culminates in the introduction of the period map and the discussion of the infinitesimal Torelli problem.

Part II focuses on spectral sequences, Koszul complexes and the proof of the generic Torelli theorem for hypersurfaces. This section also gives an account of normal functions, the Griffiths group and Nori’s connectivity theorem. This section also contains a proof of a result of Green and Voisin that the image of the Abel–Jacobi map on a very general smooth projective hypersurface of sufficiently high degree is torsion.

Part III discusses period maps from the differential geometric viewpoint, including Higgs bundles, harmonic maps and the curvature of the Hodge bundles of a variation of Hodge structure. Some applications include the theorem of the fixed part, rigidity theorems and results on the fundamental groups of compact Kähler manifolds.

Gregory Pearlstein

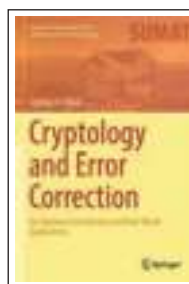
Recent verschenen publicaties. Als u een van deze boeken wilt bespreken of als u suggesties heeft voor andere boeken voor deze rubriek, laat dit dan per e-mail weten aan reviews@nieuwarchief.nl.



M. N. M. van Lieshout

**Theory of Spatial Statistics
A Concise Introduction**

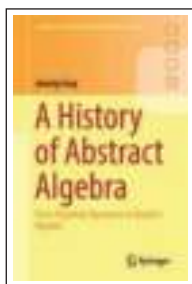
Chapman and Hall/CRC Press, 2019
ISBN 9780367146399
crcpress.com/9780367146399



Lindsay N. Childs

Cryptography and Error Correction

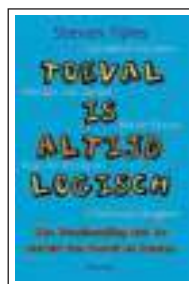
Springer, 2019
ISBN 9783030154516
springer.com/9783030154516



Jeremy Gray

**A History of Abstract Algebra
From Algebraic Equations to Modern Algebra**

Springer, 2018
ISBN 9783319947723
springer.com/9783319947723



Steven Tijms

**Toeval is altijd logisch
Een kennismaking met de wereld van toeval
en kansen**

VU University Press, 2018
ISBN 9789086597802
vuuniversitypress.com/toeval-is-altijd-logisch



Vincent Alberge, Athanase Papadopoulos
(eds.)

**Eighteen Essays in Non-Euclidean
Geometry**

European Mathematical Society, 2019
ISBN 9783037191965
ems-ph.org/books/book.php?proj_nr=243



M. Ram Murty, Brandon Fodden

**Hilbert's Tenth Problem
An Introduction to Logic, Number Theory,
and Computability**

American Mathematical Society, 2019
ISBN 9781470443993
bookstore.ams.org/stml-88



Ehrhard Behrends

**The Math Behind the Magic
Fascinating Card and Number Tricks and
How They Work**

American Mathematical Society, 2019
ISBN 9781470448660
bookstore.ams.org/mbk-122/



June Barrow-Green, Jeremy Gray, Robin Wilson

**The History of Mathematics: A Source-
Based Approach
Volume 1**

American Mathematical Society, 2019
ISBN 9781470443528
bookstore.ams.org/text-45

Problemen

| Problem Section

This Problem Section is open to everyone; everybody is encouraged to send in solutions and propose problems. Group contributions are welcome. *We no longer reward a book token for solutions, but we will still select the most elegant solutions for publication.* The solutions of the problems in this issue will appear in the next issue.

Problem A (proposed by Arthur Bik)

Let

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix} \in \text{SO}(3)$$

be a matrix not equal to the identity matrix. Prove: if the vector

$$\begin{pmatrix} (a_{23} + a_{32})^{-1} \\ (a_{13} + a_{31})^{-1} \\ (a_{12} + a_{21})^{-1} \end{pmatrix}$$

exists, then A is a rotation using this vector as axis.

Problem B (proposed by Onno Berrevoets)

1. Let $k \in \mathbb{Z}_{>0}$ and let $X \subset 2^{\mathbb{Z}}$ be a subset such that for all distinct $A, B \in X$ we have $\#(A \cap B) \leq k$. Prove that X is countable.
2. Does there exist an uncountable set $X \subset 2^{\mathbb{Z}}$ such that for all distinct $A, B \in X$ we have $\#(A \cap B) < \infty$?

Problem C (proposed by Onno Berrevoets)

Let $A: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ be a continuous function such that for every $x, y, z \in \mathbb{R}$ we have

1. $A(x, y) = A(y, x)$,
2. $x \leq y \Rightarrow A(x, y) \in [x, y]$,
3. $A(A(x, y), z) = A(x, A(y, z))$,
4. A is not the max and not the min function.

Prove that there exists an $a \in \mathbb{R}$ such that for all $x \in \mathbb{R}$ we have $A(x, a) = a$.

Edition 2019-1 We received solutions from Paul Hutschemakers, Hendrik Reuvers and Hans Samuels Brusse.

Problem 2019-1/A (folklore)

Three gamblers each select a non-negative probability distribution with mean 1. Say these distributions are F, G, H . Then x is sampled from F , y is sampled from G , and z is sampled from H . Biggest number wins. What distributions should the gamblers choose?

Solution Suppose two of the gamblers choose the same distribution function: $\Phi(t) = \sqrt{t/3}$ on the interval $[0, 3]$. What should the other gambler do? If she flips a coin and says 3 for H and 0 for T , then she needs a coin that has probability $\frac{1}{3}$ for H in order to comply with the rules of the game. She wins one third of the time. She could also try a fair coin and say 2 for H and 0 for T . What is the probability that she wins with this strategy? She needs to beat the maximum of two numbers that are sampled from the $\sqrt{t/3}$ -distribution. The distribution of the maximum is $M(t) = t/3$. Therefore, the probability that 2 is the winning number is $\frac{2}{3}$. The probability that H comes up is $\frac{1}{2}$. Again, she wins one third of the time.

Of course, the other gambler may try other coins and other numbers. We leave it to the reader to verify that each of them have a probability of $\frac{1}{3}$ of winning. The other gambler should not use a number bigger than three. If she is overly concerned and says 4 just to be on the safe side, she will not win one third of the time.

Any probability distribution on $[0,3]$ with mean one is a mixture of coins with mean one. Therefore, the other gambler may just as well sample from $\Phi(t)$ to win one third of the time. If all three gamblers sample from this distribution, each of them wins a third of the time and has no reason to deviate. We solved the game. As always, it is a bit of a mystery how we found this solution. There is no good algorithm to find a Nash equilibrium.

This game is taken from a recent paper by Steve Alpern and John Howard, 'Winner-take-all-games', *Operations Research* 65, 2017. They solve the n -player version and show that the solution is unique. Apparently, it remains an open problem to solve the game if different players have different means. Suppose we have a new Da Vinci coming up at Christie's and three different Saudi royals with three different means want to buy it. In a one-shot auction, how should they bid?

Problem 2019-1/B (proposed by Hendrik Lenstra)

For given $m \in \mathbb{Z}_{\geq 3}$, consider the regular m -gon inscribed in the unit circle. We denote the surface of this m -gon by A_m . Suppose m is odd. Prove that $2A_m$ and A_{2m} have the same minimal polynomial.

Solution We find $A_m = \frac{m}{2} \sin(\frac{2\pi}{m})$ by basic geometry, so $2A_m = m \cdot \sin(\frac{2\pi}{m})$ and $A_{2m} = m \cdot \sin(\frac{2\pi}{2m})$. Let ζ be a primitive $2m$ -th root of unity. If we embed in $\mathbb{C}$ by taking $\zeta = \cos(\frac{2\pi}{2m}) + i \sin(\frac{2\pi}{2m})$ in $\mathbb{C}$, we find $A_{2m} = \frac{m}{2i}(\zeta + \zeta^{-1})$ and $2A_m = \frac{m}{2i}(\zeta^2 + \zeta^{-2})$. Since m is odd, ζ^2 is a primitive $4m$ -th root of unity, and so is $\zeta^2 i$. We consider the field $\mathbb{Q}(\zeta, i) = \mathbb{Q}(\zeta i)$. Observe that the field automorphism defined by sending ζi to $\zeta^2 i$ sends ζ to $-\zeta^2$ and i to $-i$ (this can be verified using $i = \pm (\zeta i)^m$ and $\zeta = \pm (\zeta i)^{m+1}$). Therefore this automorphism sends A_{2m} to $2A_m$ (implicitly using the earlier embedding into $\mathbb{C}$). Since automorphisms preserve minimal polynomials, it follows that A_{2m} and $2A_m$ have the same minimal polynomial.

Problem 2019-1/C (proposed by Nicky Hekster)

Let n be a prime number. Show that there are no groups with exactly n elements of order n . What happens with this statement if n is *not* a prime number?

Solution Solutions were submitted by Hans Samuels Brusse, Hendrik Reuvers and Paul Hutschemakers. The solution below is based on the solution by Hans.

Suppose G is a group with exactly n elements of prime order n . Let g be a group element of G of order n . Then $H_1 = \{1, g, g^2, \dots, g^{n-1}\}$ is the subgroup generated by g and all $n-1$ elements $g, g^2, \dots, g^{n-1}$ have order n . Since n is prime any of these elements can serve as generator for H_1 .

Since G contains n different elements of order n by assumption, there must be exactly one more. Assume h is this last element, then h is not in H_1 and it will generate a different subgroup $H_2 = \{1, h, h^2, \dots, h^{n-1}\}$. Note that $h, h^2, \dots, h^{n-1}$ are distinct and do not belong to H_1 , since this would imply $h \in H_1$. This gives us $2(n-1) \geq n$ distinct elements of order n , which leads to a contradiction unless $n = 2$.

In the case $n = 2$, we have distinct elements g, h of order 2. Note that ghg^{-1} has order 2 as well. Clearly, it cannot equal g , so it must equal h . However, this means g and h commute, and we find that the element gh is of order two and not equal to either g or h . So we find a contradiction in this case as well.

If n is not prime, the statement is false. For example, the abelian group $C_4 \times C_2$ (with C_k the cyclic group of order k) contains four elements of order four.

In the paper 'Finite groups that have exactly n elements of order n ' by Carrie E. Finch, Richard M. Foote, Lenny Jones and Donald Spickler, Jr., *Mathematics Magazine* 75(3) (June 2002), pp. 215–219, the finite groups with the mentioned property are classified.