

Inhoud | Contents

Artikelen | Features

- Onderwijs | Education**
 10 Digitalisering van wiskunde in het voortgezet onderwijs *Peter Eshuis, Rob Houtenbos, Judith Boertjens*
- Interview | Interview**
 15 Wilbert IJzerman: Van technologie tot psychologie *Sjoerd Rienstra, Jan ten Thije Boonkkamp*
- Evenement | Event**
 19 Laudatie voor John Mather *Henk Broer*
- Oratie | Inaugural Lecture**
 21 Kansen in ruimte en tijd *Marie-Colette van Lieshout*
- Maatschappij | Society**
 29 Wiskunde in de Nationale Wetenschapsagenda *K.P. Hart*
- De oplossing | The Solution**
 32 Het chromatisch polynoom *Jan Draisma*
- Onderzoek | Research**
 36 Feuerbach met complexe getallen *Jan van de Craats*
- Boekbespreking | Book Review**
 39 A great role model *Gert Heckman*
- Onderzoek | Research**
 41 The Kadison–Singer conjecture *Klaas Landsman, Marco Stevens*
- In Memoriam | Obituary**
 47 Jan R. Strooker: K-theorie in Nederland *Jan Stienstra, Wilberd van der Kallen*
- Column | Column**
 49 A look into the challenges of mixed-mode surveys *Thomas Klausch*
- Column | Column**
 53 Confidence in Bayesian Uncertainty Quantification? *Botond Szabó*
- Column | Column**
 55 Robuuste ambulancelogistiek *Rutger Kerkkamp*
- Interview | Interview**
 58 Jacob Murre: Remembering Grothendieck *Ulf Persson*

Rubrieken | Departments

- 3 Redactioneel *Jan van Neerven*
- 4 Agenda
- 6 Nieuws
- 8 Van de voorzitter van het KWG *Geurt Jongbloed*
- 27 Het keerpunt van Linda Plantagie *Jan Beuving*
- 63 In de verdediging *Geertje Hek*
- 65 Boekbesprekingen
- 70 Problemen

Uitgelicht



Marie-Colette van Lieshout sprak haar intreedrede voor de vakgroep Stochastische Operations Research van de Universiteit Twente uit.



K.P. Hart analyseert wiskundige vragen die gesteld zijn in de Nationale Wetenschapsagenda.

Colofon

Het Nieuw Archief voor Wiskunde is een uitgave van het Koninklijk Wiskundig Genootschap en verschijnt vier maal per jaar. Het tijdschrift richt zich op eenieder die zich beroepsmatig met wiskunde bezighoudt, als academisch of industrieel onderzoeker, student, leraar, journalist of beleidsmaker. Het stelt zich ten doel te berichten over ontwikkelingen in de wiskunde in het algemeen en in de Nederlandse wiskunde in het bijzonder.

ISSN 0028-9825

Adres

Nieuw Archief voor Wiskunde
Centrum Wiskunde & Informatica
Postbus 94079
1090 GB Amsterdam
tel. 020-5924288
redactie@nieuwarchief.nl
www.nieuwarchief.nl

Hoofredactie

Richard Boucherie (r.j.boucherie@utwente.nl)
Jan van Neerven (j.m.a.m.vanneerven@tudelft.nl)

Eindredactie/Bladmanager

Fred Drissen (fred@nieuwarchief.nl)

Redactie

Hans Cuypers (TU/e), Jan Draisma (TU/e), Geertje Hek (UvA), Jan Hogendijk (UU), Teun Koetsier (VU), Sjoerd Rienstra (TU/e), Hans Sterk (TU/e), Mark Timmer (UT)

Problemenrubriek

Gabriele Dalla Torre (UL), Christophe Debry (KU Leuven), Jinbi Jin (UL), Marco Streng (UL), Wouter Zomervrucht (UL)

Bureau redactie

Gianni van den Braak, Lætitia Diemer

Illustraties

Ryu Tajiri, Amsterdam

Vormgeving

Susanne Laws (omslag, begeleiding binnenwerk)
Kitty Molenaar (ontwerp)

Druk

Drukkerij Ten Brink, Meppel

Advertenties

advertenties@nieuwarchief.nl

Koninklijk Wiskundig Genootschap

www.wiskgenoot.nl

Platform Wiskunde Nederland

www.platformwiskunde.nl

European Mathematical Society

www.euro-math-soc.eu

International Mathematical Union

www.mathunion.org

Koninklijk Wiskundig Genootschap

Het Koninklijk Wiskundig Genootschap (KWG) is een landelijke vereniging van beoefenaars van de wiskunde. In 1778 opgericht onder de zinspreuk: 'Een onvermoeide arbeid komt alles te boven' is het 's werelds oudste nationale wiskundegenootschap. Leden ontvangen het Nieuw Archief voor Wiskunde als onderdeel van hun lidmaatschap.

Bestuur

Geurt Jongbloed (TUD, voorzitter), Fetsje Bijma (VU, penningmeester), Joke Blom (CWI, secretaris), Erik van den Ban (UU), Theo van den Bogaart (HU), Sonja Cox (UvA), André Ran (VU), Herman te Riele (CWI), Mark Veraar (TUD)

Secretariaat

Joke Blom, CWI
Postbus 94079, 1090 GB Amsterdam
wiskgenoot@wiskgenoot.nl
www.wiskgenoot.nl

Ledenadministratie KWG / Abonnementen

Postbus 1064, 7940 KB Meppel
admin@wiskgenoot.nl, tel. 085-0160252

Contributie

De contributie voor gewone leden bedraagt in 2016 € 90 per jaar. Voor gepensioneerden en werklozen € 45. Voor studenten, aio's en oio's van een Nederlandse universiteit of hbo-opleiding € 35. Studenten en pas afgestudeerden kunnen een jaar lang gratis lid worden. Voor leden van de wiskundige vakverenigingen VvS+OR, NVvW en NVORWO geldt het gereduceerd tarief van € 70. Leden die het Nieuw Archief voor Wiskunde niet willen ontvangen, betalen slechts € 50 contributie. Losse nummers zijn te bestellen voor € 20.

Instituten in Nederland en buitenland kunnen zich abonneren op het Nieuw Archief voor Wiskunde voor € 100 (Nederland), € 110 (Europa) of € 112,50 (buiten Europa).

Members of foreign societies

Members of SIAM, the *Société Mathématique de France*, the *Gesellschaft für Angewandte Mathematik und Mechanik*, the *Deutsche Mathematiker-Vereinigung*, and of the *American, Australian, Belgian, Indian, London, Spanish, and South-African Mathematical Societies* living outside of the Netherlands pay € 70 instead of the full membership fee of € 90 a year. Conversely, these foreign societies, as well as the VvS+OR and the NVORWO, have reduced membership fees for KWG members. A postage charge of € 10 is added for members living abroad but in Europe, and a charge of € 12,50 for members living outside of Europe.

Exchange subscriptions

Koninklijk Wiskundig Genootschap Library
Centrum Wiskunde & Informatica
P.O. Box 94079, NL-1090 GB Amsterdam
KWG-exchange@cw.nl

Informatie voor auteurs

Kopij

Het Nieuw Archief voor Wiskunde is een geredigeerd tijdschrift. Kopij dient per e-mail te worden aangeboden aan de hoofdredactie. Uitgebreide informatie en auteursinstructies kunt u vinden op www.nieuwarchief.nl.

Volgende nummers

nummer	verschijningsdatum	deadline kopij
2	06-06-2016	verstreken
3	05-09-2016	01-05-2016
4	05-12-2016	01-08-2016
1	06-03-2017	01-11-2016

Instituutsleden

De publicaties van het Koninklijk Wiskundig Genootschap worden mede mogelijk gemaakt door de bijdragen van de volgende instituten.



Centrum Wiskunde & Informatica



Rijksuniversiteit Groningen



Universiteit van Amsterdam



Universiteit Leiden



Vrije Universiteit



Universiteit Utrecht



Technische Universiteit Eindhoven



Eurandom



Technische Universiteit Delft



Universiteit Twente



Radboud Universiteit Nijmegen



Freudenthal Instituut

Op het omslag

Sinds de gloeilamp verboden is in Nederland en Europa is het gebruik van ledverlichting flink toegenomen. Dankzij een sterk verbeterde technologie zijn er steeds meer toepassingen mogelijk. Lees het interview met Wilbert IJzerman van Philips op pagina 15.

Boterhammen

In zijn werk *De Zandrekenaar* geeft Archimedes een schatting van het aantal zandkorrels dat in het Universum past: zo'n 10^{63} . Voor dit doel moest hij eerst een systeem bedenken om zulke grote getallen te kunnen benoemen; het toen gangbare notatie-systeem liet dat niet toe. Hij baseert zijn berekening op schattingen van een aantal astronomische parameters in het heliocentrische model van de kosmos van zijn tijdgenoot Aristarchus. Er zijn aanwijzingen dat Copernicus bekend was met dit werk van Archimedes en dus ook met het heliocentrische wereldbeeld van Aristarchus. Mogelijk heeft het tellen van zandkorrels dus bijgedragen aan een van de grote omwentelingen in de wetenschap!

Of de vraag "Hoeveel boterhammen zijn er op de wereld?" in onze Nationale Wetenschapsagenda ook een revolutie in ons denken teweeg zal brengen valt te betwijfelen, maar het is een prachtige vraag van een pientere vierjarige die later vast wetenschapper wordt. Zijn vraag, en vele andere, worden beantwoord op een blog van de wiskundige Klaas Pieter Hart die hierover in dit nummer verslag doet.

Inmiddels zijn de circa 11.000 vragen die zijn gesteld gegroepeerd in 140 clustervragen die richtinggevend moeten worden voor het wetenschappelijk onderzoek in Nederland. Daarvan is er één expliciet aan wiskunde gewijd, te weten nummer 125: "Welke symmetrieën schuilen er onder priemgetallen en hoe kan de wiskundige getaltheorie bijdragen aan natuurkundige theorievorming?" Op de website van de Wetenschapsagenda treffen we onder deze noemer een dertigtal uiteenlopende vragen aan. Samen met de andere wiskunde-gerelateerde vragen bij onder meer de cluster-vragen rond 'big data' verschaffen zij een interessante doorkijk naar de perceptie van wiskunde in onze maatschappij. Op basis hiervan concludeert Hart terecht dat er nogal een kloof gaapt naar de academische wiskunde. Een belangrijke conclusie die we niet naast ons neer mogen leggen.

De Wetenschapsagenda past in een lijn van verbreding die al langer geleden is ingezet: denk bijvoorbeeld aan de bre-

de panels voor de Vici-rondes en de allocatie van onderzoeksgeld aan brede maatschappelijke thema's in de topsectoren. Maar dit moet niet te ver doorschieten. Inmiddels experimenteren de eerste instellingen met toekenning van onderzoekssubsidies door publieksstemmen. Zo gaan bij het UMC in Nijmegen patiënten onderzoeksideeën genereren en geld ervoor werven via 'communities' die het vervolgens verdelen via een stelsysteem met 'likes'. Eerder al had de Maag Lever Darm Stichting het hele Nederlandse publiek via internet laten stemmen welk van twee intern geselecteerde onderzoeksvoorstellen uiteindelijk zou worden gefinancierd. Gaan we straks onze onderzoeksvoorstellen pitchen in *The Voice of Science* van het wetenschappelijk onderzoek?

Aan de positieve kant valt op dat veel fundamentele vragen de interesse van een breed publiek genieten. Hoeveel zandkorrels in ons Universum passen houdt niet alleen wetenschappers bezig en de Wetenschapsagenda geeft ook een duidelijk mandaat aan nieuwsgierigheidsgedreven onderzoek. In het huidige tijdsgewricht waarin vrij onderzoek onder druk staat is dit geen onbelangrijke constatering. De grote media-aandacht voor de recente waarneming van zwaartekrachtsgolven onderstreept de brede belangstelling voor fundamentele wetenschap nog eens.

Gelukkig bepaalt de wiskunde in Nederland haar agenda (nog) zelf en is de eerste stap voor de implementatie van het Deltaplan gezet: NWO EW stelt in 2016 2 miljoen euro beschikbaar voor de consolidering van de wiskundeclusters, een van de belangrijkste acties uit het plan. Op 21 maart 2016 wordt het Deltaplan aan de minister van OCW aangeboden. Aan ideeën en elan ontbreekt het niet, dat blijkt ook wel uit de enthousiaste column van de voorzitter van het KWG in dit nummer!

Jan van Neerven, hoofdredacteur
Delft Institute of Applied Mathematics, TU Delft

Agenda

| Upcoming Events

maart 2016

11 maart 2016

2de ronde Nederlandse Wiskunde Olympiade

De tweede ronde van de Nederlandse Wiskunde Olympiade. De beste leerlingen gaan door naar de finale in september.

plaats Nederlandse universiteiten

info wiskundeolympiade.nl

11 maart 2016

Mini-workshop on Symplectic Geometry

Workshop voor eenieder die studeert of werkt op het gebied van symplectische meetkunde.

plaats Uithof, Utrecht

info gqt.nl

11–12 maart 2016

Finale Wiskunde A-lympiade

Finale van competitie voor leerlingen uit de bovenbouw havo/vwo die wiskunde A in hun pakket hebben.

plaats De Veluwe

info uu.nl/onderwijs/wiskunde-a-lympiade

14–18 maart 2016

Variational methods in probability theory and statistical physics

Workshop in het kader van de Stochastic Activity Month (SAM) 'Probability and Analysis'.

plaats TU Eindhoven

info www.eurandom.nl

17 maart 2016

W4Kangoeroe

WereldWijde WiskundeWedstrijd voor basis- en middelbare scholieren.

plaats eigen school

info w4kangoeroe.nl

22–23 maart 2016

BeNeLuxMC 2016

Het jaarlijkse congres van het KWG wordt ditmaal tezamen met de Belgische en Luxemburgse zusterverenigingen gehouden. Het 52ste NMC is onderdeel van dit congres.

plaats Science Park, Amsterdam

info nmc.wiskgenoot.nl

23 maart 2016

Grote Rekendag

14de editie van de Grote Rekendag, waarop het doel is om kinderen onderzoekend te laten rekenen. Dit jaar is het thema 'Kijkje achter de code'.

plaats basisscholen in Nederland en Vlaanderen

info info.groterekendag.nl

24 maart 2016

Vorm en ruimte

Workshop voor docenten wiskunde C (vwo) en docenten wiskunde D (havo), gegeven door Quintijn Puite en Theo van den Bogaart (Instituut Archimedes, HU).

plaats Hogeschool Utrecht

info uu.nl/u-talent

29 maart – 11 april 2016

Simulation of rare events

Workshop in het kader van de Stochastic Activity Month (SAM) 'Probability and Analysis'.

plaats TU Eindhoven

info www.eurandom.nl

31 maart 2016

Leren van raadsels

Wiskunde leren zien in alledaagse problemen. Masterclass voor leerlingen uit de bovenbouw van havo en vwo.

plaats De Uithof, Utrecht

info uu.nl/u-talent

april 2016

4–8 april 2016

Fixed-Parameter Computational Geometry

Workshop mede georganiseerd door Mark de Berg (TU/e) en Hans Bodlaender (UU).

plaats Lorentz Center@Oort, Leiden

info lorentzcenter.nl

4–8 april 2016

Gauge Theory and Noncommutative Geometry

Workshop met als thema 'The interaction between gauge theory and noncommutative geometry'.

plaats RU, Nijmegen

info gqt.nl

8 april 2016

Leve de Wiskunde!

Het jaarlijkse wiskundecongres voor inzicht in de actuele ontwikkelingen in de wiskunde, voor docenten en leerlingen.

plaats *UvA, Science Park, Amsterdam*

info *itsacademy.nl/leve-de-wiskunde*

8 april 2016

The Big Picture

Workshop ter gelegenheid van het pensioen van Jan Stienstra.

plaats *Uithof, Utrecht*

info *gqt.nl*

10–16 april 2016

European Girls' Mathematical Olympiad

Europese wiskundewedstrijd speciaal voor meisjes.

plaats *Bușteni, Roemenië*

info *www.egmo.org*

11–15 april 2016

Taking the Measure of One-Dimensional Dynamics

Workshop georganiseerd door onder anderen Henk Broer (RUG), Robbert Fokkink (TUD), Frank den Hollander (UL) en Ale Jan Homburg (UvA).

plaats *Lorentz Center@Oort, Leiden*

info *lorentzcenter.nl*

18–22 april 2016

Game Theory and Evolutionary Biology: Exploring Novel Links

Workshop georganiseerd door Johan Metz (UL), Nicole Mideo (Toronto), Kateřina Staňková (UM) en Frank Thuijsman (UM).

plaats *Lorentz Center@Oort, Leiden*

info *lorentzcenter.nl*

18–22 april 2016

Metastability in Statistical Mechanics and Stochastic Processes

Workshop mede georganiseerd door Roberto Fernandez (UU) en Francesca Nardi (TU/e)

plaats *TU Eindhoven*

info *www.eurandom.nl*

21–22 april 2016

PhD Days in Analysis and Dynamics

Tweedaags evenement van het NDNS+-cluster om toekomstige samenwerking tussen afgestudeerde studenten te stimuleren.

plaats *Congrescentrum De Werelt, Lunteren*

info *www.ndns.nl*

24 april 2016

Brain-Computer Interfaces

Paradisolezing van prof.dr. Peter W.M. Desain, hoogleraar kunstmatige intelligentie/cognitiewetenschap (RU). Kunnen we ons brein uitbreiden met elektronica? Hoe sluiten we die aan?

plaats *Paradiso, Amsterdam*

info *knaw.nl*

29 april – 1 mei 2016

Benelux Mathematical Olympiad (BxMO)

De Benelux-versie van de wiskundeolympiade, dit jaar in Nederland

plaats *Soest*

info *wiskundeolympiade.nl*

mei 2016

13 mei 2016

WSC Voorjaarsbijeenkomst 2016

Voorjaarsbijeenkomst van de Werkgemeenschap Scientific Computing. Een goede mix van jonge en senior onderzoekers zal een voordracht geven over hun research.

plaats *Uithof, Utrecht*

info *www.cwi.nl/events*

17–20 mei 2016

Fractality and Fractionality

Workshop mede georganiseerd door Peter Spreij (UvA en RU).

plaats *Lorentz Center@Oort, Leiden*

info *lorentzcenter.nl*

26–27 mei 2016

Diamant symposium

Halfjaarlijks symposium van het DIAMANT-cluster met gastspreker Manjul Bhargava (Princeton University).

plaats *Congrescentrum De Werelt, Lunteren*

info *websites.math.leidenuniv.nl/diamant*

juni 2016

6–10 juni 2016

Computational Proofs for Dynamics in PDEs

Workshop mede georganiseerd door Jan Bouwe van den Berg (VU).

plaats *Lorentz Center@Snellius, Leiden*

info *lorentzcenter.nl*

12 juni 2016

De empathische machine

Paradisolezing van prof.dr. Max Welling, hoogleraar Machine Learning (UvA). Wanneer zullen machines ons echt begrijpen? En wat zijn de gevolgen daarvan?

plaats *Paradiso, Amsterdam*

info *knaw.nl*

27 juni – 1 juli 2016

Search Games: Theory and Algorithms

Workshop mede georganiseerd door Herman Haverkort (TU/e).

plaats *Lorentz Center@Oort, Leiden*

info *lorentzcenter.nl*

juli 2016

6–16 juli 2016

International Mathematical Olympiad

Internationale finale van de wiskundeolympiade, dit jaar in Hong Kong.

plaats *Hong Kong*

info *www.imo-official.org*

25–29 juli 2016

Mathematical Biology of Tissue Mechanics

EMS-ESMTB Summer School mede georganiseerd door Roeland Merks (CWI).

plaats *Lorentz Center@Oort, Leiden*

info *lorentzcenter.nl*

25–29 juli 2016

Structure in Graphs and Matroids

Workshop georganiseerd door Stefan van Zwam (Louisiana State University) en Rudi Pendavingh (TU/e).

plaats *TU Eindhoven*

info *www.eurandom.nl*

Nieuws

| News

Deze rubriek is een kroniek van wiskundige activiteiten in Nederland. Toekomstige activiteiten worden aangekondigd en van voorbije activiteiten wordt verslag gedaan. Wilt u uw aankondiging of verslag in deze rubriek geplaatst zien? Stuur ons dan uw bijdrage van ± 350 woorden, zo mogelijk met illustratie. De redactie behoudt zich het recht voor berichten te weigeren of in te korten.

nieuws@nieuwarchief.nl

Marius Crainic wint eerste N.G. De Bruijnprijs

De eerste winnaar van de N.G. de Bruijnprijs is Marius Crainic, hoogleraar wiskunde aan de Universiteit Utrecht. De prijs wordt beschikbaar gesteld door Elsevier vanwege de samenwerking met het Koninklijk Wiskundig Genootschap bij het publiceren van *Indagationes Mathematicae*. In aanmerking voor de prijs komen kandidaten die de Nederlandse nationaliteit hebben, in Nederland wonen of verbonden zijn aan een Nederlandse instelling. De N.G. de Bruijnprijs 2016 is bestemd voor de auteur van het beste wiskundig wetenschappelijke werk dat in gerefereerde tijdschriften verschenen is in de jaren 2011–2014. De prijs wordt op 23 maart uitgereikt op het BeNeLuxMC 2016, alwaar de prijswinnaar ook een lezing zal geven.

wiskgenoot.nl

Nieuw priemrecord

Sinds 7 januari is het grootste bekende priemgetal $2^{74.207.281} - 1$. Het is ontdekt door Curtis Cooper, hoogleraar wiskunde aan de University of Central Missouri, en een van de duizenden vrijwilligers van het GIMPS-project. GIMPS (Great Internet Mersenne Prime Search) is een project waarin vrijwilligers zoeken naar Mersenne-priemgetallen. Het nieuwe priemrecord dat door Cooper gevonden is heeft 22.338.618 cijfers, dat is bijna 5 miljoen meer dan het vorige record.

www.mersenne.org

Koninklijke onderscheiding voor Henk Broer

Op vrijdag 20 november 2015 ontving prof.dr. H.W. Broer (RUG) ter gelegenheid van zijn emeritaat een Koninklijke onderscheiding uit handen van burgemeester P.E.J. den Oudsten van de gemeente Groningen. Henk Broer (Diever, 1950) is hoogleraar en internationaal topwetenschapper op het gebied van dynamische systemen in de wiskunde. Hij is benoemd tot Ridder in de Orde van de Nederlandse Leeuw. Zijn vakgebied richt zich op het ontwikkelen van de wiskundige taal voor het beschrijven in de tijd van veranderingen in toestanden en bewegingen van fysische en wiskundige verschijnselen. In het bijzonder ligt de focus van Broers werk op het beschrijven van plotselinge en chaotische overgangen in complexe systemen.

George Huitem

Goldstein wint de Batchelor Prize 2016

De George K. Batchelor Prize 2016 is toegekend aan professor Raymond E. Goldstein, hoogleraar Complex Physical Systems aan de University of Cambridge. De prijs is bedoeld voor excellente we-

Correcties artikel decembernummer

Michiel Vermeulen maakte me attent op twee foutieve formuleringen in mijn artikel over het *abc*-vermoeden in het NAW-nummer van december 2015. In de bewijsschets van Lemma 4 in de eerste kolom op blz. 235 wordt bedoeld dat elk nulpunt van het product van (A, A') , (B, B') , (C, C') nulpunt is van $A'B - B'A = BC' - B'C$. In het *abc*2-vermoeden in de tweede kolom op blz. 235 moet $c < (N(abc))^2$ vervangen worden door $c \geq (N(abc))^2$.

Rob Tijdeman

tenschappers die in de afgelopen tien jaar een belangrijke bijdrage hebben geleverd op het gebied van stromingsleer, en wordt eens per vier jaar uitgereikt door de *Journal of Fluid Mechanics* en de International Union of Theoretical and Applied Mechanics (IUTAM). Het onderzoek van Goldstein en zijn team richt zich met name op het snijvlak van fysica en life sciences. *cambridge.org*

Babyloniërs rekenen aan de baan van Jupiter

Met aanwijzingen op een vijftig jaar oude foto ontrafelde de Nederlandse sterrenkundige Mathieu Ossendrijver van de Humboldt Universiteit in Berlijn de mysterieuze code die staat beschreven op een eeuwenoud Babylonisch kleitablet over astronomie. Tot nu toe was onbekend wat de inscripties inhielden. Op de steen staat een schema dat Jupiters plaats in de sterrenkundige dierenriem voorspelt. Het laat zien dat Mesopotamische astronomen complexe geometrische technieken ruim 1500 jaar eerder beheersten dan Europese wetenschappers. *newscientist.nl*



QuSoft gelanceerd, onderzoekscentrum voor kwantumsoftware

Op donderdag 3 december 2015 is QuSoft gelanceerd, het eerste onderzoekscentrum dat zich specifiek richt op kwantumsoftware. Het centrum is een gezamenlijk initiatief van CWI, UvA en VU, en is gevestigd op Amsterdam Science Park. Het onderzoek van QuSoft is complementair aan dat van QuTech, dat zich richt op de ontwikkeling van kwantumhardware. Daarmee versterkt het nieuwe centrum de positie van Amsterdam en Nederland in de wereldtop van onderzoek op het gebied van kwantuminformatica.

De ontwikkeling van kwantumsoftware vereist fundamenteel andere technieken en benaderingen dan de ontwikkeling van traditionele software, vanwege de bijzondere kwantummechanische eigenschappen van de kwantumcomputer, zoals superpositie, interferentie en verstrengeling. De belangrijkste onderzoeksopdracht is om software te ontwikkelen en toepassingen te vinden die de uitzonderlijke kracht van kwantumcomputers kunnen benutten.

QuSoft zal zich met name richten op onderzoeksgebieden en toepassingen voor een klein aantal qubits, het testen en debuggen van kwantumsystemen, en kwantumarchitecturen. Daarnaast wordt kwantumcryptografie een belangrijk onderzoeksonderwerp. Omdat de meeste moderne cryptografische versleutelingsmethoden heel eenvoudig gekraakt kunnen worden zodra de eerste werkende kwantumcomputers beschikbaar zijn, is de ontwikke-

ling van nieuwe cryptografische protocollen en toepassingen van cruciaal belang voor de beveiliging van onze economische infrastructuur. *Annette Kik*

Yoei Dijkstra wint ASML Afstudeerprijs

Op 30 november ontving Yoei Dijkstra van de TU Delft de ASML Afstudeerprijs voor Wiskunde (2000 euro) van de Koninklijke Hollandse Maatschappij der Wetenschappen. Dijkstra gaf met behulp van wiskundige vergelijkingen een verklaring voor de ingewikkelde circulatiestroming in riviermondingen. Riviermondingen zijn regelmatig aangepast om de scheepvaart doorgang te bieden. Dit heeft geleid tot een groter verschil tussen eb en vloed en een verandering van de stroming. Hierdoor kunnen grote hoeveelheden modderig sediment opwoelen, waardoor havens snel dichtslibben en het leven in modderige estuaria wordt bedreigd.

Yoei Dijkstra koos voor een vereenvoudigde wiskundige benadering (met de perturbatiemethode) van dit probleem omdat dit fundamenteel inzicht biedt in ingewikkelde processen, zoals stroming van zout- en zoetwater, verzilting en sedimentatie. In zijn onderzoek richtte hij zich op een circulatiestroming, waarbij zout zeewater bij de bodem de rivier instroomt en als brak water aan het oppervlak weer terugstroomt. Zo'n circulatiestroming is een belangrijke factor voor sedimentatie. Om dit proces te analyseren heeft hij bruikbare wiskundige vergelijkingen 'afgepeld' en ze in een computermodel toegepast op de stroming in een estuarium. Zo ving hij dit proces in elementaire relaties en ontdekte hij hoe de sterkte van deze stroming nauw samenhangt met de menging tussen zout en zoet water in een estuarium. *Janny Terlouw*

Tien wiskundestudenten winnen Jong Talent Aanmoedigingsprijs

Op 30 november ontvingen tien studenten in de wiskunde en technische wiskunde bij de Koninklijke Hollandse Maatschappij der Wetenschappen te Haarlem een Jong Talent Aanmoedigingsprijs van vijfhonderd euro voor hun studieresultaten in het eerste studiejaar. De prijzen zijn beschikbaar gesteld door ORTEC om de studie in wiskunde te stimuleren. Gerrit Timmer, CFO ORTEC, reikte de prijzen uit aan: Tysger Boelens (RUG), Harold Nieuwboer (VU), Michel Zoeteman (UL), Paul Donkers (TUD), Bastiaan Cnossen (UvA), Wouter Fokkema (UT), Thomas Bakx (UU), Bas Verseveldt (UU), Jeroen Winkel (RU) en Timo Bras (TU/e). *Janny Terlouw*

Koninklijk Wiskundig Genootschap

Algemene Ledenvergadering

De Algemene Ledenvergadering wordt gehouden op dinsdag 22 maart tijdens de lunch van BelNeLuxMC 2016. De vergaderstukken zijn te vinden op <https://wiskgenoot.nl/mijn-kwg> (gebruiksnaam: KWG-leden; wachtwoord: K2003WG1778) Bijzondere agenda-punten: kiezen nieuwe voorzitter, stemming over twee ereleden.

Recent verschenen:

Indagationes Mathematicae (www.elsevier.com/locate/indag)

Special Issue 'In memoriam J.G. van der Corput (1890–1975)', J. Ko-revaar, R. Tijdeman and J.J.O.O. Wiegerinck, Volume 26, Issue 5, 2015.



Van de voorzitter van het KGW

Gebundelde krachten

Ieder jaar krijgt de voorzitter van het Koninklijk Wiskundig Genootschap (KWG) deze mooie gelegenheid om via het *Nieuw Archief voor Wiskunde* de KWG-leden te informeren over de 'lopende zaken' en plannen die leven binnen het bestuur. Graag maak ik van die gelegenheid gebruik. Er is namelijk veel gebeurd in het afgelopen jaar en er staat ook nog van alles te gebeuren in de nabije toekomst.

Al een hele tijd waren we binnen het bestuur ons ervan bewust dat onze website 'enigszins door de tijd was ingehaald'. In 2015 hebben we hard gewerkt aan een nieuwe website. Het resultaat daarvan kunt u aanschouwen door wiskgenoot.nl te bezoeken. Met deze website kunnen we weer jaren vooruit! Tegelijk met de website is ook de ledenadministratie verbeterd, iets waar dringend behoefte aan was. Een ander wapenfeit uit 2015 is dat de Engeltalige versie van *De Pythagoras Code* is uitgekomen bij MAA Press, onder de titel *Half a Century of Pythagoras Magazine*. Mooi dat nu zoveel meer mensen kunnen genieten van de vele wiskundige problemen en puzzels die in het boek zijn opgetekend. Verder zijn we begonnen de bedrijfslidmaatschappen nieuw leven in te blazen. Onze statuten bieden naast persoonlijke- en instituutslidmaatschappen ook de mogelijkheid voor bedrijven om lid te worden. We hebben een interessant pakket samengesteld voor bedrijfsleden en zijn momenteel actief bezig deze te werven. Mocht u, nu u dit leest, meteen aan een bedrijf denken dat in uw ogen absoluut bedrijfslid zou moeten zijn, schroom niet die gedachte met een van onze bestuursleden te delen.

Voor het Wintersymposium over analytische meetkunde, dat op 9 januari in het Academiegebouw in Utrecht werd gehouden, kwamen meer aanmeldingen binnen dan de zaal kon verdragen. Kwantitatief was het dus voor aanvang al een succes. Qua inhoud leerde een klein deelnemersonderzoek ook dat met het programma een mooie mix van wiskundige achtergrond, historie en toepassing was gevonden. Voor hen die nog even willen nagenieten, of hun kans willen grijpen alsnog een graantje mee te pikken van een gemist symposium, is er goed nieuws: de presentaties zijn te vinden op onze website.

Het 52ste Nederlands Mathematisch Congres is dit jaar ingebed in het BeNeLux Mathematisch Congres (BeNeLuxMC'16) op het Science Park in Amsterdam. Het is heel mooi dat we hierin samen kunnen optrekken met onze Belgische en Luxemburgse zusterverenigingen, iets wat in het verleden al vaker is gedaan. Voor het eerst is bij de organisatie een splitsing gemaakt tussen een lokaal organisatiecomité bestaande uit Sonja Cox (UvA), André Ran (VU) en Herman te Riele (CWI) en een (dit jaar BeNeLux-breed) wetenschappelijk comité onder voorzitterschap van Lenny Taelman. Het programma liegt er niet om en is te raadplegen op onze website. In het bijzonder wil ik u wijzen op de voordracht van Marius Crainic, de eerste winnaar van de N.G. de Bruijnprijs. We hopen op een grote opkomst, zowel voor het dagprogramma als voor het daaraan verbonden avondprogramma in het Tropenmuseum met publiekslezingen verzorgd door Marcus du Sautoy en Ionica Smeets. Het zou heel mooi zijn als er ook veel jongeren zouden deelnemen. Vanuit het bestuur hebben we uitnodigingen gestuurd naar de verschillende studieverenigingen van opleidingen wiskunde. Mocht u het nog niet hebben genoteerd, dan bij deze: 22 en 23 maart BeNeLuxMC'16 in Amsterdam. Inschrijven voor het congres kan via de KWG-website.

Op 2 december 1966 verongelukte de beroemde Nederlandse wiskundige, filosoof en logicus Bertus (L.E.J.) Brouwer. Dit jaar dus vijftig jaar geleden. Ter gelegenheid hiervan staan in 2016 verschillende activiteiten op de agenda. Zo zal er op 2 september op initiatief van het KWG in het Hodshonhuis van de Koninklijke Hollandsche Maatschappij der Wetenschappen in Haarlem (waar Brouwer het grootste gedeelte van zijn jeugd doorbracht) een publiekslezingenmiddag worden gehouden. Bij de organisatie hiervan trekken we samen op met het bestuur van de KHMW en namens het KWG speelt Rien Kaashoek een prominente rol. Ons erelid en Brouwerkenner bij uitstek Dirk van Dalen zal een lezing verzorgen en officieel het Brouwerarchief overdragen aan het Noord-Hollands Archief, waar het KWG zijn archieven bewaart. We zijn ook zeer verheugd dat prominent wiskundige en huidig president van de KHMW Alexander Rinnooy Kan een lezing zal verzorgen.

Een tweede Brouwer-activiteit is het Brouwersymposium dat op 9 december op het Science Park in Amsterdam zal worden gehouden. Op deze wetenschappelijke bijeenkomst worden lijnen doorgetrokken van Brouwers werk naar het heden. De betekenis van Brouwer komt al naar voren in de breedte van de onderwerpen als topologie, logica, grondslagen, filosofie waarin zijn invloed nog aanwijsbaar is. De sprekers op deze dag leveren, net als een keur van andere gerenommeerde wetenschappers, een bijdrage aan een themanummer van *Indagationes Mathematicae* dat gewijd is aan Brouwer. De gastredacteuren voor dit themanummer, dat naar verwachting begin 2017 zal uitkomen, zijn Dirk van Dalen, Jan Willem Klop en Jan van Mill. Meer informatie over het symposium is te vinden op onze website.

Binnen het verband van Platform Wiskunde Nederland (PWN), waarin we samenwerken met de Nederlandse Vereniging van Wiskundeleraren (NVvW), is in het afgelopen jaar hard gewerkt aan het Deltaplan voor de wiskunde.

De commissie Fokkema (waarin vanuit het PWN-bestuur Jan Karel Lenstra in de rol van vicevoorzitter veel werk heeft verzet) heeft een doorwrocht plan geschreven dat op 15 december 2015 aan NWO en PWN is aangeboden. Binnenkort zal minister Bussemaker het plan ook nog officieel in ontvangst nemen. Het Delta-rapport bouwt voort op de eerder verschenen rapporten van Deloitte en het visiedocument (beide documenten zijn via de PWN-website te downloaden). Een belangrijke rol in het Delta-rapport is weggelegd voor recente verworvenheden in wiskundig Nederland, zoals de wiskundeclusters en Mastermath. Deze succesvolle initiatieven

moeten bevestigd en verder uitgebouwd worden. Er wordt momenteel een commissie ingesteld die zich zal richten op de implementatie van het Deltaplan. Deze Commissie Implementatie Deltaplan (CIΔ) staat onder voorzitterschap van Frank van der Duyn Schouten (wiskundige en oud-rector van de Universiteit Tilburg en de Vrije Universiteit) en zal bij haar werk gezamenlijk optrekken met het bestuur en de commissies van PWN.

Om de vele activiteiten die binnen ons genootschap en in samenwerking met andere partijen worden ontplooid tot een succes te maken, is onvermoeide (samen-)arbeid van veel mensen nodig. Dat we als wiskundegemeenschap sterk kunnen zijn in die samenwerking, is duidelijk. Kijk als voorbeeld naar de hierboven genoemde clusters en Mastermath. Enkele mensen hadden een idee, en veel mensen hebben zich vervolgens ingezet de ontplooidde initiatieven tot een succes te maken. Kijk ook naar de in deze bijdrage genoemde overige activiteiten waarbij ik hier en daar enkele namen heb genoemd (maar eigenlijk veel meer namen had moeten noemen). Deze goede samenwerking is in de toekomst ook hard nodig. Betrokkenheid bij het vak en bij elkaar. Goede communicatie, ook tussen de vele besturen, commissies, MT's, directeuren en overlegorganen is onmisbaar. Op die manier bundelen we vele krachten en kan er veel goeds tot stand komen. ☺

Geurt Jongbloed, voorzitter KWG

Delft Institute of Applied Mathematics, TU Delft
voorzitter@wiskgenoot.nl

Peter Eshuis

docent wiskunde
Carmel College Salland, Raalte
p.eshuis@carmelcollegesalland.nl

Rob Houtenbos

uitgever Moderne Wiskunde
Noordhoff Uitgevers, Groningen
r.houtenbos@noordhoff.nl

Judith Boertjens

uitgever Getal & Ruimte
Noordhoff Uitgevers, Groningen
j.boertjens@noordhoff.nl

Onderwijs

Digitalisering van wiskunde in het voortgezet onderwijs

In het voortgezet onderwijs neemt ICT een steeds grotere plaats in. We nemen een kijkje achter de schermen bij een wiskundedocent voor een beeld van de huidige praktijk. Verder vertellen de uitgevers van de grootste lesmethodes voor wiskunde, *Getal & Ruimte* en *Moderne Wiskunde*, over hun digitale toekomstplannen.

Ervaringen uit de praktijk

Peter Eshuis is docent wiskunde aan het Carmel College Salland en actief gebruiker van ICT in de wiskundeles. In dit artikel geeft hij een impressie van de goede ervaringen, de frustraties en de valkuilen die hij tot nu toe is tegengekomen bij de digitalisering van het wiskundeonderwijs.

“Bij de start van het schooljaar 2015–2016 zullen alle docenten en leerlingen een laptop hebben.” Met deze mededeling werd ons op het Carmel College Salland te Raalte duidelijk gemaakt dat er geen ontkomen meer aan was: er moest gedigitaliseerd worden. Dat was ook al wel op te maken uit de visie van de school, waarin vermeld staat dat het onderwijs per 2016 voor 50 procent ondersteund wordt door digitale didactiek en wat betreft leer middelen voor 50 procent bestaat uit digitale content. Hoewel nog niet iedere school aan de laptop is, krijgt iedereen in meer of mindere mate te maken met de digitalisering van het onderwijs. Of dit goed is valt op dit moment nog niet met zekerheid zeggen. Er zijn onderzoeken die aantonen dat digitaliseren zorgt voor mindere leerresultaten [1], maar er is ook onderzoek dat aantoont dat het juist wel gunstig is [2]. Een belangrijk punt dat naar voren komt is

dat volledig digitaliseren leidt tot slechtere resultaten — alleen wanneer er in beperkte mate wordt gedigitaliseerd zijn er betere resultaten geconstateerd. Feit blijft dat de docent in ieder geval steeds meer te maken krijgt met een gedigitaliseerde omgeving.

Knoppencursus

Bij de uitrol van de laptops begin dit schooljaar is er geen knoppencursus aangeboden om docenten en leerlingen te laten wennen aan het nieuwe apparaat, aangezien iedereen inmiddels zo digitaal vaardig geacht wordt dat dat niet nodig is. Uiteraard bleek dat een veel te optimistische aanname, gezien het aantal collega's dat ik heb geholpen met hun laptop. Ik doe dat met plezier en het verbaast mij ook allermindst dat het nodig is, maar dat ervan uitgegaan wordt dat iedereen goed met een laptop om kan gaan verbaast me wel. Overigens moet ik hier direct aan toevoegen dat ik zelf dezelfde foute aanname heb gemaakt betreffende de vaardigheid van de leerlingen. Alles wat met games of sociale media te maken heeft, hebben ze perfect onder de knie, maar basisvaardigheden met betrekking tot Windows of Office ontbreken bij velen.

Digitalisering voor de laptop

Hoewel leerlingen pas sinds kort met iPads en laptops werken, is de digitalisering van het onderwijs natuurlijk al veel langer aan de gang. Elk lokaal heeft al een computer en veel lokalen hebben een digitaal bord, een beamer met scherm of een grote televisie. Dit maakt het mogelijk om met het programma GeoGebra visuele ondersteuning te geven bij bijvoorbeeld goniometrie of meetkunde. Binnen het wiskundeonderwijs is natuurlijk al veel eerder gedigitaliseerd door de introde van de grafische rekenmachine. Deze is echter al zo ingeburgerd en standaard dat hij over het algemeen door schoolleiders niet eens gezien wordt als een vorm van digitalisering. Geavanceerde apps kunnen er niet op worden gezet en een connectie maken met wifi is meestal ook al niet mogelijk. Het zou dan beter zijn om een smartphone te gebruiken en daar zijn ook zeker nuttige toepassingen voor. Programma's als Kahoot en Socrative zijn ideaal om bijvoorbeeld de voorkennis van de leerlingen snel te testen. De leerlingen loggen via een app in op mijn digitale klaslokaal, waar een quiz is klaargezet. Binnen een paar minuten kan je zo een beeld krijgen van de kennis van de leerlingen. Hier kan dan direct op ingesprongen worden, door een bepaald onderdeel wel

of juist niet te bespreken. Het kan op deze wijze ook helpen om te differentiëren binnen de klas. Het is dan wel belangrijk dat de docent goede vragen in de quiz zet en ook in staat is om de uitkomsten op een juiste wijze te interpreteren.

ICT-gebruik tijdens de uitleg

PowerPoint en Prezi gebruik ik regelmatig, zodat leerlingen opletten op het moment dat ik wat uitleg en niet continu bezig zijn met het overnemen van wat er op het bord staat. Sommige zaken moeten ze wel overnemen en daar geef ik ze dan ook de tijd voor. De gehele presentatie is voor de leerlingen beschikbaar, dus ze kunnen altijd terugvinden wat ik ze geprobeerd heb duidelijk te maken.

Het maken van presentaties vind ik leuk om te doen en kost weinig tijd en moeite meer als het gaat om het uitleggen van relatief eenvoudige onderwerpen. Een groot voordeel is bovendien dat ze makkelijk hergebruikt kunnen worden. Een groot nadeel is dat het tempo er snel uit gaat op het moment dat er veel wiskundige symbolen gebruikt moeten worden – en dat komt uiteraard nog wel eens voor. Dit is een probleem dat ik bij veel programma's tegenkom, en leidt er dan ook toe dat ik dan snel geneigd ben om het toch maar weer ouderwets tijdens de les op het bord uit te werken en niet een digitale presentatie te maken. Dit zorgt ervoor dat ik in de onderbouw veel vaker een digitale presentatie maak dan in de bovenbouw.

Het gebruik van een digitaal bord zie ik als een grote verbetering, zelfs als je hem op dezelfde wijze gebruikt als het vertrouwde krijtbord. Alles wat je opschrijft wordt bewaard; je kan dus later in dezelfde les, of zelfs in een andere les, weer terughalen wat je eerder hebt uitgelegd. Het is bovendien eenvoudig om opmerkingen, markeringen en dergelijke toe te voegen, ook als je het bord gebruikt als een presentatiebord. Daarnaast kan de uitleg ook beschikbaar worden gesteld voor de leerlingen, wat met name erg handig is voor leerlingen die afwezig waren. Dit soort informatie is ideaal weg te zetten in een elektronische leeromgeving, waar naast de uitleg van de eigen docent ook verwezen kan worden naar andere bronnen van uitleg (populair is bijvoorbeeld www.wiskundeacademie.nl).

Erg prettig van een digitaal bord vind ik ook dat een gedeelte van de uitleg al

van tevoren klaargezet kan worden en dat je daar vervolgens met de digitale pen eenvoudig iets bij kan schrijven. Een simpel voorbeeld is het projecteren van een klokvorm bij het behandelen van de normale verdeling, die je vervolgens eenvoudig kan kopiëren en gebruiken. Bij elke opgave heb je dezelfde vorm, je voegt per opgave de gegevens toe die je nodig hebt (door deze er gewoon bij te schrijven) en het staat weer netjes op het bord. Zo kan een digitaal bord veel kleine dingen net iets makkelijker maken. Helaas staat daar tegenover dat sommige praktische problemen deze vereenvoudiging juist weer teniet doen: de borden moeten (soms meerder malen tijdens een les) gekalibreerd worden, de beamer doet het niet, stiften zijn weg, de sensoren van de stiften werken niet, of iets werkt niet en je hebt überhaupt geen idee wat er precies aan de hand is. Dergelijke problemen leveren veel frustratie op, met tot gevolg dat ik het digitale bord toch minder gebruik dan anders wellicht het geval zou zijn. De digitale borden zouden voor mij een echte verrijking van het wiskundeonderwijs kunnen betekenen, als ze maar de betrouwbaarheid van een krijtbord hadden. Hopelijk verbetert de techniek zich op dit vlak om dat in de toekomst mogelijk te maken.

Hiervoor werd er al verwezen naar andere bronnen van uitleg, zoals filmpjes op internet. Deze zijn natuurlijk ook zelf te maken. De leerlingen krijgen dan de uitleg op een wijze zoals jij het wilt hebben en ze zijn vertrouwd met de degene die de uitleg geeft. Dit is iets waar ik zelf ook wel eens aan heb gedacht, maar ik zit er persoonlijk niet op te wachten om met mijn hoofd en/of stem voor altijd op het internet te vinden te zijn. Dit soort filmpjes, al dan niet zelf gemaakt, zijn overigens ook goed te gebruiken om als huiswerk op te geven. Thuis worden ze dan al bestudeerd en tijdens de les kunnen de leerlingen voor wie de stof duidelijk is hier direct mee aan het werk. De anderen die extra uitleg willen hebben, kunnen deze nu, met al enige voorkennis, krijgen. Deze vorm van 'flipping the classroom' kan dus erg nuttig zijn om te differentiëren tijdens de les. Een voorwaarde is dan wel dat leerlingen de uitleg ook daadwerkelijk aandachtig gaan bekijken en ook een goede inschatting kunnen maken van of de stof wel of niet duidelijk is.

Digitaal lesmateriaal

Het gebruik van ICT voor het presenteren van kennis speelt al veel langer, maar nu leerlingen zelf ook standaard een laptop bij zich hebben tijdens de lessen is het natuurlijk zonde om daar geen gebruik van te maken. De mate waarin de laptop nuttig gebruikt wordt tijdens lessen verschilt sterk tussen collega's, maar ook tussen leerlingen. Zo wordt de laptop veel gebruikt als een boek achter glas met een ingebouwd schrift. Dit heeft natuurlijk de toegevoegde waarde dat de schooltas wat lichter wordt, maar een laptop kan veel meer. Om echt iets toe te voegen aan de traditionele lesvormen kan je naar verwachting het makkelijkst beginnen bij de uitgevers. In de bovenbouw gebruiken wij de methode *Moderne Wiskunde*, en dit jaar zijn we in de vierde klassen met de 11e editie begonnen. Deze editie bevat veel digitaal materiaal waar ik direct een aantal nuttige toepassingen voor zag. Handig is dat opdrachten digitaal klaargezet kunnen worden zodat de leerlingen daar dan zelfstandig digitaal mee aan het werk kunnen. Met slechts twee lessen per week wiskunde A in havo 4 is de druk op het programma hoog, dus elke verlichting van hetgeen in de lessen moet gebeuren is welkom. De voorkennisparagraaf sla ik bijvoorbeeld in de les soms over, maar de digitale variant kan uitkomst bieden om daar toch niet helemaal aan voorbij te gaan. Deze paragraaf heb ik wel eens voor de leerlingen digitaal klaargezet, met het idee dat ik kan zien welke leerlingen de opgaven hebben gemaakt en bij welke opdrachten ze vastlopen (om hier in de les op terug te komen). Dit inzicht in de voortgang dat zo verkregen wordt zou ik als een grote toegevoegde waarde ervaren van digitaal werken ten opzicht van de ouderwetse manier.

Leerlingen zijn ook enthousiast over digitaal oefenen. Er is direct feedback: ze zien of hun antwoord goed, gedeeltelijk goed of fout is. Bij het ophalen van voorkennis vind ik dit ook voldoende. Er worden soms nog wel correcte antwoorden fout gerekend doordat het systeem nog niet alle notaties kent, maar dat vind ik niet zo'n groot probleem. Problematischer is dat de ingevulde antwoorden van een aantal leerlingen niet bewaard bleven. Ze hadden het dus wel gemaakt, maar hun huiswerk was weg. Dit is natuurlijk een ideale smoes, maar ik heb het zelf zien gebeuren en dus kwamen ze ermee weg. Dat antwoorden

Resultaten:

☒ Antwoord verwijderen Filteren op: Alle pogingen Filteren op: Groep

Leden weergegeven van Wiskunde Docenten die deelnemen aan de toets Alles weergegeven

☐	Naam	Beantwoord	Status	Score	Weergegeven	Beoordeling
☐		1-12-2015 15:16	Ingeleverd	6	Weergegeven	Geslaagd
☐		1-12-2015 15:17	Ingeleverd	5,5	Weergegeven	Gezakt
☐		1-12-2015 15:18	Ingeleverd	8	Weergegeven	Geslaagd
☐		1-12-2015 15:19	Ingeleverd	7	Weergegeven	Geslaagd

Figuur 1

wegvallen is natuurlijk erg vervelend voor de leerlingen, omdat zij niet kunnen zien wat ze gedaan hebben, maar ook voor mij, omdat ik ook niet kan zien waar de problemen liggen. Van de leerlingen waarvan de gegevens wel bewaard bleven kon ik helaas ook niet zien hoe ze de opgaven gemaakt hadden en dat was nu juist de reden dat ik het digitaal gemaakt wilde hebben. Alles wat ik van hen kon zien is hoe lang ze de voorkennis open hadden gehad. Dit is uiteraard niet de informatie die ik graag gezien had: nu hebben de leerlingen wel de voorkennisopgaven gemaakt en heb ik kunnen bespreken waar ze vragen over hadden, maar het digitale aspect had in dit geval geen enkele toegevoegde waarde. Dit probleem is bekend bij de uitgever en op het moment van schrijven zou het net verholpen zijn. Ik ga het digitale materiaal dan ook zeker weer gebruiken, want ik verwacht het absoluut nuttig te kunnen inzetten.

Ik had gehoopt dat het gebruik van een digitale methode mij van nuttige data zou voorzien, zodat ik mijn lessen beter op de behoeften van de leerlingen af zou kunnen stemmen. Door goede dataverzameling zou dit zeker beter moeten kunnen. De voortgang van leerlingen zou overzichtelijk weer te geven moeten zijn en dit kan digi-

taal veel makkelijk, zo zou je verwachten. Hier worden momenteel gelukkig goede stappen in gemaakt. Het digitaliseren van de methode zou ook heel goed kunnen zorgen voor adaptief onderwijs: het doorverwijzen naar verdiepvragen als een leerling daar aan toe is, of juist naar basisvragen als dat nodig is.

Digitale toetsing

Een ander onderdeel van de digitalisering van het onderwijs is het digitaal toetsen. Digitaal toetsen zou ideaal zijn, zeker als het zou betekenen dat er niet meer handmatig nagekeken meer hoeft te worden. Ik zie daar best wel veel mogelijkheden voor, maar over het algemeen nog niet bij wiskunde. Immers, je wilt vaak de berekening van een leerling hebben om te zien hoe hij aan zijn antwoord komt.

Inmiddels heb ik toch een eerste poging tot digitaal toetsen gedaan en ben daar erg enthousiast over. De stof betrof basisvaardigheden zoals rekenen met breuken en wortels, die leerlingen in de bovenbouw zelfstandig op peil moeten houden. Om ze daartoe aan te zetten, worden deze vaardigheden een aantal keer per jaar getoetst. In dit geval leek digitaal toetsen wel bruikbaar, aangezien het er hier voornamelijk om gaat dat de leerling tot het goede

antwoord kan komen. Deze toets is in *It's Learning*, de elektronische leeromgeving, in elkaar gezet. De toets bestaat uit acht verschillende vragen en per vraag zijn er drie alternatieven klaargezet. De ELO zorgt er dan voor dat elke leerling een alternatief per vraag krijgt en de volgorde is gerandomiseerd. Een groot voordeel van deze digitale toetsing is dat er niet nagekeken hoeft te worden en dat leerlingen direct resultaat zien (zie Figuur 1). Ook kan de leerling zien wat hij fout gedaan heeft, de leerling ziet wat hij ingevuld heeft en wat het had moeten zijn, dus er is direct feedback (zie Figuur 2). Een nadeel is dat er veel tijd gaat zitten in het maken van de toets, maar dat is met name in het begin zo. Dit is een toepassing van het digitaliseren waar ik zeer enthousiast over ben, maar het is voor mij duidelijk dat het op de wijze zoals het hier gedaan is, alleen maar kan bij toetsen waarbij enkel het antwoord van belang is. Met behulp van betere CAS-programma's kunnen er uiteraard ook andere toetsen ontwikkeld worden.

Ik zie vele mogelijkheden voor de digitalisering van het wiskundeonderwijs en ben er ook nog steeds erg enthousiast over, maar dan moeten de randvoorwaarden goed zijn. Is dit niet het geval dan wordt het een frustrerend gebeuren en

Teller: 20 Noemer: 30

12 Bereken en schrijf je antwoord als één breuk. Vereenvoudig als mogelijk. Geef in het antwoord aan wat de teller en de noemer zijn. Teller: 2 Noemer: 3 ...

breuken vermenvulldigen

Leeg:

☒ 20 ☐ 2

☒ 30 ☐ 3

Figuur 2

haalt het bij mij erg veel plezier weg. Goed uitgevoerd zou het juist voor gemak kunnen zorgen en van toegevoegde waarde kunnen zijn.
Peter Eshuis

Referenties

- 1 OECD (2015), *Students, Computers and Learning: Making the Connection*, PISA, OECD Publishing, Paris; doi: <http://dx.doi.org/10.1787/9789264239555-en>.

- 2 ICF Consulting Services Ltd (2015), *Literature Review on the Impact of Digital Technology on Learning and Teaching*, The Scottish Government, Edinburgh.

Adaptief leren met Moderne Wiskunde

Bij *Moderne Wiskunde* wordt volop nagedacht over de verdere digitalisering van de methode. Het is evident dat de docenten bij de volgende edities nog veel en voornamelijk met en uit de boeken zullen werken, maar evenzeer is duidelijk dat veel docenten ook meer digitaal willen werken. Daarbij ontstaat onmiddellijk de vraag om de leerstof meer aan te laten sluiten op de 'leerbehoeft' van de individuele leerling. Nu maakt techniek alles mogelijk: individuele leerroutes door de gehele leerstof van havo/vwo, eventueel over alle leerjaren. Maar de docent wil ook overzicht, de docent wil ook kunnen bijsturen, de docent wil ook een gemeenschappelijke uitleg geven, de docent wil ook dat leerlingen samenwerken. Kortom, we zijn op zoek naar het optimum van aansluiten bij de leerling en de wensen van de docent.

Gepersonaliseerde routes

Voorlopig menen we dat evenwicht gevonden te hebben in een opzet waar we nu mee aan het experimenteren zijn. Dit betreft het aanbieden van (een combinatie van) drie leerroutes: een *extra route* voor de zwakke leerling, een *basisroute* voor de gemiddelde leerling en een *uitdagende route* voor de hele goede leerling.

In de extra route krijgt de leerling per paragraaf twee of drie extra ondersteunende opdrachten aangeboden. De gemiddelde route volgt de lijn van de paragraaf. In de uitdagende route slaat de leerling een

aantal (sub)opdrachten over en krijgt hij/zij op het einde van de paragraaf een aantal uitdagende opdrachten aangeboden.

De leerling wordt afhankelijk van zijn/haar resultaten in de voorgaande hoofdstukken (die qua onderwerp aansluiten op het nieuwe hoofdstuk) automatisch in één van de drie routes geplaatst. (De docent kan overigens ten allen tijde het 'systeem' overrulen en leerlingen zelf in een route plaatsen of zelfs het werken in leerroutes uitschakelen.)

Tijdens de paragraaf kan de leerling van route wisselen, ook weer afhankelijk van zijn/haar prestatie. Maakt de leerling bijvoorbeeld in de basisroute een aantal opdrachten goed, dan stapt hij/zij 'automatisch' over naar de uitdagende route en andersom natuurlijk. Er zijn meestal twee 'wisselmomenten' in een paragraaf, waarmee dus eigenlijk — in theorie — 27 leerroutes ontstaan. De docent kan de vorderingen — en de wisselingen — real time volgen en dus ook ingrijpen als het nodig is.

De docent beschikt vanzelfsprekend over een uitgebreide set van gegevens van de prestaties van zijn/haar klas. Die gegevens worden op een zo overzichtelijk mogelijke manier voor de docent gepresenteerd. Snel is duidelijk of het onderwerp van een paragraaf door een leerling, een groep leerlingen of de hele klas wel of niet wordt begrepen en dus wanneer en voor wie eventueel extra uitleg of hulp nodig is.

De rol van de docent

De rol van de docent verandert in wezen niet: de docent geeft uitleg/instructie, leerlingen gaan aan het werk en de docent stuurt bij wanneer dat nodig is. Het verschil met het werken vanuit het boek is dat de leerlingen vanzelf het niveau van opdrachten krijgen dat bij hen past en dat de docent onmiddellijk overzicht heeft over de voortgang (of het gebrek aan voortgang) van de leerlingen.

De docent hoeft niet te kiezen voor óf het boek óf digitaal. De meeste docenten geven er de voorkeur aan het werken met het boek en digitaal werken af te wisselen. Het ene hoofdstuk leent zich ook beter voor digitale verwerking dan het andere; bij een meetkunde hoofdstuk moet een leerling nu eenmaal veel op papier werken. En dat afwisselen levert ook geen probleem op: het boek en de digitale omgeving bieden beide verschillende leerroutes.

We zijn benieuwd of deze opzet gaat werken. We gaan dit najaar op een aantal scholen twee hoofdstukken van 1hv op deze wijze uitproberen.

Bent u ook nieuwsgierig? Ik houd u graag op de hoogte van de ervaringen. Een e-mail volstaat.

Rob Houtenbos

Een eerdere versie van dit artikel verscheen reeds in wi.docx, een wiskunde-periodiek van Noordhoff Uitgevers.

Getal & Ruimte en de digitalisering

Vanuit docenten groeit meer en meer de vraag naar digitaal lesmateriaal bij de lesmethode *Getal & Ruimte*. Nog niet zo lang geleden werd wiskunde op de computer vooral gezien als het even een uurtje oefenen van applets in een computerlokaal. Maar tegenwoordig vragen docenten en scholen om complete oplossingen waarin digitaal lesmateriaal en folio (lesmateriaal op papier) naadloos op el-

kaar aansluiten en waarmee de docent en de leerling optimaal bediend worden. Maar hoe bereik je dat? Wat verwacht een docent en wat verwacht een leerling? En wat is ondanks alle ontwikkelingen op het gebied van ICT en internet in de (les)praktijk wel en niet mogelijk? Is het gebruik van internet nu wel dé oplossing waar docenten om vragen? En hoe speelt de in 2017 te verwachten 12e editie

havo/vwo onderbouw van *Getal & Ruimte* hierop in?

Verwachtingen van docent en leerling

Enerzijds wil de docent van deze tijd differentiëren zodat hij elke leerling op zijn of haar eigen niveau kan laten werken en begeleiden. Anderzijds wil de leerling op ieder gewenst moment geholpen kunnen worden, of uitgedaagd worden op zijn of

haar niveau. Op dit gebied kan digitaal materiaal een meerwaarde hebben.

Sterke en zwakke punten digitaal materiaal

Om materiaal te maken dat aansluit bij de behoefte van docent en leerling, is het van belang ons eerst af te vragen wat de sterke en zwakke punten van digitaal materiaal zijn. Met digitaal materiaal kun je een papieren boek verleendigen. Je hebt altijd de beschikking over de meest recente versie, theorie kan in tekstvorm én videovorm worden aangeboden, extra bronnen kunnen worden toegevoegd en het aanbod aan opgaven kan worden afgestemd op het niveau van de leerling. Verder kunnen antwoorden en uitwerkingen aan of uit worden gezet en kunnen leerlingen bij het oefenen van online opgaven direct van feedback worden voorzien. Ook is de voortgang van een leerling beter te monitoren omdat hun prestaties in scores worden bijgehouden.

Naast de sterke punten van digitaal materiaal zijn er ook zwakke punten te noemen. De belangrijkste is misschien wel dat wiskundesoftware momenteel alleen in staat is om een uitdrukking en variaties daarop te controleren op juistheid. Wil je grotere uitwerkingen laten controleren omdat er verdeeld over de uitwerking bijvoorbeeld 3 punten te verdienen zijn, dan zijn er drie invulvakken nodig die gericht naar die drie uitwerkstappen vragen. Als gevolg daarvan zal de computer een structuur van uitwerken moeten weggeven. Hierdoor zal een inzichtvraag in het (papieren) leerboek tot een standaardopgave op de computer worden gereduceerd die van een leerling niet het gewenste inzicht zal vragen.

De 12e editie van *Getal & Ruimte*

Zelfs als er digitaal geen beperkingen meer zouden zijn, en alles zou kunnen wat voorheen alleen op papier werd gedaan, is dat dan wat we willen? Moet een leerling alleen een digitale passer en geodriehoek kunnen bedienen, of blijven we het belangrijk vinden dat een leerling ook op

papier met een passer een cirkel kan tekenen? En moet een leerling een kubus en de uitslag ervan alleen op een computer kunnen openvouwen en dichtvouwen, of zijn we van mening dat hij of zij dit ook met zijn handen moet ervaren?

De auteurs van de havo/vwo onderbouw van *Getal & Ruimte* zijn van mening dat beide ervaringen belangrijk zijn en daarom is er gekozen voor *blended learning*. Vandaar dat het leerboek (op papier, als e-book of als tekst in de *Getal & Ruimte*-portal) de leerlijn blijft bepalen en dat naast de opgaven in het boek gedigitaliseerde varianten van opgaven worden aangeboden als die een meerwaarde bieden. Een docent kan er dus voor kiezen om een gedeelte van de opgaven uit het boek te laten maken op papier, en een gedeelte op de computer. Zo blijft de ervaring van het beoefenen van wiskunde op papier dus behouden.

Er is voor gekozen om opgaven die algebruische vaardigheden toetsen zowel in het leerboek als digitaal aan te bieden omdat het met de huidige wiskundesoftware mogelijk is om opgaven te randomiseren, directe feedback te geven en adaptiviteit binnen een opgave of serie van gelijke opgaven in te bouwen. Zo krijgt een leerling dus direct gerichte feedback en wordt het aanbod aan opgaven op zijn of haar niveau en voortgang afgestemd. De docent krijgt een goed overzicht van de vaardigheden van iedere individuele leerling en heeft zo meer tijd en aandacht voor de toepassingsopgaven en inzichtopgaven.

Inzichtopgaven zijn met de huidige wiskundesoftware (nog) niet adequaat te controleren; zoals eerder aangegeven, wordt dan de structuur van uitwerken weggegeven die je bij dit type opgaven juist wilt toetsen. Daarom is ervoor gekozen om binnen *Getal & Ruimte* alle afsluitende opgaven (A-opgaven) en andere inzichtopgaven alleen op papier, in het e-book of als 'platte' opgave in de portal aan te bieden. Dit geldt dus ook voor de A-opgaven waarin algebruische vaardigheden worden getoetst, want naast het kunnen maken van dit soort

opgaven op de computer is het van belang dat de leerling deze vaardigheden ook op papier beheerst. Uiteraard zal ook de score van deze opgaven zichtbaar worden in de portal, door een automatische controle van het eindantwoord of door een handmatige controle door docent of leerling.

Voor een goede basis en om de opgaven goed te kunnen maken, is het van belang dat een leerling de theorie goed snapt. Daarom zullen bij veel theorieblokken instructievideo's worden aangeboden die, net zoals een docent dat doet, de geschreven theorie van extra uitleg voorzien. Op deze manier kan een leerling thuis of in de klas op ieder gewenst moment en in zijn eigen tempo nog eens naar de uitleg kijken.

De nieuwe editie van *Getal & Ruimte* havo/vwo onderbouw past in de nieuwste generatie leermiddelen van Noordhoff Uitgevers die vanaf het schooljaar 2017/2018 beschikbaar zijn. Kernwaarde bij die generatie leermiddelen is lesmateriaal waarmee een docent *gepersonaliseerd leren* op eenvoudige wijze kan vormgeven: differentiatie die eenvoudig in te zetten is, overzicht over de voortgang van leerlingen en inzicht in hun resultaten. Zo is het leerproces van leerlingen (bij) te sturen door docent én leerling.

Gerichter lesgeven

Bij de 12e editie van *Getal & Ruimte* wordt bij de ontwikkeling van digitaal lesmateriaal vooral ingezet op het verbeteren van het begrip van de leerling en op het toepassen van de basiskennis en basisvaardigheden. Door de voortgang hiervan bij te houden kan de leerstof adaptief worden aangeboden. Tijdens de interactie tussen de docent en de leerling kan de aandacht dan gaan naar diepgaandere toepassingen en inzicht. Het nieuwe lesmateriaal van de 12e editie havo/vwo onderbouw willen we tijdens het schooljaar 2016–2017 in de klas gaan testen. Mocht u geïnteresseerd zijn om hieraan mee te werken, neem dan contact met mij op.

Judith Boertjens

Met medewerking van *Getal & Ruimte*-auteurs Roeland Hiele en Marc Wieringa.

In bovenstaande artikelen bespreken we ervaringen met en toekomstplannen van de methodes *Getal & Ruimte* en *Moderne Wiskunde* van Noordhoff. Hoewel deze twee methodes een groot deel van de markt in handen hebben zijn er ook enkele alternatieven. Zo is de *Wageningse Methode* al geruime tijd in gebruik, en zijn er ook nieuwe (digitale) methodes in opkomst: *MathPlus* (van Malmberg) en *Bettermarks*. Momenteel doen scholen eerste ervaringen op met deze nieuwe methodes. Ook loopt er een pilot van de Open Universiteit waarbij leerlingen op afstand digitaal het vak wiskunde D kunnen volgen als hun school dat niet op de reguliere wijze aanbiedt. In de toekomst hopen we hier op terug te komen.

Sjoerd Rienstra

Faculteit Wiskunde & Informatica
Technische Universiteit Eindhoven
s.w.rienstra@tue.nl

Jan ten Thije Boonkkamp

Faculteit Wiskunde & Informatica
Technische Universiteit Eindhoven
j.h.m.tenthijeboonkkamp@tue.nl

Interview Wilbert IJzerman

Van technologie tot psychologie

Prof. dr. ir. Wilbert IJzerman is *head of Advanced Development Europe* en *domain champion* voor Optiek bij Philips, Eindhoven, en sinds kort buitengewoon hoogleraar toegepaste wiskunde aan de Technische Universiteit Eindhoven. Sjoerd Rienstra en Jan ten Thije Boonkkamp van de TU/e in gesprek met IJzerman, over leds, Noord- en Zuid-Europese kleurtemperaturen, en cash cows.

Hoe ben je bij Philips beland?

“Gewoon een open sollicitatie. Het was duidelijk dat we ons ergens in Brabant wilden vestigen. Mijn vrouw had een baan bij Organon, Oss. Dan sla je een cirkel om Oss heen en kijkt wat er binnen valt. Gelukkig viel Philips Research daarbinnen, Philips stond hoog op mijn lijstje. Ik heb ook nog bij ASML en Philips CFT (centrum voor fabricagetechnologie) gekeken, maar research stond veruit het hoogst. Shell viel daarbuiten. Shell leek me ook niet zo interessant, daar ligt de nadruk erg op de internationale carrière, en dat trok me toch niet. Bij Shell moet je in het buitenland geweest zijn. Bij Philips ligt dat iets genuanceerder.”

Hoe begon je carrière bij Philips?

“Ik was een natuurkundestudent en ben daarnaast ook wiskunde gaan studeren en uiteindelijk in de wiskunde gepromoveerd, en ben bij Philips maar als fysicus begonnen. Ik ben begonnen met het rekenen aan elektronenoptiek voor CRT's, cathodestraalbuizen. Dat is heel erg ingenieurachtig, veel fysica. Rekenen aan elektronenoptiek van klassieke beeldbuizen met een elektronenkanon dat bestaat uit een aantal blikjes met gaten waar grote potentiaalverschillen op staan, tot 30 kV. Daar worden de elektronen door versneld, en de vorm van de gaten bepaalt de vorm van het elektrische veld. Het geheel vormt dus eigenlijk een lens, maar dan alleen een

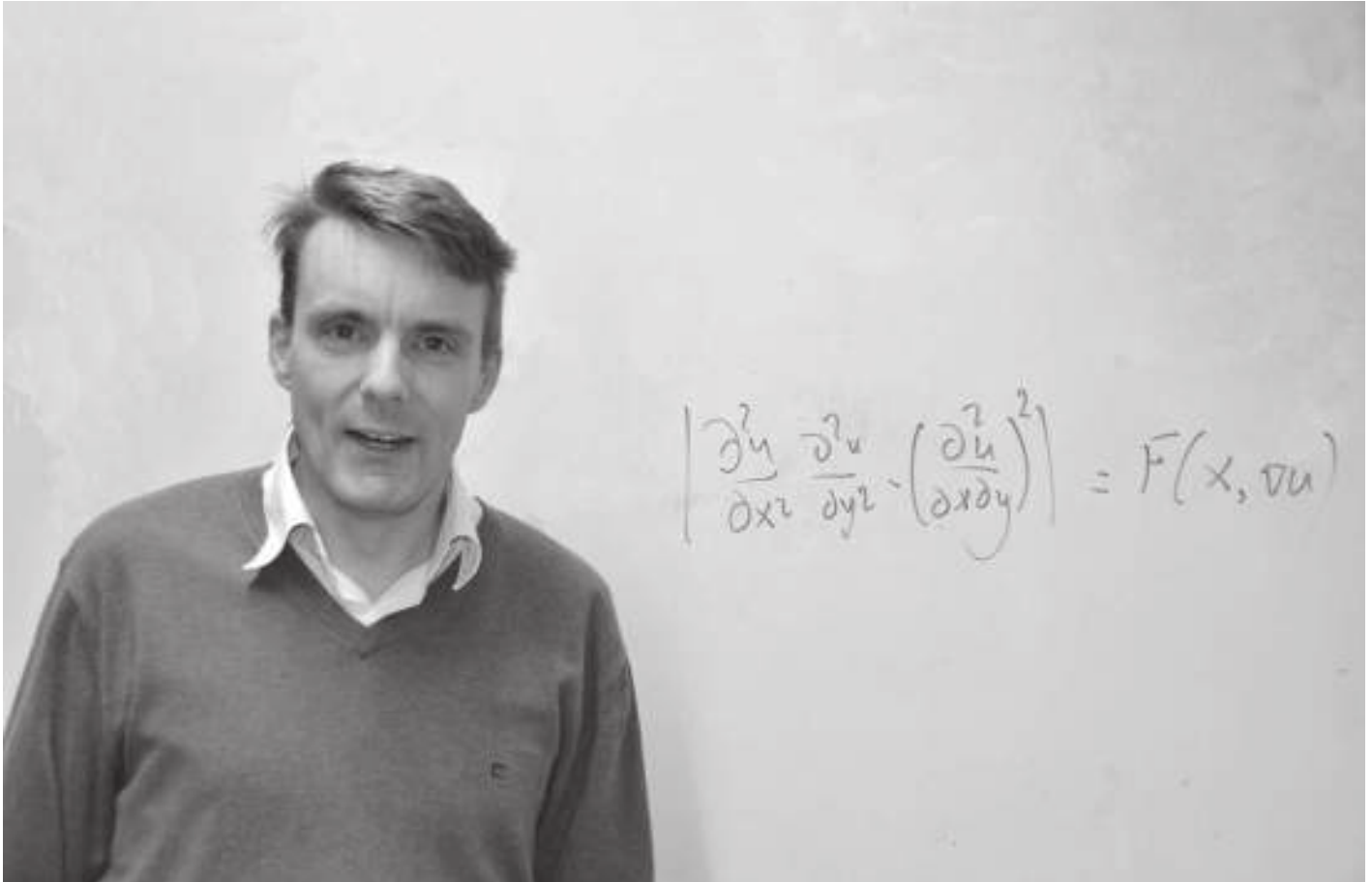
positieve of van quadropool-type. Positief in de ene en negatief in de andere richting. Negatieve lenzen kan je helaas niet maken. De uitdaging was om een optisch systeem te ontwerpen dat kan samenwerken met een spoel die heel grote afbuighoeken heeft. Hoe groter de afbuighoek, hoe ondieper de beeldbuis, maar bij heel grote afbuighoeken is er op een gegeven moment een singulariteit in het systeem. In dit probleem moet je de Maxwell-vergelijkingen oplossen en daarvoor was standaardprogrammatuur, en die was heel erg goed. Je moet namelijk zelfs rekening houden met relativistische effecten. De snelheid van de elektronen is ongeveer eenderde van de lichtsnelheid bij het scherm en dat betekent een significant effect van 10 procent.

We praten nu over de jaren 2000–2002. Zo laat nog. Philips was in de jaren negentig al wel eerder gestopt met elektronenoptiek binnen de researchorganisatie, maar rond 1999 was er een idee om een nieuwe beeldbuis te maken zonder schaduwmasker. Dat is een metalen plaat met gaatjes en die is (was! — wordt nergens meer ter wereld gemaakt) erg kostbaar en vervelend in productie. Die kon je weglaten door de elektronen over het scherm te laten lopen. Dan moet je de bundel actief besturen en over een heel dun fosforstripje laten lopen, voor elke kleur één. Je moet dan drie bundels niet alleen op de juiste plaats op het scherm krijgen, maar ze moeten ook zo klein zijn dat ze alleen maar

op hun kleur vallen. Dus de vraag was om een elektronenkanon te maken met drie bundels die over het hele scherm in focus zijn en waarvan de spot op het scherm ongeveer 0,2 mm hoog is, dat is een factor 10 kleiner dan bestaande oplossingen. Gelukkig konden we ook een factor 4 naar beneden in stroom, want het schaduwmasker ving veel elektronen af. Dit hielp om de spot te verkleinen want de elektronen stoten elkaar af waardoor zo'n bundel, zelfs in het vrije veld, divergeert. Verder is een extra complicatie dat het focuspunt voor de drie kleuren net niet helemaal hetzelfde is. Dus hoe krijg je drie bundels in focus, met een singulariteit in de optiek.

“Bij Shell moet je in het buitenland geweest zijn. Bij Philips ligt dat iets genuanceerder.”

We hebben toen een totaal ander optisch systeem ontworpen, met een ander optisch pad (als leek zie je geen verschil, maar het was wel vrij revolutionair) en dat stelde ons in staat ten opzichte van het conventionele systeem om van een spanningszwaai van 5000 V van links naar rechts over het scherm terug te gaan naar 200 V, wat significant scheelt in elektrische isolatie en kosten. Maar bovendien is het besturen van drie bundels veel goedkoper dan het besturen van één bundel in het klassieke systeem, en zo konden we drie bundels in focus houden, met een veel scherper plaatje. Alleen is dat project ten slotte gestopt, eigenlijk alleen omdat de koperprijs naar beneden ging, en het voordeel van het schaduwmasker wegviel. Daarnaast



kwamen plasma- en LCD-schermen eraan. Uiteindelijk heeft LCD gewonnen maar dat was op dat moment zeker niet duidelijk. Wel duidelijk was, dat de hele industrie ging veranderen.”

Is het niet frustrerend dat je aan een technologie werkt die om commerciële redenen wordt afgeblazen?

“Ja, maar mij maakt het niet zoveel uit. Ik krijg mijn energie uit het doen van een leuke uitvinding en niet uit het brengen naar de business van een idee. Maar ik moet dat misschien niet te hard zeggen.”

Zien we niets terug van deze kennis?

“Niet van dit onderzoek zelf, maar de kennis van CRT's vind je wel terug in röntgenachtige CT-scanners voor medische toepassingen, want dat zijn nog gewoon CRT's. In Acht zit ook een bedrijf dat ze maakt voor medische toepassingen. In de tv-business is het weg. Bij mijn weten is er niemand meer die nog een klassieke CRT voor tv maakt. Dat is allemaal LCD geworden. Alleen als beeldscherm voor een arts om plaatjes van bijvoorbeeld tumoren te

bekijken heeft een CRT absoluut voordelen boven een LCD en is het ook langer gebruikt. Dat heeft te maken met de hogere contrasten die je kan bereiken. En dat gaat om het allerlaatste beetje. Normaal gesproken werkt LCD standaard nog steeds op 8 bits om de grijsniveaus te maken, terwijl soms de details in het negende of tiende beetje zitten. Het heeft ook te maken met allerlei videoprocessing-algoritmen die in LCD zitten. Die doen dingen, waardoor je niet meer zeker weet of je naar een video- of beeld-artefact zit te kijken, of naar echt een afwijking in het weefsel. Dat was lange tijd een reden waarom men koos voor CRT in medische systemen.

Daarna heb ik aan 3D-displays gewerkt. Beeldschermtechnologie met 3D zonder dat je een brilletje op hoeft, en waarbij je ook je hoofd nog enigszins heen en weer kan bewegen. Dat werkte ongeveer als volgt: je neemt een groepje van (zeg) negen pixels van het beeldscherm, en je zorgt dat het licht daarvan uitstraalt binnen een *cone*. Van die negen *cones* komt dan de derde en vijfde in je linker en rechteroog, en als je dan iets

bewoog, dan ging het linkeroog van de derde naar het vierde, en het rechter van de vijfde naar de zesde *cone*. Zo kon je enigszins om objecten heen kijken. Als je heel veel *cones* maakt (binnen Philips is zoiets gemaakt met ruim 64 verschillende beelden) dan kun je je meters verplaatsen, en echt om dingen heen kijken, maar het gaat wel ten koste van je resolutie. Het betekent dat tekst slecht leesbaar wordt, zelfs op de heel hoge-resolutie 4K-displays van vandaag. Dus je wilt dat 3D-effect ook kunnen uitzetten. Dat konden we doen door ook gebruik te maken van een LC-effect (*liquid crystal-effect*), waardoor je een scherm kunt maken met lenzen die je aan- en uitzet.

Het waren heel mooie systemen die we konden maken, maar het was wel kostbaar. Je kunt weliswaar ergens omheen kijken, maar dan moet je wel op een bepaalde plaats op de bank zitten. Als je zelf 3D ziet en je partner naast je ziet 3D met links en rechts verwisseld, dan is dat vervelend. Je moet dus eigenlijk heel brede *cones* maken met heel veel beeldjes. Daarvoor is de technologie nog niet goed genoeg.”

Zit er toekomst in 3D? Wat je als consument ziet zijn 3D-schermen waar vervolgens niets mee gebeurt. Of komt er wel iets van de grond buiten ons gezichtsveld?

“Ja, buiten ons gezichtsveld gebeurt wel wat, bijvoorbeeld in de automobiellindustrie om visueel het design van prototypes te testen. Die hebben grote 3D-beeldschermen, zoals een systeem van twee bij vier meter, met heel veel projectoren erachter, dat Philips eens heeft gemaakt. Ze kunnen daar op ware grootte een auto neerzetten, en dan kun je zien hoe die eruitziet. Een andere toepassing is bij oliemaatschappijen die het gebruiken om hun seismografische data te beoordelen. Verder zijn er pogingen om het in de gaming-industrie te gebruiken, maar dan moet er wel eerst flink worden gestandaardiseerd. Ik had zelf gedacht dat gaming de eerste logische toepassing zou zijn, omdat veel mensen daar veel geld aan uitgeven en je het videomateriaal eenvoudig hiervoor kan aanpassen. Een beeldscherm van 200 of 300 euro is in de marge van wat men daar verder aan uitgeeft.

Dit zijn toepassingen die voortkomen uit een noodzaak. Als het alleen maar leuk is, dan is er nog niet zoveel. Je moet niet vergeten dat veel mensen zonder het te weten in hoge mate stereo-blind zijn. Het diepte-zien gebeurt door gebruik te maken van verschillende soorten informatie. Je hebt het dubbele beeld van je twee ogen, je hebt grootteverschillen zoals bij spoorstaven die naar elkaar toelopen, je hebt de felheidsvariatie van kleuren, en verder is dichtbij scherp en veraf over het

“veel mensen zijn zonder het te weten stereo-blind”

algemeen onscherp. Al dat soort informatie gebruikt je visuele systeem om afstand te schatten. En dus kun je met één oog ook nog steeds redelijk afstand schatten. En 3D-displays leveren alleen maar die visuele *cue* die gebruikmaakt van het dubbele beeld van twee ogen. Nu zijn er vrij veel mensen die een lui oog hebben en maar met één oog dominant kijken, en dus eigenlijk geen voordeel hebben van een 3D-display. Sterker nog, een van de trucs om bij een schilderij diepte te zien is om juist met één oog te kijken. Je voorkomt dat je twee ogen het platte beeld herken-

nen. Dus ook in een 2D-beeldscherm kun je door scherp- en helderheidsverschillen 3D opwekken.”

Hoe verliep je carrière verder?

“Ik heb zeven jaar echt aan research gewerkt, en werd toen ad interim groepsleider. Ik ben vervolgens naar Lighting gegaan, werd groepsleider van de optische groep in Philips Lighting, en nu ben ik sinds vijf jaar afdelingsleider van de voorontwikkeling (en zijn voorgangers).”

Je bent nu sinds anderhalf jaar deeltijd-hoogleraar. Hoe kijkt men naar het meer fundamentele deel in het TU-werk op management niveau?

“Ik denk dat het gedoogd wordt. Men is wel blij met de informatie, maar de taken die ik heb gaan niet weg. Ik deleger wel naar mijn groepsleiders, maar dat doe ik dan zelf. Ik heb geen negen-tot-vijf- maar meer een vijf-tot-negen-baan. Naast mijn afdelingsleiderrol ben ik ook nog competentie-eigenaar, of zoals wij dat noemen *domain champion*. Dus ik moet het overzicht houden over het vakgebied, een oordeel vellen of we dingen moeten versterken, mensen aannemen, cursussen organiseren, competentieplannen maken, en waar de zwaktes zitten en bij wie, in welke groepen. Dat soort dingen is wel gerelateerd aan dit TU-werk.

Optiek is een belangrijk vakgebied voor Philips Lighting. Onze samenwerking met de TU/e vindt plaats in het Intelligent Lighting Institute, wat onderdeel is van een samenwerkingsverband tussen Philips Lighting en de TU/e, dus daar hebben we een redelijke hoeveelheid researchactiviteiten. Hierin gaat het niet alleen over optiek, maar over de hele breedte van verlichting: van technologie tot psychologie.”

Kun je iets vertellen over de wiskundige methoden die een rol spelen?

“Er zit een analytische kant bij de Monge-Ampère-transportvergelijkingen, die je tegenkomt bij het doorrekenen van lenzen en spiegels. We worstelen met de nette formulering van het probleem: hoe kies je de plus- en mintekens, wat voor soort probleem heb je nu eigenlijk? Daar komen al snel de numerieke aspecten achteraan. Hoe discretiseer je, hoe houd je het algoritme stabiel, hoe los je het op in eindige tijd? Uiteindelijk moet dat soort technologie over vijf of tien jaar in ontwerptools terecht komen. En dan moet een fatsoenlijk

optisch probleem in minder dan de tijd van een bakje koffie oplosbaar zijn. Het mag geen tien minuten duren, want dan ben je vergeten wat je gedaan hebt. Het moet in de orde van minuten zijn. Daar zit nog een hele uitdaging in, want we zijn er zeker nog niet.

Bij ray-tracing is niet de complexiteit van de vergelijking het probleem, maar wel de complexiteit van de structuur. Dan de niet-lineaire dynamica, het mengen van licht, van kleuren tot wit, een soort turbulentie in de faseruimte. In mengstaven gebeuren heel interessante niet-lineaire dingen die lijken op een niet-lineair biljart.

Tot zover de geometrische optica. Golf-optica doen we bij de interactie van licht en deeltjes, bij scattering. De twee uitersten van scattering zijn goed bekend. Aan de ene kant licht door een ij medium, zoals door een sterrenstelsel, en aan de andere kant licht door diffuse media als dikke yoghurt, zijn beide goed bekend. Het laatste geval is een diffusievergelijking. Maar de

De vergelijking van Monge-Ampère

Als een lichtbundel wordt gereflecteerd of gebroken door een optisch oppervlak $z = u(x, y)$, zoals van een spiegel of een lens, dan zal de intensiteitsverdeling van de verstrooide bundel niet alleen afhangen van de invallende bundel, maar uiteraard ook van u .

De vergelijking die beschrijft hoe een *gegeven* verdeling wordt omgezet tot een *gevraagde* verdeling, is een niet-lineaire partiële differentiaalvergelijking in u . In zijn algemeenheid bestaat deze vergelijking uit een Jacobiaan die gelijk moet zijn aan een uitdrukking $F(u, \nabla u)$. Deze F hangt af van de invallende en uittredende intensiteitsverdelingen.

In het geval van een parallelle bundel in de z -richting als invallend veld, neemt de vergelijking de vorm aan van de Monge-Ampère-vergelijking, met als extra complicatie de modulus van de determinant.

$$\left| \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} - \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} \right)^2 \right| = F(u, \nabla u)$$

Een oplossing is alleen bekend als de determinant in het linkerlid positief is. Daarnaast zijn er in het algemeen, voor een voldoende glad rechterlid, twee oplossingen, één voor divergerende stralen en één voor convergerende stralen.

meeste praktische toepassingen van licht-verstrooiing in verlichtingstechnologie zit daar tussenin. Er moet enerzijds voldoende licht doorheen, anders is de efficiency niet goed, anderzijds moet het voldoende verstrooid worden zodat je de lichtbron niet meer ziet. In dat tussengebied is eigenlijk heel weinig bekend. En helemaal als er ook nog eens fosformaterialen in zitten die de ene kleur licht omzetten in de andere kleur.

“De verlichtingsmarkt is heel versnipperd.”

Het meest uitdagend is de Monge–Ampère-vergelijking. We weten dat er één oplossing is ingeval je het teken mag kiezen en de oplossing convex moet zijn. Als je de modulus laat staan en geen convexiteit eist dan is er een hele dieren tuin aan oplossingen. Ik kan als optisch ingenieur wel een paar oplossingen tekenen die je niet zomaar vindt uit de vergelijkingen.”

Hoe belangrijk is de psychologische kant bij licht?

“Heel belangrijk. Als wij niet weten wat we moeten maken aan licht- en kleurverdeling, dan heeft het ook geen zin om geavanceerde tools te maken. Het is toegepaste psychologie, maar vooral van belang voor de inputkant. Je moet weten wat je moet maken, en dat wordt bepaald door welke invloed licht heeft op mensen. Heel veel verlichting is te helder en geeft ‘glare’ zoals we dat noemen, zoals straatverlichting. Scherpe lichtpunten die in je ogen komen als je omhoog kijkt.”

Hoe verandert led de toekomst van de lichttechnologie?

“Led en optiek zijn ontkoppeld. Een led is gewoon een heel mooie kleine bron. Het geeft wel redenen om opnieuw intensief te kijken naar de optiek omdat led je toestaat om optiek te maken met kunststof en plastic. In het spuitgieten van plastic heb je heel veel meer vormvrijheid dan met glas of metaal. Verder heb je te maken met meerdere leds die een verlichtingssysteem maken, dus je moet gaan mengen, zeker met de moderne systemen die uit meerdere kleurenleds bestaan.

Daarnaast weten we dat er een regionaal afhankelijke voorkeur bestaat voor

de kleurtemperatuur. Wat wij gezellig ‘wit’ licht vinden is relatief geel. Inderdaad juist het licht van een gloeilamp. Maar het is toch niet alleen maar een kwestie geweest van gewenning. In Zuid-Europa vind je meer voorkeur voor blauwachtig ‘wit’ licht. Ook in de tl-markt verkopen we relatief gele kleuren in Noord-Europa en blauwe in Zuid-Europa. Het zal wel te maken hebben met de manier waarop de zon invalt en wat je gewend bent aan zonlicht.

Een andere technische beperking is het feit dat de meeste ledsystemen thermisch begrensd zijn, en als ze dat niet zijn, zijn ze waarschijnlijk te duur. Hoewel de led zuinig is, kan de led niet tegen een hoge temperatuur. Veertig tot vijftig procent van de energie wordt omgezet in licht en de rest is warmte. Dat moet dus worden afgevoerd, meestal door convectie.”

De gloeilampen zijn verboden in Nederland en Europa juist toen de led opkwam. Is dat toeval?

“Toen de EU de gloeilampen verbood, was dat niet op instigatie van Philips om de ledlamp te promoten. Dat speelde al voor de led. Het kwam natuurlijk wel goed uit in de verkoop van spaarlampen. Uiteraard is er altijd bij zoiets overleg tussen EU en industrie, maar we kunnen de ledlamp pas goed maken sinds 2002–2003. We hadden die niet al klaar liggen.

Het is heel normaal dat EU zijn industrie steunt. Er gaat veel belastinggeld in en uit. Maar voor Philips was het eigenlijk beter geweest als er geen led was, omdat de *barrier-to-entry* voor een concurrent in traditionele verlichting veel hoger is dan bij led. Ledtechnologie is eenvoudiger. Je ziet nu ook dat er heel veel bedrijven zijn die ledverlichting maken. Dat betekent veel meer concurrenten, veel meer prijsdruk, meer erosie van je marges.

Je ziet in de markt verschillende golven. De eerste golf is het vervangen van een bestaande verlichting door led. Dat begon met halogeenspotjes. Daar was geen spaarlamp-alternatief voor. Voor de komende tijd geldt dat ook voor de tl-verlichting. Na de *early adopters* komt nu de massa die overstapt. Je bent nu in een fase dat een heleboel bedrijven instappen (soms ook uitstappen zoals Samsung, die met displays en telefoons hun eigen *cash cows* hebben).

De verlichtingsmarkt is heel versnipperd. Als een gebouw wordt neergezet heb

je een architect, een verlichtingsarchitect, een installateur, een gebouwbeheerder, de groothandel, een huurder, energieleveranciers, de regelgeving. Dat betekent dat het heel moeilijk is om daarin te spelen. Je moet veel relaties hebben en een lange samenwerking, voordat je iets kunt verkopen. Dat maakt het moeilijk voor buitenpartijen om er tussen te komen. In de professionele verlichting in Europa zijn de nummers één en twee altijd het Duitse bedrijf Zumtobel en Philips, met ieder zo’n 10 procent marktaandeel. Dan een paar partijen met 3 à 5 procent en de rest van de markt is versnipperd over een heleboel partijen met minder dan 1 procent marktaandeel. Dat is een heel atypische verdeling. Er is bijna geen enkele markt waar dat zo is. Normaal is dat de nummers 1, 2 en 3 de hele markt verdelen, met een paar niche-spelers erachteraan. Het is dus bijvoorbeeld een heel andere markt dan de gloeilampmarkt, waar je traditioneel alleen GE, Osram en Philips had. Dat drietal beheerst de markt al sinds het begin van de twintigste eeuw.”

Wat vind je in je werk het leukst?

“Ik word blij van een uitvinding, iets begrijpen. Een voorbeeld. We hadden gewerkt aan een lichtgeleider in een armatuur. We liepen tegen het probleem aan dat de lichtgeleider moest eindigen in een heel scherpe punt, althans dat dachten wij. Maar de fabrikant van de optisch component zei dat dat niet kon. Hij moest hem ergens afronden. Iets kan niet oneindig scherp gemaakt worden. Toen gingen we terug naar

“Begrijpen geeft mij de meeste energie.”

onze tool, haalden een stukje van de rand af, en er gebeurde helemaal niets. Dat was heel onverwacht en ik ben er over gaan nadenken. En het feit dat ik het daarna begreep was voor mij belangrijker dan het feit dat het nu technologie is die in zeven productfamilies is beland en waar een gedeelte van de business van afhankelijk is. Het is dus toch niet de toepassing maar het begrijpen zelf. Ik weet wel dat ik de toepassing moet doen en moet zorgen dat het een product wordt om mijn brood te verdienen, maar dat begrijpen geeft mij de meeste energie.”

Henk Broer

Johann Bernoulli Instituut voor Wiskunde en Informatica
Rijksuniversiteit Groningen
h.w.broer@rug.nl

Evenement Uitreiking Brouwermedaille 2014

Laudatie voor John Mather

John Mather ontving de Brouwermedaille op 16 April 2014 tijdens het Nederlands Mathematisch Congres te Delft. De bijbehorende lezing, getiteld ‘Dynamics of Area Preserving Mappings: Gateway to Hamiltonian Dynamics’, zou verschijnen in dit blad. De lezing werd voorafgegaan door een laudatie, uitgesproken door Henk Broer. Door gezondheidsproblemen van Mather gaat publicatie van de lezing helaas niet door. Beter laat dan nooit publiceren we hierbij wel Broers laudatie.

In het jaar 2014 werd het vakgebied Dynamische Systemen uitgekozen voor de Brouwerlezing en -medaille. De vorige keer dat dit voorkwam was 1970 waarbij de Brouwermedaille ging naar de Franse wiskundige René Thom. Ditmaal heeft de selectiecommissie gekozen voor John Mather.

Een biografie

John Norman Mather werd in 1942 geboren in Los Angeles. Hij promoveerde in 1967 aan Princeton University bij de Fieldsmedaillist John Willard Milnor op een proefschrift getiteld *Stability of C^∞ Mappings, I: The Division Theorem*, uiteindelijk gepubliceerd in de *Annals of Mathematics*. Dit betreft een onderwerp in het hart van de singulariteiten- en catastrofetheorie die in die tijd aan het begin stond van een enorme furore. Het Romeinse cijfer I kondigt natuurlijk meer aan; Mather heeft een hele reeks werken in deze geest geschreven, door sommige Groningse studenten oneerbiedig betiteld als de ‘Mather Feuilleton’. Hij heeft een zeer interessante, bloeiende carrière gehad, waarbij hij onder meer gewerkt heeft op het IHES nabij Parijs, op

Harvard University en vanaf 1975 op Princeton University. Ondertussen werd er veel gereisd, opnieuw naar IHES, naar de ETH in Zürich, naar Caltech en naar het Princeton Institute for Advanced Studies: allemaal vooraanstaande wetenschappelijke instellingen. Ook was hij regelmatig aan te treffen op IMPA, Rio de Janeiro. John Mather heeft een indrukwekkende lijst met onderscheidingen, waaronder Sloan en Guggenheim Fellowships en de Ordem Nacional do Mérito Científico (Brazilië’s hoogste onderscheiding). Interessant is daarbij dat de American Mathematical Society hem in 2003 de Birkhoff Prize in Applied Mathematics heeft toegekend. Verder is Mather lid van VS National Academy of Sciences en ook van de Brazilian Academy of Sciences. Ik besluit deze opsomming met het vermelden van het feit dat hij lange tijd redacteur is geweest van twee toonaangevende tijdschriften: de *Communications of Mathematical Physics* en de *Annals of Mathematics*. Tot John Mathers eigen promovendi behoren onder meer de bekende wiskundigen James Damon en Vadim Kaloshin.

Wetenschappelijk betekenis

De wetenschappelijke bijdragen van Mather zijn in belangrijke mate onder te brengen in twee wetenschapsgebieden. Het eerste bevindt zich binnen singulariteitentheorie, waarbij hij voortbouwt op het fundamentele werk van Hassler Whitney and René Thom, maar ook van mensen als Ehrenpreis en Malgrange. Zoals we al zagen betreft dit vooral de (structurele) stabiliteit van C^∞ -afbeeldingen, waarvan de complete ‘feuilleton’ maar liefst zes artikelen bevat. Behalve dat twee ervan in de *Annals of Mathematics* verschenen, werden er ook twee gepubliceerd in de *IHES Publications Mathématiques*. Maar er is veel meer. Opgemerkt mag hierbij nog dat het geval waarin het beeld van de C^∞ -afbeeldingen de reële rechte is, juist de roemuchte catastrofetheorie oplevert.

Het tweede onderwerp bevindt zich binnen de Lagrangiaanse en Hamiltoniaanse dynamica, met onverwachte en baanbrekende toepassingen van het variatieprincipe. Eén met name te noemen onderwerp is hier de Aubrey–Mather-theorie en de zwakke KAM-theorie die handelen over quasi-periodiciteit en invariante Cantor-verzamelingen. Deze onderwerpen zijn verwant aan werk van de Franse wiskundigen Arnaud Denjoy en Michael Herman. De overgang tussen de invariante KAM-tori en deze Aubrey–Mather-Cantor-verzamelingen



Foto: Archives of the Mathematisches Forschungsinstitut Oberwolfach

John Mather in 2011 tijdens een workshop 'Dynamische Systemen' in Oberwolfach

is nog steeds deels onontgonnen terrein. Het tweede te noemen onderwerp betreft Arnold-diffusie, een enigszins onregelmatige, dwalende transitie tussen langerdurende 'meta-stabiele' multi- of quasi-periodieke states. Ook hier is nog heel veel onduidelijk en Mather's variationele aanpak werpt hier wederom nieuwe gezichtspunten op.

Natuurlijk is er meer... Veel bijdragen liggen binnen de differentiaal-topologie, differentiaal-meetkunde en algebraïsche topologie, veelal in verband met dynamische toepassingen. Zo zijn er uit het begin van de zeventiger jaren artikelen 'The vanishing of the homology of certain groups of homeomorphisms' en 'On Thom–Boardman Singularities'. Ook heeft hij onderzoek gedaan aan hemelmechanica. Voor meer informatie verwijs ik de lezer naar de bibliografie op de Princeton University web-

site. Voor Nederlandse wiskundigen is het wellicht interessant te wijzen op het artikel 'Characterization of Anosov diffeomorphisms', *Indagationes Mathematicæ* 30 (1968) 479–483.

Ten slotte

John Mather is een van de 'founding fathers' van het vakgebied Niet-Lineaire Dynamische Systemen. Hij bevindt zich in het goede gezelschap van mensen zoals Milnor, Thom, Smale (alle drie Fields-medailisten), Arnold, Moser, Palis en Takens en werkte met een aantal van hen ook daadwerkelijk samen. Mather heeft een uitnemende, blijvende bijdrage geleverd aan dit vakgebied, reden waarom hij door de selectiecommissie werd uitgekozen voor de 2014 Brouwermedaille. Het is mij een eer hem hierbij uit te nodigen de 2014 Brouwerlezing uit te spreken. ♦

Marie-Colette van Lieshout

Centrum Wiskunde & Informatica, Amsterdam, en
Faculteit EWI, Universiteit Twente
m.n.m.vanlieshout@utwente.nl



Marie-Colette van Lieshout

Oratie

Kansen in ruimte en tijd

In de ruimtelijke stochastiek wordt de invloed onderzocht van verklarende variabelen (ook wel ‘covariaten’ genoemd) op een ruimtelijk patroon. Denk bijvoorbeeld, bij de gaswinning in Groningen, aan het verband tussen een waargenomen patroon (bevingen) en covariaten (gaswinning), en aan de structuur van het ruimtelijk patroon (naschokken) en patronen in de tijd (zwaardere bevingen). Sinds 1 februari 2015 is Marie-Colette van Lieshout, onderzoeker aan het Centrum Wiskunde & Informatica, als deeltijdhoogleraar verbonden aan de vakgroep Stochastische Operations Research van de Universiteit Twente. Op donderdag 3 december 2015 hield zij haar intrede.

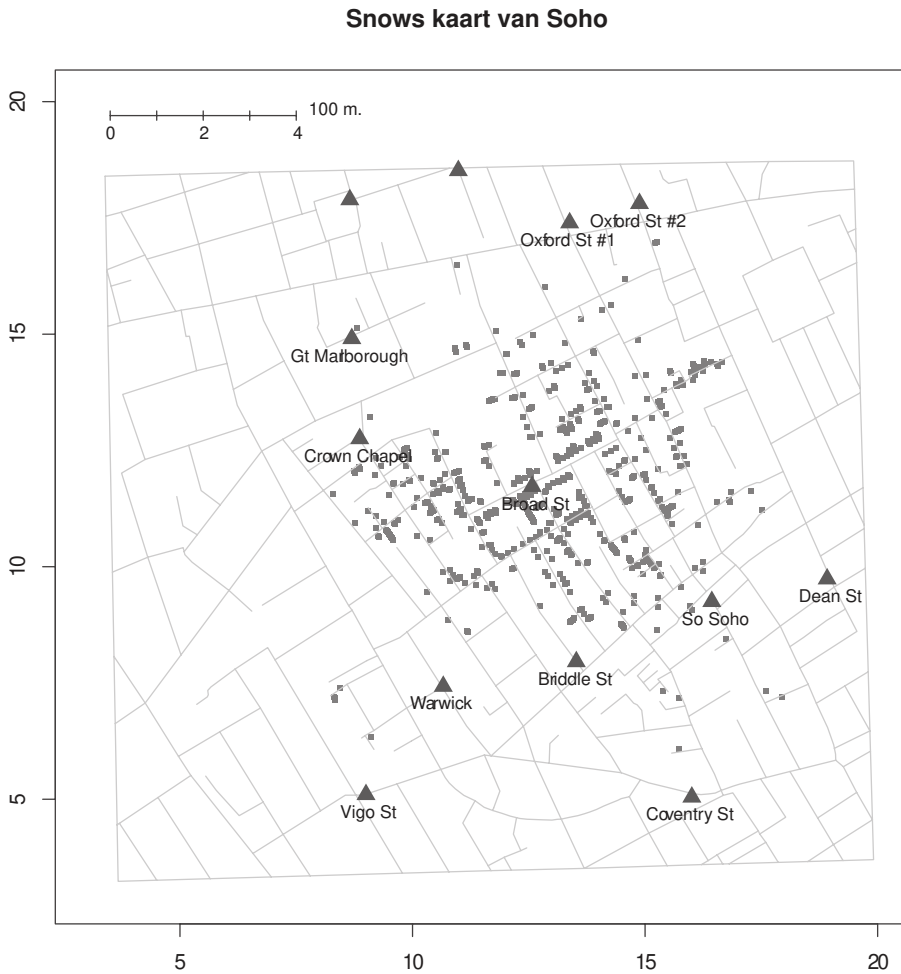
Wiskundigen noemen mijn vakgebied de ruimtelijke statistiek of stochastiek. Dit laatste woord heeft Griekse wortels die zoiets als ‘gissen’ betekenen. Ruimtelijke stochastiek is dus de studie van fenomenen in ruimte en tijd waar onzekerheid een rol speelt. Om u een indruk te geven, stel ik u graag voor aan de Britse arts en anesthesioloog John Snow (1813–1858). Tijdens de cholera-uitbraak van 1854 in de Londense wijk Soho keek dokter Snow, die sceptisch stond tegenover de in zijn tijd gangbare opvatting dat cholera werd veroorzaakt door ‘slechte lucht’, naar de adressen van 578 slachtoffers [26]. Hij maakte hier — eerst in zijn hoofd, later ook op papier — een plaatje van door de plaats van overlijden middels een vierkantje op een plattegrond van de wijk aan te geven. Zie Figuur 1.

Zodoende valt op dat er in de buurt van de waterpomp in Broad Street veel meer sterfgevallen zijn dan elders. In statistische termen: de loopafstand tot de put is een verklarende variabele voor de sterfte-intensiteit. Uit gesprekken die Snow voerde met nabestaanden en burens bleek tevens dat slachtoffers uit andere buurten vaak nabij Broad Street werkten of naar school gingen. Bovendien valt de afwezigheid van cholera-gevallen in het blok net ten noorden Broad Street te verklaren uit de aanwezigheid van een werkhuis aldaar met een eigen watervoorziening. Hetzelfde geldt voor de brouwerij in het kleinere blok ten oosten van de pomp, hoewel de werknemers daar voornamelijk bier dronken. Snow zag aldus zijn hypothese dat cholera wordt verspreid door besmet water bevestigd en haalde de gemeente over om

de bewuste pomp buiten werking te stellen. Later bleek dat de put in Broad Street nog geen meter verwijderd lag van een besmette beerput. Zie ook het afscheidscollage van Professor Tegelaers voor een vergelijkbaar verhaal uit onze tijd [28].

In het zojuist behandelde voorbeeld is het doel om de invloed van verklarende variabelen (ook wel ‘covariaten’ genoemd) op een ruimtelijk patroon te onderzoeken. Daarnaast kan er ook afhankelijkheid zijn tussen de punten onderling en kunnen deze tevens dragers zijn van additionele informatie. Wellicht herkent u het plaatje in Figuur 2 dat de afgelopen jaren veel in het nieuws is geweest. Het grillig gevormde gebied is het gasveld in de provincie Groningen. De middelpunten van de cirkels stellen de epicentra voor van aardbevingen, hun diameters zijn recht evenredig aan de magnitude. Ook wordt van elke beving bijgehouden wanneer hij optreedt. Dit soort extra informatie bovenop de locatie wordt ‘markering’ genoemd. Uiteraard zijn er ook covariaten beschikbaar betreffende gaswinning, breuklijnen en geologie van de bodem [18].

Net als in het cholera-voorbeeld is ook hier het verband tussen het waarge-



Figuur 1 Adressen van ten gevolge van cholera overleden inwoners van Soho gedurende de uitbraak van 1854 (vierkantjes) en locatie van waterputten (driehoekjes). De kaart is door R. Dodson (NCGIA, Santa Barbara) gedigitaliseerd en opgenomen in het R-pakket HistData. Zie [8] voor nadere details.

nomen patroon (bevingen) en covariaten (gaswinning) van belang. Daarnaast is men geïnteresseerd in de structuur van het ruimtelijk patroon, bijvoorbeeld in de vorm van naschokken, en in patronen in de tijd, zoals de vraag of er een neiging bestaat tot zwaardere bevingen. In Twente hebben drie studenten het afgelopen semester naar deze data gekeken. Zij vonden een significant verband tussen de jaarlijkse omvang van de gaswinning en het aantal bevingen; een toename van de magnitude bleek niet significant. Daarnaast hebben zij een model opgesteld voor de bevingensintensiteit in termen van de hierboven genoemde covariaten en binnen dit model verschillende gaswinningsscenario's doorgerekend [10].

Geschiedenis

De geboortedatum van het vakgebied ruimtelijke statistiek is moeilijk exact te bepalen. We zagen al het werk van

Snow in de negentiende eeuw maar kunnen verder terug in de tijd, naar het jaar 1767 en het plaatsje Thornhill bij Leeds, waar John Michell (1724–1793) rector van de Heilige Michaëlskerk was. Deze veelzijdige man was al hoogleraar geologie geweest in Cambridge, en zou later de eerste wetenschapper worden die het bestaan van zwarte gaten postuleerde. Ons interesseert nu zijn artikel over dubbelsterren.

Michell wilde de zwaartekrachttheorie van Newton ondersteunen door te laten zien dat er meer sterren in paren voorkomen dan door toeval kan worden verklaard [14]. Daartoe beschouwt hij de hemelsfeer, de rand van een denkbeeldige bol met straal $R = 60 \times (180/\pi)$ boogminuten die concentrisch is met de aarde en waartegen de hemellichamen worden waargenomen. Een kleine 'cirkel' met straal r op de hemelsfeer is bij goede benadering tweedimensionaal met oppervlakte πr^2 . Omdat

de boogoppervlakte van de hemelsfeer $4\pi R^2$ is, heeft een willekeurig geplaatste ster kans

$$p(r) = \frac{r^2}{4R^2}$$

om binnen zulk een cirkel te liggen. Evenzo is de kans dat geen enkele van n willekeurig en onafhankelijk van elkaar geplaatste sterren binnen zulk een cirkel valt gelijk aan $(1 - p(r))^n$.

Michell was geïnteresseerd in de kans dat geen enkele ster in de buurt van welke andere ster dan ook ligt, en benaderde deze kans door $(1 - p(r))^n$. Er zijn immers n^2 paren te vormen uit n sterren. Op deze manier rekenend voor de dubbelster β -Capricorni krijgt hij (met $n = 230$, het aantal hem bekende sterren met een helderheid die tenminste even groot is als die van β -Capricorni, en $r = 3,33$, de afstand tussen de twee leden van de dubbelster) een kans van 0,988. Met andere woorden, wanneer sterren geheel willekeurig en onafhankelijk van elkaar over de hemelsfeer zouden zijn verstrooid, zou een stelsel als β -Capricorni kans $1 - 0,988$, minder dan twee procent, hebben om voor te komen. In moderne termen: de nulhypothese van een willekeurige verstrooiing op de hemelsfeer wordt bij een drempelwaarde van twee procent verworpen. Michell verklaart het toch voorkomen van onwaarschijnlijke configuraties als β -Capricorni door aantrekking tussen de hemellichamen, met andere woorden, door de zwaartekracht. Nadere details kunt u vinden in Hughes en Cartwright [11].

Hoewel in Michells berekeningen een fout zit (n mag niet zomaar worden vervangen door n^2 aangezien de cirkels om de n sterren elkaar kunnen overlappen), zien we hier een voorbeeld van een Poissonproces ruim voor de geboorte van Siméon-Denis Poisson in 1781. De naam is waarschijnlijk in zwang geraakt op de Universiteit van Stockholm aan het eind van de dertiger jaren. Hij duikt op in een artikel uit 1940 van de bekende kanstheoreticus William Feller die van 1934 tot 1939 in Stockholm werkte [7]. De algemenere term 'puntproces' werd geïntroduceerd door Connie Palm in zijn proefschrift uit 1943 [19]. Het zou nog twee decennia duren voordat José Enríques Moyal in 1962 een stevige wiskundige basis zou leggen onder de theorie van puntprocessen in algemene ruimten [15]. Voor een uitgebreider historisch

overzicht verwijs ik graag naar Guttorp and Thorarinsdottir [9].

De moderne geschiedenis neemt een aanvang in de zeventiger jaren van de vorige eeuw. Een buitengewoon invloedrijk man is Brian Ripley, inmiddels emeritus hoogleraar te Oxford. Hij heeft een aantal boeken op zijn naam, waaronder *Spatial Statistics* uit 1981 [24], en daarnaast een grote bijdrage geleverd aan software ontwikkeling [30].

In 1977 hield Ripley een voordracht voor de Royal Statistical Society in Londen die met de erop volgende discussie is gepubliceerd en nu, bijna veertig jaar later, nog volop geciteerd wordt [23]. In deze rede brengt hij voor het eerst een aantal modellen bij elkaar die in gescheiden toepassingsdomeinen waren ontwikkeld, waaronder die van Quenouille–Cox [6,22], Matérn [13], Neyman en Scott [17], Strauss [27] alsmede de Markov-modellen die hij zelf recent samen met Frank Kelly had gekarakteriseerd [25]. Voor deze laatste klasse ontwikkelt hij een simulatiemethode die kan worden gezien als een voorloper van de huidige Monte Carlo-methoden [16].

Ten slotte bespreekt hij zijn filosofie omtrent toetsen voor aanpassing. Hij moet aannemen dat het onderliggende kansmodel stationair is, dat wil zeggen dat zijn eigenschappen niet veranderen als alle punten evenveel worden verschoven. Wanneer er geen interactie tussen de punten zou zijn, zou het verwachte aantal punten in een cirkel om een specifiek punt recht evenredig zijn aan de oppervlakte van deze cirkel. Als functie van de straal krijgt men dus een kwadratische grafiek. Deze wordt vervolgens vergeleken met de daadwerkelijk waargenomen aantallen.

Deze aanpak lijkt op die van John Michell twee eeuwen eerder. In beide gevallen wordt een statistiek gekozen (in het geval van Michell een kans, in dat van Ripley een verwacht aantal) waarvan de waarde wordt berekend onder een verondersteld model zoals willekeurige verstrooiing en vervolgens vergeleken met de data. Het verschil is dat Ripley eventuele interactie op elke schaal meeneemt door de straal van zijn cirkels te laten variëren. De bovengenoemde filosofie zou de ruimtelijke stochastiek tot circa 1990 domineren en is nog steeds wijdverbreid.

Belangrijke doorbraken

Vanaf de tachtiger jaren heeft de ruimtelijke stochastiek een grote vlucht genomen. Hier zijn verschillende verklaringen voor aan te voeren. Een eerste belangrijke factor is de ontwikkeling van de computer. Eind jaren tachtig had lang niet iedere wetenschapper een pc op zijn kamer; zalen met op een universitair mainframe aangesloten terminals waren de norm. Op het CWI werden in die tijd de eerste SPARC work stations aangekocht. Ook netwerken kwamen langzaam op. Zo is SURFnet opgericht in 1986, terwijl op 17 november 1988 Piet Beertema de bevestiging ontving dat het CWI (als eerste in Europa) met het Amerikaanse computernetwerk NSFnet, een voorloper van het huidige web, was verbonden.

Op theoretisch gebied moet het pionierswerk van Julian Besag worden vermeld. Deze in 2010 overleden Britse statisticus is, onder andere, bekend geworden door zijn in 1974 gepresenteerde idee om complexe ruimtelijke processen te modelleren door middel van eenvoudige zogenaamde lokale specificaties [2]. In een voordracht voor de Royal Statistical Society legt hij zijn aanpak uit aan de hand van data over de aanwezigheid van *Plantago lanceolata* (smalle weegbree) in een voormalig mijngebied in Wales. Dit gebied is verdeeld in een 10×940 -rooster met cellen van twee cm bij twee cm, zodat een simultane verdeling maar liefst 9.400-dimensionaal is. Een lokale specificatie daarentegen kan worden opgebouwd uit een collectie eendimensionale kansen, bijvoorbeeld een eerste orde auto-logistieke regressie

$$p_{ij}(1 | y_{ij}) = \frac{e^{\alpha + \beta y_{ij}}}{1 + e^{\alpha + \beta y_{ij}}}.$$

Hier stelt $p_{ij}(1 | y_{ij})$ de voorwaardelijke kans voor dat cel (i, j) smalle weegbree bevat onder de aanname dat van de vier naastgelegen cellen er precies $y_{ij} \in \{0, \dots, 4\}$ ook deze plant bevatten. In onderstaand voorbeeld is $y_{ij} = 3$.

$$\begin{array}{c} 1 \\ 1 \quad ? \quad 0 \\ 1 \end{array}$$

Natuurlijk moeten de lokale specificaties wel consistent zijn. Een belangrijk bijkomend voordeel van Besags aanpak is dat de eendimensionale verdelingen eenvoudig van vorm zijn en geen normalisering behoeven. In ons voorbeeld is de



Figuur 2 Cirkels rond epicentra van aardbevingen in het Groninger veld gedurende 2014 en met straal recht evenredig aan de magnitude. Bevingen met magnitude 1,5 of zwaarder zijn in grijs weergegeven. Deze gegevens worden bijgehouden op het portaal [18].



simultane kans $p(C)$ op een configuratie $C = (C_{ij})_{ij}$ van nullen ('geen planten in de cel') en enen gelijk aan

$$p(C) = \frac{1}{Z} \exp \left[\alpha \sum C_{ij} + \beta \sum_{\{ij \text{ ligt naast } kl\}} C_{ij} C_{kl} \right].$$

De constante Z is een som over het astronomische aantal van $2^{9.400}$ mogelijke configuraties, een getal met meer dan 2829 nullen! Wanneer ook de vier diagonale burens van de centrale cel worden meegenomen, wordt het totale aantal configuraties zelfs nog groter.

Besag paste de zojuist beschreven aanpak toe in de beeldanalyse [3], in agrarisch veldonderzoek en voor het maken van risicokaarten [5]. Ook puntprocessen kunnen worden beschreven door een lokale specificatie omdat, wanneer de cellen klein zijn, er ten hoogste één punt in elke cel valt [4].

Naast een elegante manier om complexe, gestructureerde modellen te bouwen uit overzichtelijke bouwstenen, leent Besags idee zich ook uitstekend voor iteratieve berekeningen. Hij beseftte dat de zogenaamde Monte Carlo-methoden die gedurende de Tweede Wereldoorlog door fysici waren ontwikkeld, konden worden aangepast voor het genereren van steekproeven, voor het schatten van modelparameters, het toetsen van hypothesen en het construeren van betrouwbaarheidsintervallen. Dit samenspel tussen modelbouw, de daarop gebaseerde algoritmen en de beschikbaarheid van snelle computers heeft tot een revolutie in de (Bayesiaanse) statistiek geleid.

Omdat Monte Carlo-methoden gebaseerd zijn op het heel vaak uitvoeren van simpele berekeningen, hebben zij als nadeel dat het niet eenvoudig is om te bepalen wanneer 'heel vaak' ook genoeg is. Rond het millennium was er — in navolging van Propp en Wilson [20] — veel enthousiasme over een klasse van Monte Carlo-methoden die zelf aangeven wanneer te stoppen. Dit enthousiasme lijkt wat bekoeld, voornamelijk omdat de constructie ingewikkeld en delicaat is. Bovendien kan het lang duren voor men mag stoppen.

Een volgende belangrijke factor is dat er, mede door het internet, het laatste decennium veel grootschalige dataverzamelingen beschikbaar zijn gekomen, waardoor het niet langer noodzakelijk is om bij gebrek aan data simplificerende maar niet-realistische modelaannames te maken.

Opensourcesoftware [1] tenslotte, heeft er voor gezorgd dat grote groepen gebruikers zelf hun gegevens kunnen analyseren.

Ruimtelijke stochastiek in het derde millennium

De onderzoeksgroepen waar ik deel van heb mogen uitmaken, hebben aan alle in het vorige hoofdstuk genoemde aspecten bijgedragen.

Veel aandacht is besteed aan de ontwikkeling van voorwaardelijk gespecificeerde modellen voor puntprocessen en, meer in het algemeen, stochastische verzamelingen, alsmede aan een juist begrip van de bijbehorende interactiestructuren. Dit onderzoek is uitgemond in een monografie [12].

Wat de beeldanalyse betreft, hebben wij Besags modellen gebruikt voor de analyse van vlakverdelingen in de Indiase miniatuurkunst, stonden wij aan de basis van het gebruik van gemarkeerde punt- en objectprocessen voor het herkennen van objecten in beelden en van sequentiële puntprocessen voor het volgen van zulke objecten in video's, en hebben wij laten zien dat zowel lijnsegmentprocessen als polygonale Markovvelden kunnen worden gebruikt voor segmentatie en netwerkextractie. En passant werden nieuwe, op maat gemaakte Monte Carlo-methoden ontwikkeld, waaronder exacte simulatiemethoden.

Een ander belangrijk onderzoeksterrein betrof zogenaamde momentmaten en de daarop gebaseerde statistieken. Een specifiek geval kwamen we al tegen bij Ripley die keek naar het verwachte aantal punten in de buurt van een specifiek punt. Ook zagen we al de intensiteitsfunctie die weergeeft hoe waarschijnlijk het is om punten aan te treffen op gegeven locaties. De combinatie van zulke momentmaten levert krachtige statistieken op voor exploratieve data-analyse en modelvalidatie die ook voor niet-homogene data kunnen worden gebruikt. Samen met professor Stein van ITC zijn deze statistieken toegepast op data met betrekking tot bodemgesteldheid en aardbevingen.

Binnen de vakgroep Stochastische Operations Research aan de Universiteit van Twente bestudeert men het optimaliseren van processen waarbij onzekerheid een rol speelt. Vaak moeten kosten en baten tegen elkaar worden afgezet en tegelijkertijd rekening worden gehouden met allerlei nevenvoorwaarden. U kunt denken aan het voorraadbeheer van een winkelier die

besluit hoeveel artikelen hij moet bestellen op basis van de verwachte vraag van klanten, de bestel- en opslagkosten en rekening houdend met de grootte van zijn magazijn [21, 29].

Dergelijke vragen kunnen ook gesteld worden in een ruimtelijke context. Verplaatst u zich, om de gedachten te bepalen, eens in een boswachter die een ongelijkjarig gemengd perceel beheert. De bomen op zijn perceel vormen een puntpatroon; als markering gebruiken we de diameter en het houtvolume. Onze boswachter kan elk jaar besluiten om alle bomen die dikker zijn dan een zekere drempelwaarde te kappen. Hoe deze drempelwaarde te kiezen? Een te kleine keuze betekent dat erg veel bos wordt gekapt zodat er weliswaar op korte termijn veel inkomsten zijn maar het ook lang duurt voordat het bos weer aangroeit; een te hoge waarde leidt tot weinig houtopbrengst en dus weinig inkomsten.

Om de beste drempelwaarde te kunnen bepalen, zijn een aantal stappen nodig. Allereerst moet men de onzekerheden kwantificeren, dat wil zeggen, een dynamisch model bouwen voor de ontwikkeling van het bos met inachtneming van groei, de wedijver om zonlicht en voedingsstoffen, natuurlijke sterfte alsmede de ontwikkeling van de houtprijs. Dan moet de verwachte netto opbrengst over een geschikte tijdshorizon worden bepaald als functie van de drempelwaarde, en tenslotte moet deze functie worden gemaximaliseerd. Uiteraard zijn legio vergelijkbare scenario's te bedenken.

Een geïntegreerde theorie voor ruimte-tijd-puntprocessen staat nog in de kinderschoenen. Vaak wordt de ruimte dan wel de tijd als een markering opgevat. In die gevallen waarin ruimte en tijd wel op gelijke voet staan, zijn de gekozen modellen meestal separabel, dat wil zeggen dat de momentmaten factoriseren in ruimte en tijd. Zulk een aanpak is handig, maar lijkt minder realistisch. Ook predictie, zowel tijdelijk in de zin van het voorspellen van toekomstig gedrag, als ruimtelijk in de zin van het invullen van een onvolledig waargenomen patroon, verdient nadere aandacht en theorievorming. Hetzelfde kan worden gezegd van optimaliserings- en besturingsproblemen voor zich dynamisch ontwikkelende patronen.

Kansen en uitdagingen genoeg om de komende tijd mee aan de slag te gaan! ☘

Referenties

- 1 A. Baddeley, E. Rubak en R. Turner, *Spatial Point Patterns: Methodology and Applications with R*, CRC Press, 2015.
- 2 J. Besag, Spatial interaction and the analysis of lattice systems (with discussion), *Journal of the Royal Statistical Society, Series B (Methodological)* 36 (1974), 192–236.
- 3 J. Besag, On the statistical analysis of dirty pictures (with discussion), *Journal of the Royal Statistical Society, Series B (Methodological)* 48 (1986), 259–302.
- 4 J. Besag, R. Milne en S. Zachary, Point process limits of lattice processes, *Journal of Applied Probability* 19 (1982), 210–216.
- 5 J. Besag, J. York en A. Mollié, Bayesian image restoration, with two applications in spatial statistics. With discussion and a reply by Besag, *Annals of the Institute of Statistical Mathematics* 43 (1991), 1–59.
- 6 D. R. Cox, Some statistical methods connected with series of events (with discussion), *Journal of the Royal Statistical Society, Series B (Methodological)* 17 (1955), 129–164.
- 7 W. Feller, On the integro-differential equations of purely discontinuous Markoff processes, *Transactions of the American Mathematical Society* 48 (1940), 488–515.
- 8 M. Friendly, HistData: Data sets from the history of statistics and data visualization, <http://CRAN.R-project.org/package=HistData>, 2014.
- 9 P. Guttorp en T. L. Thorarinsdottir, What happened to discrete chaos, the Quenouille process, and the sharp Markov property? Some history of stochastic point processes, *International Statistical Review* 80 (2012), 253–268.
- 10 E. van Hove, R. van Lingen en S. Riemens, *Geïnduceerde aardbevingen in gasveld Groningen. Een statistische analyse*, bachelor-scriptie, Universiteit Twente, 2015.
- 11 D. W. Hughes en S. Cartwright, John Michell, the Pleiades, and odds of 496,000 to 1, *Journal of Astronomical History and Heritage* 10 (2007), 93–99.
- 12 M. N. M. van Lieshout, *Markov Point Processes and their Applications*, Imperial College Press, 2000.
- 13 B. Matérn, Spatial variation, *Meddelanden från Statens Skogsforskningsinstitut* 49 (1960).
- 14 J. Michell, An inquiry into the probable parallax and magnitude of the fixed stars from the quantity of light which they afford us, and the particular circumstances of their situation, *Philosophical Transaction of the Royal Society* 57 (1767), 234–254.
- 15 J. E. Moyal, The general theory of stochastic population processes, *Acta Mathematica* 108 (1962), 1–31.
- 16 J. Møller en R. P. Waagepetersen, *Statistical Inference and Simulation for Spatial Point Processes*, CRC Press, 2004.
- 17 J. Neyman en E. L. Scott, A theory of the spatial distribution of galaxies, *Astrophysical Journal* 116 (1952), 144–163.
- 18 NL Olie en Gasportaal, www.nlog.nl, Ministerie van Economische Zaken, Koninklijk Nederlands Meteorologisch Instituut en TNO Innovation for life, 2015.
- 19 C. Palm, Intensitätsschwankungen im Fernspreverkehr, *Ericsson Technics* 44 (1943).
- 20 J. G. Propp en D. B. Wilson, Exact sampling with coupled Markov chains and applications to statistical mechanics, *Random Structures & Algorithms* 9 (1996), 223–252.
- 21 M. L. Puterman, *Markov Decision Processes*, Wiley, 1994.
- 22 M. H. Quenouille, Problems in plane sampling, *Annals of Mathematical Statistics* 20 (1949), 355–375.
- 23 B. D. Ripley, Modelling spatial patterns (with discussion), *Journal of the Royal Statistical Society, Series B (Methodological)* 39 (1977), 172–212.
- 24 B. D. Ripley, *Spatial Statistics*, Wiley, 1981.
- 25 B. D. Ripley en F. P. Kelly, Markov point processes, *Journal of the London Mathematical Society* 15 (1977), 188–192.
- 26 J. Snow, *On the Mode of Communication of Cholera*, John Churchill, 2nd ed., 1855.
- 27 D. J. Strauss, A model for clustering, *Biometrika* 62 (1975), 467–475.
- 28 W. H. H. Tegelaers, Het kind van de rekening, afscheidscollege, Universiteit van Amsterdam, 1984.
- 29 H. C. Tijms, *A First Course in Stochastic Models*, Wiley, 2003.
- 30 W. N. Venables en B. D. Ripley, *Modern Applied Statistics with S*, Springer, 1994.

Jan Beuving

cabaretier, Zeist
janbeuving@gmail.com



Het keerpunt van Linda Plantagie

Als kind wilde ik altijd al doktertje spelen

Ze studeerde cum laude af in de wiskunde, en rondt op dit moment haar promotieonderzoek aan het CWI af. Toch gooide Linda Plantagie het roer vier jaar geleden al om: ze ging geneeskunde studeren. "Ik doe nu waar ik echt gelukkig van word."

Welke co-schappen volg je op dit moment?

"Kindergeneeskunde. Dat vind ik geweldig. Vooral de dynamiek met ouders en kinderen is steeds weer wisselend. Het gaat om de hele groep tussen 0 en 18 jaar, dus je praat soms vooral met de ouders, en soms vooral met het kind. Je weet nooit van tevoren hoe een gesprek loopt; er zijn geen twee gevallen hetzelfde."

Is de sfeer bij de geneeskundestudie heel anders dan bij wiskunde?

"Ja. In de bètahoeck zijn de mensen voor mijn gevoel veel diverser, zowel wat betreft hun persoonlijkheid als de sociale context waarin ze zijn opgegroeid. Ze zijn ook minder bevooroordeeld, en accepteren je zoals je bent. Bij geneeskunde word je sneller in een hokje geplaatst. De sfeer is minder open. Het aantal studenten per studiejaar is ook veel groter dan ik gewend was bij wiskunde. Nog steeds ken ik niet al mijn jaargenoten."

Voel je je dan wel thuis?

"Zeker in het begin moest ik me wel aanpassen natuurlijk, want ik ben toch acht jaar ouder dan veel van mijn medestudenten en woonde al meerdere jaren op mezelf. Daarbij werkte ik twee dagen in de week aan mijn promotieonderzoek, wat een pittige combinatie was naast de vele verplichte contacturen van de studie. Tijd voor sociale activiteiten had ik

dan ook nauwelijks. Mijn medestudenten zaten in een heel andere fase van hun leven, gingen voor het eerst op kamers wonen en ontdekten het studentenleven. Hierdoor lagen de prioriteiten nog wel eens anders. Gaandeweg de opleiding werden deze verschillen kleiner en nu voel ik me meer op mijn plek. En ik doe nu waar ik echt gelukkig van word. In die zin voel ik me helemaal thuis. Ik heb altijd al heel veel interesse in geneeskunde gehad, ik keek medische programma's op tv en wilde als kind ook altijd doktertje



Linda Plantagie

spelen. Alles was er ook op gericht dat ik arts zou worden."

Waarom dan toch voor de wiskunde gekozen?

"Ik had me helemaal georiënteerd op een studie geneeskunde, ik had daar de open dagen bezocht, toen ik halverwege 6 vwo mezelf de vraag stelde: maar wat vind ik nu het leukst om te doen? Dat was toch echt wiskunde. Puzzels oplossen, uitgedaagd worden. Toen heb ik een meeloopdag in Utrecht bezocht, en zonder veel twijfel gekozen voor het TWIN-programma met wis- en natuurkunde. Aan mijn liefde voor de zorg zou ik dan wel als vrijwilliger kunnen voldoen, dacht ik."

Hoe zag je afstudeertraject eruit?

"Na het behalen van beide bachelors, waarin ik wiskundig gezien vooral veel vakken in de analyse-richting heb gevolgd, ben ik de master *Mathematical Sciences* gaan doen, waarbij ik me meer heb toegelegd op de toegepaste wiskunde. Ik wilde meer concreet bezig zijn en vraagstukken oplossen die maatschappelijk relevant zijn. In mijn master heb ik dan ook vooral veel optimalisatievakken gevolgd. Het viel me op dat veel problemen in die hoek met behulp van de computer worden opgelost. Daar wist ik weinig van. Dus als ik wat wilde, zo redeneerde ik, moest ik zorgen dat ik leerde programmeren. Ik wist al wel dat ik niet in de academie wilde werken, waar de publicatiedruk hoog is en je telkens weer op zoek moet naar geld voor je onderzoek. Ik wilde het

bedrijfsleven in, en daarvoor moest ik zo aantrekkelijk mogelijk zijn.

Ik heb uiteindelijk een gecombineerde studie-/werkplek gevonden bij ORTEC, waar ik ook heb leren programmeren. Voor mijn studie heb ik gekeken naar een stuk software met betrekking tot de transportsector; het minimaliseren van wachttijden in rijschema's van chauffeurs. Ik heb een analyse gemaakt van die software en voorstellen gedaan voor structurele verbeteringen hiervan."

Voor iemand die het bedrijfsleven in wil, is het CWI nou niet echt een logische vervolgstap.

"Ik wilde aanvankelijk ook niet promoveren. Maar ik wist tijdens het schrijven van mijn scriptie al wel dat mijn toekomst niet bij een softwarebedrijf lag. En op dat moment kreeg ik, op de dag dat ik afstudeerde, een mailtje van een oud-docent, waarin hij mij een promotietraject aanbood. Toen begon ik te twijfelen: ik had nooit écht academisch onderzoek gedaan, waarin ik meer vrijheid had. Ik ben me vervolgens wat breder gaan oriënteren. Behalve de aangeboden plek kon ik ook een onderzoeksplaats aan het NFI krijgen, over hoe je uit minimale sporen met DNA-materiaal toch een bruikbaar profiel kunt destilleren. Er was ook een plek bij Joost Batenburg aan het CWI beschikbaar, op het gebied van *Computed Tomography*. Dat is het uiteindelijk geworden."

Heb je dat onderzoek al in de medische hoek gedaan?

"Mensen kennen CT vooral van de scans in het ziekenhuis, maar de toepassingen zijn veel breder, bijvoorbeeld in de industriële sector. Zo wordt CT ook ingezet bij inspectie van materialen op inwendige scheuren, bijvoorbeeld bij turbinebladen. In de voedselindustrie wordt eveneens met CT gewerkt, bijvoorbeeld om het verouderingsproces van voedsel te monitoren. En ook in de diamantsector kan met behulp van CT worden gekeken hoe de ruwe diamant eruitziet, zodat bepaald kan worden hoe de grootste diamant geslepen kan worden. Dat is dus ook nog een optimalisatievraagstuk.

Zelf heb ik me vooral met de algoritmes achter de scans beziggehouden. Het

draait vaak om een zo hoog mogelijke beeldkwaliteit, terwijl de rekentijd zo laag mogelijk moet blijven. Ik heb mijn algoritmes eerst en vooral losgelaten op gesimuleerde data, en later ook op experimentele data."

Wat heeft er uiteindelijk voor gezorgd dat je je perspectief gekanteld hebt?

"Tijdens mijn onderzoek begon de twijfel te groeien. Ik werkte veel zelfstandig, en had weinig contact met anderen. Ik verloor het plezier in het werk. Maar ik kon ook de vraag niet beantwoorden in welke positie ik dan wel gelukkig zou zijn. En ik had nog 40 werkjaren voor me liggen. Maar wat wilde ik dan echt, vroeg ik me af. Het antwoord was: de gezondheidszorg in. Ik heb tijdens mijn studie ook altijd een bijbaan gehad in een verzorgingstehuis, waar ik in de voedingsdienst werkte. We hadden zowel bewoners met lichamelijke klachten als mensen met dementie. Ik vond dat geweldig om te doen. Dat wilde ik weer: zorgen voor mensen."

Hoe reageerde je promotiebegeleider op die wens?

"Heel goed. Hij heeft me de mogelijkheid geboden om mijn promotietraject in deeltijd af te maken, waar ik hem heel dankbaar voor ben. Uiteindelijk is het me net niet gelukt om het promotieonderzoek tegelijk met de bachelor van geneeskunde af te ronden. Dat doe ik nu in mijn eigen tijd."

Zaten ze bij geneeskunde te wachten op iemand van 25?

"Ik was bij een meeloopdag in Utrecht, en een studieadviseur raadde me eigenlijk af om daar te beginnen. Ik had niet de goede opleiding gedaan om in het verkorte traject in te stromen. Ik zou betere kansen in Nijmegen hebben, omdat daar niet naar de vooropleiding werd gekeken, maar de kennis werd getoetst. Maar de kans dat ik daar zou worden toegelaten was ook niet echt hoog. En toen kwam ik erachter dat ik in 2012 voor het laatst gegarandeerd op basis van mijn middelbareschoolcijfers zonder loting kon beginnen aan de reguliere opleiding. Dat was haast een teken dat ik het moest doen — en dat heb ik toen ook gedaan."

Is het niet juist goed dat wat oudere studenten aan geneeskunde beginnen?

"Dat denk ik wel. Ik heb het verschil wel gemerkt met mensen van 18, vooral bij lessen in communicatie en gesprekstechniek. Het is fijn als je een stuk levenservaring meebrengt. Het wordt alleen financieel gezien in het huidige onderwijsstelsel helaas nog moeilijker om deze weg te bewandelen."

Wat voor carrière heb je op het oog in de medische wereld?

"Ik ben dit primair gaan doen omdat ik de kliniek in wil, niet omdat ik onderzoeker wil worden. Ik wil vooral contact met patiënten. Maar gezien mijn achtergrond ligt een combinatie met onderzoek wel voor de hand. Ook omdat ik graag een specialisatie zou doen, en dan kunnen mijn onderzoekskwaliteiten goed van pas komen. Maar dan liever niet op het gebied van de tomografie. In mijn derde jaar heb ik twee co-schappen gedaan. Een bij chirurgie, dat is vooral praktisch, en een co-schap interne geneeskunde. Daar gaat het vooral om luisteren en observeren. Bij dat laatste ligt mijn hart. Ik vond eerder neurologie en kindergeneeskunde heel boeiend, en mijn keuze-co-schap is straks kinderneurologie."

Is er een overlap tussen wis- en geneeskunde?

"Er zijn natuurlijk veel verschillen. Bij geneeskunde is samenwerken heel belangrijk. Daarnaast is de hoeveelheid stof veel groter en moeten we veel feitenkennis hebben. Bij wiskunde draait het veel meer om begrijpen. Ook is de opleiding veel groter. Het kleinschalige van wiskunde heb ik wel gemist. Maar overeenkomsten zijn er zeker ook. Bij lastige en veelomvattende klachten is het structureren van het probleem, met al zijn voorwaarden, soms net een analytisch proces. Hierbij gaat het erom tot de kern te komen om een medische diagnose te kunnen stellen."

Voel je je, als je straks klaar bent, ook nog wiskundige?

"Ik denk dat dat gevoel langzaam wegebt. Ik wil vooral arts zijn."

Goede suggesties voor een Nederlandse wiskundige met een keerpunt in zijn of haar carrière zijn welkom via keerpunt@nieuwarchief.nl.

K.P. Hart

Faculteit EWI
TU Delft
k.p.hart@tudelft.nl

Maatschappij

Wiskunde in de Nationale Wetenschapsagenda

Op 27 november 2015 werd de Nationale Wetenschapsagenda gepresenteerd aan de minister en staatssecretaris van OCW en de minister van Economische Zaken. K.P. Hart gaat in dit artikel in op een aantal wiskundige vragen die gesteld zijn.

In april 2015 kon iedereen via de website vragen.wetenschapsagenda.nl vragen indienen die al dan niet opgenomen zouden worden in wat *De Nationale Wetenschapsagenda* zou gaan heten. Dat document is eind november 2015 gepubliceerd. Uit het voorwoord:

“De Wetenschapsagenda beoogt de Nederlandse wetenschap beter toe te rusten om antwoorden te vinden op de grote uitdagingen van deze tijd en noodzakelijke transities in bijvoorbeeld energiegebruik, gezondheidszorg, de ontwikkeling van onze samenleving en democratische rechtstaat, veiligheid en mondiale voedselzekerheid teweeg te brengen. [...] De Wetenschapsagenda wil prikkelen en aanzetten tot het smeden van wellicht ongebruikelijke allianties en tot het verkennen van onvermoede samenhang.”

Hoe dat uit gaat werken zal de tijd ons leren. In de agenda staan 140 zogeheten clustervragen, die elk een aantal ingediende vragen samenbinden. Alleen clus-

tervraag 125 heeft een echt wiskundige inhoud: “Welke symmetrieën schuilen er onder priemgetallen en hoe kan de wiskundige getaltheorie bijdragen aan natuurkundige theorievorming?” De toelichting spreekt van de Langlandsvermoedens, en de ‘zwaarste’ individuele vraag in dit clus-

ter gaat daar over en is door leden van het cluster GQT ingebracht.

Daarnaast zijn er veel vragen waar indirect naar wiskundige inbreng wordt gevraagd, bijvoorbeeld: “Kun je wiskundige modellen gebruiken om de werking van medicijnen te beschrijven?” Op de digitale versie van de Wetenschapsagenda, vragen.wetenschapsagenda.nl, kunt U naar hartelust grasduinen.

Uit het bovenstaande moet niet afgeleid worden dat er geen vragen aan de wiskunde zijn gesteld. Als U gaat zoeken op trefwoorden als ‘wiskunde’, ‘logica’, ‘oneindig’,..., dan komt U zeker vragen tegen met een wiskundige inhoud. Daar zitten welbekende vragen onder, zoals het Priemtweelingenvermoeden en het Handelsreizigerprobleem, maar deze hebben het niet tot het definitieve boekwerk geschopt. En dat hoeft ook niet, zou je zeggen, want die staan al continu in de belangstelling. Ze zijn wel bij clustervragen ondergebracht, het Priemtweelingenvermoeden bijvoorbeeld bij bovengenoemde clustervraag 125.

In dit stuk wil ik het hebben over de vragen die vooral een wiskundige inhoud hebben en wat wij uit het feit dat juist die vragen gesteld zijn kunnen leren.





De bladzijde met clustervraag 125

Een blog

Ik moet bekennen dat de Wetenschapsagenda in het begin grotendeels aan mij voorbij is gegaan, ik wist van het bestaan maar besteedde er niet veel aandacht aan. Nadat ik op sciencepalooza.nl wat antwoorden op vragen had gezien, ben ik op de site in de vragen gaan bladeren om te zien wat men van de wiskunde wilde weten. Daar zaten zoveel vragen bij die al een antwoord hebben dat ik die ben gaan beantwoorden op wiskwa.tumblr.com.

QR-code voor wiskwa.tumblr.com

De aard en kwaliteit van de vragen

Zoals gezegd kun je op de website naar wiskundige termen zoeken, maar je kunt ook tekstbestanden downloaden en daar in een editor in gaan zitten lezen (de csv-versie van het file met daarin alle vragen is ongeveer 13.8 MB groot). Op die manier heb ik ruim vijftig vragen met een wiskundige inhoud gevonden die al lang een antwoord hadden of die wel wat commentaar konden gebruiken. De toelichting bij het Priemtweelingenvermoeden op de

website luidt bijvoorbeeld:

“Mijn vader zocht zijn hele leven naar een antwoord ...”

De aard van die vragen loopt nogal uiteen. Een kleine keuze uit wat op wiskwa.tumblr.com behandeld is:

- Is 0,999... gelijk aan 1?
- Waarom verdelen we een rechte hoek niet in 96 eenheden?
- Diverse (elementaire) vragen over π en cirkels; waarom is π niet rationaal?
- De status van 0, als getal, als al dan niet eerste natuurlijk getal, ...
- Diverse vragen over ‘oneindig’: wat is het, hoe ziet het er uit, de paradoxen van Zeno, ...
- Wat zijn getallen?
- Is 3,80001423318621 een bijzonder getal in het Lotka–Volterra-model?
- Moet er onderzoek gedaan worden naar het $=$ -teken omdat zijn rol misschien wel veel genuanceerder ligt dan waar nu vanuit gegaan wordt?

Als er één conclusie is die ik zou durven trekken uit de vragen die ik gevonden en behandeld heb, dan is het wel dat er een grote kloof gaapt tussen wat wij (de professionele wiskundigen bedoel ik) weten en niet weten, en wat anderen denken dat wij weten en niet weten.

Sommige vragen vertegenwoordigen stations die al lang geleden gepasseerd zijn: meetkundige reeksen laten zien dat $0,999...=1$, en dat er, wiskundig gesproken, weinig paradoxaals is aan de paradoxen van Zeno. Andere vragen zijn vaak te beantwoorden met variaties op: “zo zijn de definities nu eenmaal.” Dat het wentellichaam van $y = \frac{1}{x}$ wel gevuld kan worden maar niet geschilderd komt door onze definities van inhoud en oppervlakte, en volgt door deze consequent toe te passen. Idem voor de vraag waarom π niet rationaal is.

Er waren relatief veel vragen over ‘het oneindige’. Gek genoeg waren er eigenlijk geen vragen over ‘het eindige’, hoewel die twee volgens Van Dale elkaars antoniemen zijn en de definitie van ‘oneindig’ eigenlijk neerkomt op ‘niet eindig’.

Wat heb ik geleerd?

Wat ook opviel was dat de vragen meestal niet over de ‘standaard’ gepopulariseerde wiskunde gingen, en als ze er al over gingen, over π bijvoorbeeld, dan lieten ze zien dat niet duidelijk is dat met precieze defi-

nitie al heel wat verholpen kan worden. Het lijkt er op dat we bij het naar buiten brengen van de leuke, mooie, interessante, ..., aspecten van de wiskunde niet moeten nalaten op gezette tijden te laten weten dat we het hebben over zaken die we van een strenge definitie hebben voorzien.

Als een wiskundige het over π heeft dan heeft zij het niet over de verhouding tussen omtrek en middellijn van een cirkel maar over het eerste positieve nulpunt van de sinusfunctie, en de *analytische definitie* [1] van $\sin x$ heeft niets met hoeken te maken. Nadat ‘lengte van kromme’ netjes gedefinieerd is, en is vastgesteld dat $t \mapsto (\cos t, \sin t)$ een parametrizing van de eenheidscirkel geeft, kunnen we *bewijzen* dat de lengte van een halve (eenheids)cirkelboog gelijk is aan dat eerste positieve nulpunt van $\sin x$.

Als een wiskundige het over ‘oneindig’ heeft, in de zin van aantal elementen of als het symbool ∞ in de analyse, dan zijn daar strakke afspraken over gemaakt, die bij de popularisering vaak uit het oog worden verloren en waardoor de niet-wiskundige wel eens op een verkeerd spoor wordt gezet.

In mijn blogposts heb ik het belang van definities vaak onderstreept en de antwoorden volgden dan het stramien: we hebben ... zo gedefinieerd en als we uitgaande van die definities gaan redeneren dan is het resultaat ...

Een collega merkte op dat ik daar wel wat streng klonk. Dat klopt en het weerspiegelt mijn mening dat als iemand een onderzoeksvraag met puur wiskundige inhoud wil stellen, dat op onze voorwaarden moet gebeuren. Met ‘op onze voorwaarden’ bedoel ik: graag in termen van de definities die wij gebruiken en niet via een half-begrepen intuïtieve verklaring.

Ik pleit ervoor dat we bij popularisering regelmatig duidelijk maken wat onze definities zijn. In die geest heb ik het blog uitgebreid met een paar van die ‘officiële’ definities; U kunt er enige stukjes vinden over eindig en oneindig, wat π is en een schets van een irrationaliteitsbewijs, en ook de verzameltheoretische opbouw van de natuurlijke getallen.

Andere zaken

Aantal en kwaliteit

Het aantal ingediende vragen was 11.656 (vermeld bij de aanbidding), in de communicatie naar buiten veelal afgerond op

11.700 of ook wel “bijna 12.000”. Men had op drie- à vierduizend gerekend en was dus blij verrast met dit grote aantal. Aan de andere kant, zoals ook door anderen opgemerkt: minder dan een op de duizend Nederlanders heeft kennelijk de moeite genomen een vraag te stellen. Men kan ook andere sommetjes doen en, bijvoorbeeld, met zekerheid concluderen dat zo’n achtduizend studenten aan de TU Delft geen vraag hebben ingediend.

Wat ook niet geheel duidelijk is, is hoeveel van de ingediende vragen daadwerkelijk hout snijden. Ik heb een handvol vragen gevonden met niet-triviale wiskundige inhoud, en bij elkaar ruim vijftig echt wiskundig klinkende vragen. Als we dit ongestraft zouden mogen extrapoleren naar de hele verzameling zouden we op rond de tien procent ‘echte’ vragen uitkomen. De gepubliceerde agenda spreekt zich hier niet over uit.

Huiskamercolleges

Rond de agenda zijn diverse activiteiten georganiseerd, waaronder een achttal huiskamercolleges bij vraagstellers thuis. Daar heb ik er ook een van verzorgd en wel voor de stellers van de volgende vraag (ondergebracht bij clustervraag 125):

Sudoku 9×9: 9 rijen, 9 kolommen en de 9 vierkanten bevatten de cijfers 1 tot en met 9. Opgaven over 9×9 sudokus bevatten een aantal cijfers. Hoeveel cijfers zijn minimaal nodig om een unieke oplossing te kunnen vinden?

Het antwoord op de vraag is: zeventien. Dat is in januari 2012 in Dublin vastgesteld na een jaar gecomputeriseerd zoeken. Tijdens het college, meer een goed gesprek, werd duidelijk dat dit eigenlijk niet de vraag was. Bij het met de hand in elkaar zetten van een Sudoku stuitten de vraagstellers op problemen die alleen met

behulp van een computerprogramma op te lossen waren. De eigenlijke vraag was: “Is er niet een formule die in één klap vertelt wat in een bepaald vakje gezet zou moeten worden en welke vakjes nog leeg gemaakt kunnen worden met behoud van uniciteit van de oplossing?” Mijn antwoord: die formule hebt u al gemaakt, dat is dat computerprogramma. En, helaas, het invullen en uitwerken van die ‘formule’ kost iedere keer weer vrij veel tijd.

Dit illustreert overigens wel hoe we, wellicht, zinnvollere vragen uit de samenleving los kunnen weken: ontmoetingen organiseren waarbij doorgevraagd kan worden naar de achtergrond van de vragen die men voor de wetenschap heeft. De Rijksuniversiteit Groningen heeft in 2014, bij het 400-jarig bestaan, iets dergelijks gedaan. Op 400 vragen uit een soort Wetenschapsagenda avant la lettre werden, uiteraard, 400 antwoorden gegeven [2]. Hierbij is bij diverse vragen dóórggevraagd, waardoor duidelijk werd wat er eigenlijk gevraagd werd en hoe het antwoord het best geformuleerd kon worden.

Geek Girl Authority

Ik heb het blog in het Engels vertaald om mijn buitenlandse facebook- en twittervrienden van dienst te zijn — die kregen de posts te zien omdat tumblr ze automatisch op de genoemde gremia aankondigde. Dat leverde een interessante reactie op: de website Geek Girl Authority (www.geekgirlauthority.com) zet tweemaal per week een post, uit de Engelse versie natuurlijk, op de eigen pagina’s en met een eigen vormgeving. Wat mij verbaasde was dat ook de drie posts over de constructie van de natuurlijke getallen werden opgenomen. In de weken voor de kerst zelfs de vijf stukjes waarin wat over aftelbaarheid en overaftelbaarheid werd verteld, inclusief de overaftelbaarheid van $\mathbb{R}$.

Desgevraagd vertelde de beheerder een en ander over de beweegredenen en de resultaten. Over het opnemen zelf: de onderwerpen in de vragen spraken aan, juist omdat ze van ‘gewone’ belangstellenden afkomstig waren. De (schijnbaar) eenvoudige vraag ‘Wat is een natuurlijk getal’ intrigeert en dat maakt hem ‘klikbaar’, de historische informatie hielp ook. De reacties zijn positief; bezoekers van de website begonnen naar de posts uit te kijken. Meest bezocht: ‘Natural numbers’, ‘Right angle’, ‘Prime numbers’, ‘Pi’, ‘Infinity’.



Het logo van de Geek Girl Authority website en de QR-code voor de wiskundeposts aldaar.

Ten slotte

In oktober werd bekend dat de universiteiten 87 miljoen aan agenda-gerelateerd onderzoek moeten gaan besteden [3]. Ik heb alvast aan ons CvB gevraagd 300.000 euro aan mijn afdeling over te maken, dat zijn die vijftig beantwoorde vragen ongeveer waard.

Referenties

- 1 Ik ken zeker drie analytische definities van $\sin x$; geen van die drie noemt hoeken.
- 2 http://rug400.nl/rug400_2/rug_definitief.dev/nl/400-antwoorden_page.
- 3 <http://delta.tudelft.nl/artikel/nationale-wetenschapsagenda-kost-87-miljoen-euro/30579>.

Jan Draisma

Faculteit Wiskunde en Informatica, Technische Universiteit Eindhoven, en
Afdeling Wiskunde, FEW, Vrije Universiteit Amsterdam
j.draisma@tue.nl

De oplossing

Het chromatisch polynoom

Op een conferentie in juni 2015 ter ere van Bernard Teissiers 70ste verjaardag kondigde de jonge wiskundige June Huh uit Princeton de oplossing aan, samen met Karim Adiprasito (Hebrew University Jerusalem) en Eric Katz (University of Waterloo), van een vermoeden uit begin jaren zeventig over het chromatisch polynoom van een matroïde. Eric Katz sprak al in 2012 op de *Third Workshop on Graphs and Matroids* in Maastricht over een speciaal geval. Jan Draisma neemt een kijkje in de geschiedenis en oplossing van dat vermoeden – met al eerder een hoofdrol voor June Huh.

Chromatische polynomen van grafen

In zijn onderzoek naar het vierkleuren-vermoeden introduceerde George Birkhoff het *chromatisch polynoom* $\chi_G(q)$ van een eindige graaf G [2] (ongericht, lussen en dubbele kanten zijn toegestaan): $\chi_G(q)$ is het aantal kleuringen van de knopen van G met (hooguit) de kleuren $1, \dots, q$ die aan de eindpunten van elke kant e van G twee *verschillende* kleuren toekennen. Deze functie blijkt inderdaad een polynoom in q , en het inductieve bewijs van die uitspraak is instructief voor wat komen gaat. Ten eerste, als G geen kanten heeft en n knopen, dan zijn alle kleuringen toegestaan en geldt dus $\chi_G(q) = q^n$. Als G een lus e heeft, dan kan geen enkele kleuring de eindpunten van e – die immers samen vallen – verschillende kleuren geven, dus is $\chi_G(q)$ het nulpolynoom. Neem ten slotte aan dat G een kant e heeft die geen lus is. Definieer $G \setminus e$ als de graaf verkregen uit G door kant e weg te laten, en G/e als de graaf verkregen uit G door de kant e samen te trekken (zie Figuur 1). Bij dat samentrekken worden de eindpunten van e

dus geïdentificeerd, en kunnen er lussen ontstaan als G kanten parallel aan e heeft. Maar hoe dan ook hebben $G \setminus e$ en G/e allebei een kant minder dan G , en er geldt

$$\chi_G(q) = \chi_{G \setminus e}(q) - \chi_{G/e}(q).$$

De toegestane kleuringen van $G \setminus e$ die *niet* toegestaan zijn voor G zijn precies die waarbij de eindpunten van e dezelfde kleur krijgen, en die corresponderen met kleuringen van G/e . Beide termen zijn polynomen, dus $\chi_G(q)$ ook.

Uit de definitie blijkt dat $\chi_G(q)$ multiplicatief is: als GH de disjuncte vereniging van twee grafen G en H is, dan geldt $\chi_{GH}(q) = \chi_G(q) \chi_H(q)$. Verder verandert het chromatisch polynoom niet als je meerdere kanten tussen dezelfde twee knopen

door een enkele kant vervangt. Een paar voorbeelden, met K_n de complete graaf op n knopen, P_n het pad met n knopen en C_n de cykel met n knopen:

$$\chi_{K_1}(q) = q,$$

$$\chi_{K_2}(q) = q^2 - q,$$

$$\chi_{P_3}(q) = \chi_{K_1 K_2} - \chi_{K_2} = q^3 - 2q^2 + q,$$

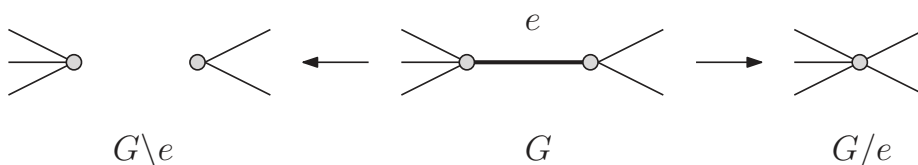
$$\chi_{K_3}(q) = \chi_{P_3} - \chi_{K_2} = q^3 - 3q^2 + 2q,$$

$$\chi_{P_4}(q) = \chi_{K_1 P_3} - \chi_{P_3} = q^4 - 3q^3 + 3q^2 - q,$$

$$\chi_{C_4}(q) = \chi_{P_4} - \chi_{K_3} = q^4 - 4q^3 + 6q^2 - 3q.$$

Een aantal eigenschappen van $\chi_G(q)$ is makkelijk af te leiden: als G geen lussen heeft, dan is $\chi_G(q)$ een monisch polynoom van graad n , het aantal knopen van G . De coëfficiënten zijn daarna afwisselend strikt negatief en strikt positief, tot de eerste nul-coëfficiënt, waarna *alle* coëfficiënten nul zijn. De maximale l met $q^l \mid \chi_G(q)$ is gelijk aan het aantal samenhangscomponenten van G .

Maar een veel diepere eigenschap, voor het eerst experimenteel opgemerkt door



Figuur 1

Ronald Read [6], is dat de coëfficiënten van $\chi_G(q)$ in absolute waarde *unimodaal* lijken: als $\chi_G(q) = c_0 q^n + c_1 q^{n-1} + \dots + c_n$, dan lijkt er altijd een k te zijn zo dat

$$|c_0| \leq |c_1| \leq \dots \leq |c_k| \geq |c_{k+1}| \geq \dots \geq |c_n|.$$

Later ontdekte Dominic Welsh een ander patroon, namelijk, dat voor alle $i = 1, \dots, n-1$ de ongelijkheid

$$|c_i|^2 \geq |c_{i-1}| |c_{i+1}|$$

lijkt te gelden. Deze ongelijkheid impliceert, waar de coëfficiënten niet nul zijn, dat de logaritmen van hun absolute waarden een concave rij vormen; en dit impliceert de unimodaliteit die Read opmerkte. Welsh formuleerde deze *logaritmische concaafheid* van het chromatisch polynoom als vermoeden in [9], waar hij het ook uitbreidde naar zogenaamde *matroïden*. Naar de *unimodaliteit* vroegen, in deze algemenere context, al eerder A.P. Heron [3] en (tussen de regels door) Gian-Carlo Rota [7].

Chromatische polynomen van matroïden

Een *lineaire* matroïde over een lichaam K is een drietal $M = (E, V, \varphi)$ waarbij E een eindige verzameling is, V een eindig-dimensionale vectorruimte over K , en φ een willekeurige afbeelding $E \rightarrow V$. Bij een element $e \in E$ kunnen we uit M twee nieuwe lineaire matroïden construeren, als volgt. Ten eerste kunnen we e verwijderen, en dan krijgen we $M \setminus e := (E \setminus \{e\}, V, \varphi|_{E \setminus \{e\}})$. Of we kunnen e samentrekken, wat per definitie $M/e := (E \setminus \{e\}, V / \langle \varphi(e) \rangle, \bar{\varphi})$ geeft, met $\bar{\varphi} : E \setminus \{e\} \rightarrow V / \langle \varphi(e) \rangle$ de samenstelling van de restrictie $\varphi|_{E \setminus \{e\}}$ en de projectie $V \rightarrow V / \langle \varphi(e) \rangle$. Merk op dat bij samentrekken de dimensie van de vectorruimte met één omlaag gaat, tenzij $\varphi(e)$ nul is. Voor een lineaire matroïde $M = (E, V, \varphi)$ met $n \dim := \dim V$ definiëren we het *chromatisch polynoom* $\chi_M(q)$ door

$$\chi_M = \sum_{S \subseteq E} (-1)^{|S|} q^{n - \dim \langle \varphi(e) \mid e \in S \rangle}.$$

Een eenvoudige rekenpartij leidt tot de volgende identiteit:

$$\chi_M(q) = \chi_{M \setminus e}(q) - \chi_{M/e}(q).$$

De analogie met grafen gaat verder, want lineaire matroïden (over een willekeurig lichaam K) zijn een veralgemening van grafen: bij een graaf G met knopenverzameling X en kantenverzameling E , hoort



June Huh

een matroïde $M_G := (E, KX, \varphi)$ waarbij $V := KX$ de vectorruimte van formele K -lineaire combinaties van X is, en φ aan een kant tussen x en y het element $x - y \in KX$ toekent. Als x en y verschillend zijn, dan moet hier een teken gekozen worden, maar die keuze beïnvloedt het chromatisch polynoom niet. Er gelden nu de volgende identiteiten voor een willekeurige kant e van G :

$$M_{G \setminus e} = M_G \setminus e \quad \text{en} \quad M_{G/e} = M_G / e.$$

Daaruit volgt, met inductie, dat $\chi_{M_G}(q) = \chi_G(q)$.

Een *algemene* matroïde is een paar $M = (E, \mathcal{I})$ met E een eindige deelverzameling en $\mathcal{I}$ een collectie deelverzamelingen van E , die we *onafhankelijk* noemen, waarbij $\mathcal{I}$ voldoet aan de volgende axioma's: als $S \in \mathcal{I}$ en $T \subseteq S$, dan $T \in \mathcal{I}$; en als $S, T \in \mathcal{I}$ met $|S| < |T|$, dan is er een

$x \in T \setminus S$ zo dat $S \cup \{x\} \in \mathcal{I}$. Uit een lineaire matroïde (E, V, φ) krijgen we een matroïde door voor $\mathcal{I}$ de verzameling van alle deelverzamelingen $S \subseteq E$ te nemen waarvoor $\varphi(S)$ onafhankelijk is. Als we dit doen voor de lineaire matroïde M_G , dan zijn de onafhankelijke verzamelingen precies de deelverzamelingen van E die geen cykel bevatten — *de grafische matroïde* van G .

Merk op dat we bij de overgang van (E, V, φ) naar $\mathcal{I}$ informatie verliezen over wat het lichaam K is en hoe de vectoren $\varphi(e)$ in de ruimte V liggen; in het algemeen kan een matroïde dan ook meerdere, onderling niet isomorfe, realisaties als lineaire matroïde hebben. Omgekeerd zijn er ook matroïden die helemaal geen lineaire realisaties hebben — het wordt zelfs vermoed dat de lineair realiseerbaar matroïden een voor $|E| \rightarrow \infty$ naar nul convergerende fractie van alle matroïden vormen.

In een algemene matroïde definiëren we de *rang* $r(S)$ van een deelverzameling $S \subseteq E$ als de maximale kardinaliteit $|T|$ van een deelverzameling $T \subseteq S$ die bovendien in $\mathcal{I}$ zit. Verder heet $d := r(E)$ de rang van M . Nu heeft ook M een chromatisch polynoom gedefinieerd door

$$\chi_M(q) = \sum_{S \subseteq E} (-1)^{|S|} q^{d-r(S)}.$$

Als M van een lineaire matroïde (E, V, φ) afkomt, dan is dit hetzelfde chromatisch polynoom als voorheen, behalve dat $n = \dim V$ groter zou kunnen zijn dan $\dim \langle \varphi(E) \rangle = d$. Dus om ze echt aan elkaar gelijk te krijgen, moet ons laatste chromatisch polynoom nog met q^{n-d} vermenigvuldigd worden. Het vermoeden van Heron–Rota–Welsh luidt nu:

Vermoeden. Als $c_0 q^d + c_1 q^{d-1} + \dots + c_d$ het chromatisch polynoom van een algemene matroïde is, dan geldt voor alle $i = 1, \dots, d-1$ de ongelijkheid $|c_i|^2 \geq |c_{i-1}| |c_{i+1}|$.

Huhs eerste artikel

Als beginnende promovendus in Michigan bewees Huh de volgende stelling [4], die zoals we gezien hebben het vermoeden van Read impliceert.

Stelling. Het Heron–Rota–Welsh-vermoeden is waar voor lineaire matroïden over een lichaam van karakteristiek nul.

In zijn voordracht merkt Huh droogjes op dat hij destijds heel veel geluk had: hij had één wiskundig artikel gelezen, namelijk van Bernard Teissier [8], waarin een ongelijkheid van de vorm

$$|\mu_i|^2 \leq |\mu_{i-1}| |\mu_{i+1}|$$

voor zogenaamde *gemengde multipliciteiten* voorkwam; en hij kende één interessant open probleem, namelijk het vermoeden van Rota. Hij vergat voor het gemak dat beide ongelijkheden verschillende kanten op gaan, en dacht erover om Teissiers resultaat toe te passen op Rota's vermoeden. En inderdaad bleek er bij nadere beschouwing een 'globale' variant van Teissiers stelling te zijn, met de ongelijkheid in de juiste richting, die van toepassing was.

Een eerste, eenvoudige stap is dat het lichaam zonder verlies van algemeenheid $\mathbb{C}$ is: om $\varphi: E \rightarrow K^n$ te beschrijven zijn maar eindig veel getallen in K nodig, en elke eindig voortgebrachte lichaamsuitbreiding van $\mathbb{Q}$ is in te bedden in $\mathbb{C}$. De stelling die Huh nu toepaste behelst irreducibele algebraïsche deelvariëteiten X van een product $\mathbb{P}^m \times \mathbb{P}^n$ van complexe projectieve ruimtes. Neem aan dat X dimensie d heeft, en construeer bij X als volgt een rijtje getallen $m_0, m_1, \dots$, de *multi-grad* van X geheten: neem een voldoende algemene lineaire deelruimte $L \subseteq \mathbb{P}^m$ van dimensie i en een voldoende algemene lineaire deelruimte $L' \subseteq \mathbb{P}^n$ van dimensie $m+n-d-i$. (Als $i > m$ of $m+n-d-i < 0$ of $m+n-d-i > n$, dan

is $m_i = 0$.) Nu heeft het product $L \times L'$ dimensie $m+n-d$, precies de codimensie van X . Omdat L, L' algemeen genoeg zijn, snijdt dat product X in een eindig aantal punten. Noem dat aantal m_i — het hangt, weer vanwege de algemene ligging van L en L' , niet van die twee ruimtes af. Nu geldt de volgende stelling van Khovanskii en Teissier; zie bijvoorbeeld [5, Example 1.6.4] voor een algemenere bewering.

Stelling. Als $X \subseteq \mathbb{P}^m \times \mathbb{P}^n$ een irreducibele deelvariëteit is, dan geldt voor alle $i \geq 1$ de ongelijkheid $m_i^2 \geq m_{i-1} m_{i+1}$.

Uit een lineaire matroïde $M = (E, V, \varphi)$ over $\mathbb{C}$ met $n = \dim V$ construeert Huh een irreducibele, $(n-1)$ -dimensionale deelvariëteit X van het product $\mathbb{P}V^* \times \mathbb{P}V$, met V^* de duale ruimte van V : zij h de functie $V^* \rightarrow \mathbb{C}$ gedefinieerd door $h(x) := \prod_{e \in E} x(\varphi(e))$. Dit is een homogene polynomiale functie op V^* van graad $|E|$. In elk punt $x \in V^*$ is de afgeleide $d_x h$ een lineaire afbeelding $V^* \rightarrow \mathbb{C}$, dus een element van V . De afbeelding $\nabla h: V^* \rightarrow V$, $(\nabla h)(x) := d_x h$ de gradiënt van h , is een homogene polynomiale afbeelding van graad $|E|-1$. Als zodanig definieert ∇h een rationale afbeelding $\mathbb{P}V^* \dashrightarrow \mathbb{P}V$.

Stelling. Zij $\Gamma_h \subseteq \mathbb{P}V^* \times \mathbb{P}V$ de afsluiting van de grafiek van de rationale functie ∇h , en zij $m_0, \dots, m_{n-1}$ de multigrad van de irreducibele variëteit Γ_h . Dan geldt $\chi_M(q) = (q-1)(m_0 q^{n-1} - m_1 q^{n-2} + \dots + (-1)^{n-1} m_{n-1} q^0)$.

In het bewijs van deze stelling gebruikt Huh topologische argumenten, en dus dat we over $\mathbb{C}$ werken. Uit de log-concaafheid van $m_0, \dots, m_{n-1}$ volgt nu, met behulp van deze stelling, eenvoudig de log-concaafheid van de coëfficiënten van $\chi_M(q)$.

Voorbeeld. Neem $V = \mathbb{C}^3$ en identificeer V^* met $\mathbb{C}^3$ via de gewone symmetrische bilineaire vorm. Neem $E = \{1, 2, 3\}$ en $\varphi(i) = e_i$. Dan is h het polynoom xyz , en de gradiënt als rationale afbeelding is $(\nabla h)(x:y:z) = (yz:zx:xy)$. Om m_0 van Γ_h uit te rekenen, snijden we de tweedimensionale variëteit $\Gamma_h \subseteq \mathbb{P}^2 \times \mathbb{P}^2$ met een tweedimensionaal oppervlak van de vorm $\{(r:s:t)\} \times \mathbb{P}^2$. Voor $(r:s:t)$ algemeen genoeg is het enige punt in de doorsnede $((r:s:t), (st:rt:rs))$, dus $m_0 = 1$. Om m_1 uit te rekenen, snijden we Γ_h met het product



Karim Adiprasito

Foto: Archives of the Mathematisches Forschungsinstitut Oberwolfach

van twee lijnen, zeg met vergelijkingen $L: ax + by + cz = 0$ en $L': a'x + b'y + c'z = 0$, respectievelijk. De doorsnede is dan de oplossingsverzameling van de vergelijkingen

$$ax + by + cz = 0$$

en

$$a'yz + b'xz + c'xy = 0.$$

Een doorsnede dus van een lijn met een kegelsnede, bestaande uit $m_1 = 2$ punten. Tenslotte is m_2 , de doorsnede van Γ_h met $\mathbb{P}^2$ maal een punt, niets anders dan de graad van de rationale afbeelding ∇h . Die blijkt gelijk aan 1. De stelling zegt dus dat

$$\begin{aligned}\chi_M(q) &= (q-1)(q^2 - 2q + 1) \\ &= q^3 - 3q^2 + 3q - 1.\end{aligned}$$

De matroïde M is in dit geval isomorf met de lineaire matroïde M_{P_4} behorende bij het pad P_4 , behalve dat in die matroïde de omhullende vectorruimte 4-dimensionaal is. En inderdaad, we vinden

$$q\chi_M(q) = \chi_{P_4}(q).$$

Adiprasito–Huh–Katz' resultaat

“Mooi,” aldus Huh, “daarmee had ik dus het vermoeden van Rota voor (waarschijnlijk) nul procent van alle matroïden bewezen.” Overigens was dit resultaat, en het onderzoek dat eraan voorafging onder aanmoediging van de Japanse wiskundige Heisuke Hironaka, een keerpunt in Huhs loopbaan. Na een studie wiskunde probeerde Huh aanvankelijk van zijn gedichten te leven, maar dat lukte nauwelijks. Toen hij besloot om dan maar wetenschaps-



Eric Katz

journalist te worden, kwam hij in contact met Hironaka, die hem het oude werk van Teissier te lezen gaf. “Achteraf ben ik heel blij dat ik mijn gedichten niet gepubliceerd kreeg”, zegt Huh als ik hem later spreek.

In samenwerking met Katz bewees Huh een generalisatie naar lineaire matroïden in positieve karakteristiek [4] — nog steeds nul procent. Dus gingen Adiprasito, Huh en Katz op zoek naar de dieperliggende oorzaken voor de ongelijkheid uit de stelling van Khovanskii–Teissier over multigraden. In het geval dat X een glad oppervlak is, is die ongelijkheid een gevolg van de klassieke indexstelling van Hodge. En ook in hoger-dimensionale gevallen volgt die ongelijkheid uit het definitief zijn van (een bepaalde restrictie van) een intersectie-pairing op de cohomologiering van X . In hun nieuwste werk definiëren ze daarom, uitgaande van een algemene matroïde, een

commutatieve algebra die zich gedraagt als de cohomologiering van een variëteit, maar nu van dimensie gelijk aan d , de rang van de matroïde. Daarvoor bewijzen ze analoga van de *Hard Lefschetz Theorem* en de stelling van *Riemann–Hodge*, op puur combinatorische wijze, waarvan de log-concaafheid een gevolg is. Dat doen ze door die stellingen eerst te bewijzen voor heel specifieke matroïden: de uniforme matroïde van rang d op N elementen, waarin elke deelverzameling ter grootte d onafhankelijk is. Vervolgens tonen ze aan dat die stellingen bewaard blijven onder zogenaamde *flips* waarmee vanuit de uniforme matroïde alle matroïden van rang d op N elementen kunnen worden bereikt.

Een belangrijke subtiliteit is dat door die flips onderweg de verzameling van matroïden *verlaten* wordt, en dat de cohomologieringen dan horen bij d -dimensionale *tropische variëteiten* die niet afkomstig zijn van d -dimensionale klassieke variëteiten. Het nieuwe bewijs, met de omweg langs puur tropische objecten, is prachtige reclame voor de tropische meetkunde, een gebied waarover ik later in het NAW hoop te berichten. Het artikel van Adiprasito–Huh–Katz is net uit [9], en slides van Huhs uitstekende voordracht zijn te vinden op: <https://indico.math.cnrs.fr/event/202/speakers>. ←

‘De oplossing’ is een rubriek over onlangs opgeloste vermoedens in de wiskunde die een raakvlak hebben met de Nederlandse wiskundepraktijk. Is er in uw onderzoeksgebied een belangrijke doorbraak te melden? Laat het ons weten: redactie@nieuwarchief.nl.

Referenties

- 1 Karim Adiprasito, June Huh en Eric Katz, Hodge theory for combinatorial geometries, preprint, arXiv:1511.02888.
- 2 George D. Birkhoff, A determinant formula for the number of ways of coloring a map, *Ann. Math. (2)* 14 (1912), 42–46.
- 3 A.P. Heron, Matroid polynomials, in D.J.A. Welsh en D.R. Woodall, red., *Combinatorics*, Institute of Mathematics and its Applications, Southend-on-Sea, 1972, pp. 164–202.
- 4 June Huh, Milnor numbers of projective hypersurfaces and the chromatic polynomial of graphs, *J. Am. Math. Soc.* 25(3) (2012), 907–927.
- 5 Robert Lazarsfeld, *Positivity in algebraic geometry I: Classical setting: Line bundles and linear series*, Springer, Berlin, 2004.
- 6 Ronald C. Read, An introduction to chromatic polynomials, *J. Comb. Theory* 4 (1967), 52–71.
- 7 Gian-Carlo Rota, Combinatorial theory, old and new, in *Actes Congr. internat. Math.* 1970, Vol. 3, 1971, pp. 229–233.
- 8 Bernard Teissier, Cycles evanescents, sections planes et conditions de Whitney, *Astérisque* 7-8 (1974), 285–362.
- 9 Dominic J.A. Welsh, *Matroid Theory*, L.M.S. Monographs, Vol. 8, Academic Press, 1976.

Jan van de Craats

Korteweg-de Vries Instituut
Universiteit van Amsterdam
j.vandecraats@uva.nl

Onderzoek

Feuerbach met complexe getallen

Het is welbekend dat voor elke driehoek de middens van de drie zijden, de voetpunten van de drie hoogtelijnen en de middens van de verbindingslijnstukken van het hoogtepunt met de drie hoekpunten op één cirkel liggen, de zogenaamde negenpuntscirkel. In 1822 bewees Karl Wilhelm Feuerbach dat deze cirkel raakt aan de ingeschreven en de drie aangescreven cirkels van de driehoek. Een bijzonder elegant bewijs hiervan met behulp van complexe getallen is te vinden in het boek *Inversive Geometry* uit 1933 van Frank Morley en zijn zoon Frank Vigor Morley. In dit artikel geeft Jan van de Craats een bewijs dat op hun ideeën gebaseerd is. Frank Morley senior is overigens vooral bekend geworden doordat hij rond 1900 de naar hem genoemde *trisectricestelling* vond: in een driehoek snijden bepaalde trisectrices elkaar paarsgewijs in de hoekpunten van een gelijkzijdige driehoek.

Eerst laat ik met behulp van complexe getallen zien dat de negen genoemde bijzondere punten van een driehoek inderdaad op één cirkel liggen.

De negenpuntscirkel

Laat gegeven zijn een driehoek met hoekpunten z_1 , z_2 en z_3 , en neem aan dat de omgeschreven cirkel ervan samenvalt met de eenheidscirkel in het complexe vlak. Het middelpunt van de omgeschreven cirkel is dus het complexe getal 0. Definieer

$$h = z_1 + z_2 + z_3,$$

$$n = \frac{1}{2}(z_1 + z_2 + z_3),$$

$$c = \frac{1}{3}(z_1 + z_2 + z_3).$$

Deze punten liggen met 0 op één lijn, de zogenaamde *rechte van Euler*, en wel zo-

danig dat de punten c en n het lijnstuk $0h$ verdelen in de verhouding 2:1:3. Verder gelden de volgende drie stellingen:

1. c is het zwaartepunt van de driehoek en c verdeelt elke zwaartelijn in de verhouding 2:1.
2. h is het hoogtepunt van de driehoek.
3. n is het middelpunt van de negenpuntscirkel, de cirkel die gaat door de middens van de zijden, de voetpunten van de hoogtelijnen en de middens van de lijnstukken die de hoekpunten verbinden met het hoogtepunt.

Bewijs: 1. Zie Figuur 1. Omdat

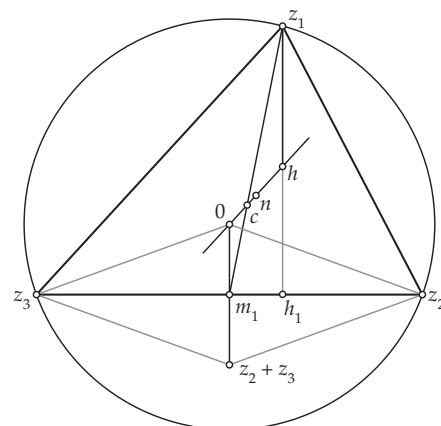
$$c = \frac{1}{3}(z_1 + z_2 + z_3) = \frac{1}{3}z_1 + \frac{2}{3}\left(\frac{1}{2}(z_2 + z_3)\right)$$

ligt c op de zwaartelijn van z_1 naar het midden $m_1 = \frac{1}{2}(z_2 + z_3)$ van zijde z_2z_3 , en

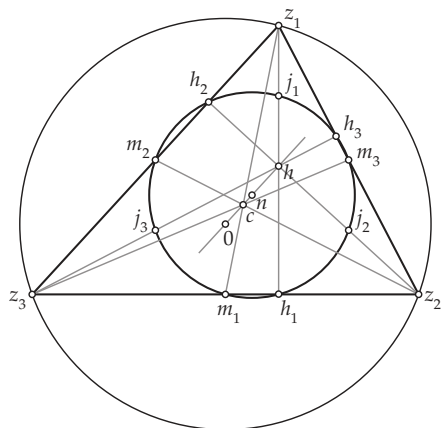
verdeelt c die zwaartelijn in de verhouding 2:1. Evenzo voor de andere zwaartelijnen.

2. Zie Figuur 1. Uit $h - z_1 = z_2 + z_3$ volgt dat de vector van z_1 naar h loodrecht staat op de zijde z_2z_3 . Het punt h ligt dus op de hoogtelijn uit z_1 , en evenzo op de hoogtelijnen uit z_2 en z_3 .

3. Zie Figuur 2. De puntvermenigvuldiging vanuit c met een factor $-\frac{1}{2}$ voert de hoekpunten van de driehoek over in de middens m_1 , m_2 en m_3 van de zijden, en de eenheidscirkel in de cirkel met middelpunt n en straal $\frac{1}{2}$.



Figuur 1 De rechte van Euler.



Figuur 2 De negenpuntscirkel en de rechte van Euler.

De puntvermenigvuldiging vanuit h met een factor $\frac{1}{2}$ voert de hoekpunten van de driehoek over in de aangegeven punten j_1, j_2 en j_3 en de eenheidscirkel weer in de cirkel met middelpunt n en straal $\frac{1}{2}$.

De opeenvolging van de puntvermenigvuldiging vanuit h met een factor 2 en de puntvermenigvuldiging met factor $-\frac{1}{2}$ vanuit c is een puntvermenigvuldiging met factor -1 , en dus een puntspiegeling. Het punt n gaat daarbij via 0 in zichzelf over, dus n is het centrum van die puntspiegeling. Verder gaat elk punt j_i via z_i over in m_i . De punten j_i en m_i zijn dus diametraalpunten op de negenpuntscirkel, en bijgevolg liggen ook de voetpunten h_i op die cirkel (stelling van Thales).

De stelling van Feuerbach

Voor het bewijs van de stelling van Feuerbach neem ik niet de omgeschreven cirkel van de driehoek als eenheidscirkel in het complexe vlak, maar een van de in- en aangeschreven cirkels. De (eventueel verlengde) zijden van de driehoek zijn nu dus raaklijnen aan de eenheidscirkel.

In het bewijs reserveer ik de letter d (van 'draaiing') voor complexe getallen op de eenheidscirkel. Er geldt dus altijd $d\bar{d} = 1$ oftewel $\bar{d} = 1/d$. Laat $z_1 z_2 z_3$ een driehoek zijn die de eenheidscirkel als ingeschreven of aangeschreven cirkel heeft. De raakpunten op de eenheidscirkel noem ik d_1, d_2 en d_3 , met d_1 op $z_2 z_3$, enzovoorts. Verdere notaties:

$$\begin{aligned}s_1 &= d_1 + d_2 + d_3 s_2, \\s_2 &= d_1 d_2 + d_2 d_3 + d_3 d_1 s_3, \\s_3 &= d_1 d_2 d_3.\end{aligned}$$

Merk op dat $\bar{s}_1 = s_2/s_3$ en $s_3 \bar{s}_3 = 1$. Het getal s_3 ligt dus ook op de eenheidscirkel. Zonder beperking van de algemeenheid stel ik

$$s_3 = 1$$

(deel anders alle d_i door eenzelfde derde-machtswortel uit s_3). Dan geldt dus $\bar{s}_1 = s_2$ en $\bar{s}_2 = s_1$.

Als z een punt is op een raaklijn aan de eenheidscirkel met raakpunt d , dan zijn de driehoeken $z0d$ en $z(2d)d$ elkaars spiegelbeeld in de raaklijn (zie Figuur 3), dus dan is

$$\frac{z-0}{d-0} = \frac{\overline{z-2d}}{\overline{d-2d}} = \frac{\bar{z}-2\bar{d}}{-\bar{d}},$$

oftewel

$$z + d^2 \bar{z} = 2d.$$

Het hoekpunt z_1 van de driehoek ligt op de zijden met raakpunten d_2 en d_3 (zie Figuur 4), dus

$$z_1 + d_2^2 \bar{z}_1 = 2d_2 \quad \text{en} \quad z_1 + d_3^2 \bar{z}_1 = 2d_3.$$

Aftrekken en delen door $d_2 - d_3$ geeft $(d_2 + d_3)\bar{z}_1 = 2$ dus

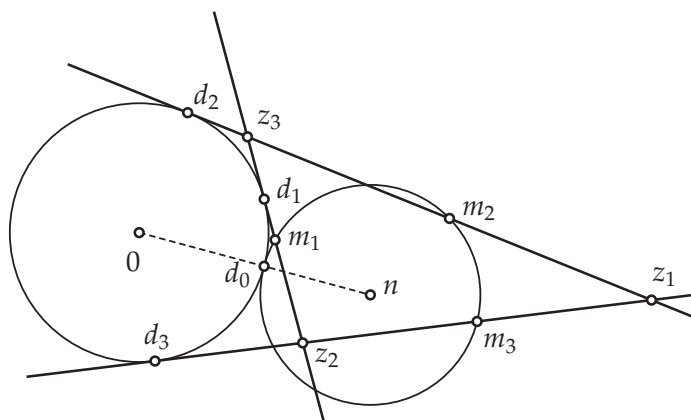
$$\bar{z}_1 = \frac{2}{d_2 + d_3} \quad \text{zodat} \quad z_1 = \frac{2d_2 d_3}{d_2 + d_3},$$

en analoog voor z_2 en z_3 . Het midden $m_1 = \frac{1}{2}(z_2 + z_3)$ van zijde $z_2 z_3$ voldoet dus aan

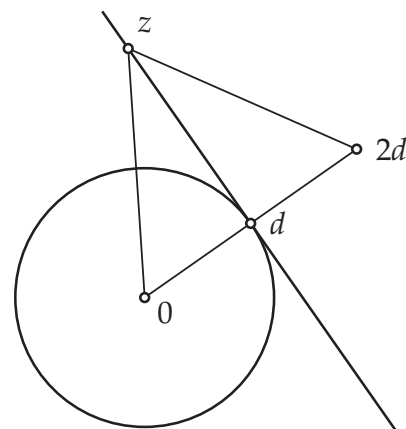
$$\begin{aligned}m_1 &= \frac{d_1 d_3}{d_1 + d_3} + \frac{d_2 d_1}{d_2 + d_1} = \frac{d_1 (s_2 + d_2 d_3)}{(d_1 + d_3)(d_1 + d_2)} \\&= \frac{(s_2 + d_2 d_3)(d_1 d_2 + d_1 d_3)}{(d_1 + d_3)(d_1 + d_2)(d_2 + d_3)} \\&= \frac{(s_2 + d_2 d_3)(s_2 - d_2 d_3)}{(s_1 - d_2)(s_1 - d_3)(s_1 - d_1)} \\&= \frac{s_2^2 - (d_2 d_3)^2}{s_1 s_2 - s_3} = \frac{\bar{s}_1^2 - \bar{d}_1^2}{s_1 \bar{s}_1 - 1}\end{aligned}$$

(hierbij is in de laatste stap gebruikt dat $s_3 = 1$ en $\bar{s}_1 = s_2$). Evenzo geldt

$$m_2 = \frac{\bar{s}_1^2 - \bar{d}_2^2}{s_1 \bar{s}_1 - 1} \quad \text{en} \quad m_3 = \frac{\bar{s}_1^2 - \bar{d}_3^2}{s_1 \bar{s}_1 - 1}.$$



Figuur 4 De negenpuntscirkel raakt de eenheidscirkel.



Figuur 3 De raaklijn aan de eenheidscirkel in d .

Als d de eenheidscirkel doorloopt, dan doorloopt

$$z = \frac{1}{s_1 \bar{s}_1 - 1} (\bar{s}_1^2 - d)$$

een cirkel met middelpunt

$$n = \frac{\bar{s}_1^2}{s_1 \bar{s}_1 - 1}.$$

Voor $d = \bar{d}_1^2$, $d = \bar{d}_3^2$ geeft dit respectievelijk m_1, m_2 en m_3 . Het is dus de negenpuntscirkel van driehoek $z_1 z_2 z_3$. Kies nu $d = d_0 = \bar{s}_1/s_1$ (dit is een punt op de eenheidscirkel), dan blijkt dit punt ook op de negenpuntscirkel te liggen want

$$\frac{1}{s_1 \bar{s}_1 - 1} (\bar{s}_1^2 - \frac{\bar{s}_1}{s_1}) = \frac{\bar{s}_1 (s_1 \bar{s}_1 - 1)}{(s_1 \bar{s}_1 - 1) s_1} = \frac{\bar{s}_1}{s_1} = d_0.$$

Bovendien geldt

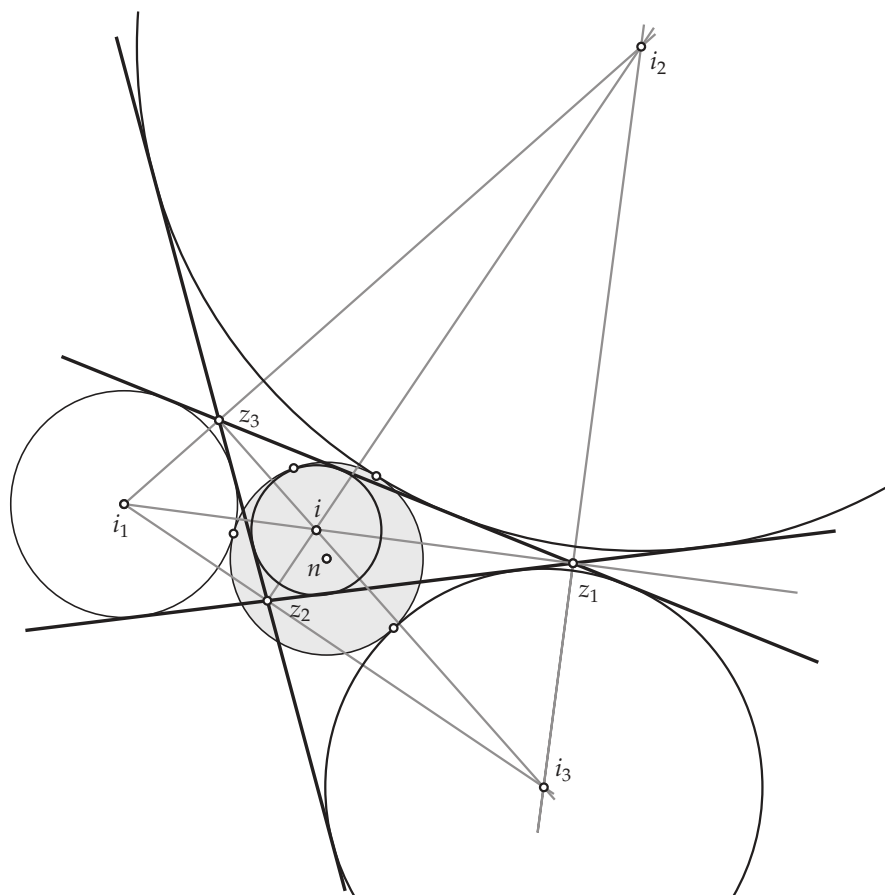
$$d_0 = \frac{\bar{s}_1}{s_1} = \frac{\bar{s}_1^2}{s_1 \bar{s}_1} = \frac{\bar{s}_1 s_1 - 1}{s_1 \bar{s}_1} n.$$

d_0 is dus een *reëel* veelvoud van n , met andere woorden, n, d_0 en 0 liggen op één lijn. Dat betekent dat de negenpuntscirkel en de eenheidscirkel elkaar in d_0 raken (zie Figuur 4). Hiermee is bewezen:

Stelling (K.W. Feuerbach). *De negenpunts-cirkel van een driehoek raakt de ingeschreven cirkel en de drie aangeschreven cirkels.*

In Figuur 5 zijn de middelpunten van de in- en aangeschreven cirkels aangegeven met i , i_1 , i_2 en i_3 . Ze liggen op de binnen- en buitenbissectrices van driehoek $z_1z_2z_3$. Omdat de binnenbissectrice en de buitenbissectrice van een hoek elkaar loodrecht snijden, vormen i , i_1 , i_2 en i_3 een *orthogonaal viertal*, dat wil zeggen dat elk punt het hoogtepunt is van de driehoek van de andere drie. De verbindingslijnen van het middelpunt n van de negenpunts-cirkel met die vier punten gaan door de raakpunten van de negenpunts-cirkel met de ingeschreven en aangeschreven cirkels (zie ook Figuur 4). Daarmee is, dankzij Feuerbach, het aantal bijzondere punten op de negenpunts-cirkel van een driehoek toegenomen van negen naar dertien!

Opmerking: Het bewijs van vader en zoon Morley staat op bladzijde 191 van hun boek *Inversive Geometry* uit 1933, dat onlangs opnieuw uitgebracht is in de serie Dover Books on Mathematics. Morley's stelling over trisectrices wordt daarin behandeld op bladzijde 244.



Figuur 5 De stelling van Feuerbach.

Gert Heckman

IMAPP

Radboud University Nijmegen

g.heckman@math.ru.nl

Book Review Michèle Audin: Remembering Sofya Kovalevskaya

A great role model

Sofya Kovalevskaya (Sophie Kowalevski), who lived in the nineteenth century, was the first major Russian female mathematician. Gert Heckman describes the life of this interesting woman and reviews the biography by Michèle Audin. This review was submitted a while ago, but not yet published due to an editorial mistake.

Sophie Kowalevski was born in 1850 in an aristocratic family in Moscow as Sophia Vasilevna Krukovski. Her name has about 25 different spellings, and the reviewer will stick to the one she used herself in her rigid body paper. Her first interest in real mathematics might have been aroused by the lecture notes of Ostrogradsky on calculus, bought by her father in his youth. By lack of enough wall paper for the country house the walls of her room were covered with these lecture notes, and as a child she used to spend hours before the mysterious wall trying to decipher the content of the incomprehensible formulae.

In 1868 she married Vladimir Kowalevski. The main purpose of this marriage was that it allowed her to go abroad and study mathematics, a thing that would have been utterly inappropriate for a single woman in those days. Sophie did her undergraduate work in Heidelberg, and in 1870 began her graduate study in Berlin with Karl Weierstraß. In 1874 her thesis passed *in absentia* in Göttingen, and she returned to Russia. The most important result of her thesis is the Cauchy–Kowalevski theorem on the uniqueness of the analytic Cauchy problem.

As a woman it was impossible for her to find a position, and she more or less abandoned mathematics for several years. In 1876 she met the four years older Gösta Mittag-Leffler, also a student of Weierstraß, and the two became close friends. She did some traveling and also visited mathematics conferences, but not to the extent she

would have liked. In 1878 her daughter Fufa was born. In 1883 Vladimir committed suicide, an act that led to the insight that “a very important obstacle in my eyes has disappeared” in a letter to Mittag-Leffler from Weierstraß.

In the next year Mittag-Leffler was able to arrange for Kowalevski a five years teaching position at the University of Stockholm. She became editor of *Acta Mathematica*, a prestigious journal founded two years before by Mittag-Leffler. Finally she was able to live the life as a professional mathematician. In 1889 she got a permanent position as full professor of mathematics in Stockholm to become the first female university professor in Europe. It is hard to overestimate the political skills and powers of Mittag-Leffler to establish such position for Kowalevski. About thirty years later the great David Hilbert was not able to repeat this move in Göttingen for Emmy Noether: “Gentlemen, I do not see that the sex of the candidate is an argument. After all, the senate is not a bathhouse.”

Sophie Kowalevski continued to work in Stockholm for two more years, and died in 1891 of pneumonia just 41 years old.

The Kowalevski top

In the Stockholm years she did her most important work on the ‘Kowalevski top’. The two classical integrable tops are the Euler top (no gravity) and the Lagrange top



Sophie Kowalevski

Photo: Wikimedia Commons

(symmetric top with center of gravity on the axis of symmetry), and she discovered an additional integrable top (symmetric top with $I_1 = I_2 = 2I_3$ for the principle moments of inertia and the center of gravity on the plane of symmetry). Her exact solution in terms of genus 2 theta functions is a tour de force. The work was highly appreciated at the time. She won the Prix Bordin, and because her contribution was found extraordinary the prize was elevated from 3000 to 5000 francs. Of course, all this must have helped Mittag-Leffler to create her position.

In 1905 Husson proved that the Euler, Lagrange and Kowalevski tops are the only three tops which are completely integrable with algebraic integrals. This result was extended by Ziglin in 1981 by replacing algebraic integrals by analytic integrals. These results are parallel to the results of Bruns and Poincaré that the three body problem has no more algebraic (Brun in 1887) or analytic (Poincaré in 1889) integrals than the usual ones, both results also published in *Acta Mathematica*. Notably, the work by Poincaré had a tremendous influence on the development of the qualitative theory of dynamical systems. The Kowalevski top was for many years the example par excellence of what exact solution could do. Integrable systems went into hibernation for a long period, and renewed interest only started in the nineteen sixties with the treatment by Peter Lax of the Korteweg–de Vries equation. Another highlight was the discovery of the Hitchin system as an outstanding example of an algebraically integrable system.

The book by Michèle Audin

The book by Audin is a pleasure to read. There are the many Kowalevski stories like the above wall paper story. There are two separate chapters on the Cauchy–Kowalevski theorem and the Kowalevski top. On the last topic Audin is a specialist and has written a textbook: *Spinning Tops. A Course on Integrable Systems* (Cambridge University Press). Audin clarifies the crucial role in the life of Kowalevski played by her companion Mittag-Leffler and her teacher Weierstraß.

Audin also discusses the opinions held by other mathematicians on the reputation of Kowalevski. First and foremost there is the not quite favorable opinion by Eric Temple Bell on Kowalevski in his *Men of Mathematics*, which is discussed and analyzed paragraph after paragraph in a full chapter. In the next chapter, entitled ‘I too remember Sofya’, we can read opinions of many mathematicians on Kowalevski, most for the good, but some for the bad. Examples of the latter are Lars Gårding and Lars Hörmander, who opposed the idea that *Acta Mathematica* should commemorate in 1984 the fact the Kowalevski started her teaching position as first female professor in Europe a century ago. Their argument for rejection was that in that same year 1884 Kowalevski had written a paper on wave propagation in crystals that turned out to be wrong. Mistakes are not allowed, period.

It is clear that Audin has a passionate stand on the case of Kowalevski. Sophie is her great hero. Still now in 2016 the reviewer is working at a mathematics depart-

ment without women on its faculty, and we are in this respect a representative of the other mathematics faculties in the Netherlands. This is a missed opportunity. At this moment our female students perform on the average better than their male fellows. It is to be hoped that some day women and men alike enter university faculties of mathematics. Until that day Sophie Kowalevski, as well as Emmy Noether or Maryam Mirzakhani and others, remain the great role models! ❦



Michèle Audin, *Remembering Sofya Kovalevskaya*, Springer, London, 2011, 284 p., ISBN 9780857299291, € 39.95.

Klaas Landsman

IMAPP
Radboud Universiteit Nijmegen
landsman@math.ru.nl

Marco Stevens

Departement Wiskunde
KU Leuven
marco.stevens@wis.kuleuven.be

Research

The Kadison–Singer conjecture

Partly inspired by quantum mechanics, in 1959 Richard Kadison and Isadore Singer studied the possible uniqueness of extensions of certain functionals (i.e. pure states) on commutative operator algebras on Hilbert space. This hinges on two key examples: for the first they proved lack of uniqueness, but for the second they left the question open (“We incline to the view that such extension is non-unique”). This problem was subsequently related to various other areas of mathematics, such as linear algebra and probability theory. In 2013 Adam Marcus, Daniel Spielman and Nikhil Srivastava finally proved that the answer for the open case was actually positive, for which they received the 2014 Pólya Prize. In this article, Klaas Landsman and Marco Stevens discuss the conjecture (and its proof) in the light of a more general question that Kadison and Singer had in mind.

Linear algebra and convexity

The Kadison–Singer conjecture is concerned with infinite-dimensional Hilbert spaces H , but the underlying situation is already interesting in finite dimension. Hence we start with the Hilbert space

$$H = \mathbb{C}^n,$$

with standard inner product

$$\langle w, z \rangle = \sum_{i=1}^n \overline{w_i} z_i,$$

which we evidently take to be linear in the *second* entry. For the moment we identify operators with matrices [1].

Let $M_n(\mathbb{C})$ be the complex $n \times n$ matrices, regarded as an algebra (which we always assume to be *complex* and *associative*) with *involution*, namely the operation $a \mapsto a^*$ of hermitian conjugation. Abstractly, an *involution* on an algebra A is an anti-linear anti-homomorphism $*$: $A \rightarrow A$, so if we write $*(a) = a^*$, then for all $a, b \in A$ and $\lambda \in \mathbb{C}$ we have

$$\begin{aligned} (\lambda a + b)^* &= \overline{\lambda} a^* + b^*; \\ (ab)^* &= b^* a^*. \end{aligned}$$

Note that $M_n(\mathbb{C})$ has a unit, viz. the unit matrix 1_n . An algebra with involution (and unit) is called a (unital) **-algebra*. Beside $M_n(\mathbb{C})$, another unital **-algebra* of inter-

est to us is $D_n(\mathbb{C})$, i.e., the subalgebra of $M_n(\mathbb{C})$ consisting of all diagonal matrices, with the involution $*$ inherited from $M_n(\mathbb{C})$.

In connection with the Kadison–Singer conjecture, the following concept is crucial. A *state* on a unital **-algebra* A (with unit 1_A) is a linear map

$$\omega : A \rightarrow \mathbb{C}$$

that satisfies

$$\begin{aligned} \omega(1_A) &= 1; \\ \omega(a^* a) &\geq 0, \text{ for all } a \in A. \end{aligned}$$

Inspired by quantum mechanics, this concept was introduced by John von Neumann [18], albeit in the special case where A is the unital **-algebra* $B(H)$ of all bounded operators on some Hilbert space H (see below). The general notion of a state in the above sense is due to Gelfand and Naimark [10] and Segal [21]. The states on A form a convex set $S(A)$, whose extremal points are called *pure states*. That is, ω is pure iff any decomposition

$$\omega = t\omega' + (1-t)\omega''$$

for $\omega', \omega'' \in S(A)$ and $t \in (0, 1)$ is necessarily trivial, in that $\omega' = \omega'' = \omega$. States that are not pure are *mixed*.

Von Neumann also defined a *density matrix* as an hermitian matrix $\rho \in M_n(\mathbb{C})$ whose eigenvalues $\{\lambda_i\}_{i=1}^n$ are non-nega-

tive and sum to unity, or equivalently, as a positive (semi-definite) matrix (in that $\langle \psi, \rho \psi \rangle \geq 0$ for each $\psi \in \mathbb{C}^n$) with unit trace. The point, then, is, that states on $M_n(\mathbb{C})$ bijectively correspond to density matrices through

$$\omega(a) = \text{Tr}(\rho a). \quad (1)$$

Upon the identification (1), pure states correspond to one-dimensional projections [2] $|\psi\rangle\langle\psi|$, i.e., ω is pure iff

$$\omega(a) = \langle \psi, a \psi \rangle \quad (2)$$

for some unit vector $\psi \in \mathbb{C}^n$.

The states on $A = D_n(\mathbb{C})$ are similarly easy to describe. The positive elements of $D_n(\mathbb{C})$ (i.e. those elements of $D_n(\mathbb{C})$ that can be written as $a^* a$ for some $a \in D_n(\mathbb{C})$) are precisely the matrices with only non-negative real numbers on the diagonal. Since a state

$$\omega : D_n(\mathbb{C}) \rightarrow \mathbb{C}$$

is linear, it should take the form

$$\omega(a) = \sum_{i=1}^n p_i a_{ii}.$$

Since a state is also positive and unital, we know that

$$\begin{aligned} p_i &\geq 0 \text{ for all } i; \\ \sum_{i=1}^n p_i &= 1. \end{aligned}$$

In other words, the function

$$\begin{aligned} p : \{1, \dots, n\} &\rightarrow [0, 1]; \\ p(i) &= p_i, \end{aligned}$$

is a probability distribution. Clearly, the map $\omega \mapsto p$ is a bijection between $S(D_n(\mathbb{C}))$ and the set of probability distributions on $\{1, \dots, n\}$. This map is affine, in the sense that it preserves the convex structure. Hence we only need to deter-



Richard Kadison in 2011 at a workshop in Oberwolfach

mine the extreme points of the convex set of probability distributions to determine the pure states on $D_n(\mathbb{C})$. These extreme points are easily shown to be those probability distributions that satisfy $p_i = 1$ for some $i \in \{1, \dots, n\}$ and $p_j = 0$ for all other j . Hence the pure states on $D_n(\mathbb{C})$ are of the form

$$\omega_i(a) = a_{ii}.$$

All this may be neatly illustrated for $n = 2$, where the density matrices ρ on $\mathbb{C}^2$ are parametrized by the unit ball

$$B^3 = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x^2 + y^2 + z^2 \leq 1\},$$

in $\mathbb{R}^3$ according to

$$\rho(x, y, z) = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1+z & x+iy \\ x-iy & 1-z \end{pmatrix}.$$

This isomorphism

$$S(M_2(\mathbb{C})) \cong B^3$$

is affine (i.e., it preserves the convex structure), and indeed, the extremal points (x, y, z) form the two-sphere

$$S^2 = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x^2 + y^2 + z^2 = 1\}.$$

The corresponding density matrices satisfy $\rho^2 = \rho$ and hence (given that already $\rho^* = \rho$ and $\text{Tr}(\rho) = 1$) they are the one-dimensional projections on $\mathbb{C}^2$.

For the diagonal matrices we have

$$S(D_2(\mathbb{C})) \cong [0, 1],$$

since the pure states on $D_2(\mathbb{C})$ are the two points

$$\omega_i(a) = a_{ii}, \quad i = 1, 2.$$

The Kadison–Singer property

Having introduced the basic definitions, let us now streamline the world of the Kadison–Singer conjecture by introducing the Kadison–Singer *property* [22].

Let H be a Hilbert space and denote the $*$ -algebra of all bounded operators on H by $B(H)$, equipped with the adjoint as an involution, as above. In quantum mechanics one is particularly interested in *abelian* unital $*$ -algebras

$$A \subset B(H),$$

since these define ‘classical measurement contexts’ in the sense of Bohr [15]. Note that above we discussed the case $A = D_n(\mathbb{C})$, which is indeed abelian.

In Bohr’s ‘Copenhagen Interpretation’ of quantum mechanics, the outcome of any measurement must be recorded in the language of classical physics, which roughly speaking means that such an outcome (assumed sharp, i.e., dispersion-free) defines a pure state on some such A . The question, then, is whether such an outcome also fixes the state of the quantum system as a whole (assuming the latter is pure).

Mathematically, this means the following. Both A and $B(H)$ have states, and states on $B(H)$ obviously *restrict* to states on A . In the reverse direction, we can ask whether states on A *extend* to states on $B(H)$. It turns out that (due to the Hahn–Banach theorem of functional analysis [8]) they always do, but what is at stake is the question whether this extension is *unique*. As suggested above, this question is particularly interesting for *pure* states, and hence we say that A has the *Kadison–Singer property* iff each pure state on A extends *uniquely* to a state on $B(H)$. Simple arguments in convexity theory [13, 22] show that if the extension is unique, then it is necessarily pure, so that one might as well say that:

A has the Kadison–Singer property iff each pure state on A extends uniquely to a pure state on B(H).

Let us look at this property in a different way, initially for finite-dimensional Hilbert spaces H . Following Dirac, physicists typically write $|\lambda\rangle$ for a (unit) eigenvector of some hermitian operator a with eigenvalue λ . They understand that this fails to identify the corresponding vector state (2) unless a is *maximal* (in the sense of having

non-degenerate spectrum): indeed, if a is not maximal, then it has an eigenvalue λ having at least two orthogonal eigenvectors, which clearly define different vector states on $B(H)$. However, in the maximal case Dirac’s notation $|\lambda\rangle$ is used apparently without realizing that even in that case there might be an ambiguity; it was left to Kadison and Singer to note this [13].

Fortunately, if H is finite-dimensional, there is no problem.

Theorem 1. *For each $n \in \mathbb{N}$, the algebra $D_n(\mathbb{C}) \subset M_n(\mathbb{C})$ has the Kadison–Singer property.*

Proof. Consider the pure state ω_i on $D_n(\mathbb{C})$, where $i \in \{1, \dots, n\}$ is arbitrary. Then writing e_i for the i ’th basis vector of $\mathbb{C}^n$, we see that the functional

$$\begin{aligned} \mu : M_n(\mathbb{C}) &\rightarrow \mathbb{C}; \\ \mu(a) &= \langle e_i, ae_i \rangle = a_{ii}, \end{aligned}$$

is a pure state extension of ω . The only thing that is left to prove is that μ is the *unique* pure state extension of ω . So, suppose that $\mu' : M_n(\mathbb{C}) \rightarrow \mathbb{C}$ is also a pure state extension of ω . Then

$$\mu'(a) = \langle \psi, a\psi \rangle$$

for some unit vector $\psi \in \mathbb{C}^n$. Since μ' extends ω , we know that then

$$|\langle \psi, e_i \rangle|^2 = \mu'(|e_i\rangle\langle e_i|) = \omega(|e_i\rangle\langle e_i|) = 1,$$

whence $\psi = ze_i$ for some $z \in \mathbb{C}$ such that $|z| = 1$. Therefore,

$$\begin{aligned} \mu'(a) &= \langle \psi, a\psi \rangle \\ &= |z|^2 \langle e_i, ae_i \rangle \\ &= \mu(a) \end{aligned}$$

for each $a \in M_n(\mathbb{C})$, i.e. $\mu' = \mu$ and μ is the unique pure state extension of ω . $\square$

We say that a unital abelian $*$ -algebras $A \subset B(H)$ is *maximal* if there is no abelian unital $*$ -algebra $B \subset B(H)$ that *properly* contains A . If H is finite-dimensional, then the unital $*$ -algebra generated by $a = a^*$ and the unit is maximal abelian iff a is maximal as defined above.

Corollary 2. *Suppose H is a finite-dimensional Hilbert space and suppose that $A \subset B(H)$ is a maximal abelian unital $*$ -algebra. Then A has the Kadison–Singer property.*

Proof. The Kadison–Singer property is stable under unitary equivalence, in that for any unitary u (i.e. $uu^* = 1 = u^*u$), $A \subset B(H)$ has the said property iff $uAu^{-1} \subset B(H)$ has it. We show that

$$A = uD_n(\mathbb{C})u^*$$

for some unitary matrix u ; a unitary change of basis then reduces the argument to the previous case. Since A is maximal abelian, by spectral theory it is generated by n mutually orthogonal one-dimensional projections $f_i = |w_i\rangle\langle w_i|$, $i = 1, \dots, n$, where the w_i form an orthonormal basis. Putting the latter as columns in a matrix yields u . $\square$

Infinite-dimensional Hilbert space

After this warm-up we move to the actual setting of the Kadison–Singer conjecture, viz. an infinite-dimensional *separable* Hilbert space H (i.e., H has a *countable* orthonormal basis). All such spaces are (unitarily, or, equivalently, isometrically) isomorphic. For what follows, two key examples are the space

$$H = \ell^2(\mathbb{N}), \quad (3)$$

of all functions $\psi : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{C}$ for which

$$\sum_n |\psi(n)|^2 < \infty,$$

with inner product

$$\langle \varphi, \psi \rangle = \sum_n \overline{\varphi(n)} \psi(n),$$

and the space

$$H = L^2(0, 1) \quad (4)$$

consisting of all the measurable functions $\psi : (0, 1) \rightarrow \mathbb{C}$ (up to equivalence with respect to null sets) for which

$$\int_0^1 dx |\psi(x)|^2 < \infty,$$

with inner product given by

$$\langle \varphi, \psi \rangle = \int_0^1 dx \overline{\varphi(x)} \psi(x).$$

We now look at the unital $*$ -algebra $B(H)$ of all *bounded* operators on H . The infinite-dimensionality of H leads to a number of new phenomena:

- There exist states on $B(H)$ that are not given by (1).
- There exist unitarily *inequivalent* maximal abelian $*$ -algebras in $B(H)$.

In the first point we interpret (1) in the appropriate way, in that we replace density *matrices* by density *operators* [18], that is,

positive operators ρ for which

$$\sum_i \langle e_i, \rho e_i \rangle = 1$$

for some (and hence for any) basis (e_i) of H . Von Neumann showed that a state ω on $B(H)$ takes the form (1) iff

$$\omega\left(\sum_n f_n\right) = \omega(f_n)$$

for any countable family (f_n) of mutually orthogonal projections (this is similar to the countable additivity condition in the definition of a measure). Such states are called *normal*. The existence of non-normal states is the same as the existence of *singular* states: these are the states that vanish on all one-dimensional projections, and thereby on all compact operators. Trivially, singular states are not normal. In fact, any state is either normal, or singular, or it can be written as a convex combination of a normal and a singular state. This has the immediate corollary that every *pure* state is either normal or singular.

It is however a non-trivial matter to write down states on $B(H)$ that are not normal. Using the Hahn–Banach Theorem, it can be shown that for any $t \in [0, 1]$, there exists a (necessarily non-normal) state ω on $B(L^2(0, 1))$ such that $\omega(m_x) = t$, where m_x is the position operator of quantum mechanics, i.e., the multiplication operator on (4) given by

$$m_x \psi(x) = x \psi(x). \quad (5)$$

More generally, if some bounded operator $a \in B(H)$ has $\lambda \in \mathbb{C}$ in its continuous spectrum $\sigma_c(a)$ [3], then there exists a necessarily non-normal state ω on $B(H)$ such that $\omega(a) = \lambda$, see [12, Prop. 4.3.3].

The difference between normal states and singular states is very important for the Kadison–Singer property, so we say a little more about it. Let $A \subset B(H)$ be any unital $*$ -algebra (i.e., A is not necessarily abelian) that satisfies

$$A'' = A, \quad (6)$$

where the *commutant* S' of any subset $S \subset B(H)$ is defined by

$$S' = \{a \in B(H) \mid ab = ba, b \in S\},$$

and $S'' = (S')'$. By definition, this makes A a *von Neumann algebra*. For example, $B(H)$ is itself a von Neumann algebra, but



Isadore Singer in 2004 at the Abel Prize Ceremony

also, it is easy to see that if A is maximal abelian in $B(H)$, then it is a von Neumann algebra, too: commutativity gives $A \subseteq A'$, whilst maximality pushes this into an equality

$$A = A',$$

which implies (6).

Von Neumann algebras were initially called *rings of operators* by von Neumann himself, and historically their investigation by von Neumann and his assistant Francis Murray [19] launched the (now) vast area of *operator algebras*. Despite the tremendous prestige of von Neumann, initially few mathematicians recognized the importance of this development [4]; among them were Israel Gelfand and Mark Naimark, who created the theory of C^* -algebras [10] (which incorporate von Neumann algebras, see also [9, 11]), and also Kadison himself.

The deeper significance of the normality condition, then, was unearthed by Shōichirō Sakai [20], who proved that a unital $*$ -algebra $A \subseteq B(H)$ is a von Neumann algebra iff it is closed in the norm-topology inherited from $B(H)$ (i.e., A is a C^* -algebra) and is the dual of some Banach space. For example, $B(H)$ is the dual of $B_1(H)$, the space of trace-class operators on H equipped with its own intrinsic norm $\|a\|_1 = \text{Tr}|a|$, where $|a| = \sqrt{a^*a}$. This duality property endows A with a second intrinsic topology, viz. the pertinent weak*-topology, and a state $\omega : A \rightarrow \mathbb{C}$ (which is automatically norm-continuous) is normal iff it is weak*-continuous, too [5].

Classification of MASA's

We now turn to the second point, i.e., the existence of unitarily inequivalent maximal abelian unital $*$ -algebras $A \subset B(H)$, to be called *MASA's* from now on.

We start with some examples. First, for the Hilbert space (3) we have the *discrete subalgebra*

$$A_d = \ell^\infty(\mathbb{N}) \quad (7)$$

of all bounded functions $f: \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{C}$ (with pointwise multiplication), which acts on $\ell^2(\mathbb{N})$ by generalizing (5): $f \in \ell^\infty(\mathbb{N})$ defines a multiplication operator m_f by

$$m_f \psi(x) = f(x) \psi(x). \quad (8)$$

Second, for the Hilbert space (4) we have the *continuous subalgebra*

$$A_c = L^\infty(0,1) \quad (9)$$

of all essentially bounded measurable functions $f: (0,1) \rightarrow \mathbb{C}$ (with pointwise multiplication), acting as in (8). It is not difficult to show that [8]

$$\begin{aligned} \ell^\infty(\mathbb{N})' &= \ell^\infty(\mathbb{N}); \\ L^\infty(0,1)' &= L^\infty(0,1), \end{aligned}$$

so that both A_d and A_c are MASA's. In particular, they are von Neumann algebras. Indeed, in the light of Sakai's result just mentioned it is a standard result in functional analysis that [8]

$$\begin{aligned} \ell^\infty(\mathbb{N}) &\cong \ell^1(\mathbb{N})^*; \\ L^\infty(0,1) &\cong L^1(0,1)^*. \end{aligned}$$

In fact, these are essentially the only examples of MASA's on separable Hilbert spaces. An early result of von Neumann himself

was that any abelian von Neumann algebra on a separable Hilbert space is generated by a single self-adjoint operator [17], and this is the key to their classification [12, Thm. 9.4.1]:

Theorem 3. *If H is infinite-dimensional and separable, a maximal abelian $*$ -algebra $A \subset B(H)$ is unitarily equivalent to one of the following:*

- The discrete subalgebra A_d , cf. (7);
- The continuous subalgebra A_c , cf. (9);
- A direct sum $A_c \oplus A_d$;
- A direct sum $A_c \oplus D_n(\mathbb{C})$, where $n \in \mathbb{N}$.

The last two cases (or rather family of cases), realized on either the Hilbert space $L^2(0,1) \oplus \ell^2(\mathbb{N})$ or $L^2(0,1) \oplus \mathbb{C}^n$, are called *mixed subalgebras*.

The proof of this result relies on the notion of *minimal projections*. A projection p on a Hilbert space H is a linear operator satisfying $p^2 = p^* = p$; it is well known that such operators bijectively correspond to the closed linear subspaces pH of H that form their images. More generally, a projection in a C^* -algebra A is an element $p \in A$ that satisfies the same equalities. On the set $P(A)$ consisting of the projections in A , we can define a natural order, which coincides with the notion of positivity for A . For example, in the algebra $\ell^\infty(\mathbb{N})$, the projections are exactly the indicator functions 1_W of subsets $W \subseteq \mathbb{N}$ and $1_W \leq 1_Y$ if and only if $W \subseteq Y$. Of course, the zero-element of A is the minimal element of $P(A)$ with respect to this order, but we say a projection is a *minimal projection* if it

is a minimal element of the ordered set $P(A) \setminus \{0\}$. One can easily see that in the case of $\ell^\infty(\mathbb{N})$, the minimal projections are then exactly the indicator functions of single points. Furthermore, the whole algebra is generated by these indicator functions of single points. For the finite dimensional case, i.e. for $D_n(\mathbb{C})$ where $n \in \mathbb{N}$, this is exactly the same.

However, for the continuous subalgebra $L^\infty(0,1)$ the situation is different. Again, the projections are indicator functions, but since for any (measurable) set $A \subseteq [0,1]$ such that $\mu(A) > 0$ there is a $B \subseteq A$ such that $0 < \mu(B) < \mu(A)$, this algebra has no minimal projections and is therefore certainly not generated by them. A mixed subalgebra keeps the middle ground between the discrete and the continuous case: it does have minimal projections (coming from the discrete part), but is not generated by them.

Hence we see that the discrete, continuous and mixed cases can be distinguished by considering the number of minimal projections and the question whether the whole algebra is generated by these minimal projections. As it turns out, these two pieces of information classify all maximal abelian unital $*$ -algebras on separable Hilbert spaces: whenever such an algebra has the same properties as one of the three cases we discussed, it is unitarily equivalent to this case; see [12, 22] for details.

The Kadison–Singer conjecture

The real goal of the Kadison–Singer conjecture, to which we are now about to turn, is to give a classification of all abelian unital $*$ -algebras $A \subset B(H)$ that have the Kadison–Singer property, where H is a separable Hilbert space. Although we have seen that the finite-dimensional case is misleading as a model for the infinite-dimensional one in at least two ways, one fact remains:

Lemma 4. *Only MASA's can possibly have the Kadison–Singer property.*

Proof. We use some operator algebra theory. It is easy to show that states on unital $*$ -algebras A in $B(H)$ are continuous (i.e., bounded), so we may as well assume that A is closed in the operator norm (in which case it is a so-called C^* -algebra). Since A is also abelian, the pure state space $\partial_e S(A)$ coincides with the Gelfand spectrum $\Omega(A)$ of A , i.e., the set of all nonzero multi-



Nikhil Srivastava, Adam Marcus and Daniel Spielman

plicative linear functionals on A . This is a compact Hausdorff space too (again in the weak*-topology on the dual space A^*). Gelfand and Naimark proved that A is isomorphic (as a C^* -algebra) to the algebra $C(\Omega(A))$ of complex-valued continuous functions on $\Omega(A)$, so that

$$A \cong C(\partial_e S(A))$$

for any abelian C^* -algebra A .

Now suppose that $A_1 \subseteq A_2 \subset B(H)$, where A_1 and A_2 are abelian C^* -algebras and A_1 has the Kadison–Singer property. Then any pure state ω_1 on A_1 extends uniquely to a pure state ω on $B(H)$, which in turn restricts to a pure state ω_2 on A_2 . The map $\omega_1 \mapsto \omega_2$ from $\partial_e S(A_1)$ to $\partial_e S(A_2)$ is then a continuous isomorphism, since its inverse is given by restriction from A_2 to A_1 . Hence this isomorphism induces an isomorphism between $C(\partial_e S(A_1))$ and $C(\partial_e S(A_2))$, i.e. between A_1 and A_2 , which can easily be shown to be the inclusion function $A_1 \hookrightarrow A_2$. Hence $A_1 = A_2$, so that any C^* -subalgebra with the Kadison–Singer property must be maximal. $\square$

Recall that the Kadison–Singer property is stable under unitary equivalence. In view of the above lemma, in order to complete the classification of abelian C^* -algebras $A \subset B(H)$ having the Kadison–Singer property (where H is a separable Hilbert space) we only need to answer the question whether the discrete, continuous and mixed subalgebras have the Kadison–Singer property. Note that we have already answered the question positively for the discrete algebra $D_n(\mathbb{C})$ whenever $n \in \mathbb{N}$. However, the other cases, including the infinite discrete case A_d , need a more careful analysis. The main reason for this is that although it is hard to prove whether arbitrary pure states have a unique extension, it is fairly easy to prove the following result.

Proposition 5. *Let $A \subset B(H)$ be a MASA (and hence a von Neumann algebra). Then any normal pure state on A has a unique extension to $B(H)$.*

Using density operators, this can be proved as in the finite-dimensional case. It follows that in looking for possible pure states on A without unique extensions to $B(H)$, one necessarily enters the realm of singular states. As we noted, these are

hard to grasp, and having already encountered the Hahn–Banach theorem in this context, it may not be surprising that the world of ultrafilters and the like plays a role in the analysis of the Kadison–Singer property. Furthermore, we are not able to treat the singular states on two different MASA's in the same way: each MASA needs a different approach.

Let us start with the continuous case. Kadison and Singer already proved in their original article from 1959 that the continuous subalgebra does not have the Kadison–Singer property. Twenty years later, in 1979, Joel Anderson [6] gave a more straightforward proof of the same fact, and also improved upon it. He proved that there is no pure state on the continuous subalgebra (9) at all that extends in a unique way to a (pure) state on $B(L^2(0,1))$, which is definitely stronger than the negation of having the Kadison–Singer property. Anderson used the Stone–Čech compactification of $\mathbb{N}$ (realized via ultrafilters) in order to be able to describe all pure states on A_c . A careful and tricky argument then gave the desired result (see also [22]).

It is easy to show that if a direct sum of algebras has the Kadison–Singer property, that then all summands must have the Kadison–Singer property too. Hence the fact that the continuous subalgebra does not have the Kadison–Singer property has the immediate corollary that no mixed subalgebra has the Kadison–Singer property. Therefore, if any MASA on a separable Hilbert space has the Kadison–Singer property, it must be unitarily equivalent to the discrete subalgebra A_d (or, if $\dim(H) = n < \infty$, to $D_n(\mathbb{C})$). Thus Kadison and Singer realized that the only open case for the classification of MASA's having the Kadison–Singer property was the discrete algebra (7). They were unable to answer the question for this algebra and left it open. In the subsequent years and decades, this question became known as the *Kadison–Singer conjecture*:

Kadison–Singer conjecture. *Any pure state on the abelian von Neumann algebra $\ell^\infty(\mathbb{N})$, realized as multiplication operators on the Hilbert space $\ell^2(\mathbb{N})$, has a unique extension to a (necessarily pure) state on $B(\ell^2(\mathbb{N}))$.*

In other words, $\ell^\infty(\mathbb{N}) \subset B(\ell^2(\mathbb{N}))$ has the Kadison–Singer property.

Proof of the KS-conjecture

In the years that followed, many people worked on this problem. Before the turn of the century, the most notable progress was made by the aforementioned Anderson. He straightened out some of the details in the article by Kadison and Singer and reformulated what later became known as the *paving conjecture*. This is a statement that is equivalent to the Kadison–Singer conjecture and says the following:

For every $\varepsilon > 0$ there is an $l_\varepsilon \in \mathbb{N}$ such that for all $a \in B(\ell^2(\mathbb{N}))$ that satisfy $\text{diag}(a) = 0$, there exists a set of projections $\{p_i\}_{i=1}^{l_\varepsilon} \subseteq \ell^\infty(\mathbb{N})$ such that

$$\sum_{i=1}^{l_\varepsilon} p_i = 1$$

and

$$\|p_i a p_i\| \leq \varepsilon \|a\| \quad (10)$$

for every $i \in \{1, \dots, l_\varepsilon\}$.

Here, we have used the function

$$\text{diag}(a) : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{C}$$

which is defined by

$$\text{diag}(a)(n) = \langle \delta_n, a \delta_n \rangle.$$

The strength and difficulty in proving this conjecture is contained in the uniformity of l_ε : there is one fixed l_ε that should work for all a .

In turn, using Tychonoff's theorem, it can be shown that this paving theorem for operators on $\ell^2(\mathbb{N})$ is equivalent to a paving theorem for matrices. To be more precise, the Kadison–Singer conjecture is equivalent to:

For every $\varepsilon > 0$ there is an $l_\varepsilon \in \mathbb{N}$ such that for all $n \in M_n(\mathbb{C})$ and all $a \in M_n(\mathbb{C})$ such that $\text{diag}(a) = 0$, there is a set of diagonal projections

$$\{p_i\}_{i=1}^{l_\varepsilon} \subseteq D_n(\mathbb{C})$$

such that $\sum_{i=1}^{l_\varepsilon} p_i = 1$ and (10).

This equivalence is quite remarkable, since we can now use tools of linear algebra to draw conclusions about the infinite-dimensional discrete algebra.

In 2004, Nik Weaver [25] formulated a new conjecture, which he showed was equivalent to the paving conjecture. *Weaver's conjecture* was reformulated by Terence Tao [24] as follows:

Suppose $k, m, n \in \mathbb{N}$ and let $C \geq 0$. Furthermore, let $\{A_i\}_{i=1}^k \subseteq M_n(\mathbb{C})$ be a set of positive semi-definite matrices of rank 1, such that

$$\|A_i\| \leq C \quad \text{for all } 1 \leq i \leq k;$$

$$\sum_{i=1}^k A_i = 1.$$

Then there exists a partition of $\{Z_i\}_{i=1}^m$ of $\{1, \dots, k\}$ such that for all $j \in \{1, \dots, m\}$ we have

$$\left\| \sum_{i \in Z_j} A_i \right\| \leq \left(\frac{1}{\sqrt{m}} + \sqrt{C} \right)^2.$$

The true breakthrough came when the theory of random matrices was used. In 2013, Adam Marcus, Daniel Spielman and Nikhil Srivastava proved the following theorem [16]:

Theorem 6. Suppose $\{Y_i\}_{i=1}^n$ is a set of independent random variables taking a fi-

nite number of values in the set of positive semi-definite $n \times n$ -matrices of rank 1 and let $C > 0$. Furthermore, let

$$Y = \sum_{i=1}^n Y_i,$$

and suppose that

$$\mathbb{E}Y = 1,$$

and

$$\mathbb{E}\|Y_i\| \leq C,$$

for all $i \in \{1, \dots, n\}$. Then there is at least one realization $\{A_i\}_{i=1}^n$ of the set $\{Y_i\}_{i=1}^n$ such that

$$\|A\| \leq (1 + \sqrt{C})^2,$$

where

$$A = \sum_{i=1}^n A_i.$$

They proved this theorem considering zeroes of so-called *real stable polynomials*. Using this theorem, the Weaver con-

jecture can be easily proven (cf. [22]). As a consequence, the Kadison–Singer conjecture was finally proven, 54 years after Kadison and Singer posed their question. Furthermore, it completes the classification of unital abelian C^* -subalgebras with the Kadison–Singer property in the case of separable Hilbert spaces:

Theorem 7. Suppose H is a separable Hilbert space and let $A \subset B(H)$ be an abelian, unital $*$ -algebra. Then A has the Kadison–Singer property if and only if it is unitarily equivalent to the discrete algebra A_d (or, if H is n -dimensional, to the diagonal matrices $D_n(\mathbb{C})$, $n \in \mathbb{N}$).

Let us close by noting that we have just scratched the surface of the world opened by the Kadison–Singer conjecture and its proof; for further information see [7, 14, 24].

Notes and references

- Hilbert's student E. Schmidt is reported to have warned von Neumann against using the abstract language of operators: "Nein! Nein! Sagen Sie nicht Operator, sagen Sie Matrix!"
- Throughout this paper a 'projection' p is an orthogonal projection ($p^2 = p^* = p$).
- We have $\lambda \in \sigma(a)$, i.e., the full spectrum of a , when $a - \lambda \cdot 1$ is not invertible (Hilbert), or, equivalently, when there exists a sequence (ψ_n) of unit vectors for which $\lim_{n \rightarrow \infty} \|(a - \lambda) \psi_n\| = 0$ (Weyl). Then $\lambda \in \sigma_d(a)$ (i.e., the *discrete* spectrum of a) when a has an eigenvector with eigenvalue λ , and $\sigma_c(a) = \sigma(a) \setminus \sigma_d(a)$. In finite dimension $\sigma(a) = \sigma_d(a)$ and hence $\sigma_c(a) = \emptyset$, but on the infinite-dimensional space (4) we have, for example, $\sigma_c(m_x) = [0, 1]$ whilst $\sigma_d(m_x) = \emptyset$.
- For example, following a lecture by von Neumann on operator algebras at Harvard sometime in the 1930's, G.H. Hardy is reported to have said to G.D. Birkhoff: "He is quite clearly a brilliant man, but why does he waste his time on this stuff?" This anecdote may in fact tell us more about Hardy's own narrow-minded attitudes than about operator algebras, but even von Neumann's close friend and colleague S. Ulam displays a clear lack of appreciation in his autobiography *Adventures of a Mathematician* from 1976.
- Sakai also proved that the predual of a von Neumann algebra is unique (which is not necessarily the case for general Banach spaces).
- J. Anderson, Extensions, restrictions, and representations of states on C^* -algebras, *Transactions of the American Mathematical Society* 249 (1979), 303–329.
- P.G. Casazza, M. Fickus, J.C. Tremain and E. Weber, The Kadison–Singer Problem in mathematics and engineering, *Contemporary Mathematics* 414 (2006), 299–356.
- J.B. Conway, *A Course in Functional Analysis*, Springer, 2007, 2nd ed..
- R.S. Doran, ed., C^* -algebras: 1943–1993, *Contemp. Math.* 167 (1994).
- I.M. Gelfand and M.A. Naimark, On the imbedding of normed rings into the ring of operators in Hilbert space, *Sbornik: Mathematics* 12 (1943), 197–213.
- R.V. Kadison, Operator algebras – the first forty years, *Proc. Symp. Pure Math.* 38(1) (1982), 1–18.
- R.V. Kadison and J.R. Ringrose, *Fundamentals of the theory of operator algebras, Vols. I–II*, Academic Press, 1983–1986.
- R.V. Kadison and I.M. Singer, Extensions of pure states, *American Journal of Mathematics* 81 (1959), 383–400. The authors actually attribute the general idea of the conjecture to I.E. Segal and I. Kaplansky.
- E. Klarreich, 'Outsiders' crack 50-year-old math problem, *Quanta Magazine*, 2015, <https://www.quantamagazine.org/20151124-kadison-singer-math-problem>.
- K. Landsman, Bohrfication: From classical concepts to commutative algebras, in J. Faye and H. Folse, eds., *Niels Bohr in the 21st Century*, Chicago University Press, to appear, arXiv:1601.02794.
- A. Marcus, D.A. Spielman and N. Srivastava, Interlacing families II: Mixed characteristic polynomials and the Kadison–Singer Problem, *Annals of Mathematics* 182 (2005), 327–350.
- J. von Neumann, Über Funktionen von Funktionaloperatoren, *Annals of Mathematics* 32 (1931), 191–226.
- J. von Neumann, *Mathematische Grundlagen der Quantenmechanik*, Springer, Berlin, 1932. English translation: *Mathematical Foundations of Quantum Mechanics*, Princeton University Press, 1955.
- J. von Neumann, *Collected Works, Vol. III: Rings of Operators*, A.H. Taub, ed., Pergamon Press, 1961.
- S. Sakai, *C^* -Algebras and W^* -Algebras*, Springer, 1971.
- I. Segal, Irreducible representations of operator algebras, *Bull. Amer. Math. Soc.* 53 (1947), 73–88.
- M. Stevens, *The Kadison–Singer Property*, MSc Thesis, Radboud University Nijmegen, 2015.
- M. Takesaki, *Theory of Operator Algebras, Vols. I–III*, Springer, 2002–2003.
- T. Tao, Real stable polynomials and the Kadison–Singer problem, 2013, <http://terrytao.wordpress.com/2013/11/04>.
- N. Weaver, The Kadison–Singer problem in discrepancy theory, *Discrete Mathematics* 278 (2004), 227–239.

Jan Stienstra

*Mathematisch Instituut
Universiteit Utrecht
j.stienstra@uu.nl*

Wilberd van der Kallen

*Mathematisch Instituut
Universiteit Utrecht
w.vanderkallen@uu.nl*

In Memoriam Jan R. Strooker (1932–2014)

K-theorie in Nederland

op 16 augustus 2014 overleed Jan Strooker, emeritus hoogleraar algebra aan de Universiteit Utrecht, op 81-jarige leeftijd. Zijn oud-collega's Jan Stienstra en Wilberd van der Kallen herdenken hem.

Jan Rustom Strooker werd geboren op 29 september 1932 in Rangoon (Birma) en overleed op 16 augustus 2014 te Houten. Hij bezocht het Stedelijk Gymnasium in Den Haag, maar deed het eindexamen Gymnasium β in 1950 te Glion sur Montreux in Zwitserland. Daarna ging hij studeren aan de Rijksuniversiteit Leiden, deed in 1955 het kandidaatsexamen wis- en sterrenkunde met natuurkunde en in 1959 het doctoraalexamen wiskunde met taalwetenschap.

Algebra

De glasheldere (Strookers woorden) colleges van Kloosterman wekten zijn belangstelling voor algebra. Algebra bleef het dominante thema in zijn wiskundig werk. De basis voor zijn promotie werd gelegd tijdens een verblijf in 1960–'62 aan Harvard University en Brandeis University, met een beurs van Z.W.O., respectievelijk een research-assistantship van Brandeis. Daar maakte hij kennis met het werk van onder anderen M. Auslander, R. Brauer en D. Rim. Na terugkeer uit de Verenigde Staten in 1962 ging hij werken aan de Rijksuniversiteit Utrecht. Op 12 april 1965 promoveerde hij daar bij T.A. Springer op een proefschrift met de titel *Faithfully Projective Modules and Clean Algebras*'. Na zijn pro-

motie bleef hij werken aan het Mathematisch Instituut in Utrecht, tot zijn emeritaat in 1997. Ook na zijn emeritaat tot enkele weken voor zijn overlijden kwam Jan nog bijna dagelijks op het instituut.

In de Nederlandse wiskundekringen was Jan een opvallende verschijning. Velen ken-

nen wel een paar anekdotes over Strooker tijdens recepties en diners, of over zijn vrijwel onleesbare handschrift. Ook zijn colleges waren een aparte belevenis, alles behalve heldere uitleg en moeilijk te lezen teksten op het bord, maar misschien juist daarom voor de goede studenten een uitdaging en bron van inspiratie.

In 1968–'69 gaf hij college over categorieën. Omdat er geen boek was dat paste bij de stof zette hij een aantal studenten



Jan Strooker (rechts) samen met T.A. Springer

aan het werk om een dictaat te schrijven. Later heeft hij dat uitgewerkt tot het boek *Introduction to Categories, Homological Algebra and Sheaf Cohomology* (Cambridge University Press, 1978, heruitgave in 2009).

K-theorie

Begin jaren zeventig maakte Jan tijdens een bezoek aan de Verenigde Staten kennis met het toen jonge vakgebied K-theorie en besloot dat in Nederland te introduceren. Hij gaf in Utrecht college uit het boekje van Milnor over K_2 en organiseerde daarbij een seminarium. Dat bleek een goede zet, op de juiste tijd en de juiste plaats. In Utrecht waren in het najaar van 1973 een aantal studenten die in de colleges van Springer uitgebreid kennis hadden gemaakt met algebraïsche groepen; vooral dat over Chevalley-groepen sloot direct aan bij Milnors K_2 .

Door Strookers sturing ontstond een actieve groep K-theorie in Nederland; we noemen Wilberd van der Kallen, Frans Keune, Jan Stienstra, Henk Maazen, Ton Vorst. Van deze vijf zijn de laatste vier ook gepromoveerd op een K-theoretisch onderwerp, met Strooker als copromotor (Keune) of promotor (de overige drie). Ook Hendrik Lenstra was er vaak bij. Na een jaartje K_2 vond Strooker het tijd om in het seminarium verder te gaan met de hogere algebraïsche K-theorie van Quillen. Vanwege zijn talent om anderen uit te dagen, te sturen en te inspireren was het geen bezwaar

dat hijzelf daarvoor wat weinig kennis van topologie en algebraïsche meetkunde had. Als het nodig was gebruikte hij zijn uitgebreide netwerk om deskundigen van wereldformaat (zoals J. Murre, S. Bloch en A. Borel) uit te nodigen om met zijn studenten te praten. Het was voor allen een erg leerzame periode.

Naast de vier bovengenoemde promovendi op het gebied van de K-theorie zijn ook Jaap Bartijn, Frank Kouwenhoven en Ludwig Leijten bij Jan Strooker gepromoveerd, op algebraïsche onderwerpen.

Parijs

Jan had veel internationale contacten. Zo was hij goede maatjes met Max Karoubi, die vanaf oktober 1977 een *Séminaire de K-théorie* runde in Parijs. Dat kwam ongeveer eens in de zes weken bij elkaar. Jan wist Max over te halen om zijn séminaire op te schuiven naar laat op de vrijdagmiddag met een vervolg op zaterdagochtend. Voor de Parijzenaars was dit geen ideaal rooster, maar zodoende konden de Hollanders op vrijdagochtend de trein nemen en met het hele seminarium meedoen. Er was zelfs speling ingebouwd voor de niet ongebruikelijke vertragingen met de trein. Dit heeft een jaar of tien gefunctioneerd, waarbij elke maand een viertal K-theoretici uit Nederland naar Parijs toog.

Begin jaren negentig kwam er een EEG-project algebraïsche K-theorie met Nederland als een van de centra. Strooker wilde toen een K-theorie-conferentie orga-

niseren in Utrecht, maar tot zijn teleurstelling waren de andere Nederlandse K-theoretici minder enthousiast. Die conferentie is er dus niet gekomen. Sowieso was tegen de tijd van dat EEG-project de K-theorie in Nederland over zijn hoogtepunt heen en hadden de meesten hun belangstelling op andere onderwerpen gericht. Alleen Keune bleef in Nijmegen met een drietal promovendi nog een aantal jaren werken op de grens van K-theorie en getaltheorie.

Terug naar de algebra

Strooker zelf keerde weer terug tot zijn oude liefde, de algebra, meer preciezer de homologische vermoedens van M. Hochster. Daarover schreef hij het boek *Homological Questions in Local Algebra* (Cambridge University Press, 1990). De laatste jaren werkte hij op dit gebied veel samen met Anne Marie Simon van de Université Libre de Bruxelles.

Jan Strooker was hoogleraar in de algebra, maar zijn belangstelling binnen de wiskunde was veel ruimer. Zo organiseerde hij ooit samen met Erik Balder in Utrecht een 'dag over quasi-kristallen' en was hij een groot voorstander van een studierichting Wiskunde en Toepassingen in Utrecht.

Buiten de wiskunde was zijn belangstelling nog veel weidser, vooral grafische kunst, literatuur en filosofie, en had hij een uitgebreide kennissenkring. Hij speelde tennis en deed aan conditietraining, hoewel dat door zijn ziekte steeds moeilijker werd.

✠

Thomas Klausch

Department of Epidemiology and Biostatistics
VU University Medical Center, Amsterdam
t.klausch@vumc.nl

Column PhD thesis

A look into the challenges of mixed-mode surveys

Thomas Klausch received the Willem R. van Zwet Award 2014 for his thesis *Informed Design of Mixed-Mode Surveys*. The Willem R. van Zwet Award is the annual prize of the Netherlands Society of Statistics and Operations Research for an excellent PhD thesis in the area of statistics or operations research, in 2014 awarded to two people. In this article Thomas Klausch introduces us to his research.

Policy makers in governments, businesses, and NGOs need information on many aspects of our society and economy to be able to take decisions effectively. National statistical institutes, like Statistics Netherlands (*Centraal Bureau voor de Statistiek*), collect data and produce official statistics for these actors. Concern for the quality of the published estimates is high and research into improving quality is actively followed for this reason.

Mixing modes: the new face of survey research

In my PhD thesis at Utrecht University, I studied methods for evaluating the quality of data collected in a new type of survey design, the so-called 'mixed-mode' survey. Traditionally, a survey uses one way of communication with persons in a sample (the 'mode'), in particular asking questions in person (face-to-face), on the phone, or on paper questionnaires. In the past two decades, traditional surveys have come under increased pressure. For one, the number of persons willing to participate in surveys and thus provide personal data has steadily decreased. Furthermore, available budgets for data collection have shrunk, which made it difficult to still use costly modes in interviewing, especially face-to-face or telephone. In addition, the internet has made available a new and particularly cost-efficient way to collect survey data. Contrary to all traditional modes, administering web questionnaires involves only very small additional costs per sample unit (e.g., for sending a letter with a hyperlink by mail to a home address). Despite this advantage, response to web surveys is, unfortunately, slim. Surveys at Statistics Netherlands, for example, can obtain data from 60 to 70 per

cent of sampled persons when using face-to-face interviewing, but usually not more than 20 to 30 per cent when using the internet.

The idea of a mixed-mode survey is getting the best of both worlds: saving on costs while increasing response. Figure 1 shows a so-called 'sequential' design as it was fielded yearly from 2008 until 2013 by Statistics Netherlands for the Dutch Crime Victimization Survey (CVS). This procedure increased response rates approximately to the level of face-to-face surveys. However, costs were reduced compared to a single-mode face-to-face survey, because a large share of respondents in the mixed-mode design was interviewed in the web mode.



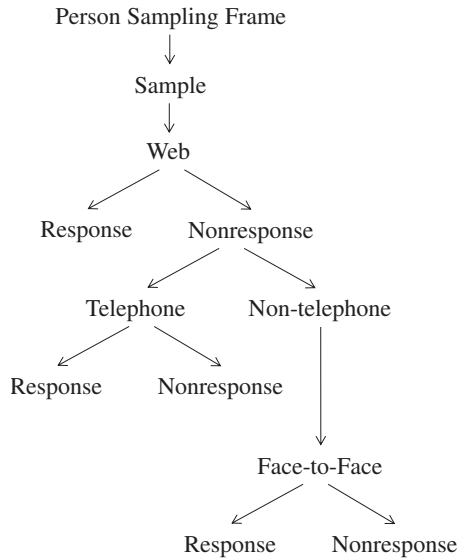


Figure 1 Illustration of the sequential design of the Crime Victimization Survey (in use from 2008 to 2013). A sample is drawn from a list of all population units (sampling frame). After a first attempt to complete the survey in the web mode, non-respondents and non-telephone households are approached either by telephone or face-to-face.

Objectives when designing mixed-mode surveys

An important quality criterion of any survey statistic is its bias. We can distinguish two main sources of bias, selection bias and measurement bias, which we illustrate in the following by a simple example for the estimator of a population mean. In a population of size N let $Y = [y_1, \dots, y_i, \dots, y_N]$ denote the true scores of a survey target variable Y . Assume a 'pattern mixture model' for Y which stratifies its distribution into respondents and nonrespondents, where $\bar{Y}_m$ denotes the population response mean and $\bar{Y}_{nr_m}$ the non-response mean. Furthermore, a question asked in some survey mode m is observed with systematic measurement error $\mu^{(m)}$ leading to mode-specific measurement error model $y_i^{(m)} = y_i + \mu^{(m)}$. A simple random sample (SRS) now results in a subset of all N units being approached, indicated by random variable $S = [s_1, \dots, s_i, \dots, s_N]$, where $s_i = 1$ if unit i is selected and 0 otherwise. Depending on the mode, selected unit i may then either respond or not respond to the survey indicated by $R_m = [r_{m1}, \dots, r_{mi}, \dots, r_{mN}]$, where $r_{mi} = 1$ if i responds and 0 otherwise. A simple estimator of the population mean $\bar{Y}$ from the response sample of size $n_r = \sum_i s_i r_{mi}$ is

$$\hat{\bar{Y}}_{r_m}^{(m)} = n_r^{-1} \sum_i s_i r_{mi} y_i^{(m)},$$

which has expectation

$$E(\hat{\bar{Y}}_{r_m}^{(m)}) = \bar{Y}_m + \mu^{(m)}.$$

It can be seen that its total bias is $B_t = \mu^{(m)} + \bar{Y}_m - \bar{Y}$, where $B_{sm} = \bar{Y}_m - \bar{Y}$ represents the selection bias and $\mu^{(m)}$ measurement bias.

The first objective in designing mixed-mode surveys is achieving a reduction of the selection bias B_{s1} of the initial mode in the mixed-mode design (e.g., web) by adding the follow up of respondents in the second or third mode (e.g., telephone or face-to-face) to the response set of the first mode. This objective can be stated as minimizing criterion $\Delta_s = |B_{smm}| - |B_{s1}|$ by design, where B_{smm} is the selection bias of the mixed-mode design. We

require at least $\Delta_s < 0$ and, ideally, $\Delta_s = -|B_{s1}|$. Now we extend the population response model for the mixed-mode response mean $\bar{Y}_{mm} = P_1 \bar{Y}_{r1} + P_2 \bar{Y}_{r2}$ with non-response stratum mean $\bar{Y}_{nr_{mm}}$, where $\bar{Y}_{r1}$ and $\bar{Y}_{r2}$ are the response means in the initial and second mode of the mixed-mode design and $P_1 + P_2 = 1$ the relative sizes of response groups of mode one and two (limiting the illustration here to two modes). It can be seen that the change in B_{s1} by the follow up is $B_{smm} - B_{s1} = P_2 (\bar{Y}_{r2} - \bar{Y}_{r1})$, where the contrast $SE = \bar{Y}_{r2} - \bar{Y}_{r1}$ is called a relative selection effect between modes. It follows that necessarily, but not sufficiently, $\bar{Y}_{r2} \neq \bar{Y}_{r1}$ (i.e., presence of a selection effect) for $\Delta_s < 0$. Furthermore, in the absence of a selection effect ($\bar{Y}_{r2} = \bar{Y}_{r1}$ or, equivalently, $\Delta_s = 0$) the mixed-mode design surely misses its objective of reducing selection bias of the initial mode and, strictly speaking, it is not needed.

The second objective in designing mixed-mode surveys concerns the size of mode-specific measurement bias $\mu^{(m)}$, which is strongly influenced by the topic of the question and how it is posed. A good example for measurement bias is 'socially desirable answering', which is more common in interviewer-administered than in self-administered modes. When answering desirable the respondent biases the answer in the direction of what (s)he perceives as the social norm. For example, when asked about smoking behaviour, a respondent may perceive less or no smoking as the desirable answer. A strong smoker may then choose to under-report the behaviour to an interviewer. This causes a measurement error where $\mu^{(m)}$ is the average measurement error in the population.

In a mixed-mode survey, it is a threat that some modes may cause larger $\mu^{(m)}$ than others. It can be seen that the measurement bias of a mean estimated from mixed-mode data has form $P_1 \mu^{(1)} + P_2 \mu^{(2)}$. Often, however, it is more practically relevant to assume that one of the modes measures at 'ideal' level, that is, it provides the optimal combination of question, format, and mode. We then may set this mode as 'golden standard' with $\mu^{(m)} = 0$ and express measurement bias with respect to this mode, also called the 'benchmark'. The second objective consequently is to design mixed-mode questionnaires that minimize $P_j \mu^{(j)}$ for all modes j that are not the benchmark.

Problems in assessing the objectives in practice

In designing mixed-mode surveys it is important to estimate selection and measurement biases and the change one may expect when using a mixed-mode instead of a single-mode design. If the size of all biases was known, it would be simple to decide on the benefits of a mixed-mode survey, for example in comparison to only using a web survey. Unfortunately, assessing the objectives is problematic in practice. We take a look at the complications. Figure 2 shows a schematic pattern of available and missing data in a sample surveyed by a sequential mixed-mode design with two modes. White areas indicate data that is observed and grey areas indicate unavailable data. True scores on variable Y are fully unavailable for the whole sample, which frankly is the reason we conduct the survey in the first place. We, however, do obtain measurements of Y from respondents in the initial mode $Y^{(1)}$ with mean $\bar{Y}_{r1}$ (field A), but there is also some non-response (fields B and C). Non-respondents are followed up in the second mode leading to measurements $Y^{(2)}$ with $\bar{Y}_{r2}$ (E) and again some nonresponse (F) with $\bar{Y}_{nr_{mm}}$.

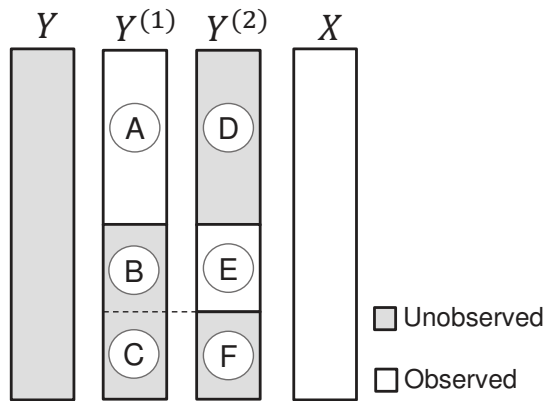


Figure 2 Illustration of the missing data pattern of a sequential design with two modes. The true score vector Y is unobserved and instead measurements $Y^{(1)}$ and $Y^{(2)}$ are observed from respondents to the survey. Some institutes, like Statistics Netherlands, have available sampling frame information (X) on all units.

Due to the missing data it is impossible to estimate any of the biases including the total bias B_t of the survey. At best, the relative difference between mode-specific sample means can be estimated (difference in means of fields A and E). However, this difference amounts in expectation to $SE + \mu^{(j)}$ (where $\mu^{(j)}$ denotes measurement bias of the mode that is not the benchmark). This difference is sometimes called the relative total effect. Statistically, the total effect confounds the relative selection effect between modes with the difference in measurement biases (between benchmark mode and focal mode). Taken by itself, the total effect is quite uninformative. However, if we can disentangle (estimate) both of its components, we can say more about the two design objectives. We would know whether one of the modes may have higher measurement bias than the benchmark ($\mu^{(j)} \neq 0$) and we would know if the design is capable of reducing selection bias of the initial mode ($SE \neq 0$).

Some national offices of statistics including Statistics Netherlands have a set of background information from a register (X), such as socio-demographics, which is available for the full sample or the full population. This information could be used for addressing the missing data problem in two ways. First, let vector R_{mm} describe the mixed-mode response set with element i equal to 1 if $r_{1i} = 1$ (response to the first mode in the design) or $r_{2i} = 1$ (response to second mode in the design) and 0 otherwise. If we assume conditional independence $P(Y^{(m)} | R_{1i}, R_{mm} = 1, X) = P(Y^{(m)} | R_{mm} = 1, X)$, also called *missing at random* (MAR) data Y^m in the mixed-mode response set [5], a method for adjusting missing data, such as weighting or imputation, can be used for unbiased estimation of the unobserved ('potential outcome') means $\bar{Y}_{r_2}^{(1)}$ or $\bar{Y}_{r_1}^{(2)}$ in fields B and D. It can be shown that these means allow direct estimation of SE and $\mu^{(j)}$ assuming one of the modes as the benchmark. Second, if we assume $P(Y^{(m)} | R_{mm}, X) = P(Y^{(m)} | X)$, we may extrapolate the observed data and arrive at an estimate of $\bar{Y}$ as a basis for quantifying total bias.

Whereas MAR assumptions have a strong tradition in statistics they are, unfortunately, hardly ever testable. However, at least for the case of social surveys the assumption often is not plausible. The auxiliary data, X , from population registers at Statistics Netherlands is limited to basic socio-economic data, such as sex, household size, and income, and the observed correlations be-

tween response mechanisms R and auxiliary information are often very weak. Although this is not a test of MAR, it seems necessary to find alternative approaches for solving the confounding and extrapolation problem.

The MEPS experiment: an innovative study into mixed-mode design

In my PhD thesis, I developed a framework, outlined partly above, for describing biases and effects between modes in mixed-mode surveys and studied alternative ways of causal inference about these parameters. For this purpose, a large-scale mode experiment was designed and implemented for the case of the Dutch Crime Victimization Survey (CVS) in collaboration with Statistics Netherlands in 2011 [1], called the MEPS experiment (in Dutch: *Mode-effecten in persoonsstatistieken*). The goal of the empirical study was to estimate measurement and selection effects as good as possible.

In a first wave, the four major contemporary modes were administered in parallel to independent samples: face-to-face, telephone, mail, and web. Subsequently, the non-respondents in all modes were re-approached after some weeks' time as in a sequential mixed-mode survey. The follow-up mode was face-to-face in all cases. However, contrary to a standard sequential mixed-mode design also the respondents in all modes were followed up a second time leading to a repeated measurement in face-to-face of many of the CVS target variables.

The missing data pattern of this extended mixed-mode design is shown in Figure 3 for two of the four samples (web and face-to-face modes). It can be seen that the repeated measurement leads to overlap (fields A and E) between the partly observed response vectors $Y_1^{(web)}$, $Y_1^{(f2f)}$ and $Y_2^{(f2f)}$, where indices denote measurement in the first and second wave, respectively. In several empir-

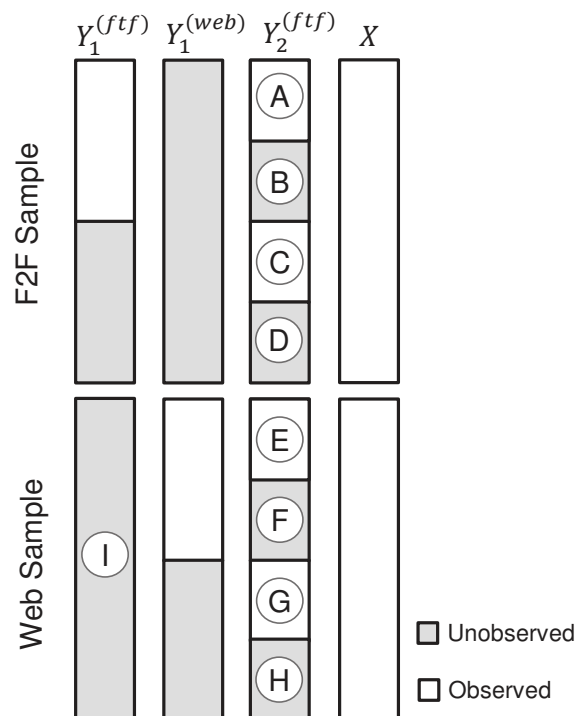


Figure 3 Illustration of the missing data pattern of a sequential design with re-interview. The repeated measures of respondents in the first wave (fields A and E) create overlap between the partly observed response vectors $Y_1^{(web)}$, $Y_1^{(f2f)}$, and $Y_2^{(f2f)}$.

ical studies, the repeated measures were used in different ways to disentangle the biases on CVS target variables. In a study published in *Journal of the Royal Statistical Society*, for example, the second wave face-to-face measurements were considered benchmark data [2]. The authors completed the missing data points in $Y_2^{(f2f)}$ using multiple imputation (fields B, D, F and H). Subsequently, differences in response distributions on $Y_2^{(f2f)}$ were studied per mode, and the change introduced by the face-to-face follow up was evaluated. Innovative in this approach was that the repeated measure could be used like register information. That is, it had the same measurement bias (of face-to-face) in all modes thus avoiding the confounding problem. The authors found that selection bias was about equal in all modes and that it was only marginally impacted by the follow up.

Using an alternative approach, the single-mode face-to-face sample was considered to give the best benchmark measurements ($Y_1^{(f2f)}$) and ideal selection bias [4]. The face-to-face estimate of $\bar{Y}$ thus becomes unbiased by assumption and all other biases are estimated against the face-to-face benchmark estimate. This approach allows quantifying the total bias B_t in a straight-forward way, but it requires estimating unobserved ('potential') benchmark outcomes in field I for units in the comparison mode. Again the repeated measures were used as a basis for this inference. Because the empirical correlations between initial and repeated measures were moderate to large a model of $Y_1^{(f2f)}$ using $Y_2^{(f2f)}$ was anticipated to be stronger than 'usual' models using weak register information X only.

However, also this approach could not identify strong selection bias or relative selection effects between modes. Instead the majority of the total bias was attributed to measurement bias ($\mu^{(m)}$). Here differences were partly very strong, in particular when

comparing the self-administered (web, mail) modes with the interviewer-administered modes.

A major conclusion from the MEPS experiment was that it matters chiefly which mode is considered to give 'benchmark' measurements. Depending on this choice either only interviewer-administered or only self-administered modes should be used in the mixed-mode survey. After the MEPS experiment, Statistics Netherlands chose to redesign the CVS using only web and mail in the design.

Where do we go from here?

Mixed-mode surveys have become ever more important in international survey research and they are probably here to stay. The next step in innovation is data collection on 'mobile' devices, such as smartphones or tablet PCs. These devices present new modes and will be used simultaneously in the future.

Methodological research currently progresses in two directions. First, social researchers try to find better questionnaire designs that avoid mode differences in measurement bias optimizing measurement at the level of the 'best' mode. Second, statisticians try to find ways for adjusting measurement bias in mixed-mode surveys. Controlling for the confounding problem of selection effects and measurement bias between modes continues to pose a problem in these endeavours. Building on the PhD thesis, researchers at Utrecht University and Statistics Netherlands, for example, have developed a simulation to investigate under which practical circumstances, such as different measurement error models and strengths of selection effects, re-interview data can lead to better adjusted estimates than unadjusted estimators do [3]. This research may finally lead to important quality indicators and more precise estimates in future mixed-mode surveys. ☛

References

1. B. Buelens, J. van der Laan, B. Schouten, J. van den Brakel and T. Klausch, Disentangling mode-specific selection and measurement bias in social surveys (Discussion paper No. 201211), Statistics Netherlands. The Hague, 2012.
2. T. Klausch, J. Hox and B. Schouten, Selection error in single- and mixed mode surveys of the Dutch general population, *Journal of the Royal Statistical Society, Series A (Statistics in Society)* (2015), doi: 10.1111/rssa.12102.
3. T. Klausch, B. Schouten, B. Buelens and J. van den Brakel, Adjusting measurement bias in sequential mixed-mode surveys using re-interview data (Discussion paper No. 201523), Statistics Netherlands. The Hague, The Netherlands, 2015.
4. T. Klausch, B. Schouten and J.J. Hox, Evaluating Bias of Sequential Mixed-mode Designs Against Benchmark Surveys, *Sociological Methods & Research* (2015), doi: 10.1177/0049124115585362.
5. R.J.A. Little and D.B. Rubin, *Statistical Analysis with Missing Data*, Wiley, Hoboken, 2nd ed., 2002.

Botond Szabó

Mathematical Institute

Leiden University

b.t.szabo@math.leidenuniv.nl

Column PhD thesis

Confidence in Bayesian Uncertainty Quantification?

Botond Szabó received the Willem R. van Zwet Award 2014 for his thesis *Adaptation and Confidence in Nonparametric Bayes*. The Willem R. van Zwet Award is the annual prize of the Netherlands Society of Statistics and Operations Research for an excellent PhD thesis in the area of statistics or operations research, in 2014 awarded to two people. In this article Botond Szabó introduces us to his research.

In recent years there has been a rapid increase in computational power and available information, leading to the rise of Bayesian methods in many practical applications. The popularity of the Bayesian approach comes from its natural framework for combining experts' beliefs with observed data. Bayesian methods have been successfully applied in many real world problems, including for instance recovering Air France Flight 447 which crashed into the Atlantic Ocean, improving the prevention of the spread of malaria or constructing self-driving cars, just to mention but a few. However, despite its wide applicability, we still don't have a good theoretical understanding of its behaviour. My thesis focuses on the theoretical investigation of Bayesian methods.

Bayesian modeling

In the Bayesian approach one can incorporate prior experience or intuition about the problem into the model in a straightforward manner. This is done through the *prior distribution*, which represents our initial opinion about certain unknown characteristics (i.e. parameters) of the model that are of interest to us. The next step is to incorporate the observed data into our prior belief resulting in an updated belief about the problem. This revised opinion is formulated via the *posterior distribution*, which is the conditional

distribution of the unknown parameters given the data. In Bayesian statistics, the posterior distribution is used to make approximations and decisions about the unknown parameters of interest.



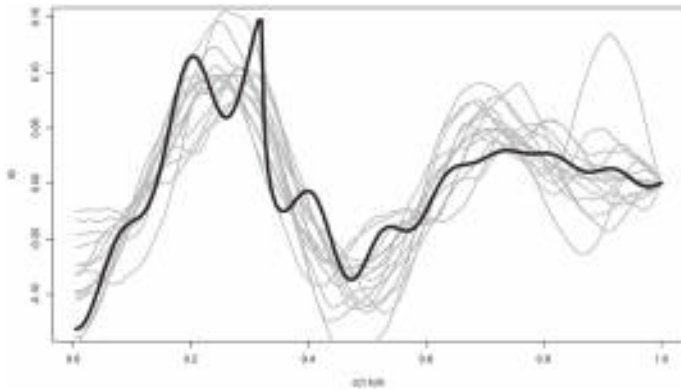


Figure 1 Simulation results for a polished tail function. The unknown functional parameter of interest is drawn in black, while the gray curves represent typical draws from the posterior distribution.

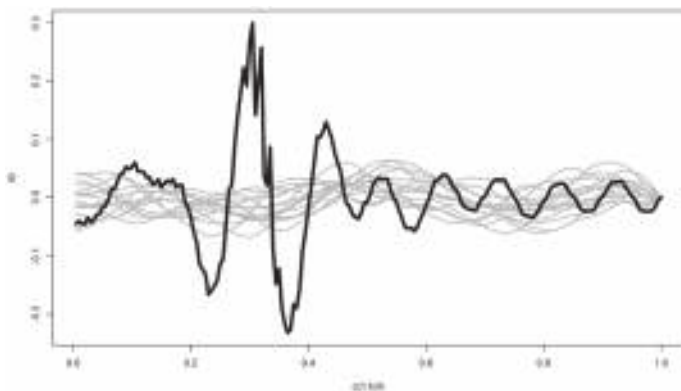


Figure 2 Simulation results for a nonpolished tail function. The unknown functional parameter of interest is drawn in black, while the gray curves represent typical draws from the posterior distribution.

However, the behaviour of the posterior distribution depends highly on the choice of the prior, especially in complex models. Naïve use of Bayesian statistics can result in misleading or even false conclusions. An objective way of comparing Bayesian methods is via classical (also known as frequentist) statistics: one assumes that the data is generated according to a fixed ‘true’ parameter and investigates how well the posterior distribution recovers this.

Bayesian uncertainty quantification

Another particularly appealing aspect of Bayesian techniques is that they naturally include a quantification of their precision. Assessing the reliability of a statistical procedure is of central importance, since reporting only a single estimate without any information about how certain we are about it can be profoundly misleading. Therefore, the goal is to give a set of probable parameter values instead of a single one. Larger sets thus correspond to less certainty in the estimates, while smaller sets represent confidence in the procedure. Such confidence statements can then be immediately applied in statistical decision making.

The problem is that although Bayesian techniques come with built-in uncertainty statements and are therefore widely used in practice because of their convenience, it was shown that they can be far off, giving haphazard and false uncertainty quantification. The goal of my PhD project was to investigate the theoretical properties of Bayesian based uncertainty quantification in complex models.

Polished tail condition

In general one would like to quantify uncertainty in an optimal way. Too conservative confidence statements, i.e. large sets of possible parameter values, obviously provide only a limited amount of information. It has been shown in the literature that in general it is not possible to give reliable and optimal uncertainty quantification at the same time. Therefore certain additional modeling assumptions have to be introduced.

In our work we developed the so called *polished tail* condition under which the investigated Bayesian methods provide reliable and optimally precise uncertainty statements. In the polished tail condition we roughly assume that the ‘information level’ of the unknown functional parameter of interest that we can extract from the data is not dominated by the information level of the functional parameter hidden by the noise (i.e. a random object corrupting our observations). In other words we assume that just by looking at the data we can extrapolate certain aspects about the model which are hidden by the noise. We also gave topological, statistical, and Bayesian arguments to verify the optimality of this assumption. We illustrate our findings via a simulation study in Figure 1, respectively Figure 2, where we consider a functional parameter satisfying, respectively violating, the polished tail condition. We draw the unknown function in black and the gray curves represent typical samples from the posterior distribution resulting from a Gaussian process prior. One can observe that the gray curves cover the true function in Figure 1, while fail to cover it in Figure 2. These pictures intuitively indicate that under a polished tail assumption, Bayesian methods can measure the uncertainty of the statistical procedure correctly. Without it one can get misleading uncertainty statements.

Further questions, applications

The thesis considers the behaviour of the Bayesian approach in an idealized statistical model. This serves as a platform to investigate more realistic, real world problems with high practical relevance, including various network models and machine learning algorithms. It can then provide a guideline to practitioners how to calibrate their Bayesian procedures. Possible fields of applications include machine learning, genomics, finance, legal and medical practice, and epidemiology just to mention but a few.

Bibliography

Botond Szabó has defended his PhD thesis on the 19th of February 2014 at the Eindhoven University of Technology under the supervision of prof. dr. Aad van der Vaart and prof. dr. Harry van Zanten. The title of the dissertation is *Adaptation and Confidence in Nonparametric Bayes*. After defending his thesis he obtained a half a year long post-doc position at CREST in Paris and then an assistant professor position at Budapest University of Technology in Hungary. In the beginning of 2015 he returned to the Netherlands and was a post-doc in Amsterdam for a year. Currently he holds an assistant professor position at Leiden University. His research interests include Bayesian nonparametric statistics, asymptotic statistics, graph theory, and machine learning.

Rutger Kerkkamp

Econometrisch Instituut
Erasmus Universiteit Rotterdam
kerkkamp@ese.eur.nl

Column Masterscriptie

Robuuste ambulancelogistiek

Rutger Kerkkamp ontving de Jan Hemelrijkprijs 2014 voor de beste afstudeerscriptie op het gebied van statistiek en operations research voor zijn masterscriptie aan de TU Delft, getiteld *Facility Location Models in Emergency Medical Service: Robustness and Approximations*. In dit artikel zet hij uiteen wat zijn afstudeerwerk inhield.

Bij ernstige ongevallen is het van levensbelang dat ambulances snel ter plaatse van het ongeval zijn om medische hulp te verlenen. De reactie op medische spoedmeldingen moet daarom goed georganiseerd zijn. In Nederland zijn 24 regionale ambulancevoorzieningen verantwoordelijk voor de uitvoering en coördinatie van de ambulancezorg. De ambulancezorg omvat het reageren op medische spoedmeldingen, het bieden van eerste hulp ter plaatse en het transporteren van patiënten van en naar ziekenhuizen (zowel acuut als gepland). Elke ambulancevoorziening heeft een eigen toegewezen zone, weergegeven in Figuur 1, en bestaat onder andere uit een meldkamer met medisch getrainde centralisten en ambulances met personeel.

Om een indruk te geven van de omvang van de Nederlandse ambulancezorg: er zijn ongeveer 700 ambulances in heel Nederland en deze worden ongeveer 1 miljoen keer per jaar ingezet. De ambulances zijn verdeeld over ongeveer 200 standplaatsen, ook wel bases genoemd. Dit zijn de locaties waarnaar toegewezen ambulances terugkeren na het afhandelen van een spoedmelding. Voor meer feitelijke informatie en statistieken zie bijvoorbeeld [5].

Vanwege de urgentie bij ongevallen is in Nederland een maximale responstijd afgesproken: een ambulance moet binnen vijftien minuten na een spoedmelding ter plaatse zijn, anders wordt de respons als 'te laat' beschouwd. Het is daarom noodzakelijk dat de standplaatsen goed verspreid zijn door het land en dat de locaties weloverwogen gekozen zijn. Optimalisatiemodellen en besliskundige technieken zijn bij uitstek geschikt om beleidsmakers te ondersteunen in dit soort beslissingen.

Een optimalisatiemodel is gedefinieerd door een doelfunctie en een verzameling van voorwaarden. Oplossingen die voldoen aan

alle voorwaarden van het model heten toegelaten oplossingen. In het bijzonder zijn we geïnteresseerd in het optimum: de toegelaten oplossing met de beste doelfunctiewaarde. De optimale oplossing is vaak doorslaggevend voor operationele adviezen en is daarom van essentieel belang.

Er kunnen echter moeilijkheden ontstaan als het gekozen model gevoelig is voor onzekerheid in de parameters. Het kan zijn dat kleine fluctuaties in onzekere parameters grote gevolgen hebben voor de optimale oplossing. Neem als voorbeeld het aantal meldingen in een regio: dit zal fluctueren over de



Figuur 1 De zones van de 24 regionale ambulancevoorzieningen in Nederland.

jaren en is niet exact te voorspellen. De optimale ambulance-standplaatsen kunnen sterk afhangen van het aantal meldingen in elke regio. Hoe kunnen we dan alsnog met een gedegen advies komen?

Een andere complicerende factor is het mogelijk bestaan van meerdere optimale oplossingen voor het model. In termen van het model zijn al deze oplossingen gelijkwaardig, maar in de praktijk zijn sommige beter dan andere. De term ‘optimaal’ is wat dat betreft misleidend, zeker voor een buitenstaander die zich niet bewust is van deze subtiliteiten. Belangrijke vragen zijn daarom welke van de optimale oplossingen gekozen moet worden en of het wel te bepalen is welke alternatieven er zijn.

Bij het adviseren zal men deze factoren moeten onderzoeken, zeker bij zaken als ambulancelogistiek waar levens mee gemoeid zijn. We hebben de gevoeligheid onderzocht van de parameters in een eenvoudig optimalisatiemodel dat inzicht geeft waar ambulancbases het beste geplaatst kunnen worden.

Optimale ambulancestandplaatsen

In de literatuur zijn vele modellen beschreven om te bepalen wat de beste locaties zijn voor ambulancestandplaatsen. We behandelen een eenvoudig model dat vaak gebruikt wordt voor een eerste analyse van de ambulancezorg in een regio, zie ter illustratie Figuur 2. De mogelijke bases $\mathcal{I}$ worden weergegeven door vierkanten met een letter. De zwarte punten zijn de locaties $\mathcal{J}$ waar ongelukken kunnen plaatsvinden. Elke standplaats $i \in \mathcal{I}$ kan een bepaald gebied op tijd bereiken, aangegeven met de open cirkel om het betreffende vierkant. Dit is te coderen in binaire parameters: $a_{ij} = 1$ als basis $i \in \mathcal{I}$ op tijd locatie $j \in \mathcal{J}$ kan bereiken, anders is $a_{ij} = 0$. De binaire beslissingsvariabele x_i geeft aan of basis $i \in \mathcal{I}$ geopend wordt ($x_i = 1$) of niet ($x_i = 0$). Analoog hier-

aan geeft de binaire variabele z_j aan of locatie $j \in \mathcal{J}$ wel ($z_j = 1$) of niet ($z_j = 0$) op tijd bereikt kan worden door de keuze van geopende bases.

De doelfunctie van het model is om zoveel mogelijk locaties op tijd te kunnen bereiken, waarbij $p \in \mathbb{N}$ standplaatsen geopend mogen worden. Een locatie $j \in \mathcal{J}$ kan een toegewezen gewicht $d_j \in \mathbb{R}_{\geq 0}$ hebben, bijvoorbeeld de frequentie van ongelukken in dat gebied. We moeten dan het totale gewicht van de bereikbare locaties maximaliseren. Dit leidt tot het volgende model:

$$\text{maximaliseer de doelfunctie } \sum_{j \in \mathcal{J}} d_j z_j, \quad (1)$$

$$\text{onder de voorwaarden } \sum_{i \in \mathcal{I}} x_i \leq p, \quad (2)$$

$$\sum_{i \in \mathcal{I}} a_{ij} x_i \geq z_j, \quad \forall j \in \mathcal{J}, \quad (3)$$

$$x_i \in \{0, 1\}, \quad \forall i \in \mathcal{I},$$

$$z_j \in \{0, 1\}, \quad \forall j \in \mathcal{J}.$$

De doelfunctie (1) sommeert het gewicht van alle op tijd bereikbare locaties. Voorwaarde (2) beperkt het aantal geopende bases tot maximaal p en voorwaarde (3) zorgt ervoor dat locatie $j \in \mathcal{J}$ alleen op tijd bereikbaar is als daadwerkelijk een basis in de buurt geopend wordt. De overgebleven voorwaarden beperken de variabelen tot het binaire domein.

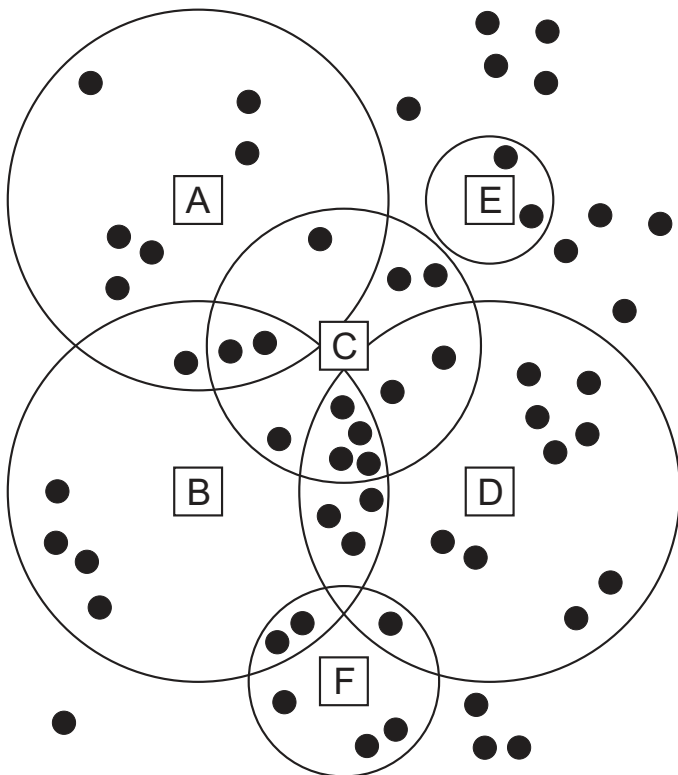
De eenvoud van het model heeft zowel voordelen als nadelen. Een nadeel is de aanname dat er altijd een ambulance op de basis beschikbaar is als een melding binnenkomt. In de praktijk kan het namelijk voorkomen dat alle ambulances van een basis bezet zijn en het langer duurt voordat een ambulance reageert op een nieuwe melding. Twee voordelen zijn dat het model weinig parameters heeft om te schatten en dat het relatief snel op te lossen is. Het model is daarom nuttig als een startpunt in de analyse van een regio.

Onzekerheid in de parameters

Stel we hebben onzekerheid in een aantal van onze parameters. We kunnen het model oplossen door simpelweg de nominale (geschatte) waarden te nemen en het resulterende optimum gebruiken als oplossing voor ons probleem. Dit kan echter leiden tot twee complicaties wanneer de realisatie van de parameters, de werkelijke waarde, bekend wordt. Ten eerste kan de oplossing niet meer toegelaten zijn. Ten tweede kan de doelfunctiewaarde dusdanig verslechteren dat we een andere oplossing hadden moeten kiezen. Het is daarom van belang dat de robuustheid van het model onderzocht wordt. Oftewel, wat is het effect van fluctuaties in de parameters op de oplossingen?

Voor het locatiemodel kunnen we veilig aannemen dat het maximale aantal standplaatsen p bekend is. Er zijn daarom twee typen parameters die onzekerheid kunnen bevatten: de frequentie van meldingen op locatie $j \in \mathcal{J}$ (gewicht d_j) en het bereikbare gebied vanuit basis $i \in \mathcal{I}$ (a_{ij} voor alle $j \in \mathcal{J}$).

Om de gevoeligheid van het locatiemodel voor onzekerheid in de frequentie van meldingen te onderzoeken, gebruiken we een conservatieve aanpak genaamd Robuust Optimaliseren (zie bijvoorbeeld [3]). We nemen aan dat de gewichten d in een bepaalde onzekerheidsstructuur $\mathcal{D}$ zit. Neem als voorbeeld dat de gewichten 5 procent kunnen afwijken van hun geschatte waarden. Het robuuste model bepaalt een oplossing die zo goed mogelijk presteert onder de slechtst mogelijke realisatie van $d \in \mathcal{D}$. Oftewel, het



Figuur 2 Voorbeeld van het locatieprobleem.

robuuste model heeft als doelfunctie

$$\max_{d \in \mathcal{D}} \min_{j \in \mathcal{J}} \sum d_j z_j.$$

Het geeft dus een garantie op de kwaliteit van de oplossing, ongeacht de daadwerkelijke realisatie van $d \in \mathcal{D}$. Deze robuuste aanpak is geschikt voor de medische context, waar men de voorkeur heeft voor veilige keuzes.

We hebben onzekerheidsstructuren geanalyseerd waarbij het totaal aantal meldingen vaststaat, maar het aantal per locatie een bepaald percentage kan afwijken van de geschatte waarde. Voor de situatie in Nederland blijkt uit theoretische en numerieke resultaten dat het originele model nagenoeg dezelfde oplossingen geeft als het robuuste model. Dit betekent dat het originele locatiemodel ongevoelig is voor kleine fluctuaties in de gewichten, een zeer gewenste eigenschap.

Dit brengt ons tot de onzekerheid in de bereikbaarheidsparameters a_{ij} , wat neerkomt op de onzekerheid in de responstijd. Hier hebben we een andere aanpak gehanteerd waarbij we het originele model niet aanpassen. Een numerieke gevoeligheidsanalyse, waar we de maximale responstijd van vijftien minuten verlagen, geeft aan dat het model zeer gevoelig is voor dit type onzekerheid. De analyse laat echter ook zien dat er vele optimale oplossingen zijn, waarvan sommige minder gevoelig zijn voor het verlagen van de responstijd dan andere. Het moge vanzelfsprekend zijn dat deze robuustere optima de voorkeur hebben.

We kunnen het originele model uitbreiden naar de volgende tweestaps-optimalisatiemethode. Eerst bepalen we de maximale doelfunctiewaarde van het originele model, oftewel de maximale dekkingsgraad. Vervolgens bepalen we met een tweede optimalisatiemodel de oplossing die deze maximale dekkingsgraad zo lang mogelijk behoudt als de responstijd geleidelijk verlaagd wordt. Het effect is dat we een optimum van het originele model kiezen dat het minst gevoelig is voor het verlagen van de responstijd.

Een voorbeeld van het effect van deze tweestaps-methode is als volgt. Stel we bepalen de optimale standplaatsen in een anonieme zone in Nederland aan de hand van de norm van vijftien minuten. Vervolgens berekenen we de dekkingsgraad van deze gegeven standplaatsen als de norm verlaagd wordt naar dertien minuten. De oplossing van het originele model heeft een resulterende dekkingsgraad van 79 procent, terwijl die van de tweestaps-oplossing 99 procent is. Dus door slim te kiezen uit de verschillende optima kunnen we de resulterende dekkingsgraad verbeteren.

De gevoeligheid voor veranderingen in de responstijd zal niet volledig verholpen worden door de tweestaps-optimalisatiemethode. Desondanks zorgt een tweestaps-optimalisatie voor robuustere oplossingen door alternatieve optima te overwegen.

Ten slotte

Optimalisatiemodellen bieden beleidsmakers extra middelen om tot weloverwogen beslissingen te komen. Het is daarom niet verrassend dat in de ambulancezorg steeds meer gebruik gemaakt wordt van deze technieken. We moeten ons er wel telkens bewust van zijn dat modellen vereenvoudigingen van de werkelijkheid zijn. In het bijzonder moeten we analyseren wat de gevoeligheid is voor onzekerheid in de parameters en welk optimum de voorkeur heeft bij het bestaan van meerdere optima. De methodes die hier beschreven zijn, vormen een voorbeeld van een dergelijke analyse.

Meer informatie

Voor het volledige onderzoek verwijzen we naar [8], in het bijzonder naar hoofdstuk 3. Dit onderzoek is uitgevoerd als onderdeel van het REPRO-project, een samenwerking tussen CWI en TU Delft geleid door Rob van der Mei. Zie [1] voor een eerdere publicatie in het NAW over het REPRO-project. Dit project richt zich op verschillende aspecten van ambulancelogistiek zoals de plaatsing van ambulancebases [4], de dynamische bijsturing van ambulances [2,7] en de simulatie van de ambulancezorg [6].

Referenties

- 1 K. Aardal, T.C. van Barneveld, P.L. van den Berg, S. Bhulai, M. van Buuren, J.T. van Es-sen, C. Jagtenberg, G.J. Kommer, G. Lege-maate en R.D. van der Mei, Van reactieve naar proactieve planning van ambulance-diensten, *Nieuw Archief voor Wiskunde* 5/16(3) (2015), 183–192.
- 2 T.C. van Barneveld, S. Bhulai en R.D. van der Mei, A dynamic ambulance management model for rural areas, *Health Care Manage-ment Science* (2015), doi 10.1007/s10729-015-9341-3.
- 3 A. Ben-Tal, L. El Ghaoui en A. Nemirovski, *Robust optimization*, Princeton Series in Applied Mathematics, Princeton University Press, 2009.
- 4 P.L. van den Berg en K. Aardal, Time-depen-dent MEXCLP with start-up and relocation cost, *European Journal of Operational Re-search* 242(2) (2015), 383–389.
- 5 I. Boers, P. Duijff, E. Grummels, G. Leerkes en H. van der Werff, *Ambulances in-zicht 2009*, Ambulancezorg Nederland, 2010.
- 6 M. van Buuren, K. Aardal, R.D. van der Mei en H. Post, Evaluating dynamic dispatch strategies for emergency medical services: TIFAR simulation tool, *Proceedings of Win-ter Simulation Conference*, 2012, pp. 1–12.
- 7 C. Jagtenberg, S. Bhulai en R.D. van der Mei, An efficient heuristic for real-time ambulan-ce redeployment, *Operations Research for Health Care* 4 (2015), 27–35.
- 8 R.B.O. Kerkkamp, *Facility location models in emergency medical service: robustness and approximations*, masterscriptie, TU Delft, 2014, repository.tudelft.nl.

Ulf Persson

Department of Mathematics
Chalmers University of Technology
Gothenburg, Sweden
ulfp@chalmers.se

Interview Jacob Murre

Remembering Grothendieck

On 13 November 2014 Alexander Grothendieck, one of the greatest mathematicians of the twentieth century, passed away. In memory of Grothendieck, Ulf Persson interviewed Jacob Murre, professor emeritus of Leiden University. This interview has been published in *EMS Newsletter*, Issue 96, June 2015, and is reprinted here with permission.

You may be among the still living people the one who has known Grothendieck for the longest, in fact you were almost exact contemporaries. When was the first time you met him?

“It was in the spring of 1955 at Chicago. As to the first remark this cannot be the case. Serre, Ribenboim and Cartier definitely met him earlier, and undoubtedly they know him much better.”

Anyway this is a pretty exclusive set. What were you doing in Chicago? Were you a post-doc?

“No, I was still a graduate student, but my advisor Kloosterman had sent me to Weil in Chicago to learn algebraic geometry.”

So what was Grothendieck doing there?

“He was actually at Kansas at the time doing functional analysis, or maybe he had already moved to homological algebra. Weil had invited him to give a lecture because he had already acquired quite a reputation as an upcoming bright mathematician.”

So what was your first impression? How did he appear? Had he already shaved his head?

“To disappoint you I do not remember much of his visit. I went to his lecture, which was on functional analysis. I had at the time naturally no inkling that he would become one of the very greatest mathematicians of the twentieth century. As to his appearance I have no recollection, but if it would have been extreme in any way, I certainly would have remembered.”

When was the next time?

“That was at the ICM in 1958 in Edinburgh where he gave a famous lecture outlining his visions of the development of algebraic geometry. Unlike the first time this made a really deep impression on me. I even was able to ask him some questions later during the congress. But our discussions were of necessity rather superficial, he was at the center of attention, always surrounded by people. He did give me a preprint though (written by Borel and Serre) on his work on the Riemann–Roch theorem.”

And this was when your relationship started in earnest?

“I would say that happened the following year when he wrote me to ask whether I could generalize my key theorem of my

PhD thesis also to hold in mixed characteristic.”

By the way what is the key theorem about?

“It is the so-called ‘linear connectedness theorem’ saying that the total transform of a smooth point by a birational transformation is linearly connected, meaning that any two points can be joined by a sequence of rational curves inside the transform. However, I was only able to prove this over a field.”

So you mostly related via letters?

“In fact that same year Nico Kuiper, later to become director of the IHÉS but who at the time was professor at the Agricultural University in Wageningen, invited him to give a lecture there. I attended the lecture of course, and afterwards Kuiper took us to his house, and then I finally got an opportunity to speak extensively with him.”

What did you talk about?

“The Picard variety, which at the time was very much at the center of interest. Matsusaka, Weil and Chow had already constructed it algebraically, but Igusa had discovered pathologies in positive characteristic. They were very mysterious. Grothendieck knew it all of course and I asked him whether his new theory of schemes would be able to explain and even remove those pathologies. Grothendieck told me that he had not yet given those matters

serious thought because the theory would be treated in chapter XII in his forthcoming EGA.”

This is a remarkable statement. He was really planning ahead, and it also speaks great confidence in his powers.

“Yes, he was very confident that he would clarify the questions when he would get around to it. Not only that he claimed that the people just mentioned made too strong assumptions and tried to prove too little. He would make less assumptions and prove more.”

You must have been very impressed, or did you think he was merely bragging?

“Let me say that my attitude was one of skepticism. At the time I wisely said very little.”

But he was not bragging?

“Of course not. He did eventually fulfill his promise three years later, if not actually in chapter XII of EGA but instead in his two beautiful Bourbaki lectures (232 and 236) where he constructed the Picard Scheme and thereby explained and removed all the pathologies.”

You must have been impressed?

“Very much so.”

But let us backtrack. You had been brought up in Weil's foundations, what was your attitude to schemes initially?

“I certainly had made much of an effort to learn the language of Weil and thus I was naturally very hesitant to jettison all that effort in order to acquire yet another language. But I think the word ‘language’ is misleading, although I know it is often used in this context, I would prefer the word ‘theory’. In the end I decided to ask the advice of Weil. I trusted him very much and was convinced that he would give me the right advice. By that time Weil had already left for IAS at Princeton, and in the spring of 1960 I was at Evanston and I made a visit to the Institute.”

Weil has the reputation of being a rather nasty man and many people admitted that they were afraid of him. I have also heard that Weil was rather jealous of Grothendieck and his advances in algebraic geometry feeling dethroned. It must have been a very sensitive subject to bring up with him.

“First let me point out that Weil has always been very kind to me, and I am and will always be very thankful for all the things I have learned from him...”

... That makes perfect sense. If a great mathematician is ‘nasty’ it is because he cannot suffer fools gladly...

“... Let me finish. I visited Weil and we took a walk in the surrounding woods, which all visitors to the institute are very familiar with. I then brought the matter up with him.”

What did he say?

“He said ‘Grothendieck is very strong. He has done things, nobody of us has been able to do’.”

Whom did he refer to specifically?

“I did not dare to press him on that point. He had made his point. The master had spoken and the message was not only clear, but as it would turn out very great for me. So from then on I started to study schemes.”

So when did your collaboration with Grothendieck start?

“I would not call it a collaboration it was not that close, but I think that it was in 1961 when he invited me to IHÉS, and I went there in the first half of 1962.”

So you went to Bures-sur-Yvette?

“No, at the time the famous SGA seminars were in fact still held in Paris, in the 16th arrondissement, by the way in a building of the Fondation Thiers. But I lived out in Bures in one of the apartments the Institute had acquired.”

Just to get the flavor, could you describe the scene?

“I will do my best. It was always held on a Tuesday afternoon. Arriving before the lecture I would typically find Grothendieck and Serre engaged in a lively discussion. Dieudonné was there of course, and during my term Néron was a visitor too. Then of course there were all the students of Grothendieck.”

Who were they at the time?

“I do not recall all the names, but certainly Demazure, Gabriel, Verdier, Raynaud along with Mme Raynaud. But you can

see that Grothendieck was always busy, so much demand on his time, so there were few opportunities for me to speak to him.”

Are there any other things you remember? Did Grothendieck do all the lecturing?

“No. During the first few weeks Néron gave a series of lectures on his theory of the Néron model following upon Grothendieck’s regular lectures. They were, however, phrased in the language of Weil and I suspect that hence they were a bit difficult for most of the audience to follow. As to other things, I should not forget Mlle Rolland, the secretary, who saw to all the practical things and made it all run so smoothly.”

So nevertheless you had few opportunities to talk to Grothendieck?

“At the seminars, yes, I had few opportunities, but Grothendieck also invited me to his home. At the time he was living with his family in Paris, on the Île de Jatte to be precise.”

This sounds exciting, could you please tell us what was going on?

“Luc Illusie has described them beautifully in his note ‘Reminiscences of Grothendieck and his school’, his experiences being very similar to my own. But to be more specific as to my own, I would arrive after lunch and be alone with him. Naturally I took advantage of the opportunities and asked him a lot of questions, no doubt very simple ones, maybe even occasionally stupid ones, but no matter what he would always be very patient and explain carefully, even what to him must have seemed very elementary ones.”

Illusie has also told me of this experience with Grothendieck. He was never at a loss for an answer I take it.

“Not always, sometimes if very rarely, he did not know of an answer.”

What would happen then?

“He would say something to the effect that he thought that he had considered the problem, then he would turn around and open a cabinet just behind his chair. The cabinet would be crammed with handwritten manuscripts and he would take one out, glance at it, and then come up with an answer.”

What kind of questions did you ask him about?

“As you surely know the written final versions of his work are so general and overwhelming, I would even say intimidating, so mostly I asked for clarifications.”

And he was able to give those, without intimidation?

“Yes, very much so, because when you discussed with him privately it was so different. He always took as a starting point a natural problem in order to relate it to his ideas, which consequently became so much more understandable.”

Nothing beats a personal discussion to convey mathematics.

“That is very true. To hear him explain his marvelous ideas or to see how his brilliant mind attacked problems, are what I treasure most among my mathematical recollections.”

So you would have him all to yourselves during those afternoons?

“You make it sound as if it would have been a very regular occurrence, in fact it did not happen that often, but often enough. And typically after our afternoon session, he or his wife Mireille would always ask me to stay for dinner. They were very hospitable. Invariably after dinner Grothendieck would resume expounding on his ideas, and often I got so engrossed that I had to hurry to catch the last train out to Bures.”

So your switch from varieties to schemes turned out to be a wise investment?

“Very much so. For my generation it was a revolution. In fact during my first visit to his place I asked him why he had come with the notion of a scheme, when varieties constituted, and still do of course, such a beautiful subject with lots of deep theorems and challenging problems.”

And what did he say?

“Basically he claimed that nilpotent elements exist in algebraic geometry by nature. To neglect them, i.e. to remove them, is an artificial, not to say a brutal form of surgery, akin to amputation. They are there for a good reason, to ignore them lead only to confusion, even to pathologies. By taking them into account not only will we rid ourselves of pathologies we will also understand varieties better and get new

powerful tools to attack classical problems involving varieties.”

And what did you think of that?

“It opened my eyes. Contrary to what many may think, Grothendieck did not develop the theory of schemes just for the sake of generalization but the reason was, or at least one of the main reasons, that you needed schemes to understand varieties.”

And you agree?

“Of course. To give just one example. The pathologies of the Picard variety in positive characteristics appear because you should really consider the Picard scheme. Technically, a scheme is needed to represent the Picard functor. And besides the power of the nilpotent elements is shown in his attack on the fundamental group of a curve in positive characteristics by lifting the curve to characteristic zero. I cannot emphasize enough that in Grothendieck's approach to mathematics he was never striving for generalizations for its own sake.”

“I cannot emphasize enough that in Grothendieck's approach to mathematics he was never striving for generalizations for its own sake.”

Although this is a natural conclusion when you encounter his written work.

“Yes, maybe, but the key concept is not generalization but naturalness. He was always looking for the natural context, and with his fabulous insight and intuition he was almost always able to find this context, which, however, I must admit with some regrets, required generalizations.”

So those were forced upon us?

“Very much so.”

So this is a faithful summary of his philosophy?

“Very much so. Whenever he explained something to me, I could always sense this underlying strategy of his. By the way I would like to return to my pet topic of the Picard functor.”

By all means.

“As I have already referred to, during that

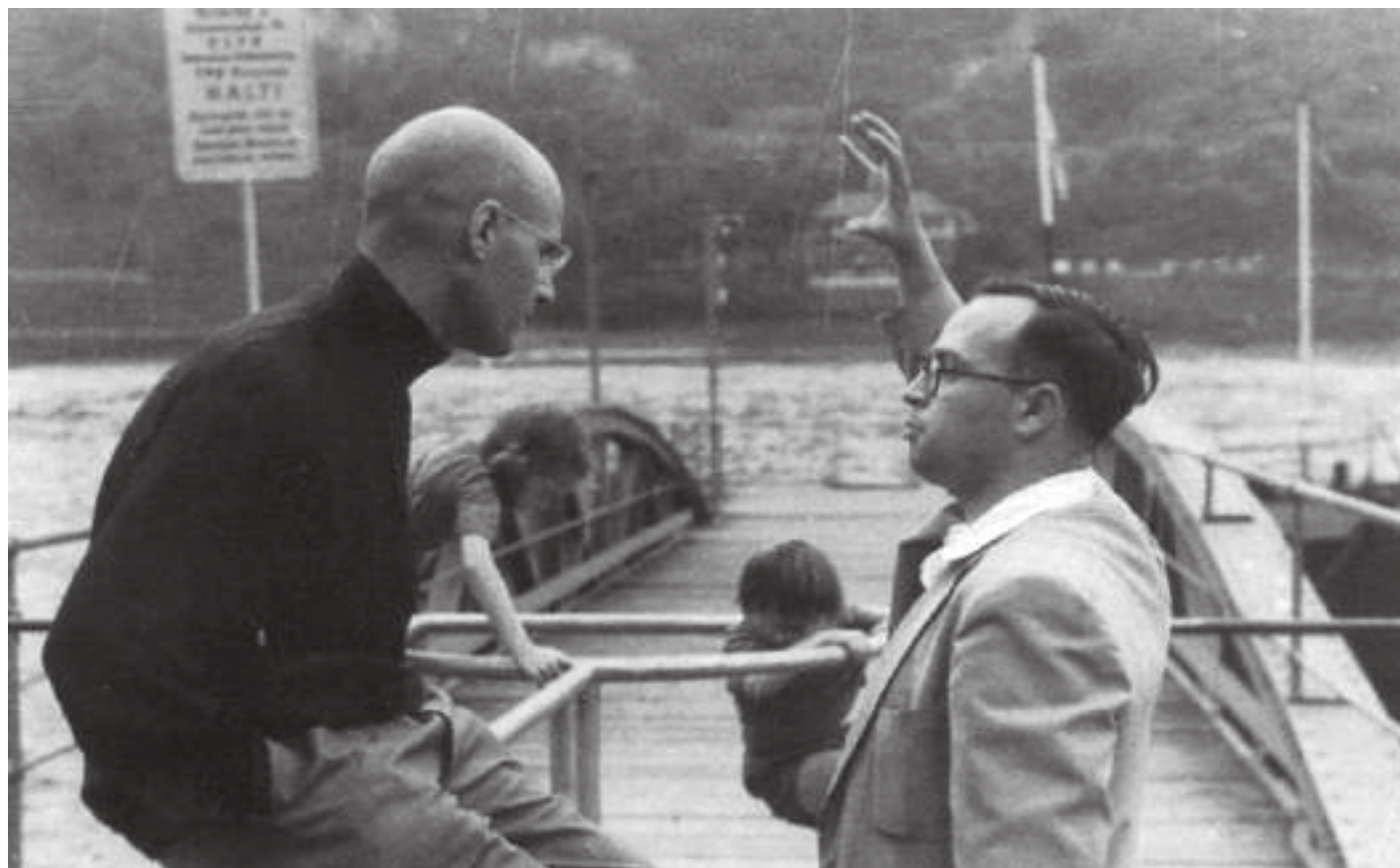
term I attended his two Bourbaki lectures on the Picard functor. In his construction of the Picard scheme he followed more or less Matsusaka's original construction of the Picard variety, with the crucial exception of replacing Chow points with the Hilbert scheme. This relies heavily on projective methods and thus the case of a proper variety over a field was not covered. This gave me the rare opportunity to explain something to *him* instead, which needless to say, made me very happy. Between his two lectures I told him about the construction of the Picard scheme in this particular case. Of course I would never have been able to produce this construction had I not been properly instructed by him. After a long struggle I had finally understood his results on pro-representability of functors, and the existence and comparison results of EGA III furnished me with a powerful tool to enable me — at least over a field — to characterize functors representable by a commutative group scheme from which my insight on the Picard functor in the proper case dropped.”

This must have been a very satisfying experience to you. How did Grothendieck react?

“He saw immediately that it was all correct and during our subsequent discussion he even suggested some simplifications which I later incorporated in my paper. I should add though that my results were subsequently surpassed by the work of Mike Artin on representability of algebraic spaces.”

So by that time your collaborations with Grothendieck would start in earnest and continue throughout most of the sixties? I take it that you were a regular visitor to IHÉS.

“As I have pointed out before, ‘collaboration’ is too presumptuous a word to indicate my relation to Grothendieck. As to my visits to IHÉS during the year, they were indeed several, but because of my duties at my home institution at Leiden, I was normally only able to visit for a few days, with two exceptions. In 1963 I was able to stay for a month and in 1967 for a couple of weeks. Those visits were also somewhat different as IHÉS had definitely moved to Bures in 1963, and so had Grothendieck with his family, and later he would move on to Massy.”



Alexander Grothendieck (left) with Michael Atiyah, around 1961

Photo: courtesy of the estate of Friedrich Hirzebruch

Do you have some poignant recollections from that period.

"I have at least some that stand out. In particular, back in 1963, when I was on the train with him to attend a lecture by Hyman Bass to be given in Paris. We started to talk about what we would do when we were old. Grothendieck expressed a wish to become like Zariski, meaning following and enjoying the work of his former students."

But it would not turn out like that.

"No sadly not."

Anything mathematically that stand out?

"It would be his incipient theory of 'motives'. The first time I heard about it was in the fall of 1964, when I made a visit in preparation for a Bourbaki talk I was to present in the following spring. During a break in our intense discussions I asked him what he was working on at the time. He disclosed that he was working on a new theory, a theory he referred to as of 'motives', which would finally explain the similarity of all cohomology theories, and elaborated a little on his ideas. Later on

in 1967 he gave a series of lectures on his theory, but unfortunately I was unable to attend them, but were later informed about them by Manin, who had been in attendance."

You keep telling me that you did not collaborate with Grothendieck, yet there is a joint paper, not to say a monograph, with him.

"Let me put it this way. Grothendieck was always very generous in sharing his ideas. The paper to which you are referring started like this. Grothendieck and I took a walk together, I am not so sure of when, most likely in 1968 or 69. He told me that he wanted to study the tame fundamental group of a normal point on a two-dimensional scheme, in a way similar to Mumford's classical study. He already had an idea of how to do this and had in effect solved the major part of the problem, however, there remained some technical parts he had not yet resolved. He suggested that I look into it, as he had more pressing things to attend to. On my return back to Leiden I struggled with them, and after some time I was able to sort out the re-

maining parts, and of course I wrote him. He suggested I should publish those results on my own. I protested in my next letter, pointing out that the idea, as well as a large part of the solution was due to him. The only honorable thing would be to write a joint paper, and he agreed."

We are now approaching the end of the 60's and with that the end of the Grothendieck era. Can you report on its twilight?

"I would not use that word. It indicates a decline that was not present."

But you could perhaps see signs?

"Signs are often more pronounced afterwards than at the time when you have no idea of what they may portend. To give an example. The last time I visited Grothendieck at his home was in 1969. He had by then moved to Massy. Formerly he had never complained about his tasks and duties, but this time he admitted that writing EGA and taking care of SGA took a lot of his time. As I usually did visiting him I asked him about an update of the status of the Weil conjecture. He said that he would not

be surprised if one of these young people would come up with a solution..."

... did he mention any names?

"He mentioned Deligne and Bombieri. He thought so because he suspected that only one new idea would be needed to overcome the present deadlock."

And he was right?

"As usual he was, although the new idea was far from what he had hoped for and expected."

And on this we need not dwell. Was this also the last time you met him?

"No, not quite. I remember how in the evening of that final visit he walked me back to the station, barefoot. I was staying at IHÉS as usual. Actually the last time I met

"He was very pessimistic. If the world continued the way it did, there would be a time when it would be impossible to do mathematics."

him in the flesh was the following year, at the ICM at Nice. By that time there was a definite difference from before. His interest had shifted from mathematics to ecology. 'Survivre' was his great pre-occupation. I actually joined him at a meeting of 'Survivre'. Afterwards I told him that I got the impression that a majority of the participants did not share his idealism and they were only struck by his celebrity status. As to be expected he strongly disagreed. I also pressed him about mathematics. He claimed that he was still interested but there were far more important things to do."

Such as surviving?

"Yes. He was very pessimistic. If the world continued the way it did, there would be a time, soon in fact, when it among other things would be impossible to do mathematics."

He had some major ecological disaster in mind?

"Obviously."

But he was not right this time?

"Depends on what you mean by 'soon'."

Did your relations end at this point?

"No they did not, although we would never meet again, we did keep up a correspondence."

A frequent one? And on what did you correspond?

"I would not say it was frequent. Sometimes a lapse of a year would occur between letters. While initially our correspondence had always been on mathematics, after 1971 this stopped and we confined ourselves to write about commonplace things."

So it was a correspondence between friends not colleagues?

"Yes. I did once breach a mathematical topic after 1971. I had sent him a reprint of a paper I had written on the motive of a surface and dedicated to him. I also asked him a few questions about motives. He acknowledged the paper as a nice one, but as to my questions he simply wrote that he had not thought of such questions for a long time."

So there was nothing controversial about your late correspondence?

"No, with one exception, which led to a minor crisis. He had sent me his *Récoltes et Semailles*..."

... which he wrote already in the 80's but whose existence did not become more widely known until later.

"This is true. I read parts of the manuscript, which was painful enough, not the whole thing, that would have been impossible for me. It was painful not only because I had problems reading it in French, but more to the point because I disagreed with him on so many points. The matter being delicate I chose to respond only superficially. He was very disappointed by my response. I realized how depressed he must have been while writing it, and I wrote back that although I could not agree with many points, I had not behaved like a friend and regretted it very much. He accepted my apology and after that our relations resumed to normal."

But not indefinitely.

"That is true. My last letter to him was dispatched in 1991. It was returned to me stamped 'undeliverable'. After that I completely lost contact with him."

But it was not personal?

"Not in the sense, that as I subsequently learned, this was the case with all his former friends and colleagues, and that he became a recluse in the Pyrenees. On the other hand how can you experience it as not personal?"

What is your lasting impression of Grothendieck?

"Of course I admire him as being one of the greatest mathematicians of the twentieth century. But I also admire him for his human qualities."

Such as?

"His honesty and his principled stands, against the military and for the poor and the weak."

You do not find him naive in some of his stands?

"Of course he was naive. 'Improving the world' is very different from doing mathematics. But nevertheless I admire his principled stands, his refusal to compromise his convictions. His anxiety for the future of mankind was sincere, and, I am afraid, justified as well. It must have frustrated him and hurt him deeply that his mathematical friends and colleagues did not follow him and share his concerns and worries. He did not compromise, also not when it came to himself and his life. He

"I admire his principled stands, his refusal to compromise his convictions."

was logically consistent, not only in mathematics, and he accepted the consequences of it, also when it affected his personal life. This is what made his life so tragic in the end."

But this is not the way you prefer to remember him?

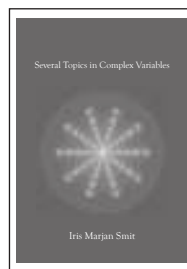
"No, it is not. I want to, and I actually do, remember him as he was when we met in Paris and Bures. He was the genius of course, but also generous and helpful as well as being cheerful and optimistic. This is the image that endures in my mind and I find myself truly privileged to have not only to have met him but to have known him."

In de verdediging

| In defence

Pas gepromoveerden brengen hun werk onder de aandacht. Heeft u tips voor deze rubriek of bent u zelf pas gepromoveerd? Laat het weten aan onze redacteur.

Redacteur: Geertje Hek
la Voie-du-Coin 7
1218 Grand-Saconnex
Zwitserland
verdediging@nieuwarchief.nl



Several Topics in Complex Variables

Iris Smit

Op 23 oktober 2015 promoveerde Iris Smit aan de Universiteit van Amsterdam op het proefschrift *Several Topics in Complex Variables*, dat ze schreef onder begeleiding van prof. dr. Jan Wiegerinck en co-promotor dr. Han Peters. De voorkant van haar proefschrift toont in wit een stervormige fractal, meer specifiek een Julia-verzameling. Julia-verzamelingen worden vaak in één adem genoemd met de welbekende Mandelbrot-verzameling en met chaos in dynamische systemen. Maar een van de ‘several topics’ die Smit bestudeerde was juist niet die Julia-verzameling maar het complement ervan, en niet chaotisch, maar juist min of meer netjes gedrag.

Complexe analyse

Smit werkte allereerst met haar promotor Jan Wiegerinck aan zogenaamde plurifijne pluripotentialtheorie. Later is ze een zijweg ingeslagen toen Han Peters haar voorstelde ook een keer aan een onderwerp in de complexe dynamica te gaan werken. Dat had ze van tevoren niet verwacht, maar het beviel haar uitstekend. Hiermee is de titel van Smits proefschrift verklaard: haar proefschrift bestaat uit drie artikelen in het vakgebied *Several Complex Variables*, het deel van de complexe analyse dat zich bezighoudt met functies van meerdere complexe veranderlijken. Wanneer je zo’n functie op een domein $U \subseteq \mathbb{C}^m$ bekijkt, zou je U natuurlijk ook als deelverzameling van $\mathbb{R}^{2m}$ kunnen beschouwen. Maar de inclusie in $\mathbb{C}$ geeft U een extra structuur, die gebruikt kan worden. De complexe analyse houdt zich bezig met eigenschappen van functies die goed verenigbaar zijn met deze complexe structuur.

Sommige eigenschappen van reële functies kunnen worden aangepast om een complexe structuur te respecteren. Een belangrijk voorbeeld hiervan is complexe differentieerbaarheid. Dit concept blijkt vele malen sterker te zijn dan zijn reële equivalent. In het bijzonder geldt dat een functie $f: U \rightarrow \mathbb{C}$ met $U \subseteq \mathbb{C}^m$ die complex differentieerbaar (of *holomorf*) is, een afgeleide heeft die ook complex differentieerbaar is. Een eigenschap die zeker niet waar is voor reële differentieerbaarheid. En daar waar reële C^∞ -functies een compacte drager kunnen hebben, zegt de Stelling van Liouville dat een globale holomorfe functie op $\mathbb{C}^m$ niet eens begrensd kan zijn, behalve als het om een constante functie gaat. De consequentie van dit alles is dat holomorfe functies heel schaars zijn in vergelijking met hun reël differentieerbare tegenhangers.

De holomorfe bijectieve functies spelen een belangrijke rol. Een holomorfe bijectie $f: U \rightarrow V$ tussen gebieden in $\mathbb{C}^m$ koppelt de punten in U en V paarsgewijs aan elkaar en behoudt daarbij de complexe structuur. Als er tussen U en V een holomorfe bijectie bestaat, zijn deze gebieden dus in zekere zin ‘hetzelfde’. U en V heten dan *biholomorf*.

Een ander veelvoorkomend thema in de complexe analyse is het vergelijken van een eendimensionale situatie met een geval waarbij een functie f van meerdere complexe veranderlijken afhangt. Over complexe analyse in één variabele is veel bekend, maar de introductie van een tweede variabele creëert allerlei nieuwe mogelijkheden.

Een jacht naar parallellen

In het algemeen kun je stellen dat de ruimtes $\mathbb{C}^1$ en $\mathbb{R}^{2m}$ vaak inspiratiebronnen zijn bij de studie van $\mathbb{C}^m$. Welke concepten hebben een analogon in $\mathbb{C}^m$? En waar houdt de analogie op te bestaan? De drie artikelen waar haar proefschrift op berust kunnen ook allemaal worden gezien als onderdeel van een jacht naar parallellen, aldus Smit. Ze hebben alle drie een centrale stelling als resultaat.

Het eerste artikel gaat over *plurifijne pluripotentialtheorie*, waarbij Smit met professor El Kadiri van de Université Mohammed V-Agdal het begrip maximaliteit uit de pluripotentialtheorie generaliseerde naar de plurifijne situatie. De woorden ‘pluri’ en ‘plurifijn’ zijn op zichzelf al een indicatie dat dit onderwerp deel uitmaakt van een systeem van analogieën en generalisaties.

Voor het tweede artikel keken Smit en Peters naar aantrekkende bassins van rijen automorfismen. Laat $f_0, f_1, f_2, \dots$ een rij holomorfe bijecties van $\mathbb{C}^m$ naar $\mathbb{C}^m$ zijn, met de oorsprong als uniform aantrekkend gezamenlijk vast punt:

$$C\|z\| \leq \|f_n(z)\| \leq D\|z\| \quad \text{voor alle } z \in \mathbb{C}^m \text{ met } \|z\| \leq 1, \\ \text{en voor alle } n \in \mathbb{N}, \text{ waarbij } 0 < C < D < 1.$$

Volgens het zogenaamde sterkere Bedford Vermoeden moet de verzameling $\Omega_{(f_n)} = \{z \in \mathbb{C}^m : f_n \circ \dots \circ f_0(z) \rightarrow 0 \text{ as } n \rightarrow \infty\}$ van punten die onder de compositie van de afbeeldingen f_n naar de oorsprong convergeren, biholomorf zijn aan $\mathbb{C}^m$.

Smit en Peters bewezen het Bedford-vermoeden in $\mathbb{C}^2$ onder de extra aanname dat $D^{11/5} < C$. Hiermee verbeterden ze het vorige record, dat op $D^{29/14} < C$ stond.

Iteraties van een polynoom en de Fatou-verzameling

Het derde artikel is eveneens gemeenschappelijk werk met Han Peters, en heeft te maken met het plaatje op de voorkant van het proefschrift. Ze bestudeerden opnieuw samenstellingen van functies, maar deze keer waren het iteraties van een *vast polynoom*; denk bijvoorbeeld aan $p(z) = z^2 + 2$. In $\mathbb{C}$ scheiden deze iteraties het complexe vlak in twee soorten punten:

1. de verzameling van punten met een begrensde voorwaartse baan: $K = \{z \in \mathbb{C} : \{p^n(z)\}_{n \in \mathbb{N}} \text{ is begrensd}\}$;
2. $\mathbb{C} \setminus K$, de overige punten in $\mathbb{C}$.

Het is deze verzameling K die de bekende, mooie fractalplaatjes oplevert, zie de afbeelding van het bekende ‘Konijn van Douady’. Indirect definieert K ook de Fatou-verzameling van $p(z)$. Die wordt gegeven door $\mathcal{F} = K^\circ \cup (\mathbb{C} \setminus K)$.

De Fatou-verzameling $\mathcal{F}$ kan ook op een andere manier gedefinieerd worden, met een definitie die ook werkt in $\mathbb{C}^m$: de Fatou-verzameling van een polynoom p op $\mathbb{C}^m$ is de grootste open deelverzameling van $\mathbb{C}^m$ waarop $\{p^n\}_{n \in \mathbb{N}}$ normaal is. Dat wil zeggen: elke deelrij van $\{p^n\}_{n \in \mathbb{N}}$ heeft een deel-deelrij die uniform convergeert op de compacte deelverzamelingen van $\mathcal{F}$. Punten die in één samenhangscomponent van de Fatou-verzameling liggen, blijven min of meer bij elkaar in de buurt onder iteraties van p . De

Julia-verzameling is per definitie gelijk aan het complement van de Fatou-verzameling. Hier kan een kleine verstoring in de startwaarde na herhaald toepassen van p juist tot een volledig ander gedrag van de rij leiden.

Peters en Smit hebben gekeken naar het gedrag van de samenhangscomponenten van $\mathcal{F}$: de Fatou-componenten. Voor een polynoom p op $\mathbb{C}$ zegt de Stelling van Sullivan dat elke Fatou-component op den duur periodiek wordt. Dat wil zeggen, er bestaan natuurlijke getallen n en $k \geq 1$ waarvoor $p^{n+k}(U) = p^n(U)$. Voor een polynoom p van twee variabelen is dit niet langer waar; nu kunnen Fatou-componenten eeuwig ronddwalen zonder ooit op dezelfde plaats terug te komen. Smit en Peters keken naar polynomen van de vorm $F(z, w) = (f(z, w), \lambda w)$ met $|\lambda| < 1$ en onderzoeken of deze situatie zwerende Fatou-componenten toelaat. Ze identificeerden een substantiële klasse van functies waarbij Sullivans stelling van toepassing is: alle Fatou-componenten worden op den duur periodiek.

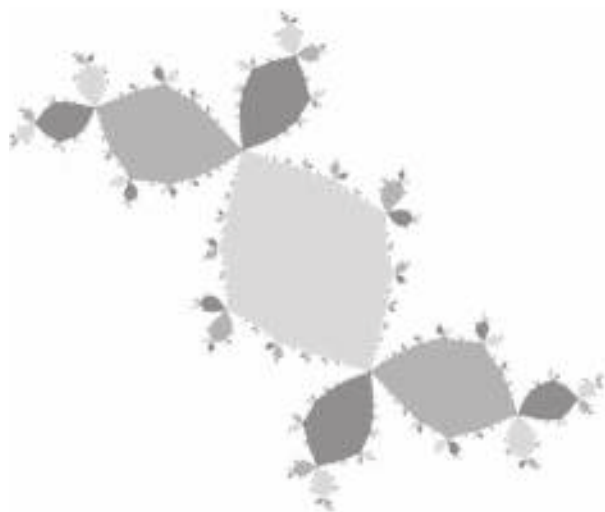
Zelf vindt Smit de centrale stelling uit haar derde artikel het mooist, waarschijnlijk vooral omdat ze het bijbehorende onderzoek erg leuk en afwisselend vond:

Stelling. Laat $F : (z, w) \mapsto (f(z, w), g(w))$ een polynomiaal scheef product zijn, en veronderstel dat $0 = g(0)$ een aantrekkend vast punt met bijbehorend aantrekkend bassin B_g is. Neem bovendien aan dat het polynoom $p(z) = f(z, 0)$ subhyperbolisch is. Dan heeft F geen dwalende Fatou-componenten bevat in B_g .

Bijzondere momenten en de toekomst

Smit herinnert zich nog goed de eerste keer dat ze het gevoel had echt zelf iets nieuws bewezen te hebben, zelfs al was dat maar een heel klein stukje. Er waren ook stressvolle momenten. Een sprong eruit: midden in de nacht realiseerde Smit zich ineens dat er een flinke fout in een bewijs zat, terwijl ze wist dat het proefschrift vrij snel afgerond moest worden. Maar dit kwam gelukkig weer goed.

In het algemeen is Smit heel positief over het leven als aio en ze heeft er dan ook voor gekozen om verder te gaan in het wiskundig onderzoek. Ze is op dit moment postdoc bij NTNU in Trondheim, Noorwegen. En daarna? De tijd zal het leren. ☺



Douady's Rabbit: $p(z) = z^2 + c$ met c zodat $p^3(0) = 0$ en $\text{Im}(c) > 0$. De grijze delen zijn de samenhangende componenten van het inwendige K° van K . De randen ervan vormen precies de Julia-verzameling.

Boekbesprekingen

| Book Reviews

Redactie: Hans Cuypers en Hans Sterk

Review Editors NAW - MF 7.092
Faculteit Wiskunde & Informatica
Technische Universiteit Eindhoven
Postbus 513
5600 MB Eindhoven

reviews@nieuwarchief.nl
www.win.tue.nl/wgreview



Lizhen Ji

Great Mathematics Books of the Twentieth Century A Personal Journey

International Press of Boston, 2014
xxiv + 667 p., prijs \$ 119
ISBN 9781571462831

For the learning of mathematics, books probably will remain indispensable. The question then is which books one should have, either for reading or for referencing. Evidently, much depends on the specific aim of the mathematician, teacher or student. The work at hand contains reviews of a virtual library of math books from the twentieth century, aimed at scholarship and learning.

This virtual library is organized according to the following chapters: 'Expository books on mathematics and mathematicians', followed by the classical trio 'Analysis', 'Algebra', 'Geometry', then 'Topology', 'Number Theory' (a long one), 'Differential Equations', 'Lie Theories' (close to the interests of the author himself), 'Mathematical Physics, Dynamical Systems and Ergodic Theory' (close to the interests of your reviewer), 'Discrete Mathematics and Combinatorics', 'Probability and Applications' with a conclusive 'Foundations of Math, Computer Science, Numerical Math'. Most of the reviews cite phrases from the *Bulletin of the AMS*, *MathSciNet* or *Zentralblatt*, but now and again the author has read the book himself and adds quotations and comments himself. Already in the chapter on expository books he gives Godfrey Hardy's famous quote from *A Mathematician's Apology*: "Beauty is the first test: there is no permanent place in the world for ugly mathematics." This test is what I would call Hardy's razor, an instrument that the author, to my opinion, has wielded quite successfully.

The book contains a great many pictures, portraits and brief descriptions of earlier math books and mathematicians. The book titles run from Euclid's *Elements*, via James Clerk Maxwell's *An Elementary Treatise on Electricity*, Sophus Lie's *Geometrie der Berührungstransformationen* and tome XI from Henri Poincaré's *Œuvres*, to Hassler Whitney's *Geometric Integration Theory*, just to mention a few. The library of the University of Michigan is fortunate to have such a rich collection! I should mention that also many photographs of this library have been included in the book.

Lizhen Ji's personal journey leads along many math books that I was fortunate enough to grow up with myself, both in the general learning process and in my later area of specialization. In the general category there are many references to Milnor and to Hermann Weyl and also to *The Feynman Lectures on Physics* and to Hawking & Ellis's *The Large Scale Structure of Space-Time*. In the more specialized category, among others, I found the following classics: Vladimir Arnold, *Mathematical Methods of Classical Mechanics*, Ralph Abraham and Jerrold Marsden, *Foundations of Mechanics*, René Thom, *Structural Stability and Morphogenesis*, Jürgen Moser, *Stable and Random Motions in Dynamical Systems*, Ricardo Mañé, *Ergodic Theory and Differentiable Dynamics*, and David Ruelle, *Thermodynamic Formalism*.

Of course, such a virtual library as this cannot be complete in any way. Nevertheless, I couldn't help myself from noticing that

John Oxtoby's *Measure and Category* is missing as well as P. Dirac's *The Principles of Quantum Mechanics*, definitely two classics.

Let me conclude this review. In the lead of the book a few colleague mathematicians have given a brief comment. Among them are the Fields Medalists Shing-Tung Yau and David Mumford. I like to quote the latter "An unusual idea: to write a catalog of the math books you love and/or respect. Anyone's personal list of 'great' books is bound to be idiosyncratic but can also be a useful complement for students to other entry points into the world of scholarly books." For me it was great fun to hold this book in my hands, browse it, and now and again read a bit. *Henk Broer*



Katrin Tent, Martin Ziegler

A course in Model Theory

Lecture Notes in Logic
Cambridge University Press/Association for
Symbolic Logic, 2012
x + 248 p., prijs £44.99
ISBN 9780521763240

Modeltheorie is een mooi vak en meer wiskundigen zouden er kennis van moeten nemen. Uit eigen ervaring weet ik dat handig toepassen van de Compactheids- en de Löwenheim–Skolem-stellingen tot snelle en overzichtelijke bewijzen kan leiden. Een van mijn favoriete voorbeelden bij de eerste is de stelling van De Bruyn en Erdős over het kleuren van grafen: als van een oneindige graaf elke eindige deelgraaf k -kleurbaar is, dan is de hele graaf ook k -kleurbaar. Een speciaal geval is de uitspraak dat, gegeven een afbeelding $f: X \rightarrow X$ zonder dekpunten, men X als vereniging van drie verzamelingen A_1 , A_2 en A_3 kan schrijven met $f[A_i] \cap A_i = \emptyset$ voor alle i . De Löwenheim–Skolem-stelling kun je vaak gebruiken als je binnen een grote structuur iets met transfinitie recursie zou willen maken; de stelling geeft in één klap een rijke deelstructuur waarin die recursie al gedaan is en je je in feite op de laatste stappen van je bewijs kunt concentreren. Na keuze van een geschikte taal is op deze manier een kort en krachtig bewijs van de partiëstelling van Erdős en Rado te geven (te vinden in Appendix C van het onderhavige boek).

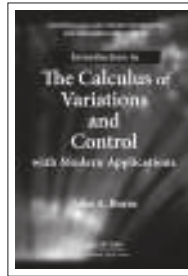
De Modeltheorie houdt niet op bij deze twee stellingen. Er is veel meer te zeggen over modellen van theorieën in het algemeen. Het onderhavige boek geeft een overzicht van een aantal begrippen die vooral in algebraïsche toepassingen van belang zijn gebleken. Hieronder vallen eliminatie van kwantoren, belangrijk voor beslisbaarheids- en volledigheidsvragen, en categoriciteit. Die laatste eigenschap van theorieën zegt dat alle modellen van een gegeven kardinaliteit, zeg κ , isomorf zijn. Hier is $\aleph_0$ speciaal: elke $\aleph_1$ -categorische theorie is categorisch in elk overaftelbaar kardinaalgetal κ , maar er zijn veel $\aleph_0$ -categorische theorieën die vele niet-isomorfe modellen van hogere kardinaliteit hebben. Andere noties die voorbijkomen zijn enkelvoudigheid, stabiliteit, ononderscheidbare elementen en nog veel meer.

Voor wie van algebraïsche toepassingen houdt is er redelijk veel uit het boek te halen, met twee caveats. De opgaven lijken soms onafhankelijk van de theorie in de hoofdstukken gekozen te zijn

en zijn niet zo ondersteunend als men zou willen. Daarnaast wordt het lezen hier en daar wel bemoeilijkt door storende drukfouten en onvolledige uitleg. Een van de hoogtepunten, een versie van een belangrijk tegenvoorbeeld van Hrushovski, wordt hierdoor nogal ontsierd. Lezing van het oorspronkelijke artikel leert dat de gebezigde notatie AB voor de vereniging $A \cup B$ staat; dat wordt in het boek niet verteld, maar in het artikel wel en ik moet zeggen dat de uitleg daar duidelijker is dan in het boek.

Met enige voorzichtigheid lezen.

K.P. Hart



John A. Burns

Introduction to the Calculus of Variations and Control with Modern Applications

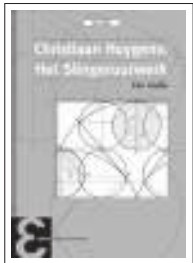
Chapman & Hall/CRC Applied Mathematics
& Nonlinear Science Series
CRC Press, 2014
ix + 544 p., prijs £76.99
ISBN 9781466571396

As the author writes on the first pages of his book, the calculus of variations is very strongly linked to applications. It started with the brachistochrone problem followed by many other applications. Since these problems appear in domains outside mathematics, the author has decided to assume as little 'advanced mathematics' as possible. Thus the reader may find the necessary mathematical machinery within the book. I think this is a very good idea. Working at an applied math department within a technical university, I meet many students who want to learn about variational methods, but lack the mathematical background. It is often difficult to refer them to a textbook that they could read independently. The present book, however, is such a textbook. With the many remarks and examples, it points the students to the power of the variational methods, but also to its difficulties. For instance, Perron's paradox is well explained, showing that assuming that the optimal solution exists, can already lead to wrong answers.

The chapters follow each other in a natural order. First there are the motivation examples, including some non-expected ones like on numerical approximations. After sections on mathematical background and setting up the variational problems, there is a chapter on necessary conditions followed by one on sufficient conditions. Before moving to the second part on optimal control problems, the author closes this first part with extensions and generalisations.

Some authors claim that optimal control is as old as variational calculus, but as the author also writes, its birth lies around 1950. Within optimal control theory a cost, depending on the functions x and u , has to be maximised under the constraint that $\dot{x}(t) = f(x(t), u(t))$. Since in many variational problems the to-be-optimized-cost is a function of x and $\dot{x}$, by simply writing $\dot{x}(t) = u(t)$, these problems can be seen as optimal control problems. The Maximum Principle gives a way to calculate the optimal control as a function of the state x and the co-state. In many applications, this makes it possible to find an explicit expression for the optimal control. Maybe the best known example of this kind is the linear quadratic optimal control problem (LQ). Here the relation between x and u is given by the linear

differential equation, $\dot{x}(t) = Ax(t) + Bu(t)$, and the cost equals $\int_0^t x(t)^T Qx(t) + u(t)^T Ru(t) dt$. Here x and u are vectors and A, B, Q and R are matrices. Furthermore, $Q \geq 0$ and $R > 0$. The LQ-problem is to minimize the cost given $x(0)$. The optimal control is given as a feedback, i.e., $u(t) = P(t)x(t)$, where P satisfies the Riccati differential equation. This and much more is explained in a very detailed and readable way. As mentioned above, it is a very pleasant book to study from and/or to teach from. *Hans Zwart*



Jan Aarts

**Christiaan Huygens: het Slingeruurwerk
Een studie**

Epsilon Uitgaven, 2015
xx + 256 p., prijs € 32,00
ISBN 9789050411516

Christiaan Huygens (1629–1695) was onvergelijkbaar, schreef Gottfried Wilhelm Leibniz (1646–1716) bij zijn overlijden: “Vir incomparabilis, Christianus Hugenius.” En daarmee zei hij niets te veel en niets te weinig. Huygens was inderdaad een briljante wiskundige, die een feilloze intuïtie koppelde aan een onwrikbare strengheid. Hij was ook een erg zeventiende-eeuwse wiskundige die zich de analytische benadering van de klassieke meetkunde volledig eigen had gemaakt, en inventief gebruik maakte van benaderingsmethoden en evenredigheden. Mijn kleine Archimedes noemde zijn vader hem terecht. Wis- en natuurkunde vielen in zijn werk volledig samen en in die zin was hij met zijn optica, mechanica, en musica de grootste wiskundige van zijn tijd. On-zeventiende-eeuws was daarbij zijn gebrek aan interesse voor filosofische vragen — daar duidde Leibniz ook op.

De calculus zouden zijn navolgers Leibniz en Newton ontwikkelen; Huygens dacht nog klassiek meetkundig — hij zag verhoudingen in en tussen figuren. Dat maakt zijn werk voor een hedendaagse wiskundige weliswaar taai, maar dankzij Huygens’ inventiviteit valt er meer dan genoeg te beleven. Jan Aarts heeft de mogelijkheid geschapen op avontuur te gaan door het magnum opus van Huygens: *Horologium Oscillatorium sive De Motu Pendulorum ad Horologio Aptato Demonstrationes Geometricae* (1673). Het is, zoals de titel al duidelijk maakt, Huygens ten voeten uit: een beschrijving van zijn slingeruurwerk plus de theorie van de slingerbeweging plus de onderliggende wiskunde. En dat alles grondiger dan strikt noodzakelijk voor de verantwoording van de centrale vondst, de tautochronie van de cycloïde: als de baan van een slinger een cycloïde is, is de periode onafhankelijk van de uitwijking.

Met een vertaling en af en toe bewerking van een groot deel van de oorspronkelijke tekst laat Jan Aarts zien hoe Huygens zijn betoog opbouwt en zijn bewijsvoering uitwerkt. De vertaling is hier en daar vrij, soms wat ongelukkig (waarom gewelfd in plaats van gewoon hol voor ‘cava’, p. 76). Keuzes die gemaakt worden voor selectie uit en aanpassingen van de oorspronkelijke tekst worden jammer genoeg niet verantwoord, daarvoor moet het origineel erbij gehaald worden. De lezer loopt daardoor de aanbiedingsbrief mis — aan Lodewijk XIV, midden in het rampjaar! — alsmede Huy-

gens’ inleidende woorden. Jammer is ook dat de originele figuren vervangen zijn door nieuwe, die weinig toevoegen en hier en daar zelfs afdoen aan de heldere lijn van Huygens’ diagrammen. Veel historische context krijgt de lezer er niet bij, bijvoorbeeld over de state of the art van midden-zeventiende-eeuwse wiskunde. Tot mijn verrassing blijft de grootste vondst van Huygens impliciet: het slingeruurwerk uit 1656, waarmee hij kans zag de regelmaat van de slinger te gebruiken om een klok te regelen. Op dezelfde manier ziet Aarts schijnbaar over het hoofd dat Huygens met zijn conische slinger in staat was een eerste nauwkeurige bepaling van g te maken, iets waarvan Newton dankbaar gebruik maakte. Daartegenover staat echter zijn aanstekelijke enthousiasme voor Huygens’ prestaties, dat uitnodigt om daadwerkelijk in de wiskunde van *Het Slingeruurwerk* te duiken. *Fokko Jan Dijksterhuis*



Michael Harris

**Mathematics without Apologies
Portrait of a Problematic Vocation**

Princeton University Press, 2015
xxii + 438 p., prijs \$ 29.95
ISBN 9780691154237

Het leek een intrigerend boek, de 21ste-eeuwse tegenhanger van Hardy’s klassieker, dat ik als student gelezen had en dus bood ik aan het boek te recenseren. Nadat het boek gearriveerd was, bladerde ik het door, las hier een alinea, daar een bladzijde en ik stuitte op zinnen als deze: “The Cole brothers’ use of citation indices to quantify visibility and influence is characteristic of the Mertonian school that dominates what, taking a hint from philosopher David Corfield, one might call the encyclopedic tendency in sociology of science. Corfield borrowed the term to adapt Alasdair MacIntyre’s tripartite division of ‘moral inquiry’ to the philosophy of mathematics.” Wat staat hier? En hoe vallen zinnen als deze (en het boek staat er vol van) te rijmen met de ambitie van de auteur om wiskunde uit te leggen aan “those whose lives are not necessarily bound up with mathematics”, wat toch het overgrote deel van de mensheid is? En draagt dit soort proza bij aan wat volgens de auteur het eigenlijke onderwerp van het boek is, namelijk “how it feels to live a mathematician’s double life: one life within this framework of professional autonomy, answerable only to our colleagues, and the other life in the wild at large.”

Het boek, kortom, staat vol met verwijzingen (en verwijzingen binnen verwijzingen) naar, uiteraard, wiskundigen, maar ook naar filosofen (Kant, Nietzsche, Lacan) en sociologen (Kuhn). Het effect is dat er bakken geleerdheid en belesenheid over de lezer worden uitgestort, die, althans voor deze recensent, maar niet willen beklijven. Verward ging ik op zoek naar andere recensies, in de hoop, ik geef het toe, lotgenoten te vinden, die net als ik moeite hadden de weg in dit labrynt te vinden. Een bloemlezing: “...his style is very different, favoring density, indirectness, the post or post-post modern”, “If math has mystics, Michael Harris is one”, “It is so boring! Uses a lot of pseudo sociological arguments”, “Perhaps the goal was to ramble, but I did not get it”, “Are you thinking to

become a mathematician? If you are, then this book is for you". Het is natuurlijk een teken van zwakte om in een recensie naar andere recensies te verwijzen, maar verdient een post-postmodern boek niet een dito bespreking?

De hoofdstukken van het boek laten zich lezen (als dat het goede woord is) als opzichzelfstaande essays en een grondiger recensie dan hier ruimte voor is, zou elk hoofdstuk afzonderlijk de revue laten passeren. In plaats daarvan een willekeurige greep: Hoofdstuk 4, getiteld 'Megaloprepeia' (!), is leesbaar. Het exploreert "the common border between mathematics and morality": hoe de wiskunde via de financiële wiskunde haar onschuld verloren heeft in de crash van 2008. Tegenstanders ("Finance is criminality") van financiële wiskunde en voorstanders komen aan het woord. Niets blijkt wat het lijkt te zijn: de wiskundige James Simons, die miljarden verdiende met 'high frequency trading', waarvan het sociale nut dubieus is, steunt via de Simons Foundation beurzen, conferenties en wetenschappelijke instituten in een 'exponentially virtuous circle': wiskunde-instituten brengen superrijken voort, die op hun beurt de zuivere wiskunde in stand houden. Hoofdstuk 5 ("Bonus Chapter 5"), getiteld 'An Automorphic Reading of Thomas Pynchon's *Against the Day*' was voor mij onleesbaar, maar ik moet bekennen, dat ik *Against the Day* niet gelezen heb. Hoofdstuk 8, 'The Science of Tricks', begint met de onthulling "I am a trickster", verwijzend naar 'Harris's tensor product trick' en onderzoekt de status van 'tricks' in de wiskunde. De auteur betreft ook de verhouding van wiskundigen tot muziek in zijn beschouwingen en poneert, dat tricks in de wiskunde zich verhouden tot wiskunde als popmuziek tot klassieke muziek. Ten slotte een woord over de wiskunde, verspreid over een aantal hoofdstukken (genummerd α , β , $\beta.5$, γ en δ) en gezamenlijk getiteld 'How to Explain Number Theory at a Dinner Party'. De auteur begint met te bewijzen, dat de wortel uit 2 irrationaal is en voert de lezer via vergelijkingen (kegelsneden, Fermats 'two square theorem'), derdegraadsvergelijkingen (met als oplossingen de drie zusters Olga, Masha en Irina) en congruenties naar afsluitende beschouwingen over elliptische krommen: voor wiskundigen waarschijnlijk te weinig en voor niet-wiskundigen te veel. Samenvattend: een bizar boek, hier en daar ondoordringbaar als een oerwoud, maar ook met zo nu en dan een verrassend vergezicht. Betreden op eigen risico!

Arjen Sevenster

gitimate receiver is needed for decrypting the obtained ciphertext. This is comparable to a padlock: everyone can lock it, but only the owner of the key can open it. This distinguishing feature is crucial in ad-hoc networks like the Internet, where it is not clear ahead of time who will want to communicate (securely) with whom. Also, public-key cryptography gives rise to electronic signatures for digitally approving messages, like contracts, in a nonrepudiative way.

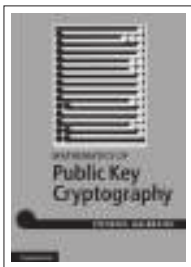
It is no big surprise that it is possible to effectively garble a message when (part of) the garbling process is secret; who hasn't thought about simple schemes for secret communication as a kid? — of course, designing schemes that withstand sophisticated cryptanalytic attacks is a different league — but how is it possible to garble a message so that it becomes unreadable even for someone who *knows precisely* how it was garbled? This sounds almost contradictory. The answer is: thanks to mathematics.

The book *Mathematics of Public Key Cryptography* by Steven D. Galbraith provides a broad and in-depth treatment of mathematical techniques that are related to and motivated by public-key cryptography. The basic ideas of public-key cryptography and simple schemes like RSA are of course easily explained; this book goes way beyond: it covers basic and advanced mathematical techniques that are essential for a deep understanding of public-key encryption (and signature) schemes and their security. This ranges from (hyper)elliptic curves to computing short vectors in lattices. The main topics of the book are: algebraic groups, factoring and discrete logarithms, and lattices — all with a focus on computational aspects and applications to cryptography — plus a discussion of various concrete (classes of) cryptographic schemes. Throughout, it is enlivened with historical remarks and anecdotes.

The book distinguishes itself from the typical cryptography textbook in that it has an opposite balance: it does the mathematics in-depth and very carefully, but keeps the cryptography rather simple (and sometimes a bit high-level). As such, it is very well suited for cryptographers that want to extend on their mathematical background and skills, or as a reference book, as well as for pure mathematicians that are interested in computational aspects and connections to cryptography. Also, with its many examples and exercises, it should serve well as basis for a course on, say, mathematical methods in cryptography.

The *Mathematics of Public Key Cryptography* is not meant to be read linearly, and this is a bit its weakness. I personally find: there is no continuous red line or natural focus — but this is maybe unavoidable given the intention of the book and its broadness. Altogether, I very much appreciate the rigorous and in-depth treatment of various aspects of public-key cryptography. Topics that are merely touched upon and/or explained in brief come along with plenty of pointers to the existing literature for further details. Certainly a book that stays in my shelf and should serve me well in the future.

Serge Fehr



Steven D. Galbraith

Mathematics of Public Key Cryptography

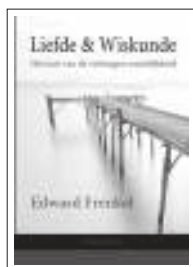
Cambridge University Press, 2012

xiv + 615 p., prijs £44.99

ISBN 9781107013926

One of the key inventions of modern cryptography is public-key (or asymmetric) cryptography. In contrast to classical symmetric cryptography, in public-key cryptography two distinctly different keys are used for encrypting and for decrypting: a *public-key* that is known to all the users in the system is used for encrypting a message, and a *secret-key* that is known exclusively to the le-

Recent verschenen publicaties. Als u een van deze boeken wilt bespreken of als u suggesties heeft voor andere boeken voor deze rubriek, laat dit dan per e-mail weten aan reviews@nieuwarchief.nl.



Edward Frenkel

Liefde & Wiskunde

Uitgeverij Novecento, 2015
 ISBN 9789491126048
novecento-uitgeverij.nl/product/liefde-wiskunde



Dana Mackenzie, Barry Cipra

What's Happening in the Mathematical Sciences **Volume 10**

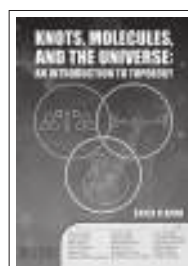
American Mathematical Society, 2015
 ISBN 9781470422042
bookstore.ams.org/happening-10



Nicholas J. Higham (ed.)

The Princeton Companion to Applied Mathematics

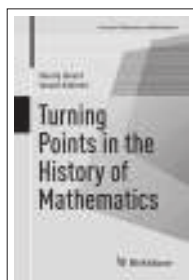
Princeton University Press, 2015
 ISBN 9780691150390
press.princeton.edu/titles/10592.html



Erica Flapan

Knots, Molecules, and the Universe **An Introduction to Topology**

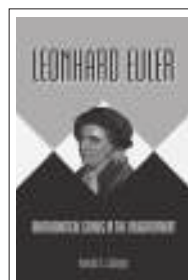
American Mathematical Society, 2016
 ISBN 9781470425357
bookstore.ams.org/mkb-96



Hardy Grant, Israel Kleiner

Turning Points in the History of Mathematics

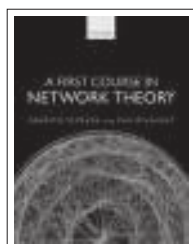
Springer, 2016
 ISBN 9781493932634
www.springer.com/9781493932634



Ronald S. Calinger

Leonhard Euler **Mathematical Genius in the Enlightenment**

Princeton University Press, 2015
 ISBN 9780691119274
press.princeton.edu/titles/10531.html



Ernesto Estrada, Philip Knight

A First Course in Network Theory

Oxford University Press, 2015
 ISBN 9780198726463
global.oup.com/academic/product/a-first-course-in-network-theory-9780198726463



Suelly Oliveira, David Stewart

Building Proofs

World Scientific, 2015
 ISBN 9789814641296
www.worldscientific.com/worldscibooks/10.1142/9418



Philip J. Aston, Anthony J. Mulholland, Katherine M.M. Tant (eds.)

UK Success Stories in Industrial Mathematics

Springer, 2016
 ISBN 9783319254524
www.springer.com/9783319254524



David Eisenbud, Joe Harris

3264 and All That **A Second Course in Algebraic Geometry**

Cambridge University Press, 2016
 ISBN 9781107602724
www.cambridge.org/9781107602724

Problemen

| Problem Section

This Problem Section is open to everyone; everybody is encouraged to send in solutions and propose problems. Group contributions are welcome.

For each problem, the most elegant correct solution will be rewarded with a book token worth €20. At times there will be a Star Problem, to which the proposer does not know any solution. For the first correct solution sent in within one year there is a prize of €100. When proposing a problem, please either include a complete solution or indicate that it is intended as a Star Problem.

Please send your submission by e-mail (LaTeX is preferred), including your name and address to problems@nieuwarchief.nl.

The deadline for solutions to the problems in this edition is 1 March 2016.

Problem A (folklore)

Let $a, b > 1$ be integers such that $2a \leq b$. Does there exist a map

$$f : \{a, a+1, \dots, b\} \rightarrow \{a, a+1, \dots, b\}$$

without fixed points, such that for all $n \in \{a, a+1, \dots, b\}$ we have $f^{f(n)}(n) = n$? Here, for a positive integer k , f^k denotes the k -fold composition

$$\underbrace{f \circ f \circ \dots \circ f}_{k \text{ times}}$$

of f .

Problem B (folklore)

Let $n \geq 3$ be an integer. Two players play the following game. Starting with a sheet of paper with the numbers 1 and 2 on them, the players take turns writing down a new number from 1 to n that is the sum of two numbers already on the sheet. The player who writes down the number n wins.

For which n does the first player have a winning strategy?

Problem C (proposed by Hendrik Lenstra)

Determine all two-sided infinite sequences of positive integers in which each number is the Euler-phi of the next.

Edition 2015-3 We received solutions from Raymond van Bommel, Josephine Buskes, Alex Heinis, Thijmen Krebs, Hendrik Reuvers, Guido Senden, Djurre Tijsma, Steven Troch, Traian Viteam and Robert van der Waall.

Redactie:

Gabriele Dalla Torre

Christophe Debry

Jinbi Jin

Marco Streng

Wouter Zomervrucht

Problemenrubriek NAW

Mathematisch Instituut

Universiteit Leiden

Postbus 9512

2300 RA Leiden

problems@nieuwarchief.nl

www.nieuwarchief.nl/problems

Problem 2015-3/A (folklore)

Determine

$$\sum_p \frac{1}{p} \prod_{q < p} \left(1 - \frac{1}{q}\right),$$

where p ranges over all prime numbers, and q ranges over all prime numbers less than p .

Solution We received solutions from Raymond van Bommel, Josephine Buskes, Alex Heinis, Thijmen Krebs, Hendrik Reuvers, Djurre Tijsma, Steven Troch, Traian Viteam and Robert van der Waall. The book token goes to Josephine Buskes, whose solution the following is based on.

In the following, sums and products always range over prime numbers. We rewrite the given series as a telescoping series:

$$\begin{aligned}\frac{1}{p} \prod_{q < p} \left(1 - \frac{1}{q}\right) &= \left(1 - \left(1 - \frac{1}{p}\right)\right) \prod_{q < p} \left(1 - \frac{1}{q}\right) \\ &= \prod_{q < p} \left(1 - \frac{1}{q}\right) - \prod_{q \leq p} \left(1 - \frac{1}{q}\right).\end{aligned}$$

As $\prod_p \left(1 - \frac{1}{p}\right) = 0$, it then follows that

$$\sum_p \frac{1}{p} \prod_{q < p} \left(1 - \frac{1}{q}\right) = 1.$$

Problem 2015-3/B (proposed by Wouter Zomervrucht)

Let $\mathbb{N} = \{0, 1, \dots\}$ denote the set of natural numbers, and let $\mathbb{N}^{2015}$ denote the set of 2015-tuples $(a(1), a(2), \dots, a(2015))$ of natural numbers. We equip $\mathbb{N}^{2015}$ with the partial order $\leq$ for which $a \leq b$ if and only if $a(k) \leq b(k)$ for all $k \in \{1, 2, \dots, 2015\}$. We say that a sequence $a_1, a_2, \dots$ in $\mathbb{N}^{2015}$ is good if for all $i < j$ we have $a_i \not\leq a_j$.

– Show that all good sequences are finite.

We say that a sequence $a_1, a_2, \dots$ in $\mathbb{N}^{2015}$ is perfect if it is good and for all i and for all $k \in \{1, 2, \dots, 2015\}$ we have $\{a_i(k) \leq 2015i\}$.

– Does there exist a positive integer N such that all perfect sequences have length at most N ?

Solution We received solutions from Raymond van Bommel, Alex Heinis and Guido Senden, and a solution of the first part from Djurre Tijsma. The book token goes to Alex Heinis, whose solution the following is based on.

For the first part, first note that every infinite sequence $x_1, x_2, \dots$ of natural numbers has a non-decreasing subsequence; indeed, we can define it recursively by setting k_1 to be the minimal index for which x_{k_1} is minimal, and by setting k_{i+1} to be the minimal index larger than k_i for which $x_{k_{i+1}} = \min_j \{x_j : x_j \geq x_{k_i}\}$ for all i .

So suppose for a contradiction that there exists an infinite good sequence $a_1, a_2, \dots$ in $\mathbb{N}^{2015}$. By passing to a subsequence at most 2015 times, we obtain an infinite good sequence $a'_1, a'_2, \dots$ in $\mathbb{N}^{2015}$ such that $a'_i(k) \leq a'_j(k)$ for all i, j, k , i.e. $a'_i \leq a'_j$ for all i, j ; a contradiction. Therefore no infinite good sequence can exist.

For the second part, suppose for a contradiction that for every positive integer N there exists a perfect sequence of length at least N . Since every good sequence is finite by the first part, this implies that there are infinitely many perfect sequences. Note that in any perfect sequence $a_1, a_2, \dots$, the i -th term is an element of the finite set $\{1, 2, \dots, 2015i\}^{2015}$.

By the pigeonhole principle, we can now recursively define a_i to be an element of $\{1, 2, \dots, 2015i\}^{2015}$ such that there are infinitely many perfect sequences that start with $a_1, a_2, \dots, a_i$. This defines an infinite sequence $a_1, a_2, \dots$. This sequence is good; for all $i < j$ we note that $a_1, a_2, \dots, a_j$ occurs as the first j terms of a perfect sequence, so $a_i \not\leq a_j$. But this contradicts the non-existence of infinite good sequences obtained in the first part.

Problem 2015-3/C (proposed by Marcel Roggeband)

The (first) Bernoulli numbers B_n for integers $n \geq 0$ are defined by the following recursive formula.

$$\begin{aligned}B_0 &= 1, \\ B_n &= -\sum_{i=0}^{n-1} \binom{n}{i} \frac{B_i}{n-i+1} \quad \text{for } n > 0.\end{aligned}$$

Show that the Bernoulli numbers satisfy the following identity for all $n > 1$

$$B_n = n! \sum_{i=1}^n \sum_{\sigma} \frac{(-1)^{i-1}}{\sigma_1! \dots \sigma_i!} \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{\sigma_i + 1} \right)$$

In this sum, σ runs through all ordered i -tuples $(\sigma_1, \dots, \sigma_i)$ of integers such that $\sigma_1 + \dots + \sigma_i = n + i - 1$ and $\sigma_j \geq 2$ for all j .

Solution We received solutions from Raymond van Bommel, Alex Heinis, Thijmen Krebs and Hendrik Reuvers. The book token goes to Hendrik Reuvers, whose solution the following is based on.

Write $C_n = \frac{B_n}{n!}$, so that the C_k satisfy $C_0 = 1$ and

$$C_n = - \sum_{i=0}^{n-1} \frac{C_i}{(n-i+1)!}.$$

Moreover, write

$$A_n = \sum_{i=1}^n \sum_{\sigma} \frac{(-1)^{i-1}}{\sigma_1! \dots \sigma_i!} \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{\sigma_i + 1} \right)$$

where in the sum, σ runs through all ordered i -tuples $(\sigma_1, \dots, \sigma_i)$ of integers such that $\sigma_1 + \dots + \sigma_i = n + i - 1$ and $\sigma_j \geq 2$ for all j .

We are done once we show that $A_n = C_n$ for all $n \geq 2$. We do so by induction on n . For $n = 2$, we have $A_n = \frac{1}{12} = C_n$. So suppose that for some $m \geq 2$ we have $A_k = C_k$ for all k such that $2 \leq k \leq m$. We then show that $A_{m+1} = C_{m+1}$.

$$\begin{aligned} C_{m+1} &= - \sum_{k=0}^m \frac{C_k}{(m-k+2)!} = \frac{-1}{(m+2)!} + \frac{\frac{1}{2}}{(m+1)!} + \sum_{k=2}^m \frac{-A_k}{(m-k+2)!} \\ &= \frac{1}{(m+1)!} \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{m+2} \right) + \sum_{k=2}^m \sum_{i=1}^k \sum_{\sigma} \frac{(-1)^i}{\sigma_1! \dots \sigma_i!} \frac{1}{(m-k+2)!} \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{\sigma_i + 1} \right), \end{aligned}$$

where in the sum, σ runs through all ordered i -tuples $(\sigma_1, \dots, \sigma_i)$ of integers such that $\sigma_1 + \dots + \sigma_i = k + i - 1$ and $\sigma_j \geq 2$ for all j .

Note that the first term in the expression obtained for C_{m+1} equals the first term of A_{m+1} . Moreover, for $i \geq 1$, the (k, i, σ) -term in the expression obtained for C_{m+1} equals the $(i+1, \sigma')$ -term of A_{m+1} , where $\sigma' = (m-k+2, \sigma_1, \dots, \sigma_i)$; this tuple is admissible since $(m-k+2) + (k+i-1) = (m+1) + (i+1) - 1$. The corresponding map $(k, i, \sigma) \mapsto (i+1, \sigma')$ on index sets is a bijection (with inverse given by $(j, \sigma') \mapsto (m+2-\sigma'_1, j-1, \sigma)$ where $\sigma = (\sigma'_2, \dots, \sigma'_j)$), as desired.

Rectification

In the list of solvers of 2015-2/A, Hendrik Reuvers was missing, but should have been there. We apologise for this omission.

