

Inhoud | Contents

Artikelen | Features

- Onderwijs | Education**
- 13 De universitaire wiskundeopleidingen beoordeeld
Frans Keune
- Boekbespreking | Book Review**
- 17 Blumenthal in Holland
Dirk van Dalen
- Interview | Interview**
- 22 Arjen Doelman: Kantelen of kapseizen?
Richard Boucherie, Jan van Neerven
- Column | Column**
- 27 Symmetries in Hamiltonian systems
Konstantinos Efsthathiou
- Vakantiecursus | Summer School**
- 29 Honderd gevangen en een gloeilamp
Hans van Ditmarsch, Barteld Kooi
- In Memoriam | Obituary**
- 37 Jan Willems: Een diepe denker
Harry Trentelman
- Ken uw klassieken | Classic Article**
- 40 Cantors diagonaalargument
Klaas Pieter Hart
- Interview | Interview**
- 44 Manjul Bhargava: "Mijn enthousiasme heeft niets te maken met wiskunde op school"
Claud Biemans
- Geschiedenis | History**
- 46 The myth of Leibniz's proof of the fundamental theorem of calculus
Viktor Blåsjö
- Afscheidsrede | Valedictory Lecture**
- 52 Fanning the flames of reason
Johan van Benthem

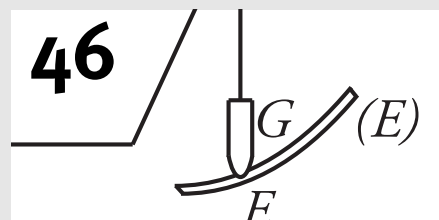
Rubrieken | Departments

- 3 Redactioneel
Richard Boucherie
- 4 Servicepagina
- 5 Agenda
Patrick Hafkenscheid
- 7 Nieuws
Patrick Hafkenscheid
- 11 Van de voorzitter
Geurt Jongbloed
- 12 Van het KWG
- 35 Het keerpunt van Eugène van Heijst
Ionica Smeets
- 51 De derde wet
- 62 In de verdediging
Geertje Hek
- 65 Boekbesprekingen
- 71 Problemen

Uitgelicht



Het boek van Volkmar Felsch over de dagboeken van Otto Blumenthal wordt besproken door Dirk van Dalen.



Was het bewijs van Leibniz van de hoofdstelling van de calculus wel een bewijs, vraagt Viktor Blåsjö zich af.

Colofon

Het Nieuw Archief voor Wiskunde is een uitgave van het Koninklijk Wiskundig Genootschap en verschijnt vier maal per jaar. Het tijdschrift richt zich op een ieder die zich beroepsmatig met wiskunde bezighoudt, als academisch of industrieel onderzoeker, student, leraar, journalist of beleidsmaker. Het stelt zich ten doel te berichten over ontwikkelingen in de wiskunde in het algemeen en in de Nederlandse wiskunde in het bijzonder.

ISSN 0028-9825

Adres

Nieuw Archief voor Wiskunde
Centrum Wiskunde & Informatica
Postbus 94079
1090 GB Amsterdam
tel. 020-5924288
redactie@nieuwarchief.nl
www.nieuwarchief.nl

Hoofredactie

Richard Boucherie (r.j.boucherie@utwente.nl)
Jan van Neerven (j.m.a.m.vanneerven@tudelft.nl)

Eindredactie/Bladmanager

Fred Drissen (fred@nieuwarchief.nl)

Redactie

Patrick Hafkenscheid (p.hafkenscheid@vu.nl)
Jan Hogendijk (j.p.hogendijk@uu.nl)
Mark Timmer (timmer@cs.utwente.nl)

Bureau redactie

Gianni van den Braak
Lætitia Diemer

Medewerkers

Hans Cuypers (TU/e), Gabriele Dalla Torre (UL), Christophe Debry (KU Leuven), Geertje Hek (UvA), Jinbi Jin (UL), Teun Koetsier (VU), Derk Pik (JSG Maimonides), Sjoerd Rienstra (TU/e), Hans Sterk (TU/e), Marco Streng (VU), Jan Ten Thije Boonkamp (TU/e), Wouter Zomervrucht (UL)

Illustraties

Ryu Tajiri, Amsterdam

Advertenties

advertenties@nieuwarchief.nl

Abonnementen/Subscriptions

Abonnementenservice NAW
Postbus 2238, 5600 CE Eindhoven
admin@wiskgenoot.nl, tel. 088-2265256

Abonnementsperiode/Subscription period

Een abonnement gaat in op de dag dat uw aanmelding ontvangen wordt. De opzegtermijn is twee maanden vóór het verstrijken van de abonnementsperiode.

The subscription starts on the day that your application is received. The term of notice is two months before the end of the current subscription period.

Exchange subscriptions

Koninklijk Wiskundig Genootschap Library
Centrum voor Wiskunde en Informatica
Postbus 94079, NL-1090 GB Amsterdam
KWG-exchange@cw.nl, fax +31 20 5924026

Vormgeving

Kitty Molenaar (ontwerp)
Susanne Laws (omslag, begeleiding binnenwerk)
Programmatuur (CONTEX)
Hans Hagen, PRAGMA-ADE, Hasselt (Overijssel)
Druk
Drukkerij Ten Brink, Meppel

Koninklijk Wiskundig Genootschap

Het Koninklijk Wiskundig Genootschap (KWG) is een landelijke vereniging van beoefenaren van de wiskunde. In 1778 opgericht onder de zinspreuk: 'Een onvermoeide arbeid komt alles te boven' is het 's werelds oudste nationale wiskundegenootschap. Leden ontvangen het Nieuw Archief voor Wiskunde als onderdeel van hun lidmaatschap.

De contributie voor gewone leden bedraagt in 2015 €90 per jaar. Voor gepensioneerden en werklozen €45. Voor studenten aio's en oio's van een Nederlandse universiteit of hbo-opleiding €35. Studenten en pas afgestudeerden kunnen een jaar lang gratis lid worden. Voor leden van de wiskundige vakverenigingen VvS+OR, NVvW en NVORWO geldt het gereduceerd tarief van €70. Leden die het Nieuw Archief voor Wiskunde niet willen ontvangen, betalen slechts €50 contributie. Losse nummers zijn te bestellen voor €20.

Members of SIAM, the *Société Mathématique de France*, the *Gesellschaft für Angewandte Mathematik und Mechanik*, the *Deutsche Mathematiker-Vereinigung*, and of the *American, Australian, Belgian, Indian, London, Spanish, and South-African Mathematical Societies* living outside of the Netherlands pay €70 instead of the full membership fee of €90 a year. Conversely, these foreign societies, as well as the VvS+OR and the NVORWO, have reduced membership fees for KWG-members. A postage charge of €10 is added for members living abroad but in Europe, and a charge of €12,50 for members living outside of Europe.

Instituten in Nederland en buitenland kunnen zich abonneren op het Nieuw Archief voor Wiskunde voor €100 (Nederland), €110 (Europa) of €112,50 (buiten Europa).

Website: www.wiskgenoot.nl

Ledenadministratie

Abonnementenservice NAW
Postbus 2238, 5600 CE Eindhoven
admin@wiskgenoot.nl, tel. 088-2265256
Bestuur (wiskgenoot@wiskgenoot.nl)

Geurt Jongbloed (TUD, voorzitter), Fetsje Bijma (VU, penningmeester), Joke Blom (CWI, secretaris), Onno van Gaans (UL), Jenneke Krüger (SLO), André Ran (VU), Herman te Riele (CWI), Arjen Sevenster, Mark Veraar (TUD)

Informatie voor auteurs

Kopij

Het Nieuw Archief voor Wiskunde is een geredigeerd tijdschrift. Kopij dient elektronisch te worden aangeboden aan de hoofdredactie. Uitgebreide informatie en auteursinstructies kunt u vinden op www.nieuwarchief.nl.

Reprints

Auteurs ontvangen een elektronische reprint in pdf-formaat.

Volgende nummers

nummer	verschijningsdatum	deadline kopij
2	01-06-2015	verstreken
3	07-09-2015	01-05-2015
4	07-12-2015	01-08-2015
1	07-03-2016	01-11-2015

Instituutsleden

De publicaties van het Koninklijk Wiskundig Genootschap worden mede mogelijk gemaakt door de bijdragen van de volgende instituten.



Centrum Wiskunde
& Informatica



Rijksuniversiteit Groningen



Universiteit van Amsterdam



Universiteit Leiden



Vrije Universiteit



Universiteit Utrecht



Technische Universiteit
Eindhoven



Eurandom



Technische Universiteit Delft



Universiteit Twente



Radboud Universiteit
Nijmegen



Freudenthal Instituut

Op het omslag

Puzzels die gaan over wat jij weet over wat een ander weet, worden kennispuzzels genoemd. Op de vakantie cursus in 2014 presenteerden Hans van Ditmarsch en Barteld Kooi hun kennispuzzel 'Honderd gevangenen en een gloeilamp'. Lees hun artikel op pagina 29.

Draagvlak

Wiskunde en rekenen staan volop in de belangstelling. Er gaat vrijwel geen dag voorbij of de rekentoets haalt de landelijke media. Goed kunnen rekenen is van groot maatschappelijk belang. Leerlingen kunnen niet goed rekenen en dat moet veranderen. Er is groot draagvlak voor goed rekenonderwijs, bij voorkeur al startend in het basisonderwijs, maar geen draagvlak voor de door de politiek voorgestelde vorm van de rekentoets. Het zou mooi zijn wanneer de politiek en het wiskundig veld op één lijn staan. Cruciaal is de rol van de docent in het aansturen van het onderwijs.

Het zijn ook mooie tijden voor het wiskundeonderwijs. Het aantal bovenbouwleerlingen in het middelbaar onderwijs met een natuurprofiel is in de afgelopen tien jaar flink gegroeid. Volgens *Facts & Figures 2014* van het Platform Bèta Techniek koos 48 procent van de bovenbouwleerlingen van havo en vwo in het schooljaar 2013/2014 voor een natuurprofiel en was dat in 2004/2005 nog 39 procent. Ook het aantal studenten dat instroomt in een wetenschappelijke studie (technische) wiskunde is de afgelopen jaren spectaculair gegroeid, van bijna 200 in 2004 tot 673 in 2013. “De wiskundeopleidingen in Nederland zijn goed”, stelt Frans Keune, de voorzitter van de visitatiecommissie die in 2013 de universitaire wiskundeopleidingen heeft beoordeeld. In dit nummer doet hij verslag.

Het afgelopen jaar is een groot aantal jonge wiskundigen aangesteld in een tenure-track-positie, deels gefinancierd uit de door het ministerie van OCW beschikbaar gestelde middelen voor de continuering van de vier wiskundeclusters DIAMANT, NDNS+, GQT en STAR. We zijn in het NAW gestart met het voorstellen van jonge wiskundigen met een persoonlijke beurs en/of een tenure-track-positie. Ook in dit nummer stelt een nieuw aangestelde tenure-tracker zich aan u voor. NWO organiseert op 19 maart 2015 een bijeenkomst van de wiskundeclusters waar veertien aangestelde tenure-trackers zich persoonlijk aan u voorstellen. U bent allen uitgenodigd!

De toekomst van deze tenure-trackers wordt mede bepaald door de *Wetenschapsvisie 2025*, die eind vorig jaar door het kabinet is gepresenteerd. Aanvankelijk leken de reacties vanuit de wetenschap op de Wetenschapsvisie gematigd positief. Toen de uitwerking van de Wetenschapsvisie voor NWO bekend werd, sloeg de stemming om. Robbert Dijkgraaf sprak van “een sluipmoord op NWO”. Bert Meijer sprak in zijn interview in het radio-programma *De Kennis van Nu* op 9 januari 2015 van “een mooie Wetenschapsvisie, drie ambities die daar staan: broedplaats voor talent, pieken op een hoogvlakte, en maatschappelijke relevantie. Wat wil je nog meer?” In datzelfde interview geeft hij ook aan dat hij is teruggetreden uit het Algemeen Bestuur van NWO omdat hij de uitwerking van de Wetenschapsvisie voor NWO niet kan steunen. “Cruciaal is de rol van de actieve wetenschapper in het aansturen van het onderzoek. De actieve wetenschapper weet waar de wetenschap heen gaat.”

Arjen Doelman geeft in dit nummer zijn reactie op de ontwikkelingen rond de Wetenschapsvisie en haar uitwerking voor NWO. Mede door alle commotie over de Wetenschapsvisie stelt hij dat NWO niet gekanteld gaat worden. Wel zal er meer sprake zijn van dwarsverbanden, die goed zijn voor de wiskunde. In het door Platform Wiskunde Nederland opgestelde rapport *Formulas for Insight and Innovation* wordt gesproken van mathematical sciences, wiskunde als spin in het web van de wetenschap. Dit betreft dan zowel de toegepaste als de nog-niet-toegepaste wiskunde. Tekenend is hier dat wiskunde in twee van de zes NWO-brede uitdagingen, namelijk Big Data en Complexiteit een centrale en sturende rol kan gaan spelen. Wiskunde heeft een groot draagvlak. Er liggen mooie tijden voor de wiskunde in het verschiet!

Richard Boucherie, hoofdredacteur
Afdeling Toegepaste Wiskunde, Universiteit Twente

Servicepagina

| Service page

Koninklijk Wiskundig Genootschap

❑ Secretariaat

Joke Blom, CWI
Postbus 94079, 1090 GB Amsterdam
wiskgenoot@wiskgenoot.nl
www.wiskgenoot.nl

❑ NMC 2015

Het 51ste Nederlands Mathematisch Congres wordt georganiseerd in Leiden op dinsdag 14 april en woensdag 15 april 2015. Plenaire sprekers: Martin Hairer (Warwick), Michel Mandjes (Amsterdam), Mikhail Katsnelson (Nijmegen), Lenny Taelman (Amsterdam) en Günter M. Ziegler (Berlin). Op dinsdag 14 april zal ook de Algemene Ledenvergadering van het KWG plaatsvinden. nmc.wiskgenoot.nl

❑ London Mathematical Society

In 2015 viert de London Mathematical Society haar 150-jarig bestaan. www.lms.ac.uk/2015

Platform Wiskunde Nederland

❑ Bureau PWN

Science Park 123, L013, 1098 XG Amsterdam
bureau@platformwiskunde.nl
pr@platformwiskunde.nl (publiciteit)
Tel: 020-5924006/06-51892525
www.platformwiskunde.nl

❑ Succesformules

Het boek *Succesformules* is online beschikbaar en kan besteld worden via de PWN-website. Inmiddels zijn er 10.000 exemplaren gedrukt en grotendeels verspreid.

❑ PWN Nieuwsbrief

PWN publiceert eens in de drie maanden een PWN Nieuwsbrief, die op de website te vinden is. Actuele PWN-informatie wordt verder zowel via de website als via Twitter gegeven.

European Mathematical Society

❑ EMS website

www.euro-math-soc.eu

❑ AMS-EMS-SPM International Meeting 2015

Jaarlijks gemeenschappelijk congres van de American Mathematical Society. Dit jaar samen met de EMS en de Sociedade Portuguesa de Matemática (SPM), van 9–12 juni 2015 in Porto, Portugal. Voor meer informatie zie <http://aep-math2015.spm.pt>.

❑ 7th European Congress of Mathematics

Het 7th European Congress of Mathematics (6ECM) zal van 18–22 juli 2016 plaatsvinden in Berlijn, Duitsland. Hier zal ook de Felix Klein Prijs worden uitgereikt. Nominaties hiervoor kunnen nog tot 31 december ingediend worden, zie www.euro-math-soc.eu/felix-klein-prize. Voor meer informatie over het congres, zie www.7ecm.de.

❑ EMS Newsletter

De elektronische versie van de meest recente uitgave van de EMS Newsletter is beschikbaar via www.ems-ph.org/publications.php.

International Mathematical Union

❑ IMU website

www.mathunion.org

❑ Nominaties Ramanujan Prijs

De Ramanujan Prijs wordt jaarlijks toegekend aan een jonge wiskundige uit een ontwikkelingsland. Nominaties voor dit jaar kunnen nog tot 15 april naar math@ictp.it worden gezonden. Voor meer informatie zie www.ictp.it/about-ictp/media-centre/news/2015/1.

❑ IMU Newsletter

The twee-maandelijks IMU Newsletter is beschikbaar via www.mathunion.org/imu-net.

Recente publicaties van het KWG

❑ **Indagationes Mathematicae** (www.elsevier.com/locate/indag, gratis toegang via 'View Articles')
Special issue 'Poisson 2012: Poisson Geometry in Mathematics and Physics', Marius Crainic, Ori Yudilevich (eds.), Volume 25, issue 5, 2014.

Special issue 'Probability and Numbers', Frits Beukers, Frank den Hollander, Robbert Fokink, Cor Kraaikamp (eds.), Volume 25, issue 4, 2014.

❑ **Epsilon Uitgaven** (www.epsilon-uitgaven.nl)

78. *Een passie voor symmetrie*, Jan van de Craats, €20, 2014.

77. *Hemelverschijnselen nabij de Horizon*, Henk Broer, €22, 2013.

76. *Inleiding in de Statistiek*, F. Bijma, M. Jonker en A. van der Vaart, €32, 2013.

75. *An Invitation to Functional Analysis*, B. de Pagter en A.C.M. van Rooij, €25, 2013.

❑ **Zebra-reeks** (Epsilon Uitgaven)

43. *De Strepen van de Zebra*, Geertje Hek, €10, 2015.

42. *Sangaku's*, Hans van Lint en Jeanne Breeman, €10, 2015.

41. *Met passer, liniaal en neuslat*, Ad Meskens en Paul Tytgat, €10, 2015.

Manuscripten voor Epsilon Uitgaven kunt u mailen naar redactie@epsilon-uitgaven.nl.

Agenda

| Upcoming Events

maart 2015

4 maart 2015

Meeting European Women in Mathematics

Wiskundelezingen door onder meer Karen Aardal (TUD) en Petra de Bont (NWO) en een discussie over gender-gerelateerde kwesties in de wiskunde.

plaats Academiegebouw, Utrecht

info uu.nl/ewmnetherlands

6 maart 2015

Van Dantzig Seminar

Landelijke lezingencyclus in de statistiek.

plaats Universiteit van Amsterdam

info few.vu.nl/~bkk320/vandantzig

12 maart 2015

VWO Docentendag

Docentendag voor bovenbouw vwo-docenten natuurkunde, wiskunde en informatica met als thema 'Licht'.

plaats TU Eindhoven

info static.tue.nl/uploads/media/Vooraankondiging_docentendag_2015.pdf

12 maart 2015

Mini-Workshop on Symplectic Geometry

Workshop over symplectische meetkunde, mede georganiseerd door Fabian Ziltener (UU) en Oliver Fabert (VU).

plaats Buys Ballot Lab, Utrecht

info math.uu.nl

13 maart 2015

2de ronde Nederlandse Wiskunde Olympiade

De tweede ronde van de Nederlandse Wiskunde Olympiade. De (ongeveer) 130 beste leerlingen gaan door naar de finale in september.

plaats Nederlandse universiteiten

info wiskundeolympiade.nl

14 maart 2015

Internationale Pi-dag

Internationale Pi-dag (3-14-15 in Amerikaanse notatie)!

plaats overal ter wereld

info piday.org

18 maart 2015

Bètabanenmarkt

31ste editie van het jaarlijkse evenement waar bedrijven en studenten uit de bèta-tak bijeenkomen.

plaats Gorlaeus Lab, Leiden

info betabanenmarkt.nl

19 maart 2015

W4Kangoeroe

WereldWijde WiskundeWedstrijd voor basis- en middelbare scholieren.

plaats eigen school

info w4kangoeroe.nl

23-27 maart 2015

YEP XII: Random walks in random environments

Workshop over random walks, mede georganiseerd door Markus Heydenreich (LU).

plaats TU Eindhoven

info eurandom.nl

23-27 maart 2015

Spring School: Kac conjectures and quiver varieties

Jaarlijkse cursus over algebra bedoeld voor promovendi en post-docs.

plaats Wuppertal

info math.uni-wuppertal.de/~reineke/spring-school15

24-25 maart 2015

ICT.OPEN 2015 'A Connected World'

Jaarlijkse bijeenkomst voor onderzoekers en geïnteresseerden vanuit de industrie die zich bezighouden met ICT-onderzoek.

plaats De Flint, Amersfoort

info ictopen.nl

24-26 maart 2015

Benelux Meeting on Systems and Control

Jaarlijkse bijeenkomst voor onderzoekers in de systeemtheorie.

plaats Center Parcs, Lommel

info beneluxmeeting.eu

25 maart 2015

Grote Rekendag

13de editie van de Grote Rekendag waarop leuke rekenactiviteiten centraal staan.

plaats scholen over het hele land

info groterekendag.nl

Suggesties voor deze agenda zijn welkom.

Redacteur: Patrick Hafkenscheid

agenda@nieuwarchief.nl

25 maart 2015

☐ **WDA-doe dag**

Bijeenkomst waar wiskundig denken centraal staat, georganiseerd door SLO en Platform Wiskunde Nederland.

plaats Utrecht

info platformwiskunde.nl

30 maart – 2 april 2015

☐ **Workshop Random Motion in Random Media**

Workshop waarin de random walk centraal staat, mede georganiseerd door Luca Avena (LU).

plaats TU Eindhoven

info eurandom.nl

april 2015

10 april 2015

☐ **Leve de Wiskunde!**

Het jaarlijkse wiskundecongres voor inzicht in de actuele ontwikkelingen in de wiskunde, voor docenten en leerlingen.

plaats UvA, Science Park, Amsterdam

info betaonderwijs.uva.nl

13–17 april 2015

☐ **Brain Equations: Challenges and Next Generation Mathematical Models**

Workshop mede georganiseerd door Stephan van Gils (UT) en Paul Tiesinga (RU).

plaats Lorentz Center@Snellius, Leiden

info lorentzcenter.nl

14–15 april 2015

☐ **NMC 2015**

51ste Nederlands Mathematisch Congres, jaarlijkse bijeenkomst van wiskundig Nederland.

plaats Leiden

info nmc.wiskgenoot.nl

14–16 april 2015

☐ **Workshop Random Walks on Random Graphs and applications**

Workshop over random walks, mede georganiseerd door Tim Hulshof (TU/e) en Remco van der Hofstad (TU/e).

plaats TU Eindhoven

info eurandom.tue.nl

14–20 april 2015

☐ **European Girls' Mathematical Olympiad**

Derde editie van deze Europese wiskundewedstrijd speciaal voor meisjes.

plaats Minsk, Wit-Rusland

info wiskundeolympiade.nl

mei 2015

8–10 mei 2015

☐ **Benelux Mathematical Olympiad**

De Benelux-versie van de wiskundeolympiade, dit jaar in Luxemburg.

plaats Mersch, Luxemburg

info wiskundeolympiade.nl

17 mei 2015

☐ **Helden van de wetenschap: Galileo Galilei**

Paradisolezing van prof.dr. Frans van Lunteren over zijn historische held Galileo Galilei.

plaats Paradiso, Amsterdam

info knao.nl

22 mei 2015

☐ **Kaleidoscoopdag 2015**

Landelijk wiskundesymposium voor studenten wiskunde (technisch en niet-technisch).

plaats Universiteit Twente

info abacus.utwente.nl

juni 2015

1–5 juni 2015

☐ **Geometric Invariants and Spectral Curves**

Workshop over spectrale curven in de meetkunde, mede georganiseerd door Sergey Shadrin (UvA).

plaats Lorentz Center@Oort, Leiden

info lorentzcenter.nl

4 juni 2015

☐ **CWI in Bedrijf 2015**

Bijeenkomst waar bedrijven onderzoekers van het CWI kunnen ontmoeten.

plaats Science Park, Amsterdam

info cwi.nl

15–19 juni 2015

☐ **Dynamics and Geometry**

Workshop mede georganiseerd door Heinz Hanßmann (UU) en Igor Hoveijn, Gert Vegter en Holger Waalkens (RUG).

plaats Lorentz Center@Oort, Leiden

info lorentzcenter.nl

24–27 juni 2015

☐ **ICTMT 12**

12de internationale conferentie over het gebruik van technologie in wiskundeonderwijs.

plaats Faro, Portugal

info ictmt12

juli 2015

3–15 juli 2015

☐ **Internationale Wiskunde Olympiade**

Internationale finale van de wiskundeolympiade, dit jaar in Thailand.

plaats Chian Mai, Thailand

info wiskundeolympiade.nl

6–10 juli 2015

☐ **European Meeting of Statisticians**

Tweejaarlijkse bijeenkomst voor onderzoekers in de statistiek vanuit heel Europa.

plaats Vrije Universiteit, Amsterdam

info ems2015.nl

Nieuws

| News

Voor het eerst antimaterie uit bliksem gemodelleerd

In hevige onweersbuien komen zulke hoge elektrische velden voor, dat er hoogenergetische straling — zoals röntgen- en gammastraling — kan worden opgewekt. Er kan zelfs antimaterie ontstaan. De zeer complexe wisselwerking tussen hoge elektrische velden en deeltjes in onweersbuien was tot nu toe theoretisch niet goed beschreven. Christoph Köhn, promovendus van het Centrum Wiskunde & Informatica (CWI) in Amsterdam, modelleerde en simuleerde deze processen op een nieuwe manier. Op dinsdag 28 oktober 2014 promoveerde hij aan de Technische Universiteit Eindhoven op zijn proefschrift *High-energy phenomena in laboratory and thunderstorm discharges*. In zijn onderzoek berekent hij onder andere voor het eerst hoe bliksem deeltjes kan creëren zoals positronen — antimaterie — en neutronen en protonen.

In 2011 werd toevallig door een satelliet voor het eerst antimaterie gedetecteerd die in sterke onweersbuien was ontstaan. Die antimaterie bestond uit positronen — de antideeltjes van elektronen. Al eerder was vanuit satellieten en vliegtuigen het ontstaan gemeten van röntgen- en gammastraling (straling met de hoogste energie op aarde, die anders voornamelijk in radioactief verval vrijkomt) bij bliksem. “Het is om verschillende redenen niet goed om boven onweer te vliegen, en deze straling is er een van”, aldus de promovendus. “We begrijpen nu dat bliksem een natuurlijke deeltjesversneller is. Toch hoeven mensen zich niet direct grote zorgen over de straling te maken. Als er een heftige bliksemschicht recht op je afkomt, zijn er andere problemen om je eerst over te bekommeren.”

Tijdens zijn onderzoek berekende de promovendus als een van de eersten kwantitatief hoe de productie van een veelheid aan deeltjes — elektronen, fotonen, positronen, protonen en neutronen — bij bliksem in zijn werk gaat. Zijn modellen en simulaties komen goed overeen met experimenten.

“Onze simulaties zijn beter dan die van de concurrenten”, aldus Köhn. “We modelleerden de productie en beweging van deze deeltjes met een techniek waarmee individuele deeltjes kunnen worden gevolgd. We gebruikten speciale wiskundige methodes en hebben nieuwe factoren aan de berekeningen toegevoegd. Het bijzondere van onze methode is dat hij niet alleen de elektronbeweging voor heel hoge of juist heel lage energieën beschrijft maar ook voor het tussenliggende gebied. Dat laatste is echt nieuw. Wij laten daarmee bijvoorbeeld zien dat er behoorlijk veel positronen met energieën van enkele MeV worden geproduceerd, die enkele kilometers boven hun bron kunnen worden gemeten. Dus als je de volgende keer bliksem ziet, dan kun je op je vingers natellen dat er ook antimaterie ontstaat.”

Köhn deed zijn onderzoek in de CWI-onderzoeksgroep Multiscale Dynamics van ‘bliksemprofessor’ Ute Ebert. Het onderzoek werd mede gefinancierd door STW.

Annette Kik

Deze rubriek is een kroniek van wiskundige activiteiten in Nederland. Toekomstige activiteiten worden aangekondigd en van voorbijgaande activiteiten wordt verslag gedaan. Wilt u uw aankondiging of verslag in deze rubriek geplaatst zien? Stuur ons dan uw bijdrage van ± 350 woorden, zo mogelijk met illustratie. De redactie behoudt zich het recht voor berichten te weigeren of in te korten.

Redacteur: Patrick Hafkenscheid

nieuws@nieuwarchief.nl



Foto: Hansueli Krapf

Vogels in een bus

Iedereen heeft het zich als kind (of volwassene) wel eens afgevraagd: als je een vrachtwagen vollaadt met vogels die vliegen, wordt de vrachtwagen dan lichter? Het antwoord is tweeledig, zo zegt David Lentink, een onderzoeker aan Stanford.

De wagen wordt inderdaad lichter, maar dit duurt niet zo lang. Direct na het gewichtsverlies wordt de truck ineens zwaarder, verrassend genoeg is het verschil twee keer zo groot als het gezamenlijke gewicht van de vogels.

Lentink heeft met zijn team een systeem ontwikkeld dat de aerodynamische krachten kan meten van een vogel tijdens de vlucht. Dit was geen gemakkelijke taak, de meeste weegschalen hebben een tijd nodig om het gewicht te bepalen, en de krachten die ontstaan tijdens het bewegen van de vleugels kunnen in een seconde een aantal keer veranderen.

Het team kwam tot de conclusie dat zodra de vogels hun vleugels opwaarts bewegen, de vogels bijna geen gewicht hebben. Bij de neerwaartse beweging ontstaat er echter een verticale kracht van de luchtstroom naar beneden die inderdaad twee keer krachtiger is dan het gewicht van de vogels.

Lentink verwacht dat zijn model ook gebruikt kan worden om veel andere aerodynamische vraagstukken op te lossen, zoals de constructie van biologisch-gebaseerde drones.

newscientist.com



Foto: Cephas

Jos Baeten aangesteld als hoogleraar aan de UvA

CWI-directeur Jos Baeten is benoemd tot hoogleraar Theory of Computing aan de afdeling Wiskunde en Informatica van de Universiteit van Amsterdam. Het betreft een deeltijdaanstelling, zodat het mogelijk is om zijn directeurschap voort te zetten.

Baeten onderzoekt momenteel berekenbaarheid in de theoretische informatica. Eerder heeft hij zich beziggehouden met diverse andere onderwerpen in de theoretische informatica, waaronder formele methoden in de procesalgebra.

Tijdens de aanstelling aan het ILLC (Institute for Logic, Language and Computation) op de Universiteit van Amsterdam zal Baeten zich met name bezighouden met onderwijstaken en begeleiding van promovendi.

Baeten is sinds 2011 algemeen directeur van het CWI. Al eerder was hij hoogleraar theoretische informatica aan de Technische Universiteit Eindhoven, deze taak had hij voor twee termijnen op zich genomen.

cwi.nl

Delftse studenten maken kunstwerk over lantaarnpalen

De TU Delft staat deze periode in het zonnetje, met verschillende nieuwsberichten over licht! Allereerst hebben studenten van de TU Delft op het Amsterdam Light Festival een opstelling gemaakt genaamd *Street Light Evolution*. Hierin zetten de studenten het ontwerp van de eerste tot de moderne lantaarnpaal letterlijk in de spotlight.

Student industrieel ontwerpen Koen Fraijman kwam met het idee, en samen met twaalf honours-studenten hebben ze het werk gerealiseerd. Het kunstwerk bestaat uit zes lantaarnpalen. Het oudste model is uit 1663 en de modernste paal is de *tablet*-lantaarnpaal met LED-verlichting.

tudelft.nl



Foto: Willem Verstraen

TU Delft breekt zonnecelrecord

Promovendus Hairan Tan van de TU Delft heeft een nieuw wereldrecord gevestigd met betrekking tot de initiële efficiëntie (14,8 procent) van een dunne-film silicium tandemzonnecel. Hij deed dat tijdens de zesde World Conference on Photovoltaic Energy Conversion (23–28 november gehouden in Kyoto). Tan, begeleid door dr. Arno Smets en professor Miro Zeman, ontving de Young Researcher Award voor zijn prestaties.

De verbetering kwam tot stand vanwege een combinatie van drie aspecten. Allereerst was er een betere benutting van het zonnespectrum, dit werd gedaan door twee lagen zonnecellen met diverse absorptiematerialen op elkaar te plaatsen.

Het tweede aspect had te maken met de oppervlaktetextuur die Tan ontwikkeld had, en waarop de TU Delft een octrooi heeft.

Het laatste aspect was het materiaal dat gebruikt werd. Er werd een combinatie van amorf en kristallijn silicium verwerkt in de cellen. Deze materialen hebben buitengewone elektronische eigenschappen. Bij het maken van de cel was onder andere promovendus Andrea Ingenito verbonden.

tudelft.nl

Johan van Leeuwen nieuw lid van De Jonge Akademie

Jaarlijks kiest De Jonge Akademie tien nieuwe, talentvolle onderzoekers om haar gelederen te versterken. De Jonge Akademie is binnen de KNAW een zelfstandig platform van jonge topwetenschappers, met activiteiten op het gebied van interdisciplinariteit, wetenschapsbeleid en wetenschap en samenleving.

Dit jaar is ook professor Johan van Leeuwen uitgenodigd om plaats te nemen in De Jonge Akademie. Van Leeuwen is hoogleraar wiskunde en informatica aan de Technische Universiteit Eindhoven. Hij doet onderzoek naar complexe netwerken, bijvoorbeeld communicatienetwerken zoals het internet of sociale netwerken. Ook is hij een van de lanceerders van het Data Science Center Eindhoven, en het NWO-programma NETWORKS.

Naast bewezen wetenschappelijke kwaliteit beschikken leden over een brede belangstelling voor wetenschapsbeoefening en wetenschapscommunicatie. Een lidmaatschap is voor vijf jaar. De officiële installatie van de nieuwe leden vindt plaats op 26 maart 2015 in het Trippenhuys van de KNAW.
dejongeakademie.nl

Nerdalize krijgt subsidie

Het aan de Rijksuniversiteit Groningen gebonden project Nerdalize is een van de acht wetenschappelijke start-ups die een ministeriële subsidie ontvangen in de vorm van een lening van 250.000 euro.

Nerdalize is een project dat inspeelt op de enorme energie die het kost voor grote datacentra om hun computers te koelen, tegenover het verwarmen van huizen. Het bedrijf heeft als doel om speciale computers te installeren in huizen van mensen. Op deze manier wordt het huis verwarmd en de computer (die dan ingewikkelde berekeningen zal uitvoeren) gekoeld.

Het idee is dat de zogenaamde *Grid Heater* geen geld kost voor de bewoners, ze kunnen de energiekosten terugvragen van Nerdalize. De berekeningskracht zal worden verkocht aan de industrie en de academische wereld.
rijksoverheid.nl

Negen wiskundestudenten winnen Jong Talent Aanmoedigingsprijs

Op 28 november ontvingen negen studenten in de wiskunde en technische wiskunde bij de Koninklijke Hollandse Maatschappij der Wetenschappen te Haarlem een Jong Talent Aanmoedigingsprijs van vijf-honderd euro voor hun studieresultaten in het eerste studiejaar. Zij behaalden de beste studieresultaten. Deze prijzen zijn beschikbaar gesteld door ORTEC om de studie in wiskunde te stimuleren. Gerrit Timmer, CFO ORTEC, reikte de prijzen uit aan: Diko Hemminga (VU), Jasper Bouman (UL), Irina Chisop (RUG), Gerrit Vos (TUD), Jeremy van der Heijden (UvA), Jasmijn Manders (UT), Ragnar Groot Koerkamp (UU), Giuseppe Carere (RU) en Monique Huveneers (TU/e). In totaal werden er 51 Jong Talent Aanmoedigingsprijzen uitgereikt aan jonge talenten in de technische en exacte vakken. Daarnaast werden er nog elf Afstudeerprijzen (van 2000 tot 5000 euro) uitgereikt. Criteria voor de Jong Talent Afstudeerprijzen zijn het innovatieve karakter, de theoretische onderbouwing en de betekenis voor de maatschappij. De jurering en de prijsuitreiking wordt jaarlijks verzorgd door de Koninklijke Hollandse Maatschappij der Wetenschappen.
Janny Terlouw

Mochizuki boos op de wiskundegemeenschap

Het is al weer een tijdje geleden (september 2012) dat Shinichi Mochizuki zijn bewijs voor het *abc*-vermoeden publiekelijk gemaakt heeft. Het *abc*-vermoeden is een belangrijk vermoeden uit de getaltheorie dat te maken heeft met getallen $a = b + c$. Een voorbeeld van een gevolg als het vermoeden waar blijkt te zijn, is dat het heel gemakkelijk de stelling van Fermat bewijst.

Het originele artikel waarin Mochizuki beweert te bewijzen dat het vermoeden waar is, telt zo'n kleine 500 pagina's met een hele hoop technische details. Een aantal wiskundigen heeft zich over het probleem van het controleren van het bewijs gebogen, maar tot nu toe is er nog geen grote vooruitgang. Tot grote onvrede van Mochizuki. Hij heeft nu een verslag geschreven van alle dingen die hij heeft geprobeerd om zijn theorie uit te leggen aan anderen, het probleem zit hem in het onafhankelijk blijven van de peer-reviewers.

Het verhaal doet denken aan Grigori Perelmans bewijs van het vermoeden van Poincaré, en het terugtrekken van Perelman uit het publieke domein omdat de wiskundegemeenschap zijn bewijs niet voldoende zou begrijpen.
newscientist.com

Auto-ontwerp is 'fishy'

Een recent ontwerp voor een nieuwe *bionische* auto heeft wetenschappers van de Rijksuniversiteit Groningen beziggehouden. Het gaat om de auto die gemodelleerd is naar een type vis die *koffervis* genoemd wordt. Het ontwerp was naar eigen zeggen gebaseerd op miljoenen jaren van evolutie. De koffervissen zouden een hele lage weerstandscoëfficiënt hebben waardoor de auto efficiënter wordt op de weg. Ook had dit te maken met de stabiliteit die de vorm van de koffervissen heeft bij het zwemmen.

Er was echter een klein probleem. De koffervis bleek helemaal geen gebruik te maken van deze eigenschappen. De vis zwemt over het algemeen heel langzaam, en maakt veel kleine bochtjes, waardoor het helemaal niet nodig is om stabiel te blijven bij hoge snelheden.

Nieuwe simulaties die gedaan werden door de onderzoekers van de RUG, met behulp van watertanks, toonden aan dat de weerstandscoëfficiënt veel hoger lag dan verwacht. Ook bleek dat eigenlijk van stabiliteit helemaal geen sprake was, de koffervissen moeten heel veel bijsturen met hun achtervin!

De resultaten van het onderzoek zijn gepubliceerd in het tijdschrift *Interface*.
rug.nl



Foto: Adrian Moody

Mark Timmer wint Overijssel PhD-Award

Mark Timmer heeft dit jaar de Overijssel PhD-Award gewonnen voor zijn proefschrift getiteld *Efficient Modelling, Generation and Analysis of Markov Automata*. In zijn promotieonderzoek richtte Timmer zich op *quantitative model checking*, een vakgebied dat zich bezighoudt met het analyseren van de prestaties en de betrouwbaarheid van computersystemen. Hij ontwikkelde technieken om dit gedetailleerder en efficiënter te controleren.

De Overijssel PhD-Award is een prijs voor een dissertatie van uitnemende wetenschappelijke kwaliteit, die gezien kan worden als een start van een veelbelovende wetenschappelijke carrière. De Overijssel PhD-Award wordt mede mogelijk gemaakt door de Provincie Overijssel.

en bedraagt 5000 euro en een oorkonde. Voor deze prijs kan iedere faculteit en ieder onderzoeksinstituut één proefschrift inleveren. De commissaris van de Koning van Overijssel reikt de prijs ieder jaar uit tijdens de Dies Natalis.

Momenteel is Mark Timmer aan de slag als fulltime wiskundeleeraar. Hij zegt dat hij lesgeven toch nog iets leuker vindt dan onderzoek.

utwente.nl

André Ran nieuwe Desmond Tutu Professor

Sinds 1 februari 2015 is André Ran de nieuwe Desmond Tutu Professor. Hij heeft hiermee Rienk van Grondelle opgevolgd. André Ran is werkzaam als hoogleraar Operator Theory, lineaire systemen en Control Theory aan de Vrije Universiteit Amsterdam.

Het Desmond Tutu Training Programme (DTTP) is een academisch samenwerkingsprogramma voor begeleiding van promovendi, gericht op het thema 'Bridging Diversities for Academic Advancement'. Het DTTP werd in 2007 ingesteld ter gelegenheid van een bezoek van aartsbischop Desmond Tutu aan de Vrije Universiteit. De VU eert met deze leerstoel Desmond Tutu's levenslange en geweldloze inzet voor een rechtvaardiger (wereld)samenleving. Tutu is een internationaal symbool voor vrede en verzoening dankzij zijn niet-aflatende strijd tegen apartheid, waarvoor hij in 1984 de Nobelprijs voor de Vrede ontving, en zijn voorzitterschap van de Waarheids- en Verzoeningscommissie in Zuid-Afrika.

vu.nl



Foto: Kristen Opalinski

Beste kerststrategie

Het is een traditie in Engeland om tijdens het kerstdiner iedereen een *christmas cracker* te laten openen (een soort groot trekroosje, ook wel 'knaalbonbon' genoemd). Iedereen gaat in een kring zitten en kruist de armen, ieder paar krijgt een cracker en trekt aan één van de kanten. Dan krijgt één van de twee een cadeautje.

Dit systeem is duidelijk niet helemaal eerlijk. Er bestaat een kans van één op vier dat iemand geen cadeautje krijgt. Statistisch onderzoek, gepubliceerd in *Significance*, toont nu aan dat er vijftien crackers nodig zijn voor een kerstdiner van tien mensen. Dit zou genoeg moeten zijn om iedereen vrolijk naar huis te sturen!

De statistici hebben dit onderzocht door 10.000 feestjes te simuleren met een aantal gasten variërend van 2 tot 50. Verder blijkt de

traditionele methode van in een kring zitten tijdens het cracker-trekken ook niet ideaal te zijn! Beter is om paren afzonderlijk te laten trekken totdat iedereen een cadeautje heeft.

eurekalert.org



Ruben Stienstra wint ASML Afstudeerprijs

De ASML Afstudeerprijs voor Wiskunde (van € 2000) van de Koninklijke Hollandse Maatschappij der Wetenschappen is dit jaar gewonnen door voormalig masterstudent van de Radboud Universiteit Ruben Stienstra (inmiddels promovendus in de afdeling mathematische fysica), voor zijn masterscriptie *Complete Motion in Classical and Quantum Mechanics*. De prijs werd op 28 november op dezelfde locatie als de Jong Talent aanmoedigingsprijzen uitgereikt in Haarlem.

ru.nl

Gauss-tool onthuld bij het Wintersymposium

Tijdens het Wintersymposium van het Koninklijk Wiskundig Genootschap is de *Gauss-tool* gepresenteerd. Dit stukje gereedschap, dat iets weg heeft van een geodriehoek, is bedoeld als hulpmiddel voor scholieren en studenten die statistiek doen.

De Gauss-tool is bedacht door Sjuup Rekko, en ontleend zijn naam aan de gaussverdeling (normale verdeling) die veel gebruikt wordt in de statistiek. Het idee is dat er met behulp van deze tool een goede benadering van de normale verdeling kan worden getekend en hieruit bepaalde informatie snel kan worden afgelezen.

Het berekenen en gebruiken van de normale verdeling is over het algemeen een technische handeling waar leerlingen moeite mee hebben omdat er weinig intuïtie bij komt kijken. Het gebruik van de Gauss-tool kan leerlingen dan alvast een schatting geven ter controle van de berekeningen.

gausstool.com



Van de voorzitter van het KWG

Handen uit de mouwen



In wiskundig Nederland is veel gaande. Daar hoeft u als lezer van dit tijdschrift niet van overtuigd te worden. Het bestuur van het Koninklijk Wiskundig Genootschap (KWG) speelt hierin uiteraard een rol. Zonder op alle zaken in te willen gaan waar we als bestuur de schouders onder zetten, wil ik in deze bijdrage een korte impressie geven van belangrijke zaken waarmee we bezig zijn.

Om te beginnen zijn er de ‘standaard activiteiten’. Dit klinkt niet spannend. Toch zijn die activiteiten dat wel! Het gaat hier om de zaken die soms al sinds jaar en dag onder verantwoordelijkheid van het KWG vallen. Denk aan publicaties als *Pythagoras*, het *Nieuw Archief voor Wiskunde* en *Indagationes Mathematicae*, maar ook aan symposia als het Wintersymposium en het Nederlands Mathematisch Congres (NMC). Als bestuur vinden we het een voorrecht dat veel enthousiaste mensen bezig zijn met het vormgeven, leiden en organiseren van dit soort activiteiten. Over het Wintersymposium en *Pythagoras* wil ik nog iets meer zeggen.

Het Wintersymposium met als thema ‘Dataverwerking en statistiek’ kon onlangs op de belangstelling van zo’n 160 deelnemers rekenen. Het is mooi te zien, zo’n rijk gevulde aula van het Academieggebouw in Utrecht, met mensen die daar een zaterdag doorbrengen om lezingen bij te wonen die een beeld geven van interessante toepassingsvelden van de wiskunde. Weersvoorspellingen, waarden van forensisch bewijs en de ontdekking van het Higgs-deeltje: ‘math inside’, om maar eens een populaire kreet te bezigen. Die boodschap kwam goed over en omdat er veel leraren aanwezig waren, zal die boodschap ongetwijfeld ook nog worden doorgegeven. Wat betreft *Pythagoras* kan gezegd worden dat de redactie enthousiast werkt aan de inhoud van het tijdschrift en het MT nadenkt over het werven van nieuwe abonnees. Tevens is veel energie gestopt in de Engelse vertaling van *De Pythagoras Code*, die naar verwachting later dit jaar op de Amerikaanse markt zal verschijnen. Voor hen die het niet weten, de Nederlandse versie is nog altijd via internet te bestellen!

Er zijn ook kwesties die ons als bestuur zorgen baren en waarop we heel specifieke acties zetten. Een punt van zorg is de matige belangstelling bij de NMC’s die we de laatste jaren signaleren. Wij spannen ons in om het NMC meer een ontmoetingsmoment te laten zijn voor onze beroepsgroep, zowel inhoudelijk als sociaal. Momenteel zijn de voorbereidingen voor NMC 2015 in Leiden in volle gang. Kijk eens naar het programma en noteer (als u dat nog niet gedaan heeft) 14 en 15 april in uw agenda!

Het aantal jongeren dat lid is van ons genootschap is laag vergeleken met het potentieel, een constatering die al door veel besturen voor ons moest worden gedaan. De vereniging (en haar

bestuur) moet een gezonde mix van jeugdig enthousiasme en ervaring zijn en blijven. Binnen het bestuur zijn we bezig de leeftijdsopbouw in balans te brengen. Voor het aantrekken van nieuwe jonge leden hebben we in 2014 bij alle in Nederland uitgereikte bachelordiploma’s voor wiskunde een uitnodiging gevoegd om lid te worden van het KWG. Deze actie willen we jaarlijks gaan herhalen. Tevens zijn we in contact met de besturen van de verschillende studieverenigingen wiskunde om af te tasten wat we voor elkaar kunnen betekenen. Dit alles zal zeker bijdragen aan de bekendheid van het KWG onder jonge wiskundigen en hopelijk ook leiden tot gezamenlijke activiteiten en instroom van nieuwe actieve jonge leden.

Een kwestie die verbetering behoeft, was de communicatie tussen het KWG-bestuur en het bestuur van Platform Wiskunde Nederland (PWN). In oktober 2014 hebben we een gezamenlijke vergadering gehad van de besturen. Daar hebben we elkaar geïnformeerd over onze activiteiten en prioriteiten. Dat was heel verhelderend! Om de communicatie in de toekomst te verbeteren is besloten om binnen de PWN-commissies Publiciteit, Publicaties, Innovatie en Onderwijs structureel bestuursleden van het KWG als lid te benoemen.

Naast de standaardactiviteiten en de zorgpunten die actie vereisen zijn er ook nog ‘buitenkansen’ die zich af en toe voordoen. Al sinds een langere tijd was er de wens om het archief van L.E.J. Brouwer onder te brengen in een officieel archief. Onze Commissie voor Persoonlijke Archieven van Wiskundigen heeft nu het eerste deel ondergebracht bij het Noord-Hollands Archief. Zodra het hele archief is overgebracht, is het doel tot ontsluiting over te gaan. Bij de redactievergadering van *Indagationes Mathematicae* kwam het idee op om ook een special issue van dit tijdschrift te wijden aan het vijftigste sterfjaar van Brouwer in 2016. Dirk van Dalen, Jan Willem Klop en Jan van Mill zijn bereid gevonden als gastredacteuren op te treden voor deze uitgave. In 2016 zal er dus speciale aandacht zijn voor onze oud-voorzitter (honderd jaar geleden was hij dat!).

Als gezegd, er is heel wat gaande in wiskundig Nederland en dus in de gelederen van onze vereniging. Ik ben blij dat we een bestuur hebben dat zowel binnen PWN- als buiten PWN-verband onvermoeid de handen uit de mouwen steekt om de belangen van onze beroepsgroep en leden te behartigen. Daar gaan we het komende jaar als KWG-bestuur op volle kracht mee door. ←

Geurt Jongbloed, voorzitter KWG

Delft Institute of Applied Mathematics, TU Delft
voorzitter@wiskgenoot.nl

Van het KWG

| KWG activities

Nee, geen agenda en jaarverslagen hier

In overleg met de redactie hebben we besloten om de traditionele jaarverslagen niet langer in het *Nieuw Archief voor Wiskunde* te publiceren, maar in plaats daarvan ze op de website van het KWG te zetten. Dat scheelt pagina's die nu voor leuke artikelen vrij blijven en het creëert een digitaal archief waar de jaarverslagen van alle jaren overzichtelijk bij elkaar staan. Uiteraard kan op verzoek nog steeds een print- of e-mailversie worden toegezonden.

De jaarverslagen zijn te vinden op een afgeschermd pagina:

<http://www.wiskgenoot.nl/watbiedt/Jaarverslagen>.

Gebruikersnaam: KWG-leden. Het wachtwoord is K2003WG1778.

Mocht u de verslagen per mail of in print willen ontvangen dan kunt u een mail of brief sturen aan de secretaris:

e-mail: wiskgenoot@wiskgenoot.nl

postadres:

CWI

KWG, t.a.v. Joke Blom

Postbus 94079

1090 GB Amsterdam

Namens het bestuur van het KWG

Joke Blom, secretaris

Frans Keune

IMAPP

Radboud Universiteit Nijmegen

keune@math.ru.nl

Onderwijs Onderwijsvisitatie Wiskunde

De universitaire wiskundeopleidingen beoordeeld

In 2013 zijn de universitaire wiskundeopleidingen gevisiteerd en op basis daarvan zijn alle 25 gevisiteerde opleidingen opnieuw geaccrediteerd. Frans Keune, de voorzitter van de commissie, blikt terug en doet verslag. Volgens hem kan het wel wat eenvoudiger.

Op een 'lastige vraag' die de voorzitter van de Kamer Wiskunde van de VSNU, Jan Wiegerinck, mij op 18 april 2012 via e-mail stelde, heb ik met "ja" geantwoord, wel wetende dat het om een niet geringe klus zou gaan: het voorzitterschap van de visitatiecommissie die het Nederlandse universitaire wiskundeonderwijs zou gaan beoordelen. In 2003 maakte ik deel uit van zo'n commissie in Vlaanderen, dus had ik wel enig idee van wat mij te wachten stond. Betrof het in Vlaanderen vijf instellingen, in Nederland zou het gaan om negen instellingen met in totaal 25 opleidingen. Typisch iets voor een emeritus en dan bij voorkeur een emeritus die niet te lang uit de running is. Een jaar na mijn jawoord begon het eigenlijke visiteren. In oktober 2014 was de klus met het uitkomen van het laatste rapport afgerond.

Twee omstandigheden maakten het voor mij makkelijker om ja te zeggen. Ten eerste ken ik de universitaire wiskunde in Nederland

goed genoeg om er zeker van te zijn opleidingen van goede kwaliteit aan te treffen. Ten tweede zou het gaan om een zogenaamde beperkte beoordeling, omdat met instellingsbrede audits veel kwaliteitsaspecten al zouden zijn afgedekt. Bij zo'n beperkte beoordeling worden onderwijsvoorzieningen zoals bibliotheek, collegezalen en computerfaciliteiten niet beoordeeld. Dat komt er vooral op neer dat een rondgang langs die voorzieningen niet meer is ingepland. Die was er overigens wel: terwijl de voorzitter de presentatie van de voorlopige bevindingen voorbereidde, konden de andere commissieleden tijdens zo'n excursie de benen strekken. Een groot verschil met de vroegere gang van zaken betreft de aandacht voor de afstudeerwerken, een gevolg van misstanden bij sommige instellingen voor hoger onderwijs. De commissie heeft nu voor elk van de 25 opleidingen voorafgaand aan de visitatie vijftien scripties moeten beoordelen. Al met al vergt de be-

perkte beoordeling meer inspanning dan de vroegere niet-beperkte.

De commissie

Coördinerende en secretariële ondersteuning was er, zoals gebruikelijk, van de QANU (Quality Assurance Netherlands Universities). Er was gekozen voor een uitgebreide commissie waaruit voor iedere visitatie een panel van vijf of zes commissieleden kon worden gevormd. Op die manier is het eenvoudiger mensen bereid te vinden om in de commissie zitting te nemen. De commissie bestond uit veertien leden: Frans Keune (RU, emeritus hoogleraar), Freek van Schagen (VU, gepensioneerd uhd), Paul Igodt (KU Leuven, hoogleraar), Andreas Weiermann (Universiteit Gent, hoogleraar), Arnold Reusken (RWTH Aachen, hoogleraar), Hennie ter Morsche (TU/e, gepensioneerd uhd), Hans van der Weide (TUD, uhd), Mariëtte Knaap (Shell, licensing technology manager), Marije Elkenbracht-Huizing (ABN-AMRO, head market risk, tijdens de visitatie managing director bij NIBC), Tjark Tjin-A-Tsoi (CBS, directeur-generaal, tijdens de visitatie directeur NFI), Nicky Hekster (IBM Bene-

lux, technical leader) en drie studenten: Gijs Boosten (UU), Rutger Kerkkamp (TUD) en Tessa Matser (RU). Coördinator van deze zogeheten clustervisitatie was Kees-Jan van Klaveren (QANU).

Opleidingen en rapporten

Elk van de negen universiteiten met wiskundeopleidingen heeft er standaard twee, een bacheloropleiding (technische) wiskunde en een masteropleiding (applied) mathematics; soms onder een iets andere naam. De RUG heeft naast algemene ook technische opleidingen, de VU heeft ook nog bachelor- en masteropleidingen Business Analytics en de masteropleiding Stochastic Mathematics and Financial Mathematics (SMFM), de UvA heeft ook masteropleidingen SMFM en Mathematical Physics. Anders dan voorheen werden er per instelling rapporten geschreven en zijn er bij de VU nu aparte rapporten geschreven voor Business Analytics en SMFM, en bij de UvA voor SMFM en Mathematical Physics. De opleidingen SMFM van de VU en de UvA zijn qua onderwijs volledig geïntegreerd en dat geldt ook voor hun masteropleidingen Mathematics. Formeel betreft het echter verschillende opleidingen en is daarover apart gerapporteerd.

De bezoeken vonden plaats in een periode van een half jaar: van mei 2013 (TUD) tot november 2013 (TU/e). Per instelling waren er twee dagen ingepland voor het bezoek. Het bezoek aan de Amsterdamse universiteiten met hun deels verstrengelde negen opleidingen duurde bijna een volle werkweek en was dusdanig dat de nog resterende bezoeken door de commissieleden als een verademing werden ervaren.

De rapporten zijn opgesteld volgens de richtlijnen van de Nederlands Vlaamse Accreditatie Organisatie (NVAO). De NVAO heeft op basis van deze rapporten in alle gevallen besloten tot heraccreditatie. Het zijn typisch ambtelijke rapporten waarin wordt beschreven op grond van argumenten dat aan de vereisten is voldaan, met veel herhalingen vanwege inleidingen en samenvattingen. De secretariële ondersteuning van de QANU was hierbij onmisbaar; een doorsnee wiskundige krijgt dit niet voor elkaar. Doordat de rapporten alleen betrekking hebben op opleidingen aan eenzelfde instelling is er in die reeks van dertien rapporten, waarvan zes voor de Amsterdamse universiteiten, geen plaats voor een algemene beschouwing zoals die er vroeger was in de vorm van een inleidend hoofdstuk. In plaats daarvan is er nu een extra rapport [2], het State of the

Art-rapport (SOTA-rapport). Het is in oktober 2014 verschenen.

Voldoende of goed

Per opleiding geeft de commissie een oordeel over drie 'standaarden': de doelstellingen (standaard 1), de wijze waarop aan die doelstellingen wordt gewerkt (standaard 2) en de borging en realisatie van de doelstellingen (standaard 3). Er zijn voor elk van deze standaarden vier kwalificaties mogelijk: onvoldoende, voldoende, goed en excellent. De NVAO geeft richtlijnen voor deze kwalificaties. Ik zou er geen probleem mee hebben alle wiskundeopleidingen minstens als goed te beoordelen. In de Keuzegids van 2014 bijvoorbeeld scoren de bacheloropleidingen wiskunde hoog: zes van de negen opleidingen worden gekwalificeerd als 'topopleiding'. Bij de richtlijnen van de NVAO gaat het om relatieve oordelen: bij goed moet een opleiding zich in de volle breedte in positieve zin onderscheiden van de andere opleidingen. Het gevolg is dat bij een cluster van kwalitatief goede opleidingen bijna alle oordelen op voldoende uitkomen, met soms een goed voor één van de standaarden als gevolg van een soepele interpretatie van de richtlijnen. Dit heeft nogal eens tot onbegrip geleid: topopleidingen die slechts een voldoende krijgen. Bij de wiskundeopleidingen komt het erop neer dat voldoende goed is. In de pers verschijnen wel lijstjes met aantallen beoordelingen excellent of goed voor de opleiding als geheel. Zulke lijstjes slaan nergens op.

State of the Art

Het State of the Art-rapport is het sluitstuk van de onderwijsvisitatie. Anders dan de andere rapporten is het niet geschreven met het oog op de accreditatie van opleidingen. De stijl is dan ook minder ambtelijk. In dit SOTA-rapport worden zes opleidingsoverstijgende thema's besproken, gevolgd door een rapportage per NVAO-standaard. Het is geen lijvig rapport. Ik schets hier de situatie van het Nederlandse wiskundeonderwijs aan de hand van dit rapport. Ook in het rapport [1] van het Platform Wiskunde Nederland (PWN) wordt daar aandacht aan besteed en het is voor de hand liggend dat daar geregeld naar wordt verwezen.

Herbezinning op Mastermath

Mastermath is de naam voor de landelijke cursussen die worden aangeboden door het Regieorgaan voor de masteropleidingen wiskunde. Afgesproken is dat studenten verplicht

voor minimaal 30 studiepunten aan vakken uit dit aanbod in hun programma opnemen. Zo'n tien jaar geleden is dit van start gegaan. Het was uit nood geboren: door de extreem lage studentenaantallen konden masteropleidingen alleen op deze wijze blijven bestaan en hun niveau op peil houden. De situatie is door de recente toename van studentenaantallen gewijzigd. Dat zou een reden kunnen zijn om ermee op te houden. Echter, er kunnen wel grotere studentenaantallen zijn, het aantal inzetbare docenten is sinds de oprichting van Mastermath stabiel gebleven op het lage niveau dat in de eraan voorafgaande periode was ontstaan. Zie hiervoor het rapport [1] van het PWN. De noodzaak van samenwerking is dus inmiddels een andere. Ook zonder die noodzaak heeft een samenwerking positieve effecten, zoals verhoging van de efficiëntie van het masteronderwijs en de bevordering van contacten met studenten en docenten buiten de eigen instelling.

Het aanbod van vakken is sinds Mastermath van start ging aanzienlijk uitgebreid. Ook het karakter van dit aanbod is veranderd: werden vroeger vakken geboden voor beginnende masterstudenten, nu komt het tot stand via de onderzoekscusters en hebben veel vakken een meer gevorderd karakter. De voornaamste nadelen van de huidige situatie zijn gelegen in de veelal te grote groepen en de achtergestelde positie van universiteiten buiten de randstad. Het is moeilijk om met name buitenlandse studenten te werven voor een masteropleiding met onderwijs dat ver van de instelling zelf plaatsvindt. Oplossingen zijn gelegen in een regionaal aanbod van sommige vakken en ook in een frequenter aanbod ervan. Welke oplossing ook wordt bedacht, een grotere personele inzet is nodig. Ook kan er om het reizen te beperken meer gebruik van internet worden gemaakt. Dat gaat dan wel ten koste van onderlinge contacten en vereist een intensievere lokale ondersteuning en daarmee ook een grotere personele inzet.

Profilering en indeling van de opleidingen

De commissie heeft ook nog nagedacht over het fenomeen van de meer specifieke masteropleidingen naast de algemene opleidingen (Applied) Mathematics. Volgens de commissie zijn er twee goede redenen voor zulke aparte opleidingen: andere toelatingseisen en andere eindtermen. Daaraan voldoen de masteropleidingen Business Analytics van de VU en Mathematical Physics van de UvA, terwijl dat voor de opleidingen SMFM van UvA

en VU in mindere mate het geval is. De track Statistical Science for the Life and Behavioural Sciences binnen de masteropleiding Mathematics van de UL is beter op z'n plaats als masteropleiding, maar het is wel praktisch om als track binnen Mathematics van start te gaan.

Universitaire opleidingen tot wiskundeleraar

Er zijn vele mogelijkheden om aan de universiteit een lesbevoegdheid wiskunde te behalen: een tweedegraads binnen of na de bacheloropleiding wiskunde, een eerstegraads binnen of na de masteropleiding Mathematics of in een aparte masteropleiding Education met een wiskundetrack. Wat al deze mogelijkheden gemeen hebben is dat er maar weinig gebruik van wordt gemaakt. Men kan wel meer academici voor de klas willen hebben, maar zolang er eenvoudiger wegen zijn om een eerste- of tweedegraads bevoegdheid te behalen, zal men daar slechts in beperkte mate in kunnen slagen. De commissie ondersteunt het advies van het PWN in [1] om aan de universiteiten de wiskundeopleidingen zo in te richten dat daarbinnen goede en aantrekkelijke mogelijkheden zijn om voorbereid te worden op het beroep van leraar. Landen als Duitsland en Finland, waar het opleiden tot leraar voorbehouden is aan de universiteit, verkeren in een betere posi-

tie bij het handhaven en verbeteren van de kwaliteit van het secundaire wiskundeonderwijs. De universitaire lerarenopleidingen zijn door de commissie niet beoordeeld; daar is een andere commissie voor. Wij hebben alleen naar de educatieve tracks binnen de wiskundeopleidingen gekeken. In de commissie is de vereiste vakinhoudelijke kennis voor een eerstegraads bevoegdheid niet aan de orde gekomen. Naar mijn persoonlijke mening is het wiskundedeel van de bacheloropleiding voldoende. In een masteropleiding met daarin veel aandacht voor vakdidactiek zou dan die bevoegdheid verkregen kunnen worden. Mogelijk volstaat dan een eenjarige masteropleiding.

Groeiende studentenaantallen

Doordat de groei van het aantal wiskundestudenten niet gepaard gegaan is met een groei van de wiskundestaf aan de Nederlandse universiteiten, zijn er knelpunten ontstaan bij het universitaire wiskundeonderwijs. Daar komt nog bij dat er als gevolg van de invoering van het bachelor-mastersysteem meer scripties worden geschreven: ook de bacheloropleidingen worden afgerond met een scriptie. Meer 'meester-gezel'-situaties dus, zoals die passend zijn voor wiskundeopleidingen. Al met al is de werkdruk toegenomen en ondersteunt de commissie het advies van de PWN

in [1] om de wiskundestaf met de helft te doen toenemen.

Afstudeerprojecten

Zoals hierboven al vermeld werd, is er tegenwoordig meer aandacht voor de afstudeerwerken. De bachelorscriptie is een relatief nieuw fenomeen en bij sommige van de opleidingen is men nog zoekende naar de juiste vorm voor dit onderdeel. De afstudeerwerken (bachelor en master) zijn over het algemeen van hoge kwaliteit en de commissie kon daarvoorafgaand aan een visitatie al aan zien dat het met de opleiding wel goed zit. Bij een aantal opleidingen is de transparantie van de beoordeling van scripties te verbeteren. De commissie heeft ervaren dat zij beoordelingen informatiever vond als die ook een korte toelichting bevatten en niet alleen tot stand kwamen door het aanvinken van een rij criteria.

Arbeidsmarkt

Het belang van de wiskunde voor de maatschappij staat goed verwoord in het PWN-rapport [1]. Wiskundigen vinden doorgaans snel een baan en misschien mede daardoor is de animo onder wiskundestudenten om zich te oriënteren op de arbeidsmarkt niet zo groot. Het is aan de opleidingen om studenten hierin op weg te helpen en aan alle instellin-



gen zijn daarvoor activiteiten, veelal georganiseerd door studieverenigingen. Het is zaak dat de opleidingen de regie houden over die activiteiten.

De drie standaarden

Nog enkele opmerkingen per standaard van de NVAO voor zover deze in de thema's niet aan de orde kwamen.

Standaard 1: beoogde eindkwalificaties. Iedere opleiding moet expliciete doelstellingen hebben. Het Domeinspecifieke Referentiekader (DSRK) dat is aangedragen door de Kamer Wiskunde van de VSNU en door de commissie als referentiekader is geaccepteerd, bevat zulke doelstellingen. Het DSRK is gebaseerd op het referentiekader voor de vorige visitatie en het rapport [3] van het project Tuning Educational Structures in Europe. In deze stukken wordt als het ware gedefinieerd wat een universitaire wiskundeopleiding is.

Aan het Tuning-project heb ik trouwens zelf deelgenomen. Aanleiding voor dit project was de invoering van de bachelor-masterstructuur in Europa en het daarmee gepaard gaande systeem van studiepunten. Het was opvallend hoe snel wiskundigen uit vele Europese landen en met zeer uiteenlopende wiskundige achtergronden het eens konden worden over wat een wiskundeopleiding zou moeten inhouden. De meeste tijd ging uiteindelijk zitten in het buiten de deur houden van ongewenste onderwijskundige ideeën aangedragen door Tuning-leden van andere disciplines.

De manier waarop de doelstellingen van de wiskundeopleidingen worden beschreven varieert sterk per instelling. Het kan een afgeleide zijn van meer generieke doelstellingen die bijvoorbeeld op facultair niveau zijn geformuleerd. Het kan ook het resultaat zijn van origineel denkwerk bij de opleidingen zelf. Voor de commissie was er dan de saaie taak om die doelstellingen te toetsen aan het DSRK.

Standaard 2: onderwijsleeromgeving. In het DSRK wordt ook de gewenste vakinhoud van

wiskundeopleidingen, met name de bacheloropleidingen, aangeduid. De commissie heeft geen grote afwijkingen aangetroffen. Hier en daar werd wel aanbevolen een deelgebied van de wiskunde in het programma enigszins te versterken. Bij sommige instellingen, met name bij de RU en de RUG, was er een zorgwekkend kleine wiskundestaf. Een ander punt van zorg vormen de aan opleidingen van bovenaf opgelegde programmaherzieningen zoals dat bij een aantal instellingen het geval is. Er moet nogal eens strijd geleverd worden om het specifieke karakter van de wiskunde daarbij overeind te houden. Bij die herzieningen wordt veelal uitgegaan van korte intensieve cursussen. De meer theoretische wiskundevakken vereisen echter een langere verwerkingstijd dan bij zo'n cursus mogelijk is. Ook is de volgorde waarin wiskundevakken kunnen worden geboden bepaald niet willekeurig. De commissie constateerde dat de wiskundigen in deze instellingen een grote inzet tonen om verantwoorde programma's te ontwerpen.

Standaard 3: toetsing en gerealiseerde eindkwalificaties. De groeiende werkdruk door de toenemende studentenaantallen kan er toe leiden dat studenten minder individueel beoordeeld worden doordat er vaker sprake is van opdrachten voor kleine groepen van studenten. Met name bij eindopdrachten, zoals bachelorscripties, is het van belang dat er individuele prestaties worden geleverd die ook als zodanig beoordeeld kunnen worden. Leren samenwerken is belangrijk, maar het kunnen leveren van individuele prestaties is dat ook.

Conclusie: het kan wel een beetje minder

De universitaire wiskundeopleidingen in Nederland zijn goed. Overal tref je enthousiaste en deskundige docenten. Ook het enthousiasme van studenten is opvallend. Dat was bij vorige visitaties ook zo en het heeft iets genants om als commissie de instellingen te bezoeken om te kijken of ze het nog

steeds goed doen. Men heeft zich hiervoor ook nog bovenmatig moeten inspannen om alles te documenteren in 'kritische zelfreflecties'. Het kan wat mij betreft als het gaat om heraccreditatie een stuk eenvoudiger. Laat standaard 1 weg en beoordeel de opleidingen aan de hand van het DSRK. In het DSRK voor het wiskundecluster staat wat een universitaire wiskundeopleiding is en dat hoeven ze niet ook nog eens zelf te verwoorden. Wat standaard 2 betreft heeft de opleiding een studiegids, een Onderwijs- en Examenreglement (een OER) en verslagen van de onderwijscommissie(s). Verdere informatie kan in gesprekken tijdens het bezoek naar boven komen. Mijn ervaring is dat met die gesprekken een goed beeld ontstaat, vaak beter dan wat in de kritische zelfreflectie naar voren komt. De eindwerken (de scripties) geven inzicht in wat de opleiding realiseert. Het was in deze ronde voor het eerst dat daar bij de visitatie zoveel aandacht voor was. Deze producten geven een helder beeld van het gerealiseerde eindniveau en dat is het belangrijkste aspect van standaard 3 en samen met verslagen van de examencommissie(s) lijkt mij dat voldoende. Kortom, laat de commissie zich baseren op producten die niet specifiek ten behoeve van een visitatie tot stand komen.

Wat de oordelen betreft zou het alleen om onvoldoende of voldoende moeten gaan. Voor de accreditatie is dat genoeg en zeker de huidige criteria voor goed en excellent zijn onbevredigend en leiden tot misinterpretatie en veel onnodig gedoe. Ik ben het er overigens niet mee eens dat een instellingsaudit voldoende is. Elk vakgebied heeft een eigen problematiek die op instellingsniveau niet aan de orde komt en waar een speciale deskundigheid voor nodig is. Visitatiecommissies hebben in het verleden vaak zeer inhoudelijke adviezen gegeven die door de instellingen serieus genomen zijn, mede doordat na een aantal jaren er weer een commissie langs komt om te kijken wat ermee gedaan is. Dat aspect is te waardevol om het te verwaarlozen.

Referenties

1 *Formulas for Insight and Innovation, Mathematical Sciences in the Netherlands*, Platform Wiskunde Nederland, Amsterdam, 2014, [www.platformwiskunde.nl / home.vision.document.2025.htm](http://www.platformwiskunde.nl/home.vision.document.2025.htm).

2 *Wiskundeonderwijs aan de Nederlandse Universiteiten, State of the Art rapport*, QANU, Utrecht, 2014, www.qanu.nl/nl/state-of-the-art-rapporten.

3 *Reference Points for the Design and Delivery of Degree Programmes in Mathematics*, Mathematics Tuning Group, www.unideusto.org/tuningeu.

Dirk van Dalen

Universiteit Utrecht

d.vandalen@uu.nl

Boekbespreking Volkmar Felsch: *Otto Blumenthals Tagebücher*

Blumenthal in Holland

Otto Blumenthal (1876–1944), een Duitse wiskundige van joodse komaf, hield van 1939 tot 1943 dagboeken bij. Daarin beschrijft hij vrij minutieus zijn verhuizing naar Nederland en de roerige jaren die volgen. Volkmar Felsch heeft het voor elkaar gekregen om deze dagboeken gepubliceerd te krijgen, met biografische aanvullingen. In dit artikel bespreekt Dirk van Dalen dit historische werk.

De hoofdpersoon van het hier te bespreken boek was een bekend en gerespecteerd wiskundige in de eerste helft van de twintigste eeuw, Otto Blumenthal. Tot aan de opkomst van het Derde Rijk verschilden zijn leven niet zoveel van dat van de doorsnee Duitse geleerde; zijn promotor was de wereldberoemde wiskundige David Hilbert en hij vond zijn weg in de academische wereld zonder veel problemen. Dat bijna iedereen hem kende, had te maken met zijn activiteiten als redacteur van de, eveneens wereldberoemde, *Mathematische Annalen*. Men kan hem zonder overdrijving beschouwen als de rechterhand van de toenmalige koning van de Europese wiskunde, David Hilbert. In zijn functie kwam hij met de meest uiteenlopende figuren uit de internationale wiskunde in contact.

Hij was van joodse afstamming, iets wat zijn carrière niet in de weg stond. Juist in de wiskunde was toen uiteindelijk de kwaliteit van de persoon bepalend, politiek en religie speelden een geringere rol. Het boek dat door Volkmar Felsch samengesteld en geschreven is, verschilt van de gewone biografie in die zin dat weliswaar Blumenthals levensloop beschreven wordt, maar dat de cruciale en tragische periode van diens leven weergegeven is door hemzelf in de vorm van een beknopte kroniek, bestaande uit korte notities op de blaadjes van zijn agenda. Dit dagboek heeft de oorlog overleefd, Blumenthal zag in de laatste ogenblikken voor zijn deportatie kans om het naar zijn zoon in Engeland te versturen. In 2003 lukte het Felsch om met de schoondochter van Blumenthal, Janet Kuypers, in contact te komen, en zo het dagboek voor de geschiedenis toegankelijk te maken. Dit was in zekere zin het begin van een vrij volledige verslaglegging van Blumenthals kritieke jaren in Nederland. Het resulterende boek

is een combinatie van een biografische inleiding door Felsch, het dagboek van Blumenthal, en een slot waarin aanvullende informatie gegeven wordt, en waarin op details van het dagboek ingegaan wordt en historische informatie gegeven wordt over gebeurtenissen en overwegingen die in de dagboeken summier ter sprake komen.

Een bescheiden jongen uit Frankfurt

De carrière van de jonge Blumenthal past in zekere zin goed in het beeld van de emanciperende joodse intellectueel. Hoewel hij uit een traditioneel joods gezin kwam en tot de Israëlitische gemeente behoorde, ging hij op zijn achttiende over naar de evangelische gemeente. Hij werd in 1894 in Frankfurt gedoopt. Hij schreef zich aanvankelijk in voor een medicijnenstudie, maar koos een jaar later voor de wiskunde, en dat was in het oude Göttingen een uitstekende keus. Tot zijn leermeesters behoorden Hilbert, Felix Klein en ook Sommerfeld; een betere start kon men toen nergens ter wereld maken. Hij promoveerde in 1898 bij Hilbert op een functie-theoretisch onderwerp. Trouw aan de Duitse gewoonte bezocht hij ook andere universiteiten, eerst München, en later, tijdens zijn voorbereiding voor de *Habilitation*, ook Parijs en Marburg (waar hij een leeropdracht waarnam). In 1905 werd hij benoemd tot hoogleraar in Aken, de plaats waar hij tot aan zijn ontslag door de nieuwe politieke meesters werkzaam bleef. De belangrijkste wetenschappelijke eer, die hem al in 1906 ten deel viel, was de benoeming tot redacteur van de *Mathematische Annalen*. Die functie bleef hij waarnemen tot 1938! Zijn opvolger was Heinrich Behnke die, zoals Felsch constateert, uiterst omzichtig reageert op het nazi bewind, zie pagina 102.

Men kan zonder overdrijving stellen dat de rustige, bescheiden jongen uit Frankfurt zijn plaats gevonden had, een plaats die voornamelijk dienend was, maar die vele contacten opleverde, en hem een aanzienlijk man in de wiskundige gemeenschap maakte. Men zou zich natuurlijk kunnen afvragen of een ambitieus man niet naar een van de gerenommeerde universiteiten zou verhuizen. Het is de vraag of hij in de concurrentie met het grote aantal excellente Duitse wiskundigen boven zou komen drijven. Bovendien scheen zijn ambitie niet in die richting te gaan. Brouwer, Nederlands gezaghebbendste wiskundige, spande zich in 1921 in om Blumenthal de plaats van Bieberbach, die naar Berlijn ging, in Frankfurt te laten innemen, maar zijn poging liep dood. Brouwer nam dit het hogere establishment in de wiskunde nogal kwalijk (D. van Dalen, *L.E.J. Brouwer – Topologist, Intuitionist, Philosopher*, Springer, 2013, p. 349).



Volkmar Felsch, *Otto Blumenthals Tagebücher. Ein Aachener Mathematikprofessor erleidet die NS-Diktatur in Deutschland, den Niederlanden und Theresienstadt*, onder redactie van Erhard Roy Wiehn, Hartung-Gorre Verlag, Konstanz, 2011, 538 p., ISBN 9783866283848, prijs € 29,80.



Blumenthal, professor in Aken

Unpolitisch

Blumenthal was in 1908 gehuwd met Amalie Ebstein (roepnaam Mali). Het huwelijk was buitengewoon hecht en gelukkig, er werden vier kinderen geboren waarvan er twee jong overleden.

Blumenthal, al was hij professor, werd in 1914 opgeroepen voor militaire dienst. Hij nam aan frontgevechten deel en kon pas in 1919 naar Aken terugkeren. Wie cynische toevalligheden kan waarderen, hoort te weten dat hem in 1936, *Im Namen des Führers und Reichskanzlers* het *Ehrenkreuz für Frontkämpfer* verleend werd — let wel twee jaar nadat hij door die zelfde Führer uit zijn ambt gezet was.

Om het beeld van de persoon Blumenthal nog wat scherper te maken: hij was een actief en theologisch geïnteresseerd lid van de evangelische kerk. Zijn gezinsleven was harmonieus, de kinderen, Ernst en Margarethe, groeiden op in de traditionele intellectueel-culturele traditie.

Binnen de wiskundige gemeenschap nam hij allerlei functies waar, zo was hij jarenlang bestuurslid van de *Deutsche Mathematiker Vereinigung*, en een tijdlang voorzitter. Verder was hij lid van de *Société Mathématique de France*, en lid van de *Leopoldina*. Men zou hem met recht *unpolitisch* kunnen noemen, weliswaar was hij lid van ideële verenigingen en internationale vriendschapsgenootschappen, zoals de Duitse liga voor mensenrechten, de Duitse vredesgroep, de Duitse liga voor de volkenbond, de vereniging van vrien-

den van het nieuwe Rusland, maar van radicale positionering was geen sprake. Hoe onschuldig dit alles mag klinken, het bleek tegen hem gebruikt te kunnen worden in de nieuwe wereld van het Nationaal Socialisme. In 1933 belasterden studenten hem op grond van zijn betrokkenheid bij de bovengenoemde verenigingen; zoals gebruikelijk speelde juistheid bij deze 'progressieve' groepen geen rol. Hier is een voorbeeld (p. 31): "Men kan het Duitsgezinde studenten niet langer aandoen, zich door vrienden van het Russische bolsjewisme les te laten geven en te laten examineren."

Dat de intimidatie van studentenzijde niet van voorbijgaande aard was, bleek in april toen nieuw gefabriceerde klachten resulteerden in een studenten-arrestatie van Blumenthal. Vervolgens werd hij aan de politie overgeleverd, die hem na vijf dagen weer vrij liet (p. 35). Niet lang daarna werd hij op grond van de beruchte wet *zur Wiederherstellung des Berufsbeamtentums* ontslagen; als grond van het ontslag werd aangegeven *Mitglied der Liga für Menschenrechte seit 1919/21*.

Zoals te verwachten, werd de druk op Blumenthal en lotgenoten voortdurend opgevoerd. Felsch beschrijft in detail hoe emigratie op den duur onvermijdelijk werd.

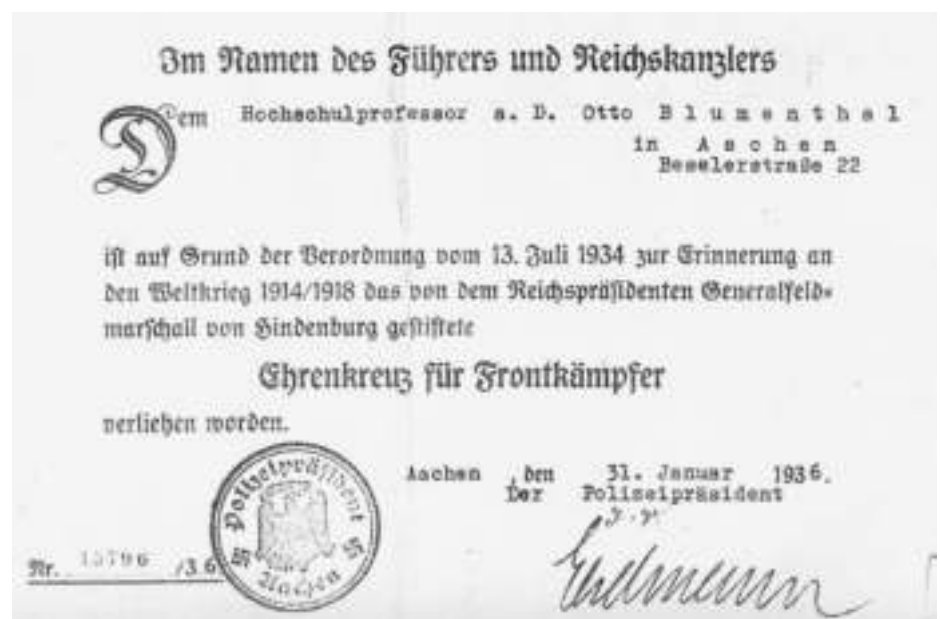
Een objectieve historicus

Het dagboek van Blumenthal opent op 1 januari 1939. Dankzij de gedetailleerde commentaren, berustend op uitvoerig historisch onderzoek van Felsch, blijken de min of meer in telegramstijl geschreven verslagen verras-



Mali en Otto Blumenthal, 1909

senderwijze goed leesbaar. De inhoud is als regel louter beschrijvend. Verbazend is dat niet, immers een agenda leent zich niet voor uitvoerig commentaar. Het is ook goed denkbaar dat zijn droge objectieve weergave een soort beveiliging was tegen kwaadwillende nieuwsgierigheid. Op dit punt aangekomen zou ik eigenlijk de lezer willen uitnodigen zelf de tekst door te nemen, of op zijn minst een aantal steekproeven te nemen. Met enige verbeeldingskracht kan men zich indenken dat vrijwel iedere minieme gebeurtenis een zekere



Het militaire erekruis voor Blumenthal



Het gezin Blumenthal in de jaren twintig

emotionele lading heeft die de lezer erbij moet denken.

Voor huidige lezers, maar nog veel meer voor diegenen onder hen die de bezetting hebben meegemaakt, blijft het een raadsel dat Blumenthal de gebeurtenissen als een objectieve historicus uit de eenentwintigste eeuw bleef beschrijven. Men kan zich voorstellen dat Blumenthal in zijn dagboek geen provocerende teksten wil produceren — men

weet nooit wie het in handen kan vallen, maar het is volstrekt niet uitgesloten dat hij vanuit een christelijke levensovertuiging geen veroordelingen wilde uitspreken. Heinrich Behnke, Blumenthals opvolger in de redactie van de *Mathematische Annalen*, schreef in zijn In Memoriam van 1958 dat Blumenthal zelfs na zijn vernederende ontslag van zijn vrienden geen hatelijkheden over het regiem accepteerde.



Agenda's met Blumenthals dagboeken

Verhuizing naar Nederland

De eerste helft van 1939 is een voorspel op de definitieve verhuizing naar Nederland. Van dag tot dag namen de chicanes toe en voor een paria als de joodse Blumenthal was de omgang met het ambtelijk apparaat verre van soepel. Aan de ene kant bleken er toch genoeg vrienden en sympathisanten te zijn, aan de andere kant konden die het noodlot niet tegenhouden. Men stelde zich voor een emigratie onder allerlei bezwarende voorwaarden. Hoe kan het pensioen in Nederland uitgekeerd worden, hoe kan de uitkering van Springer Verlag voortgezet worden? Om nog niet te spreken van het overbrengen van de bezittingen, huisraad, boeken, enzovoorts. Het moet een pak van Blumenthals hart geweest zijn dat zijn kinderen, Ernst en Margarethe, in Engeland studeerden; weliswaar was er nog geen oorlog, maar voor personen van joodse afstamming was Duitsland te riskant geworden.

Men kan zich afvragen waarom Blumenthal niet naar een veiliger land vertrok. In de eerste plaats werd Nederland als een traditioneel neutraal land beschouwd, en in de tweede plaats waren inreisvisa niet zo licht te verkrijgen. Verder had Blumenthal al contacten in Nederland, hij was bevriend met de Delftse fysicus Burgers. Het kan verder opgemerkt worden dat vele joodse Duitsers Nederland als doorgangsroute naar andere, en veiligere, landen gebruikten. De topoloog Rosenthal is een voorbeeld.

Op 13 juli was het dan zover, *Abschied von Deutschland*. De Amsterdamse hoogleraar Frijda had Blumenthals komst namens het Academisch Steunfonds voorbereid. Om te beginnen werden de Blumenthals ondergebracht in Huis Zuilen (nu Slot Zuylen) van de Baron van Tuyll van Serooskerken.

In Utrecht werd Blumenthal opgevangen door de wiskundehoogleraar Wolff; de baron had de Blumenthals zelf van het station willen ophalen, volgens Blumenthal had dat "eine schreckliche Geschichte gegeben".

Blumenthals ontvangst in Nederland was, ondanks de tragische aanleiding, uiterst positief. Hij kreeg al snel contact met de wiskundige gemeenschap, zag kans om te reizen, zo nam hij deel aan een congres in Luik, waar allerlei oude bekenden opdoken, onder anderen Godeaux, Lebesgue, Cartan, Van der Woude en Van der Corput. In zijn dagboek vermeldt hij: "die Franzosen sehr freundlich, trotz meiner Angst für Lebesgue". In het licht van de betrokkenheid van de *Annalen* bij diens mislukte invariantiebewijs van de dimensie kan men zich daar iets bij voorstellen.



Mali en Otto met hun oudere kinderen Ernst en Margarethe

Het begin van de Tweede Wereldoorlog

Niet lang daarna, midden augustus, reizen de Blumenthals naar Londen, waar zij Kathleen Mordell en Davenport ontmoetten. Snel een reis naar Manchester om de kinderen te zien. Juist in die tijd begon de Europese politiek in een kritiek stadium te komen. Het dagboek vermeldt het Duits-Sovjetpact: "recht umschmeissend". Op zaterdag 26 augustus werden Duitsers aangezegd het land te verlaten, en zo stond het echtpaar diezelfde avond nog op het station in Utrecht. Terugziend kan men alleen maar betreuren dat Blumenthal zo'n gezagsgetrouw burger was dat hij niet even ondergedoken was. De oorlog was nog geen week later een feit, en dan had hij, weliswaar als gedetineerde, de oorlog kunnen overleven. Terug in Utrecht was hij op 1 september getuige van het begin van de tweede wereldoorlog: "Beginn des zweiten Weltkrieges. — Herrliches Wetter. — Morgens Nachricht von der Angliederung Danzigs. 10 Uhr Führerrede in Reichstag. ... Abends die Entscheidung Englands und Frankreichs auf Abberufung ihrer Gesandten. Es ist entsetzlich, und die Folgen werden noch entsetzlicher sein." De oorlogsverklaring van Engeland en Frankrijk volgde twee dagen later. Op 17 september: "USSR rückt 'friedlich' in Polen ein".

Ondanks de alom deprimerende ontwikkelingen bouwde Blumenthal een uitgebreid netwerk van wis- en natuurkundigen op, er duiken namen op van veel gevestigde Nederlandse geleerden: Biezeno, Freudenthal, Van Dantzig, Ornstein, Schouten, Wolff, zie verder pagina 510. Hij had vooral contact met Burgers, met wie hij al vroeger van doen had.

In mijn contacten met De Bruijn en Freudenthal kwam Blumenthal ook wel ter sprake.

De Bruijn bezocht hem en prees zijn deskundigheid op het gebied van modulaire functies; Freudenthals ontmoeting met Blumenthal moet geen groot succes geweest zijn, hier kwam een gevestigde autoriteit in contact met een dertig jaar jongere vakgenoot die de moderne wiskunde representeerde. Freudenthal zag, in zijn woorden, een wat teruggetrokken, serviele man en Blumenthal schreef in zijn dagboek "Besuch von Freudenthal aus Amsterdam, der angenehm enttäuscht" een botsing van twee totaal verschillende karakters en twee verschillende wiskundeculturen.

De oorlogsberichten worden afgewisseld met verslagen van uitjes naar Den Haag, Loosdrecht, Half oktober verhuisde de familie Blumenthal naar Delft, waar Blumenthal beroepshalve het nauwst met collega's verbonden was. Zeker in zijn Delftse periode, maar ook later nog, bleef Blumenthal verrassend mobiel; geen gedeprimeerde geleerde die het huis niet meer uitkomt.

De Delftse periode

In zijn Delftse tijd maakte Blumenthal gemakkelijk vrienden, hij nam deel aan wis- en natuurkundige voordrachten, seminaria, gaf hulplessen aan studenten, enzovoorts. Het leven was natuurlijk verre van geriefelijk, een kleine woning, kleine toelage, problemen met stoken in de koude winter van 1939/40, maar verder verschilde het leven niet zoveel van een doorsnee academisch bestaan. Blumenthal was breed geïnteresseerd, hij kon met de meeste collega's op voet van gelijkheid verkeren. Er waren de gebruikelijke uitstapjes, bijvoorbeeld naar het Stedelijk Museum voor de Toorop-tentoonstelling, naar het Wiskundig Genootschap voor de gebruikelijke vergadering op de laatste zaterdag van de maand. Deze vergaderingen waren een bijna heilige traditie, iedere wiskundige werd daar wel verwacht. Op deze manier moet Blumenthal vrijwel alle belangrijke wiskundigen gezien hebben. Van de oorlog blijkt weinig in het dagboek. Ineens noteert Blumenthal dat de Engelsen en Fransen mijnen gelegd hebben in de Noorse wateren. En een dag later komt hij te weten dat de Duitsers Denemarken en Noorwegen binnengerukt zijn. Afgezien van de mobilisatie van het Nederlandse leger zijn de tekenen van een komend conflict nog vrij onzichtbaar. Financieel bleef het problematisch om het hoofd boven water te houden. Sommige van zijn collega's verschaften hem betaalde opdrachten, Van Heel bood hem bijvoorbeeld een interessante opdracht over optiek aan. Van der Pol en Bremmer betaalden hem voor onderzoek over operatoren calculus.

In mei hernam de natuur zijn loop, de bomen botten uit, de zon schijnt weer en tegelijkertijd neemt de regering maatregelen voor een mogelijke botsing met de onaangename buurman. Op 8 mei bezocht Blumenthal nog een voordracht van Koksma in de Vrije Universiteit, de volgende dag verliep routineus – en op 10 mei rolde de oorlog over Nederland. Het dagboek vermeldt: "Herrliches Wetter. Kriegsbeginn". Waar het de Nederlanders al moeilijk bleek om zich te realiseren dat het uit was met onze neutraliteit, ging het Blumenthal niet veel beter: "Radio brüllt im Unterhaus. Sehr gegen Willen zur Überzeugung gekommen, dass Krieg ist".

Blumenthal had ondertussen wel pogingen gedaan een positie in het buitenland te vinden, zo had Hadamard voor hem een aanstelling in Argentinië op het oog, de nieuwe universiteit in Rosario zocht een directeur. Hoewel Hadamard de kansen van Blumenthal hoog inschatte, werd Beppo Levi (die, zoals Blumenthal bitter schreef, een jaar ouder was) benoemd. Ook pogingen van Herman Weyl baatten niet. Andere mogelijkheden in Amerika bleken ook illusoir.

Het leven in Delft bleef voorlopig zijn gang gaan, de samenwerking met de voor het grootste deel lokale collega's hield Blumenthal aan het werk. Daarbij kwam incidenteel ook bijles aan studenten. De oorlog bleef vrijwel onzichtbaar in het dagboek, enkele notities geven aan wat Blumenthal de moeite waard vond om te noteren: "wapenstilstand met Frankrijk" (22.6.1940, in dagboek 24.9), "Duitse successen in de lucht boven Engeland" (26 augustus). Het Delftse intermezzo werd plotseling afgebroken door de verordening dat alle niet-ariërs de kuststreek moesten verlaten. Het echtpaar verhuisde nu door bemiddeling van Burgers naar Arnhem, vrijwel direct na aankomst zochten zij een woning in Utrecht. Geholpen door mevrouw Magnus (de weduwe van Rudolph Magnus) vonden ze na een paar dagen een pension in de F.C. Donderstraat. Dit 'verhuizen' is een voorproefje van wat hun nog te wachten stond. Waar eerst van een zekere eigen initiatief sprake is, nemen de dwangverhuizingen gaandeweg toe.

De Utrechtse periode

De Utrechtse periode geeft ongeveer hetzelfde beeld waar het de activiteiten en correspondentie van Blumenthal betreft. De lezer wordt getroffen door de grote kring van kennissen, correspondenten, collega's die in het dagboek voorkomen. Waar in Duitsland contact met joodse medeburgers niet ongevaar-

lijk was, bleken veel Nederlandse burgers goede samaritanen te zijn. De lijst van contacten bevat veel prominente namen, behalve vakgenoten ook veel oude en nieuwe vrienden. Daarnaast voerde Blumenthal een uitgebreide briefwisseling met vroegere collega's die het gevaar tijdig hadden kunnen ontvluchten: Hermann Weyl, Ludwig Prandtl,...

In Utrecht bezocht Blumenthal graag de wiskundige leeszaal, ook op het natuurkundig laboratorium was hij een geziene gast. De plaatselijke wiskundigen, Barrau en Wolff steunden Blumenthal naar vermogen en ook de natuurkundige Ornstein bekommerde zich om hem. Men moet niet denken dat Blumenthal uitsluitend, of zelfs overwegend, omging met vakgenoten. Zijn diepe religiositeit bracht hem in contact met predikanten en bevriende medegelovigen. De notities in het dagboek zijn ontroerend in hun directe eenvoud. Blumenthal verdiept zich ook in de Nederlandse literatuur en geschiedenis. Hij leest bijvoorbeeld de *Herfsttij der Middeleeuwen* en *Max Havelaar*. De loop van de oorlog wordt nauwelijks genoemd, de onvoorstelbare beslissing om de Sovjet-Unie binnen te vallen (operatie Barbarossa) komt in het dagboek voor onder 22 juni 1941: "Krieg Deutschland-Russland!"; begin augustus lezen we "Fort-schritte der Deutschen südlich Kiev". Wiskundig bleef Blumenthal actief, hij bestudeerde de literatuur (voor zover toegankelijk voor hem) en werkte met diverse collega's samen. Zijn laatste artikel, over isoperimetrie, was in samenwerking met Wolff in 1942 geschreven. Op 25 mei 1941 werd Blumenthal

geïnformeerd dat hij zijn Duitse staatsburgerschap verloren had. Deze *Ausbürgerung* had al op 1 januari plaatsgevonden, de Universiteit Göttingen had daarop vrijwel direct Blumenthal zijn doctorsgraad ontnomen. Vreemde tijden.

Oproepen voor transport

De deportaties van joden namen voortdurend in aantal toe, Blumenthal ontkwam niet aan oproepen voor transport. Om aan deportatie te ontkomen nam hij alle mogelijke pogingen vrijgesteld te worden, zo werden de Blumenthals op 19 augustus 1942 naar Amsterdam gecommandeerd door de Joodse Raad. Om hun heen verdwenen vele joodse vrienden, deportaties vonden aan de lopende band plaats. Op 24 augustus deelt de Joodse Raad mee dat het echtpaar naar Westerbork zal gaan en op de volgende dag stonden de Blumenthals op het station Maliebaan klaar om vervoerd te worden, en dan gebeurt er toch nog een wonder: op weg naar Zwolle werden beiden in Amersfoort uit de trein geroepen — terug naar Utrecht. De Utrechtse dominee Duyvendak was er in geslaagd de deportatie ongedaan te maken. Deze gebeurtenis mag duidelijk maken dat van nu af aan het leven in Utrecht een bijna ondraaglijk avontuur was geworden. Niettemin bleven hun bekenden hen steunen voor zover dat in hun macht lag. Vooral de kerk en de predikanten waren behulpzaam in praktische aangelegenheden, maar de geestelijke ondersteuning woog nog veel zwaarder. Het is nauwelijks te bevatten dat Blumenthal ook nog op bescheiden

wijze wiskundig actief bleef. De rustige, bescheiden geleerde uit Aken toonde een mentale kracht die slechts weinigen onder deze omstandigheden zouden (en hadden) kunnen opbrengen. Iedere dag bracht nieuwe anti-joodse maatregelen, geruchten van deportaties, oproepen van de politie, SS, of andere instanties. In het bijzonder werden de Blumenthals, en waarschijnlijk alle nog resterende joden, op een onmenselijke manier van woning naar woning gejaagd. Alleen al de zorgen van de verhuizing zouden de doorsnee burger tot wanhoop of waanzin drijven. Doordat het dagboek een onopgesmukt, maar gedetailleerd verslag van het leven van het echtpaar Blumenthal bevat, is de lezing een soort historische en psychologische belevenis.

Een schat aan gegevens

Felsch heeft aan Blumenthals dagboek een hoofdstuk toegevoegd met gegevens over het verblijf in Westerbork en Theresienstadt, het materiaal omvat brieven van Blumenthal zelf, van kampgenoten en familieleden.

Een indrukwekkende lijst van aanhangsels bevat een schat aan informatie. Zo is er een opsomming van de woningen die de Blumenthals in Delft en Utrecht bewoond hadden. Van september 1940 tot januari 1943 verhuisden zij acht maal, vaak met een bevel als *Wohnung binnen zwei Stunden zu räumen*. Het einde kwam met hun internering in het kamp Vught, daarop volgde binnen een maand het transport naar Westerbork, waar Malie overleed aan een longontsteking. Blumenthal werd in januari 1944 naar Theresienstadt overgebracht, alwaar hij op 12 november 1944 in het ziekenhuis rustig insliep. Beiden was de tocht naar een van de vernietigingskampen bespaard gebleven.

De auteur van deze ongebruikelijke biografie verdient alle lof voor zijn speurwerk naar de personen om Blumenthal, de problemen waar een geëmigreerde jood in Nederland mee van doen had, zijn kerkelijke contacten, de steun van de wiskundige gemeenschap, ... Wie het boek leest komt onder de indruk van de schat aan gegevens en feiten die Felsch achterhaald heeft. Hij heeft hiermee een oprecht en exact eerbetoon aan de mens en de wiskundige Blumenthal gebracht. ◀

Dankwoord

De afgebeelde foto's in dit artikel zijn welwillend beschikbaar gesteld door de biograaf Volkmar Felsch.



Het huis Zuilenveld (Slot Zuylen), Oud-Zuilen (Utrecht), uit de fotocollectie van Mali Blumenthal

Richard Boucherie

Afdeling Toegepaste Wiskunde
Universiteit Twente
r.j.boucherie@utwente.nl

Jan van Neerven

Delft Institute of Applied Mathematics
TU Delft
j.m.a.m.vanneerven@tudelft.nl

Interview Arjen Doelman

Kantelen of kapseizen?

In de Wetenschapsvisie verraste het ministerie van OCW de Nederlandse wetenschappelijke wereld met haar voornemen NWO te 'kantelen'. Dit voorstel leidde tot forse kritiek vanuit de wetenschap. Alle reden voor een interview met de voorzitter van het gebiedsbestuur Exacte Wetenschappen van NWO, wiskundige prof.dr. Arjen Doelman.

Arjen, allereerst dank dat je bereid bent dit interview te geven. Nu het stof van alle commotie rond Wetenschapsvisie 2025 van het ministerie van OCW een beetje begint neer te dalen, zijn wij benieuwd welke veranderingen bij NWO voor de deur staan. Zoals iedereen heeft kunnen lezen wil de minister NWO 'kantelen'. Na alle kritiek uit het wetenschapsveld zijn we benieuwd of dat inderdaad gaat ge-

beuren en welke consequenties dit voor de onderzoeksfinanciering zal hebben. Maar laten we beginnen bij de Wetenschapsvisie 2025 zelf. Wat zijn naar jouw mening de meest sailante punten?

"Laat ik voorop stellen dat de Wetenschapsvisie zowel goede als minder goede punten bevat. Een van de positieve punten is de constatering dat wetenschappers tegenwoordig

te weinig tijd hebben voor hun primaire taak: het doen van wetenschap. Ze hebben het te druk met het schrijven van onderzoeksvoorstellen en andere rompslomp, en het is goed om expliciet te lezen dat ook het ministerie vindt dat dit moet veranderen. Maar, en dat is een van de twee grote probleempunten van deze Wetenschapsvisie, er staat tegelijk ook heel duidelijk dat er geen extra geld voor wetenschap komt. Hoe wil je dan zorgen dat wetenschappers meer met wetenschap bezig kunnen zijn? Zelfs over de mogelijkheid dat er op termijn extra financiering zal kunnen komen zodra het economisch weer beter gaat, wordt niet gesproken, dit ondanks de nadrukkelijke wens van meerdere gremia. Zoals Hans Clevers, president van de KNAW, het onlangs nog zei op een bijeenkomst van FOM: je verliest er toch niks mee om dit tenminste als intentie uit te spreken? En dat terwijl de investeringen in onderwijs en onderzoek in Nederland toch heel karig zijn in vergelijking met andere ontwikkelde landen."

Toch doet Nederland het in wetenschappelijk opzicht goed. Is een euro in Nederland meer waard dan in het buitenland?

"Binnen Europa presteren landen als Zwitserland en Israël beter, maar in beide landen zijn bijzondere omstandigheden aan te wijzen die in Nederland niet van toepassing zijn. Het Nederlandse succes is inderdaad opmerkelijk. Deels is dat te danken aan de internationale oriëntering van veel wetenschappers, maar zeker ook het Nederlandse systeem van zeer solide universiteiten in wissel-



Arjen Doelman

werking met een alert en flexibel NWO — dat kan inspringen op de jongste ontwikkelingen — is een belangrijke factor.”

Iemand heeft wel eens uitgerekend dat hij net-to meer geld besteedt aan het aanvragen van subsidies dan het oplevert als je alle tijd meerekent die hij en zijn medewerkers erin steken bij het schrijven en de referenten bij het beoordelen.

“Kijk, toen ik net begonnen was als jonge UD in Utrecht ‘kreeg’ ik mijn promovendi vanuit de eerste geldstroom. Ik was fulltime met wiskunde bezig. Ik schreef mijn eerste NWO-voorstellen voor aio-posities pas toen ik al hoogleraar aan de UvA was. Inmiddels is het op veel universiteiten zo dat je niet eens meer tenure krijgt als je niet minstens drie promovendi begeleid hebt. Jonge wetenschappers moeten meteen al aan het begin van hun carrière Veni’s en Vidi’s zien binnen te halen. Wanneer dat niet lukt hebben ze al snel een probleem. Daarnaast wil je ook niet weten hoeveel tijd men binnen NWO kwijt is met het beoordelen van één enkel voorstel. Soms moeten er wel zo’n twintig tot dertig referenten worden aangeschreven om twee of drie rapporten binnen te halen. Iedereen heeft het gewoon veel te druk. Als de minister zegt dat ze dit probleem wil aanpakken moet er wel degelijk geld bij.

“Willen we wel een systeem waarin ‘bestuurders’ zeggen welke kant de wetenschap op moet?”

Een tweede kritiekpunt op de Wetenschapsvisie is de top-downbenadering die het hele stuk ademt. Willen we wel een systeem waarin ‘bestuurders’ zeggen welke kant de wetenschap op moet? Dit is ook het probleem met de NWO-paragraaf. Er wordt aangestuurd op een volledig top-down georganiseerd NWO. Niet alleen is deze benadering onwenselijk, ze leidt ook tot irritatie omdat zij ook suggereert dat wetenschappers zelf niet de verantwoordelijkheid willen nemen. Terwijl het al lang niet meer zo is dat wetenschappers in hun ivoren toren hun vak beoefenen.”

Een mooi voorbeeld is de Studiegroep Wiskunde met de Industrie.

“Ook de wiskunde begrijpt dat zij naar buiten moet kijken, en dit is in heldere termen verwoord in het recente visiedocument *Formulas for Insight and Innovation* [2]. Het is prima als de minister dit ondersteunt, maar het uitgangspunt moeten blijven: we-

tenschap gestuurd vanuit de wetenschap zelf. Dat is het axioma van waaruit alle succesvolle nationale funding organisations opereren, ook NWO.”

Hebben de topsectoren bijgedragen aan het maatschappelijk engagement in de wetenschap?

“Het valt zeker niet te ontkennen dat de topsectoren ook goede kanten hebben. Ze hebben geleid tot een aantal nieuwe onderzoeksrichtingen die anders niet of onvoldoende van de grond zouden zijn gekomen. Al moet er wel aan toegevoegd worden dat het ook dan vaak gaat om het verder versterken van ontwikkelingen die al langer gaande waren. Onderzoekers die echt succesvol zijn met het binnenhalen van projecten in de topsectoren blijken daar zo goed als fulltime mee bezig te zijn, want de procedures zijn complex en het valt in de praktijk niet mee om de vereiste matching vanuit de industrie te krijgen. Het echte onderzoek moeten ze dus grotendeels aan anderen overlaten. De verwachting is dat de procedures en randvoorwaarden in de toekomst versimpeld en versoepeld gaan worden. Daarmee wordt samenwerking tussen industrie en de academische wetenschap makkelijker en natuurlijker.”

Hoe goed doet de wiskunde het in de topsectoren?

“‘Buitenproportioneel slecht’ is misschien overdreven, maar de wiskunde doet het over het algemeen niet goed. Zelfs de sterrenkundigen zijn succesvoller, en dat is toch wel iets wat mij persoonlijk, maar ook het hele bestuur van het gebied EW, zorgen baart. Laat ik benadrukken dat op bestuurlijk gebied binnen EW grote betrokkenheid bestaat tussen de verschillende disciplines. Zo waren het bijvoorbeeld de sterrenkundigen die de eerste clusterfinanciering voor de wiskunde op het juiste moment het beslissende duwtje in de rug hebben gegeven.”

De EU zet met haar programma Horizon 2020 juist ook heel sterk in op persoonlijke excellentie. Zwemt Nederland met het topsectorenbeleid niet tegen de stroom in?

“De ERC-grants zijn inderdaad steeds groter geworden. Maar, en dat lees je ook in de strategienota van NWO, het persoonsgebonden vrije onderzoek wordt ook in Nederland nog steeds als de basis gezien van al het wetenschappelijk onderzoek. Het probleem is vooral dat er bezuinigd is op NWO en er binnen de gebieden weinig geld is, terwijl de aan vraagdruk enorm is toegenomen. We hopen



Wetenschapsvisie 2025 [1]

overigens dat het budget van NWO in de nabije toekomst weer omhoog gaat: het ministerie heeft op termijn 100 miljoen per jaar extra toegezegd voor het fundamentele vrije onderzoek.”

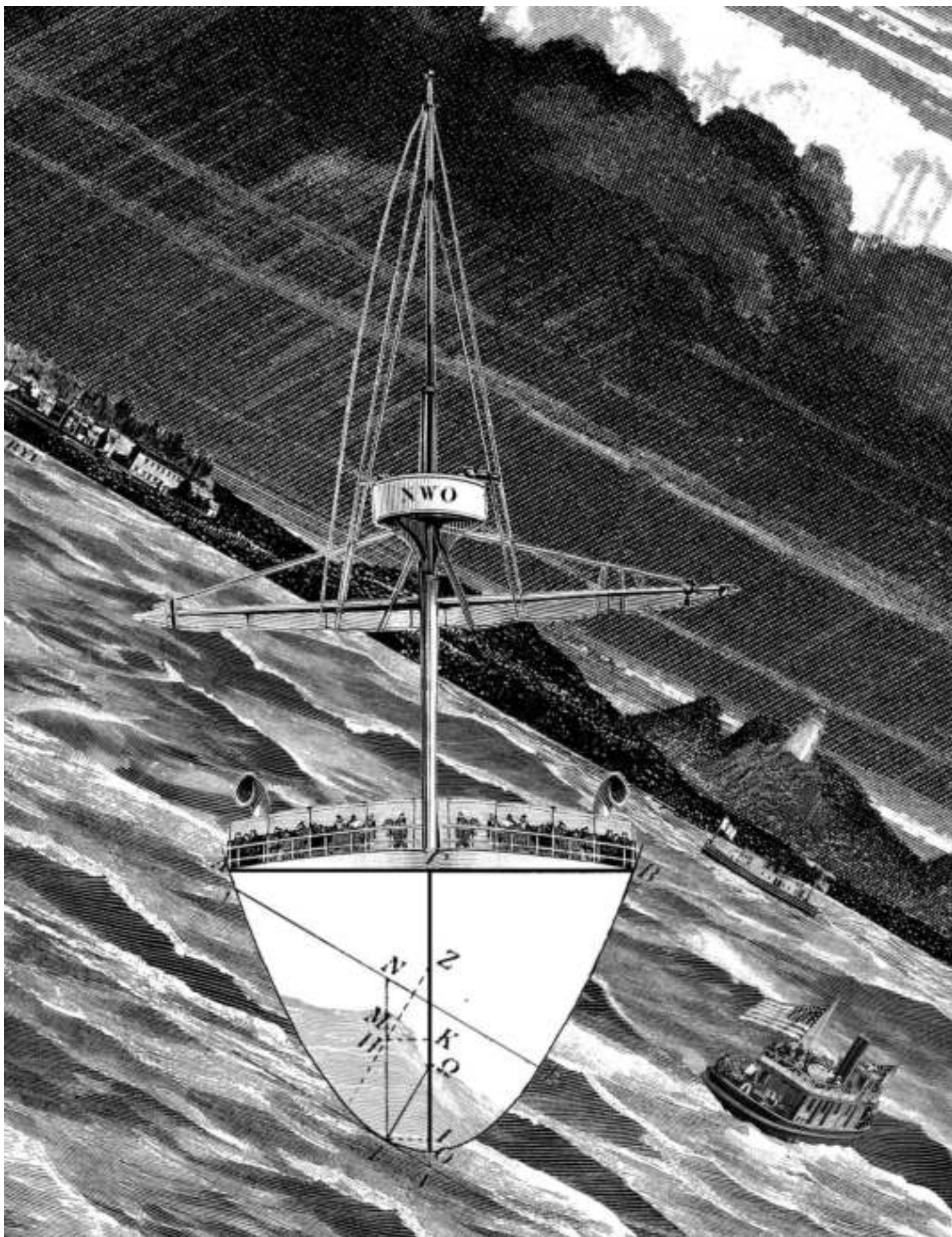
Waar halen ze dat dan weg? Uit het aftoppen van de promotiepremies?

“Dat weet ik eerlijk gezegd niet precies. In het aftoppen van de promotiepremies, wat inderdaad in de Wetenschapsvisie wordt aangekondigd, kan ik mij overigens wel vinden. Naar mijn idee is het relatief kleine aantal postdocs dat binnen Nederland actief is een van de aspecten waarmee de Nederlandse wetenschap zich op een negatieve manier van andere landen onderscheidt. De reden hiervoor is simpel: anders dan aio-posities brengen ‘binnengehaalde’ postdocplaatsen geen directe premie op.

Een randvoorwaarde bij de 100 miljoen extra was overigens wel dat NWO zich aan haar afspraken over de financiering van de topsectoren houdt. Door de wet van communiceren de vaten zal een deel van het geld uiteindelijk toch bij de topsectoren terecht kunnen komen, dat valt niet te ontkennen.”

Komt er straks een structuur die beter aansluit bij Europa?

“Toevallig zat ik onlangs bij een gelegenheid naast de president van de ERC, Jean-Pierre Bourguignon, zelf een wiskundige, die Nederland complimenteerde met het naar verhouding buitengewone succes dat ons land heeft in de ERC-rondes. Volgens hem was dat voor een belangrijk deel te danken aan het sys-



teem van NWO, dat zo goed voorbereidt op het aanvragen van Europese beurzen.”

Laten we het nu over de aanstaande hervorming van NWO hebben. Wat staat hierover precies in de Wetenschapsvisie?

“De minister vindt dat NWO ‘gekanteld’ moet worden. Wat hiermee precies bedoeld wordt is tamelijk onduidelijk. Dat geldt overigens voor wel meer dingen in het stuk, dat in sommige opzichten leest als een ‘bijbel’: je kunt er allerlei interpretaties uithalen en het spreekt op tal van punten zichzelf tegen. In een mechanische, bèta-wetenschappelijke, interpretatie betekent ‘kanteling’ dat NWO niet langer wordt georganiseerd en aangestuurd langs de verticale pijlers van inhoudelijke en disciplinaire domeinen zoals nu het geval is, maar langs de horizontale lijnen als wetenschap voor de wetenschap, wetenschap voor de samenleving en wetenschap voor innovatie. Iedereen begrijpt dat een aantal van de huidige gebieden een merkwaardige ontstaansgeschiedenis hebben en niemand bestrijdt dat een zekere shuffle zeer zinvol zou zijn. Er is sinds kort ook een meer alfa-wetenschappelijke interpretatie van het begrip ‘kanteling’, namelijk als een ‘morele kanteling’ waarbij de organisatie van NWO zó wordt dat het opzetten van activiteiten langs die horizontale lijnen natuurlijker wordt. Dat is nu inderdaad niet makkelijk. De opzet van de organisatie blijft dan langs inhoudelijk samenwerkende disciplines, maar horizontale samenwerking wordt beter gefaciliteerd. Dat is de richting waarin we momenteel denken.”

Meteen na het openbaar worden van de Wetenschapsvisie is er veel commotie ontstaan. Tal van prominenten, waaronder Hans Clevers, Robbert Dijkgraaf, en vrijwel alle Spinozaprijswinnaars, keerden zich tegen de voorgenomen kanteling van NWO. Is NWO zelf bij de totstandkoming van de plannen gehoord? En hoe staat het algemeen bestuur van NWO tegenover de plannen?

“De opdrachtgever voor de schets voor een nieuwe governance structuur van NWO was OCW samen met het Algemeen Bestuur van NWO. Het AB is altijd direct betrokken geweest bij het opstellen van het rapport. Waar de commotie om ontstaan is, is dat in reactie op het rapport aangehecht bij de Wetenschapsvisie, waarin de kanteling van NWO werd doorgevoerd, het AB heeft gezegd dat ze de voorstellen ‘begrijpen’. Deze reactie is door velen — naar mijn idee niet geheel onterecht — geïnterpreteerd als

Reacties op de Wetenschapsvisie

- “De Wetenschapsvisie schetst een toekomst waarin het budget voor die tweede geldstroom mede wordt bestierd door universiteitsbestuurders, bedrijfsleven, overheid en maatschappelijke organisaties. Het zo effectief gebleken evenwicht tussen eerste en tweede geldstroom wordt dan brutaal verstoord. Deze top-downwerkwijze zal de hond in de pot blijken voor briljante onderzoekers. Kortetermijnbelang en voorspelbaarheid zullen domineren, wat ten koste gaat van baanbrekende innovaties. Een succesvol financieringssysteem wordt vervangen door een lastig te besturen bureaucratie. [...] In haar reactie op de Wetenschapsvisie merkte de KNAW over de plannen met NWO op dat het lijkt alsof de bewindslieden zich op het verkeerde been hebben laten zetten door een niet al te doorwrocht advies van consultants.” (Hans Clevers, president van de KNAW, in: ‘Kabinet maakt van NWO een bureaucratie,’ *NRC Handelsblad*, 16 december 2014).
- “De Wetenschapsvisie is een leesbaar, deels goed gedocumenteerd stuk dat vergezichten schetst, die politiek populair zijn. Er staan zinnige voorstellen in, maar, zoals veel commentatoren al hebben opgemerkt, de grote problemen van de Nederlandse wetenschap worden hooguit aangestipt, maar niet echt geadresseerd, laat staan dat oplossingen worden aangedragen. Het blijft bij zonnige vaagheid. Ik onderschrijf de kritiek van de KNAW op de Wetenschapsvisie 2025: investering in de toekomst blijft uit.” (Piet Borst, KNAW podium, 2 december 2014)

Voor meer meningen en discussie verwijzen we naar het Podium ‘Wetenschapsvisie 2025’ van de KNAW [3].

steun voor de nieuw voorgestelde structuur. Veel van de kritiek die je nu in de pers leest heeft het AB ook al geuit tijdens de totstandkoming van het rapport. Echter, daarvan is weinig concreets terug te vinden in het uiteindelijke rapport.

“De commotie heeft wel degelijk een zeer positief effect gehad”

Nergens ter wereld is er een goed werkende science foundation die niet werkt volgens het principe van een organisatie opgebouwd rond inhoud en disciplines. Door alle ophef rond de Wetenschapsvisie en haar uitwerking voor NWO is dat nu — gelukkig — geheel doorgedrongen tot alle niveaus, inclusief het ministerie. Iedereen weet dat NWO een verbeter-

ingsslag heeft te maken, vooral ook op het gebied van samenwerking tussen de disciplines, opdat de Nederlandse wetenschap doortastender kan reageren op vragen die dwars door de wetenschapsgebieden heen gaan. De commotie rond de implicaties van de Wetenschapsvisie voor de organisatie van NWO heeft wel degelijk een zeer positief effect gehad: we kunnen nu aan de slag om op basis van de kracht van de disciplines een structuur te bouwen die ook de horizontale interacties natuurlijk maakt. Ik betwijfel heel erg of dat gelukt zou zijn met alleen het rapport.”

Wat gaat er nu gebeuren?

“Hans Clevers heeft gezocht naar een Engelse vertaling van het begrip ‘kantelen’ die de betekenis zo getrouw mogelijk weergeeft en

Reacties op de voorgenomen hervorming van NWO

- “Kantelen is een favoriet modewoord van consultants. Het roept bij mij maar één beeld voor ogen: de omgevallen boekenkast. De studieboeken, ooit liefdevol per onderwerp gerangschikt op de planken, liggen nu in een grote stapel op de vloer. Graaien maar.” (Robbert Dijkgraaf, ‘Sluipmoord op NWO’, *nrc.nl*, 3 januari 2015)
- “Zowel voor de kwaliteit en het gezag van NWO als ook voor het draagvlak binnen de wetenschap in Nederland is het cruciaal dat erkende wetenschappers niet slechts een adviserende, maar veeleer een leidende rol spelen in het beleid van NWO. Wij waarderen de intenties in de beleidsvisie van het ministerie van OCW zeer, maar het is onze vaste overtuiging dat deze goede voornemens schipbreuk zullen leiden als deze niet worden gerealiseerd en gedragen door erkende vertegenwoordigers van de wetenschap zelf. Dit geldt in zeer bijzondere mate voor de organisatie van NWO.” (uit: Open brief van 69 Spinozaprijswinnaars aan de VSNU [4])

kwam uit op ‘capsizing’ — waarmee hij wilde aangeven dat ook naar zijn idee het kantelen van de NWO-organisatie het kapseizen van NWO als gevolg zal kunnen hebben. Zoals gezegd was zo’n kanteling in de zin van een herinrichting langs horizontale lijnen wel degelijk de oorspronkelijke bedoeling van de Wetenschapsvisie. De minister wil aan de tekst van de Wetenschapsvisie vasthouden. Na alle kritiek mag de vraag ‘Wat betekent deze tekst nu daadwerkelijk?’ gesteld worden. Sterker nog, de ‘morele’ interpretatie van het begrip kantelen is nu acceptabel voor het ministerie: de nieuwe organisatie van NWO kan worden opgebouwd langs inhoudelijke verticale pijlers, als er maar voor gezorgd wordt dat de horizontale lijnen goed lopen. En dat is wat er nu gaat gebeuren.”

Onze onderzoeksvoorstellen worden dus straks niet beoordeeld door literatuurwetenschappers?

“De stand van zaken is nu dat NWO niet gekanteld gaat worden.”

Waar is het idee van die kanteling eigenlijk ontstaan?

“Er zijn eerdere evaluaties van NWO geweest

waarin werd aanbevolen de governance structuur te moderniseren, maar daar is toen om verschillende redenen niets mee gebeurd.

Mede daarom heeft de minister nu gezegd dat er echt actie moet komen. Een van de grote kritiekpunten was dat het binnen de huidige structuur van NWO erg moeilijk is om onderzoek dat ingaat op de grote maatschappelijke thema’s te organiseren — simpelweg omdat deze thema’s zonder uitzondering dwars door disciplines heen snijden. En laten we eerlijk zijn: bij NWO was de samenwerking tussen de huidige gebieden inderdaad niet makkelijk. Er was zelfs sprake van ‘perverse prikkels’ die er in de praktijk toe leidden dat het voor gebieden een voordeel kon zijn elkaar te dwarsbomen. Het idee van een kanteling is dan niet onnatuurlijk. Een andere constatering van de evaluaties was dat voor de buitenwacht niet duidelijk is waar binnen NWO een passend aanspreekpunt voor vragen te vinden is: ook het beeld van NWO als lappendeken wordt door niemand betwist. Laten we overigens niet uit het oog verliezen dat er in de recente evaluatie juist ook veel lof was voor de wijze waarop NWO haar primaire taak, het selecteren van de beste wetenschappelijk-

ke projecten, uitvoert. Dat wordt nog wel eens vergeten.”

Kan de wiskunde hier uiteindelijk haar voordeel mee doen?

“Wiskunde heeft het moeilijk in de topsectoren, vooral ook omdat ze in alle topsectoren een beetje mee doet. Wiskunde is overal op zijn minst van ondersteunend belang maar zit nergens aan het stuur. In de nieuwe plannen binnen NWO voor een strategie voor de lange termijn zijn, op basis van gesprekken met actieve wetenschappers, een aantal brede thema’s geformuleerd die dwars door de disciplines heen gaan. In twee van deze zes NWO-brede uitdagingen kan wiskunde nu eens wel mede aan het stuur staan: Big Data en Complexiteit. Daar zie je dus dat op het moment dat wetenschappers bij elkaar gaan zitten en zich richten op maatschappelijk belangrijke thema’s de wiskunde ‘opeens’ een sterke rol kan spelen — en dat dat ook door onze collega’s wordt ingezien. Het is duidelijk hoe centraal de rol van de wiskunde kan zijn de komende jaren.”

Arjen, hartelijk dank voor dit interview! ➔

Referenties

- 1 *Wetenschapsvisie 2025: keuzes voor de toekomst*, Ministerie van OCW, 2014, www.rijksoverheid.nl/documenten-en-publicaties/rapporten/2014/11/25/wetenschapsvisie-2025-keuzes-voor-de-toekomst.html.
- 2 *Formulas for Insight and Innovation; Mathematical Sciences in the Netherlands*, Platform

Wiskunde Nederland, Amsterdam, 2014, www.platformwiskunde.nl/home.vision.document.2025.htm.

- 3 Podium ‘Wetenschapsvisie 2025’, KNAW, <https://podium.knaw.nl/thema/nationale-wetenschapsagenda>.

- 4 Open brief van 69 Spinozaprijswinnaars aan de VSNU, <https://www.dub.uu.nl/sites/default/files/attachments/93/brief.spinoza.vsnv.pdf>.

Konstantinos Efstathiou

*Johann Bernoulli Institute for Mathematics and Computer Science
University of Groningen
k.efstathiou@rug.nl*

Column Tenure-tracker

Symmetries in Hamiltonian systems

In this column holders of a tenure track position introduce themselves. The tenure track positions in mathematics became available in 2013. Excellent researchers could apply in several expertise areas of mathematics. Konstantinos Efstathiou has a tenure track position at the University of Groningen.

Since April 2014 I am Tenure Track Assistant Professor in the group Mathematical Physics, Geometry, and Dynamical Systems at the Johann Bernoulli Institute of the University of Groningen. The road to here was sinuous but with great views along the way.

I got a BSc and then MSc in Physics at the University of Athens in Greece. After a little bit of soul-searching (“should I work on galaxy formation or dynamical systems?”) I decided to do a PhD on Mechanics and Symmetry. I moved to the Université du Littoral at the north of France, a region whose charms were depicted in the French comedy *Bienvenue chez les Ch’tis*. My PhD supervisors were Boris Zhilinskiĭ and Dmitriĭ Sadovskii. They, and Richard Cushman in Utrecht with whom I was collaborating, played a fundamental role during these first research-oriented steps, offering their guidance and support.

The main theme of my research, forged during these PhD years, is properties of Hamiltonian systems with symmetries. This is a vast field but one can start getting a feeling for what is going on by looking at a very simple system: two uncoupled identical harmonic oscillators. The system is completely integrable: one can write down expressions for the orbits; they all turn out to be periodic with the same period (unless both oscillators stand still). Nevertheless, the geometry of how all orbits fit together on an energy level set is rather intricate and gives rise to what is known as the *Hopf fibration* (Figure 1). For more details see Richard Cushman’s lecture notes [1] — writing these notes was how I started learning this topic.

After finishing my PhD and a compulsory stint in the Greek army, I joined the University of Groningen as a post-doc in the group of Henk Broer. During the time in Groningen I continued my work on integrable Hamiltonian systems and also started working in new projects, out of which I would like to highlight the study of dynamics on networks. Many of these projects were in collaboration with Henk Broer whose

broad view of mathematics significantly influenced my own thinking and scientific development.

The time as a post-doc in Groningen was very good. Not only in terms of work and research but also because I met my wife and we had our son. Nevertheless, every post-doc must end, and at the beginning of 2013 I moved to Suzhou, China, as Lecturer at the Xi’an



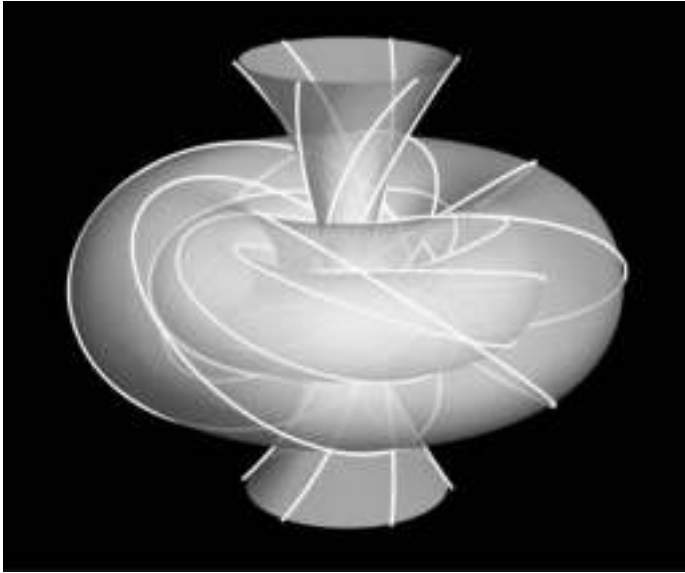


Figure 1 The Hopf fibration.

Jiaotong-Liverpool University. I stayed there for slightly more than a year, teaching, doing research, and even serving as Interim Head of the Department of Mathematical Sciences for a few months. I also had the chance to learn a completely different culture — an amalgam of British academic culture and Chinese life. And just as things were settling down in Suzhou I learned that NWO was funding a number of tenure track mathematics positions in the Netherlands; one of them was in Groningen. Certain opportunities are impossible to let pass by.

Let me now say a few more words about my research. As I wrote above, the main theme of my research is symmetries in Hamiltonian systems. I combine ideas from the theory of integrable Hamiltonian systems, group theory, and algebraic topology to understand the dynamics and geometry of Hamiltonian systems with continuous or discrete symmetries. I like to see my research in the more general context of dynamical systems, a topic with a huge tradition in Dutch mathematics (one only has to recall the contributions of, among others, Floris Takens and Hans Duistermaat). A lot of my work has focused on the notion of generalized monodromy in Hamiltonian systems. Hamiltonian monodromy usually refers to the monodromy of torus bundles — natural objects of study in integrable Hamiltonian systems. The role of the monodromy of such bundles for the global existence of nice (action-angle) coordinates was uncovered in the late seventies / early eighties (the protagonists here are Nikolai Nekhoroshev, Hans Duistermaat, and Richard Cushman). But monodromy is more than a purely geometric concept. It also explains the structure of the joint spectrum of integrable quantum systems such as molecules and atoms. Generalized Hamiltonian monodromy refers to the properties of integrable

Hamiltonian fibrations where some of the fibres are singular, for example, curled tori — cylinders over a figure-8 where the two ends of the cylinder are glued after a half-twist (Figure 2). The article [2] with Henk Broer presents the latest results in this direction.

Another significant part of my research has to do with the dynamics of pulse-coupled oscillator networks. Such networks model, among other things, the interaction between neurons. The pulse-based coupling causes dynamical behavior that cannot appear in systems described by smooth differential equations, for example, unstable attractors. Therefore standard methods for the analysis of smooth systems are not always suitable for the study of pulse-coupled networks and we have to come up with new techniques to understand what are the types of typical dynamics in such systems and the transitions between them.

Besides mathematics and physics I enjoy programming, not only as a means for gaining insight to mathematical questions but also for its own intellectual rewards since it exercises different thinking modes compared to mathematics. This interest (and a collaboration with my wife) led to my only, until now, Scientific Visualization paper [3]. Actually, one thing that I particularly enjoy in research is to combine very different approaches: purely theoretical approaches on the one hand, but also numerical simulations and visualizations on the other. Furthermore, I like to understand a subject from different points of view, often returning back to the same problem to examine it from a different perspective.

In the coming years I plan to further develop my research on Hamiltonian systems with symmetries on the one hand and dynamics on networks on the other. I am very excited that I will be able to do this as part of the Dutch mathematical community. ↩



Figure 2 Smooth tori near a curled torus.

References

- 1 K. Efstathiou and D.A. Sadovskii, No polar coordinates. Lectures by Richard Cushman, *Geometric Mechanics and Symmetry. The Peyresq Lectures*, J.A. Montaldi and T.S. Ratiu, eds., London Mathematical Society Lecture Notes Series No. 306, Cambridge University Press, 2005, pp. 211–302.
- 2 K. Efstathiou and W.H. Broer, Uncovering fractional monodromy, *Communications in Mathematical Physics* 324(2) (2013), 549–588.
- 3 L. Yu, K. Efstathiou, P. Isenberg and T. Isenberg, Efficient Structure-Aware Selection Techniques for 3D Point Cloud Visualizations with 2DOF Input, *IEEE Transactions on Visualizations and Computer Graphics* 18(12) (2012), 2245–2254.

Hans van Ditmarsch

LORIA, Nancy, France

IMSc, Chennai, India

hans.van-ditmarsch@loria.fr

Barteld Kooi

Faculteit Wijsbegeerte

Rijksuniversiteit Groningen

b.p.kooi@rug.nl

Vakantiecursus

Honderd gevangenen en een gloeilamp

Op de vakantiecursus 2014 van het Platform Wiskunde Nederland bespreken Hans van Ditmarsch en Barteld Kooi het raadsel ‘Honderd gevangenen en een gloeilamp’. Dit raadsel doet sinds het begin van deze eeuw de ronde in het wiskundepuzzelcircuit. Dit verhaal is een bewerking van het gelijknamige hoofdstuk uit het boek *Honderd gevangenen en een gloeilamp*, deel 73 van Epsilon Uitgaven, waarin zij een aantal wiskunderaadsels beschrijven.

Een groep van honderd gevangenen, gezamenlijk in de gevangenskantine, wordt medegedeeld dat ze allemaal in isolatiecellen geplaatst zullen worden en daarna één voor één ondervraagd, in een kamer met een lamp met een aan-uitschakelaar. De gevangenen kunnen met elkaar communiceren door de lamp aan of uit te doen (en dat is de enige manier waarop ze kunnen communiceren). De lamp is aan het begin uit. Er is geen vaste volgorde van ondervraging, er is geen standaard tijdsduur tussen de ondervragingen, en dezelfde gevangene kan best meerdere keren achter elkaar ondervraagd worden. We mogen wel aannemen dat op ieder moment iedere gevangene ooit nog eens ondervraagd zal worden. Als een gevangene ondervraagd wordt, kan deze: niets doen, de lamp uitdoen, de lamp aandoen, of verklaren dat iedereen (ten minste één keer) ondervraagd is. Als dit waar is, worden alle gevangenen vrijgelaten. Anders worden ze allemaal opgehangen. Kunnen de gevangenen, zolang ze nog bij elkaar

zijn in de kantine en niet naar de isolatiecellen gebracht zijn, een protocol overeenkomen waardoor ze vrijgelaten worden?

Tot honderd tellen met één bit?

Het raadsel lijkt onoplosbaar. Er is immers maar één bit beschikbaar voor de informatieoverdracht: de lamp kan aan, of uit. Maar er zijn honderd gevangenen. Het getal 100 ligt tussen 64 en 128 en vergt dus 7 bits om het te representeren. En dan hebben we het nog niet over het protocol om het raadsel op te lossen. Hoe kan één bit nu voldoende zijn om dat allemaal te doen?

Een struikelblok lijkt de wiskundige intuïtie te zijn. De natuurlijke inductie waarmee we vaak problemen te lijf gaan, suggereert een methode om de oplossing te zoeken, die helaas in dit geval niet ergens toe leidt. Laten we het even hardop doen. Oplossen voor één gevangene, oplossen voor twee gevangenen, oplossen voor meer gevangenen.

Eén gevangene

We beginnen met de basis. Stel er is één gevangene: Anna. De eerste keer dat Anna ondervraagd wordt, weet zij dat iedereen ondervraagd is. Daarvoor is de lamp niet eens nodig. Dus:

Protocol 1. *Als je ondervraagd wordt, is iedereen ondervraagd.*

Twee gevangenen

Protocol 1 werkt natuurlijk niet als er meer dan een gevangene is. Maar misschien kunnen we het aanpassen. Stel er zijn twee gevangenen: Anna en Bert. De eerste van de twee die ondervraagd wordt, doet de lamp aan. Stel, zonder verlies aan algemeenheid van de oplossing, dat dit wederom Anna is. Nu is het even afwachten wie er daarna ondervraagd wordt. Als het Bert is, dan ziet Bert dat de lamp aan is, en weet daarom dat Anna reeds ondervraagd is (alleen gevangenen mogen de lamp aan en uit doen). Bert kan dan dus naar waarheid zeggen dat iedereen ondervraagd is. En Anna en Bert gaan vrijuit. Als daarentegen de volgende ondervraagde opnieuw Anna is, is de lamp nog aan, en ‘denkt ze dus’ dat Bert nog niet ondervraagd is, anders was ze al vrijgelaten. We zijn nu wat vaag: Anna’s argument is geba-



Hier zien we nu zo'n gevangene de schakelaar omdraaien

seerd op wat ze in alle redelijkheid vermoedt dat Bert gedaan heeft. Dit kan in dit geval wel zonder afspraak, maar aan de andere kant is er niets op tegen dat Anna en Bert dit met elkaar afspreken: hier komt het protocol om de hoek kijken. Dit kunnen we als volgt verwoorden:

Protocol 2. *Als je ondervraagd wordt en de lamp is uit, doe hem dan aan; als je ondervraagd wordt, en jij hebt de lamp eerder aangedaan en de lamp is nog steeds aan, doe dan niets; als je ondervraagd wordt, en de lamp is aan maar jij hebt hem niet aangedaan, verklaar dan dat iedereen ondervraagd is.*

Een protocol voor drie gevangenen?

Stel er zijn drie gevangenen, Anna, Bert en Caroline... Nu wordt het moeilijker. Anna, die weer als eerste ondervraagd wordt, kan de lamp aandoen. Als daarna bijvoorbeeld Bert ondervraagd wordt, kan Bert de lamp weer uitdoen. Stel dat daarna Anna weer ondervraagd wordt, dan weet Anna dat ten minste twee gevangenen nu ondervraagd zijn. Dat schiet op! Als daarna Caroline ondervraagd wordt, weet Caroline echter niet of een andere gevangene al eerder ondervraagd is: het kan dan ook best zo zijn dat zij als eerste ondervraagd wordt (de tijdsduur tussen ondervragingen is niet bekend)! Wat moet Caroline

nu doen? Dat is eigenlijk dezelfde vraag als wat Anna de eerste keer moet doen. Maar laten we nog even doorfantaseren — want het is namelijk fantaseren, we komen er zo echt niet uit: het zou handig zijn als Anna eerst de lamp aan kan doen, daarna zoals hiervoor de lamp weer uit kan zien, en *daarna* de lamp nog een keer aandoet. De volgende keer als ze de lamp weer uit ziet, zou dan dus iedereen ondervraagd moeten zijn? Laten we het formaliseren: het protocol wordt nu:

Protocol 3. *De eerste keer dat de lamp uit is als je ondervraagd wordt, doe hem dan aan; als de lamp aan is als je ondervraagd wordt en je weet dat jij hem niet hebt aangedaan, doe hem dan uit. In de andere gevallen, doe niets. Als je de lamp de tweede keer uitdoet, verklaar dat alle drie gevangenen ondervraagd zijn.*

Dit protocol werkt soms wel en soms niet. Het gaat wel goed bij deze uitvoering:

Anna — Bert — Bert — Anna —
Caroline — Anna.

Stel dat 0 betekent dat de lamp uit is en 1 dat de lamp aan is. We kunnen deze uitvoering dan annoteren met een bovenindex voor de toestand van de lamp, met als resultaat

${}^0\text{Anna}^1\text{Bert}^0\text{Bert}^1\text{Anna}^0\text{Caroline}^1\text{Anna}^0$

en als we dan eveneens voor iedere gevangene bijhouden hoe vaak deze de lamp uitdoet, met een onderindex, dan krijgen we

${}^0\text{Anna}_1^1\text{Bert}_1^0\text{Bert}_1^1\text{Anna}_1^0\text{Caroline}_1^1\text{Anna}_2^0$.

Anna verklaart dus terecht dat iedereen is ondervraagd.

Maar kijk nu eens naar deze uitvoering:

Anna — Bert — Bert — Caroline —
Caroline — Anna —

Met dezelfde annotaties krijgen we nu

${}^0\text{Anna}_1^1\text{Bert}_1^0\text{Bert}_1^1\text{Caroline}_1^0$
 $\text{Caroline}_1^1\text{Anna}_1^0 \dots$

Alle gevangenen hebben één keer de lamp uitgedaan. En ze hebben de lamp ook allemaal één keer aangedaan. En vaker zullen ze de lamp niet aandoen. Dus wie er nu verder ook ondervraagd wordt, en hoe lang al die ondervragingen nu ook verder door blijven gaan, de lamp blijft altijd uit. Er gebeurt niets meer. Het protocol termineert niet in dit geval.

Andere variaties op dit thema leiden ook tot ellende. Het probleem van dit protocol is dat het soms wel en soms niet werkt. Het is natuurlijk wel heel onwaarschijnlijk als we ervan uitgaan dat de ondervragers steeds een willekeurige gevangene uitzoeken voor ondervraging, en aangenomen dat we iets weten over de tijdsduur van en tussen ondervragingen, dat dan na 100 keer nog niet iedereen ondervraagd is. De gevangenen kunnen dan best een geïnformeerd gokje wagen dat iedereen ondervraagd is. Maar om kennis te verkrijgen dat iedereen ondervraagd is, is meer nodig.

Geen trucjes

Allerlei trucjes waar de lezer wellicht aan gedacht heeft, zijn niet toegestaan, en het raadsel is ook geen strikvraag in welke zin dan ook: voelen of de lamp warm of koud is, is niet toegestaan (als de lamp uit is maar warm, weet je dat er iemand voor jou ondervraagd is — maar wat schiet je ermee op?); je mag de lamp ook niet stukslaan als je deze voor de tweede keer aan ziet (waarna de gevangene die een stukgeslagen lamp ziet maar nog niet zelf een lamp heeft uitgedaan, kan verklaren dat iedereen ondervraagd is — dit geeft een oplossing voor drie gevangenen). En het interval tussen de ondervragingen is variabel: dus de tijd bijhouden heeft geen zin. De ondervragingskamer kan niet worden gezien vanuit de isolatiecellen (daarom zijn het ook *isolatiecellen*), en er is geen geheime klikverbinding tussen de schakelaar van de lamp en de isolatiecellen; je kunt er ook niet de schakelaar horen overgaan... De gevangenen mogen allemaal verschillende namen hebben, of met opeenvolgende getallen van 1 tot 100 geïdentificeerd worden, maar dat is allemaal lood om oud ijzer.

Oplossing voor honderd gevangenen

De oplossing komt snel naderbij als we ons realiseren dat een protocol niet aan iedere gevangene dezelfde *rol* hoeft toe te bedelen: aangezien de gevangenen het protocol kunnen afspreken zolang ze nog in de kantine zijn, kunnen ze elkaar verschillende taken geven. De telling die Anna bijhoudt in het voorbeeld hiervoor, werkt, zolang iedereen maar weet dat *alleen* Anna dit doet. Dit brengt ons tot het volgende protocol.

Protocol 4. *De gevangenen wijzen onder elkaar een teller aan. Voor de teller geldt: Als je ondervraagd wordt en de lamp is uit doe dan niets; als je ondervraagd wordt en de lamp is aan, doe hem dan uit — houdt bij hoe vaak je*

dat doet; als je de lamp 99 keer hebt uitgedaan, verklaar dan dat alle 100 gevangenen ondervraagd zijn. Voor de overige gevangenen geldt: Als je ondervraagd wordt en de lamp is uit en je hebt hem nog niet eerder aangedaan, doe hem dan aan; als je ondervraagd wordt en de lamp is uit en je hebt hem al eerder aangedaan, doe dan niets; als je ondervraagd wordt en de lamp is aan, doe dan niets.

Het zal de lezer duidelijk zijn dat dit protocol inderdaad werkt. Voor drie gevangenen, waarbij Anna als teller is aangewezen, zijn de volgende drie uitvoeringen van het protocol succesvol. We gebruiken weer dezelfde annotaties waarbij de bovenindex staat voor de toestand (aan/uit) van de lamp en de onderindex voor de telling die in dit geval alleen Anna bijhoudt.

1. ${}^0\text{Bert}^1\text{Anna}^0\text{Caroline}^1\text{Anna}^0;$
2. ${}^0\text{Anna}^0\text{Bert}^1\text{Caroline}^1\text{Anna}^0\text{Bert}^0\text{Anna}^1\text{Caroline}^1\text{Caroline}^1\text{Bert}^1\text{Bert}^1\text{Anna}^0;$
3. ${}^0\text{Bert}^1\text{Anna}^0\text{Bert}^0\text{Caroline}^1\text{Bert}^1\text{Anna}^0.$

Stel dat Anna de teller is en dat van de 100 gevangenen alleen om de beurt Anna en Bert ondervraagd worden. Dan zal het nooit gebeuren dat Anna kan zeggen dat iedereen ondervraagd is. Maar dan werkt het protocol toch niet? Wel, in dat geval komt de oplossing inderdaad nooit dichterbij. Maar dat is dan omdat nooit alle gevangenen ondervraagd worden! Een voorwaarde voor de terminatie van Protocol 4 is de zogenaamde ‘fairness’ (eerlijkheid) of ‘liveness’ van het ondervragingsrooster: we hebben dit in het raadsel verwoord als de eis: “We mogen wel aannemen dat op ieder moment iedere gevangene ooit nog eens ondervraagd zal worden.” Onder die aanname zal de teller ooit naar waarheid kunnen beweren dat iedereen ondervraagd is.

We kunnen ons ook nog voorstellen dat bij de eerste honderd ondervragingen alle gevangenen na elkaar ondervraagd worden, en daarna tot in de eeuwigheid alleen Anna en Bert om de beurt. Dan is wel iedereen ondervraagd, maar komt de oplossing toch nooit naderbij. Maar ook dan wordt niet voldaan aan “We mogen wel aannemen dat op ieder moment iedere gevangene ooit nog eens ondervraagd zal worden”: er is immers een moment waarna alleen nog Anna en Bert onder-

vraagd worden. Uit de eis van eerlijk roosteren volgt dat alle gevangenen oneindig vaak ondervraagd zullen worden: Neem een zeker moment. Daarna wordt Anna nog eens ondervraagd. Neem dat moment. Daarna wordt Anna nog eens ondervraagd. Neem dat moment. Enzovoort.

Lamp aan het begin aan of uit?

Stel dat niet bekend is of het licht in eerste instantie aan of uit is. En, als voorheen, niets bekend is over de tijdsduur tussen de ondervragingen. Wat is dan een protocol om het probleem op te lossen?

Protocol 4 werkt nu niet, en ook niet als we de teller één verder door laten tellen. Bijvoorbeeld, voor drie gevangenen, kunnen we de volgende uitvoeringen niet van elkaar onderscheiden:

1. (licht aan)
 ${}^1\text{Anna}^0\text{Caroline}^1\text{Anna}^0\text{Bert}^1\text{Anna}^0;$
2. (licht uit)
 ${}^0\text{Bert}^1\text{Anna}^0\text{Caroline}^1\text{Anna}^0\text{Bert}^0\text{Anna}^0.$

Als Anna slechts tot twee telt, verklaart ze bij uitvoering 1 na de tweede keer ondervraagd te zijn ten onrechte dat iedereen ondervraagd is. Als we Anna daarentegen tot drie laten tellen, dan komt ze bij uitvoering 2 nooit aan die verklaring toe, hoe vaak ook Anna, Bert en Caroline ondervraagd zullen blijven worden in de toekomst: zowel Bert als Caroline hebben het licht precies één keer aangedaan, en Anna doet daarna dat licht weer uit, en daar blijft het bij. We kunnen Protocol 4 echter aanpassen — de truc is dat we moeten compenseren voor de onzekerheid dat Anna één keer teveel het licht moet uitdoen, omdat het initieel aan had kunnen zijn.

Protocol 5. *De gevangenen wijzen onder elkaar een teller aan. Voor de teller geldt: Als je ondervraagd wordt en de lamp is uit, doe dan niets; als je ondervraagd wordt en de lamp is aan, doe hem dan uit — houd bij hoe vaak je dat doet; als je de lamp 198 keer hebt uitgedaan, verklaar dan dat alle n gevangenen ondervraagd zijn. Voor de overige gevangenen geldt: Als je ondervraagd wordt en de lamp is uit en je hebt hem nog niet twee keer aangedaan, doe hem dan aan; als je ondervraagd wordt en de lamp is uit en je hebt hem al twee keer eerder aangedaan, doe dan niets; als je*

ondervraagd wordt en de lamp is aan, doe dan niets.

Voor n gevangenen is het $2n - 2$. We leggen uit waarom dit werkt voor het geval van drie gevangenen. Er moet dan vier keer ondervraagd worden. In het ergste geval was het licht aan het begin aan, 1; heeft een van Bert of Caroline het licht al twee keer aangedaan, stel dit is Bert, 2; en heeft Caroline het licht pas één keer aangedaan, 1. Anna hoeft dus niet te wachten totdat Caroline het licht twee keer aangedaan heeft. Maar drie keer is te weinig: want dat krijgen we al als het licht initieel aan is en Bert het twee keer heeft aangedaan, zonder dat Caroline ooit ondervraagd is.

In het algemeen hoeft de teller niet te wachten totdat de laatste niet-teller die het licht nog niet twee keer heeft aangedaan, dat voor de tweede keer heeft gedaan.

Soms weet je het, voordat de teller het weet

We kijken nog eens naar de drie verschillende uitvoeringen van Protocol 4, voor het geval van drie gevangenen. In uitvoering 1 is iedereen ondervraagd na drie ondervragingen, en weet Anna dat bij de vierde ondervraging. In uitvoering 2 is iedereen eveneens ondervraagd na drie ondervragingen, maar duurt het nog acht ondervragingen voordat Anna, als teller, dat ook weet en bekend kan maken. Kan dit sneller? In het eerste geval niet, maar in de andere gevallen wel. We geven de uitvoeringen nog eens weer, waarbij de vetgedrukte gevangene naar waarheid kan verklaren dat iedereen ondervraagd is:

1. ${}^0\text{Bert}^1\text{Anna}^0\text{Caroline}^1\text{Anna}^0_2$
2. ${}^0\text{Anna}^0\text{Bert}^1\text{Caroline}^1\text{Anna}^0_1\text{Bert}^0\text{Anna}^0_1$
Caroline $^1\text{Caroline}^1\text{Bert}^1\text{Bert}^1\text{Anna}^0_2$
3. ${}^0\text{Bert}^1\text{Anna}^0_1\text{Bert}^0\text{Caroline}^1\text{Bob}^1\text{Anna}^0_2$

In uitvoering 2 weet Caroline bij de tweede keer dat ze ondervraagd wordt, dat iedereen ondervraagd is. De eerste keer dat ze wordt ondervraagd ziet ze dat de lamp aan is: dat moet dus door Bert gedaan zijn. De tweede keer dat ze wordt ondervraagd ziet ze dat de lamp uit is: dat moet dus door Anna gedaan zijn. Dus iedereen is ondervraagd.

In uitvoering 3 weet Bert vóór Anna dat iedereen ondervraagd is, ook al heeft Bert niet de rol van teller. De eerste keer dat hij ondervraagd wordt doet hij de lamp aan. De tweede

keer dat hij ondervraagd wordt is de lamp uit en doet hij niets, maar hij weet daarom dat Anna nu ook ondervraagd is en de lamp weer heeft uitgedaan. De derde keer dat hij ondervraagd wordt ziet hij dat de lamp weer aan is: dat kan dus alleen door Caroline gedaan zijn. En hij kan dan naar waarheid verklaren dat iedereen ondervraagd is, voordat teller Anna dat weet en dat kan verklaren.

Een probabilistisch protocol

In de protocols die we tot nog toe gezien hebben vervullen de gevangenen verschillende rollen: teller, of niet-teller. Ook de variaties daarop (en de variaties in het vervolg van dit verhaal) vallen in dit stramien. Het is daarom verrassend dat er toch een protocol is waarin alle gevangenen dezelfde rol hebben. We kunnen niet zeggen: “waarin alle gevangenen hetzelfde *doen*”, want wat ze doen hangt ook af van het toeval. Voor sommige acties bepaalt een dobbelsteen (of een munt) wat ze gaan doen. Maar dit toeval heeft dan wel bij iedere gevangene dezelfde functie. Om dit protocol te beschrijven introduceren we de notie van *pot* (zoals in jampot of spaarpot, in het Engels, ‘token’) en van *knikker*.

Iedere gevangene heeft een pot waar een aantal knikkers in zit, om te beginnen één knikker. Verder stellen we ons de lamp voor als een klein hooggerand schaalje waar precies één knikker op past (net zoals een ‘tee’ voor golfballen). Als het schaalje leeg is, is de lamp uit, als het schaalje vol is, is de lamp aan. Als de gevangene het licht aandoet wanneer het licht uit is, vertalen we dat nu in: hij legt een knikker op de schaal. Het licht aan laten als het al aan is, betekent: de gevangene kan geen knikker op de schaal leggen (want de schaal is al vol). Tot nog toe waren deze handelingen voorbehouden aan de niet-tellers. We noemen dit nu het gedrag van een *legger*. Het licht uitdoen als het aan is, betekent: knikker van de schaal pakken en in je pot doen. Het licht uitlaten als het al uit was, betekent: geen knikker van de schaal kunnen pakken. Tot nog toe waren deze handelingen aan de teller voorbehouden. We noemen dit het gedrag van een *pakker*. Iedere gevangene kan zowel legger als pakker zijn. In deze nieuwe opzet termineert het protocol als een gevangene n knikkers in zijn pot heeft. We vervolgen nu met de beschrijving van het protocol, waarbij, uiteraard, $[0, 1]$ staat voor het interval van de reële getallen tussen 0 en 1 en $Pr(x)$ voor de waarschijnlijkheid om legger of pakker te zijn als de som van het aantal knikkers in je pot en op de schaal x is.

Protocol 6. *Als je ondervraagd wordt, laat m de som zijn van het aantal knikkers in je pot en op de schaal. Gegeven is een functie $Pr : \{0, \dots, n\} \rightarrow [0, 1]$ met $Pr(0) = Pr(1) = 1$, $0 < Pr(x) < 1$ voor $x \neq 0, 1, n$, en $Pr(n) = 0$. Je bent legger met waarschijnlijkheid $Pr(m)$, en anders ben je pakker. Verklaar dat iedereen ondervraagd is als je n knikkers hebt in je pot.*

Een knikker leggen als je er geen hebt, betekent niets doen. Daarom is $Pr(0) = 1$. Dit protocol termineert altijd (dat wil zeggen, de verwachtingswaarde is strikt positief), maar je kunt je kansen vergroten door de waarschijnlijkheid Pr dalend te laten zijn op het interval tussen 0 en (het kleinste aantal groter dan of gelijk aan) de helft van het aantal knikkers, en 0 te laten zijn als de gevangene meer dan de helft van de knikkers heeft (in feite is dit dus een *variant* op Protocol 6, want we eisen dat $Pr(m)$ strikt positief was behalve voor $m = n$). Met andere woorden: de eerste gevangene die meer dan de helft van de knikkers weet te vergaren, is alleen nog een pakker vanaf dat moment (waarschijnlijkheid 0 om legger te zijn) en nooit meer legger. We illustreren deze variant van dit protocol aan de hand van een voorbeeld.

Er zijn vier gevangenen Anna, Bert, Caroline en Dick. Ze gebruiken Protocol 6 met $Pr(0) = Pr(1) = 1$, $Pr(2) = 0,5$, $Pr(3) = 0$, en $Pr(4) = 0$, en de volgende uitvoering resulteert. We laten nu zien dat deze uitvoering termineert en dat Bert aan het eind naar waarheid kan zeggen dat iedereen ondervraagd is:

Anna, Bert, Caroline, Dick, Bert, Caroline,
Caroline, Bert, Caroline, Bert.

We gebruiken nogmaals annotatie om de toestandsovergangen te verduidelijken. In dit geval staat de onderindex voor de inhoud van de pot *na* het uitvoeren van de handeling. (Dus dit is als de onderindex in het voorgaande, waarbij het stond voor het aantal gevangenen dat de teller al geteld had; maar in dat geval zonder zichzelf mee te tellen.) De bovenindex staat voor de toestand van het licht, net als hiervoor. De naam van de gevangene is niet vetgedrukt als hij of zij legger is, en vetgedrukt als hij of zij pakker is. Gezien de eenvoudige $Pr(2) = 0,5$ kunnen we simpelweg voorstellen dat de gevangene een muntje opwerpt en laat neervallen: kruis staat voor leggen en munt staat voor pakken. Nogmaals voor alle duidelijkheid: de functie Pr heeft als argument de *som* van het aantal knikkers in de pot van de gevangene en de inhoud van de schaal:

${}^0\text{Anna}_0{}^1\text{Bert}_1$ **${}^0\text{Caroline}_2$** ${}^1\text{Dick}_0$ **${}^0\text{Bert}_2$** ${}^0\text{Caroline}_2$
 ${}^1\text{Caroline}_1$ **${}^0\text{Bert}_3$** ${}^1\text{Caroline}_0$ **${}^0\text{Bert}_4$** .

Anna wordt als eerste ondervraagd en doet het licht aan (= legt haar knikker neer). Dan wordt Bert ondervraagd, gooit een muntje op, kruis, en doet daarom niet het licht uit (= hij is legger en niet pakker), Caroline komt binnen, munt, en doet het licht uit, dan Dick, licht aan, dan nogmaals Bert, munt, dus deze keer licht uit. Bert heeft nu 2 knikkers in zijn pot. Dan nogmaals Caroline, kruis, ze doet dus niets; en daarna nogmaals, munt, ze doet het licht aan. Bert wordt nu ondervraagd, munt, en doet het licht uit. Dit moment is cruciaal. Bert heeft nu meer dan de helft van het aantal knikkers dus blijft nu alleen nog pakken. Dit moment breekt al snel aan. Caroline laat nog een knikker vallen (ze heeft geen keus, $Pr(1) = 1$), waarop Bob (die ook geen keus heeft, $Pr(3) = 0$) de knikker pakt en er nu vier heeft. Victorie! Slechts tien dagen in de gevangenis!

Het is van groot belang hoe de functie Pr gekozen wordt. In het bijzonder moet $Pr(2) = 0$ uitgesloten zijn, want dan kan een situatie optreden waarin twee gevangenen allebei precies de helft van het aantal knikkers hebben en ze koppig vast blijven houden. Dan termineert het protocol niet, en blijft iedereen tot alle eeuwigheid in de gevangenis.

Optimalisering en synchronisatie

De gevangenen kunnen de ondervragingen kennelijk met slimme trucs wellicht beperken, en zich eerder in vrijheid stellen. Als niets bekend is over de tijdsduur tussen ondervragingen, weten we geen slimmere trucs (ook niet voor honderd gevangenen) dan dat iedere niet-teller voor zichzelf bijhoudt hoeveel keer hij het licht uit en aan ziet gaan, net als Bert en Caroline hiervoor. (Van het probabilistische protocol weten we niet hoe de verwachte uitvoeringsduur zich verhoudt tot de 'gewone' protocollen.)

Hoe lang duurt het gemiddeld voordat Anna bekend kan maken dat iedereen ondervraagd is? Die vraag is zinloos, want de tijdsduur tussen ondervragingen is onbekend. Hoeveel ondervragingen duurt het dan gemiddeld voordat Anna dat bekend kan maken? Die vraag heeft wel zin. Dit hangt natuurlijk af van de verroosting van de ondervragingen door de gevangenisbewaarders. Als de verroosting puur op basis van toeval is ('random') kunnen we dit bepalen. Het antwoord is leuker als we eveneens aannemen dat er iedere dag een ondervraging is.

Stel dat er iedere dag precies één ondervraging is. Hoe lang duurt het gemiddeld voordat de honderd gevangenen vrijgelaten worden?

Eerst moet een niet-teller ondervraagd worden, om het licht aan te doen. De kans hierop is $99/100$. Dan moet de teller ondervraagd worden, om het licht weer uit te doen. De kans daarop is $1/100$. Daarna moet een niet-teller die nog niet ondervraagd is, het licht weer aandoen. Die kans is nu $98/100$. Daarna de teller weer, dat blijft altijd $1/100$. Enzovoorts. De verwachtingswaarde in dagen is net andersom. Het verwachte aantal dagen voordat de eerste niet-teller ondervraagd wordt is $100/99$, ongeveer een dag dus, de verwachting dat daarna de teller ondervraagd wordt is $100/1$, honderd dagen dus, enzovoorts. De gemiddelde tijd die verstrijkt voordat de teller kan verklaren dat iedereen ondervraagd is, is daarom:

$$\begin{aligned} & \frac{100}{99} + 100 + \frac{100}{98} + 100 + \cdots \\ & + \frac{100}{2} + 100 + \frac{100}{1} + 100. \end{aligned}$$

De deelreeks $\frac{100}{99} + \frac{100}{98} + \dots + \frac{100}{2} + \frac{100}{1}$ telt op tot ongeveer 518 dagen en voor de rest hebben we 99 keer 100 dagen: 9.900 dagen. Dit sommeert tot 10.418 dagen wat ruim 28,5 jaar is. Dat valt toch wat tegen. Het is maar goed dat vast niet alle gevangenen wiskundigen zijn, anders waren ze waarschijnlijk niet aan de uitvoering van het protocol begonnen.

Nogmaals: als we verder niets over de regelmaat van ondervragingen weten, kunnen we de verwachte 9.900 ondervragingen niet naar beneden krijgen. Maar als de gevangenen weten dat er precies één ondervraging per dag is, kan het echter (gemiddeld) ook veel sneller. We onderzoeken eerst weer de situatie voor drie gevangenen: stel dat teller Anna niet op de eerste dag ondervraagd wordt. Dan weet ze meteen al dat daarom Bert of Carolinne ondervraagd moeten zijn en de lamp nu dus aan is, zonder zelf de lamp aan gezien te hebben. Kunnen we dit uitbuiten?

Protocol 7. Het protocol bestaat uit twee stadia. Het eerste stadium duurt 100 dagen en verloopt als volgt. De gevangene die voor het eerst twee keer ondervraagd wordt, doet het licht aan. Stel dit is op dag m . Op dag 100 van het eerste stadium: als het licht uit is verklaart de gevangene die dan ondervraagd wordt dat iedereen ondervraagd is; anders, dus als het licht aan is, doet die gevangene het licht uit. Het tweede stadium verloopt als volgt; er zijn

nu drie verschillende rollen. (i) De teller is de gevangene die in stadium één voor het eerst twee keer ondervraagd is. Voor de teller geldt: Als je ondervraagd wordt en de lamp is uit doe dan niets; als je ondervraagd wordt en de lamp is aan, doe hem dan uit — houdt bij hoe vaak je dat doet; als je de lamp 101 – m keer hebt uitgedaan, verklaar dan dat alle 100 gevangenen ondervraagd zijn. (ii) De gevangenen die in het eerste stadium het licht uit gezien hebben, doen niets in het tweede stadium. (iii) Voor de overige gevangenen geldt: Als je ondervraagd wordt en de lamp is uit en je hebt hem nog niet eerder aangedaan, doe hem dan aan; als je ondervraagd wordt en de lamp is uit en je hebt hem al eerder aangedaan, doe dan niets; als je ondervraagd wordt en de lamp is aan, doe dan niets.

Als $m = 2$, krijgen we de oorspronkelijke telling tot 99 terug. Dan levert dit geen tijdswinst op (maar zelfs verlies, namelijk van de 100 dagen in het eerste stadium). Als m maar groter dan 2 is, levert dit protocol tijdswinst op ten opzichte van Protocol 4. Het gemiddelde aantal dagen voordat iemand voor de tweede keer ondervraagd wordt is 13. Dit betekent dat de hiermee aangewezen teller al van 11 andere gevangenen weet dat ze ondervraagd zijn voordat hij met tellen begint. (En die 11 doen in het tweede stadium niets meer!) Hij hoeft dus nog maar tot 88 te tellen, in plaats van tot 99. De tijdswinst die hiermee bereikt wordt is een jaar of vier. Dit komt voornamelijk omdat de teller 11 keer minder dan 100 dagen hoeft te wachten totdat hij het licht weer uit kan doen.

Herkomst en meer informatie

Op <http://domino.watson.ibm.com/Comm/wwwr.ponder.nsf/challenges/July2002.html> van IBM Research wordt in 2002 vermeld dat “this puzzle has been making the rounds of Hungarian mathematicians’ parties” in een versie voor 23 gevangenen. (En we zouden erg graag een Hongaarse wiskundige spreken die hier meer over weet.) Het raadsel deed de ronde in de Verenigde Staten vanaf 2001. William Wu, destijds van Stanford University, was vanaf dit vermoedelijke begin bij de ontwikkelingen en oplossingen van dit raadsel betrokken, zie wuriddles.com. Het raadsel wordt uitvoerig behandeld in het tijdschrift *Mathematical Intelligencer* door Paul Dehaye, Daniel Ford en Henry Segerman in [1], in *Mathematical Puzzles: A Connoisseur’s Collection* door Paul Winkler in [10], in de *Nieuwe Wiskrant* door Hans van Ditmarsch in [3], en in ‘One hundred prisoners and a

lightbulb – logic and computation’ door Hans van Ditmarsch, Jan van Eijck en William Wu in [7] en in [8]. Het is verder een hoofdstuk in het logische-puzzelboek *Honderd gevangenen en een gloeilamp* [5] (deze bijdrage is grotendeels gebaseerd op dat hoofdstuk). Een Engelse en geheel herziene vertaling van [5], waarin ook nog meerdere andere puzzels staan, verschijnt in 2015 bij Springer/Birkhauser.

In de variant van het protocol waarin een niet-teller het weet voordat dat teller het weet, door het aantal keren uit/aan te tellen (zie paragraaf ‘Soms weet je het, voordat de teller het weet’), is het niet zo waarschijnlijk dat een niet-teller voor de teller weet dat iedereen ondervraagd is (aangenomen dat toeval bepaalt welke gevangene ondervraagd wordt). Bij drie gevangenen is die kans nog 50%, maar bij 100 gevangenen is die kans ten hoogste $5,63 \cdot 10^{-72}$ (zie [7]). Dit protocol wordt verder beschreven in [4].

Veel academisch werk over deze protocolen valt onder de globale noemer van ‘dynamisch epistemische logica’, waarin ook andere logische puzzels zijn te analyseren. Andere

publicaties in het *Nieuw Archief voor Wiskunde* hierover zijn: [2, 6, 9] — waarbij we natuurlijk niet kunnen nalaten het ‘Som-en-Product’-probleem van Freudenthal te noemen ([6] is een analyse van [9] in dynamisch epistemische logica). Dit probleem wordt ook, uitvoerig, behandeld in [5].

Onder de aanname van synchronisatie, dat wil zeggen: iedere dag vindt een ondervraging plaats en alle gevangenen weten dat (zie paragraaf ‘Optimalisering en synchronisatie’), valt nog op allerlei manieren te optimaliseren. Het is niet bekend wat de kleinste verwachtingswaarde is voor de terminatie van een protocol om het probleem op te lossen, het record staat op ongeveer negen jaar. Dat is al een stevige verbetering ten opzichte van de 28 en een half jaar die we in detail uitgelegd hebben. De snellere algoritmes onderscheiden nog meer dan twee rollen voor de gevangenen, en meerdere fasen in het protocol waarin gevangenen van rol kunnen wisselen (net als hiervoor, in Protocol 5, maar dan nog ingewikkelder). Zie [7] voor details.

Het probabilistische protocol is van Paul Dehaye (ooit uitgewisseld bij email-corres-

pondentie met Hans van Ditmarsch). Het wordt ook in het kort beschreven in [7] en we weten niet of dit ergens grondiger onderzocht is. Het zou interessant zijn om onder de aanname van synchronisatie te weten wat de verwachtingswaarde voor terminatie is van zulke probabilistische protocollen. 

Elancheziyan

De illustratie bij deze bijdrage is gemaakt door Elancheziyan. Het puzzelboek [5] heeft zo’n illustratie bij ieder hoofdstuk. Elancheziyan is een Tamil-illustrator en woont in Chennai. Hans heeft een band met IMSc (Institute of Mathematical Sciences) in Chennai, en Elancheziyan heeft in opdracht deze illustraties gemaakt. Elancheziyan spreekt alleen Tamil. Een kort verhaal over de ontwikkeling van de illustraties staat op <http://personal.us.es/hvd/lightbulb.html>. Elancheziyan is te bereiken per e-mail op het adres elancheziyans@gmail.com – vrienden die Engels spreken vertalen zijn e-mails.

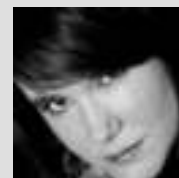
Referenties

- 1 P. Dehaye, D. Ford en H. Segerman, One hundred prisoners and a lightbulb, *Mathematical Intelligencer* 25(4) (2003), 53–61.
- 2 H. van Ditmarsch, Het zeven-kaartenprobleem (the seven cards problem), *Nieuw Archief voor Wiskunde* 5/3(4) (2002), 326–333.
- 3 H. van Ditmarsch, Honderd gevangenen en een gloeilamp, *Nieuwe Wiskrant* 27(1) (2007), 15–18.
- 4 H. van Ditmarsch, S. Ghosh, R. Verbrugge en Y. Wang, Hidden protocols: Modifying our expectations in an evolving world, *Artificial Intelligence* 208 (2014), 28–40.
- 5 H. van Ditmarsch en B. Kooi, *Honderd gevangenen en een gloeilamp*, Epsilon Uitgaven, deel 73, 2013.
- 6 H. van Ditmarsch, J. van Eijck en R. Verbrugge, Publieke werken: Freudenthal’s som-en-productraadsel, *Nieuw Archief voor Wiskunde* 5/10(2) (2009), 126–131.
- 7 H. van Ditmarsch, J. van Eijck en W. Wu, One hundred prisoners and a lightbulb — logic and computation, in F. Lin, U. Sattler en M. Truszczynski, eds., *Proc. of KR 2010 Toronto*, 2010, pp. 90–100.
- 8 H. van Ditmarsch, J. van Eijck en W. Wu, Verifying one hundred prisoners and a lightbulb, *Journal of Applied Non-Classical Logics* 20(3) (2010), 172–191.
- 9 H. Freudenthal, Formulering van het som-en-productprobleem, *Nieuw Archief voor Wiskunde* 3/17 (1969), 152.
- 10 P. Winkler, *Mathematical Puzzles: A Connoisseur’s Collection*, AK Peters, 2004.

Ionica Smeets

wetenschapsjournalist, Leiden

i@ionica.nl



Het keerpunt van Eugène van Heijst

Op wiskundige congressen leerde ik preken

Eugène van Heijst (1960) is priester. Hij is rector van de Sacramentskerk in Brakkenstein-Nijmegen en woont daar in de kloostergemeenschap. Vóór hij priester werd studeerde hij wiskunde in Eindhoven en in 1992 promoveerde Van Heijst bij Henk van Tilborg in de cryptografie: "Ik ben uiteindelijk overgestapt naar de theologie, maar niet omdat wiskunde me tegenviel. Ik sprak eens iemand op het seminarie die zei: 'Ik studeerde eerste economie, maar dat was helemaal niets. Nu studeer ik theologie en dat is alles.' Dat was mijn weg niet. Ik heb wiskunde altijd met veel plezier gedaan en ben altijd een wetenschapper gebleven."

Ik ontmoet Eugène van Heijst in de Amsterdamse Begijnhofkapel, waar hij jarenlang rector was voor hij naar Nijmegen ging. De kapel zelf is prachtig, maar de vergaderzaal waar we zitten lijkt verdacht veel op die van de universiteit of een willekeurig bedrijf. Van Heijst draagt ook al geen soutane of priesterboord, hij ziet er eerder uit als een wiskundeleraar dan als een priester.

Komt u uit een kerkelijk gezin?

"We waren niet overdreven kerkelijk. We gingen op zondag naar de kerk, maar dat was het. Als scholier werd ik actief bij de parochiekerk. Ik begon als misdienaar en ze vroegen me voor steeds meer klussen. Zo ben ik er langzaam ingerold."

Wilde u destijds al priester worden?

"Ik was wel bezig met theologie, maar ik overwoog het niet als studie. Op de middelbare school was ik wiskunde steeds leuker gaan vinden. In de brugklas had ik een 3 of 4 op mijn rapport, maar gaandeweg kwam er elk jaar een punt bij en kreeg ik er steeds meer plezier in. Dus besloot ik wiskunde te studeren in Eindhoven."

Hoe beviel dat?

"Het viel in het begin ontzettend tegen, je moest allerlei idiote vakken doen. De na-

tuurkundevakken vond ik echt ontzettend lastig. Maar de vakken rond logica en discrete wiskunde vond ik erg leuk. Uiteindelijk ben ik gepromoveerd in de cryptologie; op een gegeven moment merk je waar je hart ligt."

Was het vanzelfsprekend om te promoveren voor u?

"Daar had ik geen seconde aan gedacht toen ik aan mijn studie begon. Ik zag mezelf niet



Eugène van Heijst

in het echte bedrijfsleven, maar onderzoek bij Philips had goed gekund. In mijn laatste studiejaar nam mijn latere promotor, Henk van Tilborg, me soms mee naar lezingen op het Centrum voor Wiskunde en Informatica in Amsterdam. Toen daar op een gegeven moment een vacature was, heb ik ingetekend. Ik heb mijn promotieonderzoek met veel plezier gedaan, ook de internationale contacten en congressen vond ik leuk. Mensen vragen me soms waar ik heb leren preken en dan antwoord ik altijd dat het op die wiskundige congressen was. Daar stond ik als jong broekje voor een zaal van zeshonderd kritische professoren die mij helemaal niet geloofden en eens kwamen kijken wat ik te vertellen had. Daar heb ik veel van geleerd."

Hoe besloot u om na uw promotie toch priester te worden?

"Het was geen abrupte overgang, het waren steeds twee sporen. Ik was altijd actief gebleven in de kerk. Tijdens mijn promotie begon ik aan een weekendstudie theologie, omdat ik me steeds meer afvroeg of het toch iets voor mij was. En dat was het."

Hoe vond uw familie het dat u priester werd?

"Mijn ouders waren er aanvankelijk tegen. Ten eerste vonden ze me niet geschikt. Dat vond ik ook. Ten tweede vonden ze het zonde van mijn wiskundestudie. Dat vond ik ook. En toch wilde ik het proberen."

Waarom vonden ze dat u niet geschikt was?

"Een oom van mij is priester en mijn ouders vonden dat hij het goed deed, maar dat ik niet zijn karakter had. Dat klopte, en ik twijfelde zelf ook of ik geschikt was. Je weet niet of je het kunt voor je eraan begint. Sowieso moet je erin groeien. Ik was 38 toen ik priester werd. Het is goed om niet op je 23ste te beginnen, maar eerst een andere baan gehad te hebben. Je moet wat levenservaring opdoen, zelf beschadigd worden en weten wat er leeft in de samenleving. Tijdens je studie kun je nog wel leren hoe je een preek op zondag houdt. Maar hoe je iemand helpt die in de problemen zit, leer je niet uit een boek. Dat geldt ook als je een kind krijgt. Een vriend vertelde dat hij na de bevalling van zijn vriendin thuiskwam uit het ziekenhuis met dat kind in zijn handen en dacht "Wat moet ik nu doen?" Eenzelfde paniekgevoel had ik toen ik net priester was: "Ze laten me zomaar los op de mensen. Wat moet ik zeggen als iemand komt biechten, of als er een stel met huwelijksproblemen komt?" Maar

je leert het in de praktijk en bij het tweede echtpaar wist ik al beter wat ik moest doen."

Combineert wetenschap voor u goed met het geloof?

"Sommige wetenschappers zijn heel erg fel voor of tegen het geloof. Ik vind het lastig als mensen zo'n forse mening hebben dat je niet meer met ze kunt praten. Het maakt me niet uit of iemand tegen het geloof is, natuurlijk mogen en moeten mensen kritisch nadenken. Ik ben een wetenschapper, die houding verdwijnt niet nu ik priester ben."

Sommige mensen zeggen dat wiskunde hen het goddelijke laat zien.

"Ik heb dat niet zo. Wiskunde bracht me niet dichtbij God, maar ook niet verder weg. Het is iets dat ik met veel plezier deed en van wat ik leerde blijft er altijd iets bij me. Dat is niet altijd even makkelijk voor anderen. Zo kwam er op een gegeven moment een echtpaar met huwelijksproblemen. Ze hadden allebei hun eigen idee over wat hun probleem was. Ik vertelde hen dat het probleem volgens mij heel ergens anders lag. Ik kijk dan heel analytisch naar de situatie. Dat echtpaar was er op dat moment zelf niet zo blij mee, maar uiteindelijk hopelijk wel."

Hoe zien uw werkdagen eruit? Staat u in het klooster heel vroeg op?

"Welnee, om zeven uur. We wonen in Nijmegen met zijn achten, het is een kleine gemeenschap. Vroeger woonden ze daar met zijn zestien, maar die tijd is voorbij. Ik zit bij een congregatie, niet verbonden aan een lokaal bisdom, maar bij een organisatie die wereldwijd werkt. Ik ben één van de jongere priesters en ik heb daardoor allerlei bestuurstaken waarvoor ik veel reis en vergader."

Anderzijds zijn er de persoonlijke contacten met mensen. Ik organiseer bijvoorbeeld cursussen. Zo hield ik filmavonden waarbij we populaire films als *Harry Potter* of *Amélie* keken en napraatten over de levensvragen die in de film naar voren kwamen. Je kunt niet zeggen dat we in een atheïstische wereld leven. Mensen voelen zich misschien minder verbonden met religie, maar ze herkennen bijvoorbeeld de christelijke elementen in *The Da Vinci Code*.

Ook schrijf ik onder een pseudoniem romans over thema's die me interesseren: bijvoorbeeld de dagboeken van Anne Frank of de Amsterdamse krakers. In Amsterdam was mijn werk lokaler dan in Nijmegen. De Begijnhofkapel is een heel bekende kerk en hij is altijd open. Toeristen komen het ge-

bouw bekijken, maar ook uithuilen met hun verdriet. Ik was vroeger regelmatig in de kapel aanwezig als aanspreekpunt, voor als iemand wilde praten over zijn leven."

Wat deed u dan?

"Luisteren. Vooral luisteren. Je kunt wel wat zeggen, maar het belangrijkste is dat mensen hun levensverhaal kunnen vertellen met de pijn die ze hebben."

Lukt het om hen te helpen?

"Als je bij de kerk werkt, moet je afleren om resultaatgericht te werken. Vaak komen mensen één keer praten over hun problemen en daarna gaan ze verder en zie ik ze nooit meer. Ik weet niet of ons gesprek dan geholpen heeft. De vraag van effectiviteit moet je ook niet stellen. Ik hoop dat ik voor die persoon iets van God zichtbaar heb kunnen maken, zodat diegene weer verder kan in het leven. Ik geloof natuurlijk dat God bestaat, dus het hangt niet alleen van mij af. Ik probeer de dingen zo goed mogelijk te doen, maar God doet de rest. Die moet ook zijn deel doen."

Heeft u ambities binnen de kerk?

"Nee, maar ik wil graag veel met mensen praten: dat heet persoonlijk pastoraat. In Amsterdam bezocht ik cafés. Niet om over religie te spreken, maar over de zin van het leven, hoe je omgaat met problemen."

Denkt u dat dit een betere manier is om over religie te praten dan om binnen te komen en over God te beginnen?

"Sommigen zitten helemaal niet op religie te wachten, dan begin ik er niet over. Je probeert mensen te helpen en moet kijken wat er het beste bij hen past. Ik laat dan liever iets van God zien door mijn houding. Wat ik vaak merk is dat mensen een antwoord verwachten van mij. Maar ik heb geen pasklare oplossingen, ik probeer samen met mensen op zoek te gaan naar een antwoord." 

Heeft u een goede suggestie voor een (Nederlandse) wiskundige met een bijzonder keerpunt in zijn of haar carrière? Stuur dan een e-mail naar i@ionica.nl.

Harry Trentelman

Johann Bernoulli Instituut voor Wiskunde en Informatica
Rijksuniversiteit Groningen
h.l.trentelman@rug.nl

In Memoriam Jan Willems (1939–2013)

Een diepe denker

Op 31 augustus 2013 is op 73-jarige leeftijd Jan Willems overleden in Brasschaat, België. Met het overlijden van Jan Willems heeft de internationale onderzoeksgemeenschap in de wiskundige systeem- en regeltheorie een van zijn belangrijkste vertegenwoordigers verloren. Harry Trentelman, hoogleraar Systems and Control aan de Rijksuniversiteit Groningen, blikt terug op leven en werk van deze inspirerende wetenschapper.

Jan Willems behoorde tot een selecte kern van onderzoekers in de systeem- en regeltheorie die het onderzoeksveld rond de jaren zeventig van de vorige eeuw vorm gaven. Hij combineerde creativiteit, associatieve kracht, fysisch inzicht, en een enorm brede kennis, met energie, enthousiasme, perfectionisme en de wil om tot de essentie van problemen door te dringen. Daarbij was hij charismatisch, en had die speciale eigenschap die tegenwoordig wel de 'X-factor' wordt genoemd. Binnen de internationale systeem- en regeltheoriegemeenschap was hij een iconisch persoon. Een mooie eigenschap was dat dit hem niet echt scheen te interesseren: gedreven door de wil om tot de essentie van dingen door te dringen en ideeën over te dragen praatte hij net zo lief met jonge, beginnende PhD-studenten als met gearriveerde topwetenschappers. Bij Jan Willems ging het altijd om wetenschappelijke inhoud en nooit om status.

Promotieonderzoek

Jan Willems werd geboren in Brugge, op 18 september 1939. Na zijn basisschooltijd in Maldegem en Gent, en zijn middelbareschooltijd aan het Sint-Barbaracollege in Gent, studeerde hij ingenieurswetenschappen aan de Universiteit van Gent. In 1963 vertrok hij naar de Verenigde Staten. Hij behaalde daar in 1965 het MSc-diploma in electrical engineer-

ing aan de Universiteit van Rhode Island, en in 1968 zijn PhD in electrical engineering aan het Massachusetts Institute of Technology (met als promotor Roger W. Brockett). Zijn proefschrift, over input-outputstabiliteit van open dynamische systemen, werd gepubliceerd als

het tekstboek *The Analysis of Feedback Systems* door MIT Press in 1971. Van 1968 tot 1973 werkte hij als assistant professor aan de afdeling Electrical Engineering van MIT. Zijn onderzoek in deze periode was gericht op een aantal onderwerpen, waaronder het zogenaamde lineair-kwadratische regelprobleem, de netwerksynthese van elektrische circuits, en de algemene theorie van dissipativiteit van input-outputsystemen in toestandsruimteform. Uit deze periode stammen zijn baanbrekende artikelen 'Least squares stationa-



Jan Willems in Rome

ry optimal control and the algebraic Riccati equation', verschenen in de *IEEE Transactions on Automatic Control* in 1971, 'Dissipative dynamical systems, General theory' en 'Dissipative dynamical systems, Linear systems with quadratic supply rates', beide verschenen in *Archive for Rational Mechanics* in 1972. In deze artikelen combineerde Jan Willems optimale regeltheorie en de daarmee geassocieerde algebraïsche Riccati-vergelijking met het fysische idee van dissipativiteit. Het belangrijke concept *linear matrix inequality* (LMI) werd in deze artikelen geïntroduceerd. Later, vanaf de jaren negentig van de vorige eeuw, werden dissipativiteit en LMI de centrale begrippen in de theorie van robuuste regelsystemen, zowel voor lineaire als niet-lineaire systemen.

Hoogleraar in Groningen

Op 1 februari 1973 werd Jan Willems benoemd tot hoogleraar aan het Mathematisch Instituut van de Rijksuniversiteit Groningen, om het nieuwe specialisme wiskundige systeem- en regeltheorie op te zetten. Al snel werden de colleges lineaire systeemtheorie van Jan populair bij de studenten. Jan bleek een inspirerende docent en werd ook erg gewaardeerd om zijn manier van omgaan met studenten en promovendi. Hij verwachtte veel van zijn studenten, en befaamd waren zijn 'take home-examens', verzamelingen van systeemtheoretische problemen waar de studenten thuis individueel aan moesten werken om tot een eindcijfer te komen. Jan had ook veel aandacht voor andere aspecten van de opleiding, en organiseerde regelmatig bij hem thuis borrels voor studenten en promovendi, waarbij hij het energieke middelpunt was van allerlei intellectuele en politieke discussies. Ook meer prozaïsche onderwerpen zoals de Vlaamse voorjaarswielerklassiekers bleven niet onbesproken. Jan vond het heerlijk om eindeloos te discussiëren, en had dit ook nodig om zich emotioneel op te laden. Op het Mathematisch Instituut in Groningen trok hij veel knappe studenten aan als afgestudeerden en promovendi, en zo stond hij aan de wieg van de 'Groningse school' in de systeem- en regeltheorie. Veel van zijn promovendi uit die tijd kregen later vaste aanstellingen op verschillende universiteiten en werden zelf hoogleraar. Gedurende de dertig jaar dat hij hoogleraar was in Groningen begeleidde hij meer dan zestig afgestudeerden en zo'n twintig promovendi.

Gedurende de jaren zeventig in Groningen wijdde Jan zich in zijn onderzoek aan de onderwerpen *differential games*, realisatietheorie en fysische systemen. Geïnspireerd door

het baanbrekende boek *Linear Multivariable Control: a Geometric Approach* van W. Murray Wonham uit 1974, stortte hij zich aan het eind van de jaren zeventig op de zogenaamde 'geometrisch aanpak' van de lineaire systeem- en regeltheorie, en het storingsontkoppelingsprobleem. Dit onderzoeksonderwerp binnen de systeem- en regeltheorie trok enorm veel aandacht in die tijd, en werd later ook uitgebreid tot niet-lineaire systemen met behulp van ideeën uit de differentiaalmeetkunde. Jan introduceerde aan het eind van de jaren zeventig de begrippen 'bijna stuurinvariante deelruimte' en 'bijna conditioneel invariante deelruimte', en paste deze concepten toe in het oplossen van 'bijna' storingsontkoppelingsproblemen: regelproblemen waarbij wordt gezocht naar nodige en voldoende voorwaarden voor het bestaan van regelaars die de input-output-operator van het *closed loop*-systeem willekeurig klein maken. De theorie die hij hier ontwikkelde, paste hij in de jaren tachtig ook toe bij het vinden van een algemene oplossing van het singuliere lineairkwadratische regelprobleem.

Systems and Control Letters

In deze periode richtte hij ook samen met Roger Brockett het tijdschrift *Systems and Control Letters* op, oorspronkelijk met name bestemd voor korte publicaties in de systeem- en regeltheorie, met als specifiek doel een korte doorlooptijd tussen opsturen van het manuscript en publicatie daarvan. De eerste uitgave van het tijdschrift verscheen in 1981, en op het moment van dit schrijven is het toe aan zijn 34ste jaargang, volume 75. In de beginperiode van *Systems and Control Letters* runde Jan het blad als een soort familiebedrijf, waarbij zijn toenmalige vrouw Margherita en zijn kinderen Mark en Mia werden ingezet voor de secretariële ondersteuning. Om het doel van een snelle doorloop te bereiken werd het meeste reviewing werk gedaan door de beide managing editors Willems en Brockett. Daarbij moet worden opgemerkt dat het aantal ingezonden artikelen voor tijdschriften in die tijd natuurlijk veel minder groot was dan op dit moment in 2015. Van 1989 tot 1994 was Jan ook nog editor-in-chief van het tijdschrift *SIAM Journal on Control and Optimization*. Ook dat was in die tijd bepaald geen sinecure, aangezien alle correspondentie per gewone post moest worden afgehandeld.

Netwerk Systeemtheorie

Rond 1986 was Jan Willems de drijvende kracht achter het opzetten van het landelijke Netwerk Systeemtheorie, met het bijbeho-

rende programma van colleges voor promovendi in de systeem- en regeltheorie aan de algemene en technische universiteiten in Nederland. Hoewel het heden ten dage als vanzelfsprekend wordt gezien dat een dergelijk onderwijsprogramma enorm veel voordelen biedt, waren veel oudere hoogleraren in de systeem- en regeltheorie het hier niet mee eens, en zagen het als een aanval op hun gezag. De jongere generatie was echter unaniem voor. Het kostte veel moeite en vele pittige vergaderingen om het idee van een landelijk onderwijsprogramma aanvaard te krijgen. Vooral Jan nam het voortouw in dit experiment en zijn stijl van vergaderingen voorzitten en grondige voorbereiding, gecombineerd met zijn nimmer aflatende drang om mensen van zijn standpunten te overtuigen, leidde uiteindelijk tot de oprichting van het Netwerk Systeemtheorie met als 'penvoerder' de Rijksuniversiteit Groningen en Jan als voorzitter (van 1986 tot 1996). Het Netwerk Systeemtheorie leidde uiteindelijk tot de oprichting van de landelijke onderzoeksschool DISC (Dutch Institute for Systems and Control) die in 1995 werd opgericht. Ook hiervan was Jan voorzitter tussen 1995 en 1999.

Behavioristische benadering

In de jaren tachtig werd Jan zich meer en meer bewust van de beperkingen van het gangbare denken binnen de systeem- en regeltheorie in termen van inputs en outputs. Traditioneel worden in de analyse en synthese van open en geïnterconnecteerde systemen zoals die worden bestudeerd in de systeem- en regeltheorie de externe variabelen opgesplitst in twee soorten, namelijk de inputvariabelen en de outputvariabelen. Deze traditionele opsplitsing komt eigenlijk voort uit de oorsprong van het vakgebied, en vooral zoals het zich ontwikkelde in de jaren dertig van de vorige eeuw rond de uitvinding van de feedback-versterker door Harold Stephen Black bij Bell Laboratories in Manhattan. Bij Bell Labs werkten men aan het versterken van signalen in de langeafstandstelefonie. Het probleem was dat de versterkingsfactor van de gebruikte versterkers sterk afhankelijk was van de sterkte van het inputsignaal, met vervorming van het outputsignaal als gevolg. Harold Stephen Black kwam met een revolutionair ontwerp van een feedback-versterker. De essentie van zijn theorie is dat het outputsignaal via een terugkoppeling wordt teruggevoerd de versterker in. Hierdoor konden voortaan signalen op stabiele wijze, zonder vervorming, worden versterkt. Dit fysische input-outputdenken in de context van versterking van signalen



Jan Willems met zijn vrouw Doke op de Great Ocean Road bij Adelaide in Australië

werd het overheersend paradigma binnen de systeem- en regeltheorie toen ideeën en resultaten uit het vakgebied in een breder kader toepasbaar bleken.

Zoals gezegd, Jan Willems zette zich af tegen dit gevestigde paradigma, en ontwikkelde wat wordt genoemd de 'behavioral approach'. In de behavioristische benadering van open systemen wordt een dynamisch systeem, in plaats van met de wetten die het systeem beschrijven, geïdentificeerd met de verzameling van functies van tijd die aan deze wetten voldoen. Hiervoor is het niet nodig om de vector van systeemvariabelen (de zogenaamde 'manifeste variabelen') te partitioneren in inputs en outputs. Sterker nog, binnen deze theorie wordt een wiskundige definitie gegeven van het concept input: ruwweg gezegd wordt een vector van variabelen gedefinieerd als input indien deze 'vrij' is, in die zin dat de wetten van het systeem geen restricties opleggen aan deze variabelen. De overblijvende variabelen worden vervolgens outputvariabelen genoemd. Zo kan het voorkomen dat de systeemvariabelen op meerdere manieren opgesplitst kunnen worden in inputs en outputs, en is het fysisch vaak niet a priori duidelijk welke van de systeemvariabelen het predicaat input of output verdienen. In de behavioristische benadering wordt ook een belangrijke rol gespeeld door zogenaamde 'latente variabelen' in object georiënteerd modelleren (naast de 'manifeste variabelen' wiens gedrag door het model wordt gemodelleerd). In de behavioristische bena-

dering wordt interconnectie van systemen beschouwd als het aannemen door de signalen van gemeenschappelijke waarden, en regelen van een systeem als het interconnecteren van het systeem met een regelaar, met terugkoppeling als een belangrijk speciaal geval. De oorspronkelijke ideeën van de behavioristische aanpak werden naar voren gebracht in het artikel 'System theoretic models for the analysis of physical systems' in het niet meer bestaande tijdschrift *Ricerche di Automatica* in 1979. Een uitgebreidere behandeling werd gepubliceerd in de serie van drie artikelen 'From time series to linear system – Parts I, II and III' in het tijdschrift *Automatica* in 1986 en 1987. In 1988 werd aan Jan de Automatica Best Paper Award toegekend voor deze serie van artikelen. Een belangrijke bron van informatie voor zijn behavioristische ideeën vormt ook zijn boek *Introduction to Mathematical Systems Theory: A Behavioral Approach* uit 1998 (samen met Jan Willem Polderman). In 1988 ontving Jan de prestigieuze IEEE Control Systems Award voor zijn gehele wetenschappelijke oeuvre. In datzelfde jaar werd aan hem de IEEE Control Systems Magazine Outstanding Paper Award toegekend voor het artikel '300 years of optimal control, from the brachistochrone to the maximum principle' (samen met Hector Sussmann).

Bestuursfunctie

In 1993 was Jan de voorzitter van de organisatiecommissie van de European Control Conference, die hij in dat jaar naar Groningen had

weten te halen. De traditie volgend was hij daarna voorzitter van de European Union Control Association en wel van 1994 tot 1996. Van 1994 tot 1996 was hij ook de voorzitter van het Nederlands Wiskundig Genootschap. Dit zijn echter slechts hoogtepunten uit zijn carrière: hij was ook zeer actief in het politieke krachtenveld van onderwijs en onderzoek aan het Mathematisch Instituut in Groningen, en was wetenschappelijk directeur van het toenmalige Onderzoeksinstituut voor Wiskunde en Informatica in Groningen van 1993 tot 1998.

Ook na zijn emeritaat actief

In 2003 ging Jan Willems met emeritaat in Groningen en werd hij gasthoogleraar binnen de onderzoeksgroep Signals, Identification, Systems Theory and Automation (SISTA) van de afdeling Elektrotechniek aan de Katholieke Universiteit van Leuven. Twee jaar daarvoor waren zijn vrouw Doke en hij van hun stijlvolle appartement aan het Martini Kerkhof in Groningen verhuisd naar Antwerpen. Zijn officiële pensionering in Groningen betekende absoluut niet dat hij het rustiger aan ging doen. Jan bleef actief als altijd, bleef samenwerken met collega's, en bleef een actief bezoeker van internationale conferenties en workshops. Tot zeer recent was hij een vaste deelnemer aan de IEEE Conference on Decision and Control, de belangrijkste jaarlijkse bijeenkomst voor systeem- en regeltheorie. Daar genoot hij niet alleen van het contact en de gesprekken met oude vrienden en collega's, maar bleef hij ook jonge onderzoekers inspireren met suggesties en (meestal) positieve kritische opmerkingen. Zijn niet te remmen wetenschappelijke energie blijkt ook uit de nog bijna honderd publicaties die hij na zijn officiële pensionering produceerde. Veel van dit latere werk laat zien wat een diepe denker hij was, en tonen een opmerkelijke wetenschappelijke rijpheid en heldere visie op het vakgebied van de systeem- en regeltheorie. Een voorbeeld hiervan is het overzichtsartikel 'The behavioral approach to open and interconnected systems', dat verscheen in het tijdschrift *Control Systems Magazine* in 2007.

De systeem- en regeltheorie zonder Jan Willems is moeilijk voor te stellen. De vruchten van zijn wetenschappelijke activiteit, de manier waarop hij met zijn fundamentele bijdragen vorm heeft gegeven aan het vakgebied, en de invloed die hij heeft gehad op de wetenschappelijke smaak en het denken van zijn studenten en promovendi zullen echter altijd blijven bestaan.



Klaas Pieter Hart

Faculteit EWI

TU Delft

k.p.hart@tudelft.nl

Ken uw klassieken

Cantors diagonaalargument

Georg Cantor, *Über eine Eigenschaft des Inbegriffes aller reellen algebraischen Zahlen*, *Crelles Journal für Mathematik* 77 (1874), 258–262.

Georg Cantor, *Über eine elementare Frage der Mannigfaltigkeitslehre*, *Jahresbericht der Deutschen Mathematischen Vereinigung* 1 (1890–91), 75–78.

In deze rubriek worden klassiek geworden artikelen besproken die een blijvend stempel hebben gedrukt op de wiskunde. Dit keer bespreekt Klaas Pieter Hart twee baanbrekende bewijzen van Georg Cantor: de overaftelbaarheid van $\mathbb{R}$ en het diagonaalargument. Voor het lezen van dit artikel is enige voorkennis van afbeeldingen, injecties, surjecties en bijecties vereist.

Georg Cantor staat bekend als de vader van de verzamelingenleer. Wie zijn verzameld werk, [6], doorleest zal daar niet alleen veel klassieke resultaten over deelverzamelingen van $\mathbb{R}$ terugvinden, maar ook de eerste stappen op weg naar een algemene theorie van machtigheden en orde-typen.

Twee artikelen springen er in mijn ogen uit: in [2] bewees Cantor dat de reële rechte overaftelbaar is en in [3] vinden we zijn diagonaalargument. Beide artikelen zijn vrij kort en beide zijn op hun eigen wijze baanbrekend. Het eerste toonde een essentieel verschil aan tussen $\mathbb{N}$ en $\mathbb{R}$ en het tweede introduceerde een methode, de diagonaalmethode, die zeer vruchtbaar is gebleken.

$\mathbb{R}$ is overaftelbaar

We kunnen de ontdekking van de overaftelbaarheid van $\mathbb{R}$ vrij nauwkeurig dateren: in een brief van Cantor aan Dedekind, geschreven op 29 november 1873 (zie [11]), lezen wij de volgende vraag: “Man nehme den Inbegriff aller positiven ganzzahligen Individuen n und bezeichne ihn mit (n) ; ferner denke man sich etwa den Inbegriff aller positiven reellen Zahlgrößen x und bezeichne ihn mit (x) ; so

ist die Frage einfach die, ob sich (n) dem (x) so zuordnen lasse, dass zu jedem Individuum des einen Inbegriffes ein und nur eines des andern gehört?”

In moderne termen: bestaat er een bijectie tussen $\mathbb{N}$ en de verzameling der positieve reële getallen? Uit de weergegeven brieven, en aantekeningen van Dedekind, in [11], is af te leiden dat Cantor en Dedekind wisten te bewijzen dat de verzameling van alle algebraïsche getallen wel afgeteld kan worden. Op 7 december schreef Cantor een brief met daarin een bewijs dat het open interval $(0, 1)$ niet aftelbaar is. Het argument in de brief was wat gecompliceerder dan het bewijs dat uiteindelijk in [2] gepubliceerd is.

De inhoud van dat artikel is al eens samengevat in [9]: het bevat een bewijs van de aftelbaarheid van het lichaam der reële algebraïsche getallen en een bewijs dat het antwoord op de vraag van 29 november negatief is. Dat laatste bewijs verschilt nogal van het argument dat in popularisering van de verzamelingenleer wordt gepresenteerd. Uitgaande van een rij $\langle \omega_v \rangle_v$ reële getallen en een interval (α, β) bepalen we een getal η in dat interval dat niet in de rij voorkomt, als

volgt. Schrijf $\alpha_0 = \alpha$ en $\beta_0 = \beta$ en neem, gegeven α_n en β_n , de eerste twee termen van de rij die in het interval (α_n, β_n) liggen, en noem de kleinste α_{n+1} en de grootste β_{n+1} . Als dit proces voortijdig stopt, omdat er nog maar één (of geen) term van de rij in (α_n, β_n) ligt, dan is de gewenste η snel bepaald. In het andere geval krijgen we een strikt stijgende rij $\langle \alpha_n \rangle_n$ en een dalende rij $\langle \beta_n \rangle_n$ zodanig dat $\alpha_n < \beta_n$ voor alle n . Dan is elke η in het interval $[\sup_n \alpha_n, \inf_n \beta_n]$ als gewenst. Immers, de keuze van α_n en β_n garandeert dat $\omega_1, \omega_2 \notin (\alpha_1, \beta_1)$ en in het algemeen $\omega_{2n-1}, \omega_{2n} \notin (\alpha_n, \beta_n)$.

In de in [11] opgenomen aantekeningen van Dedekind zien we dat deze de oorspronkelijke vraag van Cantor niet erg de moeite waard vond maar dat hij later van mening veranderde: “Die von mir ausgesprochene Meinung aber, dass die erste Frage nicht zu viel Mühe verdiene, weil sie kein besonderes praktisches Interesse habe, ist durch den von Cantor gelieferten Beweis für die Existenz transscendenter Zahlen schlagend widerlegt.”

Inderdaad, als de rij $\langle \omega_v \rangle_v$ een aftelling van de verzameling der algebraïsche getallen is dan is de gevonden η transcendent. In het artikel is die aftelling geheel constructief; het bewijs van de niet-aftelbaarheid van $\mathbb{R}$ is in dat geval ook een constructief bewijs van het bestaan van transcendente getallen.

Het diagonaalargument

Het bovenstaande bewijs van de overaftelbaarheid van $\mathbb{R}$ gebruikt alleen de ordestructuur en dan met name de orde-dichtheid — tussen elk tweetal punten ligt nog een punt,

en de (zwakke) orde-volledigheid — elke niet-lege en naar boven begrensde verzameling heeft een supremum. Elke lineair geordende verzameling met deze twee eigenschappen is dus overaftelbaar.

In veel popularisering van de verzamelingenleer ziet men een bewijs van de overaftelbaarheid van $\mathbb{R}$ dat, op de achtergrond, veel meer inspanning vergt. Men schrijft van elk reëel getal in de rij de decimale ontwikkeling op en creëert door middel van een diagonaalprocedure een getal dat niet in de rij voorkomt. Vaak verwijst men dan naar het artikel [3] dat Cantor in het eerste deel van *Jahresbericht der Deutschen Mathematischen Vereinigung* publiceerde. Cantor was nauw betrokken bij de oprichting van die vereniging en hij presenteerde zijn argument op de eerste bijeenkomst.

Lezing van het artikel leert dat het er Cantor niet om ging nogmaals te bewijzen dat $\mathbb{R}$ overaftelbaar is; de inleiding is hier duidelijk over: “In dem Aufsätze, betitelt: *Über eine Eigenschaft des Inbegriffes aller reellen algebraischen Zahlen* ([2]), findet sich wohl zum ersten Male ein Beweis für den Satz, daß es unendliche Mannigfaltigkeiten gibt, die sich nicht gegenseitig eindeutig auf die Gesamtheit aller endlichen ganzen Zahlen 1, 2, 3, ..., ν , ... beziehen lassen, oder, wie ich mich ausdrücken pflege, die nicht die Mächtigkeit der Zahlenreihe 1, 2, 3, ..., ν , ... haben. Aus dem in § 2 Bewiesenen folgt nämlich ohne weiteres, daß beispielweise die Gesamtheit aller reeller Zahlen eines beliebigen Intervalles ($\alpha \dots \beta$) sich *nicht* in der Reihenform

$$\omega_1, \omega_2, \dots, \omega_\nu, \dots$$

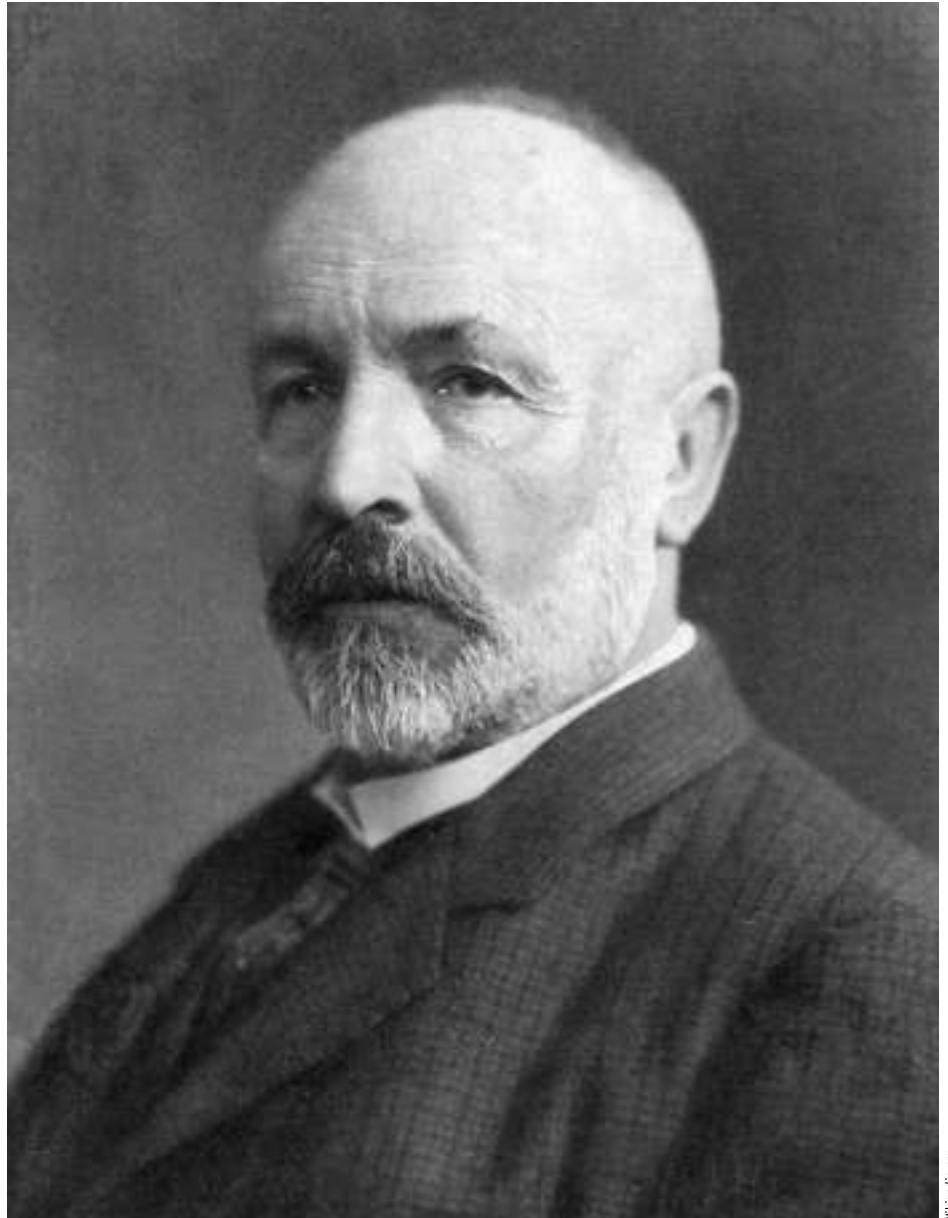
darstellen läßt. Es läßt sich aber von jenem Satze ein viel einfacherer Beweis liefern, der unabhängig von der Betrachtung der Irrationalzahlen ist.”

Wat Cantor kennelijk voor ogen stond was een nieuw, en veel eenvoudiger, bewijs te geven van het bestaan van overaftelbare verzamelingen, *onafhankelijk* van de irrationale getallen.

Dat nieuwe bewijs begint met “zwei einander ausschließende Charaktere” m en w , en beschouwt dan de verzameling M van alle elementen

$$E = (x_1, x_2, \dots, x_\nu, \dots)$$

met oneindig veel coördinaten $x_1, x_2, \dots, x_\nu, \dots$, die alle gelijk zijn aan m of w . Deze verzameling heeft meer elementen dan $\mathbb{N}$. Laat



Georg Cantor

namelijk $E_1, E_2, \dots, E_\mu, \dots$ een rij elementen van M zijn, waarbij

$$E_\mu = (a_{\mu,1}, a_{\mu,2}, \dots, a_{\mu,\nu}, \dots).$$

Nu definiëren we een rij $b_1, b_2, \dots, b_\nu, \dots$ waarin elke b_ν gelijk is aan m of w maar ongelijk aan $a_{\nu,\nu}$. Dus, als $a_{\nu,\nu} = m$ dan $b_\nu = w$ en als $a_{\nu,\nu} = w$ dan $b_\nu = m$.

Het element

$$E_0 = (b_1, b_2, \dots, b_\nu, \dots)$$

van M is ongelijk aan elke E_μ ; immers, de μ -de coördinaat van E_0 is ongelijk aan de μ -de coördinaat van E_μ .

Dit laat zien dat geen enkele afbeelding van $\mathbb{N}$ naar M surjectief is, laat staan bijtief.

Daarnaast is de afbeelding van $\mathbb{N}$ naar M die het getal n naar de rij met een w in de n -de coördinaat en een m in alle andere stuurt injectief.

Conclusie: M heeft strikt meer elementen dan $\mathbb{N}$.

Cantor merkte op dat dit bewijs, ofschoon eenvoudig, breder toepasbaar was: voor elke gegeven verzameling L kan men op dezelfde wijze een verzameling M construeren met strikt meer elementen dan L . Als voorbeeld nam hij $L = [0, 1]$ en voor M de verzameling van $\{0, 1\}$ -waardige functies op L . Gegeven een functie $f : L \rightarrow M$, definiëren we een functie $\varphi : [0, 1]^2 \rightarrow \{0, 1\}$ door $\varphi(s, t) = f(s)(t)$. Dan definieert $t \mapsto 1 - \varphi(t, t)$, een functie die ongelijk is aan alle $f(s)$.

Latere ontwikkelingen

Wat niet in [3] staat maar wat Cantor zich realiseerde was dat dit bewijs een paradox in zich bergde. Cantor had een ruime opvatting van wat een verzameling was, zie [4]: “Unter einer ‘Menge’ verstehen wir jede Zusammenfassung M von bestimmten wohlunterschiedenen Objecten m unserer Anschauung oder unseres Denkens (welche die ‘Elemente’ von M genannt werden) zu einem Ganzen.”

Het diagonaalproces toegepast op het ‘geheel’, V , van alle verzamelingen leidt tot een verzameling die strikt *meer* elementen bevat dan V zelf en tegelijk een deel van V is, *tenzij* V zelf natuurlijk geen verzameling is. Dit bracht Cantor er toe onderscheid te maken tussen ‘eigenlijke’ en ‘oneigenlijke’ verzamelingen, hetgeen zijn theorie er niet mooier op maakte.

Nu lijkt deze paradox niet echt erg omdat de erbij betrokken verzamelingen onvoorstelbaar groot zijn, veel groter dan de ‘normale’ verzamelingen die we in de praktijk tegenkomen, zoals $\mathbb{N}$ en $\mathbb{R}$. Echter, in [12] gebruikte Russell Cantors bewijs om een veel eenvoudiger paradox in de verzamelingenleer bloot te leggen. Hij begon met een herformulering van het argument (NB: het woord ‘class’ in onderstaande citaten van Russell is synoniem met ‘verzameling’): “Let u be any class, and R a one-one correlation of all the members of u to some (or all) of the classes contained in u . There are such correlations, since one of them is obtained by correlating each member of u with the class whose only term is that member. Consider now the following norm: “ x is a member of u , but is not a member of the class with which R correlates it.” Suppose this norm defines a class w . Then w is omitted from the correlation; for, if w were correlated with x , then, if x is any member of w , it follows from the definition of w that x is not a member of its correlate, i.e., is not a member of w ; while, conversely, if x is not a member of w , it is a member of its correlate, i.e., of w . Hence the supposition that w is the correlate of x leads to a contradiction. Hence, in any one-one correlation of all the terms of u with classes contained in u , at least one class contained in u is omitted. Therefore, whatever class u may be, there are more classes contained in u than there are members of u .”

Wat efficiënter: als $R : u \rightarrow \mathcal{P}(u)$ een (injectieve) afbeelding is, dan is $w = \{x \in u : x \notin R(x)\}$ geen element van het beeld van R . Immers, als $w = R(x)$ dan volgt “ $x \in w$ dan en slechts dan als $x \notin w$ ”, hetgeen een duidelijke tegenspraak oplevert.

De hierboven gebezigde term ‘norm’ slaat op wat wij nu een (welgevormde) formule zouden noemen: een uitspraak/beschrijving waar objecten al dan niet aan kunnen voldoen — zie verderop voor de definitie. Elke verzameling, X , bepaalt een norm, namelijk “ x behoort tot X ”. Het omgekeerde, dat elke norm een verzameling bepaalt, zou men kunnen zien als een formalisering van Cantors opvatting van het begrip verzameling.

Wat Russell zich realiseerde was dat deze opvatting tot tegenspraken moet leiden: “We may test this conclusion, in the case of the class of all entities, by constructing, according to the method of the proof of the Schröder-Bernstein theorem, an actual one-one correlation of all terms with all classes, and then considering the class which Cantor shows to be omitted. This process leads us to the consideration of the norm: “ x is not a class which is a member of itself.” If this norm defines a class w , then the class w is omitted from our correlation. But it is easy to see that this norm does not define a class at all. For, if it defined a class w , we should find that, if w is a member of itself, then it is not a member of itself, and vice versa. Hence there is no such class as w . Essentially the same argument may be stated as follows:—If u be any class, then, when $x = u$, the statement “ x is not an x ” is equivalent to “ x is not a u .” Hence, whatever class u may be, there is one value of x —namely, u —for which “ x is not an x ” is equivalent to “ x is not a w ”; thus there is no class w such that “ x is not an x ” is always equivalent to “ x is a w .” Hence, again, this norm does not define a class.” En dit leidt tot een onverbidelijke conclusie: “We thus find that, quite apart from any view as to the nature of cardinals, and without any considerations belonging to arithmetic, we can prove that at least one perfectly determinate norm does not define a class.”

Dat was niet zo mooi maar aan de andere kant wel nuttig, want het dwong de wiskundigen zich er op te bezinnen wat nu wel en niet geoorloofd was binnen de verzamelingenleer. Eén van de eersten die die koe bij de horens vatte was Zermelo, die in [16] een axiomatisering van de verzamelingenleer opstelde. Het volgende axioma (Axiom der Aussonderung) maakt de paradox van Russell onschadelijk door, als het ware, alleen toe te laten dat eigenschappen gebruikt worden om verzamelingen uit voorgegeven verzamelingen af te zonderen:

“Axiom III. Ist die Klassenaussage $E(x)$ definit für alle Elemente einer Menge M , so besitzt M

immer eine Untermenge M_E , welche alle diejenigen Elemente x von M , für welche $E(x)$ wahr ist, und nur solche als Elemente enthält.”

Wat Zermelo precies met een ‘Klassenaussage’ en ‘definit’ bedoelde was nog niet geheel duidelijk; Skolem zorgde in [13] voor klaarheid door in feite het begrip ‘welgevormde formule’ te definiëren: alle formules die door herhaalde conjunctie, disjunctie, negatie en kwantificatie uit atomaire formules van de vorm $x \in y$ en $x = y$ opgebouwd kunnen worden en alleen deze. Hiermee was alle ambiguïteit uit de verzamelingenleer weggevoerd.

Overigens wordt Cantors onderscheid tussen ‘eigenlijke’ en ‘oneigenlijke’ verzamelingen in de verzamelingenleer op informele wijze nog wel gehanteerd, alleen spreekt men liever van verzamelingen en (echte) klassen. De uitspraak “de klasse der ordinaalgetallen is welgeordend” bekt iets lekkerder dan de formele versie: “voor elke welgevormde formule $\psi(x)$ met x als vrije variabele en met de eigenschap dat er een ordinaalgetal α is dat aan ψ voldoet, is er een kleinste ordinaalgetal dat aan ψ voldoet”.

Andere toepassingen

De diagonaalmethode is op vele problemen toepasbaar.

De bekendste onmogelijkheidsbewijzen uit de mathematische logica maken alle gebruik van een versie van Cantors idee om op een diagonaal alle elementen om te klappen. De eerste onvolledigheidsstelling van Gödel, Turings oplossing van het beslissingsprobleem en Tarski’s stelling ([14]) over de ondefinieerbaarheid van waarheid in $\mathbb{N}$. Telkens wordt er een welgedefinieerde lijst gemaakt met een welgedefinieerde diagonaal en een geschikte omklapprocedure leidt tot de gewenste onmogelijkheid.

Tarski’s stelling is van de drie wellicht de minst bekende, daarom hier een korte beschrijving. Zoals Gödel liet zien in het bewijs van zijn onvolledigheidsstellingen kunnen we aan elke (welgevormde) formule, ϕ , in de taal van de rekenkunde een nummer, $\# \phi$, toekennen, en wel zo dat van elk natuurlijk getal mechanisch vastgesteld kan worden of het een nummer van zo’n formule is. Laat F de verzameling van de nummers van formules zijn en T de deelverzameling van F die bestaat uit de nummers van de formules die waar zijn in $\mathbb{N}$. Van het nummer van de formule die de grote stelling van Fermat uitdrukt weten we dat dit tot T behoort; van de formalisering van het vermoeden van Goldbach weten we

dat nog niet. De stelling van Tarski zegt nu dat T *niet* definieerbaar is, in de zin dat er *geen* formule, φ , in de taal der rekenkunde is met één vrije variabele en die voldoet aan $T = \{n : \varphi(n)\}$. Op de diagonaal die hier tot de tegenspraak leidt staat voor elke formule ψ een gesloten formule ψ' met de eigenschap dat $\psi' \leftrightarrow \psi(\#\psi')$ bewijsbaar is in de elementaire rekenkunde en dus waar in $\mathbb{N}$. Toepassing op de negatie van φ levert een formule θ met de eigenschap dat $\theta \leftrightarrow \neg\varphi(\#\theta)$ waar is.

Het idee van diagonaliseren vinden we al eerder bij Paul du Bois-Reymond in [1]: gegeven een rij positieve en stijgende functies $\lambda_1(x), \lambda_2(x), \lambda_3(x), \dots$ op het interval $[0, \infty)$ die voldoen aan

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\lambda_n(x)}{\lambda_{n+1}(x)} = \infty$$

voor alle n , bestaat er een stijgende positieve functie ψ die voldoet aan $\lim_{x \rightarrow \infty} \psi(x) = \infty$ en voor alle n aan

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\lambda_n(x)}{\psi(x)} = \infty.$$

De constructie is redelijk recht-door-zee: neem een stijgende rij $x_1, x_2, x_3, \dots$ met de eigenschap dat

$$\lambda_1(x) > \dots > \lambda_n(x) \geq n$$

als $x \geq x_n$ en laat ψ de stuksgewijs lineaire functie zijn die voldoet aan $\psi(0) = 0$ en $\psi(x_n) = n$ voor alle n .

Het verschil met de methode van Cantor is de keuzevrijheid die men op de n -de stap nog heeft en dit maakt deze techniek heel flexibel. Du Bois-Reymond zelf gebruikte hem bij zijn onderzoek naar het groeigedrag van reële functies en ook bij classificaties van positieve convergente en divergente reeksen.

Het andere diagonaalargument

Zoals hierboven al genoemd zien we in populariseringen vaak het volgende argument voor de overaftelbaarheid van $\mathbb{R}$. Neem een aftelling, zeg $x_1, x_2, x_3, \dots$ van het interval $(0, 1)$ en schrijf van iedere x_n de decimale ontwikkeling op:

$$x_n = 0.d_{n,1}d_{n,2}d_{n,3} \dots$$

(met voorkeur voor de ontwikkeling die in negens eindigt). Maak vervolgens een rij cijfers $d_1, d_2, d_3, \dots$ die voldoende veel afwijkt van $d_{1,1}, d_{2,2}, d_{3,3}, \dots$, namelijk zó dat het getal $0.d_1d_2d_3, \dots$ ongelijk is aan alle x_n . Daar zijn tientallen recepten voor, bijvoorbeeld $d_i = d_{i,i} + 3$ modulo 10.

Het is dit argument waar veel mensen een probleem mee hebben. De logicus Wilfred Hodges schreef een lezenswaardig artikel, [10], over de vele artikelen die hij als referee of redacteur onder ogen kreeg en waarin de auteurs hun bezwaren tegen, en weerlegging van, het diagonaalargument hadden neergeschreven.

Op het web vindt men regelmatig discussies over het diagonaalargument waarbij wiskundige redeneringen het al gauw af moeten

leggen tegen ad-hominemargumenten. In de hoogtijdagen van de usenetnieuwsgroepen staken dit soort discussies regelmatig de kop op. Op <http://groups.google.com> kunt U zien hoe het er vroeger in groepen als sci.math en sci.math.logic aan toe ging. Het is op Reddit (www.reddit.com/r/math) al niet veel beter; de zoekterm ‘cantor diagonal’ levert genoeg materiaal voor een regenachtige middag leeswerk.

Wie echter de moeite neemt het verzameld werk van Cantor, [6], door te ploegen zal dit bewijs niet tegenkomen. Ook Joseph Dauben noemt dit bewijs niet in zijn biografie van Cantor [7].

De vroegste plek waar ik dit bewijs heb kunnen vinden is op pagina 43 in [15] en daar wordt het als “Cantor’s second proof” aange-merkt, nota bene onder verwijzing naar [3].

Wat mij betreft mag dit bewijs de prullenmand in. Het kan niet in de schaduw staan van het bewijs uit 1874, dat zonder verdere aritmetisering laat zien dat een lijn in het vlak overaftelbaar is, en ook niet in die van het bewijs uit 1890/91, dat zonder gevalsonderscheiding of wat dan ook recht op het doel af gaat.

Ten slotte: Cantors stellingen en bewijzen zijn direct, niet uit het ongerijmde. De meeste presentaties beginnen met “Stel f is een bijectie ...” en roepen aan het eind “Tegenspraak!”, zonder dat in het bewijs ooit gebruikt is dat f bijectief verondersteld is. Typisch een geval van wat Leonard Gillman in [8] een “spurious contradiction” noemde. ←

Referenties

- Paul du Bois-Reymond, Ueber asymptotische Werthe, infinitäre Approximationen und infinitäre Auflösung von Gleichungen. Nachträge, *Mathematische Annalen*, 8 (1875), 363–414.
- Georg Cantor, Über eine Eigenschaft des Inbegriffes aller reellen algebraischen Zahlen, *Crelles Journal für Mathematik* 77 (1874), 258–262.
- Georg Cantor, Über eine elementare Frage der Mannigfaltigkeitslehre, *Jahresbericht der Deutschen Mathematischen Vereinigung* 1 (1890–91), 75–78.
- Georg Cantor, Beiträge zur Begründung der transfiniten Mengenlehre (Erster Artikel), *Mathematische Annalen*, 46 (1895), 491–512.
- Georg Cantor, Beiträge zur Begründung der transfiniten Mengenlehre (Zweiter Artikel), *Mathematische Annalen*, 49 (1897), 207–246.
- Georg Cantor, *Gesammelte Abhandlungen mathematischen und philosophischen Inhalts*, Springer, Berlin, 1980.
- Joseph Warren Dauben, *Georg Cantor. His Mathematics and Philosophy of the Infinite*, Princeton University Press, Princeton, NJ, 1990.
- Leonard Gillman, *Writing Mathematics Well: a Manual for Authors*, Mathematical Association of America, 1987.
- Klaas Pieter Hart, De Continuümhypothese, *Nieuw Archief voor Wiskunde*, 5/10 (2009), 33–39.
- Wilfred Hodges, An editor recalls some hopeless papers, *Bulletin of Symbolic Logic* 4 (1998), 1–16.
- E. Noether en J. Cavallès, *Briefwechsel Cantor–Dedekind*, *Actualités Scientifiques et Industrielles* No. 518, Hermann, Parijs, 1937, 61 p.
- Bertrand Russell, On some difficulties in the theory of transfinite numbers and order types, *Proceedings of the London Mathematical Society* s2–4 (1907), 29–53, doi: 10.1112/plms/s2-4.1.29.
- Thoralf Skolem, Einige Bemerkungen zur Axiomatischen Begründung der Mengenlehre, *Matematikerkongressen i Helsingfors den 4–7 Juli 1922*, Den femte skandinaviska matematikerkongressen, Redegörelse, Akademiska Bokhandeln, Helsinki, 1923, pp. 217–232.
- Alfred Tarski, Der Wahrheitsbegriff in den formalisierten Sprachen, *Studia Philosophica* 1 (1936), 261–405.
- William Henry Young en Grace Chisholm Young, *The Theory of Sets of Points*, Cambridge University Press (1906); herdruk in Cambridge Library Collection — Mathematics (2009).
- Ernst Zermelo, Untersuchungen über die Grundlagen der Mengenlehre I, *Mathematische Annalen* 65 (1908), 261–281.

Claud Biemans

Frontlinie Communicatie

Amsterdam

c.biemans@frontlinie.nl

Interview Fieldsmedaillewinnaar Manjul Bhargava

"Mijn enthousiasme heeft niets te maken met wiskunde op school"

Twee van de vier kersverse Fieldsmedaillewinnaars waren in september 2014 aanwezig op het Heidelberg Laureate Forum in Duitsland, Martin Hairer en Manjul Bhargava. De laatste is in Nederland geen onbekende. Als promovendus leerde hij de Spinozaprijswinnaar Hendrik Lenstra kennen die toen in de Verenigde Staten werkte, ze deelden de passie voor zuivere wiskunde. Toen Lenstra in 2003 naar Leiden vertrok, bezocht Bhargava hem zeer regelmatig in het Mathematisch Instituut. In 2006 kreeg Bhargava de Stieltjes Leerstoel in Leiden, en sinds 2010 is hij daar hoogleraar analytische algebraïsche getaltheorie. In Heidelberg gaf hij niet alleen een zeer toegankelijke lezing over het werk waarvoor hij de Fieldsmedaille kreeg, hij greep ook elke gelegenheid aan om te vertellen over de pracht en de kracht van zijn vak. Wetenschapsjournalist Claud Biemans tekende zijn verhaal op.

Manjul werd geboren in Canada, als zoon van Indiase immigranten. Niet lang na zijn geboorte verhuisde de familie naar New York. Als kind was hij al gefascineerd door wiskunde. Misschien is dat niet verwonderlijk, want zijn grootste inspiratiebron is zijn moeder en zij is wiskundelerares. Wanneer hij een vraag had was zij altijd in de buurt met een antwoord. Maar vaak genoeg wist zij het ook niet. Dan stimuleerde ze hem om zelf het probleem op te lossen. "Mijn moeder heeft nooit druk op me uitgeoefend om de wiskundekant op te gaan. Maar haar aanmoediging was erg belangrijk voor mij, ze motiveerde me om door te zetten."

Toen Manjul acht was loste hij zijn eerste probleem zelf op. "Ik vond het leuk om piramides te bouwen met sinaasappels. Dan vroeg ik me af hoeveel vruchten ik nodig had om een piramide te bouwen met vijf sinaasappels aan elke zijkant. En de volgende vraag was hoeveel ik er nodig had voor een piramide met n sinaasappels aan de zijkant. Mijn moeder zei: "Ik weet het niet, probeer het zelf maar uit te vinden." Na een paar maanden vond ik het antwoord: $n \cdot (n + 1) \cdot (n + 2)/6$. Dat moment vergeet ik nooit! Ik vond de

voorspellende kracht van de wiskunde fantastisch. En mocht ik de formules vergeten, dan kon ik die ter plekke opnieuw afleiden."

Ritmepatronen

Bhargava komt uit een muzikale familie. "We maken vaak samen muziek, iedereen bespeelt een instrument of zingt. Mijn moeder speelt tabla (een traditioneel Indiaas percussie-instrument) en ik doe dat zelf ook. Wiskunde en muziek zijn mijn twee passies. En ik kan ze niet los zien van elkaar. Het is een feit dat een groot aantal wiskundigen dol is op muziek. Andersom geldt dat niet. Maar wiskundigen houden ervan om bezig te zijn met mooie patronen en dat doen muzikanten ook. Er zijn ook diepere verbanden. Het spelen van tabla gebeurt op een improviserende manier. We oefenen veel om op het juiste moment het juiste ritme te kunnen slaan. We nemen dan bepaalde ritmepatronen van verschillende lengte en die proberen we binnen een aantal maten te passen. Je wilt dan weten op hoeveel verschillende manieren je dat kunt doen. Op een wiskundige manier kun je het hele repertoire begrijpen. Live op het po-

dium kun je dan kiezen voor een geschikt ritmepatroon."

"Het simpelste voorbeeld is een ritmepatroon met een korte slag van één tel en een lange slag van twee tellen. Wat zijn alle mogelijke composities van korte en lange slagen met een lengte van in totaal acht tellen? Of in het algemeen: hoe kun je n tellen opvullen met korte en lange slagen? Muzikanten hebben dit beschreven honderden jaren voor Fibonacci. Als je de oude literatuur leest over muziek en poëzie dan kom je de Fibonacci-reeks regelmatig tegen. Zelfs Indiase wiskundigen weten dit vaak niet, maar deze theorie is afkomstig van kunstenaars."

"Wiskunde en muziek zijn mijn twee passies. En ik kan ze niet los zien van elkaar."

Via zijn grootvader, hoogleraar Sanskriet aan de universiteit van Rajasthan in India, kwam hij in aanraking met oude Indiase teksten. Hij las een boek van de wiskundige en astronoom Brahmagupta uit het jaar 628. Daarin stond het bewijs dat het product van twee getallen van de vorm $a^2 + nb^2$ zelf een getal is van die vorm. In andere woorden: de gelijkheid van Brahmagupta laat zien dat de getallen van de vorm $a^2 + nb^2$ een gesloten verzameling vormen onder vermenigvuldiging. "Dat was mijn eerste kennismaking met getaltheorie. Toen ik dat las, vond ik het prachtig."

"Ik begon met het begrijpen van patronen in muziek en dacht erover na op een getaltheoretische manier. De wiskunde van die verdelingen en onderverdelingen wordt snel erg

ingewikkeld. Maar op die leuke manier begreep ik de theorie snel. Het is een prachtige manier om tegelijk met muziek wiskunde te onderwijzen op lagere en middelbare scholen. In mijn colleges voor beginners laat ik de studenten ritmes oefenen. En als je iets wilt vertellen over dimensies dan kun je over de verschillende aspecten van een muzieknoot spreken: frequentie, amplitude, timbre. Al die coördinaten moet je specificeren als je muziek wilt schrijven. Wiskunde door middel van de kunsten is een fantastisch idee."

Wiskunde is angstaanjagend

Via muziek en poëzie leerde Bhargava wiskunde waarderen. "Het is boeiend dat helemaal niets waardoor ik enthousiast werd over wiskunde te maken had met de wiskundelessen op de middelbare school. In feite was ik altijd blij als ik die les kon missen. Formules uit je hoofd leren... Ik had dezelfde klachten als iedereen."

Bhargava vindt dat over de hele wereld het wiskundecurriculum verbeterd moet worden. "Wiskunde moet op een veel creatievere manier gegeven worden, als een proces van ontdekken. Nu gaat het vaak op de manier van kijk, hier is een formule, en zo moet je die gebruiken voor dat soort problemen. En dan moet je dingen uit je hoofd leren die behoorlijk gecompliceerd zijn. Dat is angstaanjagend en daardoor word je ontmoedigd. Als je kijkt naar de manier waarop onderzoekers in de wiskunde werken, dan is dat totaal anders. Wiskundigen genieten van hun werk. Die ervaring wordt nooit op studenten overgedragen, het is jammer dat studenten dat pas ontdek-

ken als ze gaan promoveren. Laat de leerlingen geen vermenigvuldigingstabellen uit hun hoofd leren. Laat ze de tabellen zelf uitvinden. Als je die eenmaal zelf hebt ontdekt, dan onthoud je het vanzelf."

"Wiskunde moet op een veel creatievere manier gegeven worden."

"En waarom geniet ik van mijn werk? Ik ontdek manieren om problemen op te lossen. Dat is een creatief proces, een ontdekkings-tocht en op die manier zou wiskunde op scholen gebracht moeten worden. Je presenteert een probleem aan de leerlingen en vervolgens gaat iedereen bedenken hoe het opgelost kan worden. Dan gaan leerlingen met elkaar overleggen om te komen tot de optimale creatievere manier om erover na te denken. Dan heeft iedereen meer plezier, het is creatief en interactief. En helemaal niet beangstigend. Als ik lesgeef in Princeton probeer ik het op deze manier aan te pakken. Mijn studenten realiseren zich dat wiskunde nieuwe ervaringen brengt, zoals de andere kunsten. Het is heel erg leuk en prachtig bovendien. Ik kan me van mijn eigen schooltijd niet herinneren dat er ooit gesproken werd over de pracht van wiskunde."

Goochelkunst

Momenteel geeft Bhargava college over wiskunde en goochelkunst. "Als kind verslond ik de boeken van Persi Diaconis en Martin Gardner. Persi Diaconis was een rondreizende goochelaar. De trucs die hij uitvond waren

op een niet-triviale manier op wiskunde gebaseerd. Toen hij al achter in de twintig was, wilde hij wiskunde gaan studeren. Martin Gardner, een bekende auteur over wiskunde en goochelarij, schreef voor hem aan Harvard een aanbevelingsbrief, die beroemd geworden is: "Persi Diaconis heeft drie van de tien bekendste trucs met kaarten uitgevonden in de afgelopen tien jaar. Jullie moeten hem aannemen." En Harvard ging akkoord. Een paar jaar later werd Diaconis benoemd tot hoogleraar aan Harvard. Hij was mijn begeleider toen ik daar mijn bachelor deed. Dus ik leerde veel over de verbanden tussen goochelkunst en wiskunde. Ik oefende veel op de praktische kant, de handbewegingen, soms hele dagen. Nu geef ik zelf les aan een groep studenten. Ik krijg honderden aanmeldingen voor dit college. Ik vind het prettig om les te geven aan een mix van wiskundigen en niet-wiskundigen. De wiskundigen pikken de theorie achter de goocheltrucs snel op, maar op een of andere manier blinken ze zelden uit in de andere aspecten, zoals de presentatie, waar de anderen weer goed in zijn. Dus met een gemengde groep kunnen de studenten van elkaar leren."

Outreach

Als wiskundige voelt Bhargava zich geleid door schoonheid, door wat spannend is en veelbelovend. "Ik ben wel blij dat ik in een vakgebied werk dat behoorlijk transparant is voor andere wiskundigen. Mijn artikelen probeer ik ook zodanig te schrijven dat ze niet alleen voor getaltheoretici toegankelijk zijn. Ik denk dat het mogelijk is om alles uit te leggen. Op zijn minst kun je een globaal idee geven over het onderwerp. Vaak heeft het geen prioriteit, maar ik vind dat we ons werk toch tenminste aan de andere wiskundigen zouden moeten uitleggen en zelfs aan het grote publiek. Wiskundigen zouden niet alleen aan hun eigen onderwerp moeten werken, maar ook oefenen op het uitleggen aan niet-vakgenoten. Helaas wordt je vakmatig alleen op je onderzoek afgerekend. Outreach is vrijwilligerswerk, het telt niet mee voor je promotie. In Princeton werd er tot voor kort alleen gekeken naar je spraakmakende onderzoek, zelfs de manier waarop je onderwijs gaf deed er niet toe." Hij lacht. "Er is inmiddels wel iets aan het veranderen, dat is goed voor het algemene publiek maar ook goed voor ons, de wiskundigen zelf."

De lezing die Manjul Bhargava gaf in Heidelberg is te zien via het videoarchief van heidelberg-laureate-forum.org.



Foto: ©Heidelberg Laureate Forum Foundation / J. Kropp - All rights reserved 2014

Manjul Bhargava demonstreert goocheltrucs aan jonge onderzoekers tijdens het Heidelberg Laureate Forum 2014

Viktor Blåsjö

Mathematical Institute

Utrecht University

v.n.e.blasjo@uu.nl

History

The myth of Leibniz's proof of the fundamental theorem of calculus

A paper by Leibniz from 1693 is very often cited as containing his proof of the fundamental theorem of calculus. However, argues Viktor Blåsjö in this article, when read in its proper context it becomes clear that Leibniz's argument is not at all a proof of this theorem but rather a recourse for the cases where the theorem is of no use.

What was Leibniz's take on the fundamental theorem of calculus? He was one of the creators of the field after all, so one is naturally curious. But if you go to the library to find the answer to this question you will be sold a bait-and-switch. You will be referred to his 1693 article [15], supposedly the only place where Leibniz explicitly stated and proved the fundamental theorem of calculus in print. The passage in question is reproduced in full in English translation in Struik [26, pp. 282–284], Calinger [4, pp. 354–356], Laubenbacher and Pengelley [13, pp. 133–135], discussed in full detail in Cooke [5, pp. 470–471], Hahn [11, pp. 125–128], Nitecki [25, pp. 292–293], Bressoud [3, pp. 101–102], Nauenberg [24], and cited in Katz [12, p. 529], Edwards, [8, p. 260], Volkert [27, p. 104], González-Velasco [9, p. 357], Grattan-Guinness [10, p. 55],

Beyer [1, p. 163], et cetera, all on the supposition that this is Leibniz's proof of the fundamental theorem of calculus. (Leibniz's complete paper is available in German translations in [23] and [20], and a French translation in [22].) If you study the proof you will probably recognize it as a rather clunky way of saying $\int_a^b f(x)dx = F(b) - F(a)$ (where $F' = f$) in geometrical language. I shall argue that it is not. And this despite the fact that Leibniz clearly writes: "I shall now show that the general problem of quadratures can be reduced to the finding of a curve that has a given law of tangency" (p. 390). Today everybody reads this as shown in the box on this page.

Read through modern eyes in this manner, then, this looks like smoking-gun evidence that Leibniz is announcing his intention to prove the fundamental theorem. So it is not

difficult to see how it came to be generally accepted as such in the literature. It is natural that scholars who know the centrality of the fundamental theorem of calculus in the modern conception of the field should go looking for its proof in Leibniz, and it is understandable that this passage would then catch their eyes. But I shall argue that this is an anachronistic reading that misses the point of the argument completely. When Leibniz's paper is understood in its historical context it becomes evident that it is meant to serve a different purpose.

Leibniz's calculus

Before delving into the forgotten historical context that explains what Leibniz is up to in his paper, we may ask ourselves: if this isn't it, then how *did* Leibniz think about the fundamental theorem of calculus? I believe that, if cornered to argue for this result, Leibniz would have argued essentially as follows.

$$\begin{aligned}\int_a^b y' dx &= \int_a^b \frac{dy}{dx} dx = \int_a^b dy \\ &= \text{sum of little changes in } y \text{ from } a \text{ to } b \\ &= \text{net change in } y \text{ from } a \text{ to } b \\ &= y(b) - y(a).\end{aligned}$$

For the other part of the theorem, just note from Figure 1 that if t increases by dt then

The statement of Leibniz and its misleading translation into modern terms

The general problem of quadratures can be reduced to the finding of a curve that has a given law of tangency.

The evaluation of a general integral $\int_a^b f(x)dx$ can be reduced to the finding of a function $F(x)$ that satisfies $F'(x) = f(x)$.

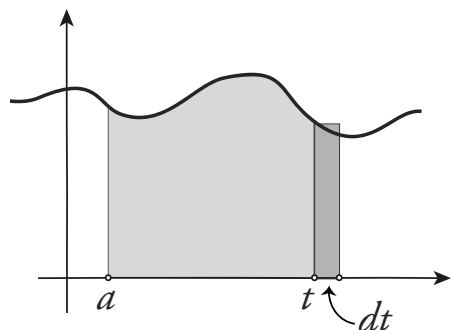


Figure 1 The integral $\int_a^t y dx$ and its differential.

the area $\int_a^t y dx$ increases by $y(t)dt$, whence

$$\frac{d \int_a^t y(x) dx}{dt} = \frac{y(t)dt}{dt} = y(t).$$

This mode of reasoning is very much in line with Leibniz's conceptions of integrals and differentials. Indeed, he would most likely not consider this a 'proof' of a 'fundamental theorem', but rather a somewhat tedious explication of the meaning of differentiation and integration. That is why he never put it in print. Instead he was satisfied with the casual statement that "as powers and roots in ordinary arithmetic, so for us sums and differences, or $\int$ and d , are reciprocal" [14, p. 297]. The comparison is an apt one not only procedurally but also foundationally: in neither case can there be a question of proof of the reciprocal relationship; rather it is built into the very meaning of the notions involved.

So much for the fundamental theorem, which, however, has nothing to do with the purpose of Leibniz's 1693 paper. To understand what Leibniz *did* intend in this paper, we must first understand its context. In the seventeenth century, Euclid's *Elements* was

still the gold standard of mathematical rigour and method. One conspicuous aspect of this work is that Euclid speaks only of Figures he can *construct* using ruler and compasses. The scope of Euclid's construction tools was so found too restrictive, but his emphasis on constructions was retained.

Descartes's construction method

The Euclidean requirement of construction as a prerequisite for knowledge was taken very seriously by Descartes, who was to have a great influence on Leibniz. Descartes taught the world coordinate geometry and the identification of curves with equations in his *La Géométrie* of 1637. In connection with this he also argued that the scope of mathematics should be extended to include all algebraic curves — to which his new method was especially suited — as opposed to being limited to the lines and circles of Euclid's *Elements* and the handful more complex curves studied in antiquity. However, Descartes did not present this as a radically new way of doing geometry, different in principle from that of Euclid. Rather he argued at great length that his method was really nothing but the Euclidean programme brought to its logical conclusion. In particular, he accepted curves represented by algebraic equations as legitimate mathematical objects only after he had found a way of constructing them in a Euclidean spirit.

Descartes's criterion for an acceptable construction is the following:

"To treat all the curves I mean to introduce here [i.e., all algebraic curves], only one additional assumption [beyond ruler and compasses] is necessary, namely, [that] two or

more lines can be moved, one [by] the other, determining by their intersection other curves. This seems to me in no way more difficult [than the classical constructions]." [7, p. 43]

The key phrase is "one by the other": Descartes has no objections to assemblages of curves pushing one another in whatever fashion as long as all the motions are ultimately generated by one and only one primitive motion. You can build a curve tracing machine as intricate as you like as long as one single point needs to be moved to operate it. This single-motion criterion is the key to Descartes's division of curves into 'geometrical' (i.e., exact) and 'mechanical' (i.e., not susceptible to mathematical rigour).

Figure 2 shows an example of Descartes's construction method. It can be adapted to generate algebraic curves of higher and higher degree. For example, it is quite easy to see that replacing the line *KNC* by a circle produces a conchoid (Figure 3). And so it continues: once e.g. the conchoid has been generated it can be taken in place of the starting curve *KNC* to generate an even more complex curve, and so on.

These curve-tracing methods are what made algebraic curves legitimate geometry to Descartes. And they were so not in the sense of incidental or half-hearted attempts at justifying his new mathematics to obstinate colleagues stuck in old ways of thinking. Rather, these considerations formed the basis for his mathematical researches from the very beginning. Already in 1619, *before* he had the idea of a correspondence between a curve and an equation, Descartes was concerned with "new compasses, which I con-

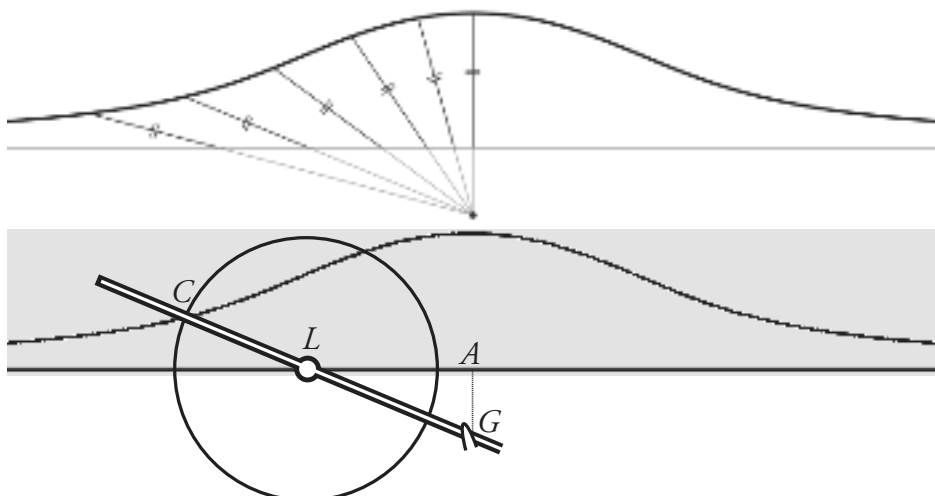


Figure 2 Descartes's curve tracing method [6, p.321]. The triangle *KNL* moves vertically along the axis *ABLK*. Attached to it at *L* is a ruler, which is also constrained by the peg fixed at *G*. Therefore the ruler makes a mostly rotational motion as the triangle moves upwards. The intersection *C* of the ruler and the extension of *KN* defines the traced curve, in this case a hyperbola.

Figure 3 Top: The defining property of the conchoid, a famous algebraic curve studied in antiquity. Bottom: Construction of the conchoid using Descartes's method of Figure 2 with a circle in place of the line *KNC*.

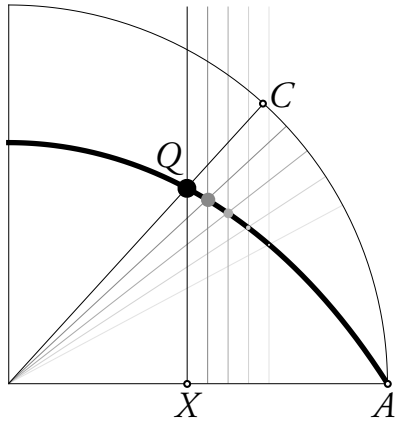


Figure 4 The quadratrix. C moves along the arc of a circle and X along its radius. Both points start at A and move at uniform speed in such a way as to reach the vertical axis at the same time, i.e., $\frac{d}{dt}AC = \frac{\pi}{2} \left(\frac{d}{dt}AX \right)$. The intersection Q generates the quadratrix.

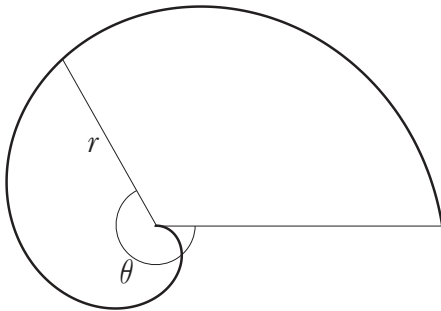


Figure 5 The Archimedean spiral $r = \theta$. The radial motion must be exactly coordinated with the rotational motion — a constructively impossible task, according to Descartes.

sider to be no less certain and geometrical than the usual compasses by which circles are traced" (quoted from [2, p. 232]). The key criterion for these 'new compasses', according to Descartes, was that they should trace curves 'from one single motion', contrary to the 'imaginary' curves traced by 'separate motions not subordinate to one another', such as the quadratrix (Figure 4) or the Archimedean spiral (Figure 5). The coordination of motions in both of these constructions involve π , which, since π is transcendental, is non-constructible (and hence unknowable) by Euclidean and Cartesian standards. As Descartes puts it in the *Géométrie*:

"The spiral, the quadratrix, and similar curves ... are not among those curves that I think should be included here, since they must be conceived of as described by two separate movements whose relation does not admit of exact determination, [...] since the ratios between straight and curved lines are not known, and I believe cannot be discovered by human minds, and therefore no conclusion based upon such ratios can be accepted as rigorous and exact." [7, pp. 44, 91]

By the time he published his *Géométrie*, Descartes had become convinced that his single-motion criterion included all algebraic curves (i.e., curves with polynomial equation of any degree), and nothing else. Convincing his readers of this — and thereby justifying the new algebraic methods in terms of the standards of classical, construction-based geometry — is one of the dominant themes of the *Géométrie*. (This is one of the main points of Bos [2], the definitive study of Descartes's geometry.)

Leibniz's construction method

These considerations form the direct background of Leibniz's 1693 article. He believed, as firmly as Descartes, that constructions are the bedrock of geometrical rigour. That is why he offered his own single-motion construction method, which can produce not only any algebraic curve but in fact any curve described by a differential equation of the form $dy/dx = f(x)$, where $f(x)$ can be any previously constructed function, just as the line KNC in Descartes's construction can be replaced by any previously constructed curve. This construction is what Leibniz's paper is all about.

Leibniz's construction goes as follows (Figure 6). The plane Π is a horizontal surface, say a table. On it is placed a weight at $C = (x, y)$ attached to a string TC . If we move the free end T of the string along the edge ABT of the table, the curve $(C)C$ generated by the moving weight would be the ordinary tractrix. But we shall modify this situation by having part of the string hang over the edge of the table. This end also has a weight attached to it, G , which ensures that it hangs straight down along the vertical plane Θ , until it hits the edge $E(E)$ protruding from this plane. Thus

the fixed string length is $CT + TE$, and the length of the part TE hanging below the table is determined by the curve $E(E)$, which catches the weight at a point vertically below T . In fact, the length of TE is a function of the x -coordinate of the weight at C , for as C moves it pushes the 'ruler' HR and thereby the vertical plane Θ ahead of it, so that $E(E)$ is effectively the graph of a function with $RT = x$ as input and TE as output. The curve $(C)C$ is traced as T is moved along the edge of the table away from A . The motion of T thus inflicts two separate motions on the plane Θ : one in the y -direction resulting directly from the motion of T , and one along the x -direction resulting from the motion of C .

In this way we can generate a curve for which the length TC of its tangent is any given function of its x -coordinate. For if we seek a curve $C(C)$ for which $TC = \phi(x)$, say, then we can always choose the curve $E(E)$ so that TE is the total string length minus $\phi(x)$, which leaves just the required amount of string for the tangent TC . Thus if we write a for the total string length CTE , the required curve $E(E)$ is simply the graph of the function $a - \phi(x)$ plotted in the plane Θ with RT as x -axis and RL as y -axis.

Alternatively, we can generate a curve with a given slope $dy/dx = TB/BC$. This reduces to the above problem since $TC = \sqrt{TB^2 + BC^2}$ is a simple algebraic function of TB and BC . Thus if we want to generate the curve $C(C)$ with the given slope $dy/dx = f(x)$, we note that in this case $BC = x$ and $TB = x f(x)$, so that $TC = x \sqrt{f(x)^2 + 1}$. Once we have this expression for TC we can complete the construction of $E(E)$ as above.

In either case, then, since $\phi(x)$ or $f(x)$ are given, it takes only 'ordinary' Cartesian geometry to construct the required curve $E(E)$

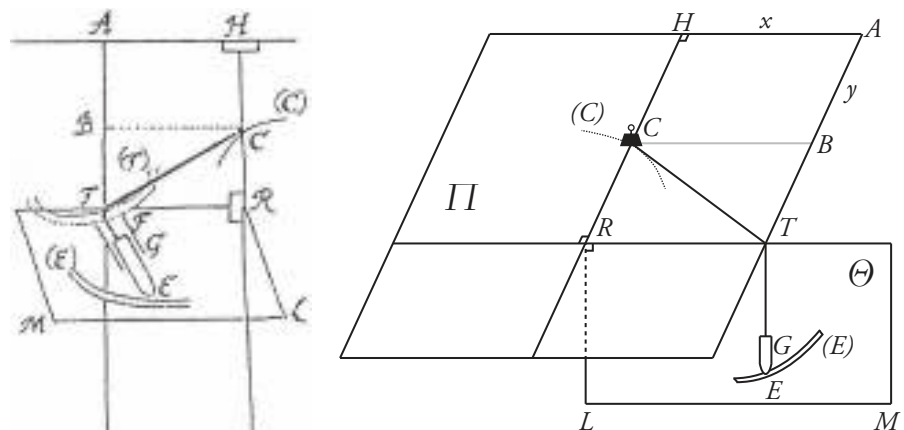


Figure 6 Leibniz's tractional-motion device for constructing the solution curve $C(C)$ of any inverse tangent problem. From [15], figure 3 (left), and my reproduction (right).

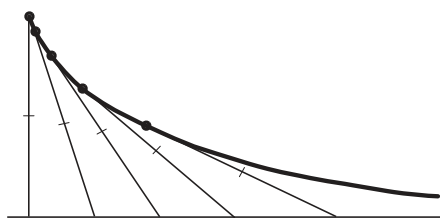


Figure 7 The tractrix is the curve traced by a weight dragged along a horizontal surface by a string whose other end moves along a straight line.

that will enable the curve $C(C)$ with the desired property to be traced. In particular, Leibniz's construction gives the solution to $dy/dx = f(x)$, where $f(x)$ is any previously constructed curve, while assuming nothing more than Cartesian geometry and a single-motion tracing procedure. In this way he enlarged the domain of constructible curves vastly beyond the algebraic curves admitted by Descartes, while still adhering very strictly to Descartes's requirement of single-motion tracing and to the Euclidean–Cartesian construction framework generally.

Construction of quadratures

Such was the purpose of Leibniz's paper. The confusion regarding the fundamental theorem arises from Leibniz's application to the problem of the construction of quadratures, i.e., the problem of constructing a line segment whose length equals a given area, or integral. This is quite clearly the guiding idea of the whole paper, whose title promises "a general construction of all quadratures by motion". In other words, Leibniz wants to clarify that his construction not only solves any differential equation $dy/dx = f(x)$ but also any integral $\int_a^b f(x)dx$. This problem readily reduces to the above as follows

(Figure 8). Let $AF = x$ and let $f(x) = FH$ be the function whose integral is to be constructed. As above, construct a curve $C(C)$ such that its slope $dy/dx = TB/BC$ always equals $f(x)$. Then it follows that $FC = y = \int f(x)dx = AFHA$, so the quadrature has been constructed as a line segment, as required.

Since the tractional construction itself is *prima facie* concerned with constructing curves with given tangent properties, a casual reader of Leibniz's paper might have missed that it can also be used to find a line segment equal to a given integral had Leibniz not taken the trouble to spell out this application specifically and even note it in the title of the paper. This construction of quadratures was a major problem at the time, quite apart from differential equations, so it was certainly worth highlighting.

Leibniz's statement reevaluated

It is in the course of this explanation that we encounter Leibniz's sentence quoted above that seemed to be a statement of the fundamental theorem: "I shall now show that the general problem of quadratures can be reduced to the finding of a curve that has a given law of tangency." Now that we understand its context we see that to Leibniz this is a lemma linking the problem of quadratures to the tractional construction. It is not a fundamental theorem telling you to find an antiderivative F whenever you seek an integral $\int f dx$. Rather it is a specification of how the tractional motion needs to be set up to produce the values of $\int f dx$ as the y -coordinates of the tractional curve $C(C)$.

It is true that Leibniz's argument here concerns the relation between the differential

equation $dy/dx = f(x)$ and the integral $\int_a^b f(x)dx$, and as such, to be sure, it is closely related to the fundamental theorem of calculus. But Leibniz's point is a much more specific one, and one very much specifically tailored to the setup of his tractional construction. It would be a big mistake, therefore, to forget about the context of the tractional construction and cut out the few lines relating to the fundamental theorem and study them as if they were meant as a proof of this general theorem. Yet this is precisely the mistake that occurs so often in the historical literature.

Leibniz would certainly consider it madness to apply his construction to an integral $\int f(x)dx$ for which an explicit antiderivative $F(x)$ can be found. Indeed, Leibniz says precisely this in a letter: "One cannot determine by this construction whether the sought quadrature can not also be carried out by common geometry; when this is possible one does not need the extraordinary route." [17, p. 694] In such cases he would simply go straight to $F(x)$, as he had done many times in print already before his 1693 paper.

Cases where $F(x)$ is algebraic had long been done and dusted, and logarithmic and trigonometric functions were also becoming common currency at this time. Certainly Leibniz would not spill ink in his 1693 paper on proving the fundamental theorem for use on such trivial cases.

The problem that interested him was integrals such as $\int \sqrt{1+x^4}dx$, or the corresponding differential equation $dy = \sqrt{1+x^4}dx$. Indeed, whenever Leibniz refers back to his paper it is certainly never with reference to the fundamental theorem, but rather always as "my general construction of quadratures by traction" [18, p. 127], i.e., as showing that the tractional device "serves to construct all quadratures by an exact and regular motion" [16, p. 665]. Again, Leibniz [19, p. 157] explains that "I wished for the tractional method to be applied to the inversions of tangents [i.e., solving differential equations] rather than to quadratures where we already have [a method, namely finding $F(x)$]."

Conclusion

So, in conclusion, the irony of the story is that what is commonly referred to as Leibniz's proof of the fundamental theorem of calculus is actually his strategy for what to do when the theorem is of no use (in that one cannot find $F(x)$).

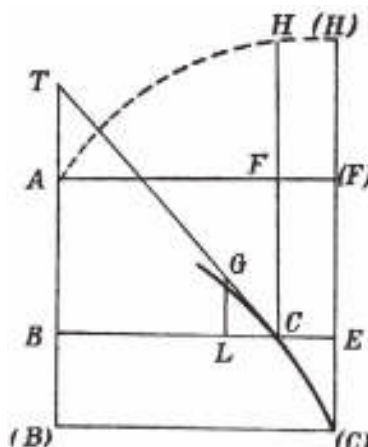
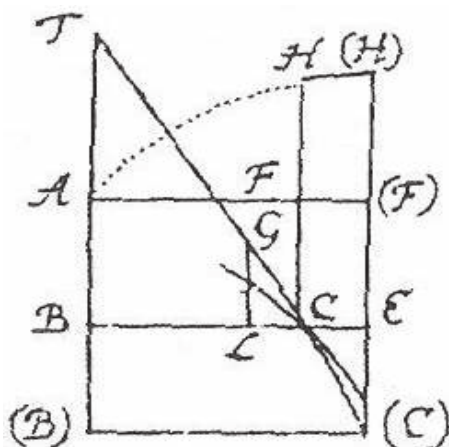


Figure 8 Leibniz's reduction of quadratures to rectifications. From [15], Figure 2, and as reproduced in [20, p. 31].

References

- 1 Horst R. Beyer, *Calculus and Analysis: A Combined Approach*, Wiley, 2010.
- 2 Henk J.M. Bos, *Redefining Geometrical Exactness: Descartes' Transformation of the Early Modern Concept of Construction*, Springer, 2001.
- 3 David M. Bressoud, Historical Reflections on Teaching the Fundamental Theorem of Integral Calculus, *American Mathematical Monthly* 118(2) (2011), 99–115.
- 4 Ronald S. Calinger, ed., *Classics of Mathematics*, Moore, 1982.
- 5 Roger L. Cooke, *The History of Mathematics: A Brief Course*, 2nd ed., Wiley-Interscience, 2005.
- 6 René Descartes, *La Géométrie*, Leiden, 1637.
- 7 René Descartes, *The Geometry of René Descartes*, Dover, 1954.
- 8 C.H. Edwards Jr., *The Historical Development of the Calculus*, Springer, 1979.
- 9 Enrique A. González-Velasco, *Journey through Mathematics: Creative Episodes in its History*, Springer, 2011.
- 10 Ivor Grattan-Guinness, ed., *Landmark Writings in Western Mathematics 1640–1940*, Elsevier, 2005.
- 11 Alexander J. Hahn, *Basic Calculus: From Archimedes to Newton to its Role in Science*, Springer, 1998.
- 12 Victor J. Katz, *A History of Mathematics: An Introduction*, 2nd ed., Addison-Wesley, 1998.
- 13 Reinhard Laubenbacher and David Pengelley, *Mathematical Expeditions: Chronicles by the Explorers*, Springer, 1999.
- 14 G.W. Leibniz, De geometria recondita et analysi indivisibilium atque infinitorum, *Acta Eruditorum* (June 1686), 292–300.
- 15 G.W. Leibniz, Supplementum geometriae dimensoriae, seu generalissima omnium Tetragonismorum effectio per motum: similiterque multiplex constructio lineae ex data tangentium conditione, *Acta Eruditorum* (September 1693), 385–392.
- 16 G.W. Leibniz, Letter to Huygens, 1 December 1693, in [21, Vol. 5, Nr. 199].
- 17 G.W. Leibniz, Letter to R.C. von Bodenhausen, 20 December 1693, in [21, Vol. 5, Nr. 201].
- 18 G.W. Leibniz, Letter to Huygens, 12 June 1694, in [21, Vol. 6, Nr. 45].
- 19 G.W. Leibniz, Letter to Johann Bernoulli, 6 October 1696, in [21, Vol. 7, Nr. 39].
- 20 G.W. Leibniz, *Analysis des Unendlichen*, edited by Gerhard Kowalewski, Ostwald's Klassiker der exakten Wissenschaften Nr. 162, Engelmann, Leipzig, 1908.
- 21 G.W. Leibniz, *Sämtliche Schriften und Briefe. Reihe III: Mathematischer, naturwissenschaftlicher und technischer Briefwechsel*, Leibniz-Archiv, Hannover, 1976–, leibniz-edition.de.
- 22 G.W. Leibniz, *La Naissance Du Calcul Différentiel: 26 Articles Des Acta Eruditorum*, edited by Marc Parmentier, Vrin, 1995.
- 23 G.W. Leibniz, *Die Mathematischen Zeitschriften-artikel*, edited by H.-J. Heß and M.-L. Babin, George Olms Verlag, 2011.
- 24 M. Nauenberg, Barrow, Leibniz and the geometrical proof of the fundamental theorem of the calculus, *Annals of science* 71(3) (2014), 335–354.
- 25 Zbigniew H. Nitecki, *Calculus Deconstructed: A Second Course in First-Year Calculus*, Mathematical Association of America, 2009.
- 26 Dirk Struik, *A Source Book in Mathematics, 1200–1800*, Harvard University Press, 1969.
- 27 Klaus Thomas Volkert, *Geschichte der Analysis*, Wissenschaftsverlag, 1988.

De derde wet

| Solicited Comments

Het onderstaande is een reactie op een nieuwsbericht dat verscheen in het NAW-decembernummer van 2014.

Pieter Mullender

Het bericht in het decembernummer dat Pieter Mullender in juli van dit jaar was overleden, bracht mij terug naar juni 1951 toen ik eindexamen gymnasium deed in Hengelo (O). Mullender was de gecommitteerde voor de wiskundevakken. Hij was toen lector, terwijl gecommitteerden op gymnasia in die tijd vaak hoogleraren waren; een paar jaar later werd hij inderdaad hoogleraar. Mijn cijfer 9 voor het schriftelijk examen werd door het mondeling een 7; ik had twee figuren die elkaars spiegelbeeld waren, congruent genoemd. Ik voelde me wat bekocht, maar dat duurde niet lang; ik slaagde met heel behoorlijke cijfers. Mullender was maar 15 jaar ouder dan ik.

De tikfout 'emiraat' in plaats van emeritaat in hetzelfde bericht doet me dan weer denken aan N.G. (Dick) de Bruijn, die iets jonger was dan Mullender, maar wat eerder, in 1943, ook bij Koksma promoveerde. De Bruijn noemde het zaaltje waar gepensioneerde wiskundehoogleraren van de TU Eindhoven waren gehuisvest, 'de verenigde emeritaten'.

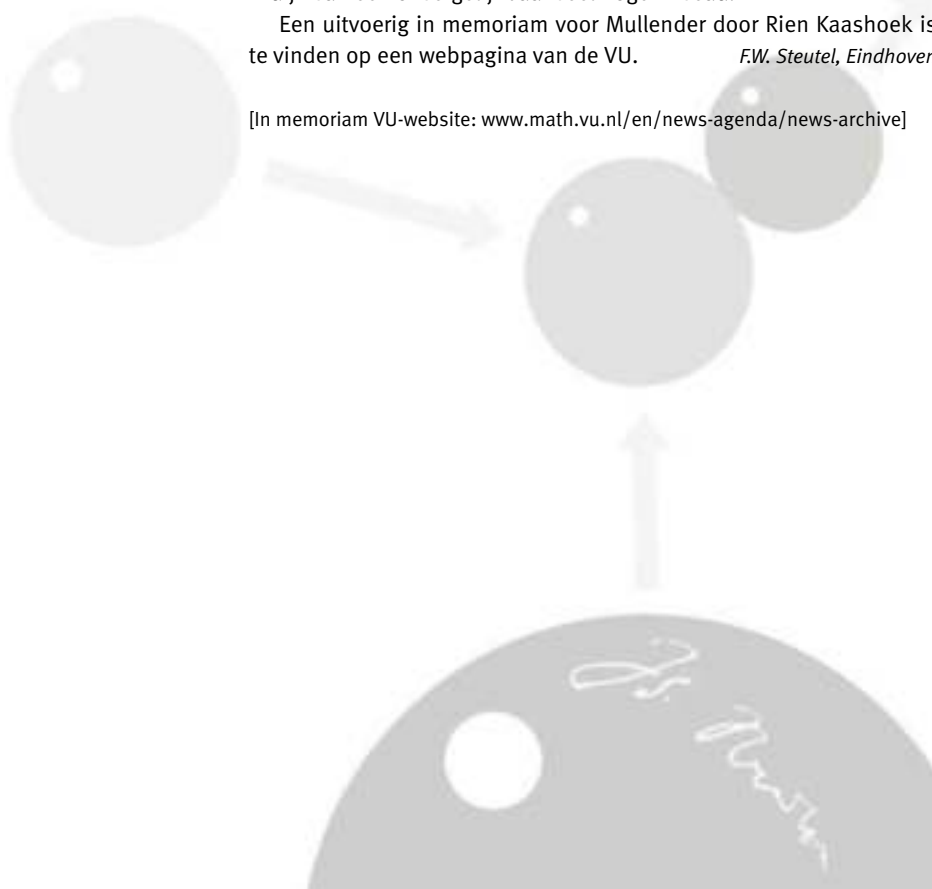
Omdat mijn eerste promovendus, met wie ik een boek schreef, daar later werkte, ging ik midden jaren zeventig regelmatig naar de VU. Daar kwam ik soms een zeer kromgegroeide I.A. Diepenhorst tegen, die maar weinig ouder was dan Mullender; ik herinner me niet die daar gezien te hebben. Volgens het, niet altijd complete, Mathematics Genealogy Project had Mullender twee promovendi, een in 1960 en een in 1984. Na zijn pensionering heeft hij niet veel meer aan wiskunde gedaan; hij is gaan schilderen; zijn niet echt overtuigende werken zijn te vinden op het internet. Ook hier is een parallel met De Bruijn, die met wisselend succes beeldhouwde. Als wiskundige was de zeer productieve De Bruijn van een onvergelijkbaar veel hoger niveau.

Een uitvoerig in memoriam voor Mullender door Rien Kaashoek is te vinden op een webpagina van de VU. *F.W. Steutel, Eindhoven*

[In memoriam VU-website: www.math.vu.nl/en/news-agenda/news-archive]

In deze rubriek worden lezers door de redactie uitgenodigd te reageren op recent in dit blad verschenen artikelen.

derdewet@nieuwarchief.nl



Johan van Benthem

ILLC

University of Amsterdam

j.vanbenthem@uva.nl

Valedictory Lecture A personal view of logic

Fanning the flames

On 26 September 2014, Johan van Benthem, Professor of Pure and Applied Logic, delivered his valedictory lecture in the auditorium of the University of Amsterdam. Modern logic is the broad, exact science of information directed behaviour that plays an important role in connecting the humanities, exact sciences and social sciences at the university, and which forms the bedrock of our information society. In his valedictory lecture, van Benthem illustrates the creation of this scientific field and the most important future challenges facing it.

When people hear that you are a logician, their eyes start looking for the nearest exit. But now and then, there are creatures like me, whose encounter with logic changed their life. Already in high school, I liked rules and formulas, which I jotted down in a special notebook. And when I arrived at the University of Amsterdam in its revolutionary Sixties, I loved to engage in argumentation about the future shape of Dutch society — to be determined of course by us, the student elite. My argumentative skills were not particularly successful, however, and I well remember the sinking feeling of slowly, but inexorably talking myself into a corner with an indefensible claim. A kind fellow student advised

me to buy a book about logic, and that is what I did. (In Figure 1 I add three pictures of what the species of logicians looked like to me at the time. The third picture is of my inspiring first teacher in Amsterdam, Else Barth.)

Reasoning patterns

What I bought was a pocket edition of a nineteenth century classic by William Stanley Jevons, available on the internet today. And what I learnt was that reasoning has *patterns*, and that some patterns are correct, while others are not.

Consider the following statement, where capital letters stand for arbitrary sentences:

If B, then not-H,

and ask yourself if it follows logically that

If not-B, then H.

You might be tempted to agree. But what if the doctor on duty in the emergency room where you have just been rushed in after a collapse, is trying to figure out what is wrong with you? Let us say that, if the cause is in your brain, it is not in your heart — but nothing is wrong with your brain scan. Is it correct to conclude that something is the matter with your heart? I do not think so, and neither should you. For myself, I would prefer a doctor whose reasoning goes differently, using a correct reasoning pattern like this:

from if B, then not-H to if H, then not-B.

Of course there is more to proper diagnosis than just these few rules — but at least, on the lighter side, you now see that logical correctness may be a matter of life or death.

Explaining and teaching

In general, logical reasoning patterns lie behind how we find the truth, and explain it to others, and ourselves. I always felt a need to explain things I think I understood as a private test. As a student, I would walk at night in the Lairesestraat in Amsterdam talking to myself to explain what I had learnt from the day's classes. Again, people around me quickened their step and increased their distance — and this time, even without my having told them that I was a logician.



Figure 1 Chrysippos of Soli, W. Stanley Jevons and Else Barth.



Johan van Benthem

of reason

Logic across cultures

In line with the thread of my own personal experiences, most of this lecture will follow the Western mainstream history of the discipline of logic. However, it is important to emphasize that a sensitivity to reasoning patterns and their valid laws is not a Western preoccupation: it is a talent that has occurred quite early across different cultures. Indeed, we live in exciting times where many new historical sources for our field are coming to light, as archives yield their secrets. Logic stands in a worldwide movement including ancient Greece, China, India, and the Islamic tradition, as shown in the efforts of a growing number of scholars today.

To complement the dominant facebook of the field shown earlier, I add in Figure 2 some pictures of major logicians in these other cultural streams. One day, Mōzī, Dignāga, and Ibn-Sīnā may be names that are as familiar to the intellectual public as Aristotle.¹

Reasoning and information

But logic is more than seeing patterns and improving reasoning practice. With the study of correctness and incorrectness, we enter a much broader world of exact scientific ideas. One of these ideas is the ubiquitous notion of *information*.

In principle, there are exactly four ways the world might be given the above statements B and H :

$$+B + H, +B - H, -B + H, -B - H.$$

If we then learn the above rule *if B, then not H*,

we lose the possibility that $+B + H$. That is, we eliminate one out of the four options to obtain the information

$$+B - H, -B + H, -B - H.$$

If we now learn that *not-B*, we lose the further possibility $+B - H$, but two still remain:

$$-B + H, -B - H.$$

This final state does not have enough information to determine that H is the case.

You can check for yourself how this scenario of successive information updates differs from that for the logically valid inference from *if B, then not H* to *if H, then not B*.

Here the information does force the conclusion *not-B* through the following stages:

- i. $+B + H, +B - H, -B + H, -B - H$;
- ii. $+B - H, -B + H, -B - H$
(after learning that *if B, then not H*);
- iii. $-B + H$ (after learning that H).

So, reasoning is tied up with information, the lubricant of our whole society, and logic suddenly starts looking like a much bigger field than you might have thought.

Logical systems

And there is still more than reasoning patterns and their underlying ideas. Quickly, I learnt that patterns form larger *systems*, that can be studied on their own intrinsic merits — all the way back to Aristotle's system of syllogistic inference. Logical systems have mathematical structure, which leads to new avenues of its own.



Figure 2 Mōzī, Dignāga and Ibn-Sīnā.

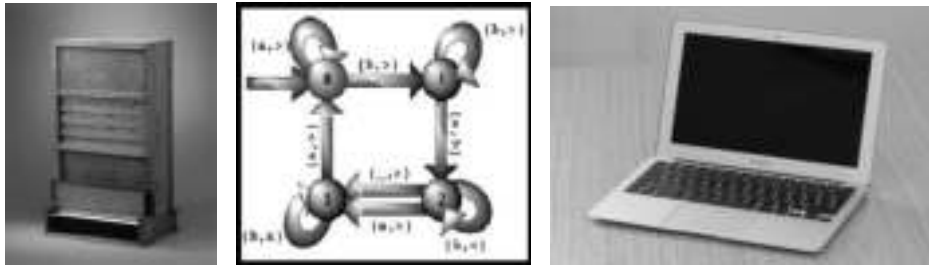


Figure 3 Logical piano, Turing machine and Macbook Air.

Reasoning and computation

The criterion for correctness or incorrectness of simple rules like those I gave for implication and negation is manipulating the ‘truth tables’ of basic logic, and thus reasoning gets tied to mathematical structures in *computation*. This is a general thread in the history of ideas: reasoning is connected to binary arithmetic, or as Hobbes said: “Reasoning is reckoning.” And once we see this computational angle in its general light, the idea emerges naturally, already in the Middle Ages, that reasoning might be done by machines, provided we find suitable logical languages for them to work with. The first picture in Figure 3 is Stanley Jevons’ ‘logical piano’, one of the pioneering attempts at creating mechanical computing devices.²

The second picture in Figure 3 is Turing’s fundamental model of computation, and the third is an object that has swept the world in recent years. There is a straight historical road from logic to computer science, and the information technology pervading our lives.

This mixture of reasoning, information, and computation is the thriving conglomerate of logic, philosophy, mathematics, linguistics, and computer science that has put logic firmly at the crossroads of the modern university, and our modern information society. This, indeed, is the world of the Amsterdam Institute for Logic, Language and Computation where I have spent so much of my academic career.

Logical systems and their theory

As we have seen by now, logical patterns and systems capture major ideas that can be analysed and developed as such. And the great engine for pursuing that analysis and development has been the *mathematical turn* of modern logic since the nineteenth century, turning it into an exact discipline that unleashes the power of mathematical precision to study systems of reasoning and everything that comes in their wake. This is how modern logic works, and nothing that I will say in the remainder of this lecture about

broadening the scope of the discipline is intended to depart from this methodology.

Paradoxes and foundational theorems

In particular, the power of mathematical thinking allowed the great logicians of the Thirties to reflect on the basic nature of reasoning itself, both its strengths and its limitations. A celebrated instance of this style of ‘confronting reason with itself’, to use a sonorous philosophical phrase, are Gödel’s Incompleteness Theorems that capture surprising essential features of the mathematical method par excellence, namely, *deductive proof*.

Consider one of the oldest instances of logical thinking that has come down to us in various cultures, from ancient Greece to ancient China, ‘self-referential’ statements that talk about themselves. A famous case is the Liar Paradox from Antiquity where someone asserts that the very statement she is making is false. But for here, think of a related but subtly different statement L that says about itself that it cannot be proved:

L if and only if L is not provable,

or in Amsterdam style formula notation:³

$$L \leftrightarrow \neg \Box L.$$

Languages have several ways of achieving such self-reference. If you want a dramatic historical instance, the Hebrew God told the

people seeking his essence:

“I am the unknowable one.”⁴

However, our logical intellect does not stop at such a statement, and the liar sentence L admits mathematical reasoning with startling consequences.

Here is a piece of this reasoning at the edge of reason. It is well within your capacities to appreciate — assuming the famous motto of John Perry and Ken Taylor’s radio show Philosophy Talk: “the only thing that we do *not* question is the hearers’ intelligence.”

Let us draw some quick consequences in a first, rather simple pass:

Gödel lite. Is L true or false? If we assume that L is false, then L is provable.⁵ But if L is provable, then L is true: and we have contradicted our assumption. We conclude from this piece of reasoning that L cannot be false. In other words: L is true. But given what L says, it follows that L is a *true statement that is unprovable*.

The pictures in Figure 4 show some resounding names in this world of thought.

Living at the edge of reason

This simple piece of reasoning lies at the heart of Gödel’s famous First Incompleteness Theorem. But it is clearly just a very first pass, which invites questions and refinement at once. Indeed, the art of ‘living dangerously’ displayed here is another major attraction of logic, especially to minds of a somewhat absolutist bent, and it involves a continuous practice of refining our styles of thinking.

To turn the screws of exactness a little bit more, how reasonable, really, was the above step where we assumed that provable statements L are true? Does not that represent an unwarranted confidence in the reliability of our proof methods? The great logicians working in the foundations of mathematics in



Figure 4 Euclid’s *Elements*, Kurt Gödel and Martin Löb.



Figure 5 Frege, C.S. Peirce, Brouwer and Beth.

the Thirties such as Gödel, Hilbert and Gentzen thought so, and dropped this assumption in their analysis of the power of proof. Let me sketch a more sophisticated version of Gödel's argument for you then:

Assume we have $\Box(L \leftrightarrow \neg\Box L)$ (*). Next, assume that $\Box L$. Then using (*), we can prove that $\Box\neg\Box L$. But at the same time, inspecting the proof for L that exists by $\Box L$, we can prove $\Box\Box L$. Combining the two, a contradiction $\neg\Box L \& \Box L$ is provable. So, our proof system is inconsistent, and unreliable.

This time our conclusion gets more sophisticated. *If our mathematical proof methods are reliable*, then there have got to be true unprovable statements beyond their reach.

The process of refining our understanding of truth, proof, and reliability is still going on. Masters of the art included my thesis supervisor Martin Löb, Sergei Artemov, Dick de Jongh, and Albert Visser — and still last year, I read surprising delightful new perspectives on the mechanics of Gödel's reasoning discovered by Lev Beklemishev at the Steklov Institute in Moscow. We can keep reflecting on our understanding of mathematical proof, and go deeper and deeper, until the mind reels.

Science, religion, or common sense?

With all this, we are at the heart of classical logic and foundations of mathematics, and its deep results that keep inspiring religious awe in every new generation of students worldwide that gets exposed to logic. Yet, this depth comes with a somewhat narrow focus on mathematical proof, a very specialized human activity. The methods are mathematical, the topic is mathematics.

But I started this lecture in our daily reasoning practice, and want to return there eventually. As a student, I had to memorize a list of differences between scientific and common sense reasoning — with the former supposed to be much deeper and better than the latter. But the striking thing to me is the very opposite. The logical steps for Gödel's Theorem are the same ones that we employ in daily life, and this observation fits the facts of human cognitive evolution, where bands of hunters with survival skills eventually produced the greatest art and science, all using the same brain.

The true story of modern logic then is as follows. The methods remain mathematical, but the topic becomes much broader: in principle, any aspect of the human intellect. The true facebook of logic, then, consists of both mathematicians and others looking beyond, forming pairs as in the pictures of contemporaries, see Figure 5.

Frege was contemporaneous with C.S. Peirce, an independent inventor of first-order logic with a much broader agenda in philosophy, semiotics, psychology, and so on, which we are only beginning to carry out today. Our national mathematical icon L.E.J. Brouwer was a contemporary of E.W. Beth, a broad logician and philosopher, and it is their tandem that created the Dutch School in logic that we know today. It would be easy to multiply examples of such facebook pairs all over the history of logic.

So, here is where this lecture is going to go, charting further aspects of what our discipline is, or can become. Eventually, I want to understand the laws of what actual *reasoning agents* can and should do: in terms of knowledge, action, learning, making mistakes, and

all of that in mutual social dependencies. And while setting our bounds that widely, I still hope to convince you that we are doing logic.

But before we enter this enticing Realm of Agency, let me first talk about the personal intellectual development that took me there. I will take things slowly, introducing new ideas one by one.

Proof as seeing and as doing

I start with two essential aspects of mathematical proofs that have occurred entangled ever since Euclid's *Elements* in Antiquity. A proof is *evidence* that a theorem is true: that is, it provides information — but at the same time, it is a *method* for computing solutions and creating situations where the theorem holds. The same duality pervades general learning and knowledge, where 'knowing that' and 'knowing how' are deeply intertwined. For instance, we have truly learnt a language when we recognize when given sentences are correct, but are *also* able to produce discourse that makes sense, and the same is true for logical systems. Thus, studying information also means studying action, and vice versa. The two notions are two sides of the same coin. How can logic do justice to this deep duality?

Reasoning about information and action

Logicians have long studied reasoning about both information and action — though they may come to these pursuits from different academic fields. Logical systems analysing information often come from the philosophical study of knowledge and belief, but in recent years they have entered computer science and economics. 'Dynamic logics' of action come from computer science, in the



Figure 6 Hintikka, Dynamic Logic, Milner and Aumann.

analysis of programs and processes, but have spread to philosophy and linguistics. These contacts have blossomed over the years, and taken their practitioners to Nobel Prizes, Turing Awards, or their equivalents in philosophy. The four pictures in Figure 6 present a gallery of relevant names and topics ranging from philosophy through computer science to game theory.

Modal logic

The abstract common structure of information and action that underlies large parts of philosophy, computer science, or game theory is studied in a technical field called *modal logic*. A modal notion states how things might be, insofar as not ruled out by our information — or how things might become, given the actions at our disposal. Very similar laws govern such notions. One example is this:

Distribution Law $\Box(A \rightarrow B) \rightarrow (\Box A \rightarrow \Box B)$

In terms of information, this simple principle expresses that

if I have evidence for $A \rightarrow B$
as well as evidence for A ,
then I also have evidence for B .⁶

In terms of actions, the same principle says that

if the outcomes of an action satisfy $A \rightarrow B$,
and they also satisfy A ,
then all outcomes of that action satisfy B .

There are many other, and technically much more sophisticated, laws of modal logic, but the simple example of the Distribution Law will have to do here.⁷

Modal reasoning patterns have been a focus in my work over the years, which offers a systematic study of modal laws, but also of connections between modal patterns and other basic logical systems, measured by semantic invariances such as ‘bisimulation’. Some sources are depicted in the sequence of four books in Figure 7.

These matters can be found in any good textbook, but let me stress one point. While modal logic is ‘applied’ as a theory of information and action, it is at the same time ‘pure’ as a study of basic aspects of reasoning that had not come to light before, and thus it falls squarely within the mathematical methodology that I have emphasized.⁸

Information-driven agency

But let us now move beyond the agenda stated so far. For a start, what about the actors getting the information and engaging in actions? What do they do, and why? My next step toward the study of agency is an arena where knowledge and action meet naturally, the basic *informational acts* themselves.

Basic informational acts

While reasoning may seem the only informational action of interest to logicians, in reality, inference steps usually occur together with other equally fundamental acts that make information flow. For instance, the following scenario plays out day by day in Amsterdam cafés.

The Restaurant. Three people order three drinks: water, beer, and wine. A new waiter comes to the table carrying three glasses. There are six ways these drinks could be distributed over the customers, and here is what you will see happen.

The waiter *asks* who has the beer, say, and after hearing the answer, puts down that glass in the right place. This reduces his uncertainty from the initial six options to two, much as in our example of diagnostic rules. The waiter then asks a second question, and puts, say, the glass of water. Now his options are down to one, and he does not ask any more, but can *infer* who has the wine, putting it down without a question.

Thus, basic informational acts include, at least, both questions and inferences. But there is more. As it happens, a broad view of informational action was already present with the ancient Chinese logicians in the Mohist school, active from around 500 BC. It stressed the interplay of three sources that come together in producing information:

知闻说亲

(zhi wen shuo qin)

an elegant compact statement which says roughly, in a more modern phrasing, that “knowledge comes from three sources: hearing from others, proof, or experience”.

Here the third category of ‘experience’ is one more major source of information, in daily life as well as in the natural sciences: viz. just



Figure 7 Dissertation, Monograph, Handbook and Textbook.

observing things.⁹ Observation is what a logical detective like Sherlock Holmes needs in addition to pure deduction, and it is the well-spring of the empirical sciences, on a par with mathematical proof.

The pictures in Figure 8 represent a restaurant, a Mohist dialogue, Sherlock Holmes at work, and finally, a card puzzle with social reasoning that is often used in my circles.

Logic of information change

My own view of logic has come to resemble this ancient paradigm. We must study all basic informational acts on a par: inference, observation, and communication, and their interplay in how we deliberate, plan, and decide. A major test for such a venture is a search for formal laws governing these additional informational actions that retain the precision logicians are used to. Here is one:

$$[!\varphi]K_i\psi \leftrightarrow (\varphi \rightarrow K_i(\varphi \rightarrow [!\varphi]\psi))$$

This law describes the new knowledge an agent i will possess after having received the information that φ is the case.¹⁰ It does so in terms of the ‘conditional knowledge’ that the agent had before the new information $!\varphi$ came in. Typically, it is ‘recursion equations’ like this law that drive the logical study of information-driven agency.

As an aside, please note how the above principle shows the cooperation of ideas from different fields: the modality $K_i\psi$ for knowledge in this law comes from philosophical logic, while the dynamic modality $[!\varphi]$ for action comes from logics of computation.

Still, we are only at the start of a logical study of agency. The actors in the above could still be instinctive devices recording information from the environment, like the bees sucking up nectar in the flowers in my garden. So let me turn to further intelligent activities that

rational agents engage in, of which I will mention a few in this lecture.

Consistency?

The first new aspect of agency concerns the quest for certainty we saw earlier. The founding fathers of modern logic were concerned with the power of proof, and its reliability. Is *consistency* our ultimate goal? Gottlob Frege thought so, saying that mathematics would ‘crumble like a house of cards’ if a contradiction were to arise.¹¹ But there can be logical grandeur in fragility, being wrong, and making a volte face.

Learning is correction

As I said before, proofs give reasons, and a rational agent can be described as someone driven by reasons.¹² But at this point, I part company with the original foundational enterprise. Our drivers should be *good* reasons — but there is no guarantee that they are correct. We make mistakes and often form incorrect *beliefs*, and the task of logic cannot be to prevent that from happening once and for all. Indeed, our beliefs and expectations, even when wrong, represent a creative human talent in navigating a world where knowledge is a currency that is often unavailable.

But this non-eliminable, and perhaps even desirable, potential for error comes with another creative talent, our ability to *correct ourselves* when beliefs are shown wrong by an observation, or when theories explode after a contradiction comes to light. There is no house of cards that crumbles: indeed, human intelligence shows at its finest in a clever recovery after we have been shown to be incorrect. So, a true logic of rational agency tolerates errors and highlights methods for revising beliefs. What this points at more generally is an intimate connection between reasoning and *learning*.

While all this may be true, are beliefs and their revision a fit theme for logic? As it happens, thanks to the work of pioneers like Peter Gärdenfors and others, we know that this more delicate error-tolerant process of adjusting to new information still satisfies logical laws, that now involve operators for belief and acts of belief revision. Of such laws, I just display two at this point, merely in order to show you that, once again, we need not sacrifice the mathematical precision of our foundationalist founding fathers:

$$[!\varphi]B_i\psi \leftrightarrow (\varphi \rightarrow B_i\varphi[!\varphi]\psi),$$

$$\begin{aligned} [\uparrow\varphi]B^{\psi}\chi &\leftrightarrow \\ (E(\varphi \wedge [\uparrow\varphi]\psi) \wedge B^{\varphi \wedge [\uparrow\varphi]\psi}[\uparrow\varphi]\chi) \\ \vee (\neg E(\varphi \wedge [\uparrow\varphi]\psi) \wedge B^{[\uparrow\varphi]\psi}[\uparrow\varphi]\chi). \end{aligned}$$

Such laws describe which new beliefs arise as new information comes in. This can now happen in two forms: witness the syntax of our two formulas. Changes can be triggered by a ‘hard’ totally reliable event $!\varphi$ removing all $\neg\varphi$ -situations for good, but there is also a more ‘soft’ plausibility-changing event $\uparrow\varphi$ that keeps all situations, while putting those with $\neg\varphi$ on top of those with φ . I am not going to try to explain to you any further what the above formulas say. Their typography may well scare you. These laws of learning are clearly more complex than the simple rules of reasoning that I started with. But then I never said our broader logical skills are simple!

Let me just state the upshot. Correctness forms a tandem with correction — and as some philosophers have said long ago, logic is also about learning from errors.¹³

My favourite analogy for this comes again from health. Creating a World free from disease seems a sterile and unappealing goal: much more impressive is the dynamics of the human *immune system* that deals with chal-



Figure 8 A restaurant, a Mohist dialogue, Sherlock Holmes and a card puzzle with social reasoning.

enges as they occur. To me, logic is not the guardian of consistency proofs, but rather,

“the immune system of the mind”.¹⁴

In terms of our initial example, maybe logicians themselves are doctors of the mind.

Even so, I should not play up the difference with foundational research too much. There might well be very interesting extensions of the classical theorems by Gödel or Turing when, in addition to what is known with total certainty, we also explicitly represent agent’s reason-based, but fallible beliefs about what is true and provable.¹⁵

Many minds and social interaction

Beliefs may need correction for all three reasons in the earlier picture of information dynamics: a surprising observation, a paradoxical inference, or also, being contradicted by somebody else. This leads me to my next fundamental theme in the logical study of agency, which can be summarized as:

“intelligence seldom comes alone”.

My example of argumentation was a social scenario where different agents interact. This is significant. Rational behaviour is a *many-mind talent* rather than an isolated skill — just as in modern science, the key is many-body interactions, not single bodies in their natural place, as in Aristotle’s physics. This social theme of deliberation and argumentation runs throughout the history of logic, in both Greek and non-Western traditions. Logic is also about how we convince, refute, or otherwise influence others.

Just as earlier, this social dimension has two dual aspects: *information*, and *action*.

Theory of mind

The social aspect of information involves a crucial human ability often called ‘Theory of Mind’ where we reason about the facts, but also about other people’s information, what they know about the facts and about us, and so on. Theory of Mind underlies many informational acts. My asking you a *question* normally conveys I do not know the answer, and also that I believe you might know the answer.¹⁶

Social behaviour is kept in place by a web of such complex iterated information about others that can be studied as before. Again, it has been found that crucial properties of rational social equilibrium then show up in logical laws. For instance, a proposition φ is

‘common knowledge’ in a group of agents G , i.e., it is known up to any depth of iteration (written as $C_G\varphi$), if and only if the following equivalence holds:

$$C_G\varphi \leftrightarrow (\varphi \wedge E_G C_G\varphi),$$

where an operator $E_G\psi$ says that everybody in the group G knows that ψ is the case. This looks like a vicious circle that foolishly tries to define common knowledge $C_G\varphi$ in terms of that notion itself, but in fact, the above equivalence is a ‘luscious circle’ where the notion at issue is well-defined, and supports precise reasoning.^{17 18}

The program of logical dynamics

The preceding samples suggest a more systematic logical study of information-driven social agency. Over the past decades it has become clear that the methods of logic are well up to this agenda extension, creating systems with beautiful laws, not just for inferences, but also observations, questions, correction, learning, and social interaction. And in doing so, the grand style of our founding fathers does not lose its lustre. Its thinking about strengths and limitations also applies to what diverse sources of information do for rational agents.

In what follows, I discuss one current highlight of this ‘Logical Dynamics’ research program, as exemplified in the depicted three books in Figure 9, from 1996, 2011, and 2014, respectively.

Games

Social action is at the heart of the fast-developing area of logic and strategic behaviour in *games*. Our actions toward each other congregate to form longer-term *strategies*, where what I choose to do next depends

on what you do now, and so on. For examples close to logic, just think of the timing of playing your cards in argumentation, or your points in giving a valedictory lecture. The logical laws of strategies or plans form a natural continuation of the earlier-mentioned logics of actions, and they often concern situations where strategies are in some sort of rational *equilibrium*, meaning that no agent has an incentive for deviating from her current plan.

Only one such law will have to serve as an example here, again mostly just in display. It is very similar qua form to the earlier equivalence for common knowledge, and it describes when someone has a strategy for playing a game G that always achieves the effect φ (this is written here as $\{G^*\}\varphi$) in terms of φ ’s being true and what the player can achieve by her currently available moves (the latter ability is written as $\{G\}$):

$$\{G^*\}\varphi \leftrightarrow (\varphi \wedge \{G\}\{G^*\}\varphi)$$

The analogy with the earlier law for knowledge again shows the fundamental duality of information and action that governs logic of agency. They are two sides of the same coin, and often, the shape of their mathematical laws reflects their similarities.

Harmony of information and desire

However, in the fundamental notion of game-theoretic equilibrium in behaviour between different agents, a new notion comes in sight that you might have thought far outside of the province of logic, namely, our preferences, intentions, and *desires*. We are not purely informational agents attuned to how the world is by knowledge or belief: everything we do is coloured by what we want, hope, fear, or regret. While some people view the latter as a realm of blind impulses and irrationality,



Figure 9 Three books by (and about) the author on logical dynamics.

nothing could be further from the truth. What we want to know explains how we seek information, and what we want to achieve determines our choices of actions. Instead of a separating barrier between these two realms, a logical perspective on rationality involves understanding their delicate *balance*.^{19 20}

A reasonable person keeps her information in harmony with her goals and desires, plus those of others. That quality shows in the activity of taking *decisions*, a growing interest among logicians. Incidentally, it is that broader balance of information, desires, and decisions that we should also seek to instil in a true academic education.

Logic in games

Noble causes indeed, but can logic offer any illumination in such a broad arena? What I can say for now is found in my new book *Logic in Games*. It covers two major lines of research, that have been developing over the past decades.

The first line is *logic of games*, being the study of the structure of games and everything that happens before, during and after their play by rational agents. There is a lot of intricate reasoning involved in plotting one's course in games, including the effects of one's actions, beliefs, preferences, and thinking about the kind of opponent (or fellow player) one is engaging with. This reasoning shows logical patterns that can be studied by the tools I have outlined in the above, including fixed-point laws for social equilibria where all players do the best they can. This line of research may be considered a joint offspring of logic, game theory, and modern computer science in its interactive-systems mode. Logic of games is now engendering a joint research program that might called 'Theory of Play', where we analyse the reasoning of players in games and related social scenarios — and sometimes, more ambitiously, try to design new games that implement desirable forms of social interaction.

But at the same time, there is a second intimate connection here, that may be called *logic as games*. As we have hinted at in the beginning of this lecture, paradigmatic logical phenomena such as argumentation *themselves* have a game-like character, and this metaphor can be made very precise. For instance, mathematical proofs have turned out to be very much like 'winning strategies' in suitably defined dialogue games. This game-theoretic view of logic itself also fits very naturally with modern views of computation, where the math-



Figure 10 Lecture notes and a monograph by the author on logic in games and a workshop on logics for strategic reasoning.

ematical paradigm is no longer isolated Turing machines, but networks of distributed processors that may cooperate or compete for available resources, and that may differ widely in their abilities and intentions.

Thus, once more, logical laws acquire the dual character we have seen several times. Viewed in an informational perspective, they tell us what the world is like. But in a dual dynamic procedural perspective, they express fundamental facts about strategies and equilibria in basic scenarios of interactive computation or social behaviour. This duality is not an annoying ambiguity, but rather the true face of logic as I see it.

The first two pictures in Figure 10 are lecture notes and a monograph of mine on both of the above interfaces of logic and games. The third picture points to a forthcoming book on logics for strategic reasoning, bringing together many communities, that I have edited with Sujata Ghosh and Rineke Verbrugge. This area is in full development.

What is next?

Ladies and gentlemen, I have shown you glimpses and glimmers of my dynamic program for logic as a broad study of information-driven social agency. As one of my readers put it nicely: "Classical logic handled the straight lines, now you want logic to also do the curves." Many of those curves are found in my own work and that of my colleagues and students. What is left for *me* to do?

The empirical facts

In my declining years, I sometimes stray from the glorious path of theory, and feel the pull of the brute *facts*. What I told you about information and agency can be seen as theory-bound and *normative*: this is the information that is truly available in the world, these are the conclusions that agents *should* draw, these are the game-theoretic equilibria they *should* at-

tain. In this classical perspective, the laws of logical dynamics have no descriptive content, and how people really act, presumably stupid and ill-mannered, can be left to cognitive or behavioural scientists.

But I fear that this common cosy analytic separation of the normative and descriptive reflects intellectual poverty rather than safety. Logical theory that ignores actual cognitive behaviour seems dangerously empty, lacking focus. On the other hand, I do not want to lose the potential of normative thinking either, that can help us *improve* performance, or design better ways of dealing with the world and with one another. For instance, my earlier emphasis on *correction* rather than guaranteed correctness of intelligent behaviour mixes these two motives. It moves closer to real human behaviour, but what we call successful 'correction' will still depend on norms. In other words, things are subtle and complex here, and I have no definitive line to offer.²¹

Let me give an example where these two pressures in my current life come to a head. You might feel that my broad program for logic is becoming a huge machinery of high mathematical complexity. Now there is a mathematical unity in logical methods that makes this complexity less daunting. But it is also good to realize that you are in fact good at everything that I have discussed in this lecture. Information flow, inference, correction, desires, and strategic behaviour occur together in that basic phenomenon that we all engage in all the time: *conversation*. Therefore, a natural empirical focus for my view of logic is natural language, the vehicle of conversation.

Natural languages and real brains

In the Eighties, I was deeply engaged in the logical analysis of natural language, and people sometimes ask where this love has gone. My work then was driven by static perspectives on language as reflecting the world, with

hardly a trace of dynamic agency. But natural language is a major interface where logical intuitions meet empirical facts. One project on my desk is the *language of agency*, studied in ways that will be familiar to you after my discussion of logic and games. One prong is a study of the patterns of agency that constitute language use, the other prong is the 'language of agency', and all the subtle ways that we use for describing what we do, plus the laws of the natural logic governing this natural language.²²

At the same time, I am involved with empirical research on language in the brain in our national Gravity Project 'Language in Interaction' where we will use logic-related games to see what really happens when people communicate, and how new language arises in that process. The four pictures displayed in Figure 11 show some of my earlier work on logic and natural language in the Eighties and Nineties, a Handbook on this interface, and a logo for the new project that also brings in empirical cognitive science.

Large numbers and probability

The second project waiting on my desk concerns another aspect of the facts, namely, that there are *so many* of them. Logical reasoning and rational agency play in a thin zone of conscious deliberation where what we think and decide matters. This zone is like the thin realm of our physical abilities, hemmed in between objects that are too large, or too small, for our hands to manipulate. Above us lies the statistical world of social behaviour and public

opinion, where each of our well-considered views is just a drop in the ocean. Below us is the statistical neural machinery of our brains, busily clicking away as an audience is listening to a speaker, but not under one's conscious control. Here logic meets *probability theory*, as two major mathematical paradigms with different views of what are relevant patterns. My own interest in this area today concerns interfaces between logical and dynamical systems theory as providing two views of these interfaces. There are many more good reasons for combining logic and probability, but the above may suffice for here.

The interface of logic and probability has a long history: even Stanley Jevons included it in his book. It is also very much in evidence at our institute the ILLC, and I believe that it poses many fundamental problems that go far beyond what we know so far.

Foundational results after all

Factual interests are by no means opposed to the classical *modus operandi* in logic. Some neuroscience intriguingly repeats ideals from the foundations of mathematics, such as a 'Universal Scanner' that tells us exactly what an experimental subject is thinking, a goal with a sinister whiff of Inquisition. Fortunately, one can modify famous arguments in logic to show that universal scanners are as impossible as universal decision methods for reasoning or computation.

Spreading the word in education

The best test of a proposed scientific perspec-

tive may not be whether it pleases one's senior colleagues, but whether it is *teachable* to audiences with fresh open minds, such as students, or the general public.

I wish I could jump into things here and start teaching you the topics of this lecture, but there are other resources for that, such as our on-line course *Logic in Action* that can be found at www.logicinaction.org.

I recommend a tour of this educational world, which we are still creating and testing out at several sites worldwide, including Amsterdam, Stanford, Beijing, and Seville. The following pictures illustrate part of this world, as well as its outliers into the Open University and on-line education efforts at several pre-university stages.

This reflects the earlier ties between logic and learning. People can get better at argumentation, and many other themes in this lecture point at skills that can be taught.

What is logic?

Let me return to the beginning of this lecture. What subject did I choose as a student, and was it the right choice? My general view of decision is quite unlike the paradigm in decision theory of choosing optimal actions given one's present expectations. This is too passive. In my own life, decisions turned out to be good, not because of superior *a priori* reasoning, but because *I made* them good afterwards by committing to the actions that I had taken. This is also true for choosing logic.

Perhaps the field as it was when I chose it in the Sixties was not an optimal choice for someone like me.²³ But I have told you what logic can *become* if we take it to its full potential as a science of information in action, performed by agents engaged in meaningful activities, doing justice to both the classical ideals and a modern future of the field. Indeed, this view is at the heart of my Logical Dynamics program:

becoming is as important as *being*.

Deep thoughts and noble sentiments: but at the end of this long lecture, you may well prefer a lighter take home message. Let me try. Throughout my presentation, I have extolled the virtues of *reason*, as the light that, sometimes, relieves the boredom and darkness all around us. But that light has to come at the right time, in the right style.

One autumn night, fifteen years ago, I had a heart to heart conversation with my 85-year-old mother — and I put the delicate question I had never dared ask before: why she had ever



Figure 11 Some work by the author on logic and natural language.

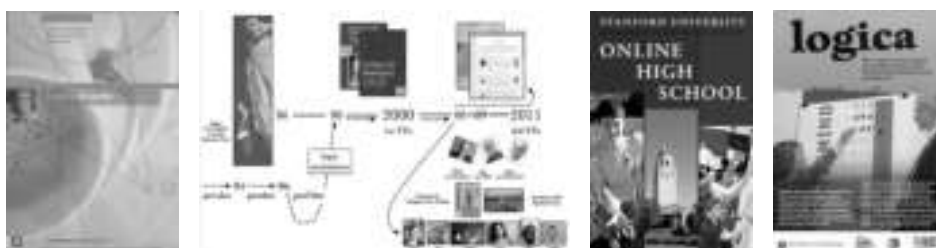


Figure 12 Initiatives in logic education.



Figure 13 Four of the ‘habitats’ of the author.

decided to marry my father. Her response was as follows:

“because you were not there to advise against it”.

There is a logical paradox lurking here, not unlike the ones I discussed in this lecture — but my mother’s response also gives me my final definition of logic for you today:

logic is the science of *wit*.

People and institutions

In line with what I have said about logic and probability, my own views and life’s decisions have ridden on a statistical sea of behaviour by many others. My formative interactions have included many colleagues and students, so much so, that I often wonder where my own professional persona ends and theirs starts. My work and ambitions in academic life also naturally led to helping shape new organizations in our field whose lifespan may well exceed our own.

The four pictures in Figure 13 show four of my habitats over the years: the Institute for Logic, Language and Computation in Amsterdam, the European Association for Logic, Language and Information, the Center for the Study of Language and Information at Stanford, and as a most recent initiative, a new Joint Research Center in Logic between the UvA and Tsinghua University in Beijing.²⁴ These are sites where modern logic in the style I have explained is flourishing, as well as much more.

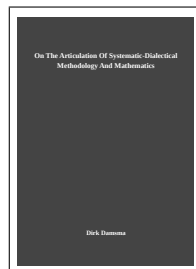
But the realm of logic is much larger than this personal environment. I warmly invite you to open a door into the actual international world of logicians — or just at home, step through Alice’s mirror into the internet, and see its attractions for yourself. ←

Noten

- 1 With a group of dedicated colleagues, I am currently involved in exploring Chinese strands in all of this, in the forthcoming *Handbook of the History of Logic in China*.
- 2 Here I am not endorsing the old AI mantra that all reasoning can be done by machines. The ultimate goal of logic to me is not a world where reasoning and judgement are left to technology, but one where we understand ‘agency’, in the broad sense to come in this lecture.
- 3 The strange box $\Box$ is not a pdf conversion error, but the logical symbol for ‘provability’.
- 4 Yes, there is much more to the ‘unknowability’ in this example than mere formal logic.
- 5 Here we use earlier rules: we have $\neg\Box L \rightarrow L$ by the meaning of L , and hence also $\neg L \rightarrow \Box L$.
- 6 This use of the box notation is naturally related to our earlier formal analysis of provability.
- 7 In particular, if the actions considered can be different, then Distribution must be modified to an indexed form $[x](A \rightarrow B) \rightarrow ([y]A \rightarrow [x\#y]B)$, where the variables x, y stand for actions and $\#$ denotes some suitable operation of combining actions.
- 8 Modal logic is not the only field that does justice to the information–action duality. Other such paradigms that I admire include process algebra and category-theoretic approaches.
- 9 The Mohist example was a Dark Room, with an object inside whose colour you do not know. However, you see a white object outside of the room, and someone now tells you that the object in the room has the same colour. You then conclude that the object in the room is white.
- 10 These formulas are mainly for display: I ruthlessly omit technical details in this lecture. Just for once: the stated law describes knowledge after update as conditional knowledge in a recursive manner that lends itself well to logical analysis of the relevant modal reasoning.
- 11 In daily life we also value ‘consistency’, a more subtle virtue of applying the same standards to similar matters, without self-serving shifts, a delicate form of *harmony in judgement*.
- 12 The common idea that rationality means ‘serving one’s own interests’ seems an aberration. Good reasons involve much more, such as an ability to put oneself in *someone else’s* place.
- 13 This tandem view again illustrates the earlier point of the duality of information and action.
- 14 Students ask why I still grade exams for correct answers, instead of their responses to their errors. For lack of a good answer, let me just step aside, and say that exams are an ancient Chinese invention that has conquered the world, on a par with paper, gunpowder, and silk.
- 15 E.g., while it might be provably inconsistent to *know* that a given statement is true and unknowable, it could well be consistent for an agent to *believe* that it has these two properties. Technical examples of this line are found in recent work on probabilistic versions of Gödel’s theorems.
- 16 Of course, both of these presuppositions are switched off when a teacher asks a question to a student, or a valedictory lecturer to his audience.
- 17 In mathematical terms, logical laws like this behave like ‘fixed-point equations’.
- 18 The status of common knowledge is widely debated: it may represent a useful fiction.
- 19 Public audiences often say that emotion rules the world, not logic. My response is finding lipstick on the collar of your spouse: observation, inference, and emotion entangle in a flash.
- 20 I sometimes wonder whether this balance also explains why mathematicians keep using natural language in their work and publications, be it enriched with symbols. It has often been asked why this is so. One answer might be that even pure mathematical research requires a constant undercurrent of signals for cooperation, competition, goals, and desires.
- 21 This has not prevented me from publishing papers on the interface of logic and psychology, a fascinating border region where much is happening, also at the University of Amsterdam.
- 22 More concretely, I am currently looking at simple reasoning patterns concerning the main drivers of our actions: hope, and fear — as well as what are in fact major cognitive abilities such as switching perspectives in going from first-person to third-person reports, and back. Throughout, the fundamental logical harmony of information and action reveals itself.
- 23 My sons occasionally wonder if I would not have made a much more productive member of Dutch society as a physicist, the field of study that I started with at the UvA.
- 24 Perhaps not accidentally, counting time zones, this is a realm where the sun never sets.

In de verdediging

| In defence



On the Articulation of Systematic-Dialectical Methodology and Mathematics

Dirk Damsma

Op 9 januari 2015 promoveerde Dirk Damsma aan de Faculteit Economie en Bedrijfskunde van de Universiteit van Amsterdam op een proefschrift getiteld *On the Articulation of Systematic-Dialectical Methodology and Mathematics*. Het woord wiskunde in de titel trekt meteen de aandacht en de vraag rijst wat systematische dialectiek inhoudt en met wiskunde te maken heeft. Even bladeren leert dat het proefschrift onder andere ‘de dialectische grondslagen van de wiskunde’ en ‘Marx’ systematische dialectiek en wiskunde’ behandelt. Daarmee is de belangstelling echt gewekt.

Econoom en wetenschapsfilosoof

In Damsma's proefschrift komen allerlei wiskundige concepten aan bod, met een nadruk op eindig versus oneindig, infinitesimalen en calculus. Deze komen in eerste instantie aan de orde als hij behandelt hoe de Duitse filosoof Hegel (1770–1831) op een zogenaamde dialectische manier probeert concepten in de taal op te bouwen van abstract naar concreet. Hoewel zijn proefschrift behoorlijk veel wiskundige begrippen en hun achtergronden behandelt, noemt Damsma zichzelf toch “in de eerste plaats econoom en in de tweede plaats wetenschapsfilosoof (met als specialisme systematische dialectiek)”. Of en hoe zijn werk de kijk op de wiskunde kan beïnvloeden is voor hem een moeilijke vraag. Hij heeft er wel veel met wiskundigen over gesproken en begrepen dat het een bijdrage zou kunnen leveren aan het grondslagendebat in de wiskunde.

Dialectische grondslagen van de wiskunde

Hegel streefde naar de ontwikkeling van één totaalconcept waarin hij wetenschap, esthetica en filosofie wilde verenigen. Hij zag de wereld en de werkelijkheid als de uitkomst van een continu proces waarbij er telkens nieuwe tegenstellingen zijn die steeds opnieuw worden opgeheven. Het Duitse werkwoord *aufheben*, dat zowel afschaffen als opheffen in de zin van optillen betekent, was het kernwoord voor zijn benadering. Tijdens het dialectisch proces wordt iets eerst gesteld, daarna ontkend, om tot slot tot een hogere waarheid te komen. Preciezer gesteld heeft de systematische dialectiek als uitgangspunten:

1. Al het denken vindt plaats in taal.
2. Taal wordt complexer en het denken geraffineerder naarmate er meer en fijnmaziger abstracties worden ontwikkeld.
3. Door te beginnen bij het meest abstracte concept, dit te contrasteren met een tegengesteld concept en te kijken hoe de tegenstelling kan bestaan in een derde concept, kan de weg van abstract naar concreet stap voor stap worden bewandeld.
4. De resulterende ordening van abstracte naar steeds concretere begrippen laat de samenhang van de tot nu toe ontwikkelde kennis zien en toont wat de beperkingen ervan zijn.

Pas gepromoveerden brengen hun werk onder de aandacht.
Heeft u tips voor deze rubriek of bent u zelf pas gepromoveerd?
Laat het weten aan onze redacteur.

Redacteur: Geertje Hek
la Voie-du-Coin 7
1218 Grand-Saconnex
Zwitserland
verdediging@nieuwarchief.nl

Door concepten in de taal van abstract naar concreet te ordenen kan inzicht worden verkregen in de aard van wiskundige entiteiten en de aard van modellen van delen van het kapitalistisch systeem. De truc is om te beginnen bij de meest abstracte categorie die onze taal kent, het *Zijn*. Willen we geleidelijk van dit abstractieniveau afdalen naar meer concrete begrippen dan moet hierover zonder gebruik te maken van voorbeelden worden nagedacht. De enige manier om dit te doen is door je te realiseren dat *Zijn* tegengesteld is aan *Niets*. Deze tegenstelling kan alleen concreet bestaan als beide begrippen niet gelijktijdig waar zijn, maar er een beweging tussen plaatsvindt: *Worden*. Over worden kan men ook niet nadenken, zonder naar voorbeelden te grijpen, en dus is ook hier een nadere concretisering nodig: er moet iets in wording zijn, in zijn abstractie *Er-Zijn* ('Dasein') genoemd. Er-zijn is intern tegenstrijdig als het in Wording moet zijn, waardoor het uiteenvalt in het *Iets* en het *Andere* dat eruit voortkomt. Omdat het iets en het andere conceptueel niet te onderscheiden zijn, zijn zij elk 1. Maar als dat zo is moeten er heel veel enen zijn: een oneindige verzameling van elementen van grootte 1. Door op deze wijze van abstracte naar concrete categorieën te gaan, komt men dus vanzelf op het terrein terecht van wiskundige entiteiten zoals bijvoorbeeld de natuurlijke en rationale getallen en *Eenheid* en *Aantal* (te vergelijken met elementen en verzamelingen).

Volgens Damsma vloeit wiskundig denken in deze dialectische benadering in zekere zin voort uit de mislukte poging om op kwalitatieve wijze abstract te denken. Hij vindt hierin mede een verklaring voor het feit dat wiskunde zoveel toepassingen kent. Wiskunde vloeit voort uit taal en taal is ontwikkeld om grip te krijgen op de werkelijkheid. Vanzelfsprekend draagt wiskunde daar zo beschouwd dus aan bij. Ook de filosofisch weinig bevredigende uitspraak: "God schiep de natuurlijke getallen, de rest is mensenwerk" (vrij naar Leopold Kronecker), kan hiermee van een filosofisch antwoord worden voorzien, aldus Damsma: "God schiep geen getallen, maar abstract denken vereist het bestaan van natuurlijke getallen."

Dialectiek kan alleen *bestaande kennis* en de categorieën waarin deze wordt beschreven in hun onderlinge samenhang tonen. Hegel had bijvoorbeeld allerlei opvattingen over oneindigheid, vóórdat Cantors verzamelingenleer bestond. Hij maakte een onderscheid tussen het 'slechte of metafysische oneindig' en het 'werkelijke oneindig'. Het slechte oneindige is volgens hem de onbereikbare oneindigheid van een onophoudelijke voortgang, die het best gerepresenteerd kan worden door een rechte lijn. Aangezien Cantor pas na Hegels dood aan verzamelingenleer werkte, zijn Hegels opvattingen over oneindigheden na het verschijnen van Cantors werk aan een update toe. Met Damsma's expertise valt wel iets zeggen over hoe Cantors inzichten Hegels dialectiek zouden moeten beïnvloeden. In die zin zou Damsma's werk dus kunnen bijdragen aan een dialectische opbouw van de wiskunde.

Hegel en Marx, eindig en oneindig

Marx was een van de leerlingen van Hegel. Hegel en hij maakten beiden gebruik van een vorm van historische en systematische dialectiek. Hegel had alle vertrouwen in overgeleverde kennis, concepten en categorieën. Marx was door en door kritisch en geloofde niet dat overgeleverde kennis altijd betrouwbaar was en slechts opnieuw geordend moest worden om tot nieuwe inzichten te komen. In Marx' systemen is er daarentegen wel meer ruimte voor kwantificatie.

De verschillende kijk die Hegel en Marx hadden op differentiëren, illustreert dit verschil tussen beide denkers. Hegel maakte zoals gezegd onderscheid tussen het 'werkelijke oneindig' en het 'slechte of metafysische oneindig'. Omdat bewerkingen met eindige getallen al-

tijd leiden tot een eindig resultaat, ziet hij dit 'slechte oneindig' slechts als een potentieel oneindig dat niet kan worden bereikt door eindige wiskundigen. Het ligt per definitie buiten ons bereik. Maar: "Alles in de wereld is eindig, maar dit feit zelf is oneindig. Eindige dingen ontwikkelen, veranderen, sterven en geven aanleiding tot nieuwe dingen tot in het oneindige."

Het werkelijke oneindige omvat volgens Hegel het 'wiskundige oneindig'. Hij was goed op de hoogte van het werk van wiskundigen als Lagrange en Cauchy en de belangrijkste toepassing van het 'werkelijke oneindige' was volgens Hegel de differentiaalrekening. "In de limiet zijn de dy en dx in de ratio dy/dx geen Kwantiteit meer, maar hebben ze slechts betekenis in relatie tot elkaar." Daarom is het volgens Hegel niet zinvol om over dy en dx te denken als extreem kleine Kwantiteiten die ongelijk aan nul zijn. In de uitdrukking dy/dx verschijnt volgens hem de wet die y en x aan elkaar relateert. Daar waar de expliciete Kwantiteiten dy en dx in de limiet verdwijnen, ontstaat de relatie tussen de twee als een kwalitatief andere, nieuwe ratio.

Volgens sommigen had Hegel hier niet moeten stoppen. Zijn dialectische perspectief had hem weliswaar geholpen om de wiskunde en sommige van haar tekortkomingen te analyseren, maar hij gaf zichzelf nooit de taak om de wiskunde op een dialectische manier te veranderen.

Hegels visie op wiskunde vormde een bron van inspiratie voor Marx en Marxisten, maar Marx had wel kritiek op bepaalde standpunten van Hegel. Hij kon zich onder andere niet vinden in diens obsessie om iedere tegenstelling op te heffen. Hij vond dat er redenen waren waarom er *schijnbaar* of *werkelijk* onopgeloste conflicten konden zijn. Zijn dialectische theorie van het kapitalisme moest ruimte bieden voor het ontstaan van dergelijke tegenstellingen.

Marx was oorspronkelijk vooral geïnteresseerd in wiskundige methoden omdat hij ze nodig had om de principes van de economie uit te werken. Hij voelde zich geremd door zijn gebrek aan wiskundige vaardigheden. Ondanks zijn oorspronkelijke intentie om wiskundige methoden te gebruiken voor toepassingen zijn er in Marx' wiskunde-aantekeningen echter maar weinig toepassingen te vinden. Hij lijkt zich steeds meer bezig te hebben gehouden met 'wiskunde om de wiskunde'. Net als Hegel was hij bijzonder geïnteresseerd in het gebruik van infinitesimalen in de differentiaalrekening. Hij bekritiseerde het werk van Newton en Leibniz, van d'Alembert en van Lagrange, omdat ze allen kwamen tot een uitdrukking voor de verandering dy/dx via het verwaarlozen van een infinitesimaal klein maar in essentie *statistisch* verschil h tussen x en $x + h$ (d'Alembert of Lagrange) of dx tussen x en $x + dx$ (Leibniz). Volgens Marx moest de uitdrukking voor de verandering dy/dx worden afgeleid van de *dynamische* variatie in x (en daarmee y).

Als we als voorbeeld $y = f(x) = x^3$ nemen, komt Marx' methode in het kort neer op het volgende. Stel een waarde x_1 voor op een willekeurige (en dus niet per se kleine of infinitesimale) afstand van x . Dan geldt

$$f(x_1) - f(x) = y_1 - y = x_1^3 - x^3 = (x_1 - x)(x_1^2 + x_1 \cdot x + x^2),$$

zodat

$$\frac{f(x_1) - f(x)}{x_1 - x} = x_1^2 + x_1 \cdot x + x^2.$$

Neem nu $x_1 = x$, dan krijg je

$$\frac{0}{0} = \frac{dy}{dx} = x^2 + x \cdot x + x^2 = 3x^2.$$

Het dialectische aan deze methode is, dat de afgeleide alleen maar verschijnt als dx en dy beide gelijk zijn aan nul, en dat x kan veranderen in een willekeurige waarde x_1 in het functiedomein.

Modellen voor het kapitalisme

Met als uitgangspunt de systematische scheiding tussen consumptieve en productieve eenheden in het kapitalisme, is de methode hierboven ook te gebruiken om het kapitalisme te analyseren. Hegels vraag hoe tegenstellingen in het denken kunnen bestaan, vertaalt zich dan in de vraag hoe een dergelijke scheiding tussen consumptieve en productieve eenheden concreet kan bestaan. Deze vraag brengt ons al snel tot de noodzaak van het bestaan van markten, waarde en geld. Op deze manier wordt dus inzicht verkregen in welke instituties onmisbaar zijn voor het kapitalisme en hoe zij samenhangen. Dit laat op haar beurt zien, welke aannames in ieder geval kunnen worden gemaakt in een model van het kapitalisme. Dit is belangrijk omdat zo de brug geslagen kan worden tussen de wetmatigheden van het kapitalisme als systeem en de (op uitermate onrealistische aannames over individueel gedrag gebaseerde) modellen die mainstream-economen doorgaans gebruiken. Damsma heeft er goede hoop op dat de benaderingswijze die hij heeft verkend kan leiden tot modellen die zowel een economische crisis als een economisch evenwicht kunnen beschrijven.

Kenmerkend voor Damsma's benadering van modellen is dat die de modelbouwer toestaat om af te zien van aannames over individuele motieven. Het enige dat telt, zijn de kenmerken die het kapitalistisch systeem moet hebben om te blijven bestaan. De dialectiek brengt deze kenmerken in kaart. In aannames van modellen worden ze formeel vastgelegd. Vervolgens kan, als het model gebouwd is, met behulp van dat model worden bekeken of de kenmerken concreet kunnen bestaan (empirische grond hebben).

Zijn belangrijkste resultaat is volgens hem de wijze waarop dialectiek en modelbouw kunnen worden geïntegreerd. De dialectiek levert de aannames, terwijl de modellen kunnen toetsen of en in hoeverre het model al empirische inhoud heeft. Door vragen die tijdens de verdediging van zijn proefschrift werden gesteld, realiseerde Damsma zich dat zo werkelijk een brug te slaan is tussen de holistische benadering, waarbij alles voortvloeit uit de kenmerken van het systeem, en de individualistische, waarbij het individu wordt geacht alles onafhankelijk te kunnen beslissen en zo de maatschappij vorm geeft.

De economie heeft een dergelijke benaderingswijze volgens hem heel hard nodig.

Wetenschap als belangrijkste hobby

Toen Damsma in 2001 afstudeerde, gaf zijn scriptiebegeleider dr. Geert Reuten (die later zijn co-promotor en begeleider zou worden) al aan dat hij hem graag zou zien promoveren. Dat vooruitzicht trok Damsma erg aan, want het doen van scriptieonderzoek en het schrijven van de scriptie vond hij erg leuk. Wel wilde hij eerst de rest van de samenleving ervaren. Hij mocht direct na zijn afstuderen de werkcolleges wetenschapsleer bij (bedrijfs)economie verzorgen en is daarna als fractiemedewerker Economische Zaken bij de SP zijn horizon gaan verbreden. Hij bleek echter geen politiek dier en is daarom na anderhalf jaar teruggekeerd naar de UvA om daar het onderwijs weer op te pakken. Vanaf dat moment is hij weer gaan nadenken over een onderwerp voor zijn proefschrift.

Het uiteindelijke onderwerp kreeg vorm tijdens een seminar van de voormalige Amsterdam History and Methodology of Economics Group. Reuten hield een voordracht waarin hij de heuristische ontwikkeling van een model (te beginnen bij een model zonder overheid en buitenland, dat stapsgewijs uitgebreider en gecompliceerder wordt) vergeleek met abstractieniveaus in de dialectiek. Deze vergelijking ging volgens Damsma mank en Reuten daagde hem van harte uit om te laten zien hoe de twee methoden wél kunnen worden geïntegreerd. Reuten werd onderwijsdirecteur en kreeg enkele maanden extra budget om te besteden aan (onderzoeks)ondersteuning, zodat er financiering was voor het eerste deel van het project. Dit zorgde ervoor dat Damsma een goede start kon maken. Vervolgens werkte hij als 'buitenpromovendus' aan zijn proefschrift. Zijn eigenlijke werk bestond uit het geven van onderwijs: hij gaf op oproepbasis onderwijs aan de UvA en had deeltijdcontracten bij de HvA-lerarenopleiding economie, de Haagse Hogeschool en de Nyenrode New Business School Amsterdam (NNBS). Daar is hij sinds anderhalf jaar tevens scriptiecoördinator. Daarnaast heeft hij een cursus Onderzoeksmethoden en Perspectieven in de master International Relations van Webster University Leiden gegeven en hand- en spandiensten verleend voor het onderwijs in academische vaardigheden bij de NNBS en het International StudyCentre.

Zijn onderzoek deed Damsma dus vooral in zijn vrije tijd en de vakanties. En dan te bedenken dat hij ook nog getrouwd en vader van drie jonge kinderen is. Damsma: "Wetenschap is mijn belangrijkste hobby, anders had ik dit nooit afgemaakt. Hopelijk kan ik er ooit echt mijn werk van maken."



Boekbesprekingen

| Book Reviews

Redactie: Hans Cuypers en Hans Sterk

Review Editors NAW - MF 7.092
Faculteit Wiskunde & Informatica
Technische Universiteit Eindhoven
Postbus 513
5600 MB Eindhoven
reviews@nieuwarchief.nl
www.win.tue.nl/wgreview



E. Feireisl, D. Pražák
Asymptotic Behavior of Dynamical Systems in Fluid Mechanics

AIMS on Applied Mathematics Vol. 4
American Institute of Mathematical Sciences (AIMS), Springfield, MO, 2010
xii + 298 p., prijs \$ 75.00
ISBN 9781601330031

In mathematical fluid mechanics, abstract techniques of Functional Analysis and the theory of (infinite dimensional) dynamical systems are applied to the (typically nonlinear) partial differential equations that arise as models describing the kinematics and (thermo)dynamics of liquids and gases on a continuum level.

As far as Functional Analysis is concerned, an early milestone of this field is Leray's work on the existence of weak solutions to the classical Navier–Stokes equations (1934). The concept of an attractor of a dynamical system is central to the description of its long-time asymptotics. For the dynamical system generated by the Navier–Stokes equations, this concept has first been investigated by Ladyzhenskaya (1972, 1991) and the main results concerning this can be found in the books by Constantin and Foias (1988) and Temam (1988).

The monograph under review contains both a brief introduction and current research results on a number of topics along this line. Both authors represent the Czech school of mathematical fluid dynamics founded by Nečas, and the book provides a good access to some results and techniques of this school (among others).

More precisely, the monograph focuses on long-time behavior of weak solutions to two (classes of) problems, namely (1) the ‘full’ Navier–Stokes–Fourier system of evolution equations describing the transport of mass, momentum, and energy in a viscous, heat conducting fluid obeying the Second Law of thermodynamics and satisfying additional assumptions of thermodynamic stability (Chapters 4–5), (2) models in which the assumption of incompressibility leads to a decoupling of the energy equation and to a different role for the pressure as Lagrange multiplier instead of an independent thermodynamic function. As a result, the problem is reduced to a system of equations for the velocity field only.

In all considered problems, the liquid domain is fixed and given, the standard no-slip boundary condition for the velocity is imposed, and the domain boundary is assumed to be energetically insulating.

The book begins (in Chapter 2) with a reasonably self-contained exposition of the concepts and basic properties of attractors of dynamical systems, and techniques for proving existence as well as estimates for their dimension and ‘exponential attraction rate’. These are preparations mainly for the second part of the book. Some generalizations of the standard concepts are included to deal with the possible nonuniqueness of the solutions that will be considered.

In Chapter 3 the modelling assumptions at the basis for the (weak formulation of) the full Navier–Stokes–Fourier system (with density, temperature and velocity as basic variables) are discussed in detail. This starts from a formulation of the integral form of the basic conser-

Rectificatie

In het decembernummer was op pagina 290 de naam van de recensent van het boek van Martin Gardner niet goed weergegeven, het moet zijn Joop van der Vaart.

vation laws under low smoothness assumptions and includes a brief discussion of the concept of entropy and the Second and Third Law of thermodynamics. (Standard) linear constitutive relations are assumed, and the chapter ends with a complete formulation of the problem to be discussed.

The next two chapters give a rigorous mathematical treatment of this problem. It should be recalled here that there is no uniqueness result available for its (weak) solutions. Equilibrium solutions are discussed, and considerable technical effort is directed to a proof of a key result concerning ‘passage to a weak limit’ for solutions that satisfy certain energy bounds. This result is a crucial ingredient for the existence proof which is not given completely but by reference to a companion monograph by Feireisl and Novotný (2009).

Furthermore, long-time behavior of solutions is discussed. In the case of conservative driving forces, all weak solutions converge (uniformly) to equilibrium states, which can be seen as a recasting of the Second Law. In general, for bounded but nonconservative driving forces, there is a dichotomy in the sense that solutions either have bounded total energy, or the total energy approaches infinity for large times. Finally, a somewhat counterintuitive example is discussed in which rapidly oscillating nonconservative driving forces produce solutions that approach an equilibrium.

The incompressible models considered in Chapters 7 and 8 are of the form where u and p denote the velocity and pressure fields, $Du := \nabla u + (\nabla u)^T$, and the stress-strain relation $D \mapsto S(D)$ satisfies assumptions that cover the so-called Ladyzhenskaya models

$$S(D) = \nu_1 D + \nu_2 |D|^{r-2} D$$

or

$$S(D) = \nu_1 (1 + \mu^2 |D|^2)^{\frac{r-2}{2}} D.$$

The case $r = 2$ corresponds to a linear stress-strain relation and thus to the classical Navier–Stokes equations, while $r < 2$ and $r > 2$ describe shear-thinning and shear-thickening fluids, respectively.

Under conditions that cover the classical case in 2D (but, of course, not in 3D), existence and uniqueness of weak solutions are shown, and under various assumptions on r , the spatial dimension, and f , results on existence, dimension, and attraction rate for attractors of the corresponding dynamical systems are proved. Finally, a number of related results are presented for fluids with pressure-dependent viscosities.

The introduction and appendix of the book contain useful prerequisites and some more advanced technical tools that make the book a valuable reference even for work outside its scope. *Georg Prokert*



Jacob P. Murre, Jan Nagel, Chris A. M. Peters

Lectures on the Theory of Pure Motives

University Lecture Series vol. 61

American Mathematical Society, 2013

ix + 149 p., prijs \$ 44.00

ISBN 9780821894347

De *Lectures* in de titel van dit boek zijn voordrachten die Murre tussen 1988 en 2008 heeft gegeven op veel plaatsen in de wereld. Aan het eind

van de ‘Introduction’ bedankt hij zijn co-auteurs: “Without their help and encouragement these lectures would never have been transformed into a book.” Bij deze transformatie is Murre’s stijl heel herkenbaar behouden gebleven. Zo lezen we in de ‘Introduction’ een opmerking die ik hem vele malen heb horen maken: “... the category of pure motives: its *construction* is (contrary to some widespread misunderstanding!) entirely *unconditional* and in fact — except for its originality — surprisingly simple! However the question whether these motives have the *required good properties* depends on *conjectures* for algebraic cycles; these are the famous ‘*standard conjectures*’ of Grothendieck.” Dat hij twijfel aan het bestaan van *pure motives* onterecht vindt, onderstreept hij in het laatste hoofdstuk nog eens met: “There is no theory yet for mixed motives.”

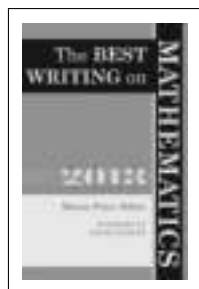
De theorie van ‘zuivere motieven’ is door Grothendieck bedacht in de jaren zestig, in een poging om achter de verschillende cohomologietheorieën in de algebraïsche meetkunde één algemeen onderliggend patroon te ontdekken. Men gaat uit van de categorie van gladde projectieve algebraïsche variëteiten over een lichaam K en probeert daar lineaire algebra van te maken. Een truc die men op veel plaatsen in de wiskunde kan zien, is om een afbeelding te vervangen door zijn grafiek en het samenstellen van afbeeldingen $f: X \rightarrow Y$ en $g: Y \rightarrow Z$ als het wegprojecteren van de middelste component uit de doorsnede $\{(x, f(x), z)\} \cap \{(x, y, g(y))\}$ in $X \times Y \times Z$. In analogie hiermee vervangt men bij de constructie van motieven de morfismen van variëteit X naar variëteit Y door algebraïsche cycli in $X \times Y$; dat wil zeggen door formele $\mathbb{Z}$ -lineaire combinaties van irreducibele deelvariëteiten van $X \times Y$. Helaas moet men, om op een zinnige manier intersecties te kunnen definiëren, overgaan op equivalentieklassen van algebraïsche cycli voor een adequate equivalentierelatie. De zuinigste adequate equivalentierelatie is de zogenaamde *rationale equivalentie*. De verzameling klassen van algebraïsche cycli op $X \times Y$ modulo rationale equivalentie is de *Chow-groep* $CH(X \times Y)$. Om in de nieuwe setting voor de verzameling morfismen van X naar Y een vectorruimte over $\mathbb{Q}$ te krijgen gaat men vervolgens over op $\text{Corr}(X, Y) := CH(X \times Y) \otimes \mathbb{Q}$. Tot dusver zijn de objecten van de categorie ongemoeid gelaten; alleen de morfismenverzamelingen zijn vernieuwd. Nu worden nieuwe objecten gemaakt als paren (X, p) bestaande uit een gladde projectieve algebraïsche variëteit X en een $p \in \text{Corr}(X, X)$ die voldoet aan $p \circ p = p$ voor de bovenbeschreven samenstelling $\circ$. Morfismen tussen twee van die nieuwe objecten (X, p) en (Y, q) worden gedefinieerd door de elementen van $\text{Corr}(X, Y)$ van links en rechts samen te stellen met q en p . De laatste stap in de constructie van de categorie van zuivere motieven maakt gebruik van de gradering van de Chow-groepen door middel van codimensie: wanneer X dimensie d heeft dan definieert men voor een geheel getal r de groep $\text{Corr}^r(X, Y) := CH^{d+r}(X \times Y) \otimes \mathbb{Q}$ door irreducibele deelvariëteiten van $X \times Y$ te gebruiken die codimensie $d + r$ hebben. De constructie van de *categorie van zuivere motieven over het lichaam K* wordt nu afgerond: de objecten zijn tripels (X, p, m) met (X, p) als voorheen en $m \in \mathbb{Z}$. De lineaire ruimte van morfismen van (X, p, m) naar (Y, q, n) is $q \circ \text{Corr}^{n-m}(X, Y) \circ p$. Aldus krijgen we — uitgaande van rationale equivalentie — de zogenaamde *Chow-motieven*. Andere adequate equivalentierelaties geven zo ook hun eigen soort zuivere motieven. Men kan de oorspronkelijke categorie van gladde projectieve algebraïsche variëteiten over K inbedden in de categorie van Chow-motieven door een variëteit X te sturen naar het motief $ch(X) := (X, \Delta_X, 0)$, waarbij Δ_X de klasse is van de diagonaal in $X \times X$. Tot zover in een notendop de eerste twee hoofdstukken van het boek. Ontegenzeggelijk verrassend elegant en eenvoudig en helder beschreven.

De daarna volgende hoofdstukken draaien om heel veel vermoedens, onder andere Grothendiecks standaard vermoedens en vermoedens van Murre zelf uit het begin van de jaren negentig. De auteurs doen erg hun best om het allemaal uit te leggen, maar mij gaat het al snel duizelen. Intersectietheorie van algebraïsche cycli speelt een essentiële rol in deze constructie van motieven. Dat verklaart ook waarom men zich moet beperken tot gladde projectieve variëteiten; immers bij niet-projectieve variëteiten loopt men het risico dat snijpunten ‘achter de horizon uit het zicht’ blijven en in geval van singulariteiten zijn intersectiemultipliciteiten problematisch. In het laatste hoofdstuk, getiteld *Beyond Pure Motives*, bespreken de auteurs heel beknopt een aantal tamelijk recente theorieën van *Mixed Motives* die een uitbreiding moeten geven naar algemene variëteiten.

Motieven vormen een centraal thema in de moderne wiskunde. Al met al is dit een heel lezenswaardig boek, dat een goed inzicht geeft in de klassieke ontwikkelingen en problemen om te komen tot een theorie van motieven door middel van constructies met algebraïsche cycli. Het venster van de algebraïsche cycli biedt een interessant uitzicht, maar moderne visies op meetkunde en getaltheorie bieden nog vele andere interessante mogelijkheden, en toepassingen.

In de tekst staan veel verwijzingen naar de (oorspronkelijke) literatuur en aan het eind vindt men een uitgebreide lijst met referenties.

Jan Stienstra



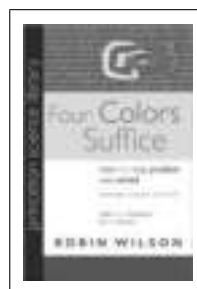
Mircea Pitici (ed.)
**The Best Writing on Mathematics
2013**

Princeton University Press, 2014
xiii + 244 p., prijs \$ 21.95
ISBN 9780691160412

Dit is het vierde boek in een reeks, aangezwengeld door Micea Pitici in 2010. Het viel hem toentertijd op, dat er nergens gebundelde overzichten waren te vinden die regelmatig, bijvoorbeeld jaarlijks, berichten over ontwikkelingen in de wiskunde, over daarbij betrokken personen, over raakpunten van de wiskunde in geschiedenis, in filosofie, in didactiek en in alledaagse uitingen. Via Wikipedia, Google, enzovoort, zijn de inhoudslijstjes van de vorige delen van de reeks gemakkelijk op te sporen. Aldaar vindt men een bonte mengeling van uitstekende verhandelingen. Hier bespreken we het vierde deel. Er staan twintig artikelen in het boek; dertien dateren uit 2012, vier uit 2011 en drie uit 2010. Aangezien anderen dan de recensent meer deskundig zijn op onder meer gebieden als waarschijnlijkheidsrekening, didactiek van wiskundeonderwijs, politiek in wiskundebeoefening, worden hierna enkel de volgende tien bijdragen uit het boek besproken: (1) Philip J. Davis, ‘The Prospects for Mathematics in a Multimedia Civilization’ (uitgewerkte rede van het ICM 1998 te Berlijn, gepubliceerd door de AMS in 2010), 22 p. Hij behandelt verbanden van wiskunde met verschijnselen in ons moderne, deels digitale, tijdperk. (2) Gregory Goth, ‘Degrees of Separation’, 5 p. Het gaat hier over het wonderlijke feit dat iedereen niet meer dan zes personen verwijderd is van elke andere persoon op onze aarde. (3) John Pavlos, ‘Machines of the infinite’, 11 p. Von Neumann, Gödel, P versus NP, de Zweedse handelsreiziger, de Clay gold rush, passeren de revue. (4) Renan Gross, ‘Bridges, String Art, and Bézier Curves’, 13 p. Een bijzonder interessante verhandeling over de Jeruzalem-hangbrug; opgehangen aan één paal niet centraal

ten opzichte van de tuien. De auteur verwerkt beginselen, afkomstig van de Franse ingenieur Pierre Bézier, betreffende kromme lijnen die optreden in de techniek van de productie van auto’s doch toegepast op bruggenbouw. (5) Daniel S. Silver, ‘Slicing a Cone for Art and Science’, 19 p. Onder meer wordt hier beschreven waarom Albrecht Dürer in 1525 van mening was dat de doorsnede van een plat vlak met een kegel welke op een ellips ‘lijkt’, wel eivormig móést zijn! Later is wel betoogd dat Dürers kijk hierop het gevolg zou kunnen zijn vanuit het beschouwen van een kegel met behulp van verschillende perspectiviteitsassen. Hoe dan ook, een helder en leuk verhaal! (6) Kelly Delp, ‘High Fashion meets higher Mathematics’, 11 p. Bemoeienissen van de meetkundige William Thurston met de modewereld worden uit de doeken gedaan. In Nederland doet het onderwerp denken aan het grotske boek (402 p.) van Hans Freudenthal en Jan Sittig, *De juiste maat*, uitgegeven op instigatie van warenhuis De Bijenkorf, in 1950. (7) Fiona Ross and William T. Ross, ‘The Jordan Curve Theorem is nontrivial’, 10 p. Over de wiskunde in het vervaardigen van gedetailleerde tekeningen, slechts aangebracht door één ononderbroken pennenstreek over het tekentaferel; met plaatjes. Prachtige verhandeling. (8) David R. Lloyd, ‘How old are the Platonic Solids?’, 14 p. Een bijdrage over hoe door de eeuwen heen over het onderwerp van de titel wordt gedacht en hoe er onderzoek plaatsvond en -vindt over die veelvlakken. (9) Jim Bennett, ‘Early modern mathematical Instruments’, 10 p. Het betreft voornamelijk sterrenkijkers, zonnewijzers, scheepvaartkundige instrumenten zoals bijvoorbeeld de sextant. (10) Kevin Hartnett, ‘An abc Proof too tough even for Mathematicians’, 6 p. Een kort bericht over hoe aan te kijken tegen de aankondiging van Shinichi Mochizuki, dat deze het abc-vermoeden in de getaltheorie bewezen zou hebben. Mochizuki’s betoog en verhoor beslaat 512 pagina’s! Van alle contribuanten zijn in het boek korte levenslopen opgenomen. Ook ‘naam en toenaam’ worden vermeld van zevenenzestig artikelen waarover de opname-commissie tot plaatsing van artikelen in het boek zich heeft gebogen, doch dewelke om reden van plaatsgebrek het niet ‘haalden’. De locaties van de twintig afgedrukte artikelen staan ook expliciet in het boek beschreven. Het boek bevat een voorwoord van Sir Roger Penrose (5 p.) dat op zichzelf het zeker waard is om aandachtig gelezen te worden, alsmede een Introduction van Pitici (11 p.) waarin hij een overzicht geeft van het hoe en het waarom van dit boek. Tevens geeft Pitici aldaar vijfenzestig bronnen (andere dan de hierboven vermelde) welke hem geholpen hebben bij het maken van keuzes voor de inhoud van het boek. Alles bijeen genomen is de inhoud van het boek goed voor een aantal prettige leesuurjes. Als zodanig is Pitici’s wens daartoe zeker verwezenlijkt. De boeken in de reeks zijn bedoeld voor een nieuwsgierig publiek dat zich wil laten meenemen en zich op de hoogte wenst te laten stellen van ontwikkelingen in de hedendaagse wiskunde in al zijn facetten.

Robert van der Waall



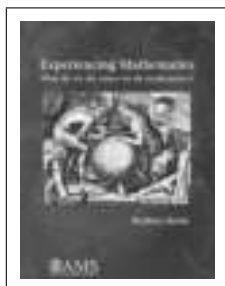
Robin Wilson
**Four Colors Suffice
How the Map Problem Was Solved
(revised color edition)**

Princeton Science Library
Princeton University Press, 2014
xii + 199 p., \$ 24.95
ISBN 9780691158228

Dit boek is een herziene editie van het boek dat in 2002 is verschenen, destijds in zwart-wit en nu in kleur. De keuze voor kleur bij dit onder-

werp ligt voor de hand, en als ik het vergelijk met de vorige editie — toen als een Penguin-pocket — dan is het er zeker op vooruitgegaan. Er is ook een nieuw voorwoord toegevoegd, er zijn enkele referenties van na 2002 opgenomen, maar verder is er niet zoveel veranderd. De structuur van het boek is gelijk en, ach, waarom ook eigenlijk niet. Het probleem dat iedere kaart met vier kleuren is in te kleuren is tenslotte in 1976 opgelost en sindsdien is er nog wel wat gebeurd, maar dan gaat het om een elegantere oplossing, een snellere oplossing en vooral ook om een meer overtuigende oplossing. Dat zijn variaties op een thema, want een opgelost probleem is uiteraard geen probleem meer. Bij het doorlezen van het boek zijn er wel verschillende gevoelens die je bekruipt. In de eerste plaats is het een fantastisch verhaal, hoe een betrekkelijk simpel vraagstuk de wiskundigen zo lang heeft bezig kunnen houden. De prachtige oplossing uit de jaren zeventig van de negentiende eeuw, die helaas fout bleek te zijn. Dan de pogingen die volgden in de twintigste eeuw, de column van Martin Gardner op 1 april 1975, waar een figuur stond die alleen met vijf kleuren in te kleuren zou zijn en dan ten slotte de race tegen de klok die gewonnen werd door Appel en Haken: het leest als een spannende roman. Het werd wiskunde die voorpaginanieuws werd, in Amerika en Japan, en zelfs tot postzegels en stempels heeft geleid. Het tweede gevoel dat me bekreep, betreft het sleutelmoment dat de vorm van oplossing van dit probleem als een wiskundig bewijs is gaan gelden. Een computercode is gegenereerd en is eindeloos gecontroleerd maar waarvan we nooit absoluut zeker kunnen zeggen dat het foutloos is. Het blijft toch wat onwerkelijk dat het een vertrouwen in de oplossers is geweest dat garant is gaan staan voor de overtuigingskracht van de oplossing. De redenering achter het bewijs kunnen we wel volgen, maar of hiermee inderdaad alle mogelijke configuraties uitputtend zijn geanalyseerd, blijft knagen. Maar al met al is het goed om dit te lezen. Het boek is zeer toegankelijk, uitstekend verzorgd, al worden de essentiële aspecten van het bewijs wat dun behandeld, maar in het moderne internettijdperk is het geen probleem om ook deze zaken bij elkaar te brengen. Opvallend is wel dat toen ik bij de cartografen in mijn omgeving eens polste of dit probleem nog wat leeft, men er eigenlijk de schouders voor ophaalde. Reacties in mijn omgeving liepen van “ik heb er een boekje over” tot “wat is dat voor een probleem?”. Ook in die zin kan ik het boekje niet genoeg onder de aandacht brengen. De hele manier van oplossen was destijds nieuw en het heeft het wiskundige redeneren en bewijsvoeren voor het eerst en grondig een andere richting gegeven.

Alfred Stein



Reuben Hersh
Experiencing Mathematics
What do we do, when we do mathematics?

American Mathematical Society
 xvii + 291 p., prijs \$ 39.00
 ISBN 9780821894200

De ondertitel van dit boek geeft exact aan waarover het boek gaat: ‘What do we do, when we do mathematics?’ De argeloze lezer, wiskundige of niet, zal bij deze vraag wellicht zijn schouders ophalen. Wiskunde bedrijven, dat is ons dagelijks werk, of dat herinneren we ons van toen we op school zaten. Is dat iets om je zo druk over te maken? De filosofisch geïnteresseerde lezer, of collega wiskundige, zal bij deze vraag misschien iets antwoorden over platonisme, intuïtionisme,

logica, formalisme en dergelijke. Gedachtenstromingen die vooral in de eerste helft van de twintigste eeuw hoogtij vierden. Culminerend in ‘grondslagen onderzoek’, onderzoek naar de zogenaamde fundamente van ons wiskundig gebouw. Reuben Hersh (1927), emeritus aan de University of New Mexico, Albuquerque, NM, specialist in het veld van de partiële differentiaalvergelijkingen, heeft zich al geruime tijd geleden naast zijn wiskundige werk beziggehouden met wijsgerige vragen en beschouwingen omtrent de wiskunde. Telkens weer uitlopend in de vraag van de ondertitel van dit boek: waar ben ik nu eigenlijk mee bezig? Al denkend laat hij overtuigend zien dat het antwoord niet moet komen uit formalistische standpunten en al helemaal niet van logische overwegingen. Heel scherp analyseert hij in een van de hoofdstukken hoe een wiskundig bewijs is opgebouwd en hoe het functioneert. Een wiskundig bewijs is echt niet een permutatie van symbolen en zinnen die onontkoombaar tot het QED voeren. Een wiskundig bewijs heeft, anders dan velen denken, een hoog semantisch karakter en veel minder een syntactisch karakter. Kort gezegd, en misschien een beetje vreemd: een wiskundig bewijs is pas een bewijs wanneer de wiskundige gemeenschap het een bewijs vindt. Hersh adstrueert dit schitterend aan (gefingeerde) gesprekken met studenten die (zogenaamd) niet weten waarom een gegeven bewijs zo overtuigend is voor ons. En het ultieme antwoord is voor de in opleiding zijnde even vaag als verwarrend, namelijk “omdat ik dat vind”. “En als jij nu maar goed je best doet en uiteindelijk tot onze beroepsgroep zal horen, ja dan weet jij het ook.” Een beetje cryptisch misschien in deze bespreking, maar ik hoop dat dat temeer een aansporing zal zijn om dit boek ter hand te nemen. Dat vreemde zit hem natuurlijk ook in het feit dat de gevestigde orde van wat zich eertijds als wijsbegeerte van de wiskunde heeft gepresenteerd door Hersh definitief naar oud-denken is verwezen. En dat valt lang niet altijd goed. Hersh kan daarover meepraten: diverse van zijn bijdragen van de afgelopen jaren zijn in eerste instantie geweigerd voor publicatie. Hoongelach en afwijzing was soms zijn deel. Dergelijke situaties kwamen niet alleen in de Verenigde Staten voor, maar ook elders, ook in ons land. Niet passend in de hoofdstromingen van de wijsbegeerte, niet geaccepteerd door een groot deel van de wiskundige gemeenschap (“wat heb je daar nu aan?”), afgewezen door de spraakmakende elite, hebben dergelijke overwegingen moeten rijpen om langzaam tot wasdom te kunnen komen. “This kind of philosophizing is mostly ignored, by the dominant analytic or linguistically oriented ‘philosophy of mathematics’”. Deze wijze van filosoferen bevat argumenten die fundamenteel afwijken van de argumenten die te vinden zijn in de Foundations, zoals afkomstig van giganten als Quine, Carnap, Wittgenstein, Frege, maar ook Russell, Hilbert, Brouwer en vele anderen. Hersh heeft de afgelopen jaren een groot aantal artikelen en andere bijdragen op dit wijsgerige terrein geschreven die in dit boek zijn gebundeld tot een samenhangend geheel. De hoofdstukken zijn zo verschillend van aard en inhoud dat het niet doenlijk is deze in extenso te bespreken. Daarom een kort overzicht van enkele bijdragen: ‘True facts about imaginary objects’, ‘Mathematical intuition (Poincaré, Polya, Dewey)’, ‘To establish new mathematics; How mathematicians convince each other’, ‘On the disciplinary study of mathematical practice, with a real live case study’, ‘Proving is convincing and explaining’, ‘Fresh breezes in the philosophy of mathematics’, ‘Definition of mathematics’. De genoemde *real live case study* betreft een schitterende analyse van een alternatieve afleiding van de oppervlakte-formule van Heron: een parel in het boek waaraan een aantal issues uit het boek toegelicht worden. In een tweede gedeelte van het boek staan een aantal meer populaire bijdragen, maar daarom toch niet van minder belang: ‘Mathematics as rhetoric’, ‘Rhetoric in mathematics’, ‘Inde-

pendent thinking', 'Mathematics and ethics', en dergelijke. De derde en vierde gedeelten bestaan uit een selectie van verschenen boekbesprekingen, een cv van de auteur en een index. Ik kan het niet laten om het oordeel van *Emily Grosholz* (*Department of Philosophy, Penn State, Pennsylvania*) met instemming te citeren: "This collection of essays by Reuben Hersh makes an important contribution. His lively and eloquent essays bring the reality of mathematical research to the page. He argues that the search for foundations is misleading, and that philosophers should shift from focusing narrowly on the deductive structure of proof, to tracing the broader forms of quasi-empirical reasoning that start the history of mathematics, as well as examining the nature of mathematical communities and how and why their collective judgments evolve from one generation to the next. If these questions keep you up at night, then you should read this book. And if they don't, then you should read this book anyway, because afterwards, they will!" Voor iedere collega: koop en lees dit boek. Voor alle docenten aan lerarenopleidingen (zowel universitair als niet-universitair): de stof van dit boek moet mijns inziens beslist tot de geestelijke bagage behoren van iedere (aankomende) wiskundedocent.

Wim Kleijne



Leila Schneps (ed.)
**Alexandre Grothendieck
A Mathematical Portrait**

International Press of Boston, 2014
viii + 307 p., prijs \$ 85.00
ISBN 9781571462824

Alexandre Grothendieck, zonder twijfel een van de meest invloedrijke, briljante en singuliere wiskundigen van de twintigste eeuw, heeft een bijzondere biografie en een sterke persoonlijkheid, waardoor hij zich enorm leent tot idolatrie, fictionalisering, gefantaseer en gepyschologiseer. Winfried Scharlau heeft twee boeken in eigen beheer uitgebracht waar — in ieder geval tussen de speculatie over Grothendiecks drijfveren — erg degelijke en fascinerende biografische informatie over de vroege en late jaren van Grothendieck te vinden is. Het huidige boek heeft een ander doel, namelijk: Grothendieck laten zien terwijl hij 'aan het werk' is. Aan de oorsprong van dit boek staan vragen zoals: wat heeft hij gedaan, en vooral: hoe heeft hij het gedaan? Wat is de 'methode Grothendieck' om wiskundige problemen aan te pakken? Dat soort vraag wordt in dit boek opgedeeld onder dertien experts, die het ieder op hun eigen manier aanpakken. Eigenlijk was het eerste dat me opviel hoe herkenbaar de auteurs zelf zijn doorheen de teksten die ze hebben geschreven. Ik vind het idee van de onderneming erg lovenswaardig en de kwaliteit van het resultaat wisselend, met als dieptepunt een biografische imitatie-erudiete bijdrage van Cartier waarin hij tussen de lijnen door zijn eigen plek in de geschiedenis van de wiskunde staat op te vijzelen. Omdat het boek toch vooral door algebraïci zal worden gelezen, is het jammer dat het stuk van Diestel over functionaalanalyse te veel voorkennis aanneemt en niet strak genoeg geschreven is. In de categorie interessante en leeswaardige stukken met historisch-wiskundige achtergrond vinden we Karoubi over K-theorie, Raynaud over schema's, Murre over de fundamenteelgroep en Illusie over etale cohomologie. Bij tweede inspectie vond ik vooral Raynaud erg goed, omdat hij in weinig woorden kan zeggen waarom we het eigenlijk hebben over platheid, representabiliteit, eindige presentatie, enzovoort. Er zijn kortere, impressionistische stukken van Mumford, Hartshorne en

Manin, die ik weinig vond bijdragen tot het geheel; de tekst van Manin, die over 'motieven' gaat, is eigenlijk te kort om dit onderwerp tot zijn recht te laten komen. Het langste artikel van het boek is een stuk van Carlos Simpson over 'Descent', maar dat is eigenlijk een soort monografie over wat er na Grothendieck kwam. De correspondentie tussen Grothendieck en Serre wordt geanalyseerd in een interessant stuk van Schneps (hier gelukkig ook wat 'motieven'), en verder bevat het boek de analyse door Frans Oort van de werkwijze van Grothendieck. Oort doet dit aan de hand van voorbeelden, iets wat Grothendieck zelf vast vreselijk had gevonden, maar wat ik erg prettig vond lezen. Dankzij deze twee laatste stukken kan je als wiskundige het werk van Grothendieck nog meer op prijs stellen. Al met al is dit een inhoudelijk fraai boekwerk waarvan ik iedere wiskundige de aanschaf kan aanraden. Veel van de bijdragen zijn ook los en gratis op internet te vinden. Ten slotte nog dit: waarschijnlijk kan zelfs wiskunde niet zonder personen-cult, hiërofanen, name-dropping en mediacircus, en zijn we in deze mattheüseffect-tijd allemaal nog meer in die richting opgeschoven. Uit dit boek is, ter verademing, veel over wiskunde-an-sich te leren, maar wat Grothendieck er zelf van zou hebben gedacht is denk ik wel duidelijk. Ik had nog zo graag geweten of hij in onmin leefde met zijn eigen stellingen, of alleen met de wereld eromheen.

Gunther Cornelissen



Yvette Kosmann-Schwarzbach (éditrice)
**Siméon-Denis Poisson
Les mathématiques au service de la science**

Les Éditions de l'École polytechnique, 2013
xiii + 522 p., prijs € 28,00
ISBN 9782730215848

Siméon-Denis Poisson (1781–1840) was één van de toonaangevende wiskundigen in het Frankrijk van de revolutie en de restauratie van de vroege negentiende eeuw. Zijn naam is verbonden aan verschillende begrippen uit de wiskunde en de natuurkunde. Deze bundel bevat negentien bijdragen over diverse aspecten van zijn leven en werk en een uitvoerige documentatie van zijn oeuvre. De bijdragen zijn in zeven secties verdeeld: leven, (zuivere) wiskunde, mechanica, fysica, kansrekening, receptie en zijn bibliografie. De bundel geeft een rijk beeld van Poisson, maar het ontbreekt aan een samenhangende visie op de persoon, zijn werk, en zijn plaats in de geschiedenis. Het merendeel van de artikelen gaat diep in op mathematisch-wiskundige aspecten van Poissons individuele publicaties. Echter, hoe hij heeft bijgedragen aan de vorm die de mathematische fysica in de vroege negentiende eeuw kreeg in de kringen rond de École Polytechnique, daarvan krijgt de lezer slechts een fragmentarisch beeld. In het licht van de geschiedenis is de ondertitel van de bundel enigszins merkwaardig: het was juist in deze tijd van Laplace, Fourier, Cauchy dat wiskunde los gedacht begon te worden van de natuurkunde en als 'dienstbaar' gezien. Ook de enorme omslag in de wiskundige praktijk die zich van Laplace naar Fourier en Cauchy voltrok — van het oplossen van differentiaalvergelijkingen met behulp van machtsreeksen naar Fourieranalyse en integralen — blijft impliciet. Poisson verzette zich krachtig tegen de post-Laplaciaanse nieuwlichterij — een strijd die hij verloor. Over het algemeen rijst uit de bundel het beeld op van een wetenschapper die vooral uitblonk in het streng uitwerken van en ingenieus reageren op ideeën van anderen. Een wetenschapper die de gevestigde macht vertegenwoordigde, zo-

wel inhoudelijk als institutioneel. De grootste verrassing daarbij is dat hij de val van Laplace overleefde en zijn positie als prominent docent en bestuurder wist te versterken. Zoals gezegd, dergelijke conclusies zijn voor rekening van de lezer die ze moet distilleren uit de afzonderlijke bijdragen. Wat dat betreft is deze uitgave geen verbetering van de oorspronkelijke editie uit 1981. Het betreft hier namelijk een actualisering van een bundel die de École Polytechnique uitgaf ter ere van de 200ste geboortedag van Poisson. De aanleiding van deze nieuwe editie is niet geheel duidelijk en de actualisering van de oorspronkelijke bijdragen is tamelijk minimaal. De voornaamste toevoeging bestaat uit

een aantal bijdragen van de samenstelster, in het bijzonder over wat zij noemt de 'Poisson-meetkunde'. Het gaat daarbij om een deelgebied dat rond 1980 vorm kreeg en waarin Poisson-variëteiten een prominente plaats innemen. De bijdrage van Poisson zelf blijft daarbij wat onduidelijk, het verhaal speelt zich grotendeels in de late twintigste eeuw af. Of een meetkunde ook toegevoegd gaat worden aan de lijst zaken die vernoemd zijn naar Poisson zal de tijd leren. Ondertussen kan de liefhebber zich verdiepen in de fijne details van zijn verdeling en zijn vergelijking, de haken en de algebra, enzovoort.

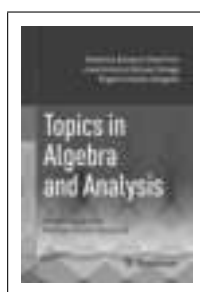
Fokko Jan Dijksterhuis

Recent verschenen publicaties. Als u een van deze boeken wilt bespreken of als u suggesties heeft voor andere boeken voor deze rubriek, laat dit dan per e-mail weten aan reviews@nieuwarchief.nl.



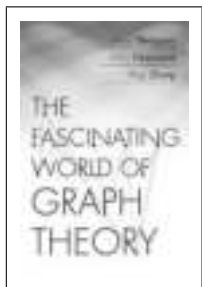
David Ellwood, Herwig Hauser, Shigefumi Mori, Josef Schicho (eds.)
The Resolution of Singular Algebraic Varieties

American Mathematical Society, 2014
ISBN 9780821889824
www.ams.org/bookstore?fn=20&ikey=CMIP-20



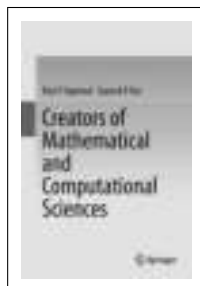
Radmila Manfrino Bulajich et al.
**Topics in Algebra and Analysis
Preparing for the Mathematical Olympiad**

Springer, 2015
ISBN 9783319119458
www.springer.com/978-3-319-11945-8



Arthur Benjamin, Gary Chartrand, Ping Zhang
The Fascinating World of Graph Theory

Princeton University Press, 2014
ISBN 9780691163819
press.princeton.edu/titles/10314.html



Ravi P. Agarwal, Syama K. Sen
Creators of Mathematical and Computational Sciences

Springer, 2014
ISBN 9783319108698
www.springer.com/978-3-319-10869-8



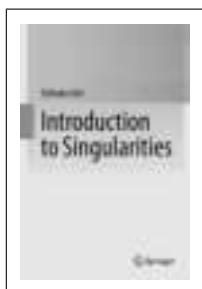
Michael Harris
**Mathematics without Apologies
Portrait of a Problematic Vocation**

Princeton University Press, 2015
ISBN 9780691154237
press.princeton.edu/titles/10317.html



Christopher D. Hacon et al. (eds.)
**Recent Advances in Algebraic Geometry
A volume in honor of Rob Lazarsfeld's 60th birthday**

Cambridge University Press, 2015
London Mathematical Society Lecture Note Ser.
ISBN 9781107647558
www.cambridge.org/9781107647558



Shihoko Ishii
Introduction to Singularities

Springer, 2014
ISBN 9784431550808
www.springer.com/978-4-431-55080-8



Jan van de Craats
Een passie voor symmetrie

Epsilon Uitgaven, deel 78, 2014
ISBN 9789050411431
www.epsilon-uitgaven.nl/E78.php

Problemen

Problem Section

This Problem Section is open to everyone; everybody is encouraged to send in solutions and propose problems. Group contributions are welcome.

For each problem, the most elegant correct solution will be rewarded with a book token worth €20. At times there will be a Star Problem, to which the proposer does not know any solution. For the first correct solution sent in within one year there is a prize of €100.

When proposing a problem, please either include a complete solution or indicate that it is intended as a Star Problem. Electronic submissions of problems and solutions are preferred (problems@nieuwarchief.nl).

The deadline for solutions to the problems in this edition is 1 June 2015.

Problem A (proposed by Raymond van Bommel and Julian Lyczak)

A commutative ring R is *charming* if every ideal of R is an intersection of maximal ideals. Prove that a Noetherian charming ring is a finite product of fields. Does there exist a charming ring that is not a product of fields?

Problem B (folklore)

Let S be a set of prime numbers with the following property: for all $n \geq 0$ and distinct $p_1, \dots, p_n \in S$ the prime divisors of $p_1 \cdots p_n + 1$ are also in S . Show that S contains all primes.

Problem C (proposed by Roberto Stockli)

Determine all pairs (p, q) of odd primes with $q \equiv 3 \pmod{8}$ such that $\frac{1}{p}(q^{p-1} - 1)$ is a perfect square.

Edition 2014-3 We received solutions from Pieter de Groen (Brussels), Thijmen Krebs (Nootdorp), Tejaswi Navilarekallu and Hendrik Reuvers (Maastricht).

All three problems of 2014/3 asked for a construction with origami in a limited number of moves. More precisely, given a collection of points and lines (or *folds*) in the plane, a *move* (cf. the Huzita–Justin–Hatori axioms) consists of adding to the collection one of the following:

- a fold aligning two distinct points;
- a fold aligning two distinct lines;
- if it exists, a fold having two properties of the following types (except for type 3, one may have two distinct alignments of the same type):
 1. the fold aligns a point with a line;
 2. the fold passes through a point;
 3. the fold is perpendicular to a line;
- a sufficiently general fold having at most one property of types 1, 2 and 3.

Problem 2014/3-A. Given three points A, B and C , and a line l passing through C , construct in at most six moves a point D on the line l such that $|CD| = |AB|$.

Solution We received solutions from Pieter de Groen, Thijmen Krebs, Tejaswi Navilarekallu and Hendrik Reuvers. The book token goes to Thijmen Krebs. The following is based on his solution. We give a solution in five moves.

We first assume that AC is not perpendicular to l , and that A does not lie on l .

– Make the fold l_1 aligning A with C .

Let $E = l \cap l_1$. (This uses the assumption that AC is not perpendicular to l .)

– Make the fold l_2 through A and E .

– Make a fold l_3 through A aligning B with l_2 .

– Make the fold l_4 through B perpendicular to l_3 .

Let $B' = l_2 \cap l_4$. (If $l_2 = l_4$, take $B' = B$ instead.) As l_3 is an angular bisector of $\angle BAB'$, and $l_4 = BB'$ is perpendicular to l_3 , it follows that $\triangle ABB'$ is isosceles with apex A . Therefore $|AB'| = |AB|$.

Redactie:

Gabriele Dalla Torre

Christophe Debry

Jinbi Jin

Marco Streng

Wouter Zomervrucht

Problemenrubriek NAW

Mathematisch Instituut

Universiteit Leiden

Postbus 9512

2300 RA Leiden

problems@nieuwarchief.nl

www.nieuwarchief.nl/problems

- Make the fold l_5 through B' perpendicular to l_1 .

Let $D = l \cap l_5$. (This uses the assumption that A does not lie on l .) As l_1 and l_5 both are perpendicular to AC , by the previous argument, it follows that $|CD| = |AB'| = |AB|$, as desired. If in the above case, A lies on l , but B does not, then we can simply switch the roles of A and B in the above.

Now assume that either AC is perpendicular to l , or that both A, B lie on l .

- Make the fold l_1 aligning A with C .
- Make a fold l_2 aligning both A and B with l_1 .

Let $E = l_1 \cap l_2$. (Note that l_1 is parallel to l_2 if and only if AB is parallel to l , but in that case we could have constructed D in one move in the first place.)

- Make the fold l_3 through B perpendicular to l_2 .

Let $F = l_1 \cap l_3$.

- Make the fold l_4 through E aligning C with l_1 , so that l_4 is the reflection of l_2 in l_1 .
- Make the fold l_5 through F perpendicular to l_4 .

Let $D = l \cap l_5$. Moreover, let A' be the auxiliary point that is the reflection of A in l_2 . Then, arguing in a similar way as in the previous case, we see that $|A'F| = |AB|$ in both cases. If A, B lie on l , then we also have $|CD| = |A'F| = |AB|$ by the same argument. If AC is perpendicular to l , then l and l_1 are parallel, and so are $A'C$ and l_5 ; so $CDFA'$ is a parallelogram, and $|CD| = |A'F| = |AB|$.

Problem 2014/3-B. Construct a golden rectangle (including its sides) in at most eight moves.

Solution We received solutions from Pieter de Groen, Thijmen Krebs, Tejaswi Navilarekallu and Hendrik Reuvers. The book token goes to Tejaswi Navilarekallu. The following is based on his solution, which has similar ideas to those of Pieter de Groen and Thijmen Krebs.

- Make a fold l_1 .
- Make a fold l_2 perpendicular to l_1 .
- Make a fold l_3 (distinct from l_2) perpendicular to l_1 .
- Make the fold l_4 aligning l_1 and l_2 .

Let $A = l_1 \cap l_2$, $B = l_1 \cap l_3$, and let $X = l_3 \cap l_4$. Then $\triangle ABX$ is an isosceles triangle with apex B , so $|AB| = |BX|$.

- Make the fold l_5 aligning B and X .

Let $Y = l_3 \cap l_5$. Then $|BY| = \frac{1}{2}|BX| = \frac{1}{2}|AB|$, so $|AY| = \frac{1}{2}\sqrt{5}$.

- Make the fold l_6 through Y aligning A with l_3 such that A and B lie on the same side of l_6 .
- Make the fold l_7 through A perpendicular to l_6 .

Let $C = l_3 \cap l_7$. As l_6 is an angular bisector of $\angle AYC$, and l_7 is perpendicular to l_6 , the triangle $\triangle ACY$ is isosceles with apex Y . Therefore $|CY| = |AY| = \frac{1}{2}\sqrt{5}$, and $|BC| = |BY| + |CY| = \frac{1}{2} + \frac{1}{2}\sqrt{5}$, i.e. A, B, C form three vertices of a golden rectangle.

- Make the fold l_8 through C perpendicular to l_3 .

Now $ABCD$ is a golden rectangle (with sides l_1, l_2, l_3, l_8).

Problem 2014/3-C. Given two points A and B , construct in at most four moves the point C on the segment AB such that $|AC| = \frac{1}{3}|AB|$.

Solution We received solutions from Pieter de Groen, Thijmen Krebs, Tejaswi Navilarekallu and Hendrik Reuvers. The book token goes to Hendrik Reuvers. The following solution is based on that of Thijmen Krebs.

- Make the fold l_1 aligning A with B .
- Make a fold l_2 aligning A with l .

Let $P = l_1 \cap l_2$. Let A' be the reflection of A in l . (Note that A' is not a point that we have constructed; we only use it as an auxiliary point for the following arguments.) Then $|A'B| = |AB|$, and as l is the perpendicular bisector of AB , it follows that $AA'B$ is equilateral, and that P is its centroid. Therefore, if B' is the midpoint of AA' , we have $|PB'| = \frac{1}{3}|BB'|$.

- Make the fold l_3 through P perpendicular to l_2 .
- Make the fold l_4 through A and B .

Let $C = l_3 \cap l_4$. As l_3 is parallel to AA' , it follows that $|AC| = \frac{1}{3}|AB|$, as desired.