

Inhoud | Contents

Artikelen | Features

- Recreatieve wiskunde | Recreational maths**
- 234 De kans om Ganzenbord te winnen
Jan Friso Groote, Hans Zantema
- Onderzoek | Research**
- 240 The spectral model of particle physics
Walter D. van Suijlekom
- Column | Column**
- 251 Inverse problemen
Tristan van Leeuwen
- Column | Column**
- 253 Reconstruction of risk measures from financial data
Johannes Schmidt-Hieber
- Column | Column**
- 255 The copositive cone
Peter J.C. Dickinson
- Onderwijs | Education**
- 257 “Hoed u in het onderwijs voor extreme oplossingen”
Martinus van Hoorn
- Geschiedenis | History**
- 264 Ibn al-Haythams biljartprobleem voor een ellips
Joseph Steenbrink
- Onderwijs | Education**
- 266 Google subsidieert wiskundeonderwijs: een korte indruk uit Zwolle
Nellie Verhoef
- Afscheidsrede | Valedictory Lecture**
- 270 Wiskunde aan de grenzen van het toepassen
Arthur Veldman
- De oplossing | The Solution**
- 279 The André–Oort conjecture
Bas Edixhoven, Lenny Taelman
- Onderzoek | Research**
- 283 Singulariteiten
Vivi Rottschäfer

Rubrieken | Departments

- 227 Redactioneel
Jan van Neerven
- 228 Servicepagina
- 229 Agenda
Patrick Hafkenscheid
- 231 Nieuws
Patrick Hafkenscheid
- 277 Het keerpunt van Paul van de Veen
Ionica Smeets
- 285 In de verdediging
- 288 Boekbesprekingen
- 294 Problemen

Uitgelicht



Een uiteenzetting van Walter van Suijlekom over de onderliggende wiskunde van het standaardmodel voor de deeltjesfysica.



Drie tenure-trackers stellen zich voor: Tristan van Leeuwen, Johannes Schmidt-Hieber en Peter J.C. Dickinson.

Colofon

Het Nieuw Archief voor Wiskunde is een uitgave van het Koninklijk Wiskundig Genootschap en verschijnt vier maal per jaar. Het tijdschrift richt zich op een ieder die zich beroepsmatig met wiskunde bezighoudt, als academisch of industrieel onderzoeker, student, leraar, journalist of beleidsmaker. Het stelt zich ten doel te berichten over ontwikkelingen in de wiskunde in het algemeen en in de Nederlandse wiskunde in het bijzonder.

ISSN 0028-9825

Adres

Nieuw Archief voor Wiskunde
Centrum Wiskunde & Informatica
Postbus 94079
1090 GB Amsterdam
tel. 020-5924288
redactie@nieuwarchief.nl
www.nieuwarchief.nl

Hoofredactie

Richard Boucherie (r.j.boucherie@utwente.nl)
Jan van Neerven (j.m.a.m.vanneerven@tudelft.nl)

Eindredactie/Bladmanager

Fred Drissen (fred@nieuwarchief.nl)

Redactie

Patrick Hafkenscheid (p.hafkenscheid@vu.nl)
Jan Hogendijk (j.p.hogendijk@uu.nl)
Mark Timmer (timmer@cs.utwente.nl)

Bureau redactie

Gianni van den Braak
Lætitia Diemer

Medewerkers

Hans Cuypers (TU/e), Gabriele Dalla Torre (UL), Christophe Debry (KU Leuven), Geertje Hek (UvA), Jinbi Jin (UL), Teun Koetsier (VU), Derk Pik (JSG Maimonides), Sjoerd Rienstra (TU/e), Hans Sterk (TU/e), Marco Streng (VU), Jan Ten Thije Boonkamp (TU/e), Wouter Zomervrucht (UL)

Illustraties

Ryu Tajiri, Amsterdam

Advertenties

advertenties@nieuwarchief.nl

Abonnementen/Subscriptions

Abonnementenservice NAW
Postbus 2238, 5600 CE Eindhoven
admin@wiskgenoot.nl, tel. 088-2265256

Abonnementsperiode/Subscription period

Een abonnement gaat in op de dag dat uw aanmelding ontvangen wordt. De opzegtermijn is twee maanden vóór het verstrijken van de abonnementsperiode.

The subscription starts on the day that your application is received. The term of notice is two months before the end of the current subscription period.

Exchange subscriptions

Koninklijk Wiskundig Genootschap Library
Centrum voor Wiskunde en Informatica
Postbus 94079, NL-1090 GB Amsterdam
KWG-exchange@cw.nl, fax +31 20 5924026

Vormgeving

Kitty Molenaar (ontwerp)
Susanne Laws (omslag, begeleiding binnenwerk)
Programmatuur (CONTEXT)
Hans Hagen, PRAGMA-ADE, Hasselt (Overijssel)
Druk
Drukkerij Ten Brink, Meppel

Koninklijk Wiskundig Genootschap

Het Koninklijk Wiskundig Genootschap (KWG) is een landelijke vereniging van beoefenaren van de wiskunde. In 1778 opgericht onder de zinspreuk: 'Een onvermoeide arbeid komt alles te boven' is het 's werelds oudste nationale wiskundegenootschap. Leden ontvangen het Nieuw Archief voor Wiskunde als onderdeel van hun lidmaatschap.

De contributie voor gewone leden bedraagt in 2015 €90 per jaar. Voor gepensioneerden en werklozen €45. Voor studenten aio's en oio's van een Nederlandse universiteit of hbo-opleiding €35. Studenten en pas afgestudeerden kunnen een jaar lang gratis lid worden. Voor leden van de wiskundige vakverenigingen VvS+OR, NVvW en NVORWO geldt het gereduceerd tarief van €70. Leden die het Nieuw Archief voor Wiskunde niet willen ontvangen, betalen slechts €50 contributie. Losse nummers zijn te bestellen voor €20.

Members of SIAM, the *Société Mathématique de France*, the *Gesellschaft für Angewandte Mathematik und Mechanik*, the *Deutsche Mathematiker-Vereinigung*, and of the *American, Australian, Belgian, Indian, London, Spanish, and South-African Mathematical Societies* living outside of the Netherlands pay €70 instead of the full membership fee of €90 a year. Conversely, these foreign societies, as well as the VvS+OR and the NVORWO, have reduced membership fees for KWG-members. A postage charge of €10 is added for members living abroad but in Europe, and a charge of €12,50 for members living outside of Europe.

Instituten in Nederland en buitenland kunnen zich abonneren op het Nieuw Archief voor Wiskunde voor €100 (Nederland), €110 (Europa) of €112,50 (buiten Europa).

Website: www.wiskgenoot.nl

Ledenadministratie

Abonnementenservice NAW
Postbus 2238, 5600 CE Eindhoven
admin@wiskgenoot.nl, tel. 088-2265256
Bestuur (wiskgenoot@wiskgenoot.nl)

Geurt Jongbloed (TUD, voorzitter), Fetsje Bijma (VU, penningmeester), Joke Blom (CWI, secretaris), Onno van Gaans (UL), Jenneke Krüger (SLO), André Ran (VU), Herman te Riele (CWI), Arjen Sevenster, Mark Veraar (TUD)

Informatie voor auteurs

Kopij

Het Nieuw Archief voor Wiskunde is een geredigeerd tijdschrift. Kopij dient elektronisch te worden aangeboden aan de hoofdredactie. Uitgebreide informatie en auteursinstructies kunt u vinden op www.nieuwarchief.nl.

Reprints

Auteurs ontvangen een elektronische reprint in pdf-formaat.

Volgende nummers

nummer	verschijningsdatum	deadline kopij
1	02-03-2015	verstreken
2	01-06-2015	01-02-2015
3	07-09-2015	01-05-2015
4	07-12-2015	01-08-2015

Instituutsleden

De publicaties van het Koninklijk Wiskundig Genootschap worden mede mogelijk gemaakt door de bijdragen van de volgende instituten.



Centrum Wiskunde
& Informatica



Rijksuniversiteit Groningen



Universiteit van Amsterdam



Universiteit Leiden



Vrije Universiteit



Universiteit Utrecht



Technische Universiteit
Eindhoven



Eurandom



Technische Universiteit Delft



Universiteit Twente



Radboud Universiteit
Nijmegen



Freudenthal Instituut

Op het omslag

Genzenbord wordt al eeuwenlang gespeeld. Mischien haalt u het rond de feestdagen ook weer eens uit de kast om gezellig met vrienden of familie te spelen. Lees dan eerst het artikel van Jan Friso Groote en Hans Zantema op pagina 234 om te zien wat uw winstkansen zijn.

Uitgerekend

Toen een van mijn kinderen drie jaar oud was ontwikkelde het plotseling een grote fascinatie voor getallen. Aanleiding waren de knopjes in de lift van het appartement waar wij toen woonden: het was een ouderwetse lift met voor ieder van de 17 etages een apart drukknopje. Al snel bevatten alle tekeningen genummerde knopjes, en toen de sinterklaastijd aanbrak, verschenen tekeningen van zakken met genummerde pepernoten.

Een kennis kwam op het idee een passend kadootje te geven: een houten matrix van 9×9 kubusjes met op de bovenzijden de sommetjes uit de tafels van 1 tot en met 9 en op de onderzijden de bijbehorende antwoorden. Een prachtig spelletje natuurlijk en in een mum van tijd waren alle tafels uit het hoofd geleerd. Tot vervelens toe moest ik opgaven stellen ('hoeveel is 4×7 ?'), waarop vol trots het correcte antwoord volgde ('28!'). Op een dag kwam ik op het idee een kleine variatie op dit spelletje door te voeren en vroeg hoeveel snoepjes je eigenlijk nodig hebt als je vier kinderen elk zeven snoepjes wilt geven. Het antwoord: 'Geen idee!' De koppeling met de echte wereld was kennelijk niet gelegd. Het spelletje werd overigens al snel verdrongen door iets spannenders (kloklezen) en binnen de kortste keren waren alle tafels geheel vergeten.

De volgende gedachten dringen zich op. Ten eerste: rekenen is leuk! Ik bedoel het abstracte rekenen zonder context. Ten tweede: rekenen heeft geen zin als het verband met de context ontbreekt. Ten derde: motivatie en uitdaging zijn essentieel. Het is interessant deze anekdote door te trekken naar de discussie rond de verplichte rekentoetsen in het voortgezet onderwijs, waarover we in dit nummer een bijdrage publiceren. Weliswaar is het lastig een driejarig kind met een scholier te vergelijken, maar zeker is dat beiden nieuwsgierig zijn en zich graag laten uitdagen. De praktijk is echter minder rooskleurig en scholieren blijken vaak niet goed genoeg te leren rekenen. Met de invoering van de verplichte rekentoets aan het eind van de middelbare school erkent de politiek dit probleem en meent het te kunnen oplossen met een 'verbod op slecht rekenen': wie slaagt voor het eind-examen maar niet goed kan rekenen, krijgt geen diploma. Een draconische maatregel die in het leven van een vwo'er bovendien zes jaar te laat komt. De verantwoordelijkheid wordt naar de

verkeerde instantie doorgeschoven, namelijk het voortgezet onderwijs, dat zich moet gaan opmaken voor rekenlessen naast (en hopelijk niet ten koste van) het wiskundeonderwijs. Uit het KNAW-rapport van de commissie-Lenstra uit 2009 kwam juist het beeld naar voren dat vooral het aan de opleiding en nascholing van basisschooldocenten schort. Gelukkig heeft het rapport ertoe geleid dat hier aandacht voor komt: de Vereniging Hogescholen is bezig, met steun van OCW, een landelijke kennistoets te implementeren voor de pabo's en tweedegraads lerarenopleidingen, die toetst of de kandidaten de kennisbases beheersen. Dit is een stap in de goede richting.

Misschien wel de leukste gebeurtenis in de afgelopen wiskundemaanden was de toekenning van de eerste Fieldsmedaille aan een vrouwelijke wiskundige. De Iraanse Maryam Mirzakhani won de prijs voor haar onderzoek op het grensvlak tussen meetkunde en dynamica. Hopelijk inspireert deze primeur veel meiden tot een keuze voor een wiskundestudie — en daarna ook voor een loopbaan in de wiskunde. Want dat laatste is vooral het probleem: hoe hoger op de academische ladder, hoe minder vrouwen we tegenkomen. Dat is overigens niet alleen in Nederland zo, maar ook in de meeste andere landen. Zo verhoudt in het Verenigd Koninkrijk het percentage vrouwelijke hoogleraren zich tot het percentage vrouwelijke graduate students als 1:10. In een aantal Zuid-Europese landen ligt deze verhouding weliswaar beter, rond 1:3, maar ook daar stromen veel te weinig vrouwen door naar de hogere posities. Overigens heeft de recente 'clusterronde' vier vrouwelijke tenure-trackers opgeleverd op een totaal van achttien ingevulde posities, een mooi resultaat. Drie van de nieuwe tenure-trackers stellen zich in dit nummer aan u voor.

Tijd voor een gezellig potje ganzenborden. Zorg wel dat u als eerste aan zet bent, want dan heeft u meer kans om te winnen. Nodig ook familie en vrienden uit, want dat verhoogt uw winstkansen nog verder. U kunt het nalezen (en narekenen) in dit nummer. Wie zei ook al weer dat rekenen niet leuk is? 

Jan van Neerven, hoofdredacteur

Delft Institute of Applied Mathematics, TU Delft

Servicepagina

| Service page

Koninklijk Wiskundig Genootschap

□ Secretariaat

Joke Blom, CWI
Postbus 94079, 1090 GB Amsterdam
wiskgenoot@wiskgenoot.nl
www.wiskgenoot.nl

□ Wintersymposium KWG 2015

Het Wintersymposium op 10 januari 2015 heeft als thema 'Dataverwerking en statistiek'. Omgaan met grote hoeveelheden data is een onderwerp uit het nieuwe examenprogramma voor havo en vwo, dat vanaf augustus 2015 van kracht is. Sprekers uit verschillende vakgebieden zullen iets over verwerking van 'big data' vertellen. Fetsje Bijma (VU) verzorgt de inleiding, 'Een frisse blik op statistiek', en illustreert die met voorbeelden uit haar onderzoeksgebied: analyse van data van hersenscans. Maurice Schmeits (KNMI) besteedt aandacht aan een kansverwachtingssysteem voor (zwaar) onweer: 'Kansverwachtingen in de meteorologie'. Marjan Sjerps (NFI, UvA) geeft een voordracht over 'Hoe sterk is het bewijs?' in forensische statistiek. Wouter Verkerke (Nikhef) biedt inzicht in de statistische en data-analysetechnieken die gebruikt zijn om het Higgs-deeltje te vinden: 'De ontdekking van het Higgs-deeltje'.
www.wiskgenoot.nl/watbiedt/wintersymposium15

□ NMC 2015

Het 51ste Nederlands Mathematisch Congres wordt georganiseerd in Leiden op dinsdag 14 en woensdag 15 april 2015. Nadere informatie volgt via nmc.wiskgenoot.nl.

Platform Wiskunde Nederland

□ Bureau PWN

Science Park 123, L013, 1098 XG Amsterdam
bureau@platformwiskunde.nl
pr@platformwiskunde.nl (publiciteit)
Tel: 020-5924006/06-51892525
www.platformwiskunde.nl

□ PWN Nieuwsbrief

Het Platform Wiskunde Nederland publiceert maandelijks een PWN Nieuwsbrief, die op de website te vinden is. Actuele PWN-informatie wordt verder zowel via de website als via Twitter gegeven. overig wiskundenieuws is te vinden op www.platformwiskunde.nl/newsfeed.

European Mathematical Society

□ EMS website

www.euro-math-soc.eu

□ EMS Newsletter

Van de drie-maandelijkse EMS Newsletter is de elektronische versie van de meest recente uitgave beschikbaar op de EMS publications website: www.ems-ph.org/publications.php.

International Mathematical Union

□ IMU website

www.mathunion.org

□ IMU Newsletter

The twee-maandelijkse IMU Newsletter is beschikbaar via www.mathunion.org/imu-net.

Recente publicaties van het KWG

□ **Indagationes Mathematicae** (www.elsevier.com/locate/indag, gratis toegang via 'View Articles')
Special issue 'Poisson 2012: Poisson Geometry in Mathematics and Physics', Marius Crainic, Ori Yudilevich (eds.), Volume 25, issue 5, 2014.

Special issue 'Probability and Numbers', Frits Beukers, Frank den Hollander, Robbert Fokink, Cor Kraaikamp (eds.), Volume 25, issue 4, 2014.

□ **Epsilon Uitgaven** (www.epsilon-uitgaven.nl)

78. *Een passie voor symmetrie*, Jan van de Craats, €20, 2014.

77. *Hemelverschijnselen nabij de Horizon*, Henk Broer, €22, 2013.

76. *Inleiding in de Statistiek*, F. Bijma, M. Jonker en A. van der Vaart, €32, 2013.

75. *An Invitation to Functional Analysis*, B. de Pagter en A.C.M. van Rooij, €25, 2013.

74. *L.E.J. Brouwer - van Mystiek tot Wiskunde*, D. van Dalen, €26, 2013.

□ **Zebra-reeks** (Epsilon Uitgaven)

40. *Kantelpunten en alternatieve evenwichten*, Lia Hemerik, Egbert van Nes en Theo-Jan van de Pol, €10, 2014.

39. *De juiste ondersteuning*, Dolf van den Hombergh en Leon van den Broek, €10, 2014.

38. *SpiroSporen*, Stephan Berendonk en Leon van den Broek, €10, 2013.

37. *Moiré-kunst met niveaulijnen*, Luc Van den Broeck, €10, 2013.

36. *Muziek uitgedrukt in getallen*, Aline K. Honingh en Michiel Schuijjer, €10, 2013.

Manuscripten voor Epsilon Uitgaven kunt u mailen naar redactie@epsilon-uitgaven.nl.

Agenda

| Upcoming Events

december 2014

14 december 2014

□ **Waarom wiebelt een wolkenkrabber?**

Wakker Worden Kinderlezing van bouwkundige Leo Wagemans over hoe hoge gebouwen buigen maar niet barsten.

plaats NEMO, Amsterdam

info e-nemo.nl

16 december 2014

□ **Studiedag voor leraren wiskunde**

Lezingen en workshops over het vak wiskunde voor leraren in het voortgezet onderwijs.

plaats Rijksuniversiteit Groningen

info rug.nl/education/lerarenopleiding

januari 2015

10 januari 2015

□ **Wintersymposium van het KWG**

Jaarlijks symposium van het KWG met dit jaar als thema 'Dataverwerking en statistiek'.

plaats Utrecht

info wiskgenoot.nl

12–16 januari 2015

□ **Quantitative Biology of Auxin Transport**

Workshop mathematische biologie, mede georganiseerd door Bert van Duijn (Fytagoras), Sander Hille, Remko Offringa (UL) en Roeland Merks (CWI).

plaats Lorentz Center@Snellius, Leiden

info lorentzcenter.nl

13–15 januari 2015

□ **40ste Lunteren Conferentie Mathematische Besliskunde**

Jaarlijkse conferentie van het Landelijk Netwerk Mathematische Besliskunde.

plaats Congrescentrum De Werelt, Lunteren

info lnmb.nl/conferences/2015

19–29 januari 2015

□ **1ste ronde Nederlandse Wiskunde Olympiade**

Het begin van de jaarlijkse wiskundewedstrijd voor middelbaar scholieren vanaf de vierde klas.

plaats eigen school

info wiskundeolympiade.nl

20–21 januari 2015

□ **Physics@FOM Veldhoven**

Groots congres dat een beeld dient te geven van alle natuurkundeonderzoek in Nederland.

plaats Veldhoven

info fom.nl/veldhoven

22–23 januari 2015

□ **33ste Panama-conferentie**

De jaarlijkse conferentie over wiskundeonderwijs, met dit jaar als titel 'Rekenen-wiskunde in perspectief'.

plaats Veldhoven

info www.fi.uu.nl/panama

26–30 januari 2015

□ **SWI 2015**

Studiegroep Wiskunde met de Industrie, jaarlijkse werkweek waar wiskundigen werken aan problemen die bedrijven hebben aangeleverd.

plaats Universiteit Utrecht

info www.projects.science.uu.nl/swi2015

26–28 januari 2015

□ **14th Winter School on Mathematical Finance**

Jaarlijkse winterschool met dit jaar als onderwerp 'Nonlinear Pricing Dependence and Model Risk'.

plaats Congrescentrum De Werelt, Lunteren

info mathfin.nl

30 januari 2015

□ **Bijles geven in de bètavakken**

Masterclass voor leerlingen uit de bovenbouw van havo en vwo met interesse in onderwijs.

plaats Utrecht

info betasteunpunt-utrecht.nl

30–31 januari 2015

□ **Nationale Wiskunde Dagen**

21ste editie van de Nationale Wiskunde Dagen, met lezingen, werkgroepen en een informatiemarkt, bedoeld voor wiskundeleraars.

plaats Noordwijkerhout

info fi.uu.nl/nwd

Suggesties voor deze agenda zijn welkom.

Redacteur: Patrick Hafkenscheid

agenda@nieuwarchief.nl

februari 2015

1 februari 2015

Paradisolezingen 2015: Helden van de wetenschap

Paradisolezing van Erik Verlinde over Newton en de zwaartekracht.

plaats *Paradiso, Amsterdam*

info *verstigt.nl*

2–6 februari 2015

Data Integration in the Life Sciences

Lezingen over het gebruik van grote sets data in de levenswetenschappen, georganiseerd door Roel van Driel (NCSB) en Jaap Molenaar (WUR), Lodewijk Wessels (NKI), Hans Westerhoff (VU).

plaats *Lorentz Center@Sellius, Leiden*

info *lorentzcenter.nl*

2–6 februari 2015

Compact Objects as Astrophysical and Gravitational Probes

Workshop die dient tot het bijeen brengen van verschillende disciplines in natuur- en sterrenkunde, mede georganiseerd door Elena Rosse (UL).

plaats *Lorentz Center@Oort, Leiden*

info *lorentzcenter.nl*

11 februari 2015

OnderbouwWiskundeDag

Leerlingen werken in teams van drie of vier leerlingen gedurende een dag aan een 'grote' wiskundige (denk)opdracht waarin probleemoplossen centraal staat.

plaats *eigen school*

info *fi.uu.nl/nl/onderbouwwiskundedag*

12 februari 2015

Bètadag

Een serie workshops voor leerlingen van 3 vwo om zich te oriënteren op een profielkeuze, met name voor een bètaprofiel.

plaats *bètafaculteiten in het hele land*

info *betadagen.nl*

27 februari 2015

Oratie professor Merks

Oratie prof.dr. R.M.H. Merks met als titel 'Multischaal mathematische biologie'.

plaats *Academiegebouw, Leiden*

info *leidenuniv.nl*

maart 2015

13 maart 2015

2de ronde Nederlandse Wiskunde Olympiade

De tweede ronde van de Nederlandse Wiskunde Olympiade. De (ongeveer) 130 beste leerlingen gaan door naar de finale in september.

plaats *Nederlandse universiteiten*

info *wiskundeolympiade.nl*

19 maart 2015

W4Kangoeroe

WereldWijde WiskundeWedstrijd voor basis- en middelbare scholieren.

plaats *eigen school*

info *w4kangoeroe.nl*

23–27 maart 2015

YEPXII: Random walks in random environments

Workshop over random walks, mede georganiseerd door Markus Heydenreich (LU).

plaats *TU Eindhoven*

info *eurandom.nl*

25 maart 2015

Grote Rekendag

13de editie van de Grote Rekendag waarop leuke rekenactiviteiten centraal staan.

plaats *scholen in het hele land*

info *goterekendag.nl*

april 2015

10 april 2015

Leve de Wiskunde!

Het jaarlijkse wiskundecongres voor inzicht in de actuele ontwikkelingen in de wiskunde, voor docenten en leerlingen.

plaats *UvA, Science Park, Amsterdam*

info *betaonderwijs.uva.nl*

13–17 april 2015

Brain Equations: Challenges and Next Generation Mathematical Models

Workshop mede georganiseerd door Stephan van Gils (UT) en Pauk Tiesinga (RU).

plaats *Lorentz Center@Snellius, Leiden*

info *lorentzcenter.nl*

14–15 april 2015

NMC 2015

51ste Nederlands Mathematisch Congres, jaarlijkse bijeenkomst van wiskundig Nederland.

plaats *Science Campus, Leiden*

info *nmc.wiskgenoot.nl*

14–20 april 2015

European Girls' Mathematical Olympiad

Derde editie van de Europese wiskundewedstrijd speciaal voor meisjes.

plaats *Minsk, Wit-Rusland*

info *wiskundeolympiade.nl*

mei 2015

8–10 mei 2015

Benelux Mathematical Olympiad

De Benelux-versie van de wiskundeolympiade, dit jaar in Luxemburg.

plaats *Mersch, Luxemburg*

info *wiskundeolympiade.nl*

juni 2015

15–19 juni 2015

Dynamics and Geometry

Workshop mede georganiseerd door Heinz Hanßmann (UU) en Igor Hoveijn, Gert Vegter en Holger Waalkens (RUG).

plaats *Lorentz Center@Oort, Leiden*

info *lorentzcenter.nl*

Nieuws

| News

Emeritus Hoogleraar Jan Strooker overleden

Op 16 augustus 2014 is Jan Strooker overleden. Hij was emeritus hoogleraar in de algebra, werkzaam als professor op de Universiteit Utrecht vanaf 1980, waar hij officieel was aangesteld tot zijn pensioen in 1997. Hij bleef nog ver na zijn pensioen actief in de wiskundige wereld. Zo schreef hij onder andere mee aan het artikel over het leven van Springer in dit blad. Hij is op 25 augustus gecremeerd in Bilthoven.

Thomas Hales rondt computerbewijs vermoeden van Kepler af

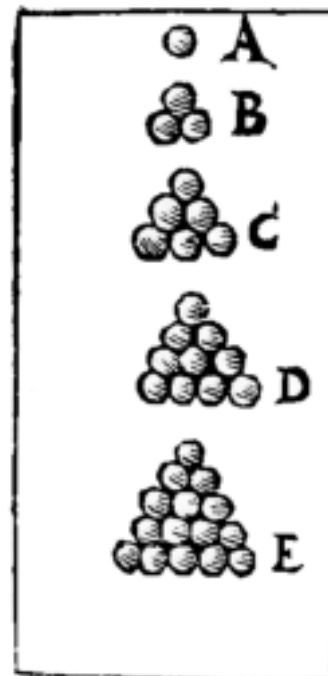
Thomas Hales heeft na vijftien jaar werk zijn formele computerbewijs van het vermoeden van Kepler rond. Het programma genaamd FlySpeck staat op internet en kan worden gedownload van de website <https://code.google.com/p/flyspeck/wiki/AnnouncingCompletion>.

Het vermoeden van Kepler zegt dat er geen efficiëntere stapeling is van gelijkvormige bollen dan de kubische stapeling. De dichtheid van deze opstapelingen is ongeveer 74 procent (de verhouding tussen bollen en ruimte tussen de bollen). Dit is het oudste probleem in de discrete meetkunde.

Het eerste bewijs van dit vermoeden komt uit 1998 van Ferguson en Hales. Het bewijs bestaat uit ongeveer 300 pagina's tekst en een groot aantal computerberekeningen.

Al het werk zal worden samengevat in een boek dat binnenkort verschijnt, genaamd *Dense Sphere Packings*, hierin zal zowel het originele bewijs worden toegelicht als het computerbewijs.

El superpone a vnum pro apice, est
num globorum c, & alia demum d



x. Im
gusti
at fig
uigit
litior
riore
nos i
iam v
apex
pyrat
riori
bulu
mis, i
tuor
Et ru
nus g
duod
nemj

Een illustratie van het vermoeden uit *Strena Seu de Nive Sexangula* (1611).

Deze rubriek is een kroniek van wiskundige activiteiten in Nederland. Toekomstige activiteiten worden aangekondigd en van voorbije activiteiten wordt verslag gedaan. Wilt u uw aankondiging of verslag in deze rubriek geplaatst zien? Stuur ons dan uw bijdrage van ± 350 woorden, zo mogelijk met illustratie. De redactie behoudt zich het recht voor berichten te weigeren of in te korten.

Redacteur: Patrick Hafkenscheid

nieuws@nieuwarchief.nl

Statistische technieken toegepast om dialect te voorspellen

Martijn Wieling (Universiteit Groningen) en co-auteurs hebben met behulp van statistische model-technieken lexicografische eigenschappen

van de Toscaanse dialecten weten te voorspellen. Hoewel onderzoek naar dialecten verre van nieuw is, was het tot nu gebruikelijk om onderscheid te maken tussen de geografische en sociale dialectologie.

Voor het eerst hebben onderzoekers nu deze twee aspecten in één onderzoek weten te combineren. Wieling en co-auteurs gebruikten lexicografische data over 170 concepten gebruikt door 2060 personen in 213 verschillende locaties in Toscane.

Zoals verwacht speelde de geografische ligging van de plekken een grote rol in het dialect. Sociale aspecten kwamen ook naar boven. Een voorbeeld is het grote verschil tussen de dialecten van jong en oud, zo gebruikten jonge mensen vaak concepten die dichter bij de standaardtaal in de buurt kwamen. Ook gebruikten boeren en mannen vaker woorden die verder van de standaardtaal verwijderd waren.

linguisticsociety.org



Enquêtes voorspellen taal, niet gedrag

Onderzoekers van de Universiteit van Colorado Boulder hebben een grootschalig onderzoek gedaan naar enquêtes. De onderzoekers concludeerden dat de uitslagen van enquêtes meer vertellen over het taalgedrag van de persoon die het invult dan over het gedrag van die persoon (waar natuurlijk de enquête een uitslag over wil krijgen).

Uit de studie, gepubliceerd in *PLOS ONE*, bleek dat mensen van nature bij het invullen van de enquêtes antwoorden selecteren die op elkaar lijken (ook al zijn de overeenkomsten subtiel).

De onderzoeken die centraal stonden in de studie gingen met name over organisatorisch gedrag, zoals bijvoorbeeld leiderschap, motivatie en hoe tevreden mensen waren over hun baan. Een type onderzoek waaruit niet de taal een grotere rol bleek te spelen, was persoonlijkheidsonderzoek.

De onderzoekers spreken ook hun zorgen uit over de manier waarop wetenschappers hun enquêtes opstellen, en manen iedereen stil te staan bij wat ze precies aan het testen zijn.

plosone.org

Stefan Manegold nieuwe hoogleraar in Leiden

Vanaf 15 september 2014 is Stefan Manegold aangesteld als hoogleraar Data Management aan de Universiteit van Leiden. Het is een parttime aanstelling voor een dag in de week aan het Leiden Institute of Advan-

ced Computer Science (LIACS) en het Leiden Centre of Data Science (LCDS). De rest van de week zal Manegold blijven werken aan het CWI.

Manegolds onderzoek is gefocust op het verbeteren van datamanagementtechnologie, om aan de groeiende vraag naar deze technologie te voldoen. Een van zijn specialiteiten zijn hardware-bewuste algoritmen.

Manegold is al sinds 1997 werkzaam aan het CWI, hij is ook de co-oprichter van het MonetDB project, het open-source databasesysteem.

Eerste SIAM Student Chapter in Nederland (TU Delft) opgericht

Met ingang van september 2014 heeft SIAM (Society of Industrial and Applied Mathematics) een lokale studentenafdeling aan de TU Delft. Dit 'SIAM Student Chapter' is de eerste studentenafdeling van SIAM in Nederland, en richt zich op masterstudenten en promovendi, en ook op stafleden, uit allerlei wiskundige onderzoeksgebieden. Het Chapter organiseert onder andere seminars en lezingen, bedrijfsbezoeken en zorgt voor sociale binding. Op 19 september 2014 is het ontstaan van het Chapter feestelijk gevierd tijdens een startbijeenkomst, waarop het Student Chapter aan de aanwezigen werd gepresenteerd. Ook werden er twee inhoudelijke presentaties gegeven. Aanwezig waren 27 belangstellenden (afdelingen wiskunde, elektrotechniek, materiaalkunde en aerodynamica). Een impressie van deze bijeenkomst en van de activiteiten van het Chapter is te zien op sscdelft.github.io.

Thea Vuik

Computersimulaties tonen mechanismen achter bloedvatgroei

Computationeel bioloog Margriet Palm van het Centrum Wiskunde & Informatica (CWI) onderzocht met behulp van gesimuleerde experimenten hoe de groei van bloedvaten in zijn werk gaat.

Het bloedvatstelsel kan levenslang nieuwe bloedvaatjes vormen. Dit is nodig voor groei of wondgenezing. Bloedvatgroei speelt echter ook een belangrijke rol bij ziekteprocessen, zoals tumorgroei en oogaandoeningen. In haar proefschrift onderzocht Palm hoe interactie tussen verschillende celtypen er voor zorgt dat een bloedvatnetwerk ontstaat. Met grote hoeveelheden computersimulaties, waarin de eigenschappen van de celtypen systematisch werden gevarieerd, bootste ze de ontwikkeling van een netwerk na. Hieruit leidde zij af welke ceileigenschappen verantwoordelijk zijn voor de patronen die in lab-experimenten zijn gevonden.

Palm verdedigde haar proefschrift *High-throughput simulation studies of angiogenesis* op dinsdag 30 september aan de Universiteit Leiden. Zie ook de rubriek 'In de verdediging' in dit nummer.

cwi.nl

29 leraren ontvangen Promotiebeurs

In een project van NWO genaamd de Promotiebeurs hebben 29 leraren uit het primair-, voortgezet-, middelbaar beroeps-, hoger beroeps-, en speciaal onderwijs een beurs gekregen om naast hun werk ook te promoveren. Het idee achter deze beurs is dat er op deze manier meer leraren worden geprikkeld om zichzelf verder te ontwikkelen.

In 2011 is het project van start gegaan en hebben rond de 140 leraren een verzoek ingediend. Op 8 oktober jongstleden zijn de 29 leraren bekendgemaakt wiens verzoek is gehonoreerd.

Een belangrijk criterium voor de selectie was dat de opgedane kennis en onderzoekservaring direct ten goede komt aan het onderwijs.

Een kleine greep uit de gehonoreerde verzoeken: 'Videogebruik van eigen stagelessen bij het leren van wiskundendidactiek door pabostudenten', 'Improving mathematical abilities of Braille-dependent students' en 'Een flexibel curriculum in de technische lerarenopleidingen'.

nwo.nl

Lenny Taelman aangesteld als professor aan de UvA

Dr. L. Taelman is aangesteld als professor in de algebraïsche meetkunde aan de Universiteit van Amsterdam. Taelman doet onderzoek in de *Arithmetic algebraic geometry*, een levendig onderzoeksgebied dat in de doorsnede ligt van meetkunde en getaltheorie. Het gebruikt technieken uit de meetkunde en topologie om een beter beeld te krijgen van de hogere rekenkunde. Taelmans onderzoek is met name gefocust op L-functies en motieven voor functie-lichamen.

Taelman was eerder werkzaam als postdoc aan de École Polytechnique en als universitair docent in Leiden.

kdvi.uva.nl

UvA wint twee zilveren en één bronzen medaille op de IMC

De UvA-delegatie heeft op de 21ste editie van de International Mathematics Competition for University Students (ICM) drie medailles behaald. Derdejaars studenten Nastasha Wijers en Josha Box behaalden een zilveren medaille en Sam van den Brink, tweedejaars, een bronzen medaille.

De IMC werd van 29 juli tot 4 augustus gehouden in Blagoevgrad, Bulgarije. Het is een open competitie voor wiskundestudenten van alle jaren. Over de laatste 17 jaar hebben in totaal 44 landen meegedaan. De wedstrijd zelf bestaat uit tien opgaven uit de algebra, analyse, meetkunde of combinatoriek, en is verdeeld over twee vijfurs sessies.

kdvi.uva.nl

Emeritus Hoogleraar Pieter Mullender overleden

Op donderdag 31 juli overleed Pieter Mullender op 97-jarige leeftijd. Mullender was van 1952 tot zijn emeritaat in 1981 werkzaam op de VU als hoogleraar. Hij promoveerde twee maanden na het einde van de oorlog in 1945 aan de VU bij J.F. Koksmas.

De meetkunde van de getallen was altijd het onderzoeksgebied van Mullender gebleven, ook heeft hij een grote rol gespeeld tijdens de Wet Universitaire Bestuurshervorming uit 1970. Mullender heeft toen voor tal van praktische en organisatorische problemen oplossingen voorgesteld die tot ver na zijn emeritaat, in 1981, de VU-wiskunde tot voordeel zijn geweest. Zelf was Mullender van 1964 tot 1973 directeur van de wiskundeafdeling.

vu.nl

Rob van der Mei genomineerd voor Huibregtsenprijs

Rob van der Mei, onderzoeker werkzaam in de Stochastiekgroep van het CWI, is genomineerd voor de Huibregtsenprijs 2014. Deze prijs wordt jaarlijks uitgereikt aan een onderzoeker in Nederland wiens onderzoek innovatief en van hoge sociale betekenis is.

Van der Mei's onderzoek houdt zich bezig met logistieke processen in onze maatschappij, waarin onzekerheid of willekeur een cruciale rol speelt. In dit soort processen is er vaak sprake van *bottleneck*-structuur, denk bijvoorbeeld aan mobiele netwerken, transport of complexe ICT-systemen. Van der Mei houdt zich bezig met het kwantitatieve wiskundige aspect van deze processen.

cwi.nl

Onno Boxma ontvangt Lifetime Award

Hoogleraar Onno J. Boxma heeft tijdens de International Teletraffic Congress de Arne Jensen Lifetime Award ontvangen. De prijs wordt uitgereikt aan individuen die bijzondere bijdragen geleverd hebben aan de theorie van wachtrijen en verkeer (in iedere vorm).

Boxma is werkzaam aan de Technische Universiteit Eindhoven en doet onderzoek naar toegepaste kansrekening en stochastische operations research, met een focus op wachtrijen en toepassingen in kwalitatieve analyses voor computer-, communicatie- en productiesystemen.

Boxma heeft in deze gebieden vijf boeken en 180 artikelen gepubliceerd.



Foto: Masaru Yoshiyama

Ieke Moerdijk benoemd tot lid Academia Europaea

De Academia Europaea, de Europese academie van wetenschappen, heeft vijf hoogleraren van de Radboud Universiteit, waaronder Ieke Moerdijk, benoemd tot lid. Professor Ieke Moerdijk is deskundig op het gebied van de algebraïsche topologie en de differentiaalmeetkunde, alsmede toepassingen van technieken uit deze gebieden in de mathematische logica. Hij schreef er enkele boeken over, onder anderen samen met Sander Mac Lane.

Moerdijk is een van de grondleggers van de algebraïsche verzamelingenleer (1995), een gebied dat diep inzicht verschaft in zowel de axioma's waarop de huidige wiskunde berust, als in mogelijke uitbreidingen daarvan. Zijn meest recente werk gaat over operaden, een algebraïsche structuur met een breed spectrum aan toepassingen van combinatoriek tot mathematische fysica.

ru.nl

Roeland Merks wint Ig Nobelprijs

De Ig Nobelprijs wordt jaarlijks uitgereikt aan tien onderzoeken die je "eerst laten lachen en daarna aan het denken zetten". Wetenschappers uit de hele wereld kijken reikhalzend uit naar (het winnen) van die onderscheiding.

Wat vertelt poep ons over samenwerking binnen darmflora? Dat legt prof. dr. Roeland Merks uit in de Stadsgehoorzaal in Leiden, waar op 20 september de Nederlandse Ig Nobel Night plaatsvond, een ode aan verrassend onderzoek. Merks en vier andere wetenschappers (waaronder wiskundige Ionica Smeets) namen het tegen elkaar op in de Ig Nobel-battle. Voor een geamuseerd publiek, dat dienst deed als jury, legden ze in 24 seconden hun onderzoek uit en vatten ze het samen in zeven woorden. De winnende woorden van Merks waren: "Obstipatie maakt darmflora sociaal, diarree geeft anarchie."

math.leidenuniv.nl

Jan Friso Groote

Informatica, Technische Universiteit Eindhoven

j.f.groote@tue.nl

Hans Zantema

Informatica, Technische Universiteit Eindhoven

Informatica, Radboud Universiteit, Nijmegen

h.zantema@tue.nl

Recreatieve wiskunde

De kans om Ganzenbord te winnen

In dit artikel analyseren Jan Friso Groote en Hans Zantema de kans op winst voor de verschillende spelers van het traditionele bordspel *Ganzenbord*. Deze kansen kan men berekenen voor maximaal vijf spelers, waarbij het aantal toestanden oploopt tot zeer grote omvang. Voor twee spelers kan men deze kansen exact uitrekenen als breuken waarvan de tellers en noemers uit duizenden cijfers bestaan. Een verrassend resultaat is dat bij twee spelers de kans op gelijk spel (een speler in de put en de ander in de gevangenis) substantieel is: bijna 23 procent.

Ganzenbord is een traditioneel bordspel. Het is algemeen bekend, vooral in Europa [1], en is de basis van veel variaties op dit spel. Het basisidee bestaat uit een aantal genummerde velden, waarbij het doel is het laatste veld te bereiken door om de beurt met een of twee dobbelstenen te gooien en het geworpen aantal ogen vooruit te gaan. Onderweg kom je allerlei hindernissen tegen, zoals de put en de gevangenis waarin je moet blijven tot een andere speler je komt bevrijden.

In [5] wordt Ganzenbord beschreven als “historically the most important spiral game ever devised” en wordt als een van de bronnen het Italië van Francesco de Medici (1574–1587) genoemd, terwijl in de oude geschiedenis van Egypte en Griekenland verwante spelen ook al populair waren.

Het huidige Ganzenbord kent 64 velden, genummerd van 0 tot en met 63, en wordt gespeeld met twee of meer spelers. Het spel is een puur geluksspel: het verloop van het spel wordt geheel bepaald door het werpen van dobbelstenen, en de spelers hebben geen enkele eigen keuze, in tegenstelling tot bijvoor-

beeld *Mens erger je niet!*, waarbij de spelers nog kunnen kiezen welke van hun pionnen ze gaan spelen. Op grond hiervan ligt de kans om te winnen bij Ganzenbord voor elke speler helemaal vast. Een voor de hand liggende vraag is wat deze kans is voor elke speler, en dat is precies het onderwerp van dit artikel.

In tegenstelling tot pure kansspelen zoals Ganzenbord, is er veel analyse gedaan naar winst bij strategiespelen. Spelen als *Vier op 'n rij* [7] en beperkte vormen van *Awari* zijn helemaal doorgerekend. Voor de grote spelen als schaken, dammen en go is niet bekend of er een winnende strategie is, wel is de vraag of zo'n strategie bestaat goed gedefinieerd.

Voordat we met de analyse van Ganzenbord kunnen beginnen, moeten we eerst de regels precies vastleggen. Hoewel in grote lijnen de spelregels van de verschillende versies van Ganzenbord met elkaar overeenkomen, zijn er toch verschillen op detailpunten. Zo is de plaats waarnaar je terug moet springen als je op het doolhof op positie 42 komt in sommige uitvoeringen 30, en in andere 37.

Hier hebben we een vrij willekeurige keuze gemaakt. Verder zijn er versies waarbij *fiches* uitgekeerd of betaald worden, een aspect dat wij buiten beschouwing laten. De precieze regels die wij volgen worden beschreven in de volgende paragraaf.

Een manier om de kans op winst te benaderen is door het spel een groot aantal keren te simuleren, en daarbij te tellen hoe vaak elke speler wint. Echter, deze methode convergeert zeer traag, en is daarmee niet geschikt om de kansen met grote precisie vast te stellen.

In plaats daarvan bouwen we de volledige toestandsruimte op, bestaande uit alle toestanden waarin het spel zich bij een gegeven aantal spelers kan bevinden. Voor elke toestand geven we een vergelijking voor de kans dat in die toestand een betreffende speler wint. Voor toestanden waarin het eindveld 63 bezet is, is dat makkelijk: als dat veld door de betreffende speler bezet is, is dat 1, en als dat door een andere speler is, is dat 0. Voor de overige toestanden bekijken we welke toestanden er vanuit die toestand bereikbaar zijn bij elke mogelijke dobbelsteenworp, en stellen de kans als gewogen gemiddelde van de kansen bij de vervolgstanden. Op deze manier krijgen we n lineaire vergelijkingen over n onbekenden, waarbij n het totaal aantal toestanden is. Dit lineaire stelsel kan met standaardmethoden worden opge-

lost. Dit aantal n loopt snel op met het aantal spelers, zo is n ongeveer 4000 voor Ganzenbord met twee spelers, maar rond de 885 miljoen voor vijf spelers.

Met behulp van Mathematica [2] kunnen we het spel met twee spelers exact oplossen, waarbij de resulterende kansen als breuken worden gegeven. Voor het spel met drie spelers is een exacte berekening niet meer haalbaar, maar wel een numerieke benadering. Het spel met vier spelers kunnen we numeriek oplossen met Matlab [3] met de *induced dimension reduction*-methode (IDR-methode) als uitbreiding [6]. Voor vijf spelers hebben we een oplossing met behulp van een ad-hoc-dekpuntalgoritme. Voor zes of meer spelers is het vaststellen van de kansen op winst met deze precisieaanpak vooralsnog buiten ons bereik.

De verkregen resultaten bevestigen op veel punten wat je intuïtief verwacht, maar wijken daar soms ook van af. Het meest verrassende was dat er bij het spel met twee spelers een substantiële kans, namelijk bijna 23 procent, is op gelijkspel: de eindsituatie waarbij een van de spelers in de put zit en de ander in de gevangenis.

Voor alle aantallen spelers die we onderzocht hebben, blijkt de speler die begint in het voordeel te zijn. Bij twee spelers is dit verschil nog geen 2 procent, bij vijf spelers loopt dit op tot bijna 10 procent. Het is ook interessant te kijken hoe de winstkansen beïnvloed worden door de posities op het bord. Voor twee spelers geven wij hiervoor driedimensionale diagrammen die de winstkansen geven met de beide posities van de spelers als parameters. Ook hier komen soms tegenintuïtieve resultaten uit, zo wordt de winstkans van een speler nauwelijks verhoogd als de tegenstander in de put komt.

De reden voor het analyseren van dit spel zit zeker niet alleen in de recreatieve sfeer. In de informatica is het verifiëren van eigenschappen van systemen met grote toestandsruimten een belangrijk onderwerp, en veel van dergelijke systemen vertonen probabilistisch gedrag. Op grond hiervan is het zinvol systemen met probabilistisch gedrag en een groot aantal toestanden te verkennen en door te rekenen, en ervaring op te doen met de beperkingen die daarin optreden. Hierin is Ganzenbord een eerste stap.

Alvorens Ganzenbord in detail te beschrijven beschouwen we eerst een zeer versimpelde versie om onze manier van oplossen toe te lichten.

0	1	2
start		einde



Hierin zijn er slechts drie velden, 0, 1 en 2, en de speler die het eerst op 2 komt heeft gewonnen. Er zijn twee spelers, en die werpen om de beurt met een munt waarop op de ene zijde een 0 staat en op de andere een 1, aangevende het aantal posities dat de speler vooruit mag. Dit spel kent toestanden (i, j, k) voor $i \in \{1, 2\}$ en $j, k \in \{0, 1, 2\}$, waarbij (i, j, k) de toestand is waarbij speler i aan de beurt is, speler 1 op positie j staat en speler 2 op positie k staat. Niet al deze toestanden zijn bereikbaar, zo kunnen niet beide spelers op 2 staan, en komen de toestanden $(i, 2, 2)$ niet voor. We willen weten wat de kans is dat de beginner (speler 1) wint, en voeren daartoe variabelen q_{ijk} in, aangevende de kans dat speler 1 wint vanuit toestand (i, j, k) . We willen dus weten wat de waarde is van q_{100} . Vanuit toestand $(1, 0, 0)$ werpt



speler 1 de munt. Met een kans van één op twee levert dat een 0, waarbij speler 1 op 0 blijft en daarna speler 2 aan de beurt is, en we aangekomen zijn in toestand (2, 0, 0). Met ook een kans van één op twee had speler 1 een 1 geworpen, en is (2, 1, 0) de nieuwe toestand. Dit levert de vergelijking $q_{100} = \frac{1}{2}q_{200} + \frac{1}{2}q_{210}$. Algemener geeft elke toestand (i, j, k) waarbij nog niet gewonnen is, dus $j, k < 2$, een vergelijking voor q_{ijk} : als $i = 1$ kan speler 1 naar j of $j+1$ gaan, met gelijke kans, waarna speler 2 aan de beurt is, dus $q_{1jk} = \frac{1}{2}q_{2jk} + \frac{1}{2}q_{2,j+1,k}$. Net zo voor speler 2: $q_{2jk} = \frac{1}{2}q_{1jk} + \frac{1}{2}q_{1,j,k+1}$. Verder heeft speler 1 gewonnen als hij op 2 komt, dus $q_{i2k} = 1$, en heeft speler 1 verloren als speler 2 op 2 komt, dus $q_{ij2} = 0$. In totaal geeft dit het hele stelsel

$$\begin{aligned} q_{100} &= \frac{1}{2}q_{200} + \frac{1}{2}q_{210}, \\ q_{200} &= \frac{1}{2}q_{100} + \frac{1}{2}q_{101}, \\ q_{110} &= \frac{1}{2}q_{210} + \frac{1}{2}q_{220}, \\ q_{112} &= 0, \\ q_{210} &= \frac{1}{2}q_{110} + \frac{1}{2}q_{111}, \\ q_{220} &= 1, \\ q_{101} &= \frac{1}{2}q_{201} + \frac{1}{2}q_{211}, \\ q_{111} &= \frac{1}{2}q_{211} + \frac{1}{2}q_{221}, \\ q_{201} &= \frac{1}{2}q_{101} + \frac{1}{2}q_{102}, \\ q_{211} &= \frac{1}{2}q_{111} + \frac{1}{2}q_{112}, \\ q_{221} &= 1, \\ q_{102} &= 0, \end{aligned}$$

met als oplossing

$$\begin{aligned} q_{100} &= \frac{16}{27}, & q_{200} &= \frac{11}{27}, & q_{110} &= \frac{8}{9}, \\ q_{112} &= 0, & q_{210} &= \frac{7}{9}, & q_{220} &= 1, \\ q_{101} &= \frac{2}{9}, & q_{111} &= \frac{2}{3}, & q_{201} &= \frac{1}{9}, \\ q_{211} &= \frac{1}{3}, & q_{221} &= 1, & q_{102} &= 0. \end{aligned}$$

In het bijzonder vinden wij hierin de gevraagde kans dat de beginner wint: $q_{100} = \frac{16}{27} \approx 0.59$.

Deze methode werkt voor elk spel met eindig veel toestanden waarin het spelverloop geheel door kansen wordt vastgelegd: voer voor elke toestand een variabele in die de kans aangeeft dat een bepaalde speler vanuit die toestand wint. Voor de winnende en verliezende toestanden wordt de vergelijking opgeleverd die deze variabele gelijkstelt aan 0 of 1. Voor de overige toestanden wordt gekken welke toestanden in een stap bereikt kunnen worden, en wordt de vergelijking op-

geleverd die de kans bij de gegeven toestand gelijkstelt aan het gewogen gemiddelde van de kansen bij de vervolgoestanden. Op deze manier is er voor elke variabele precies één lineaire vergelijking. Vanaf dit moment kunnen we de betekenis van de variabelen vergeten, en elk gewenst mechanisme inzetten om de vergelijkingen op te lossen. Voor kleine stelsels zoals hierboven is dat nog heel goed met de hand te doen, voor grotere stelsels kunnen hulpmiddelen als Mathematica en Matlab behulpzaam zijn. In ontaarde gevallen, bijvoorbeeld bij het werpen van dobbelstenen die aan alle zijden 0 ogen hebben, kan het voorkomen dat het resulterende stelsel geen unieke oplossing heeft.

De spelregels van Ganzenbord

Dan zijn we nu toe aan het geven van de spelregels van Ganzenbord, waarin we op de detailpunten waarin verschillende in omloop zijnde versies van elkaar verschillen, een keuze vastleggen.

- Er zijn 64 velden, genummerd van 0 tot en met 63. Alle spelers starten op veld 0. De eerste speler die op veld 63 terechtkomt, wint.
- De spelers spelen om de beurt in een vaste volgorde.
- Een beurt van een speler bestaat uit het werpen van twee dobbelstenen, en het vooruitbewegen van evenveel plaatsen als er ogen zijn gegooid, tenzij de volgende regels iets anders voorschrijven.
- In het geval dat het veld waarop een speler terechtkomt al bezet is door een ander speler, gaat de speler weer terug naar waar hij vandaan kwam.
- Een speler wint alleen als hij precies op 63 terechtkomt; als hij voorbij 63 terecht zou komen moet hij het teveel geworpen aantal terugstappen vanaf 63.
- Op de velden 5, 9, 14, 18, 23, 27, 32, 36, 41, 45, 50, 54 en 59 is een gans aangegeven. Als een speler op een van deze velden terechtkomt, speelt hij hetzelfde aantal ogen nogmaals, in dezelfde richting als waarin gespeeld werd. Als dit weer een gans is, herhaalt dit proces zich.
- Als vanuit veld 0 een 3 en een 6 wordt geworpen, springt de speler in een keer naar 53. Als vanuit veld 0 een 4 en een 5 wordt geworpen, springt de speler in een keer naar 26. Merk op dat zonder deze regel de speler met de vorige regel in een keer op 63 terecht zou komen, omdat op alle negenvouden een gans is aangegeven.
- Veld 6 is de brug: een speler die hier aankomt gaat direct door naar veld 12.

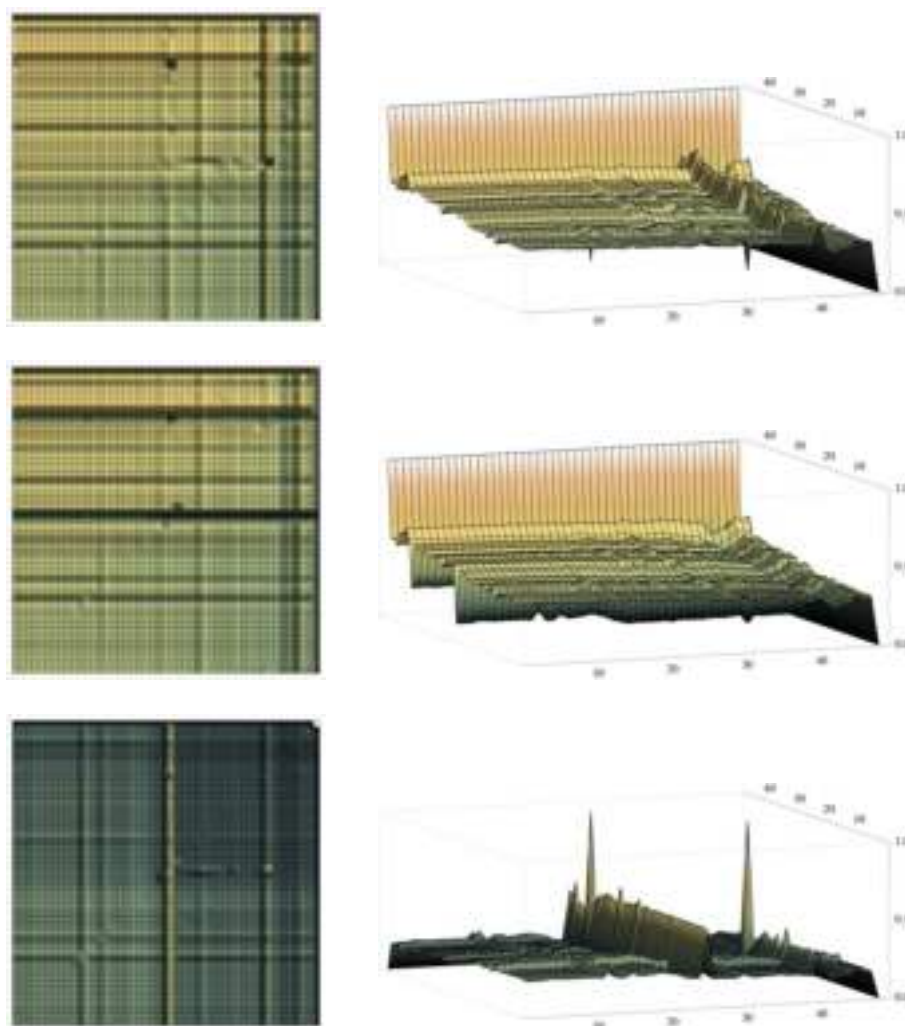
- Veld 19 is de herberg: een speler die hier aankomt moet een beurt overslaan.
- Veld 31 is de put: een speler die hier aankomt moet hier net zolang blijven en doet niet mee met het spel tot een andere speler de put bereikt: dan doet deze speler weer mee en moet de ander in de put blijven.
- Veld 42 is het doolhof: een speler die hier terechtkomt gaat terug naar veld 30.
- Veld 52 is de gevangenis: een speler die hier aankomt moet hier net zolang blijven tot een andere speler de gevangenis bereikt; net zoals bij de put dus.
- Veld 58 is de dood: een speler die hier terecht komt gaat terug naar veld 0 en moet dus helemaal opnieuw beginnen.

Deze regels worden herhaaldelijk toegepast, waardoor een beurt uit een hele serie bewegingen kan bestaan. Als een speler bijvoorbeeld op veld 46 staat en 4 gooit, gaat hij naar 50. Dat is een gans, dus gaat hij naar 54. Dit is wederom een gans, dus gaat hij naar 58. Dat is de dood, dus hij moet helemaal opnieuw beginnen op veld 0. Als veld 0 al bezet is doordat een andere speler in een vorige beurt op de dood terechtkwam, kan deze hele beurt niet worden uitgevoerd, en blijft de speler staan op veld 46 waar de hele operatie begon. Als een ander voorbeeld beschouwen we een speler die op veld 60 twee zessen werpt, komt negen posities over de 63 heen, en moet dan dus naar 54. Aangezien dit een gans is, moet hij nogmaals 12 stappen doen in de gespeelde richting, dat is achteruit, dus naar 42. Omdat dit het doolhof is, gaat hij dan terug naar veld 30.

Merk op dat er door dit heen en weer spelen geen bovengrens is aan het aantal beurten dat een spel kan duren; de kans dat het spel onbeperkt lang doorgaat is echter 0.

In het geval van twee spelers zijn er drie mogelijke uitkomsten: de eerste of de tweede speler kan winnen door precies op veld 63 te komen, maar de derde mogelijkheid is een gelijkspel doordat het spel vastloopt in een toestand waarbij een speler in de put zit en de ander in de gevangenis. Bij meer dan twee spelers kan dit verschijnsel zich niet voordoen, omdat zowel de put als de gevangenis maar hoogstens één speler kan vasthouden, en er dus altijd nog een speler is die niet vast zit.

Bij het beschouwen van toestanden bij Ganzenbord is het basisidee hetzelfde als in het simpele spel dat net is beschreven: een toestand wordt aangegeven door de posities waar de spelers zich bevinden, en welke speler aan de beurt is. Bij elke toestand en elke mogelijke worp moet worden beschreven in



Figuur 2

De kans op gelijkspel, dat wil zeggen dat het spel eindigt met een speler in de put en de ander in de gevangenis, is dus bijna 23 procent: veel groter dan aanvankelijk verwacht.

Het is interessant uit te zoeken hoe de winstkansen veranderen in de loop van het spel. Voor het spel met twee personen kan dit in een driedimensionale grafiek worden weergegeven, waarbij de x -as en de y -as de posities van beide spelers aangeven, beiden lopend over de 47 mogelijke posities waarin een speler zich kan bevinden, en de hoogte een kans. In Figuur 2 doen we dit van boven naar beneden voor drie mogelijke kansen: de kans dat speler 1 wint als speler 1 aan de beurt is, de kans dat speler 1 wint als speler 2 aan de beurt is, en de kans op gelijkspel. Van elk van deze grafieken geven we naast elkaar een bovenaanzicht en een voor-aanzicht, waarbij donkere kleuren een kleine kans (laag in de grafiek) en lichte kleuren een grote kans (hoog in de grafiek) aangeven.

Deze grafieken geven een aantal verschijnselen die zeer te verwachten zijn: bij de bo-

venste twee plaatjes zien we een muur tegen de achterwand, aangevende dat de kans 1 is als speler 1 op 63 staat, en een diep dal aan de rechterkant, aangevende de kans 0 als speler 2 op 63 staat. Ruwweg wordt de kans op winst groter naarmate de 63 dichter is genaderd voor speler 1, en kleiner naarmate 63 dichter is genaderd voor speler 2.

Opmerkelijk is dat als speler 2 in de gevangenis (52) zit dit zoals te verwachten de kans op winst voor speler 1 verhoogt, maar als speler 2 in de put (31) zit is dit nauwe-

lijks het geval. Een verklaring hiervoor is te vinden in de onderste grafiek: als speler 2 in de put zit, dan is er een substantiële kans op gelijkspel. De twee pieken in de onderste grafiek geven de kans 1 op gelijkspel in de twee toestanden waarin put en gevangenis beiden bezet zijn.

Er zijn nog meer verschijnselen uit deze grafieken af te lezen, bijvoorbeeld dat het niet in je voordeel is om op de posities vlak voor 63 terecht te komen.

Het spel voor meer dan twee spelers

Voor meer dan twee spelers kan in principe op dezelfde manier de winstkans voor elke speler worden vastgesteld. Een complicatie is wel dat het aantal toestanden, en daarmee het aantal variabelen en vergelijkingen, exponentieel toeneemt met het aantal spelers: voor N spelers is dit ruwweg Nc^N waarbij $c \approx 45$. In Tabel 1 geven we winstkansen voor de verschillende spelers weer voor zover we die hebben kunnen vaststellen: voor het vaststellen van deze waarden zijn we begonnen met het oplossen van de stelsels lineaire vergelijkingen met behulp van Mathematica [2]. Dit konden we exact doen voor twee spelers, zoals aangegeven in de vorige paragraaf, en dit kon numeriek voor drie spelers. Voor vier spelers zijn we overgestapt naar Matlab, uitgebreid met het IDR-pakket [3, 6], en konden daarmee de stelsels vergelijkingen numeriek oplossen; hiervoor was 400 Gbyte geheugen nodig.

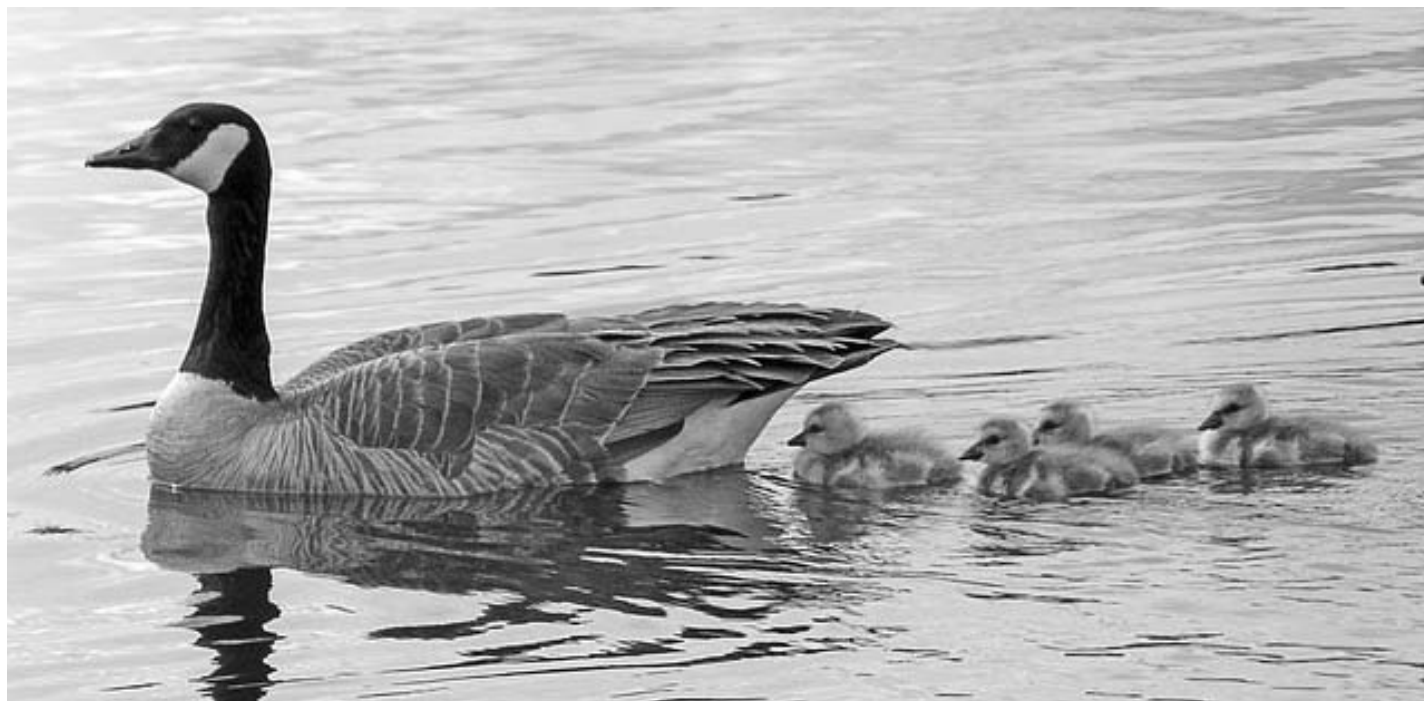
Door het uitbuiten van de speciale structuur van de vergelijkingen kunnen we echter nog een stap verder komen. Alle vergelijkingen zijn van de vorm

$$p_i = c_{i1}p_{i1} + \dots + c_{ik}p_{ik},$$

waarin c_{ij} getallen tussen 0 en 1 zijn, waarvan de som over j gelijk aan 1 is, afgezien van twee variabelen die de waarden 0 en 1 hebben. Dit stelsel kan nu gezien worden als een monotone operator, waarvan de gevraagde oplossing een dekpunt is. Deze oplossing kan benaderd worden door dekpunt iteratie: geef

	#vergelijkingen	speler 1	speler 2	speler 3	speler 4
twee spelers	4048	0,39363	0,37999	-	-
drie spelers	$2,79 \times 10^5$	0,34596	0,33290	0,32114	-
vier spelers	$1,64 \times 10^7$	0,26695	0,25471	0,24408	0,23426
vijf spelers	$8,85 \times 10^8$	0,22039	x	x	x

Tabel 1



eerst alle p 's de waarde 1. Vervolgens wordt een groot aantal slagen uitgevoerd, waarbij in elke slag de nieuwe benadering van p_i bepaald wordt als $c_{i1}p_{i1} + \dots + c_{ik}p_{ik}$, waarin voor $p_{i1}, \dots, p_{ik}$ de laatst verkregen benaderingen worden ingevuld. In elke stap is nu voor elke p_i de nieuwe waarde kleiner of gelijk aan de vorige waarde, en zo wordt voor elke i een dalende rij waarden voor p_i verkregen, die

uiteindelijk convergeert naar de juiste waarde van p_i . Voor vijf spelers is de gegeven waarde bepaald door dit proces te herhalen totdat de gegeven waarde stabiel is. Per constructie zijn deze benaderingen allemaal bovengrenzen: het is een invariant van dit proces dat elke benadering groter of gelijk is aan de echte oplossing. Op een soortgelijke manier zijn ondergrenzen te verkrijgen door te beginnen

met alle p 's de waarde 0 te geven. Met het genereren van ondergrenzen en bovengrenzen die voldoende dicht bij elkaar liggen, kan de juiste waarde met elke gewenste precisie worden bepaald.

Voor zes spelers is het aantal vergelijkingen ongeveer 5×10^{10} , en daarmee te groot om dit proces binnen redelijke tijd uit te voeren.

Referenties

- 1 H.C. Bolton, The game of goose, *The Journal of American Folklore* 8 (1985), 145–150.
- 2 Mathematica Version 8.0, Wolfram Research, Inc., Champaign, IL, 2010.
- 3 MATLAB version 7.10.0 (R2010a), The MathWorks Inc., Natick, MA, 2010.
- 4 J.W. Romein en H.E. Bal, Solving the Game of Awari using Parallel Retrograde Analysis, *IEEE Computer* 38 (2003), 26–33.
- 5 A.H. Seville, Tradition and Variation in the Game of Goose, *Board Games in Academia III*, Proceedings of Colloquium in Florence, 1999, pp. 163–174.
- 6 P. Sonneveld en M.B. van Gijzen, IDR(s): a family of simple and fast algorithms for solving large nonsymmetric linear systems, *SIAM Journal of Scientific Computing* 31 (2008), 1035–1062.
- 7 J.W.H.M. Uiterwijk, H.J. van den Herik en L.V. Allis, A Knowledge-Based Approach to Connect-Four. The Game is Solved! *Heuristic Programming in Artificial Intelligence: the first computer olympiad*, D.N.L. Levy en D.F. Beal, eds., Ellis Horwood Limited, Chichester, 1989, pp. 113–133.

Walter D. van Suijlekom

IMAPP

Radboud University Nijmegen

waltervs@math.ru.nl

Research

The spectral model of particle physics

The discovery of the Higgs particle at CERN in Geneva in 2012 formed the crown on the so-called Standard Model of particle physics. Despite its enormous phenomenological success, much of the underlying mathematics remains still to be understood. Walter van Suijlekom, Assistant Professor in mathematical physics at IMAPP, here lifts the curtain of what noncommutative geometry can already say about the Standard Model, offering an intriguing perspective of what space looks like at scales analysed by particle accelerators. Van Suijlekom's book *Noncommutative Geometry and Particle Physics* has just appeared with Springer and gives an introduction to the subject. In this article, he starts his exposition with the famous mathematical question "Can one hear the shape of a drum?", and then moves to the noncommutative world, using not much more but matrix multiplication.

This article was written on the occasion of the workshop 'Noncommutative Geometry and Particle Physics', organized at the Lorentz Center in Leiden in October 2013. See www.noncommutativegeometry.nl for more information on this workshop, and on the field in general.

Spectral geometry

Noncommutative geometry [11] can be considered as a generalization of *spectral geometry* to the quantum world. So, let us start with a brief tour through spectral geometry. One deals with the question how the geometric structure of a Riemannian manifold M — that is, a topological space that looks locally like Euclidean space — determines the spectrum of the Laplacian on M (cf. [10]). The inverse problem, how the manifold M is determined by the spectrum of the Laplacian leads to the famous question "Can one hear the shape of a drum?", as posed by Mark Kac in 1966 [16]. The answer to this question is "no", as is well known by now, e.g. through the construction of two isospectral



Figure 1 Two isospectral domains in $\mathbb{R}^2$ whose Laplacians have the same spectrum [14].

polygonal domains in $\mathbb{R}^2$ (two ‘drums’) (cf. Figure 1). Here the metaphoric sound of a Riemannian manifold is governed by the *Helmholtz equation* satisfied by the amplitude u of a wave on M ,

$$\Delta_M u = k^2 u,$$

where Δ_M is the Laplacian and k is the wave number. This wave number can thus essentially be found by taking the ‘square-root’ of the Laplacian. More precisely, one searches for an operator that squares to Δ_M and analyses its spectrum of eigenvalues. It was Paul Dirac who found such a differential operator. Even though it does not always exist, it does so on Riemannian *spin* manifolds to which we will restrict. Let us consider some examples of Dirac operators for low-dimensional tori.

Dirac operators on the circle, 2-torus and 4-torus

We parametrize the circle $\mathbb{S}^1$ by an angle $t \in [0, 2\pi)$. The Dirac operator on the circle then reads

$$D_{\mathbb{S}^1} = -i \frac{d}{dt}.$$

The square $(D_{\mathbb{S}^1})^2 = -\frac{d^2}{dt^2}$ is indeed the Laplacian on the circle. Note that the eigenfunctions of $D_{\mathbb{S}^1}$ are the complex exponential functions

$$e^{int} = \cos nt + i \sin nt,$$

for any integer $n \in \mathbb{Z}$, with eigenvalue n . Hence, the spectrum of $D_{\mathbb{S}^1}$ is given by the set of integers $\mathbb{Z}$ and we arrive at the usual circular harmonics given by Fourier series.

Next, consider the two-dimensional torus $\mathbb{T}^2$. It can be parametrized by two angles $t_1, t_2 \in [0, 2\pi)$. The Laplacian then reads

$$\Delta_{\mathbb{T}^2} = -\frac{\partial^2}{\partial t_1^2} - \frac{\partial^2}{\partial t_2^2}.$$

At first sight it seems difficult to construct a differential operator that squares to $\Delta_{\mathbb{T}^2}$. In fact, squaring any linear combination of the two partial derivatives results in cross-terms:

$$\left(a \frac{\partial}{\partial t_1} + b \frac{\partial}{\partial t_2}\right)^2 = a^2 \frac{\partial^2}{\partial t_1^2} + 2ab \frac{\partial^2}{\partial t_1 \partial t_2} + b^2 \frac{\partial^2}{\partial t_2^2}$$



Figure 2 Wave function on $\mathbb{T}^2$ corresponding to $n_1=2, n_2=4$; grey levels correspond to the amplitude u of the wave.

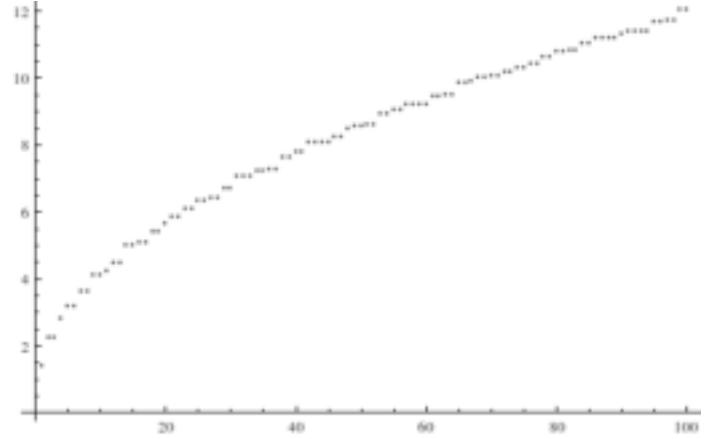


Figure 3 List of the eigenvalues of $D_{\mathbb{T}^2}$.

for any two complex numbers a and b . Of course, the demands $a^2 = b^2 = -1$ and $ab = 0$ cannot hold simultaneously.

This puzzle was solved by Dirac, who considered the possibility that a and b be complex *matrices*. Namely, if

$$a = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}, \quad b = \begin{pmatrix} 0 & i \\ i & 0 \end{pmatrix},$$

then with $i^2 = -1$ we *do* have $a^2 = b^2 = -1$ and $ab + ba = 0$, as one can readily check.

Hence the Dirac operator on the torus is

$$D_{\mathbb{T}^2} = \begin{pmatrix} 0 & \frac{\partial}{\partial t_1} + i \frac{\partial}{\partial t_2} \\ -\frac{\partial}{\partial t_1} + i \frac{\partial}{\partial t_2} & 0 \end{pmatrix},$$

which indeed satisfies $(D_{\mathbb{T}^2})^2 = \Delta_{\mathbb{T}^2}$. Since the eigenvalues of the Laplacian on the torus are given by $n_1^2 + n_2^2$ for integers n_1 and n_2 , it follows that the spectrum of the Dirac operator $D_{\mathbb{T}^2}$ is

$$\left\{ \sqrt{n_1^2 + n_2^2} : n_1, n_2 \in \mathbb{Z} \right\},$$

and is depicted in Figure 3. A typical eigenfunction of the Dirac operator on the torus is given in Figure 2.

Let us jump to four dimensions — of direct relevance to physics — and consider as a final example the Dirac operator on the 4-torus $\mathbb{T}^4$. We now have four angles t_1, t_2, t_3, t_4 , and the Laplacian is

$$\Delta_{\mathbb{T}^4} = -\frac{\partial^2}{\partial t_1^2} - \frac{\partial^2}{\partial t_2^2} - \frac{\partial^2}{\partial t_3^2} - \frac{\partial^2}{\partial t_4^2}.$$

The same problem as above arises in the search for a differential operator that squares to $\Delta_{\mathbb{T}^4}$. Again, allowing for matrices solves the problem, but we need more as there are now four matrices that must square to -1 and mutually multiply to 0. Here, there is a beautiful appearance of Hamilton’s *quaternions*. Recall that besides the complex i , the field of quaternions contains elements j and k that satisfy

$$i^2 = j^2 = k^2 = ijk = -1.$$

From this one can derive that $ij = -ji$, $ik = -ki$, et cetera. The Dirac

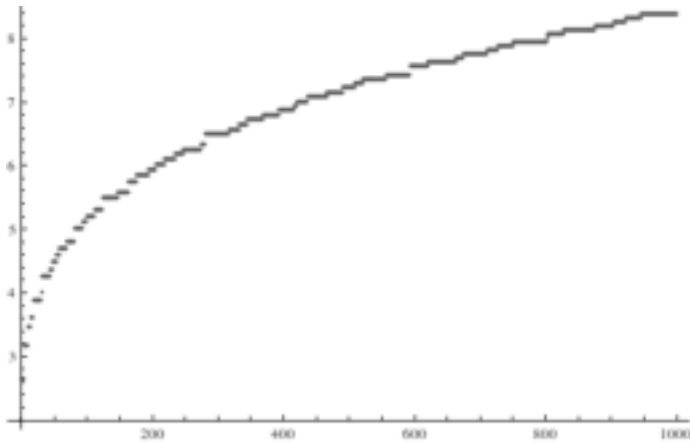


Figure 4 List of the eigenvalues of $D_{\mathbb{T}^4}$.

operator on $\mathbb{T}^4$ is conveniently written in terms of quaternions as

$$D_{\mathbb{T}^4} = \begin{pmatrix} 0 & \frac{\partial}{\partial t_1} + i \frac{\partial}{\partial t_2} + j \frac{\partial}{\partial t_3} + k \frac{\partial}{\partial t_4} \\ -\frac{\partial}{\partial t_1} + i \frac{\partial}{\partial t_2} + j \frac{\partial}{\partial t_3} + k \frac{\partial}{\partial t_4} & 0 \end{pmatrix}, \quad (1)$$

A straightforward computation then shows that its square coincides with $\Delta_{\mathbb{T}^4}$. As a consequence, the spectrum of $D_{\mathbb{T}^4}$ is given by

$$\left\{ \sqrt{n_1^2 + n_2^2 + n_3^2 + n_4^2} : n_1, n_2, n_3, n_4 \in \mathbb{Z} \right\},$$

and is depicted in Figure 4.

Riemannian spin manifolds

More generally, a Dirac operator D_M on a Riemannian manifold (M, g) is a square-root (up to scalar terms) of the Laplacian on M . It exists when M is a Riemannian spin manifold, we refer to [2] for more details. What is important for us is that even though the eigenvalues of D_M do not completely determine M , certain information of it can be subtracted from the spectrum of D_M . A famous result is Weyl's asymptotic law, stating that the number $N_{D_M}(\Lambda)$ of eigenvalues smaller (in absolute value) than $\Lambda \geq 0$ is given asymptotically by

$$N_{D_M}(\Lambda) \sim \frac{\Omega_n \text{Vol}(M)}{n(2\pi)^n} \Lambda^n,$$

in terms of the dimension n of M and Ω_n is the volume of the n -sphere. Hence, from the growth of the eigenvalues of D_M one can derive the dimension of M . For the tori in dimension two and four, this can already be seen from the parabolic shapes in Figures 3 and 4.

In the applications of noncommutative geometry to particle physics one interprets the above counting function $N_{D_M}(\Lambda)$ as a so-called *spectral action functional* [3–4] describing dynamics and interactions of the physical particles and fields. We will consider a smooth version of the counting function, to wit

$$\text{Tr} f\left(\frac{D_M}{\Lambda}\right) = \sum_{\lambda} f\left(\frac{\lambda}{\Lambda}\right),$$

where f is a smooth version of a cutoff function, Tr is the trace, and the sum on the right-hand side is over all eigenvalues of D_M .

For illustrational purposes, we will restrict in this article to the exponential cut-off function, that is to say, a Gaussian function (cf. Figure 5):

$$f(x) = e^{-x^2}. \quad (2)$$

The main reason for doing so is that $\text{Tr} e^{-D_M^2/\Lambda^2}$ is the so-called heat kernel for the Laplacian D_M^2 , whose asymptotics as $\Lambda \rightarrow \infty$ is well-known [2]. As a matter of fact, asymptotically we have

$$\text{Tr} e^{-D_M^2/\Lambda^2} \sim \frac{\text{Vol}(M)\Lambda^n}{(4\pi)^{n/2}}, \quad (3)$$

in concordance with Weyl's estimate above.

As should be clear by now, the spectrum of D_M does not capture all of the geometry of M . This can be improved by considering besides D_M also the space of smooth complex-valued functions on M , denoted by $C^\infty(M)$. For instance, the distance function on M can be written as

$$d(p, q) = \sup_{f \in C^\infty(M)} \{ |f(p) - f(q)| : \text{gradient } f \leq 1 \},$$

where the gradient of f can be controlled with the commutator $[D_M, f] = D_M f - f D_M$. For instance, on the circle we have $[D_{\mathbb{S}^1}, f] = -i \frac{df}{dt}$. The translation of distances between points via functions on that space is illustrated in Figure 6.

Finite noncommutative spaces

Let us consider finite spaces F , equipped with the discrete topology. That is, consider the space F consisting of N points:

$$1 \bullet \quad 2 \bullet \quad \cdots \quad N \bullet$$

The space $C^\infty(F)$ of smooth functions on such a finite space is simply given by $\mathbb{C}^N$: one complex number for each of the function values at the points of F . An element $f \in C^\infty(F)$ can be conveniently written as a diagonal matrix:

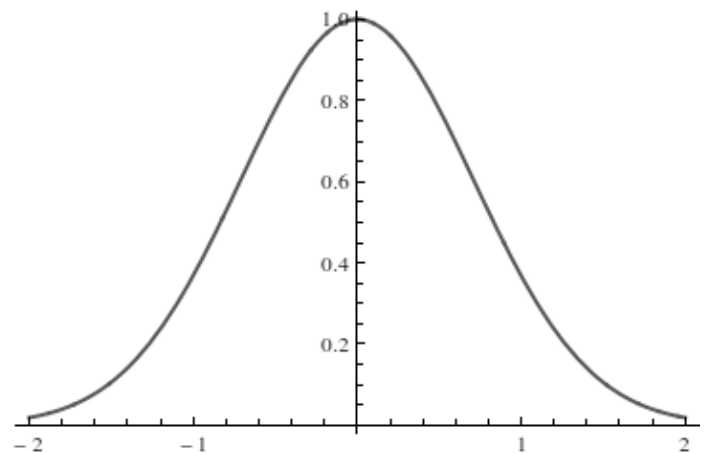


Figure 5 Smooth cutoff function given by equation 2.

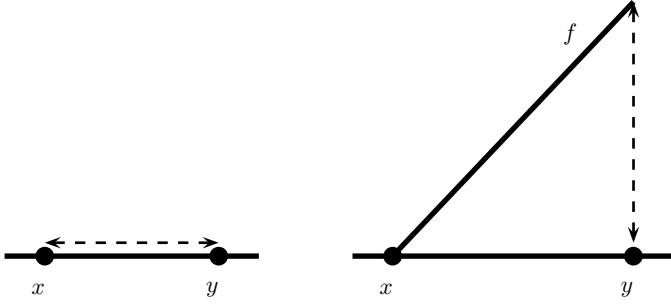


Figure 6 The distance between the points x and y can be translated to the distance between $f(x)$ and $f(y)$ for functions with gradient equal to 1.

$$f \rightsquigarrow \begin{pmatrix} f(1) & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & f(2) & \cdots & 0 \\ \vdots & & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & f(N) \end{pmatrix},$$

and the matrix product corresponds to the pointwise product of functions: $f g(p) = f(p) g(p)$ for two functions f, g at any point p in F .

For such finite space there is an analogue of a Dirac operator, which in this finite case is an arbitrary hermitian matrix D_F . As before, a distance function on F can be defined as

$$d(p, q) = \sup_{f \in C^\infty(F)} \{ |f(p) - f(q)| : \|[D_F, f]\| \leq 1 \}, \quad (4)$$

where the ‘gradient’ $\|[D_F, f]\|$ is defined as the square root of the largest eigenvalue of the matrix $[D_F, f]^* [D_F, f]$. In fact, $d(p, q)$ is a generalized distance function on F as it can take the value ∞ .

Example 1. Consider the space F consisting of two points:

$$F = 1 \bullet \quad 2 \bullet$$

Then, smooth functions are diagonal 2×2 -matrices, so that

$$C^\infty(F) := \left\{ \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{pmatrix} \mid \lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{C} \right\},$$

where λ_1 is the function value at point 1, and λ_2 at point 2.

We can take as a ‘finite Dirac operator’ the hermitian matrix

$$D_F = \begin{pmatrix} 0 & \bar{c} \\ c & 0 \end{pmatrix}$$

for some constant $c \in \mathbb{C}$. The distance formula 4 then becomes

$$d(p, q) = \begin{cases} |c|^{-1}, & p \neq q, \\ 0, & p = q. \end{cases}$$

We conclude that the distance between 1 and 2 in F is dictated by the constant c that defines D_F .

The geometry of F gets much more interesting if we allow for a *non-commutative* structure at each point of F . That is, instead of diagonal matrices, we consider *block diagonal* matrices

$$A = \begin{pmatrix} a_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & a_2 & \cdots & 0 \\ \vdots & & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & a_N \end{pmatrix},$$

where the $a_1, a_2, \dots, a_N$ are square matrices of size $n_1, n_2, \dots, n_N$, respectively, associated to the N points of F . Hence we will consider the vector space

$$V_F := M_{n_1}(\mathbb{C}) \oplus M_{n_2}(\mathbb{C}) \oplus \cdots \oplus M_{n_N}(\mathbb{C}), \quad (5)$$

where $M_n(\mathbb{C})$ stands for the space of $n \times n$ -matrices with complex entries.

We will consider the vector space V_F of such block diagonal matrices as a replacement for functions on F . Since the matrix product is not commutative, we have enriched the perhaps not-so-interesting finite space F with a noncommutative structure.

As far as the finite Dirac operator is concerned, already in the commutative case this operator was given as a matrix, and its definition continues to make sense when considering block diagonal matrices in V_F . Thus, in order to describe a finite noncommutative space F we consider the pair given by the vector space V_F and a hermitian matrix D_F . Note that this is a purely linear-algebraic set of data, which explains the ease with which computations can be done in the context of particle physics.

Remark 2. For pedagogical purposes we carefully avoided the notion of an associative algebra, using only basic linear algebra concepts such as matrices and matrix multiplication. In order to connect to the usual terminology encountered in most texts on noncommutative geometry let us mention that the vector space V_F is an example of an associative $*$ -algebra, with product given by matrix multiplication and $*$ -structure given by hermitian conjugation.

Example 3. The two-point space can be given a noncommutative structure by considering the space V_F of 3×3 block diagonal matrices of the following form:

$$\begin{pmatrix} \lambda & 0 & 0 \\ 0 & a_{11} & a_{12} \\ 0 & a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}, \quad (6)$$

with complex entries $\lambda, a_{11}, a_{12}, a_{21}$ and a_{22} . Hence, point 2 in F has a noncommutative structure given by 2×2 matrices.

A hermitian 3×3 -matrix can then be chosen of the form

$$D_F = \begin{pmatrix} 0 & \bar{c} & 0 \\ c & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

inspired by Example 1 and which turns out to be relevant for our physical

applications later on. Of course, mathematically speaking any other choice of a hermitian matrix D_F is a valid one.

Perturbation semigroup

The approach we have sketched above to spectral (noncommutative) geometry is still static: the Dirac operator is fixed. We now make this more dynamical by perturbing the operator D_F by matrices in V_F , and D_M by functions on the manifold M . This naturally gives rise to the structure of a semigroup of perturbations [8]. We recall that in general a *semigroup* is defined as a set equipped with an associative multiplication.

Definition 4. Let V_F be the space defined in (5). We define the *perturbation semigroup* of V_F as the following subset in the tensor product $V_F \otimes V_F$:

$$\text{Pert}(V_F) := \left\{ \sum_j A_j \otimes B_j \mid \begin{array}{l} \sum_j A_j (B_j)^t = \mathbb{I} \\ \sum_j A_j \otimes B_j = \sum_j \overline{B_j} \otimes \overline{A_j} \end{array} \right\},$$

where t denotes matrix transpose, $\mathbb{I}$ is the identity matrix in V_F , and $\overline{}$ denotes complex conjugation of the matrix entries.

The semigroup law in $\text{Pert}(V_F)$ is given by the matrix product in $V_F \otimes V_F$, i.e. on Kronecker products $A \otimes B$, $A' \otimes B'$ the semigroup multiplication is

$$(A \otimes B)(A' \otimes B') = (AA') \otimes (BB').$$

The two conditions in the definition of $\text{Pert}(A)$ are called the *normalization*, and *self-adjointness condition*.

Let us check that $\text{Pert}(V_F)$ is indeed a semigroup. The normalization condition carries over to products,

$$\left(\sum_j A_j \otimes B_j \right) \left(\sum_k A'_k \otimes B'_k \right) = \sum_{j,k} (A_j A'_k) \otimes (B_j B'_k),$$

for which

$$\sum_{j,k} A_j A'_k (B_j B'_k)^t = \sum_{j,k} A_j A'_k (B'_k)^t (B_j)^t = \mathbb{I},$$

because matrix transpose reverses the order of the matrices. Similarly, one checks that the self-adjointness condition is respected when taking products of two elements in $\text{Pert}(V_F)$.

Let us illustrate this rather abstract definition with some examples.

Example 5. Consider the two-point space with $V_F = \mathbb{C}^2$, i.e. the space of diagonal 2×2 matrices as considered in Example 1. Let e_{11}, e_{22} denote the standard basis of such diagonal matrices:

$$e_{11} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad e_{22} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Then we can write an arbitrary element of $\text{Pert}(\mathbb{C}^2)$ in terms of this basis as

$$z_1 e_{11} \otimes e_{11} + z_2 e_{11} \otimes e_{22} + z_3 e_{22} \otimes e_{11} + z_4 e_{22} \otimes e_{22},$$



The founder of noncommutative geometry Alain Connes visiting the Radboud University Nijmegen (March 2014), here together with the author behind Foucault's pendulum in the Huygens building.

Photo: Bert Beelen

with complex coefficients $z_1, \dots, z_4$. Since the matrix multiplication between e_{11} and e_{22} follows simple rules, the normalization condition becomes

$$z_1 = 1 = z_4.$$

Instead, the self-adjointness condition reads

$$z_2 = \overline{z_3}.$$

This leaves only one free complex parameter, say z_2 , and we conclude that $\text{Pert}(\mathbb{C}^2) \simeq \mathbb{C}$.

More generally one can show along the same lines that the perturbation semigroup $\text{Pert}(\mathbb{C}^N)$ for the space of N points is given by $\mathbb{C}^{N(N-1)/2}$ with semigroup structure given by componentwise product.

Example 6. Let us consider a noncommutative example, to wit $V_F = M_2(\mathbb{C})$. We can identify $M_2(\mathbb{C}) \otimes M_2(\mathbb{C})$ with $M_4(\mathbb{C})$ so that elements in $\text{Pert}(M_2(\mathbb{C}))$ are 4×4 -matrices satisfying the normalization and self-adjointness condition. One can show that we have in a suitable basis:

$$\text{Pert}(M_2(\mathbb{C})) = \left\{ \begin{pmatrix} 1 & v_1 & v_2 & iv_3 \\ 0 & x_1 & x_2 & ix_3 \\ 0 & x_4 & x_5 & ix_6 \\ 0 & ix_7 & ix_8 & x_9 \end{pmatrix} \mid \begin{array}{l} v_1, v_2, v_3 \in \mathbb{R} \\ x_1, \dots, x_9 \in \mathbb{R} \end{array} \right\}.$$

It is quite remarkable that the product of two such matrices is again of the same form, as it should be to form a semigroup. In fact, one can show that $\text{Pert}(M_2(\mathbb{C}))$ is a semidirect product of semigroups,

$$\text{Pert}(M_2(\mathbb{C})) \simeq \mathbb{R}^3 \rtimes S,$$

where S is the semigroup of 3×3 matrices of the form

$$\begin{pmatrix} x_1 & x_2 & ix_3 \\ x_4 & x_5 & ix_6 \\ ix_7 & ix_8 & x_9 \end{pmatrix},$$

where $x_1, \dots, x_9$ are real numbers. More generally, one can identify a real vector space W and a semigroup S' such that

$$\text{Pert}(M_N(\mathbb{C})) \simeq W \rtimes S'.$$

This is further worked out in the thesis [18] and in [19].

Example 7. Even though strictly speaking Definition 4 of the perturbation semigroup applies only to (noncommutative) finite topological spaces, let us see what we can say for the case of a smooth manifold M . The vector space V_F is replaced by the space of smooth complex-valued functions on M , denoted $C^\infty(M)$. Now, we can consider functions in the tensor product $C^\infty(M) \otimes C^\infty(M)$ as functions of two-variables. In other words, they are elements in $C^\infty(M \times M)$. The normalization and self-adjointness condition in $\text{Pert}(C^\infty(M))$ translate accordingly and yield

$$\text{Pert}(C^\infty(M)) = \left\{ f \in C^\infty(M \times M) \mid \begin{array}{l} f(x, x) = 1 \\ f(x, y) = \overline{f(y, x)} \end{array} \right\},$$

where $x, y \in M$.

Let us then come back to the general set-up, with V_F as in equation (5) with block diagonal matrices of arbitrary (but fixed) size. As a first result we have:

Proposition 8. *Let $\mathcal{U}(V_F)$ be the unitary block diagonal matrices in V_F . This space forms a group which is a subgroup of the semigroup $\text{Pert}(V_F)$.*

Proof. The space of unitary matrices in V_F forms a group with inverse of a unitary U given by U^* . If U is a unitary block diagonal matrix in V_F , then we claim that the Kronecker product $U \otimes \overline{U}$ defines an element in $\text{Pert}(V_F)$. Indeed, the normalization condition is satisfied because of unitarity

$$U \overline{U}^t = U U^* = 1,$$

and $U \otimes \overline{U}$ trivially satisfies the self-adjointness condition. $\square$

The significance of the perturbation semigroup becomes clear in its action on hermitian matrices. Indeed, an element $\sum_j A_j \otimes B_j \in \text{Pert}(V_F)$ acts on a hermitian matrix D by matrix multiplication on the left and on the right as:

$$D \mapsto \sum_j A_j D B_j^t,$$

which is then considered as a perturbation of D . This action is compatible with the semigroup law, since

$$\sum_{j,k} (A_j A'_k) D (B_j B'_k)^t = \sum_j A_j \left(\sum_k A'_k D (B'_k)^t \right) (B_j)^t$$

and it respects hermiticity of D precisely because of the self-adjointness condition:



Alain Connes during the IMAPP Colloquium in Nijmegen (March 2014) presenting (part of) the Standard Model Lagrangian.

Photo: Bert Beelen

$$\left(\sum_j A_j D (B_j)^t \right)^* = \sum_j \overline{B_j} D (\overline{A_j})^t = \sum_j A_j D (B_j)^t.$$

The restriction of this action to the unitary group $\mathcal{U}(V_F)$ gives

$$D \mapsto U D U^*.$$

The crucial point is that conjugation by a unitary leaves the spectrum of D invariant. As such, the spectral action functional is an invariant under this action. In physics, this corresponds to *gauge invariance* and $\mathcal{U}(V_F)$ is recognized as the *gauge group*.

Let us conclude with a discussion on the action in the examples treated before.

Example 9. Let us consider the action of $\text{Pert}(\mathbb{C}^2) \simeq \mathbb{C}$ (cf. Example 5) on the symmetric matrix

$$D_F = \begin{pmatrix} 0 & c \\ \overline{c} & 0 \end{pmatrix}.$$

One finds that $\phi \in \mathbb{C} \simeq \text{Pert}(\mathbb{C}^2)$ acts as

$$D_F \mapsto \begin{pmatrix} 0 & c\phi \\ \overline{c\phi} & 0 \end{pmatrix}.$$

The group of unitary diagonal 2×2 matrices is $U(1) \times U(1)$ and an element (λ_1, λ_2) therein acts on the perturbed D_F , and consequently on ϕ as

$$\phi \mapsto \lambda_1 \overline{\lambda_2} \phi.$$

Example 10. Let us consider a noncommutative example, namely, the action of $\text{Pert}(\mathbb{C} \oplus M_2(\mathbb{C}))$ on the operator D_F of Example 3. The perturbation semigroup behaves nicely with respect to direct sums and we find in this case that

$$\text{Pert}(\mathbb{C} \oplus M_2(\mathbb{C})) \simeq M_2(\mathbb{C}) \times \text{Pert}(M_2(\mathbb{C})).$$

It turns out that only $M_2(\mathbb{C}) \in \text{Pert}(\mathbb{C} \oplus M_2(\mathbb{C}))$ acts non-trivially on the above D_F . If we label the entries of the first column of such a 2×2 matrix by ϕ_1 and ϕ_2 we arrive at

$$D_F \mapsto \begin{pmatrix} 0 & \overline{c\phi_1} & \overline{c\phi_2} \\ c\phi_1 & 0 & 0 \\ c\phi_2 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

We will see later that the two fields ϕ_1 and ϕ_2 turn out to parametrize the famous *Higgs field* in physics.

The group of unitary block diagonal matrices is now $U(1) \times U(2)$ and an element (λ, u) therein acts as

$$\begin{pmatrix} \phi_1 \\ \phi_2 \end{pmatrix} \mapsto \overline{\lambda} u \begin{pmatrix} \phi_1 \\ \phi_2 \end{pmatrix}. \quad (7)$$

Example 11. Let us end with a commutative but continuous example and consider a smooth manifold M . The action of $\text{Pert}(C^\infty(M))$ (cf. Example 7 on the partial derivatives appearing in a Dirac operator D_M on a Riemannian spin manifold M is given by

$$\frac{\partial}{\partial x_\mu} \mapsto \frac{\partial}{\partial x_\mu} + \frac{\partial}{\partial y_\mu} f(x, y) \Big|_{y=x}, \quad (\mu = 1, \dots, n),$$

where $f \in C^\infty(M \times M)$ is such that $f(x, x) = 1$ and $\overline{f(x, y)} = f(y, x)$. In physics, one writes

$$A_\mu := \frac{\partial}{\partial y_\mu} f(x, y) \Big|_{y=x},$$

which turns out to be the *electromagnetic potential* giving rise to the electromagnetic field that describes the photon. We refer e.g. to [15] for more details on the theory of electrodynamics.

A unitary element u in $C^\infty(M)$ acts by conjugation on the partial derivatives, or, which is the same, can be absorbed by the transformation

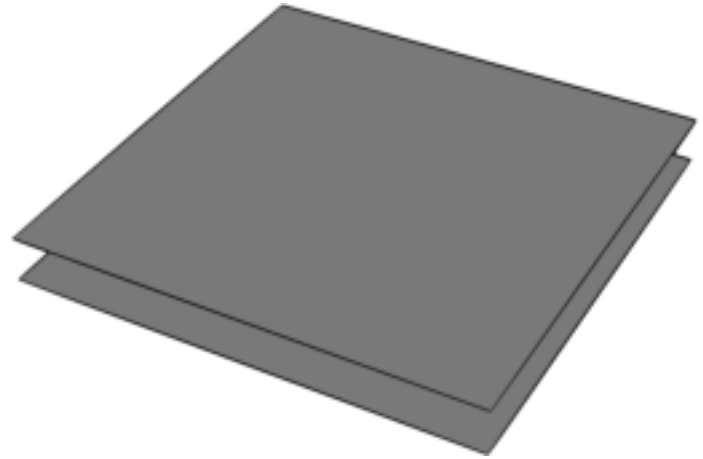


Figure 7 The product of M with the two-point space of Example 1 can be identified with the space consisting of two copies of M .

$$A_\mu \mapsto u A_\mu u^* + u \partial_\mu u^*,$$

which is the usual form of a gauge transformation in physics.

Applications to particle physics

We now combine a Riemannian spin manifold M with a finite noncommutative space F , considering the latter as an *internal space* at each point of M . In other words, we form the *direct product* $M \times F$ and consider matrix-valued maps from M to V_F as functions on this noncommutative space. Thus, if F describes a space of N points, possibly with some noncommutative structure at each point, the product $M \times F$ can be considered as a (noncommutative) space consisting of N copies of the manifold M (see Figure 7 for $N = 2$).

The next ingredient is the Dirac operator on $M \times F$ which is defined to be the product of D_M and D_F . More precisely, if M is four-dimensional we can write D_M as the following block matrix:

$$D_M = \begin{pmatrix} 0 & D_M^+ \\ D_M^- & 0 \end{pmatrix}.$$

This was indeed the case for the four-dimensional torus, where we had in equation (1):

$$D_M^\pm = \pm \frac{\partial}{\partial t_1} + i \frac{\partial}{\partial t_2} + j \frac{\partial}{\partial t_3} + k \frac{\partial}{\partial t_4}.$$

We combine this with the finite Dirac operator D_F by setting as a Dirac operator on the product $M \times F$:

$$D_{M \times F} = \begin{pmatrix} D_F & D_M^+ \\ D_M^- & -D_F \end{pmatrix}.$$

The crucial property of this specific form is that it squares to the sum of the two Laplacians on M and F :

$$D_{M \times F}^2 = D_M^2 + D_F^2,$$

which follows from a simple matrix calculation. This is very useful in the computation of the spectral action functional. Let us carry out this computation in the simple case that f is a Gaussian function as in (2).

Then, we can expand the exponential in powers of D_F :

$$\mathrm{Tr} e^{-D_{M \times F}^2 / \Lambda^2} = \mathrm{Tr} \left(1 - \frac{D_F^2}{\Lambda^2} + \frac{D_F^4}{2\Lambda^4} - \dots \right) e^{-D_M^2 / \Lambda^2}. \quad (8)$$

If we use equation (3) in this expression and ignore terms proportional to Λ^{-1} , we arrive in dimension $n = 4$ at

$$\mathrm{Tr} e^{-D_{M \times F}^2 / \Lambda^2} = \frac{\mathrm{Vol}(M)\Lambda^4}{(4\pi)^2} \mathrm{Tr} \left(1 - \frac{D_F^2}{\Lambda^2} + \frac{D_F^4}{2\Lambda^4} \right) + \mathcal{O}(\Lambda^{-1}).$$

As Λ is supposedly large, we will ignore the terms proportional to Λ^{-1} . Hence, up to overall constants, the spectral action functional yields a *potential* for D_F , i.e.

$$V(D_F) = \Lambda^4 - \Lambda^2 \mathrm{Tr} D_F^2 + \frac{1}{2} \mathrm{Tr} D_F^4. \quad (9)$$

This potential plays a crucial role in the Higgs spontaneous symmetry breaking mechanism, as we will now explain.

Noncommutative two-point space and the Higgs boson

Let us consider the space $M \times F$ where F is the two-point space introduced in Example 3. Then, the distance on the space $M \times F$ is the combination of the ordinary Riemannian distance on each copy of M , and the two copies are at distance $|c|^{-1}$ from each other.

If one includes the perturbations of D_F analysed in Example 10, then D_F becomes parametrized by the Higgs fields ϕ_1, ϕ_2 , which may now vary over the points in M . The potential of equation (9) then becomes a potential for the complex field ϕ :

$$V(\phi) = \Lambda^4 - 2\Lambda^2(|\phi_1|^2 + |\phi_2|^2) + (|\phi_1|^2 + |\phi_2|^2)^2. \quad (10)$$

This is the famous ‘mexican-hat’ potential depicted in Figure 8. It is the starting point of the Higgs spontaneous symmetry breaking mechanism, as we will explain next.

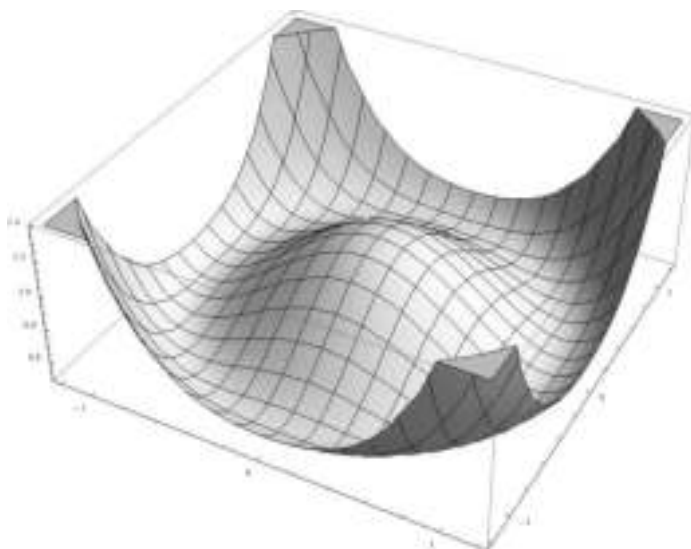


Figure 8 The ‘mexican-hat’ potential $V(\phi)$ of equation (10) in terms of $|\phi_1|$ and $|\phi_2|$.

First, note the circular symmetry in Figure 8, which in fact corresponds to the invariance of the potential under the $U(1) \times U(2)$ -action of equation (7). However, in physics particles and fields tend to minimize potentials and it is already clear from the picture that any such minimum breaks this symmetry. This procedure is called *spontaneous symmetry breaking*. Essentially, a minimum of V sets ϕ_1 and ϕ_2 to certain fixed vacuum values, say v and 0 respectively. Accordingly, this freezes the distance between the two layers to be proportional to $|v|^{-1}$, as explained in Example 1. If one takes all constants and physical units properly into account, one derives from the recently measured mass of the Higgs boson (approximately 125.5 GeV) that the distance between the two layers in Figure 7 is of the order of $10^{-18}m$.

Noncommutative three-point space and a new particle?

We now consider the case that F is a three-point space, with the non-commutative structure dictated by the matrices

$$V_F = \mathbb{C} \oplus \mathbb{C} \oplus M_2(\mathbb{C}).$$

That is to say, we consider matrices of the form

$$A = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & a_{11} & a_{12} \\ 0 & 0 & a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}$$

for complex numbers $\lambda_1, \lambda_2, a_{11}, a_{12}, a_{21}, a_{22}$.

We can make the following convenient choice of finite Dirac operator for this three-point space:

$$D_F := \begin{pmatrix} 0 & 0 & \bar{c} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ c & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

Even though the matrix D_F contains mainly zeroes, the perturbations of it coming from the semigroup $\mathrm{Pert}(V_F)$ are rather non-trivial and give

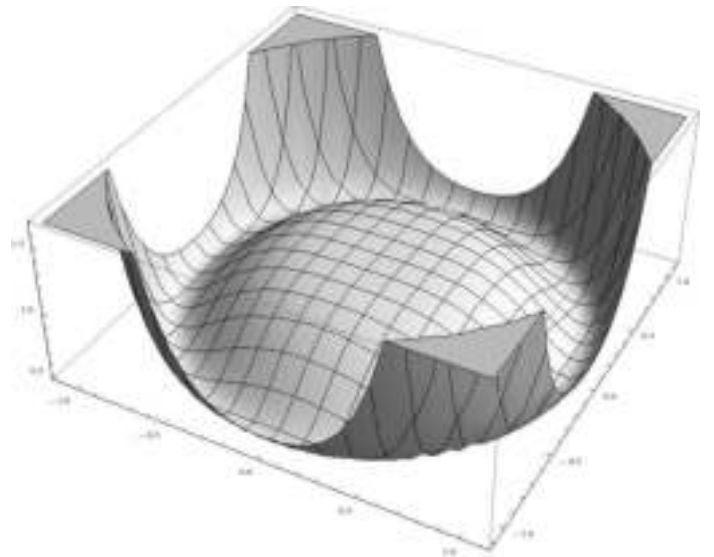


Figure 9 The ‘bowler hat’ potential $V(\sigma_1, \sigma_2)$ of equation (11) in terms of $|\sigma_1|$ and $|\sigma_2|$.

rise to two scalar fields σ_1 and σ_2 . The potential derived in equation (9) becomes a potential for these fields, now of the form

$$V(\sigma_1, \sigma_2) = \Lambda^4 - 2\Lambda^2(|\sigma_1|^2 + |\sigma_2|^2)^2 + (|\sigma_1|^2 + |\sigma_2|^2)^4. \quad (11)$$

Note that this is a polynomial expression of order 8, as opposed to the order 4 encountered before for the Higgs field (cf. [8] for the full details on this example). The resulting ‘bowler hat’ potential is depicted in Figure 9.

Again, the potential $V(\sigma_1, \sigma_2)$ is invariant under the group of unitary matrices in V_F , which in this case is $U(1) \times U(1) \times U(2)$. If the fields (σ_1, σ_2) attain a minimum, this spontaneously breaks this symmetry. A similar discussion as before for the Higgs field also applies to the σ -field, freezing the two layers to be separated by an even smaller distance of $10^{-27} m$ (corresponding to the mass of the σ -particle to be of the order of 10^{12} GeV).

The Standard Model of particle physics

We now sketch how the above toy models extend and combine to give a noncommutative geometrical description of the Standard Model of particle physics. First, recall that the latter model is the result of decades of experimental and theoretical work in physics, explaining the dynamics and interactions of all existing elementary particles. Let us summarize the particle content (cf. Figure 10):

- *leptons*: electron (e), muon (μ), tauon (τ) and three neutrinos (ν_e, ν_μ, ν_τ).
- *quarks*: up (u), charm (c) and top (t), and down (d), strange (s) and bottom (b), all coming in three colours.
- *force carriers*: photon (electromagnetic force), Z and W -boson (weak nuclear force) and gluons (strong nuclear force).
- *Higgs boson*: giving mass to the Z and W -boson via the Higgs spontaneous symmetry breaking.

These particles are the building blocks of well-known particles such as the proton (built from two up quarks and one down quark), neutron (built from two down quarks and one up quark), pion, et cetera.

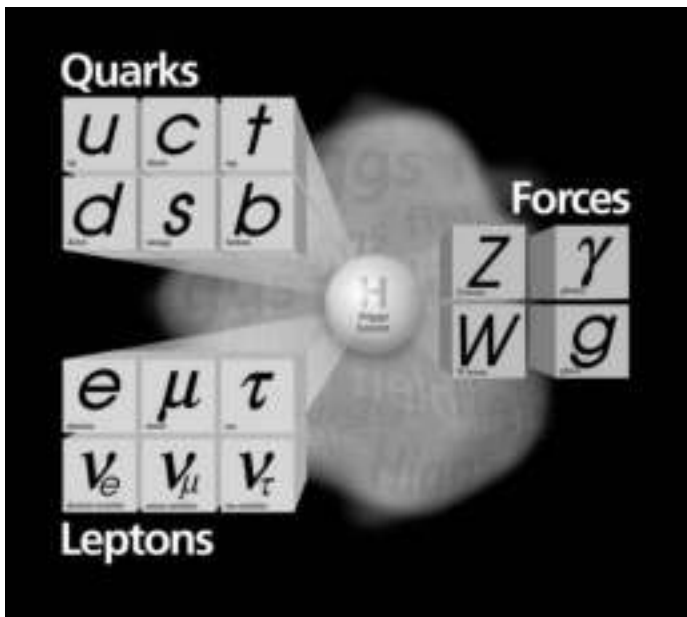


Figure 10 The particle content of the Standard Model.

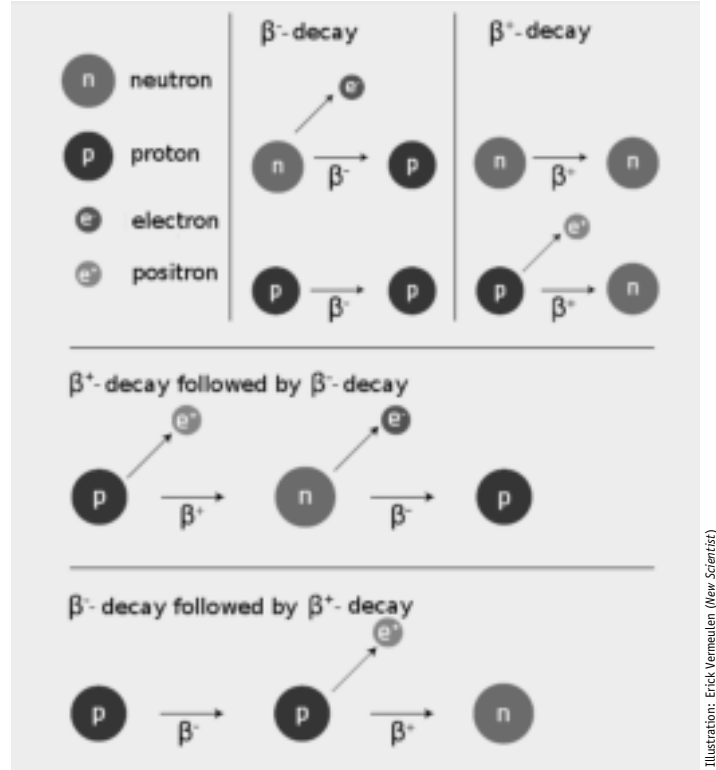


Figure 11 β -decay is a noncommutative physical process.

We will not describe the full dynamics and interactions of the Standard Model, as this can easily fill a textbook; we refer to [13] for a physicist's overview and to [1] for a mathematician-friendly introduction. Instead, we single out a typical decay process described by the Standard Model, and explain how it leads to a noncommutative structure.

We consider β^- and β^+ -decay, which are two types of radioactive decay. The first, β^- -decay, is the emission of an electron (and an electron-neutrino) by a neutron to form a proton (see Figure 11). This process is a weak interaction process, replacing a down quark in the neutron by an up quark to form a proton, at the same time emitting a W -boson. Subsequently, this W -boson decays into an electron and neutrino. Let us simplify this process by only considering what happens to neutron and proton:

$$\beta^- : n \mapsto p,$$

$$\beta^- : p \mapsto p.$$

The second line simply states that β^- -decay is not concerned with decay of the proton, and leaves it as is. Such a process calls for a representation by matrices: if we denote the basis vectors in $\mathbb{C}^2$ by p and n ,

$$p = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad n = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix},$$

then we can represent

$$\beta^- = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

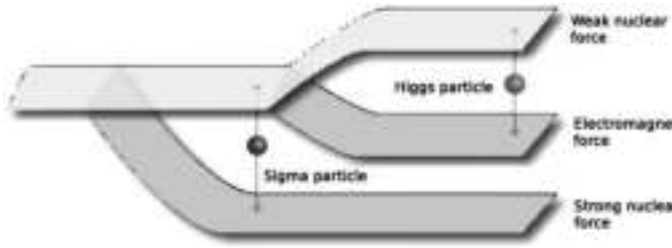


Figure 12 The block matrices in $\mathbb{C} \oplus M_2(\mathbb{C}) \oplus M_3(\mathbb{C})$ allows to distinguish three layers in $M \times F$.

The ‘reverse’ process is β^+ -decay, now a proton emits a positron (and neutrino) to form a neutron (see Figure 11). Again, in terms of the above basis vectors p and n we can represent β^+ as a two-by-two matrix:

$$\beta^+ = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

The crucial observation is that the two matrices representing β^- and β^+ do not commute:

$$\beta^- \beta^+ \neq \beta^+ \beta^-,$$

as one can readily check.

It is exactly these two-by-two matrices that lead to the noncommutative structure encountered in Example 3. In fact, the block matrices in $\mathbb{C} \oplus M_2(\mathbb{C})$ are responsible for both the electromagnetic and the weak interaction. Moreover, the strong interaction between the quarks and their corresponding three colours is governed by three-by-three matrices, which can be described in complete analogy with the above description of β -decay. This results in the space of block matrices

$$V_F = \mathbb{C} \oplus M_2(\mathbb{C}) \oplus M_3(\mathbb{C}).$$

In the full model [7] one further restricts $M_2(\mathbb{C})$ to the quaternions, but for the present illustrational purposes this point is irrelevant. By considering these matrices as functions on the noncommutative space F , we have essentially translated the noncommutativity of the above physical processes into geometry. When combined as $M \times F$ with a (space-time) manifold M , the direct summands in V_F each correspond to a copy of M , and form the domain of the electromagnetic, weak and strong interaction, respectively (see Figure 12).

As in the toy models described before, the dynamics on this finite noncommutative space F is governed by a symmetric matrix D_F . If we count the total number of leptons and quarks we come to a 96×96 -dimensional matrix which is filled with masses for the leptons and quarks, and otherwise contains many zeroes. Now, the great advantage of the noncommutative approach is that from this geometrical data alone all bosons can now be derived, with a key role played by the perturbation semigroup of Definition 4. In fact, much as the photon was obtained in Example 11 by acting with $\text{Pert}(C^\infty(M))$ on the Dirac operator D_M , extending this action to $\text{Pert}(V_F)$ on that same D_M produces the photon, W and Z -boson, and gluons.

And what is more, the action of $\text{Pert}(V_F)$ on D_F results in the Higgs boson, much as in the toy model discussed before. This is a great improvement over the usual formulation of the Standard Model, where the Higgs field is introduced by hand. Also a new, yet undiscovered σ particle appears, as in the toy model of the previous section. More-

over, the computation of the distances between the several layers of the previous two subsections translate *verbatim* to the Standard Model, yielding a picture (Figure 12) of three layers of space-time which are separated by a distance of $10^{-18}m$ and $10^{-27}m$, respectively.

Remark 12. The noncommutative description of the Standard Model was given in [7] (see also [12]). All mathematical details and nuances can be found therein. The σ -field was discovered in [6], but already tacitly present in [5]. A full mathematical description of it, including the description of the perturbation semigroup was given in [8–9]. We also refer to [20] and references therein.

Quantization of the theory on a lattice

In the previous sections we have sketched how the full Standard Model of particle physics can be derived from a noncommutative space, using not more than basic linear algebra. Even though this is quite an achievement, there is still the formidable problem to give a mathematically rigorous description of the quantization of the above system. At present, the derivation of the spectral action functional for the Standard Model, including e.g. the Higgs potential, is a mathematical derivation. However, the translation of it to realistic quantum particles and fields follows a more physics-style approach. It is clear that in order to have a proper understanding of the Standard Model of particle physics this aspect should be improved. It is the goal of my Vidi-research project to take a step in this direction.

We will analyse the quantization of gauge fields — such as the electromagnetic field — on a discrete space instead of in the continuum. That is, we replace M by a lattice, construct the quantum theory there, and then analyse the limit of small lattice spacing (Figure 13). The main challenge is to do this in a mathematically rigorous way, for which we intend to exploit the powerful functional analytical techniques coming from noncommutative geometry. One of the intriguing links with the above description of noncommutative finite spaces is that the replacement of M by a lattice is very similar to analysing the structure of the discrete spaces F using matrix algebra. In [17] we present a first exploration of this exciting interplay between noncommutative geometry, lattice gauge theory and quantization.

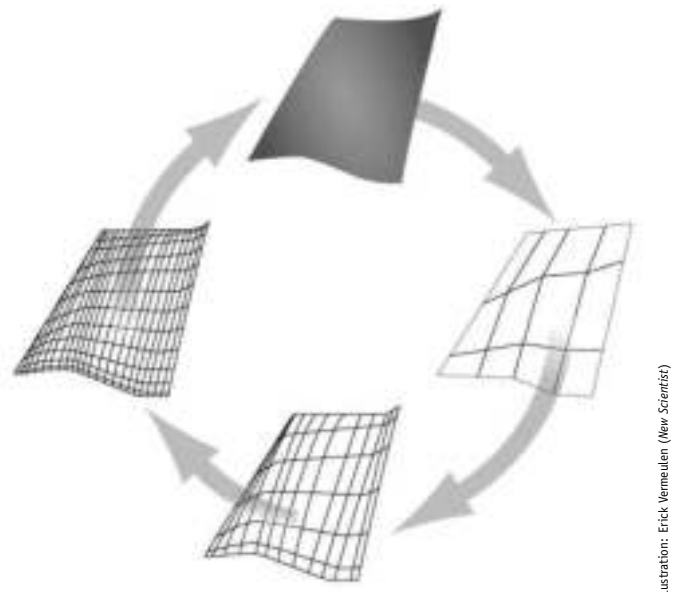


Figure 13 Quantum gauge fields are first described on a lattice, after which one takes the limit of small lattice spacing to analyse the quantum theory in the continuum.

References

- 1 J. Baez and J. Huerta, The algebra of grand unified theories, *Bull. Amer. Math. Soc. (N.S.)* 47 (2010), 483–552.
- 2 N. Berline, E. Getzler and M. Vergne, *Heat Kernels and Dirac Operators*, Springer, Berlin, 1992.
- 3 A.H. Chamseddine and A. Connes, Universal formula for noncommutative geometry actions: Unifications of gravity and the standard model, *Phys. Rev. Lett.* 77 (1996), 4868–4871.
- 4 A.H. Chamseddine and A. Connes, The spectral action principle, *Commun. Math. Phys.* 186 (1997), 731–750.
- 5 A.H. Chamseddine and A. Connes, Noncommutative Geometry as a Framework for Unification of all Fundamental Interactions including Gravity. Part I, *Fortsch. Phys.* 58 (2010), 553.
- 6 A.H. Chamseddine and A. Connes, Resilience of the Spectral Standard Model, *JHEP* 1209 (2012), 104.
- 7 A.H. Chamseddine, A. Connes and M. Marcolli, Gravity and the standard model with neutrino mixing, *Adv. Theor. Math. Phys.* 11 (2007), 991–1089.
- 8 A.H. Chamseddine, A. Connes and W.D. van Suijlekom, Inner fluctuations in noncommutative geometry without the first order condition, *J. Geom. Phys.* 73 (2013), 222–234.
- 9 A.H. Chamseddine, A. Connes and W.D. van Suijlekom, Beyond the spectral Standard Model: Emergence of Pati-Salam unification, *JHEP* 1311 (2013), 132.
- 10 I. Chavel, *Eigenvalues in Riemannian Geometry*, Pure and Applied Mathematics, No. 115, Academic Press, Orlando, FL, 1984; including a chapter by Burton Randol, with an appendix by Jozef Dodziuk.
- 11 A. Connes, *Noncommutative Geometry*, Academic Press, San Diego, 1994.
- 12 A. Connes and M. Marcolli, *Noncommutative Geometry, Quantum Fields and Motives*, AMS, Providence, 2008.
- 13 W. N. Cottingham and D.A. Greenwood, *An Introduction to the Standard Model of Particle Physics*, Cambridge University Press, Cambridge, second edition, 2007.
- 14 C. Gordon, D.L. Webb and S. Wolpert, One cannot hear the shape of a drum, *Bull. Amer. Math. Soc. (N.S.)* 27 (1992), 134–138.
- 15 D.J. Griffiths, *Introduction to Electrodynamics*, Addison Wesley, third edition, 1999.
- 16 M. Kac, Can one hear the shape of a drum? *Amer. Math. Monthly* 73 (1966), 1–23.
- 17 M. Marcolli and W.D. van Suijlekom, Gauge networks in noncommutative geometry, *J. Geom. Phys.* 75 (2014), 71–91.
- 18 N. Neumann, *Perturbation Semigroup for Matrix Algebras*, Bachelor's Thesis, Radboud University Nijmegen, 2014.
- 19 N. Neumann and W.D. van Suijlekom, Perturbation semigroup of matrix algebras, arXiv: 1410.5961.
- 20 W.D. van Suijlekom, *Noncommutative Geometry and Particle Physics*, Springer, 2014.

Tristan van Leeuwen

Mathematisch Instituut

Universiteit Utrecht

t.vanleeuwen@uu.nl

Column Tenure-tracker

Inverse problemen

In deze rubriek stellen houders van een tenure track-positie zich voor. Om het wiskundig onderwijs en onderzoek op niveau te houden zijn in 2013 tenure track-posities gerealiseerd door de wiskundeclusters. Deze aanstellingen bieden jonge wiskundige onderzoekers kans op aanzienlijke groei in hun wetenschappelijke carrière. Tristan van Leeuwen heeft een tenure track-positie aan de Universiteit van Utrecht.

Hoe ziet de aarde er van binnen uit? Wat zit er verstopt in een mummie? Hoe diep zit het oliereservoir? We kunnen deze vragen niet beantwoorden met behulp van directe waarnemingen maar hebben vaak wel *indirecte* waarnemingen tot onze beschikking. Voorbeelden zijn aardbevingsmetingen of een CT-scan van een mummie. Als we de invloed van de parameters op de metingen goed kunnen modelleren, kunnen we deze vragen formuleren als een *invers probleem*:

Bepaal de parameters, $\mathbf{m}$, waarvoor de voorspelde metingen, $F(\mathbf{m})$, zo goed mogelijk overeenkomen met de daadwerkelijke metingen $\mathbf{d}$.

De voorwaartse operator F beschrijft hoe de parameters de metingen beïnvloeden. Soms kun je een expliciete inverse operator vinden, maar meestal wordt het inverse probleem gesteld als een optimalisatieprobleem:

$$\min_{\mathbf{m}} \rho(F(\mathbf{m}) - \mathbf{d}). \quad (1)$$

De functie $\rho(\cdot)$ meet de fout tussen de voorspelde en gemeten data. Zo nemen we $\rho(\cdot) = \|\cdot\|_2^2$ voor een kleinste kwadraten schatting. In mijn onderzoek richt ik me op verschillende kanten van zulke inverse problemen, met als belangrijkste toepassingen seismische beeldvorming en, sinds kort, computertomografie.

Tijdens mijn promotie ben ik me gaan verdiepen in seismische beeldvorming. De niet-lineariteit van de voorwaartse operator kan er in deze toepassing voor zorgen dat het oplossen van het optimalisatieprobleem (1) niet leidt tot een bruikbare schatting van de parameters. Kort gezegd kan het zijn dat de verkregen oplossing slechts lokaal optimaal is, en niet globaal. Hoewel lokale optimaliteit genoeg is om een optimalisatieprobleem op te lossen, zijn lokaal optimale oplossingen vaak onbruikbaar als oplossing van een inverse probleem. Zulke lokale optima zijn dan een bijverschijnsel van de formulering en door de fout tussen de gemeten en gemodelleerde data op een andere manier te meten, kunnen ze deels worden voorkomen [6].

Als postdoc op de University of British Columbia ben ik me meer gaan richten op oplossingsmethoden voor het optimalisatieprobleem.

Ik heb daar onder andere gewerkt aan het automatisch schatten van extra parameters in het inverse probleem. Denk hierbij aan calibratieparameters in F of een covariantiematrix in ρ die bepaalde componenten in de fout meer (of juist minder) gewicht geeft. Het optimalisatieprobleem kan dan worden geschreven als

$$\min_{\mathbf{m}, \mathbf{a}} f(\mathbf{m}, \mathbf{a}), \quad (2)$$

waar de vector $\mathbf{a}$ de extra parameters bevat. Hoewel dit probleem als een niet-linear optimalisatieprobleem in $(\mathbf{m}, \mathbf{a})$ kan worden gezien is het vaak efficiënter het probleem te splitsen en een optimale waardefunctie $\bar{f}(\mathbf{m}) = \min_{\mathbf{a}} f(\mathbf{m}, \mathbf{a})$ te introduceren. Zeker wanneer de optimalisatie in $\mathbf{a}$ makkelijk is, is deze aanpak zeer geschikt. Onder milde voorwaarden is de optimale waardefunctie differentieerbaar en zijn er zelfs expliciete uitdrukkingen voor de afgeleiden. Zo kunnen we het overgebleven optimalisatieprobleem $\min_{\mathbf{m}} \bar{f}(\mathbf{m})$ oplossen met Newtons methode [2].



Een andere veelvoorkomende structuur die we kunnen uitbuiten is wanneer het optimalisatieprobleem kan worden gesplitst:

$$f(\mathbf{m}) = \sum_{i=1}^M f_i(\mathbf{m}). \quad (3)$$

Denk hierbij aan metingen die afkomstig zijn van M onafhankelijke experimenten (verschillende aardbevingen, bijvoorbeeld). Het kan veel rekentijd vergen om een enkele f_i te evalueren, bijvoorbeeld omdat de voorwaartse operator een partiële differentiaalvergelijking (PDV) oplost. Daarnaast is M vaak groot. Om rekentijd te besparen heb ik gewerkt aan dimensiereductiemethoden die de functie f benaderen met een veel kleinere effectieve M . Een gerelateerde aanpak om de rekentijd te verminderen is het benaderen van de voorwaartse operator F door bijvoorbeeld de PDV minder nauwkeurig op te lossen. In beide gevallen is het nog steeds de vraag *hoe* nauwkeurig deze benaderingen moeten zijn om te garanderen dat de geschatte parameters, die worden verkregen door de benaderde f te minimaliseren, bruikbaar zijn. Numerieke experimenten wijzen uit dat zulke methoden zeer goede parameterschattingen opleveren in een fractie van de tijd die nodig zou zijn om het gehele probleem met grote nauwkeurigheid door te rekenen [1, 3, 5].

Wanneer de voorwaartse operator een PDV oplost, zoals in seismische beeldvorming, is F impliciet gedefinieerd: $F(\mathbf{m}) = P\mathbf{u}$ waarbij $\mathbf{u}$ de oplossing is van een PDV $A(\mathbf{m})\mathbf{u} = \mathbf{q}$ en P bepaalt welk deel van de oplossing we hebben geobserveerd. Het oplossen van het optimalisatieprobleem (1) leidt in dit geval tot de welbekende geadjungeerde aanpak. We kunnen het probleem (1) ook schrijven als

$$\min_{\mathbf{m}, \mathbf{u}} \rho(P\mathbf{u} - \mathbf{d}) \quad \text{zodat} \quad A(\mathbf{m})\mathbf{u} = \mathbf{q}. \quad (4)$$

Een mogelijk voordeel van deze formulering is dat het de zoekruimte vergroot en het daardoor gemakkelijker is een geschikt (globaal) minimum te vinden. Hoewel er elegante methoden bestaan om zulke optimalisatieproblemen met restricties op te lossen via de Lagrange-functie, zijn deze vaak niet praktisch voor grootschalige problemen omdat de toestandsvariabele $\mathbf{u}$ te groot is. Een interessant alternatief is de zogenaamde penalisiatiemethode. We herformuleren het probleem (4) in dit geval als

$$\min_{\mathbf{m}, \mathbf{u}} \rho(P\mathbf{u} - \mathbf{d}) + \lambda \|A(\mathbf{m})\mathbf{u} - \mathbf{q}\|_2^2. \quad (5)$$

Nu kunnen we de eerdergenoemde truc toepassen om $\mathbf{u}$ uit het probleem te elimineren. Op deze manier krijgen we een methode die qua rekentijd en geheugengebruik gelijkwaardig is aan de standaard geadjungeerde aanpak, en toch een grotere zoekruimte benut. Een interessante bijkomstigheid van deze aanpak is dat er *geen* expliciete geadjungeerde berekeningen nodig zijn om de benodigde gradiënt uit te rekenen [4]. In de limiet $\lambda \rightarrow \infty$, convergeert een oplossing van (5) naar een oplossing van het oorspronkelijke probleem. In toepassingen waar geen grote nauwkeurigheid is vereist, is het vaak voldoende om (5) voor één waarde van λ op te lossen.

Na drie jaar in Canada was het tijd om weer eens verder te gaan kijken. Zo kwam ik terecht bij Joost Batenburg op het CWI, met wie ik al sinds mijn verdediging contact had vanwege onze gezamenlijke interesse in beeldvormingstechnieken. Er zit veel overlap in de problematiek bij seismische beeldvorming en computertomografie. Veel van de bovengenoemde technieken zijn dan ook direct toepasbaar in de computertomografie. Daarnaast leidt de specifieke structuur van de problemen in computertomografie tot interessante nieuwe onderzoeksvragen.

Per 1 september 2014 ben ik aan een nieuwe uitdaging begonnen: een tenure track-positie in Utrecht. Ik ben daar van plan mijn onderzoek op het snijvlak van scientific computing en inverse problemen voort te zetten. Daarbij vind ik het leuk de wiskunde aan te wenden om te kijken hoe de aarde er van binnen uit ziet, wat er verstopt zit in een mummie, of erachter te komen hoe diep het oliereservoir zit. 

Biografie

Tristan van Leeuwen werd geboren in 1981 te Hilversum. Hij studeerde computational science in Utrecht en schreef zijn afstudeerscriptie, onder begeleiding van Rob Bisseling, over het partitioneren van hypergrafen. Van 2006–2010 deed hij zijn promotieonderzoek aan de TU Delft, onder begeleiding van Wim Mulder, en ontwikkelde een nieuwe methode om het seismische inverse probleem aan te pakken. Meteen daarna verhuisde hij met zijn vriendin naar Vancouver, Canada. Als postdoc ging hij aan de slag in de groep van Felix Herrmann en werkte daar onder andere aan dimensiereductietechnieken en optimalisatietechnieken en hun toepassing in de seismische beeldvorming. In 2013 verhuisden ze weer terug naar Nederland, waar Tristan als postdoc bij het CWI ging werken. In de groep van Joost Batenburg verdiepte hij zich in computertomografie. Sinds 1 september 2014 is hij begonnen als tenure-tracker bij het Mathematisch Instituut van de Universiteit Utrecht.

Referenties

- 1 A.Y. Aravkin, M.P. Friedlander, F.J. Herrmann en T. van Leeuwen, Robust inversion, dimensionality reduction, and randomized sampling, *Mathematical Programming* 134 (2012), 101–125.
- 2 A.Y. Aravkin en T. van Leeuwen, Estimating nuisance parameters in inverse problems, *Inverse Problems* 28 (2012), 115016.
- 3 T. van Leeuwen en F.J. Herrmann, Fast waveform inversion without source-encoding, *Geophysical Prospecting* 61 (2013), 10–19.
- 4 T. van Leeuwen en F.J. Herrmann, Mitigating local minima in full-waveform inversion by expanding the search space, *Geophysical Journal International* 195 (2013), 661–667.
- 5 T. van Leeuwen en F.J. Herrmann, 3D Frequency-domain seismic inversion with controlled sloppiness, te verschijnen in *SIAM Journal on Scientific Computing* (2014).
- 6 T. van Leeuwen en W.A. Mulder, A correlation-based misfit criterion for wave-equation travel time tomography, *Geophysical Journal International* 182 (2010), 1383–1394.

Johannes Schmidt-Hieber

Mathematical Institute

Leiden University

schmidthieberaj@math.leidenuniv.nl

Column Tenure-tracker

Reconstruction of risk measures from financial data

In this column holders of a tenure track position introduce themselves. The tenure track positions in mathematics became available in 2013. Excellent researchers could apply in several expertise areas of mathematics. Johannes Schmidt-Hieber has a tenure track position at Leiden University.

The last years have seen a growth in statistical applications in which the data and the unobserved quantity of interest are linked by a complex mechanism. Additionally, the object that we wish to reconstruct from the data can have in its own a complicated structure. To handle such problems requires the development of new methods and a detailed mathematical understanding of the underlying models which are currently subject of intensive research.

To illustrate the power of modern statistical procedures, we give a short survey on spot volatility estimation, which is a very intricate problem within nonparametric statistics. Here, the data come from financial assets, traded on short time intervals, such as milliseconds. The goal is to reconstruct from these observations the so called spot volatility which is a (random) function measuring the local variability of the price over time. The spot volatility is an important quantity for risk management and since it cannot be observed directly, stable reconstruction methods are crucial.

The main issue with these data is that there are two layers of randomness. The first one originates from the price dynamic; under the efficient price hypothesis, this dynamic describes the evolution of a financial asset over time. But the observed prices are additionally perturbed by a second layer of randomness. One reason for that are rounding errors; prices are usually given in full cent. But there are various other effects, which are summarized under the generic term ‘microstructure noise’. From a statistical perspective, microstructure noise is very unpleasant as it makes the spot volatility almost invisible in the data. As the name indicates, microstructure effects are comparably small. But, if we channel the data through a reconstruction procedure for the spot volatility, the outcome will typically be far away from the truth. In statistics, errors should cancel out, microstructure effects, however, tend to add up and to dominate the reconstructions.

To find a reconstruction of the spot volatility which is unaffected by microstructure effects, one can study the following simple toy model

first. Suppose we observe n prices $Y_{1,n}, \dots, Y_{n,n}$ at time points i/n with

$$Y_{i,n} = \sigma W_{i/n} + \epsilon_{i,n}, \quad i = 1, \dots, n.$$



Here, $(W_t)_{t \geq 0}$ denotes a Brownian motion modeling the efficient price and σ is the (constant) spot volatility. The random variables $\epsilon_{i,n}$ are independent standard normal distributed and represent the microstructure noise. The two sources of randomness (efficient price and microstructure noise) are assumed to be independent. What we observe is therefore a Gaussian process and all information is contained in its covariance structure. Looking at the eigenvalues of the covariance, one finds that only few of these eigenvalues (of the order of $\sqrt{n}$ out of n) contain information about the quantity of interest σ . Taking this into account, σ can now be reconstructed from the data $Y_{1,n}, \dots, Y_{n,n}$ by a filtering and weighting scheme. Although a solution in a restricted model does not automatically provide a solution in a more general setting, it might nevertheless lead to new insights. And here it does. In fact, understanding the toy model above leads to a general reconstruction method that is unaffected by microstructure noise. One even can show that if more and more data are available, the so reconstructed spot volatility approximates the truth with the best possible speed which any reconstruction method in this problem theoretically could achieve.

The following real data example relies on prices of Euro-BUND futures (FGBL) for which up to 30.000 trades per day are available. In Figure 1, the data and the reconstructed spot volatility for one trading day are displayed. Apparently, the spot volatility is quite stable and increases slightly until 2 p.m. During this time period, we see therefore an increased market uncertainty and higher fluctuations of the underlying efficient price. In the early afternoon the method detects large variations of the spot volatility. These changes are typically linked to external events, such as macroeconomic announcements. Notice that we do not observe the classical volatility pattern, where the volatility is high at the opening and low during a ‘lunch break’. For our reconstructions we use a notion of volatility that is independent of the underlying trading intensity which causes these standard patterns. The representation of the spot volatility chosen in Figure 1 is in particular suitable for detection of events that are specific to one day.

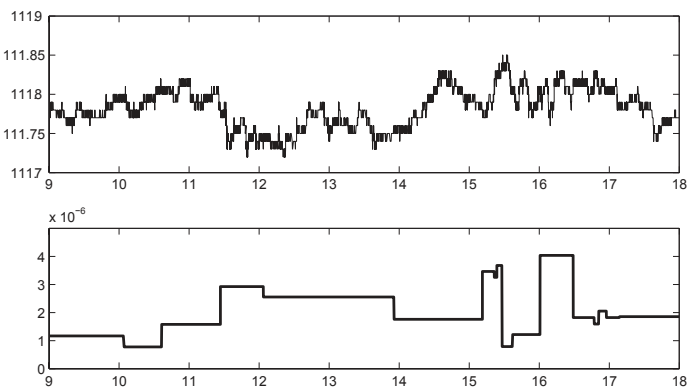


Figure 1 Application to real data. Upper: Price on June, 4th 2007 between 9 a.m. and 6 p.m. Lower: Reconstructed spot volatility. (Figure taken from [1])

Day	Market Uncertainty	maximal spot volatility during announcement
Jan-11	0	0.459
Feb-o8	0	0.541
Mar-o8	0	0.490
Apr-12	0	0.331
May-10	0	0.330
Jun-o6	0	0.191
Jul-05	0	0.587
Aug-02	0.05	1.286
Sep-06	0.1	0.906
Oct-04	0.03	0.621
Nov-o8	0	0.869
Dec-o6	0	1.119
average over days above		0.644
average over all days in 2007		0.551

Table 1 Market uncertainty and maximal spot volatility during monthly announcements on key interests rates. (Table taken from [1])

As application, we study the effect of macroeconomic events on the spot volatility. Table 1 shows the maximal value of the reconstructed spot volatility during the monthly announcements of the European Central Bank on key interest rates in 2007, which are of major importance for economy. Few days before the release, the predictions of analysts on the outcome are recorded. The first column in Table 1 shows the standard deviation of these predicted values. A high standard deviation refers to a high market uncertainty and should therefore be reflected by a larger spot volatility. Indeed the values in Table 1 suggest such a relationship. Secondly, we find that the average maximum of these days is higher than the average over all days in 2007 giving further evidence that key interest announcements lead to an increase in uncertainty.

An implementation of the presented method and further examples can be found in the Matlab based SpotvolToolbox available from www.stochastik.math.uni-goettingen.de/SpotvolToolbox. 

Biography

Johannes Schmidt-Hieber studied mathematics and theoretical physics in Freiburg, Göttingen, and at University of California, Davis. In 2010, he received his PhD from University of Göttingen and University of Bern. Since then, he has been a postdoc at Vrije Universiteit Amsterdam and at ENSAE in Paris. His research interests are in nonparametric statistics and in particular on nonparametric methods for stochastic processes. He has also worked on fractional processes and deconvolution problems. His current focus is on understanding the Bayesian method for high-dimensional and nonparametric models.

Reference

1 T. Sabel, J. Schmidt-Hieber and A. Munk (2014), Spot volatility estimation for high-frequency data: adaptive estimation in practice, to appear in *Modeling and Stochastic Learning for Forecasting in High Dimension*, Springer Lecture Notes in Statistics.

Peter J.C. Dickinson

Faculty of Electrical Engineering, Mathematics and Computer Science
University of Twente
p.j.c.dickinson@utwente.nl

Column Tenure-tracker

The copositive cone

In this column holders of a tenure track position introduce themselves. The tenure track positions in mathematics became available in 2013. Excellent researchers could apply in several expertise areas of mathematics. Peter J.C. Dickinson has a tenure track position at the University of Twente.

In April 2014 I started a tenure track position at the University of Twente, partially funded by NWO. Due to this I was invited to write a brief article introducing myself to the readers of *Nieuw Archief voor Wiskunde*.

Starting naturally enough at the beginning: I grew up in a village on the outskirts of London called Croxley Green. I then later went to the University of Cambridge to study mathematical physics. After finishing my masters I decided to take a break and did some backpacking around Australia. Well I say backpacking, but actually I spent most of my time in a single village in Western Australia doing scuba diving.

What brought me back to Europe, and ultimately academia, was a girl. I met my partner in Australia and I decided to move to the Netherlands to be with her. I figured a job in scuba diving would not be quite as exciting in the Netherlands, so instead I returned to academia. I was fortunate enough to be given the opportunity by Prof. Dr. M. Dür to do a PhD with her at the University of Groningen, starting in May 2009. After four years I finished my PhD (with a cum laude distinction) and started a PostDoc at the University of Vienna, with Prof. Dr. I.M. Bomze. This PostDoc was cut short due to the tenure track position that I started at the University of Twente in April 2014.

I think that this is enough personal details to be getting on with. Being a mathematician writing in a mathematical magazine, I think it is time I got on to what we are all actually interested in, my research. The main focus of my research is currently the copositive cone, and in particular its use in connection with optimisation. A symmetric matrix A is defined to be copositive if $\mathbf{x}^T A \mathbf{x} \geq 0$ for all nonnegative vectors $\mathbf{x}$. The set of copositive matrices is then

$$\text{Copositive Cone, } \text{COP}^n := \{A \in S^n \mid \mathbf{x}^T A \mathbf{x} \geq 0 \text{ for all } \mathbf{x} \in \mathbb{R}_+^n\},$$

where S^n is the set of symmetric matrices and $\mathbb{R}_+^n$ is the set of nonnegative vectors.

Although the definition of this cone is fairly simple, its properties are far from simple. In fact even checking if a matrix is copositive is an NP-hard problem [7]. A problem being difficult can sometimes scare

you away from it, but can also be an incentive to study it further. With copositivity the latter has been true for me, along with many others.

Copositivity was first developed within the field of linear algebra, with the concept being introduced by Prof. Dr. T.S. Motzkin in the 1950s [6]. One reason for studying it is its innate beauty, however as much as we like to discover the beauty in mathematics, society normally asks for some applications. For copositivity, important applications were provided around the turn of the millennium through conic optimisation [1–2]. Conic optimisation is a type of convex optimisation where we minimise or maximise a linear function over the intersection of a



closed convex cone and an affine space. When considering this for the copositive cone we call it copositive optimisation. In other words a copositive minimisation problem is one of the form

$$\begin{aligned} \min \quad & \text{tr}(CX) \\ \text{s.t.} \quad & \text{tr}(A_i X) = b_i \quad \text{for all } i = 1, \dots, m, \\ & X \in \text{COP}^n, \end{aligned}$$

where “tr” denotes the trace, $b_1, \dots, b_m \in \mathbb{R}$ and $C, A_1, \dots, A_m \in \mathcal{S}^n$.

Normally we would expect convex optimisation problems to be somewhat easy (i.e. solvable in polynomial time) [5]. However amazingly, although copositive optimisation is a form of convex optimisation, it can be used to give exact formulations of some NP-hard discrete optimisation problems. An example of such a problem that can be formulated in this way is that of finding the stability number of a graph [8]. These applications put copositive optimisation on the

boundary between continuous and discrete optimisation, as well as meaning that copositive optimisation problems cannot in general be solved in polynomial time (unless $P=NP$).

The advantage of copositive optimisation is that it allows us to apply techniques from convex optimisation to some NP-hard discrete problems. It is hoped that through understanding copositive optimisation we may be able to develop a one size fits all approach to solving these problems. Even if this lofty aim is not achieved, studying copositivity will still provide new insights and methods. We can also expand on results developed in connection to copositivity in order to consider a greater class of problems [3–4, 9].

A form of conic optimisation that is regularly used in the real world (in the background) is linear optimisation. Another form of conic optimisation that is on the brink of breaking out of academia is semidefinite optimisation. In the future I believe that copositive optimisation will also become highly important, making a (co-)positive contribution to our lives. 

References

- 1 I.M. Bomze, M. Dür, E. de Klerk, C. Roos, A.J. Quist and T. Terlaky, On copositive programming and standard quadratic optimization problems, *Journal of Global Optimization* 18 (2000), 301–320.
- 2 S. Burer, On the copositive representation of binary and continuous nonconvex quadratic programs, *Mathematical Programming – Series A* 120 (2009), 479–495.
- 3 P.J.C. Dickinson, *The Copositive Cone, the Completely Positive Cone and their Generalisations*, PhD thesis, University of Groningen (2013).
- 4 G. Eichfelder and J. Jahn, Set-semidefinite optimization, *Journal of Convex Analysis* 15 (2008), 767–801.
- 5 M. Grötschel, L. Lovász and A. Schrijver, *Geometric Algorithms and Combinatorial Optimization*, Springer, Berlin, 1988.
- 6 T.S. Motzkin, Copositive quadratic forms, *National Bureau of Standards Report* 1818 (1952), 11–22.
- 7 K.G. Murty and S.N. Kabadi, Some NP-complete problems in quadratic and nonlinear programming, *Mathematical Programming* 39 (1987), 117–129.
- 8 E. de Klerk and D.V. Pasechnik, Approximation of the stability number of a graph via copositive programming, *SIAM Journal on Optimization* 12 (2002), 875–892.
- 9 L.F. Zuluaga, J. Vera and J. Peña, LMI Approximations for Cones of Positive Semidefinite Forms, *SIAM Journal on Optimization* 16 (2006), 1076–1091.

Martinus van Hoorn

Appingedam

mc.vanhoorn@wxs.nl

Onderwijs

“Hoed u in het onderwijs voor extreme oplossingen”

Beschouwing naar aanleiding van een bijeenkomst over de toetsing van het rekenniveau in het voortgezet onderwijs. Martinus van Hoorn is voormalig hoofdredacteur van *Euclides*.

Op 30 juni 2014 vond in het Trippenhuys te Amsterdam een KNAW-bijeenkomst plaats die gewijd was aan het rekenen van leerlingen in het voortgezet onderwijs. Het thema van de bijeenkomst was ‘Rekenen: het onderwijs, het vak en de toets’. De bijeenkomst was met name georganiseerd vanwege de verschijning van het advies van de commissie-Bosker over de voorgenomen rekentoetsen in het voortgezet onderwijs. Bijkomend was dat vijf jaar geleden een KNAW-commissie het rapport ‘Rekenonderwijs op de basisschool’ het licht had doen zien.

Hier worden al meteen twee commissies opgevoerd. Om het zicht op alle commissies te behouden is aan het eind van dit beschouwende artikel een addendum opgenomen, waarin ook deze twee commissies de revue passeren.

De bijeenkomst op 30 juni was een bijzondere en misschien zelfs unieke bijeenkomst, omdat vrijwel het gehele veld aanwezig was: universitaire wiskundigen, pabodocenten, docenten uit het voortgezet onderwijs, diverse onderwijsbegeleiders, onderwijskundigen, andere betrokkenen en geïnteresseerden. Wie was er niet, kun je je afvragen. Voor zover mij bekend was het voor het eerst dat al deze mensen bij elkaar waren.

In deze bijdrage concentreer ik mij niet speciaal op de KNAW-bijeenkomst — weliswaar de aanleiding tot dit artikel — maar richt ik de focus op het rekenen in het voortgezet onderwijs. Hiertoe geef ik eerst enige achtergronden van de discussies over het rekenen, waarna ik de rekentoetsen die men wil afnemen naast de eindexamens in het voortgezet onderwijs beschouw. Daarbij neem ik ook voorbeeldopgaven onder de loep. Vervolgens schrijf ik iets over de rekenbijeenkomst op 30 juni, en ten slotte komt de vraag aan de orde of het reken- en wiskundeniveau in het voortgezet onderwijs erop vooruit zal gaan — dit laatste blijft immers de hoofdzaak.

Achtergronden

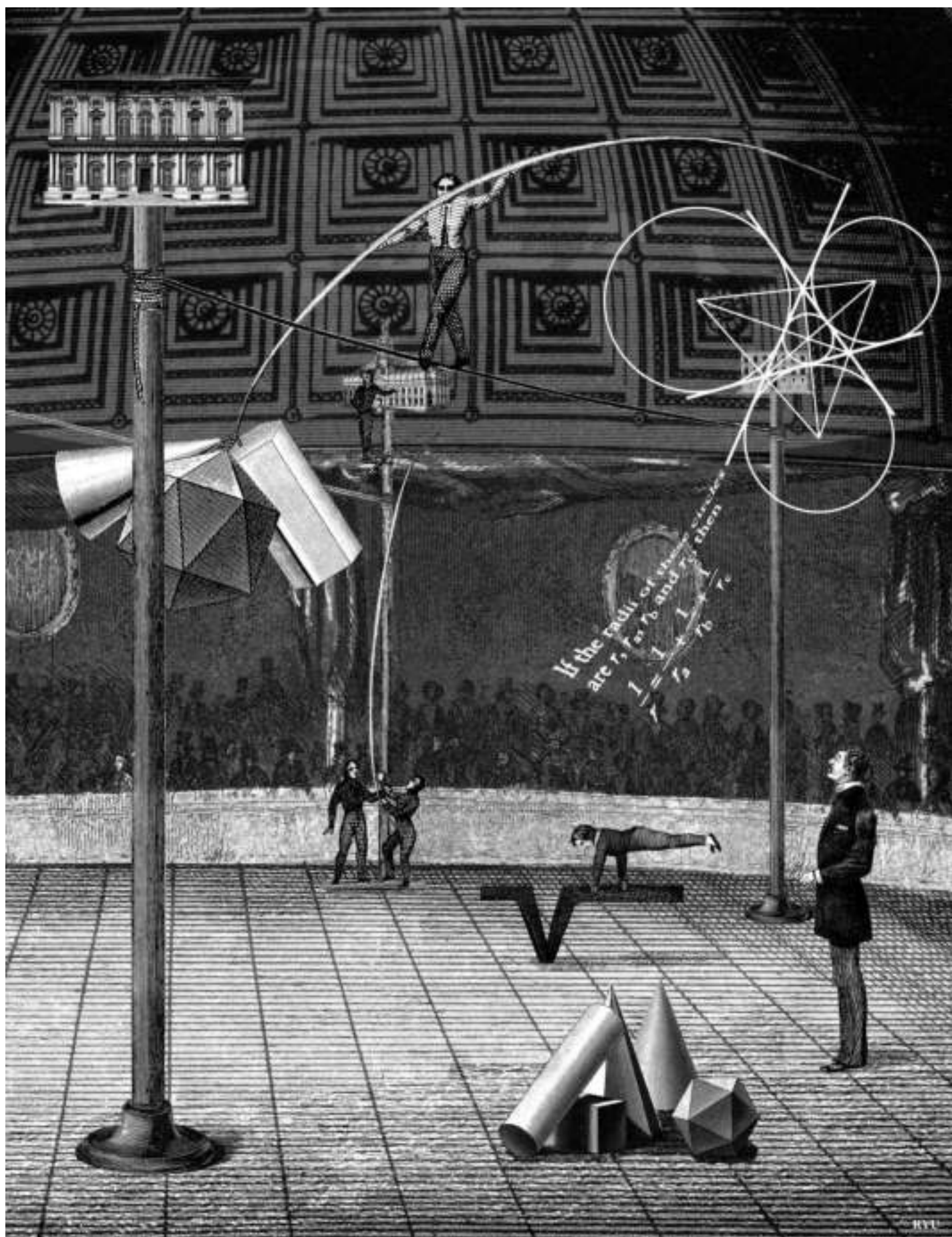
De aanloop

De discussie is begonnen vanwege een aansluitingsprobleem tussen het voortgezet onderwijs en het hoger onderwijs. Leerlingen die hun examen vwo of havo hebben behaald worden geacht voldoende vaardigheden — waaronder vaardigheid in het rekenen — te hebben om zich in het hoger onderwijs staande te houden. Dat lukt natuurlijk niet altijd: er zijn altijd mensen die het niet redden. Oorzaken daarvan kunnen verschillen. Eén van de mogelijke oorzaken is uiteraard dat de voor-

opleiding niet deugde. Niet zelden worden dan vakken als Nederlands of rekenen & wiskunde genoemd, waarbij onder meer gewezen wordt op taal- en rekenfouten van studenten. Ik schrijf hier rekenen & wiskunde, omdat men dit immers gerust als één vak kan opvatten. Tijdens de bijeenkomst op 30 juni bekleemtoonde Jan Karel Lenstra, de eerste spreker, ook meteen de eenheid tussen rekenen en wiskunde. Hij wees erop dat er in de Verenigde Staten één naam voor is: math.

Geconstateerde lacunes in kennis en vaardigheid leiden er allicht toe het niveau van de leerlingen die het voortgezet onderwijs verlaten tegen het licht te houden. Eigenlijk moet dat natuurlijk geregeld gebeuren. Tijden veranderen immers, op de scholen komen andere programma's, en in het hoger onderwijs gaan de veranderingen zelfs nog sneller. Het ligt eigenlijk voor de hand dat het eindniveau vwo/havo en het (gewenste) beginniveau in het hoger onderwijs altijd de neiging zullen hebben te gaan uiteenlopen.

De onderlinge afstemming vereist dus voortdurend aandacht. Ongeveer tien jaar geleden werd door studenten de actie ‘Lieve Maria’ gevoerd (genoemd naar de toenmalige minister van onderwijs). Zie [1, 9]. Zij voelden zich tekortgedaan door een haperende vooropleiding. Toen werd ook al een mogelijk tekortschietende rekenvaardigheid van examenkandidaten vwo/havo in verband gebracht met veranderingen in het rekenonder-



wijs op de basisschool. Zodoende is te begrijpen dat een discussie ontstond over het vernieuwde rekenonderwijs op de basisschool. Dit zogeheten realistisch rekenonderwijs zou volgens sommigen (of velen) zelfs de hoofdoorzaak zijn van tekorten die bij leerlingen aan het eind van het vwo en havo werden geïdentificeerd. Onder meer in het *Nieuw Archief voor Wiskunde* werd gediscussieerd over de merites van de nieuwe didactische werkwijzen op de basisschool, zie [2, 8, 17, 19].

Feit blijft, bij dit alles, dat er klachten over een tekortschietende rekenvaardigheid werden geuit. Er is mij geen onderzoek bekend waaruit zou kunnen blijken dat de rekenvaardigheid toen duidelijk was gedaald ten opzichte van eerdere periodes. Maar klachten over een geringe rekenvaardigheid moeten natuurlijk wel serieus genomen worden.

Commissie-Lenstra

Voor een korte omschrijving van deze commissie zie het addendum bij dit artikel. Het is bijzonder loffelijk dat de KNAW in de winter van 2008–2009 het initiatief nam een commissie in te stellen om de waarde van verschillende didactische werkwijzen in het basisonderwijs te onderzoeken. Dit initiatief werd direct gecombineerd met een voornemen van de toenmalige staatssecretaris, die hetzelfde beoogde. Deze commissie, vaak commissie-Lenstra genoemd naar haar voorzitter Jan Karel Lenstra, kwam tot de volgende bevindingen:

- Ten eerste is er geen significant verschil aanwijsbaar tussen de resultaten van traditionele (veelal mechanistische, oftewel sterk algoritmische) werkwijzen enerzijds en realistische werkwijzen anderzijds.
- Ten tweede blijkt de kwaliteit van de leraar van veel grotere, en waarschijnlijk van de grootste betekenis.
- Daarbij is de interactie tussen leerlingen en leraar cruciaal voor goed onderwijs.
- Maar over de opleiding en de nascholing van de leraren basisonderwijs bestaan toenemende zorgen. Daarom verdienen deze opleiding en nascholing hoge prioriteit.

Het rapport van de commissie-Lenstra werd alom geprezen [10]. Inderdaad werden, of waren reeds, door de staatssecretaris maatregelen genomen ten aanzien van de pabo's (de opleidingen voor leraren basisonderwijs). Met name werd een instroomtoets rekenen ingesteld. Maar het aantal uren voor rekenen & wiskunde op de pabo's en de nascholing werden nog niet of nauwelijks aangepakt.

De KNAW vat de conclusies uit het rapport van de commissie-Lenstra kernachtig samen: "Rekenvete zinloos." De discussies over de voor- en nadelen van traditioneel c.q. realistisch rekenonderwijs konden worden beëindigd. Zoals vaker in dat soort gevallen gebeurde dat echter niet.

Verplichte rekentoets naast het eindexamen

Een opvallende politieke keuze had een veel grotere uitwerking: in 2010 besloot de Tweede Kamer voor alle eindexamenkandidaten een verplichte rekentoets in te stellen, in het hele voortgezet onderwijs. De rekentoets kreeg hetzelfde gewicht als de examens in de drie genoemde kernvakken Nederlands, Engels en wiskunde. Een onvoldoende op de rekentoets zou tot gevolg kunnen hebben dat de kandidaat zonder diploma blijft.

De politieke keuze voor verplichte eindtoetsen rekenen kwam voor velen onverwacht. Maar er was wel een voorgeschiedenis waardoor deze keuze misschien kan worden begrepen. Er waren, op voorstel van een andere commissie (de commissie-Meijerink, zie het addendum), voor het voortgezet onderwijs gewenste eindniveaus voor de rekenvaardigheid afgesproken. Op deze eindniveaus zouden — in principe — rekentoetsen kunnen worden gebaseerd.

De publiciteit over de tekortschietende rekenvaardigheid deed de rest. Verplichte rekentoetsen moesten dit probleem definitief oplossen. Een krachtadig besluit, kan men zeggen. Maar het invoeren van een verplichte rekentoets heeft consequenties, die uiteraard onder ogen moeten worden gezien.

Commissie-Meijerink en cTWO

Zoals gezegd was er al een commissie-Meijerink werkzaam. Deze club ging aan de slag om doorlopende leerlijnen voor taal en rekenen te ontwerpen. Daarbij moest op vaste momenten (bijvoorbeeld aan het eind van de basisschool, of aan het eind van de derde klas vwo/havo) worden gekeken of bepaalde niveaus voor rekenen en taal waren gehaald. Het idee van de doorlopende leerlijnen spreekt onmiddellijk aan. Het onderwijsproces stopt immers niet aan het eind van de basisschool, het gaat gewoon door, en het stopt al evenmin aan het eind van het vwo of havo. Doorlopende leerlijnen zouden hopelijk aansluitingsproblemen kunnen voorkomen.

Het idee van doorlopende leerlijnen is overigens niet nieuw. Maar helaas hebben doorlopende leerlijnen jarenlang weinig nadruk gekregen. Bij deze gelegenheid attendeer ik nog graag op een fraaie brochure uit 1985 over

longitudinale planning van het reken- en wiskundeonderwijs, destijds een visionair stuk — dat echter onder het stof beland is [14]. In dit stuk wordt ook weer duidelijk rekenen & wiskunde als één vak opgevat.

De commissie-Meijerink had uitgebreid contact met de cTWO (zie addendum). Daardoor is in de diverse leerplanvoorstellen die de cTWO moest opstellen ernstig rekening gehouden met doorlopende leerlijnen. Voor het vervolg van dit artikel is alleen het zogenoemde fundamentele niveau 3F van belang, dat door de commissie-Meijerink gewenst werd geacht voor vwo én havo. Ik weet niet waarom men voor vwo en havo hetzelfde rekenniveau meent te moeten aanhouden, maar het zij zo. Voor andere schoolsoorten, vmbo met name, geldt fundamenteel niveau 2F. (Er zijn fundamentele niveaus 1F tot en met 4F beschreven. Op de merites ervan wordt hier niet verder ingegaan.)

Op een nader te bepalen wijze zou moeten worden gekeken of leerlingen hun fundamentele niveau behalen. Dat zou op verschillende manieren kunnen, wellicht aan de hand van een verstandige steekproef.

De verplichte rekentoetsen

In 2010 besliste de Tweede Kamer dus dat elke eindexamenkandidaat een verplichte rekentoets moet gaan afleggen. Met deze toets moet voor de kandidaat worden vastgesteld of hij/zij het gewenste fundamentele niveau heeft bereikt. Bij een onvoldoende resultaat op de rekentoets zou een leerling in principe geen diploma mogen krijgen. Basta!

Het besluit omtrent de verplichte rekentoetsen viel al in 2010, maar deze rekentoetsen zijn nog steeds niet ingevoerd. Voor menigeen kan dit vreemd lijken. Waarom moet dit zo lang duren? Er zijn inmiddels wel proeftoetsen afgenomen, die echter bijzonder slecht werden gemaakt. Dit leidde tot nadere bezinning op de inhoud van de toetsen, en daartoe werd dan weer een nieuwe commissie in het leven geroepen, de commissie-Bosker (zie addendum). De commissie-Bosker beperkte zich niet tot haar opdracht, maar bekeek ook alle bijkomende aspecten van de rekentoetsen. Het recentelijk uitgekomen advies van de commissie-Bosker stond centraal tijdens de bijeenkomst over het rekenen van de KNAW op 30 juni [16]. Voor ik iets over deze rekenmiddag schrijf, beschouw ik eerst zelf de toetsen.

Principiële aspecten

Het politieke besluit om een verplichte rekentoets in te voeren is lang niet door iedereen

in de samenleving geaccepteerd. Het wringt behoorlijk. Wat zal er gebeuren als straks een examenkandidaat zou zijn geslaagd op basis van de cijfers op de examenvakken, maar geen diploma mag ontvangen vanwege een onvoldoende op de rekentoets? Gaan de ouders van die leerling dan hulp zoeken bij een advocaat? (Merk nog op dat er geen aandacht wordt besteed aan het feit dat een leerling een voldoende op het vak wiskunde kan hebben en tegelijk een onvoldoende op de rekentoets. Wiskunde kan onder meer zijn wiskunde C, een vak dat niet bedoeld is voor de bètarichtingen.)

Nu kun je zeggen dat elke examenkandidaat moet kunnen rekenen. Dat zegt de commissie-Meijerink ook. Maar bij verscheidene studierichtingen is de rekenvaardigheid toch niet zo'n zwaarwegend punt. Vanuit zulke studierichtingen is niet geklaagd over de rekenvaardigheid. (Omgekeerd kun je constateren dat sommige wiskundigen ook niet zo zwaar tillen aan taalfouten — als de wiskunde maar deugt.)

Een verplichte rekentoets naast het eind-examen is op voorhand een vreemd element aan het eind van de schoolloopbaan. Zoiets is nooit eerder vertoond. In geen enkel ander land komt het voor. En dit zou dan speciaal in Nederland de rekenvaardigheid van haar ondergang moeten redden?

Er is bovendien kennelijk op het ministerie niet aan gedacht dat scholen leerlingen op de rekentoets zullen willen en moeten kunnen voorbereiden. Het kan zijn dat het ministerie dit niet nodig vindt, of van mening is dat de scholen dit maar in de bestaande lessen moeten doen. Zo zal dan mogelijk de voorbereiding op de rekentoets op het bordje van de wiskundeleraren komen. Die zitten daar natuurlijk niet om te springen; zij hebben hun lessen nodig voor het reguliere examenprogramma. Maar het lijkt er, hoe dan ook, toch op dat het zo zal gaan. Het ministerie zal niet financieel bijspringen, omdat zo'n cursus rekenen niet door haar verplicht is — alleen de toets is verplicht.

Wat hier sterk speelt is het wezensvreemde element dat door de verplichte rekentoetsen wordt gevormd, en de aversie die zich ertegen manifesteert. Een verplichte toets naast het examen is al moeilijk te plaatsen. Daarbij tersluiks een groep leraren opzadelen met extra werk dat ze er maar even bij moeten doen, dat heeft iets onbetamelijks. Veel leraren in het voortgezet onderwijs houden zich nu maar eerst afzijdig. Dit is, niet toevallig, ook de opstelling van de Nederlandse Vereniging van Wiskundeleraren (NVvW) [13]. Overi-

gens, het mag begrijpelijk zijn dat de NVvW zich afzijdig houdt, een andere vraag is of dit verstandig is. Dit lijkt mij zoiets als de vraag of het verstandig is jezelf buitenspel te zetten.

Er zit nog een heel vreemd aspect aan de rekentoetsen. Dat is dat de opgaven geheim blijven, ten einde deze opgaven te kunnen hergebruiken. Er zijn alleen voorbeeldtoetsen, waaruit aard en opzet van de rekentoetsen moeten blijken. Maar de opgaven van de officiële rekentoetsen zullen geheim blijven. Deze geheimhouding stuit vrijwel iedereen tegen de borst. Het lijkt alsof we in de middeleeuwen zitten! Met andere woorden, elke examenkandidaat gaat een rekentoets doen, een aantal van de kandidaten haalt daar een onvoldoende op, en vervolgens kunnen zij geen volledig inzicht krijgen in de oorzaak van hun falen. Tegelijk heeft de samenleving geen zicht op de manier waarop leerlingen hun diploma hebben behaald.

Ikzelf meen dat het geheim houden van de opgaven in strijd is met de Wet Openbaarheid van Bestuur. Immers, de overheid stelt een regeling vast, een leerling wordt door deze regeling gedupeerd — zó zal dat worden gevoeld — maar deze leerling krijgt geen inzage in de opgaven die hem/haar tot slachtoffer maakten. Vanuit de redactie van het *Nieuw Archief voor Wiskunde* werd al navraag gedaan bij de officiële exameninstantie, het College voor Examen (tegenwoordig het College voor Toetsen en Examen), maar daar schijnt men zich van geen kwaad bewust. (Met dank aan Mark Timmer voor de inzage in zijn correspondentie.) Dat er werkgelegenheid voor advocaten ontstaat lijkt wel zeker.

Op deze manier belandt de discussie over de rekentoetsen in de rechtszaal. Het gaat dan dus helemaal niet meer over verbetering van de rekenvaardigheid. Alleen al hierom zou je dit toetscircus niet moeten willen.

Enkele voorbeeldopgaven

Hierbij zijn vier opgaven afgedrukt uit de voorbeeldtoets rekenen op niveau 3F, zoals in 2013 door het Cito opgesteld. Ik heb deze opgaven willekeurig gekozen. (Ik nam de opgaven met de nummers 3, 7, 11 en 19, omdat deze nummers, opgevat als getallen, de eerste vier priemgetallen zijn van de vorm $4k+3$. Mijns inziens zijn de opgaven dan willekeurig gekozen.)

De voorbeeldtoets bestaat uit 60 opgaven, waarvoor de kandidaten 120 minuten krijgen. Veruit de meeste opgaven zijn contextopgaven. Een kandidaat die bij elke vraag even rustig de context wil doorgronden komt bedro-

gen uit, want voor de opgaven zijn gemiddeld maar twee minuten beschikbaar. De eindtoets rekenen is zodoende mede een concentratietoets, of zo men wil een stresstest. Bij een gewoon wiskunde-examen krijgt de kandidaat vier, vijf of zes verschillende situaties voorgelegd, maar geen veertig, vijftig of zestig, zoals bij de rekentoets. Het grote aantal opgaven is volgens het Cito nodig omdat je nu eenmaal veel vragen moet stellen om een betrouwbare meting te krijgen. Dat kandidaten fouten gaan maken door het stresskarakter van de toets wil er bij het Cito blijkbaar niet in.

Voeg hierbij dat de toets digitaal wordt afgenomen, waardoor terugbladeren onmogelijk is en een kandidaat ook niet een vervelende opgave eerst even kan overslaan. Bovendien telt alleen het eindantwoord, zodat voor de manier van oplossen helaas geen punten beschikbaar zijn.

Ik merk hierbij op dat men momenteel bezig is met een verbeteractie van de toetsen. Het aantal opgaven wordt verkleind (tot 45 in 2015), het percentage opgaven met contexten wordt eveneens verkleind, en terugbladeren zal ook mogelijk worden. Daarbij is de zogeheten rekentoetswijzer voor niveau 3F enigszins gewijzigd. Alle hoofdzaken blijven mijns inziens echter gelijk. [Noot van de redactie: De meest actuele stand van zaken wordt weergegeven op <http://www.examenblad.nl/onderwerp/rekentoets-vo/2015>.]

Bij de beide zuivere rekenopgaven, 3 en 19, is de rekenmachine verboden; het icoontje van een rekenmachine staat er namelijk niet bij (zie Figuur 1 en 4). Waarschijnlijk is het de bedoeling dat kandidaten bij de opgaven 3 en 19 gaan werken met nabijgelegen ronde getallen. Geroutineerde rekenaars zullen dit onmiddellijk zo doen, en daarin zit een reden de leerlingen op de toetsen voor te bereiden. Maar het rekenen met nabijgelegen ronde getallen, hoe nuttig ook, wordt dan al gauw een trucje. Een belangrijk algoritme zou ik het nog niet willen noemen.

Opgave 7 (zie Figuur 2) lijkt ermee door te kunnen, al is de planning van een busrit over zo'n afstand op 15 minuten nauwkeurig wel erg precies. Daarom zal men er het woord 'ongeveer' bij hebben gezet.

Opgave 11 (zie Figuur 3) is irreëel. Niemand (helemaal niemand) die zes of zeven kuub grond moet verplaatsen zal zo'n merk-

$$686 : 7 = \boxed{}$$

Figuur 1 Opgave 3

Planning busreis Utrecht → Parijs (475 km)	
geplande vertrektijd	15.30 uur
hustertop 1	15 minuten
hustertop 2	60 minuten
geplande aankomst	20 km per uur

Hoe laat zal de bus uit Utrecht moeten vertrekken om ongeveer op de geplande aankomsttijd aan te komen?

☐ kwart over vijf
☐ kwart over zes
☐ kwart over zeven
☐ kwart over acht



Figuur 2 Opgave 7



Fabrice gaat de trampoline ingraven. Hij maakt een gat van 90 cm diep waar de trampoline precies in past. De bovenkant van de trampoline heeft een oppervlakte van 7 m^2 .

Hoeveel volle kruiwagens met grond worden er ongeveer uitgegraven?

☐ 7
☐ 10
☐ 65
☐ 100

Vabor Kruiwagen 100 ltr



Figuur 3 Opgave 11

waardige berekening opzetten. En weliswaar ken ik niet een soortelijk gewicht van zand of klei, maar 65 maal 100 liter daarvan vervoeren in een kruiwagen lijkt mij niet gezond. En ook bij deze opgave is weer sprake van schijnexactheid, al heeft men wederom het woordje 'ongeveer' ingevoegd. Deze context is, om het zo maar eens te zeggen, geheel onrealistisch.

Daarbovenuit steekt nog een ander argument. Deze opgaven zouden, los van de erbij gekomen stress, mogelijk door de meeste leerlingen tot een bevredigend einde kunnen worden gebracht. Maar vooral de beide contextopgaven passen niet bij het onderwijs eind vwo/havo. Ik denk dat degenen die hun beklag deden over de rekenvaardigheid van leerlingen in het vwo en havo niet op deze opgaven zaten te wachten. Meerdere mensen hebben hun opvatting over de voorbeeldtoetsen al geformuleerd. Zie onder meer [5]. Een

zeer lezenswaardig verhaal erover is van de hand van Jan van de Craats [3].

De rekenbijeenkomst op 30 juni 2014

Er was op 30 juni een strak schema met een hele rij sprekers. De voorzitter hield de tijd goed in de gaten en zo konden alle sprekers hun bijdrage leveren. De hele middag verliep in een geanimeerde sfeer, wat in de eerste plaats op het conto van de organisatoren mag worden geschreven.

De eerste spreker was Jan Karel Lenstra, die vijf jaar geleden de KNAW-commissie had geleid die het rekenonderwijs onderzocht. Lenstra is nadien de ontwikkelingen blijven volgen. Eerder gaf hij op een hoorzitting over de verplichte rekentoetsen al een scherpe analyse [20]. Nu zei hij daarover: "Hoed u in het onderwijs voor extreme oplossingen", waarbij hij uiteraard op de verplichte rekentoetsen doelde. Lenstra zei ook: "Nederland is wereldkampioen niet nascholen." In het rapport van de commissie-Lenstra over het rekenonderwijs op de basisscholen werd terecht veel nadruk gelegd op de noodzaak tot geregelde vakinhoudelijke nascholing. Maar het komt er niet van. En het lijkt alsof geen enkele instantie daarvoor verantwoordelijk is. In het voortgezet onderwijs ligt het mijns inziens iets anders. Jaarlijks bezoeken

telkens honderden leraren uit het voortgezet onderwijs bijeenkomsten die men gevoeglijk als nascholing kan beschouwen, zoals de studiedag van de NVvW, de Nationale Wiskunde Dagen van het Freudenthal Instituut, en meerdere bijeenkomsten van uitgever voor de gebruikers van hun lesmateriaal. Tijdens veel van deze bijeenkomsten heerst bovendien een sfeer van enthousiasme.

Het voornoemde is allemaal gewoon nascholing, waaraan jaarlijks toch een substantieel deel van de wiskundeleraren deelneemt. (In het voortgezet onderwijs zijn naar schatting 5000 wiskundeleraren werkzaam, dat wil zeggen leraren die vaak of meestal wiskunde geven. In het basisonderwijs zijn ruim 80.000 leraren werkzaam (bron: CBS), die vrijwel allemaal ook rekenen mogen geven. Dit maakt een nascholingsoperatie daar op voorhand tot een megaklus. Wel wordt inmiddels gepleit voor de aanwijzing van meer gespecialiseerde docenten, rekencoördinator geheten, op elke basisschool.) In het voortgezet onderwijs is door de omvang van de doelgroep nascholing heel wat gemakkelijker te organiseren dan in het basisonderwijs. Maar ook in het voortgezet onderwijs zal de nascholing zeker beter kunnen, en vooral: meer gestructureerd. Ik ga geen schuldigen aanwijzen van tekorten op het gebied van de nascholing. De kwestie lijkt me ingewikkelder dan soms wordt verkondigd, en er zit ook weer een politieke kant aan.

Een andere spreker op 30 juni was Roel Bosker, de voorzitter van de commissie die de rekentoetsen had bekeken. Hij kwam met een eigen insteek. Zijns inziens worden door de verplichte rekentoetsen vooral achterstandsl leerlingen gedupeerd. Lang niet alle aanwezigen op 30 juni hadden deze categorie (15 procent van elke leeftijdsgroep) scherp op het netvlies. Voor Bosker vormde de zorg voor deze groep reden om de rekentoetsen uiterst kritisch te bezien. Hij zei, zoals ook in het rapport van de commissie-Bosker staat, dat de huidige toetsen lang niet voldoen.

De uitspraken van Bosker geven te denken. In zijn visie moet er nog veel aan de toetsen worden gesleuteld. Het zou volgens hem zelfs tien jaar, dus tot 2024, kunnen duren voordat er goede rekentoetsen zijn. Maar 2024 ligt veertien jaar na het besluit van de Tweede Kamer om de rekentoetsen in te stellen. Als simpel toehoorder denk je dan: zijn er in Nederland niet wat veel mensen die zich bezighouden met het beschrijven van niveaus, met het opstellen van toetsopgaven,

$81 \times 49 + 19 \times 61 =$

Welk getal ligt het dichtst bij de uitkomst?

☐ 4400
☐ 4800
☐ 5200
☐ 5600

Figuur 4 Opgave 19

en met het schrijven van evaluatierapporten? Het ware toch te wensen dat de wiskundigen zich weten te ontworstelen aan de houdgreep van al dit gedoe?

Overhaaste beslissingen zijn niet goed, dat wordt terecht opgemerkt, maar wat heb je aan zulke eindeloze heen-en-weerrapportages?

Doorlopende leerlijnen

Jarenlang ontbrak het aan een doordachte longitudinale leerstofplanning. Bovendien is in de jaren negentig, bij het opstellen van nieuwe leerplannen voor onder- en bovenbouw, heel wat algebra overboord gegaan. De cTWO spreekt zich in algemene termen uit over de leerplannen uit de jaren negentig en spreekt in dat verband van erosie; de cTWO vindt het daardoor geen wonder dat de intellectuele uitdaging voor (de meeste) leerlingen op het vwo en havo te gering geworden was. In het lerarentijdschrift *Euclides*, het orgaan van de NVvW, waren begin jaren negentig al bijdragen verschenen waarin zorgen werden geuit over — vooral — het nieuwe algebraprogramma. Een citaat: "Het gemak waarmee letterrekenen, ontbinden in factoren en merkwaardige producten worden weggepoetst." Zie [4, p. 13, Conclusie 9] en [18]. Ook in een overzichtsartikel over het nieuwe onderbouwprogramma wordt ernstige twijfel geuit bij het onderdeel algebra [7].

Algebra is de natuurlijke voortzetting van het rekenen. Aan het eind van de basisschool kan men rekenen met breuken en procenten (althans een deel van de leerlingen kan dat dan). Het getallenrijk wordt in het voortgezet onderwijs al gauw uitgebreid met negatieve getallen, en later komen ook wortels ten tonele. Dit gaat hand in hand met de introductie van variabelen ('letters'), het oplossen van diverse vergelijkingen, het ontbinden van veeltermen in factoren, en zo verder. Door hieraan gedurig en (uiteraard) didactisch doordacht te werken worden hopelijk de gewenste vaardigheden ingeslepen.

Dit alles ging ook vroeger zeker niet van een leien dakje. Het zou kunnen dat degenen die nadien succesvol een bètastudie afronden het met de schoolalgebra niet moeilijk hadden. Maar voor veel leerlingen was het reken- en algebrapad een hindernisbaan. De NVvW zorgde in 1975 al eens voor een mooi boekje over de moeilijkheden bij de algebra — een boekje dat eeuwigheidswaarde bezit [6].

Kort na 2000 werd door meerdere mensen een tekortschietende algebraïsche vaardigheid, waaronder dus rekenvaardigheid,

gesignaleerd, ook in het vwo/havo. Men kan er gerust van uitgaan dat dit juist gezien was. Het kan zijn dat veranderingen in het basisonderwijs hieraan mede debet waren. Maar, zoals uit het voorgaande moge blijken, de leerplannen uit de jaren negentig kunnen daarbij niet over het hoofd worden gezien.

Veel docenten in het voortgezet onderwijs ondervonden zelf wat een gebrekkige algebraïsche vaardigheid betekende. Geen wonder dat de leerboekauteurs — vrijwel allen docenten immers — in nieuwe versies van de leerboeken na de jaren negentig weer steeds meer algebra opnamen. In de leerboeken heeft de algebra momenteel al weer een stevige positie gekregen [11]. De cTWO signaleerde inmiddels een verbetering van de algebraïsche vaardigheid in de bovenbouw [4, p. 13]. Dit zal ook ongetwijfeld gaan gelden voor de rekenvaardigheid van eindexamenleerlingen. Waarmee niet gezegd is dat iedereen er tevreden over zal zijn.

De cTWO houdt nadrukkelijk rekening met de gewenste doorlopende leerlijnen, al is op dat gebied nog heel wat werk te doen — met name de vervlechting van ICT in de leerlijnen vergt voortdurende aanpassing. Op deze manier moet toch het hoofd geboden worden aan een dreigende achteruitgang van de algebraïsche vaardigheid, waaronder begrepen de rekenvaardigheid.

De cTWO heeft in haar eindrapport bovendien nadrukkelijk aandacht gevraagd voor de onderwijsbaarheid van de wiskundeprogramma's die in het havo en vwo wenselijk zijn. Met andere woorden, voor alle mooie leerplannen moet ook lestijd beschikbaar zijn. Het zogeheten kernvak wiskunde heeft de afgelopen decennia al lestijd ingeleverd. (In elk geval komt wiskundetijd vrij als men zou overgaan tot, slechts, twee soorten wiskunde op het eindexamen, te weten wiskunde A en wiskunde B. Dit is wat de cTWO voorstelt [4, p. 25, Aanbeveling 10].) Vergroting van de tijd die aan algebraïsche vaardigheid en rekenvaardigheid wordt besteed kan ten koste gaan van de tijd voor andere, essentieel te achten lesstof.

Sowieso mag een algoritmisch geaard wiskundeonderwijs niet de boventoon gaan voeren [11]. Ik voorzie dat om te beginnen de docenten zoiets niet zullen willen. De docenten willen altijd de essentiële begrippen netjes uitleggen. Een te sterke nadruk op algoritmiek zou een extreme oplossing zijn van een probleem, dat zich ook in de toekomst nog wel in enige vorm zal kunnen manifesteren.

Addendum

In het voorgaande werden de volgende commissies ten tonele gevoerd.

- cTWO, commissie Toekomst WiskundeOnderwijs, 2004–2012. Vaak aangehaald als c-two, op z'n Engels (en in dat geval zonder lidwoord). Voorzitter: Dirk Siersma, hoogleraar wiskunde Utrecht. Ingesteld door het ministerie van onderwijs. Deze commissie leverde uiterst gedegen leerplanvoorstellen voor onder- en bovenbouw. Voor het eind van het derde leerjaar vwo/havo werden tussendoelen geformuleerd. De cTWO maakte veel werk van een longitudinale planning van de leerstof. De cTWO maakt zich zorgen over het geringe aantal lesuren dat beschikbaar is voor het kernvak wiskunde, en ook over de deelname aan de vakken wiskunde C en wiskunde D op het vwo. Mede daarom pleit de cTWO in de toekomst voor (slechts) twee robuuste wiskundevakken, namelijk wiskunde A en wiskunde B. Voor het eerste rapport tussendoelen zie: [15]. Voor het eindrapport zie: [4].
- Commissie-Meijerink, 2007–heden. Voorzitter: Heim Meijerink, voormalig onderwijsinspecteur. Ingesteld door het ministerie van onderwijs. De opdracht aan deze commissie is het ontwerpen van doorlopende leerlijnen voor taal en rekenen. Daartoe werd onder meer een Expertgroep rekenen ingesteld. Met de cTWO werd uitgebreid contact onderhouden. Met name de rekenniveaus eind vwo/havo spelen voor ons een rol.
- Commissie-Lenstra (KNAW-commissie), 2009. Voorzitter: Jan Karel Lenstra, destijds directeur van het CWI. Ingesteld door de Koninklijke Nederlandse Akademie van Wetenschappen, gesteund door het ministerie van onderwijs. De opdracht aan deze commissie was te onderzoeken in hoeverre de didactische werkwijzen het leerresultaat bij het vak rekenen op de basisschool zouden beïnvloeden. De bevindingen van de commissie worden eerder in dit artikel uitvoerig aangehaald [12].
- Commissie-Bosker, 2014. Voorzitter: Roel Bosker, hoogleraar onderwijskunde Groningen. Ingesteld door het ministerie van onderwijs. De opdracht aan deze commissie was te onderzoeken hoe de slechte resultaten, zoals door leerlingen behaald op de eerste proefversies van de komende eindtoetsen rekenen, zouden kunnen worden verbeterd. De commissie verbreedde haar doel en bekeek in feite alle aspecten van deze toetsen.

De praktijk

Scholen worden niet gefaciliteerd om extra tijd en aandacht aan het rekenen te geven, zodat de problemen met rekenvaardigheid nauwelijks opgelost worden. Op onze havo/vwo-school is toch een bijlesuur ingesteld voor de klassen 1, 2 en 3 (elk leerjaar één les in de week) en een steun-uur in havo 4 (één uur in de week voor een halfjaar). We zijn hiermee nog in de ontwikkelingsfase en maken gebruik van boeken en digitale programma's. Deze programma's zijn zelf ook nog in ontwikkeling; er zitten dus nog veel haken en ogen aan. In de bovenbouw hebben leerlingen de mogelijkheid om een halve toets te maken en hun resultaten in te zien. Deze ondersteuning neemt de druk voor leerlingen bij de toets niet weg. De leerlingen zijn tijdens de toets twee uur lang intensief aan het werk met een groot aantal rekenopgaven. Als alle

plannen doorgaan weten de leerlingen dat ze slechts één herkansing hebben en dat een onvoldoende grote gevolgen kan hebben voor hun eindexamen.

Door de invoering van de rekentoets worden scholen geconfronteerd met een enorme organisatie: ouders en leerlingen moeten allemaal een brief krijgen, roosters moeten worden aangepast om de toetsafname in te passen en (zwakkere) leerlingen moeten worden voorzien van hulp. Daarnaast moet een grote hoeveelheid computers beschikbaar worden gesteld en dient er gezorgd te worden voor surveillanten. Leerlingen zijn niet verplicht om de toets al te maken in de voorexamenklas, maar hebben wel deze mogelijkheid; ook dit moet worden geïnventariseerd en geadministreerd.

De toets zelf is ook nog steeds niet in orde: er staan fouten of onduidelijkheden in de

opgaven en significantie geeft soms problemen. Het vreemde is bovendien dat de docenten geen inzage hebben in de opgaven, tenzij ze zelf meedoen met een toets tijdens de afname. Spannend zijn de vragen allerminst. Ik heb één keer een hele toets gemaakt en was het na drie kwartier al aardig beu. Na een gesprek met CITO bleek dat de rekentoets zo lang was omdat de opgaven nog niet valide genoeg waren. Sommige vragen worden bij de bepaling van het cijfer uitgesloten, maar als docent kun je niet zien welke vragen dat waren en waarom die uitsluiting plaats heeft gevonden. De toets in 2014 was in elk geval iets korter; het waren 'slechts' 51 opgaven.

Maureen Velzeboer

Rekencoördinator Carmel College Salland

Referenties

- 1 Jan van de Craats, Column Lieve Maria: Doorbraak en nieuwe kansen, *Nieuw Archief voor Wiskunde* 5/7 nr. 1 (2006), 17.
- 2 Jan van de Craats, Waarom Daan en Sanne niet kunnen rekenen, *Nieuw Archief voor Wiskunde* 5/8 nr. 2 (2007), 132–136.
- 3 Jan van de Craats, Notitie rekentoetsen 3F voor havo en vwo, 28 mei 2014, www.science.uva.nl/~craats.
- 4 cTWO, *Denken en doen. Wiskunde op havo en vwo per 2015*, 2012, www.fi.uu.nl/ctwo/publicaties/docs/CTWO-Eindrapport.pdf.
- 5 Birgit van Dalen, Hoorzitting over de rekentoets, *Euclides* 89 nr. 4 (2014), 10–11.
- 6 J. van Dormolen, *Vaardigheden; 1001 redenen waarom leerlingen geen goede routine hebben*, 1975.
- 7 Wim Groen, Het voorgestelde programma in grote lijnen, *Euclides* 67 nr. 9 (1992), 266–271, aldaar 270–271.
- 8 Kees Hoogland, Nostalgische terugblik op de staartdeling, *Nieuw Archief voor Wiskunde* 5/9 nr. 4 (2008), 279–281.
- 9 Martinus van Hoorn, Column Lieve Maria: Realistische wiskunde versus abstract denken, *Nieuw Archief voor Wiskunde* 5/7 nr. 2 (2006), 96–97.
- 10 Martinus van Hoorn, "Elke positieve actie begint met kritiek", *Nieuw Archief voor Wiskunde* 5/11 nr. 1 (2010), 28–29.
- 11 Sieb Kemme, Waarom het ministerie van OCW ongelijk heeft, *Euclides* 84 nr. 1 (2008), 26–29.
- 12 KNAW, *Rekenonderwijs op de basisschool. Analyse en sleutels tot verbetering*, 2009.
- 13 Marian Kollenveld, Jaarrede voorzitter 2013, *Euclides* 89 nr. 3 (2013), 34–37, aldaar 35–36.
- 14 NVORWO en NVvW, *Longitudinale planning van het reken- en wiskunde onderwijs in Nederland*, 1985. [NVORWO = Nederlandse Vereniging tot Ontwikkeling van het Reken/Wiskunde Onderwijs. NVvW = Nederlandse Vereniging van Wiskundeleraars.
- 15 SLO, *Overzicht tussendoelen wiskunde havo en vwo*, 2010, www.fi.uu.nl/ctwo/publicaties/docs/onderbouw/overzicht-tussendoelen-wiskunde-havo-en-vwo.pdf.
- 16 SLO, *Advies over de uitwerking van de referentieniveaus 2F en 3F voor rekenen in toetsen en examens*, 2014.
- 17 Willem Uittenbogaard, Geen catechismus leren, maar nadenken, *Nieuw Archief voor Wiskunde* 5/9 nr. 1 (2008), 60–64.
- 18 Bram van der Wal, Wiskunde A voor mavo en lbo? *Euclides* 66 nr. 5 (1990), 130–131.
- 19 Erich Ch. Wittman, Realistic Mathematics Education, past and present, *Nieuw Archief voor Wiskunde* 5/6 nr. 4 (2005), 294–296; met name de paragraaf 'The loss of mathematical substance in mathematics teaching'.
- 20 www.wisforum.nl/hoorzitting/lenstra.pdf.

Joseph Steenbrink

Nijmegen

j.steenbrink@math.ru.nl

Geschiedenis

Ibn al-Haythams biljartprobleem voor een ellips

Al-Hasan ibn al-Haytham, een Arabisch astronoom en wiskundige, bedacht een oplossing voor een oud optisch probleem over lichtweerkaatsing van een cirkelvormige spiegel. Dit probleem staat ook wel bekend als het cirkel-biljartprobleem. Joseph Steenbrink, emeritus hoogleraar van de Radboud Universiteit, beschrijft in dit artikel een versie van dit probleem waarbij het biljart de vorm van een ellips heeft.

Het volgende optische probleem werd reeds geformuleerd door Claudius Ptolemaeus (circa 87–150):

Een voorwerp en een waarnemer bevinden zich op gegeven posities in een vlak. Hoe kunnen we de punten op een cirkelvormige spiegel vinden zodanig dat een lichtstraal uitgaande van het voorwerp die de spiegel in het punt raakt, weerkaatst wordt naar het oog van de waarnemer?

Het werd opgelost door de Arabische geleerde Al-Hasan ibn al-Haytham (965–1040) met behulp van euclidische meetkunde. Zie [4] voor een analyse van zijn argumenten. Aangezien de terugkaatsing van biljartballen aan dezelfde wet voldoet als die van licht (hoek van inval is gelijk aan hoek van terugkaatsing), spreekt men ook wel van het biljartprobleem van Ibn al-Haytham of Alhazen.

Ik maakte een tiental jaren geleden kennis met dit klassieke probleem aan de lunchtafel met Leon van den Broek. Er bleek op in-

ternet een oplossing te vinden. Als men het middelpunt M van de cirkel vastlegt en de positie van twee punten A en B , dan bepaalt elk punt P in het vlak de cirkel met middelpunt M die door P gaat. Neem aan dat A en B binnen die cirkel liggen. Een van A uitgaande lichtstraal wordt dan in P gereflecteerd; de weerkaatste straal gaat dan door B indien $\angle APM = \angle MPB$. Hier gebruiken we de *georiënteerde hoek*, die waarden aanneemt in $\mathbb{R}/2\pi\mathbb{Z}$.

Een iets zwakkere voorwaarde is dat de rechte AP door reflectie in de raaklijn in P overgaat in de rechte BP ; dit komt neer op de conditie $2\angle APM = 2\angle MPB$, die equivalent is met $\tan \angle APM = \tan \angle MPB$. Deze voorwaarde is algebraïsch eenvoudiger.

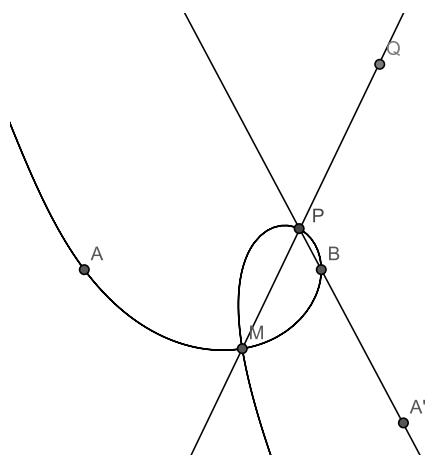
De punten P in het vlak met de eigenschap dat $2\angle APM = 2\angle MPB$ vormen een kromme, genoemd naar Isaac Barrow, die er de vergelijking van bepaalde in zijn Cambridge Lectures van 1669 (zie [5]). Deze kromme heeft graad drie en gaat door de punten A , B en M . Hij heeft een dubbelpunt in M . Door inversie met

betrekking tot een cirkel met middelpunt M ontstaat een orthogonale hyperbool, die door Huygens werd gebruikt om het probleem van Alhazen analytisch op te lossen. De snijpunten van de Barrowkromme met de gegeven cirkel zijn de gezochte punten. Ze zijn niet met passer en liniaal te construeren (zie [3]).

De Barrowkromme is reeds eerder in dit tijdschrift opgedoken in verband met het schurenprobleem (zie [1]). Een vroegere bespreking van het biljartprobleem in onze landstaal is [2]. In geen van deze artikelen wordt de relatie met Alhazen gelegd.

Met meetkundige software zoals Cabri Geometry of Geogebra is de Barrowkromme eenvoudig te construeren. Fixeer de punten A , B en M . Kies een hulpcirkel met middelpunt M . Voor een punt Q op deze hulpcirkel zij A' het spiegelbeeld van A ten opzichte van de lijn MQ . Zij P met snijpunt van $A'B$ met MQ . Dan is de Barrowkromme de meetkundige plaats van de punten P als Q de hulpcirkel doorloopt. Zie Figuur 1.

In de rest van deze bijdrage wil ik Alhazens biljartprobleem voor een ellips analyseren. We leggen twee punten A en B (de posities van de biljartballen) en twee punten F en G (de brandpunten van de beschouwde ellips) vast. Dan hebben we weer een Barrowkromme; deze bestaat uit de punten P met



Figuur 1

de volgende eigenschap: is E de ellips door P met brandpunten F en G , dan gaat de rechte AP door reflectie in E te P over in de rechte BP .

Ik geef nu een eenvoudige manier om de vergelijking van de Barrowkromme C te bepalen. Het zal blijken dat C meestal een derdegraadskromme is, door de punten A, B, F en G gaat en voor algemene positie van de gegeven punten niet-singulier is, dat wil zeggen een elliptische kromme. Daaruit volgt onder meer dat er geen rationale parametrisering van C bestaat. Wel kan men C met Geogebra construeren, door twee meetkundige plaatsen samen te voegen.

Voor verschillende punten P, Q in het vlak definiëren we veeltermen

$$\ell_{PQ} = (x - x_P)(y - y_Q) - (y - y_P)(x - x_Q),$$

$$q_{PQ} = (x - x_P)(x - x_Q) + (y - y_P)(y - y_Q).$$

Dan is ℓ_{PQ} lineair en q_{PQ} kwadratisch. Voor een derde punt R geldt dan, dat $\ell_{PQ}(R)$ tweemaal de georiënteerde oppervlakte van $\triangle PQR$ is en $q_{PQ}(R)$ de *macht* van het punt R ten opzichte van de cirkel met diameter PQ . In het bijzonder geldt dat $\ell_{PQ} = 0$ een vergelijking van de rechte door P en Q is, en

$q_{PQ} = 0$ de genormeerde vergelijking van de cirkel met diameter PQ (dat wil zeggen: de tweedegraadsterm is $x^2 + y^2$). Wegens sinus- en cosinusregel geldt bovendien:

$$\ell_{PQ}(R)/q_{PQ}(R) = \tan \angle PRQ.$$

Keren we nu terug tot ons ellipsprobleem met de gegeven punten A, B, F en G . We definiëren de Barrowkromme C als de verzameling punten P waarvoor $P \in \{A, B, F, G\}$ of $2\angle APF = 2\angle GPB$. Een equivalente voorwaarde is

$$\tan \angle APF = \tan \angle GPB.$$

Deze kromme heeft derhalve de vergelijking

$$\ell_{AF}q_{GB} = \ell_{GB}q_{AF}.$$

Dit is een vergelijking van graad hoogstens drie.

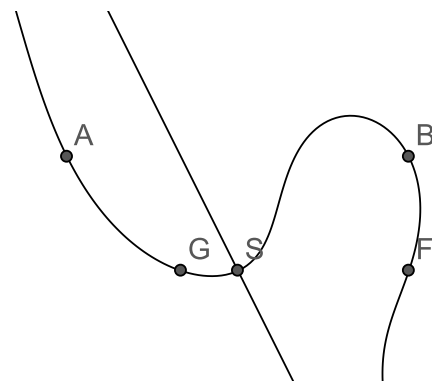
Het derdegraadsstuk van $\ell_{AF}q_{GB} - \ell_{GB}q_{AF}$ is gelijk aan $(x^2 + y^2)(bx - ay)$ waar

$$b = y_A + y_B - y_F - y_G \quad \text{en}$$

$$a = x_A + x_B - x_F - x_G.$$

We kunnen nu twee gevallen onderscheiden.

- $a = b = 0$. Dan geldt dat $\frac{1}{2}(x_A + x_B) = \frac{1}{2}(x_F + x_G)$ en $\frac{1}{2}(y_A + y_B) = \frac{1}{2}(y_F + y_G)$. Dit betekent dat de middens van de lijnstukken AB en FG samenvallen. Dat wil zeggen dat $\square AFBG$ een parallellogram is. De kromme C heeft nu graad twee. Het is een orthogonale hyperbool door de punten A, B, F, G , die ontgaat in twee loodrechte lijnen als $\square AFBG$ een ruit is. Men kan aantonen dat er precies één orthogonale hyperbool door de gegeven punten bestaat.
- $\square AFBG$ is geen parallellogram. De kromme C heeft graad drie. In het complexe projectieve vlak liggen drie punten van C op de oneigenlijke rechte: de twee isotrope punten — dat zijn de imaginairre punten in oneindig die alle cirkels



Figuur 2

gemeenschappelijk hebben — en het oneigenlijke punt O van de rechte die de middens van de lijnstukken AB en FG verbindt. Omdat C drie oneigenlijke punten heeft en graad drie heeft, zijn deze oneigenlijke punten regulier. De raaklijn in het punt O is de asymptoot van C . Het is mogelijk dat deze raaklijn een component van C is.

In Figuur 2 ziet men de kromme C , zijn asymptoot en hun snijpunt S .

Men ziet meteen dat C gaat door alle punten waarvoor $\ell_{AF}q_{GB} = \ell_{GB}q_{AF} = 0$. In het algemeen gaat het daarbij om negen punten die de basispunten zijn van een schaar van derdegraadskrommen. In dit geval wordt de derdegraadskromme C bepaald door de negen basispunten en het punt O . Voor algemene ligging van de punten A, B, F en G is de kromme C niet-singulier. Een niet-singuliere derdegraadskromme waarop een speciaal punt gekozen is heet een *elliptische kromme*. De punten hiervan vormen een abelse groep met het gekozen punt als nulelement. In ons geval kiezen we het punt O . Dan heeft het punt S de volgende betekenis. Zij Q een punt van C . Dan is $-Q$ het derde snijpunt van de rechte QS met C .

Het is me niet gelukt een eenvoudige constructie te vinden voor de ligging van S wanneer alleen de punten A, B, F en G gegeven zijn. Wellicht kan een lezer mij helpen? $\leftarrow$

Referenties

- 1 J. van de Craats, Alledaagse wiskunde, *Nieuw Archief voor Wiskunde* 5/1, nr. 3 (2000), pp. 342–343.
- 2 H.M. Mulder, Naar een idee van J.C. van Rhijn, Rotterdam, *Euclides* 52e jaargang, nr. 8 (1976/77), 303–307.
- 3 P.M. Neumann, Reflections on Reflection in a Spherical Mirror, *Amer. Math. Monthly*, June–July (1998), 523–528.
- 4 A.I. Sabra, Ibn al-Haytham's Lemmas for Solving "Alhazen's Problem", *Archive for the Exact Sciences* 26 (1982), 299–324.
- 5 J.D. Smith, The remarkable Ibn al-Haytham, *The Mathematical Gazette* 96 (1992) 189–198.

Nellie Verhoef

Faculteit Gedragswetenschappen, Instituut ELAN

Universiteit Twente

n.c.verhoef@utwente.nl

Onderwijs

Google subsidieert wiskundeonderwijs: een korte indruk uit Zwolle

Met geld van Google was het voor wiskundedocenten mogelijk om 'gratis' te worden geschoold om aan de slag te gaan met de vernieuwde examenprogramma's die beginnen in 2015. Gratis in de betekenis van "je hoeft er niet voor te betalen" — want natuurlijk kost het volgen van de leergang tijd, en dat is ook geld. Nellie Verhoef doet, als betrokken lerarenopleider van buitenaf, verslag.

Google? Inderdaad, Google heeft er geld voor over om het wiskundeonderwijs te verbeteren — of om er invloed op te krijgen? In ieder geval heeft het Platform Bèta Techniek financiële middelen gekregen om te helpen zoeken naar antwoorden op vragen over de vormgeving van de vernieuwing waarbij de beroepspraktijk een prominente plaats inneemt. De in de volksmond geheten Google-leergang vernieuwend wiskundeonderwijs beloofde 'een intensieve en rijke training' te worden, waardoor wiskundesectionen niet alleen beter in staat zijn zich de eisen van de nieuwe examenprogramma's eigen te maken, maar ook de invulling daarvan helpen vorm te geven. De leergang biedt wiskundedocenten en vaksecties wiskunde de mogelijkheid om met hun ambities en met vernieuwingen van het onderwijs aan de slag te gaan, zo staat in de brochure te lezen. In de praktijk heeft het Platform Bèta Techniek het beschikbare Google-geld doorgesluist naar het Freudenthal Instituut (FI), de Stichting Leerplanontwikkeling (SLO) en Platform Wiskunde Nederland (PWN). De inhoudelijke verantwoordelijkheid ligt bij het FI. Feitelijk gaat het om

vijf bijeenkomsten (steeds een vrijdag), waarin docenten niet alleen worden geïnformeerd over de inhoudelijke veranderingen in het examenprogramma, maar ook een kijkje krijgen in de keuken van het functioneren van een wiskundige in het bedrijfsleven en in de wetenschap. Het idee is dat de deelnemende docenten er zorg voor dragen dat de voltallige wiskundesectie van de school op de hoogte raakt. De bijeenkomsten zijn in het najaar van 2013 gehouden in Utrecht en in Zwolle. In het voorjaar van 2014 waren de bijeenkomsten in Delft en in Eindhoven.

Waar gaat het over?

De meest in het oog lopende veranderingen in de nieuwe examenprogramma's zijn de onderwerpen 'statistiek met grote bestanden' en 'analytische meetkunde'. De onderwerpen 'denkactiviteiten' en 'authentieke toepassingen' vlechten zich hier doorheen. In de praktijk nemen verscheidene wiskundigen de deelnemende docenten in vier verschillende bijeenkomsten in gedachten mee naar het bedrijfsleven, waarin wiskunde in de dagelijkse beroepspraktijk een sleutelrol speelt. Tijdens

iedere bijeenkomst staat een van de nieuwe onderwerpen uit het examenprogramma centraal. Daarnaast gaan docenten in de bijeenkomsten samen aan de slag met het ontwerpen van lesmateriaal. De docenten kiezen zelf het onderwerp waarin ze zich willen gaan verdiepen, en werken daar dan bij alle vier de bijeenkomsten aan. De vijfde bijeenkomst is een terugkomdag waarin de lesmaterialen aan elkaar worden gepresenteerd.

Denkactiviteiten

In de eerste bijeenkomst met de titel 'Denkactiviteiten' treedt John Poppelaars op, van huis uit econometrist en directeur consulting bij het bedrijf ORTEC. ORTEC is specialist op het gebied van operations research (OR) en meester in het oplossen van optimaliseringsproblemen. De wiskunde speelt in het werk dat ORTEC voor haar klanten doet een centrale rol. Zij zorgt ervoor dat de toenemende complexiteit in besluitvorming beheersbaar wordt, helpt in het structureren van problemen, objectiviseert en helpt uiteindelijk de best mogelijke oplossing te vinden. In zijn lezing laat John zien dat steeds meer bedrijven succesvol zijn dankzij het gebruik van wiskunde. Bedrijven als Google en Amazon, maar ook Air France KLM en TNT Express, zouden zonder de inzet van wiskundige technieken niet zo succesvol zijn. John benadrukt dat met de huidige technologische trends de behoefte aan goed



John Poppelaars

opgeleide wiskundigen alleen maar zal toemenen. Daarbij zal de nadruk liggen op het probleemoplossend vermogen en de creativiteit waarmee problemen worden benaderd. In het wiskundeonderwijs moet daar veel meer aandacht aan worden gegeven. Paul Drijvers (FI en toetsdeskundige bij het CITO) gaat vervolgens in op denkactiviteiten en Daan van Smaalen (promovendus bij ELAN aan de UT) eindigt met Lesson Study: een methode om de ontworpen materialen te implementeren en bij te stellen.

Geïnspireerd door de sprekers gaan de Zwolse cursisten in het middagprogramma zelf aan de slag. De ene helft van de cursisten kiest voor statistiek met grote bestanden en de andere helft wil zich gaan verdiepen in analytische meetkunde: twee nieuwe onderwerpen in het eindexamenprogramma vwo wiskunde B. Er ligt wat (cTWO-) voorbeeldmateriaal op tafel. De cursisten vinden het spannend om zelf op zoek te gaan naar kernelementen die voor leer-



Paul Drijvers

lingen van belang zijn in de context van statistiek met grote bestanden en analytische meetkunde.

Statistiek met grote bestanden

In de tweede bijeenkomst is het onderwerp statistiek met grote bestanden, en is het woord aan Eric Cator. Eric Cator promoveerde in 1997 in de functionaalanalyse. Daarna kwam hij in Delft terecht en maakte hij een switch naar de mathematische statistiek, en later ook naar de kansrekening. Hij is sinds 2012 hoogleraar toegepaste stochastiek aan de Radboud Universiteit Nijmegen. Naast zijn sterk wiskundig georiënteerde onderzoek, heeft Eric ook veel ervaring met praktische toepassingen van de statistiek. Eric heeft veel bedrijven en organisaties geadviseerd, variërend van het Ministerie van Economische Zaken tot Shell. In zijn lezing laat hij zien dat met behulp van simulatie, statistische concepten op een intuïtieve manier duidelijk zijn te maken, zonder gebruik te



Daan van Smaalen

hoeven maken van wiskunde boven het elementaire niveau.

Henry Kuipers gaat vervolgens, als docent onderzoeksmethodologie en statistiek bij de Hogeschool Van Hall Larenstein, in op de problemen die zich voordoen bij het opzetten van een onderzoeksladder. Hij heeft veel ervaring met het begeleiden van studenten, die voor opdrachtgevers uit het werkveld toegepast onderzoek moeten doen en daarbij statistiek nodig hebben. In zijn lezing laat hij zien hoe je gebruik kunt maken van conceptuele modellen om de (verwachte) relaties tussen de variabelen in een groot bestand te visualiseren. Ook legt hij uit hoe je met behulp van statistische technieken komt tot een selectie van onafhankelijke variabelen die zoveel mogelijk van de variatie in een afhankelijke variabele verklaren.

De Zwolse cursisten gaan nu echt op zoek: hoe kunnen we leerlingen boeien en hoe kunnen we hen prikkelen om gedreven aan de slag te gaan met een enorme hoeveelheid data? Dichtbij huis zijn leerlinggegevens van een school een aantrekkelijk perspectief: aantallen per profiel, aantallen per vak, cijfers, geslacht, leeftijd, et cetera. Excel lijkt daarbij een ideaal hulpmiddel te zijn. En bij de analytische meetkunde: hoe kunnen we nu laten zien waarom vectoren belangrijk kunnen zijn? Wat heb je eraan om slim een assenstelsel te kiezen (zie Figuur 1)?

Analytische meetkunde

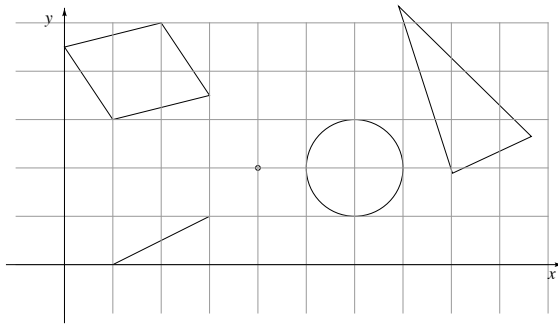
In de derde bijeenkomst staat de analytische meetkunde centraal en wordt de eerste lezing verzorgd door Martijn Slob van het wiskundig ingenieursbureau LIME. LIME is begonnen als een initiatief van de faculteit Wiskunde & Informatica van de Technische Universiteit Eindhoven en groeide uit tot een zelfstandi-



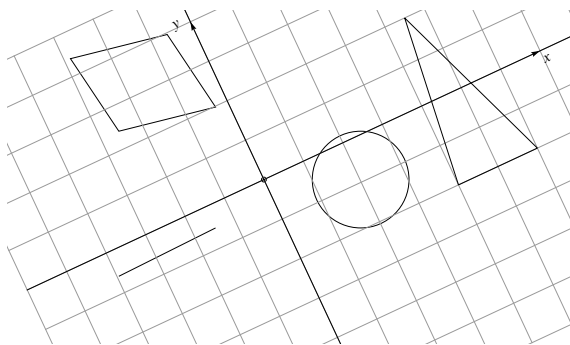
Eric Cator



Henry Kuipers



Met dit rooster is de positie van de driehoek nog niet nauwkeurig af te lezen; in het volgende figuur is het rooster iets gedraaid en ook iets anders geschaald. Daardoor is de positie van de driehoek wel makkelijk te bepalen, maar de andere figuren niet. Je kunt niet altijd alles hebben... In de



(school)praktijk draaien we de volgorde meestal om: we beginnen met een rooster, tekenen daarin de beide coördinaatassen en vervolgens de punten, cirkels en andere meetkundige figuren.

Figuur 1 Materiaal gemaakt tijdens de Leergang Wiskunde Zwolle: analytische meetkunde.

ge dienstverlener voor de technische industrie. Inmiddels bestaat LIME uit bijna twintig experts met een achtergrond in technische wiskunde, natuurkunde, lucht- en ruimtevaart en econometrie. Zo heeft LIME bijvoorbeeld oplossingen ontwikkeld voor een efficiënter, goedkoper en milieuvriendelijker verpakkings- en transportproces. In de lezing gaat Martijn in op het herleiden van trajectoriën van puin door de atmosfeer op basis van

videobeelden. Martijn gebruikt in zijn lezing fraaie satellietbeelden waardoor je je dolende waant in het heelal.

Aad Goddijn (FI en inmiddels gepensioneerd) vervolgt met zijn visie, waarin hij meetkunde betitelt als een samenhangend geheel waarin plaats is voor op realistische ervaring gestoelde meetkundige intuïties en voor denken met meer abstracte en formele hulpmiddelen. Hij memoreert dat meetkunde vroe-

ger op school in gescheiden lessen werd gegeven: enerzijds (klassieke) meetkunde puur gebaseerd op axioma's en bewijzen, waarin resultaten door redeneren worden bereikt, en anderzijds analytische meetkunde gebaseerd op coördinaten en algebra, waarin resultaten door berekening worden bereikt. Aan de hand van enkele meetkundig-algebraïsche problemen op diverse niveaus verkent hij die samenhang en stelt hij de vraag hoe meetkundig-algebraïsch inzicht en vaardigheid bij de leerlingen bevorderd kan worden.

De Zwolse cursisten gaan onverdroten door met het uiteenrafelen van grote databestanden. Een mooie opdracht is bijvoorbeeld de vraag naar het gemiddelde cijfer voor wiskunde per leerjaar uitgesplitst naar schooltype en geslacht. Bij de analytische meetkunde wordt het duidelijk dat vectoren toch wel handig zijn, zeker als het gaat om het bepalen van afstanden. In het oog springende kernelementen van analytische meetkunde zijn voor leerlingen: "noem de oplossing nu eens x ", "kies een geschikt assenstelsel" en "noem een willekeurig punt $P(x, y)$ ". Bovendien gaat het om het gebruik van andere notaties met (x_i, y_i) , zoals in Figuur 2. Het besef ontstaat dat de normaalvergelijking van een lijn heel handig is om afstanden te bepalen: zie Figuur 3.

Authentieke toepassingen

De vierde bijeenkomst concentreert zich op authentieke toepassingen van wiskunde. Edwin Vollebregt studeerde technische wiskunde in Delft en is hier vervolgens ook gepromoveerd. Samen met Mark Roest besloot hij na zijn promotie het bedrijf VORtech op te richten, om door te kunnen gaan met het werk dat hen het meest boeide: wetenschappelijk rekenwerk. Binnen VORtech heeft hij allerlei rollen vervuld — van uitvoerend werk, ontwerpen en projectleiding tot strategie en beleidsvorming. Tegenwoordig richt hij zich op het verder ontwikkelen van het CONTACT-model dat de interactie tussen treinwielen en rails beschrijft. Hij geeft aan wat er komt kijken bij het maken van een goed simulatiemodel. De toepassing van het waterbeheer is hier een voorbeeld waar bij VORtech jarenlang aan gewerkt is. Via de Deltawerken gaat hij in op numerieke analyse en computersimulatie.

Rebecca Hamer sluit de rij als onderwijskundige en voormalig docent natuurkunde en beleidsonderzoeker van verkeer en vervoer, gezondheid, onderwijs en ICT. Voor haar staat het vast dat (het gebrek aan) een interessant toekomstperspectief een belangrijke reden voor leerlingen is om al of niet voor de



Martijn Slob

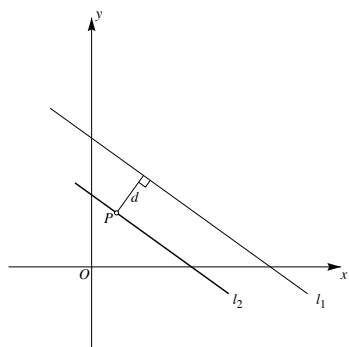


Aad Goddijn

8 $A(x_1, y_1)$, $B(x_2, y_2)$ en $C(x_3, y_3)$ zijn de hoekpunten van $\triangle ABC$, waarvan het zwaartepunt Z is. Bewijs de volgende formule:

$$x_Z = \frac{1}{3}(x_1 + x_2 + x_3) \quad \text{en} \quad y_Z = \frac{1}{3}(y_1 + y_2 + y_3)$$

Figuur 2 Rekenen in een assenstelsel.



Figuur 8 P kan over l_2 bewegen zonder dat de afstand tot l_1 verandert

Wat is de vergelijking van l_2 ?

De evenwijdigheid impliceert dat we dezelfde A en B hebben als in l_1 . Alleen de ' C ' is anders. Zeg D .

D berekenen we door de coördinaten van P in te vullen:

$$\begin{aligned} Ax + By + D &= 0 \\ Ax_P + By_P + D &= 0 \\ -D &= Ax_P + By_P \end{aligned}$$

De afstand tussen de lijnen l_1 en l_2 is nu de gezochte afstand van P tot l_1 :

$$\begin{aligned} d(l_2, l_1) &= \frac{|C - D|}{\sqrt{A^2 + B^2}} \\ d(P, l_1) &= \frac{|Ax_P + By_P + C|}{\sqrt{A^2 + B^2}} \end{aligned}$$

Figuur 3 De normaalvergelijking van een lijn.

exacte vakken te kiezen is — iets wat ook in verschillende onderzoeken naar profiel- en studiekeuze is aangetoond. Leerlingen weten vaak niet welke interessante beroepen bereikbaar zijn met een exact profiel en studie,

en hebben zeer stereotiepe verwachtingen. Dit geldt nog het sterkst voor wiskunde. Rebecca pleit voor het leggen van relaties tussen de schoolstof en de breedte van de beroepspraktijk. Dit vergroot volgens haar naast de

beleving van leerlingen ook de horizon van docenten, die hierdoor hun lessen meer gaan zien als iets voor de toekomst van de leerlingen dan alleen als een middel om hen aan een diploma te helpen.

Wat is de uiteindelijke opbrengst?

De Zwolse cursisten zijn er nog steeds mee bezig. Bij het onderwerp statistiek is de dataset eindeloos uit te breiden en de vragen ook. Bij het onderwerp analytische meetkunde blijft de vraag naar de zin van de introductie van vectoren actueel. Vectoren zijn onlosmakelijk verbonden met beweging — transformaties. En dat is precies de kern.

Natuurlijk hopen we dat deze leergang wiskundeleraars stimuleert om leerlingen warm te maken voor de nieuwe onderdelen statistiek met grote databestanden, analytische meetkunde, authentieke toepassingen en wiskundige denkactiviteiten. Maar vooral is van belang dat docenten hun leerlingen laten zien wat wiskundigen doen in de praktijk van alledag, wat hun invloed is op mens en maatschappij (900.000 banen die afhankelijk zijn van wiskunde met een invloed van 71 miljard euro). Er lonkt voor aanstormend jong talent een dynamische toekomst, wijd vertakt en o zo nuttig en praktisch bruikbaar!



Edwin Vollebregt



Rebecca Hamer

Naschrift

Het materiaal over analytische meetkunde, waar in dit artikel drie onderdelen uit zijn getoond, is ontworpen door Arie Ebbens, Jan Keemink, Ronnie Koolenbrander, Jan Otto Kranenburg, Martijn Nass en Nanja de Rie. Meer informatie over de leergang, alsmede de ontwikkelde materialen, zijn te vinden op <http://www.leergangwiskunde.nl>.

Arthur Veldman

Instituut voor Wiskunde en Informatica
Rijksuniversiteit Groningen
a.e.p.veldman@rug.nl

Afscheidsrede

Wiskunde aan de grenzen

Op 27 augustus 2013 werd er aan de Rijksuniversiteit Groningen ter gelegenheid van het emeritaat van prof.dr. Arthur Veldman, hoogleraar technische wiskunde, een symposium gehouden waarin thema's werden aangesneden waarmee hij een bijzondere binding heeft. Dit artikel is een weergave van het afscheidscollege dat Veldman aan het eind van de dag gaf. Van een echt afscheid is echter geen sprake, want dankzij een subsidie van technologiestichting STW blijft de emeritus hoogleraar nog vijf jaar langer verbonden aan de RUG.

Ineens is het zover: de kalender geeft aan dat je 65 wordt en niet meer hoeft te werken. En toch overvalt het me. Mijn geest is er, gelukkig, nog lang niet aan toe. Ik zeg wel eens tegen mijn studenten: "Jullie gezichten veranderen, maar ze worden nooit ouder." Dat houdt je jong, en je hebt niet door dat de pensioendatum met rasse schreden nadert. Ik hoop dan ook voorlopig nog geen afscheid te hoeven nemen van de wetenschappelijke wereld. Maar het is wel een goed moment om,

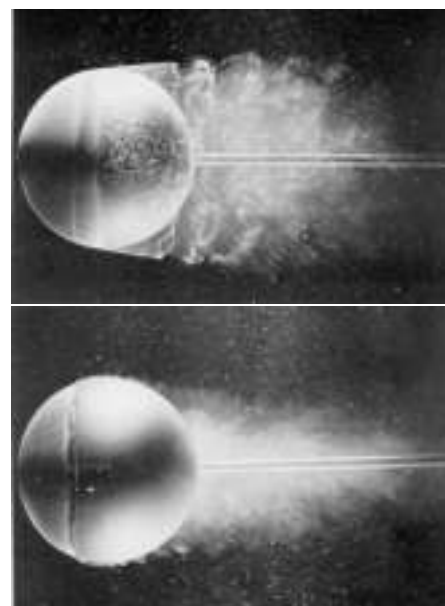
vanuit mijn eigen perspectief, terug te kijken op het 'officiële' deel van mijn carrière.

Er bestaat een uitdagende kloof tussen de problemen om ons heen en de beschikbare kennis. In mijn oratie [17] heb ik de 'magisch-thematische' tovenaars (Figuur 1) ten tonele gevoerd die 25 jaar geleden is getekend op het NLR (Nationaal Lucht- en Ruimtevaartlaboratorium) [16]. In de geest van Goethe [21], "Es ist nicht genug zu wissen, man muss auch anwenden", doet ze pogingen om haar wiskundevaardigheden boven het wiskundig vuur naar het voor toepassingen benodigde niveau op te warmen. In deze geest werken we hier in Groningen. Ik zal u enkele specifieke voorbeelden laten zien van onderzoek dat mij mijn halve leven heeft 'achtervolgd', in positieve zin wel te verstaan. Tussen de bedrijven door zal het onderwijs en de relatie tot de studenten aan bod komen, en aan het eind een aantal opmerkingen over de aansluiting en de samenwerking met de maatschappij waarin wij leven.

Onze grootste inspiratiebron komt uit de stromingsleer, die overal om ons heen voorkomt. Iedereen kent op stormachtige herfstdagen de dwarrelende bladeren, die de wilde, turbulente bewegingen van de lucht visualiseren. Het met de computer berekenen en begrijpen van turbulente stromingen is onze



Figuur 1 NLR-schets uit 1988 [16]: Toepassingen vergen het uiterste van wiskundige vaardigheden.



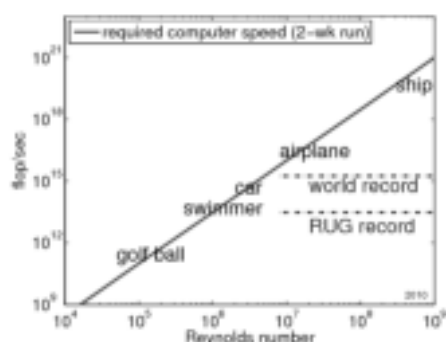
Figuur 2 Laminare (boven) versus turbulente (onder) loslating [15]: turbulente stroming kan beter 'de bocht om', met een dunner zog (= minder weerstand) tot gevolg.

grootste uitdaging. Dit vakgebied heet in het Engels *computational fluid dynamics* (CFD), en is een van de meest prominente voorbeelden van *simulation based research*, het derde onderzoeksparadigma naast experiment en theorie. De lastigste situatie om te simuleren is wanneer er massieve loslating optreedt met recirculatiegebieden, zeg maar grote draaikolken. Figuur 2 toont twee foto's van een experiment [15]. In het bovenste plaatje laat de stroming laminair los van de bol; u ziet dat de stroming nauwelijks 'de bocht om' kan, met veel weerstand tot gevolg. In het onderste plaatje is de stroming met een plakbandje



Arthur Veldman

van het toepassen



Figuur 3 Vereiste rekeninspanning (in floating-point-operaties per seconde) voor gedetailleerde berekeningen van turbulente stromingen (twee weken rekentijd; status 2010).

op de bol turbulent gemaakt, waardoor deze beter de bocht rondt, resulterend in veel minder weerstand. Van dit effect wordt gebruik gemaakt bij golfballetjes en schaatspakken.

Een globale indicatie voor de mate van turbulentie wordt gegeven door het getal van Reynolds. Dit getal hangt af van een karakteristieke afmeting L van het omstroomde object, de snelheid U van de stroming en de stroperigheid ν van het stromende medium: $Re = UL/\nu$. Hoe hoger het Reynoldsgetal, hoe turbulenter de stroming en hoe kleiner de te berekenen details. Het rekenen aan turbulente stromingen, inclusief alle details, gaat de rekenkracht van de huidige computers nog royaal te boven; ruwweg schaalte de benodigde rekeninspanning met $Re^{11/4}$, zie Figuur 3. Willen we toch uitspraken kunnen doen, dan moet de omvang van de berekeningen worden verkleind. Dit kan op drie manieren:

- door kleinere structuren in de stroming te modelleren (zeg maar 'glad te strijken');

- door snellere oplosmethoden te ontwikkelen voor de optredende stelsels vergelijkingen;

- door het benodigde aantal roosterpunten te verminderen (bij gelijkblijvende nauwkeurigheid).

Alle drie de opties zullen aan de orde komen.

Langlopend onderzoek

Een eeuw geleden 'ontdekte' Prandtl [11] de aerodynamische grenslaag langs de wand van een omstroomd object (bijvoorbeeld een vliegtuigvleugel), waarin de viskeuze en turbulente effecten zich afspelen. Hij stelde een eenvoudig model op voor de stroming in deze grenslaag, dat hij wilde koppelen aan een model voor de niet-viskeuze buitenstroming. Door de viskeuze afremming bij de wand lijkt de vleugel effectief dikker: het *verdringslichaam*, donker aangegeven in Figuur 4. Voor aanliggende stromingen, zoals in de kruisvlucht van een vliegtuig, gaat dit wonderwel. Maar zodra er loslating in het spel is, zoals bij start en landing van een vliegtuig, liet jarenlang iedere methode het numeriek volledig afweten: populair gezegd, alle berekeningen 'ontploften'.

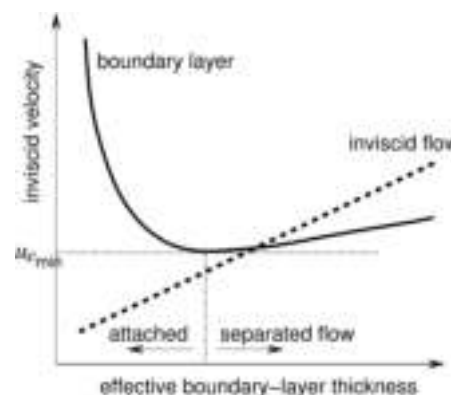
Het heeft tot eind jaren zeventig geduurd voor ontdekt werd waar dit door werd veroorzaakt: een minimum in de relatie tussen effectieve dikte van de grenslaag (de verdringsdikte) en de langssnelheid (drukverdeling), juist op het punt van stromingsloslating; zie Figuur 5. Dit minimum maakt meteen duidelijk dat het voorschrijven van de langssnelheid tot problemen kan leiden. We spreken daarom rondom het loslaatpunt van ster-

ke interactie tussen grenslaag en buitenstroming. Het zou me niet verbazen als de existentie van zo'n minimum met functionaalanalytische methoden kan worden bewezen: een uitdaging voor de theoretici! En een vraag voor historici: Waarom duurde het zo lang voor het bestaan van dit minimum werd ontdekt?

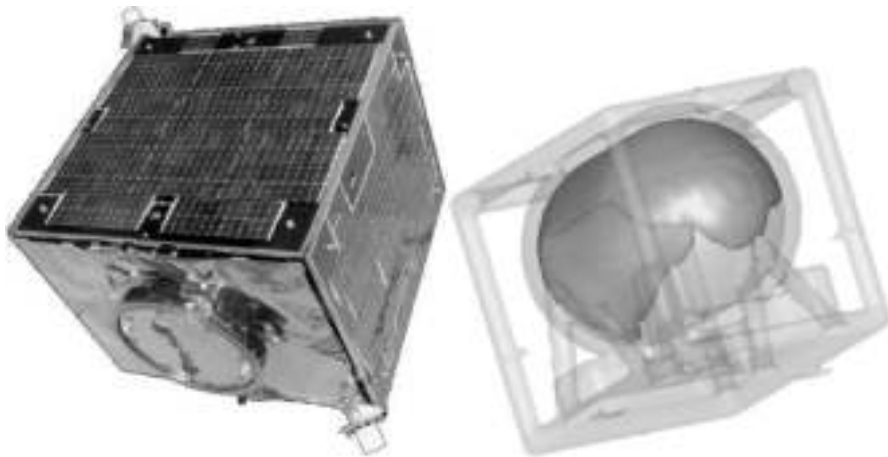
Toen deze oorzaak eenmaal bekend was, konden er rekenmethoden worden ontwikkeld die hier geen problemen mee hebben, zoals de quasi-simultane methode uit



Figuur 4 Prandtl's opdeling van de stroming in een viskeuze grenslaag en een niet-viskeuze buitenstroming.



Figuur 5 Relatie tussen langssnelheid en verdringsdikte in een grenslaag. Het minimum correspondeert met het punt van stromingsloslating.



Figuur 6 Sloshsat FLEVO (links); berekende momentopname tijdens vrij-draaiend tuimelen, 'flat spin' (rechts).

mijn NLR-tijd. Later in Groningen hebben de promovendi Edith Coenen en Henny Bijleveld (met steun van het ECN) deze methode wiskundig verder geanalyseerd en aangescherpt (hun proefschriften zijn te vinden op <http://dissertations.ub.rug.nl/faculties/science>, 2001, respectievelijk 2013). Dit is een voorbeeld van een gepartitioneerd systeem: een probleem dat je eerst in twee delen hakt om die delen vervolgens weer aan elkaar te plakken. Voor een wiskundige maakt het niet zo veel uit wat de aard van het probleem

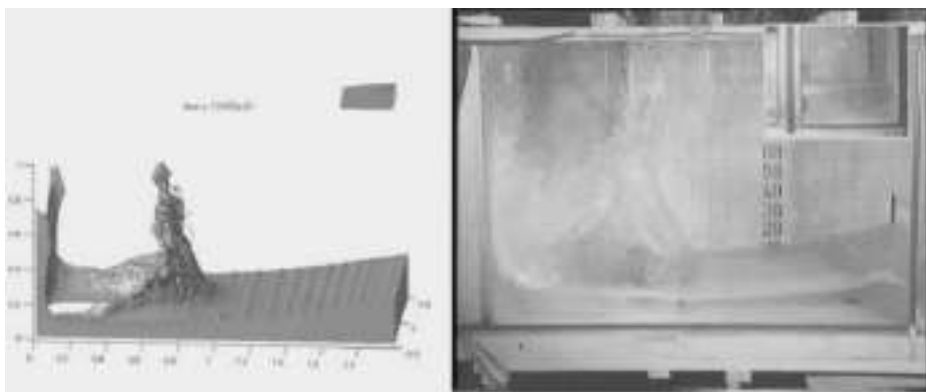
is: je kunt de gehanteerde koppelmethode net zo makkelijk toepassen op bijvoorbeeld elastische bloedvaten (met een bloedstroming en een elastische vaatwand), zoals Gerk Rozema doet.

Een ander voorbeeld van zo'n gepartitioneerd systeem waar de quasi-simultane methode op is toegepast betreft de beweging van met vloeistof gevulde satellieten. Dit onderzoek is ook eind jaren zeventig gestart op het NLR, met het ontwerp van de IRAS-observatiesatelliet als drijfveer. De eerste be-

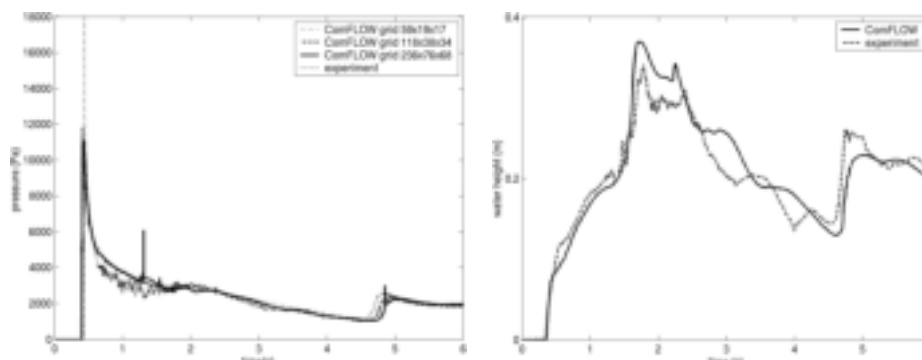
rekeningen in 1983 gebruikten een rekenrooster van 200 punten (onthoud dit getal), en werden uitgevoerd op een CDC Cyber 205 in het Control Data-hoofdkwartier in Minneapolis. Na enkele experimenten aan boord van het Europese ruimtelaboratorium Spacelab, is begin 2005 de door het NLR ontwikkelde experimenteesatelliet Sloshsat FLEVO gelanceerd [22]. Hiermee is het rekenmodel voor de interactie tussen vloeistof en satelliet gevalideerd, met financiële steun van SRON Netherlands Institute for Space Research [18]; zie Figuur 6.

Dit onderzoek trok de aandacht van het MARIN (Maritime Research Institute Netherlands), dat geïnteresseerd is in de natuurkrachten uitgeoefend door extreme golven. Net als in de ruimtevaarttoepassing, gaat het hier om de beschrijving van vloeistofbewegingen met sterk veranderende vloeistofoppervlakken. Zo'n vijftien jaar geleden begon de samenwerking, en inmiddels is deze uitgebreid in projecten met TU Delft, FORCE Technology uit Noorwegen en Deltares (dat geïnteresseerd is in het effect van golven op kustconstructies). Deze projecten worden gesteund door technologie stichting STW en de wereldwijde offshore-industrie. Bij deze samenwerking wordt het ComFLOW-programma ontwikkeld, waaraan inmiddels een negental promovendi heeft bijgedragen: Jeroen Gerrits, Erwin Loots, Geert Fekken, Theresa Kleefman, Rik Wemmenhove, Peter Wellens, Henri van der Heiden, Peter van der Plas en Bülent Düz [23]. Roel Luppens levert een grote bijdrage aan hun begeleiding. De ComFLOW-ontwikkeling wordt gevalideerd met behulp van experimenten. Als voorbeeld volgen hieronder enige resultaten van een experiment waarin een blokje (model voor een container aan dek van een schip) wordt 'aangevallen' door een hoge golf [4]. Figuur 7 toont een snapshot van een synchrone animatie van berekening en experiment [24]. Twee ogen zijn niet genoeg om experiment en simulatie met elkaar te vergelijken. Dat gaat beter in 'saaie' lijngrafiekjes, waar twee krommes met elkaar worden vergeleken: eentje uit het experiment en de ander uit de berekening (Figuur 8).

De grote 'rekenpartijen' kunnen worden verkleind door snellere oplosmethoden voor de voorkomende stelsels vergelijkingen te ontwikkelen. Hieraan wordt/werd in onze groep gewerkt door Eugen Botta, Fred Wubs, Kurt Lust en Bruno Carpentieri. Een van de specialiteiten zijn multilevel preconditioners voor ijle matrices, zoals NGILU, MRILU en HYMLS. Deze worden gecombineerd met continuïteitsmethoden om bifurcatieproblemen



Figuur 7 Berekening en experiment: momentopname uit synchrone animatie [24].



Figuur 8 Vergelijking tussen berekening en experiment: de druk voorop het blokje (links); de waterhoogte een eindje voor het blokje (rechts).



Figuur 9 Fill-in patronen van een Schur-complement voor gepreconditioneerde (ijle en volle) matrices.

te onderzoeken, bijvoorbeeld voor Rayleigh-Bénard-convectie. Aan deze ontwikkeling is gewerkt door de promovendi Auke van der Ploeg, Ena Tiesinga, Arie de Niet, Jonas Thies, Hande Kirbas, Sourabh Kotnala en Weiyan Song. Toepassing vindt onder andere plaats in de oceanografie, samen met het IMAU in Utrecht. Een andere specialiteit wordt gevormd door oplosmethoden voor blokgestructureerde matrices (VBARMS), waarbij de matrixstructuur wordt uitgebuit door promovendi George Liao en Yiming Bu. U ziet aan Figuur 9 dat het bestuderen van fill-in patronen bij dit onderzoek een belangrijk onderdeel is.

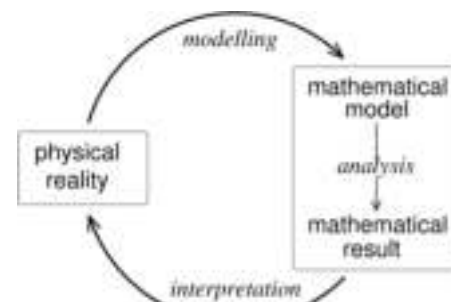
Ook met andere toepassingsgebieden is gezamenlijk promotie-onderzoek uitgevoerd, zoals met aerospace engineering en applied mathematics in Delft (stroming met chemische reacties: Jan Vos; capillaire stroming:

Ruben Schulkes), chemical engineering (niet-Newtonse stroming: Marc Gerritsma), biofysische chemie (polymeerdynamica: Natasha Maurits) en biomedical engineering (stenvormende elementen: Martin de Vries). Met collega Hendrik Hoogstraten is samengewerkt met de medische wereld, aan hemodynamische problemen (elastische bloedvaten: Erwin Loots). Ook participeerde onze groep in de ontwerpersopleiding 'computational mechanics' samen met de Universiteit Twente: een tweejarig programma waarin nauw werd samengewerkt met de industrie. Op landelijk niveau is het onderzoek ingebed in het J.M. Burgerscentrum, de nationale onderzoeksschool voor stromingsleer: een stimulerend ontmoetingsplatform voor de nieuwe generaties studenten. Ook de Werkgemeenschap Scientific Computing dient in dit verband te worden genoemd.

Onderwijs

Het zal u niet ontgaan zijn dat de geschetste wereld van het grootschalig rekenen (HPCN) zeer multidisciplinair van aard is. De tafel in Figuur 10 (vrij naar [8]) vertegenwoordigt samenwerkende beoefenaren van een kleurrijke verscheidenheid aan disciplines: probleem-experts (theorie en experiment), wiskundigen (modellen en algoritmen) en informatici (implementatie en visualisatie).

Een veelheid aan 'talen' wordt er gesproken, en het is de uitdaging voor een wiskundige hierbij aangehaakt te geraken. Hier ligt ook de kracht van de wiskunde: op dat abstractie-niveau lijken veel problemen op elkaar en is

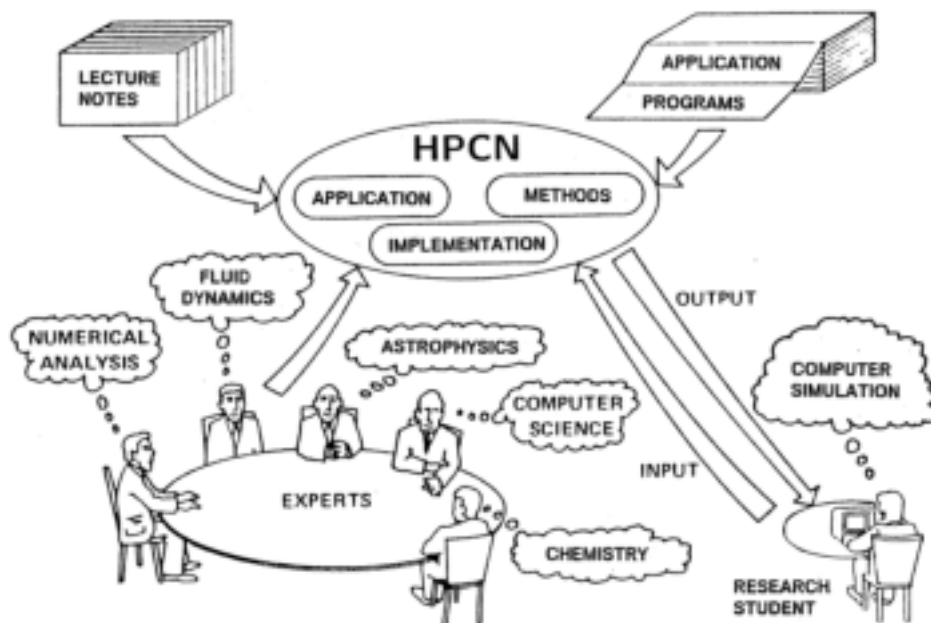


Figuur 11 'Retourtje wiskunde'.

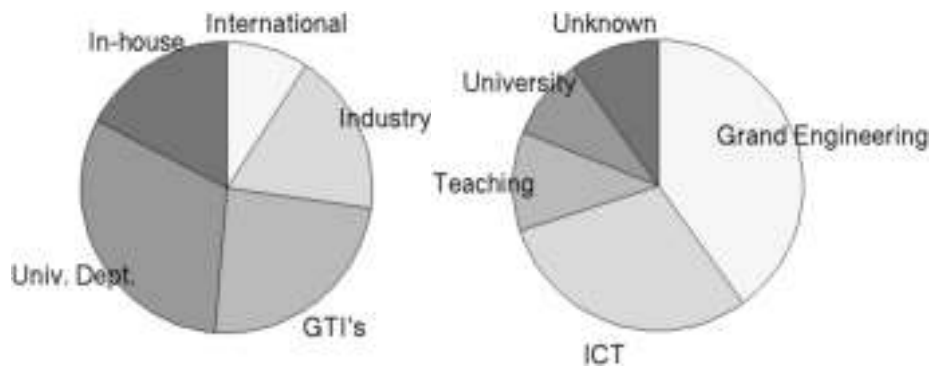
het relatief eenvoudig om methoden ontwikkeld voor het ene toepassingsgebied te hergebruiken in een ander toepassingsgebied. Uit voor mij onverwachte hoek duidde Harry Mulisch op deze kracht van de wiskunde bij de uitreiking van de Prijs der Nederlandse Letteren in 1995 [10]. Hij filosofeerde over de taal die de bouwers van de toren van Babel hebben gesproken om elkaar te begrijpen en concludeerde: "Het enige dat ik kan bedenken is dat die universele oertaal de wiskunde was."

Deze diversiteit aan toepassingen is aantrekkelijk voor de studenten van de Groningse opleiding technische wiskunde (applied mathematics) die sinds 1958 bestaat en die sinds 1971 een officiële ingenieursopleiding is. De combinatie van wiskunde en toepassing is de kracht van deze opleiding, die in Groningen ruim de helft van alle wiskunde studenten trekt. Of zou het zijn dat de studenten aan hun grootouders kunnen uitleggen waar ze mee bezig zijn...? Ik heb altijd met veel plezier college gegeven: in het begin regelmatig om kwart over acht, zonder dat de aanwezigheid van de studenten daaronder leed...

Ieder probleem wordt meestal aangeleverd in de taal van de toepassing en moet samen met de probleemeigenaar worden omgezet in een wiskundig model. Dit wordt daarna geanalyseerd en uitgewerkt met wiskundige methoden, waarna de resultaten worden terugvertaald naar de toepassingstaal en besproken met de probleemeigenaar. Op grond van zijn reactie kan het gekozen model worden aangepast en herhaalt de cyclus zich. In het college stromingsleer noem ik dat een 'retourtje wiskunde', een retourtje over disciplinengrenzen heen (Figuur 11). Het overschrijden van deze disciplinengrenzen is in mijn ogen dan ook veel relevanter dan het overschrijden van landsgrenzen, dat heden ten dage een noodzakelijke voorwaarde lijkt te zijn voor een academische carrière. Ik zou daarom iedere academicus willen aanbevelen (om niet te zeggen: verplichten) om een tijdje rond te kijken in een aangrenzende discipline.



Figuur 10 Multidisciplinaire samenwerking bij grootschalig rekenen.



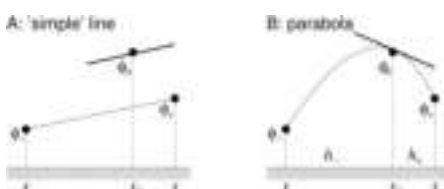
Figuur 12 Afstudeerstages (links) en arbeidsmarkt (rechts) van onze studenten.

Op dit moment is het afstudeeronderzoek vrijwel de enige gelegenheid waar de studenten ervaring kunnen opdoen met deze grensoverschrijdende activiteiten. Dit onderzoek wordt dan meestal (bij ons zo'n 80 procent) uitgevoerd in samenwerking met een academische of industriële onderzoeksgroep buiten de wiskunde, vaak op locatie als externe stage; Figuur 12 links. Deze blik naar buiten bereidt onze studenten goed voor op hun latere beroepsleven, en maakt het ons mogelijk om onderwijs en onderzoek te coördineren met de maatschappelijke ontwikkelingen.

Vrijwel alle afgestudeerden komen terecht in een omgeving waar wiskunde niet de dagelijkse omgangstaal is; Figuur 12 rechts. Zo'n 40 procent werkt in de *Grand Engineering*, de vloeistof en vaste-stof mechanica waarin ze zijn opgeleid. Nog eens 30 procent profiteert in de ICT van de programmeerervaring hier opgedaan. Ze hebben allen een andere (toepassings)taal moeten leren spreken. Ik pleit er dan ook voor om in het curriculum meer ruimte voor 'vreemde talen' in te bouwen.

Terug naar het onderzoek

Ik wil nu met u terug naar het onderzoek, naar de tijd waarin ik aan de Technische Universiteit in Delft mijn eerste college numerieke stromingsleer voorbereidde. Een centrale vraag bij het ontwikkelen van discretisatiemethoden voor CFD is de volgende: gegeven zijn drie punten waar een onbekende kromme doorheen loopt, en maak een zo goed mogelijke schatting van de helling van deze kromme in het middelste punt (waarbij



Figuur 13 Schattingen van de helling in het middelste punt volgens Methodes A en B.

'zo goed mogelijk' vaag gedefinieerd is); Figuur 13.

De 'armoedigste' methode is om een rechte lijn te trekken tussen de twee buitenste punten, en de helling daarvan te nemen (Methode A):

$$\frac{d\phi}{dx} \approx \frac{\phi_+ - \phi_-}{x_+ - x_-}.$$

Maar 'op school' leerden we dat we in de buitenste punten Taylor-reeksen moeten opstellen en die zodanig combineren dat in de lokale afbreekfout de kopterm wegvalt. Dit is equivalent met het trekken van een parabool door de drie punten (Lagrange-interpolatie) en daarvan de helling te gebruiken. Deze ingewikkelder Methode B werd door onze leermeesters als 'beter' beoordeeld:

$$\frac{d\phi}{dx} \approx \frac{h_-^2 \phi_+ + (h_+^2 - h_-^2) \phi_0 - h_+^2 \phi_-}{h_+ h_- (h_+ + h_-)}.$$

Laten we dit toepassen op mijn favoriete modelprobleem, de convectie-diffusievergelijking

$$\frac{d\phi}{dx} - \frac{1}{Pe} \frac{d^2\phi}{dx^2} = 0, \\ x \in [0, 1], \phi(0) = 0, \phi(1) = 1$$

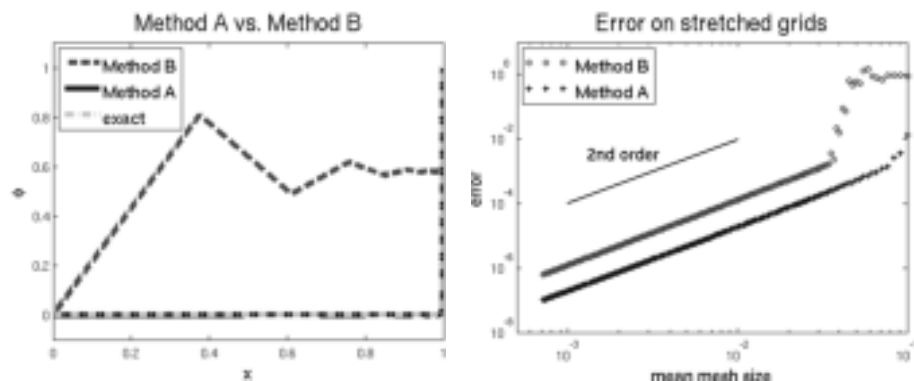
bij kleine diffusie (groot Péclet-getal Pe), zodat de oplossing een dunne grenslaag bezit (Figuur 14 links). Het rekenrooster is exponentieel gekozen met een constante rekking, zodanig dat de helft van de roosterpunten in de grenslaag ligt; dus aan de resolutie zal het niet liggen. Figuur 14 (voor $Pe = 1000$) toont dat Methode A een goed resultaat oplevert (amper te onderscheiden van de exacte oplossing), maar dat Methode B er weinig van bakt op de grovere roosters. Beide methoden zijn netjes tweede-orde-nauwkeurig, maar bij Methode A kun je je veel grotere maaswijdtes permitteren dan bij Methode B. Dit leidt tot minder roosterpunten bij gelijkblijvende

nauwkeurigheid en daarmee tot kleinere rekkentijden.

Wat is nu het geheim van Methode A, die vroeger in de literatuur werd weggeschoven als "dit kan niets worden"? Het zit in de wiskundige structuur van de coëfficiëntenmatrix. Bij Methode A herken je de coëfficiënten $[-1 \ 0 \ 1]$, waarmee het convectieve deel van de matrix scheefsymmetrisch wordt, net als de analytische operator d/dx die hij benadert. Hiermee zijn de eigenwaarden zuiver imaginair en de norm van een tijdsafhankelijke oplossing blijft daardoor constant. In fysische termen blijft de energie constant (alleen de diffusie kan/mag energie dissiperen); in numerieke termen is het semi-discrete stelsel vergelijkingen stabiel. Dit staat in schril contrast tot de matrix van Methode B, die op de grovere roosters van alles kan doen, tot singular worden aan toe. Methode A is hiermee een mimetische methode waarin een wiskundig-analytische eigenschap met fysische betekenis, in dit geval scheefsymmetrie van de operator, discreet overleind wordt gehouden.

De praktijk toont steeds vaker dat discreet behoud van dergelijke eigenschappen belangrijker is dan een (ogenschijnlijk) kleine lokale afbreekfout. Mimetische methoden winnen dan ook de laatste jaren sterk aan populariteit. Reeds in de zestiger jaren waren de ontwikkelaars van het gestaggerde rekenrooster [3] zich bewust dat de relaties tussen 'div', 'grad' en 'curl' discreet behouden moeten blijven. Ook in deze lijn past de eindige-volume-methode, ontwikkeld rond 1970, die de analytisch-fysische behoudswetten (zoals voor massa, impuls en energie) discreet overleind houdt. Later zijn ook meer secundaire eigenschappen discreet 'uitverkoren', zoals bijvoorbeeld de dispersierelatie bij akoestische golfvoortplanting [5]. Recentelijk probeert de *discrete calculus* vanuit de differentiaalmeetkunde hiervoor een zuiver-wiskundige onderbouwing te leveren; zie onder andere [6].

Deze mimetische aanpak wordt uitgebreid ingezet bij het uitvoeren van directe numerieke simulaties (DNS) van turbulente stromingen waarbij alle schalen in de stroming worden berekend [19], en bij goedkopere large-eddy-modellen waar de kleinste schalen in de stroming worden gemodelleerd. Dit alles onder leiding van Roel Verstappen. De complexiteit van berekeningen hangt af van de grootte (beter: 'kleinte') van de kleine schalen, anders gezegd van de mate van turbulentie. De voortgang is te zien in het promotieonderzoek van Jan Wissink, Willem Cazemier, Dirk Jan Kort, Joop Helder, Henry Bandringa, Wybe



Figuur 14 Methode A versus Methode B: oplossing bij 20 roosterpunten (links); een roosterverfijningsstudie (rechts).

Rozema en Maurits Silvis. De rekentechnisch haalbare structuren in de stroming zijn in de loop der jaren steeds fijner geworden. Het linker plaatje in Figuur 15, van een ‘bescheiden turbulente’ berekening bij $Re = 22000$ uit 1997, is door een journalist eens ‘psychedelische printkunst’ genoemd [20] (de visualisatie is gemaakt door Wim de Leeuw [7]). Bij mijn aantreden in Groningen [17] had ik de droom om bij mijn pensionering een volledig vliegtuig te kunnen doorrekenen. Ik kan melden dat we al een heel eind zijn opgeschoten: Wybe Rozema is momenteel bezig bij het NLR om voor $Re = 5 \cdot 10^4$ de stroming rond een delta-vleugel met voldoende resolutie te berekenen (bij ruwweg 10^8 roosterpunten — vergelijk dit met de 200 punten uit 1983!); Figuur 15 rechts. Maar we zijn er nog niet, want bij vliegtuigen moeten we naar $Re = 10^7$ toe (met 10^{13} roosterpunten) en voor schepen is dit zelfs $Re = 10^9$ (met 10^{17} roosterpunten).

Mede dankzij de grote technologische instituten (NLR, MARIN, Deltares en ECN) heeft Nederland internationaal een vooraanstaande positie verworven bij het onderzoek aan stromingsverschijnselen en de bijbehorende CFD-ontwikkeling. Ik hoop dat Daniel Bernoulli, vanaf het gebrandschilderde raam in de universitaire aula in zijn geboortestad Groningen, trots kan zijn op hoe de stromingsleer in de drie eeuwen na hem groot is geworden. Alleen rest nog steeds die ene vraag: “Hoe werkt turbulentie?” Dus is er nog vele decennia werk voor het verbeteren van CFD-methoden.

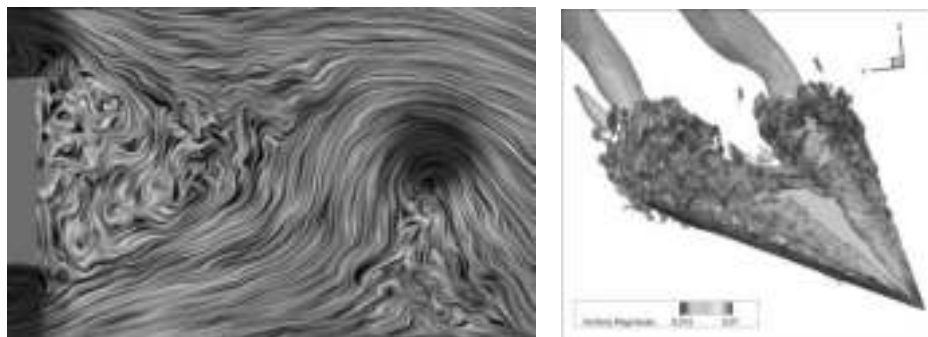
Samenwerking

De wereld buiten de wiskunde heeft voor mij altijd de inspiratie en uitdaging geleverd om nieuwe wiskundige methoden te ontwikkelen. De terugkoppeling vanuit de praktijk is hierbij essentieel. Methoden die succesvol getest zijn op modelproblemen in een academische omgeving, blijken toegepast op ‘echte’ problemen toch altijd weer onvolkomenheden te bevatten. Dan wordt duidelijk dat

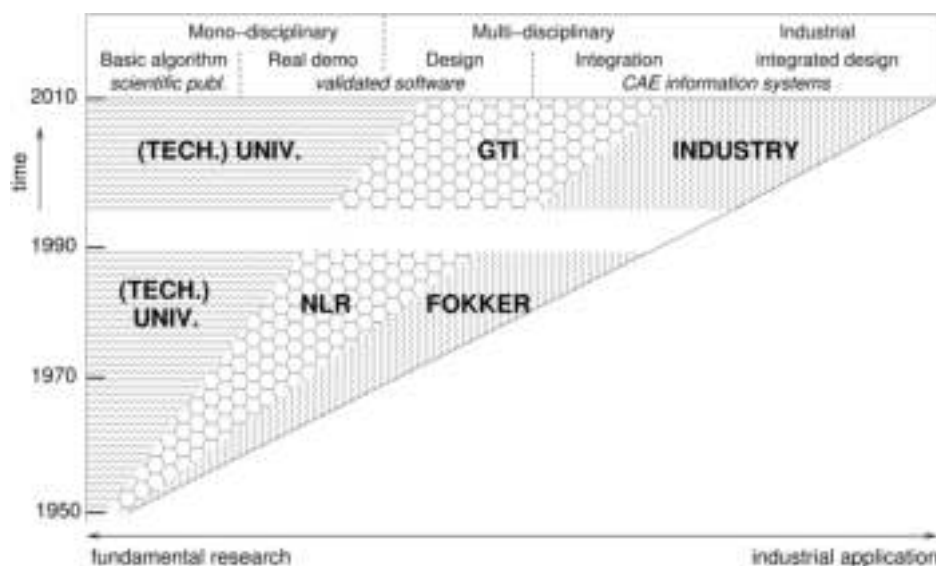
in de wetenschappelijke model-analyse nog een aantal fundamentele zaken onopgemerkt waren, zoals bij Methode A versus Methode B waar het verschil pas op de extremere rekenroosters uit de praktijk significant wordt. In feite forceren toepassingen op deze manier wetenschappelijke innovatie. Nick Trefethen [14] verwoordde de essentiële rol van toepassingen bij het voortschrijden van de

(numerieke) wetenschap als volgt: “Most of the big algorithms were invented by academic mathematicians who had major involvement with applications in industry or government.” Binnen onze industriële projecten was er altijd voldoende ruimte voor dit doelgerichte, risicovolle fundamentele onderzoek, mits goed beargumenteerd en uitgelegd!

De verdeling van de activiteiten tussen universiteit en industrie is in de loop der jaren sterk veranderd. Zo’n halve eeuw geleden, toen CFD nog in de kinderschoenen stond, werden in de industriële laboratoria nog veel ‘speelgoed’-berekeningen uitgevoerd (zoals ‘Laplace op het eenheidsvierkant’) om gevoel voor het ontluikende vakgebied te verkrijgen. Later, toen CFD verder tot ontwikkeling kwam, werden deze berekeningen steeds realistischer. Een kwart eeuw geleden, in 1988, heb ik het onderste deel van Figuur 16 al eens laten zien op een mathematisch congres [16]. De geschetste ontwikkeling is daarna verder gegaan. Tegenwoordig worden stro-



Figuur 15 Twee voorbeelden van een DNS: de stroming achter een blokje bij $Re=22000$ — ‘psychedelische printkunst’ [20] (links); de stroming rond een delta-vleugel bij $Re=50000$ (rechts).



Figuur 16 Evoluerende taakverdeling tussen universiteit en industrie.



Figuur 17 Henk Mulders dialoog-model: 'co-creatie van kennis' [9].

mingsmodellen gecombineerd met modellen uit andere disciplines, zoals sterktemodellen die de vervorming van het omstroomde lichaam beschrijven. Het multidisciplinaire geheel wordt daarna geoptimaliseerd in CAE-ontwerpsystemen. Het gevolg van al deze wetenschappelijke vooruitgang is dat door de jaren heen het werkterrein van CFD heel veel breder is geworden, terwijl de spelers — van universiteit tot industriële ontwerpafdeling — dezelfde zijn gebleven. Voor ieder van hen ligt er dus een veel breder werkterrein dan voorheen om de keten van fundament tot toepassing volledig te kunnen bestrijken. De topsectorenplannen hameren niet voor niets op de aansluiting binnen deze keten. Voor de universitaire wereld vereist dit een ver-

breiding van haar activiteiten die beduidend verder gaat dan enkel het publiceren van wetenschappelijke artikelen. Mijn ervaring is dat de 'Ivoren Toren', inclusief de daarbinnen gehanteerde beoordelingscriteria, weinig weet heeft van deze (r)evolutie. Maar er zijn gunstige uitzonderingen...

Henk Mulder, van de RUG Wetenschaps-winkel, heeft bij de finale van de Docent van het Jaar-verkiezing dit voorjaar [9] hierover het dialoog-model uit Figuur 17 laten zien. Hierin wordt de kennis, ervaring en creativiteit uit zowel de universiteit als de maatschappij bij elkaar gevoegd; hij noemt dit dan ook 'co-creatie van kennis'. Deze beschrijving spreekt mij sterk aan. Het eenrichtingsmodel, dat ook via 'kennis→kunde→kassa' in het topsectorenbeleid aanwezig is, wordt dan uitgebreid met een 'pijlje terug' zoals Bas Buchner (directeur van het MARIN) dat noemt [1]. Voor een universiteit is deze terugkoppeling onmisbaar om te voorkomen dat er 'Laputa'-achtige situaties ontstaan zoals beschreven door Jonathan Swift in 1726(!) [12]. Ik ben van mening dat de kennis en ervaring gesymboliseerd in dat 'pijlje terug' het 'echte goud' is dat de universiteiten kunnen verdienen bij de samenwerking met de buitenuniversitaire

wereld, en niet de kille euro's... Robbert Dijkgraaf formuleerde het als volgt [2] "In de confrontatie van wiskunde en werkelijkheid ontstaan keer op keer nieuwe begrippen." Academia, de wiskundige wereld inclus, heeft deze bron van inspiratie en creativiteit te lang links laten liggen, met als gevolg op sommige terreinen een achterstand in ideeën en concepten van meerdere decennia. De plannen van het Platform Wiskundig Nederland om de verbroken aansluiting universiteit–praktijk voorzichtig te herstellen juich ik dan ook toe.

Afsluiting

Samenvattend kan ik stellen dat de samenwerking met de toepassingswereld voor mij altijd zeer stimulerend is geweest. Ik kan iedereen aanraden om vaker 'naar buiten' te kijken en de ideeën en uitdagingen die daar liggen op te pakken. Durf de veilige 'grenzen van het weten' [25] te verlaten en verken de avontuurlijke grenzen van het toepassen: u zult daar een eldorado voor wetenschappelijke innovatie aantreffen. Lord Kelvin concludeerde dit meer dan een eeuw geleden al kort en krachtig [13]: "The life and soul of science is in its practical application".

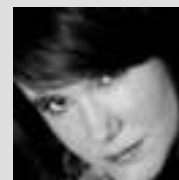
Referenties

- 1 B. Buchner e.a., *Nederland: de Maritieme Wereldtop*, Innovatiecontract TKI Maritiem v2.0, Topsector Water, 23 December 2011.
- 2 R. Dijkgraaf, *Mens en machine*, column NRC Wetenschap, 4 mei 2013.
- 3 F.H. Harlow en J.E. Welch, Numerical calculation of time-dependent viscous incompressible flow of fluid with free surface, *Physics of Fluids* 8 (1965) 2182–2189.
- 4 K.M.T. Kleefsman, G. Fekken, A.E.P. Veldman, B. Iwanowski en B. Buchner, A Volume-of-Fluid based simulation method for wave impact problems, *J. Comput. Phys.* 206 (2005) 363–393.
- 5 J.C. Kok, A high-order low-dispersion symmetry-preserving finite-volume method for compressible flow on curvilinear grids, *J. Comput. Phys.* 228 (2009) 6811–6832.
- 6 J. Kreeft en M.I. Gerritsma, Mixed mimetic spectral element method for Stokes flow: A pointwise divergence-free solution, *J. Comput. Phys.* 240 (2013) 284–309.
- 7 W.C. de Leeuw, *Presentation and Exploration of Flow Data*, PhD thesis, Delft University of Technology, 1997.
- 8 W.J. McCroskey, P. Kutler en J.O. Bridgeman, Status and prospects of Computational Fluid Dynamics for unsteady transonic viscous flows, in *Transonic Unsteady Aerodynamics and its Aeroelastic Applications*, AGARD Conference Proceedings, No. 374, Neuilly sur Seine, 1985.
- 9 H.A.J. Mulder, presentatie bij de Docent van het Jaar-verkiezing, Rijksuniversiteit Groningen, 7 februari 2013, www.rug.nl/news-and-events/events/lecturer-of-the-year/2012/henkmulder.
- 10 H. Mulisch, Dankwoord bij de uitreiking van de Prijs der Nederlandse Letteren, Brussel, 23 november 1995, prijsderletteren.org/1995.dankwoord.
- 11 L. Prandtl, Über Flüssigkeitsbewegung mit kleiner Reibung, in *Verhandlungen des dritten internationalen Mathematischen Kongresses, Heidelberg*, Teubner Verlag, Leipzig, 1905, pp. 484–491.
- 12 J. Swift, *Gulliver's travels: A voyage to Laputa*, oorspronkelijke uitgave 1726.
- 13 W. Thomson (Lord Kelvin), Lecture on 'Electrical Units of Measurement' (May 3, 1883), in *Popular Lectures and Addresses*, Vol. I, 1889, p. 73.
- 14 L.N. Trefethen, Who invented the great numerical algorithms?, Oxford Mathematical Institute, 2005, people.maths.ox.ac.uk/trefethen/inventorstalk.pdf.
- 15 M. Van Dyke, *An album of fluid motion*, The Parabolic Press, Stanford, 1982.
- 16 A.E.P. Veldman, Wiskunde als hulpmiddel bij stromingssimulatie, voordracht 24ste Nederlands Mathematisch Congres, TU Eindhoven, 7–8 april 1988.
- 17 A.E.P. Veldman, Een stroom van getallen, Oratie, Rijksuniversiteit Groningen, 7 mei 1991.
- 18 A.E.P. Veldman, J. Gerrits, R. Luppens, J.A. Helder en J.P.B. Vreeburg, The numerical simulation of liquid sloshing on board spacecraft, *J. Comput. Phys.* 224 (2007) 82–99.
- 19 R.W.C.P. Verstappen en A.E.P. Veldman, Symmetry-preserving discretisation of turbulent flow, *J. Comput. Physics* 187 (2003) 343–368.
- 20 R. Visscher, Psychedelische printkunst, *Delta* 38 (29), TU Delft, 28 september 2006, www.delta.tudelft.nl/artikel/psychedelische-printkunst/16053.
- 21 J.W. Von Goethe, *Wilhelm Meister's Wanderjahre: Aus Makariens Archiv*, oorspronkelijke uitgave 1821.
- 22 J.P.B. Vreeburg, Liquid dynamics from Spacelab to Sloshsat, *Microgravity Science and Technology* 21 (2009) 11–20.
- 23 www.math.rug.nl/~veldman/comflow.
- 24 www.math.rug.nl/~veldman/movies/Dambreak-Box.mpg
- 25 "Werken aan de grenzen van het weten" is het motto van de Rijksuniversiteit Groningen.

Ionica Smeets

wetenschapsjournalist, Leiden

i@ionica.nl

**Het keerpunt van Paul van de Veen**

Je hebt alleen succes met iets dat je zelf ontwikkelt

Paul van de Veen (1956) wilde vroeger uitvinder worden. Zijn droom kwam uit, hij studeerde werktuigbouwkunde en ontwikkelde jarenlang allerlei prothesen. Inmiddels lopen er wereldwijd meer dan 50.000 mensen rond met een door hem ontwikkeld kniescharnier in hun beenprothese. Maar in de loop der jaren veranderde zijn vak en in 2007 besloot Van de Veen dat het tijd was voor iets anders: hij werd wiskundeleraar. "Het was vanaf de eerste dag in de klas volkomen vanzelfsprekend dat ik daar stond."

Als kind was Paul van de Veen dol op de serie Okkie Trooy over een uitvinder met een koffertje vol wonderlijke dingen. Zelf was hij steeds in de weer met Meccano. "Op de middelbare school was er eens een avond waarop alle docenten hun hobby lieten zien. De natuurkundeleraar had een Meccano-hefbrug gebouwd met een ingenieus systeem waarbij één zacht snorrende motor alles aandreef. De rest van de expositie heb ik niet meer gezien, ik heb de hele avond naar die brug staan kijken. Ik wilde ook dingen maken. Sommige mensen moeten lang zoeken voor ze ontdekken wat ze het liefste doen, ik had geluk dat ik al zo vroeg wist wat ik wilde."

Dan was de studiekeuze vast heel makkelijk met zo'n duidelijk doel voor ogen?

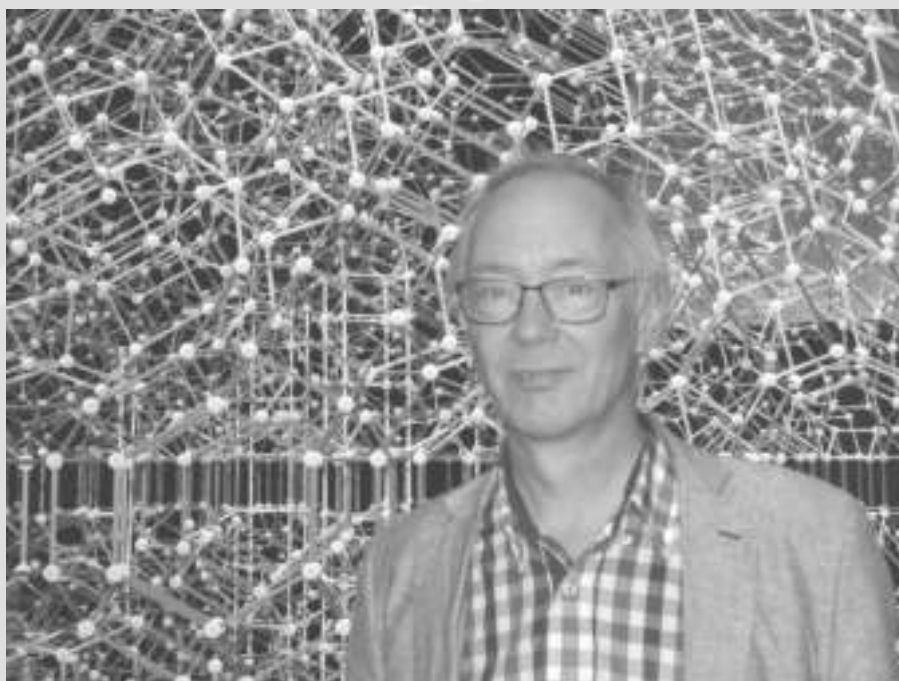
"Dat viel tegen, want ik had in die tijd drie grote interesses en twijfelde tussen muziek, wiskunde en werktuigbouwkunde. Muziek viel als eerste af, want ik besepte dat ik een goede amateur was, maar nooit echt de top zou bereiken. Een toekomst als blokfluit-leraar in een dorpje leek me niet erg aantrekkelijk, ik hoopte dat er iets groters voor mij in het verschiet lag. Wiskunde vond ik geweldig, maar ik twijfelde of ik er slim genoeg voor was. In 5 vwo deed ik mee met de wiskundeolympiade en ik was met vlag en wimpel de beste van mijn school. Maar een jaar later deed ik nog een keer mee buiten competitie en werd ineens ingehaald door aller-

lei leerlingen uit 4 havo die slimmer waren in het verzinnen van creatieve oplossingen. Toen besepte ik dat echte wiskunde gaat om meer dan alleen de stof goed beheersen en vroeg ik me af of ik wel de juiste slimheid had om wiskundige te worden."

Wat gaf de doorslag om naar werktuigbouwkunde te gaan?

"Toen ik een jaar of veertien was, zag ik

een documentaire over voorzieningen voor Softenon-slachtoffers. Mensen zonder armen bedienden met hun mond een apparaat waarmee ze dingen konden grijpen. Dat maakte diepe indruk op me. Ik heb werktuigbouwkunde nooit interessant gevonden om de grote machines of de enorme constructies, maar altijd gezien als een middel om mensen met een handicap meer mogelijkheden te geven. Natuurlijk geeft een graafmachine mensen in zekere zin ook meer mogelijkheden, maar dat vond ik persoonlijk niet interessant om aan te werken. Het ging mij erom om iets te ontwikkelen dat mensen direct helpt in hun eigen leven. Dus koos ik voor werktuigbouwkunde aan de Technische Hogeschool Twente."



Paul van de Veen voor de polytoop die hij dit jaar in NEMO bouwde tijdens het Weekend van de Wetenschap

Hoe beviel de studie?

“Eigenlijk was alles daar geweldig, vakken als Laplace- en Fouriertransformaties, partiële differentiaalvergelijkingen, maar ook constructieleer. Het was smullen. Tijdens mijn studie kwamen mijn passies voor muziek, dingen bouwen en mensen helpen bij elkaar in het maken van van aangepaste muziekinstrumenten voor kinderen met een lichamelijke handicap. We bouwden bijvoorbeeld met een groep mensen slagkastjes, elektromagnetische slagwerkbekrachtigers die na een druk op een knop fysiek op een drumstel ramden. We maakten ook aangepaste synthesizers en saxofoons voor mensen met een heel grove of juist krachteloze motoriek.”

Waarom begon u aan een promotieonderzoek als u zo lekker dingen aan het maken was?

“Het was in die tijd niet zo makkelijk om als ingenieur een baan te vinden in de revalidatie, daar werkten nog weinig academici. Na een paar sollicitaties belde mijn oude vakgroep, zij wilden onderzoek doen naar een nieuwe lijn van beenprothesen. Was dat misschien iets voor mij? Zo belandde ik per toeval in die richting. Tijdens mijn promotie maakte ik simulaties van de loopbeweging van iemand met een beenprothese. Dat leverde allerlei nieuwe inzichten op. De hype was in die tijd om de prothesen zo licht mogelijk te maken, maar dat maakte ze wel een stuk duurder. Er had alleen nog niemand een analyse gedaan van welke rol het gewicht precies speelde, en hoe de verdeling van het gewicht het lopen beïnvloedde. Mijn simulaties lieten zien dat een paar ons in de voet een enorm effect had, maar dat hetzelfde gewicht in de knie helemaal niet belangrijk was.”

Na uw promotie werd u technisch directeur van de Orthopedische Instrumentmakerij het Roessingh. Hoe kwam u daar terecht?
 “Ik werd gevraagd, ze kenden me omdat ik tijdens mijn promotie al veel cursussen gaf aan prothesenmakers. Het was een droombaan. Ik had gelijk zestig man onder me, allemaal vakmensen en het ging heel goed. Het hielp dat ik kon laten zien dat ik zelf ook een ambachtsman was. Toen ik ze op de werkvloer mijn aangepaste muziekinstrumenten liet zien, kreeg ik hun respect. Het waren mooie jaren daar.”

Waar bent u het meest trots op?

“Tijdens een zakenreis in Londen zat ik eens

met een collega in de kroeg en boven de whisky praatten we over knieprothesen. Ik had een ingeving en krabbelde iets op een bierviltje. Daar lopen nu 50.000 mensen mee rond.”

Wat was dat krabbeltje?

“In veel kniescharnieren wordt een bepaald stangenmechanisme gebruikt. Door een extra as toe te voegen, kon mijn prothese een beetje inveren, waardoor het hele systeem stabiel werd en mensen niet meer ineens door hun prothese knikten. Achteraf is het bijzonder dat er zulke heldere lijnen door mijn leven lopen. Als jongen was ik met mijn Meccano al bezig met stangenmechanismen. Bij een bepaalde constructie bewoog een punt in een banaanvormige baan. Ik wilde de vergelijking van die kromme opschrijven, maar dat lukte me niet, later bleek het een ingewikkelde zevendegraadsvergelijking te zijn. Ik heb daarover toen een brief naar *Pythagoras* gestuurd, waarop ze antwoordden dat dit eigenlijk een wat saai probleem was, maar ze schreven vervolgens een heel leuk artikel over stangenmechanismen. En later werd dat mijn specialisme. En wat helemaal bijzonder toeval is: Nellie Verhoef was op de middelbare school mijn piepjonge wiskundedocente en in 2007 ging ik bij haar de lerarenopleiding ELAN aan de Universiteit Twente volgen.”

Waarom bent u naar die lerarenopleiding gegaan, terwijl u zo hield van uw werk?

“In de loop der jaren veranderde de revalidatiewereld, het wemelde er inmiddels van de academici. Elektronische prothesen kwamen op en waren goedkoper te produceren dan mijn mechanische ontwerpen. Een nieuwe prothese was niet meer het werk van één slimmerik, maar van een heel team: één expert voor de lichte materialen, één voor motortjes, één voor de constructie, één voor de microprocessor en ga zo maar door. Ik kreeg een baan aangeboden bij zo’n team in Wenen, maar verhuizen was op dat moment geen optie. Toen was voor mij helder dat ik iets anders moest doen en ik had nog één interesse over waarmee ik nooit iets had gedaan: wiskunde. Ik had al lesgegeven en boeken geschreven over allerlei onderwerpen. Ik had iets met onderwijs, en iets met wiskunde.”

Hoe beviel het voor de klas?

“Het was volkomen vanzelfsprekend. Ik hielp op mijn eerste dag een paar meisjes

die heel onzeker waren over hun wiskundige vaardigheden, al had ik dat toen nog helemaal niet door. Ik liet ze zien hoe je makkelijk 35 in het kwadraat kunt uitrekenen. Ze dansten het lokaal uit. Zo makkelijk was het.”

Waarom staan er dan toch niet wat meer academici voor de klas?

“Er komt natuurlijk wel meer bij kijken. Het is niet zo dat de leerlingen wiskunde vanzelf leuk vinden omdat ik het allemaal zo leuk vind. Bovendien is de werkdruk erg hoog in het onderwijs. Alle rompslomp om het lesgeven heen is vermoeiend, ik zit vaak tot ’s avonds elf uur achter mijn laptop om alles af te krijgen. Ik zou mensen met jonge kinderen geen baan in het onderwijs aanraden.”

Wat heeft u meegenomen van uw oude werk in de klas?

“Ik bouw graag samen met mijn leerlingen. In deze tijd maken kinderen weinig meer, ik vind dat jammer. Ik bouw bijvoorbeeld een metershoge polytoop met een groep leerlingen. Het kost een uur of zes om met een team van tien mensen zo’n ding te maken. Ik kan meestal na een uur weg, dan hebben de leerlingen zelf door hoe de structuur en symmetrie in elkaar zit. Ze ervaren zo ook de schoonheid van die dingen. Als je als leraar zoiets doet met je leerlingen, dan zit je goed. Dit is zo spectaculair, dan luisteren ze daarna ook wel als ze wat sommen moeten maken.

Ik laat ook graag dingen zien die ik speciaal voor hen gemaakt hebt: een robot die de torens van Hanoi speelt, of een zelfgebouwde applet. Je hebt alleen succes met iets dat je zelf ontwikkelt. Dat zag ik heel sterk in de prothesewereld: een chirurg die iets nieuws bedacht had de beste succesratio. Bij zijn directe collega die het van hem had geleerd, ging het ook heel aardig. Maar bij mensen die het idee als routine uit een boekje haalden, werkte het veel minder goed. Zo is het in het onderwijs ook, je moet alle details kennen. Daarom geloof ik niet in al die kant-en-klare applets die aangeboden worden om in de klas te gebruiken. Laat mij maar zelf iets maken.”

Heeft u een goede suggestie voor een (Nederlandse) wiskundige met een bijzonder keerpunt in zijn of haar carrière? Stuur dan een e-mail naar i@ionica.nl.

Bas Edixhoven

Mathematical Institute
Leiden University
bas@edixhoven.net

Lenny Taelman

Korteweg-de Vries Institute for Mathematics
University of Amsterdam
l.d.j.taelman@uva.nl

The Solution

The André–Oort conjecture

The *André–Oort conjecture* is a problem in algebraic geometry from around 1990, with arithmetic, analytic and differential geometric aspects. Klingler, Ullmo and Yafaev, as well as Pila and Tsimerman have now shown that the Generalized Riemann Hypothesis implies the André–Oort conjecture. Both proofs appeared in the *Annals of Mathematics* in 2014. In this article Bas Edixhoven and Lenny Taelman describe the conjecture and these recent solutions.

The story of the André–Oort conjecture starts in 1988, with a question, posed by Yves André [1, X.4.3] at the end of his book on solutions of differential equations coming from algebraic varieties defined over $\mathbb{Q}$.

Elliptic integrals and complex multiplication
The simplest such differential equation is the equation

$$\lambda(\lambda - 1)\eta''(\lambda) + (2\lambda - 1)\eta'(\lambda) + \frac{1}{4}\eta(\lambda) = 0, \quad (1)$$

which was already studied by Gauss [9]. It arises from the Legendre family of elliptic curves:

$$y^2 = x(x - 1)(x - \lambda), \quad \lambda \in \mathbb{C} - \{0, 1\}.$$

For each λ , the set of solutions $(x, y) \in \mathbb{C}^2$ is a Riemann surface that can be compactified by adding one point. The compactification E is an *elliptic curve*. It is homeomorphic to a torus $S^1 \times S^1$. If λ is not in $(-\infty, 1)$, then the solutions with x in the real segments $[0, 1]$

and $[1, \lambda]$ form circles C_1 and C_2 on E . These two circles intersect transversally, see Figure 1, in a unique point, and therefore generate the fundamental group of E . Integrating the algebraic differential form $\omega = y^{-1}dx$ along the two circles gives the *periods* (defined up to sign):

$$\eta_1 = \int_{C_1} \omega = 2 \int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{x(x-1)(x-\lambda)}},$$

and

$$\eta_2 = \int_{C_2} \omega = 2 \int_1^\lambda \frac{dx}{\sqrt{x(x-1)(x-\lambda)}}.$$

For varying λ , these form a basis of the complex vector space of solutions of (1). The integral linear combinations of η_1 and η_2 form a lattice

$$\Lambda = \{k_1\eta_1 + k_2\eta_2 : k_1, k_2 \in \mathbb{Z}\} \subset \mathbb{C}.$$

The Weierstrass $\mathcal{P}$ -function and its derivative, suitably normalised, give an isomorphism of complex analytic manifolds:

$$\mathbb{C}/\Lambda \xrightarrow{\sim} E.$$

Each morphism of elliptic curves $a: E_1 \rightarrow E_2$ corresponds to a homothety $z \mapsto \alpha z$ such that $\alpha\Lambda_1 \subset \Lambda_2$.

The complex number λ is called *special* if the lattice Λ has *complex multiplications*, meaning that there are non-real complex numbers α such that $\alpha\Lambda \subset \Lambda$ (such an α defines an *endomorphism* of $\mathbb{C}/\Lambda$). For example, $\lambda = 2$ is special as the corresponding lattice,

$$\Lambda = \mathbb{Z}2.622\dots + \mathbb{Z}i \cdot 2.622\dots,$$

has multiplication by i . This gives the map

$$E \rightarrow E, \quad (x, y) \mapsto (2 - x, iy).$$

The special λ form a countable subset of $\mathbb{C}$.

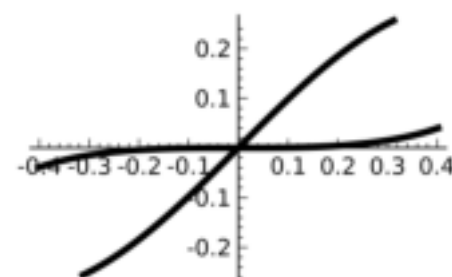


Figure 1 The intersection of C_1 and C_2 near the point $(1, 0)$, projected to the complex y -coordinate (for $\lambda = 1 + i$).

Manin–Mumford for $\mathbb{C}^\times \times \mathbb{C}^\times$

Let $C \subset \mathbb{C}^\times \times \mathbb{C}^\times$ be the set of zeroes of an irreducible complex polynomial f in two variables. Assume that C contains infinitely many torsion points (pairs $(x, y) \in \mathbb{C}^\times \times \mathbb{C}^\times$ with both x and y a root of unity). The Manin–Mumford conjecture for $\mathbb{C}^\times \times \mathbb{C}^\times$ predicts that $f = aX^n Y^m - b$ with n and m coprime, and b/a a root of unity. Equivalently, it predicts that C is the image of a complex line

$$\{(x, y) \in \mathbb{C}^2 : \alpha x + \beta y + \gamma = 0\} \quad (\alpha, \beta, \gamma \in \mathbb{Q})$$

under the exponential map

$$\mathbb{C} \times \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}^\times \times \mathbb{C}^\times, (x, y) \mapsto (e^{2\pi i x}, e^{2\pi i y}).$$

In fact the Manin–Mumford conjecture for $\mathbb{C}^\times \times \mathbb{C}^\times$ is not hard to prove, and would be suitable for the problem section in this journal.

This statement is analogous to (but much easier than) the André–Oort conjecture for $\mathcal{A}_1 \times \mathcal{A}_1$: torsion points correspond to special points, and the exponential map corresponds to the quotient map $\mathcal{H}^\pm \times \mathcal{H}^\pm \rightarrow \mathcal{A}_1 \times \mathcal{A}_1$.

We can now state an explicit case of André’s question. Let $Z \subset \mathbb{C}^2$ be the set of zeros of an irreducible complex polynomial in two variables. Assume that Z contains infinitely many points (λ_1, λ_2) such that both λ_1 and λ_2 are special, and that Z is not a fiber of one of the two coordinate projections. In this case, André asked if for all (λ_1, λ_2) in Z , there is a non-zero complex number α such that the pair of lattices (Λ_1, Λ_2) corresponding to (λ_1, λ_2) satisfies $\alpha\Lambda_1 \subset \Lambda_2$? (The answer is yes, as was shown, independently, in [4] (under GRH) and in [2].) The relation between λ_i and Λ_i is not algebraic, which makes it difficult to use the polynomial relation between λ_1 and λ_2 .

Statement of the conjecture

The André–Oort conjecture is the following statement.

Conjecture. *Let $\mathcal{A}$ be a Shimura variety, and $Z \subset \mathcal{A}$ an irreducible algebraic subvariety. Assume that Z contains a subset Σ of special points that is not contained in a strict subvariety of Z . Then Z is a Shimura subvariety.*

We will say more about Shimura varieties and special points below.

This conjecture was formulated (as a question) by André for Z of dimension 1. Independently, this was also formulated by Frans Oort, for the Shimura variety $\mathcal{A}_g$ (see below). Both André and Oort were inspired by the analogy with the Manin–Mumford conjecture (see box). Oort’s motivation also came from work of Johan de Jong and

Rutger Noot [10] on a conjecture of Robert Coleman on curves with complex multiplications.

Since the general theory of Shimura varieties is rather technical, we will restrict ourselves to examples.

Lattices Λ_1 and Λ_2 give isomorphic elliptic curves $\mathbb{C}/\Lambda_1$ and $\mathbb{C}/\Lambda_2$ if and only if they are homothetic, that is, if there is a complex number α such that $\alpha\Lambda_1 = \Lambda_2$. Every lattice is homothetic to a lattice of the form

$$\Lambda_\tau := \mathbb{Z} \cdot 1 + \mathbb{Z} \cdot \tau$$

for a $\tau \in \mathcal{H}^\pm := \mathbb{C} - \mathbb{R}$. The group $\mathrm{GL}_2(\mathbb{R})$ acts transitively on $\mathcal{H}^\pm$ by

$$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \cdot \tau := \frac{a\tau + b}{c\tau + d}$$

and homothety classes of lattices correspond to orbits under the discrete subgroup $\mathrm{GL}_2(\mathbb{Z})$. The quotient

$$\mathcal{A}_1 := \mathrm{GL}_2(\mathbb{Z}) \backslash \mathcal{H}^\pm$$

is an example of a Shimura variety. It is the *moduli space of elliptic curves*: the points of $\mathcal{A}_1$ are in bijection with isomorphism classes of complex elliptic curves. As before a point $x \in \mathcal{A}_1$ is *special* if its corresponding lattice Λ has complex multiplications. These are precisely the images of the points in $\mathcal{H}^\pm$ of the form $a + b\sqrt{-d}$ with a, b and d rational.

The only Shimura subvarieties of $\mathcal{A}_1$ are the special points and $\mathcal{A}_1$ itself, so that the

André–Oort conjecture holds for trivial reasons.

The simplest non-trivial case of the conjecture is for the Shimura variety

$$\mathcal{A}_1 \times \mathcal{A}_1 = (\mathrm{GL}_2(\mathbb{Z}) \times \mathrm{GL}_2(\mathbb{Z})) \backslash (\mathcal{H}^\pm \times \mathcal{H}^\pm).$$

The special points are the pairs (x, y) with x and y special. There are three types of one-dimensional Shimura subvarieties: $\mathcal{A}_1 \times \{y\}$ with y special, $\{x\} \times \mathcal{A}_1$ with x special, and the image of

$$\{(\alpha\tau, \beta\tau) : \tau \in \mathcal{H}^\pm\} \subset \mathcal{H}^\pm \times \mathcal{H}^\pm,$$

with $\alpha, \beta \in \mathrm{GL}_2(\mathbb{Q})$. The André–Oort conjecture for $\mathcal{A}_1 \times \mathcal{A}_1$ is equivalent to the statement given in the previous section.

The most interesting case of the André–Oort conjecture is for the moduli space $\mathcal{A}_g$ of (principally polarized) complex abelian varieties of dimension g :

$$\mathcal{A}_g := \mathrm{GSp}_{2g}(\mathbb{Z}) \backslash \mathcal{H}_g^\pm,$$

where $\mathcal{H}_g^\pm$ is the space of symmetric complex g by g matrices whose imaginary part is definite. The group $\mathrm{GSp}_{2g}(\mathbb{R})$ of symplectic similitudes acts transitively on $\mathcal{H}_g^\pm$ by

$$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \cdot \tau := (a\tau + b)(c\tau + d)^{-1}$$

where now a, b, c, d are real g by g matrices. The special points of $\mathcal{A}_g$ correspond to abelian varieties A with many endomorphisms ($H_1(A, \mathbb{Q})$ is generated over $\mathbb{Q} \otimes \mathrm{End}(A)$ by one element).

A general Shimura variety $\mathcal{A}$ is of the form $\Gamma \backslash \mathcal{X}$, where Γ is a discrete subgroup of $G(\mathbb{R})$ for some matrix group G over $\mathbb{Q}$, and where $G(\mathbb{R})$ acts transitively on $\mathcal{X}$. The Shimura subvarieties of $\mathcal{A}$ are images of orbits $H(\mathbb{R}) \cdot x$ for certain algebraic subgroups H of G over $\mathbb{Q}$ and certain x in $\mathcal{X}$. The zero-dimensional Shimura subvarieties are precisely the special points. The set of special points is dense in $\mathcal{A}$.

Shimura and Deligne have shown that each Shimura variety has a natural structure of algebraic variety, defined over a number field K . It is the subspace of a complex projective space defined by a finite system of polynomial equalities and inequalities ($\neq$, not $<$) with coefficients in K . The special points are defined over finite extensions of K , and all Galois conjugates of special points are special points.

Strategies and results

In his thesis Ben Moonen gave a thorough treatment of Shimura subvarieties, including two characterisations. Using one of these he proved the André–Oort conjecture for subvarieties of $\mathcal{A}_g$ under an additional hypothesis on the set Σ [13, 3.7 and 4.5].

As remarked above, André proved the conjecture for $\mathcal{A}_1 \times \mathcal{A}_1$ in [2].

Let $\mathcal{A} = \Gamma \backslash \mathcal{X}$ be a Shimura variety, and $Z \subset \mathcal{A}$ an irreducible algebraic subvariety. Assume that Z contains an infinite subset Σ of special points that is not contained in a strict subvariety of Z . A general strategy for proving the conjecture is to first show that for almost all $z \in \Sigma$ there is a *positive-dimensional* Shimura subvariety Y_z with $z \in Y_z \subset Z$, and to deduce from this that Z itself is a Shimura subvariety. The first step is the hardest.

One method, introduced in [4], for producing such Y_z is to exploit the Galois action on the set of special points in $\mathcal{A}$ combined with the action of $G(\mathbb{Q})$ on $\mathcal{X}$. The idea is to intersect Z with a Z' obtained from the action by a carefully chosen g in $G(\mathbb{Q})$, such that $Z \cap Z'$ contains $\text{Gal}_K \cdot z$ and such that the Galois orbit has so many elements that $Z \cap Z'$ cannot be finite. Then Y_z is obtained as an irreducible component of a repeated such intersection. This method works if one has sufficiently good lower bounds for the sizes of

the Galois orbits $\text{Gal}_K \cdot z$, and sufficient control on the complexity of the g that can be used. Lower bounds for Galois orbits depend on lower bounds for class numbers of number fields. For the choice of g one needs sufficiently many small primes in number fields. Both are hard problems in analytic number theory. The best known bounds depend on the Generalised Riemann Hypothesis (GRH) for number fields.

Using this strategy, the André–Oort conjecture was proved, under GRH, for $\mathcal{A}_1 \times \mathcal{A}_1$ in [4], for Hilbert modular surfaces in [6], for curves in general Shimura varieties (André’s question) by Andrei Yafaev in [21] (building on [7, 20]), for powers of $\mathcal{A}_1$ in [8]. Finally, Bruno Klingler, Emmanuel Ullmo and Yafaev treated the general case (under GRH) in [12, 19]. To make the strategy work in this case is a real tour de force, which took the authors (and the referees) quite a few years (the first versions are from 2006).

Another strategy was introduced more recently by Jonathan Pila in [16], where he proved the conjecture for powers $\mathcal{A} = \mathcal{A}_1^n$. The main idea is to work in $\mathcal{X} = (\mathcal{H}^\pm)^n$ instead of in the quotient $\mathcal{A} = \Gamma \backslash \mathcal{X}$. Of course, everything that takes place in $\mathcal{A}$ can be seen in $\mathcal{X}$, but, because the quotient map is not algebraic, the inverse images of algebraic subvarieties of $\mathcal{A}$ are then genuine complex analytic subvarieties of $\mathcal{X}$. On the other hand, $\mathcal{X}$ is an

open subset of $\mathbb{C}^n = \mathbb{R}^{2n}$ in which one again has the notion of algebraic subsets (defined by polynomial equations) and even the notion of algebraic subsets defined over $\mathbb{Q}$. This is relevant to the problem: the inverse images of special subvarieties are of that kind. Pila imported the tool of *O-minimal structures* [3] to deal with this mixed algebraic and analytic context. Here, Pila could apply (a generalisation of) his result with Alex Wilkie [15] (see box). This result is used to show that large Galois orbits of special points z in $Z \subset \mathcal{A}$ give rise to positive dimensional special subvarieties $Y_z \subset Z$, as in the previous strategy, but now *without* having to take intersections. An important intermediate result is the *Ax–Lindeman* theorem, which is also proved using [15]; it says that *maximal* irreducible algebraic subsets of the inverse image of Z are already very close to being the inverse image of a special subvariety.

Pila and Jacob Tsimerman generalised Pila’s strategy to $\mathcal{A}_g$ in [17]. They proved the conjecture in that case, under GRH. In the case of $\mathcal{A}_g$ for $g \leq 6$ (and products of those) they give an unconditional proof. In this case GRH is not needed, as there are sufficiently strong unconditional lower bounds for Galois orbits.

Epilogue

We have seen that the André–Oort conjecture has been proved, under GRH, but many questions remain open.

At this moment, Klingler, Ullmo, Yafaev and Chris Daw are making Pila’s strategy work for general Shimura varieties [11]. It is not inconceivable that number theorists can make the proof unconditional, by providing sufficient lower bounds for Galois orbits (see [5, Problem 14] for what is needed). Ziyang Gao has announced a proof, under GRH, of the conjecture generalised to *mixed* Shimura varieties [22].

Each Shimura variety $\mathcal{A}$ has a natural probability measure. One expects that for a sequence z_n of special points in $\mathcal{A}$ such that no subsequence is contained in a strict Shimura subvariety, the Galois orbits of the z_n are equidistributed. This would imply André–Oort immediately, but this is known only in very special cases.

In the wider context of ‘unlikely intersections’, Richard Pink has formulated [18] a conjecture on subvarieties of mixed Shimura varieties, simultaneously generalising the André–Oort, Manin–Mumford, Mordell–Lang and Zilber conjectures. Pink’s conjecture remains wide open.

The Pila–Wilkie theorem

A subset of $\mathbb{R}^n$ is called *definable* in $\mathbb{R}_{\text{an}, \text{exp}}$ if it can be defined using finitely many formulas involving the logical symbols $\exists, \forall, \neg, \wedge, \vee$, addition and multiplication, inequalities, real numbers (occurring as ‘constants’), the real exponential function e^x , and functions $[0, 1]^m \rightarrow \mathbb{R}$ that can be extended to a real analytic function on an open neighbourhood of $[0, 1]^m$. For example, semi-algebraic sets (defined by polynomial inequalities) are definable. The Pila–Wilkie theorem roughly states that if a definable X contains many points with rational coordinates, then these must accumulate on semi-algebraic subsets of X . More precisely, for a subset X of $\mathbb{R}^n$ we define the counting function

$$N(X, t) := \left| \left\{ \left(\frac{p_1}{q_1}, \dots, \frac{p_n}{q_n} \right) \in X \mid p_i, q_i \in \mathbb{Z} \cap [-t, t] \right\} \right|.$$

For $X = \mathbb{R}^n$ we see that $N(\mathbb{R}^n, t) \sim ct^{2n}$ for some c . Now let X be a definable subset of $\mathbb{R}^n$, and let X^{alg} be the union of all positive-dimensional semi-algebraic subsets of X .

Theorem (Pila–Wilkie [15]). *For every $\epsilon > 0$ there is a c such that for all t we have $N(X - X^{\text{alg}}, t) < ct^\epsilon$.*

As an example, let $X \subset \mathbb{R}^2$ be the graph of a function $f: [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$. If f is a polynomial with rational coefficients, then $f(x)$ is rational for every rational x and $N(X, t)$ will grow polynomially in t . But if we take $f(x) = \sin(\pi x)$ then the theorem says that this cannot happen, since $X^{\text{alg}} = \emptyset$. In fact by Niven’s theorem $N(X, t) \leq 5$.

References

- 1 Y. André, *G-functions and geometry*, Aspects of Mathematics, E13. Friedr. Vieweg & Sohn, Braunschweig, 1989.
- 2 Y. André, Finitude des couples d'invariants modulaires singuliers sur une courbe algébrique plane non modulaire, *J. Reine Angew. Math.* 505 (1998), 203–208.
- 3 L. van den Dries, *Tame topology and O-minimal structures*, London Mathematical Society Lecture Note Series, No. 248, Cambridge University Press, Cambridge, 1998.
- 4 S.J. Edixhoven, Special points on the product of two modular curves, *Compositio Math.* 114 (1998), 315–328.
- 5 S.J. Edixhoven, B.J.J. Moonen and F. Oort, Open problems in algebraic geometry, *Bull. Sci. Math.* 125 (2001), 1–22.
- 6 S.J. Edixhoven, On the André–Oort conjecture for Hilbert modular surfaces, *Moduli of abelian varieties (Texel Island, 1999)*, Progr. Math., No. 195, Birkhäuser, Basel, 2001, pp. 133–155.
- 7 S.J. Edixhoven and A. Yafaev, Subvarieties of Shimura varieties, *Ann. of Math.* 157 (2003), 621–645.
- 8 S.J. Edixhoven, Special points on products of modular curves, *Duke Math. J.* 126 (2005), 325–348.
- 9 C.F. Gauss, Disquisitiones generales circa seriem infinitam $1 + \frac{\alpha\beta}{1\gamma}x + \dots$, *Comm. Soc. Regia Sci. Göttingen Rec.* 2 (1812).
- 10 A.J. de Jong and R. Noot, Jacobians with complex multiplication, *Arithmetic algebraic geometry (Texel, 1989)*, Progr. Math., No. 89, Birkhäuser, Boston, 1991, pp. 177–192.
- 11 B. Klingler, E. Ullmo and A. Yafaev, arxiv.org/pdf/1307.3965.pdf.
- 12 B. Klingler and A. Yafaev, The André–Oort conjecture, *Ann. of Math.* 180 (2014), 867–925.
- 13 B.J.J. Moonen, Linearity properties of Shimura varieties. II, *Compositio Math.* 114 (1998), 3–35.
- 14 F. Oort, Canonical liftings and dense sets of CM-points, *Arithmetic geometry (Cortona, 1994)*, Sympos. Math., No. XXXVII, Cambridge Univ. Press, Cambridge, 1997, pp. 228–234.
- 15 J. Pila and A.J. Wilkie, The rational points of a definable set, *Duke Math. J.* 133 (2006), 591–616.
- 16 J. Pila, O-minimality and the André–Oort conjecture for $\mathbb{C}^n$, *Ann. of Math.* 173 (2011), 1779–1840.
- 17 J. Pila and J. Tsimerman, Ax–Lindemann for A_g , *Ann. of Math.* 179 (2014), 659–681.
- 18 R. Pink, <http://www.math.ethz.ch/~pink/ftp/AOMMML.pdf>.
- 19 E. Ullmo and A. Yafaev, Galois orbits and equidistribution of special subvarieties: towards the André–Oort conjecture, *Ann. of Math.* 180 (2014), 823–865.
- 20 A. Yafaev, *Sous-variétés des variétés de Shimura*, PhD thesis, Université de Rennes, 2000.
- 21 A. Yafaev, A conjecture of Yves André's, *Duke Math. J.* 132 (2006), 393–407.
- 22 Z. Gao, arxiv.org/abs/1310.1302.

Vivi Rottschäfer

Mathematisch Instituut

Universiteit Leiden

vivi@math.leidenuniv.nl

Onderzoek Vidi-project

Singulariteiten

Van 1 januari 2007 tot 1 september 2014 werkt Vivi Rottschäfer aan het Vidi-project 'Formation of singularities in natural systems'. In dit onderzoek naar singulariteiten ligt de focus op onderwerpen met concrete toepassingen. In dit artikel blikt zij terug op het project.

Het onderzoek van mijn Vidi-project gaat over het ontstaan van zogenaamde singulariteiten. Singulariteiten zijn structuren die continu blijven groeien in de tijd. Dit soort structuren worden bijvoorbeeld geobserveerd in optische apparaten, plasmafysica en in chemotaxis in bacteriekolonies. Uiteindelijk zal zo'n singulariteit niet plaatsvinden, maar het is wel mogelijk dat een laser hierdoor beschadigt. Daarbij geeft het voorkomen van dit soort structuren aan dat het gebruikte model niet meer correct is en dat er mogelijk een andere fase van het proces begint.

Blowup-oplossingen

De modellen die de dynamica van de fysische, biologische of chemische processen beschrijven zijn stelsels van partiële differentiaalvergelijkingen. Voor veel van dit soort modellen bestaan er begrensde oplossingen met een specifieke structuur zoals een puls, golffront of lopende golf (zie Figuur 1).

Wanneer dergelijke oplossingen inderdaad bestaan is de stabiliteit ervan interes-

sant, dit is dus ook een veel bestudeerde vraag. Een oplossing die stabiel is, wordt namelijk ook geobserveerd, terwijl een instabiele oplossing meer een theoretisch geval is dat in het echt niet zal worden waargenomen. Een oplossing is instabiel als een kleine verstoring ervan niet uitdempt. Een volgende vraag is in dat geval dus wat er wél gebeurt met zo'n kleine verstoring. De mogelijkheid bestaat dat deze verstoringen groeien en blijven groeien waarna de oplossing, of de afgeleide ervan, in de limiet naar oneindig gaat voor een zekere eindige waarde van de tijd, zie Figuur 2 voor voorbeelden. Figuur 2(links) is een simulatie van de zogenaamde Ginzburg-Landau-vergelijking in dimensie $d = 3$, [1] en Figuur 2(rechts) een simulatie van een reactie-diffusie-model zoals bestudeerd in [2].

Deze oplossingen worden oneindig in eindige tijd, ze blazen op, en worden blowup-oplossingen genoemd. Wij bestuderen de existentie van deze blowup-oplossingen. De algemene aanpak die we daarvoor gebruiken is de methode van 'dynamische herschaling'

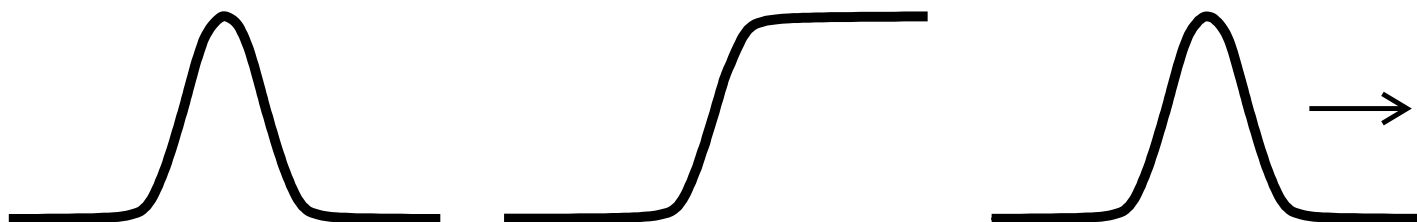
waarbij zowel de oplossing als de plaats- en de tijdvariabelen herschaald worden, waarna de resulterende vergelijking geen singuliere oplossingen meer heeft. Voor de herschaalde vergelijking zijn we geïnteresseerd in begrensde oplossingen, aangezien deze dus corresponderen met blowup oplossingen van het originele model. Ik zal deze methode illustreren aan de hand van een voorbeeld: door deze toe te passen op de *niet-lineaire Schrödingervergelijking*. Voor andere modellen is de globale aanpak soortgelijk.

Niet-lineaire Schrödingervergelijking

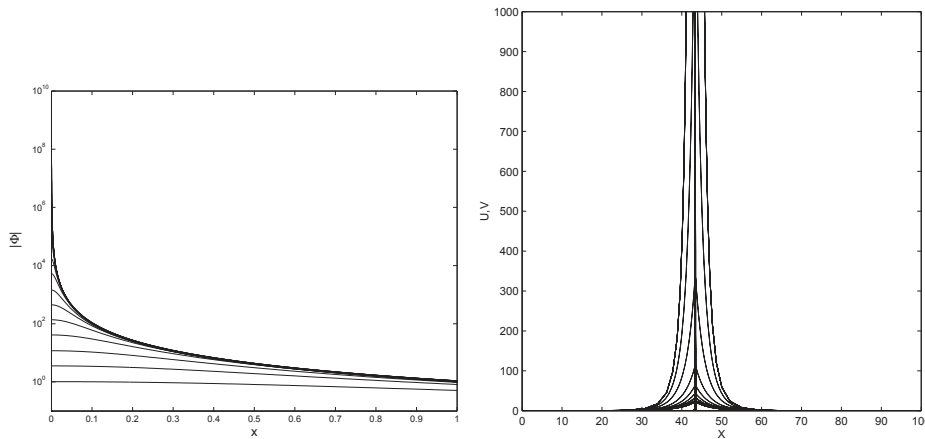
In het vervolg zal de focus liggen op oplossingen van de niet-lineaire Schrödingervergelijking (NLS)

$$i \frac{\partial \Phi}{\partial t} + \nabla^2 \Phi + |\Phi|^2 \Phi = 0,$$

die voldoen aan $|\Phi| \rightarrow 0$ voor $|x| \rightarrow \infty$. Wij bestuderen deze vergelijking in algemene dimensies d , ook niet-gehele dimensies. Fysisch gezien is dat natuurlijk vreemd maar in numerieke simulaties en voor de analyse is het erg handig, zoals zo meteen zal blijken. Het is bekend dat voor de NLS alle



Figuur 1 Een puls, golffront en een lopende golf.



Figuur 2 Een simulatie van de Ginzburg–Landau-vergelijking in dimensie $d=3$ [1] (links), en een simulatie van een reactie–diffusie model zoals bestudeerd in [2] (rechts).

oplossingen begrensd zijn voor $d < 2$. Voor $d \geq 2$ daarentegen bestaan er beginvoorwaarden waarvoor de norm van de oplossing opblaast in $x = 0$:

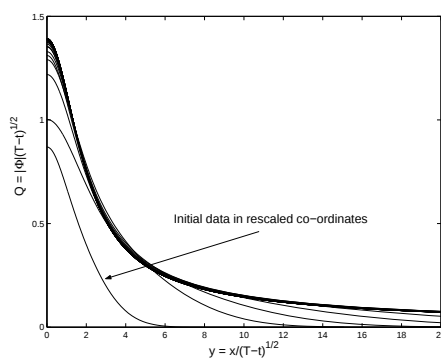
$$|\Phi(0, t)| \rightarrow \infty \quad \text{voor } t \rightarrow T.$$

Een numerieke simulatie van deze vergelijking geeft voor $d = 3$ resultaten die sterk lijken op Figuur 2(links), aangezien de NLS verkregen kan worden door in de Ginzburg–Landau-vergelijking termen nul te stellen.

Om blowup-oplossingen van de NLS te bestuderen introduceren we de volgende herschaling voor Φ :

$$\Phi(x, t) = \frac{1}{L(t)} u(\xi, \tau),$$

waarbij $L(t)$ gerelateerd is aan de norm van



Figuur 3 Numerieke simulatie van de tijdsafhankelijke uitbreiding van de Q -vergelijking (1) die correspondeert met de simulatie in Figuur 2(links).

de oplossing die opblaast en u een nieuwe *begrensde* oplossing is. We kiezen $L(t)$ zodanig dat $L(t) \rightarrow 0$ voor $t \uparrow T$ waarbij T de blowup-tijd is, dit garandeert dat Φ naar ∞ gaat voor $t \uparrow T$. Voor de specifieke formulering van de herschaling wordt gebruik gemaakt van invarianties in het model en van het feit dat de blowup-oplossingen, in numerieke simulaties, zogenaamd *self-similar* gedrag vertonen. Hierbij hangen de oplossingen af van een (nieuwe) variabele die een functie is van zowel x als t . In de herschaling is ξ de nieuwe plaats-variabele en τ de nieuwe tijd-variabele waarvoor geldt dat $\tau \rightarrow \infty$ voor $t \uparrow T$.

Voor de NLS gaat de aandacht allereerst uit naar radieel symmetrische oplossingen waarvoor de dynamische herschaling als volgt wordt gekozen:

$$\Phi(x, t) = \frac{1}{L(t)} u(\xi, \tau) \quad \text{met } L(t) = \sqrt{2a(T-t)}$$

en

$$\xi = \frac{|x|}{L(t)}, \quad \tau = \frac{\log(T-t)}{2a}.$$

Hierbij is $|x|$ de radiële coördinaat en er geldt inderdaad dat $L(t) \rightarrow 0$ voor $t \uparrow T$. Na substitutie van deze herschaling reduceert de NLS naar een vergelijking voor u . Uit numerieke simulaties blijkt dat de oplossing van de vergelijking voor u stationair, een vast profiel is, op een lineair groeiende fase in τ na. Dit suggereert dat we geïnteresseerd zijn in oplossin-

gen u van de vorm $u = e^{i\tau} Q(\xi)$. Uiteindelijk geeft deze aanname de volgende vergelijking voor Q :

$$Q_{\xi\xi} + \frac{(d-1)}{\xi} Q_{\xi} - Q + ia(\xi Q)_{\xi} + |Q|^2 Q = 0. \quad (1)$$

Door te eisen dat

$$Q_{\xi}(0) = 0, \quad \text{Im}Q(0) = 0,$$

worden radieel symmetrische oplossingen gevonden. Numerieke simulaties suggereren bovendien dat a constant is en dat nemen we dus aan. Merk op dat de dimensie d in de vergelijking verschenen is als parameter zodat we deze continu kunnen variëren. Dit geeft dus de mogelijkheid om voor d ook een niet-gehele waarde te kiezen.

Begrensde oplossingen van (1) met de gegeven beginvoorwaarden die voldoen aan $|Q(\xi)| \rightarrow 0$ voor $\xi \rightarrow \infty$ corresponderen door de herschaling met oplossingen van de NLS die in eindige tijd opblazen. In Figuur 3 is de numerieke simulatie gegeven van de (tijdsafhankelijke) uitbreiding van vergelijking (1) die correspondeert met de simulatie in Figuur 2(links). Hierin gaat de oplossing $|Q|$ als functie van ξ inderdaad naar een vast profiel.

Voor het bestuderen van oplossingen van de Q -vergelijking (1) gebruiken we een combinatie van numerieke simulaties, asymptotische methodes en meetkundige technieken. Elk van deze methodes geeft een eigen bijdrage, waardoor de combinatie ervan heel sterk is en een compleet beeld geeft van het bestaan van oplossingen die in eindige tijd on-eindig worden.

Tot slot

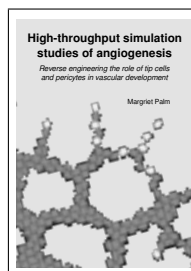
Mijn Vidi-project is per 1 september 2014 beëindigd, maar het onderzoek aan singulariteiten natuurlijk niet. Ik zal daar betrokken blijven, maar zeker ook ander onderzoek doen naar ‘nette’ begrensde oplossingen. Hierbij zullen toepassingen nog wel steeds een, mogelijk veel grotere, rol spelen.

Referenties

- 1 C.J. Budd, V. Rottschäfer en J.F. Williams, Multi-bump, blowup, self-similar solutions of the complex Ginzburg–Landau equation, *SIAM J. Appl. Dyn. Sys.* 4 (2005), 649–678.
- 2 A. Doelman en T.J. Kaper, Semi-strong pulse interactions in a class of coupled reaction–diffusion equations, *SIAM J. Appl. Dyn. Syst.* 2 (2003), 53–96.

In de verdediging

| In defence



High-throughput simulation studies of angiogenesis – Reverse engineering the role of tip cells and pericytes in vascular development

Margriet Palm

Op 30 september 2014 promoveerde Margriet Palm bij prof.dr. Roeland Merks aan de Universiteit Leiden op het proefschrift *High-throughput simulation studies of angiogenesis – Reverse engineering the role of tip cells and pericytes in vascular development*. Haar promotiewerk heeft Palm bij de *life sciences*-groep van het Centrum Wiskunde & Informatica (CWI) in Amsterdam gedaan. Palms werk is echt toegepast: ze gebruikt een grote variatie aan wiskundige methodes en concepten om nieuwe, biologische, kennis te genereren.

Van voorgekauwde projecten naar echt onderzoek

Haar interesse in onderzoek begon in het laatste jaar van haar bachelor biomedische technologie in Eindhoven. Studenten werden gekoppeld aan een vakgroep waar ze kleine stukjes ‘echt’ onderzoek mochten uitvoeren, in plaats van de ‘voorgekauwde projecten’ uit de eerste twee studiejaar. Palm werkte in haar derde jaar bijvoorbeeld aan de allereerste versie van *PathVisio*, software voor het analyseren van biologische *pathways*. Het meewerken aan deze projecten motiveerde haar enorm, dus ze vervolgde de opleiding met een master biomedische technologie waarbinnen ze zich richtte op het modelleren van biologische processen en op bioinformatica. Tijdens haar stages en afstudeerproject werd het Palm duidelijk dat ze echt een onderzoeker is: ze vindt het heerlijk om zich te verdiepen in één probleem en dat helemaal uit te zoeken.

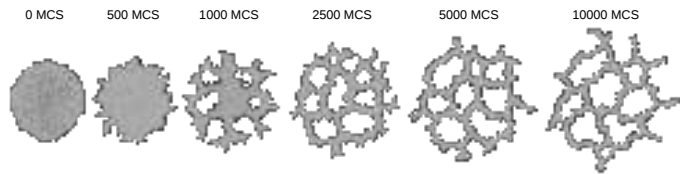
Op zoek naar een promotieplek kwam ze terecht bij een enthousiaste onderzoeker op het CWI: Roeland Merks. Zowel de methode, cel-gebaseerd modelleren, als het onderzoeksgebied, ontwikkelingsbiologie, waren compleet nieuw voor Palm, maar beide spraken haar meteen aan. Tijdens het onderzoek is haar passie voor biologie, en met name ontwikkelingsbiologie, enorm gegroeid. Palm: “Het is fantastisch om te zien hoe een verzameling, relatief eenvoudige cellen, een compleet organisme kan vormen, zonder dat er een bouwplan is.”

Angiogenese en het cel-gebaseerd modelleren ervan

Angiogenese is het proces waarbij nieuwe bloedvaten ontstaan uit bestaande bloedvaten, hetzij door splitsing van een bloedvat, hetzij door vorming van nieuwe zijtakken, zogenaamde spruiten. In het tweede geval, de zogenaamde ‘spruitvormende angiogenese’, vertakken de ontstane spruiten en vormen ze verbindingen met andere spruiten, waardoor een netwerk van bloedvaten ontstaat. Bij dit proces zijn zowel de endotheelcellen uit de binnenste laag van het bloedvat als de daaromheen liggende perivasculaire cellen betrokken. Het collectieve gedrag van deze cellen leidt tot de vorming van spruiten en de daaropvolgende ontwikkeling van netwerken. De bij de angiogenese betrokken individuele cellen verschillen in gedrag en vorm, wat invloed heeft op het collectieve gedrag. Daarnaast kunnen de cellen elkaars gedrag

Pas gepromoveerden brengen hun werk onder de aandacht.
Heeft u tips voor deze rubriek of bent u zelf pas gepromoveerd?
Laat het weten aan onze redacteur.

Redacteur: Geertje Hek
la Voie-du-Coin 7
1218 Grand-Saconnex
Zwitserland
verdediging@nieuwarchief.nl



Figuur 1 Een voorbeeld van de groei van vasculaire netwerken in een van Palms modelvarianten. MCS staat voor Monte Carlo-stap. Dit is de standaard tijdseenheid die het cellular Potts-model gebruikt. Tijdens 1 MCS worden er net zo veel pogingen tot het kopiëren van een pixel gedaan als er pixels zijn (dus bij een 100×100 grid is 1 MCS gelijk aan 10.000 kopieerpogingen).

beïnvloeden via diffunderende en membraangebonden signaalmoleculen.

Om het samenspel tussen cellen tijdens angiogenese te onderzoeken gebruikt Palm cel-gebaseerde computermodellen waarin het gedrag en de vorm van de cellen voorgeschreven worden en simulaties laten zien hoe de cellen zich organiseren tot een weefsel, zoals spruiten of netwerken van bloedvaten.

De modellen zijn gebaseerd op het *cellular Potts model* (CPM), een soort cellulaire automaat. Als cellulaire automaten in de biologie worden geïmplementeerd in een computermodel, stelt één pixel meestal één cel voor. In het CPM bestaat een individuele cel echter uit meerdere pixels, zodat met het CPM ook de vorm van cellen gemodelleerd kan worden. Dit is belangrijk omdat de vorm van de cel bepaalt hoe makkelijk hij zich kan bewegen tussen andere cellen, en hoe hij via het celmembraan kan communiceren met andere cellen. Cellen bewegen door stukjes celmembraan, zogenaamde 'pseudopodia' uit te steken. Om deze dynamica te simuleren gebruikt het CPM een Monte Carlo-algoritme dat keer op keer een pixel kopieert naar één van zijn burens, mits dit leidt tot een afname van de energiefunctie. Deze energiefunctie kwantificeert het gedrag van de cel, zoals bijvoorbeeld volumebehoud en cel-celadhesie. Op deze manier bewegen de cellen en vormen ze een patroon. Om de intrinsieke mobiliteit van cellen te simuleren kunnen ook kopieerpogingen die leiden tot een energietoename geaccepteerd worden, met een kans die afhangt van de grootte van de toename. Zie Figuur 1 voor een voorbeeld.

In de meeste modellen implementeert Palm daarnaast ook *chemotaxis*: (cel)beweging die gebaseerd is op een bepaalde chemische stimulans. Cellen verplaatsen zich als gevolg van een concentratiegradiënt in hun omgeving. In dit geval gaat het om positieve chemotaxis, een beweging in de richting van een hogere concentratie. De moleculen waardoor de cellen worden aangetrokken diffunderen. Die diffusie wordt beschreven door partiële differentiaalvergelijkingen (PDV) die worden toegevoegd aan het CPM: de PDV wordt numeriek opgelost op een vast tijdsinterval en naar aanleiding daarvan worden de lokale concentraties waarmee het CPM werkt voor de volgende tijdstap aangepast.

De output van de modellen waarmee Palm werkt is een tweedimensionaal grid met pixelwaardes, dat gemakkelijk is om te zetten in een figuur. Hierdoor zijn de simulatieresultaten eenvoudig visueel te beoordelen. Echter, kwantitatieve analyse is veel complexer. Hiervoor heeft ze dankbaar gebruik gemaakt van bekende wiskundige beeldanalysemethodes. In sommige gevallen moest ze nog verder zoeken naar methodes die konden helpen om vragen te beantwoorden. Zo heeft ze grafentheorie en mathematische morfologiemethodes gecombineerd om cellen op bepaalde posities te detecteren.

High-throughput-simulaties leidden tot het belangrijkste resultaat

Door verschillend gedrag voor te schrijven voor een subset van de cel-

len kunnen deze modellen gebruikt worden om het samenspel tussen verschillende celtypes te bestuderen. Een model bevat echter veel parameters, waarvoor de correcte waardes niet altijd bekend zijn. Daarom is het noodzakelijk om simulaties uit te voeren met uiteenlopende parameterwaardes, wat veel rekenkracht en -tijd vergt. Voor dit soort herhaalde simulaties, zogenaamde *parametersweeps* kan een *high-throughput-simulatieprotocol* opgesteld worden dat het opzetten van simulatiescripts, het uitvoeren van de simulaties op een computercluster, en het analyseren van de resultaten automatiseert. Gebruikmakend van zo'n protocol kon Palm uiteenlopende hypothesen met betrekking tot de rol van celgedrag in angiogenese testen en zo nieuwe hypothesen ontwikkelen die daarna in een laboratorium getest konden worden.

Palms belangrijkste resultaat "In silico leidt de verminderde respons van tipcellen op een door endotheelcellen afgegeven chemoattractant, mogelijk Apeline, tot migratie van tipcellen naar de sprout tip" is een mooi voorbeeld van de interactie tussen model en experimenten. Tip- en stalkcellen zijn twee subtypes van endotheelcellen: tipcellen leiden de spruiten en de stalkcellen volgen de tipcellen en delen zich vervolgens waardoor de spruit langer wordt. Om nieuwe inzichten te verkrijgen over de bijdrage van tipcellen aan de vorming van bloedvaten heeft Palm een bestaand angiogenese-model uitgebreid met tip- en stalkceldifferentiatie, zonder daarbij gebruik te maken van a priori aannames met betrekking tot het gedrag van beide celtypes. Door systematisch het gedrag van tipcellen te variëren heeft ze gezocht naar eigenschappen waarvoor het gedrag van de gemodelleerde tipcellen overeenkomt met dat van echte tipcellen. In Figuur 2 wordt de opzet van Palms high-throughput simulatie geïllustreerd voor dit model met tipcellen en stalkcellen. Zoals gezegd is bekend dat tipcellen zich vooraan een groeiende spruit bevinden en stalkcellen daarachter zitten. Ook is bekend dat de hoeveelheid tipcellen invloed heeft op de morfologie van het netwerk. Echter, precieze beschrijvingen van het verschil in het gedrag tussen tipcellen en stalkcellen ontbreken. Met behulp van simulaties zoekt Palm naar celeigenschappen waarin tipcellen verschillen van stalkcellen. In de simulaties worden voor iedere onbekende modelparameter p de waarde van p voor tipcellen en het percentage tipcellen (de *tip cell fraction*) gevarieerd, zie Figuur 2A. Vervolgens wordt per rij bekeken of een verschil in tipcelfractie resulteert in verschillende morfologieën (Figuur 2B). Dit gebeurt zowel op het oog als door het berekenen van een aantal netwerkeigenschappen, zoals het aantal lacunea (mazen in het netwerk) en het aantal knopen. Tot slot wordt voor iedere gebruikte combinatie van parameterwaarde en tipcelfractie automatisch bekeken of de tipcellen aan de uiteinden van de spruiten zitten (Figuur 2C). De modelberekeningen suggereerden dat er een chemoattractant is die door beide typen endotheelcellen wordt afgegeven, maar waarop tipcellen minder reageren dan stalkcellen. Eerder gepubliceerde experimentele data leidden tot Apeline als kandidaat-chemoattractant, en experimentatoren bevestigden vervolgens dat Apeline inderdaad noodzakelijk is voor het vormen van spruiten.

Een heldere kijk op simulatiesoftware

Een minder technische, maar toch wel inhoudelijke stelling bij Palms proefschrift gaat over software: "Simulatiesoftware zou ontworpen moeten worden als Lego, waarbij de onderzoeker een model bouwt door de juiste blokken te combineren." Hiermee wil ze zeggen dat simulatiesoftware zó gemaakt moet worden dat een conceptueel model gemakkelijk omgezet kan worden in een computermodel. Dit is noodzakelijk om het voor biologen mogelijk te maken om zelf simulaties uit te voeren.

Daarnaast is dit volgens Palm de enige manier om computationeel biologen, die de kennis hebben om zelf software te schrijven, over te halen om bestaande code te gebruiken. Want waarom zou je met andermans code gaan zitten stoeien als je het net zo snel zelf opnieuw maakt? Echter, het is zonde van de tijd en energie om elke keer het wiel opnieuw uit te vinden. Bovendien zou computationeel onderzoek veel gemakkelijker te reproduceren zijn als de gemeenschap één standaard, goed softwarepakket zou gebruiken.

Een van de leukste aspecten aan haar aio-schap sluit hierbij aan. Ze vond het erg leuk en leerzaam om haar kennis en vaardigheden te kunnen overdragen in twee workshops over de door haarzelf gebruikte simulatiesoftware. Daarnaast heeft ze een protocol en software gepubliceerd voor het opzetten, uitvoeren en analyseren van grote simulatie-experimenten met diezelfde simulatiesoftware en haar code wordt nu ook gebruikt door voormalig collega's.

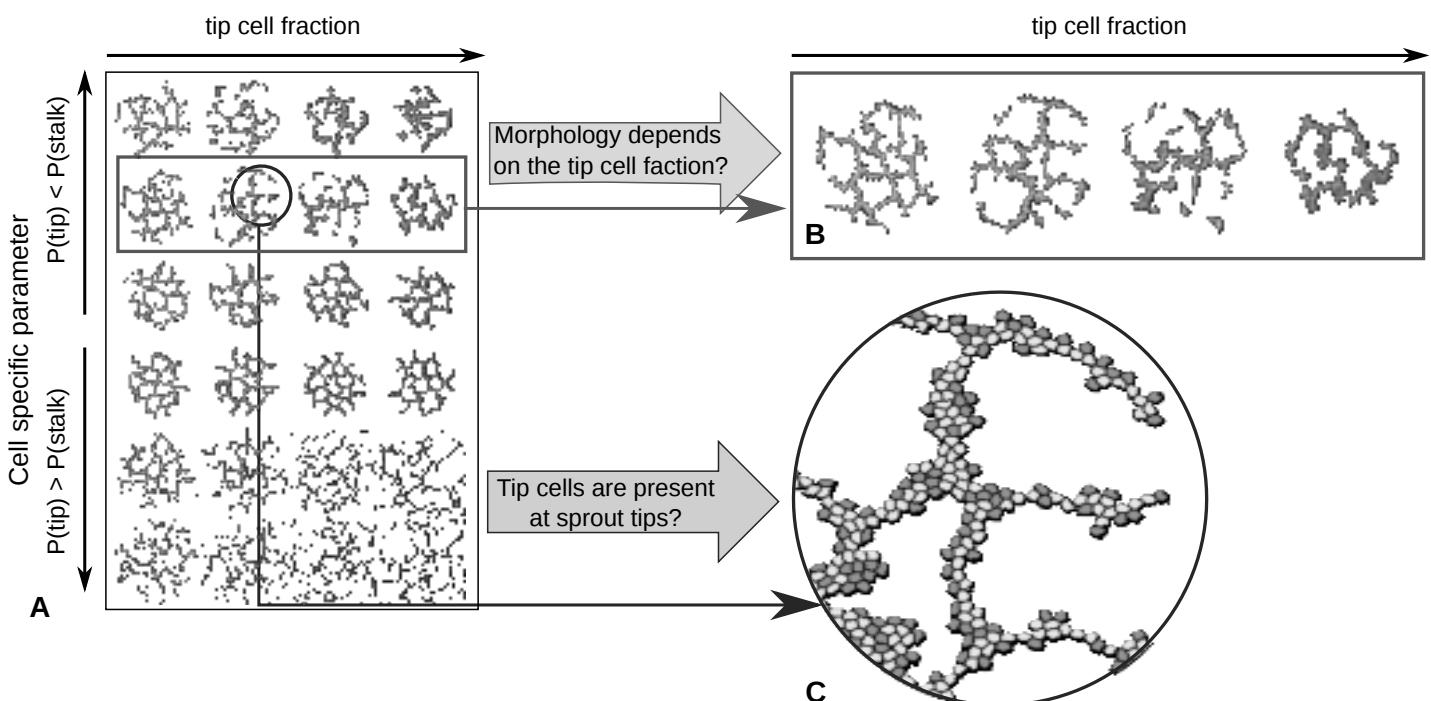
Niet zo goed in het voorspellen van haar toekomst

Met het overdragen van kennis op papier heeft ze meer moeite. Zelf zegt Palm beter te zijn in het oplossen van problemen dan in het bedenken en beschrijven van problemen. Hierdoor heeft ze moeite met het schrijven van introducties en discussies. Haar teksten voldeden ook niet altijd aan de verwachtingen van haar promotor. Zijn kritiek was achteraf gezien echter zeer leerzaam. Door de moeite met het schrijven, twijfelde Palm de laatste maanden weleens aan eigen kunnen, maar gelukkig is het uiteindelijk allemaal goedgekomen. Niet alleen is

ze gepromoveerd, maar ook werkt ze inmiddels als postdoc bij INRIA in Parijs. Daar werkt ze met ook weer aan cel-gebaseerde modellen, maar gebruikt ze een andere techniek. Ze hoopt haar kennis te verbreden opdat ze vervolgens diverse methodes toe kan passen om biologische groei te onderzoeken. Het liefst in Nederland en ook het liefst in de academische wereld, maar een leuke baan in het bedrijfsleven zou ook mooi zijn.

Palm waarschuwt echter dat het in haar ogen onmogelijk is om te zeggen wat je in de toekomst gaat doen. Een jaar of zes geleden riep ze dat ze *nooit* in Amsterdam wilde wonen, en nu denkt ze vanuit Parijs met heimwee terug aan Amsterdam waar ze ondanks haar aanvankelijke tegenzin vier jaar lang met veel plezier heeft gewoond en genoten van het culturele aanbod. Wat ze ook erg leuk vond was het contact met collega's en mede-onderzoekers die van over de hele wereld kwamen. "Het is erg leuk te zien hoe mensen die ergens anders vandaan komen naar jou, jouw land en jouw taal kijken. Dit contact is misschien wel een van de dingen die ik erg zou missen als ik ooit de wetenschap zou verlaten."

Nog geen twee jaar geleden wist Palm dat ze best postdoc wilde worden in het buitenland, maar niet in een land waar ze geen Engels spreken en zeker niet in Frankrijk. En nu is ze daar zelf die collega met een frisse blik op de Franse taal en gewoonten. Ze geeft dus toe niet zo goed te zijn in het voorspellen van haar eigen toekomst. Ze sluit af: "Voor mij is het belangrijkste dat ik werk doe waar ik gelukkig bij ben op een plek waar ik me thuis voel."



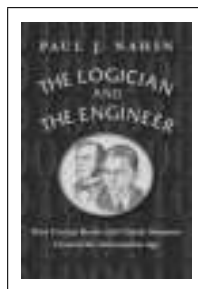
Figuur 2

Boekbesprekingen

| Book Reviews

Redactie: Hans Cuypers en Hans Sterk

Review Editors NAW - MF 7.092
Faculteit Wiskunde & Informatica
Technische Universiteit Eindhoven
Postbus 513
5600 MB Eindhoven
reviews@nieuwarchief.nl
www.win.tue.nl/wgreview



Paul J. Nahin

The Logician and the Engineer How George Boole and Claude Shannon Created the Information Age

Princeton University Press, 2012

248p., prijs \$24.95

ISBN 9780691151007

Paul Nahin, schrijver van wiskunde-bestsellers als *An Imaginary Tale*, *When Least is best*, *Dr. Euler's fabulous formula*, *Number Crunching* (alle uitgegeven bij Princeton University Press) beschrijft in dit boek zijn fascinatie voor twee zaken die zijn hoofdrolspelers, Boole en Shannon, gemeen hebben, namelijk Booleaanse algebra en kansrekening. Die overeenkomsten liggen evenwel een eeuw uit elkaar. Boole leefde van 1815 tot 1865 en Shannon van 1916 tot 2001. Een nadere uitleg is daarom op zijn plaats. In hoofdstuk 3 staan minibiografieën van Boole en Shannon beschreven. Nou ja, 'mini' (Nahins woord) is te bescheiden. Over Boole wordt een behoorlijke hoeveelheid aan persoonlijke en wiskundige zaken vermeld. Zijn ontwikkeling als wiskundige komt uitvoerig voor het voetlicht, ook contacten met vakgenoten worden behandeld. Natuurlijk komt de inhoud van zijn artikel 'An Investigation of the Laws of Thought, on Which Are Founded the Mathematical Theories of Logic and Probabilities' (1854) uitgebreid in het boek voor. In hoofdstuk 4 wordt de Booleaanse algebra behandeld en in hoofdstuk 6 werk van Boole en Shannon over waarschijnlijkheidsrekening, voorwaardelijke waarschijnlijkheid, de stelling van Bayes, en (onvertaald) 'relay reliability'. Wat Shannon betreft, zijn beroemde artikel uit 1948, 'A mathematical Theory of Communication', luidde het informatietijdperk in waarin we nu volop leven. Nahin vertelt er uitvoerig over en gaat tevens in op Shannons eerdere en latere werk. In hoofdstuk 7 komen dan kanaalcapaciteit, Shannons beroemde informatietheoriestelling, foutendetectie- en correctietheorie op soepele wijze, begrijpelijk voor een geschoold wiskundig publiek, aan de orde. Hierin vinden we een uitgewerkte toepassing van Booleaanse algebra op elektrische schakelingen. Hoofdstuk 8 behandelt 'sequential-state digital circuits', hoofdstuk 9 gaat in op Turing-machines en hoofdstuk 10 gaat in op huidige en mogelijk toekomstige toepassingen op het gebied van kwantuminformatica. Eerder, in hoofdstuk 5, was de lezer al vertrouwd gemaakt met 'Logical switching circuits' en de toepassing op zaken als 'Relay versus electronics, Switches and the logical connectives, the electromagnetic Relay and the logical NOT'. Al dan niet korte biografieën over Boole zijn redelijk voorhanden in artikelen en als boek (D. McHale, *George Boole, his life and his work*, Dublin 1985). Maar bij Shannon lijken informatie over persoonlijk en wiskundig leven fragmentarisch verspreid te zijn. Nahin vermeldt daartoe het nodige in de Notes and References van hoofdstuk 3. Een bron die hij niet noemt, doch het lezen meer dan waard is, kan men vinden in 'An interview with Claude Shannon' in *IEEE Communications Magazine*, May 1984, Vol. 22, pp. 124–126. Voorts leze men over Boole en Shannon in bijvoorbeeld Clifford Pickovers boek *Het Wiskundeboek*: p. 242, Booleaanse algebra; p. 394, Informatietheorie. Sprekende over *Notes and References*: ieder van de tien hoofdstukken heeft zulke. Ze zijn een ware schatkamer voor de lezer en vormen in feite een boek in Nahins boek! Ik kan het boek van Nahin van harte aanbevelen. Het leest heel prettig weg, is tegelijkertijd heel leerzaam en geeft een goed beeld van de ontwikkeling van toepassingen van algebraïsche en logische begin-

selen in de praktijk, vooral dan op elektronisch en elektrotechnisch gebied.

Tot besluit leg ik u een puzzel uit het boek voor, die door D.M. McCallum, B. Smith (en Shannon) opgelost wordt door het relevante ‘circuit diagram of a relay computer’ erbij te vervaardigen. Hoe zij algebraïsch daartoe gekomen zijn, staat evenwel niet in hun relevante artikelen vermeld. Ook Nahin weet dat niet. Hier komt de puzzel, om vertaalproblemen te omzeilen, in het originele Engels: “It is known that salesmen always tell the truth and that engineers always tell lies. B and E are salesmen. C states that D is an engineer. A declares that B affirms that C asserts that D says that E insists that F denies that G is a salesman. If A is an engineer, how many engineers are there?” Robert van der Waall



R. Mead, S.G. Gilmour, A. Mead
Statistical Principles for the Design of Experiments
Applications to Real Experiments

Cambridge Series in Statistical and Probabilistic Mathematics

Cambridge University Press, 2012

586 p., prijs £60.00

ISBN 9780521862141

For already decades it is realized that the design of effective experiments is crucial in the experimental and engineering sciences. Where formerly applied statisticians had to be consulted for adequate planning of efficient experiments and designs, nowadays software tools have become easily and even freely available (e.g., R) to help practitioners with this. However, when using these tools ‘automatically’, without understanding the underlying principles, there is the risk that inadequate solutions are generated and applied to situations where they are ineffective. Furthermore, there are situations where standard solutions don’t hold for real world experiments and have to be adapted and tailored to specific conditions or constraints. Therefore, there is a need for a treatment and discussion of the logical principles of statistical design of experiments that goes beyond a description of ‘best practices’ and standard software tools, yet still pays attention to the application for real experiments. The current book of Roger Mead, Steven Gilmour and Andrew Mead aims to serve this need. In fact, it can be considered as a new and thoroughly revised edition of the 1990 edition of Roger Mead’s book *Design of Experiments – Statistical Principles for Practical Applications*, which was very well received and considered to be one of the classics in the field. Strong points of this former edition are kept, such as the focus on the ideas of design rather than the analysis of the experiments, the clear, consistent and detailed way of explaining underlying principles, and the well-balanced and representative selection of the topics covered. However, this new edition is brought up-to-date with new chapters on experimental units (chapter 5), multilevel analysis (chapter 9), restricted randomization (chapter 11), fractional replicates (chapter 14), multiple experiments and new variation (chapter 19) as well as sequential aspects of randomization (chapter 20). The range of applications discussed for illustration is broadened from mainly agricultural experimentation in the first edition to applications from medicine, industry and engineering, also thanks to the co-authors that contributed to this edition.

The book is structured into four main parts, from which different audiences can be served, depending on their needs, expertise and mathematical level. The first part, the so-called overture covering chapters 1–4, provides a general introduction and the basic theory,

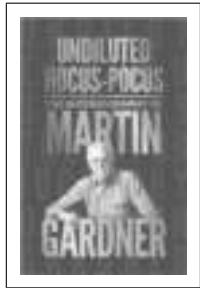
needed for the rest of the book. Basic ideas behind blocking and factorial experiments are discussed, whereas the necessary theory and mathematics for general linear models are presented. The second part, covering chapters 5–11, focuses on unit variation and control, exploring the fundamental concepts of experimental units, replication and (multiple) blocking (chapters 5–8) and discussing the ideas of (restricted) randomization (chapters 10, 11). In chapter 9 it is illustrated how multiple level data can be analysed through restricted maximum likelihood methods. The third part, covering chapters 12–18, focuses on experimental objectives, treatments and treatment structures, and discusses factorial structures, fractional replications and incomplete block designs (chapters 12–15). Furthermore, the response to quantitative factors for both single factor and multiple factor response functions is discussed, including principles from optimal design, experiments with mixtures, and non-linear response surfaces as well as split-unit designs (chapters 16–18). In the fourth and final part, the so-called coda, experiments to be conducted in multiple locations or at different places are discussed as are adequate strategies for the design of sequential experiments (chapters 18–19). A final chapter, chapter 20 (!), then draws together the concepts discussed in the earlier parts, providing guidance to design useful experiments, satisfying particular practical requirements.

Though in its first edition motivated by teaching postgraduate students specializing in statistics, this second edition is intended for a wider audience now that the range of applications is broadened. By an appropriate selection of topics, the book can be used for final-year undergraduate or elective graduate courses, as well as tertiary and short courses on the principles and ideas underlying the design of experiments. Mathematical details are not dominating, but are providing additional support for the statistical concepts discussed. However, some of the mathematical language used in the book requires a mathematical background beyond school level, though on first reading details might be skipped. Most chapters in the second and third part contain sets of exercises at the end to practice the concepts and ideas discussed. The style of writing is clear and consistent but different from books that have engineering practitioners as their intended audience, such as the well-known book by Douglas Montgomery on *Experimental Design*. Intentionally, as explained in section 4.9, only limited attention is paid to the role and use of computers and software for designing experiments and analysing the results. However, the argument of lack of availability of some programs for experimental design no longer holds, now that freely available and open-source software like R is within everybody’s reach. Discussing and illustrating their use more explicitly, without losing sight on the importance of conceptual understanding of the principles of experimental design, would have increased the practical applicability of the text. The list of references is dominated by the more classical ones, originating mainly from the former century, though some more recent ones, up to the year 2006, are included. However, a more detailed list, also paying attention to the very recent developments, would have been welcomed! The index contains an adequate list of relevant items for quick access, though its use needs some familiarization as topics are referenced by section or chapter, not by page number.

All in all one can conclude that Roger Mead, Steven Gilmour and Andrew Mead have succeeded in their aim to discuss and explain the statistical principles behind the design of effective experiments in an adequate and up-to-date way. It is a worthwhile contribution to the literature, especially for those who want to have a background in and an understanding of the underlying principles, from which they can

extend these ideas to non-standard situations and new directions. As such the book is wholeheartedly recommended!

Koo Rijpkema



Martin Gardner (foreword by Persi Diconis, afterword by James Randi)
Undiluted Hocus-Pocus
The autobiography of Martin Gardner
 Princeton University Press, 2013
 xxvii + 233 pp., prijs \$24.95
 ISBN 9780691159911

De titel van de recent verschenen autobiografie van Martin Gardner (1914–2010) verwijst naar een gedichtje van Piet Hein dat heel aardig de verwondering verwoordt die het wezen uitmaakt van een eigenzinnige denker, vermaard columnist, verdienstelijk goochelaar en fanatiek bestrijder van pseudowetenschap (wiens ideeën zijn vastgelegd in meer dan honderd boeken) en dat te mooi is hier niet even te citeren:

*We glibly talk of nature's laws
 but do things have a natural cause?
 Black earth turned into yellow crocus
 is undiluted hocus-pocus.*

Voor mij is Gardner de man die mij (nog in mijn studententijd, nu bijna veertig jaar geleden) kennis liet maken met de meest prachtige recreatieve wiskunde. Zo heb ook ik bijvoorbeeld heel wat van die wonderbaarlijke hexaflexagons zitten vouwen en later — zeer tot hun en mijn genoegen — ook mijn leerlingen laten vouwen. Maar een nog grotere prestatie dan zoveel mensen op zo een aangename, vlot geschreven wijze te enthousiasmeren voor ons prachtige vakgebied (zijn verzamelingen columns uit *Scientific American* onder de naam *Mathematical Games* zijn een must voor iedere wiskundige en niet-wiskundige, “Pick up anything he wrote and you will smile and learn something”), is de vastberadenheid en de nauwkeurigheid van het — in die tijd uiteraard via brieven — langdurig corresponderen met en ook het vaak samenbrengen van tientallen wiskundige en niet-wiskundige grootheden, zoals humbug-bestrijder James Randi, polyomino-expert Solomon Golomb, logicus Raymond Smullyan, Roger Penrose, fractal-bedenker Benoît Mandelbrot, speltheoreticus John H. Conway, kubus-uitvinder Ernő Rubik, filosoof Douglas R. Hofstadter, kunstenaars zoals Salvador Dalí, Scott Kim en István Orosz en nog vele anderen. Dat alles heeft Gardner mijns inziens gemaakt tot de grootste popularisator van de (recreatieve) wiskunde en het logisch denken ooit.

Hoeveel waardering Gardner gelukkig al tijdens zijn leven heeft gekregen mag blijken uit een ruwweg tweejaarlijkse bijeenkomst die ter ere van hem — in Atlanta — sinds 1993 wordt georganiseerd en *Gathering for Gardner* wordt genoemd. De laatste daarvan heette G4GX1 en uit de gehele wereld kwamen zoals altijd honderden gelijkgestemde geesten (puzzelaars, wiskundigen en goochelaars) vier dagen samen om te luisteren naar een kleine honderd lezingen en om ideeën uit te wisselen. Een overweldigende belevenis die ik helaas slechts één keer (G4G7 in 2006) heb mogen meemaken, een soort Nationale Wiskunde Dagen, maar dan groter en grootser.

Ik had in dit boek graag willen lezen over deze Gatherings, maar daar wordt (behalve door het plaatsen van een enkele foto) niet van gerept. Eigenlijk wel begrijpelijk, want Gardner had daar zelf weinig mee te maken (hij is zelfs geloof ik nooit aanwezig geweest op een

G4G, ook al vanwege zijn leeftijd) en zijn bescheidenheid moet hebben gedictéerd er niet over te schrijven, hoewel het bij elkaar komen van zoveel van zijn vrienden toch een deel van zijn leven moet hebben uitgemaakt. Wat — behalve natuurlijk zijn persoonlijke relaties, banen, woonplaatsen en omstandigheden — wel uitgebreid wordt beschreven, is dat Gardner vanaf zijn vroege jeugd (hoewel hij school haatte, op wiskunde en natuurkunde na) steeds diepgravender interesses ontwikkelt in diverse zaken (goochelen, kaarttrucs, puzzels, wiskunde, Alice in Wonderland, Sherlock Holmes, woordspelletjes, *impossible objects*) en nog diversere (later vaak beroemde) personen, dat hij in de loop van de jaren zichzelf al columns schrijvend wat wiskunde eigen maakt, dat hij niet alleen veel werk maakt van het bestrijden van figuren als lepeltjesbuiger Uri Geller maar ook van allerlei zogenaamde kunstkenaars, en — misschien vreemd (zeker voor mij) voor zo een nuchter denker — dat hij zijn leven lang op de hem eigen wijze bezig is met religie en wat hij nu precies wel of niet geloofde of aanhing. Een boeiend boek, maar niet zozeer omdat je de persoon Martin Gardner nu zoveel beter leert kennen (de schrijfstijl is vrij zakelijk), maar vooral vanwege het beschreven leven dat vele anderen heeft geïnspireerd en ongetwijfeld zal blijven inspireren. Er mag wat mij betreft nog wel een gedegen biografie van Gardner uitkomen, want nog lang niet alles is gezegd over deze markante persoon. Tot dan kunt u genieten van een prachtig informatief filmpje over Martin Gardner en wat hem boeide, dat te zien is op de homepage van de G4G Foundation: www.gathering4gardner.org.

Joost van der Vaart



Oleg N. Kirillov
Nonconservative Stability Problems of Modern Physics
Studies in Mathematical Physics 14
 Walter de Gruyter, 2013
 xvii + 429 pp., prijs €129,95
 ISBN 9783110270341

Tijdens mijn eerste twee jaren studie wis- en natuurkunde was lineaire algebra met grote afstand het saaiste onderwerp: formele structuren en rekenregels zonder enig avontuur. Nee, dan analyse, de topologie van $\mathbb{R}$ of Maxwells theorie van het elektromagnetisme. Pas later ontdekte ik hoe interessant en spannend lineaire algebra kan zijn, het boek van Kirillov is hiervan opnieuw een illustratie. Ik laat hier terzijde het belang van numeriek onderzoek van zeer grote en vaak ijle matrices, problemen die speciale wiskundige behandeling behoeven. Bij stabiliteitsproblemen zoals behandeld in dit boek, gaat het meestal om eigenwaardenonderzoek waarbij meervoudigheid van eigenwaarden, zuiver imaginaire eigenwaarden, eigenwaarden nul met bijbehorende storingen en bifurcaties allerlei interessant gedrag oplevert. Het begrip Krein-signatuur voor meervoudige, zuiver imaginaire eigenwaarden en bijbehorende eigenvectoren speelt hierbij een belangrijke rol.

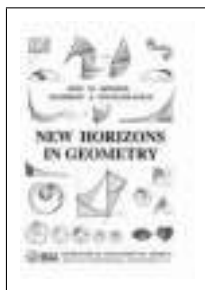
Het onderzoek aan deze problemen begon in de tweede helft van de negentiende eeuw met werk van de fysici Maxwell, W. Thomson (Lord Kelvin) en anderen. Interessant is dat ook twee Nederlanders, L.E.J. Brouwer en O. Bottema, op dit gebied opvallende bijdragen hebben geleverd. Brouwer behandelde in 1918 (*Nieuw Archief voor Wiskunde* 5/2, pp. 407–419) het probleem van een massapunt op een roterende vaas. In het algemeen kan een evenwichtspunt lokaal een kuiltje zijn, een heuveltop of een zadeloppervlak. Brouwer vond dat bij voldoende rotatiesnelheid ook het evenwicht op een zadelvlak stabiel

kan zijn. Het probleem van de roterende vaas vormt in dit boek het karakteristieke mechanische voorbeeld waarvan we de eigenschappen in ingewikkelder problemen steeds weer tegenkomen. Het probleem van Brouwer dat twee vrijheidsgraden (vier dimensies) telt, verandert sterk als we wrijving toevoegen. Het gaf grote verwarring toen bleek dat een toestand die zonder wrijving stabiel was, door wrijving *instabiel* kon worden. In de werktuigbouwkunde noemt men dit Zieglers paradox. In 1955–1956 loste Bottema dit probleem voor twee vrijheidsgraden zeer algemeen op; zijn analytische en meetkundige behandeling toont aan dat hier een speciale bifurcatie het gedrag bepaalt; deze bifurcatie duiden we nu meestal aan met ‘Whitney umbrella’. Hoewel Bottema goede contacten had met ingenieurs, raakte dit deel van zijn werk niet erg bekend; zie ook ‘Wie opende Whitney’s paraplu?’, *Nieuw Archief voor Wiskunde* 5/10, pp. 250–254, 2009.

Na het eerste hoofdstuk, dat uitvoerig de problematiek illustreert, gaan de volgende twee hoofdstukken vooral over stabiliteitstheorie en de benodigde lineaire algebra. Er is een zekere, maar niet hinderlijke nadruk op de Russische literatuur met intrigerende zijsprongen. Zo hielden eminente wetenschappers als M.A. Lavrent’ev en S.L. Sobolev zich bezig met de stabiliteit van bewegende bollen en kegels die vloeistoffen bevatten. Dit vond plaats tijdens de Tweede Wereldoorlog toen het Sovjetleger granaten wilde afschieten die chemicaliën bevatten (gifgassen en andere onheil verspreidende stoffen). De hoofdstukken 4–6 betreffen reversibele en trillende systemen (onder andere robot control), potentiaalproblemen met toegevoegde krachten en de reeds bovengenoemde instabiliteit veroorzaakt door dissipatie.

In de hoofdstukken 7–12 worden oneindig-dimensionale problemen aangesneden waarbij niet-zelfgeadjungeerde operatoren en vele deels opgeloste en onopgeloste kwesties aan de orde komen. We komen continue roterende systemen tegen, flutterverschijnselen, opnieuw Kreins signatuur, niet-Hermitische storingen van Hermitische matrices, magnetorotationele instabiliteit en vele andere onderwerpen. Het boek bevat 626 referenties.

Niet vaak verschijnt een monografie die de modernste wiskundige methoden combineert met de studie van belangrijke fysische verschijnselen. Het is een prachtig voorbeeld uit de excellente Moskouse mathematische fysicaschool die nu helaas min of meer verdwenen is (de auteur is tegenwoordig werkzaam in Dresden). *Ferdinand Verhulst*



Tom M. Apostol, Mamikon A. Mnatsakanian
New Horizons in Geometry

The Dolciani Mathematical Expositions Number 47.

Mathematical Association of America,
Washington, 2013

520 pp., prijs \$75.00

ISBN 9780883853542 (gedrukte editie)

ISBN 9781614442103 (elektronische editie)

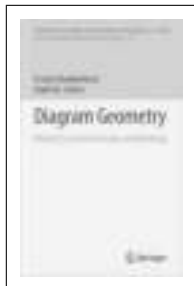
Professor Don Chakerian (University of California) citeert in het voorwoord: “Mathematics is not alien and remote but just a very human exploration of the patterns of the world, one which thrives on play and surprise and beauty”, een zin afkomstig uit *Indra’s Pearls: The vision of Felix Klein* van D. Mumford, C. Series, D. Wright (Cambridge University Press, 2002).

Dit citaat lijkt wel geschreven te zijn met het oog op dit voor ons liggende werk. Een werk dat uitnodigt om telkens weer ter hand te nemen en te bestuderen. De rijkdom van het boek is overweldigend. Het verrijkt de klassieke meetkunde met moderne inzichten en methoden

en tegelijk geeft het de moderne meetkundige inzichten een klassieke toets. De vijftien hoofdstukken waaruit het boek bestaat hebben klinkende titels: Mamikon’s Sweeping-Tangent Theorem (1), Cycloids and Trochoids (2), Cyclogons and Trochogons (3), Circumgons and Circumsolids (4), The Method of Punctured Containers (5), Unwrapping Curves from Cylinders and Cones (6), New Descriptions of Conics via Twisted Cylinders, Focal Disks, and Directors (7), Ellipse to Hyperbola: With This String I Thee Wed (8), Trammels (9), Isoperimetric and Isoparametric Problems (10), Arclength and Tanvolutés (11), Centroids (12), New Balancing Principles with Applications (13), Sums of Squares (14), Appendix (15). Maar ondanks deze moderne en min of meer geavanceerd aandoende titels is de tekst op klassieke leest geschoeid. Het begint heel basaal met de introductie van ‘Mamikon’s Sweeping-Tangent Theorem’. Het eerste voorbeeld luidt als volgt. Beschouw een fiets waarvan het voorwiel een zekere kromme (a. een ellips; b. een hyperbool) doorloopt. Het achterwiel doorloopt dan eveneens een (zij het andere) kromme. Bepaal nu de oppervlakte van het vlakdeel dat ingesloten wordt door de beide krommen. “The reader may wish to try solving them before reading the chapter.” Vervolgens komen de auteurs aan het woord en bakenen zij het speelveld af door te bepalen geen infinitesimaalrekening, geen vergelijkingen en coördinatensystemen en dergelijke te gebruiken, maar slechts elementaire middelen toe te passen. Het idee dat voor de oplossing wordt aangereikt, is even simpel als geniaal: transleer de vector die wordt bepaald door de raakpunten van het voor- respectievelijk achterwiel met de grond naar een of ander (verder vast) punt in het vlak en doe dat met alle vectoren die al fiet-send worden verkregen. Het vlakdeel rond het genoemde vaste punt is een deel van een cirkeloppervlak waarvan de oppervlakte eenvoudig berekend kan worden. Daardoor blijven we wél steken op het niveau van meetkundige visuele intuïtie en zijn we (nog) niet aangekomen in formele abstracte bewijsvoeringen. Maar juist deze visuele dynamische benadering is van groot belang. Ook zonder veel wiskundige bagage is deze methodiek dan ook prima te begrijpen. Natuurlijk blijft het boek niet op dit elementaire niveau steken, de hoofdstuktitels zijn daarvoor een aanwijzing. Het uitgangspunt en de opzet van het boek blijven door het werk heen gelijk. Ieder hoofdstuk begint met een opgave waarbij de lezer wordt uitgenodigd een oplossing te verzinnen. Doorgaans ben je dan geneigd daarvoor differentiaalmeetkundige methoden uit de kast te halen, maar bij diverse problemen wordt het al snel knap lastig. De auteurs zien vervolgens kans om met gebruikmaking van dynamisch visuele, intuïtieve methoden de problemen van elegante oplossingen te voorzien, meestal zonder gebruik te maken van differentiaal- en integraalrekening. Het eerder genoemde ‘Sweeping Theorem’ blijkt een goede gids te zijn bij het oplossen van vele problemen. De titels van de hoofdstukken geven de grote range aan van meetkundige onderwerpen die op deze wijze behandeld worden. Zo is een boek ontstaan waaruit ieder die de meetkunde beoefent, zou moeten putten: docenten zowel in het voortgezet als in het hoger en wetenschappelijk onderwijs zullen in dit boek een meetkundige rijkdom vinden die zij op elk van de genoemde niveaus met vrucht kunnen gebruiken. Het boek kan gezien worden als een compendium van talloze in het verleden reeds verschenen artikelen van de beide auteurs, aangevuld met nieuw materiaal dat niet eerder gepubliceerd is. Apostol en de uit Armenië afkomstige astrofysicus Mnatsakanian zijn goede bekenden op het wiskundig erf, hun jarenlange samenwerking op de genoemde terreinen kan als uniek beschouwd worden. Een unieke combinatie, dat uniek werk en nu dit unieke boek heeft opgeleverd. Zorgvuldige uitleg aan de hand van veel plaatjes stimuleert de lezer. Fouten in de tekst heeft uw recensent niet kunnen ontdekken. Een uitvoerige bibliografie, een index en biografi-

sche notities sluiten het werk af. Het boek is zijn prijs meer dan waard. Niet alleen qua inhoud, maar ook qua uitvoering. Rijk geïllustreerd met talloze tekeningen in kleur, zwaar papier en een harde kaft garanderen een lange levensduur.

Wim Kleijne



Francis Buekenhout, Arjeh M. Cohen
Diagram Geometry
Related to Classical Groups and Buildings
Ergebnisse der Mathematik und ihrer Grenzgebiete
A Series of Modern Surveys in Mathematics, vol. 57

Springer Verlag, 2013
 XIII + 592 p., prijs € 116,55
 ISBN 9783642344527

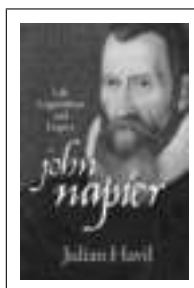
In the late nineteen fifties Jacques Tits developed the theory of buildings, which provides a geometric framework for the groups of Lie type, the main class of non-abelian finite simple groups. One aspect in the theory of buildings is the notion of a diagram. The diagram describes the geometry in a similar way as a Dynkin diagram describes a complex simple Lie algebra. In a diagram, the nodes are the types of objects, like points, lines, et cetera, and the subdiagrams tell you what the geometry looks like locally. In the theory of buildings the (sub)diagrams on two nodes all correspond to generalized polygons. Buekenhout launched the idea of extending the class of subdiagrams on two nodes in order to obtain a description of geometries for the 26 sporadic simple groups via diagrams too. This idea led to the theory of diagram geometries.

This book provides a self-contained introduction to diagram geometry and is accessible for graduate students. Each chapter ends with an extensive list of exercises, notes and references for further study. The basic notions and results of the theory of diagrams are introduced in the first three chapters. The concepts are illustrated by many examples which allow the reader to become acquainted with them. The fourth chapter is on thin geometries, which are geometries related to Coxeter groups. The following six chapters concern geometries that arise from the classical groups and the emphasis lies on the study of configurations of points and lines that can occur. To be more precise, chapters 5 and 6 are devoted to linear geometries, including geometries related to the Golay Code, and affine and projective geometries. Chapters 7 to 10 are dedicated to the study and classification of polar spaces. These geometries can be described by a single axiom, the Buekenhout–Shult axiom: for each line and each point off the line, either one or all the points of the line are collinear with the point. Following the ideas of Veldkamp, of embedding the polar space in a projective space, a complete classification of polar spaces whose projective planes are Desarguesian is obtained. The book ends with a chapter on buildings.

The book contains a wealth of information and is of interest to group theorists, graph theorists, and, of course, people interested in incidence and finite geometry. A lot of attention is given to details. In particular, a complete revision of Veldkamp's work on polar spaces, which led to many new results, is included. The book was written over a period of more than 25 years and many chapters have been available in preliminary form. Finally, they have appeared in a book which can be considered to be the bible of diagram geometries. A second book, discussing geometries related to the non-classical simple groups, authored by Cohen, will appear soon. Highly recommended.

John van Bon

Recent verschenen publicaties. Als u een van deze boeken wil bespreken of als u suggesties heeft voor andere boeken voor deze rubriek, laat dit dan per e-mail weten aan reviews@nieuwarchief.nl.



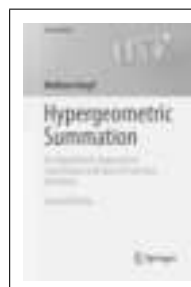
Julian Havil
John Napier
Life, Logarithms, and Legacy
 Princeton University Press, 2014
 ISBN 9780691155708
press.princeton.edu/titles/10334.html



Ionica Smeets
Het Exacte Verhaal
Wetenschapscommunicatie voor bèta's
 Uitgeverij Nieuwezijds, 2014
 ISBN 9789057123931
www.nieuwezijds.nl/Boek/9789057123931



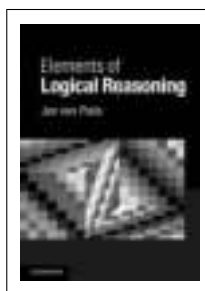
Avner Ash, Robert Gross
Elliptic Tales
Curves, Counting, and Number Theory
 Princeton University Press, 2012/2014
 ISBN 9780691163505
press.princeton.edu/titles/9665.html



Wolfram Koepf
Hypergeometric Summation
An Algorithmic Approach to Summation and Special Function Identities
 Springer, 2014 (2nd ed.)
 ISBN 9781447164630
www.springer.com/978-1-4471-6463-0



M. Vidyasagar
**Hidden Markov Processes
 Theory and Applications to Biology**
 Princeton University Press, 2014
 ISBN 9780691133157
press.princeton.edu/titles/10286.html



Jan von Plato
Elements of Logical Reasoning
 Cambridge University Press, 2014
 ISBN 9781107610774
www.cambridge.org/9781107610774



Peter Deufhard et al. (eds.)
**MATHEON – Mathematics for Key
 Technologies**
 European Math. Soc., 2014
 ISBN 9783037191378
www.ems-ph.org/books/book.php?proj_nr=177



Ian Hacking
**Why Is There Philosophy of Mathe-
 matics At All?**
 Cambridge University Press, 2014
 ISBN 9781107658158
www.cambridge.org/9781107658158



Eduardo Casas-Alvero
Analytic Projective Geometry
 European Math. Soc., 2014
 ISBN 9783037191385
www.ems-ph.org/books/book.php?proj_nr=176



Philip N. Klein
A Cryptography Primer
 Cambridge University Press, 2014
 ISBN 9781107603455
www.cambridge.org/9781107603455



Fabrice Baudoin
**Diffusion Processes and Stochastic
 Calculus**
 European Math. Soc., 2014
 ISBN 9783037191330
www.ems-ph.org/books/book.php?proj_nr=181



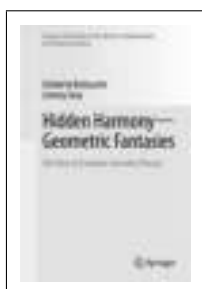
Peter Borwein et al. (eds.)
Mathematicians on Creativity
 Mathematical Association of America, 2014
 ISBN 9780883855744
www.maa.org/publications/books/mathematicians-on-creativity



Kim Williams, Michael Ostwald (eds.)
**Architecture and Mathematics from
 Antiquity to the Future**
**Volume I: Antiquity to the 1500s,
 Volume II: The 1500s to the Future**
 Birkhäuser, 2014
 ISBN 9783319001364 , ISBN 9783319001425
www.springer.com/978-3-319-05541-1



Andrew Sterrett (ed.)
**101 Careers in Mathematics (3rd edi-
 tion)**
 Mathematical Association of America, 2014
 ISBN 9781614441168
www.maa.org/publications/books/101-careers-in-mathematics



Umberto Bottazzini, Jeremy Gray
**Hidden Harmony – Geometric Fan-
 tasies**
 Springer, 2013
 ISBN 9781461457244
www.springer.com/978-1-4614-5724-4



Brian P. Katz, Michael Starbird
**Distilling Ideas: An Introduc-
 tion to Mathematical Thinking**
 Mathematical Association of America, 2013
 ISBN 9781939512031
www.maa.org/publications/books/distilling-ideas-an-introduction-to-mathematical-thinking

Problemen

Problem Section

This Problem Section is open to everyone; everybody is encouraged to send in solutions and propose problems. Group contributions are welcome.

For each problem, the most elegant correct solution will be rewarded with a book token worth €20. At times there will be a Star Problem, to which the proposer does not know any solution. For the first correct solution sent in within one year there is a prize of €100.

When proposing a problem, please either include a complete solution or indicate that it is intended as a Star Problem. Electronic submissions of problems and solutions are preferred (problems@nieuwarchief.nl).

The deadline for solutions to the problems in this edition is 1 March 2015.

Problem A (proposed by Jan Turk)

Let $k > 3$ be an integer. Determine the variance of the greatest common divisor of k positive integers. Here we mean the limit, as $n \rightarrow \infty$, of the variance of the greatest common divisor of k integers in $\{1, 2, \dots, n\}$ with respect to the uniform distribution on $\{1, \dots, n\}^k$.

Problem B (folklore)

The evil Eve has locked Alice and Bob in a room without windows. Outside the room, there is a corridor with 64 doors. Eve puts a key behind one of the doors and a crocodile behind each of the others. Then she hangs up a light bulb above each of the doors, and for each light bulb, switches it on or off. Then Eve brings Alice into the corridor, tells her which door hides the key and tells her to choose one of the light bulbs and change the state of that chosen light bulb. After Alice leaves, Eve brings Bob to the corridor, and tells him to open a door of his own choice. Alice and Bob are allowed to discuss a strategy before Alice is shown where the key is, but not after.

- Give a strategy that guarantees Bob to find the key.
- For which positive integers n does such a strategy exist if there are n doors?

Problem C (folklore)

Let X_3 be the collection of three-element subsets of $\{1, 2, \dots, 8\}$, and let X_4 be the collection of four-element subsets of $\{1, 2, \dots, 11\}$. Does there exist an injective map $\phi: X_3 \rightarrow X_4$ with the following properties?

- For all subsets $V \subseteq X_3$, we have $\#(\bigcap_{v \in V} \phi(v)) \geq \#(\bigcap_{v \in V} v)$.
- For all $v, v' \in X_3$, if $v \cap v' = \emptyset$, then $\phi(v) \cap \phi(v') = \emptyset$.

Edition 2014-2 We received solutions from Rik Bos (Bunschoten), Pieter de Groen (Brussels), Alex Heinis (Amsterdam), Nicky Hekster (Amstelveen), Carlo Pagano (Leiden) and Rob van der Waall (Huizen).

Problem 2014-2/A (proposed by Wouter Zomervrucht)

Let n be a positive integer. Let M be an $n \times n$ -matrix with entries in $\{1, 2, \dots, n\}$. Let r be the complex eigenvalue with the largest absolute value. Show that $n \leq |r| \leq n^2$.

Solution We received correct solutions from Rik Bos, Pieter de Groen, Alex Heinis, Carlo Pagano and Rob van der Waall. The book token is awarded to Rob van der Waall.

Let $\|\cdot\|$ be the Frobenius matrix norm (i.e. for $M = (m_{ij})_{i,j=1}^n$, we have $\|M\|^2 = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n |m_{ij}|^2$). Gelfand's formula states

$$|r| = r = \lim_{k \rightarrow \infty} \|M^k\|^{1/k}.$$

Let N be another matrix as in the problem, with largest eigenvalue s . Suppose $M \leq N$,

Redactie:

Gabriele Dalla Torre

Christophe Debry

Jinbi Jin

Marco Streng

Wouter Zomervrucht

Problemenrubriek NAW

Mathematisch Instituut

Universiteit Leiden

Postbus 9512

2300 RA Leiden

problems@nieuwarchief.nl

www.nieuwarchief.nl/problems

i.e. inequality on all entries, then also $M^k \leq N^k$, so $\|M^k\| \leq \|N^k\|$, and $r \leq s$. Let M_0 be the $n \times n$ -matrix with all entries equal to 1. It has eigenvalues 0 and n . Note that nM_0 has eigenvalues 0 and n^2 . We have $M_0 \leq M \leq nM_0$, hence $n \leq r \leq n^2$ as desired.

Problem 2014-2/B (proposed by Hans Zwart)

Let X be a unital $\mathbb{R}$ -algebra with multiplicative unit 1, and let $\|\cdot\|$ be a *submultiplicative norm* on X , i.e. a map $\|\cdot\|: X \rightarrow \mathbb{R}$ satisfying the following properties:

- $\|1\| = 1$;
- if $x \in X$ satisfies $\|x\| = 0$, then $x = 0$;
- for all $a \in \mathbb{R}, x \in X$, we have $\|ax\| = |a| \|x\|$;
- for all $x, y \in X$, we have $\|x + y\| \leq \|x\| + \|y\|$ and $\|xy\| \leq \|x\| \|y\|$.

Let $C: \mathbb{R} \rightarrow X$ be a map such that $C(0) = 1$ and such that for all $s, t \in \mathbb{R}$, we have

$$2C(s)C(t) = C(s+t) + C(s-t).$$

Suppose that

$$\sup_{s \in \mathbb{R}} \|C(s) - 1\| < \frac{3}{2}.$$

Show that $C = 1$.

Solution We received no correct solutions. The following solution is based on that of the proposer, Hans Zwart.

Let $t \in \mathbb{R}$. Then we have

$$C(2t) - 1 = 2C(t)^2 - C(0) - 1 = 2C(t)^2 - 2 = 2(C(t) - 1)^2 + 4(C(t) - 1).$$

Hence for all $t \in \mathbb{R}$, we have $4(C(t) - 1) = (C(2t) - 1) - 2(C(t) - 1)^2$, so if $\rho = \sup_{s \in \mathbb{R}} \|C(s) - 1\|$, then for all $t \in \mathbb{R}$, we have

$$\begin{aligned} 4\|C(t) - 1\| &= \|(C(2t) - 1) - 2(C(t) - 1)^2\| \\ &\leq \|C(2t) - 1\| + 2\|C(t) - 1\|^2 \\ &\leq \rho + 2\rho^2, \end{aligned}$$

hence $4\rho \leq \rho + 2\rho^2$, or equivalently, $\rho(2\rho - 3) \geq 0$. As we assumed that $\rho < \frac{3}{2}$, it follows that $\rho = 0$, hence $C(t) = 1$ for all $t \in \mathbb{R}$, as desired.

Problem 2014/2-C (proposed by Hendrik Lenstra)

Let G be a finite group. Let n be the number of automorphisms σ of G such that for all $x \in G$, the element $\sigma(x)$ is conjugate to x . Show that every prime divisor of n divides the order of G .

Solution We received solutions from Rik Bos, Alex Heinis, Nicky Hekster, Carlo Pagano and Rob van der Waall. All their solutions were along the same lines, which we reproduce here. The book token goes to Alex Heinis.

Let A be the set of $\sigma \in \text{Aut}(G)$ such that for all $x \in G$, the element $\sigma(x)$ is conjugate to x , so $n = \#A$. Let p be a prime divisor of n . Note that A is a subgroup of $\text{Aut}(G)$, hence by Cauchy's theorem has an element σ of order p . This element σ acts on each conjugacy class of G , and the orbits have length 1 or p .

Let $H = \{x \in G : \sigma(x) = x\}$ be the union of the orbits of length 1, which is a proper subgroup of G .

Lemma. Let $H \subset G$ be a subgroup with $H \neq G$. Then the union of the conjugates of H is not G .

Oplossingen

Solutions

Proof. The group H has at most $[G : H]$ conjugates, because gHg^{-1} depends only on $gH \in G/H$. These conjugates all have $\#H$ elements and have the element 1 in common, hence the union of the conjugates has fewer than $[G : H] \cdot \#H = \#G$ elements. $\square$

By the lemma, we see that there is an element of $x \in G$ that is not conjugate to any element of H . Its conjugacy class C is a union of orbits for $\langle \sigma \rangle$, which all have length p as C is disjoint with H , so $\#C$ is divisible by p .

By the orbit-stabilizer theorem, the order of G is divisible by the length of the conjugation orbit C of x . $\square$

